PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6.37. Verifique el teorema de Green en el plano para $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$, donde C es la frontera de la región definida por *a*) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$; *b*) $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

6.38. Evalúe $\oint_C (3x + 4y)\,dx + (2x - 3y)\,dy$, donde C es una circunferencia de radio igual a dos, con centro en el origen del plano xy y que se recorre en sentido positivo.

6.39. Resuelva el problema anterior para la integral de línea $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + 3xy^2\,dy$.

6.40. Evalúe $\oint (x^2 - 2xy)\,dx + (x^2y + 3)\,dy$ alrededor de la frontera de la región definida por $y^2 = 8x$ y $x = 2$, *a*) directamente y *b*) con el empleo del teorema de Green.

6.41. Evalúe $\int_{(0,0)}^{(\pi,2)} (6xy - y^2)\,dx + (3x^2 - 2xy)\,dy$ a lo largo de la cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

6.42. Evalúe $\oint (3x^2 + 2y)\,dx - (x + 3\cos y)\,dy$ alrededor del paralelogramo cuyos vértices están en (0, 0), (2, 0), (3, 1) y (1, 1).

6.43. Calcule el área limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, y el eje x.

6.44. Determine el área acotada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.
Sugerencia: Las ecuaciones paramétricas son $x = a\cos^3\theta$, $y = a\operatorname{sen}^3\theta$.

6.45. Demuestre que en coordenadas polares (ρ, ϕ), se cumple la expresión $x\,dy - y\,dx = \rho^2\,d\phi$. Interprete $\frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$.

6.46. Encuentre el área de un lazo de la rosa de cuatro hojas $\rho = 3\operatorname{sen} 2\phi$.

6.47. Calcule el área de los dos lazos de la lemniscata $\rho^2 = a^2\cos 2\phi$.

6.48. Obtenga el área del lazo de la hoja de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$ (vea la figura 6-16).

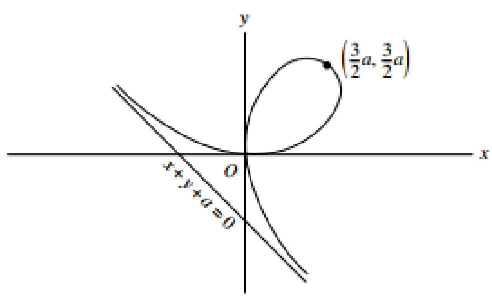

Figura 6-16

Sugerencia: Sea $y = tx$, y obtenga las ecuaciones paramétricas de la curva. Después utilice el hecho de que

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\oint x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\oint x^2\,dt$$

6.49. Verifique el teorema de Green en el plano $\oint_C (2x - y^3)\,dx - xy\,dy$, donde C es la frontera de la región encerrada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

6.50. Evalúe $\int_{(1,0)}^{(-1,0)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ a lo largo de las trayectorias siguientes:

a) Segmentos de línea recta que van de (1, 0) a (1, 1), luego a (−1, 1) y después a (−1, 0).
b) Segmentos de línea recta que van de (1, 0) a (1, −1), después a (−1, −1) y luego a (−1, 0).
Demuestre que, aun cuando $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ la integral de línea *es dependiente* a la trayectoria que une (1, 0) a (−1, 0) y explique.

6.51. Por cambio de variables de (x, y) a (u, v) y de acuerdo con la transformación $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$, demuestre que el área A de la región R limitada por una curva simple cerrada, C, está dada por

$$A = \iint_R \left| J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \right| du\,dv \quad \text{donde } J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

es el jacobiano de x y de y con respecto de u y v. ¿Qué restricciones establecería el lector? Ilustre el resultado donde u y v son coordenadas polares.
Sugerencia: Use el resultado $A = \frac{1}{2}\int x\,dy - y\,dx$, transforme a coordenadas u y v, y luego utilice el teorema de Green.

6.52. Evalúe $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ y S es:

a) La superficie del paralelepípedo limitado por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$ y $z = 3$.
b) La superficie de la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ y $x + 2z = 6$.

6.53. Verifique el teorema de divergencia para $\mathbf{A} = 2x^2y\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 4xz^2\mathbf{k}$ tomado sobre la región en el primer octante limitado por $y^2 + z^2 = 9$ y $x = 2$.

6.54. Evalúe $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\,dS$, donde *a*) S es la esfera de radio igual a 2 con centro en (0, 0, 0), *b*) S es la superficie del cubo limitado por $x = -1$, $y = -1$, $z = -1$, $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$ y *c*) S es la superficie limitada por el paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ y el plano xy.

6.55. Suponga que S es cualquier superficie cerrada que encierre un volumen V, y $\mathbf{A} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$. Demuestre que $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\,dS = (a + b + c)V$.

6.56. Suponga que $\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A}$. Demuestre que $\iint_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$ para cualquier superficie cerrada S.

6.57. Suponga que $\mathbf{n}$ es la normal unitaria que sale desde cualquier superficie cerrada de área S. Demuestre que $\iiint_V \text{div}\,\mathbf{n}\,dV = S$.

6.58. Demuestre que $\iiint_V \frac{dV}{r^2} = \iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2}\,dS$.

6.59. Demuestre que $\iint_S r^5\mathbf{n}\,dS = \iiint_V 5r^3\mathbf{r}\,dV$.

6.60. Demuestre que $\iint_S \mathbf{n}\,dS = \mathbf{0}$ para cualquier superficie cerrada S.

6.61. Demuestre que la segunda identidad de Green puede escribirse como

$$\iiint_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,dV = \iint_S \left(\phi\frac{d\psi}{dn} - \psi\frac{d\phi}{dn}\right) dS.$$

6.62. Demuestre que $\iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \mathbf{0}$ para cualquier superficie cerrada S.

6.63. Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{A} = (y - z + 2)\mathbf{i} + (yz + 4)\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, donde S es la superficie del cubo $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$, sobre el plano xy.

6.64. Verifique el teorema de Stokes para $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$, donde S es la superficie de la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $2x + y + 2z = 8$, que no está incluida en el plano xz.

6.65. Evalúe $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\,dS$, donde $\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie de *a*) el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ sobre el plano xy y *b*) el paraboloide $z = 4 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano xy.

6.66. Sea $\mathbf{A} = 2yz\mathbf{i} - (x + 3y - 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$. Evalúe $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dS$ sobre la superficie de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$, incluidos en el primer octante.

6.67. Un vector $\mathbf{B}$ siempre es normal a una superficie cerrada S. Demuestre que $\iiint_V \text{rot}\, \mathbf{B}\, dV = \mathbf{0}$, donde V es la región limitada por S.

6.68. Sea $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{H} \cdot dS$, donde S es cualquier superficie limitada por la curva C. Demuestre que $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$.

6.69. Demuestre que $\oint_C \phi\, d\mathbf{r} = \iint_S d\mathbf{S} \times \nabla\phi$.

6.70. Use la equivalencia de operadores del problema resuelto 6.25 para llegar a que: *a)* $\nabla\phi$, *b)* $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y *c)* $\nabla \times \mathbf{A}$, en coordenadas rectangulares.

6.71. Haga la demostración de que $\iiint_V \nabla\phi \cdot \mathbf{A}\, dV = \iint_S \phi\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS - \iiint_V \phi\nabla \cdot \mathbf{A}\, dV$.

6.72. Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de cualquier punto en relación con un origen O. Suponga que ϕ tiene derivadas continuas de al menos segundo orden, y sea S una superficie cerrada que encierra un volumen V. Denote a ϕ en O por medio de ϕ_o. Demuestre que

$$\iint_S \left[\frac{1}{r}\nabla\phi - \phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] \cdot dS = \iiint_V \frac{\nabla^2\phi}{r} dV + \alpha$$

donde $\alpha = 0$ o $4\pi\phi_o$, según si O está fuera o dentro de S.

6.73. El potencial $\phi(P)$ en un punto $P(x, y, z)$ debido a un sistema de cargas (o masas) $q_1, q_2, \ldots, q_n$, que tienen vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$, con respecto de P, está dado por:

$$\phi = \sum_{m=1}^{n} \frac{q_m}{r_m}$$

Demuestre la *ley de Gauss*:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi Q$$

donde $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ es la intensidad de campo eléctrico, S es una superficie que encierra todas las cargas y $Q = \sum_{m=1}^{n} q_m$ es la carga total dentro de S.

6.74. Si una región V acotada por una superficie S tiene una distribución de carga (o masa) continua de densidad ρ, entonces el potencial $\phi(P)$ en un punto P está definido por

$$\phi = \iiint_V \frac{\rho\, dV}{r}.$$

Haga suposiciones razonables y deduzca lo siguiente:

a) $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_V \rho\, dV$, donde $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.

b) $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$ (ecuación de Poisson) en todos los puntos P en los que existen cargas, y $\nabla^2\phi = 0$ (ecuación de Laplace) donde no hay cargas.