



ulm university universität
uulm

**Zusammenfassung Höhere Mathematik für
Physiker & Ingenieure 2/3
WS18/19**

Jonas Otto
edwin.otto@uni-ulm.de
Luca Krüger
luca.krueger@uni-ulm.de
Marco Deuscher
marco.deuscher@uni-ulm.de
Simon Wilhelmstätter
simon.wilhelmstaetter@uni-ulm.de

März 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Algebra	5
1.1	Matrizen	5
1.1.1	Hermitesche Matrizen	5
1.1.2	Invertierbare/Reguläre Matrizen	5
1.1.3	Unitäre Matrizen	5
1.1.4	Normale Matrizen	5
1.1.5	Diagonalisierbare Matrizen	5
1.1.6	Spur einer Matrix	6
1.1.7	Diagonalisieren von Matrizen	6
1.1.8	Definitheit	6
1.1.9	Satz von Cayley-Hamilton	7
1.2	Determinanten	7
1.2.1	Umformungen von Determinanten	7
1.3	Basiswechsel	7
1.3.1	Lineare Abbildung nach Basiswechsel	7
1.4	Skalarprodukte	8
1.5	Lineare Abbildungen	8
1.5.1	Linearität zeigen	8
1.5.2	Linearität widerlegen	8
1.6	Gram Schmidt	8
1.7	Vektorräume	9
1.7.1	Voraussetzungen	9
1.7.2	Vektorraum zeigen	9
2	Funktionen mehrerer Veränderlicher	10
2.1	Topologie	10
2.1.1	Grundbegriffe	10
2.1.2	Metriken	10
2.2	Funktionen und Abbildungen	11
2.3	Differenzierbarkeit	11
2.3.1	Grundbegriffe	11
2.3.2	Mehrdimensionale Kettenregel	12
2.3.3	Satz von Schwarz	12
2.4	Lokale Extrema	12
2.4.1	Satz von Fermat	12
2.4.2	Zweite Ableitung Kriterium	13
2.5	Implizite Funktionen	13
2.5.1	Lokale Injektivität	13

2.5.2	Lemma 2.5.5	13
2.5.3	Homöomorphismus und Umkehrfunktion	13
2.5.4	Umkehrformel	13
2.5.5	Stetig Diff'barkeit der Umkehrfunktion	13
2.5.6	Satz über inverse Abbildung	14
2.5.7	Satz über implizite Funktionen	14
2.5.8	Satz über implizite Funktionen im \mathbb{R}^2	14
2.5.9	Lagrange Multiplikatorenregel	14
3	Das Riemannsche Integral	16
3.1	Kurvenintegrale	16
3.1.1	Grundbegriffe	16
3.1.2	Kurvenintegral 1. Art	16
3.1.3	Kurvenintegral 2. Art	17
3.1.4	Wegunabhängigkeit	17
3.2	Jordan-Inhalt	18
3.2.1	Kriterien für Jordan-Messbarkeit	18
3.3	Satz von Fubini	18
3.4	Transformationsformel	18
3.5	Integralsätze	19
3.5.1	Oberflächenintegrale erster Art	19
3.5.2	Gauß'scher Satz	19
3.5.3	Satz von Green / Gauß'scher Satz in der Ebene	20
3.5.4	Partielle Integration	22
3.5.5	Green'sche Formeln	22
3.5.6	Satz von Stokes	22
4	Gewöhnliche Differentialgleichungen	23
4.1	Existenz und Eindeutigkeit	23
4.1.1	Stetigkeit	23
4.1.2	Gleichmäßige Stetigkeit	23
4.1.3	Lipschitz-Stetig	23
4.1.4	Lipschitz-Bedingung	23
4.1.5	Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf	23
4.1.6	Picarditeration	24
4.2	Differentialgleichungen erster Ordnung	24
4.2.1	Lineare DGL erster Ordnung	24
4.2.2	Bernoullische DGL	25
4.2.3	Riccatische DGL	25
4.2.4	DGL mit getrennten Veränderlichen	25
4.2.5	Homogene DGL	25
4.2.6	Verallgemeinerte homogene DGL	25
4.2.7	Die exakte Differentialgleichung	26
4.2.8	Die Clairautsche Differentialgleichung	27
4.3	DGL Systeme	27
4.3.1	Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung	27
4.3.2	Wronski Determinante	28
4.3.3	Partikuläre Lösung	28
4.3.4	Matrixexponentialfunktion	29
4.3.5	Algorithmus von Putzer	29

4.3.6	Lineare Differentialgleichungen Höherer Ordnung und DGL Systeme	30
4.3.7	Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung	30
4.3.8	Stabilität	31
4.4	Randwertprobleme	32
4.4.1	Bemerkungen zum Sturmschen RWP (Lemma 3.2.4)	32
4.4.2	Umformen auf halbhomogenes RWP	33
4.4.3	Lösen von RWP mit Greenscher Funktion	33
5	Funktionentheorie	34
5.1	Wdh: Grundlagen	34
5.2	Komplexe Differenziation	34
5.2.1	Formale Definition	34
5.3	Holomorphie	35
5.3.1	Definition: Holomorphie	35
5.3.2	Möbius-Transformation	35
5.3.3	Ganze Funktionen	36
5.4	Komplexe Integralrechnung	36
5.4.1	Komplexes Kurvenintegral	36
5.4.2	Nützliche Lemmata und Bemerkungen zu komplexen Kurvenintegralen	37
5.4.3	Cauchyscher Integralsatz	37
5.4.4	Cauchysche Integralformel	37
5.5	Singularitäten	38
5.5.1	Definition	38
5.5.2	Klassifizierung	38
5.5.3	Laurent-Reihen	38
5.6	Residuensatz	39
5.6.1	Residuen	39
5.6.2	Residuensatz	40

Disclaimer

Mit dem Bearbeiten dieses Dokuments verpflichtet sich der Autor, allen oben aufgeführten anderen Autoren ein (1) Bier auszugeben, falls die hinzugefügten Informationen offensichtlich falsch sind, richtiges oder relevantes entfernt oder das Dokument in anderer Weise negativ/destruktiv beeinflusst wurde.

Kapitel 1

Lineare Algebra

1.1 Matrizen

1.1.1 Hermitesche Matrizen

- $\iff A^H = A$
- \implies Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{R}$
- $\implies A$ normal
- \implies unitär diagonalisierbar.

1.1.2 Invertierbare/Reguläre Matrizen

- $\iff \det A \neq 0$

1.1.3 Unitäre Matrizen

- $\iff A^H = A^{-1}$
- $\implies A$ regulär (\iff invertierbar)
- $\implies |\det A| = 1$
- $\implies A$ normal
- \implies Eigenvektoren orthonormal

1.1.4 Normale Matrizen

- $\iff A^H A = A A^H$
- $\iff A$ unitär diagonalisierbar

1.1.5 Diagonalisierbare Matrizen

- $\iff S^{-1}AS = D, D$ Diagonalmatrix

Diagonalisierbarkeit zeigen

- Charakteristisches Polynom zerfällt in Linearfaktoren
- \wedge Geometrische und Algebraische Vielfachheiten stimmen überein

Unitär Diagonalisierbare Matrizen

- $\iff \exists S \text{ unitär} \mid S^H = S^{-1}$
- \implies Eigenvektoren orthogonal

1.1.6 Spur einer Matrix

Die Spur einer Matrix A ist die Summe der Hauptdiagonalelemente $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{Spur}(A)$.

- bei diagonalisierbaren Matrizen ist die Spur die Summe der Eigenwerte \implies die Spur ähnlicher Matrizen ist gleich
- die Spur ist eine lineare Abbildung
- Vertauschung unter der Spur: $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$
- Invarianz bei zyklischen Vertauschungen $\text{Spur}(ABC) = \text{Spur}(BCA) = \text{Spur}(CAB)$

1.1.7 Diagonalisieren von Matrizen

Matrix A diagonalisierbar $\iff D_A = S^{-1}AS$, $A = SDS^{-1}$. Es sollen D_A und S berechnet werden.

1. Bestimmen der Eigenwerte λ_i mittels $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Bestimmen der Eigenräume $E(\lambda_i)$ zu den Eigenwerten mittels $(A - \lambda_i I) \cdot x = 0$
3. Bestimmen der Basisvektoren b der Eigenräume
4. $D_A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 $S = (b_1, \dots, b_n)$

1.1.8 Definitheit

Wenn eine Matrix nicht symmetrisch oder hermitesch ist, kann nur der symmetrische oder hermitesche Teil betrachtet werden: $A_S = \frac{1}{2}(A + A^T)$ bzw $A_H = \frac{1}{2}(A + A^H)$.

Definition

Eine Matrix ist genau dann

- | | |
|----------------------|-------------------------|
| positiv definit, | falls $x^T Ax > 0$ |
| positiv semidefinit, | falls $x^T Ax \geq 0$ |
| negativ definit, | falls $x^T Ax < 0$ |
| negativ semidefinit, | falls $x^T Ax \leq 0$. |

Definitheit anhand von Eigenwerten

Eine Matrix ist genau dann

positiv definit,	wenn alle Eigenwerte größer als null sind;
positiv semidefinit,	wenn alle Eigenwerte größer oder gleich null sind;
negativ definit,	wenn alle Eigenwerte kleiner als null sind;
negativ semidefinit,	wenn alle Eigenwerte kleiner oder gleich null sind;
indefinit,	wenn positive und negative Eigenwerte existieren.

Definitheit anhand von Hauptminoren

Positiv definit: Führende Hauptminoren sind positiv

Negativ definit: Vorzeichen der führenden Hauptminoren alternieren (ungerade führende Hauptminoren negativ, alle geraden positiv).

1.1.9 Satz von Cayley-Hamilton

Matrix ist Nullstelle des Zugehörigen charakteristischen Polynoms:

$$P_A(A) = (-1)^n (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0E_n) = 0$$

Durch Multiplizieren von A^{-1} lässt sich damit A^{-1} bestimmen.

1.2 Determinanten

1.2.1 Umformungen von Determinanten

1. **Vertauschen** von Zeile oder Spalte \implies Faktor -1 vor Determinante
2. **Multiplizieren** von Zeile \implies Faktor vor Determinante
3. **Gauß** ohne Folgen
4. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

1.3 Basiswechsel

Ein VR zur Basis A soll durch die Transformationsmatrix in die Basis B umgeformt werden. Berechnung der Trafomatrix mittels Gauß-Jordan:

$$(B \mid A) (\text{Umformungen mit Gauß}) \implies (E \mid T)$$

mit E als Einheitsmatrix und T als Transformationsmatrix.

1.3.1 Lineare Abbildung nach Basiswechsel

Wichtig: Transformationsschritte links anmultiplizieren.

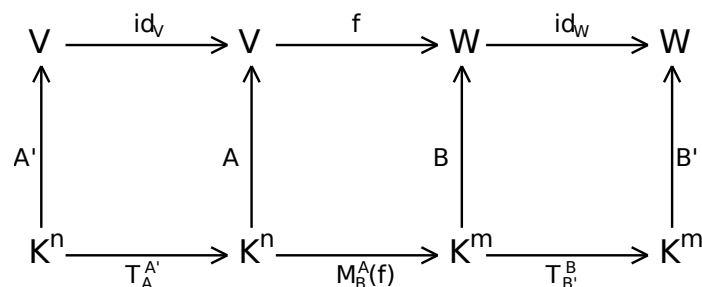


Abbildung 1.1: Basiswechsel linearer Abbildungen

In den meisten Fällen gilt bei uns $A = B$ und $A' = B'$ und somit $T_{B'}^B$ invers zu $T_A^{A'}$.

1.4 Skalarprodukte

Ein Skalarprodukt ist gegeben durch $f(x, y) = \dots = x^T M y$

1. $\iff M$ hermitesch $\wedge M$ positiv definit $\wedge M$ linear.

1.5 Lineare Abbildungen

1.5.1 Linearität zeigen

- Abbildung als Matrix darstellen
- $\alpha L v = L(\alpha v) \wedge L v_1 + L v_2 = L(v_1 + v_2)$

1.5.2 Linearität widerlegen

- Additivität widerlegen: $L v_1 + L v_2 \neq L(v_1 + v_2)$
- Abbildung auf Null widerlegen: $L 0 \neq 0$
- Skalarmultiplikation widerlegen: $\alpha L v_1 \neq L(\alpha v_1)$

1.6 Gram Schmidt

1. $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
2. $u'_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$
3. $u_2 = \frac{u'_2}{\|u'_2\|}$
4. $u'_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle u_i$
5. $u_k = \frac{u'_k}{\|u'_k\|}$

1.7 Vektorräume

1.7.1 Voraussetzungen

- $V \neq \emptyset$
- $(V, +)$ abelsche Gruppe (kommutative Vektoraddition)
 - Assoziativität, Neutrales, Inverses, Kommutativität
- **Vektorraumaxiome**
 - $1 \cdot v = v$
 - $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$, $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ Distributivgesetz bzgl. Skalarmultiplikation, Vektoraddition
 - $\lambda(\mu v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$ Assoziativgesetz

1.7.2 Vektorraum zeigen

Einfacher als Axiome: **Unterraumkriterium:**

- Abgeschlossenheit bzgl. Vektoraddition
- Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation

Kapitel 2

Funktionen mehrerer Veränderlicher

2.1 Topologie

2.1.1 Grundbegriffe

Sei (M, d) ein metrischer Raum $\wedge A \subseteq M, a \in M$ dann ist:

- Inneres $\overset{\circ}{A} := \{a \in M \mid \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq A\}$
- Abschluss $\overline{A} := \{a \in M \mid \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset\}$
- Häufungspunkt $A' := \{a \in M \mid \forall \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset\}$
- Randpunkte $\partial A := \{a \in M \mid \forall \varepsilon > 0 \exists x, y : x \in A, y \in A^c \wedge x, y \in U_\varepsilon(a)\}$
- Bedingung für Isolierte Punkte $a \in A : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap A = \{a\}$
- offene Menge
 \iff jedes $a \in A$ ist innerer Punkt von A
- abgeschlossene Menge
 $\iff A^c$ ist offen
 $\iff \partial A \subseteq A$
 $\iff A = \overline{A}$
- $K \subset \mathbb{R}$ kompakt $\iff K$ beschränkt und abgeschlossen

2.1.2 Metriken

Sei X eine beliebige Menge, dann ist $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik wenn für $x, y, z \in X$ folgende Axiome erfüllt sind:

(M1) Pos. Definitheit $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) Dreiecksungleichung $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

2.2 Funktionen und Abbildungen

2.3 Differenzierbarkeit

2.3.1 Grundbegriffe

- partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = d_j f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)} \dots x_j^{(0)} + h \dots x_n^{(0)}) - f(x_0)}{h}$$

f ist partiell diff'bar in x_0 falls alle partiellen Ableitungen existieren mit $\nabla f(x_0)$

- Stetigkeit in Achsenrichtung:

Ist f in x_0 nach x_i diff'bar, so ist f in x_0 in Richtung der x_i -Achse stetig. (\neq Stetigkeit in alle Richtungen)

- Richtungsableitungen:

$e \in \mathbb{R}^n$ ein Richtungsvektor mit $\|e\| = 1$, $x_0 \in U$ existiert

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he) - f(x_0)}{h}$, so ist dies die Richtungsableitung von f nach e in x_0 : $\frac{\partial f}{\partial e}(x_0)$

Der Gradient ist ein Spezialfall einer Richtungsableitung und steht immer senkrecht auf den Höhenlinien ($f(x) = c$) und zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs.

Totale Ableitung

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist in $x_0 \in U$ total diff'bar, falls f in x_0 linearisierbar ist:

$$\bigvee x \in U \exists A : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x, x_0) \quad (2.1)$$

wobei A eine Matrix und $r(x, x_0)$ ein Restterm ist.

Bemerkung: A ist die Jacobi-Matrix, bzw bei einer skalarwertigen Funktion der (transponierte) Gradient der Funktion an der entsprechenden Stelle.

Ist f in U partiell diff'bar und die partiellen Ableitungen in x_0 stetig, dann ist f total diff'bar.

Notation: $f'(x_0) = Df(x_0)$

Für den Restterm muss gelten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|r(x, x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0 \quad (2.2)$$

Totale Diff'barkeit und Richtungsableitungen

Ist f in x_0 total diff'bar, dann ist f in x_0 in jede Richtung diff'bar und für die Richtungsableitungen gilt

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \langle \nabla f(x_0), e \rangle = - \frac{\partial f}{\partial (-e)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he) - f(x_0)}{h} \quad (2.3)$$

Beachte, aus Diff'barkeit in jede Richtung folgt nicht totale Diff'barkeit, sobald die partiellen Ableitungen nicht stetig sind!

2.3.2 Mehrdimensionale Kettenregel

Sind $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ und $g : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ diff'bare Abbildungen, dann ist auch $g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diff'bar. Die Ableitung im Punkt p ist dann als die Hintereinanderausführung der Ableitung von f in p und der Ableitung von g in $f(p)$ definiert

$$D(g \circ f)_p = Dg_{f(p)} \circ Df_p \quad (2.4)$$

Wird die Verkettung mit $h(x) = g \circ f$ definiert gilt dann

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(p)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p) \quad (2.5)$$

hierbei werden die Koordinaten im Def-Bereich von f als $x = (x_1, \dots, x_n)$ und die Koordinaten im Bildraum \mathbb{R}^l von f mit $y = (y_1, \dots, y_l)$ bezeichnet.

2.3.3 Satz von Schwarz

Existiert die partielle Ableitung ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ die zweite partielle Ableitung von f nach x_i und x_j (in dieser Reihenfolge).

Ist f in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}^n$ stetig, existieren in x_0 $f_{x_i}, f_{x_j}, f_{x_i, x_j}, f_{x_j, x_i}$ und sind die zweiten partiellen Ableitungen stetig in x_0 so gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad (2.6)$$

Das ist gleichbedeutend damit, dass die Hesse-Matrix symmetrisch ist.

2.4 Lokale Extrema

Vorgehensweise: Extrema im \mathbb{R}^n bestimmen

1. Gradient $\nabla f(x)$ bestimmen
2. $\nabla f(x) = 0$ lösen
3. Hesse-Matrix betrachten um Art des Extremums zu bestimmen (**Zweite Ableitung Kriterium**)

2.4.1 Satz von Fermat

- $U \subset \mathbb{R}$ offen
- f besitze in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum und dort partiell diff'bar
 $\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$
- gilt $\nabla f(x_0) = 0$ heißt x_0 kritischer oder stationärer Punkt von f

2.4.2 Zweite Ableitung Kriterium

Es sei $f \in C^2(U)$ und $x_0 \in U$ ist kritischer Punkt $\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$

- Hesse-Matrix positiv definit \Rightarrow Minimum
- Hesse-Matrix negativ definit \Rightarrow Maximum
- Hesse-Matrix indefinit \Rightarrow Sattelpunkt
- Hesse-Matrix semi-positiv definit \Rightarrow Minimum oder Sattelpunkt
- Hesse-Matrix semi-negativ definit \Rightarrow Maximum oder Sattelpunkt
- Hesse-Matrix semi definit \Rightarrow keine Aussage möglich. Betrachtung mit Definition und ggf. ε -Umgebung

2.5 Implizite Funktionen

2.5.1 Lokale Injektivität

$f \in C^2(U, \mathbb{R}^n)$, $a \in U$ und $|Jf(a)| \neq 0$. Dann ist f lokal injektiv:

Es gibt offene Umgebung $U(a) \subset U$, so dass f auf diese Umgebung eingeschränkt injektiv ist.

2.5.2 Lemma 2.5.5

Es sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ injektiv, $a \in U$ mit $b := f(a)$. b ist dann innerer Punkt von $f(U)$, d.h. es existiert eine Umgebung $V(b)$ mit $V(b) \subset f(U)$.

Mit anderen Worten: f ist lokal bijektiv, so dass die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in V(b)$ genau eine Lösung $x \in U$ besitzt.

2.5.3 Homöomorphismus und Umkehrfunktion

Es sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ (global) injektiv, $Jf(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Dann ist $f(U)$ offen und $f : U \rightarrow f(U)$ ist ein Homöomorphismus (f ist bijektiv und stetig). Weiter ist $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ ebenfalls stetig.

• Außerdem gilt unter den Voraussetzungen $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $a \in U$ mit $Jf(a) \neq 0$ und $b = f(a)$, dass es immer eine offene Umgebung $U(a)$ bzw. $V(b)$ gibt, auf welche eingeschränkt f ein Homöomorphismus ist.

$$f : U(a) \rightarrow V(b)$$

2.5.4 Umkehrformel

Es sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ injektiv mit $Jf(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Dann ist $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ stetig diff'bar und $y = f(x) \in f(U)$ gilt die Umkehrformel:

$$Df^{-1}(y) = \left(\frac{\partial f_k^{-1}}{\partial y_l}(y) \right)_{k,l=1}^n = (Df(x))^{-1} = \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right)_{i,j=1}^n \right)^{-1}$$

2.5.5 Stetig Diff'barkeit der Umkehrfunktion

Existiert die Umkehrfunktion von f und ist f in einer Umgebung U p -mal stetig diff'bar, so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} p -mal stetig diff'bar auf $f(U)$.

2.5.6 Satz über inverse Abbildung

2.5.7 Satz über implizite Funktionen

Informell liefert der Satz über implizite Funktionen eine Funktion, deren Bild eine Menge von Punkten in der Definitionsmenge beschreibt, welche auf gleichem Potenzial liegen.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(x) = 0$$

wobei dann nach $\frac{\partial y}{\partial x}$ umgestellt:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))$$

Der Satz lässt sich so auch auf (nicht notwendigerweise lineare) Gleichungssysteme mit n Gleichungen anwenden.

Wobei $\frac{\partial y}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)_1 \dots y(x)_k)$ dann jeweils Vektoren der Länge n sind und

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)_1 \dots y(x)_k) \right)^{-1} = (J_f)^{-1}$$

gerade die invertierte Jacobi-Matrix über $(y_1 \dots y_k)$ nach denen aufgelöst werden soll ist.

Alternativ zur Berechnung der Inversen und ggf. einfacher können die Gleichungen auch für sich abgeleitet werden. Umstellen und Einsetzen führt dann zum gleichen Ergebnis.

2.5.8 Satz über implizite Funktionen im \mathbb{R}^2

- $U \subset \mathbb{R}^2$ offen
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $C^1(U)$ und $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U$
- $\nabla f(a, b) \neq 0$ und $c := f(a, b)$

Dann gibt es eine offene Umgebung $U(a, b) \subset U$, ein $\epsilon > 0$ und eine C^1 -Kurve $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U(a, b)$ mit $\gamma(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Dann gibt γ gerade die Funktion der gesuchten Niveaumenge an.

2.5.9 Lagrange Multiplikatorenregel

- $M \subset \mathbb{R}^n$ offen
- $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $f \in C^1(M)$
- $g : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ und $g \in C^1(M)$
- $s < n$
- Ableitung von g hat maximalen Rang im Punkt x_0

Wenn x_0 lokales Extremum von f bzgl. der Nebenbedingung ist, gilt

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^s : \frac{d}{dx}(f(x) + \lambda^T g(x)) = 0$$

Das ist äquivalent zu

$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$. Hieraus folgt insbesondere, dass die beiden Gradienten parallel sind!

Sind mehrere Nebenbedingungen g gegeben gilt

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \nabla g_k(x)$$

Vorgehensweise: Extrema unter Nebenbedingungen bestimmen

1. Gradienten $\nabla f(x)$ und $\nabla g(x)$ bilden
2. $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ aufstellen
3. Resultierendes Gleichungssystem für Komponentenfunktionen lösen, wenn nötig mit bekannten Verfahren für das Lösen von LGS (Gauß).
4. Prüfen, ob/welche Lösung Anfangsbedingungen erfüllt

Achtung: Einfache **Hesse-Matrix bringt keine Aussage** über die Art des Extremums unter Nebenbedingungen, sondern nur im allgemeinen Fall (ohne NB). (Geränderte Hesse-Matrix bringt Aussage, ist aber sehr aufwendig (meiner Meinung nach nicht machbar in Klausur))

Bemerkung: Ist der zulässige Bereich kompakt und die Funktion stetig, **nimmt sie Maximum und Minimum an**.

Es kann aber die Hesse-Matrix der Lagrange-Funktion untersucht werden, bspw. $F(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$. Diese muss dann wie gewohnt auf Definitheit geprüft werden.

Kapitel 3

Das Riemannsche Integral

3.1 Kurvenintegrale

3.1.1 Grundbegriffe

- Äquivalenz zweier Parameterdarstellungen wenn es eine stetige, streng monoton wachsende Funktion gibt $\phi : I_1 \rightarrow I_2$ mit $x_1(t) = x_2 \circ \phi(t)$ mit $x_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Parameterdarstellungen
- Träger der Kurve ist das gemeinsame Bild äquivalenter Parameterdarstellung (Notation: γ^*)
- Kurve ist stetig diff'bar wenn Parameterdarstellung $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar ist.
Gilt zusätzlich $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ heißt die Kurve glatt
- Eine Kurve heißt rektifizierbar wenn sie von endlicher Länge ist
- Jede stetig diff'bare Kurve γ ist rektifizierbar:
 $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bare Parameterdarstellung dann ist die Länge der Kurve durch
$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} x(t) \right| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'^2 + \dots + x_n'^2} dt$$
 gegeben

3.1.2 Kurvenintegral 1. Art

Allgemein: Integral einer **skalaren** Funktion über eine Kurve.

Existenz

Wenn gilt:

- γ glatte Kurve [link](#)
- $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatte Parametrisierung
- f stetig auf Träger der Kurve

Dann existiert das Kurvenintegral 1. Art.

Berechnung

Kurve γ (z.B. auf \mathbb{R}^2), $f(s)$ Funktion (hier: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$), $x(t)$ Parametrisierung der Kurve auf Intervall $[a, b]$

$$\int_{\gamma} f(s) \, ds = \int_a^b f(x(t)) |\dot{x}(t)| \, dt \quad (3.1)$$

3.1.3 Kurvenintegral 2. Art

Allgemein: Integral einer **vektorwertigen** Funktion über eine Kurve.

Interpretation: Summe projizierter Flächen, Energie eines Massepunkts durch ein Kraftfeld.

Existenz

γ rektifizierbare Kurve, $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Parametrisierung, $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorwertig.

Beachte, dass x und f aus dem selben Raum (\mathbb{R}^n) stammen bzw. abbilden.

Wenn gilt:

- f stetig auf γ^*
- x stetige Parametrisierung

Dann existiert das Kurvenintegral 2. Art.

Das Kurvenintegral 2. Art ist als

$$\int_{\gamma} \vec{f} \, d\vec{s} = \int_a^b \vec{f}(\omega(t)) \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} \, dt \quad (3.2)$$

definiert.

Berechnung

Die Vorgehensweise zum berechnen ist nun die Folgende:

1. Bestimme Parametrisierung $\omega(t)$ der Kurve
2. Parametrisierung in Funktion f einsetzen, Grenzen als Grenzen des Parameterbereichs wählen
3. Ableitung $\frac{d\omega(t)}{dt}$ berechnen (komponentenweise ableiten)
4. Skalarprodukt aus $f(\omega(t))$ und $\frac{d\omega(t)}{dt}$ berechnen und Integration ausführen

3.1.4 Wegunabhängigkeit

- offene und zusammenhängende Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet
- U ein Gebiet, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, dann ist f auf U wegunabhängig
int'bar/konservativ:
 $\int_{\gamma} f(x) \, dx = \int_{\tilde{\gamma}} f(x) \, dx$ für stetig diff'bare Kurven $\gamma, \tilde{\gamma} \subset U$

- f auf U wegunabhängig int'bar \iff jede glatte geschlossene Kurve $\gamma \subset U$ gilt $\oint_{\gamma} f(x) dx = 0 \iff \operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = 0$
- $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf U wegunabhängig int'bar \iff f Gradienten-Potenzialfeld (dh. es gibt bis auf konstante definierte Stammfkt.)

3.2 Jordan-Inhalt

3.2.1 Kriterien für Jordan-Messbarkeit

- Menge Jordan-Messbar \iff Rand der Menge ist Jordansche Nullmenge
- $M1$ Jordan-Messbar \wedge $M2$ Jordan Messbar $\implies M1 \times M2$ Jordan-Messbar

3.3 Satz von Fubini

- $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar
- f über $M \times N$ int'bar
- Existenz von $F(y) = \int_M f(x, y) dx$ für alle $y \in N$

$$\int_{M \times N} f(x, y) d(x, y) = \int_N \left(\int_M f(x, y) dx \right) dy \quad (3.3)$$

Beachte, dass die Existenz des Integrals $F(y)$ vorausgesetzt wird. Dies muss nach der Berechnung überprüft werden. Es wurde auf Blatt 12 außerdem gezeigt, dass, wenn der Satz von Fubini anwendbar ist, die Integrationsreihenfolge vertauscht werden darf.

3.4 Transformationsformel

- $U \subset \mathbb{R}^n$ offen
- $T : U \rightarrow V = T(U) \subset \mathbb{R}^n$ injektiv
- $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{pmatrix} = T(x)$
- $\forall x \in U \quad |J_T(x)| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x) \neq 0$

Damit ist T diff'bar

- $f \in C_0(V)$ (Nullrandwerte ($\operatorname{supp}(f) \subset\subset V$)), dann ist auch $f \circ T \in C_0(U)$

$$\int_{V=T(U)} f(y) dy = \int_U f(T(x)) |J_T(x)| dx \quad (3.4)$$

$J_T(x)$ wird auch als Funktionaldeterminante bezeichnet.

3.5 Integralsätze

3.5.1 Oberflächenintegrale erster Art

Ist M explizit durch $f : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt für das Oberflächenintegral erster Art :

$$\int_M g(x) dS = \int_D g(x) \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x') \right)^2} dx' \quad (3.5)$$

Fall $n=3$

Ist $n = 3$ und die Parameterdarstellung $f : P \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, so gilt

$$\int_M g(x) dx = \int_P g(f(p)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dp \quad (3.6)$$

Hierbei ist $A := \det\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(p_1,p_2)}\right)$, $-B := \det\left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(p_1,p_2)}\right)$ und $C := \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(p_1,p_2)}\right)$.
Siehe Skript 3.8.13 für genauere Herleitung.

3.5.2 Gauß'scher Satz

Definition

Sind die Voraussetzungen

- $\partial U \in C^1$
- $g \in C^1(U, \mathbb{R}^n) \cap C^0(\bar{U})$ ein Vektorfeld

gegeben, dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} \vec{g} dU = \int_{\partial U} \vec{g} d\vec{S} \quad (3.7)$$

Bei der linken Seite kann als Volumenintegral verstanden werden und die rechte Seite als Oberflächenintegral.

Anschaulich bedeutet dass, die Summe der Größen die aus einem Volumen entweicht oder hineingeht entspricht der Summe, die im Inneren entsteht oder verschwindet. Dabei stellt die Divergenz eine Quelle oder Senke dar. Ist die Divergenz 0 sagt man g ist quellenfrei.

Das Oberflächenintegral wird auch als Oberflächenintegral 2. Art bezeichnet.

Vorgehen

- wenn möglich, Divergenz berechnen und so lösen
- sonst Darstellung für Rand finden, bestimmen der Normalenvektoren und Durchführung der Integration

Beispiel aus Tutorium

Gegeben ist die Menge $U \subset \mathbb{R}^3$:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 4\}$$

Und die Funktion

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Zu berechnen ist

$$\int_{\partial U} \vec{f} d\vec{S}$$

Dies wird mit dem Satz von Gauß (und dem Umwandeln in Zylinderkoordinaten) vereinfacht:

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \vec{f} d\vec{S} &= \int_U \operatorname{div}(f) dV \\ &= \int_U 3 dV \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 (3 \cdot \underbrace{\rho}_{\text{Funktionaldeterminante}}) dz d\varphi d\rho \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot 4 \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^2 \\ &= 48\pi \end{aligned}$$

Anwendung

3.5.3 Satz von Green / Gauß'scher Satz in der Ebene

Definition

Ist $B \in C^1$ ein offener und einfach zusammenhängender Bereich im \mathbb{R}^2 und $P, Q \in C^1(B) \cap C^0(\bar{B})$, dann gilt

$$\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) = \oint_{\partial B} (P(x_1, x_2) dx_1 + Q(x_1, x_2) dx_2) \quad (3.8)$$

Die Schreibweise

$$\oint_{\partial U} \vec{f} d\vec{s} = \int_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) d(x_1, x_2) \quad (3.9)$$

ist dazu äquivalent, wobei U weiterhin der Bereich ist und \vec{f} ein Vektorfeld mit den Komponentenfunktionen f_1, f_2 .

Die linke Seite kann hier als Kurvenintegral zweiter Art über den Rand des Bereichs gelöst werden.

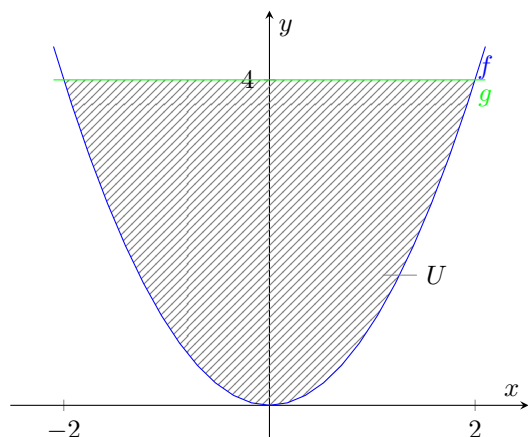
Beispiel aus Tutorium

Die Funktion f ist hier definiert als

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} e^x - y \\ \sin y + x \end{pmatrix}$$

, der Bereich U als

$$U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 4\}$$



Es soll berechnet werden:

$$\oint_{\partial U} \vec{f} d\vec{s}$$

Dies wird nun mit dem Satz von Green vereinfacht:

$$\oint_{\partial U} \vec{f} d\vec{s} = \int_U \left[\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right] d(x, y)$$

Die Ableitungen berechnen sich hier einfach:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$$

Für das Integral gilt also

$$\begin{aligned} \int_U \left[\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right] d(x, y) &= \int_U 2 d(x, y) \\ &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 2 dy dx \\ &= 2 \cdot \int_{-2}^2 4 - x^2 dx \\ &= 2 \cdot \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{64}{3} \\ &= \oint_{\partial U} \vec{f} d\vec{s} \end{aligned}$$

Anwendung

Falls ein zweidimensionales, geschlossenes Kurvenintegral berechnet werden soll, und die Ableitungen $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ „schön“ sind, kann der Satz von Green wie im **Beispiel** angewendet werden.

3.5.4 Partielle Integration

Analog zur partiellen Integration im 1D-Fall gibt es auch im nD-Fall eine solche Formel

$$\begin{aligned} \bullet \quad u, v &\in C^1(U) \cap C^0(\bar{U}) \\ &\Rightarrow \int_U u_{x_i} v \, dx = - \int_U u v_{x_i} \, dx + \int_{\partial U} u v \nu_i \, dS \end{aligned}$$

3.5.5 Green'sche Formeln

Ist $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ dann gilt

$$\begin{aligned} \bullet \quad \int_U \Delta u \, dx &= \int_{\partial U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS \\ \bullet \quad \int_U Du \cdot Dv \, dx &= - \int_U u \Delta v \, dx + \int_{\partial U} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS \\ \bullet \quad \int_U (u \Delta v - v \Delta u) \, dx &= \int_{\partial U} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) \, dS \end{aligned}$$

3.5.6 Satz von Stokes

- $P \subset \mathbb{R}^2$ eine offene, einfach zusammenhängende Menge (Gebiet)
- stückweise glatte, doppelpunktfreie Kurve $\gamma_p = \partial P$
- $\omega(s)$ mit $s \in [0, L(\gamma_p)]$ die Parametrisierung nach der Bogenlänge
- $U \subset \bar{P}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv
- $f \in C^2(U)$ mit $\text{rg}(Df) = 2$
- $H = f(\bar{P})$ in Parameterdarstellung gegebene Fläche
- $x(s) = f(\omega(s))$ mit $s \in [0, L(\gamma_p)]$ eine Parametrisierung der Randkurve von M
- Vektorfeld $g \in C^1(V, \mathbb{R}^3)$ mit $V \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_H \text{rot}(\vec{g}) \vec{n} \, dO = \int_{\partial H} \vec{g} \, d\vec{s} \quad (3.10)$$

Die rechte Seite kann hier wieder als Kurvenintegral gelöst werden. Die Normale kann hier folgendermaßen bestimmt werden

$$\vec{n} = \frac{D_{p_1} f \times D_{p_2} f}{\|D_{p_1} f \times D_{p_2} f\|} = \frac{1}{\|D_{p_1} f \times D_{p_2} f\|} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial p_2} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Da das Kurvenintegral nur vom Rand abhängt, folgt, dass Flächen mit gleichem Rand hier das gleiche Ergebnis liefern \Rightarrow eine komplizierte Menge kann durch eine einfache Menge mit gleichem Rand dargestellt werden

Kapitel 4

Gewöhnliche Differentialgleichungen

4.1 Existenz und Eindeutigkeit

4.1.1 Stetigkeit

4.1.2 Gleichmäßige Stetigkeit

4.1.3 Lipschitz-Stetig

4.1.4 Lipschitz-Bedingung

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ global Lipschitz-Stetig
 $\iff \exists L > 0 : |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L |y - y_0| \quad \forall (x, y)^T, (x, y_0)^T \in D$
Vorgehen:

$$\bullet |f(x, y) - f(x, y_0)| \stackrel{MWS}{=} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot |y - y_0| \leq \sup_D \frac{\partial f}{\partial y} |y - y_0| \stackrel{!}{\leq} L |y - y_0|$$

4.1.5 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Seien $s, r, \xi, \eta \in \mathbb{R}$ und $r, s > 0$ und $\varphi(x, y) : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M := [\xi, \xi + r] \times [\eta - s, \eta + s]$ außerdem erfülle $\varphi(x, y)$ die Lipschitz-Bedingung, dann besitzt das AWP $y' = \varphi(x, y)$ mit $y(\xi) = \eta$ eine eindeutige Lösung, wenn gilt:

$$|\varphi(x, y)| \leq \frac{s}{r}$$

Vorgehen:

- $|\varphi(x, y)|$ durch Einsetzen der Grenzen sinnvoll abschätzen
- Gleichung auf $r < \dots$ umstellen um Lösungsintervall zu bestimmen

Bemerkungen:

1. Ohne Lipschitz-Bedingung lässt sich trotzdem eine Aussage über das Lösungsintervall treffen, dass die Existenz *mindestens* einer Lösung garantiert. (siehe Satz von Peano)

- Der Satz gilt nur in einer Richtung!
D.h. erfüllt Lipschitz-Bedingung nicht $\not\Rightarrow$ besitzt keine eindeutige Lösung
- Beachten, dass das gefundene Intervall größer als die Definitionsmenge in der Aufgabenstellung sein kann. Dann setzt sich das Lösungsintervall aus der Schnittmenge der Beiden zusammen.

4.1.6 Picarditeration

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Picarditeration>

AWP:

$$y'(x) = f(x, y(x)), y(x_0) = y_0$$

$f(x, y)$ Lipschitz stetig in y . Picard Iteration:

$$y^{[0]}(x) = y_0$$

$$y^{[l+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y^{[l]}(s)) \, ds, x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$$

Konvergiert für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ gleichmäßig gegen Lösung der DGL.

4.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

4.2.1 Lineare DGL erster Ordnung

Es ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\chi \in \mathbb{R}$ ein Punkt in I , welcher nicht auf dem Rand liegt. Es sind f, g stetige Funktionen

$$y_0 : I \rightarrow \mathbb{R} \quad y_0(x) = \exp \left(\int_{\chi}^x f(t) \, dt \right)$$

$$y_1 : I \rightarrow \mathbb{R} \quad y_1(x) = y_0(x) \cdot \left(\eta + \int_{\chi}^x \frac{g(t)}{y_0(t)} \, dt \right)$$

dann ist

- y_0 ist Lösung von $y' = f(x)y$
- y_1 ist Lösung von $y' = f(x)y + g(x)$ mit $y(\chi) = \eta$

Bemerkung:

- Jede Linearkombination der Lösungen ist im Allgemeinen wieder eine Lösung des homogenen Problems
- Eindeutigkeit muss im Falle des inhomogenen AWP's mit Picard-Lindelöf gezeigt werden

4.2.2 Bernoullische DGL

Form: $y' = f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^\alpha$ (für $\alpha \in \{0, 1\}$ ergibt sich lineare DGL)

Lösung:

1. definiere $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$
2. es ergibt sich $z' = (1-\alpha)f(x)z(x) + (1-\alpha)g(x)$ (lineare DGL)
3. $y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

4.2.3 Riccatische DGL

Form: $y' = f(x) \cdot y^2 + g(x) \cdot y + h(x)$

Lösung: Es existiert kein allgemeiner Lösungsansatz.

Ist Lösung y_1 bekannt, so ergibt sich für $z = y_2 - y_1$:

$z' = f(x) \cdot z^2 + (g(x) + 2f(x)y_1(x)) \cdot z$ (Bernoulli DGL).

Ist z gefunden, ist $y_2(x) = z(x) + y_1(x)$ ebenfalls Lösung.

4.2.4 DGL mit getrennten Veränderlichen

Es ist eine DGL der Form $y' = g(x)h(y)$ gegeben, dann erhält man durch Substitution die Form

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx$$

welche nach y aufgelöst werden kann. Es ist zu beachten, ob $h(y) \neq 0$ gilt, andernfalls müssen diese Punkte nochmals gesondert betrachtet werden.

Lösung: Ist y Lösung der Riccati-DGL

4.2.5 Homogene DGL

Form: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Lösung: Substitution $z = \frac{y}{x}$ bzw. $y = z \cdot x$ führt zu

$f(z) = y' = z + x \cdot z' \Rightarrow z' = \frac{f(z)-z}{x}$ (getrennte Veränderliche)

4.2.6 Verallgemeinerte homogene DGL

Form: $a^2 + b^2 + c^2 > 0 \wedge \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

Lösung:

1. Fall: $\alpha = \beta = 0$ (dann o.B.d.A $\gamma = 1$)

$b = 0$: Falls $b = 0$ ergibt sich $y' = f(ax + c)$. Es muss Stammfunktion von f gefunden werden.

$b \neq 0$: Falls $b \neq 0$ ergibt sich $y' = f(ax + by + c)$ y löst, wenn $z(x) = ax + by(x) + c$ die DGL $z' = a + bf(z)$ löst (getrennte Veränderliche).
Dann $y(x) = \frac{z(x) - ax - c}{b}$.

2. Fall: $\alpha^2 + \beta^2 > 0$

$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$: Es existiert also $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Somit ergibt sich

$$y' = f\left(\lambda + \frac{c - \lambda\gamma}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \quad (1. \text{ Fall } b \neq 0 \text{ mit veränderter Funktion } \tilde{f}).$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$: Es existieren eindeutige $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ mit $ax_0 + by_0 + c = 0 \wedge \alpha x_0 +$

$$\beta y_0 + \gamma = 0 \text{ (LGS lösen). Das führt auf } y' = f\left(\frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)}\right).$$

Mit $z(x) = y(x+x_0) - y_0$ erhält man $z'(x) = f\left(\frac{ax+bz}{\alpha x + \beta z}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{z}{x}}{\alpha + \beta\frac{z}{x}}\right)$
(homogene DGL).

4.2.7 Die exakte Differentialgleichung

Sei $D := (a, b) \times (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f, g \in C(D)$.

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$f(x, y) + y' \cdot g(x, y) = 0 \quad (4.1)$$

heißt exakt, wenn das Vektorfeld $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ eine Stammfunktion $F(x, y(x))$ besitzt.

y mit $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \in D$ löst die DGL, wenn $F(x, y(x)) \stackrel{!}{=} c$ mit der Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Vorgehen:

1. Integrabilitätsbedingung prüfen
2. Stammfunktion berechnen
3. $F(x, y(x)) = c$ auf $y(x)$ umstellen, wobei eine *explizite* Darstellung nicht immer möglich ist
4. ggf. Konstante c über AWP bestimmen

Eulerscher Multiplikator oder integrierender Faktor

Sei eine gewöhnliche Differentialgleichung wie in 4.1 gegeben, die aber nicht die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Dann lässt sich ggf. eine Funktion $\mu(x, y)$ mit $\mu \in C(D)$ und $\mu(x, y) \neq 0$ finden, sodass

$$\mu(x, y)f(x, y) + y' \cdot \mu(x, y)g(x, y) = 0$$

eine exakte Differentialgleichung ist, die die Integrabilitätsbedingung erfüllt.

Bemerkung: Es gibt vier Fälle, für die der Integrierende Faktor einfach bestimmt werden kann: *Die Herleitung folgt mit einfachen Umformungen aus der Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial \mu f}{\partial y} = \frac{\partial \mu g}{\partial x}$.*

i) $\mu(x)$ hängt nur von x ab:

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \mu_y f + \mu f_y = \mu_x g + \mu g_x \\ &\Longleftrightarrow \mu(f_y - g_x) = \mu_x g \\ &\Longleftrightarrow \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{f_y - g_x}{g} \\ &\Rightarrow \mu(x) = \exp \left(\int \frac{f_y - g_x}{g} dx \right) \end{aligned}$$

ii) $\mu(y)$ hängt nur von y ab: *analog zu x*

$$\Rightarrow \mu(y) = \exp \left(\int \frac{g_x - f_y}{f} dy \right)$$

iii) $\mu(x+y)$ hängt nur von $x+y$ ab:

$$\begin{aligned} &f\mu_y - g\mu_x = (f - g) \cdot \mu' = (g_x - f_y)\mu \\ &\Longleftrightarrow \mu(x+y) = \exp \left(\int^{x+y} \frac{g_x - f_y}{f - g}(t) dt \right) \end{aligned}$$

iv) $\mu(xy)$ hängt nur von xy ab:

$$\begin{aligned} &f\mu_y - g\mu_x = (xf - yg) \cdot \mu' = (g_x - f_y)\mu \\ &\Rightarrow \mu(xy) = \exp \left(\int^{xy} \frac{g_x - f_y}{xf - yg}(t) dt \right) \end{aligned}$$

Für das Finden des richtigen Eulerschen Multiplikators gibt es keine Regel. Der Ausdruck im Integral der obigen Beispiele darf aber je nach Fall nur von x , y , $x+y$, xy abhängig sein. Der Euler Multiplikator schränkt das Lösungsintervall nicht ein.

4.2.8 Die Clairautsche Differentialgleichung

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y(x) = x \cdot y'(x) - f(y'(x))$$

heißt Clairautsche Differentialgleichung und wird trivialerweise durch

$$y(x) = cx - f(c)$$

mit $c \in \mathbb{R}$ gelöst.

4.3 DGL Systeme

4.3.1 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ist ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$y' = Ay + b(x)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit konstanten Koeffizienten, diagonalisierbar und $b \in \mathbb{R}^n$.

Das homogene System wird von einer sogenannten **Fundamentalmatrix** $Y(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gelöst, mit den Spaltenvektoren $y_j(x) \in \mathbb{R}^n$.

$y_j(x) = e^{\lambda_j x} \cdot \vec{s}_j$, wobei λ_j die Eigenwerte von A und s_j die zugehörigen Eigenvektoren sind.

4.3.2 Wronski Determinante

Für Funktionen $y_1, \dots, y_n \in C_n^0(I)$ heißt

$$W : I \rightarrow \mathbb{R}, W(x) := |y_1(x) \dots y_n(x)|$$

die zugehörige Wronski-Determinante.

Dgl der Wronski Determinanten Sind y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$ und W deren Wronski Determinante, dann gilt:

$$\begin{aligned} W'(x) &= \text{spur}(A)W(x) \iff \frac{W'(x)}{W(x)} = \text{spur}(A) \\ \iff W(x) &= \exp\left(\int^x \text{spur}(A(t)) dt\right) \\ \Rightarrow W(x) &= W(\xi) \exp\left(\int_\xi^x \text{spur}(A(t)) dt\right) \quad \forall x, \xi \in I \end{aligned}$$

4.3.3 Partikuläre Lösung

Sind y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem von $y' = A(x)y$ mit Wronski-Determinante W und für $\nu = 1, \dots, n$

$$W_\nu(x) = \det(y_1(x), \dots, y_{\nu-1}(x), b(x), y_{\nu+1}(x), \dots, y_n(x))$$

Dann wird das DGL-System gelöst durch

$$y_p : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_p(x) = \sum_{\nu=1}^n y_\nu \int^x \frac{W_\nu(t)}{W(t)} dt$$

Bemerkung

Ist ein Anfangswertproblem der Form $y(\xi) = \eta$ gegeben, dann ist die Lösungsgesamtheit gegeben durch

$$y(x) = Y(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + y_p(x)$$

Wobei $Y(x)$ das Fundamentalsystem ist und die Konstanten c_1, \dots, c_n durch einsetzen des AWP bestimmt werden können. Es ist also nicht notwendig, das AWP beim Bestimmen der partikulären Lösung zu berücksichtigen, da die Konstanten zusammengefasst werden können.

Substitution um eine Matrix mit konstanten Koeffizienten zu erhalten

Beispiel aus dem Tutorium:

$\dot{u} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot u$. Hier kann $t = e^x$ subst. werden. Dann erhält man

$$e^x \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{du}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot u(e^x)$$

Damit hat man nun ein System mit konstanten Koeffizienten, welches wie bekannt durch Diagonalisieren der Matrix bestimmt werden kann.

4.3.4 Matrixexponentialfunktion

Definition

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (4.2)$$

Eigenschaften

$$A^0 = I \text{ (Einheitsmatrix)}$$

$$e^{D\lambda} = „D(e^\lambda)“ \text{ (Diagonalmatrix: Potenzieren der Diagonalelemente)}$$

$$e^A \cdot e^B = e^{A+B}, \text{ falls } AB = BA$$

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

$$e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$$

$$D = S^{-1}AS \implies e^A = Se^DS^{-1}$$

$$y' = Ay \implies e^{xA} \text{ ist Fundamentalmatrix}$$

$$y' = Ay, y(\xi) = \eta \implies y(x) = e^{(x-\xi)A} \cdot \eta \text{ ist eindeutige Lösung}$$

4.3.5 Algorithmus von Putzer

Ist die Matrix A nicht diagonalisierbar, kann eine Darstellung der Matrixexponentialfunktion mit dem Algorithmus von Putzer gefunden werden.

Es ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann ist die Matrix B definiert als

$$B_1 = I_n$$

$$B_j = \prod_{\nu=1}^{j-1} (A - \lambda_\nu I_n) \text{ für } j = 2, \dots, n$$

sowie die Funktionen $v_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, mit $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\
v'_j(x) &= \lambda_j v_j(x) + v_{j-1}(x) \text{ mit } v_j(0) = 0 \text{ für } j = 2, \dots, n \\
v_j &= e^{\lambda_j x} \cdot \int_0^x e^{-\lambda_j t} v_{j-1}(t) dt
\end{aligned}$$

Dann ist dadurch eine rekursive Vorschrift zur Berechnung gegeben. Die Matrixexponentialfunktion kann dann dargestellt werden durch

$$e^{xA} = \sum_{j=1}^n v_j(x) B_j$$

4.3.6 Lineare Differentialgleichungen Höherer Ordnung und DGL Systeme

Lineare DGL höherer Ordnung (4.3) lassen sich in ein DGL System (4.4) umschreiben:

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = 0 \quad (4.3)$$

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \vec{y} \quad (4.4)$$

Beispiel (21 a)

$$y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Umgeformt in DGL System:

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$$

Mit Eigenwerten $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ und dazugehörigen Eigenvektoren $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Daraus folgt die Lösung $y = ae^x + be^{2x}$ mit den Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, die durch das AWP zu $a = -1, b = 1$ bestimmt werden. Die Lösung lautet also $y = e^{2x} - e^x$.

4.3.7 Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten höherer Ordnung

Es ist eine DGL der Form $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}$ gegeben. Dann kann die homogene Gleichung über den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ gelöst werden. Es ist zu beachten, dass komplexe λ auftauchen können und die Lösung dann reell dargestellt werden muss.

Abhängig von $g(x)$ können verschiedene Ansätze für die rechte Seite gewählt werden.

Tabelle 4.1: Ansätze der rechten Seite

Inhomogenität	Ansatz
$g(x) = \sin \omega x$ oder $g(x) = \cos \omega x$	$y_p(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x$
$g(x) = e^{cx} \cdot \sin \omega x$ oder $g(x) = e^{cx} \cdot \cos \omega x$	$y_p(x) = e^{cx}(A \sin \omega x + B \cos \omega x)$
$g(x) = e^{i\omega x}$	$y_p(x) = A e^{i(\omega x - \Psi)}$
$g(x) = e^{cx} \cdot e^{i\omega x}$	$y_p(x) = A e^{cx} e^{i(\omega x - \psi)}$

Bemerkung:

Es muss beachtet werden, wenn ein Teil des Ansatzes bereits Lösung der Gleichung ist und damit in der homogenen Lösung enthalten ist, muss der Ansatz jeweils mit x^ν erweitert werden, wobei ν die Häufigkeit der Lösung, bzw. der Nullstelle im char. Polynom ist.

Außerdem können alle Ansätze jeweils noch um ein Polynom erweitert werden, bspw. $g(x) = \cos \omega x(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots)$ kann der Ansatz $y_p(x) = \cos \omega x(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \dots) + \sin \omega x(C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots)$ gewählt werden

4.3.8 Stabilität**Differentialgleichung erster Ordnung**

Die inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x)y + g(x)$ ist asymptotisch stabil.

$$\iff \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(t) dt = -\infty$$

Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Koeffizientenmatrix einer linearen DGL höherer Ordnung mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und $\gamma = \max_{1 \leq k \leq n} (\operatorname{Re}(\lambda_k))$, dann gilt für die Nulllösung $y_0 = 0$ von $y' = Ay$

- i) **asymptotisch stabil**, wenn $\gamma < 0$. Dann ist jede Lösung y_0 von $y' = Ay + b$ asymptotisch stabil
- ii) **instabil**, wenn $\gamma > 0$
- iii) **stabil**, wenn $\gamma = 0$ und bei allen Eigenwerten λ_k für die gilt $\operatorname{Re}(\lambda_k) = 0$, algebraische und geometrische Vielfachheiten übereinstimmen. Ansonsten **instabil**.

Bemerkung Eine *inhomogene* Differentialgleichung höherer Ordnung ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Nulllösung der homogenen Differentialgleichung asymptotisch stabil ist.

Alternative Bestimmung der Stabilität

Auf Blatt 8 wurden folgende Aussagen bewiesen:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Koeffizienten-Matrix eines autonomen Systems mit konstanten Koeffizienten, dann gilt für die Nulllösung y_0 :

- i) $\det(A) > 0 \wedge \text{Spur}(A) < 0 \Rightarrow$ **asymptotisch stabil**
- ii) $\det(A) < 0 \vee \text{Spur}(A) > 0 \Rightarrow$ **instabil**
- iii) $\det(A) = 0 \wedge \text{Spur}(A) < 0$ und für alle Eigenwerte $\lambda = 0$ *algebraische* und *geometrische* Vielfachheit übereinstimmen
 \Rightarrow **stabil**

Satz von Hartman-Grobman oder Linearisierungssatz

Das Verhalten eines autonomen Systems (*wichtig für nicht lineare Systeme*) gleicht in der Umgebung eines hyperbolischen Fixpunktes (hier wurden bisher jedoch immer nur kritische Punkte betrachtet) dem linearisierten System ($y' = J \cdot y$, wobei J die Jacobimatrix von $\varphi(y)$ ist) in dieser Umgebung.

Def hyperbolischer Fixpunkt

Sei T die Linearisierung (Taylorentwicklung bis zur Ordnung 1, also die Jacobimatrix) eines (*nicht-linearen*) autonomen Systems mit Entwicklungspunkt y_0 , dann ist y_0 ein hyperbolischer Fixpunkt, wenn für alle Eigenwerte λ_k von T , $\text{Re}(\lambda_k) \neq 0$ gilt.

Def kritischer Punkt

Sei $G \subset \mathbb{R}$, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $\eta \in G$, dann ist η ein *kritischer* Punkt, falls $\varphi(\eta) = 0$, sonst ist η ein *regulärer* Punkt.

4.4 Randwertprobleme

$$\begin{aligned} (p(x)y')' + q(x)y &= r(x) \\ R_1y &= \alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = \eta_1 \\ R_2y &= \beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = \eta_2 \end{aligned} \quad (\text{Sturmsches RWP})$$

(**Sturmsches RWP**) heißt **halbhomogen**, wenn $\eta_1 = \eta_2 = 0$

(**Sturmsches RWP**) heißt **homogen**, wenn $\eta_1 = \eta_2 = 0$ und $r = 0$

4.4.1 Bemerkungen zum Sturmschen RWP (Lemma 3.2.4)

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. (**Sturmsches RWP**) besitzt eindeutige Lösung
2. Das zugehörige homogene RWP ($\eta_1 = \eta_2 = r = 0$) besitzt nur Lösung $y = 0$
3. Für jedes FS y_1, y_2 von $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} R_1y_1 & R_1y_2 \\ R_2y_1 & R_2y_2 \end{pmatrix} \neq 0$$

4. **3** gilt für mindestens ein FS

4.4.2 Umformen auf halbhomogenes RWP

Es sei $f \in C^2([a, b])$ und $R_1 f = \eta_1$ und $R_2 f = \eta_2$ und $p(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ und $q, r \in C([a, b])$. Wenn (Sturmsches RWP) eindeutig lösbar ist, und w eindeutige Lösung des halbhomogenen RWP

$$\begin{aligned}(p(x)y')' + q(x)y &= r(x) - (p(x)f'(x))' + q(x)f(x) \\ R_1 y &= R_2 y = 0\end{aligned}$$

ist, dann ist $w + f$ Lösung von (Sturmsches RWP)

4.4.3 Lösen von RWP mit Greenscher Funktion

Das homogene RWP $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, $R_1 y = 0$, $R_2 y = 0$ sei nur trivial lösbar. y_1, y_2 sei zugehöriges Fundamentalsystem von $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, $R_1 y_1 = 0$, $R_2 y_2 = 0$, mit zugehöriger Wronski Determinante (4.3.2) W . Dann lautet die Greensche Funktion

$$G : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, t) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(t)}{p(a)W(a)}, & t \geq x \\ \frac{y_1(t)y_2(x)}{p(a)W(a)}, & t \leq x \end{cases} \quad (\text{Greensche Funktion})$$

und die Lösung des halbhomogenen RWP $(p(x)y')' + q(x)y = r(x)$ ist gegeben durch

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \int_a^b G(x, t)r(t) \, dt$$

.

Kapitel 5

Funktionentheorie

5.1 Wdh: Grundlagen

Definition: Argument

Es ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jede Zahl $\phi \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\phi} = \frac{z}{|z|}$ heißt *Argument* von z und wird mit $\arg(z)$ bezeichnet. Das eindeutig bestimmte Argument auf dem Intervall $(-\pi, \pi]$ heißt *Hauptwert des Arguments* und wird mit $\text{Arg}(z)$ bezeichnet.

Zusammenfassung von Lemmata/Defs

1. Die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(z) = \text{Arg}(z)$ ist stetig
2. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung $\omega^2 = z$ genau zwei Lösungen
 $w = \pm \sqrt{|z|} e^{\frac{i \text{Arg}(z)}{2}}$
3. $g : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ $g(z) = \sqrt{|z|} e^{\frac{i \text{Arg}(z)}{2}}$ ist die Wurzelfunktion bzw. der Hauptwert der Wurzel
4. für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ heißt $\text{Log}(z) = \log|z| + i \text{Arg}(z)$ der Hauptwert des Logarithmus von z

5.2 Komplexe Differenziation

5.2.1 Formale Definition

Es ist $M \subset \mathbb{C}$ offen und nicht leer und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. f heißt komplex diff'bar in $z_0 \in M$, wenn der Grenzwert

$$\frac{d}{dz} f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Ist f in jedem Punkt von M diff'bar heißt f' die Ableitung von f .

Bemerkungen

1. Rechenregeln für die Ableitungen aus dem reellen können auch im komplexen angewendet werden
2. $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann diff'bar in z_0 wenn eine Darstellung der Form

$$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + \phi(z, z_0)$$

existiert, mit einem $c \in \mathbb{C}$ und einem Restterm $\phi(z, z_0)$ der schneller als linear abfällt.

3. \mathbb{C} kann durch Zuordnung von $z = x + iy \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als \mathbb{R}^2 angesehen werden

Äquivalente Aussagen

Für eine Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind äquivalent

1. f ist in z_0 komplex diff'bar
2. f ist in z_0 reell diff'bar und $f_{\bar{z}}(z_0) = 0$
3. f ist in $z_0 = x_0 + iy_0$ reell diff'bar und $u = \operatorname{Re}(f)$ und $v = \operatorname{Im}(f)$ erfüllen die CR-DGL

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}u(x_0, y_0) &= \frac{d}{dy}v(x_0, y_0) \\ \frac{d}{dy}u(x_0, y_0) &= -\frac{d}{dx}v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (\text{Cauchy Riemann DGL})$$

5.3 Holomorphie

5.3.1 Definition: Holomorphie

Es ist $M \subset \mathbb{C}$ nicht leer und offen, $z_0 \in M$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion

1. f heißt *holomorph* oder *analytisch* in z_0 , wenn f in einer Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ diff'bar (5.2, z.b. (Cauchy Riemann DGL)) ist
2. f heißt *holomorph* oder *analytisch* auf M , wenn f in jedem Punkt von M holomorph ist

Linearkombinationen, Produkte, Verkettungen und Quotienten von holomorphen Funktionen sind auf ihrem Definitionsgebiet auch holomorph.

5.3.2 Möbius-Transformation

Es ist durch $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $\det(A) \neq 0$ eine Möbiustransformation gegeben. Die Trafo ist als folgende Abbildung definiert

$$\omega : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \text{ mit } \omega(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Weiter ist definiert, dass $\omega(z) = \infty$ für $z = -\frac{d}{c}$ und $\omega(\infty) = \frac{a}{c}$. Möbius-Trafos sind bijektive Abbildungen von \mathbb{C}_∞ auf sich selbst. Außerdem bildet die Menge der Möbius-Trafos bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Bemerkungen:

- für invertierbare Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ gilt $\omega_A \circ \omega_B = \omega_{AB}$ und $\omega_{A^{-1}} = \omega_A^{-1}$
- Jede Möbius-Trafo lässt sich als Hintereinanderausführung von Drehstreckungen, Verschiebungen und einer Inversion schreiben
- Jede Trafo hat zwei Fixpunkte, die auch zusammenfallen können (Ausnahme die Identität)

Doppelverhältnis zur Berechnung der Möbius-Trafo

Es ist durch

$$DV(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}$$

,mit $(z_1, z_2, z_3, z_4) \subset \mathbb{C}$ das Doppelverhältnis definiert.

Gilt $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbb{C}$ mit $|\{z_1, \dots, z_4\}| \geq 3$ und ϕ ist eine Möbiustrafa

$$DV(\phi(z_1), \phi(z_2); \phi(z_3), \phi(z_4)) = DV(z_1, z_2; z_3, z_4)$$

Damit kann dann die Möbiustrafa berechnet werden.

Beispiel Bestimmen einer Möbiustrafa für welche gilt $T(0) = -1$, $T(i) = -2 + i$ und $T(-i) = -2 - i$. Dann ist mit obiger Gleichung die Möbiustrafa durch das Lösen der folgenden Gleichung zu bestimmen

$$\frac{T(z) + 2 - i}{T(z) + 1} \cdot \frac{-2 - i + 1}{-2 - i + 2 - i} = \frac{z - i}{z} \cdot \frac{-i}{-i - i}$$

5.3.3 Ganze Funktionen

Eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion heißt auch *ganze Funktion*. Ist die Funktion kein Polynom heißt die Funktion *transzendente Funktion*.

Der Satz von Liouville besagt: eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

5.4 Komplexe Integralrechnung

5.4.1 Komplexes Kurvenintegral

Ist $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise stetig diff'bare Parametrisierung der Kurve, dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

das komplexe Kurvenintegral von f über die Kurve γ .

Bemerkung Da \mathbb{C} auch als \mathbb{R}^2 angesehen werden kann, können komplexe Kurvenintegrale auch in reelle umgewandelt werden. Es ist $f(z) = u(z) + iv(z)$ mit $z(t) = x(t) + iy(t)$, dann erhält man

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (v dx + u dy)$$

zwei reelle Kurvenintegrale.

5.4.2 Nützliche Lemmata und Bemerkungen zu komplexen Kurvenintegralen

Es ist $M \subset \mathbb{C}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und γ die Parametrisierung einer stetig diff'baren Kurve

- Ist $|f(z)| \leq c$ dann gilt $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq c \cdot L(\gamma)$
- hat $f(z)$ eine Stammfunktion $F(z)$ so gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$, wobei a, b gerade Anfangs- und Endpunkt der Parametrisierung sind

Es ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- f hat auf G eine Stammfunktion
- Für jede stückweise stetig diff'bare geschlossene Kurve mit Parametrisierung γ gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$
- $\int_{\gamma} f(z) dz$ ist wegunabhängig

5.4.3 Cauchyscher Integralsatz

Voraussetzungen

$G \subset \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet, $p \in G$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf G stetig und auf $G \setminus \{p\}$ holomorph.

Aussagen

- f besitzt auf G eine Stammfunktion.
- Integral über stückweise stetig diffbare geschlossene Kurve = 0:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (5.1)$$

Beispiel

5.4.4 Cauchysche Integralformel

Voraussetzungen

$G \subset \mathbb{C}$ sternförmiges Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf G holomorph.

γ stückweise stetig diffbare geschlossene Kurve in G .

$z_0 \in G$ liegt nicht auf γ .

Aussagen

$$f(z_0)N_{\gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (5.2)$$

Beispiel

$$\int_{|z-3i|=2} \frac{1}{z^2+9} dz = \int_{|z-3i|=2} \frac{\frac{1}{z+3i}}{z-3i} = 2\pi i \frac{1}{3i+3i} = \frac{\pi}{3}$$

Es muss darauf geachtet werden, dass evtl. weitere Problemstellen außerhalb liegen.

5.5 Singularitäten

5.5.1 Definition

Es sei $f : \dot{U}_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $r > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, dann besitzt f in z_0 eine isolierte Singularität.

5.5.2 Klassifizierung

Klassen von Singularitäten

Eine Singularität heißt,

- *hebbbar*, wenn f in einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt ist
- *Polstelle*, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$
- *wesentliche Singularität*, wenn weder hebbbar noch Pol in z_0

Riemann'scher Hebbbarkeitssatz

Es ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(G)$, z_0 ist eine isolierte Singularität von f . Es handelt sich genau dann um eine hebbare Singularität, wenn eine in z_0 holomorphe Funktion g existiert, so dass $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \dot{U}_r(z_0)$ mit $r > 0$.

5.5.3 Laurent-Reihen

Definition: Laurent-Reihe

f ist eine auf dem Kreisring $G = \{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ holomorphe Funktion, dann hat f eine Darstellung als Laurent-Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

wenn man mit dem inneren Radius R_1 des Kreisrings gegen null geht und $R = R_2$ setzt, erhält man gerade den Fall einer punktierten Umgebung $\dot{U}_R(z_0)$. Die Koeffizienten können theoretisch folgendermaßen berechnet werden

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

Die Reihe konvergiert auf dem Kreisring *absolut* gegen f und auf jeder kompakten Teilmenge *gleichmäßig*. Die Darstellung ist eindeutig.

Bemerkung:

- $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z - z_0)^k$ heißt *Hauptteil* der Laurent-Reihe
- $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$ heißt *Nebenteil* der Laurent-Reihe

Klassifizierung von isolierten Singularitäten anhand des Hauptteils

- z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ (kein Hauptteil)
- z_0 ist genau dann eine Polstelle der Ordnung n , wenn $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < -n$, d.h. heißt der Hauptteil hat eine endliche Anzahl an Gliedern
- z_0 ist eine wesentliche Singularität, wenn der Hauptteil unendliche viele Glieder hat

5.6 Residuensatz

5.6.1 Residuen

Mit dem Residuensatz können Kurvenintegrale über geschlossene Kurven gelöst werden. Falls G ein homotop einfaches zusammenhängendes Gebiet ist und f , eine Funktion, auf diesem Gebiet holomorph.

Definition: Residuum

Es ist G wie oben und f eine auf $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ holomorphe Funktion. Dann ist das Residuum von f im Punkt z_0 als

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$$

definiert. Wobei die Umgebung so gewählt wurde, dass sie nur eine Singularität enthält.

Direkte Folgerungen davon sind

- ist f holomorph in z_0 , so ist $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = 0$
- ist $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine Laurent-Reihendarstellung von f , dann ist $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$

Bestimmung von Residuen an Polstellen

Besitzt $f(z)$ in z_0 einen Pol der Ordnung n , dann folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(n-1)!} \left((z-z_0)^n f(z) \right)^{(n-1)} \Big|_{z=z_0}$$

5.6.2 Residuensatz

Es ist $G \subset \mathbb{C}$ ein homotop einfach zusammenhängendes Gebiet. Eine Funktion f , die auf $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ holomorph ist. Dann gilt für jede stückweise stetig diff'bare Kurve γ in $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z_k}(f) \cdot N_{\gamma}(z_k)$$

Die Aussage bleibt wahr für beliebig viele isolierte Singularitäten, solange eventuelle Häufungspunkte auf dem Rand von G liegen.

Residuensatz ist eine verallgemeinerung der Cauchy-Integralformel (5.4.4).

Bestimmen von Residuen

- Residuum ist linear
- f hat in z_0 einen Pol *erster Ordnung*, dann kann das Residuum über $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$ bestimmt werden
- f hat in z_0 einen Pol *erster Ordnung* und g ist holomorph, dann kann das Residuum über $\operatorname{Res}_{z_0}(f \cdot g) = g(z_0) \cdot \operatorname{Res}_{z_0}(f)$ bestimmt werden
- f hat in z_0 einen Pol *n -ter Ordnung*, dann kann das Residuum über $\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]$ ausgewertet an $z = z_0$, bestimmt werden
- $f, g \in H(U_R(z_0))$ mit $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$, dann hat $\frac{f}{g}$ in z_0 einen Pol erster Ordnung und es gilt $\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

Bestimmen reeller Integrale mit dem Residuensatz

Es ist G ein homotop einfach zusammenhängendes Gebiet. f , eine Funktion, ist auf $G \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ holomorph. $\{z_1, \dots, z_m\}$ sind verschiedene Punkte der offenen oberen komplexen Halbebene: $H = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ und $H \subset G$. Außerdem gelte für jede Folge $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_n| = +\infty$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega_n)\omega_n = 0$. Dann konvergiert das Integral, so dass gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z_k}(f)$$

Es ist zu beachten, dass das Integral auch tatsächlich konvergiert.

Auf Blatt 14 wird außerdem noch das Jordan'sche Lemma gezeigt, welches besagt dass für H und f wie oben, mit der Abschwächung, dass $zf(z)$ beschränkt sein muss, gilt (für $\omega > 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z_k}(e^{i\omega z} f(z))$$

Bemerkung Es wurde außerdem gezeigt, dass dies insbesondere für eine rationale Funktion, mit größerem Nenner- als Zählergrad gilt.

Es ist zu beachten, dass sich die Aussage für $w < 0$ umdreht, so dass Punkte in der unteren komplexen Halbebene betrachtet werden. Je nach Kurve ist dann auch die Richtung, in welcher die Parametrisierung durchlaufen wird relevant und muss unter Umständen geändert werden.

Bspw. (A42 (d)) $\cos(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}$ muss der eine Teile für die obere und der andere für die untere Halbebene betrachtet werden um das gesuchte Ergebnis zu erhalten. (alternativ mit $\cos(\omega x) = \operatorname{Re}(e^{i\omega x})$)

Bestimmen von Reihen mit Hilfe des Residuensatzes

Es wird für eine konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ ein Ergebnis gesucht. Man wählt eine passende Funktion oft $g(z) = \pi \cot(\pi z)$, da diese Polstellen bei $z \in \mathbb{Z}$ hat. Nach dem Residuensatz gilt dann für das Kurvenintegral

$$\oint_{\gamma} f(z) \pi \cot(\pi z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z_k}(f(z) \pi \cot(\pi z))$$

Da Residuen aber linear sind, können diese in Residuen von f und Residuen von g unterteilt werden

$$\oint_{\gamma} f(z) \pi \cot(\pi z) dz = 2\pi i \left(\sum \operatorname{Res}_f(f \cdot g) + \sum \operatorname{Res}_g(f \cdot g) \right)$$

Es wird nun gezeigt, dass durch ausweiten der Kurve (bspw. bei Kreis $R \rightarrow \infty$) das Integral auf der linken Seite gegen 0 geht, dann folgt

$$\sum \operatorname{Res}_g(f \cdot g) = - \sum \operatorname{Res}_f(f \cdot g)$$

da durch ausweiten der Kurve gegen unendlich nun die gesamte reelle Achse enthalten ist und der cotangens jeweils bei ganzzahligen Werten Singularitäten besitzt folgt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = - \sum \operatorname{Res}_f(f \cdot g)$$

Durch Bestimmen der Residuen von f und umstellen, kann das Ergebnis der Reihe bestimmt werden.

Anwendung des Residuensatz auf Trig. Fkt.

Es sind P und Q Polynome in zwei Veränderlichen, mit $Q(x, y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Es wird die Funktion f definiert als

$$f(z) = \frac{1}{zi} \frac{P(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))}{Q(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}))}$$

dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos t, \sin t)}{Q(\cos t, \sin t)} dt = 2\pi i \sum_{|a| < 1} \operatorname{Res}_a(f)$$

Es wird also die Summe der Residuen aller Singularitäten von f gebildet, die innerhalb des Einheitskreises liegen.

Beispiel Mit der oben beschriebenen Methode können also Integrale, welche trig. Fkt. enthalten, auf die Summe der Residuen einer rationalen Fkt. reduziert werden.

Es ist das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos t^2}{1 + i \sin t \cos t} dt$$

gegeben. Man erhält dann also für die oben definierte Funktion f

$$f(z) = \frac{1}{iz} \frac{\frac{1}{4}(z + \frac{1}{z})^2}{1 + \frac{1}{4}(z - \frac{1}{z})(z + \frac{1}{z})} = \frac{1}{iz} \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^4 + 4z^2 - 1}$$

f hat Singularitäten in $z = 0$ und $z = \pm\sqrt{-2 \pm \sqrt{5}}$. Es werden nun die Residuen der Singularitäten berechnet, welche innerhalb des Einheitskreises liegen.

$$\begin{aligned} \text{Res}_0(f) &= -i \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{5z^4 + 12z^2 - 1} \Big|_{z=0} = i \\ \text{Res}_{\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}}(f) &= -i \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{5z^4 + 12z^2 - 1} \Big|_{z=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}} = -i \frac{3 - \sqrt{5}}{10 - 4\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Damit erhält man durch nutzen der Symmetrieeigenschaften der Funktion

$$\int_0^\pi \frac{\cos t^2}{1 + i \cos t \sin t} dt = 2\pi i \frac{i}{2} \left(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$