TER Sur Le Problème Des Préflots

DUVILLIE Guillerme
Ould Mohamed Abdellahi Cheikh Mehdi

Université Montpellier2
Master1-Informatique
Spécialité-MOCA

27 avril 2012

Sommaire

Plan

Cadre et objectifs

- Ce TER se situe dans le cadre de Problème de flot maximum
- Il existe différents types d'algorithmes répondant à ce problème, certains basés sur la recherche de chaînes améliorantes (Edmonds-Karp, Ford Fulkerson, ...), d'autres sur les fonctions de préflots. Nous nous intéresserons à la seconde catégorie.

Utilité

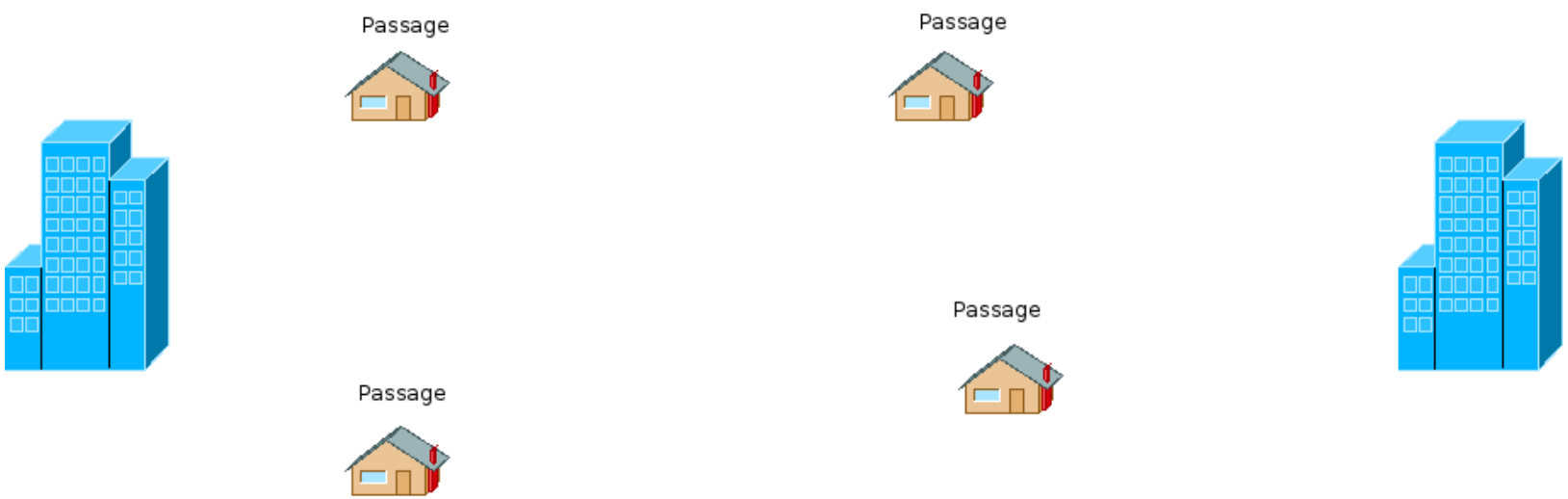
Considérons une entreprise, devant acheminer sa production depuis l'usine de création au lieu de stockage.

Usine de Création

Entrepôt

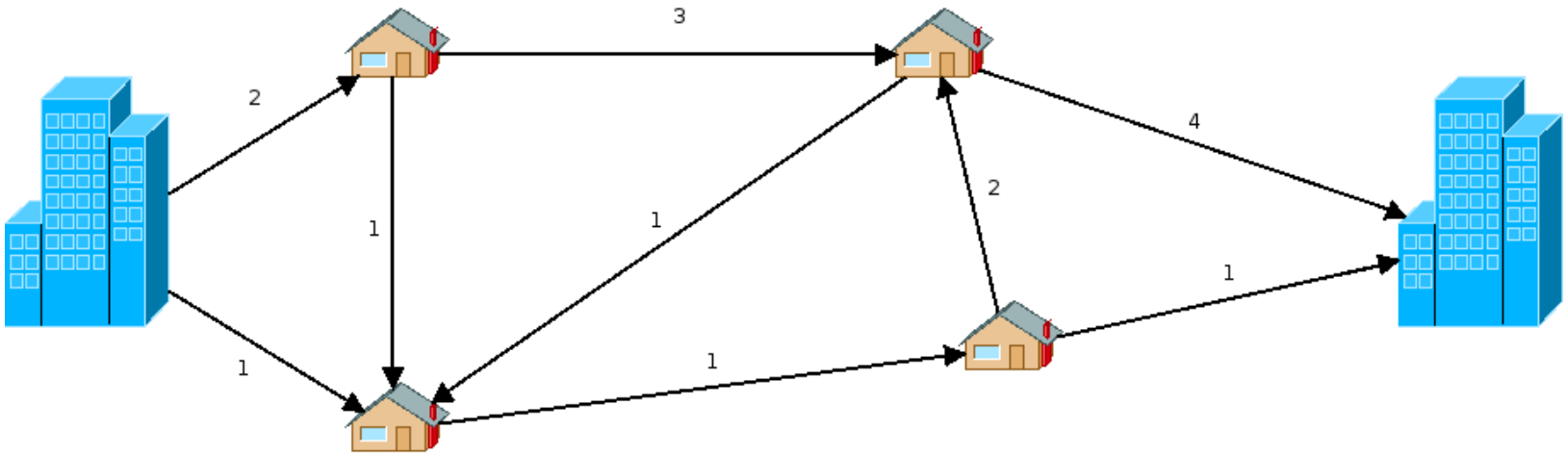
Utilité

Il existe différents points, par lesquels peut transiter la production.



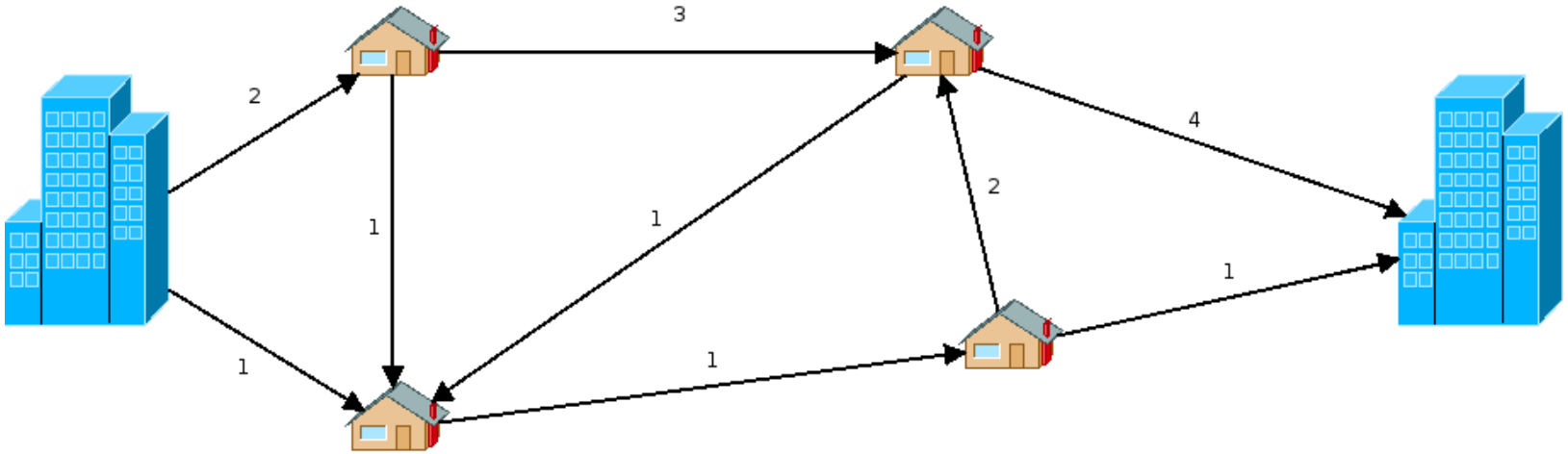
Utilité

Chaque passage est reliés aux autres à l'aide de routes permettant un transit plus ou moins facile jusqu'à destination.



Utilité

Chaque passage est reliés aux autres à l'aide de routes permettant un transit plus ou moins facile jusqu'à destination.



Bingo !

Il s'agit là d'un problème de flot maximum.

Définitions

Nous allons définir quelques notions qui seront utlisées par la suite pour le déroulement de l'algorithme de préflot et ses dérivés.

La notion de flot

Un flot est une fonction de graphes vérifiant certaines propriétés, qui sont :

La notion de flot

Un flot est une fonction de graphes vérifiant certaines propriétés, qui sont :

le respect de la capacité de l'arc

La valeur du flot sur un arc ne peut être supérieure à la capacité de l'arc et ne peut être négative

La notion de flot

Un flot est une fonction de graphes vérifiant certaines propriétés, qui sont :

le respect de la capacité de l'arc

$$\forall (i,j) \in A, \quad 0 \leq x(i,j) \leq c(i,j)$$

le respect de la loi de Kirchoff

Pour chaque noeud différent de la source et du puits, la quantité de flot entrant dans le noeud est égale à la quantité de flot sortant de ce dernier.

La notion de flot

Un flot est une fonction de graphes vérifiant certaines propriétés, qui sont :

le respect de la capacité de l'arc

$$\forall (i,j) \in A, \quad 0 \leq x(i,j) \leq c(i,j)$$

le respect de la loi de Kirchoff

$$\forall i \in S - \{s,t\}, \quad \sum_{j \in A^+(i)} x(i,j) = \sum_{k \in A^-(i)} x(k,i)$$

Le respect de la contrainte de symétrie

Pour chaque arc du graphe, il n'y a aucun phénomène de perte entre le sommet de départ et le sommet d'arrivée.

La notion de flot

Un flot est une fonction de graphes vérifiant certaines propriétés, qui sont :

le respect de la capacité de l'arc

$$\forall (i,j) \in A, \quad 0 \leq x(i,j) \leq c(i,j)$$

le respect de la loi de Kirchoff

$$\forall i \in S - \{s,t\}, \quad \sum_{j \in A^+(i)} x(i,j) = \sum_{k \in A^-(i)} x(k,i)$$

Le respect de la contrainte de symétrie

$$f = \sum_{j \in A^+(s)} x(s,j) = \sum_{k \in A^-(t)} x(k,t)$$

Le réseau résiduel

Soit un graphe $G(S, A)$, un flot f et i, j deux sommets de G. On dira que l'arête (i, j) appartiendra au réseau résiduel A_f si et seulement si la capacité résiduelle est non nulle.

Autrement dit

$$r(i,j) = c(i,j) - x(i,j) > 0$$

On appelle alors $r(i, j)$ la capacité résiduelle de l'arête (i, j).

Le réseau résiduel

Soit un graphe $G(S, A)$, un flot f et i, j deux sommets de G. On dira que l'arête (i, j) appartiendra au réseau résiduel A_f si et seulement si la capacité résiduelle est non nulle.

Autrement dit

$$r(i,j) = c(i,j) - x(i,j) > 0$$

On appelle alors $r(i, j)$ la capacité résiduelle de l'arête (i, j).

Note

Si $x(i, j) > 0$ alors (j, i) appartient au réseau résiduel avec une capacité résiduelle $r(j, i) = x(i, j)$.

Le réseau résiduel

Soit un graphe $G(S, A)$, un flot f et i, j deux sommets de G. On dira que l'arête (i, j) appartiendra au réseau résiduel A_f si et seulement si la capacité résiduelle est non nulle.

Autrement dit

$$r(i,j) = c(i,j) - x(i,j) > 0$$

On appelle alors $r(i, j)$ la capacité résiduelle de l'arête (i, j).

Théorème

S'il existe un chemin de la source au puits dans le réseau résiduel, alors on peut augmenter la valeur du flot dans le graphe. Ce chemin est appelé chaîne améliorante.

Le réseau résiduel

Pour le flot suivant, ...

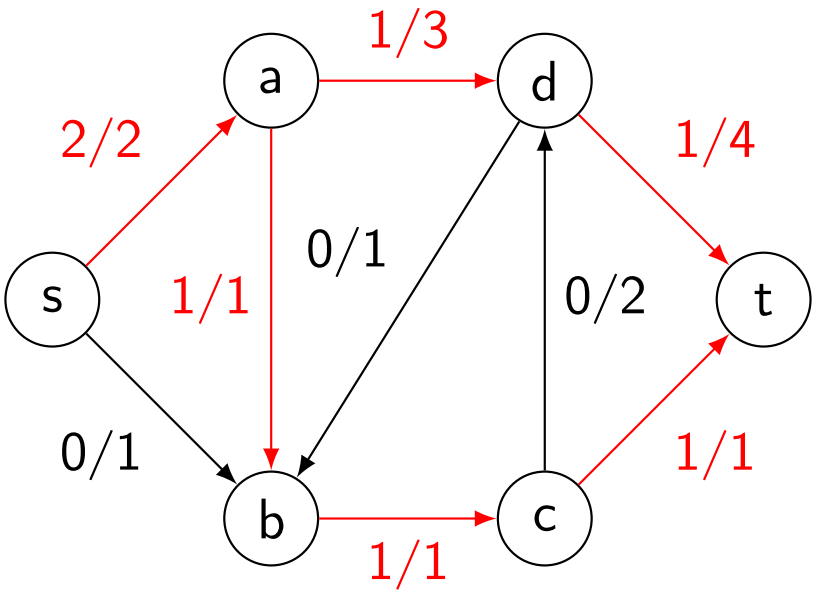


Figure: Un exemple de flot

Le réseau résiduel

... on a le réseau résiduel suivant :

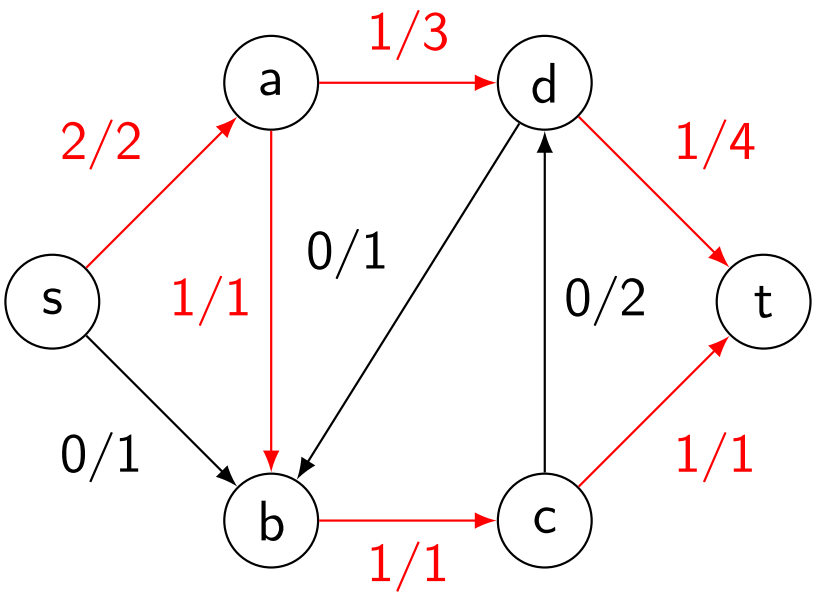


Figure: Un exemple de flot

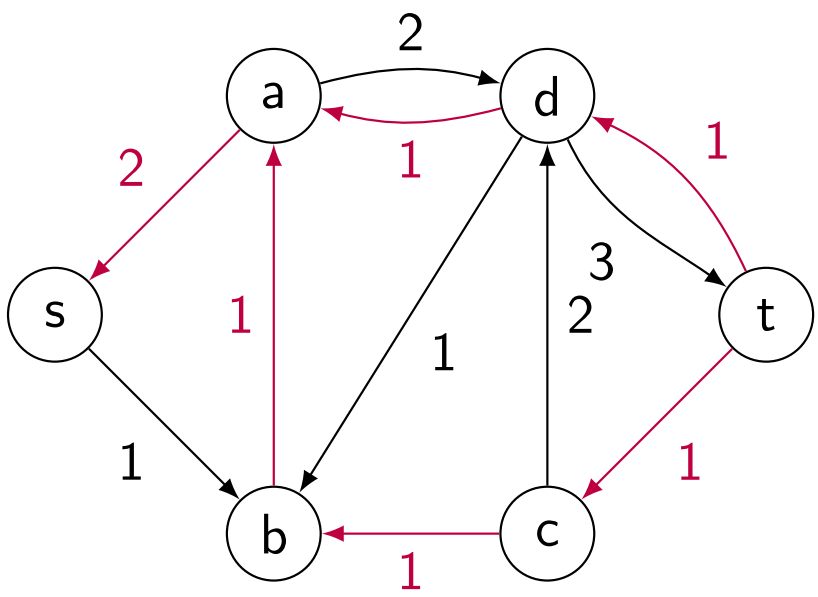


Figure: Le réseau résiduel associé

Le réseau résiduel

Il existe une chaîne améliorante dans le graphe d'écart :

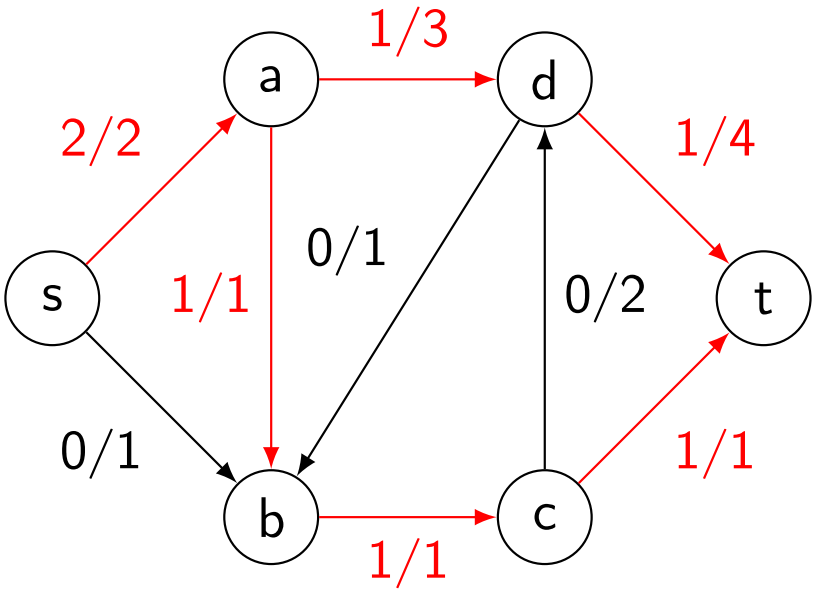


Figure: Un exemple de flot

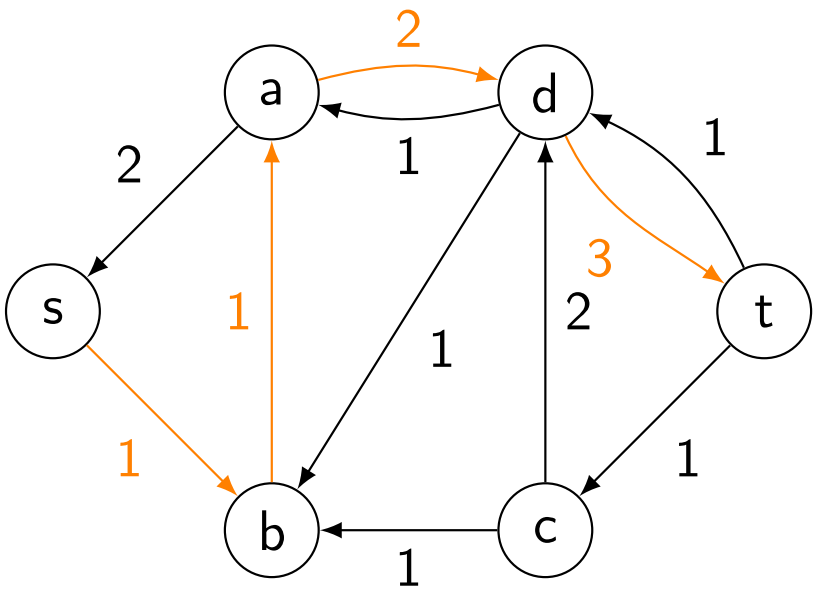


Figure: Le réseau résiduel associé

Le réseau résiduel

Donc une augmentation possible du flot :

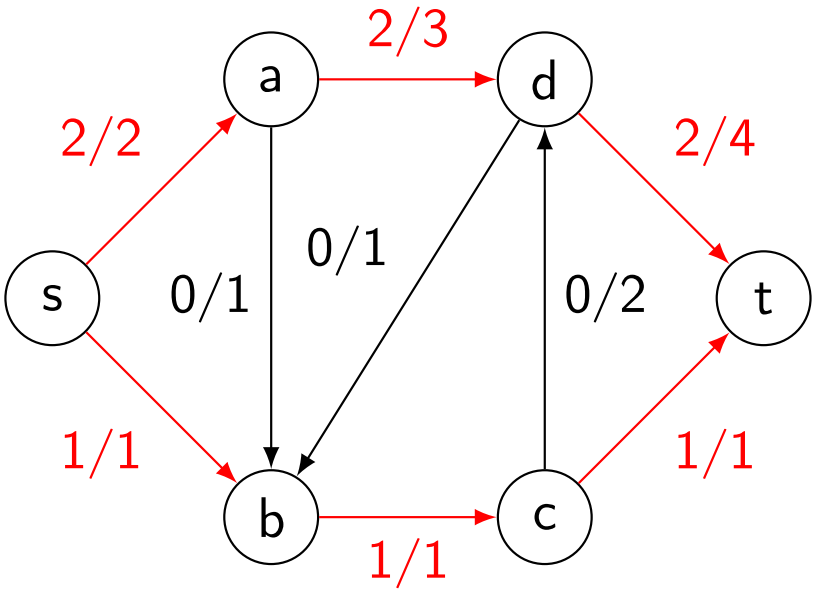


Figure: Un exemple de flot

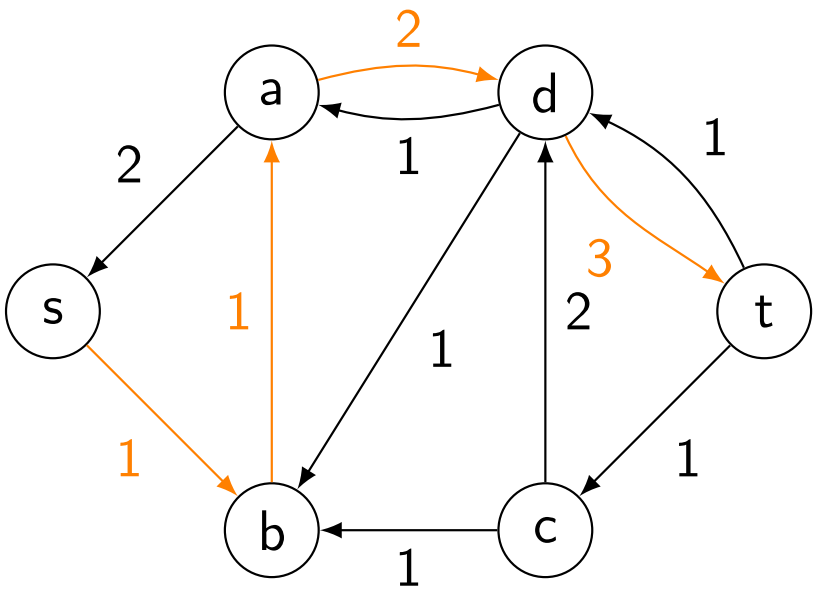


Figure: Le réseau résiduel associé

Les algorithmes

Varient sur le choix des chaînes améliorantes :

Les algorithmes

Varient sur le choix des chaînes améliorantes :

- Ford-Fulkerson : choix aléatoire

Les algorithmes

Varient sur le choix des chaînes améliorantes :

- Ford-Fulkerson : choix aléatoire
- Edmonds-Karp : la plus petite chaîne en nombre d'arcs

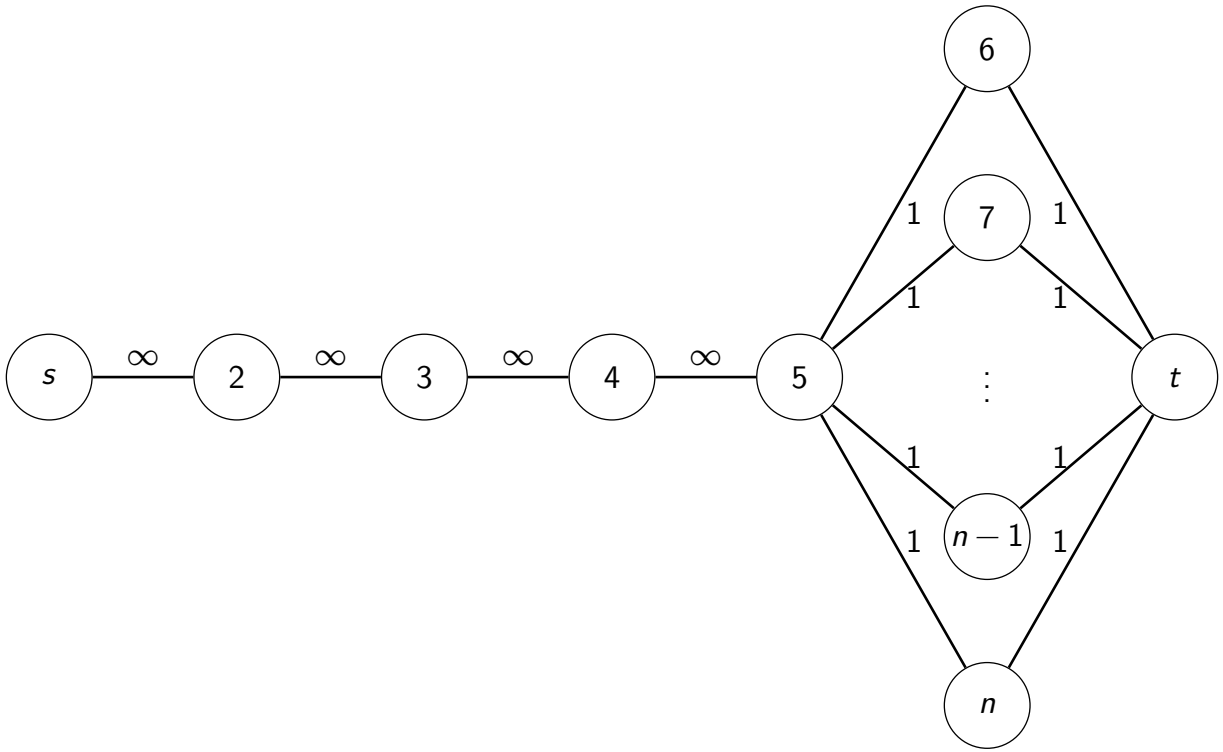
Les algorithmes

Varient sur le choix des chaînes améliorantes :

- Ford-Fulkerson : choix aléatoire
- Edmonds-Karp : la plus petite chaîne en nombre d'arcs
- Dinic : l'ensemble des plus petites chaînes en nombre d'arcs

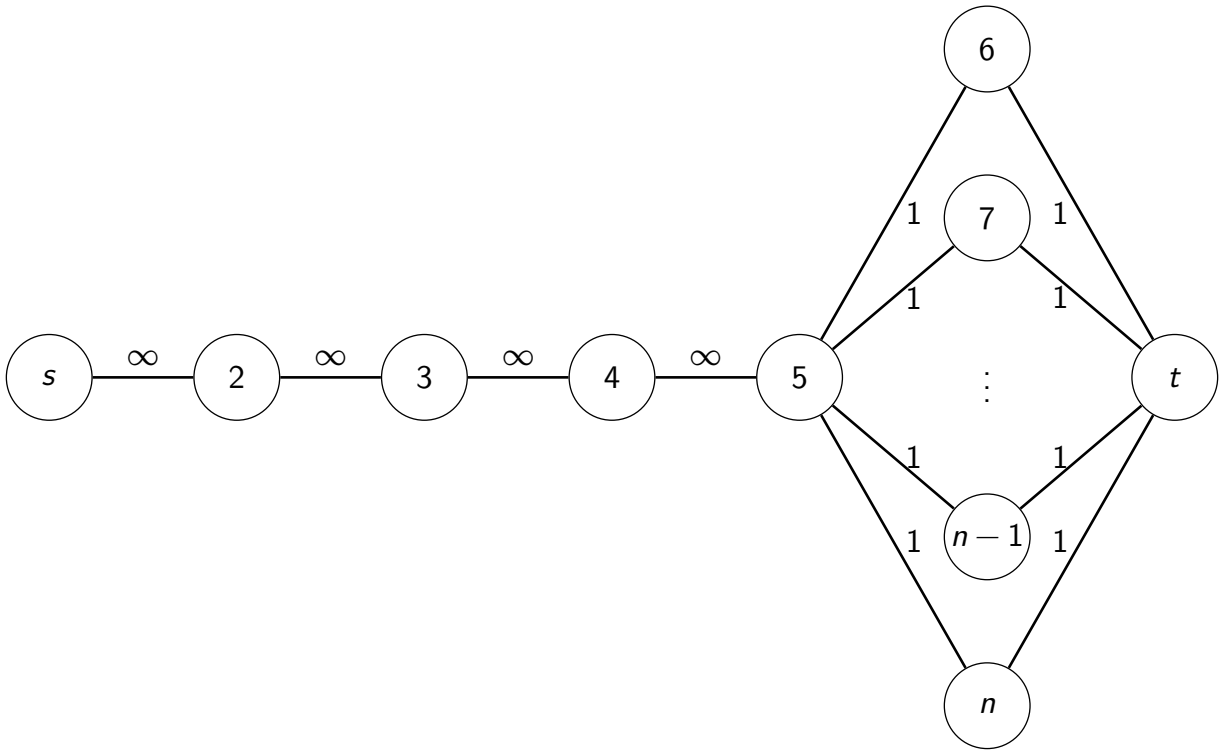
Les limites de ces algorithmes

Considérons le graphe suivant :



Introduction aux opérations

Considérons le graphe suivant :

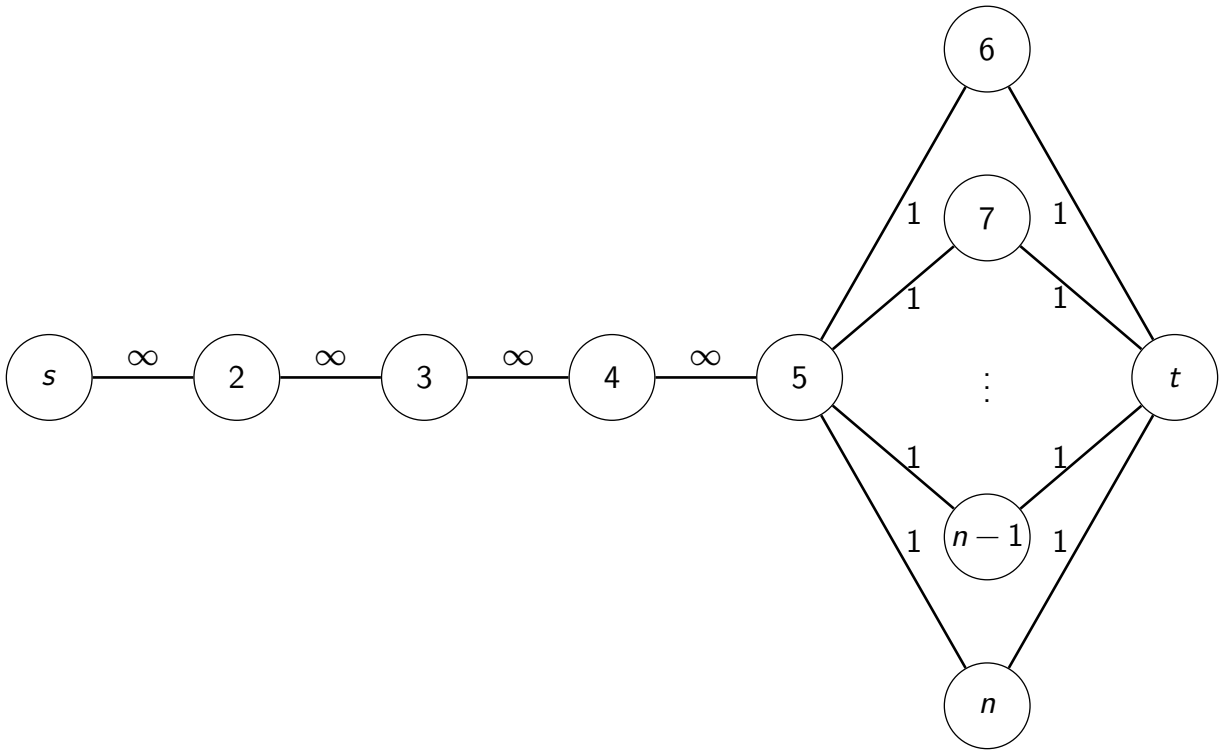


Constat

Il met en défaut les algorithmes de recherche de chaînes améliorantes.

Introduction aux opérations

Considérons le graphe suivant :



Intuition

Agir de façon locale au noeud 5, afin d'envoyer du flot à tous ses voisins en une seule opération.

Plan

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Chaque noeud possède un réservoir de capacité infinie.

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Chaque noeud possède un réservoir de capacité infinie.

Seule la source possède un réservoir plein.

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Chaque noeud possède un réservoir de capacité infinie.

Seule la source possède un réservoir plein.

À chaque noeud est associée une hauteur.

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Chaque noeud possède un réservoir de capacité infinie.

Seule la source possède un réservoir plein.

À chaque noeud est associée une hauteur.

Deux actions possibles :

1. vidange du réservoir

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Chaque noeud possède un réservoir de capacité infinie.

Seule la source possède un réservoir plein.

À chaque noeud est associée une hauteur.

Deux actions possibles :

1. vidange du réservoir
2. augmentation de la hauteur du réservoir

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Chaque noeud possède un réservoir de capacité infinie.

Seule la source possède un réservoir plein.

À chaque noeud est associée une hauteur.

Deux actions possibles :

1. vidange du réservoir
2. augmentation de la hauteur du réservoir

On commence par vidanger la source, puis on cherche à vidanger les noeuds dont le réservoir n'est pas vide.

Intuitivement...

Le graphe est assimilé à un réseau de tuyaux de capacité donnée.

Chaque noeud possède un réservoir de capacité infinie.

Seule la source possède un réservoir plein.

À chaque noeud est associée une hauteur.

Deux actions possibles :

1. vidange du réservoir
2. augmentation de la hauteur du réservoir

On commence par vidanger la source, puis on cherche à vidanger les noeuds dont le réservoir n'est pas vide.

Si on ne peut vidanger aucun réservoir et qu'il reste des réservoirs non vides, on augmente la hauteur de ces derniers.

La notion de préflot

Un préflot est une fonction obtenue à partir d'un flot par relaxation de la loi de Kirchoff : la quantité de préflot sortant d'un noeud doit être inférieure ou égale à la quantité de préflot entrant dans celui-ci.

La notion de préflot

Un préflot est une fonction obtenue à partir d'un flot par relaxation de la loi de Kirchoff : la quantité de préflot sortant d'un noeud doit être inférieure ou égale à la quantité de préflot entrant dans celui-ci.

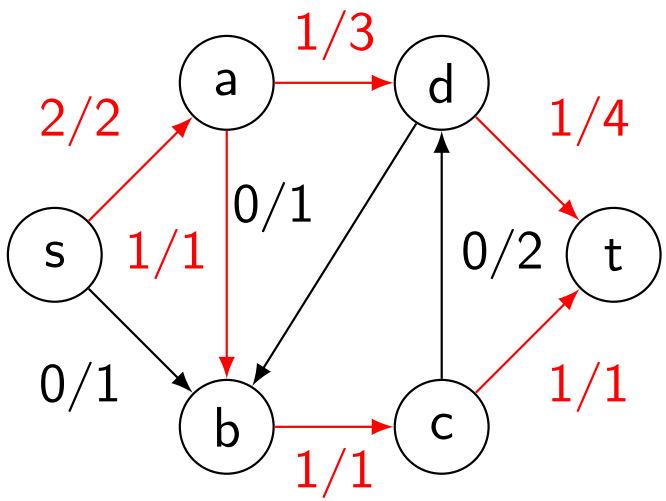


Figure: Un exemple de flot

La notion de préflot

Un préflot est une fonction obtenue à partir d'un flot par relaxation de la loi de Kirchoff : la quantité de préflot sortant d'un noeud doit être inférieure ou égale à la quantité de préflot entrant dans celui-ci.

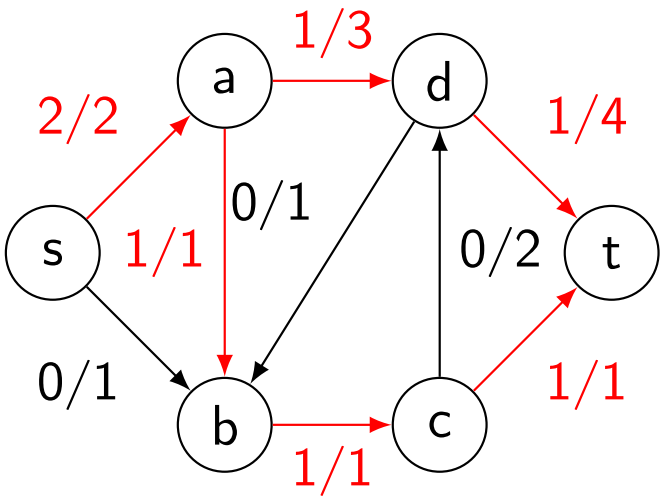


Figure: Un exemple de flot

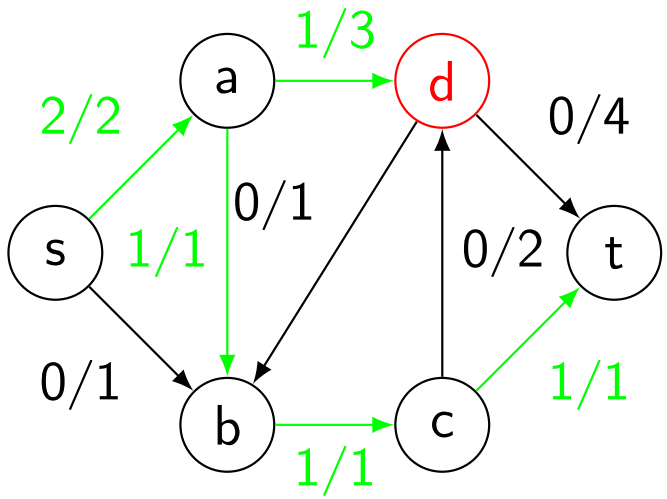


Figure: Un exemple de préflot

La notion de préflot

Un préflot est une fonction obtenue à partir d'un flot par relaxation de la loi de Kirchoff : la quantité de préflot sortant d'un noeud doit être inférieure ou égale à la quantité de préflot entrant dans celui-ci.

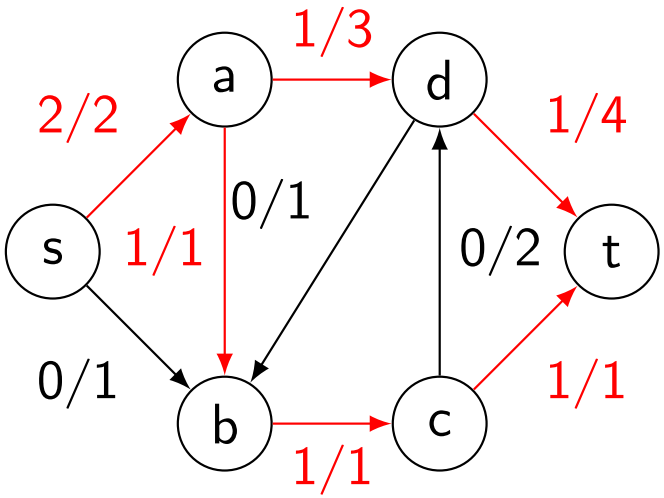


Figure: Un exemple de flot

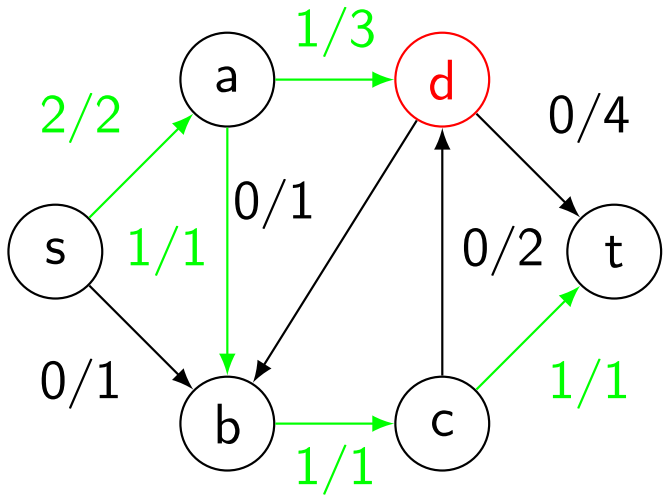


Figure: Un exemple de préflot

Définition

$e(d) = f_{in} - f_{out} = 1$. d est appelé noeud actif et $e(d)$, l'excédent de d.

La fonction de distance

Une fonction de distance est une fonction représentant le plus court chemin en nombre d'arcs d'un noeud au puits, vérifiant les propriétés suivantes :

La fonction de distance

Une fonction de distance est une fonction représentant le plus court chemin en nombre d'arcs d'un noeud au puits, vérifiant les propriétés suivantes :

Distance de la source

la distance de la source est égale au nombre de sommets du graphe

La fonction de distance

Une fonction de distance est une fonction représentant le plus court chemin en nombre d'arcs d'un noeud au puits, vérifiant les propriétés suivantes :

Propriétés

$$d(s) = |S|$$

Distance du puits

la distance du puits est égale à zéro

La fonction de distance

Une fonction de distance est une fonction représentant la distance d'un noeud au puits, vérifiant les propriétés suivantes :

Propriétés

$$d(s) = |S|$$

$$d(t) = 0$$

Distances des sommets

si (i, j) appartient au réseau résiduel, la distance du sommet i est égale à la distance du sommet i plus un

La fonction de distance

Une fonction de distance est une fonction représentant la distance d'un noeud au puits, vérifiant les propriétés suivantes :

Propriétés

$$d(s) = |S|$$

$$d(t) = 0$$

$$\forall (i,j) \in A_f, \quad d(i) = d(j) + 1$$

Conséquences sur le réseau résiduel

Le réseau résiduel associé au flot suivant :

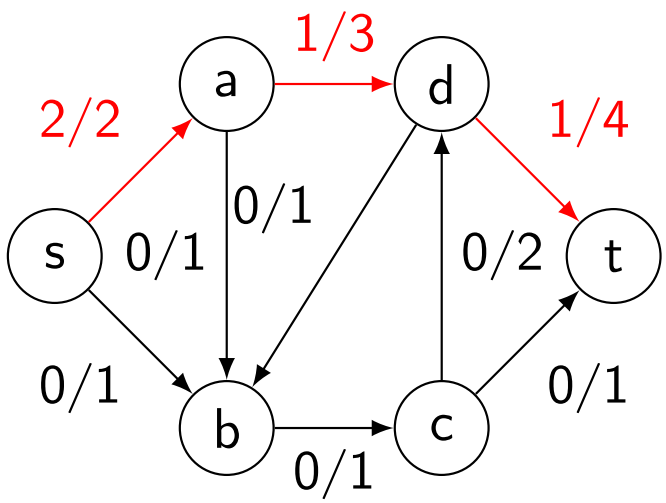


Figure: Un exemple de flot

Conséquences sur le réseau résiduel

devient :

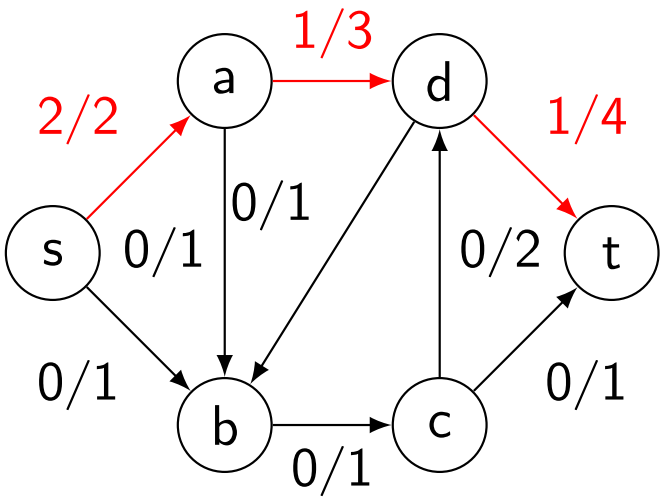


Figure: Un exemple de flot

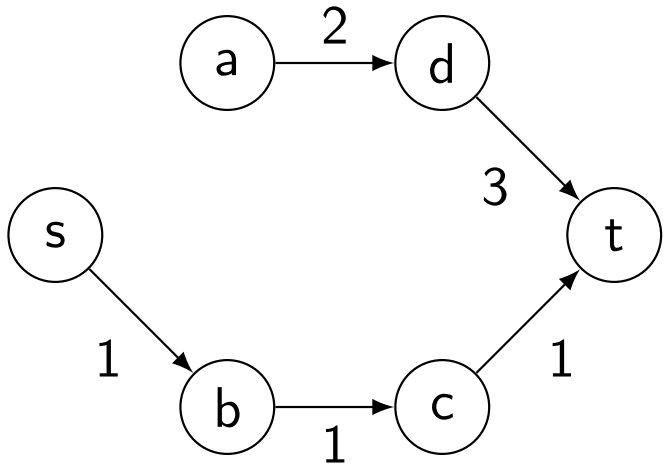


Figure: Le réseau résiduel associé

Conséquences sur le réseau résiduel

devient :

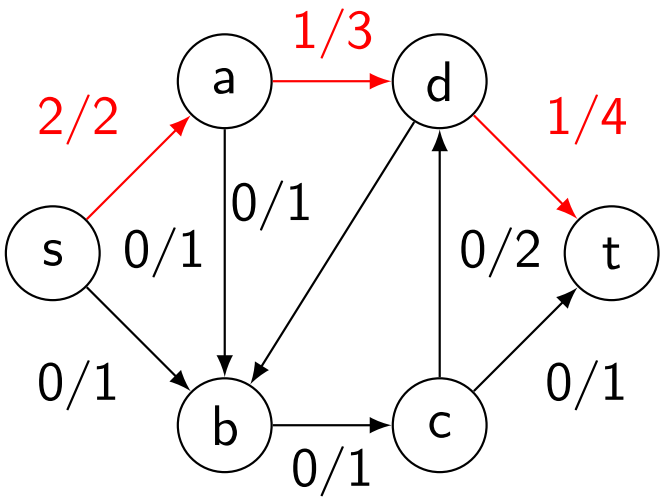


Figure: Un exemple de flot

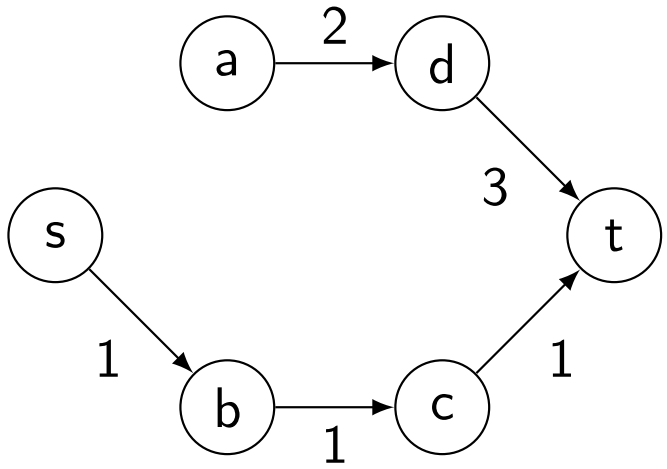


Figure: Le réseau résiduel associé

Note

Le réseau résiduel sert à déterminer les actions à effectuer.

Poussage

Poussage : L'action de faire transiter le préflot d'un noeud i à un noeud j est appelée opération de poussage.

Poussage

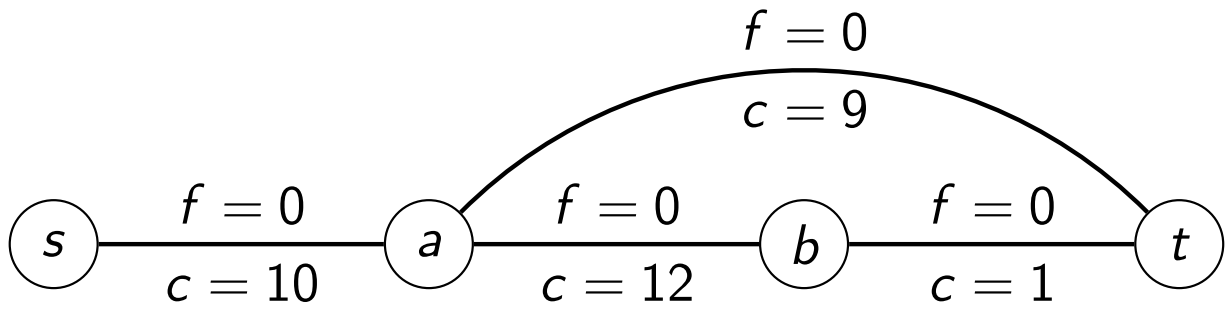
Poussage : L'action de faire transiter le préflot d'un noeud i à un noeud j est appelée opération de poussage.

Condition

On ne peut pas appliquer un poussage sur l'arrête (i, j) que si le sommet i est actif, $C_f\ (i, j) > 0$ et $d(i) = d(j) + 1$.

Insuffisance des poussages

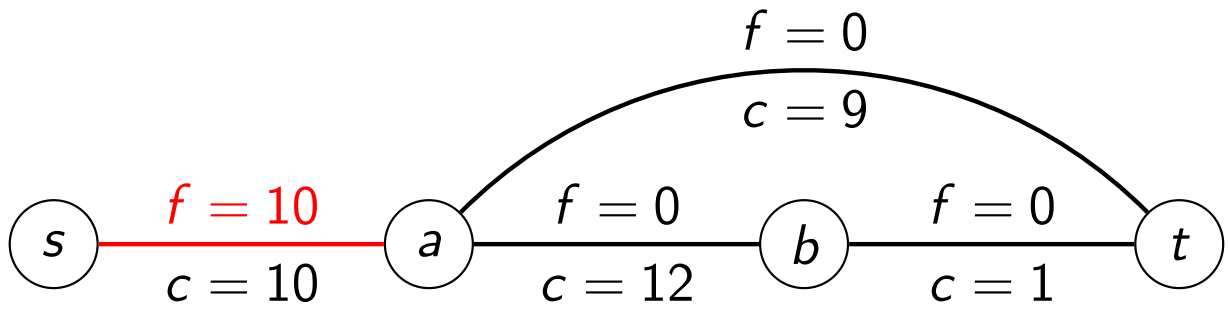
Soit le graphe :



$e = 0$	$e = 0$	$e = 0$	$e = 0$
$d = 4$	$d = 1$	$d = 1$	$d = 0$

Insuffisance des poussages

Soit le graphe :

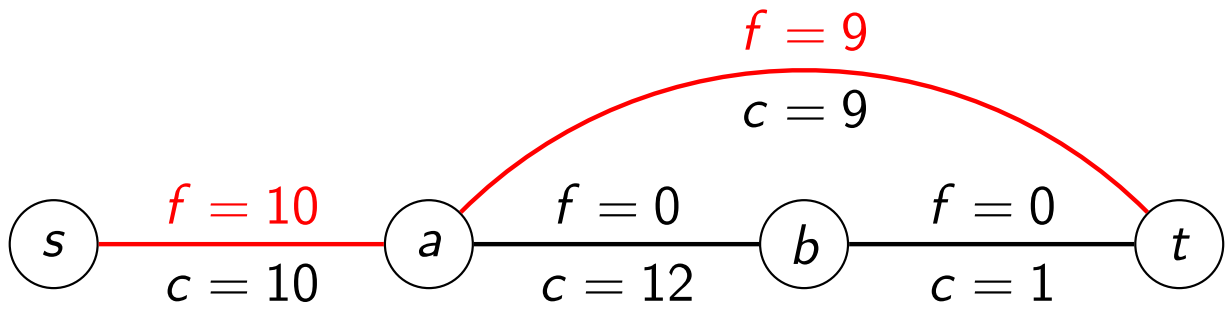


$e = 0$ $e = 10$ $e = 0$ $e = 0$

$d = 4$ $d = 1$ $d = 1$ $d = 0$

Insuffisance des poussages

Soit le graphe :

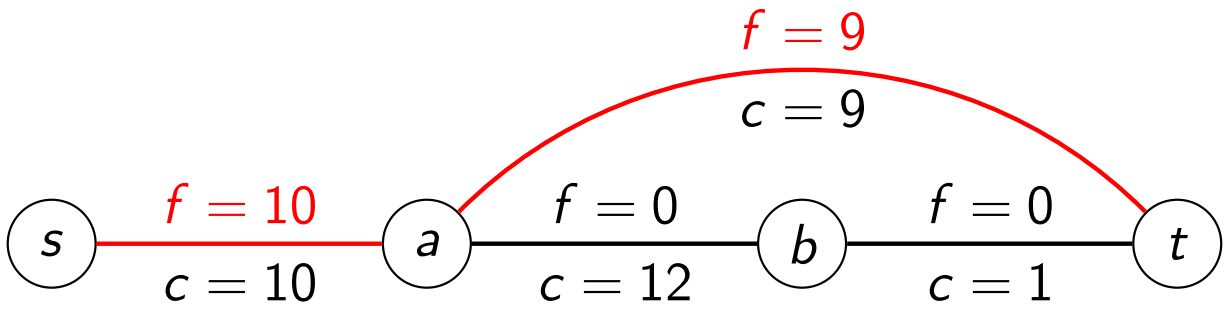


$e = 0$ $e = 1$ $e = 0$ $e = 9$

$d = 4$ $d = 1$ $d = 1$ $d = 0$

Insuffisance des poussages

Soit le graphe :



$e = 0$	$e = 1$	$e = 0$	$e = 9$
$d = 4$	$d = 1$	$d = 1$	$d = 0$

Et maintenant ...

Que faire ?

Réétiquetage

Réétiquetage : Le ré-étiquetage consiste à réévaluer la distance du noeud actif au noeud puits afin qu'il soit possible, après cette opération, d'effectuer une opération de poussage depuis ce noeud.

Réétiquetage

Réétiquetage : Le ré-étiquetage consiste à réévaluer la distance du noeud actif au noeud puits afin qu'il soit possible, après cette opération, d'effectuer une opération de poussage depuis ce noeud.

Condition

On ne peut pas réétiqueter que si i est actif et, pour tout $j \in S$ tel que $(i,j) \in A_f$. On a $d(i) \leq d(j)$.

Approche formelle

L'algorithme examine les noeuds actifs.

Approche formelle

L'algorithme examine les noeuds actifs.

Il cherche à réduire l'excédent de flot en l'envoyant vers un noeud voisin dans le graphe résiduel (Poussage).

Approche formelle

L'algorithme examine les noeuds actifs.

Il cherche à réduire l'excédent de flot en l'envoyant vers un noeud voisin dans le graphe résiduel (Poussage).

S'il n'existe aucun voisin, on augmente la distance du noeud au puits (Ré-étiquetage).

Approche formelle

L'algorithme examine les noeuds actifs.

Il cherche à réduire l'excédent de flot en l'envoyant vers un noeud voisin dans le graphe résiduel (Poussage).

S'il n'existe aucun voisin, on augmente la distance du noeud au puits (Ré-étiquetage).

Lorsque plus aucun noeud est actif, le préflot restant est un flot maximum.

Initialisation

Consiste à calculer les distances de chacun des noeuds de façon à obtenir une fonction de distance valide.

Initialisation

Consiste à calculer les distances de chacun des noeuds de façon à obtenir une fonction de distance valide.

Procédure d'initialisation :

1: **for** $i \in S$ **do**
2: Calculer la distance $d(i)$ en nombre d'arêtes de i à t
3: **end for**
4: **for** $a \in A(s)$ **do**
5: $x(a) \leftarrow c(a)$
6: **end for**
7: $d(s) \leftarrow |S|$

Examen des noeuds

Consiste à sélectionner un noeud actif et à effectuer un poussage si possible, ou un ré-étiquetage sinon.

Examen des noeuds

Consiste à sélectionner un noeud actif et à effectuer un poussage si possible, ou un ré-étiquetage sinon.

Procédure Pousser-Réétiqueter :

1: **if** $e(i) > 0$ **then**
2: **if** $\exists j$ tel que $c(i,j) > 0$ **and** $d(i) = d(j) + 1$ **then**
3: $\delta \leftarrow \min(e(i), c(i,j))$
4: $f(i,j) \leftarrow f(i,j) + \delta$
5: $e(i) \leftarrow e(i) - \delta$
6: $e(j) \leftarrow e(j) + \delta$
7: **else**
8: $d(i) \leftarrow 1 + \min\{d(j)/(i,j) \in A_f\}$
9: **end if**
10: **end if**

La procédure principale

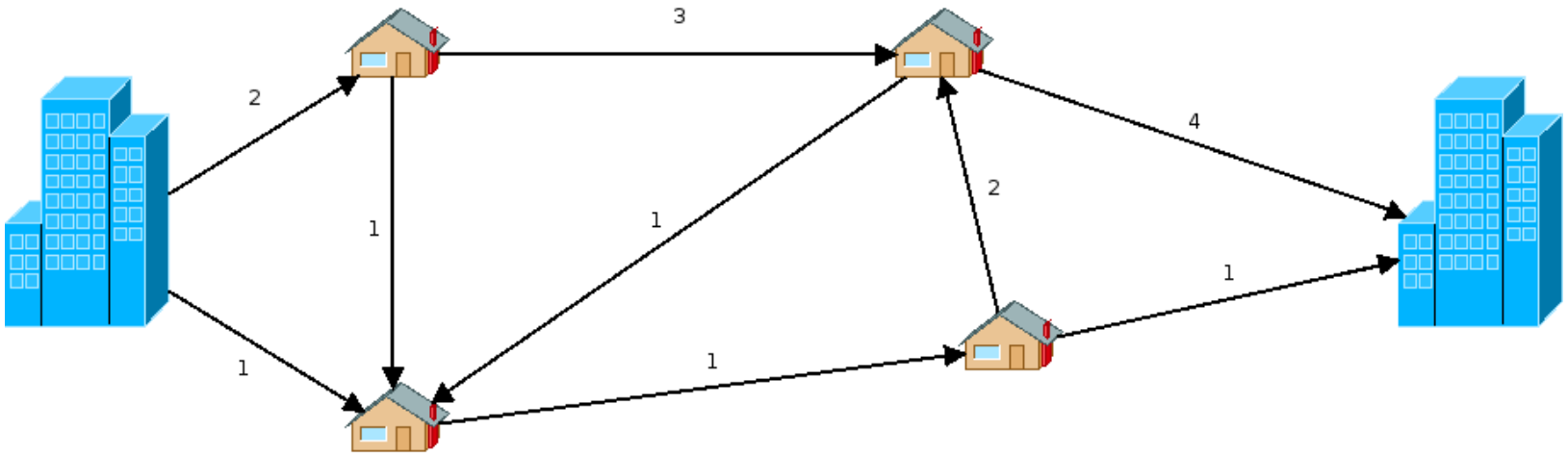
Consiste à initialiser le problème, et parcourir les noeuds pour l'application du poussage et ré-étiquetage.

Algorithme Générique :

1: Initialisation()
2: **while** Il existe un noeud actif *i* **do**
3: Pousser-Réétiqueter(i)
4: **end while**

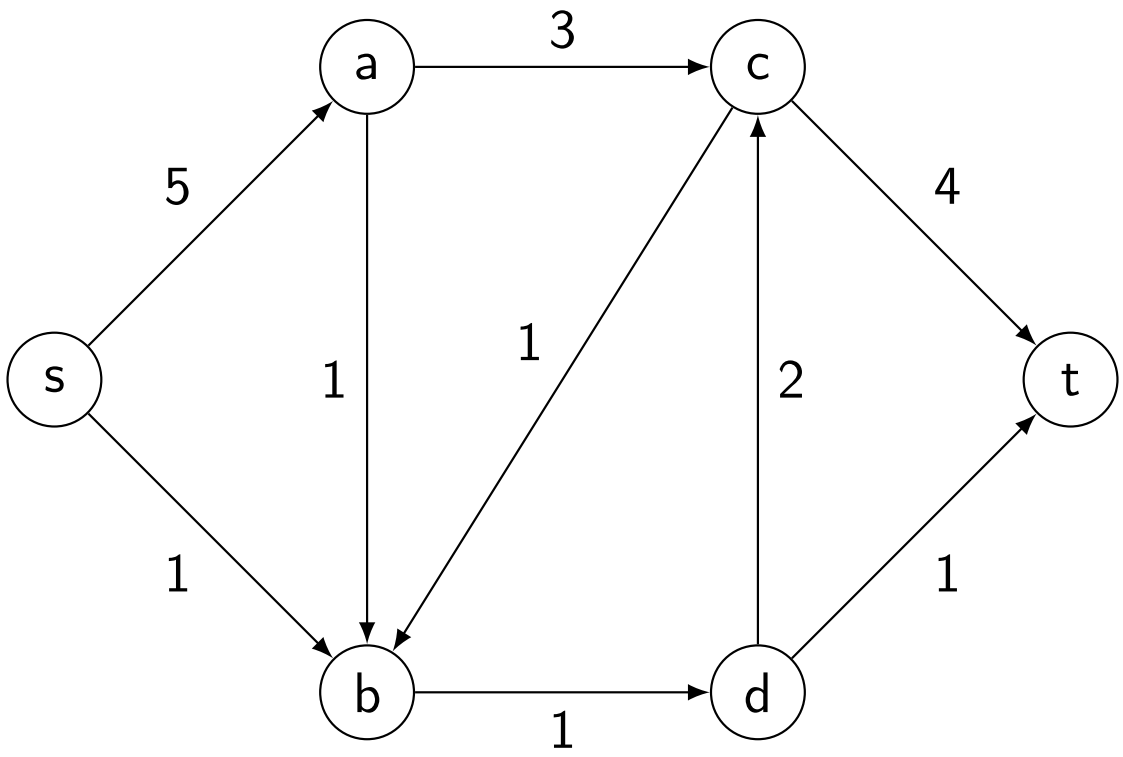
Sur le graphe de départ

Reprenons notre entreprise ...

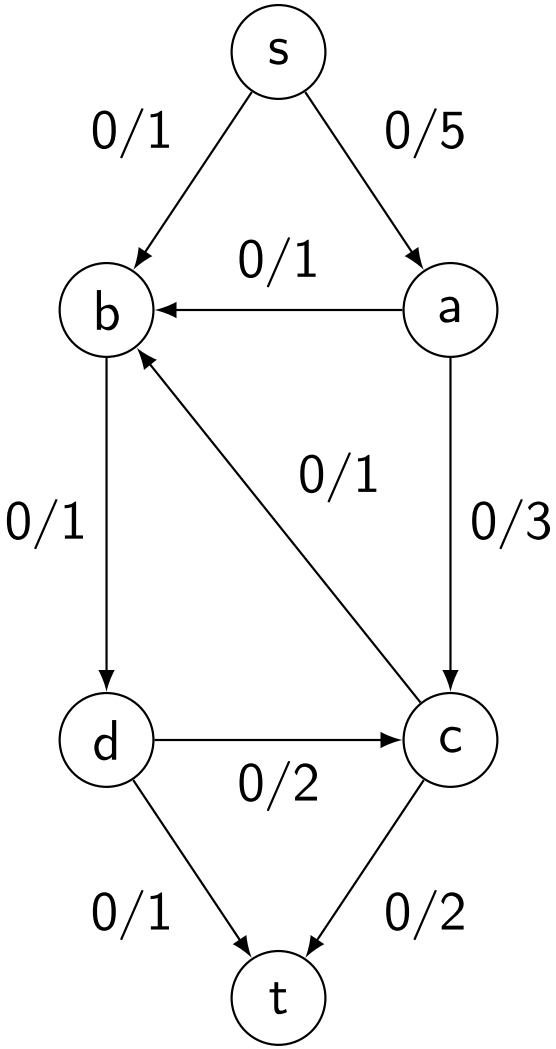


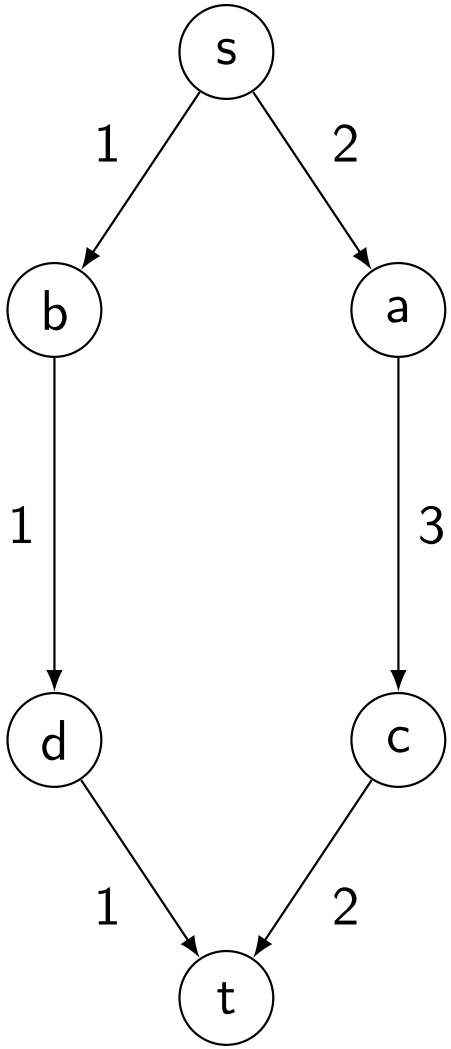
Sur le graphe de départ

. . . et associons lui un graphe.



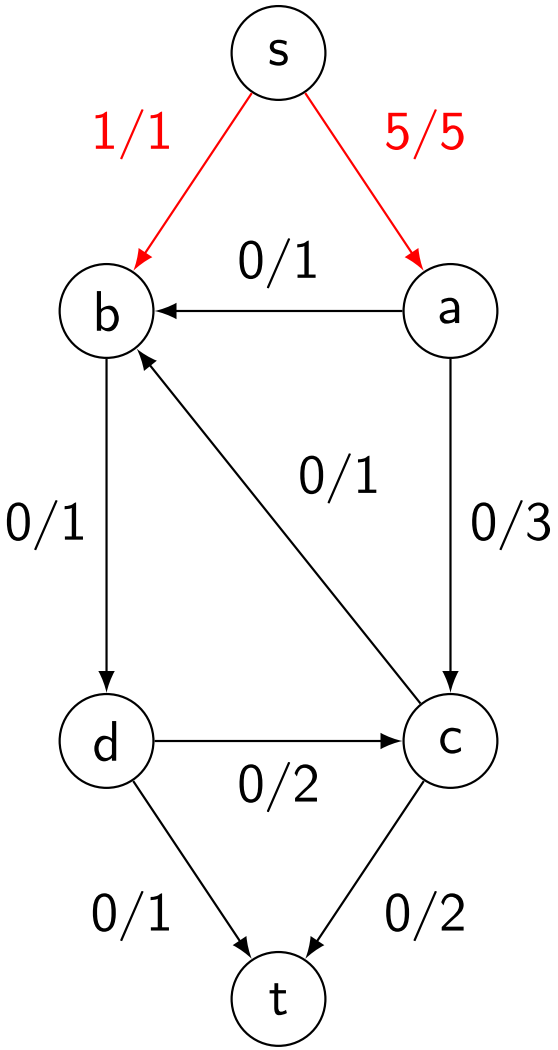
Initialisation

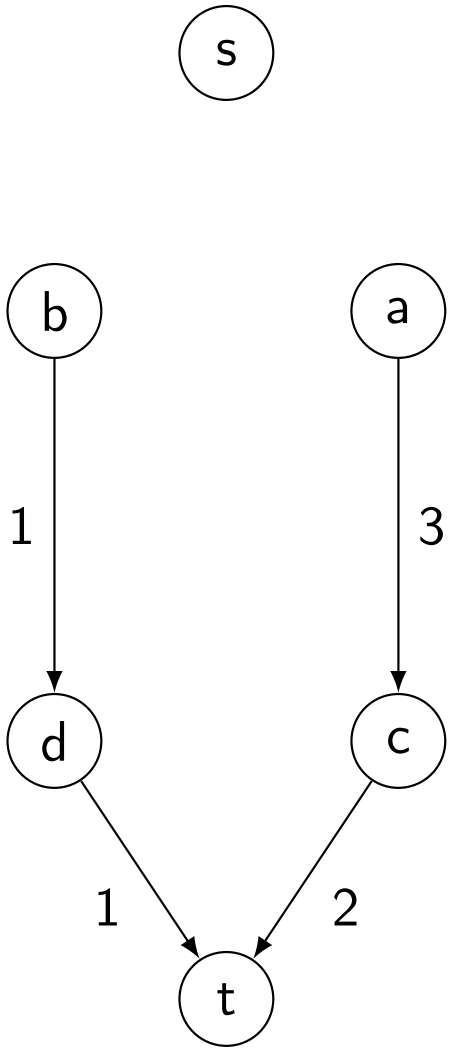




i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	0	2
b	0	2
c	0	1
d	0	1
t	0	0

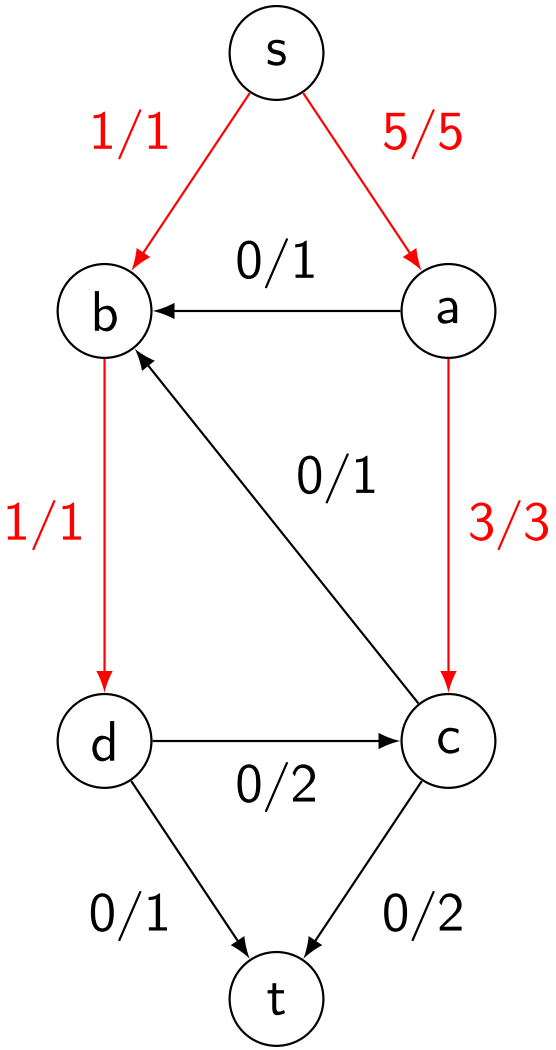
Phase 1 - Poussage

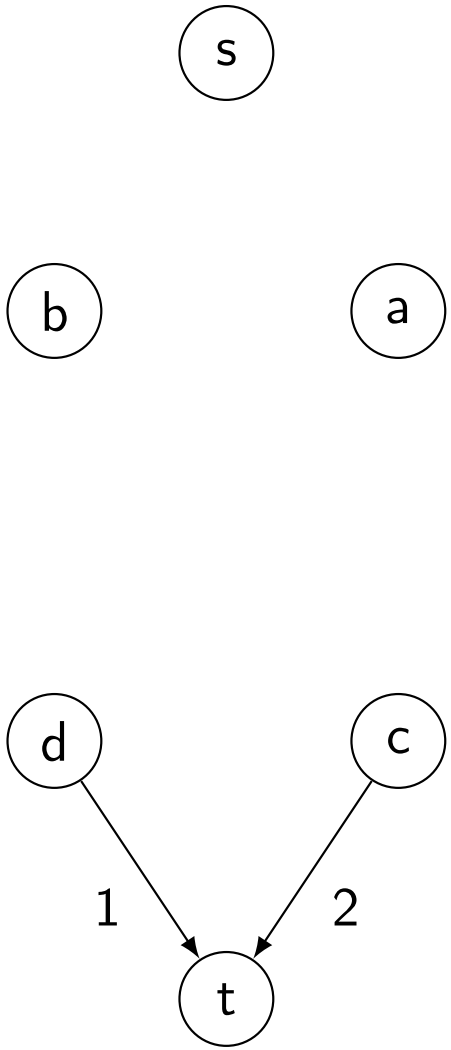




i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	5	2
b	1	2
c	0	1
d	0	1
t	0	0

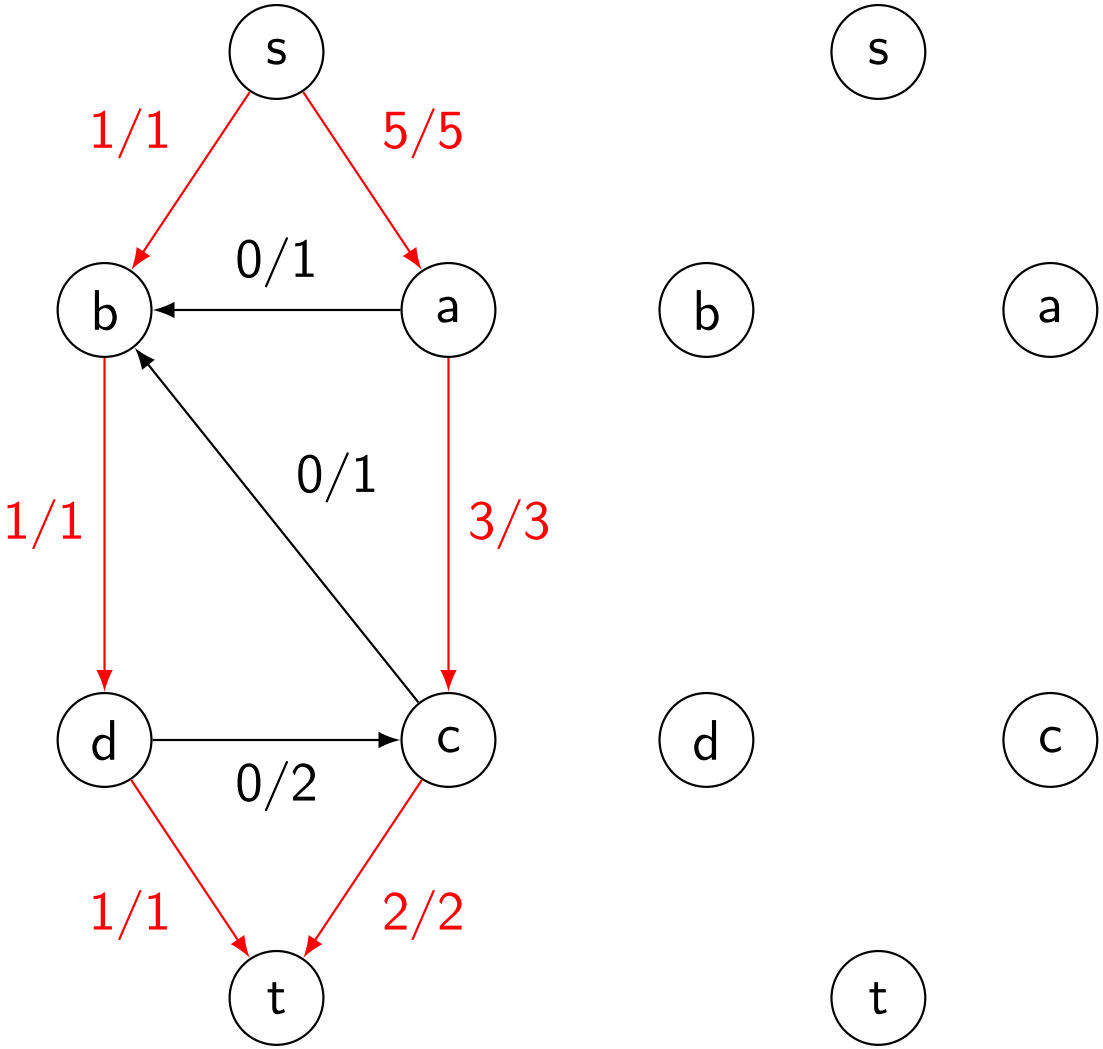
Phase 1 - Poussage





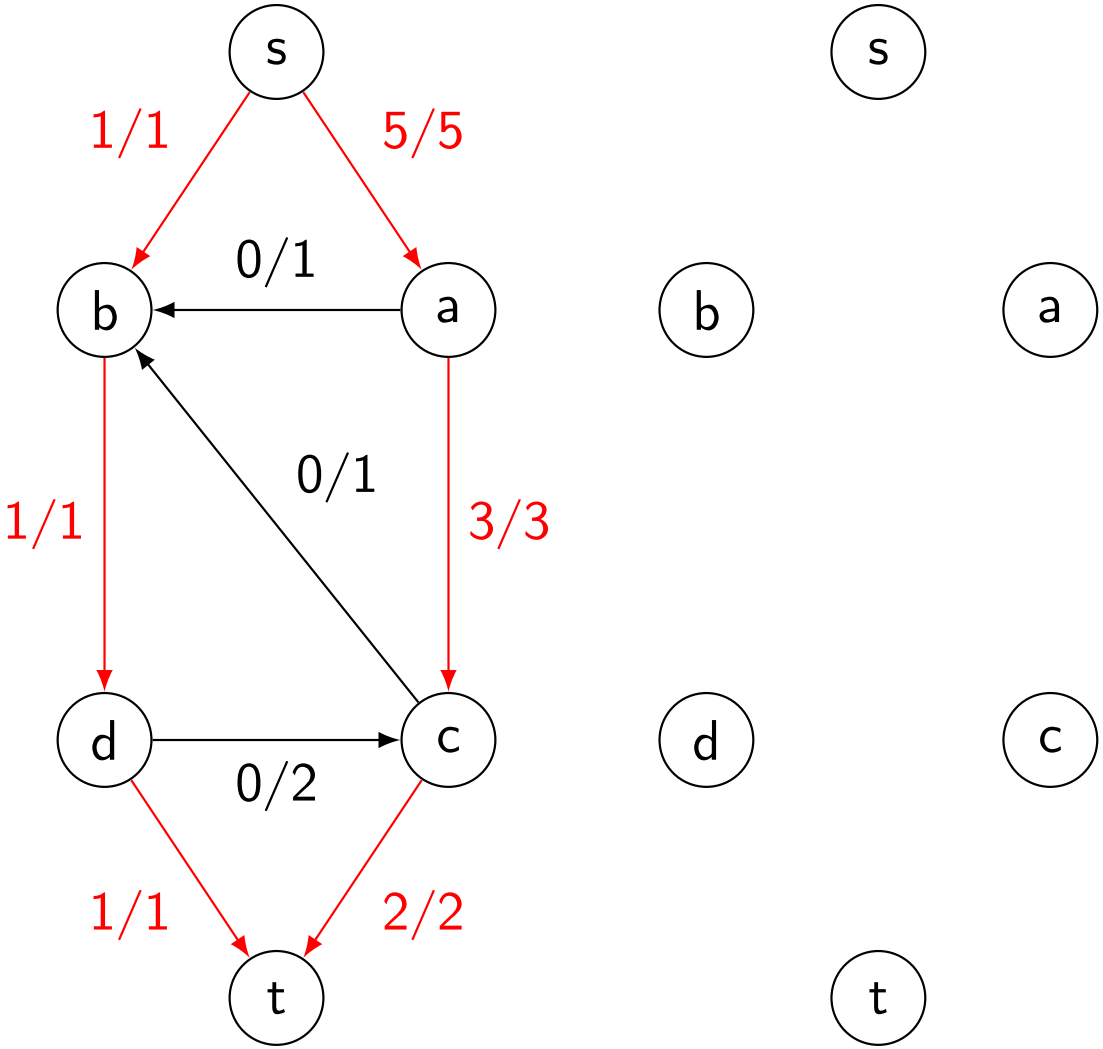
i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	0	2
c	3	1
d	1	1
t	0	0

Phase 1 - Poussage



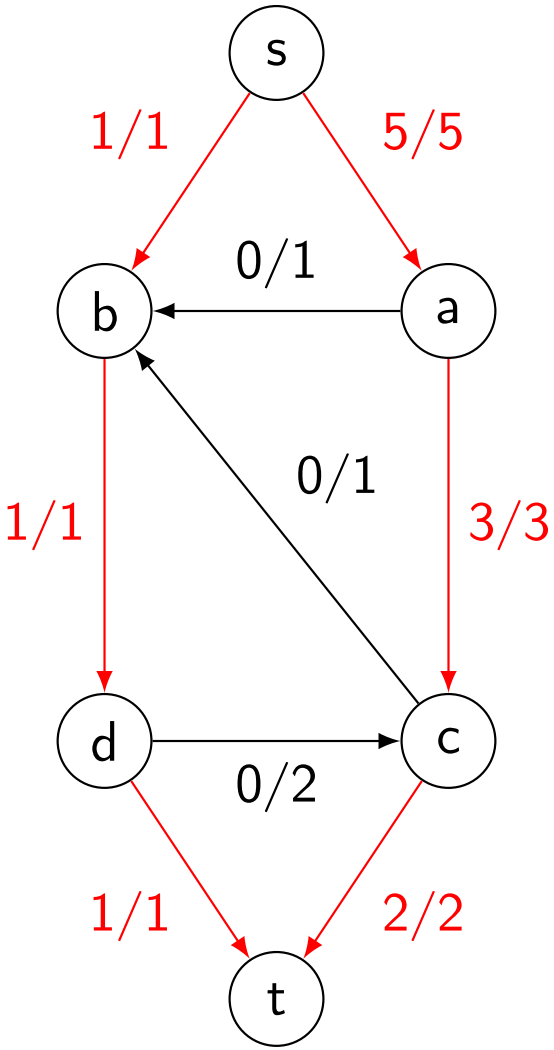
i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	0	2
c	1	1
d	0	1
t	3	0

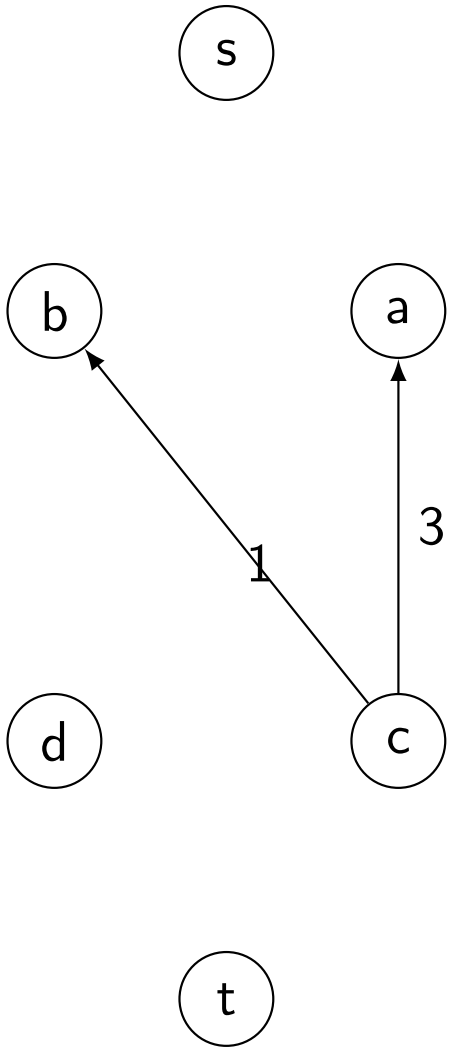
Phase 1 - Réétiquettage



i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	0	2
c	1	2
d	0	1
t	3	0

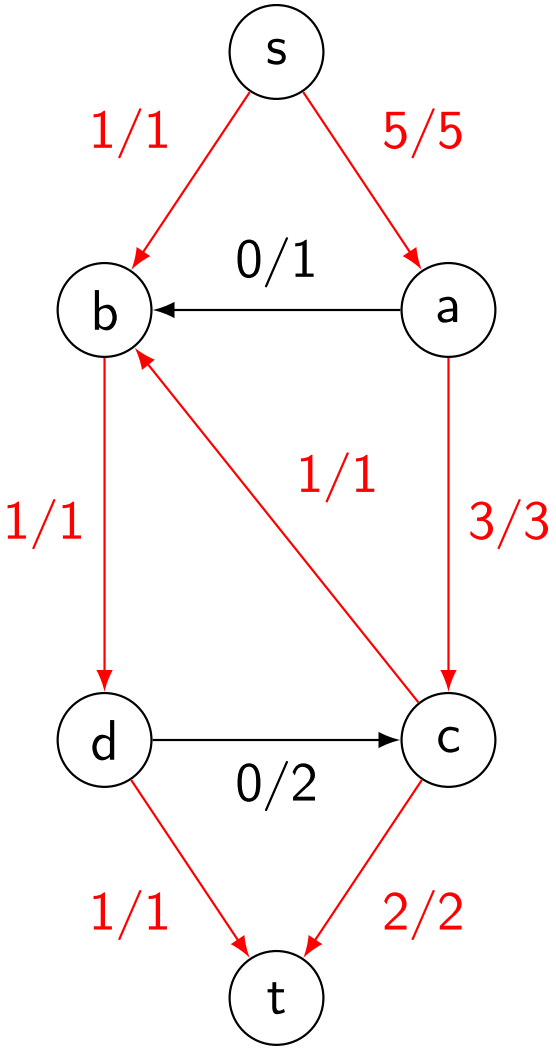
Phase 1 - Réétiquettage

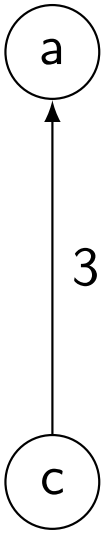




i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	0	2
c	1	2
d	0	1
t	3	0

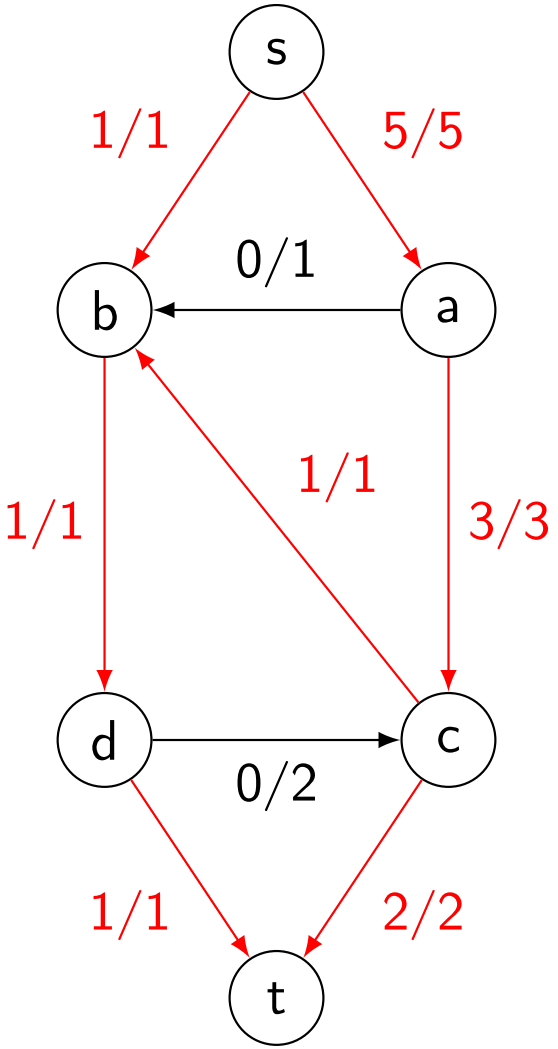
Phase 2 - Poussage

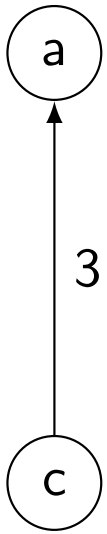




i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	1	2
c	0	2
d	0	1
t	3	0

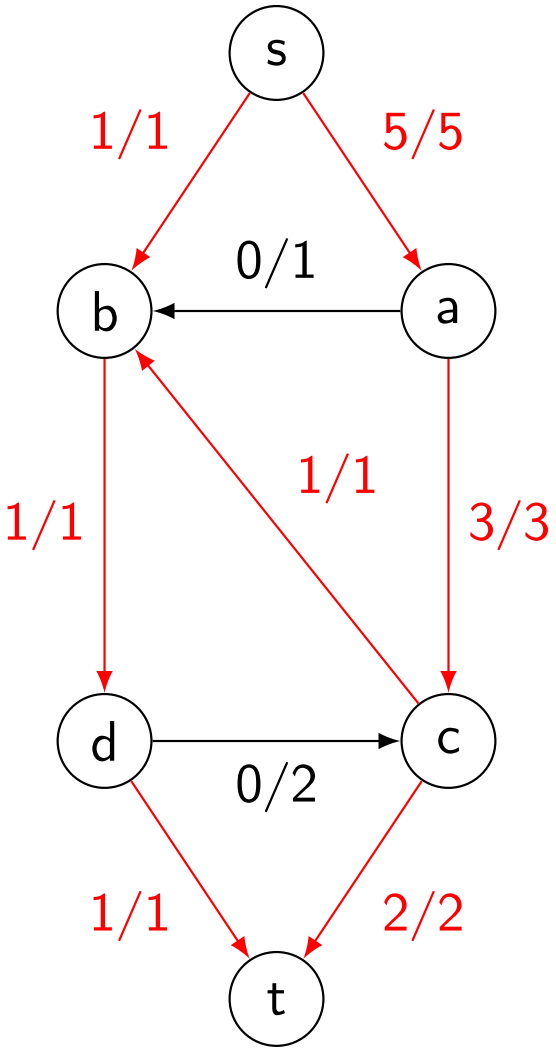
Phase 2 - Réétiquettage

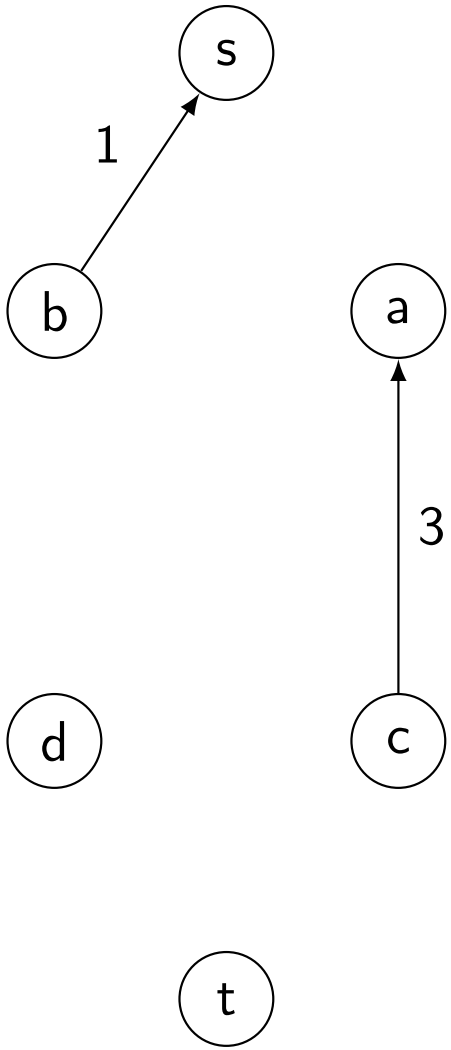




i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	1	7
c	0	2
d	0	1
t	3	0

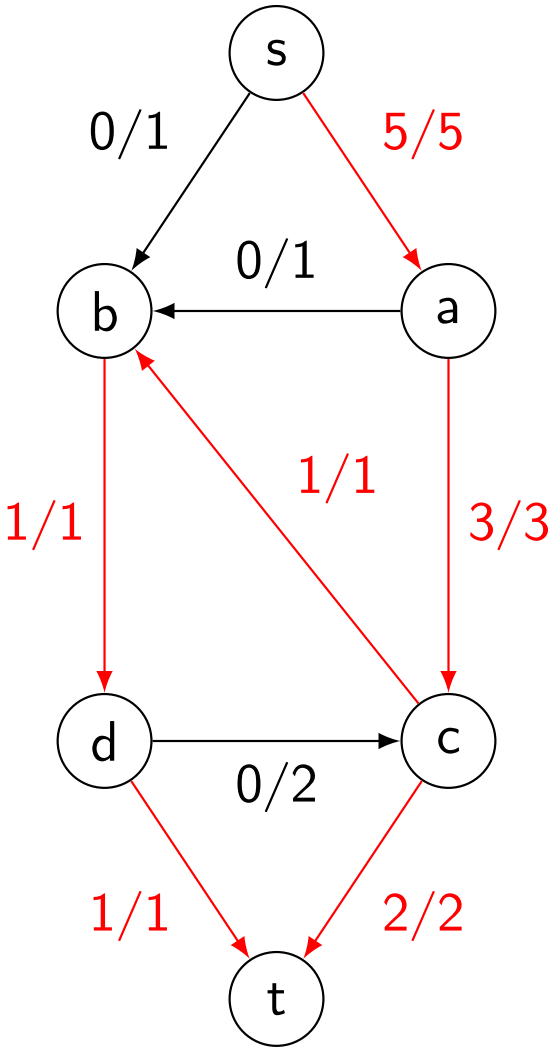
Phase 2 - Réétiquettage

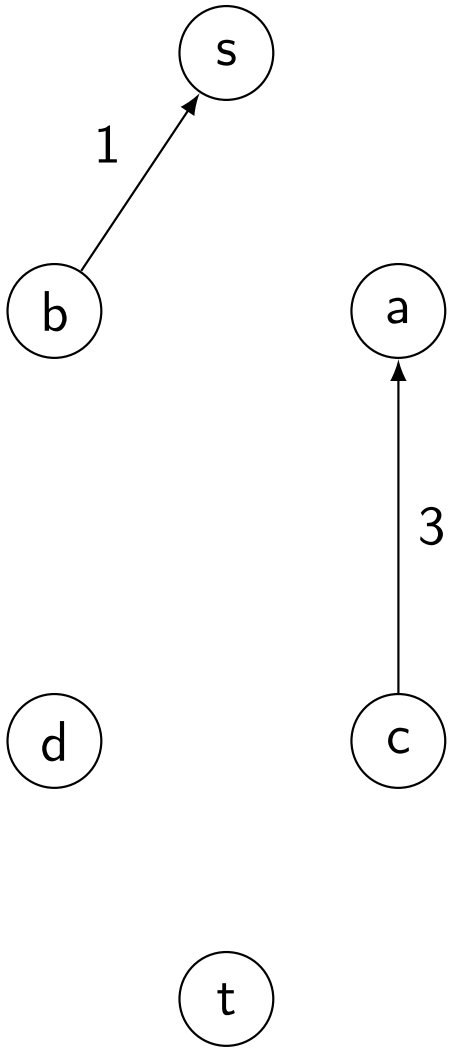




i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	1	7
c	0	2
d	0	1
t	3	0

Phase 3 - Poussage





i	$e(i)$	$d(i)$
s	∞	6*
a	2	2
b	0	7
c	0	2
d	0	1
t	3	0

Une question de choix

Les algorithmes dérivés sont basés sur un choix plus judicieux des sommets actfis à traiter.

Une question de choix

Les algorithmes dérivés sont basés sur un choix plus judicieux des sommets actfis à traiter.

L'algorithme FIFO : dès qu'un noeud devient actif, on le place dans une file. On traite alors les sommets de la file dans l'ordre *First In First Out*

Une question de choix

Les algorithmes dérivés sont basés sur un choix plus judicieux des sommets actfis à traiter.

L'algorithme FIFO : dès qu'un noeud devient actif, on le place dans une file. On traite alors les sommets de la file dans l'ordre *First In First Out*

L'algorithme High Label : on choisit de préférence, le noeud actif ayant la plus grande distance au puits

Complexités

	Algorithme	Complexité
Chaînes améliorantes	Edmonds-Karp	$O(SA^2)$
	Dinic	$O(S^2A)$
Poussage Réétiquetage	Générique	$O(S^2A)$
	FIFO	$O(S^3)$
	High Label	$O(S^2\sqrt{A})$

Plan

Générateur de graphe aléatoire

- Deux états "relié" et "non relié"

Générateur de graphe aléatoire

- Deux états "relié" et "non relié"
- Initialise tous les noeuds sauf la source à "non relié"

Générateur de graphe aléatoire

- Deux états "relié" et "non relié"
- Initialise tous les noeuds sauf la source à "non relié"
- Construit un arbre

Générateur de graphe aléatoire

- Deux états "relié" et "non relié"
- Initialise tous les noeuds sauf la source à "non relié"
- Construit un arbre
- Calcule le nombre de voisins (loi de Poisson)

Générateur de graphe aléatoire

- Deux états "relié" et "non relié"
- Initialise tous les noeuds sauf la source à "non relié"
- Construit un arbre
- Calcule le nombre de voisins (loi de Poisson)
- Relie les points aléatoirement

Les tests

- Définit la densité : $r = \frac{m}{n}$

Les tests

- Définit la densité : $r = \frac{m}{n}$
- Fait varier le nombre de noeuds

Les tests

- Définit la densité : $r = \frac{m}{n}$
- Fait varier le nombre de noeuds
- Réalise les trois algorithmes sur 100 graphes aléatoires différents

Les tests

- Définit la densité : $r = \frac{m}{n}$
- Fait varier le nombre de noeuds
- Réalise les trois algorithmes sur 100 graphes aléatoires différents
- Trace les courbes

Les résultats attendus

Pour la densité de n :

Les résultats attendus

Pour la densité de n :

- Une complexité en $O(n^4)$ pour Dinic

Les résultats attendus

Pour la densité de n :

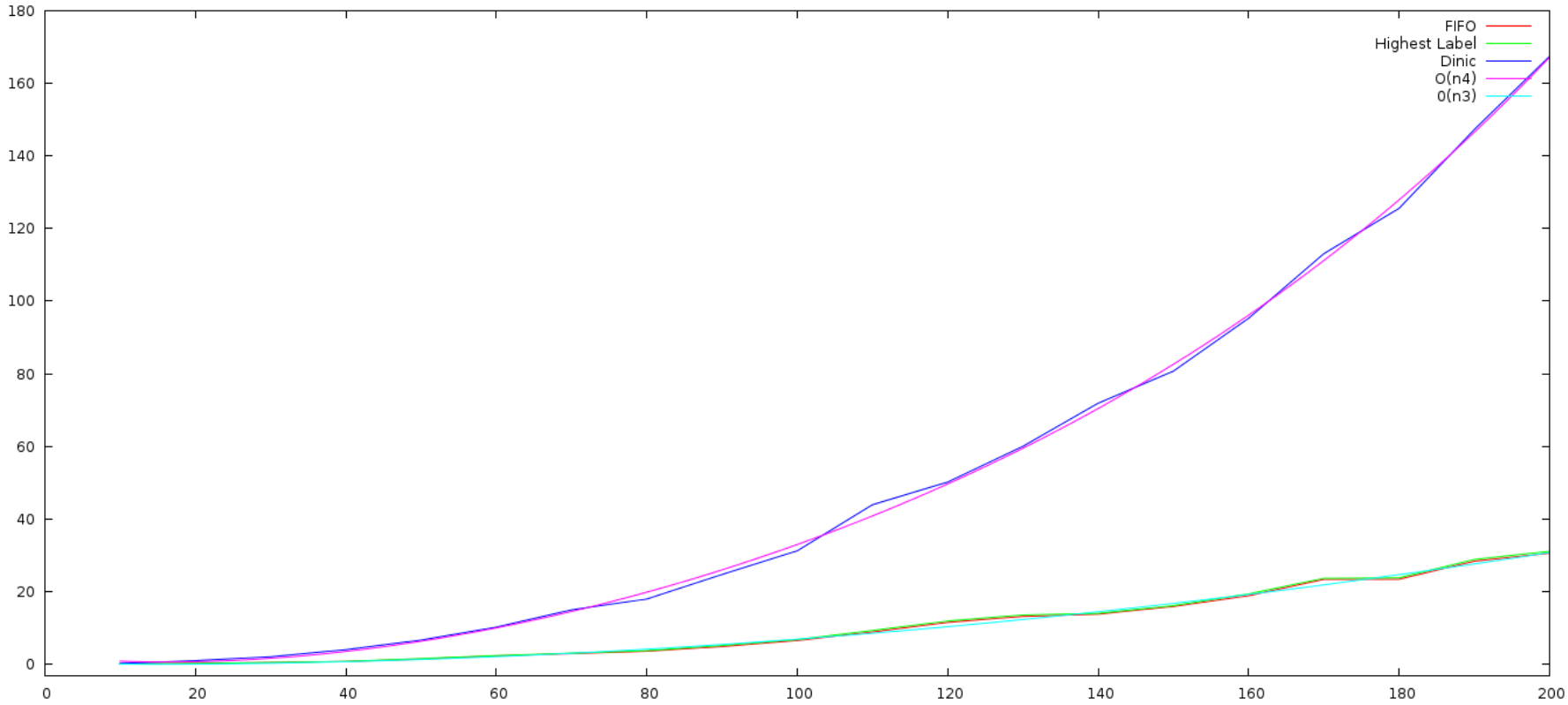
- Une complexité en $O(n^4)$ pour Dinic
- Une complexité en $O(n^3)$ pour les algorithmes FIFO et High Label

Les résultats attendus

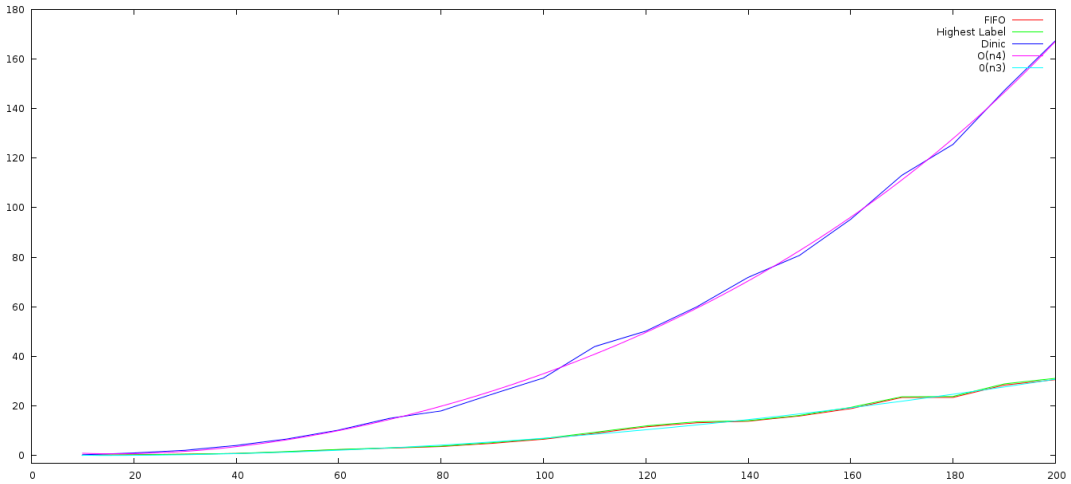
Pour la densité de n :

- Une complexité en $O(n^4)$ pour Dinic
- Une complexité en $O(n^3)$ pour les algorithmes FIFO et High Label
- Une exécution plus rapide pour FIFO et High Label

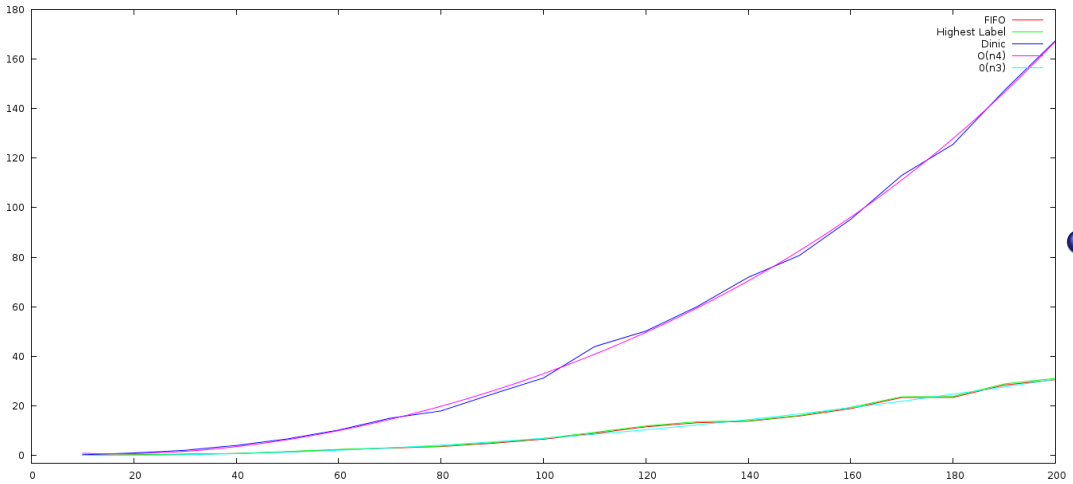
Les résultats obtenus



Les résultats obtenus

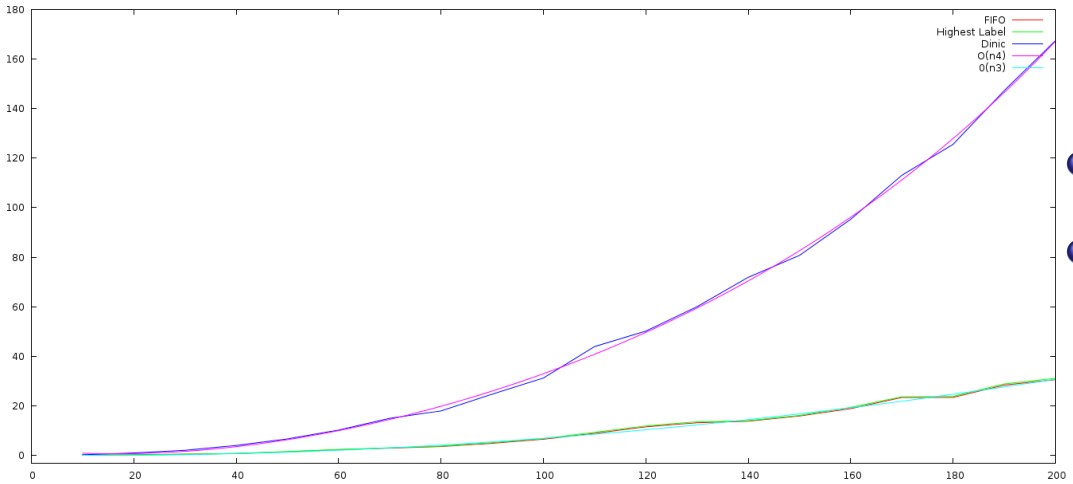


Les résultats obtenus



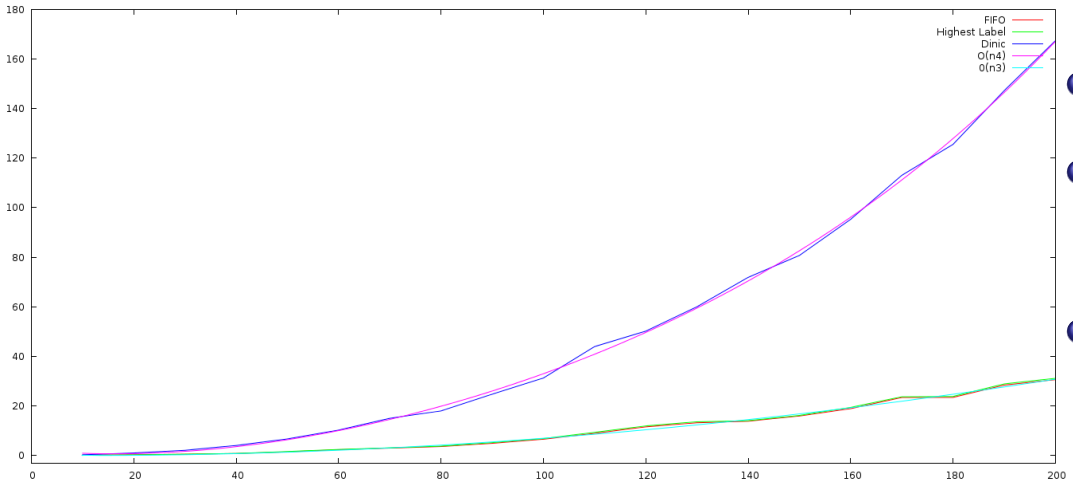
- $O(n^4)$ pour Dinic

Les résultats obtenus



- $O(n^4)$ pour Dinic
- $O(n^3)$ pour les algorithmes de préflots

Les résultats obtenus



- $O(n^4)$ pour Dinic
- $O(n^3)$ pour les algorithmes de préflots
- Un temps égal pour les algorithmes de préflots

Plan

Conclusion

- Algorithmes intéressants (complexités, principes, fonctions de préflots, ...)

Conclusion

- Algorithmes intéressants (complexités, principes, fonctions de préflots, ...)
- Parmis les plus rapides en pratique et en théorie