Álgebra Linear

Álgebra Linear I

1.1 Propriedades de matrizes

Definicao 1: Seja $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ dizemos que o traço de uma matriz $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ é:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposicao 1: Seja $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, temos que:

i $\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B})$

ii $\operatorname{tr}(c\mathbf{A}) = c\operatorname{tr}(\mathbf{A})$

iii $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$

iv $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$

Definicao 2: Seja $\mathbf{A} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ dizemos que a transposta de uma matriz $(\mathbf{A})^T$ ou $(\mathbf{A})^{'}$ é:

$$\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}$$

Ou seja, bastar trocar linha com coluna

Proposicao 2: Seja $\mathbf{A} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, temos que:

i $\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$

ii $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$

iii $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

iv $(c\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = c\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Definicao 3: Seja $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ dizemos que a inversa de uma matriz $\mathbf{A}$ é:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$$

Proposicao 3: Seja $\mathbf{A} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ invertível, temos que:

i $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$

ii $\mathbf{A}^{-1}$ é única.

iii $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

iv $(c\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$

1.2 Linearmente Independente, Span e Base

Definicao 4: Seja V um espaço vetorial. Dizemos que v é uma Combinação Linear(CL) dos vetores $u_1, u_2 \cdots u_n$ se v for escrito da forma

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

Sendo $a_1, a_2 \cdots, a_n$ escalares.

Definicao 5: Seja $S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ um subconjunto de vetores de um espaço vetorial V. O subespaço vetorial gerado pelos vetores de S é o conjunto de todas as combinações lineares, ou seja,

$$Span\{S\} = Ger(S) = \{v \in V : v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n\}$$

Definicao 6: Dizemos que os vetores $u_1, u_2 \cdots u_n$ são Linearmente Independentes(LI) se;

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Caso contrario, eles são Linearmente Dependentes(LD).

Teorema 7: Seja $S = \{u_1, \cdots, u_r\}$ um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$ então S é LD.

Definicao 8: Seja $S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ um conjunto de vetores não vazio em V será chamado de base do espaço vetorial V se:

i Os vetores de S forem LI

ii Os vetores de S gerarem V

Teorema 9: Qualquer base de um espaço vetorial de dimensão finita possui um mesmo número de vetores.

Teorema 10 (Unicidade): Se $S = \{u_1, \cdots, u_n\}$ for uma base de um espaço S, então cada vetor em V pode ser expresso na forma

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

de exatamente um única forma

Definicao 11: Se $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V e se $v = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$ é a expressão de um vetor v em termo da base S. Então os escalares $c_1, \cdots, c_n$ são denominados Coordenadas de v em relação à base S. O vetor $(c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ construído com essas coordenadas é denominado vetor de coordenadas de v em relação a S e é denotada por; $[v]_S = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

Teorema 12 (Teorema do Mais/Menos): Seja S um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V

(i) Se S for um conjunto LI e v for um vetor em V que esta fora de $\text{Ger}(S)$, então $S \cup \{v\}$ é LI

(ii) Se v for um vetor em S que pode ser expresso com combinação linear dos outros vetores de S. Então $\text{Ger}(S) = \text{Ger}(S - \{v\})$

1.3 Dimensão

Definicao 13: A Dimensão de um espaço vetorial de dimensão finita V é o número de vetores de qualquer uma de suas bases

Exemplos:

- $\text{Dim}(\mathbb{R}^n) = n$
- $\text{Dim}(\mathbb{P}_n) = n + 1$
- $\text{Dim}(\mathbb{M}_{m,n}) = m * n;$
- $\text{Dim}(\{0\}) = 0$

OBS: Esse último representa o espaço trivial, pense que são necessário 0 vetores para formar esse espaço

Proposicao 4: Seja W um subespaço de um espaço vetorial U de dimensão finita, com Dim$(U) = n$ e Dim$(V) = r$. Se $\{w_1, \cdots, w_r\}$ for uma base de W, poderemos escolher n-r vetores de U, para que $\{w_1, \cdots, w_r, w_{r+1}, \cdots, w_n, \}$

Proposicao 5: Seja W_1 e W_2 dois subespaço de um espaço vetorial de dimensão finita. Então

$$\text{Dim}(W_1 + W_2) = \text{Dim}(W_1) + \text{Dim}(W_2) - \text{Dim}(W_1 \cap W_2)$$

Teorema 14: Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e S um conjunto de V com exatamente n vetores. Então S é uma base de V se e somente se S gera V ou S é LI

Teorema 15: Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{v_1 \cdots v_n\}$ uma base qualquer de V. Então, um conjunto com menos de n vetores não gera V.

1.4 Mudança de Base

Definicao 16: Seja V um subespaço vetorial de dimensão n. Sejam $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $B_1 = \{v_1, \cdots, v_n\}$ bases de V. Podemos escrever;

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ u_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ &\vdots \\ u_n &= a_{1,n}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{n,n}v_n \end{aligned} \Longrightarrow P_{B\to B_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [u_1]_{B_1} & [u_2]_{B_1} & \cdots & [u_n]_{B_1} \end{bmatrix}$$

Temos que $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e B_1 duas bases de um espaço V. Se quisermos escrever achar as coordenadas em relação a base B de um vetor $u \in V$, basta escrevermos v como combinação linear dos vetores da base B. Já para achar a matriz de transição de B para B_1, basta repetir o mesmo processo só que ao invés de ser um vetor u faça isso para todos os vetores de B_1.
Notação: A matriz de transição de B para B_1 é $P_{B\to B_1}$ ou $[P]_{B_1}^{B}$

Teorema 17: Se P for a matriz de transição de uma base B_1 para B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então P é invertível e P^{-1} é a matriz de transição de B para B_1

Teorema 18: Sejam $B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\}$ uma base qualquer do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e S a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Se os vetores dessas bases forem escritos em forma de colunas. Então:

$$P_{B_1\to S} = \begin{bmatrix} u_1 \mid & u_2 \mid & \cdots & \mid u_n \end{bmatrix}$$

Onde u_i é o vetor coluna.

1.5 Transformação Linear

Definicao 19: Se $T : V \longrightarrow W$ for uma função de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, então T é denominada Transformação Linear de V em W se as duas propriedades seguintes forem validas com quaisquer vetores u e v e qualquer escalar k:

(i) $T(kv) = kT(v)$

(ii) $T(u + v) = T(v) + T(u)$

OBS: No caso em que $V = W$, a Transformação Linear é chamada de Operador Linear
OBS: Seja $I : V \longrightarrow V$ uma transformação linear tal que $I(u) = u$ essa transformação é chamada de Transformação Identidade
OBS: Poderíamos trocar as condições i e ii por uma única só

$$u, c \in V \text{ e } k \in \mathbb{R} \text{ ,então } T(u + kv) = T(u) + T(v)$$

Proposicao 6: Se $T : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear. Então;

(i) $T(0) = 0$

(ii) $T(u - v) = T(u) - T(v)$

Note que essa proposição é um caso particular da Definição 19 onde $k = 0$ e $v = -v$

Teorema 20: Se $T : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear, V um espaço vetorial de dimensão finita e $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V a imagem de qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito da forma;

$$T(v) = c_1T(v_1) + \cdot + c_nT(v_n)$$

Definicao 21: Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear.

(i) O Núcleo de T é o subconjunto de V definido por:

$$\text{Nuc}\,(T) = \text{Ker}\,(T) = \{v \in V : T\,(v) = 0\}$$

(ii) A Imagem de T é o subconjunto de W definido por:

$$\text{Im}\,(T) = \{w \in W : T\,(v) = w \text{ ,para algum v} \in V\}$$

Proposicao 7: $\text{Ker}\,(\text{T})$ é um subespaço de V e $\text{Im}\,(\text{T})$ é um subespaço de W

Definicao 22: Seja $\text{T} : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. Se a Imagem tiver dimensão finita, dizemos que a sua dimensão é o Posto de T ($\text{Pos}\,(\text{T})$), e se o Núcleo tiver de T tiver dimensão finita dizemos que a sua dimensão é a Nulidade de T($\text{Nul}\,(\text{T})$)

Teorema 23 (Teorema Núcleo e Imagem): Se $\text{T} : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão n num espaço vetorial W, então:

$$\text{Pos}\,(\text{T}) + \text{Nul}\,(\text{T}) = n$$

ou

$$\text{Dim}\,(\text{Ker}\,(\text{T})) + D\,\text{Dim}\,(\text{Im}\,(\text{T})) = n$$

Definicao 24: Seja $\text{T} : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação injetora se T transformar vetores distintos de V em vetores distintos de W

Definicao 25: Seja $\text{T} : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear de um espaço vetorial V num espaço vetorial W, dizemos que T é uma transformação sobrejetora, se qualquer vetor em W for a imagem de pelo menos um vetor de V

Teorema 26: Se $\text{T} : V \longrightarrow W$ for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) T é injetora.

(ii) $\text{Nuc}\,(\text{T}) = \{0\}$

Veja que faz sentido ser injetora e ter $Nuc\,(T) = \{0\}$, pois para qualquer transformação linear $T\,(0) = 0$.

Teorema 27: Se $\text{T} : V \longrightarrow V$ for uma transformação linear, as afirmações seguintes são equivalentes:

(i) T é injetora.

(ii) $\text{Nuc}\,(\text{T}) = \{0\}$

(iii) T é sobrejetora

Note que a diferença entre as transformações nos dois teoremas

Definicao 28: Se uma transformação linear $\text{T} : V \longrightarrow V$ for injetora e sobrejetora, dizemos que T é um isomorfo e que V e W são espaços vetoriais isomorfos.

Teorema 29: Qualquer espaço vetorial real de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Definicao 30: Se uma transformação linear $\text{T} : V \longrightarrow V$(ou seja, T é um operador linear) é isomorfa então dizemos que T é um automorfismo

Podemos construir uma transformação $\text{T} : V \longrightarrow W$ que não isomorfa, mas V e W serem espaços isomorfos.

OBS: Olhar exemplo na folha

Teorema 31: Seja $\text{T} : V \longrightarrow W$ uma transformação linear e suponha que $\text{Dim}\,(V) = \text{Dim}\,(W)$ então temos que;

(i) Se T é injetora então T é sobrejetora

(ii) Se T é sobrejetora então T é injetora

Teorema 32: Seja $\mathrm{T} : V \longrightarrow W$ uma transformação linear e que V e W tem dimensão finita.

(i) Se $\mathrm{Dim}\,(V) > \mathrm{Dim}\,(W)$ não pode ser injetora.

(ii) Se $\mathrm{Dim}\,(V) < \mathrm{Dim}\,(W)$ não pode ser sobrejetora.

Exemplo: Para o primeiro caso pense em $\mathrm{T}(x, y) = x$ e veja que $\mathrm{T}(1, 1) = \mathrm{T}(1, 2) = 1$ assim não pode ser injetiva, já no segundo caso $T(x) = (x, 0)$ e veja q não pode ser sobrejetiva

1.5.1 Matriz de uma Transformação Linear

Definicao 33: Seja $\mathrm{T} : V \longrightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais reais com $\mathrm{Dim}\,(V) = m$ e $\mathrm{Dim}\,(W) = n$. Dado uma base de V e uma base de W.

$$B = \{v_1, \cdots, v_m\} \text{ uma base de V}$$

$$C = \{w_1, \cdots, w_n\} \text{ uma base de W}$$

A imagem de cada vetor de B pode ser escrita como combinação linear dos vetores de C

$$\begin{matrix} T\,(v_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{n1}w_n \\ T\,(v_2) = a_{12}w_1 + \cdots + a_{n2}w_n \\ \vdots \\ T\,(v_n) = a_{1n}w_1 + \cdots + a_{nn}w_n \end{matrix} \Longrightarrow [T]_{B,C} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[[T\,(v_1)]_C \quad [T\,(v_2)]_C \quad \cdots \quad [T\,(v_n)]_C \right]$$

Teorema 34: Seja $\mathrm{T} : V \longrightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais reais com $\mathrm{Dim}\,(V) = m \geqslant 1$ e $\mathrm{Dim}\,(W) = n \geqslant 1$. Dado uma base de V e uma base de W.

$$B = \{u_1, \cdots, u_m\} \text{ uma base de V}$$

$$C = \{v_1, \cdots, v_n\} \text{ uma base de W}$$

Então:

$$[T\,(x)]_C = [T]_{B,C}\,[x]_B$$

Corolario 1: Sejam $B = \{u_1, \cdots, u_m\}$ e $C = \{v_1, \cdots, v_n\}$ duas bases de V. Então:

$$[x]_C = [I]_{B,C}\,[x]_B$$

OBS: Para cada base escolhida podemos ter uma matriz $[T]_{B,C}$ diferente.
OBS: Para o caso em que $B = C$ temos que $[T]_{B,C} = [T]_B$
Exemplo de como usar $[T]_{B,C}$:
Considere uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$, onde temos $[T]_{B,C}$ e queremos saber como funciona T ou achar $T\,(v)$, para qualquer $v \in V$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\mathrm{T}"] \arrow[d, "1"'] & T(x) \\ {[x]_B} \arrow[r, "2"'] & {[T\,(x)]_C} \arrow[u, "3"'] \end{tikzcd}$$

(1) Ache o vetor de coordenadas $[x]_B$

(2) Ache $[T]_{B,C}$, onde B é uma base de V e C é uma base de W.

(3) Faça $[T]_{B,C}\,[x]_B$ para achar $[T\,(x)]_C$,ou seja, achamos as coordenadas de $T\,(x)$ na base C

1.6 Transformação Linear Composta

Definicao 35: Se $T_1 : U \longrightarrow V$ e $T_2 : V \longrightarrow W$ forem transformações lineares então a composição de T_2 e T_1, denotada por $T_2 \circ T_1$ é a aplicação definida por:

$$(T_2 \circ T_1)(u) = T_2(T_1(u))$$

Teorema 36: Se $T_1 : U \longrightarrow V$ e $T_2 : V \longrightarrow W$ forem transformações lineares injetores, então:

(i) $T_2 \circ T_1$ é injetora

(ii) $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_2^{-1} \circ T_1^{-1}$

1.6.1 Matriz de uma Transformação Linear Composta

Teorema 37: Se $T_1 : U \longrightarrow V$ e $T_2 : V \longrightarrow W$ são duas transformações lineares lineares e B, B_2 e B_1 bases de U, V e W, respectivamente, então:

$$[T_2 \circ T_1]_{B,B_1} = [T_2]_{B_2,B_1} [T_1]_{B,B_2}$$

Teorema 38: Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear do espaço vetorial V de dimensão finita e B eB_1 bases de V. Então:

$$[T_2]_{B_1} = P^{-1} [T_2]_B P \text{ ,Onde } P = P_{B_1 \to B}$$

Álgebra Linear II

2.1 Determinante

Definicao 39: Seja A uma matriz quadrada temos que o Determinante de uma matriz é uma função que associa uma matriz a um número real, ou seja, $\text{Det}(\mathbf{A}) : M_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} D_{1,j}$$

Onde $D_{1,j}$ é a matriz excluindo a linha 1 e coluna j, também chamamos $\Delta_{1,j} = (-1)^{1+j} M_{1,j}$ de Matriz dos Cofatores.

Teorema 40 (Teorema de Laplace): Seja A uma matriz quadrada de ordem n de entradas $(a_{i,j})_{n,n}$, temos que o seu determinante é a soma dos produtos de um elemento de uma fila qualquer pelo seu cofator, ou seja:

- Para $i \in \{1, \cdots, n\}$

$$Det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

- Para $j \in \{1, \cdots, n\}$

$$Det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

Note que a diferença entre Teorema 40 e a Definição 39 é o que pelo teorema poderia pegar qualquer fila (linha ou coluna) para calcular o determinante, já pela definição só poderíamos pegar a 1ª linha.

OBS: Determinante de uma matriz é uma Função mas não é uma Transformação Linear.
OBS: Como dica para diminuir as contas escolha sempre a fila que tenha mais zeros.
Calculo do determinante para n=2:

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \Longrightarrow \text{Det}(A) = ad - cb$$

Calculo do determinante para n=3:

$$\text{Det}\,(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \Longrightarrow \text{Det}\,(A) = aei + bfg + cdh - (afh + bdi + ceg)$$

Para as seguintes propriedades considere a seguinte notação:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in M_{n,n}\,(\mathbb{R}) \text{ e } k, k_1 \in \mathbb{R}$$

Onde $M_{n,n}\,(\mathbb{R})$ é Espaço Vetorial das matrizes de dimensão n x n.

Propriedade 1: Para todo $n \in \mathbb{N}^+$, $\text{Det}\,(\mathbf{I}_n) = 1$

Propriedade 2: Se C é uma matriz obtida pela troca de 2 linhas então:

$$\text{Det}\,(\mathbf{C}) = -\,\text{Det}\,(\mathbf{A})$$

Propriedade 3: O determinante de uma matriz A varia linearmente em função da 1ª linha de A, quando as outras linhas são mantidas.

(i) considere $B = \begin{bmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Então $Det\,(B) = kDet\,(A)$

(ii) considere $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$. Então:

$$\text{Det}\,(C) = \text{Det}\,(A) + \text{Det}\,(B)$$

Propriedade 4: O determinante de uma matriz B varia linearmente de qualquer uma das linhas de $\mathbf{A}$, quando as outras linhas são mantidas. Então:

$$\text{Det}\,(\mathbf{B}) = k\,\text{Det}\,(\mathbf{A})$$

Note as diferença entra P3(i) e a P4

Propriedade 5: Se A tem duas linhas iguais, então $Det\,(\mathbf{A}) = 0$.

Propriedade 6: Se uma matriz **C** é obtida trocando uma linha de **A** por sua soma com um múltiplo de outra(s) linha(s), então

$$\text{Det}\,(\mathbf{A}) = \text{Det}\,(\mathbf{C})$$

Por exemplo: $\text{Det}\,(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$ e $\text{Det}\,(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 + 2 * 3 & 0 + 2 * 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4.$

Propriedade 7: Se uma linha da matriz **C** for obtida trocando uma linha de **A** por uma uma combinação linear de outras linhas, então

$$\text{Det}\,(\mathbf{C}) = 0$$

Por exemplo: $\text{Det}\,(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 4$ e $\text{Det}\,(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 * 2 + 3 * 3 & 0 * 2 + 4 * 3 & 0 * 2 + 5 * 3 \end{vmatrix} = 0.$

OBS: **NÃO** podemos fazer $\mathbf{L_p} \to \mathbf{k_1 L_p} + \mathbf{kL_i}$, pois dessa forma alteramos o determinante

Note a diferença entre essas duas propriedades, a primeira diz que $\mathbf{L_p} \to \mathbf{L_p} + \mathbf{kL_i}$ já a segunda temos que $\mathbf{L_p} \to \mathbf{k_1 L_j} + \mathbf{kL_i}$

Propriedade 8: Seja uma matriz **A** possui um linha completa com zeros então:

$$\text{Det}\,(\mathbf{A}) = 0$$

Propriedade 9: Seja $\mathbf{A}$ for uma matriz triangular superior, inferior ou diagonal, então;

$$\text{Det}\left(\mathbf{A}\right) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propriedade 10: Se $\mathbf{A}$ for invertível então

$$\text{Det}\left(\mathbf{A}\right) \neq 0$$

Teorema 41: seja $\mathbf{A}$ uma matriz nxn temos que as seguintes afirmações são equivalentes;

(i) $\mathbf{A}$ é invertível.

(ii) $\text{Det}\left(\mathbf{A}\right) \neq 0$.

(iii) Os vetores das colunas de $\mathbf{A}$ são LI.

(iv) Os vetores das linhas de $\mathbf{A}$ são LI.

Veja que iii e iv decorrem direto diretamente de alguns propriedades anteriores.
Propriedade 11: Sejam A e B duas matrizes de ordem nxn, então;

$$\text{Det}\left(AB\right) = \text{Det}\left(A\right)\text{Det}\left(B\right)$$

Essa propriedade pode ser estendida para caso de n matriz $A_1, \cdots, A_n$. Uma forma de provar esta propriedade é usar indução.
Propriedade 12: Se A for invertível então

$$\text{Det}\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\text{Det}\left(A\right)}$$

Propriedade 13: Para todo $n \in \mathbb{N}^{+}$ temos que $\text{Det}\left(A\right) = \text{Det}\left(A^{t}\right)$
Da P4 ate P11 todas essa propriedades podem ser provas, diretamente ou indiretamente, usando as P1, P2 e P3. Uma forma de provamos P1,P2 e P13 é usar Indução, já e P3 basta usar a definição de Determinante na 1ª linha

Definicao 42: Seja $\mathbf{A}$ um matriz quadrada nxn e Δ é a matriz dos Cofatores de $\mathbf{A}$. Dizemos que a matriz Adjunta de $\mathbf{A}$, $Adj\left(\mathbf{A}\right)$ é a matriz transposta de Δ:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow Adj\left(\mathbf{A}\right) = \left(\Delta\right)^{T}$$

Teorema 43: Supondo que A seja uma matriz invertível, então temos a seguinte igualdade:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\text{Det}\left(\mathbf{A}\right)} Adj\left(\mathbf{A}\right)$$

2.2 Autovalor e Autovetor

Definicao 44: Se $\mathbf{A}$ for uma matriz nxn, então um vetor não nulo $x \in \mathbb{R}^{n}$ é denominado Autovetor de $\mathbf{A}$ (ou operador matricial) se:

$$\mathbf{A}x = \lambda x$$

onde λ é denominado Autovalor.

Teorema 45: Se $\mathbf{A}$ for uma matriz nxn triangular, então λ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se e somente se λ satisfaz a seguinte equação:

$$Det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right) = 0$$

Chamamos $Det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{A}\right)$ de Equação Característica (ou Polinómio Característico).

OBS: Alguns livros definem o Polinómio Característico da seguinte forma: $\text{Det}\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)$. Na prática essa segunda definição só atrapalha na hora de fazer contas

Teorema 46: Se A for uma matriz nxn triangular (superior,inferior ou diagonal), então os autovalor de $\mathbf{A}$ são as entradas na diagonal principal de $\mathbf{A}$.

Teorema 47: Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é invertível, se e somente se, $\lambda = 0$ não é autovalor de $\mathbf{A}$.

Definicao 48: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz nxn e λ um autovalor. Então o conjunto de todos os autovetores associados correspondentes aos λ é chamado de Autoespaço. Em outras palavra:

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\, v = 0\}$$

Desse definição temos que o vetor $\mathbf{0}$ sempre esta em E_λ. Em outras palavras, o autoespaço é o conjunto de todos os autovetores associados a um λ união com vetor $\mathbf{0}$.
Podemos dizer que o E_λ nunca será vazio, pois sempre terá a soluções trivial .
Na hora de achar um autoespaço associado a um λ, ou seja, achar E_λ tome cuidado pois se acharmos somente um valor de v volte, pois tem alguma conta errada. Em outras palavra o sistema $(A-\lambda I)$ possui infinitas soluções, como visto anteriormente.

Teorema 49: Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{R})$. Então $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})v = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$

OBS: Ver folha para achar a demonstração

Teorema 50: Seja $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ com n autovalores, então temos que:

(i) $\text{tr}\left(\mathbf{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$

(ii) $\text{Det}\left(\mathbf{A}\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$

Não necessariamente os autovalores tem que ser distintos, caso tem autovalores iguais conte eles. Para o caso em que $\mathbf{A}$ é diagonalizável os resultados i e ii são casos particulares de outros resultados. O primeiro afirma que se duas matrizes, $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, são similares, então $\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{B})$ (ver folha). Já o segunda diz que se duas matrizes ,$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, são similares, então $\text{Det}(\mathbf{A}) = \text{Det}(\mathbf{B})$
Note que com o item ii, podemos provar o teorema 47.

Definicao 51: Se A for uma matriz quadrada e λ um autovalor dessa matriz, então :

i A dimensão do autoespaço associado a λ é chamada de Multiplicidade Geométrica.

ii O número de vezes que λ é raiz no polinômio característico é chamada de Multiplicidade Algébrica

OBS: Olhar exemplo na folha

Definicao 52: Dizemos que duas matrizes quadradas nxn **A e B são semelhantes** se existe uma matriz invertível M tal que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \iff \mathbf{PB} = \mathbf{AP}$$

A 'segunda' forma da definição ajuda na hora de fazer algumas contas, como por exemplo, dada duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ ver se elas são semelhantes.
Se $\mathbf{B}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes similares então podemos dizer que ela possuem algumas propriedades iguais. Como, por exemplo, mesmo Determinante, Traço, Invertibilidade, Posto, Nulidade, Autovalores, Dimensão de Autoespaço, Polinômio Característico.
Note que algumas dessas 'características' são consequências de outras serem verdade, como por exemplo:
Posto $\Leftrightarrow$ Nulidade e Autovalores $\Leftrightarrow$ Polinômio Característico.
Apesar terem os mesmos autovalores e dimensão do autoespaço, os autoespaços não são os mesmo. Olhar exemplo na folha.

OBS: $\mathbf{A}$ ser invertível não implica em ser $\mathbf{A}$ que $\mathbf{A}$ é diagonalizável, pense na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Definicao 53: Dizemos que uma matriz quadrada **A** é diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Teorema 54: Se **A** for um matriz nxn, então são equivalentes as seguintes afirmações:

(i) **A** é diagonalizável.

(ii) **A** tem n autovetores linearmente independentes.

Com a segunda parte deste teorema, podemos dizer que se **A** for um matriz diagonalizável sempre podemos achar um base para $\mathbb{R}^n$, basta usar os autovetores de **A**, já que $\mathrm{Dim}\,(\mathbb{R}^n) = n$.

Teorema 55: Se $v_1, \cdots, v_k$ forem autovetores de uma matriz **A** associados a autovalores distintos, então $\{v_1, \cdots, v_k\}$ é um conjunto LI.

OBS: Olhar demonstração na folha

Corolario 2: Se uma matriz **A** de tamanho nxn tem n autovetores distintos, então **A** é diagonalizável.

Para provar esse teorema basta usar o 55.

OBS: A recíproca desse corolário 2 não é válida, pense nas matrizes I_3 e $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Teorema 56: Suponha que $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sejam autovalores distintos e que escolhemos um conjunto LI em cada autoespaço correspondente. Se juntarmos todos esse vetores num único conjunto, o resultado será um conjunto LI.

Exemplo: Seja $A = \{v_1, v_2, v_3\} \subset E_{\lambda_1}$ e $B = \{v_4, v_5\} \subset E_{\lambda_2}$ são conjuntos LI então $A \cup B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ também será LI.

Esse teorema é um caso geral do Teorema 55.

Procedimento para diagonalizar um matriz:

1 Confirme que a matriz é realmente diagonalizável encontrando n autovetores linearmente independentes. Uma maneira de fazer isso é encontrar uma base de cada autoespaço e juntar todos esse vetores num único conjunto S. Se esse vetores tiver menos do que n elementos, a matriz não é diagonalizável.

2 Formar a matriz $\mathbf{P} = [p_1, \cdots, p_n]$ que tem os vetores de S como vetores coluna.

Atenção com a ordem dos vetores p_i e λ_i.

3 A matriz $\mathbf{P}^{-1}AP$ será diagonal com os autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ correspondentes aos autovetores $p_1, \cdots, p_n$ como entradas diagonais sucessivas.

4 Verifique se $\mathbf{PD} = \mathbf{AP}$. Este ultimo passo é so serve para

OBS: O 2º passo poderíamos trocar a ordem dos autovetores e assim ter, por exemplo $\mathbf{P} = [p_2, p_1, \cdots, p_n]$. Portanto, podemos dizer que, se existir, a matriz **P** então ela não é única e consequentemente a matriz diagonal também não será

2.3 Operadores Diagonalizáveis

Teorema 57: Matrizes de um operador linear $T : V \longrightarrow V$ em relação a bases diferentes são semelhantes

OBS: Olhe para $P = [I]_{B,C}$

Definicao 58: Chamamos o determinante de um operador linear $T : V \longrightarrow V$ de :

$$\mathrm{Det}\,(T) = \mathrm{Det}\,([T]_B)$$

Definicao 59: Seja um operador linear $T : V \longrightarrow V$, um escalar λ é chamado autovalor de T se existir um v não nulo tal que:

$$\mathrm{T}\,(v) = \lambda v$$

Esse vetor v é chamado de autovetor.

Teorema 60: Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e β uma base de V. λ um autovalor de T se e somente se λ for um autovalor de $[T]_B$.

Teorema 61: Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e β uma base de V. v um autovetor de T se e somente se $[v]_\beta$ um autovetor de $[T]_\beta$.

OBS: Se β for a base canônica, então $[v]_B = v$

Note que pelo teorema 61 e pela observação anterior vemos como usar a base canônica é bastante útil na hora de fazer contas.

Definicao 62: Seja um operador linear $T : V \longrightarrow V$. Definimos o polinômio característico como:

$$p_T\,(\lambda) = \mathrm{Det}\,(T - \lambda I)$$

Note que $p_{[T]_B}\,(\lambda) = \mathrm{Det}\,([T]_B - \lambda I) = p_T\,(\lambda)$

Teorema 63: Sejam um operador linear $T : V \longrightarrow V$ e v um autovetor de T. Então

$$v \in \mathrm{Ker}\,\{T - \lambda I\}$$

Teorema 64: Seja um operador linear $T : V \longrightarrow V$. Então T é um operador diagonalizável se, e somente se, existir uma base B de V tal que $[T]_B$ é uma matriz diagonal.

Esse teorema fornece um condição para existir operadores diagonalizáveis e que para T ser diagonalizável não importa qual base é escolhida, as vezes pode ser mais fácil usar a base canônica.

Definicao 65: Seja $q(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_1 t^1 + a_0$ um polinômio com coeficientes reais na indeterminada t e seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada . Define-se a matriz quadrada $q\,(\mathbf{A})$ por

$$q(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + a_1\mathbf{A}^1 + a_0\mathbf{I}$$

Quando $q\,(\mathbf{A}) = 0$, dizemos que o polinômio anula a matriz $\mathbf{A}$ ou que a matriz $\mathbf{A}$ é um zero do polinômio $q\,(\mathbf{A})$.

Teorema 66: Toda matriz é um zero do seu polinômio característico. Ou seja: se $\mathbf{A}$ é uma matriz quadrada e $\mathrm{p}_{\mathbf{A}}\,(\lambda)$ é seu polinômio característico então $\mathrm{p}_{\mathbf{A}}\,(\lambda) = 0$

2.4 Produto Interno

Definicao 67: Um produto interno num espaço vetorial real $\mathbf{V}$ é um função $\langle\cdot,\cdot\rangle$ que associa um número a cada par de vetores em $\mathbf{V}$ em um numero real, ou seja,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbf{V}x\mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores v, u e w de $\mathbf{V}$ e qualquer escalar α.

(i) $\langle u, v\rangle = \langle u, v\rangle$.

(ii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(iii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$.

(iv) $\langle v, v\rangle \geq 0$ e $\langle v, v\rangle = 0$ se e somente se $v = 0$.

Notação: $\langle u, v\rangle_V$ é produto associado ao espaço vetorial V

Definicao 68: Se **V** for um espaço vetorial com produto interno, então a norma de um vetor v **V** é definida por

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

e a distância entre dois vetores é denotada por $\mathrm{D}(u,v)$ e definida por

$$\mathrm{D}(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$

.

Teorema 69: Se u e v são vetores num espaço com produto interno real **V** e k um escalar, então;

(i) $\|v\| \leq 0$.

(ii) $\|v\| =\mid k \mid \|v\|$.

(iii) $\mathrm{D}(u,v) = \mathrm{D}(v,u)$.

(iv) $\mathrm{D}(u,v) \geq 0$, com a igualdade ocorrendo se e somente se $u = v$

OBS: Seja $u = (u_1, \cdots, u_n)$ e $v = (v_1, \cdots, v_n)$ dois vetores no $\mathbb{R}^n$, temos que o o produto interno definido por: $\langle u, v\rangle_{\mathbb{R}^n} = u_1v_1 + u_nv_n$ é chamado de **Produto Interno Euclidiano**.

Teorema 70: Se u, v e w forem vetores num espaço com produto interno real **V** e k um escalar, então;

(i) $\langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$.

(ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

(iii) $\langle u, v - w\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, w\rangle$.

(iv) $\langle u - v, w\rangle = \langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle$.

(v) $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$.

Teorema 71: Se u e v forem vetores num espaço com produto interno real **V**, então;

$$\|\langle u, v\rangle\| \leq \|u\|\|v\|$$

.

OBS: Esse teorema é importante pois com ele é possível introduzir a noção de ângulo no $\mathbb{R}^n$, ou seja, é possível definir ângulo entre matrizes, espaços, polinômios e etc.

Teorema 72: Se u, v e w forem vetores num espaço com produto interno real **V** e k um escalar, então;

(i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(ii) $\mathrm{D}(u,v) = \mathrm{D}(u,w) + \mathrm{D}(w,v)$.

A primeira desigualdade é conhecida como Desigualdade Triangular de Vetores e a segunda como Desigualdade Triangular de Distâncias.

2.5 Ortogonalidade

Definicao 73: Dizemos que dois vetores u e v de um espaço com produto interno são ortogonais se

$$\langle u, v\rangle = 0$$

.

Teorema 74: Se u e v forem vetores ortogonais num espaço com produto interno real **V**, então;

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$$

.

Definicao 75: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se um conjunto $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V, como $n \geqslant 2$. Dizemos que B é ortogonal se quaisquer dois vetores em B são ortogonais.

Definicao 76: Se **W** for um subespaço de um espaço com produto interno **V**, então o conjunto de todos os vetores em **V** que são ortogonais a cada vetor em **W** é denominado Complemento Ortogonal de **W** e denotado por

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in W\}$$

;

Teorema 77: Sejam W um subespaço vetorial de V e $B = \{w_1, \cdots, w_n\}$ uma base para W. Então, temos que

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u_i\rangle = 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}\}$$

O Teorema 77 nos fornece um importante ferramenta para achar o complemento ortogonal. Pois com ele só temos trabalhar com um conjunto finito de vetores, podendo assim resolver um sistema.
OBS: Para mostrar esse teorema defina os seguintes conjuntos $H = \{v \in V : \langle v, u_i\rangle = 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}\}$, onde $\{w_1, \cdots, w_n\}$ forme uma base de W, e $W^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in W\}$. Mostre que $W^{\perp} = H$, note que uma das inclusões é fácil $\left(W^{\perp} \subset H\right)$.

Teorema 78: Se **W** for um subespaço de um espaço com produto interno **V**, então;

(i) $\mathbf{W}^{\perp}$ é um subespaço de **V**.

(ii) $\mathbf{W}^{\perp} \bigcap \mathbf{W} = \{0\}$.

(iii) $\mathbf{W}^{\perp} \bigoplus \mathbf{W} = \mathbf{V}$

Do item iii e ii concluímos que: $\operatorname{Dim}\left(\mathbf{W}^{\perp}\right) + \operatorname{Dim}(\mathbf{W}) = \mathbf{V}$

Teorema 79: Se **W** for um subespaço de um espaço com produto interno de dimensão finita **V**, então complemento ortogonal de $\mathbf{W}^{\perp}$ é **W**, ou seja;

$$\left(\mathbf{W}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbf{W}$$

.

Definicao 80: Seja V um espaço vetorial, com produto interno, e seja v um vetor não nulo de V. Dado $u \in V$, o vetor projeção de u sobre v é denotado por $\operatorname{Proj}_v(u)$ e definido por:

$$\operatorname{Proj}_v(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v$$

Teorema 81: Se $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ for um conjunto ortogonal de vetoes não nulos num espaço com produto interno, então S é LI.

Teorema 82:

1. Se $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ for uma base ortogonal de um espaço vetorial ,com produto interno, V e com u um vetor em V, então;
$$u = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{\langle u, v_n\rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

2. Se $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ for uma base ortogonal de um espaço vetorial, com produto interno, V e com u um vetor em V, então;
$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n$$

Teorema 83: Se W for um subespaço de dimensão finita de um espaço, com produto interno, V, então cada vetor $u \in V$ pode ser expresso de maneira única como:

$$u = w_1 + w_2$$

em que $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$

OBS: Podemos provar que $w_2 = u - \text{Proj}_v(u) \in W^{\perp}$
OBS: Podemos provar o item iii Teorema 83 usando esse resultado

Teorema 84: Cada espaço vetorial não nulo de dimensão finita possui uma base B ortonormal.

Proposicao 8: Sejam $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ bases para um espaço W, sendo que V é uma base ortogonal, então temos que:

1-) $v_1 = u_1$

2-) $v_2 = u_2 - \text{proj}_{u_2}(v_1) = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$

n-) $v_n = u_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \text{proj}_{u_n}(v_i) = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$

OBS: Para obter uma base ortonormal base dividir $v_1, \cdots, v_n$ por $\|v_1\|, \cdots, \|v_n\|$

2.6 Matrizes Ortogonais

Definicao 85: Dizemos que um matriz $\mathbf{A}$ é Ortogonal quando sua transposta for sua inversa, ou seja, se;

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\intercal} = I_n$$

Teorema 86: Seja $\mathbf{A}$ um matriz quadrada nxn. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\mathbf{A}$ é ortogonal.
2. Os vetores linhas de $\mathbf{A}$ formam um conjunto ortonormal e $\mathbb{R}^n$ em relação ao produto interno euclidiano.
3. Os vetores colunas de $\mathbf{A}$ formam um conjunto ortonormal e $\mathbb{R}^n$ em relação ao produto interno euclidiano.

Teorema 87: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz ortogonal, então $\mathbf{A}^{-1}$ também é ortogonal.

Teorema 88: Sejam B_1 e B_2 duas bases ortogonais ???????

Teorema 89: Seja $\mathbf{A}$ um matriz quadrada nxn. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

1. $\mathbf{A}$ é ortogonal.
2. $\|\mathbf{A}x\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $\mathbf{A}x \cdot \mathbf{A}y = x \cdot y$

Teorema 90: Se S for uma base ortonormal de um espaço com produto interno V de dimensão n e se $[u]_S = (u_1, \cdots, u_n)$ e $[v]_S = (v_1, \cdots, v_n)$ (coordenadas de u e v na base S), então:

1. $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2)}$
2. $\text{d}(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$
3. $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n$

Note que este teorema afirma que não importa o espaço vetorial que esteja sendo trabalhado, sempre podemos achar uma forma de levar para o produto euclidiano do $\mathbb{R}^n$.

Teorema 91: Seja V um espaço com produto interno de dimensão finita. Se $\mathbf{P}$ for a matriz de transição de uma base ortonormal de V para outra base ortonormal de V, então $\mathbf{P}$ é uma matriz ortogonal.

Definicao 92: Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes quadradas. Dizemos que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ortogonalmente semelhantes se existir matrizes ortogonal $\mathbf{P}$ tal que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

Definicao 93: Seja $\mathbf{A}$ matrizes quadradas. Dize-se que $\mathbf{A}$ é ortogonalmente diagonalizável se existir matrizes ortogonal $\mathbf{P}$ tal que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{\intercal}\mathbf{A}\mathbf{P}$$

Onde $\mathbf{D}$ é um matriz diagonal

Teorema 94: Se $\mathbf{A}$ for uma matriz simétrica nxn, então as afirmações são equivalentes:

1. Os autovalores de $\mathbf{A}$ são reais.
2. Autovetores de autoespaço diferentes são ortogonais.

Teorema 95: Se $\mathbf{A}$ for uma matriz simétrica nxn, valem as seguintes afirmações:

1. $\mathbf{A}$ é ortogonalmente diagonalizável.
2. $\mathbf{A}$ tem um conjunto ortonormal de n autovetores.
3. $\mathbf{A}$ é simétrica.

Teorema 96: Sejam $\mathbf{A}$ uma matriz simétrica nxn, v_1 e v_1 autovetores associados a autovalores distintos, então v_1 e v_1 são ortogonais.

Teorema 97 (Teorema Espectral das Matrizes Simétrica): Toda matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável.

2.7 Operadores Ortogonais e Auto-Adjuntos

Definicao 98: Seja V um espaço vetorial com produto interno. O operador linear $T : V \longrightarrow V$ é chamado de Operador Ortogonal ou Isomeria quando existe uma base B ortonormal de V tal que $[T]_B$ é uma matriz ortogonal.

Teorema 99: Sejam V um espaço vetorial e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, B_1 e B_2 bases ortonormais de V. Então: Se $[T]_{B_1}$ é uma matriz ortogonal então $[T]_{B_2}$ é também uma matriz ortogonal.

Teorema 100: Seja V um espaço vetorial de dimensão n com produto interno e seja $T : V \longrightarrow V$ operador linear. Então são equivalentes:

1. T é ortogonal/isométrica.
2. Se $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V então $B_1 = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal.
3. Para todo $u, v \in V$ $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.
4. Para todo $u \in V$ $\|T(u)\| = \|u\|$.

Note que o item 4 é um corolário do item 3. Basta fazer $u = v$ e usar o fato de que $\|.\| \geq 0$.

Teorema 101: Sejam V um espaço vetorial, com produto interno, e $T : V \longrightarrow V$ um operador ortogonal. Então seus únicos autovalores são $\lambda = \pm 1$.

Para mostrar teorema 101 use a equivalência de 1 e 4 no teorema 100.

Definicao 102: Seja V um espaço vetorial com produto interno. O operador linear $T : V \longrightarrow V$ é chamado de Operador Auto-adjunto quando existe uma base B ortonormal de V tal que $[T]_B$ é uma matriz simétrica.

Teorema 103: Sejam V um espaço vetorial e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, B_1 e B_2 bases ortonormais de V. Então: Se $[T]_{B_1}$ é uma matriz simétrica então $[T]_{B_2}$ é também uma matriz simétrica.

Teorema 104: Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se T é um operador auto-adjunto, então $u, v \in V$ $\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle$

2.8 Formas Quadráticas

Definicao 105: Sejam $\mathbf{A}$ um matriz nxn simétrica e x um vetor coluna. Então dizemos que;

$$\mathrm{Q}_{\mathbf{A}}(x) = x^{\intercal}\mathbf{A}x$$

é a forma quadrática associada a $\mathbf{A}$

Teorema 106 (Teorema dos Eixos Principais): Se $\mathbf{A}$ for uma matriz simétrica n x n, então uma mudança de variáveis ortogonal que transforma a forma quadrática $x^{\intercal}\mathbf{A}x$ na forma $y^{\intercal}\mathbf{D}y$ sem termos mistos. Especificamente, se $\mathbf{P}$ diagonaliza $\mathbf{A}$ ortogonalmente, então a mudança de variáveis $x = \mathbf{P}y$ ou $\mathbf{P}^{\intercal}x = y$ transforma a forma quadrática $x^{\intercal}\mathbf{A}x$ na forma:

$$x^{\intercal}\mathbf{A}x = y^{\intercal}\mathbf{D}y = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Na qual $\lambda_1, \cdots .\lambda_n$ são autovalores de $\mathbf{A}$ associados aos autovetores que constituem as colunas sucessivas de $\mathbf{P}$

Definicao 107: Dizemos que um forma quadrática $x^{\intercal}\mathbf{A}x$ é:

1. **positiva**; $x^{\intercal}\mathbf{A}x > 0$, para qualquer x $\neq$ 0.
2. **negativa**; $x^{\intercal}\mathbf{A}x < 0$, para qualquer x $\neq$ 0.
3. **indefinida**; $x^{\intercal}\mathbf{A}x$ tem valores tanto positivos quantos negativos.

Teorema 108: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz simétrica. Valem as afirmações.

1. $\mathrm{Q}_{\mathbf{A}}(x)$ é positiva se e somente se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ são positivos.
2. $\mathrm{Q}_{\mathbf{A}}(x)$ é negativa se e somente se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ são negativos.
3. $\mathrm{Q}_{\mathbf{A}}(x)$ é indefinida se e semente se, $\mathbf{A}$ tem pelos menos um autovalor negativo e pelos menos um autovalor positivo

Teorema 109: Seja $\mathbf{A}$ uma matriz 2x2 simétrica. Valem as afirmações.

1. $\mathrm{Q}_{\mathbf{A}}(x) = 1$ é uma Elipse se $\mathbf{A}$ for positiva se e somente se todos os autovalores de $\mathbf{A}$ são positivos.
2. $\mathrm{Q}_{\mathbf{A}}(x) = 1$ não tem gráfico se $\mathbf{A}$ for negativa.
3. $\mathrm{Q}_{\mathbf{A}}(x) = 1$ é uma Hipérbole se $\mathbf{A}$ for indefinida.

Extra

3.1 Otimização de Formas Quadráticas

Teorema 110: Suponha que (x_0, y_0) seja um ponto critico de uma função $f(x, y)$ com derivadas parciais de segunda ordem continuas em algum região circular centrada em (x_0, y_0). Se $\mathrm{H}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ for a hessiana de f em (x_0, y_0), então:

(i) f tem um mínimo relativo em (x_0, y_0) se $\mathrm{H}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ for uma matriz positiva.

(ii) f tem um máximo relativo em (x_0, y_0) se $\mathrm{H}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ for uma matriz negativa.

(iii) f tem um ponto de sela em (x_0, y_0) se $\mathrm{H}(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$ for uma matriz indefinida

(iv) O teste é inconclusivo nos demais casos.

3.2 Derivação de matrizes

Definicao 111: Sejam $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_k)^{`}$ um vetor (kx1) e $F(\beta) = F(\beta_1, \cdots, \beta_k)$ um função tal que $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos a derivada de F em relação a β como sendo

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_n} \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial \beta^{`}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial \beta_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial \beta_n} \end{pmatrix}$$

Definicao 112: Sejam $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_k)^{`}$ um vetor (kx1) e $G(\beta) = \begin{pmatrix} G_1(\beta) \\ \vdots \\ G_n(\beta) \end{pmatrix}$ um função tal que $G: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Definimos a derivada de G em relação a β como sendo

$$\frac{\partial G}{\partial \beta^{`}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial \beta_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial G_n}{\partial \beta_k} \end{pmatrix}$$

3.2.1 Funções especiais

Seja $F(\beta) = c^{\intercal}\beta = c_1\beta_1 + \cdots + c_k\beta_k$, então

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c$$

Temos podemos afirmar que:

$$\frac{\partial F^{\intercal}}{\partial \beta} = \frac{\partial \beta^{\intercal} c}{\partial \beta} = c$$

Sejam A uma matriz nxn e $G(\beta) = A\beta$, então

$$\frac{\partial G}{\partial \beta^{\intercal}} = \frac{\partial A\beta}{\partial \beta^{\intercal}} = A$$

.
O mesmo pode ser dito de

$$\frac{\partial G^{\intercal}}{\partial \beta} = \frac{\partial \beta^{\intercal} A^{\intercal}}{\partial \beta} = A^{\intercal}$$

Agora considere um função $F(\beta) = \beta^{\intercal} V \beta$, onde V é uma matriz kxk, então temos que;

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = (V + V^{\intercal})\beta$$

O mesmo pode ser dito para:

$$\frac{\partial F}{\partial \beta^{\intercal}} = \beta^{\intercal}(V + V^{\intercal})$$