Programmation linéaire

Exercice 1. [Le panier de crabes] Trois espèces de crabes sont pêchées dans les eaux cotières de l'Alaska : le crabe royal, le crabe des neiges et le crabe "Dungeness". Ses crabes sont présents en des lieux connus différents mais proches.

Des bateaux sont aménagés pour pouvoir pêcher indifféremment les trois sortes de crabes. La capacité totale de pêche des bateaux est de 1 000 tonnes de crabes.

A l'arrivée des bateaux au port, un tri doit être effectué sur la caragaison : ce tri tient compte, suivant la période de bataille, de la taille des crapaces des crabes, de leur qualité, etc. Aussi, après ce tri, ne peut-on utiliser en moyenne que 80% de la quantité totale de crabe royal pêchée, 95% de celle de crabe des neiges et 90% de celle du crabe Dungeness. LEs crabes éliminés sont perdus.

Intervient alors un conditionnement d'un maximum de 900 tonnes de crabes.

Le crabe le plus demandé est le crabe royal. Mais afin de respecter un équilibre entre les espèces, il a été établi que la différence entre la quantité pêchée de crabe royal et le tonnage global des deux autres espèces doit être inférieure à 100 tonnes.

On désire établir le plan de pêche maximisant le bénéfice sachant que l'on gagne 12.5 unités monétaires (u.m.) par tonne de crabe royal conditionnée, 8.42 u.m. pour le crabe des neiges et 7.78 u.m. pour le crabe Dungeness.

1. Formuler le problème en terme de programmation linéaire.
2. La solution consistant à pêcher 500 t de crabe royal et 500 tonnes de crabe Dungeness est-elle admissible ? de base ? Même question avec erspectivement 550 tonnes et 450 tonnes.
3. Résoudre ce problème.
4. Suite à une amélioration du conditionnement, le bénéfice dégagé par tonne pêchée et traitée de crabe Dungeness passe à 10 u.m. Reformuler et résoudre à nouveau le programme linéaire correspondant.

Exercice 2. Une usine fabrique deux produits P_1 et P_2.
Chacun de ces produits demande, pour son usinage, des heures de fabrications unitaires sur les machines A, B, C, D et E comme indiqué dans le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
P_1	0	1h30	2h	3h	3h
P_2	3h	4h	3h	2h	0h
Disponibilité	39h	60h	57h	70h	75h

Les marges brutes de chaque produit sont respectivement $M_1 = 1\,700$ euros et $M_2 = 3\,200$ euros.

1. Écrire et résoudre le programme linéaire correspondant. Donner une solution graphique.
2. Les produits utilisent trois fournitures F_1, F_2 et F_3 selon le tableau ci-dessous.

	F_1	F_2	F_3
P_1	0	12	8
P_2	5	36	0
Stock	55 kg	432 m^3	136 m^2

Réécrire le nouveau programme linéaire et le résoudre.

Exercice 3. [Programme de Transport] Soit le programme de transport défini par le tableau ci-dessous.

	Client 1	Client 2	Client 3	Dispo des dépots
Dépots 1	5	3	4	8
Dépots 2	6	7	2	9
Demandes clients	4	5	8	-

Le coefficient c_{ij} (dépots i et client j) correspond au coût unitaire du dépots i au client j. Il s'agit de minimiser le coût de transport.

1. Mettre ce problème sous forme d'un programme linéaire. On justifiera que l'on peut se passer de la contrainte du client 3.
2. Résoudre ce PL.

Exercice 4. Une brasserie A produit 2 types de bière pour lesquels elle utilise 3 matières premières : maïs, houblon et malt.
Le tableau ci-dessous réume les données du problème.

	Maïs	Houblon	Malt	Bénéfice
Bière blonde	2.5 kg	125 g	17.5 kg	65 euros
Bière brune	7.5 kg	125g	10 kg	115 euros
Quantités disponibles	240 kg	5 kg	595 kg	-

Déterminer la fonction optimale du brasseur.

Exercice 5. Maximiser $z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4$ sous les contraintes $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 4$ et

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 12 \\
3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \leq & 5 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & \leq & 7
\end{array}$$

Exercice 6. [Base initiale] On veut maximiser $z = x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + 4x_5$ sous les contraintes $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 5$ et

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 = & 8 & \\ 2x_1 & + & 7x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 20 \end{array}$$

1. Montrer que la solution $(0, 2, 1, 0, 3)$ est une solution de base admissible. En déduire l'initialisation de la méthode des tableaux.
2. Résoudre le PL.

Exercice 7. [Solutions non bornées] Soit le PL :
Maximiser $z = x_1 + x_2$ sous les contraintes $x_2 \leq 2 + 2x_1$, $2x_2 \leq 5 + x_1$, $x_1 \leq 4 + 4x_2$, $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0/$

1. Tenter de résoudre de PL à l'aide de la méthode du simplexe.
2. Faire une résolution graphique.

Exercice 8. [Contraintes contradictoires] Soit le PL :
Maximiser $z = x_1 + 2x_2$ sous les contraintes $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2$, $x_1 + x_2 \leq 6$, $-x_1 + x_2 = 3$.

1. Faire une résolution graphique. Que constate-t-on ?
2. Afin de mettre en place la méthode du simplexe, on rajoute comme d'habitude les variables d'écart x_3 et x_4 ainsi que la variable artificielle x_5. Le programme devient donc $max(x_1 + 2x_2)$ sous les contraintes $x_i \geq 0$ et

   $$x_1 + x_3 = 1$$

   $$x_1 + x_2 + x_4 = 6$$

   $$-x_1 + x_2 + x_5 = 3$$

   Que doit valoir x_5 ? Mettre en oeuvre la méthode des tableau sur ce système et conclure.