

**Universidade Federal Fluminense (UFF)**  
**Instituto de Matemática e Estatística (IME)**  
**Departamento de Estatística (GET)**

**Disciplina:** Modelos Lineares I

**Professor:** José Rodrigo de Moraes

**1ª Lista de Exercícios – Data:** 23/08/2019 (6ª feira)

**Assunto:** Modelo de RLS: estimativas de MQ e propriedades dos resíduos

**1ª Questão:** Considerando um modelo de regressão linear simples (RLS) da forma:  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; demonstre as seguintes propriedades:

a)  $\sum_{i=1}^n e_i = 0$

b)  $\sum_{i=1}^n X_i e_i = 0$

c)  $\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i e_i = 0$

d)  $\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i$

e)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$

f)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = 0$

g) Os estimadores de máxima verossimilhança (MV) para os parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  sob a hipótese de normalidade dos erros aleatórios coincidem com os estimadores dos respectivos parâmetros obtidos pelo método de mínimos quadrados (MQ). Qual a sua conclusão?

**2ª Questão:** Um estudo deseja avaliar o efeito de determinado treinamento no tempo de reação de atletas submetidos a um certo estímulo. O treinamento consiste na repetição de um movimento e foi utilizada uma amostra de 37 atletas. Para cada atleta um determinado número de repetições foi atribuído (X) e, então, foi medido o tempo de reação (Y) em milissegundos. Um modelo de RLS foi ajustado aos dados, sendo representado pela equação a seguir:

$$\hat{Y}_i = 80,5 - 0,90 X_i; \quad i = 1, 2, \dots, 37$$

Interprete as estimativas dos parâmetros do modelo no contexto do problema.

**3ª Questão:** Os dados do banco abaixo representam as medidas em milímetros (mm) de ossos do braço (úmero) e da perna (fêmur) de fósseis.

Fóssil	Braço (úmero) - X	Perna (fêmur) - Y
1	312	430
2	335	458
3	286	407
4	312	440
5	305	422

a) Construa o gráfico de dispersão entre X e Y, e analise-o no contexto do problema.

b) Obtenha as estimativas de MQ dos parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  do modelo, e escreva a equação do modelo ajustado. Interprete as estimativas (contexto).

**4ª Questão:** Uma reação química é executada n vezes, e a temperatura (X), em °C, e a produção (Y), em percentagem de um valor máximo teórico, são registradas para cada execução. As seguintes medidas estatísticas são registradas:

$$\bar{X} = 65 \quad \bar{Y} = 29,05 \quad \sum_{i=1}^{12} (X_i - \bar{X})^2 = 6.032 \quad \sum_{i=1}^{12} (Y_i - \bar{Y})^2 = 835,42$$

$$\sum_{i=1}^{12} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 1.988,4$$

a) Calcule as estimativas de mínimos quadrados (MQ) dos parâmetros  $\beta_0$  e  $\beta_1$  do modelo, e escreva a equação do modelo ajustado.

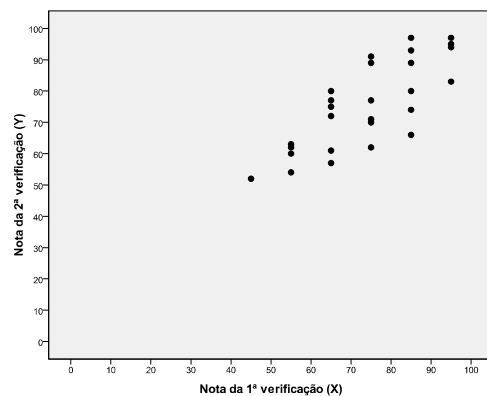
b) Interprete as estimativas obtidas no contexto do problema.

c) Represente o modelo ajustado no gráfico de dispersão.

**5ª Questão:** Com o objetivo de investigar a relação entre as notas de estatística descritiva (numa escala de 0 a 100), o professor registrou no início do semestre as notas da 1ª verificação dos seus 27 alunos. No fim do semestre anotou as notas da 2ª verificação como pode ser visto na tabela abaixo:

1ª Nota	45	55	55	55	55	65	65	65	65	65	65	65	75	75	75	75	75	85	85	85	85	85	85	95	95	95	95
2ª Nota	52	54	63	60	62	57	72	77	80	61	75	62	77	91	71	89	70	89	93	97	74	80	66	94	97	83	95

**Figura 1:** Gráfico de dispersão entre as notas da 1ª e 2ª verificação de Estatística.



- Faça a análise gráfica da figura 1, no contexto do problema.
- Com base na figura 1, qual seria o sinal do coeficiente angular da reta? Justifique a sua resposta.
- E quanto ao grau da relação entre X e Y, o que você tem a dizer? Justifique a sua resposta. **OBS:** Não precisa fazer cálculos para a 5ª Questão.

**6ª Questão:** Considere a seguinte afirmação: “Pessoas que usam adoçante artificial tendem a ser mais pesados do que aquelas que utilizam açúcar”. Isto significa que os adoçantes artificiais podem causar aumento de peso? Pense sobre tal afirmação e nas variáveis envolvidas nesta relação, e forneça uma explicação plausível sobre tal relação.

**7ª Questão:** Seja Y a despesa de viagem (em reais) e X a duração da viagem (em dias) para uma amostra de tamanho 102 pessoas. Com base nos dados fornecidos abaixo, pede-se:

$$\sum_{i=1}^n X_i = 510 \quad \sum_{i=1}^n Y_i = 7.140 \quad \sum_{i=1}^n X_i^2 = 4.150 \quad \sum_{i=1}^n Y_i^2 = 740.200 \quad \sum_{i=1}^n X_i Y_i = 54.900$$

- Determine a despesa média de viagem e a duração média da viagem.
- Ajuste um modelo de RLS para representar a relação existente entre X e Y, e interprete as estimativas dos parâmetros do modelo.
- Calcule o coeficiente de correlação linear de Pearson entre X e Y, e interprete-o.

**8ª Questão:** Para cada par de variáveis quantitativas abaixo, diga se você esperaria ou não uma dependência linear entre elas, inclusive informe o sinal esperado da estimativa do parâmetro  $\hat{\beta}_1$  do modelo de RLS.

- Altura (m) e peso corporal (kg);
- Renda mensal (R\$) e gasto mensal com alimentação (R\$);
- Acuidade visual e idade (anos);
- Perímetro braquial (mm) e IMC (Kg/m<sup>2</sup>);
- Anos de estudo e salário mensal (R\$);
- Gasto de energia (Kcal) e peso corporal (Kg);
- Ingestão de energia (Kcal) e peso corporal (Kg);
- Duração da construção (meses) e número de pedreiros na construção;
- Tamanho do pé e número de refrigerantes comprados por mês;
- Tempo de estudo (em horas) e quantidade de erros (%);
- Anos de estudo e duração do AME (meses).

**9ª Questão:** Na tabela a seguir são fornecidas informações sobre o número de médicos pós-graduados (X) e a taxa de mortalidade por tuberculose (Y) (por 1.000.000 habitantes) para o período de 1959 a 1969.

- Construa o diagrama de dispersão entre X e Y.
- Ajuste um modelo de RLS para representar a relação existente entre X e Y, e interprete as estimativas dos parâmetros do modelo.
- Calcule o coeficiente de correlação linear de Pearson entre X e Y.

d) Explique de forma resumida por que esta relação não é um achado cientificamente importante.

Ano	Nº de pós-graduados	Taxa de mortalidade
1959	277	83
1960	318	74
1961	382	71
1962	441	65
1963	486	62
1964	597	52
1965	750	47
1966	738	48
1967	849	42
1968	932	43
1969	976	38

### Respostas da 1ª Lista de Exercícios:

#### “Modelos Lineares I”

#### 1ª Questão:

Consultar notas de Aula do Prof. Dr. José Rodrigo, e/ou referências indicadas pelo professor.

#### 2ª Questão:

Consultar notas de Aula do Prof. Dr. José Rodrigo, e/ou referências indicadas pelo professor.

#### 3ª Questão:

a) Existe uma relação linear positiva (ou crescente) entre X e Y, ou seja, ...

$$b) \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = 101,805 + 1,063 X_i; \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

#### 4ª Questão:

$$a) \hat{\beta}_0 = 7,6233 \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_1 = 0,32964 \quad ;$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = 7,6233 + 0,32964 X_i; \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

b e c) *Por conta do aluno !!!*

#### 5ª Questão:

a) Existe uma relação linear positiva entre as notas da 1ª e 2ª verificação de estatística, isto é, ...

b e c) *Por conta do aluno !!!*

6ª Questão: Não, pois ...

#### 7ª Questão:

$$a) \bar{X} = 5 \quad \text{e} \quad \bar{Y} = 70$$

$$b) \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = 10 + 12 X_i; \quad i = 1, 2, \dots, 102$$

c)  $R = 0,98 \rightarrow$  existe uma correlação linear positiva e forte. *O que isso significa no contexto do problema?*

**8ª Questão:**

- a) Sim,  $\hat{\beta}_1 > 0$
- b) Sim,  $\hat{\beta}_1 > 0$
- c) Sim,  $\hat{\beta}_1 < 0$
- d) Sim,  $\hat{\beta}_1 > 0$
- e) Sim,  $\hat{\beta}_1 > 0$
- f) Sim,  $\hat{\beta}_1 < 0$
- g) Sim,  $\hat{\beta}_1 > 0$
- h) Sim,  $\hat{\beta}_1 < 0$
- i) Não,  $\hat{\beta}_1 = 0$  (ausência de relação)
- j) Sim,  $\hat{\beta}_1 < 0$
- k) Sim,  $\hat{\beta}_1 > 0$

**9ª Questão:**

- a) OBS: Coloque o número de médicos pós-graduados no eixo das abscissas (eixo X) e a taxa de mortalidade por tuberculose no eixo das ordenadas (eixo Y).
- b)  $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = 92,572 - 0,058 X_i; \quad i = 1, 2, \dots, 11$
- c)  $R = -0,973$ . Avalie o sentido e a força da relação linear entre X e Y.
- d) A relação é espúria !!!