Computação Científica I
Teste 7: Interpolação é Álgebra Linear

Professores: Bernardo Costa & Pedro Fonini

Monitores: Vitor Luiz & Luan Lima

11 de outubro de 2018

"There is hardly any theory which is more elementary [than linear algebra], in spite of the fact that generations of professors and textbook writers have obscured its simplicity by preposterous calculations with matrices."

J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Vol. 1., 1960.

"Numerical linear algebra [...] is often a fundamental part of engineering and computational science problems, such as image and signal processing, telecommunication, computational finance, materials science simulations, structural biology, data mining, bioinformatics, fluid dynamics, and many other areas."

Wikipedia (June 20, 2017).

Este teste e o projeto subsequente apresentam uma abordagem unificada para três temas do curso: derivadas, integrais e interpolação polinomial. A abordagem mais natural vai "de trás pra frente", então começaremos com interpolação — que será usada nos dois outros — e que também ajuda a fixar a notação.

Calendário de entrega:

1. Teste 7: Interpolação. 20 de Outubro de 2020.
2. Projeto 3: Integração e Derivação: 3 de Novembro de 2020.

1 Interpolação como aplicação linear

Seja f uma função qualquer de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$. O conjunto de todas as funções será denotado por $\mathcal{F}$, e o dos polinômios de grau menor ou igual a d, por Pol_d. Se $g(x)$ é o polinômio interpolador de Lagrange de f nos pontos x_i, podemos escrever $g(z) = \sum g_j z^j$ para coeficientes g_j. O objetivo deste exercício é estudar algumas "linearidades" desta operação.

Começamos com um conjunto com n "nós de interpolação" fixos: $X = \{x_i\}$, mas não necessariamente igualmente espaçados.

1. Mostre que $\mathcal{F}$ e Pol_d são espaços vetoriais. Mostre ainda que Pol_d é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$.

2. Seja a aplicação L_X de $\mathcal{F}$ em Pol_{n-1}, que para cada função $f \in \mathcal{F}$ dá o polinômio interpolador. Mostre que L_X é linear: ou seja, mostre que $L_X(f+g) = L_X(f) + L_X(g)$ para quaisquer funções f e g, e também que $L_X(k \cdot f) = k \cdot L_X(f)$ para um real k qualquer.

3. Seja π_X a aplicação de $\mathcal{F}$ em $\mathbf{R}^n$ que a cada função f dá o vetor $(f(x_i))$. Mostre que esta aplicação também é linear.

4. Mostre que L_X é uma projeção, ou seja, que $L_X(L_X(f)) = L_X(f)$. Em "português", o polinômio interpolador de um polinômio de grau menor do que n é ele próprio.

5. Mostre que π_X é injetiva e sobrejetiva de Pol_{n-1} em $\mathbf{R}^n$.

6. Seja $\phi_X : \mathbf{R}^n \to \mathrm{Pol}_{n-1}$ a aplicação inversa de π_X restrita aos polinômios de grau menor do que n. Fixe $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e calcule $\phi_X(e_i)$ para os vetores e_i da base canônica de $\mathbf{R}^4$, *sem* usar π_X: quais são as raízes do polinômio $\phi_X(e_i)$? Deduza a regra para um X qualquer.

7. Mostre que, para toda função $f \in \mathcal{F}$, o polinômio $L_X(f)$ é igual ao polinômio $\phi_X(\pi_X(f))$. Explique porque isto dá uma forma explícita para a interpolação polinomial.

8. Decomponha L_X como a composta de duas aplicações lineares.

9. Seja agora V um subespaço vetorial de $\mathcal{F}$, gerado por n funções ψ_i para $i = 1 \ldots n$, não necessariamente polinomiais. Qual a condição sobre os valores de $\psi_i(x_j)$ para que o problema de interpolação de uma função f tenha sempre solução?

10. Mostre que esta interpolação "generalizada" ainda é uma aplicação linear, e ainda é uma projeção (em V).

11. Escreva a função `interpola(f, xs, psis)` que retorna a função interpoladora de f nos pontos do conjunto X (dado pela lista `xs`), para uma base de funções ψ_i (dada pela lista `psis`). (Observe que a "lista de funções" ψ_i é uma forma de "definir" o conjunto V para seu computador.)