

Въведение във вероятностите

Фундаментални понятия, закони и примери

Мартин Минчев
съвместно с проф. Младен Савов

Семково, 17.07.2023

- Лекции и упражнения по вероятности (и малко статистика), ФМИ-СУ: <https://www.youtube.com/@ProbabilitySU>
- За материали към горния курс: <https://shorturl.at/izFU2>
- За въпроси: mjminchev@fmi.uni-sofia.bg
- Начален учебник: Probability: An Introduction by Grimmett and Welsh
- Визуализации: <https://www.youtube.com/@3blue1brown>
<https://seeing-theory.brown.edu/index.html>

- вероятностно пространство/елементарно събитие/събитие
- вероятност/условна вероятност
- формула на Бейс
- случайна величина
- независимост на събития/случайни величини
- очакване и дисперсия
- дискретно/непрекъснато разпределение
- плътност и функция на разпределение
- закон за големите числа
- централна гранична теорема

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези?

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? **Отг:** $1/4$

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? **Отг:** $1/4$
- Каква е вероятността да спечелим в 6/49?

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? **Отг:** $1/4$
- Каква е вероятността да спечелим в 6/49? **Отг:** $1/\binom{49}{6}$

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? **Отг:** $1/4$
- Каква е вероятността да спечелим в 6/49? **Отг:** $1/\binom{49}{6}$
- Каква е вероятността при избор на точка в кръг с радиус 1, тя да е на разстояние най-много на разстояние $1/2$ от центъра?

- Каква е вероятността при 2 хвърляния на честна монета да не се падне ези? **Отг: $1/4$**
- Каква е вероятността да спечелим в 6/49? **Отг: $1/\binom{49}{6}$**
- Каква е вероятността при избор на точка в кръг с радиус 1, тя да е на разстояние най-много на разстояние $1/2$ от центъра? **Отг: $1/4$**

- Каква е вероятността случайна хорда в кръг с радиус 1, да бъде по-малка от 1?

¹[https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_\(probability\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability))

- Каква е вероятността случайна хорда в кръг с радиус 1, да бъде по-малка от 1?
- Отг¹:

¹[https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_\(probability\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand_paradox_(probability))

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω .

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω .

❶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$

❷ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

❸ На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω .

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω .

❶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$

- монета: $N = 2$, $\omega_1 = \text{'ези'}$, $\omega_2 = \text{'тура'}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
- 100 различни монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различни монети;
- 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.

❷ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

❸ На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω .

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω .

- ❶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$
 - монета: $N = 2$, $\omega_1 = \text{'ези'}$, $\omega_2 = \text{'тура'}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
 - 100 различни монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различни монети;
 - 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.
- ❷ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

- ❸ На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω .

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω .

❶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$

- монета: $N = 2$, $\omega_1 = \text{'ези'}$, $\omega_2 = \text{'тура'}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
- 100 различни монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различни монети;
- 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.

❷ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

- $\omega_j = \text{'пада се ези за първи път на } j\text{-то хвърляне.}$
- избор на точка в окръжност. Тогава можем да опишем ω може да се опише чрез координати: (x_ω, y_ω) , като $x_\omega^2 + y_\omega^2 = 1$.

❸ На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω .

Възможните изходи от случаен експеримент означаваме с Ω .

- ❶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$
 - монета: $N = 2$, $\omega_1 = \text{'ези'}$, $\omega_2 = \text{'тура'}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$;
 - 100 различни монети: $N = 2^{100}$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2^{100}}\}$, ω_i са възможните конфигурации 'ези-тура' на 100 различни монети;
 - 6/49: $N = 13983816$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13983816}\}$. Всяко ω отговаря на различна комбинация от 6 цифри.
- ❷ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
 - $\omega_j = \text{'пада се ези за първи път на } j\text{-то хвърляне.}'$
 - избор на точка в окръжност. Тогава можем да опишем ω може да се опише чрез координати: (x_ω, y_ω) , като $x_\omega^2 + y_\omega^2 = 1$.
- ❸ На практика, рядко се интересуваме от точния вид на Ω .

Подмножество $A \subseteq \Omega$, т.е. колекция от ω_i , се нарича събитие.

Можем да съставим A по някакъв общ признак на елементарни събития $\omega \in \Omega$.

Подмножество $A \subseteq \Omega$, т.е. колекция от ω_i , се нарича събитие.

Можем да съставим A по някакъв общ признак на елементарни събития $\omega \in \Omega$.

- ❶ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и събитието „пада се нечетно число”
 $A = \{1, 3, 5\}$;
- ❷ $\Omega = \{\text{гласоподаватели}\}$ и събитието $A = \text{„гласували за партия X”}$;

Подмножество $A \subseteq \Omega$, т.е. колекция от ω_i , се нарича събитие.

Можем да съставим A по някакъв общ признак на елементарни събития $\omega \in \Omega$.

- ❶ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и събитието „пада се нечетно число”
 $A = \{1, 3, 5\}$;
- ❷ $\Omega = \{\text{гласоподаватели}\}$ и събитието $A = \text{„гласували за партия X”}$;

Ако $A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$, то

- $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\};$
- $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\};$
- $A^c = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$

$\Omega = \{\text{гласоподаватели}\}$, $A = \text{„гласували за партия X”}$ и
 $B = \text{„гласоподаватели с образование от чужбина”}$

- $A \cap B = \text{„гласоподаватели на X с образование от чужбина”}$;
- $A \cup B = \text{„гласували за X или гласоподаватели с образование от чужбина”}$;
- $A^c = \text{„гласували за партия, различна от X”}$.

Колекция от събития $\mathcal{F} = \{A : A \subseteq \Omega\}$ наричаме сигма алгебра, ако:

- ❶ $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F};$
- ❷ $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$
 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F};$
- ❸ $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F};$
- ❹ $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}.$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}.$$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}.$$

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{F} = 2^\Omega \text{ множеството на всички подмножества на } \Omega.$$

При зададени Ω и \mathcal{F} , вероятността е функция $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ със свойствата:

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$, за всяко $A \in \mathcal{F}$;
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, ако $A \cap B = \emptyset$
 A_1, A_2, \dots непресичащи се $\implies \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Тройката

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

задава вероятностно пространство.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$, то $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ е снабдено с равномерна вероятност, ако:

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{N}, \text{ за всяко } \omega \in \Omega.$$

$N = 13983816$, то Ω са всички шесторки в играта 6 от 49 и

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{13983816}.$$

$N = 13983816$, то Ω са всички шесторки в играта 6 от 49 и

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{13983816}.$$

Играчите често избягват избирането на съседни числа, но предпочитат календарни дати. Рационално ли е това?

$N = 13983816$, то Ω са всички шесторки в играта 6 от 49 и

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{13983816}.$$

Играчите често избягват избирането на съседни числа, но предпочитат календарни дати. Рационално ли е това?

Ако в средно участниците имат такова поведение, може ли да оптимизираме някой компонент?

Две кози и една кола са скрити зад три затворени врати по случаен начин.

Избирате една врата, без да я отваряте.

След избора се отваря една от останалите врати и виждаме една от козите.

Бихте ли сменили избора си, ако можете?²

²<https://www.bbc.com/news/magazine-24045598>

Условна веројатност и независност

Ако се е сбъднало $A \subseteq \Omega$, то това променя вероятностното пространство ³:

- $\Omega \rightarrow A$;
- $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \cap A = \{B \in \mathcal{F}, A \cap B\}$;
- $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}_A$, така че:

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

- $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(A)$ (формула на Бейс)

Две събития A и B се наричат независими, ако

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \implies \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Независими не означава непресичащи се (несъвместими)!

В 6/49 са изтеглени 10001 тиража.

Каква е вероятността поне веднъж в два последователни тиража да са изтеглени едни и същи числа?

В 6/49 са изтеглени 10001 тиража.

Каква е вероятността поне веднъж в два последователни тиража да са изтеглени едни и същи числа?

$$A = \bigcup_{i=1}^{10000} \{\text{числа от } i\text{-то теглене съвпадат с тези от } i + 1\}$$

В 6/49 са изтеглени 10001 тиража.

Каква е вероятността поне веднъж в два последователни тиража да са изтеглени едни и същи числа?

$$A = \bigcup_{i=1}^{10000} \{\text{числа от } i\text{-то теглене съвпадат с тези от } i+1\}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10000} \{\text{числа на } i\text{-то теглене не съвпадат с тези от } i+1\}\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{числа на 1-то теглене не съвпадат с тези от 2})^{10000} \\ &= 1 - \left(\frac{13983815}{13983816}\right)^{10000} \sim \frac{7}{1000}.\end{aligned}$$

Случайни величини

Нека $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство.

Тогава всяка „хубава” функция

$$X : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$$

се нарича случайна величина.

Пример: Хвърляме 2 монети. $\Omega = \{EE, ET, TE, TT\}$. Ако $X =$ „брой езита”, $X(EE) = 2$, $X(ET) = X(TE) = 1$ и $X(TT) = 0$.

- числово описват характеристики на елементарни събития;
- позволяват математически операции;
- по-лесна компютърна обработка;
- позволяват моделиране на различни случайни събития с еднаква вероятностна структура;
- позволяват числови характеристики като средно и дисперсия.

$X : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$ приема краен или изброим брой стойности⁴.

- Монета ези/тура (1/0), $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
 $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;
- брой езита от n хвърляния $X \sim \text{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- брой хвърляния до първо ези $X \sim \text{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

⁴[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

$X : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$ приема краен или изброим брой стойности⁴.

- Монета ези/тура (1/0), $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
 $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;
- брой езита от n хвърляния $X \sim \text{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- брой хвърляния до първо ези $X \sim \text{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

⁴[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

$X : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$ приема краен или изброим брой стойности⁴.

- Монета ези/тура (1/0), $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
 $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;
- брой езита от n хвърляния $X \sim \text{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- брой хвърляния до първо ези $X \sim \text{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

⁴[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

$X : \Omega \rightarrow (-\infty, \infty)$ приема краен или изброим брой стойности⁴.

- Монета ези/тура (1/0), $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.
 $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$;
- брой езита от n хвърляния $X \sim \text{Bin}(n, p)$: за $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

- брой хвърляния до първо ези $X \sim \text{Ge}(p)$: за $k \in \{1, 2, \dots\}$

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

⁴[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

$X : \Omega \mapsto (-\infty, \infty)$ приема неизброимо много стойности.

Вероятностите се изчисляват с помощта на вероятностната плътност f_X (probability density function) или разпределението се задава

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(y) dy.$$

Абсолютно непрекъснати случайни величини: Примери⁵

⁵[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section2)

- Две случайни величини X, Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), ако за всеки $a < b, c < d$

$$\mathbb{P}(\{a < X < b\} \cap \{c < Y < d\}) = \mathbb{P}(a < X < b) \mathbb{P}(c < Y < d).$$

- Две случайни величини X, Y са еднакви по разпределение ($X \stackrel{d}{=} Y$), ако за всеки $a < b$

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a < Y < b).$$

Пример: Ако $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/2$, $X \stackrel{d}{=} 1 - X$, но двете никога не са равни..

Математическо очакване и дисперсия

- Игра на рулетка. Как да преценим дали е математически правилно да играем на черно/червено (или пък на число)?

Ако X е случайна величина, то математическото очакване се задава чрез:

- $\mathbb{E}[X] = \sum k\mathbb{P}(X = k)$, ако X е дискретна;
- $\mathbb{E}[X^2] = \sum k^2\mathbb{P}(X = k)$;
- $\mathbb{E}[e^X] = \sum e^k\mathbb{P}(X = k)$;
- $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} yf_X(y)dy$, ако X е непрекъснатата.

Ако X е печалба/загуба в следствие на вероятностна игра, то:

- $\mathbb{E}[X] > 0$, то играта е дългосрочно в наша полза;
- $\mathbb{E}[X] = 0$, то играта е честна;
- $\mathbb{E}[X] < 0$, то играта е дългосрочно в наша вреда⁶.

⁶При игра на рулетка $\mathbb{E}[X] = -\frac{1}{37}$ независимо как залагате 1 лев.

Математическото очакване $\mathbb{E}[X]$ е оценка за „типичната“ стойност, но колко е добра? Възможна мярка е дисперсията:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2 = (\mathbb{E}X)^2 - \mathbb{E}(X^2) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - a)^2$$

Математическото очакване $\mathbb{E}[X]$ е оценка за „типичната“ стойност, но колко е добра? Възможна мярка е дисперсията:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2 = (\mathbb{E}X)^2 - \mathbb{E}(X^2) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - a)^2$$

Математическото очакване е оценка за типичната стойност на случайната величина погледната през призмата на най-малките квадрати.

$\mathbb{E}[X] = -\frac{1}{37}$ при залог от 1 лев на рулетка

- Залог на червено:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E} \left(X - \left(-\frac{1}{37} \right) \right)^2 = \left(1 + \frac{1}{37} \right)^2 \frac{18}{37} + \left(-1 + \frac{1}{37} \right)^2 \frac{19}{37} \approx 1;$$

- Залог на число:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E} \left(X + \frac{1}{37} \right)^2 = \left(36 + \frac{1}{37} \right)^2 \frac{1}{37} + \left(-1 + \frac{1}{37} \right)^2 \frac{36}{37} \approx 36.$$

Казино (отново)

В казино се предлага да хвърляте честна монета, докато хвърлите ези. Ако това се случи на n -ти ход, печелите 2^n лв. Колко бихте платили, за да участвате?

St Petersburg paradox

В казино се предлага да хвърляте честна монета, докато хвърлите ези. Ако това се случи на n -ти ход, печелите 2^n лв. Колко бихте платили, за да участвате? ⁷

⁷https://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox

- 5% от популацията са заразени с Ковид-19;
- Популацията се тества чрез ПСР, като е възможно обединяването на n проби в един пул; при положителен резултат се тестват всички поотделно;
- Нека X_n е броят тестове необходим за изследването на n човека. Намерете n , така че $\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} \rightarrow \min$;
- $\mathbb{E}[X_n] = 1 \times (1 - 0.05)^n + (n + 1) \times (1 - (1 - 0.05)^n) = n + 1 - n \times 0.95^n$;
- $\mathbb{E}[X_n] / n = 1 + 1/n - 0.95^n$ се минимизира за $n = 5$ с $\mathbb{E}[X_5] / 5 \sim 0.43$.

- 5% от популацията са заразени с Ковид-19;
- Популацията се тества чрез ПСР, като е възможно обединяването на n проби в един пул; при положителен резултат се тестват всички поотделно;
- Нека X_n е броят тестове необходим за изследването на n човека. Намерете n , така че $\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} \rightarrow \min$;
- $\mathbb{E}[X_n] = 1 \times (1 - 0.05)^n + (n + 1) \times (1 - (1 - 0.05)^n) = n + 1 - n \times 0.95^n$;
- $\mathbb{E}[X_n] / n = 1 + 1/n - 0.95^n$ се минимизира за $n = 5$ с $\mathbb{E}[X_5] / 5 \sim 0.43$.

- 5% от популацията са заразени с Ковид-19;
- Популацията се тества чрез ПСР, като е възможно обединяването на n проби в един пул; при положителен резултат се тестват всички поотделно;
- Нека X_n е броят тестове необходим за изследването на n човека. Намерете n , така че $\frac{\mathbb{E}[X_n]}{n} \rightarrow \min$;
- $\mathbb{E}[X_n] = 1 \times (1 - 0.05)^n + (n + 1) \times (1 - (1 - 0.05)^n) = n + 1 - n \times 0.95^n$;
- $\mathbb{E}[X_n] / n = 1 + 1/n - 0.95^n$ се минимизира за $n = 5$ с $\mathbb{E}[X_5] / 5 \sim 0.43$.

Закон за големите числа и Централна гранична теорема

Нека $(X_i)_{i \geq 1}$ са независими, еднакво разпределени случайни величини. Означаваме

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Тогава⁸

$$\widehat{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X_1].$$

⁸<https://seeing-theory.brown.edu/basic-probability/index.html>

Сред огромна популация мерим наличността на свойство например „гласоподавател за Х”. Как ще оценим пропорцията p от популацията с това свойство?

Сред огромна популация мерим наличността на свойство например „гласоподавател за X ”. Как ще оценим пропорцията p от популацията с това свойство?

Номерираме членовете на популацията и тогава нека:

- $X_i = 1$, ако i -тият член притежава свойството. Следователно $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$;
- $X_i = 0$, ако i -тият член не притежава свойството и $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$.

Сред огромна популация мерим наличността на свойство например „гласоподавател за X “. Как ще оценим пропорцията p от популацията с това свойство?

Номерираме членовете на популацията и тогава нека:

- $X_i = 1$, ако i -тият член притежава свойството. Следователно $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$;
- $X_i = 0$, ако i -тият член не притежава свойството и $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$.

Ако разгледаме първите n члена, то

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \frac{S_n}{n} \stackrel{?}{\approx} p = \mathbb{E}[X_1].$$

Разтърсваме и отваряме кутия с N монети. Преброяваме монетите показващи ези. Какво можем да кажем за техния брой? ⁹

⁹<https://www.youtube.com/watch?v=pK1NPKm2Dfc>

Разтърсваме и отваряме кутия с N монети. Преброяваме монетите показващи ези. Какво можем да кажем за техния брой? ⁹

Нека $X_i = 1$ ако i -тата монета е ези и $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$, иначе $X_i = 0$. Тогава

$$\frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} = \frac{S_N}{N} \approx \frac{1}{2}.$$

⁹<https://www.youtube.com/watch?v=pK1NPKm2Dfc>

Ако се загледаме към покривка от сняг, забелязваме, че върху равна повърхност тя е с приблизително еднаква дебелина! Защо?

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

¹⁰[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

Отново $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, където $(X_i)_{i \geq 1}$ независими и еднакво разпределени. Тогава

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\frac{\text{Var}(X_1)}{n}}} \Rightarrow \xi \sim N(0, 1).$$

¹⁰[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

Отново $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, където $(X_i)_{i \geq 1}$ независими и еднакво разпределени. Тогава

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\frac{\text{Var}(X_1)}{n}}} \Rightarrow \xi \sim N(0, 1).$$

Грубо казано¹⁰,

$$S_n \approx N(n\mathbb{E}(X_1), n\text{Var}(X_1)).$$

¹⁰[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

ЦГТ е грешката в закона за големите числа и е основен резултат и инструмент в модерната наука.

Отново $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, където $(X_i)_{i \geq 1}$ независими и еднакво разпределени. Тогава

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\frac{\text{Var}(X_1)}{n}}} \Rightarrow \xi \sim N(0, 1).$$

Грубо казано¹⁰,

$$S_n \approx N(n\mathbb{E}(X_1), n\text{Var}(X_1)).$$

Следва, че за големи n

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > a\sqrt{\frac{\text{Var}(X_1)}{n}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

¹⁰[https:](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

[//seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3](https://seeing-theory.brown.edu/probability-distributions/index.html#section3)

Имаме, че

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}; \quad \text{Var}(X_1) = \mathbb{E}\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

и тогава

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > b\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > b \times 2\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Имаме, че

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2}; \quad \text{Var}(X_1) = \mathbb{E}\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

и тогава

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > b\right) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| > b \times 2\sqrt{n}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

В кутия имаме около $n = 10^{24}$ молекули и следователно, ако $b = 10^{-12}$, то $2b\sqrt{10^{24}} = 2$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 10^{-12}\right) \leq 0.05.$$

ЦГТ има фундаментална роля и при моделирането на случайни процеси - движение на частици, финансови активи, популации.

Най-общо да допуснем, че на всяка стъпка частицата се премества нагоре/надолу/налява/надясно със случайна стъпка X_i , като стъпките $(X_i)_{i \geq 1}$ са независими и еднакво разпределени.

Тогава движението във времето се описва с $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Нека $\mathbb{P}\left(X_i = \pm \frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{2}$, където типично N е огромно.

Тогава $X_i = \frac{1}{\sqrt{N}}Y_i$, $\mathbb{P}(Y_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ и

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^k Y_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_k.$$

Нека $\mathbb{P}\left(X_i = \pm \frac{1}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{2}$, където типично N е огромно.

Тогава $X_i = \frac{1}{\sqrt{N}}Y_i$, $\mathbb{P}(Y_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ и

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^k Y_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_k.$$

Тогава

$$(S_k)_{k \leq N} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_k \right)_{k \leq N} = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_{\frac{k}{N}N} \right)_{k \leq N} \Rightarrow (B_t)_{t \leq 1},$$

където B е Брауновото движение и $B_t \sim N(0, t)$.

Последното е резултат от ЦГТ, понеже за $k/N \sim t$, то

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{S}_{tN} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{tN}} \tilde{S}_{tN} \sim \sqrt{t} \xi \sim N(0, t).$$

БЛАГОДАРЯ!