

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تهران

پیشینه

## مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

برنامه‌ریزی عدد صحیح



حسین کریمی

1

---

---

---

---

---

---

---

---

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تهران

## فهرست

- مقدمه
- تعریف برنامه‌ریزی عدد صحیح
- تاریخچه‌ای از برنامه‌ریزی عدد صحیح
- مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی
- کاربردهای موفق برنامه‌ریزی عدد صحیح
- مدل‌سازی خوب و ایده‌آل
- مطالعات بیشتر

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

2

---

---

---

---

---

---

---

---

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
دانشگاه تهران

## مقدمه

- بسیاری از مسائل عملیاتی و کاربردی با برنامه‌ریزی عدد صحیح مدل و حل خواهند شد.

مسائل مربوط به برش زدن

- Cutting Problem

مسائل مرتبط با شبکه‌های ارتباطات از راه دور

- Telecommunications

برنامه‌ریزی تولید نیرو و برق

- Electricity Generation Planning

برنامه‌ریزی تولید

- Production Planning

زمان‌بندی حرکت قطارها

- Train Scheduling

مکان‌یابی تسهیلات

- Facility Location

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

3

---

---

---

---

---

---

---

---



## تعریف برنامه‌ریزی عدد صحیح

- فرض کنید برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر موجود است.  

$$LP : \max \{ cx : Ax \leq b, x \geq 0 \}$$
- اگر فرض شود که متغیرها تنها باید مقادیر صحیح بگیرند. آنگاه داریم.
- برنامه‌ریزی تشکیل شده را یک برنامه‌ریزی عدد صحیح یا Integer Programming می‌نامند.  

$$IP : \max \{ cx : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^+ \}$$
- حال اگر تنها قسمتی از متغیرها عدد صحیح باشند. برنامه‌ریزی را یک برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط یا Mixed Integer Programming می‌نامند.  

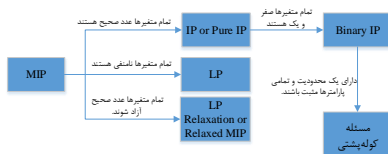
$$MIP : \max \{ cx + hy : Ax + Gy \leq b, x \geq 0, y \in \mathbb{Z}^+ \}$$

۴

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح



## تعریف برنامه‌ریزی عدد صحیح - ادامه



۵

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح



## تاریخچه‌ای از برنامه‌ریزی عدد صحیح

- Dantzig - ۱۹۴۷  
 • ارائه روش سیمپلکس برای برنامه‌ریزی خطی
- Kuhn - ۱۹۵۵  
 • ارائه الگوریتم مجارستانی برای مسئله تخصیص
- Hoffman and Kruskal - ۱۹۵۶  
 • اهمیت ماتریس کاملاً تک‌کالبدی (Totally Unimodular) را برای یافتن پاسخ در برنامه‌ریزی عدد صحیح نشان دادند.
- Gomory - ۱۹۵۷  
 • ارائه روش برش گوموری برای MIP شده توسط گوموری

۶

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

**تاریخچه‌ای از برنامه‌ریزی عدد صحیح – ادامه**

۱۹۶۰ - Land and Doig

- ارائه روش شاخه و کران

۱۹۶۵ - Balinski

- نمایش قدرت برنامه‌ریزی عدد صحیح در حل مسائل واقعی و اولین معرفی عالی این روش برای مخاطبین

۱۹۶۸ - Edmond

- ارائه افراز متروییدی و شروعی برای حل این مسائل در زمان چند جمله‌ای

۱۹۷۴ - Geoffrion

- ارائه روش لاگرانژ برای حل این مسائل

۷

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**تاریخچه‌ای ای از برنامه‌ریزی عدد صحیح – ادامه**



جانسون، گوموری و دانتزیگ، ۱۹۸۲

۸

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی**

در این نوع مسائل، یک مجموعه محدود  $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  وجود دارد. علاوه بر این، یک وزن  $c_j$  نیز وجود دارد. همچنین مجموعه  $F$  نیز وجود دارد که نشان دهنده تمامی زیرمجموعه‌های شدنی از مجموعه  $N$  است. یافتن کمترین وزن بر روی زیر مجموعه‌ای از این مجموعه‌های شدنی یک مسئله بهینه‌سازی ترکیباتی (Combinatorial Optimization) است.

$$COP : \min \left\{ \sum_{j \in S} c_j : S \in F \right\}$$

۹

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**مسائل بهینه‌سازی ترکیباتی – ادامه**

از مسائل معروف در بهینه‌سازی ترکیباتی می‌توان به مسائل زیر اشاره کرد:

- Traveling Salesman Problem
- مسئله فروشنده دوره گرد
- Knapsack Problem
- مسئله کوله پشتی
- Matching Problem
- مسئله انطباق
- Network Design Problem
- مسئله طراحی شبکه

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

**کاربردهای موفق برنامه‌ریزی عدد صحیح**

یکی از نشریات معتبر علمی به نام Interfaces به صورت تخصصی مقالات کاربردی در بهینه‌سازی را منتشر می‌کند.

حدود ۲۳٪ از مقالات این نشریه از برنامه‌ریزی عدد صحیح برای حل استفاده کرده‌اند.

برخی از مقالات این ژورنال به عنوان کاربردهای موفق در برنامه‌ریزی عدد صحیح در ادامه ارائه خواهند شد.

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

**کاربردهای موفق برنامه‌ریزی عدد صحیح – ادامه**

مصرفه جویی یا سود آوری	نام شرکت	صنعت مورد نظر	حوزه کاربرد
\$0.25 million	American Airlines (1981)	هواپیمایی	توزیع و حمل و نقل
\$20 million per year	American Airlines (1991)		
\$15.655 million per year	Air New Zealand (2001)		
\$10 million per year	Continental Airlines (2004)		
\$7.5 million	Delta Airlines (2003)	تلفن	ارتباطات
\$1 million	AT&T (1990)		
\$50-225 million	Bellcore (1995)		
\$200 million	NBC (2002)		
\$200 million	Motorola (2005)	تلفن	

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

پژوهش‌های علمی  
پاکستان

### کاربردهای موفق برنامه‌ریزی عدد صحیح – ادامه

حوزه کاربرد	صنعت مورد نظر	نام شرکت	صرفه‌جویی یا سودآوری
تولید	خودروسازی	Ford Motor Company (2001)	\$250 million
	خودروسازی	General Motors (1987)	\$2.9 million per year
	مواد شیمیایی	Proctor & Gamble (2006)	\$294.8 million
	کامپیوتر	Digital Equipment Corporation (1995)	\$100 million
بانکی	مواد غذایی	Irish Milk Cooperative (1986)	IR £1.5 million per year
	بانک	The Maryland National Bank (1983)	\$0.1 million
	بانک	The World Bank, Chinese State Planning Commission (1995)	\$6.4 billion
	بیمه	The Variable Annuity Life Insurance Company (1984)	\$8.8 million

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

۱۳

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

پژوهش‌های علمی  
پاکستان

### مدل‌سازی خوب و ایده‌آل

- برای فهم بهتر یک مدل خوب و یک مدل ایده‌آل، مثالی از مسئله مکان‌یابی بدون ظرفیت تسهیلات (Uncapacitated Facility Location) آورده شده است.
- مدل سازی اول (P1):
- پارامترها:
- $f_j$ : هزینه ثابت مکان  $j$ ام.
- $c_{ij}$ : هزینه خدمت‌رسانی مکان  $j$  به مشتری  $i$ ام.
- متغیرها:
- $y_j$ : اگر در مکان  $j$ ام تسهیل قرار گیرد برابر یک، در غیر این صورت برابر صفر است.
- $x_{ij}$ : نسبت تقاضای  $i$  که مشتری  $i$ ام از مکان  $j$ ام خدمت می‌گیرد.

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

۱۴

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

پژوهش‌های علمی  
پاکستان

### مدل‌سازی خوب و ایده‌آل – ادامه

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \forall i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq m y_j; \forall j = 1, 2, \dots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0; \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$y_j \in \{0, 1\}; \forall j = 1, 2, \dots, n;$$

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

۱۵

---

---

---

---

---


---

---

---

---

---


**مدل سازی خوب و ایده آل – ادامه**

■ مدل سازی دوم P2:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; \forall i = 1, 2, \dots, m;$$

$$x_{ij} \leq y_j; \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0; \forall i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n;$$

$$y_j \in \{0, 1\}; \forall j = 1, 2, \dots, n;$$

19 برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---


---

---

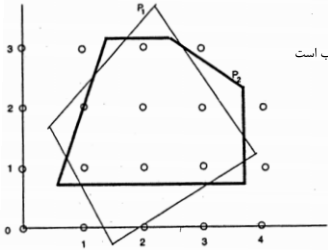
---

---

---


**مدل سازی خوب و ایده آل – ادامه**

P2 یک مدل خوب است



17 برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---


---

---

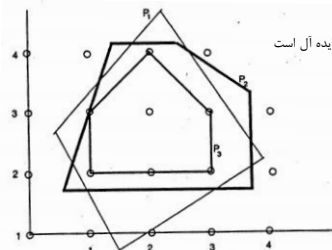
---

---

---


**مدل سازی خوب و ایده آل – ادامه**

P3 یک مدل ایده آل است



18 برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

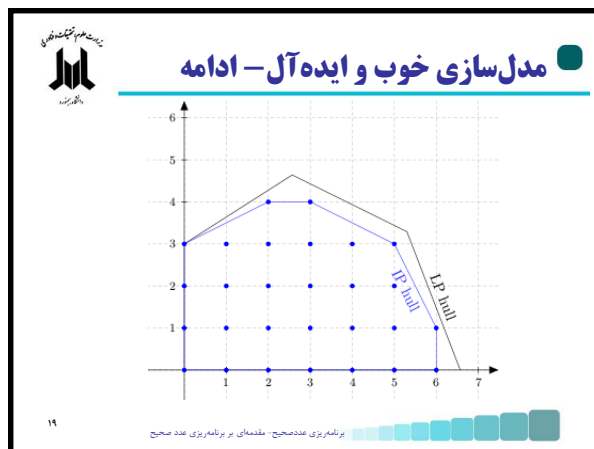
---

---

---

---

---




---

---

---

---

---

---

---

---

مدل سازی خوب و ایده آل – ادامه

■ تعریف یک پوسته محدب (Convex Hull)

$$\text{conv}(X) = \{x : x = \sum_{i=1}^t \lambda_i x^i, \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1, \text{ for } \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, t \text{ over all feasible subsets } \{x^1, x^2, \dots, x^t\} \text{ of } X\}$$

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

مدل سازی خوب و ایده آل – ادامه

■ گزاره اول: یک پوسته محدب، یک چند وجهی (Polyhedron) است.

■ گزاره دوم: تمامی نقاط گوشه  $\text{conv}(X)$ ، در  $X$  قرار دارد.

■ بر اساس دو گزاره بیان شده، داریم:

$$IP : \{\max Cx : x \in X\} = LP : \{\max Cx : x \in \text{conv}(X)\}$$

تعریف: اگر یک مجموعه  $X \subseteq R^n$  را داشته باشیم، و دو مدل  $P_1$  و  $P_2$  باشد، آنگاه  $P_1$  از  $P_2$  بهتر است اگر  $P_1 \subset P_2$  باشد.

برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

**مدل سازی خوب و ایده آل – ادامه**

■ مثال از مسئله کوله پستی

فرض کنید داریم:

$$X = \{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$$

سه مدل ریاضی زیر نیز موجود است.

$$P_1 = \{x \in R^4 : 0 \leq x \leq 1, 83x_1 + 61x_2 + 49x_3 + 20x_4 \leq 100\}$$

$$P_2 = \{x \in R^4 : 0 \leq x \leq 1, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4\}$$

$$P_3 = \{x \in R^4 : 0 \leq x \leq 1, 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_1 + x_4 \leq 1\}$$

$$P_3 \subset P_2 \subset P_1, P_3 = \text{conv}(X)$$

۲۲ برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

**مدل سازی خوب و ایده آل – ادامه**

۲۲ برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---

**مطالعات بیشتر**

- Jünger, M., Liebling, T. M., Naddef, D., Nemhauser, G. L., Pulleyblank, W. R., Reinelt, G., ... & Wolsey, L. A. (Eds.). (2009). *50 Years of Integer Programming 1958-2008: From the Early Years to the State-of-the-art*. Springer Science & Business Media.
- Schrijver, A. (1998). *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons.
- Hu, T. C. (1969). *Integer programming and network flows*. WISCONSIN UNIV MADISON DEPT OF COMPUTER SCIENCES.

۲۴ برنامه‌ریزی عدد صحیح - مقدمه‌ای بر برنامه‌ریزی عدد صحیح

---

---

---

---


---

---

---

---





وزارت آموزش عالی و تحقیقات علمی  
جمهوری اسلامی ایران

## تمرین

(۱) مسأله قرار دادن  $n$  وزیر در یک صفحه شطرنج  $n$  در  $n$  را طوری مدل سازی نمایید که هیچ دو وزیری در یک سطر یا ستون یا به صورت مورب به اشتراک گذاشته نشوند.

(۲) یکی از ویژگی هایی که یک مدل ریاضی می تواند داشته باشد تا مدلی ایده آل شود، این است که ماتریس ضرایب فنی آن به صورت کاملاً تک کالبدی باشد. حال سوال های زیر را حل نمایید.

این ماتریس چیست و چه ویژگی هایی دارد؟

سه مثال از این ماتریس را بنویسید.

سه مدل ریاضی بنویسید که این ویژگی را دارا باشد.

۲۵

برنامه ریزی عدد صحیح - مقدمه ای بر برنامه ریزی عدد صحیح

---

---

---

---

---

---

---

---