بسم الله الرحمن الرحیم

روش‌های توانمندسازی مدل‌های ریاضی عدد صحیح

برنامه‌ریزی عدد صحیح

حسین کریمی

فهرست

- مقدمه
- روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم
- ثابت کردن متغیرهای تصمیم
- حذف محدودیت‌های اضافی
- تمرین
- محدود کردن محدودیت‌ها

مقدمه

- ایجاد یک مدل‌سازی خوب عدد صحیح برای یک مسئله هم یک هنر است و هم موضوعی کاملا علمی
- در این بخش، قواعدی مطرح خواهد که به طور خودکار، مدل را بهبود خواهند داد.
- این قواعد قبل از حل مدل عدد صحیح انجام خواهند شد.
- به همین دلیل به آن‌ها پیش‌پردازش‌ها یا پیش‌حل‌ها می‌گویند.
- نکته: امروزه اغلب حل‌کننده‌ها از پیش‌پردازش‌های بیان شده در این بخش استفاده می‌کنند.

مقدمه—ادامه

- **روش‌های توانمندسازی مدل‌های ریاضی عدد صحیح**
  - تمرکز بر روی متغیرهای تصمیم
    - محدودکردن حدود متغیرهای تصمیم
    - ثابت کردن مقادیر متغیرهای تصمیم
  - تمرکز بر روی محدودیت‌ها
    - محدودتر کردن محدودیت‌ها
    - حذف محدودیت‌های اضافی
    - تجزیه مدل به مدل‌های کوچک‌تر

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم

- فرض کنید که مدل برنامه‌ریزی خطی زیر موجود است:

$$\max z = \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i \in M$$

$$lb_j \le x_j \le ub_j \qquad j \in N$$

- محدودیت‌ها را بر اساس ضرایبشان می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{j \in N: a_{ij} > ۰} a_{ij} x_j + \sum_{j \in N: a_{ij} < ۰} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i \in M$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- ممکن است که برخی از متغیرها محدود نباشند؛ در این صورت حد پایین متغیر صفر و حد بالای آن یک عدد بزرگ تخمینی قرار داده خواهد شد.
- اکنون برای این که این متغیرها، حدود محدودتری داشته باشند، آنها به صورت زیر جدا خواهند شد:

$$a_{ik}x_k + \sum_{j\in N,\, j\neq k:a_{ij}>0} a_{ij}x_j + \sum_{j\in N,\, j\neq k:a_{ij}<0} a_{ij}x_j \le b_i \qquad i\in M$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- اگر ضریب این متغیر جدا شده مثبت باشد، حد بالای آن بـه صـورت زیر ممکن است محدود شود.

$$ub_k^{new} = \frac{۱}{a_{ik}}\left(b_i - \sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}>۰} a_{ij} lb_j - \sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}<۰} a_{ij} ub_j\right)$$

- اگر ضریب این متغیر جدا شده منفی باشد، حد پایین آن بـه صـورت زیر ممکن است محدود شود.

$$lb_k^{new} = \frac{۱}{a_{ik}}\left(b_i - \sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}>۰} a_{ij} lb_j - \sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}<۰} a_{ij} ub_j\right)$$

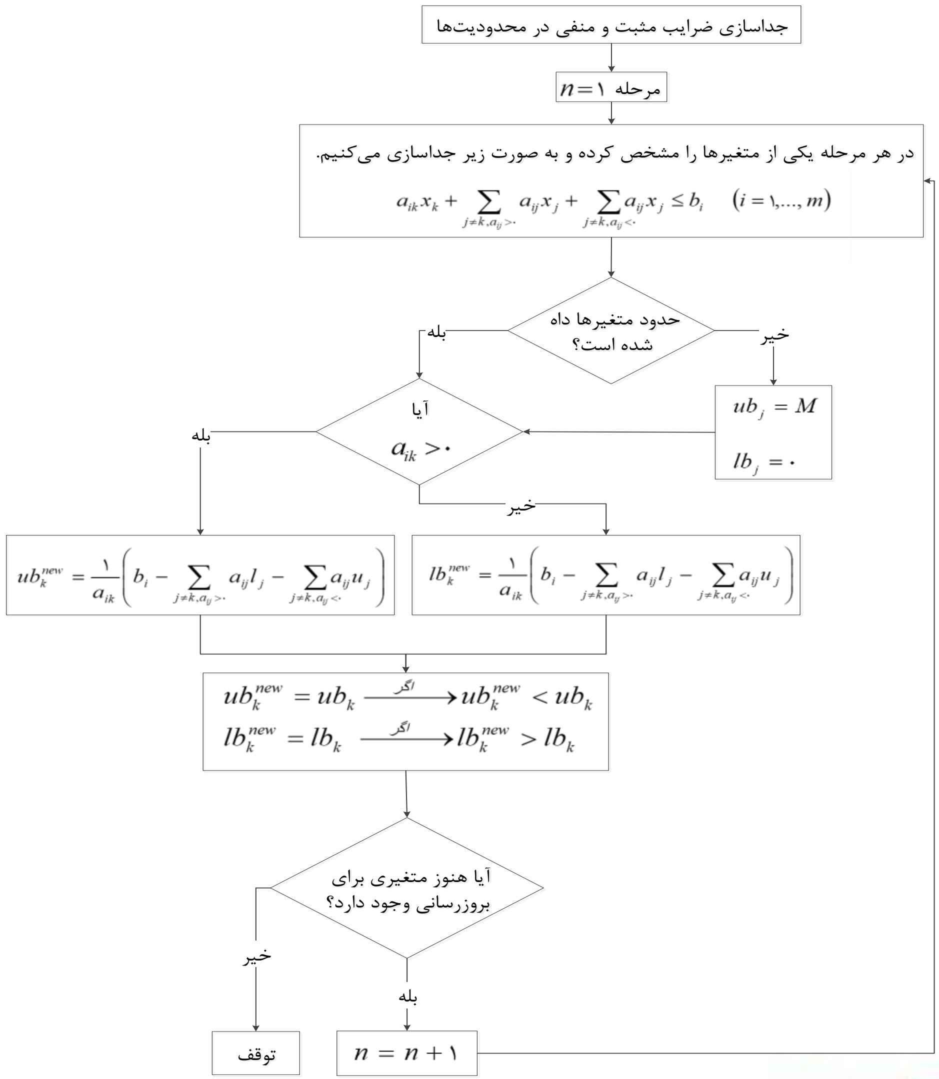
روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- حال اگر یکی از این متغیرها به صورت عدد صحیح باشند. به صـورت زیر عمل می‌شود.

$$\lceil lb_k^{new} \rceil \le x_k \le \lfloor ub_k^{new} \rfloor$$

- مراحل به روز کردن ضرایب تا هنگامی ادامه می‌یابد کـه ضـرایب بـه روز نشوند.

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه



روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مثال
- متغیرهای محدودیت‌های زیر را تا جای ممکن محدود نمایید.

$$4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 \le 13$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le -9$$

$$x_1 \ge 0$$

$$0 \le x_2 \le 3$$

$$1 \le x_3 \le 5$$

$$2 \le x_4 \le 4$$

$$x_5 \in \{0,1,2,\ldots\}$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- برای این مثال حدود پایین و بالا به صورت زیر خواهند بود:

$$ub_۱ = M , lb_۱ = ۰$$
$$ub_۲ = ۳, lb_۲ = ۰$$
$$ub_۳ = ۵, lb_۳ = ۱$$
$$ub_۴ = ۴, lb_۴ = ۲$$
$$ub_۵ = M , lb_۵ = ۰$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مرحله اول:
  - محدودیت اول

$$x_{۱}:ub_{۱}=\frac{(۱۳-۱\times۲-۲\times۰+۳\times۳+۲\times۵)}{۴}=۷.۵<M\Rightarrow ub_{۱}=۷.۵$$

$$x_{۲}:lb_{۲}=\frac{(۱۳-۴\times۰-۱\times۲-۲\times۰+۲\times۵)}{-۳}=-۷<۰\Rightarrow lb_{۲}=۰$$

$$x_{۳}:lb_{۳}=\frac{(۱۳-۴\times۰-۱\times۲-۲\times۰+۳\times۳)}{-۲}=-۱۰<۱\Rightarrow lb_{۳}=۱$$

$$x_{۴}:ub_{۴}=\frac{(۱۳-۴\times۰-۲\times۰+۳\times۳+۲\times۵)}{۱}=۳۲>۴\Rightarrow ub_{۴}=۴$$

$$x_{۵}:ub_{۵}=\frac{(۱۳-۴\times۰-۲\times۰+۳\times۳+۱\times۴)}{۲}=۱۵<M\Rightarrow ub_{۵}=۱۵$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- مرحله اول:
  - محدودیت دوم

$$x_۱ : lb_۱ = \frac{(-۹-۲\times۰-۲\times۲-۳\times۰+۱\times۵)}{-۳} = ۲.۶۷ > ۰ \Rightarrow lb_۱ = ۲.۶۷$$

$$x_۲ : ub_۲ = \frac{(-۹-۲\times۲-۳\times۰+۳\times۷.۵+۱\times۵)}{۲} = ۷.۲۵ > ۳ \Rightarrow ub_۲ = ۳$$

$$x_۳ : lb_۳ = \frac{(-۹-۲\times۰-۲\times۲-۳\times۰+۳\times۷.۵)}{-۱} = -۳.۱۷ < ۱ \Rightarrow lb_۳ = ۱$$

$$x_۴ : ub_۴ = \frac{(-۹-۲\times۰-۳\times۰+۳\times۷.۵+۱\times۵)}{۲} = ۹ > ۴ \Rightarrow ub_۴ = ۴$$

$$x_۵ : ub_۵ = \frac{(-۹-۲\times۰-۲\times۲+۳\times۷.۵+۱\times۵)}{۳} = ۴ < ۱۵ \Rightarrow ub_۵ = ۴$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مقادیر حدود پایین و بالا بعد از مرحله اول به صورت زیر خواهند بود:

مرحله اول	مرحله صفر
$ub_۱ = ۷.۵, lb_۱ = ۲.۶۷$	$ub_۱ = M, lb_۱ = ۰$
$ub_۲ = ۳, lb_۲ = ۰$	$ub_۲ = ۳, lb_۲ = ۰$
$ub_۳ = ۵, lb_۳ = ۱$	$ub_۳ = ۵, lb_۳ = ۱$
$ub_۴ = ۴, lb_۴ = ۲$	$ub_۴ = ۴, lb_۴ = ۲$
$ub_۵ = ۴, lb_۵ = ۰$	$ub_۵ = M, lb_۵ = ۰$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مرحله دوم:
  - محدودیت اول

$$x_۱ : ub_۱ = \frac{(۱۳ - ۱\times ۲ - ۲\times ۰ + ۳\times ۳ + ۲\times ۵)}{۴} = ۷.۵ = ۷.۵ \Rightarrow ub_۱ = ۷.۵$$

$$x_۲ : lb_۲ = \frac{(۱۳ - ۴\times ۲.۶۷ - ۱\times ۲ - ۲\times ۰ + ۲\times ۵)}{-۳} = -۳.۴۴ < ۰ \Rightarrow lb_۲ = ۰$$

$$x_۳ : lb_۳ = \frac{(۱۳ - ۴\times ۲.۶۷ - ۱\times ۲ - ۲\times ۰ + ۳\times ۳)}{-۲} = -۳.۱۱ < ۱ \Rightarrow lb_۳ = ۱$$

$$x_۴ : ub_۴ = \frac{(۱۳ - ۴\times ۲.۶۷ - ۲\times ۰ + ۳\times ۳ + ۲\times ۵)}{۱} = ۲۱ > ۴ \Rightarrow ub_۴ = ۴$$

$$x_۵ : ub_۵ = \frac{(۱۳ - ۴\times ۲.۶۷ - ۲\times ۰ + ۳\times ۳ + ۱\times ۴)}{۲} = ۷ > ۴ \Rightarrow ub_۵ = ۴$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مرحله دوم:
  - محدودیت دوم

$$x_۱ : lb_۱ = \frac{(-۹-۲\times۰-۲\times۲-۳\times۰+۱\times۵)}{-۳} = ۲.۶۷ > ۰ \Rightarrow lb_۱ = ۲.۶۷$$

$$x_۲ : ub_۲ = \frac{(-۹-۲\times۲-۳\times۰+۳\times۷.۵+۱\times۵)}{۲} = ۷.۲۵ > ۳ \Rightarrow ub_۲ = ۳$$

$$x_۳ : lb_۳ = \frac{(-۹-۲\times۰-۲\times۲-۳\times۰+۳\times۷.۵)}{-۳} = -۳.۱۷ < ۱ \Rightarrow lb_۳ = ۱$$

$$x_۴ : ub_۴ = \frac{(-۹-۲\times۰-۳\times۰+۳\times۷.۵+۱\times۵)}{۲} = ۹ > ۴ \Rightarrow ub_۴ = ۴$$

$$x_۵ : ub_۵ = \frac{(-۹-۲\times۰-۲\times۲+۳\times۷.۵+۱\times۵)}{۳} = ۴ = ۴ \Rightarrow ub_۵ = ۴$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج مرحله دوم برابر مرحله اول است، پس محدود کردن متغیرها متوقف خواهد شد.

مرحله اول		مرحله دوم
$ub_۱ = ۷.۵, lb_۱ = ۲.۶۷$		$ub_۱ = ۷.۵, lb_۱ = ۲.۶۷$
$ub_۲ = ۳, lb_۲ = ۰$		$ub_۲ = ۳, lb_۲ = ۰$
$ub_۳ = ۵, lb_۳ = ۱$	$\longrightarrow$	$ub_۳ = ۵, lb_۳ = ۱$
$ub_۴ = ۴, lb_۴ = ۲$		$ub_۴ = ۴, lb_۴ = ۲$
$ub_۵ = ۴, lb_۵ = ۰$		$ub_۵ = ۴, lb_۵ = ۰$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- مثال:
- متغیرهای محدودیت‌های زیر را تا جای ممکن محدود نمایید.

$$
\begin{aligned}
&۸y_{۱} + ۱۱y_{۲} - ۹y_{۳} + ۴y_{۴} \le ۰ \\
&y_{۱} - ۴y_{۲} - ۶y_{۳} + y_{۴} \le -۵ \\
&y_{۱}, y_{۲}, y_{۳}, y_{۴} \in \{۰,۱\}
\end{aligned}
$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مرحله اول:
  - محدودیت اول

$$y_1 : ub_1 = \frac{\left(0-11\times 0-4\times 0+9\times 1\right)}{8} = 1 \Rightarrow ub_1 = 1$$

$$y_2 : ub_2 = \frac{\left(0-8\times 0-4\times 0+9\times 1\right)}{11} = \left\lfloor \frac{9}{11} \right\rfloor = 0 \Rightarrow ub_2 = 0$$

- چون با توجه به حد بالای به دست آمده، می‌توان y_2 را حذف کرد، پس این کار را انجام داده و به مرحله دوم خواهیم رفت.
- محدودیت‌های جدید

$$8y_1 - 9y_3 + 4y_4 \le 0$$

$$y_1 - 6y_3 + y_4 \le -5$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مرحله دوم:
  - محدودیت اول

$$y_1 : ub_1 = \frac{(0 - 4\times 0 + 9\times 1)}{8} = 1 \Rightarrow ub_1 = 1$$

$$y_3 : lb_3 = \frac{(0 - 8\times 0 - 4\times 0)}{-9} = 0 \Rightarrow lb_3 = 0$$

$$y_4 : ub_4 = \frac{(0 - 8\times 0 + 9\times 1)}{4} = 2 > 1 \Rightarrow ub_4 = 1$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- مرحله دوم:
  - محدودیت دوم

$$y_1 : ub_1 = \frac{(-5 - 1\times 0 + 6\times 1)}{1} = 1 \Rightarrow ub_1 = 1$$

$$y_3 : lb_3 = \frac{(-5 - 1\times 0 - 1\times 0)}{-6} = \left\lceil \frac{5}{6} \right\rceil \Rightarrow lb_3 = 1$$

- چون با توجه به حد پایین به دست آمده برای y_3، می‌تـوان مقـدار ۱ را جایگزین کرد، و به مرحله سوم رفت.

- محدودیت‌های جدید

$$8y_1 + 4y_4 \le 9$$

$$y_1 + y_4 \le 1$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- مرحله سوم:
  - محدودیت اول

$$y_{۱}:ub_{۱}=\frac{(۹-۴\times ۰)}{۹}=۱\Rightarrow ub_{۱}=۱$$

$$y_{۴}:ub_{۴}=\frac{(۹-۸\times ۰)}{۴}=\left\lfloor \frac{۹}{۴}\right\rfloor =۲>۱\Rightarrow ub_{۴}=۱$$

  - محدودیت دوم

$$y_{۱}:ub_{۱}=\frac{(۱-۱\times ۰)}{۱}=۱\Rightarrow ub_{۱}=۱$$

$$y_{۴}:ub_{۴}=\frac{(۱-۱\times ۰)}{۱}=۱\Rightarrow ub_{۴}=۱$$

روش‌های محدود کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- به دلیل عدم تغییر در حدود، محدودسازی متوقف خواهد شد.

$$8y_1 + 4y_4 \le 9$$
$$y_1 + y_4 \le 1$$
$$y_2 = 0$$
$$y_3 = 1$$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم

- فرض کنید که مدل برنامه‌ریزی خطی زیر موجود است.

$$\max z = \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i \in M$$

$$lb_j \le x_j \le ub_j \qquad j \in N$$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- حدود بالا و پایین برای هر مقدار سمت راست به صورت زیر به دست می‌آید

$$UB_i = \sum_{j\in N: a_{ij}>0} a_{ij} ub_j + \sum_{j\in N a_{ij}<0} a_{ij} lb_j$$

$$LB_i = \sum_{j\in N: a_{ij}>0} a_{ij} lb_j + \sum_{j\in N a_{ij}<0} a_{ij} ub_j$$

$$LB_i \le b_i \le UB_i$$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- اکنون سه حالت زیر ممکن است رخ دهد.
- اگر $b_i \geq UB_i$ ، محدودیت i اضافی است و می‌تواند حذف شود.
- اگر $b_i < LB_i$ ، محدودیت i ارضا نمی‌شود و مدل نشدنی است.
- اگر $b_i = LB_i$ ، آنگاه تمامی x_j هایی که $a_{ij} > ۰$ برابر lb_j هستند و تمامی x_j های که $a_{ij} < ۰$ برابر ub_j خواهند شد.

ثابت کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- مثال:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ - ۲x_۴ \leq -۶$$

$$-x_۱ - ۳x_۲ + ۲x_۳ - x_۴ \leq ۴$$

$$-x_۱ + x_۲ + x_۴ \leq ۰$$

$$۰ \leq x_۱ \leq ۲$$

$$۰ \leq x_۲ \leq ۱$$

$$۱ \leq x_۳ \leq ۲$$

$$۲ \leq x_۴ \leq ۳$$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- حل

$$UB_{۱} = ۱\times ۲ + ۱\times ۱ + ۱\times ۲ - ۲\times ۲ = ۱$$

$$LB_{۱} = ۱\times ۰ + ۱\times ۰ + ۱\times ۱ - ۲\times ۳ = -۵$$

$$-۵ > -۶ \Rightarrow Infeasible$$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- مثال:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ - ۲x_۴ \leq -۱$$
$$-x_۱ - ۳x_۲ + ۲x_۳ - x_۴ \leq ۴$$
$$-x_۱ + x_۲ + x_۴ \leq ۰$$
$$۰ \leq x_۱ \leq ۲$$
$$۰ \leq x_۲ \leq ۱$$
$$۱ \leq x_۳ \leq ۲$$
$$۲ \leq x_۴ \leq ۳$$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم–ادامه

- حل

$$UB_۱ = ۱\times ۲ + ۱\times ۱ + ۱\times ۲ - ۲\times ۲ = ۱$$

$$LB_۱ = ۱\times ۰ + ۱\times ۰ + ۱\times ۱ - ۲\times ۳ = -۵$$

$$-۵ \le -۱ \le ۱ \Rightarrow No\ \ Action$$

$$UB_۲ = -۱\times ۰ - ۳\times ۰ + ۲\times ۲ - ۲\times ۱ = ۲$$

$$LB_۲ = -۲\times ۱ - ۳\times ۱ + ۲\times ۱ - ۳\times ۱ = -۶$$

$$۴ > ۲ \Rightarrow remove\ cons.۲$$

$$UB_۳ = -۱\times ۰ + ۱\times ۱ + ۱\times ۳ = ۴$$

$$LB_۳ = -۲\times ۱ + ۱\times ۰ + ۲\times ۱ = ۰$$

$$۰ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۲, x_۲ = ۰, x_۴ = ۲$$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- در نتیجه مدل به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$۲+۰+x_{۳}-۲\times ۲\leq -۱\Rightarrow x_{۳}\leq ۱$$

$$x_{۱}=۲$$

$$x_{۲}=۰$$

$$۱\leq x_{۳}$$

$$x_{۴}=۲$$

- با توجه به محدودیت اول و چهارم، خواهیم داشت: $x_{۳}=۱$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- حال در برنامه‌ریزی BIP به صورت زیر عمل خواهیم کرد.

$$a_{ik}y_k + \sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}>۰} a_{ij}y_j + \sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}<۰} a_{ij}y_j \le b_i \quad i\in M$$

$$y_j \in \{۰,۱\}$$

- قاعده ۱: اگر y_k متغیر مربوط به بزرگترین ضریب مثبت باشد، اگر مقدار عددی عبارت $a_{ik} + \sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}<۰} a_{ij}$ از b_i بیشتر شود، آنگاه $y_k = ۰$

- قاعده ۲: اگر y_k متغیر مربوط به منفی‌ترین ضریب منفی باشد، اگر مقدار عددی عبارت $\sum_{j\in N, j\neq k: a_{ij}<۰} a_{ij}$ از b_i بیشتر شود، آنگاه $y_k = ۱$

ثابت کردن متغیرهای تصمیم—ادامه

- مثال:

$$۳y_۱ + y_۲ - ۳y_۳ \geq ۲, y_۱, y_۲, y_۳ \in \{۰,۱\}$$

- حل: ابتدا باید به فرم کوچک‌تر مساوی درآید.

$$-۳y_۱ - y_۲ + ۳y_۳ \leq -۲, y_۱, y_۲, y_۳ \in \{۰,۱\}$$

- بر اساس قاعده اول داریم:
- متغیر $y_۳$ انتخاب خواهد شد و $۳ + (-۳) + (-۱) > -۲$ در نتیجه $y_۳ = ۰$
- بر اساس قاعده دوم داریم:
- متغیر $y_۱$ انتخاب خواهد شد و $-۱ > -۲$ در نتیجه $y_۱ = ۱$

تمرین

- متغیرهای مسئله BIP زیر را در صورت امکان مقدار ثابت دهید.

$$۳۰y_۱ - ۲۰y_۲ + ۴۰y_۳ + ۱۷y_۴ - ۲۳y_۵ + ۱۱y_۶ \leq ۷۰$$
$$۲۳y_۱ + ۱۵y_۲ + ۳۰y_۳ - ۲۷y_۴ + ۱۳y_۵ - ۲۱y_۶ \geq ۶۱$$
$$y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵, y_۶ \in \{۰,۱\}$$

حذف محدودیت‌های اضافی

- یکی از روش‌های حذف محدودیت‌های اضافی در اسلایدهای قبلی بیان شد. اما روش دیگری در مدل‌های BIP وجود دارد.
- قاعده سوم: اگر در محدودیت‌های به فرم کوچک‌تر مساوی، به ازای تمام متغیرهایی که ضرایبشان مثبت بود، عدد یک قرار دهید و محدودیت همچنان برقرار باشد، آنگاه این یک محدودیت اضافی است که می‌تواند حذف شود.
- مثال:

$$۳y_۱ + ۲y_۲ - ۴y_۳ + y_۴ \le ۷,\ y_۱, y_۲, y_۳, y_۴ \in \{۰,۱\}$$

- حل:

$$۳\times۱ + ۲\times۱ + ۱\times۱ = ۶ \le ۷$$

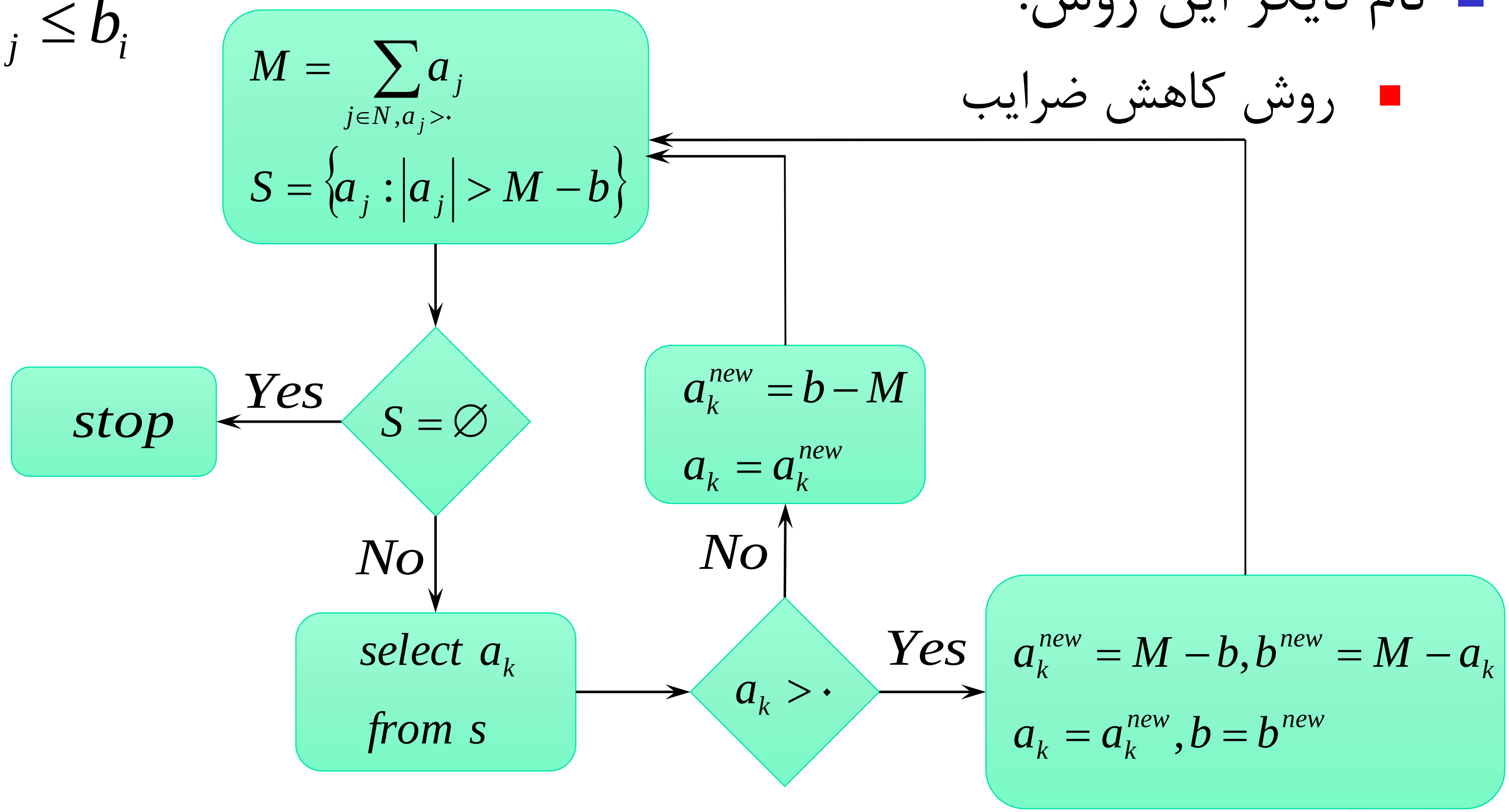
- پس این محدودیت، اضافی است

محدود کردن محدودیت‌ها

- فرض کنید که فضای زیر برای یک مسئله BIP موجود است.

$$\sum_{j\in N} a_j y_j \le b_i$$

- نام دیگر این روش:
  - روش کاهش ضرایب



محدود کردن محدودیت‌ها—ادامه

- مثال: محدودیت زیر را در صورت امکان محدود نمایید.

$$۶y_۱ + ۳y_۲ - ۵y_۳ + ۲y_۴ + ۷y_۵ - ۴y_۶ \leq ۱۵, y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵, y_۶ \in \{۰,۱\}$$

- حل:
  - مرحله اول:

$$M = ۶ + ۳ + ۲ + ۷ = ۱۸, M - b = ۳$$

$$S = \{a_۱, a_۳, a_۵, a_۶\}$$

$$Pick\ a_۱, a_۱ > ۰ \Rightarrow a_۱^{new} = M - b = ۳, b^{new} = M - a_۱ = ۱۸ - ۶ = ۱۲$$

$$a_۱ = ۳, b = ۱۲$$

محدود کردن محدودیت‌ها—ادامه

- مرحله دوم:

$$M = ۳+۳+۲+۷=۱۵, M-b=۳$$

$$S=\{a_۳, a_۵, a_۶\}$$

$$Pick\ a_۳, a_۳ < ۰ \Rightarrow a_۳^{new} = b-M=۳$$

$$a_۳ = -۳$$

- مرحله سوم:

$$M = ۳+۳+۲+۷=۱۵, M-b=۳$$

$$S=\{a_۵, a_۶\}$$

$$Pick\ a_۵, a_۵ > ۰ \Rightarrow a_۵^{new} = M-b=۳, b^{new} = M-a_۵ = ۱۵-۷=۸$$

$$a_۵ = ۳, b=۸$$

محدود کردن محدودیت‌ها–ادامه

- مرحله چهارم:

$$M=۳+۳+۲+۳=۱۱, M-b=۳$$

$$S=\{a_۶\}$$

$$Pick\ a_۶, a_۶<۰ \Rightarrow a_۶^{new}=b-M=-۳$$

$$a_۶=-۳$$

- مرحله پنجم:

$$M=۳+۳+۲+۳=۱۱, M-b=۳$$

$$S=\varnothing$$

- متوقف و محدودیت به صورت زیر در خواهد آمد.

$$۳y_۱+۳y_۲-۳y_۳+۲y_۴+۳y_۵-۳y_۶\le ۸, y_۱, y_۲, y_۳, y_۴, y_۵, y_۶\in\{۰,۱\}$$

تجزیه مدل به زیر مدل‌ها

- گاهی اوقات ساختارهای خاصی در ماتریس ضرایب فنی وجود دارد که ما را قادر می‌سازد تا در چند قسمت مستقل (زیر مسأله تقسیم‌بندی شوند.
- ترکیب کردن راه‌حل این زیرمسأله‌ها، راه‌حلی را برای مسأله اصلی به وجود خواهد آورد.
- از این طریق مسأله بسیار ساده خواهد شد.

تجزیه مدل به زیر مدل‌ها–ادامه

- ساختار ماتریس ضرایب فنی زیر را به عنوان مثال در نظر بگیرید.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
M_1			۰			۰	
۰			M_2			۰	
۰			۰			M_3	

تجزیه مدل به زیر مدل‌ها–ادامه

- در حالی‌که $M_۱ , M_۲ , M_۳ \neq ۰$ مسأله می‌تواند به سه زیرمسأله مستقل تبدیل شود.
- زیرمسأله ۱ سه متغیر اول
- زیر مسأله ۲ سه متغیر دوم
- و زیر مسأله ۳ نیز دو متغیر آخر را شامل خواهد شد.

تجزیه مدل به زیر مدل‌ها—ادامه

- مثال:
- مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید، این مسأله قـادر خواهد بود به دو زیرمسأله تقسیم‌بندی شود.

$$\min\ ۵y_۱ + y_۲ + ۳y_۳ - ۲y_۴ + y_۵$$

$$۲y_۱ + ۴y_۲ \le ۶$$

$$-y_۳ + ۶y_۴ + y_۵ \ge ۲$$

$$-y_۱ - ۳y_۲ \ge ۳$$

$$y_۱, y_۲ \ge ۰, y_۳, y_۴, y_۵ \in \{۰,۱\}$$

تجزیه مدل به زیر مدل‌ها—ادامه

- ماتریس ضرایب مسأله به فرم زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۱ & ۶ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & -۳ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\min ۵y_۱ + y_۲$$
$$۲y_۱ + ۴y_۲ \le ۶$$
$$-y_۱ - ۳y_۲ \ge ۳$$
$$y_۱, y_۲ \ge ۰$$

$$\min ۳y_۳ - ۲y_۴ + y_۵$$
$$-y_۳ + ۶y_۴ + y_۵ \ge ۲$$
$$y_۳, y_۴, y_۵ \in \{۰,۱\}$$