

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تهران

پیشینه علم

روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

برنامه‌ریزی عدد صحیح



حسین کریمی

1

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تهران

فهرست

- مقدمه
- محدودیت‌های دارای متغیرهای ناپیوسته
- هزینه‌های ثابت
- محدودیت‌های انتخاب
- محدودیت‌های شرطی
- مجموعه مرتب‌شده ویژه
- مدل‌سازی توابع خطی قطعه‌ای
- حذف ضرب متغیرهای تصمیم و خطی‌سازی آن‌ها
- مطالعات بیشتر
- تمرین

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



2

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تهران

محدودیت‌های دارای متغیرهای ناپیوسته

- اگر متغیری بخواهد مقدارش یا صفر شود و یا عددی بین یک بازه پیوسته، آنگاه آن را نمی‌توان به صورت خطی تبدیل کرد و راهی جز استفاده از متغیرهای دودویی وجود ندارد.

$$x = 0 \text{ or } 1 \leq x \leq u$$


- مثال: فرض کنید که قرار از مقداری از مواد اولیه را از تامین کنندگانی سفارش دهید. حال اگر تامین کننده انتخاب شود، مواد اولیه به صورت دسته‌ای در مقادیری بین یک حد بالا و پایین انتخاب خواهد شد.

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



3

روش تبدیل

محدودیت‌های دارای متغیرهای ناپیوسته-ادامه

$$y = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & l \leq x \leq u \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} &x \leq uy \\ &x \geq ly \\ &y \in \{0,1\}, x \geq 0 \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

روش تبدیل

هزینه‌های ثابت

هزینه‌های ثابت در خیلی از مسئله‌ها کاربرد دارد. اما گاهی اوقات می‌خواهیم هزینه ثابت هنگامی اثرگذار باشد که هزینه متغیر مقدار گرفته باشد. در واقع، تابع هزینه به صورت تصویر زیر خواهد شد.

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ k + cx & x > 0 \end{cases}$$

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

روش تبدیل:

هزینه‌های ثابت-ادامه

$$C(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ k + cx & x > 0 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} &C(x, y) = ky + cx \\ &x \leq My \\ &y \in \{0,1\}, x \geq 0 \end{aligned}$$

M بیشترین مقداری است که x می‌تواند بگیرد.

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

محدودیت‌های انتخاب

انتخاب یکی از دو محدودیت

■ انتخاب یکی از محدودیت را نمی‌شود توسط برنامه‌ریزی خطی حل کرد، زیرا در برنامه‌ریزی خطی همه محدودیت‌ها برقرار هستند.

$$\sum_{j \in J} a_{1j} x_j \leq b_1 \quad \text{or} \quad \sum_{j \in J} a_{2j} x_j \leq b_2$$

■ مثال: دو حالت تولیدی در مسائل برنامه‌ریزی تولید می‌تواند اتفاق بیفتد. حل باید مدل بتواند یکی از آن‌ها را انتخاب کند.

۷

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

محدودیت‌های انتخاب-ادامه

■ روش تبدیل

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{1j} x_j &\leq b_1 \\ \text{or} \\ \sum_{j \in J} a_{2j} x_j &\leq b_2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \sum_{j \in J} a_{1j} x_j &\leq b_1 + M_1 y_1 \\ \sum_{j \in J} a_{2j} x_j &\leq b_2 + M_2 (1 - y_1) \\ y_1 &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

۸

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

محدودیت‌های انتخاب-ادامه

انتخاب حداکثر m متغیر باینری از n متغیر باینری $m \leq n$

$$\sum_{j=1}^n x_j \leq m$$

انتخاب حداقل m متغیر باینری از n متغیر باینری


$$\sum_{j=1}^n x_j \geq m$$

انتخاب m متغیر باینری از n متغیر باینری

$$\sum_{j=1}^n x_j = m$$

۹

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح


محدودیت‌های انتخاب-ادامه

انتخاب حداکثر m محدودیت از n محدودیت $m \leq n$


$$\sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_{ij} \leq b_i + M_i y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \geq n - m$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

۱۰

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح


محدودیت‌های انتخاب-ادامه

انتخاب حداقل m محدودیت از n محدودیت $m \leq n$


$$\sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_{ij} \leq b_i + M_i y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq n - m$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

۱۱

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح


محدودیت‌های انتخاب-ادامه

انتخاب m محدودیت از n محدودیت $m \leq n$

$$\sum_{j=1}^{n'} a_{ij} x_{ij} \leq b_i + M_i y_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = n - m$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

۱۲

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

محدودیت‌های شرطی

■ اگر محدودیت $\sum_{j \in J} a_{1j}x_j \leq b_1$ اتفاق بیفتد، آنگاه محدودیت $\sum_{j \in J} a_{2j}x_j \leq b_2$ به وقوع بپیوندد.

این عبارت، معادل عبارت زیر است.

$$\sum_{j \in J} a_{1j}x_j > b_1$$

or

$$\sum_{j \in J} a_{2j}x_j \leq b_2$$

۱۳

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

محدودیت‌های شرطی - ادامه

■ روش تبدیل

$$\sum_{j \in J} a_{1j}x_j > b_1 \quad \sum_{j \in J} a_{1j}x_j \geq b_1 + \varepsilon - M_1y_1$$

or $\sum_{j \in J} a_{2j}x_j \leq b_2$ \longrightarrow $\sum_{j \in J} a_{2j}x_j \leq b_2 + M_2(1 - y_1)$

$y_1 \in \{0, 1\}$

۱۴

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

محدودیت‌های شرطی - ادامه

■ اگر x اتفاق بیفتد، آنگاه y اتفاق بیفتد.

■ x اتفاق نیفتد.

■ x اتفاق افتاد، y اتفاق نیفتد و بالعکس

■ اگر x و y اتفاق افتاد، آنگاه z اتفاق بیفتد.


■ اگر x یا y اتفاق افتاد، آنگاه z اتفاق بیفتد.

■ اگر m یا بیشتر از n متغیر اتفاق افتاد، آنگاه y اتفاق افتد.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - m + 1}{n - m + 1} \leq y$$

۱۵

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



محدودیت‌های شرطی – ادامه

مثال

■ اگر $x \leq a$ ، آن‌گاه $y \geq b$ ، در غیر این صورت $y \leq c$ ، فرض بر این است که دو متغیر x, y عدد صحیح هستند و $b \geq c$ این شرط را به صورت محدودیت‌های خطی بنویسید.


پاسخ

$$((LB_x \leq x \leq a) \& (b \leq y \leq UB_y)) XOR ((a+1 \leq x \leq UB_x) \& (LB_y \leq y \leq c))$$

$$(a+1)z + LB_x(1-z) \leq x \leq UB_x z + a(1-z)$$

$$LB_y z + b(1-z) \leq y \leq cz + UB_y(1-z)$$

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



محدودیت‌های شرطی – ادامه

مثال

■ شروط زیر را به صورت محدودیت‌ها خطی بنویسید. (فرض کنید که متغیر x عدد صحیح است.)

$x = a \longrightarrow y = 1$


$x \neq a \longrightarrow y = 0$

حل

$x \leq a-1 \text{ or } x \geq a+1 \longrightarrow$

$$\begin{aligned} x &\leq (a-1)z_1 + ay + UBz_r \\ x &\geq LBz_1 + ay + (a+1)z_r \\ z_1 + y + z_r &= 1 \end{aligned}$$

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



مجموعه مرتب‌شده ویژه

■ محدودیت‌های مشخصی در مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح وجود دارد که خیلی معمول هستند. دو نوع معروف تحت عنوان مجموعه مرتب‌شده ویژه ۱ و ۲ SOS1 و SOS2 (Special Ordered Sets) شناخته می‌شوند.

SOS1

■ در یک مجموعه از تصمیمات صفر و یکی، حداکثر یکی از متغیرها می‌تواند برابر یک شود.

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq 1$$

■ در حالت عمومی، اگر $x_i \leq u_i$ ، آنگاه محدودیت SOS1 به صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$$

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



دانشگاه تهران
تهرآن


مجموعه مرتب شده ویژه-۱ ادامه

- اولین بار این مجموعه توسط Beale در سال ۱۹۶۳ ارائه شد. اما نامگذاری آن توسط Tomlin و Beale در سال ۱۹۷۰ انجام شد.
- دلیل اهمیت مجموعه مرتب شده ویژه در چیست؟
- تعداد گره‌ها در حل روش شاخه و کران کاهش می‌یابد.

۱۹

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح





دانشگاه تهران
تهرآن


مجموعه مرتب شده ویژه-۱ ادامه

SOS2

- SOS2 وقتی وجود دارد که حداکثر دو متغیر می‌تواند مقدار بگیرد و باقی متغیرها باید صفر باشند، علاوه بر این، این دو متغیر باید همسایه باشند. مثلاً y_i و y_{i+1}
- از مهمترین کاربردهای SOS2 در ساده‌سازی توابع خطی قطعه‌ای است.
- SOS2 شاخه زدن را موثر می‌کند، اما ممکن است از مدل ایده آل دور شویم.
- SOS2 برای توابع خطی قطعه‌ای گسسته از هم ناکارا است.

۲۰

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح





دانشگاه تهران
تهرآن

مدل‌سازی توابع خطی قطعه‌ای

- از کاربردهای تابع خطی قطعه‌ای در تقریب توابع غیرخطی است. همچنین، گاهی اوقات، خود تابع بر اساس مقادیر متغیر تصمیم به این شکل در خواهد آمد.



۲۱

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



مدل سازی توابع خطی قطعه‌ای - ادامه

■ هر قطعه از تابع شامل بازه $[a_i, b_i]$ است.

■ به صورت کلی، این تابع به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} f(a_i) + \frac{x - a_i}{b_i - a_i} [f(b_i) - f(a_i)] & \text{if } x \in [a_i, b_i], a_i < b_i \\ f(a_i) & \text{if } x = a_i = b_i \end{cases}$$

■ در خیلی از موارد که تابع به صورت پیوسته است $b_i = a_{i+1}$ می‌باشد.

۲۲

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

مدل سازی توابع خطی قطعه‌ای - ادامه

■ فرمول تبدیل شده این تابع به صورت زیر است.

$$\forall_i \begin{cases} x = \lambda a_i + \mu b_i \\ z = \lambda f(a_i) + \mu f(b_i) \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases}$$

■ i به x متعلق به بازه $[a_i, b_i]$ است. و z نشان دهنده $f(x)$ است.

۲۳

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح

مدل سازی توابع خطی قطعه‌ای - ادامه

■ فرمول قبلی به فرمول زیر تبدیل خواهد شد. محدودیت‌های * و **

همان مفهوم و کاربرد SOS2 است.

$$x = \sum_i \lambda_i a_i$$

$$z = \sum_i \lambda_i f(a_i)$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$


$$\lambda_1 \leq \delta_1, \lambda_i \leq \delta_{i-1} + \delta_i, \lambda_i \leq \delta_{i-1} \quad *$$

$$\sum_i \delta_i = 1 \quad **$$

$$\delta_i \in \{0, 1\}, \lambda_i \geq 0$$

۲۴

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



حذف ضرب متغیرهای تصمیم و خطی‌سازی آن‌ها


- روش تبدیل ضرب دو متغیر باینری (غیرخطی) در هم به یک مدل خطی شده

$$x_1, x_2 \quad \longrightarrow \quad y \leq x_1, y \leq x_2, y \geq x_1 + x_2 - 1$$
- روش تبدیل ضرب یک متغیر باینری x_1 در یک متغیر نامنفی x_2 (غیرخطی) در هم به یک مدل خطی شده

$$x_1, x_2 \quad \longrightarrow \quad y \leq UBx_1, y \leq x_2, y \geq x_2 + UB(x_1 - 1)$$

۲۵

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح




مطالعات بیشتر

- Guéret, C., Prins, C., & Sevaux, M. (1999). Applications of optimization with Xpress-MP. *contract*, 00034.
- Guide, A. M. (2012). Integer Programming Tricks. *Paragon Decision Technology BV*.
- Eiselt, H. A., & Sandblom, C. L. (2013). *Integer programming and network models*. Springer Science & Business Media.
- Hooker, J. N. Formulating Good MILP Models. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*.

۲۶

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح



تمرین

- دو مدل دیگر از نوشتن محدودیت‌های تابع خطی قطعه‌ای را بنویسید.
- دو مدل دیگر از نحوه تبدیل ضرب دو متغیر باینری به محدودیت‌های خطی را بنویسید.
- با استفاده از مفهوم SOS2، یک نوع تبدیل برای متغیر $|x|$ ارائه دهید.
- عبارت زیر را خطی‌سازی کنید.

$$z = \sum_{i=1}^x a_i y_i$$

$$y_i \geq 0, x \in Z^+$$

۲۷

برنامه‌ریزی عدد صحیح - روش‌های مدل‌سازی برنامه‌ریزی عدد صحیح
