Appunti di Geometria 2
anno accademico 2019/2020

Marco Vergamini Alessio Marchetti

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso di Geometria 2 tenuto dai professori Roberto Frigerio e Jacopo Gandini nell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni i contenuti dei corsi del primo anno, in particolare Analisi 1 e Geometria 1. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura.

2 Spazi metrici e spazi topologici

2.1 Spazi metrici

Definizione 2.1. Uno SPAZIO METRICO è una coppia (X, d), X insieme, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c. per ogni $x, y, z \in X$

(i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare).

In tal caso d si dice DISTANZA O METRICA.

Esempio 2.2. Ecco alcuni esempi di distanze:

- La distanza d_1 su $\mathbb{R}^n$, che alla coppia di elementi $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ associa il numero
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$$
- la distanza d_2 (o d_E, distanza euclidea) su $\mathbb{R}^n$,
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2};$$
- la distanza d_∞ su $\mathbb{R}^n$, $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\ldots,n} \{|x_i - y_i|\}$;
- la distanza discreta su un generico insieme x, $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e 0 altrimenti;
- le distanze d_1, d_2, d_∞ sullo spazio delle funzioni continue da $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$, definite rispettivamente
$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$
$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt},$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Definizione 2.3. $f : (X, d) \to (Y, d')$ viene detto EMBEDDING ISOMETRICO se $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$.

Osservazione 2.4. Valgono i seguenti fatti:

- l'identità è un embedding isometrico;
- composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico;
- se un embedding isometrico f è biettivo, anche f^{-1} è un embedding isometrico e f si dice ISOMETRIA;
- un embedding isometrico è sempre iniettivo, dunque è un'isometria se e solo se è suriettivo;
- se (X, d) è fissato, l'insieme delle isometrie da X in sé è un gruppo con la composizione, chiamato $Isom(X, d)$.

2.2 Continuità in spazi metrici

Definizione 2.5. Dati $p \in X, R > 0$, $B(p, R) := \{x \in X \mid d(p, x) < R\}$ è detta la PALLA APERTA di centro p e raggio R.

Definizione 2.6. $f : (X, d) \to (Y, d')$ è *continua in* x_0 se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$, cioè $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \supseteq B(x_0, \delta)$.

Definizione 2.7. $f(X, d) \to (Y, d')$ è detta CONTINUA se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Osservazione 2.8. Gli embedding isometrici sono continui.

Definizione 2.9. Sia X uno spazio metrico, $A \subseteq X$ è detto APERTO se per ogni $x \in A$ esiste $R > 0$ t.c. $B(x, R) \subseteq A$.

Fatto 2.10. Le palle aperte sono aperti. Per dimostrarlo, sfruttare la disuguaglianza triangolare.

Teorema 2.11. $f(X, d) \to (Y, d')$ è continua se e solo se per ogni aperto A di Y $f^{-1}(A)$ è aperto di X.

Dimostrazione. Supponiamo f continua. Prendiamo $x \in f^{-1}(A)$, allora si ha che $f(x) \in A$, ma dato che A è aperto esiste una palla aperta di centro $f(x)$ B_Y t.c. $B_Y \subseteq A$, da cui $f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$. Usando la definizione di continuità, detto ε il raggio di B_Y, scegliendo il δ corrispondente come raggio di una palla di centro x, sia essa B_X, si ha che $B_X \subseteq f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$, perciò abbiamo trovato una palla centrata in x tutta contenuta in $f^{-1}(A)$ e questo prova che è un aperto.

Viceversa, supponiamo che le controimmagini di aperti siano a loro volta aperti. Dati $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ si ha che $B(f(x_0), \varepsilon)$ è un aperto di Y, perciò la sua controimmagine è un aperto, ma allora per definizione di aperto esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ e questo prova che f è continua. $\square$

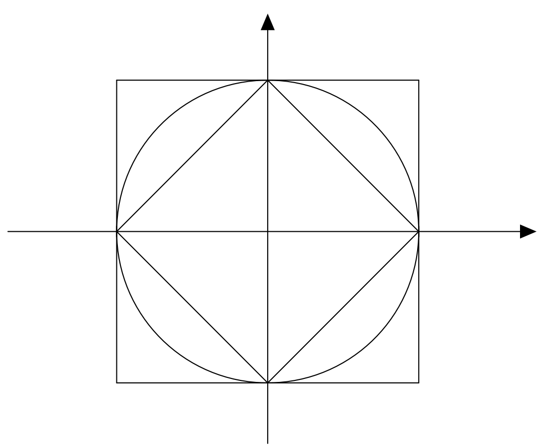
Osservazione 2.12. La continuità di una funzione dipende quindi solo indirettamente dalla metrica, mentre è direttamente collegata agli aperti generati dalla metrica stessa. Segue facilmente che due metriche che generano gli stessi aperti portano anche alla stessa famiglia di funzioni continue. Diamo dunque la seguente definizione.

Definizione 2.13. Due distanze d, d' su un insieme X si dicono TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI se inducono la stessa famiglia di aperti.

Lemma 2.14. Siano d, d' distanze su X t.c. esiste $k \geq 1$ t.c. per ogni $x, y \in X$ valga $d(x,y)/k \leq d'(x,y) \leq k \cdot d(x,y)$. Allora d e d' sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia A un aperto indotto da d' e $x_0 \in A$. Per definizione di aperto esiste $R > 0$ tale che $B_{d'}(x_0, R) \subseteq A$. Considero $B_d(x_0, R/k)$. Dato un elemento $x \in B_d(x_0, R/k)$ ho che $d'(x_0, x) \leq k \cdot d(x_0, x) < k \cdot R/k = R$, dunque $x \in B_{d'}(x_0, R)$. Allora $B_d(x_0, R/k) \subseteq B_{d'}(x_0, R/k) \subseteq A$ e dunque A è anche un aperto indotto da d. Per la simmetria delle disuguaglianze nelle ipotesi si dimostra anche l'opposto, perciò gli aperti di d e d' sono gli stessi, come voluto. $\square$

Corollario 2.15. d_1, d_2, d_∞ sono topologicamente equivalenti su $\mathbb{R}^n$.



Nell'immagine sono rappresentate, nell'ordine dalla più interna alla più esterna, le palle aperte centrate nell'origine e di raggio 1 rispettivamente nelle metriche d_1, d_2, d_∞.

Dimostrazione. Per AM-QM si ha che

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n}},$$

da cui $d_1(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_2(x, y)$. Stimando tutti i termini con il massimo otteniamo che

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sup_{j=1,\dots,n} \{(x_j - y_j)^2\}} = \sqrt{n} \cdot \sup_{j=1,\dots,n} \{|x_j - y_j|\},$$

da cui $d_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x, y)$. Infine è ovvio che

$$\sup_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

, da cui $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y)$. Scegliendo $k = \sqrt{n}$ è ora sufficiente applicare il lemma. □

Nella dimostrazione del corollario era importante che lo spazio fosse di dimensione finita. Nello spazio delle funzioni continue da $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$ le tre distanze non sono topologicamente equivalenti.

2.3 Spazi topologici

Definizione 2.16. Uno SPAZIO TOPOLOGICO è una coppia (X, τ), $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, t.c.

(i) $\varnothing,\ X \in \tau$;
(ii) $A_1,\ A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$;
(iii) se I è un insieme e $A_i \in \tau\, \forall\, i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Allora τ si dice TOPOLOGIA di X e gli elementi della topologia sono detti APERTI di τ.

Proposizione 2.17. Se (X, d) è uno spazio metrico, gli aperti rispetto a d definiscono una topologia.

Definizione 2.18. Uno spazio topologico (X, τ) è detto METRIZZABILE se τ è indotta da una distanza su X.

Definizione 2.19. Sia (X, τ) uno spazio topologico, $C \subseteq X$ è CHIUSO se $X \setminus C$ è aperto.

Osservazione 2.20.

(i) possono esistere insiemi né aperti né chiusi;

(ii) $\varnothing$ e X sono chiusi;
(iii) unione finita di chiusi è chiusa;
(iv) intersezione arbitraria di chiusi è chiusa.

Esempio 2.21. Ecco alcuni esempi di spazi topologici:

- tutte le topologie indotte da una metrica;
- la topologia discreta, cioè $\tau = \mathcal{P}(X)$, indotta dalla distanza discreta;
- la topologia indiscreta, cioè $\tau = \{\varnothing, X\}$;
- la topologia cofinita, dove gli aperti sono l'insieme vuoto più tutti e soli gli insiemi il cui complementare è un insieme finito.

Definizione 2.22. Dato uno spazio topologico X e un insieme $B \subseteq X$, si chiama *parte interna* di B, e la si indica con B°, il più grande aperto contenuto in B. Analogamente, la *chiusura* di B, indicata con $\overline{B}$, è il più piccolo chiuso che contiene B. Definiamo infine la *frontiera* (o *bordo*) di un insieme come l'insieme $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$.

Notiamo che parte interna e chiusura sono ben definite: per la prima basta prendere l'unione di tutti gli aperti contenuti in B (alla peggio c'è solo il vuoto, che è contenuto in ogni insieme), per la seconda si prende l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono (alla peggio c'è solo X). Per la stabilità degli aperti per unione arbitraria e dei chiusi per intersezione arbitraria, gli insiemi così ottenuti sono ancora un aperto e un chiuso e sono rispettivamente il più grande aperto contenuto e il più piccolo chiuso che contiene per come sono stati costruiti. Infine, è banale mostrare che la parte interna di un aperto è l'aperto stesso e la chiusura di un chiuso è il chiuso stesso.

Fatto 2.23. $X = B^\circ \sqcup \partial B \sqcup (X \setminus B)^\circ$ dove con $\sqcup$ si indica l'unione disgiunta.

Dimostrazione. Per definizione $B^\circ \cup \partial B = \overline{B}$ e i due insiemi sono disgiunti. Inoltre, essendo $\overline{B}$ il più piccolo chiuso che contiene B, il suo complementare dev'essere il più grande aperto disgiunto da B, cioè il più grande aperto contenuto in $X \setminus B$, che è la parte interna di quest'ultimo. La tesi segue facilmente. □

2.4 Continuità in spazi topologici

Definizione 2.24. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ si dice CONTINUA se $f^{-1}(A) \in \tau$, $\forall A \in \tau'$, cioè una funzione è continua se la controimmagine di aperti è aperta.

Notiamo che per il teorema 2.11, le due definizioni di funzione continua sono equivalenti per uno spazio metrico se si considera la topologia indotta dalla metrica.

Teorema 2.25.
(i) L'identità è una funzione continua;
(ii) composizione di funzioni continue è una funzione continua.

Definizione 2.26. Una funzione $f : X \to Y$ si dice OMEOMORFISMO se f è continua e esiste una funzione $g : Y \to X$ continua tale che $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_x$. Cioè f è continua, bigettiva e con inversa continua.

Osservazione 2.27.

(i) Composizione di omeomorfismi è un omeomerfismo; due spazi legati da un omeomorfismo si dicomo OMEOMORFI e essere omeomorfi è una relazione di equivalenza;

(ii) l'insieme degli omeomorfismi da (X, τ) in sé è un gruppo;

(iii) se $f : X \to Y$ è continua e bigettiva non è detto che sia un omeomorfismo, cioè f^{-1} può non essere continua.

Esempio 2.28. Siano τ_E la topologia euclidea, τ_C la cofinita, τ_D la discreta e τ_I l'indiscreta. Le seguenti mappe sono dunque continue:

– $Id : (\mathbb{R}, \tau_D) \to (\mathbb{R}, \tau_E)$,
– $Id : (\mathbb{R}, \tau_E) \to (\mathbb{R}, \tau_C)$,
– $Id : (\mathbb{R}, \tau_C) \to (\mathbb{R}, \tau_I)$.

Nessuna delle inverse è però continua. Più in generale, $Id : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ con $\sigma \subsetneq \tau$ è continua ma l'inversa no.

Esercizio 2.29. Il seguente esercizio è frutto di una domanda fatta da uno studente a lezione e potrebbe essere più difficile di altri esercizi del corso.

Trovare un esempio (o dimostrare che non esiste) di uno spazio topologico X e una funzione $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ continua e bigettiva con inversa non continua.

Stando a quanto dice Frigerio, probabilmente tale funzione esiste, euristicamente perché non c'è un modo facile di dimostrare il contrario.

Introduciamo adesso un concetto che permetterà di caratterizzare la continuità in spazi topologici in modo analogo a quanto fatto per gli spazi metrici.

Definizione 2.30. Sia (X, τ) uno spazio topologico fissato e $x_0 \in X$. Un insieme $U \subseteq X$ è un INTORNO di x_0 se $x_0 \in U^\circ$, o equivalentemente se esiste V aperto con $x_0 \in V \subseteq U$. L'insieme degli intorni di x_0 si denota con $\mathcal{I}(x_0)$.

Definizione 2.31. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ è detta *continua in* x_0 se per ogni intorno U di $f(x_0)$ esiste un intorno V di x_0 t.c. $f(V) \subseteq U$.

Appare dunque intuitivo il seguente risultato.

Teorema 2.32. f è continua $\Leftrightarrow$ è continua in ogni $x_0 \in X$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo f continua e $x_0 \in X$, sia inoltre U un intorno di $f(x_0)$. Per definizione di intorno esiste un aperto A con $f(x_0) \in A \subseteq U$, perciò $x_0 \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$, ma poiché f è continua abbiamo che $f^{-1}(A)$ è ancora un aperto, perciò ponendo $V = f^{-1}(U)$ abbiamo che V è un intorno di x_0 t.c. $f(V) \subseteq U$, che è quello che volevamo.

($\Leftarrow$) Supponiamo f continua in ogni punto di X e sia A un insieme aperto in Y. Per ogni $x \in f^{-1}(A)$, A è un intorno di $f(x)$. Ma dato che f è continua in ogni punto di X, esiste un intorno V_x di x t.c. $x \in V_x \subseteq f^{-1}(A)$. Per definizione di intorno, ciò significa che esiste un aperto A_x di X t.c. $x \in A_x \subseteq V \subseteq f^{-1}(A)$. Dunque dev'essere $f^{-1}(A) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(A)} A_x$, quindi $f^{-1}(A)$ è un aperto in X per ogni A aperto in Y, il che equivale a dire che f è continua. □

2.5 Ordinamento fra topologie, basi e prebasi

Vogliamo mettere un ordinamento parziale sulle topologie di un certo insieme fissato.

Definizione 2.33. Dato un insieme X su cui sono definite le topologie τ e τ', si dice che τ è MENO FINE di τ' se $\tau \subseteq \tau'$, cioè ogni aperto di τ è anche aperto di τ'. τ' si dice PIÙ FINE di τ.

Osservazione 2.34. Equivalentemente alla definizione sopra, si può dire che τ è meno fine di τ' se e solo se $Id : (X, \tau') \to (X, \tau)$ è continua.

Quando τ è meno fine di τ' scriveremo $\tau < \tau'$. Si noti che dalla definizione ogni topologia è meno fine di se stessa, cioè $\tau < \tau' \, \forall \tau$.

Esempio 2.35. $\tau_I < \tau_C < \tau_E < \tau_D, \quad \tau_I < \tau < \tau_D \, \forall \tau$.

Lemma 2.36. Intersezione arbitraria di topologie su X è ancora una topologia su X.

Dimostrazione. Siano $\tau_i, \; i \in I$ topologie su X. Verifichiamo che $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ soddisfa gli assiomi di topologia.

(i) $\varnothing, X \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow \varnothing, X \in \tau$.
(ii) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1, A_2 \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$.
(iii) Siano $A_j, j \in J$ insiemi che stanno in τ.
$A_j \in \tau \, \forall \, j \in J \Rightarrow A_j \in \tau_i \, \forall \, i \in I, j \in J \Rightarrow \bigcup\limits_{j \in J} A_j \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{j \in J} A_j \in \tau$.

□

Corollario 2.37. Data una famiglia $\tau_i, i \in I$ di topologie su X, esiste la più fine tra le topologie meno fini di ogni τ_i: è $\bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$.

Corollario 2.38. Sia X un insieme, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, allora esiste la topologia meno fine tra quelle che contengono S. Tale topologia si dice *generata* da S e S si dice PREBASE della topologia. Se $\Omega = \{\tau \text{ topologia} \mid S \in \tau\}$ (che è non vuoto perché contiene almeno la topologia discreta), la topologia cercata è $\bigcap_{\tau \in \Omega} \tau$.

Definizione 2.39. sia (X, τ) uno spazio topologico fissato, una BASE di τ è un insieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ t.c. $\forall\, A \in \tau, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ t.c. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Ovvero $\mathcal{B}$ è una base se ogni aperto di τ può essere scritto come unione qualunque di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 2.40. Se X è uno spazio metrico, una base della topologia indotta sono le palle.

Definizione 2.41. (X, τ) si dice *a base numerabile* (o che soddisfa il SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ) se ammette una base numerabile.

Proposizione 2.42. Sia X un insieme senza topologia, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è base di una topologia su $X \Leftrightarrow$ valgono le seguenti:

(i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

(ii) $\forall\, A, A' \in \mathcal{B}, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ t.c. $A \cap A' = \bigcup_{i \in I} B_i$. Cioè ogni intersezione di una coppia di elementi di $\mathcal{B}$ può essere scritta come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Ovviamente, se $\mathcal{B}$ è la base di una topologia su X, l'insieme X deve essere unione di elementi di $\mathcal{B}$, inoltre tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ devono essere sottoinsiemi di X, da cui discende (i).

$A, A' \in \mathcal{B} \Rightarrow A, A' \in \tau \Rightarrow A \cap A' \in \tau$, per cui $A \cap A'$ deve poter essere esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}$, che è l'affermazione (ii).

($\Leftarrow$) Dobbiamo mostrare che l'insieme τ di tutte le possibili unioni di elementi di $\mathcal{B}$ soddisfa gli assiomi di topologia.

Chiaramente $\varnothing \in \tau$ come unione di un insieme vuoto di elementi di $\mathcal{B}$ e $X \in \tau$ per (ii). Se faccio l'unione arbitraria di insiemi ottenuti come unione di elementi di $\mathcal{B}$ ottengo ovviamente un insieme che è unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Infine, $A, A' \in \tau \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} B_i, A' = \bigcup_{j \in J} B_j$ con $B_i, B_j \in \mathcal{B} \forall\, i \in I, j \in J$. Allora $A \cap A' = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j)$, ma tutti i B_i e B_j stanno in $\mathcal{B}$, dunque per (ii) tutti i $B_i \cap B_j$ sono rappresentabili come unione di elementi di $\mathcal{B}$, perciò anche la loro unione, che è proprio $A \cap A'$, può essere scritta in quel modo e quindi sta in τ. $\square$

Proposizione 2.43. Siano X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ la prebase di una topologia τ su X. Allora:

(i) le intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$ sono una base di τ;

(ii) $A \in \tau \Leftrightarrow A$ è unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$.

Dimostrazione. Sicuramente, poiché τ è generata da S, $S \subseteq \tau$ e quindi anche tutte le intersezioni finite di elementi di S e le unioni arbitrarie di tali inersezioni devono stare in τ. Se mostriamo che sono sufficienti a definire una topologia, abbiamo finito.

Chiaramente il vuoto è l'intersezione di un insieme vuoto di insiemi e X c'è perché lo abbiamo aggiunto a mano.

Unione arbitraria di unioni arbitrarie di elementi di un insieme è ancora unione arbitraria di elementi di tale insieme.

Siano ora $A_1 = \bigcup_{i \in I} B_i,\ A_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$ con tutti i $B_i,\ B_j$ intersezioni finite di elementi di S. Allora

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j),$$

ma intersezione di due intersezioni finite di elementi di S è ancora un'intersezione finita di elementi di S, perciò $A_1 \cap A_2$ è ancora un'unione di intersezioni finite di elementi di S. Questo basta per dimostrare (i) e (ii) è una semplice riformulazione. $\square$

Proposizione 2.44. Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ e S, $\mathcal{B}$ rispettivamente una prebase e una base di τ'. Allora sono equivalenti:

(i) f è continua;
(ii) $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni $A \in S$;
(iii) $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Poiché ogni base è una prebase, ((i) $\Leftrightarrow$ (ii)) $\Rightarrow$ ((i) $\Leftrightarrow$ (iii)).

(i) $\Rightarrow$ (ii) è ovvia, perciò resta da dimostrare (ii) $\Rightarrow$ (i).

Sia A un aperto di τ'. Per la proposizione 2.5, A si può scrivere come unione di intersezioni finite di elementi di S. Poiché la controimmagine di un'unione è l'unione delle controimmagini e la controimmagine di un'intersezione è l'intersezione delle controimmagini, la controimmagine di A è unione di intersezioni finite di controimmagini di elementi di S, ma queste controimmagini sono aperte, perciò un'unione di loro intersezioni finite è ancora aperta, perciò $f^{-1}(A)$ è aperto in X per ogni A aperto in Y, e questo equivale a dire che f è continua. $\square$

2.6 Assiomi di numerabilità

Nella definizione 2.41 abbiamo stabilito quando uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Vediamo gli altri due.

Definizione 2.45. $Y \subseteq X$ si dice DENSO se $\overline{Y} = X$.

Osservazione 2.46. Y è denso $\Leftrightarrow Y \cap A \neq \varnothing$ per ogni A aperto non vuoto.

Definizione 2.47. X si dice SEPARABILE (o che soddisfa il TERZO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ) se ammette un sottoinsieme denso numerabile.

Proposizione 2.48. Se X è a base numerabile, X è separabile.

Dimostrazione. Sia $\{B_i, i \in \mathbb{N}\}$ la base numerabile di X e scegliamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ un elemento $x_i \in B_i$. Vogliamo mostrare che $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme denso numerabile di X.

Ovviamente è numerabile. Per dimostrare che è denso, mostriamo che interseca ogni aperto non vuoto.

Sia dunque A un aperto non vuoto di X, allora, dato che i B_i formano una base, A è esprimibile come unione di alcuni di essi, in particolare esiste i_0 t.c. $B_{i_0} \subseteq A$ e perciò $x_{i_0} \in B_{i_0} \Rightarrow x_{i_0} \in A$, dunque l'intersezione tra il nostro insieme e un aperto non vuoto non è mai vuota, come voluto. $\square$

Proposizione 2.49. Se (X, τ) è metrizzabile, X è separabile $\Leftrightarrow$ è a base numerabile.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Mostriamo che per ogni aperto A e per ogni $x \in A$, esiste una palla di centro un elemento del sottoinsieme denso numerabile e raggio un razionale positivo tutta contenuta in A. Allora tali palle formano una base numerabile.

Sicuramente esiste una palla di centro x e raggio $R \in \mathbb{R}^+$ tutta contenuta in A. Consideriamo la palla di centro x e raggio $R/3$, che è contenuta nella prima. Questa palla è in particolare un insieme aperto, dunque ha un elemento y in comune con il sottoinsieme denso numerabile. Scegliendo un razionale $R/3 < r < 2 \cdot R/3$ si ottiene che la palla di centro y e raggio r è tutta contenuta nella palla di centro x e raggio R, dunque è tutta contenuta in A, e contiene x, come voluto.

L'altra freccia discende dalla proposizione 2.48. $\square$

Definizione 2.50. Un SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI per x_0 è una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall U \in \mathcal{I}(x_0)\, \exists V \in \mathcal{F}$ con $V \subseteq U$.

Esempio 2.51. Se X è uno spazio metrico, le palle centrate in x_0 do raggio $1/n$ al variare di n intero positivo sono un sistema fondamentale di intorni. In particolare, sono un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Definizione 2.52. X soddisfa il PRIMO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ se ogni $x_0 \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Fatto 2.53. Se X è metrizzabile X soddisfa il primo assioma di numerabilità. Ciò discende direttamente dall'esempio 2.51.

Proposizione 2.54. Il secondo assioma di numerabilità implica il primo e il terzo assioma di numerabilità. Discende dalla proposizione 2.49 che in spazi metrici vale anche che il terzo assioma di numerabilità implica il secondo assioma di numerabilità.

Dimostrazione. Supponiamo che X soddisfi il secondo assioma di numerabilità. Per la proposizione 2.48 otteniamo subito che soddisfa il terzo. Vogliamo adesso mostrare che soddisfa anche il primo. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile. Dato $x \in X$, consideriamo l'insieme $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$. Essendo un sottoinsieme di $\mathcal{B}$ è sicuramente numerabile e contiene solo insiemi aperti, cioè intorni di x. Mostriamo che è un sistema fondamentale di intorni per x.

Consideriamo un intorno U di x. Questo ha un sottoinsieme aperto $V \subseteq U$ contenente x, dunque V è esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}$ e ce ne dev'essere uno che contiene x, che sta quindi nel nostro insieme ed è contenuto in V e quindi in U. Dunque, per ogni intorno U di x troviamo un elemento del nostro insieme di intorni di x contenuto in U, che è quello che dovevamo dimostrare. □

Proposizione 2.55.

(i) $A \subseteq X$ è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto;
(ii) sia $C \subseteq X$ un insieme generico, allora $x \in \overline{C}$ se e solo se ogni intorno di x interseca C.

Dimostrazione. (i) Sia A un insieme che è intorno di ogni suo punto, cioè per ogni $x \in A$ esiste un aperto $V_x \subseteq A$ che lo contiene. Allora vale che $A = \bigcup_{x \in A} V_x$. Poiché A è unione di apertiè aperto.
Viceversa sia A aperto. Allora ogni suo punto è interno ad esso.
(ii) Si ha che $\overline{C}$ è il complementare di $(X \setminus C)^\circ$. Dunque x appartiene a $\overline{C}$ se e solo se non è interno a $X \setminus C$, cioè se e solo se ogni suo intorno U non è tutto contenuto nel complementare di C. Questo accade quando ogni intorno di X interseca C in almeno un punto.

□

Esempio 2.56. La retta di Sorgenfrey. Su $X = \mathbb{R}$ consideriamo il seguente insieme:

$$\mathcal{B} = \{\, [a, b) \mid a < b\}.$$

Allora valgono le seguenti:

(i) $\mathcal{B}$ è base di una toplogia τ;
(ii) τ è più fine della topologia euclidea;
(iii) τ è separabile;
(iv) τ non è a base numerabile;
(v) τ non è metrizzabile;
(vi) τ è primo numerabile.

Dimostrazione. (i) Verifichiamo utilizzando la proposizione 2.42. Il primo punto vale in quanto $\mathbb{R}$ è coperto da intervalli del tipo $[-n, n)$ con n naturale. Inoltre dati i due intervalli $[a, b)$ e $[c, d)$, distinguo:

- $b \leq c$. Allora l'itersezione è vuota.
- $c < b$ e $b \leq d$. Allora l'itersezione è $[c, b)$.
- $c < b$ e $b > d$. Allora l'itersezione è $[c, d)$.

In ogni caso vale anche il secondo punto.

(ii) Voglio mostrare che ogni aperto di τ è anche aperto di τ_E. Sia allora (a, b) un aperto della base degli intervalli aperti della topologia euclidea. Si considerino gli aperti in τ della forma $[a + \frac{1}{n}, b)$ con n naturale positivo. L'unione di tutti questi è allora (a, b).

(iii) Si noti che $\mathbb{Q}$ è un denso numerabile.

(iv) Sia $\mathcal{D}$ una base di τ. Si noti che ogni intervallo del tipo $[x, x + 1)$, con x reale, può essere scritto come unione degli elementi della base solo se in $\mathcal{D}$ c'è un elemento D tale che $x \in D \subseteq [x, x + 1)$, da cui $\inf(D) = x$. Allora la mappa

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ D &\mapsto \inf(D) \end{aligned}$$

deve essere surgettiva. Dunque la base scelta non può essere numerabile.

(v) Semplice conseguenza dei punti precedenti e della proposizione 2.49.

(vi) Basta notare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{[x - 1/n, x + 1/n)|n \in \mathbb{Z}^+\}$ è una famiglia di intorni numerabile per x.

□

Esempio 2.57. Topologia di Zariski. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Definiamo una topologia τ_Z in $\mathbb{K}^n$ in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi i cui elementi si annullano in tutti i polinomi di una famiglia arbitraria (non vuota) $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ di polinomi a n variabili con coefficienti in $\mathbb{K}$. Dimostreremo che τ_Z è effettivamente una topologia, che è meno fine di quella euclidea quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Inoltre, quando $n = 1$ e per $\mathbb{K}$ generico, τ_Z coincide con la topologia cofinita.

Dimostrazione. Dimostreremo che i chiusi soddisfano le proprietà di topologia (per i chiusi, ovviamente), per passaggio al complementare si può concludere che τ_Z è una topologia.

Ovviamente il vuoto è chiuso perché la proprietà dei suoi elementi di annullarsi in un qualunque insieme di polinomi è sempre vera a vuoto, mentre $\mathbb{K}^n$ è chiuso perché tutti gli elementi si annullano nella famiglia formata dal solo polinomio nullo.

Siano ora C_1, C_2 due chiusi i cui elementi si annullano, per definizione, nei polinomi rispettivamente delle famiglie $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}_{1,2} = \{f_1 \cdot f_2 | f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2\}$. Mostriamo che l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di $\mathcal{F}_{1,2}$ è proprio $C_1 \cup C_2$. Ovviamente se $x \in C_1 \cup C_2$ possiamo dire senza perdita di generalità che x si annulla in tutti i polinomi in $\mathcal{F}_1$, e quindi banalmente anche in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_{1,2}$. D'altro canto, se x si annulla in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_{1,2}$, si deve annullare almeno o in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_1$ o in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_2$. Se per assurdo così non fosse, esisterebbero $f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2$ t.c. $f_1(x) \neq 0 \neq f_2(x)$ e, poiché siamo in un campo, si avrebbe $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, assurdo. Dunque $x \in C_1 \cup C_2$.

Consideriamo adesso dei chiusi $C_i, i \in I$ definiti dalle famiglie $\mathcal{F}_i$. Mostriamo che $C = \bigcap\limits_{i \in I} C_i$ è l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di $\mathcal{F}_I = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{F}_i$. Se $x \in C$ allora $x \in C_i \, \forall \, i \in I$ e dunque si annulla in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_i$ per ogni i, quindi si annulla in tutti i polinomi della loro unione, che è proprio $\mathcal{F}_I$. Viceversa, se x si annulla in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_I$ allora si annulla in tutti i polinomi di ogni suo sottoinsieme, in particolare in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_i \, \forall \, i \in I$, quindi $x \in C_i$ per ogni i da cui $x \in C$.

Poniamo ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Poiché i polinomi in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ sono funzioni continue per la topologia euclidea, la controimmagine di un aperto è a sua volta un aperto. Per passaggio al complementare la controimmagine di un chiuso è a sua volta un chiuso. Ma allora, sia $\mathcal{F}$ una famiglia di polinomi, ho che, essendo $\{0\}$ chiuso in τ_E di $\mathbb{R}$, $f^{-1}(0)$ (qui si intende la controimmagine) è chiuso in τ_E di $\mathbb{R}^n$ per ogni $f \in \mathcal{F}$. Ma l'insieme dei punti che si annullano in tutti i polinomi di $\mathcal{F}$ può essere descritto come $\bigcap\limits_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(0)$, che essendo intersezione di chiusi è chiuso in τ_E, quindi tutti i chiusi di τ_Z sono chiusi in τ_E, per passaggio al complementare la stessa cosa con gli aperti e dunque $\tau_Z < \tau_E$.

Sia adesso $\mathbb{K}$ generico e $n = 1$. Sia p un generico polinomio in $\mathbb{R}[x]$ e $\overline{\mathbb{K}}$ la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, p ha al più $\deg p$ zeri in $\overline{\mathbb{K}}$, quindi a maggior ragione ne ha al più un numero finito in $\mathbb{K}$. Dunque i punti che si annullano in tutti i polinomi di una generica famiglia di polinomi sono finiti (limitati dal grado di un qualsiasi polinomio della famiglia), dunque i chiusi sono tutti finiti. Considerando invece un insieme finito $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{K}$, esso si annulla in tutti i polinomi dell'ideale generato da $(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_m)$, dunque è vero anche il viceversa, cioè che tutti i finiti sono chiusi, quindi in questo caso τ_Z coincide con la topologia euclidea. $\square$

Fatto 2.58. Se X non è numerabile, la topologia cofinita su X non soddisfa alcun assioma di numerabilità.

Dimostrazione. Per la proposizione 2.54, se dimostriamo che non soddisfa il primo otteniamo anche che non soddisfa il secondo. Sia dunque per assurdo $x_0 \in X$ e $\mathcal{F}$ un suo sistema fondamentale di intorni numerabile. Notiamo che per ogni $x \in X, x \neq x_0$ l'insieme $X \setminus \{x\}$ è un aperto, dunque esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in esso, cioè che non contiene x. Notiamo, per come è definita la topologia cofinita, che gli intorni, essendo sovrainsiemi di insiemi aperti, sono a loro volta aperti, cioè il loro complementare è finito. Ma dato che per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$ esiste un intorno di x_0 che non contiene x, posso scrivere $X\{x_0\}$, che è ancora un insieme numerabile, come l'unione dei complementari degli insiemi in $\mathcal{F}$, cioè un'unione numerabile di insiemi finiti, che è numerabile, da cui l'assurdo.

Per quanto riguarda il terzo assioma, secondo me ho capito male mentre ero a lezione, perché mi sembra che qualunque sottoinsieme infinito di X debba necessariamente intersecare in qualche punto il complementare di un insieme finito, e quindi anche un insieme infinito di cardinalità numerabile avrebbe intersezione non nulla con tutti gli aperti e sarebbe di conseguenza un denso numerabile. $\square$

Procediamo adesso a caratterizzare, negli insiemi che soddisfano il primo assioma di numerabilità, aperti, chiusi e continuità tramite successioni. Diamo prima una definizione.

Definizione 2.59. $l \in X$ è detto *limite* della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se per ogni intorno U di l esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \geq n_0$ si ha che $a_n \in U$.

Passiamo dunque alle varia caratterizzazioni. Nei due (tre?) enunciati seguenti, X sarà sempre uno spazio topologico primo numerabile.

Proposizione 2.60. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ è chiuso $\Leftrightarrow$ è chiuso per successioni, cioè per ogni successione (a_k) di elementi di C che converge a un limite l, anche $l \in C$.

Dimostrazione. Notiamo prima il seguente fatto: se U_k, $n \in \mathbb{N}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile per x, definiamo $V_k = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Allora V_k, $k \in \mathbb{N}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile t.c. $V_{k+1} \subseteq V_k$.

($\Rightarrow$) Supponiamo C chiuso e sia (a_k) una successione di elementi di C con limite l. Per assurdo, $l \notin C$. Allora $l \in X \setminus C$, che è un insieme aperto, in particolare $X \setminus C$ è un intorno di l. Esiste dunque, per definizione di limite, un $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $k \geq k_0$ si abbia che $a_k \in X \setminus C$, ma $a_k \in C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, assurdo. Questa freccia vale in tutti gli spazi topologici.

($\Leftarrow$) Supponiamo adesso che per ogni successione (a_k) di elementi di C avente limite l si abbia $l \in C$. Consideriamo un elemento $x \in X \setminus C$. Vogliamo mostrare che esiste un intorno U_x di x tutto contenuto in $X \setminus C$. Se così non fosse, per ogni intorno di x esisterebbe un elemento di C in esso contenuto. Poiché X è primo numerabile, consideriamo dunque un sistema fondamentale di intorni numerabile di x, sia esso V_k, $k \in \mathbb{N}$, e lo prendiamo t.c. $V_{k+1} \subseteq V_k$. Adesso scegliamo per ogni k un elemento $a_k \in V_k$ t.c. $a_k \in C$, che esiste per l'ipotesi assurda. Notiamo che alcuni di questi elementi possono essere uguali, non ha importanza. Dato che abbiamo preso un sistema di intorni fondamentale, per ogni intorno U di x esiste un k_0 t.c. $V_{k_0} \subseteq U$. Ma poiché $V_k \subseteq V_{k_0}$ per ogni $k \geq k_0$ (facile conseguenza di $V_{k+1} \subseteq V_k$), ho che $a_k \in V_k \subseteq V_{k_0} \subseteq U$ per ogni $k \geq k_0$. Riassumendo, per ogni U intorno di x esiste un k_0 t.c. per ogni $k \geq k_0$ si ha $a_k \in U$, ma questo per definizione significa che x è il limite di (a_k), assurdo poiché $a_k \in C$ per ogni k mentre $x \in X \setminus C$, contro l'ipotesi iniziale che per tutte le successioni in C aventi limite anche il limite è in C. Dunque per ogni $x \in X \setminus C$ esiste un intorno $U_x \subseteq X \setminus C$, da cui si ha che esiste un aperto A_x con

$x \in A_x \subseteq U_x \subseteq X \setminus C$. Ma allora, $X \setminus C = \bigcup_{x \in X \setminus C} A_x$ che un'unione di aperti, perciò $X \setminus C$ è aperto e di conseguenza C è chiuso. $\square$

Proposizione 2.61. Sia Y uno spazio topologico (che non deve necessariamente soddisfare il primo assioma di numerabilità). Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $\bar{x} \Leftrightarrow$ per ogni successione$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $\bar{x}$ la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar(x))$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che f sia continua in $\bar{x}$ e consideriamo una generica successione (x_n) convergente a $\bar{x}$. Prendiamo un intorno U di $f(\bar{x})$ in Y. Dato che f è continua in $\bar{x}$, esiste un intorno V di $\bar{x}$ in X t.c. $f(V) \subseteq U$. Prendiamo, per ipotesi di convergenza, $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in V$ per ogni $n \geq n_0$. Allora si ha anche, sempre per ogni $n \geq n_0$, $f(x_n) \in U$, da cui otteniamo che $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$. Questa freccia vale per X spazio topologico qualsiasi.

($\Leftarrow$) Supponiamo adesso che per ogni successione convergente in X la successione immagine converga all'immagine del limite in Y. Per assurdo, f non è continua in $\bar{x}$. Allora deve esistere un intorno U di $f(\bar{x})$ t.c. per ogni intorno V di $\bar{x}$ si ha $f(V) \not\subseteq U$. Prendiamo un sistema fondamentale di intorni numerabile di $\bar{x}$, sia esso V_n, $n \in \mathbb{N}$, e come nella dimostrazione precedente lo prendiamo t.c. $V_{n+1} \subseteq V_n$ per ogni n.

Prendiamo, per ogni n, un elemento $x_n \in V_n$ t.c. $f(x_n) \notin U$, che esiste per l'ipotesi assurda. Allora si mostra, come nella dimostrazione precedente, che la successione (x_n) tende a $\bar{x}$, ma le loro immagini $f(x_n)$ sono tutte fuori dallo stesso intorno U di $f(\bar{x})$, dunque la successione $(f(x_n))$ non tende a $f(\bar{x})$, assurdo per ipotesi. $\square$