

Resumo de Series Temporais para P1

Daniel dos Santos

Gabriel Mizuno

Lyncoln Souza

6 de outubro de 2019

1 Introdução

Séries Temporais $Z_t = \mu(t) + \varepsilon_t$

Onde ε_t é chamado de Ruído branco $\varepsilon_t \sim RB(0, \sigma^2)$

2 Modelo Constante

$$\mu(t) = a_1 \text{ (constante)}$$

Equação do modelo: $Z_t = a_1 + \varepsilon_t$

Equação de previsão: $\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = E[Z_{t+h}|Z_t] = E[a_1 + \varepsilon_{t+h}|Z_t] = \hat{a}_1(t)$

2.1 Método NAIVE

(i) Estimação de $a_1(t)$: $\hat{a}_1(t) = Z_t$

2.2 Método Médias Móveis ($MM(N)$)

Hiperparâmetro:

- N : Quantidade de termos para a média

Equação de atualização:

(i) Estimação de a_1 : $\hat{a}_1(t) = M(t) = \frac{Z_t + Z_{t-1} + \dots + Z_{t-N+1}}{N}$

2.3 Método do Amortecimento Exponencial

Hiperparâmetro:

- α : Constante de amortecimento

Equação de atualização:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1(t) &= \alpha Z_t + (1 - \alpha)\hat{a}_1(t-1) \\ &= \alpha Z_t + (1 - \alpha)\alpha Z_{T-1} + \dots + (1 - \alpha)^{T-1}\alpha Z_1 + (1 - \alpha)^T\alpha Z_0 \\ &= \alpha Z_t + (1 - \alpha)\alpha Z_{T-1} + \dots + (1 - \alpha)^{T-1}\alpha Z_1 + (1 - \alpha)^T\alpha Z_1 = \sum_{i=1}^T (1 - \alpha)^{T-i}\alpha Z_i + (1 - \alpha)^{T-1}\alpha Z_1\end{aligned}$$

3 Modelos Lineares

$$\begin{aligned}Z_t &= \mu(t) + \varepsilon_t \\ \mu(t) &= a_1 + a_2 t \\ Z_t &= a_1 + a_2 t + \varepsilon_t\end{aligned}$$

Onde: a_1 é Nível e a_2 é Tendência.

3.1 Método de Holt

Hiperparâmetros

- α : Constante de amortecimento de Nível;
- β : Constante de amortecimento de Tendência

Equação de atualização:

- (i) Estimação de a_1 : $\hat{a}_1(t) = \alpha Z_t + (1 - \alpha) [\hat{a}_1(t - 1) + \hat{a}_2(t - 1)]$
- (ii) Estimação de a_2 : $\hat{a}_2(t) = \beta [\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t - 1)] + (1 - \beta) \hat{a}_2(t - 1)$

Inicialização dos parâmetros: $\hat{a}_1(0) = Z_1$ e $\hat{a}_2(0) = Z_2 - Z_1$

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \hat{a}_1(t) + \hat{a}_2(t)h$$

3.2 Método de Holt dumped trend

Hiperparâmetros:

- α : Constante de amortecimento de Nível;
- β : Constante de amortecimento de Tendência;
- ϕ : Constante de amortecimento de Crescimento;

Equação de atualização:

- (i) Estimação de a_1 : $\hat{a}_1(t) = \alpha Z_t + (1 - \alpha) [\hat{a}_1(t - 1) + \phi \hat{a}_2(t - 1)]$
- (ii) Estimação de a_2 : $\hat{a}_2(t) = \beta [\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t - 1)] + (1 - \beta) \phi \hat{a}_2(t - 1)$

Inicialização dos parâmetros: $\hat{a}_1(0) = Z_1$ e $\hat{a}_2(0) = Z_2 - Z_1$

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \hat{a}_1(t) + \hat{a}_2(t) \sum_{i=1}^h \phi^i$$

4 Modelos não lineares

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu(t) + \varepsilon_t \\ \mu(t) &= a_1 a_2^t \\ Z_t &= a_1 a_2^t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Onde: a_1 é Nível e a_2 é Tendência.

4.1 Método de Pegel

Hiperparâmetros

- α : Constante de amortecimento de Nível;
- β : Constante de amortecimento de Tendência

Equação de atualização:

- (i) Estimação de a_1 : $\hat{a}_1(t) = \alpha Z_t + (1 - \alpha) [\hat{a}_1(t - 1) \hat{a}_2(t - 1)]$
- (ii) Estimação de a_2 : $\hat{a}_2(t) = \beta \left[\frac{\hat{a}_1(t)}{\hat{a}_1(t - 1)} \right] + (1 - \beta) \hat{a}_2(t - 1)$

Inicialização dos parâmetros: $\hat{a}_1(0) = Z_1$ e $\hat{a}_2(0) = Z_2 - Z_1$ (Fonte: Fernanda Fernandes)

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \hat{a}_1(t) \hat{a}_2(t)^h$$

4.2 Método de Pegel com Dumped Trend

Hiperparâmetros

- α : Constante de amortecimento de Nível;
- β : Constante de amortecimento de Tendência;
- ϕ : Constante de amortecimento de Crescimento;

Equação de atualização:

(i) Estimação de a_1 : $\hat{a}_1(t) = \alpha Z_t + (1 - \alpha)[\hat{a}_1(t-1)\hat{a}_2(t-1)^\phi]$

(ii) Estimação de a_2 : $\hat{a}_2(t) = \beta \left[\frac{\hat{a}_1(t)}{\hat{a}_1(t-1)} \right] + (1 - \beta)\hat{a}_2(t-1)^\phi$

Inicialização dos parâmetros: $\hat{a}_1(0) = Z_1$ e $\hat{a}_2(0) = Z_2 - Z_1$ (Fonte: Fernanda Fernandes)

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \hat{a}_1(t)\hat{a}_2(t)^{\sum_{i=1}^h \phi^i}$$

5 Modelos com sazonalidade

5.1 Modelo constante

Hiperparâmetros

- α : Constante de amortecimento de Nível;
- γ : Constante de amortecimento dos Fatores Sazonais;

Modelo Aditivo

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu(t) + \rho(t) + \varepsilon_t \\ \mu(t) &= a_1 \\ Z_t &= a_1 + \rho(t) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Onde: $a_1(t)$ é Nível e ρ Fator Sazonal

Modelo Multiplicativo

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu(t)\rho(t) + \varepsilon_t \\ \mu(t) &= a_1 \\ Z_t &= a_1\rho(t) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Onde: a_1 é Nível e ρ Fator Sazonal

5.1.1 Método de Amortecimento Exponencial

Equação de atualização para modelo aditivo:

(i) Estimação de a_1 : $\hat{a}_1(t) = \alpha(Z_t - \hat{\rho}_{m(t)}(t-1)) + (1 - \alpha)\hat{a}_1(t-1)$

(ii) Estimação de ρ : $\hat{\rho}_{m(t)}(t) = \gamma(Z_t - \hat{a}_1(t)) + (1 - \gamma)\hat{\rho}_{m(t)}(t-1)$

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \hat{a}_1(t) + \hat{\rho}_{m(t)}(t)$$

Equação de atualização para modelo multiplicativo:

- (i) **Estimação de a_1 :** $\hat{a}_1(t) = \alpha \left(\frac{Z_t}{\hat{\rho}_{m(t)}(t-1)} \right) + (1 - \alpha)\hat{a}_1(t-1)$
- (ii) **Estimação de ρ :** $\hat{\rho}_{m(t)}(t) = \gamma \left(\frac{Z_t}{\hat{a}_1(t)} \right) + (1 - \gamma)\hat{\rho}_{m(t)}(t-1)$

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \hat{a}_1(t)\hat{\rho}_{m(t)}(t)$$

5.2 Modelo de Tendência Linear

Hiperparâmetros

- α : Constante de amortecimento de Nível;
- β : Constante de amortecimento de Tendência;
- γ : Constante de amortecimento dos Fatores Sazonais;

Modelo Aditivo

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu(t) + \rho(t) + \varepsilon_t \\ \mu(t) &= a_1 + a_2 t \\ Z_t &= a_1 + a_2 t + \rho(t) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Onde: a_1 é Nível e ρ Fator Sazonal

Modelo Multiplicativo

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu(t) + \rho(t) + \varepsilon_t \\ \mu(t) &= a_1 + a_2 t \\ Z_t &= (a_1 + a_2 t) \rho(t) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

Onde: a_1 é Nível e ρ Fator Sazonal

5.2.1 Método Amortecimento Exponencial de Holt-Winters

Equação de atualização para Modelo Aditivo:

- (i) **Estimação de a_1 :** $\hat{a}_1(t) = \alpha [Z_t - \hat{\rho}_{m(t)}(t-1)] + (1 - \alpha) [\hat{a}_1(t-1) + \hat{a}_2(t-1)]$
- (ii) **Estimação de a_2 :** $\hat{a}_2(t) = \beta [\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t-1)] + (1 - \beta)\hat{a}_2(t-1)$
- (iii) **Estimação de ρ :** $\hat{\rho}_{m(t)}(t) = \gamma [Z_t - \hat{a}_1(t)] + (1 - \gamma)\hat{\rho}_{m(t)}(t-1)$

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \hat{a}_1(t) + \hat{a}_2(t)h + \hat{\rho}_{m(t)}(t)$$

Equação de atualização para Modelo Multiplicativo:

- (i) **Estimação de a_1 :** $\hat{a}_1(t) = \alpha \left[\frac{Z_t}{\hat{\rho}_{m(t)}(t-1)} \right] + (1 - \alpha) [\hat{a}_1(t-1) + \hat{a}_2(t-1)]$
- (ii) **Estimação de a_2 :** $\hat{a}_2(t) = \beta [\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t-1)] + (1 - \beta)\hat{a}_2(t-1)$
- (iii) **Estimação de ρ :** $\hat{\rho}_{m(t)}(t) = \gamma \left[\frac{Z_t}{\hat{a}_1(t)} \right] + (1 - \gamma)\hat{\rho}_{m(t)}(t-1)$

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = [\hat{a}_1(t) + \hat{a}_2(t)h] \hat{\rho}_{m(t)}(t)$$

5.2.2 Modelo de Amortecimento Exponencial de Holt-Winters com Douped Trend

Hiperparâmetros

- α : Constante de amortecimento de Nível;
- β : Constante de amortecimento de Tendência;
- γ : Constante de amortecimento dos Fatores Sazonais;
- ϕ : Constante de amortecimento de Crescimento;

Equação de atualização:

(i) **Estimação de a_1 :** $\hat{a}_1(t) = \alpha \left[\frac{Z_t}{\hat{\rho}_{m(t)}(t-1)} \right] + (1 - \alpha) [\hat{a}_1(t-1) + \phi \hat{a}_2(t-1)]$

(ii) **Estimação de a_2 :** $\hat{a}_2(t) = \beta [\hat{a}_1(t) - \hat{a}_1(t-1)] + (1 - \beta) \phi \hat{a}_2(t-1)$

(iii) **Estimação de ρ :** $\hat{\rho}_{m(t)}(t) = \gamma \left[\frac{Z_t}{\hat{a}_1(t)} \right] + (1 - \gamma) \hat{\rho}_{m(t)}(t-1)$

Equação de previsão:

$$\hat{Z}_{t+h} = \hat{Z}_t(h) = \left[\hat{a}_1(t) + \hat{a}_2(t) \sum_{i=1}^h \phi^i \right] \hat{\rho}_{m(t)}(t)$$