

Appunti di Geometria 2  
anno accademico 2019/2020

Marco Vergamini      Alessio Marchetti      Luigi Traino

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Spazi metrici e spazi topologici</b>	<b>3</b>
2.1	Spazi metrici . . . . .	3
2.2	Continuità in spazi metrici . . . . .	4
2.3	Spazi topologici . . . . .	6
2.4	Continuità in spazi topologici . . . . .	8
2.5	Ordinamento fra topologie, basi e prebasi . . . . .	9
2.6	Assiomi di numerabilità . . . . .	12
2.7	Sottospazi topologici . . . . .	18
2.8	Topologie prodotto . . . . .	21
2.9	Proprietà delle topologie prodotto . . . . .	23

# 1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso di Geometria 2 tenuto dai professori Roberto Frigerio e Jacopo Gandini nell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni i contenuti dei corsi del primo anno, in particolare Analisi 1 e Geometria 1. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti a più mani, non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc... Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia... potrebbero mancare argomenti più o meno marginali... insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Speriamo di essere riusciti in questo intento.

## 2 Spazi metrici e spazi topologici

### 2.1 Spazi metrici

**Definizione 2.1.1.** Uno SPAZIO METRICO è una coppia  $(X, d)$ ,  $X$  insieme,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  t.c. per ogni  $x, y, z \in X$

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (disuguaglianza triangolare).

In tal caso  $d$  si dice DISTANZA o METRICA.

**Esempio 2.1.2.** Ecco alcuni esempi di distanze:

- La distanza  $d_1$  su  $\mathbb{R}^n$ , che alla coppia di elementi  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  associa il numero

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

- la distanza  $d_2$  (o  $d_E$ , distanza euclidea) su  $\mathbb{R}^n$ ,

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};$$

- la distanza  $d_\infty$  su  $\mathbb{R}^n$ ,  $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1, \dots, n} \{|x_i - y_i|\}$ ;
- la distanza discreta su un generico insieme  $X$ ,  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  e 0 altrimenti;

- le distanze  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_\infty$  sullo spazio delle funzioni continue da  $[0, 1]$  in  $\mathbb{R}$ , definite rispettivamente

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt},$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

**Definizione 2.1.3.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  viene detto EMBEDDING ISOMETRICO se  $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$  per ogni  $x_1, x_2 \in X$ .

**Osservazione 2.1.4.** Valgono i seguenti fatti:

- l'identità è un embedding isometrico;
- composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico;
- se un embedding isometrico  $f$  è biiettivo, anche  $f^{-1}$  è un embedding isometrico e  $f$  si dice ISOMETRIA;
- un embedding isometrico è sempre iniettivo, dunque è un'isometria se e solo se è suriettivo;
- se  $(X, d)$  è fissato, l'insieme delle isometrie da  $X$  in sé è un gruppo con la composizione, chiamato  $\text{Isom}(X, d)$ .

## 2.2 Continuità in spazi metrici

**Definizione 2.2.1.** Dati  $p \in X, R > 0$ ,  $B(p, R) := \{x \in X \mid d(p, x) < R\}$  è detta la PALLA APERTA di centro  $p$  e raggio  $R$ .

**Definizione 2.2.2.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  è *continua in*  $x_0$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.  $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ , cioè  $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \supseteq B(x_0, \delta)$ .

**Definizione 2.2.3.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  è detta CONTINUA se è continua in ogni  $x_0 \in X$ .

**Osservazione 2.2.4.** Gli embedding isometrici sono continui.

**Definizione 2.2.5.** Sia  $X$  uno spazio metrico,  $A \subseteq X$  è detto APERTO se per ogni  $x \in A$  esiste  $R > 0$  t.c.  $B(x, R) \subseteq A$ .

**Fatto 2.2.6.** Le palle aperte sono aperti. Per dimostrarlo, sfruttare la disuguaglianza triangolare.

**Teorema 2.2.7.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  è continua se e solo se per ogni aperto  $A$  di  $Y$   $f^{-1}(A)$  è aperto di  $X$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo  $f$  continua. Prendiamo  $x \in f^{-1}(A)$ , allora si ha che  $f(x) \in A$ , ma dato che  $A$  è aperto esiste una palla aperta  $B_Y$  di centro  $f(x)$  t.c.  $B_Y \subseteq A$ , da cui  $f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$ . Usando la definizione di continuità, detto  $\varepsilon$  il raggio di  $B_Y$ , scegliendo il  $\delta$  corrispondente come raggio di una palla di centro  $x$ , sia essa  $B_X$ , si ha che  $B_X \subseteq f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$ , perciò abbiamo trovato una palla centrata in  $x$  tutta contenuta in  $f^{-1}(A)$  e questo prova che è un aperto.

Viceversa, supponiamo che le controimmagini di aperti siano a loro volta aperti. Dati  $x_0 \in X$  e  $\varepsilon > 0$  si ha che  $B(f(x_0), \varepsilon)$  è un aperto di  $Y$ , perciò la sua controimmagine è un aperto, ma allora per definizione di aperto esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$  e questo prova che  $f$  è continua.  $\square$

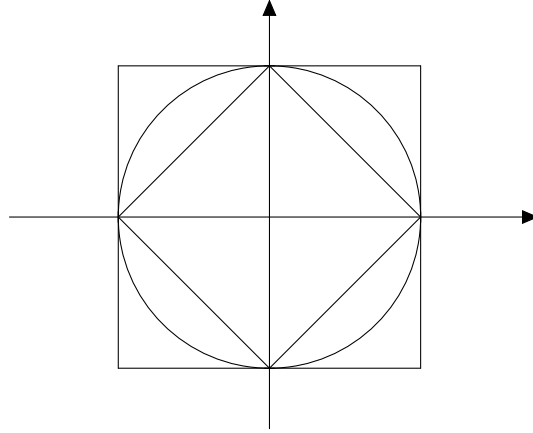
**Osservazione 2.2.8.** La continuità di una funzione dipende quindi solo indirettamente dalla metrica, mentre è direttamente collegata agli aperti generati dalla metrica stessa. Segue facilmente che due metriche che generano gli stessi aperti portano anche alla stessa famiglia di funzioni continue. Diamo dunque la seguente definizione.

**Definizione 2.2.9.** Due distanze  $d, d'$  su un insieme  $X$  si dicono TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI se inducono la stessa famiglia di aperti.

**Lemma 2.2.10.** Siano  $d, d'$  distanze su  $X$  t.c. esiste  $k \geq 1$  t.c. per ogni  $x, y \in X$  valga  $d(x, y)/k \leq d'(x, y) \leq k \cdot d(x, y)$ . Allora  $d$  e  $d'$  sono topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un aperto indotto da  $d'$  e  $x_0 \in A$ . Per definizione di aperto esiste  $R > 0$  tale che  $B_{d'}(x_0, R) \subseteq A$ . Considero  $B_d(x_0, R/k)$ . Dato un elemento  $x \in B_d(x_0, R/k)$  ho che  $d'(x_0, x) \leq k \cdot d(x_0, x) < k \cdot R/k = R$ , dunque  $x \in B_{d'}(x_0, R)$ . Allora  $B_d(x_0, R/k) \subseteq B_{d'}(x_0, R) \subseteq A$  e dunque  $A$  è anche un aperto indotto da  $d$ . Per la simmetria delle disuguaglianze nelle ipotesi si dimostra anche l'opposto, perciò gli aperti di  $d$  e  $d'$  sono gli stessi, come voluto.  $\square$

**Corollario 2.2.11.**  $d_1, d_2, d_\infty$  sono topologicamente equivalenti su  $\mathbb{R}^n$ .



Nell'immagine sono rappresentate, nell'ordine dalla più interna alla più esterna, le palle aperte centrate nell'origine e di raggio 1 rispettivamente nelle metriche  $d_1, d_2, d_\infty$ .

*Dimostrazione.* Per AM-QM si ha che

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n}},$$

da cui  $d_1(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_2(x, y)$ . Stimando tutti i termini con il massimo otteniamo che

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sup_{j=1, \dots, n} \{(x_j - y_j)^2\}} = \sqrt{n} \cdot \sup_{j=1, \dots, n} \{|x_j - y_j|\},$$

da cui  $d_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x, y)$ . Infine è ovvio che

$$\sup_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

, da cui  $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y)$ . Scegliendo  $k = \sqrt{n}$  è ora sufficiente applicare il lemma.  $\square$

Nella dimostrazione del corollario era importante che lo spazio fosse di dimensione finita. Nello spazio delle funzioni continue da  $[0, 1]$  a  $\mathbb{R}$  le tre distanze non sono topologicamente equivalenti.

## 2.3 Spazi topologici

**Definizione 2.3.1.** Uno SPAZIO TOPOLOGICO è una coppia  $(X, \tau)$ ,  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ , t.c.

- (i)  $\emptyset, X \in \tau$ ;

- (ii)  $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$ ;
- (iii) se  $I$  è un insieme e  $A_i \in \tau \forall i \in I$ , allora  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ .

Allora  $\tau$  si dice TOPOLOGIA di  $X$  e gli elementi della topologia sono detti APERTI di  $\tau$ .

**Proposizione 2.3.2.** Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico, gli aperti rispetto a  $d$  definiscono una topologia.

**Definizione 2.3.3.** Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto METRIZZABILE se  $\tau$  è indotta da una distanza su  $X$ .

**Definizione 2.3.4.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico,  $C \subseteq X$  è CHIUSO se  $X \setminus C$  è aperto.

**Osservazione 2.3.5.**

- (i) possono esistere insiemi né aperti né chiusi;
- (ii)  $\emptyset$  e  $X$  sono chiusi;
- (iii) unione finita di chiusi è chiusa;
- (iv) intersezione arbitraria di chiusi è chiusa.

**Esempio 2.3.6.** Ecco alcuni esempi di spazi topologici:

- tutte le topologie indotte da una metrica;
- la topologia discreta, cioè  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , indotta dalla distanza discreta;
- la topologia indiscreta, cioè  $\tau = \{\emptyset, X\}$ ;
- la topologia cofinita, dove gli aperti sono l'insieme vuoto più tutti e soli gli insiemi il cui complementare è un insieme finito.

**Definizione 2.3.7.** Dato uno spazio topologico  $X$  e un insieme  $B \subseteq X$ , si chiama *parte interna* di  $B$ , e la si indica con  $B^\circ$ , il più grande aperto contenuto in  $B$ . Analogamente, la *chiusura* di  $B$ , indicata con  $\overline{B}$ , è il più piccolo chiuso che contiene  $B$ . Definiamo infine la *frontiera* (o *bordo*) di un insieme come l'insieme  $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$ .

Notiamo che parte interna e chiusura sono ben definite: per la prima basta prendere l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $B$  (alla peggio c'è solo il vuoto, che è contenuto in ogni insieme), per la seconda si prende l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono (alla peggio c'è solo  $X$ ). Per la stabilità degli aperti per unione arbitraria e dei chiusi per intersezione arbitraria, gli insiemi così ottenuti sono ancora un aperto e un chiuso e sono rispettivamente il più grande aperto contenuto e il più piccolo chiuso che contiene per come sono stati costruiti. Infine, è banale mostrare che la parte interna di un aperto è l'aperto stesso e la chiusura di un chiuso è il chiuso stesso.

**Fatto 2.3.8.**  $X = B^\circ \sqcup \partial B \sqcup (X \setminus B)^\circ$  dove con  $\sqcup$  si indica l'unione disgiunta.

*Dimostrazione.* Per definizione  $B^\circ \cup \partial B = \overline{B}$  e i due insiemi sono disgiunti. Inoltre, essendo  $\overline{B}$  il più piccolo chiuso che contiene  $B$ , il suo complementare dev'essere il più grande aperto disgiunto da  $B$ , cioè il più grande aperto contenuto in  $X \setminus B$ , che è la parte interna di quest'ultimo. La tesi segue facilmente.  $\square$

## 2.4 Continuità in spazi topologici

**Definizione 2.4.1.**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  si dice **CONTINUA** se  $f^{-1}(A) \in \tau, \forall A \in \tau'$ , cioè una funzione è continua se la controimmagine di aperti è aperta.

Notiamo che per il teorema 2.2.7, le due definizioni di funzione continua sono equivalenti per uno spazio metrico se si considera la topologia indotta dalla metrica.

**Teorema 2.4.2.**

- (i) L'identità è una funzione continua;
- (ii) composizione di funzioni continue è una funzione continua.

**Definizione 2.4.3.** Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice **OMEOMORFISMO** se  $f$  è continua e esiste una funzione  $g : Y \rightarrow X$  continua tale che  $f \circ g = Id_Y$  e  $g \circ f = Id_X$ . Cioè  $f$  è continua, bigettiva e con inversa continua.

**Osservazione 2.4.4.**

- (i) Composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo; due spazi legati da un omeomorfismo si dicono **OMEOMORFI** e essere omeomorfi è una relazione di equivalenza;
- (ii) l'insieme degli omeomorfismi da  $(X, \tau)$  in sé è un gruppo;
- (iii) se  $f : X \rightarrow Y$  è continua e bigettiva non è detto che sia un omeomorfismo, cioè  $f^{-1}$  può non essere continua.



**Esempio 2.4.5.** Siano  $\tau_E$  la topologia euclidea,  $\tau_C$  la cofinita,  $\tau_D$  la discreta e  $\tau_I$  l'indiscreta. Le seguenti mappe sono dunque continue:

- $Id : (\mathbb{R}, \tau_D) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_E)$ ,
- $Id : (\mathbb{R}, \tau_E) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_C)$ ,
- $Id : (\mathbb{R}, \tau_C) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_I)$ .

Nessuna delle inverse è però continua. Più in generale,  $Id : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$  con  $\sigma \subsetneq \tau$  è continua ma l'inversa no.

**Esercizio 2.4.6.** Il seguente esercizio è frutto di una domanda fatta da uno studente a lezione e potrebbe essere più difficile di altri esercizi del corso. Trovare un esempio (o dimostrare che non esiste) di uno spazio topologico  $X$  e una funzione  $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$  continua e bigettiva con inversa non continua. Stando a quanto dice Frigerio, probabilmente tale funzione esiste, euristicamente perché non c'è un modo facile di dimostrare il contrario.





**Soluzione** La seguente soluzione è un esempio mostrato a lezione da Gandini. Vedi te a volte il caso.

Mettiamo su  $\mathbb{Z}$  la seguente topologia:  $A \subseteq \mathbb{Z}$  è aperto se  $A = \mathbb{Z}$  o  $A \subseteq \mathbb{N}$ . È semplice verificare che è una topologia. Allora la funzione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  t.c.  $f(n) = n - 1$  è l'esempio cercato. Banalmente è bigettiva, è semplice verificare che è continua ma l'inversa no.

Introduciamo adesso un concetto che permetterà di caratterizzare la continuità in spazi topologici in modo analogo a quanto fatto per gli spazi metrici.

**Definizione 2.4.7.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico fissato e  $x_0 \in X$ . Un insieme  $U \subseteq X$  è un INTORNO di  $x_0$  se  $x_0 \in U^\circ$ , o equivalentemente se esiste  $V$  aperto con  $x_0 \in V \subseteq U$ . L'insieme degli intorni di  $x_0$  si denota con  $\mathcal{I}(x_0)$ .

**Definizione 2.4.8.**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  è detta *continua in*  $x_0$  se per ogni intorno  $U$  di  $f(x_0)$  esiste un intorno  $V$  di  $x_0$  t.c.  $f(V) \subseteq U$ .

Appare dunque intuitivo il seguente risultato.

**Teorema 2.4.9.**  $f$  è continua  $\Leftrightarrow$  è continua in ogni  $x_0 \in X$ .

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Supponiamo  $f$  continua e  $x_0 \in X$ , sia inoltre  $U$  un intorno di  $f(x_0)$ . Per definizione di intorno esiste un aperto  $A$  con  $f(x_0) \in A \subseteq U$ , perciò  $x_0 \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$ , ma poiché  $f$  è continua abbiamo che  $f^{-1}(A)$  è ancora un aperto, perciò ponendo  $V = f^{-1}(U)$  abbiamo che  $V$  è un intorno di  $x_0$  t.c.  $f(V) \subseteq U$ , che è quello che volevamo.

$(\Leftarrow)$  Supponiamo  $f$  continua in ogni punto di  $X$  e sia  $A$  un insieme aperto in  $Y$ . Per ogni  $x \in f^{-1}(A)$ ,  $A$  è un intorno di  $f(x)$ . Ma dato che  $f$  è continua in ogni punto di  $X$ , esiste un intorno  $V_x$  di  $x$  t.c.  $x \in V_x \subseteq f^{-1}(A)$ . Per definizione di intorno, ciò significa che esiste un aperto  $A_x$  di  $X$  t.c.  $x \in A_x \subseteq V_x \subseteq f^{-1}(A)$ . Dunque dev'essere  $f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} A_x$ , quindi  $f^{-1}(A)$  è un aperto in  $X$  per ogni  $A$  aperto in  $Y$ , il che equivale a dire che  $f$  è continua.  $\square$

## 2.5 Ordinamento fra topologie, basi e prebasi

Vogliamo mettere un ordinamento parziale sulle topologie di un certo insieme fissato.

**Definizione 2.5.1.** Dato un insieme  $X$  su cui sono definite le topologie  $\tau$  e  $\tau'$ , si dice che  $\tau$  è MENO FINE di  $\tau'$  se  $\tau \subseteq \tau'$ , cioè ogni aperto di  $\tau$  è anche aperto di  $\tau'$ .  $\tau'$  si dice PIÙ FINE di  $\tau$ .

**Osservazione 2.5.2.** Equivalentemente alla definizione sopra, si può dire che  $\tau$  è meno fine di  $\tau'$  se e solo se  $Id : (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$  è continua.

Quando  $\tau$  è meno fine di  $\tau'$  scriveremo  $\tau < \tau'$ . Si noti che dalla definizione ogni topologia è meno fine di se stessa, cioè  $\tau < \tau' \forall \tau$ .

**Esempio 2.5.3.**  $\tau_I < \tau_C < \tau_E < \tau_D$ ,  $\tau_I < \tau < \tau_D \forall \tau$ .

**Lemma 2.5.4.** Intersezione arbitraria di topologie su  $X$  è ancora una topologia su  $X$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\tau_i, i \in I$  topologie su  $X$ . Verifichiamo che  $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$  soddisfa gli assiomi di topologia.

- (i)  $\emptyset, X \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow \emptyset, X \in \tau$ .
- (ii)  $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1, A_2 \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$ .
- (iii) Siano  $A_j, j \in J$  insiemi che stanno in  $\tau$ .  

$$A_j \in \tau \forall j \in J \Rightarrow A_j \in \tau_i \forall i \in I, j \in J \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \tau.$$

□

**Corollario 2.5.5.** Data una famiglia  $\tau_i, i \in I$  di topologie su  $X$ , esiste la più fine tra le topologie meno fini di ogni  $\tau_i$ : è  $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ .

**Corollario 2.5.6.** Sia  $X$  un insieme,  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ , allora esiste la topologia meno fine tra quelle che contengono  $S$ . Tale topologia si dice *generata* da  $S$  e  $S$  si dice *PREBASE* della topologia. Se  $\Omega = \{\tau \text{ topologia} \mid S \in \tau\}$  (che è non vuoto perché contiene almeno la topologia discreta), la topologia cercata è  $\bigcap_{\tau \in \Omega} \tau$ .

**Definizione 2.5.7.** sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico fissato, una BASE di  $\tau$  è un insieme  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  t.c.  $\forall A \in \tau, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$  t.c.  $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Ovvero  $\mathcal{B}$  è una base se ogni aperto di  $\tau$  può essere scritto come unione qualunque di elementi di  $\mathcal{B}$ .

**Esempio 2.5.8.** Se  $X$  è uno spazio metrico, una base della topologia indotta sono le palle.

**Definizione 2.5.9.**  $(X, \tau)$  si dice *a base numerabile* (o che soddisfa il SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ) se ammette una base numerabile.

**Proposizione 2.5.10.** Sia  $X$  un insieme senza topologia,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  è base di una topologia su  $X \Leftrightarrow$  valgono le seguenti:

- (i)  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ;
- (ii)  $\forall A, A' \in \mathcal{B}, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$  t.c.  $A \cap A' = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Cioè ogni intersezione di una coppia di elementi di  $\mathcal{B}$  può essere scritta come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Ovviamente, se  $\mathcal{B}$  è la base di una topologia su  $X$ , l'insieme  $X$  deve essere unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , inoltre tutti gli elementi di  $\mathcal{B}$  devono essere sottoinsiemi di  $X$ , da cui discende (i).

$A, A' \in \mathcal{B} \Rightarrow A, A' \in \tau \Rightarrow A \cap A' \in \tau$ , per cui  $A \cap A'$  deve poter essere esprimibile come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , che è l'affermazione (ii).

( $\Leftarrow$ ) Dobbiamo mostrare che l'insieme  $\tau$  di tutte le possibili unioni di elementi di  $\mathcal{B}$  soddisfa gli assiomi di topologia.

Chiaramente  $\emptyset \in \tau$  come unione di un insieme vuoto di elementi di  $\mathcal{B}$  e  $X \in \tau$  per (ii). Se faccio l'unione arbitraria di insiemi ottenuti come unione di elementi di  $\mathcal{B}$  ottengo ovviamente un insieme che è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

Infine,  $A, A' \in \tau \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} B_i, A' = \bigcup_{j \in J} B_j$  con  $B_i, B_j \in \mathcal{B} \forall i \in I, j \in J$ .

$$\text{Allora } A \cap A' = \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j), \text{ ma tutti i } B_i \text{ e } B_j$$

stanno in  $\mathcal{B}$ , dunque per (ii) tutti i  $B_i \cap B_j$  sono rappresentabili come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , perciò anche la loro unione, che è proprio  $A \cap A'$ , può essere scritta in quel modo e quindi sta in  $\tau$ .  $\square$

**Proposizione 2.5.11.** Siano  $X$  un insieme e  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$  la prebase di una topologia  $\tau$  su  $X$ . Allora:

- (i) le intersezioni finite di elementi di  $S \cup \{X\}$  sono una base di  $\tau$ ;
- (ii)  $A \in \tau \Leftrightarrow A$  è unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di  $S \cup \{X\}$ .

*Dimostrazione.* Sicuramente, poiché  $\tau$  è generata da  $S$ ,  $S \subseteq \tau$  e quindi anche tutte le intersezioni finite di elementi di  $S$  e le unioni arbitrarie di tali intersezioni devono stare in  $\tau$ . Se mostriamo che sono sufficienti a definire una topologia, abbiamo finito.

Chiaramente il vuoto è l'intersezione di un insieme vuoto di insiemi e  $X$  c'è perché lo abbiamo aggiunto a mano.

Unione arbitraria di unioni arbitrarie di elementi di un insieme è ancora unione arbitraria di elementi di tale insieme.

Siano ora  $A_1 = \bigcup_{i \in I} B_i, A_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$  con tutti i  $B_i, B_j$  intersezioni finite di elementi di  $S$ . Allora

$$A_1 \cap A_2 = \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j),$$

ma intersezione di due intersezioni finite di elementi di  $S$  è ancora un'intersezione finita di elementi di  $S$ , perciò  $A_1 \cap A_2$  è ancora un'unione di intersezioni finite di elementi di  $S$ . Questo basta per dimostrare (i) e (ii) è una semplice riformulazione.  $\square$

**Proposizione 2.5.12.** Sia  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  e  $S, \mathcal{B}$  rispettivamente una prebase e una base di  $\tau'$ . Allora sono equivalenti:

- (i)  $f$  è continua;
- (ii)  $f^{-1}(A)$  è aperto per ogni  $A \in S$ ;
- (iii)  $f^{-1}(A)$  è aperto per ogni  $A \in \mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* Poiché ogni base è una prebase,  $((i) \Leftrightarrow (ii)) \Rightarrow ((i) \Leftrightarrow (iii))$ .

$(i) \Rightarrow (ii)$  è ovvia, perciò resta da dimostrare  $(ii) \Rightarrow (i)$ .

Sia  $A$  un aperto di  $\tau'$ . Per la proposizione 2.5,  $A$  si può scrivere come unione di intersezioni finite di elementi di  $S$ . Poiché la controimmagine di un'unione è l'unione delle controimmagini e la controimmagine di un'intersezione è l'intersezione delle controimmagini, la controimmagine di  $A$  è unione di intersezioni finite di controimmagini di elementi di  $S$ , ma queste controimmagini sono aperte, perciò un'unione di loro intersezioni finite è ancora aperta, perciò  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$  per ogni  $A$  aperto in  $Y$ , e questo equivale a dire che  $f$  è continua.  $\square$

## 2.6 Assiomi di numerabilità

Nella definizione 2.5.9 abbiamo stabilito quando uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Vediamo gli altri due.

**Definizione 2.6.1.**  $Y \subseteq X$  si dice **DENSO** se  $\overline{Y} = X$ .

**Osservazione 2.6.2.**  $Y$  è denso  $\Leftrightarrow Y \cap A \neq \emptyset$  per ogni  $A$  aperto non vuoto.

**Definizione 2.6.3.**  $X$  si dice **SEPARABILE** (o che soddisfa il **TERZO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ**) se ammette un sottoinsieme denso numerabile.

**Proposizione 2.6.4.** Se  $X$  è a base numerabile,  $X$  è separabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\{B_i, i \in \mathbb{N}\}$  la base numerabile di  $X$  e scegliamo per ogni  $i \in \mathbb{N}$  un elemento  $x_i \in B_i$ . Vogliamo mostrare che  $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  è un sottoinsieme denso numerabile di  $X$ .

Ovviamente è numerabile. Per dimostrare che è denso, mostriamo che interseca ogni aperto non vuoto.

Sia dunque  $A$  un aperto non vuoto di  $X$ , allora, dato che i  $B_i$  formano una base,  $A$  è esprimibile come unione di alcuni di essi, in particolare esiste  $i_0$  t.c.  $B_{i_0} \subseteq A$  e perciò  $x_{i_0} \in B_{i_0} \Rightarrow x_{i_0} \in A$ , dunque l'intersezione tra il nostro insieme e un aperto non vuoto non è mai vuota, come voluto.  $\square$

**Proposizione 2.6.5.** Se  $(X, \tau)$  è metrizzabile,  $X$  è separabile  $\Leftrightarrow$  è a base numerabile.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Mostriamo che per ogni aperto  $A$  e per ogni  $x \in A$ , esiste una palla di centro un elemento del sottoinsieme denso numerabile e raggio un razionale positivo tutta contenuta in  $A$ . Allora tali palle formano una base numerabile.

Sicuramente esiste una palla di centro  $x$  e raggio  $R \in \mathbb{R}^+$  tutta contenuta in  $A$ . Consideriamo la palla di centro  $x$  e raggio  $R/3$ , che è contenuta nella prima. Questa palla è in particolare un insieme aperto, dunque ha un elemento  $y$  in comune con il sottoinsieme denso numerabile. Scegliendo un razionale  $R/3 < r < 2 \cdot R/3$  si ottiene che la palla di centro  $y$  e raggio  $r$  è tutta contenuta nella palla di centro  $x$  e raggio  $R$ , dunque è tutta contenuta in  $A$ , e contiene  $x$ , come voluto.

L'altra freccia discende dalla proposizione 2.6.4.  $\square$

**Definizione 2.6.6.** Un SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI per  $x_0$  è una famiglia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}(x_0)$  t.c.  $\forall U \in \mathcal{I}(x_0) \exists V \in \mathcal{F}$  con  $V \subseteq U$ .

**Esempio 2.6.7.** Se  $X$  è uno spazio metrico, le palle centrate in  $x_0$  do raggio  $1/n$  al variare di  $n$  intero positivo sono un sistema fondamentale di intorni. In particolare, sono un sistema fondamentale di intorni numerabile.

**Definizione 2.6.8.**  $X$  soddisfa il PRIMO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ se ogni  $x_0 \in X$  ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

**Fatto 2.6.9.** Se  $X$  è metrizzabile  $X$  soddisfa il primo assioma di numerabilità. Ciò discende direttamente dall'esempio 2.6.7.

**Proposizione 2.6.10.** Il secondo assioma di numerabilità implica il primo e il terzo assioma di numerabilità. Discende dalla proposizione 2.6.5 che in spazi metrici vale anche che il terzo assioma di numerabilità implica il secondo assioma di numerabilità.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $X$  soddisfi il secondo assioma di numerabilità. Per la proposizione 2.6.4 otteniamo subito che soddisfa il terzo. Vogliamo adesso mostrare che soddisfa anche il primo. Sia  $\mathcal{B}$  una base numerabile. Dato  $x \in X$ , consideriamo l'insieme  $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ . Essendo un sottoinsieme di  $\mathcal{B}$  è sicuramente numerabile e contiene solo insiemi aperti, cioè intorni di  $x$ . Mostriamo che è un sistema fondamentale di intorni per  $x$ .

Consideriamo un intorno  $U$  di  $x$ . Questo ha un sottoinsieme aperto  $V \subseteq U$  contenente  $x$ , dunque  $V$  è esprimibile come unione di elementi di  $\mathcal{B}$  e ce ne dev'essere uno che contiene  $x$ , che sta quindi nel nostro insieme ed è contenuto in  $V$  e quindi in  $U$ . Dunque, per ogni intorno  $U$  di  $x$  troviamo un elemento del nostro insieme di intorni di  $x$  contenuto in  $U$ , che è quello che dovevamo dimostrare.  $\square$

**Proposizione 2.6.11.**

- (i)  $A \subseteq X$  è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto;
- (ii) sia  $C \subseteq X$  un insieme generico, allora  $x \in \overline{C}$  se e solo se ogni intorno di  $x$  interseca  $C$ .

*Dimostrazione.* (i) Sia  $A$  un insieme che è intorno di ogni suo punto, cioè per ogni  $x \in A$  esiste un aperto  $V_x \subseteq A$  che lo contiene. Allora vale che  $A = \bigcup_{x \in A} V_x$ . Poiché  $A$  è unione di aperti è aperto.

Viceversa sia  $A$  aperto. Allora ogni suo punto è interno ad esso.

- (ii) Si ha che  $\overline{C}$  è il complementare di  $(X \setminus C)^\circ$ . Dunque  $x$  appartiene a  $\overline{C}$  se e solo se non è interno a  $X \setminus C$ , cioè se e solo se ogni suo intorno  $U$  non è tutto contenuto nel complementare di  $C$ . Questo accade quando ogni intorno di  $x$  interseca  $C$  in almeno un punto.

□

**Esempio 2.6.12.** La retta di Sorgenfrey. Su  $X = \mathbb{R}$  consideriamo il seguente insieme:

$$\mathcal{B} = \{ [a, b) \mid a < b \}.$$

Allora valgono le seguenti:

- (i)  $\mathcal{B}$  è base di una topologia  $\tau$ ;
- (ii)  $\tau$  è più fine della topologia euclidea;
- (iii)  $\tau$  è separabile;
- (iv)  $\tau$  non è a base numerabile;
- (v)  $\tau$  non è metrizzabile;
- (vi)  $\tau$  è primo numerabile.

*Dimostrazione.* (i) Verifichiamo utilizzando la proposizione 2.5.10. Il primo punto vale in quanto  $\mathbb{R}$  è coperto da intervalli del tipo  $[-n, n)$  con  $n$  naturale. Inoltre dati i due intervalli  $[a, b)$  e  $[c, d)$ , distinguo:

- $b \leq c$ . Allora l'intersezione è vuota.
- $c < b$  e  $b \leq d$ . Allora l'intersezione è  $[c, b)$ .
- $c < b$  e  $b > d$ . Allora l'intersezione è  $[c, d)$ .

In ogni caso vale anche il secondo punto.

- (ii) Voglio mostrare che ogni aperto di  $\tau$  è anche aperto di  $\tau_E$ . Sia allora  $(a, b)$  un aperto della base degli intervalli aperti della topologia euclidea. Si considerino gli aperti in  $\tau$  della forma  $[a + \frac{1}{n}, b)$  con  $n$  naturale positivo. L'unione di tutti questi è allora  $(a, b)$ .
- (iii) Si noti che  $\mathbb{Q}$  è un denso numerabile.
- (iv) Sia  $\mathcal{D}$  una base di  $\tau$ . Si noti che ogni intervallo del tipo  $[x, x + 1)$ , con  $x$  reale, può essere scritto come unione degli elementi della base solo se in  $\mathcal{D}$  c'è un elemento  $D$  tale che  $x \in D \subseteq [x, x + 1)$ , da cui  $\inf(D) = x$ . Allora

la mappa

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ D &\mapsto \inf(D)\end{aligned}$$

deve essere surgettiva. Dunque la base scelta non può essere numerabile.

- (v) Semplice conseguenza dei punti precedenti e della proposizione 2.6.5.
- (vi) Basta notare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{[x - 1/n, x + 1/n] | n \in \mathbb{Z}^+\}$  è una famiglia di intorni numerabile per  $x$ .

□

**Esempio 2.6.13.** Topologia di Zariski. Sia  $\mathbb{K}$  un campo. Definiamo una topologia  $\tau_Z$  in  $\mathbb{K}^n$  in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi i cui elementi si annullano in tutti i polinomi di una famiglia arbitraria (non vuota)  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  di polinomi a  $n$  variabili con coefficienti in  $\mathbb{K}$ . Dimosteremo che  $\tau_Z$  è effettivamente una topologia, che è meno fine di quella euclidea quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Inoltre, quando  $n = 1$  e per  $\mathbb{K}$  generico,  $\tau_Z$  coincide con la topologia cofinita.

*Dimostrazione.* Dimosteremo che i chiusi soddisfano le proprietà di topologia (per i chiusi, ovviamente), per passaggio al complementare si può concludere che  $\tau_Z$  è una topologia.

Ovviamente il vuoto è chiuso perché la proprietà dei suoi elementi di annullarsi in un qualunque insieme di polinomi è sempre vera a vuoto, mentre  $\mathbb{K}^n$  è chiuso perché tutti gli elementi si annullano nella famiglia formata dal solo polinomio nullo.

Siano ora  $C_1, C_2$  due chiusi i cui elementi si annullano, per definizione, nei polinomi rispettivamente delle famiglie  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ . Consideriamo la famiglia  $\mathcal{F}_{1,2} = \{f_1 \cdot f_2 | f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2\}$ . Mostriamo che l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di  $\mathcal{F}_{1,2}$  è proprio  $C_1 \cup C_2$ . Ovviamente se  $x \in C_1 \cup C_2$  possiamo dire senza perdita di generalità che  $x$  si annulla in tutti i polinomi in  $\mathcal{F}_1$ , e quindi banalmente anche in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_{1,2}$ . D'altro canto, se  $x$  si annulla in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_{1,2}$ , si deve annullare almeno o in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_1$  o in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_2$ . Se per assurdo così non fosse, esisterebbero  $f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2$  t.c.  $f_1(x) \neq 0 \neq f_2(x)$  e, poiché siamo in un campo, si avrebbe  $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ , assurdo. Dunque  $x \in C_1 \cup C_2$ .

Consideriamo adesso dei chiusi  $C_i, i \in I$  definiti dalle famiglie  $\mathcal{F}_i$ . Mostriamo che  $C = \bigcap_{i \in I} C_i$  è l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di  $\mathcal{F}_I = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ .

Se  $x \in C$  allora  $x \in C_i \forall i \in I$  e dunque si annulla in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_i$  per ogni  $i$ , quindi si annulla in tutti i polinomi della loro unione, che è proprio  $\mathcal{F}_I$ . Viceversa, se  $x$  si annulla in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_I$  allora si annulla in tutti i polinomi di ogni suo sottoinsieme, in particolare in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_i \forall i \in I$ , quindi  $x \in C_i$  per ogni  $i$  da cui  $x \in C$ .

Poniamo ora  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Poiché i polinomi in  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  sono funzioni continue per la topologia euclidea, la controimmagine di un aperto è a sua volta un

aperto. Per passaggio al complementare la controimmagine di un chiuso è a sua volta un chiuso. Ma allora, sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di polinomi, ho che, essendo  $\{0\}$  chiuso in  $\tau_E$  di  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(0)$  (qui si intende la controimmagine) è chiuso in  $\tau_E$  di  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $f \in \mathcal{F}$ . Ma l'insieme dei punti che si annullano in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}$  può essere descritto come  $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(0)$ , che essendo intersezione di chiusi

è chiuso in  $\tau_E$ , quindi tutti i chiusi di  $\tau_Z$  sono chiusi in  $\tau_E$ , per passaggio al complementare la stessa cosa con gli aperti e dunque  $\tau_Z < \tau_E$ .

Sia adesso  $\mathbb{K}$  generico e  $n = 1$ . Sia  $p$  un generico polinomio in  $\mathbb{R}[x]$  e  $\overline{\mathbb{K}}$  la chiusura algebrica di  $\mathbb{K}$ . Per il teorema fondamentale dell'algebra,  $p$  ha al più  $\deg p$  zeri in  $\overline{\mathbb{K}}$ , quindi a maggior ragione ne ha al più un numero finito in  $\mathbb{K}$ . Dunque i punti che si annullano in tutti i polinomi di una generica famiglia di polinomi sono finiti (limitati dal grado di un qualsiasi polinomio della famiglia), dunque i chiusi sono tutti finiti. Considerando invece un insieme finito  $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{K}$ , esso si annulla in tutti i polinomi dell'ideale generato da  $(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_m)$ , dunque è vero anche il viceversa, cioè che tutti i finiti sono chiusi, quindi in questo caso  $\tau_Z$  coincide con la topologia euclidea.  $\square$

**Fatto 2.6.14.** Se  $X$  non è numerabile, la topologia cofinita su  $X$  non soddisfa alcun assioma di numerabilità.

*Dimostrazione.* Per la proposizione 2.6.10, se dimostriamo che non soddisfa il primo otteniamo anche che non soddisfa il secondo. Sia dunque per assurdo  $x_0 \in X$  e  $\mathcal{F}$  un suo sistema fondamentale di interni numerabile. Notiamo che per ogni  $x \in X, x \neq x_0$  l'insieme  $X \setminus \{x\}$  è un aperto, dunque esiste un intorno di  $x_0$  tutto contenuto in esso, cioè che non contiene  $x$ . Notiamo, per come è definita la topologia cofinita, che gli interni, essendo sovrainsieme di insiemi aperti, sono a loro volta aperti, cioè il loro complementare è finito. Ma dato che per ogni  $x \in X \setminus \{x_0\}$  esiste un intorno di  $x_0$  che non contiene  $x$ , posso scrivere  $X \setminus \{x_0\}$ , che è ancora un insieme numerabile, come l'unione dei complementari degli insiemi in  $\mathcal{F}$ , cioè un'unione numerabile di insiemi finiti, che è numerabile, da cui l'assurdo.

Per quanto riguarda il terzo assioma, secondo me ho capito male mentre ero a lezione, perché mi sembra che qualunque sottoinsieme infinito di  $X$  debba necessariamente intersecare in qualche punto il complementare di un insieme finito, e quindi anche un insieme infinito di cardinalità numerabile avrebbe intersezione non nulla con tutti gli aperti e sarebbe di conseguenza un denso numerabile.  $\square$

Procediamo adesso a caratterizzare, negli insiemi che soddisfano il primo assioma di numerabilità, aperti, chiusi e continuità tramite successioni. Diamo prima una definizione.

**Definizione 2.6.15.**  $l \in X$  è detto *limite* della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se per ogni intorno  $U$  di  $l$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  t.c. per ogni  $n \geq n_0$  si ha che  $a_n \in U$ .



Passiamo dunque alle varie caratterizzazioni. Nei tre enunciati seguenti,  $X$  sarà sempre uno spazio topologico primo numerabile.

**Proposizione 2.6.16.** Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  è aperto  $\Leftrightarrow$  è aperto per successioni (si dice aperto per successioni?), cioè se per ogni successione  $(a_k)$  di elementi di  $x$  che converge a un limite  $l \in A$  esiste  $k_0$  t.c. per ogni  $k \geq k_0$  si ha  $a_k \in A$ .

*Dimostrazione.* Notiamo prima il seguente fatto: se  $U_k, n \in \mathbb{N}$  è un sistema fondamentale di intorni numerabile per  $x$ , definiamo  $V_k = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_k$ . Allora  $V_k, k \in \mathbb{N}$  è un sistema fondamentale di intorni numerabile tale che  $V_{k+1} \subseteq V_k$ .

( $\Rightarrow$ ) Sia  $A$  un aperto e  $(a_k)$  una successione avente limite  $l \in A$ . Poiché  $A$  stesso è un intorno di  $l$ , si conclude che esiste  $k_0$  t.c.  $a_k \in A$  per ogni  $k \geq k_0$  dalla definizione di limite.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $A$  un insieme aperto per successioni e prendiamo  $x \in A$ . Vogliamo mostrare che esiste un intorno  $U_x$  di  $x$  tutto contenuto in  $A$ . Se per assurdo così non fosse, allora ogni intorno di  $x$  avrebbe un elemento non contenuto in  $A$ . Consideriamo adesso un sistema fondamentale di intorni numerabile  $V_k, k \in \mathbb{N}$ , e lo prendiamo t.c.  $V_{k+1} \subseteq V_k$ . Per ciascuno di questi intorni, prendiamo un elemento  $a_k \in V_k$  t.c.  $a_k \notin A$ , che esiste per ipotesi assurda (alcuni elementi possono anche ripetersi, non ha importanza). Allora avremmo, dato che il sistema di intorni è fondamentale e che  $V_{k'} \subseteq V_k$  se  $k' > k$  (segue da  $V_{k+1} \subseteq V_k$ ), che la successione  $(a_k)$  sta definitivamente in ogni intorno di  $x$  e dunque ha limite  $x$ , ma è tutta fuori da  $A$ , assurdo perché  $A$  è aperto per successioni. Allora per ogni  $x \in A$  esiste un intorno  $U_x$  t.c.  $U_x \subseteq A$ , ma questo ci dice anche che per ogni  $x \in A$  esiste un aperto  $A_x$  t.c.  $x \in A_x \subseteq U_x \subseteq A$ , da cui otteniamo che  $A = \bigcup_{x \in A} A_x$  è un'unione di aperti e dunque è aperto.  $\square$

**Proposizione 2.6.17.** Un sottoinsieme  $C \subseteq X$  è chiuso  $\Leftrightarrow$  è chiuso per successioni, cioè per ogni successione  $(a_k)$  di elementi di  $C$  che converge a un limite  $l$ , anche  $l \in C$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Supponiamo  $C$  chiuso e sia  $(a_k)$  una successione di elementi di  $C$  con limite  $l$ . Per assurdo,  $l \notin C$ . Allora  $l \in X \setminus C$ , che è un insieme aperto, in particolare  $X \setminus C$  è un intorno di  $l$ . Esiste dunque, per definizione di limite, un  $k_0 \in \mathbb{N}$  t.c. per ogni  $k \geq k_0$  si abbia che  $a_k \in X \setminus C$ , ma  $a_k \in C$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , assurdo. Questa freccia vale in tutti gli spazi topologici.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo adesso che per ogni successione  $(a_k)$  di elementi di  $C$  avente limite  $l$  si abbia  $l \in C$ . Consideriamo un elemento  $x \in X \setminus C$ . Vogliamo mostrare che esiste un intorno  $U_x$  di  $x$  tutto contenuto in  $X \setminus C$ . Se così non fosse, per ogni intorno di  $x$  esisterebbe un elemento di  $C$  in esso contenuto. Poiché  $X$  è primo numerabile, consideriamo dunque un sistema fondamentale di intorni numerabile di  $x$ , sia esso  $V_k, k \in \mathbb{N}$ , e come nella dimostrazione precedente lo prendiamo t.c.  $V_{k+1} \subseteq V_k$ . Adesso scegliamo per ogni  $k$  un elemento  $a_k \in V_k$  t.c.

$a_k \in C$ , che esiste per l'ipotesi assurda. Notiamo che alcuni di questi elementi possono essere uguali, non ha importanza. Dato che abbiamo preso un sistema di intorni fondamentale, per ogni intorno  $U$  di  $x$  esiste un  $k_0$  t.c.  $V_{k_0} \subseteq U$ . Ma poiché  $V_k \subseteq V_{k_0}$  per ogni  $k \geq k_0$  (facile conseguenza di  $V_{k+1} \subseteq V_k$ ), ho che  $a_k \in V_k \subseteq V_{k_0} \subseteq U$  per ogni  $k \geq k_0$ . Riassumendo, per ogni  $U$  intorno di  $x$  esiste un  $k_0$  t.c. per ogni  $k \geq k_0$  si ha  $a_k \in U$ , ma questo per definizione significa che  $x$  è il limite di  $(a_k)$ , assurdo poiché  $a_k \in C$  per ogni  $k$  mentre  $x \in X \setminus C$ , contro l'ipotesi iniziale che per tutte le successioni in  $C$  aventi limite anche il limite è in  $C$ . Dunque per ogni  $x \in X \setminus C$  esiste un intorno  $U_x \subseteq X \setminus C$ , da cui si ha che esiste un aperto  $A_x$  con  $x \in A_x \subseteq U_x \subseteq X \setminus C$ . Ma allora,  $X \setminus C = \bigcup_{x \in X \setminus C} A_x$  che un'unione di aperti, perciò  $X \setminus C$  è aperto e di conseguenza  $C$  è chiuso.  $\square$

**Proposizione 2.6.18.** Sia  $Y$  uno spazio topologico (che non deve necessariamente soddisfare il primo assioma di numerabilità). Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua in  $\bar{x} \Leftrightarrow$  per ogni successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $\bar{x}$  la successione  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(\bar{x})$ .

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Supponiamo che  $f$  sia continua in  $\bar{x}$  e consideriamo una generica successione  $(x_n)$  convergente a  $\bar{x}$ . Prendiamo un intorno  $U$  di  $f(\bar{x})$  in  $Y$ . Dato che  $f$  è continua in  $\bar{x}$ , esiste un intorno  $V$  di  $\bar{x}$  in  $X$  t.c.  $f(V) \subseteq U$ . Prendiamo, per ipotesi di convergenza,  $n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_n \in V$  per ogni  $n \geq n_0$ . Allora si ha anche, sempre per ogni  $n \geq n_0$ ,  $f(x_n) \in U$ , da cui otteniamo che  $(f(x_n))$  converge a  $f(\bar{x})$ . Questa freccia vale per  $X$  spazio topologico qualsiasi.  $(\Leftarrow)$  Supponiamo adesso che per ogni successione convergente in  $X$  la successione immagine converga all'immagine del limite in  $Y$ . Per assurdo,  $f$  non è continua in  $\bar{x}$ . Allora deve esistere un intorno  $U$  di  $f(\bar{x})$  t.c. per ogni intorno  $V$  di  $\bar{x}$  si ha  $f(V) \not\subseteq U$ . Prendiamo un sistema fondamentale di intorni numerabile di  $\bar{x}$ , sia esso  $V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e come nella dimostrazione precedente lo prendiamo t.c.  $V_{n+1} \subseteq V_n$  per ogni  $n$ . Prendiamo, per ogni  $n$ , un elemento  $x_n \in V_n$  t.c.  $f(x_n) \notin U$ , che esiste per l'ipotesi assurda. Allora si mostra, come nella dimostrazione precedente, che la successione  $(x_n)$  tende a  $\bar{x}$ , ma le loro immagini  $f(x_n)$  sono tutte fuori dallo stesso intorno  $U$  di  $f(\bar{x})$ , dunque la successione  $(f(x_n))$  non tende a  $f(\bar{x})$ , assurdo per ipotesi.  $\square$

## 2.7 Sottospazi topologici

**Definizione 2.7.1.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico,  $Y \subseteq X$  un sottoinsieme, cioè esiste una mappa iniettiva  $i : Y \hookrightarrow X$  di inclusione. La topologia ristretta su  $Y$  da  $\tau$  è la topologia meno fine che rende  $i$  continua.

**Osservazione 2.7.2.** Per avere  $i$  continua, serve che per ogni  $U$  aperto di  $\tau$ , si abbia  $i^{-1}(U)$  aperto nella topologia ristretta  $\tau|_Y$ . Poiché  $i^{-1}(U) = U \cap Y$ , si ha in effetti che per ogni aperto  $U$  di  $\tau$ ,  $U \cap Y \in \tau|_Y$ .

Siccome  $\sigma = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$  è una topologia su  $Y$  che rende continua  $i$  e  $\tau|_Y \subseteq \sigma$ , deve valere l'uguaglianza in quanto  $\tau|_Y$  è la meno fine con tali proprietà.

**Osservazione 2.7.3.** Vale anche che se  $\mathcal{B}$  è base per  $\tau$ , allora

$$\mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

è una base per  $\tau|_Y$ . La dimostrazione è analoga a quella fatta per le topologie.

**Definizione 2.7.4.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $Y \subseteq X$  un sottoinsieme generico. La distanza  $d$  può essere ristretta a  $Y \times Y$ . In tal caso  $d|_{Y \times Y}$ , che verrà indicata anche come  $d|_Y$  è una distanza su  $Y$ .

**Proposizione 2.7.5.** Nel setting della definizione precedente, siano  $\tau$  la topologia indotta da  $d$  su  $X$ ,  $\tau|_Y$  la restrizione di  $\tau$  a  $Y$ , e  $\sigma$  la topologia indotta da  $d|_Y$  su  $Y$ . Allora  $\tau|_Y = \sigma$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$  rispettivamente basi per  $\tau|_Y$  e  $\sigma$ . Cioè:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{Y \cap \{x \in X \text{ t.c. } d(x, x_0) < r, \quad x_0 \in X, \quad r \in \mathbb{R}^+\}\} \\ &= \{y \in Y \text{ t.c. } d(y, x_0) < r, \quad x_0 \in X, \quad r \in \mathbb{R}^+\} \\ \mathcal{D} &= \{y \in Y \text{ t.c. } d(y, y_0) < r, \quad y_0 \in Y, \quad r \in \mathbb{R}^+\}\end{aligned}$$

Chiaramente  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ , quindi anche  $\sigma \subseteq \tau|_Y$ .

Inoltre, poiché le palle sono aperte, preso un  $B \in \mathcal{B}$ , per ogni  $y \in B \cap Y$  esiste un  $r_y > 0$  tale che  $D_y = B(y, r_y)$  sia contenuto in  $B$ . per cui si ha che

$$B = \bigcup_{y \in B \cap Y} D_y.$$

Ma ogni  $D_y$  è un elemento della base  $\mathcal{D}$ , quindi ogni aperto di  $\tau|_Y$  è un aperto di  $\sigma$ , concludendo l'ultima inclusione.  $\square$

**Definizione 2.7.6.** Siano  $(X, \tau)$  spazio topologico,  $Y \subseteq X$ . Allora  $Y$  si dice discreto in  $X$  se  $\tau|_Y = \mathcal{P}(Y)$ , cioè la topologia ristretta a  $Y$  è quella discreta.

**Osservazione 2.7.7.** Se  $Y$  è discreto in  $X$ , allora per ogni  $y \in Y$  esiste un aperto  $U$  di  $X$  tale che  $U \cap Y = \{y\}$ .

**Teorema 2.7.8.** *Proprietà universale delle immersioni.* Sia  $X$  spazio topologico e  $Y \subseteq X$  con  $i : Y \hookrightarrow X$  mappa di immersione. Allora per ogni spazio topologico  $Z$  e per ogni funzione  $g : Z \rightarrow Y$ , si ha che  $f$  è continua se e solo se  $i \circ f$  è continua.

*Dimostrazione.* Poiché  $i$  è continua per la definizione della topologia su  $Y$ , e poiché la composizione di continue è continua, si ha che se  $f$  è continua, anche  $i \circ f$  lo è.

Per l'altra implicazione, supponiamo  $i \circ f$  continua e sia  $A$  un aperto di  $Y$ . Allora esiste  $U$  aperto di  $X$  tale che  $U \cap Y = A$ , e vale  $i^{-1}(U) = A$ . Allora  $(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = f^{-1}(A)$  è aperto in  $Z$ .  $\square$

**Teorema 2.7.9.** *Universalità della proprietà universale.* La proprietà universale delle immersioni caratterizza in modo unico la topologia ristretta. Cioè dato  $(X, \tau)$  spazio topologico con  $Y \subseteq X$  e immersione  $i : Y \hookrightarrow X$ ,  $\tau|_Y$  è l'unica topologia su  $Y$  che rispetta la proprietà universale.

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma$  una topologia su  $Y$  che rispetta la proprietà universale.

- (i) Prendo come  $Z$  lo spazio  $(Y, \tau|_Y)$  e come  $f$  l'identità su  $Y$ . Il diagramma della proprietà universale è allora il seguente:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \tau|_Y) & \xrightarrow{\text{id}} & (Y, \sigma) \\ & \searrow g=i & \downarrow i \\ & & (X, \tau) \end{array}$$

Per definizione  $g$  è continua,  $i$  è continua, quindi  $\text{id}$  è continua. Allora  $\tau|_Y \subseteq \sigma$ .

- (ii) Questa volta prendo come  $Z$  lo spazio  $(Y, \sigma)$  mantenendo come  $f$  l'identità. Il diagramma risulta essere:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \sigma) & \xrightarrow{\text{id}} & (Y, \sigma) \\ & \searrow g=i & \downarrow i \\ & & (X, \tau) \end{array}$$

Per definizione  $\text{id}$  è continua, quindi lo è anche  $g = i$  per la proprietà universale. Allora  $\sigma$  rende continua  $i$ , e dunque vale  $\sigma \subseteq \tau|_Y$  per la definizione della restrizione di  $\tau$ .

$\square$

**Definizione 2.7.10.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Essa si dice APERTA se manda aperti in aperti e CHIUSA se manda chiusi in chiusi.

**Osservazione 2.7.11.** Sia  $f$  come sopra continua e bigettiva. Allora essa è un omeomorfismo se e solo se è aperta, e se solo se è chiusa.

**Esempio 2.7.12.** Si consideri l'insieme  $\mathbb{Z}$  con la topologia  $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{Z}$ . Allora  $f : n \mapsto n - 1$  è bigettiva, continua, non aperta e non omeomorfismo.

**Definizione 2.7.13.** Sia  $f : X \hookrightarrow Y$  una funzione iniettiva continua. Allora  $f$  si dice **IMMERSIONE TOPOLOGICA** se per ogni  $A \subseteq X$  aperto esiste un aperto  $U \subseteq Y$  tale che  $A = f^{-1}(U)$ .

**Osservazione 2.7.14.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Allora  $f$  è chiusa e iniettiva se e solo se è un'immersione chiusa, se e solo se  $f$  è immersione con  $f(X)$  chiuso. Idem con gli aperti.

**Osservazione 2.7.15.** Sia  $Y \subseteq X$  un sottospazio. Allora:

- (i) se  $X$  è N1 allora  $Y$  è N1;
- (ii) idem con N2;
- (iii) se  $X$  è separabile e metrizzabile allora  $Y$  è separabile.

*Dimostrazione.* I primi punti sono ovvi. Per quanto riguarda l'ultimo, se  $X$  è metrizzabile e separabile, è N1. Dunque anche  $Y$  è metrizzabile e N1, e quindi anche separabile.  $\square$

**Esempio 2.7.16.** *Il piano di Sorgenfrey.* Si prenda lo spazio  $\mathbb{R}^2$  dotato della topologia generata dai rettangoli del tipo  $[a, b) \times [c, d)$ . Esso è chiamato il piano di Sorgenfrey. Si consideri il sottospazio della retta  $y = -x$ . La topologia indotta è la discreta, infatti per ogni punto  $(k, -k)$ , il rettangolo  $[k, k+1) \times [-k, -k+1)$  interseca la retta solo nel punto considerato. Dunque si è trovato uno spazio separabile (prendendo per esempio  $\mathbb{Q}^2$  come denso numerabile) che ha un sottospazio non separabile.

## 2.8 Topologie prodotto

**Definizione 2.8.1.** Sia  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una famiglia di spazi topologici. Allora il **PRODOTTO CARTESIANO** della famiglia è:

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A\}$$

Se  $A = \{1, \dots, n\}$ , allora:

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \dots \times X_n \ni (x_1, \dots, x_n) \quad x_i := f(i)$$

**Definizione 2.8.2.** La **TOPOLOGIA PRODOTTO** su  $X = \prod_{i \in A} X_i$  è la topologia meno fine su  $X$  che rende continue tutte le proiezioni  $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ .

**Osservazione 2.8.3.**  $X$  viene naturalmente con proiezioni:

$$p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha \quad f \mapsto f(\alpha) \quad \forall \alpha \in A$$

Inoltre questa topologia è ben definita poiché l'intersezione di topologie è una topologia.

**Proposizione 2.8.4.** Una base per la topologia prodotto su  $X$  è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ aperto}, U_\alpha = X_\alpha \text{ tranne al più un numero finito di } \alpha \right\}$$

*Dimostrazione.* Sia  $U_\alpha \subset X_\alpha$  aperto. Allora:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \prod_{\beta \in A} V_\beta \quad \text{dove} \quad V_\beta = \begin{cases} U_\alpha & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Dunque le proiezioni  $p_\alpha$  sono continue se e solo se tutte le preimmagini di tale forma sono aperte nella topologia prodotto. Quindi:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset X \text{ aperto} \quad \forall \text{ aperto } U_\alpha \subset X_\alpha$$

Siano  $U_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} \subset X_{\alpha_n}$  aperti, con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ . Allora:

$$X \supset \bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \quad \text{dove} \quad V_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha_i} & \text{se } \alpha = \alpha_i \\ X_\alpha & \text{se } \alpha \neq \alpha_i \end{cases}$$

Dunque ogni elemento di  $\mathcal{B}$  è aperto nella topologia prodotto su  $X$  (infatti l'intersezione di aperti è un aperto). Se  $\mathcal{B}$  è base di una topologia abbiamo finito, in quanto per definizione la topologia prodotto è la meno fine che rende continue tutte le  $p_\alpha$ . Altrimenti:

$$\left( \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap \left( \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \right) = \prod_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap V_\alpha)$$

Dunque le intersezioni di elementi di  $\mathcal{B}$  sono ancora in  $\mathcal{B}$ , che quindi è chiuso rispetto alle intersezioni finite, e perciò è una base.  $\square$

**Osservazione 2.8.5.** Supponiamo  $\mathcal{B}_\alpha$  base della topologia di  $X_\alpha$ . Definiamo:

$$\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{\alpha \in A} B_\alpha \mid B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, B_\alpha = X_\alpha \text{ tranne al più un numero finito di } \alpha \right\}$$

Allora  $\mathcal{B}'$  è una base per la topologia prodotto in  $X$ .

**Corollario 2.8.6.** Supponiamo  $A$  numerabile e  $\mathcal{B}_\alpha$  base numerabile per  $X_\alpha$  per ogni  $\alpha$ . Allora  $\mathcal{B}'$  è una base numerabile per  $X$ .

*Dimostrazione.* Per esercizio.  $\square$

**Corollario 2.8.7.** (analogo al precedente) Supponiamo  $A$  numerabile e che tutti gli  $X_\alpha$  siano primo-numerabili. Allora la topologia prodotto è primo-numerabile.

**Osservazione 2.8.8.** In generale, se  $A$  non è numerabile i due corollari sono falsi.

**Esempio 2.8.9.** Prendiamo  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea, e consideriamo:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

Esso eredita una topologia prodotto che coincide con la topologia euclidea su  $\mathbb{R}^n$ . In particolare, la topologia euclidea ha per base le palle aperte. La topologia prodotto ha per base i parallelepipedi retti aperti:

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

In effetti tali parallelepipedi sono aperti nella topologia euclidea (e viceversa).

## 2.9 Proprietà delle topologie prodotto

**Proposizione 2.9.1.**  $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$  è un'applicazione aperta  $\forall \alpha \in A$  (sempre prendendo  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  la base di  $X$ , allora  $p_\alpha$  è aperta se e solo se  $p_\alpha(B)$  aperto  $\forall B \in \mathcal{B}$ . Supponiamo  $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$  con  $U_\alpha \subset X_\alpha$  aperto. Allora  $p_\alpha(B) = U_\alpha$  è aperto per definizione.  $\square$

**Osservazione 2.9.2.** Le proiezioni  $p_\alpha$  in generale non sono chiuse.

**Esempio 2.9.3.** Prendiamo  $p_1 : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  e sia  $Z$  l'iperbole equilatera, ovvero  $Z = \{xy \mid xy = 1\}$ . Allora  $Z$  è chiuso in quanto  $Z = p^{-1}(0)$  con  $p = xy - 1$ ,  $p$  continua e  $0 \in \mathbb{R}$  è chiuso. Invece,  $p_1(\{xy \mid xy = 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  non è chiuso perché  $\{0\}$  non è aperto.

**Proposizione 2.9.4.** Dato  $\alpha \in A$  fissiamo  $x_\beta \in X_\beta \forall \beta \neq \alpha$ , e definiamo  $X \supset X(\alpha) = \{f \in X \mid f(\beta) = x_\beta\}$ . Allora la restrizione:

$$p_\alpha|_{X(\alpha)} : X(\alpha) \longrightarrow X_\alpha$$

è un omeomorfismo.

*Dimostrazione.* (i)  $p_\alpha|_{X(\alpha)}$  è continua perché è restrizione di  $p_\alpha$ , che è continua.

(ii)  $p_\alpha|_{X(\alpha)}$  è bigettiva.

(iii)  $p_\alpha|_{X(\alpha)}$  è aperta: gli aperti di  $X(\alpha)$  sono:

$$\prod_{\beta \in A} U_\beta \cap X(\alpha)$$

dove

$$\prod_{\beta \in A} U_\beta = U := \{f \in X(\alpha) \mid f(\alpha) \in U_\alpha\}$$

D'altra parte  $p_\alpha|_{X(\alpha)}(U) = p_\alpha(U) = U_\alpha$ , che è aperto in  $X_\alpha$ .  $\square$

**Proposizione 2.9.5.** (*Proprietà universale della topologia prodotto*)

La topologia prodotto ha la seguente proprietà: dato  $Z$  spazio topologico e  $f : Z \rightarrow X$  funzione arbitraria, allora  $f$  è continua se e solo se  $p_\alpha \circ f$  è continua. Il diagramma risulta essere:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow f & \downarrow p_\alpha \\ Z & \xrightarrow{p_\alpha \circ f} & X_\alpha \end{array}$$

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) La composizione di funzioni continue è una funzione continua.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $U \subset X$  aperto. Vediamo se  $f^{-1}(U)$  aperto. Ci basta vederlo per  $U \in \mathcal{B}$ , quindi:

$$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \quad \text{con } U_\alpha \subset X_\alpha \text{ aperto}$$

Inoltre,  $\exists A_0 \subset A$  finito tale che  $U_\alpha = X_\alpha$  ( $\forall \alpha \notin A_0$ ). D'altra parte:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\prod_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcap_{\alpha \in A} (p_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

Dunque  $f^{-1}(U)$  è un'intersezione finita di aperti.  $\square$

**Teorema 2.9.6.** La topologia prodotto è univocamente caratterizzata dalla proprietà universale.

Equivalentemente: Se  $\tau_X$  è una topologia in  $X$  con la proprietà:

$\forall Z$  spazio topologico,  $f : Z \rightarrow X$ , allora  $f$  è continua se e solo se  $p_\alpha \circ f$  è continua.



*Dimostrazione.* Abbiamo visto che la topologia prodotto soddisfa la proprietà. Siano  $\tau_X$  una topologia che soddisfa la proprietà,  $\tau_\alpha$  la topologia in  $X_\alpha$  e  $\tau_{pr}$  la topologia prodotto su  $X$ . Prendiamo  $Z = (X, \tau_{pr})$ , e otteniamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & (X, \tau_X) & \\ \text{id}_X \nearrow & & \searrow p_\alpha \\ (X, \tau_{pr}) & \xrightarrow{p_\alpha} & (X_\alpha, \tau_\alpha) \end{array}$$

Abbiamo mostrato che  $p_\alpha : (X, \tau_{pr}) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$  è continua. Allora per la proprietà è continua anche  $\text{id}_X$ , quindi  $\tau_X \subset \tau_{pr}$ , ovvero  $\tau_X < \tau_{pr}$ . Viceversa, per la minimalità di  $\tau_{pr}$ , basta vedere che  $p_\alpha : (X, \tau_X) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$  è continua  $\forall \alpha \in A$ . Prendiamo  $Z = (X, \tau_X)$  e  $f = \text{id}_X$ . Allora otteniamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & (X, \tau_X) & \\ \text{id}_X \nearrow & & \downarrow p_\alpha \\ (X, \tau_X) & \searrow p_\alpha & (X_\alpha, \tau_\alpha) \end{array}$$

Da cui possiamo osservare che  $\text{id}_X$  è continua per la proprietà universale, e anche  $p_\alpha$  lo è.  $\square$

Diamo adesso alcune informazioni generali che verranno dimostrate più avanti, dopodiché vedremo alcune proprietà dei prodotti topologici nel caso degli spazi metrici.

- (i) Il prodotto di una quantità numerabile di spazi metrici è metrizzabile. In generale, è falso se la quantità non è numerabile.
- (ii) Il prodotto di una quantità al più continua di spazi separabili è separabile.

**Proposizione 2.9.7.** Sia  $(X, d)$  spazio metrico. Allora  $\bar{d} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  definita come:

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

è una distanza topologicamente equivalente a  $d$ . Dunque la topologia di uno spazio metrizzabile è indotta da una distanza  $\leq 1$ .

*Dimostrazione.* Verifichiamo che  $\bar{d}$  è una distanza.

- (i)  $\bar{d}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$  e  $\bar{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  è ovvio dalla definizione.
- (ii) Anche la simmetria di  $\bar{d}$  è ovvia dalla definizione.
- (iii) Vediamo che  $\bar{d}(x, z) \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z) \quad \forall x, y, z$ . Se almeno una tra  $\bar{d}(x, y)$  e  $\bar{d}(y, z)$  è uguale a 1 la tesi è ovvia ( $\bar{d}(x, z) \leq 1$ ). Altrimenti:

$$\bar{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$$

Dunque  $\bar{d}$  è una distanza. Come base della topologia associata ad una distanza si possono prendere le palle di raggio  $R$ , al variare di  $R < 1$ . Ma  $\forall x \in X, \forall R < 1, B_d(x, R) = B_{\bar{d}}(x, R)$ , perciò le topologie indotte coincidono.  $\square$

**Definizione 2.9.8.**  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  si dice  $K$ -LIPSCHITZ se  $\forall K > 0, \forall x_1, x_2 \in X$ :

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd(x_1, x_2)$$

Inoltre, poiché  $f(B(x, \frac{\varepsilon}{K})) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ , una funzione  $K$ -Lipschitz è continua.

**Teorema 2.9.9.** Sia  $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una famiglia di spazi metrici. Allora  $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  è metrizzabile.

*Dimostrazione.* Costruiamo  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  distanza che induce  $\tau_{pr}$  (la topologia prodotto).  $\forall i \in \mathbb{N}$  posso supporre  $d_i \leq 1$ . Denotiamo con  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  i punti di  $X$ , dove  $x_i \in X_i, \forall i \in \mathbb{N}$ . Poniamo:

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \cdot d_i(x_i, y_i)$$

che è  $< +\infty$  poiché  $d_i \leq 1$ . È facile verificare che  $d$  è una distanza. Sia ora  $\tau_d$  la topologia indotta, e mostriamo che  $\tau_{pr} = \tau_d$ .

Se  $\pi_i : X \longrightarrow X_i$  è la proiezione su  $X_i$ , allora:

$$d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)) = d_i(x_i, y_i) = 2^i(2^{-i} \cdot d_i(x_i, y_i)) \leq 2^i d(x, y)$$

Quindi  $\pi_i$  è  $2^i$ -Lipschitz, dunque è continua. Allora ogni proiezione è continua rispetto a  $\tau_d$ , quindi  $\tau_d \supseteq \tau_{pr}$ . Vediamo adesso l'inclusione opposta ( $\tau_d \subseteq \tau_{pr}$ ). Basta osservare che ogni palla di  $d$  è aperta in  $\tau_{pr}$ . Sia  $B = B_d(x, \varepsilon) \subseteq X$  e sia  $y \in B$ . Allora  $\exists \delta > 0$  tale che  $B(y, \delta) \subseteq B$ . Dobbiamo allora mostrare che  $\exists U$  aperto di  $\tau_{pr}$  con  $y \in U \subseteq B_d(y, \delta)$ . Sia quindi  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \delta/2$ . Poniamo:

$$U = \bigcap_{i=0}^{n_0} \pi_i^{-1} \left( B \left( y_i, \frac{\delta}{4} \right) \right) = B_{d_0} \left( y_0, \frac{\delta}{4} \right) \times \cdots \times B_{d_n} \left( y_n, \frac{\delta}{4} \right) \times X_{n_0+1} \times \cdots \times X_n \times \cdots$$

Se  $z \in U$ ,  $d_i(x_i, y_i) < \frac{\delta}{4} \quad \forall i \leq n_0$ , allora:

$$\begin{aligned} d(y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) = \sum_{i=0}^{n_0} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) < \\ &< \frac{\delta}{4} \left( \sum_{i=0}^{n_0} 2^{-i} \right) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\delta}{4} \cdot 2 + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

Dunque  $U \subseteq B(y, \delta)$ .  $\square$

**Osservazione 2.9.10.** In realtà potevamo usare una qualsiasi serie convergente a termini positivi al posto di  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}$ .

**Osservazione 2.9.11.** Genericamente, se il prodotto più che numerabile di spazi metrici non è primo-numerabile allora non è metrizzabile.

**Proposizione 2.9.12.** (*Prodotti finiti*) Se  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  sono spazi metrici, allora  $X \times Y$  è metrizzabile, e ha topologia indotta da una qualsiasi delle seguenti distanze:

- (i)  $d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$
- (ii)  $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2}$
- (iii)  $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$

*Dimostrazione.* Si può verificare che  $d_1, d_2, d_{\infty}$  sono equivalenti, come già visto su  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre, è facile vedere che inducono la topologia prodotto.  $\square$