Projeto 3

Questão 1

Para provar que $I(g) = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ é uma aplicação linear no espaço F, temos que mostrar que:

Sejam $f, g \in F$, $h = f + g \Rightarrow h \in F$, então

$I(h) = I(f+g) = \int_{-1}^{1} f(t) + g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$

$= I(f) + I(g)$

Seja $a \in \mathbb{R}$, $f \in F$ então $af \in F$, temos:

$I(af) = \int_{-1}^{1} af = a \int_{-1}^{1} f = a\,I(f)$

Assim, I é uma aplicação linear no espaço F, como P_{n-1} é um subespaço de F, I também é uma Aplicação linear em P_{n-1}.

b) Seja $g \in F$

Questão 2

Seja $g \in Pol_{n-1}$, com coeficientes g_j, então g pode ser escrito como

$$\sum_{j=0}^{n-1} g_j x^j \text{, então, } I(g) = \int_{-1}^{1} \sum_{0}^{n-1} g_j x^j = \sum_{0}^{n-1} g_j \frac{x^{j+1}}{1+j}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \sum_{0}^{n-1} g_j \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}$$

Logo, se $g \in Pol_{n-1}$, então $I(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}$

Questão 3

Seja I_x a aplicação de $F \to \mathbb{R} : f \to \int_{-1}^{1} (L_x(f))(t)dt$

Podemos escrevê-la como a composta de I e L_x, então

$$I_x = I(L_x)$$

Como I e L_x são lineares, I_x também será

Questão

Questão 4

Sabemos que $I_x = I(L_x(f))$ e $L_x(f) = \phi(\Pi_x(f))$, então,

Se tivermos Π_x temos $\phi(\Pi_x(f))$ (*) e consequentemente temos $I(\phi(\Pi_x(f)))$, logo se soubermos Π_x, sabemos I_x, logo, $I_x(f)$ só depende de Π_x.

(*) $\phi(\Pi_x(f)) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Questão 5

Sabemos que $I_x = I(L_x(f))$, logo $I_x = I(\phi(\Pi_x(f)))$

Mas sabemos que $\phi(\Pi_x(f)) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

Assim, $I_x = \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum f(x_i) \int \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Então $\exists\, w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ t.q. $I_x(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) w_i$

Questão 6

Queremos calcular g_j a partir dos x_i e de $f(x)$. Temos que

$f(x_i) = \Pi_x(f)$ e $g(x_i) = f(x_i) = \sum_{j=0}^{n-1} g_j x^j$, então

temos que

$M\vec{g} = \Pi_x(f)$, onde M é uma matriz de Vandermonde,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } \Pi_x(f) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

É importante ~~mostrar que~~ destacar que $\det(M) \neq 0$, logo podemos invertê-la fazendo

$$M\vec{g} = \Pi_x(f) \iff \vec{g} = M^{-1}\,\Pi_x(f)$$

onde sabemos M^{-1}, $\Pi_x(f)$, logo $\vec{g}$

Questão 7

I_g pode ser escrita como $\sum_{j=0}^{n-1} g_j \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}$ e

queremos v tal que $\langle g_j, v \rangle = I_g$, então

só temos que encontrar v_j, $j = 0, \dots, n-1$ tq

$g_j \cdot v_j = g_j \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}$

Então, teremos $v = \left(2, \frac{0}{2}, \frac{2}{3}, \frac{0}{4}, \dots, \frac{1-(-1)^{1+j}}{1+j}\right)$,

logo $\langle (g_j), v \rangle = I_g$

Questão 8

Como vimos $\vec{g} = M^{-1} T_n(f)$ e $I_g = \langle g_j, v \rangle$,

então,

$I_g = \langle M^{-1} T_n(f), v \rangle = \langle T_n(f), (M^{-1})^T v \rangle$

c.q.d.

Questão 9

Da questão 5, sabemos que

$$I_x = \sum w_i f(x_i) = I(L_x(f)) = I_g$$

Então, temos que $\langle \pi_x(f), w \rangle = \sum w_i f(x_i) = I_x(f)$

$= I_g = \langle \pi_x(f), (M^{-1})^T v \rangle$, logo,

$w = (M^{-1})^T v$ c.q.d.