Appunti di Geometria 2
anno accademico 2019/2020

Marco Vergamini Alessio Marchetti Luigi Traino

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso di Geometria 2 tenuto dai professori Roberto Frigerio e Jacopo Gandini nell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni i contenuti dei corsi del primo anno, in particolare Analisi 1 e Geometria 1. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti a più mani, non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc... Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia... potrebbero mancare argomenti più o meno marginali... insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Speriamo di essere riusciti in questo intento.

2 Spazi metrici e spazi topologici

2.1 Spazi metrici

Definizione 2.1.1. Uno SPAZIO METRICO è una coppia (X, d), X insieme, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c. per ogni $x, y, z \in X$

(i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare).

In tal caso d si dice DISTANZA O METRICA.

Esempio 2.1.2. Ecco alcuni esempi di distanze:

- La distanza d_1 su $\mathbb{R}^n$, che alla coppia di elementi $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ associa il numero
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$$
- la distanza d_2 (o d_E, distanza euclidea) su $\mathbb{R}^n$,
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2};$$
- la distanza d_∞ su $\mathbb{R}^n$, $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\dots,n} \{|x_i - y_i|\}$;
- la distanza discreta su un generico insieme x, $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e 0 altrimenti;

- le distanze d_1, d_2, d_∞ sullo spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$, definite rispettivamente

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt},$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Definizione 2.1.3. $f : (X,d) \to (Y,d')$ viene detto EMBEDDING ISOMETRICO se $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$.

Osservazione 2.1.4. Valgono i seguenti fatti:

- l'identità è un embedding isometrico;
- composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico;
- se un embedding isometrico f è biettivo, anche f^{-1} è un embedding isometrico e f si dice ISOMETRIA;
- un embedding isometrico è sempre iniettivo, dunque è un'isometria se e solo se è suriettivo;
- se (X,d) è fissato, l'insieme delle isometrie da X in sé è un gruppo con la composizione, chiamato $\mathrm{Isom}(X,d)$.

2.2 Continuità in spazi metrici

Definizione 2.2.1. Dati $p \in X, R > 0$, $B(p,R) := \{x \in X \mid d(p,x) < R\}$ è detta la PALLA APERTA di centro p e raggio R. Se al posto del minore si utilizza il minore o uguale, si ottiene la definizione di PALLA CHIUSA (nelle definizioni seguenti useremo le palle aperte).

Definizione 2.2.2. $f : (X,d) \to (Y,d')$ è *continua in* x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0$ t.c. $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$, cioè $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon)) \supseteq B(x_0,\delta)$.

Definizione 2.2.3. $f(X,d) \to (Y,d')$ è detta CONTINUA se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Osservazione 2.2.4. Gli embedding isometrici sono continui.

Esempio 2.2.5. Siano (X,d) spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x_0 \in X$ fissato. Allora la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ definita come $f(x) = d(x, x_0)$ è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in E$ e $\varepsilon > 0$. Per avere la continuità, vogliamo trovare un $\delta > 0$ t.c. $f(B(x,\delta)) \subseteq (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon)$, cioè per ogni $y \in E$ t.c. $d(y,x) < \delta$ vogliamo $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$. Ma notiamo che $|f(y)-f(x)| = |d(y,x_0)-d(x,x_0)|$ che per la disuguaglianza triangolare (opportunamente rimaneggiata) è minore o uguale di $d(x,y) < \delta$, dunque basta prendere $\delta = \varepsilon$. $\square$

Definizione 2.2.6. Sia X uno spazio metrico, $A \subseteq X$ è detto APERTO se per ogni $x \in A$ esiste $R > 0$ t.c. $B(x,R) \subseteq A$.

Fatto 2.2.7. Le palle aperte sono aperti. Per dimostrarlo, sfruttare la disuguaglianza triangolare.

Teorema 2.2.8. $f(X,d) \to (Y,d')$ è continua se e solo se per ogni aperto A di Y $f^{-1}(A)$ è aperto di X.

Dimostrazione. Supponiamo f continua. Prendiamo $x \in f^{-1}(A)$, allora si ha che $f(x) \in A$, ma dato che A è aperto esiste una palla aperta B_Y di centro $f(x)$ t.c. $B_Y \subseteq A$, da cui $f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$. Usando la definizione di continuità, detto ε il raggio di B_Y, scegliendo il δ corrispondente come raggio di una palla di centro x, sia essa B_X, si ha che $B_X \subseteq f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$, perciò abbiamo trovato una palla centrata in x tutta contenuta in $f^{-1}(A)$ e questo prova che è un aperto.
Viceversa, supponiamo che le controimmagini di aperti siano a loro volta aperti. Dati $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ si ha che $B(f(x_0),\varepsilon)$ è un aperto di Y, perciò la sua controimmagine è un aperto, ma allora per definizione di aperto esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ e questo prova che f è continua. $\square$

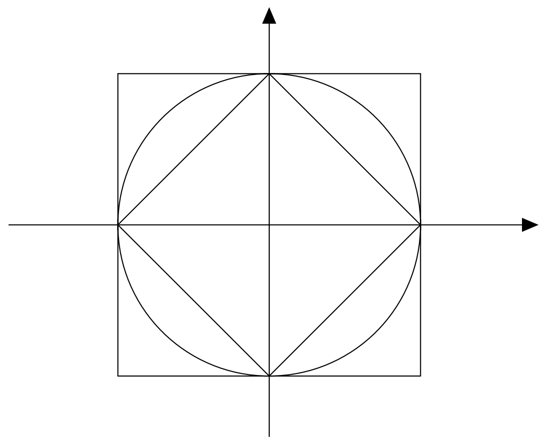
Osservazione 2.2.9. La continuità di una funzione dipende quindi solo indirettamente dalla metrica, mentre è direttamente collegata agli aperti generati dalla metrica stessa. Segue facilmente che due metriche che generano gli stessi aperti portano anche alla stessa famiglia di funzioni continue. Diamo dunque la seguente definizione.

Definizione 2.2.10. Due distanze d, d' su un insieme X si dicono TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI se inducono la stessa famiglia di aperti.

Lemma 2.2.11. Siano d, d' distanze su X t.c. esiste $k \geq 1$ t.c. per ogni $x, y \in X$ valga $d(x,y)/k \leq d'(x,y) \leq k \cdot d(x,y)$. Allora d e d' sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia A un aperto indotto da d' e $x_0 \in A$. Per definizione di aperto esiste $R > 0$ tale che $B_{d'}(x_0,R) \subseteq A$. Considero $B_d(x_0,R/k)$. Dato un elemento $x \in B_d(x_0,R/k)$ ho che $d'(x_0,x) \leq k \cdot d(x_0,x) < k \cdot R/k = R$, dunque $x \in B_{d'}(x_0,R)$. Allora $B_d(x_0,R/k) \subseteq B_{d'}(x_0,R/k) \subseteq A$ e dunque A è anche un aperto indotto da d. Per la simmetria delle disuguaglianze nelle ipotesi si dimostra anche l'opposto, perciò gli aperti di d e d' sono gli stessi, come voluto. $\square$

Corollario 2.2.12. d_1, d_2, d_∞ sono topologicamente equivalenti su $\mathbb{R}^n$.



Nell'immagine sono rappresentate, nell'ordine dalla più interna alla più esterna, le palle aperte centrate nell'origine e di raggio 1 rispettivamente nelle metriche d_1, d_2, d_∞.

Dimostrazione. Per AM-QM si ha che

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n}},$$

da cui $d_1(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot d_2(x,y)$. Stimando tutti i termini con il massimo otteniamo che

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sup_{j=1,\dots,n} \{(x_j - y_j)^2\}} = \sqrt{n} \cdot \sup_{j=1,\dots,n} \{|x_j - y_j|\},$$

da cui $d_2(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x,y)$. Infine è ovvio che

$$\sup_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

, da cui $d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y)$. Scegliendo $k = \sqrt{n}$ è ora sufficiente applicare il lemma. $\square$

Nella dimostrazione del corollario era importante che lo spazio fosse di dimensione finita. Nello spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ le tre distanze non sono topologicamente equivalenti. Dimostriamo ad esempio che due di esse non lo sono.

Proposizione 2.2.13. Nello spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ in $\mathbb{R}$, d_1 e d_∞ non sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Se per assurdo fossero topologicamente equivalenti, l'identità da $C([0,1])$ in sé sarebbe continua. Sia dunque f_0 la funzione costantemente nulla, consideriamo la palla $B_{d_\infty}(f_0,1)$ (che equivale alle funzioni continue limitate in modulo da 1), se l'identità fosse continua potremmo trovare un $\delta > 0$ t.c. $B_{d_1}(f_0,\delta) \subseteq B_{d_\infty}(f_0,1)$. Ma la funzione f definita come segue sta in $B_{d_1}(f_0,\delta)$ ma non in $B_{d_\infty}(f_0,1)$. Sia dunque $f(x) = 0$ per $x = 0$ o $x \geq \delta/2$, $f(\delta/4) = 2$ e per il resto lineare a tratti. È un semplice esercizio verificare che fa quanto detto. $\square$

2.3 Spazi topologici

Definizione 2.3.1. Uno SPAZIO TOPOLOGICO è una coppia (X,τ), $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, t.c.

(i) $\varnothing,\ X \in \tau$;
(ii) $A_1,\ A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$;
(iii) se I è un insieme e $A_i \in \tau\, \forall\, i \in I$, allora $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

Allora τ si dice TOPOLOGIA di X e gli elementi della topologia sono detti APERTI di τ.

Proposizione 2.3.2. Se (X,d) è uno spazio metrico, gli aperti rispetto a d definiscono una topologia.

Definizione 2.3.3. Uno spazio topologico (X,τ) è detto METRIZZABILE se τ è indotta da una distanza su X.

Definizione 2.3.4. Sia (X,τ) uno spazio topologico, $C \subseteq X$ è CHIUSO se $X \setminus C$ è aperto.

Osservazione 2.3.5.

(i) possono esistere insiemi né aperti né chiusi;
(ii) $\varnothing$ e X sono chiusi;
(iii) unione finita di chiusi è chiusa;
(iv) intersezione arbitraria di chiusi è chiusa.

Esempio 2.3.6. Ecco alcuni esempi di spazi topologici:

(i) tutte le topologie indotte da una metrica;
(ii) la topologia discreta, cioè $\tau = \mathcal{P}(X)$, indotta dalla distanza discreta;
(iii) la topologia indiscreta, cioè $\tau = \{\varnothing, X\}$;
(iv) la topologia cofinita, dove gli aperti sono l'insieme vuoto più tutti e soli gli insiemi il cui complementare è un insieme finito;
(v) la topologia della semicontinuità (inferiore) su $\mathbb{R}$, $\tau = \{\varnothing,\mathbb{R}\} \cup \{\mathcal{O}_y | y \in \mathbb{R}\}$ dove $\mathcal{O}_y = \{x \in \mathbb{R} | x > y\}$.

Definizione 2.3.7. Dato uno spazio topologico X e un insieme $B \subseteq X$, si chiama *parte interna* di B, e la si indica con B°, il più grande aperto contenuto in B. Analogamente, la *chiusura* di B, indicata con $\overline{B}$, è il più piccolo chiuso che contiene B. Definiamo infine la *frontiera* (o *bordo*) di un insieme come l'insieme $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$.

Notiamo che parte interna e chiusura sono ben definite: per la prima basta prendere l'unione di tutti gli aperti contenuti in B (alla peggio c'è solo il vuoto, che è contenuto in ogni insieme), per la seconda si prende l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono (alla peggio c'è solo X). Per la stabilità degli aperti per unione arbitraria e dei chiusi per intersezione arbitraria, gli insiemi così ottenuti sono ancora un aperto e un chiuso e sono rispettivamente il più grande aperto contenuto e il più piccolo chiuso che contiene per come sono stati costruiti. Infine, è banale mostrare che la parte interna di un aperto è l'aperto stesso e la chiusura di un chiuso è il chiuso stesso.

Fatto 2.3.8. $X = B^\circ \sqcup \partial B \sqcup (X \setminus B)^\circ$ dove con $\sqcup$ si indica l'unione disgiunta.

Dimostrazione. Per definizione $B^\circ \cup \partial B = \overline{B}$ e i due insiemi sono disgiunti. Inoltre, essendo $\overline{B}$ il più piccolo chiuso che contiene B, il suo complementare dev'essere il più grande aperto disgiunto da B, cioè il più grande aperto contenuto in $X \setminus B$, che è la parte interna di quest'ultimo. La tesi segue facilmente. $\square$

Esercizio 2.3.9. Sono lasciati come semplice esercizio alcuni fatti su parte interna e chiusura:

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, ma $\displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \overline{\{q\}} = \mathbb{Q}$, $\overline{\displaystyle\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}} = \mathbb{R}$, quindi l'uguaglianza non vale in generale per unioni infinite;

(ii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, ma prendendo $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ otteniamo che può non valere l'uguaglianza;

(iii) gli analoghi per la parte interna (attenzione: unione e intersezione si scambiano);

(iv) $\left(\overline{(\overline{A})^\circ}\right)^\circ = (\overline{A})^\circ$ e $\overline{(\overline{A^\circ})^\circ} = \overline{A^\circ}$;

(v) trovare un esempio di X spazio topologico e $A \subseteq X$ t.c. $A, \overline{A}, (\overline{A})^\circ, \overline{(\overline{A})^\circ}, A^\circ, \overline{A^\circ}, (\overline{A^\circ})^\circ$ sono tutti diversi.

Vediamo adesso la caratterizzazione della chiusura in spazi metrici. Premettiamo una definizione.

Definizione 2.3.10. Siano (X, d) spazio metrico e $E \subseteq X$. Diremo che $x_0 \in X$ è *aderente* a E se per ogni $r > 0$ vale che $E \cap B(x_0, r) \neq \varnothing$.

Vale allora la seguente affermazione.

Proposizione 2.3.11. Dato E in uno spazio metrico, $\overline{E}$ è l'insieme dei punti aderenti a E.

Dimostrazione. Sicuramente l'insieme dei punti aderenti contiene E, inoltre è un semplice esercizio verificare che è un insieme chiuso. Dobbiamo adesso dimostrare che è il più piccolo chiuso che contiene E. Sia dunque C un chiuso che contiene E, è ancora una volta un semplice esercizio verificare che il suo complementare è disgiunto dall'insieme dei punti aderenti, che è dunque contenuto in C e per minimalità della chiusura deve essere proprio $\overline{E}$. □

2.4 Continuità in spazi topologici

Definizione 2.4.1. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ si dice CONTINUA se $f^{-1}(A) \in \tau$, $\forall\, A \in \tau'$, cioè una funzione è continua se la controimmagine di aperti è aperta.

Notiamo che per il teorema 2.2.8, le due definizioni di funzione continua sono equivalenti per uno spazio metrico se si considera la topologia indotta dalla metrica.

Teorema 2.4.2.

(i) L'identità è una funzione continua;

(ii) composizione di funzioni continue è una funzione continua.

Definizione 2.4.3. Una funzione $f : X \to Y$ si dice OMEOMORFISMO se f è continua e esiste una funzione $g : Y \to X$ continua tale che $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_x$. Cioè f è continua, bigettiva e con inversa continua.

Osservazione 2.4.4.

(i) Composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo; due spazi legati da un omeomorfismo si dicomo OMEOMORFI e essere omeomorfi è una relazione di equivalenza;

(ii) l'insieme degli omeomorfismi da (X, τ) in sé è un gruppo;

(iii) se $f : X \to Y$ è continua e bigettiva non è detto che sia un omeomorfismo, cioè f^{-1} può non essere continua.

Esempio 2.4.5. Siano τ_E la topologia euclidea, τ_C la cofinita, τ_D la discreta e τ_I l'indiscreta. Le seguenti mappe sono dunque continue:

– $Id : (\mathbb{R}, \tau_D) \to (\mathbb{R}, \tau_E)$,
– $Id : (\mathbb{R}, \tau_E) \to (\mathbb{R}, \tau_C)$,
– $Id : (\mathbb{R}, \tau_C) \to (\mathbb{R}, \tau_I)$.

Nessuna delle inverse è però continua. Più in generale, $Id : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ con $\sigma \subsetneq \tau$ è continua ma l'inversa no.

Esercizio 2.4.6. Il seguente esercizio è frutto di una domanda fatta da uno studente a lezione e potrebbe essere più difficile di altri esercizi del corso.
Trovare un esempio (o dimostrare che non esiste) di uno spazio topologico X e una funzione $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ continua e bigettiva con inversa non continua.

Stando a quanto dice Frigerio, probabilmente tale funzione esiste, euristicamente perché non c'è un modo facile di dimostrare il contrario.

Soluzione La seguente soluzione è un esempio mostrato a lezione da Gandini. Vedi te a volte il caso.
Mettiamo su $\mathbb{Z}$ la seguente topologia: $A \subseteq \mathbb{Z}$ è aperto se $A = \mathbb{Z}$ o $A \subseteq \mathbb{N}$. È semplice verificare che è una topologia. Allora la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ t.c. $f(n) = n - 1$ è l'esempio cercato. Banalmente è bigettiva, è semplice verificare che è continua ma l'inversa no.

Introduciamo adesso un concetto che permetterà di caratterizzare la continuità in spazi topologici in modo analogo a quanto fatto per gli spazi metrici.

Definizione 2.4.7. Sia (X, τ) uno spazio topologico fissato e $x_0 \in X$. Un insieme $U \subseteq X$ è un INTORNO di x_0 se $x_0 \in U^\circ$, o equivalentemente se esiste V aperto con $x_0 \in V \subseteq U$. L'insieme degli intorni di x_0 si denota con $\mathcal{I}(x_0)$.

Definizione 2.4.8. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ è detta *continua in* x_0 se per ogni intorno U di $f(x_0)$ esiste un intorno V di x_0 t.c. $f(V) \subseteq U$.

Appare dunque intuitivo il seguente risultato.

Teorema 2.4.9. f è continua $\Leftrightarrow$ è continua in ogni $x_0 \in X$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo f continua e $x_0 \in X$, sia inoltre U un intorno di $f(x_0)$. Per definizione di intorno esiste un aperto A con $f(x_0) \in A \subseteq U$, perciò $x_0 \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$, ma poiché f è continua abbiamo che $f^{-1}(A)$ è ancora un aperto, perciò ponendo $V = f^{-1}(U)$ abbiamo che V è un intorno di x_0 t.c. $f(V) \subseteq U$, che è quello che volevamo.
($\Leftarrow$) Supponiamo f continua in ogni punto di X e sia A un insieme aperto in Y. Per ogni $x \in f^{-1}(A)$, A è un intorno di $f(x)$. Ma dato che f è continua in ogni punto di X, esiste un intorno V_x di x t.c. $x \in V_x \subseteq f^{-1}(A)$. Per definizione di intorno, ciò significa che esiste un aperto A_x di X t.c. $x \in A_x \subseteq V \subseteq f^{-1}(A)$. Dunque dev'essere $f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} A_x$, quindi $f^{-1}(A)$ è un aperto in X per ogni A aperto in Y, il che equivale a dire che f è continua. $\square$

2.5 Ordinamento fra topologie, basi e prebasi

Vogliamo mettere un ordinamento parziale sulle topologie di un certo insieme fissato.

Definizione 2.5.1. Dato un insieme X su cui sono definite le topologie τ e τ', si dice che τ è MENO FINE di τ' se $\tau \subseteq \tau'$, cioè ogni aperto di τ è anche aperto di τ'. τ' si dice PIÙ FINE di τ.

Osservazione 2.5.2. Equivalentemente alla definizione sopra, si può dire che τ è meno fine di τ' se e solo se $Id : (X, \tau') \to (X, \tau)$ è continua.

Quando τ è meno fine di τ' scriveremo $\tau < \tau'$. Si noti che dalla definizione ogni topologia è meno fine di se stessa, cioè $\tau < \tau' \, \forall \, \tau$.

Esempio 2.5.3. $\tau_I < \tau_C < \tau_E < \tau_D$, $\quad \tau_I < \tau < \tau_D \, \forall \, \tau$.

Lemma 2.5.4. Intersezione arbitraria di topologie su X è ancora una topologia su X.

Dimostrazione. Siano τ_i, $i \in I$ topologie su X. Verifichiamo che $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ soddisfa gli assiomi di topologia.

(i) $\varnothing, X \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow \varnothing, X \in \tau$.
(ii) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1, A_2 \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$.
(iii) Siano $A_j, j \in J$ insiemi che stanno in τ.
$A_j \in \tau \, \forall \, j \in J \Rightarrow A_j \in \tau_i \, \forall \, i \in I, j \in J \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

□

Corollario 2.5.5. Data una famiglia $\tau_i, i \in I$ di topologie su X, esiste la più fine tra le topologie meno fini di ogni τ_i: è $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \tau_i$.

Corollario 2.5.6. Sia X un insieme, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, allora esiste la topologia meno fine tra quelle che contengono S. Tale topologia si dice *generata* da S e S si dice PREBASE della topologia. Se $\Omega = \{\tau \text{ topologia} \mid S \in \tau\}$ (che è non vuoto perché contiene almeno la topologia discreta), la topologia cercata è $\displaystyle\bigcap_{\tau \in \Omega} \tau$.

Definizione 2.5.7. sia (X, τ) uno spazio topologico fissato, una BASE di τ è un insieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ t.c. $\forall \, A \in \tau, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ t.c. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Ovvero $\mathcal{B}$ è una base se ogni aperto di τ può essere scritto come unione qualunque di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 2.5.8. Se X è uno spazio metrico, una base della topologia indotta sono le palle.

Definizione 2.5.9. (X, τ) si dice *a base numerabile* (o che soddisfa il SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ) se ammette una base numerabile.

Proposizione 2.5.10. Sia X un insieme senza topologia, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è base di una topologia su $X \Leftrightarrow$ valgono le seguenti:

(i) $X = \displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

(ii) $\forall A, A' \in \mathcal{B}, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ t.c. $A \cap A' = \bigcup_{i \in I} B_i$. Cioè ogni intersezione di una coppia di elementi di $\mathcal{B}$ può essere scritta come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Ovviamente, se $\mathcal{B}$ è la base di una topologia su X, l'insieme X deve essere unione di elementi di $\mathcal{B}$, inoltre tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ devono essere sottoinsiemi di X, da cui discende (i).
$A, A' \in \mathcal{B} \Rightarrow A, A' \in \tau \Rightarrow A \cap A' \in \tau$, per cui $A \cap A'$ deve poter essere esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}$, che è l'affermazione (ii).
($\Leftarrow$) Dobbiamo mostrare che l'insieme τ di tutte le possibili unioni di elementi di $\mathcal{B}$ soddisfa gli assiomi di topologia.
Chiaramente $\varnothing \in \tau$ come unione di un insieme vuoto di elementi di $\mathcal{B}$ e $X \in \tau$ per (ii). Se faccio l'unione arbitraria di insiemi ottenuti come unione di elementi di $\mathcal{B}$ ottengo ovviamente un insieme che è unione di elementi di $\mathcal{B}$.
Infine, $A, A' \in \tau \Rightarrow A = \bigcup\limits_{i \in I} B_i, A' = \bigcup\limits_{j \in J} B_j$ con $B_i, B_j \in \mathcal{B} \forall\, i \in I, j \in J$. Allora $A \cap A' = \left(\bigcup\limits_{i \in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right) = \bigcup\limits_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j)$, ma tutti i B_i e B_j stanno in $\mathcal{B}$, dunque per (ii) tutti i $B_i \cap B_j$ sono rappresentabili come unione di elementi di $\mathcal{B}$, perciò anche la loro unione, che è proprio $A \cap A'$, può essere scritta in quel modo e quindi sta in τ. $\square$

Proposizione 2.5.11. Siano X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ la prebase di una topologia τ su X. Allora:

(i) le intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$ sono una base di τ;
(ii) $A \in \tau \Leftrightarrow A$ è unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$.

Dimostrazione. Sicuramente, poiché τ è generata da S, $S \subseteq \tau$ e quindi anche tutte le intersezioni finite di elementi di S e le unioni arbitrarie di tali intersezioni devono stare in τ. Se mostriamo che sono sufficienti a definire una topologia, abbiamo finito.
Chiaramente il vuoto è l'intersezione di un insieme vuoto di insiemi e X c'è perché lo abbiamo aggiunto a mano.
Unione arbitraria di unioni arbitrarie di elementi di un insieme è ancora unione arbitraria di elementi di tale insieme.
Siano ora $A_1 = \bigcup\limits_{i \in I} B_i$, $A_2 = \bigcup\limits_{j \in J} B_j$ con tutti i B_i, B_j intersezioni finite di elementi di S. Allora

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j),$$

ma intersezione di due intersezioni finite di elementi di S è ancora un'intersezione finita di elementi di S, perciò $A_1 \cap A_2$ è ancora un'unione di intersezioni finite di elementi di S. Questo basta per dimostrare (i) e (ii) è una semplice riformulazione. $\square$

Proposizione 2.5.12. Sia $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ e S, $\mathcal{B}$ rispettivamente una prebase e una base di τ'. Allora sono equivalenti:

(i) f è continua;
(ii) $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni $A \in S$;
(iii) $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Dimostrazione. Poiché ogni base è una prebase, ((i) $\Leftrightarrow$ (ii)) $\Rightarrow$ ((i) $\Leftrightarrow$ (iii)).
(i) $\Rightarrow$ (ii) è ovvia, perciò resta da dimostrare (ii) $\Rightarrow$ (i).
Sia A un aperto di τ'. Per la proposizione 2.5, A si può scrivere come unione di intersezioni finite di elementi di S. Poiché la controimmagine di un'unione è l'unione delle controimmagini e la controimmagine di un'intersezione è l'intersezione delle controimmagini, la controimmagine di A è unione di intersezioni finite di controimmagini di elementi di S, ma queste controimmagini sono aperte, perciò un'unione di loro intersezioni finite è ancora aperta, perciò $f^{-1}(A)$ è aperto in X per ogni A aperto in Y, e questo equivale a dire che f è continua. $\square$

2.6 Assiomi di numerabilità

Nella definizione 2.5.9 abbiamo stabilito quando uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Vediamo gli altri due.

Definizione 2.6.1. $Y \subseteq X$ si dice DENSO se $\overline{Y} = X$.

Osservazione 2.6.2. Y è denso $\Leftrightarrow Y \cap A \neq \varnothing$ per ogni A aperto non vuoto.

Definizione 2.6.3. X si dice SEPARABILE (o che soddisfa il TERZO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ) se ammette un sottoinsieme denso numerabile.

Proposizione 2.6.4. Se X è a base numerabile, X è separabile.

Dimostrazione. Sia $\{B_i, i \in \mathbb{N}\}$ la base numerabile di X e scegliamo per ogni $i \in \mathbb{N}$ un elemento $x_i \in B_i$. Vogliamo mostrare che $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme denso numerabile di X.
Ovviamente è numerabile. Per dimostrare che è denso, mostriamo che interseca ogni aperto non vuoto.
Sia dunque A un aperto non vuoto di X, allora, dato che i B_i formano una base, A è esprimibile come unione di alcuni di essi, in particolare esiste i_0 t.c. $B_{i_0} \subseteq A$ e perciò $x_{i_0} \in B_{i_0} \Rightarrow x_{i_0} \in A$, dunque l'intersezione tra il nostro insieme e un aperto non vuoto non è mai vuota, come voluto. $\square$

Proposizione 2.6.5. Se (X, τ) è metrizzabile, X è separabile $\Leftrightarrow$ è a base numerabile.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Mostriamo che per ogni aperto A e per ogni $x \in A$, esiste una palla di centro un elemento del sottoinsieme denso numerabile e raggio un razionale positivo tutta contenuta in A. Allora tali palle formano una base numerabile.
Sicuramente esiste una palla di centro x e raggio $R \in \mathbb{R}^+$ tutta contenuta in A. Consideriamo la palla di centro x e raggio $R/3$, che è contenuta nella prima. Questa palla è in particolare un insieme aperto, dunque ha un elemento y in comune con il sottoinsieme denso numerabile. Scegliendo un razionale $R/3 < r < 2 \cdot R/3$ si ottiene che la palla di centro y e raggio r è tutta contenuta nella palla di centro x e raggio R, dunque è tutta contenuta in A, e contiene x, come voluto.
L'altra freccia discende dalla proposizione 2.6.4. □

Definizione 2.6.6. Un SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI per x_0 è una famiglia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall U \in \mathcal{I}(x_0)\, \exists V \in \mathcal{F}$ con $V \subseteq U$.

Esempio 2.6.7. Se X è uno spazio metrico, le palle centrate in x_0 do raggio $1/n$ al variare di n intero positivo sono un sistema fondamentale di intorni. In particolare, sono un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Definizione 2.6.8. X soddisfa il PRIMO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ se ogni $x_0 \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Fatto 2.6.9. Se X è metrizzabile X soddisfa il primo assioma di numerabilità. Ciò discende direttamente dall'esempio 2.6.7.

Proposizione 2.6.10. Il secondo assioma di numerabilità implica il primo e il terzo assioma di numerabilità. Discende dalla proposizione 2.6.5 che in spazi metrici vale anche che il terzo assioma di numerabilità implica il secondo assioma di numerabilità.

Dimostrazione. Supponiamo che X soddisfi il secondo assioma di numerabilità. Per la proposizione 2.6.4 otteniamo subito che soddisfa il terzo. Vogliamo adesso mostrare che soddisfa anche il primo. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile. Dato $x \in X$, consideriamo l'insieme $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$. Essendo un sottoinsieme di $\mathcal{B}$ è sicuramente numerabile e contiene solo insiemi aperti, cioè intorni di x. Mostriamo che è un sistema fondamentale di intorni per x.
Consideriamo un intorno U di x. Questo ha un sottoinsieme aperto $V \subseteq U$ contenente x, dunque V è esprimibile come unione di elementi di $\mathcal{B}$ e ce ne dev'essere uno che contiene x, che sta quindi nel nostro insieme ed è contenuto in V e quindi in U. Dunque, per ogni intorno U di x troviamo un elemento del nostro insieme di intorni di x contenuto in U, che è quello che dovevamo dimostrare. □

Proposizione 2.6.11.

(i) $A \subseteq X$ è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto;

(ii) sia $C \subseteq X$ un insieme generico, allora $x \in \overline{C}$ se e solo se ogni intorno di x interseca C.

Dimostrazione. (i) Sia A un insieme che è intorno di ogni suo punto, cioè per ogni $x \in A$ esiste un aperto $V_x \subseteq A$ che lo contiene. Allora vale che $A = \bigcup_{x \in A} V_x$. Poiché A è unione di apertiè aperto.

Viceversa sia A aperto. Allora ogni suo punto è interno ad esso.

(ii) Si ha che $\overline{C}$ è il complementare di $(X \setminus C)^\circ$. Dunque x appartiene a $\overline{C}$ se e solo se non è interno a $X \setminus C$, cioè se e solo se ogni suo intorno U non è tutto contenuto nel complementare di C. Questo accade quando ogni intorno di X interseca C in almeno un punto.

□

Esempio 2.6.12. La retta di Sorgenfrey. Su $X = \mathbb{R}$ consideriamo il seguente insieme:

$$\mathcal{B} = \{\, [a, b) \mid a < b\}.$$

Allora valgono le seguenti:

(i) $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ;

(ii) τ è più fine della topologia euclidea;

(iii) τ è separabile;

(iv) τ non è a base numerabile;

(v) τ non è metrizzabile;

(vi) τ è primo numerabile.

Dimostrazione. (i) Verifichiamo utilizzando la proposizione 2.5.10. Il primo punto vale in quanto $\mathbb{R}$ è coperto da intervalli del tipo $[-n, n)$ con n naturale. Inoltre dati i due intervalli $[a, b)$ e $[c, d)$, distinguo:

- $b \leq c$. Allora l'intersezione è vuota.
- $c < b$ e $b \leq d$. Allora l'intersezione è $[c, b)$.
- $c < b$ e $b > d$. Allora l'intersezione è $[c, d)$.

In ogni caso vale anche il secondo punto.

(ii) Voglio mostrare che ogni aperto di τ è anche aperto di τ_E. Sia allora (a, b) un aperto della base degli intervalli aperti della topologia euclidea. Si considerino gli aperti in τ della forma $[a + \frac{1}{n}, b)$ con n naturale positivo. L'unione di tutti questi è allora (a, b).

(iii) Si noti che $\mathbb{Q}$ è un denso numerabile.

(iv) Sia $\mathcal{D}$ una base di τ. Si noti che ogni intervallo del tipo $[x, x + 1)$, con x reale, può essere scritto come unione degli elementi della base solo se in $\mathcal{D}$ c'è un elemento D tale che $x \in D \subseteq [x, x + 1)$, da cui $\inf(D) = x$. Allora la mappa

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ D &\mapsto \inf(D) \end{aligned}$$

deve essere surgettiva. Dunque la base scelta non può essere numerabile.

(v) Semplice conseguenza dei punti precedenti e della proposizione 2.6.5.

(vi) Basta notare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{[x - 1/n, x + 1/n) | n \in \mathbb{Z}^+\}$ è una famiglia di intorni numerabile per x.

□

Esempio 2.6.13. Topologia di Zariski. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Definiamo una topologia τ_Z in $\mathbb{K}^n$ in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi i cui elementi si annullano in tutti i polinomi di una famiglia arbitraria (non vuota) $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ di polinomi a n variabili con coefficienti in $\mathbb{K}$. Dimostreremo che τ_Z è effettivamente una topologia, che è meno fine di quella euclidea quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Inoltre, quando $n = 1$ e per $\mathbb{K}$ generico, τ_Z coincide con la topologia cofinita.

Dimostrazione. Dimostreremo che i chiusi soddisfano le proprietà di topologia (per i chiusi, ovviamente), per passaggio al complementare si può concludere che τ_Z è una topologia.
Ovviamente il vuoto è chiuso perché la proprietà dei suoi elementi di annullarsi in un qualunque insieme di polinomi è sempre vera a vuoto, mentre $\mathbb{K}^n$ è chiuso perché tutti gli elementi si annullano nella famiglia formata dal solo polinomio nullo.
Siano ora C_1, C_2 due chiusi i cui elementi si annullano, per definizione, nei polinomi rispettivamente delle famiglie $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$. Consideriamo la famiglia $\mathcal{F}_{1,2} = \{f_1 \cdot f_2 | f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2\}$. Mostriamo che l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di $\mathcal{F}_{1,2}$ è proprio $C_1 \cup C_2$. Ovviamente se $x \in C_1 \cup C_2$ possiamo dire senza perdita di generalità che x si annulla in tutti i polinomi in $\mathcal{F}_1$, e quindi banalmente anche in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_{1,2}$. D'altro canto, se x si annulla in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_{1,2}$, si deve annullare almeno o in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_1$ o in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_2$. Se per assurdo così non fosse, esisterebbero $f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2$ t.c. $f_1(x) \neq 0 \neq f_2(x)$ e, poiché siamo in un campo, si avrebbe $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, assurdo. Dunque $x \in C_1 \cup C_2$.
Consideriamo adesso dei chiusi $C_i, i \in I$ definiti dalle famiglie $\mathcal{F}_i$. Mostriamo che $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ è l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di $\mathcal{F}_I = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$.
Se $x \in C$ allora $x \in C_i \, \forall \, i \in I$ e dunque si annulla in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_i$ per ogni i, quindi si annulla in tutti i polinomi della loro unione, che è proprio $\mathcal{F}_I$. Viceversa, se x si annulla in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_I$ allora si annulla in tutti i polinomi di ogni suo sottoinsieme, in particolare in tutti i polinomi di $\mathcal{F}_i \, \forall \, i \in I$, quindi $x \in C_i$ per ogni i da cui $x \in C$.
Poniamo ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Poiché i polinomi in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ sono funzioni continue per la topologia euclidea, la controimmagine di un aperto è a sua volta un

aperto. Per passaggio al complementare la controimmagine di un chiuso è a sua volta un chiuso. Ma allora, sia $\mathcal{F}$ una famiglia di polinomi, ho che, essendo $\{0\}$ chiuso in τ_E di $\mathbb{R}$, $f^{-1}(0)$ (qui si intende la controimmagine) è chiuso in τ_E di $\mathbb{R}^n$ per ogni $f \in \mathcal{F}$. Ma l'insieme dei punti che si annullano in tutti i polinomi di $\mathcal{F}$ può essere descritto come $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(0)$, che essendo intersezione di chiusi è chiuso in τ_E, quindi tutti i chiusi di τ_Z sono chiusi in τ_E, per passaggio al complementare la stessa cosa con gli aperti e dunque $\tau_Z < \tau_E$.
Sia adesso $\mathbb{K}$ generico e $n = 1$. Sia p un generico polinomio in $\mathbb{R}[x]$ e $\overline{\mathbb{K}}$ la chiusura algebrica di $\mathbb{K}$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, p ha al più $\deg p$ zeri in $\overline{\mathbb{K}}$, quindi a maggior ragione ne ha al più un numero finito in $\mathbb{K}$. Dunque i punti che si annullano in tutti i polinomi di una generica famiglia di polinomi sono finiti (limitati dal grado di un qualsiasi polinomio della famiglia), dunque i chiusi sono tutti finiti. Considerando invece un insieme finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{K}$, esso si annulla in tutti i polinomi dell'ideale generato da $(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_m)$, dunque è vero anche il viceversa, cioè che tutti i finiti sono chiusi, quindi in questo caso τ_Z coincide con la topologia euclidea. $\square$

Fatto 2.6.14. Se X non è numerabile, la topologia cofinita su X soddisfa solo il terzo assioma di numerabilità.

Dimostrazione. Per la proposizione 2.6.10, se dimostriamo che non soddisfa il primo otteniamo anche che non soddisfa il secondo. Sia dunque per assurdo $x_0 \in X$ e $\mathcal{F}$ un suo sistema fondamentale di intorni numerabile. Notiamo che per ogni $x \in X, x \neq x_0$ l'insieme $X \setminus \{x\}$ è un aperto, dunque esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in esso, cioè che non contiene x. Notiamo, per come è definita la topologia cofinita, che gli intorni, essendo sovrainsiemi di insiemi aperti, sono a loro volta aperti, cioè il loro complementare è finito. Ma dato che per ogni $x \in X \setminus \{x_0\}$ esiste un intorno di x_0 che non contiene x, posso scrivere $X\{x_0\}$, che è ancora un insieme numerabile, come l'unione dei complementari degli insiemi in $\mathcal{F}$, cioè un'unione numerabile di insiemi finiti, che è numerabile, da cui l'assurdo.
Per dire che soddisfa il terzo assioma, osserviamo che qualunque sottoinsieme infinito di X deve necessariamente intersecare in qualche punto il complementare di un insieme finito, e quindi, se consideriamo un qualunque insieme infinito di cardinalità numerabile, esso ha intersezione non nulla con tutti gli aperti ed è di conseguenza un denso numerabile. $\square$

Procediamo adesso a caratterizzare, negli insiemi che soddisfano il primo assioma di numerabilità, aperti, chiusi e continuità tramite successioni. Diamo prima una definizione.

Definizione 2.6.15. $l \in X$ è detto *limite* della successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se per ogni intorno U di l esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n \geq n_0$ si ha che $a_n \in U$.

Passiamo dunque alle varia caratterizzazioni. Nei tre enunciati seguenti, X sarà sempre uno spazio topologico primo numerabile.

Proposizione 2.6.16. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è aperto $\Leftrightarrow$ è aperto per successioni (si dice aperto per successioni?), cioè se per ogni successione (a_k) di elementi di x che converge a un limite $l \in A$ esiste k_0 t.c. per ogni $k \geq k_0$ si ha $a_k \in A$.

Dimostrazione. Notiamo prima il seguente fatto: se U_k, $n \in \mathbb{N}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile per x, definiamo $V_k = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_k$. Allora V_k, $k \in \mathbb{N}$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile tale che $V_{k+1} \subseteq V_k$.
($\Rightarrow$) Sia A un aperto e (a_k) una successione avente limite $l \in A$. Poiché A stesso è un intorno di l, si conclude che esiste k_0 t.c. $a_k \in A$ per ogni $k \geq k_0$ dalla definizione di limite.
($\Leftarrow$) Sia A un insieme aperto per successioni e prendiamo $x \in A$. Vogliamo mostrare che esiste un intorno U_x di x tutto contenuto in A. Se per assurdo così non fosse, allora ogni intorno di x avrebbe un elemento non contenuto in A. Consideriamo adesso un sistema fondamentale di intorni numerabile $V_k, k \in \mathbb{N}$, e lo prendiamo t.c. $V_{k+1} \subseteq V_k$. Per ciascuno di questi intorni, prendiamo un elemento $a_k \in V_k$ t.c. $a_k \notin A$, che esiste per ipotesi assurda (alcuni elementi possono anche ripetersi, non ha importanza). Allora avremmo, dato che il sistema di intorni è fondamentale e che $V_{k'} \subseteq V_k$ se $k' > k$ (segue da $V_{k+1} \subseteq V_k$), che la successione (a_k) sta definitivamente in ogni intorno di x e dunque ha limite x, ma è tutta fuori da A, assurdo perché A è aperto per successioni. Allora per ogni $x \in A$ esiste un intorno U_x t.c. $U_x \subseteq A$, ma questo ci dice anche che per ogni $x \in A$ esiste un aperto A_x t.c. $x \in A_x \subseteq U_x \subseteq A$, da cui otteniamo che $A = \bigcup_{x \in A} A_x$ è un'unione di aperti e dunque è aperto. $\square$

Proposizione 2.6.17. Un sottoinsieme $C \subseteq X$ è chiuso $\Leftrightarrow$ è chiuso per successioni, cioè per ogni successione (a_k) di elementi di C che converge a un limite l, anche $l \in C$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo C chiuso e sia (a_k) una successione di elementi di C con limite l. Per assurdo, $l \notin C$. Allora $l \in X \setminus C$, che è un insieme aperto, in particolare $X \setminus C$ è un intorno di l. Esiste dunque, per definizione di limite, un $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $k \geq k_0$ si abbia che $a_k \in X \setminus C$, ma $a_k \in C$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, assurdo. Questa freccia vale in tutti gli spazi topologici.
($\Leftarrow$) Supponiamo adesso che per ogni successione (a_k) di elementi di C avente limite l si abbia $l \in C$. Consideriamo un elemento $x \in X \setminus C$. Vogliamo mostrare che esiste un intorno U_x di x tutto contenuto in $X \setminus C$. Se così non fosse, per ogni intorno di x esisterebbe un elemento di C in esso contenuto. Poiché X è primo numerabile, consideriamo dunque un sistema fondamentale di intorni numerabile di x, sia esso V_k, $k \in \mathbb{N}$, e come nella dimostrazione precedente lo prendiamo t.c. $V_{k+1} \subseteq V_k$. Adesso scegliamo per ogni k un elemento $a_k \in V_k$ t.c.

$a_k \in C$, che esiste per l'ipotesi assurda. Notiamo che alcuni di questi elementi possono essere uguali, non ha importanza. Dato che abbiamo preso un sistema di intorni fondamentale, per ogni intorno U di x esiste un k_0 t.c. $V_{k_0} \subseteq U$. Ma poiché $V_k \subseteq V_{k_0}$ per ogni $k \geq k_0$ (facile conseguenza di $V_{k+1} \subseteq V_k$), ho che $a_k \in V_k \subseteq V_{k_0} \subseteq U$ per ogni $k \geq k_0$. Riassumendo, per ogni U intorno di x esiste un k_0 t.c. per ogni $k \geq k_0$ si ha $a_k \in U$, ma questo per definizione significa che x è il limite di (a_k), assurdo poiché $a_k \in C$ per ogni k mentre $x \in X \setminus C$, contro l'ipotesi iniziale che per tutte le successioni in C aventi limite anche il limite è in C. Dunque per ogni $x \in X \setminus C$ esiste un intorno $U_x \subseteq X \setminus C$, da cui si ha che esiste un aperto A_x con $x \in A_x \subseteq U_x \subseteq X \setminus C$. Ma allora, $X \setminus C = \bigcup_{x \in X \setminus C} A_x$ che un'unione di aperti, perciò $X \setminus C$ è aperto e di conseguenza C è chiuso. □

Proposizione 2.6.18. Sia Y uno spazio topologico (che non deve necessariamente soddisfare il primo assioma di numerabilità). Una funzione $f : X \to Y$ è continua in $\bar{x} \Leftrightarrow$ per ogni successione$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $\bar{x}$ la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{(x)})$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che f sia continua in $\bar{x}$ e consideriamo una generica successione (x_n) convergente a $\bar{x}$. Prendiamo un intorno U di $f(\bar{x})$ in Y. Dato che f è continua in $\bar{x}$, esiste un intorno V di $\bar{x}$ in X t.c. $f(V) \subseteq U$. Prendiamo, per ipotesi di convergenza, $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \in V$ per ogni $n \geq n_0$. Allora si ha anche, sempre per ogni $n \geq n_0$, $f(x_n) \in U$, da cui otteniamo che $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$. Questa freccia vale per X spazio topologico qualsiasi.
($\Leftarrow$) Supponiamo adesso che per ogni successione convergente in X la successione immagine converga all'immagine del limite in Y. Per assurdo, f non è continua in $\bar{x}$. Allora deve esistere un intorno U di $f(\bar{x})$ t.c. per ogni intorno V di $\bar{x}$ si ha $f(V) \nsubseteq U$. Prendiamo un sistema fondamentale di intorni numerabile di $\bar{x}$, sia esso V_n, $n \in \mathbb{N}$, e come nella dimostrazione precedente lo prendiamo t.c. $V_{n+1} \subseteq V_n$ per ogni n.
Prendiamo, per ogni n, un elemento $x_n \in V_n$ t.c. $f(x_n) \notin U$, che esiste per l'ipotesi assurda. Allora si mostra, come nella dimostrazione precedente, che la successione (x_n) tende a $\bar{x}$, ma le loro immagini $f(x_n)$ sono tutte fuori dallo stesso intorno U di $f(\bar{x})$, dunque la successione $(f(x_n))$ non tende a $f(\bar{x})$, assurdo per ipotesi. □

2.7 Sottospazi topologici

Definizione 2.7.1. Sia (X, τ) uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un sottoinsieme, cioè esiste una mappa iniettiva $i : Y \hookrightarrow X$ di inclusione. La topologia ristretta su Y da τ è la topologia meno fine che rende i continua.

Osservazione 2.7.2. Per avere i continua, serve che per ogni U aperto di τ, si abbia $i^{-1}(U)$ aperto nella topologia ristretta $\tau|_Y$. Poiché $i^{-1}(U) = U \cap Y$, si ha in effetti che per ogni aperto U di τ, $U \cap Y \in \tau|_Y$.

Siccome $\sigma = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$ è una topologia su Y che rende continua i e $\sigma \subseteq \tau|_Y$, deve valere l'uguaglianza in quanto $\tau|_Y$ è la meno fine con tali proprietà.
Questo ci permette anche di caratterizzare gli aperti (rispettivamente chiusi) di Y come l'intersezione degli aperti (rispettivamente chiusi) di X con Y.

Esercizio 2.7.3. Siano $A \subseteq Y \subseteq X$, allora la chiusura di A in Y con la topologia di sottospazio è $\overline{A} \cap Y$, dove con $\overline{A}$ s'intende la chiusura di A in X.

Osservazione 2.7.4. Vale anche che se $\mathcal{B}$ è base per τ, allora

$$\mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

è una base per $\tau|_Y$. La dimostrazione è analoga a quella fatta per le topologie.

Definizione 2.7.5. Sia (X, d) uno spazio metrico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme generico. La distanza d può essere ristretta a $Y \times Y$. In tal caso $d|_{Y \times Y}$, che verrà indicata anche come $d|_Y$ è una distanza su Y.

Proposizione 2.7.6. Nel setting della definizione precedente, siano τ la topologia indotta da d su X, $\tau|_Y$ la restrizione di τ a Y, e σ la topologia indotta da $d|_Y$ su Y. Allora $\tau|_Y = \sigma$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ rispettivamente basi per $\tau|_y$ e σ. Cioè:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{Y \ \cap \ \{x \in X \text{ t.c. } d(x, x_0) < r, \quad x_0 \in X, \ r \in \mathbb{R}^+\}\} \\ &= \{y \in Y \text{ t.c. } d(y, x_0) < r, \quad x_0 \in X, \ r \in \mathbb{R}^+\}\end{aligned}$$

$$\mathcal{D} \ = \ \{y \in Y \text{ t.c. } d(y, y_0) < r, \quad y_0 \in Y, \ r \in \mathbb{R}^+\}$$

Chiaramente $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$, quindi anche $\sigma \subseteq \tau|_Y$.
Inoltre, poiché le palle sono aperte, preso un $B \in \mathcal{B}$, per ogni $y \in B \cap Y$ esiste un $r_y > 0$ tale che $D_y = B(y, r_y)$ sia contenuto in B. per cui si ha che

$$B = \bigcup_{y \in B \cap Y} D_y.$$

Ma ogni D_y è un elemento della base $\mathcal{D}$, quindi ogni aperto di $\tau|_Y$ è un aperto di σ, concludendo l'ultima inclusione. $\square$

Definizione 2.7.7. Siano (X, τ) spazio topologico, $Y \subseteq X$. Allora Y si dice discreto in X se $\tau|_Y = \mathcal{P}(Y)$, cioè la topologia ristretta a Y è quella discreta.

Osservazione 2.7.8. Se Y è discreto in X, allora per ogni $y \in Y$ esiste un aperto U di X tale che $U \cap Y = \{y\}$.

Teorema 2.7.9. *Proprietà universale delle immersioni.* Sia X spazio topologico e $Y \subseteq X$ con $i : Y \hookrightarrow X$ mappa di immersione. Allora per ogni spazio topologico Z e per ogni funzione $g : Z \longrightarrow Y$, si ha che f è continua se e solo se $i \circ f$ è continua.

Dimostrazione. Poiché i è continua per la definizione della topologia su Y, e poiché la composizione di continue è continua, si ha che se f è continua, anche $i \circ f$ lo è.
Per l'altra implicazione, supponiamo $i \circ f$ continua e sia A un aperto di Y. Allora esiste U aperto di X tale che $U \cap Y = A$, e vale $i^{-1}(U) = A$. Allora $(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = f^{-1}(A)$ è aperto in Z. □

Teorema 2.7.10. *Universalità della proprietà universale.* La proprietà universale delle immersioni caratterizza in modo unico la topologia ristretta. Cioè dato (X, τ) spazio topologico con $Y \subseteq X$ e immersione $i : Y \hookrightarrow X$, $\tau|_Y$ è l'unica topologia su Y che rispetta la proprietà universale.

Dimostrazione. Sia σ una topologia su Y che rispetta la proprietà universale.

(i) Prendo come Z lo spazio $(Y, \tau|_Y)$ e come f l'identità su Y. Il diagramma della proprietà universale è allora il seguente:

$$\begin{tikzcd}
(Y, \tau|_Y) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "g=i"'] & (Y, \sigma) \arrow[d, hook, "i"] \\
& (X, \tau)
\end{tikzcd}$$

Per definizione g è continua, i è continua, quindi id è continua. Allora $\tau|_Y \subseteq \sigma$.

(ii) Questa volata prendo come Z lo spazio (Y, σ) mantenendo come f l'identità. Il diagramma risulta essere:

$$\begin{tikzcd}
(Y, \sigma) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "g=i"'] & (Y, \sigma) \arrow[d, hook, "i"] \\
& (X, \tau)
\end{tikzcd}$$

Per definizione id è continua, quindi lo è anche $g = i$ per la proprietà universale. Allora σ rende continua i, e dunque vale $\sigma \subseteq \tau|_Y$ per la definizione della restrizione di τ.

□

Definizione 2.7.11. Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione. Essa si dice APERTA se manda aperti in aperti e CHIUSA se manda chiusi in chiusi.

Osservazione 2.7.12. Sia f come sopra continua e bigettiva. Allora essa è un omeomorfismo se e solo se è aperta, e se solo se è chiusa.

Esempio 2.7.13. Si consideri l'insieme $\mathbb{Z}$ con la topologia $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{Z}$. Allora $f : n \longmapsto n - 1$ è bigettiva, continua, non aperta e non omeomerfismo.

Definizione 2.7.14. Sia $f : X \hookrightarrow Y$ una funzione iniettiva continua. Allora f si dice IMMERSIONE TOPOLOGICA se per ogni $A \subseteq X$ aperto esiste un aperto $U \subseteq Y$ tale che $A = f^{-1}(U)$.

Osservazione 2.7.15. Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua. Allora f è chiusa e iniettiva se e solo se è un'immersione chiusa, se e solo se f è immersione con $f(X)$ chiuso. Idem con gli aperti.

Osservazione 2.7.16. Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio. Allora:

(i) se X è N1 allora Y è N1;
(ii) idem con N2;
(iii) se X e separabile e metrizzabile allora Y è separabile.

Dimostrazione. I primi punti sono ovvi. Per quanto riguarda l'ultimo, se X è metrizzabile e separabile, è N1. Dunque anche Y è metrizzabile e N1, e quindi anche separabile. □

Esempio 2.7.17. *Il piano di Sorgenfrey.* Si prenda lo spazio $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia generata dai rettangoli del tipo $[a, b) \times [c.d)$. Esso è chiamto il piano di Sorgenfrey. Si consideri il sottospazio della retta $y = -x$. La topologia indotta è la discreta, infatti per ogni punto $(k, -k)$, il rettangolo $[k, k + 1) \times [-k, 1 - k)$ interseca la retta solo nel punto considerato. Dunque si è trovato uno spazio separabile (prendendo per esempio $\mathbb{Q}^2$ come denso numerabile) che ha un sottospazio non separabile.

2.8 Topologie prodotto

Definizione 2.8.1. Sia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di spazi topologici. Allora il PRODOTTO CARTESIANO della famiglia è:

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall\, \alpha \in A\}$$

Se $A = \{1, \dots, n\}$, allora:

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times \cdots \times X_n \ni (x_1, \dots, x_n) \qquad x_i := f(i)$$

Definizione 2.8.2. La TOPOLOGIA PRODOTTO su $X = \prod_{i\alpha \in A} X_\alpha$ è la topologia meno fine su X che rende continue tutte le proiezioni $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$.

Osservazione 2.8.3. X viene naturalmente con proiezioni:

$$p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha \qquad f \longmapsto f(\alpha) \qquad \forall\, \alpha \in A$$

Inoltre questa topologia è ben definita poiché l'intersezione di topologie è una topologia.

Proposizione 2.8.4. Una base per la topologia prodotto su X è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ aperto }, U_\alpha = X_\alpha \text{ tranne al più un numero finito di } \alpha \right\}$$

Dimostrazione. Sia $U_\alpha \subset X_\alpha$ aperto. Allora:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \prod_{\beta \in A} V_\beta \qquad \text{dove} \qquad V_\beta = \begin{cases} U_\alpha & \text{se } \beta\alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Dunque le proiezioni p_α sono continue se e solo se tutte le preimmagini di tale forma sono aperte nella topologia prodotto. Quindi:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset X \text{ aperto} \qquad \forall \text{ aperto } U_\alpha \subset X_\alpha$$

Siano $U_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \subset X_{\alpha_n}$ aperti, con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$. Allora:

$$X \supset \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_I}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \qquad \text{dove} \qquad V_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha_i} & \text{se } \alpha = \alpha_i \\ X_\alpha & \text{se } \alpha \neq \alpha_i \end{cases}$$

Dunque ogni elemento di $\mathcal{B}$ è aperto nella topologia prodotto su X (infatti l'intersezione di aperti è un aperto). Se $\mathcal{B}$ è base di una topologia abbiamo finito, in quanto per definizione la topologia prodotto è la meno fine che rende continue tutte le p_α. Altrimenti:

$$\left(\prod_{\alpha \in A} U_\alpha\right) \bigcap \left(\prod_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \prod_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap V_\alpha)$$

Dunque le intersezioni di elementi di $\mathcal{B}$ sono ancora in $\mathcal{B}$, che quindi è chiuso rispetto alle intersezioni finite, e perciò è una base. $\square$

Osservazione 2.8.5. Supponiamo $\mathcal{B}_\alpha$ base della topologia di X_α. Definiamo:

$$\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{\alpha \in A} B_\alpha \mid B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, B_\alpha = X_\alpha \text{ tranne al più un numero finito di } \alpha \right\}$$

Allora $\mathcal{B}'$ è una base per la topologia prodotto in X.

Corollario 2.8.6. Supponiamo A numerabile e $\mathcal{B}_\alpha$ base numerabile per X_α per ogni α. Allora $\mathcal{B}'$ è una base numerabile per X.

Dimostrazione. Per esercizio. □

Corollario 2.8.7. (analogo al precedente) Supponiamo A numerabile e che tutti gli X_α siano primo-numerabili. Allora la topologia prodotto è primo-numerabile.

Osservazione 2.8.8. In generale, se A non è numerabile i due corollari sono falsi.

Esempio 2.8.9. Prendiamo $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e consideriamo:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

Esso eredita una topologia prodotto che coincide con la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$. In particolare, la topologia euclidea ha per base le palle aperte. La topologia prodotto ha per base i parallelepipedi retti aperti:

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

In effetti tali parallelepipedi sono aperti nella topologia euclidea (e viceversa).

2.9 Proprietà delle topologie prodotto

Proposizione 2.9.1. $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ è un'applicazione aperta $\forall\, \alpha \in A$ (sempre prendendo $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$).

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ la base di X, allora p_α è aperta se e solo se $p_\alpha(B)$ aperto $\forall\, B \in \mathcal{B}$. Supponiamo $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ con $U_\alpha \subset X_\alpha$ aperto. Allora $p_\alpha(B) = U_\alpha$ è aperto per definizione. □

Osservazione 2.9.2. Le proiezioni p_α in generale non sono chiuse.

Esempio 2.9.3. Prendiamo $p_1 : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia Z l'iperbole equilatera, ovvero $Z = \{xy \mid xy = 1\}$. Allora Z è chiuso in quanto $Z = p^{-1}(0)$ con $p = xy - 1$, p continua e $0 \in \mathbb{R}$ è chiuso. Invece, $p_1(\{xy \mid xy = 1\}) = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ non è chiuso perché $\{0\}$ non è aperto.

Proposizione 2.9.4. Dato $\alpha \in A$ fissiamo $x_\beta \in X_\beta \ \forall \beta \neq \alpha$, e definiamo $X \supset X(\alpha) = \{f \in X \mid f(\beta) = x_\beta\}$. Allora la restrizione:

$$p_\alpha|_{X(\alpha)} : X(\alpha) \longrightarrow X_\alpha$$

è un omeomorfismo.

Dimostrazione. (i) $p_\alpha|_{X(\alpha)}$ è continua perche è restrizione di p_α, che è continua.

(ii) $p_\alpha|_{X(\alpha)}$ è bigettiva.

(iii) $p_\alpha|_{X(\alpha)}$ è aperta: gli aperti di $X(\alpha)$ sono:

$$\prod_{\beta \in A} U_\beta \cap X(\alpha)$$

dove

$$\prod_{\beta \in A} U_\beta = U := \{f \in X(\alpha) \mid f(\alpha) \in U_\alpha\}$$

D'altra parte $p_\alpha|_{X(\alpha)}(U) = p_\alpha(U) = U_\alpha$, che è aperto in X_α. □

Proposizione 2.9.5.(*Proprietà universale della topologia prodotto*)
La topologia prodotto ha la seguente proprietà: dato Z spazio topologico e $f : Z \longrightarrow X$ funzione arbitraria, allora f è continua se e solo se $p_\alpha \circ f$ è continua. Il diagramma risulta essere:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p_\alpha"] \\ Z \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "p_\alpha \circ f"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) La composizione di funzioni continue è una funzione continua.
($\Leftarrow$) Sia $U \subset X$ aperto. Vediamo se $f^{-1}(U)$ aperto. Ci basta vederlo per $U \in \mathcal{B}$, quindi:

$$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \qquad \text{con } U_\alpha \subset X_\alpha \text{ aperto}$$

Inoltre, $\exists A_0 \subset A$ finito tale che $U_\alpha = X_\alpha$ ($\forall \alpha \notin A_0$). D'altra parte:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\prod_{\alpha \in A} U_\alpha\right) = f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\right) = \bigcap_{\alpha \in A} (p_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

Dunque $f^{-1}(U)$ è un'intersezione finita di aperti. □

Teorema 2.9.6. La topologia prodotto è univocamente caratterizzata dalla proprietà universale.
Equivalentemente: Se τ_X è una topologia in X con la proprietà:
$\forall\, Z$ spazio topologico, $f : Z \longrightarrow X$, allora f è continua se e solo se $p_\alpha \circ f$ è continua.

Dimostrazione. Abbiamo visto che la topologia prodotto soddisfa la proprietà. Siano τ_X una topologia che soddisfa la proprietà, τ_α la topologia in X_α e τ_{pr} la topologia prodotto su X. Prendiamo $Z = (X, \tau_{pr})$, e otteniamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \tau_X) \arrow[dr, "p_\alpha"] & \\
(X, \tau_{pr}) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[rr, "p_\alpha"'] & & (X_\alpha, \tau_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Abbiamo mostrato che $p_\alpha : (X, \tau_{pr}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$ è continua. Allora per la proprietà è continua anche id_X, quindi $\tau_X \subset \tau_{pr}$, ovvero $\tau_X < \tau_{pr}$. Viceversa, per la minimalità di τ_{pr}, basta vedere che $p_\alpha : (X, \tau_X) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$ è continua $\forall\, \alpha \in A$. Prendiamo $Z = (X, \tau_X)$ e $f = \mathrm{id}_X$. Allora otteniamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \tau_X) \arrow[dd, "p_\alpha"] \\
(X, \tau_X) \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[dr, "p_\alpha"'] & \\
 & (X_\alpha, \tau_\alpha)
\end{tikzcd}$$

Da cui possiamo osservare che id_X è continua per la proprietà universale, e anche p_α lo è. $\square$

Diamo adesso alcune informazioni generali che verranno dimostrate più avanti, dopodiché vedremo alcune proprietà dei prodotti topologici nel caso degli spazi metrici.

(i) Il prodotto di una quantità numerabile di spazi metrici è metrizzabile. In generale, è falso se la quantità non è numerabile.
(ii) Il prodotto di una quantità al più continua di spazi separabili è separabile.

Proposizione 2.9.7. Sia (X, d) spazio metrico. Allora $\bar{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come:

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

è una distanza topologicamente equivalente a d. Dunque la topologia di uno spazio metrizzabile è indotta da una distanza ≤ 1.

Dimostrazione. Verifichiamo che $\bar{d}$ è una distanza.

(i) $\bar{d}(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \quad$ e $\quad \bar{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ è ovvio dalla definizione.
(ii) Anche la simmetria di $\bar{d}$ è ovvia dalla definizione
(iii) Vediamo che $\bar{d}(x,z) \leq \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z) \quad \forall\, x,y,z$. Se almeno una tra $\bar{d}(x,y)$ e $\bar{d}(y,z)$ è uguale a 1 la tesi è ovvia ($\bar{d}(x,z) \leq 1$). Altrimenti:

$$\bar{d}(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z)$$

Dunque $\bar{d}$ è una distanza. Come base della topologia associata ad una distanza si possono prendere le palle di raggio R, al variare di $R < 1$. Ma $\forall\, x \in X, \forall\, R < 1, B_d(x,R) = B_{\bar{d}}(x,R)$, perciò le topologie indotte coincidono. $\square$

Definizione 2.9.8. $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ di dice K-Lipschitz se $\forall\, K > 0, \forall\, x_1, x_2 \in X$:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq K d(x_1, x_2)$$

Inoltre, poiché $f(B(x, \frac{\varepsilon}{k}) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$, una funzione K-Lipschitz è continua.

Teorema 2.9.9. Sia $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ una famiglia di spazi metrici. Allora $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ è metrizzabile.

Dimostrazione. Costruiamo $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ distanza che induce τ_{pr} (la topologia prodotto). $\forall\, i \in \mathbb{N}$ posso supporre $d_i \leq 1$. Denotiamo con $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i punti di X, dove $x_i \in X_i$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$. Poniamo:

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \cdot d_i(x_i, y_i)$$

che è $< +\infty$ poichè $d_i \leq 1$. È facile verificare che d è una distanza. Sia ora τ_d la topologia indotta, e mostriamo che $\tau_{pr} = \tau_d$.
Se $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ è la proiezione su X_i, allora:

$$d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)) = d_i(x_i, y_i) = 2^i (2^{-i} \cdot d_i(x_i, y_i)) \leq 2^i d(x,y)$$

Quindi π_i è 2^i-Lipschitz, dunque è continua. Allora ogni proiezione è continua rispetto a τ_d, quindi $\tau_d > \tau_{pr}$. Vediamo adesso l'inclusione opposta ($\tau_d < \tau_{pr}$). Basta osservare che ogni palla di d è aperta in τ_{pr}. Sia $B = B_d(x,\varepsilon) \subseteq X$ e sia $y \in B$. Allora $\exists \delta > 0$ tale che $B(y,\delta) \subseteq B$. Dobbiamo allora mostrare che $\exists U$ aperto di τ_{pr} con $y \in U \subseteq B_d(y,\delta)$. Sia quindi $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \delta/2$. Poniamo:

$$U = \bigcap_{i=0}^{n_0} \pi_i^{-1} \left(B \left(y_i, \frac{\delta}{4} \right) \right) = B_{d_0} \left(y_0, \frac{\delta}{4} \right) \times \cdots \times B_{d_n} \left(y_n, \frac{\delta}{4} \right) \times X_{n_0+1} \times \cdots \times X_n \times \cdots$$

Se $z \in U, \quad d_i(x_i, y_i) < \dfrac{\delta}{4} \quad \forall\, i \leq n_0$, allora:

$$d(y,z) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) = \sum_{i=0}^{n_0} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) <$$

$$< \frac{\delta}{4}\left(\sum_{i=0}^{n_0} 2^{-i}\right) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\delta}{4}\cdot 2 + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Dunque $U \subseteq B(y,\delta)$. $\square$

Osservazione 2.9.10. In realtà potevamo usare una qualsiasi serie convergente a termini positivi al posto di $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}$.

Osservazione 2.9.11. Genericamente, se il prodotto più che numerabile di spazi metrici non è primo-numerabile allora non è metrizzabile.

Proposizione 2.9.12.(*Prodotti finiti*) Se (X,d) e (Y,d') sono spazi metrici, allora $X\times Y$ è metrizzabile, e ha topologia indotta da una qualsiasi delle seguenti distanze:

(i) $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}$
(ii) $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d(x_1,x_2)^2 + d'(y_1,y_2)^2}$
(iii) $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + d'(y_1,y_2)$

Dimostrazione. Si può verificare che d_1, d_2, d_∞ sono equivalenti, come già visto su $\mathbb{R}^n$. Inoltre, è facile vedere che inducono la topologia prodotto. $\square$

2.10 Assiomi di separazione

In un generico spazio topologico, vorremmo usare gli aperti per dire in qualche modo che punti o insiemi (che prenderemo chiusi) disgiunti sono separati anche a livello della topologia. Per questo richiediamo che gli spazi soddisfino alcune condizioni, i cosiddetti ASSIOMI DI SEPARAZIONE. Negli enunciati degli assiomi X è uno spazio topologico con una topologia data. Ecco i primi due.
(T1) $\forall\ x,y \in X, x \neq y$ esistono aperti $U,V \subseteq X$ con $x \in U \setminus V, y \in V \setminus U$;
(T2) $\forall\ x,y \in X, x \neq y$ esistono aperti $U,V \subseteq X$ con $U \cap V = \varnothing, x \in U, y \in V$.

Definizione 2.10.1. Se X gode di T2 è detto SPAZIO DI HAUSDORFF, o spazio topologico *separato*.

Chiaramente T2 $\Rightarrow$ T1.

Osservazione 2.10.2. In uno spazio T1, ogni punto è uguale all'intersezione di tutti i suoi intorni.

Proposizione 2.10.3. Uno spazio topologico X è T1 $\Leftrightarrow$ i punti sono chiusi.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo X sia T1 e sia $x \in X$. Per ogni $y \in X, y \neq x$ esistono U_y, V_y aperti che soddisfano le condizioni imposte da T1. Ma allora $x \notin V_y, y \in V_y$, da cui $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y\in X, y\neq x} V_x$, essendo unione di aperti è aperto, perciò il suo complementare, $\{x\}$, è chiuso, come voluto.

($\Leftarrow$) Supponiamo adesso che i punti di X siano chiusi. Allora, dati $x, y \in X$, $x \neq y$, scegliendo gli aperti $U = X \setminus \{y\}, V = X \setminus \{x\}$ si ha che questi soddisfano le condizioni di T1. $\square$

Osservazione 2.10.4. Segue facilmente dalla proposizione sopra che in uno spazio T1 tutti gli insiemi cofiniti sono aperti. D'altra parte, se tutti i cofiniti sono aperti i punti sono chiusi. Dunque, se abbiamo uno spazio topologico generico (X, τ), possiamo affermare che esso è T1 $\Leftrightarrow$ τ è più fine della topologia cofinita.

Proposizione 2.10.5. X è di Hausdorff $\Leftrightarrow$ $\Delta_X \subseteq X \times X$ è chiuso, dove $\Delta_x = \{(x, x) | x \in X\}$ è la *diagonale di* X.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$. Allora $x \neq y$, dunque esistono due aperti disgiunti U_x, V_y t.c. $x \in U_x, y \in U_y$, da cui $(x, y) \in U_x \times V_y$, che è un aperto della topologia prodotto. Dunque $X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{(x,y) \in X \times X \setminus \Delta_X} U_x \times V_y$ è unione di aperti, dunque è aperto e il complementare, Δ_X, è chiuso.
($\Leftarrow$) Supponiamo adesso Δ_X chiuso. Dati due punti $x, y \in X, x \neq y$ la coppia (x, y) sta nel complementare di Δ_X, che è aperto. Esiste allora un elemento della base della topologia prodotto su $X \times X$ tutto contenuto in $X \times X \setminus \Delta_X$ che contiene (x, y). Ma questo è della forma $U \times V$ per qualche U e V aperti con $x \in U, y \in V$ e dato che non interseca Δ_X, significa che non possiamo trovare lo stesso elemento in entrambi gli insiemi, cioè $U \cap V = \varnothing$. Segue allora che X è di Hausdorff. $\square$

Esempio 2.10.6. Un esempio di spazio di Hausdorff è un qualsiasi spazio metrizzabile. Lasciamo come semplice esercizio la dimostrazione che metrizzabile implica Hausdorff.
Un esempio, invece, di uno spazio T1 ma non T2, è un qualsiasi spazio infinito con la topologia cofinita. Lasciamo anche in questo caso la verifica di quanto appena detto come semplice esercizio.

Proposizione 2.10.7. Sottospazi e prodotti arbitrari di spazi topologici T1 (rispettivamente T2) sono ancora T1 (rispettivamente T2).

Dimostrazione. Per quanto riguarda i sottospazi, basta prendere l'intersezione degli aperti in questione con il sottospazio stesso ed è semplice verificare che rispettano ancora le condizioni, sia per T1 che per T2.
Per quanto riguarda i prodotti, ricordando la loro definizione come insiemi di funzioni, se due funzioni differiscono per almeno un elemento allora basta prendere gli aperti dati dall'assioma del caso (T1 o T2) per lo spazio topologico relativo a quell'elemento e tutto lo spazio per tutti gli altri elementi. $\square$

Proposizione 2.10.8. Supponiamo per assurdo $f \neq g$. Allora esiste $x \in X$ t.c. $f(x) \neq g(x)$. Questa proposizione segue dal fatto che se abbiamo più aperti allora di sicuro possiamo trovarne che rispettano le condizioni degli assiomi, anzi, magari ne troviamo anche più di prima. Sia dunque X un insieme e $\tau_1 < \tau_2$ topologie su X, se τ_1 è T1 (rispettivamente T2), allora anche τ_2 è T1 (rispettivamente T2).

Vediamo ora alcune applicazioni di questi primi due assiomi di separazione.

(i) $f : X \to Y$ continua, Y T2, $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subseteq X \times Y$ (Γ_f è il grafico di f), allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$;
(ii) $f, g : X \to Y$ continue, Y T2, allora $\{x \in X | f(x) = g(x)\} \subseteq X$ è chiuso in X;
(iii) $f : X \to X$ continua, X T2, allora $Fix(f) = \{x \in X | f(x) = x\} \subseteq X$ è chiuso in X;
(iv) $f, g : X \to Y$ continue, Y T2, $Z \subseteq X$ denso t.c. $f(z) = g(z) \, \forall \, z \in Z$, allora $f = g$;
(v) X T2, $\{x_n\}$ successione convergente, allora il limite è unico.

Dimostrazione. (i) Sia $(x, y) \in X \times Y \setminus \Gamma_f$. Allora $y \neq f(x)$ e poiché Y è T2 si ha che esistono due aperti disgiunti $U_{f(x)}, V_y$ t.c. $f(x) \in U_{f(x)}, y \in V_y$. Per la continuità di f, abbiamo che $U_x = f^{-1}(U_{f(x)})$ è un aperto contenente x t.c. $U_x \times V_y \subseteq X \times Y$ è un aperto della topologia prodotto contenete (x, y) che per quanto detto prima non interseca mai Γ_f. Allora $X \times Y \setminus \Gamma_f = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y \setminus \Gamma_f} U_x \times V_y$ è unione di aperti, cioè apertp, e il suo complementare, Γ_f, è chiuso.

(ii) Sia $X_{|f=g}$ l'insieme che vogliamo mostrare essere chiuso e $x \in X \setminus X_{|f=g}$. Allora $f(x) \neq g(x)$ e dato che Y è T2 esistono due aperti disgiunti U'_x, V'_x t.c. $f(x) \in U'_x, g(x) \in V'_x$.Supponiamo per assurdo $f \neq g$. Allora esiste $x \in X$ t.c. $f(x) \neq g(x)$. Per la continuità di f e g ho che $U_x = f^{-1}(U'_x), V_x = g^{-1}(V'_x)$ sono due aperti di X con intersezione non vuota (c'è almeno x), sia dunque A_x la loro intersezione. Questo è un intorno aperto di x t.c. per ogni $y \in A_x$ si ha $f(y) \neq g(y)$, per come è stato definito l'aperto. Allora $X \setminus X_{|f=g} = \bigcup_{x \in X \setminus X_{|f=g}} A_x$ è unione di aperti, cioè è aperto, dunque il suo complementare, $X_{|f=g}$, è chiuso.

(iii) Segue direttamente dalla precedente ponendo $Y = X$ e $g = id$.

(iv) Segue ancora una volta dalla seconda affermazione: poiché $Z \subseteq X_{|f=g}$, che è un chiuso, allora $X \subseteq \overline{Z} \subseteq X_{|f=g} \subseteq X \Rightarrow X_{|f=g} = X$.

(v) Supponiamo per assurdo che il limite non sia unico e siano $x \neq y$ due elementi di X a cui converge la successione. Poiché X è T2, esistono due aperti disgiunti U, V con $x \in U, y \in V$. Ma questi sono rispettivamente intorni di x e y, dunque per definizione di limite la successione deve essere definitvamente contenuta in entrambi gli insiemi, assurdo poiché essi sono disgiunti.

□

Vediamo adesso gli altri due assiomi di separazione.
(T3) Per ogni chiuso $C \subseteq X, x \in X \setminus C$, esistono aperti $U, V \subseteq X$ disgiunti con $x \in U, C \subseteq V$;
(T4) per ogni coppia di chiusi disgiunti $C, D \subseteq X$ esistono aperti $U, V \subseteq X$ disgiunti con $C \subseteq U, D \subseteq V$.

Osservazione 2.10.9. T4+T1 $\Rightarrow$ T3+T1 $\Rightarrow$ T2 $\Rightarrow$ T1. La dimostrazione è lasciata come utile esercizio al lettore.

Definizione 2.10.10. X è detto NORMALE se soddisfa T1+T4. X è detto REGOLARE se soddisfa T1+T3.

Osservazione 2.10.11. Possiamo riformulare la condizione T4 come segue: per ogni coppia di chiusi $C, D \subseteq X$ esiste $U \subseteq X$ aperto t.c. $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus D$.

Dimostrazione. Chiaramente se esiste un siffatto U possiamo prendere lui e l'aperto $X \setminus \overline{U}$ per soddisfare T4. Viceversa, siano U, V gli aperti dati dalla condizione T4. Poiché $X \setminus V$ è chiuso e contenuto in $X \setminus D$ abbiamo dunque che $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus D$. □

Proposizione 2.10.12. X s.t. metrizzabile $\Rightarrow$ X normale.

Dimostrazione. Dall'esempio 2.10.6 sappiamo già che X è T2, dunque anche T1. Resta da dimostrare che X è T4.
Siano dunque $C, D \subseteq X$ due chiusi disgiunti e sia d la distanza su X. Definiamo $d_C(x) = \inf_{y \in C} d(x, y)$. Mostriamo che $d_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C$. Una freccia è banale. Per l'altra, se esistesse $x \in X \setminus C$ t.c. $d_C(x) = 0$ basta prendere le palle di raggio $1/n$ per estrarre una successione in C che tende a $x \notin C$, asssurdo per la proposizione 2.6.17. Analogamente definiamo $d_D(x)$ e dimostriamo che $d_D(x) = 0 \Leftrightarrow x \in D$. Queste due funzioni così definite sono chiaramente continue. Definiamo adesso $f(x) = \dfrac{3d_C(x)}{d_C(x) + d_D(x)}$, che è chiaramente continua perché ottenuta da funzioni continue con operazioni che conservano la continuità. Inoltre è ben definita, poiché essendo D e C disgiunti non può mai essere che $d_C(x) = d_D(x) = 0$, perciò il denominatore è sempre positivo. Osserviamo ora che $f : X \to [0, 3], C = f^{-1}(0), D = f^{-1}(3)$. Inoltre, $[0, 3]$ ha la topologia di sottospazio, perciò $[0, 1), (2, 3]$ sono due aperti disgiunti e per la continuità di f anche le loro controimmagini sono aperti disgiunti che contengono rispettivamente C e D, che è quello che serve per soddisfare T4. □

Proposizione 2.10.13. Sottospazi e prodotti arbitrari di T3 sono T3; sottospazi chiusi di T4 sono T4; in generale, sottospazi arbitrari di T4 o prodotti arbitrari di T4 non sono T4.

Dimostrazione. Sia X T3 e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme con la topologia di sottospazio. Siano adesso $C \subseteq Y$ un chiuso e $x \in Y \setminus C$. Per definizione della topologia di sottospazio, $C = Y \cap D$ dove D è un chiuso di X. Ovviamente $x \notin D$, altrimenti, dato che $x \in Y$, avremmo $x \in Y \cap D = C$. Allora esistono due aperti disgiunti U, V di X t.c. $x \in U, D \subseteq V$. Allora $U' = U \cap Y, V' = V \cap Y$ sono due aperti disgiunti di Y che soddisfano le condizioni per avere T3. Per quanto riguarda T4, questa dimostrazione non funziona, dato che due chiusi disgiunti in Y potrebbero non essderlo in X. Se però Y fosse chiuso in X, allora i due chiusi di Y sarebbero definiti a loro volta come intersezione di Y, che è chiuso in X, e un altro chiuso di X, quindi sarebbero a loro volta chiusi in X e potremmo ripetere la dimostrazione come sopra. Serve un esempio per dire che in generale non si può fare: pensateci.
Passiamo adesso ai prodotti. Sia $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ dove X_α è T3 per ogni $\alpha \in A$ e siano $C \subseteq X$ un chiuso, $x \in X \setminus C$. Indichiamo con x_α la proiezione di x su X_α. Allora esiste un elemento B della base che contiene x e tutto contenuto in $X \setminus C$, perciò il suo complementare è un chiuso che contiene C. Sia $S \subseteq A$ il sottoinsieme finito per cui, se scriviamo $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$, abbiamo che $U_\alpha = X_\alpha \Leftrightarrow \alpha \notin S$. Allora grazie alla proprietà T3 di ogni X_α troviamo, per ogni $\alpha \in S$, due aperti disgiunti V_α, V'_α t.c. $x_\alpha \in V_\alpha, X_\alpha \setminus U_\alpha \subseteq V'_\alpha$. Ponendo dunque $U = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha, V = \prod_{\alpha \in A} V'_\alpha$ (dove se $\alpha \notin S$ allora $V_\alpha = V'_\alpha = X_\alpha$) è facile verificare che questi sono due aperti disgiunti che separano x e C, dunque X è T3. Un esempio di prodotto di T4 non T4 sarà visto tra poco. $\square$

Riassumendo, metrizzabile $\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow}$ normale $\overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$ regolare $\overset{\text{(iii)}}{\Rightarrow}$ T2. Vediamo dei controesempi che dimostrano che non valgono le implicazioni inverse.

Esempio 2.10.14.

(i) retta di Sorgenfrey;
(ii) piano di Sorgenfrey;
(iii) la topologia su $\mathbb{R}$ generata dagli intervalli (a, b) e dagli insiemi $(a, b) \setminus K$ dove $K = \{1/n | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, detta topologia $\mathbb{R}_K$.

Dimostrazione. Per quanto visto nell'esempio 2.6.12 sappiamo già che la retta di Sorgenfrey non è metrizzabile. Mostriamo adesso che è normale. Essendo più fine della topologia euclidea, sicuramente è T1. Per dire che è T4, siano $C, D \subseteq \mathbb{R}$ due chiusi disgiunti. Ovviamente $C \subseteq \mathbb{R} \setminus D, D \subseteq \mathbb{R} \setminus C$ e questi ultimi sono aperti. Dunque per ogni $c \in C$ esiste un $r_c > 0$ t.c. $[c, c + r_c) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$ e analogamente per ogni $d \in D$ esiste un $r_d > 0$ t.c. $[d, d + r_d) \subseteq \mathbb{R} \setminus C$. Siano dunque $U = \bigcup_{c \in C} [c, c + r_c), V = \bigcup_{d \in D} [d, d + r_d)$. Questi sono ovviamente aperti in quanto unioni di aperti e $C \subseteq U, D \subseteq V$. Se per assurdo non fossero disgiunti, allora esisterebbero $c \in C, d \in D$ t.c. $[c, c + r_c) \cap [d, d + r_d) \neq \varnothing$. Senza perdita di generalità $c < d$, allora dev'essere $d \in [c, c + r_c) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$, assurdo.

Ancora una volta la topologia è T1 in quanto più fine della topologia euclidea. Inoltre è T3: siano infatti $C \subseteq \mathbb{R}^{\not\models}$ un chiuso e $x \notin C$. Allora esiste un intorno aperto di x della forma $[a, b) \times [c, d)$ tutto contenuto in $\mathbb{R} \setminus C$. È un semplice esercizio verificare che tale intorno è anche chiuso, quindi ponendo $U = [a, b) \times [c, d)$ e V il suo complementare troviamo due aperti disgiunti t.c. $x \in U, C \subseteq V$. Per mostrare che non è T4, dimostriamo prima un lemma.

Lemma 2.10.15. Siano X T4 e separabile e $D \subseteq X$ chiuso e discreto (cioè t.c. la topologia di sottospazio è quella discreta). Allora $|D| \subseteq |\mathbb{R}|$.

Dimostrazione. Sia $Q \subseteq X$ un denso numerabile e sia $S \subseteq D$. S è chiuso in D, ma ciò significa che è intersezione di un chiuso in X e di D, che è chiuso in X, quindi S è chiuso in X, e analogamente $D \setminus S$. Esistono allora due aperti disgiunti U_S, V_S t.c. $S \subseteq U_S, D \setminus S \subseteq V_S$. Definiamo $f : \mathcal{P}(D) \to \mathcal{P}(Q)$ di modo che $f(S) = Q \cap A_S$. f è iniettiva: siano infatti $S, T \subseteq D$ disgiunti e supponiamo senza perdita di generalità $S \setminus T \neq \varnothing$. Notiamo che $S \setminus T \subseteq D \setminus T \subseteq V_T$, perciò $S \setminus T \subseteq U_S \cap V_T$, quindi $U_S \cap V_T \neq \varnothing$, ma essendo intersezione di due aperti è un aperto, perciò esiste $x \in Q$ t.c. $x \in U_S \cap V_T \Rightarrow x \in f(S)$, ma allora $x \notin U_T \Rightarrow x \notin Q \cap U_T = f(T)$, il che vuol dire che f è iniettiva. Perciò $|D| < |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(Q)| = |\mathbb{R}|$ poiché Q è numerabile. □

Adesso basta ricordare dall'esempio 2.7.17 che la retta $y = -x$, che ha la cardinalità del continuo, ha come topologia di sottospazio quella discreta. È facile mostrare che il piano di Sorgenfrey è separabile, quindi segue facilmente dal lemma che non è T4.

Osservazione 2.10.16. Il piano di Sorgenfrey è un esempio di prodotto di T4 che non è T4.

Essendo la topologia considerata più fine della topologia euclidea, sappiamo già che è T2. Mostriamo che non è T3. Si verifica facilmente che K è chiuso e $0 \notin K$. Se esistessero due aperti disgiunti che li separano, quello di 0 sarebbe necessariamente unione di intorni della forma $(a, b) \setminus K$. Sia quindi, senza perdita di generalità, $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus K, \varepsilon > 0$ uno di questi intorni. Consideriamo allora $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ t.c. $1/n < \varepsilon$. Allora qualunque intorno contenente $1/n$ interseca banalmente $(-\varepsilon, \varepsilon)$, dunque due aperti disgiunti che separino 0 e K non possono esistere. □

Teorema 2.10.17. Se X è regolare a base numerabile, allora X è normale.

Dimostrazione. Essendo X regolare, ovviamente è T1. Dobbiamo verificare che sia T4. Siano quindi $C, D \subseteq X$ due chiusi disgiunti e $\mathcal{B}$ una base numerabile. Per ogni $c \in C$ esiste un aperto U_c t.c. $c \in U_c \subseteq \overline{U_c} \subseteq X \setminus D$. Analogamente possiamo scegliere un V_d per ogni $d \in D$ che li separi allo stesso modo da C. Notiamo che possiamo prendere $U_c, V_d \in \mathcal{B}$ per ogni $c \in C, d \in D$. Definiamo adesso $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ come $\{U_c \in \mathcal{B} | \overline{U_c} \cap D = \varnothing\}$ e analogamente $\mathcal{D}$. Per quello che abbiamo detto prima, $\mathcal{C}$ ricopre C e $\mathcal{D}$ ricopre D. Essendo $\mathcal{B}$ numerabile, possiamo scrivere $\mathcal{C} = \{U_n\}, \mathcal{D} = \{V_n\}$. Siano adesso $A_n = U_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{V_j}, B_n = V_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{U_j}$. Si può notare facilmente che sono tutti aperti, dunque $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ sono aperti, inoltre, dato che gli U_n ricoprono C mentre $C \cap \overline{V_n}$ per ogni n, abbiamo $C \subseteq A$ e analogamente $D \subseteq B$. È un semplice esercizio verificare che $A_n \cap B_n = \varnothing$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, dunque A e B sono due aperti disgiunti contenenti rispettivamente C e D, da cui segue che X è T4. $\square$

Teorema 2.10.18. Teorema di Urysohn: se X è regolare a base numerabile, allora X è metrizzabile.

Dimostrazione. Non verrà dimostrato in questo corso. $\square$

2.11 Quozienti topologici

Definizione 2.11.1. Siano X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza definita su X. Vengono allora indotti un insieme $Y = X/\sim$ e una proiezione $\pi\colon X \longrightarrow Y$ che manda ogni punto nella sua classe di equivalenza. La topologia quoziente definita su Y è la topologia più fine che rende π continua.

Definizione 2.11.2. Data la proiezione π come sopra, un sottoinsieme $Z \subseteq X$ si dice saturo se è unione di classi di equivalenza per $\sim$. Cioè $Z = \pi^{-1}\pi(Z)$.

Osservazione 2.11.3. Nel setting di prima, detta τ_Y la topologia quoziente, si ha che

$$A \in \tau_Y \iff \pi^{-1}(A) \text{ aperto} \iff A = \pi(B) \text{ con } B \text{ aperto saturo.}$$

Teorema 2.11.4. *Proprietà universale del quoziente.* Siano X un insieme con una relazione di equivalenza $\sim$ e una proiezione π. Allora la topologia quoziente è l'unica topologia per cui per ogni spazio topologico Z e funzione $f\colon X/\sim \longrightarrow Z$, f è continua se e solo se $f \circ \pi$ è continua.

Dimostrazione. Il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ X/\sim \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Come prima cosa verifichiamo che la topologia quoziente ha la proprietà universale. Un'implicazione è facile: se f e π sono continue, anche la loro composizione lo è. Viceversa sia $f \circ \pi$ continua, e si prenda un aperto in Z. Allora $(f \circ \pi)^{-1}(A) = (\pi^{-1} \circ f^{-1})(A)$ è aperto, e dunque anche $f^{-1}(A)$ è aperto.
Mostriamo ora che se una certa topologia σ gode della proprietà universale, allora è uguale alla topologia quoziente τ.
Si prenda $Z = (X/{\sim}, \tau)$ e f l'identità. Allora poiché π è continua con la topologia τ, si ha che

$$\mathrm{id}\colon X/{\sim}, \sigma \longrightarrow X/{\sim}, \tau$$

è dunque σ è più fine di τ.
Viceversa, prendendo per Z lo stesso insieme ma dotato della topologia σ e $f = \mathrm{id}$, si ottiene che π è continua anche con σ. Per definizione di topologia quoziente, allora τ è più fine di σ. □

Definizione 2.11.5. Una funzione $f\colon X \longrightarrow Y$ continua e surgettiva si chiama identificazione quando per ogni $A \subseteq Y$, A è aperto se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto.

Osservazione 2.11.6. Sia f una bigezione continua. Sono equivalenti:

(i) f è immersione;
(ii) f è omeomorfismo;
(iii) f è identificazione.

Osservazione 2.11.7. Sia f continua surgettiva. Allora:

(i) Se f è aperta, è identificazione.
(ii) Se f è chiusa, è identificazione.
(iii) Ogni altra implicazione è abusiva.

Proposizione 2.11.8. Sia $f\colon X \longrightarrow Y$ un'identificazione. Allora la funzione $\bar{f}$ definita dal seguente diagramma commutativo è un omeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/{\sim} \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per come è definita $\bar{f}$, essa è ben definita e bigettiva. Poiché f è continua, per la proprietà universale, anche $\bar{f}$ è continua. Voglio mostrare che $\bar{f}$ è aperta. Sia allora A un aperto di $X/{\sim}$. Si ha che $\bar{f}(A) = (f \circ \pi^{-1})(A)$ è aperto se e solo se $(f^{-1} \circ f \circ \pi^{-1})(A)$ è aperto perché f è identificazione. Poiché π è la proiezione sulla topologia quoziente, A è aperto. □

Osservazione 2.11.9. Si ha che $\bar{f}$ è un omeomorfismo se e solo se f è un'identificazione.

Definizione 2.11.10. Sia $A \subseteq X$. Si definisce il quoziente

$$X/_A = X/_\sim$$

dove $x \sim x'$ se e solo se $x = x'$ oppure $x, x' \in A$. Cioè in questo quoziente A "collassa" in un punto.

Esempio 2.11.11. Il disco quozientato sulla sua frontiera è isomorfo alla sfera. Cioè $D^n/\partial D^n \cong S^n$.

Dimostrazione. Basta verificare che la funzione

$$\begin{aligned} f \colon D^n/\partial D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longrightarrow (2\|x\|^2 - 1,\ x\sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{aligned}$$

sia un omeomorfismo. Sicuramente si ha la continuità. Per l'iniettività si noti che il primo termine distingue i vettori con norma diversa, mentre il secondo distingue i vettori con direzione diversa, con l'eccezione dei punti di norma 1, che però sono identificati. Infine la funzione è surgettiva, in quanto l'immagine è composta effettivamente di vettori di lunghezza unitaria. □

Esempio 2.11.12. Sia

$$X = \{x \geq 0\} \cup \{y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e sia $\pi \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sul primo elemento. Allora π è un'identificazione ma non è chiusa né aperta.

Esempio 2.11.13. Sia

$$A = \{(x, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e sia $X = \mathbb{R}^2/A$. Allora X non è primo numerabile.

2.12 Quozienti per azioni di gruppi

Consideriamo X spazio topologico e G gruppo. Diciamo che G agisce su X tramite omeomorfismi, cioè:

$$G \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$$

è un omomorfismo di gruppi. Consideriamo allora $X/_G$ con la relazione di equivalenza di essere nella stessa orbita, cioè:

$$x \sim y \iff \exists g \in G : g \cdot x = y$$

In altre parole, le classi di equivalenza sono le orbite di G in X.

Esempio 2.12.1. $\mathbb{Z}$ agisce su $\mathbb{R}$ per traslazione:

$$n \cdot x = n + x$$

Più in generale, $\mathbb{Q}$ agisce su $\mathbb{R}$ allo stesso modo.

Osservazione 2.12.2.(*Osservazione notazionale*) Il quoziente ${}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$ può indicare due cose ben distinte:

(i) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ sottoinsieme $\Longrightarrow {}^{\mathbb{R}}/_{\mathbb{Z}}$ bouquet infinito numerabile di circonferenze
(ii) $\mathbb{Z}$ agisce su $\mathbb{R}$ come nell'esempio sopra $\Longrightarrow S^1$

Proposizione 2.12.3. $\mathbb{Z}$ agisce su $\mathbb{R}$ come nell'esempio sopra $\Longrightarrow S^1$

Dimostrazione. Consideriamo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Se vediamo f identificazione, allora abbiamo finito in quanto le fibre di f sono proprio le orbite di $\mathbb{Z}$. Sappiamo inoltre che f è continua e surgettiva, vediamo allora che è aperta. Ci basta guardare $f(I)$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto. Sia $a \in \mathbb{R}$ e osserviamo che, preso $I = (a, a+1)$ si ha che:

$$f|_{(a,a+1)} : (a, a+1) \longrightarrow S^1 \smallsetminus \{f(a)\}$$

è invertibile con inversa continua. Dunque $f|_I$ è un omeomorfismo. Segue allora che $f|_I$ è aperta per ogni aperto A. Infatti se A è contenuto in un intervallo I di ampiezza 1 allora $f(A)$ è aperto per l'osservazione. Altrimenti, più in generale, possiamo scrivere $A = \bigcup_{j \in J} A_j$ dove A_j è un aperto contenuto in intervalli di ampiezza 1. Allora:

$$f(A) = f\left(\bigcup A_j\right) = \bigcup f(A_j)$$

che è aperto in quanto unione di aperti. □

Proposizione 2.12.4. Sia G gruppo che agisce su X spazio topologico (per omeomorfismi). Allora la proiezione al quoziente $\pi : X \longrightarrow {}^{X}/_{G}$ è aperta. Inoltre, se G è finito, π è anche chiusa.

Dimostrazione. Se $U \subset X$ è un aperto, allora $\pi(U) = \pi\left(\bigcup_{g \in G} gU\right)$ è un aperto saturo. Inoltre, poiché G agisce tramite omeomorfismi, gU è aperto $\forall\, g \in G$. Se G è finito, il ragionamento è analogo per i chiusi:

$$C \subset X \text{ chiuso } \Longrightarrow f(C) = f\left(\bigcup_{g \in G} gC\right) \Longrightarrow f(C) \text{ chiuso}$$

□

Osservazione 2.12.5. Se G è infinito, in generale non è vero che π è chiusa.

Osservazione 2.12.6. Siano $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ identificazioni per $i = 1, 2$. Allora l'applicazione:

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y_1 \times Y_2$$

è continua e surgettiva, ma in generale non è un'identificazione. Inoltre il prodotto cartesiano di identificazioni aperte è un'identificazione aperta.

Proposizione 2.12.7. Sia X spazio di Hausdorff e G gruppo che agisce su X tramite omeomorfismi. Sia $K = \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\} \subset X \times X$. Allora ${}^{X}\!/_{G}$ è di Hausdorff se e solo se K è chiuso in $X \times X$.

Dimostrazione. In altre parole, possiamo riformulare l'enunciato come:

$$ {}^{X}\!/_{G} \text{ Hausdorff } \iff \Delta_{{}^{X}\!/_{G}} \subset {}^{X}\!/_{G} \times {}^{X}\!/_{G} \text{ chiusa}$$

Sia $\pi : X \longrightarrow {}^{X}\!/_{G}$ la proiezione, allora π è un'identificazione aperta. Ma allora $\pi \times \pi$ è a sua volta identificazione aperta. Dunque $\Delta_{{}^{X}\!/_{G}}$ è chiusa se e solo se $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{{}^{X}\!/_{G}}) \subset X \times X$ è chiuso. D'altra parte $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{{}^{X}\!/_{G}}) = K$. $\square$

2.13 Ricoprimenti

Sia X spazio topologico e $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$.

Definizione 2.13.1. $\mathcal{U}$ è un RICOPRIMENTO DI X se $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Se tutti gli $U \in \mathcal{U}$ sono aperti [chiusi] allora diremo che $\mathcal{U}$ è un RICOPRIMENTO APERTO [RICOPRIMENTO CHIUSO].

Definizione 2.13.2. $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ è detto FAMIGLIA LOCALMENTE FINITA se $\forall x \in X, \exists V \in I(x)$ tale che $V \cap U \neq \varnothing$ solamente per un numero finito di $U \in \mathcal{U}$.

Esempio 2.13.3. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$ è un ricoprimento chiuso localmente finito.

Definizione 2.13.4. $\mathcal{U}$ ricoprimento di X è detto FONDAMENTALE se, dato $A \subset X$, allora:

$$A \text{ aperto in } X \iff A \cap U \text{ aperto in } U \qquad \forall U \in \mathcal{U}$$

(Equivalentemente $\quad C$ chiuso in $X \iff C \cap U$ chiuso in $U \qquad \forall U \in \mathcal{U}$)

Esempio 2.13.5.

(i) $\mathcal{U}$ ricoprimento aperto $\Longrightarrow \mathcal{U}$ ricoprimento fondamentale.

(ii) $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$ è un ricoprimento chiuso. D'altra parte però, $A \cap \{x\}$ è aperto in $\{x\}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$, quindi il ricoprimento non è fondamentale.

Proposizione 2.13.6. Sia $\mathcal{U}$ ricoprimento fondamentale di X, e sia $f : X \longrightarrow Y$ funzione tra spazi topologici. Allora f è continua se e solo se $f|_U$ è continua $\forall\, U \in \mathcal{U}$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) È ovvia.
($\Leftarrow$) Sia $B \subseteq Y$ un aperto, allora, dato che $\mathcal{U}$ è un ricoprimento, $f^{-1}(B) = \displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}} f|_U^{-1}(B)$, e dato che $\mathcal{U}$ è fondamentale questa è un'unione di aperti, dunque un aperto. $\square$

Enunciamo ora un lemma che ci permetterà di dimostrare un teorema particolarmente importante.

Lemma 2.13.7. Un'unione localmente finita di chiusi è chiusa.

Dimostrazione. Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ una famiglia localmente finita di chiusi. $\forall\, x \in X$, $\exists U_x \subseteq X$ aperto, con $x \in U_x$ che interseca solo un numero finito di C_i. Sia $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x\in X}$ il ricoprimento aperto così definito. $\mathcal{U}$ è fondamentale, per cui basta vedere che $\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) \cap U_x$ è chiuso in U_x, $\forall\, x \in X$. Ma, fissato x, esistono $i_1, \dots, i_n$ tali che:

$$U_x \cap \left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = U_x \cap (C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n})$$

che è chiuso in U_x in quanto $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n}$ è unione finita di chiusi. $\square$

Corollario 2.13.8. In generale, se $\{Y_i\}_{i\in I}$ è una famiglia localmente finita, allora:

$$\overline{\bigcup_{i\in I} Y_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{Y_i}$$

Dimostrazione.

$$Y_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} Y_i \Longrightarrow \overline{Y_{i_0}} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} Y_i} \quad \forall\, i_0 \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i\in I} Y_i}$$

Per il viceversa, si mostra prima che se gli Y_i sono localmente finiti, anche gli $\overline{Y_i}$ lo sono. Dunque, per il lemma appena visto, $\bigcup_{i\in I} \overline{Y_i}$ è un chiuso che contiene $\bigcup_{i\in I} Y_i$. Per cui:

$$\overline{\bigcup_{i\in I} Y_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{Y_i}$$

$\square$

Possiamo adesso enunciare e dimostrare il seguente teorema:

Teorema 2.13.9. Un ricoprimento chiuso localmente finito è fondamentale.

Dimostrazione. Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento chiuso localmente finito, e sia $Z \subseteq X$ tale che $Z \cap C_i$ sia chiuso in C_i, $\forall\, i \in I$. Poiché C_i è chiuso, e un chiuso di un chiuso di X è chiuso in X, allora $Z \cap C_i$ è chiuso in X $\forall\, i \in I$. Dunque la famiglia $\{Z \cap C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia localmente finita di chiusi. Allora, per il lemma, $Z = \bigcup_{i\in I}(Z \cap C_i)$ è chiuso in X, da cui la tesi. □

2.14 Connessioni

Definizione 2.14.1. Uno spazio topologico X si dice SCONNESSO se vale una delle seguenti condizioni (equivalenti):

(i) $X = A \sqcup B$ (cioè $X = A \cup B$ con $A \cap B = \varnothing$) con A, B aperti non vuoti. Allora in particolare A e B sono anche chiusi, in quanto sono uno il complementare dell'altro.

(ii) $X = A \sqcup B$ con A, B chiusi non vuoti

(iii) $\exists A \subseteq X, A \neq \varnothing, A \neq X, A$ è sia aperto che chiuso

Definizione 2.14.2. X si dice CONNESSO se non è sconnesso. In altre parole, se:
$\forall\, A \subseteq X, A \neq \varnothing, A$ aperto e chiuso, allora $A = X$.

Esempio 2.14.3. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso in quanto unione degli aperti $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Teorema 2.14.4. $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ è connesso.

Dimostrazione. Siano A, B aperti non vuoti di [0,1], con $[0, 1] = A \sqcup B$. Posso supporre $0 \in A$. Dunque, se $t_0 = \inf B$ (esiste poiché B è non vuoto e limitato inferiormente), allora $t_0 \geq \varepsilon > 0$, perché altrimenti avrei $B \cap [0, \varepsilon) \neq \varnothing$, che contraddice le ipotesi. B è chiuso (A e B sono entrambi aperti e chiusi), quindi $t_0 \in B$. Ma B è anche aperto e $t_0 > 0$, per cui $\exists\delta > 0$ con $(t_0 - \delta, t_0] \subseteq B$, e ciò contraddice il fatto che $t_0 = \inf B$. □

Definizione 2.14.5. X si dice CONNESSO PER ARCHI se $\forall\, x_0, x_1 \in X$,
$\exists\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ continua tale che $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$.

Proposizione 2.14.6. X connesso per archi $\Longrightarrow X$ connesso.

Dimostrazione. Se X fosse sconnesso, allora $X = A \sqcup B$ aperti non vuoti. Prendo allora $X_0 \in A, x_1 \in B$. Se $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$ con $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$ fosse continua, avrei una partizione $[0, 1] = \alpha^{-1}(A) \sqcup \alpha^{-1}(B)$ di [0,1] in aperti non vuoti, il che è assurdo. □

Proposizione 2.14.7. Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua. Allora:

(i) Se X è connesso, $f(X)$ è connesso
(ii) Se X è connesso per archi, $f(X)$ è connesso per archi

Dimostrazione. Se $f(X) = A \sqcup B$, allora $X = f^{-1}(A) \sqcup f^{-1}(B)$, quindi X è sconnesso (abbiamo dimostrato la contronominale della (i)).
Dati $y_0, y_1 \in f(X), \exists x_0, x_1 \in X$ con $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$, esiste $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ con $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$. Allora $f \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow Y$ è un arco continuo che connette y_0 a y_1. $\square$

Lemma 2.14.8. Siano X spazio topologico, $Y \subseteq X$ connesso e $Z \subseteq X$ tale che $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$. Allora Z è connesso.

Dimostrazione. Osserviamo inanzitutto che Y è denso in Z, in quanto la chiusura di Y in Z è $Y \cap Z = Z$ poiché $Z \subseteq \overline{Y}$. Sia $A \neq \varnothing$ un aperto e chiuso di Z. Allora $A \cap Y$ è aperto e chiuso in Y (per definizione di topologia di sottospazi), e $A \cap Y \neq \varnothing$ in quanto Y è denso in Z e A è aperto in Z. Allora, per connessione di Y, si ha che $A \cap Y = Y$, cioè $Y \subseteq A$. Ma Y è denso in Z, per cui anche A lo è. Ma A è anche chiuso in Z, per cui $A = Z$. $\square$

Lemma 2.14.9. Siano $\{Y_i\}_{i \in I}$ sottospazi connessi di X, e sia $x_0 \in X$ tale che $x_0 \in Y_i, \forall\, i \in I$ (cioè $x_0 \in \bigcup_{i \in I} Y_i \neq \varnothing$). Allora $\bigcup_{i \in I} Y_i$ è connesso.

Dimostrazione. Sia $A \neq \varnothing$ aperto e chiuso di $Y = \bigcup Y_i$. A meno di sostituire A con il suo complementare $Y \smallsetminus A$, posso supporre $x_0 \in A$. $\forall\, i \in I, A \cap Y_i$ è aperto e chiuso in Y_i, e non è vuoto perché contiene x_0. Per cui, Y_i connesso implica che $A \cap Y_i = Y_i$, cioè $Y_i \subseteq A$. Ma allora $Y \subseteq A$, cioè $Y = A$, da cui la tesi. $\square$

Definizione 2.14.10. Sia $x_0 \in X$. Allora esiste il più grande sottospazio connesso di X che contiene x_0. Lo indicheremo con $C(x_0)$ e lo chiameremo COMPONENTE CONNESSA di x_0.

Dimostrazione. (*Esistenza di* $C(x_0)$)
Pongo $C(x_0) = \bigcup\{Y \mid Y \subseteq X, Y \text{ connesso}, x_0 \in Y\}$. Per il lemma appena visto, $C(x_0)$ è connesso, e contiene per costruzione qualsiasi connesso che contiene x_0, perciò è anche il più grande sottospazio connesso contenente x_0. $\square$

Proposizione 2.14.11. Le componenti connesse realizzano una partizione dello spazio in chiusi.

Dimostrazione. $\forall\, x_0, x_1 \in X, x_0 \in C(x_0)$ poiché $\{x_0\}$ è connesso. Se $C(x_0) \cap C(x_1) \neq \varnothing$, per il lemma precedente $C(x_0) \cup C(x_1)$ è connesso $\Longrightarrow C(x_0) \cup C(x_1) \subseteq C(x_0)$ e $C(x_0) \cup C(x_1) \subseteq C(x_1) \Longrightarrow C(x_0) = C(x_1)$.
Infine, $\overline{C(x_0)}$ è connesso per un lemma precedente e contiene x_0, dunque $\overline{C(x_0)} \subseteq C(x_0)$, per cui $C(x_0) = \overline{C(x_0)}$, ovvero $C(x_0)$ è chiuso. $\square$

Osservazione 2.14.12. $A \subseteq X$ aperto, chiuso e connesso $\Longrightarrow A$ è una componente connessa. Infatti, se $B \supseteq A$ è connesso, A è aperto e chiuso in B e non vuoto, allora $A = B$, per cui A è un connesso massimale, ovvero è una componente connessa.

Osservazione 2.14.13. Le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ sono i punti, cioè $C(x_0) = \{x_0\}$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{Q}$. Si dice allora che $\mathbb{Q}$ è TOTALMENTE SCONNESSO. Infatti, supponiamo per assurdo che esista una componente connessa C che contiene due punti $x_0, x_1 \in \mathbb{Q}$, con $x_0 < x_1$, e sia $y \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ con $x_0 < y < x_1$. Allora $(C \cap (-\infty, y)) \sqcup (C \cap (y, +\infty))$ è una partizione non banale di C in aperti. Ma allora C è sconnesso, il che contraddice l'ipotesi iniziale.
Dunque, in generale, le componenti connesse non sono aperte.

Studiamo adesso i connessi di $\mathbb{R}$:
$A \subset \mathbb{R}$ è convesso se $\forall\, x, y \in A$ vale:

$$tx + (1-t)y \in A \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

Osservazione 2.14.14.

$$\begin{aligned} A \subset \mathbb{R} \text{ convesso } &\Longrightarrow A \text{ connesso per archi} \\ &\Longrightarrow A \text{ connesso} \end{aligned}$$

Proposizione 2.14.15. Se $I \subset \mathbb{R}$, sono equivalenti:

(i) I è convesso (I è un intervallo)
(ii) I è connesso per archi
(iii) I è connesso

Dimostrazione. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) lo sappiamo già per l'osservazione precedente.
Vediamo allora (iii) $\Longrightarrow$ (i). Supponiamo I non convesso. Allora $\exists a < b < c$ tali che $a, c \in I, b \notin I$. Allora:

$$I = ((-\infty, b) \cap I) \cup ((b, +\infty) \cap I)$$

che è assurdo per ipotesi. □

Esempio 2.14.16. (0,1) non è omeomorfo a [0,1). Sia infatti $f : [0,1) \longrightarrow (0,1)$ omeomorfismo. Allora:
$[0,1) \smallsetminus \{0\}$ è connesso
$(0,1) \smallsetminus \{f(0)\}$ non è connesso.

Esempio 2.14.17.(*Connesso $\not\Rightarrow$ connesso per archi*)
Sia $Y = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Poiché $Y = F(0, +\infty)$ con:

$$\begin{aligned} F : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

allora Y è connesso per archi. Sia:

$$X = \overline{Y} = Y \cup \{(0, t) \mid |x| \leq 1\}$$

che è connesso in quanto chiusura di un connesso. Vediamo allora che non è connesso per archi. Supponiamo che esista il cammino α definito come:

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X \qquad \text{con} \qquad \alpha(0) = (0, 0) \text{ e } \alpha(1) \in Y$$

Consideriamo allora:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (x(t), y(t)) \\ x : [0, 1] &\longrightarrow [0, +\infty] \\ y : [0, 1] &\longrightarrow [-1, 1] \end{aligned}$$

Sia $\Omega = \{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}$ chiuso, e sia $t_0 = \max \Omega, t_0 < 1$ per ipotesi. Supponiamo $y(t_0) \geq 0$ (l'altro caso è analogo). Per continuità:

$$\exists \delta > 0 : y(t) \geq -\frac{1}{2} \qquad \forall\, t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Vediamo che $x([t_0, t_0 + \delta]) \subset [0, +\infty)$ è un connesso contenente $0 = x(t_0)$ Allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $[0, \varepsilon] \subset x([t_0, t_0 + \delta])$. Cerchiamo allora $\lambda \in [0, \varepsilon]$ con $\sin\dfrac{1}{\lambda} = -1$:

$$\lambda = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \qquad \text{con } k \gg 0$$

Allora $\sin\dfrac{1}{\lambda} = -1$, vale a dire che se $x(t) = \lambda$, allora $y(t) = \sin\dfrac{1}{\lambda} = -1$.

Torniamo adesso ad un discorso generale sulle connessioni.

Definizione 2.14.18. Dato $x \in X$, la COMPONENTE CONNESSA PER ARCHI di x è il più grande connesso per archi che contiene x.
Equivalentemente: Dato $x \in X$, la sua componente connessa per archi $C_a(x)$ è:

$$C_a(x) = \{y \in X \mid \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ con } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

Definiamo una relazione $\sim$ su X:

$$x \sim y \text{ se } \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ con } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y$$

Vediamo che $\sim$ è una relazione di equivalenza, dunque $C_a(x) = [x]$:

(i) $\sim$ è riflessiva. Sia:

$$\begin{aligned} \alpha : [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x \end{aligned}$$

Allora $x \sim x$.

(ii) $\sim$ è simmetrica. Sia $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$ continua con $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$. Definiamo allora $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ tale che $\beta(t) = \alpha(1-t)$, e osserviamo che è continua in quanto composizione di funzioni continue. Allora, poiché $\beta(0) = y, \beta(1) = x$, si ha che $y \sim x$.

(iii) $\sim$ è transitiva. Siano $\alpha, \beta : [0,1] \longrightarrow X$ continue con $\alpha(0) = x, \alpha(1) = \beta(0) = y, \beta(1) = z$. Definiamo allora la GIUNZIONE di α e β nel seguente modo:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Allora abbiamo che:

$$\begin{aligned} &(\alpha * \beta)(0) = \alpha(0) = x \\ &(\alpha * \beta)\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha(1) = \beta(0) = y \\ &(\alpha * \beta)(1) = \beta(1) = z \end{aligned}$$

Allora $[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1]$ è un ricoprimento chiuso localmente finito, di conseguenza è fondamentale, e quindi $\alpha * \beta$ è continua in quanto le sue restrizioni sono continue.

Esempio 2.14.19. $X = X_1 \cup X_2$ dove:

$$X_1 = \{(0,t) \mid |t| \leq 1\} \qquad X_2 = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$$

X ha due componenti connesse per archi: X_1 e X_2. Infatti:

$$\begin{aligned} X_2 = X \cap \{x > 0\} &\qquad \text{aperta, non chiusa} \\ X_1 = X \cap \{x = 0\} &\qquad \text{chiusa, non aperta} \end{aligned}$$

Dunque in generale le componenti connesse per archi non sono né aperte né chiuse.

Proposizione 2.14.20. Supponiamo che ogni punto abbia un intorno connesso. Allora le componenti connesse sono aperte.

Dimostrazione. Sia $x \in X$, con $C(x)$ la sua componente connessa. Sia $y \in C(x)$, e sia $U \in I(y)$ intorno connesso. Allora $C(x) \cup U$ è unione di due connessi che si intersecano in y, e quindi $U \subset C(x)$. $\square$

Proposizione 2.14.21. Supponiamo che ogni punto abbia un intorno connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi sono aperte, e coincidono con le componenti connesse.

Dimostrazione. Sia $x \in X$, con $C_a(x)$ la sua componente connessa per archi. Sia $y \in C_a(x)$, e sia $U \in I(y)$ intorno componente connessa per archi. Allora $C_a(x) \cup U$ è connesso per archi, e quindi $U \subset C_a(x)$. Vediamo adesso che $C_a(x) = C(x)$. Chiaramente, $C_a(x) \subset C(x)$ aperto, infatti:

$$C(x) = \bigsqcup_{y \in C(x)} C_a(y)$$

Allora $C(x) \smallsetminus C_a(x)$ è aperto e $C(x)$ è connesso, quindi $C_a(x) = C(x)$. □

Definizione 2.14.22. X è detto LOCALMENTE CONNESSO se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi.

Definizione 2.14.23. X è detto LOCALMENTE CONNESSO PER ARCHI se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.

Esempio 2.14.24. $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$ è uno spazio connesso per archi non localmente connesso.

2.15 Compattezza

Definizione 2.15.1. Uno spazio topologico X è COMPATTO se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito, cioè se dato $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ t.c. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ esistono $i_0, \dots, i_n$ t.c. $X = U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Un sottospazio $Y \subseteq X$ è compatto se lo è con la topologia di sottospazio.

Definizione 2.15.2. Uno spazio metrico X è LIMITATO se esistono $X_0 \in X$ e $R > 0$ t.c. $X = B(x_0, R)$ o equivalentemente se $diam(X) = \sup\{d(x, y), x, y \in X\} < +\infty$.

Lemma 2.15.3. Se X è metrico compatto, allora X è limitato.

Dimostrazione. Scelto $x_0 \in X$, $U_n = B(x_0, n), n \in \mathbb{N}$ è un ricoprimento aperto di X. Esistono allora $i_0, \dots, i_n$ t.c. $X = U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_n}$. Poniamo allora $R = \max\{i_0, \dots, i_n\}$ e otteniamo $X = B(x_0, R)$. □

Corollario 2.15.4. $\mathbb{R}$ non è compatto.

Osservazione 2.15.5. La compattezza è invariante per omeomorfismo, dunque $(-1, 1)$ non è compatto in quanto omeomorfo a $\mathbb{R}$ tramite $x \longmapsto \tan \frac{\pi}{2} x$, con inversa $y \longmapsto \frac{2}{\pi} \tan^{-1} y$. Segue, per omeomorfismo affine con $(-1,1)$, che nessun intervallo aperto (a,b) è compatto.

Corollario 2.15.6. Metrico e limitato non implica compatto.

Teorema 2.15.7. $[0,1]$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $[0,1]$ e consideriamo $t_0 = \sup A$ dove $A = \{t \in [0,1]$ t.c. c'è un sottoricoprimento finito che ricopre $[0,t]\}$. Chiaramente l'insieme è non vuoto e contiene elementi maggiori di 0, infatti c'è un aperto U_{i_0} che contiene 0 e dunque contiene un intervallo della forma $[0,\varepsilon), \varepsilon > 0$: qualunque numero maggiore di 0 e minore di ε sta dunque in A. Il sup di A è anche un massimo: infatti esiste un aperto $U_{i_{t_0}}$ che contiene t_0, dunque contiene un intorno della forma $(t_0 - \delta, t_0]$. Prendendo allora un sottoricoprimento finito che ricopre $[0, t_0 - \delta/2]$ è aggiungendoci $U_{i_{t_0}}$ otteniamo un sottoricoprimento finito che ricopre $[0,t_0]$, da cui $t_0 \in A$ e dunque è un massimo. Supponiamo per assurdo che $t_0 \neq 1$, cioè $0 < t_0 < 1$, allora sempre in $U_{i_{t_0}}$ c'è un intorno della forma $[t_0, t_1)$ con $t_0 < t_1 < 1$, quindi tutti i punti in (t_0, t_1) stanno in A, contro la massimalità di t_0, assurdo. □

Teorema 2.15.8. $f : X \to Y$ continua, X compatto $\Rightarrow f(X)$ compatto.

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$ con gli U_i aperti di $f(X)$, allora esistono $\{V_i\}$ aperti di Y t.c. $U_i = f(X) \cap V_i$. Allora $\{f^{-1}(U_i)\}$ è un ricoprimento di X e $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(f(X) \cap V_i) = f^{-1}(f(X)) \cap f^{-1}(V_i) = X \cap f^{-1}(V_i)$ (il penultimo uguale è vero perché $f^{-1}(V_i) \subseteq f^{-1}(f(X))$), dunque per la continuità di f è un'intersezione di un aperto con tutto, cioè è aperto, dunque $\{f^{-1}(U_i)\}$ è un ricoprimento aperto di X, ne estraiamo un sottoricoprimento, prendiamo le immagini degli aperti così trovati e questi sono un sottoricoprimento finito di $f(X)$ estratto da $\{U_i\}$. □

Fatto 2.15.9. I seguenti sono fatti banali:

(i) ogni spazio finito è compatto;
(ii) unione finita di spazi compatti è compatta.

Teorema 2.15.10. X compatto, $Y \subseteq X$ chiuso $\Rightarrow Y$ compatto.

Dimostrazione. Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento di Y con gli U_i aperti di Y, allora per ogni i esiste un V_i aperto di X t.c. $U_i = Y \cap V_i$ e $\{V_i\}$ è ancora un ricoprimento di Y. Notiamo che anche $W = X \setminus Y$ è un aperto e dunque $\{V_i\} \cup \{W\}$ è un ricoprimento aperto di X. Allora, essendo X compatto, esiste un sottoricoprimento finito $W, V_{i_0}, \ldots V_{i_n}$ (a priori, W potrebbe non essere necessario, ma aggiungerlo non cambia niente). Essendo $W \cap Y = \varnothing$ dev'essere che $V_{i_0}, \ldots, V_{i_n}$ ricoprono Y, dunque i rispettivi $U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}$ sono il sottoricoprimento finito cercato. □

Osservazione 2.15.11. Abbiamo visto (e useremo ancora) che $Y \subseteq X$ è compatto se e solo se per ogni famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di aperti di X t.c. $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ esiste $\mathcal{I} \subseteq I$ finito con $Y \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$.

Esempio 2.15.12. Sia X un insieme con la topologia cofinita, allora ogni sottoinsieme di X è compatto. Infatti, sia $Y \subseteq X$ e supponiamo $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, U_i aperti di X. Se $Y = \varnothing$ allora è compatto, altrimenti esiste $y_0 \in Y$ e $y_0 \in U_{i_0}$ per qualche $i_0 \in I$. Poiché $X \setminus U_{i_0}$ è finito, anche $Y \setminus U_{i_0}$ è finito, diciamo $Y \setminus U_{i_0} = \{y_1, \dots, y_n\}$, allora per ogni $j = 1, \dots, n$ esiste i_j con $y_j \in U_{i_j}$ e dunque $Y \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cdots \cup U_{i_n}$.
Ad esempio, se $X = \mathbb{Z}$ con la topologia cofinita, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ è compatto ma non chiuso.

Teorema 2.15.13. Sia X spazio topologico T2, $Y \subseteq X$, Y compatto. Allora Y è chiuso.

Dimostrazione. Dimostriamo che $X \setminus Y$ è aperto. Sia $x \in X \setminus Y$. Dato che X è T2, per ogni $y \in Y$ esistono due aperti disgiunti U_y, V_y t.c. $x \in U_y, y \in V_y$. $\{V_y\}_{y\in Y}$ è un ricoprimento aperto di Y, che è compatto, dunque esiste un sottoricoprimento finito $V_{y_1}, \dots V_{y_n}$. Notiamo allora che $V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}, U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ sono aperti disgiunti t.c. $Y \subseteq V, x \in U$. In particolare, U è un intorno aperto di x disgiunto da Y e, dato che lo possiamo trovare per ogni $x \in X \setminus Y$, possiamo concludere che $X \setminus Y$ è aperto e dunque Y è chiuso. $\square$

Lemma 2.15.14. X compatto T2 $\Rightarrow$ X regolare.

Dimostrazione. T2 $\Rightarrow$ T1, dobbiamo dimostrare T3. Siano $Y \subseteq X$ chiuso, $x_0 \in X \setminus Y$. Dal teorema 2.15.10 Y è compatto, prendendo gli aperti U, V della dimostrazione del teorema 2.15.13 abbiamo esattamente quello che ci serve per soddisfare T3. $\square$

Teorema 2.15.15. X compatto T2 $\Rightarrow$ X normale.

Dimostrazione. T2 $\Rightarrow$ T1, dobbiamo dimostrare T4. Siano C e D due chiusi disgiunti in X. Dal lemma 2.15.14 sappiamo che X è regolare, dunque per ogni $x \in C$ esistono U_x, V_x aperti disgiunti $x \in U_x, D \subseteq V_x$. $\{U_x\}_{x\in C}$ è un ricoprimento aperto di C, che per il teorema 2.15.10 è compatto, dunque esiste un sottoricoprimento finito $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Allora prendendo $U = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}, V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$ abbiamo che sono due aperti disgiunti t.c. $C \subseteq U, D \subseteq V$, che è esattamente quello che ci serve per dimostrare T3. $\square$

Proposizione 2.15.16. X T2, $C, D \subseteq X$ compatti e disgiunti, allora esistono U, V aperti disgiunti con $C \subseteq U, D \subseteq V$.

Dimostrazione. Dato che sfrutta le stesse idee delle dimostrazioni precedenti, è lasciata come esercizio al lettore. $\square$

Teorema 2.15.17. X spazio topologico, $Y_i, i \in I$ famiglia di sottoinsiemi chiusi con Y_{i_0} compatto per qualche $i_0 \in I$. Se per ogni $J \subseteq I$ finito vale che $\displaystyle\bigcap_{i \in J} Y_i \neq \varnothing$ (PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE FINITA), allora $\displaystyle\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \varnothing$.

Dimostrazione. Per ogni $i \in I, i \neq i_0$, sia $Z_i = Y_{i_0} \cap Y_i$. Z_i è un chiuso di Y_{i_0}, dunque $W_i = Y_{i_0} \setminus Z_i = Y_{i_0} \setminus Y_i$ è un aperto di Y_{i_0}. Quindi, se per assurdo $\displaystyle\bigcap_{i \in I} Y_i = \varnothing$, avremmo che $\{W_i, i \in I\}$ sarebbe un ricoprimento aperto di Y_{i_0}. Allora, per compattezza di Y_{i_0}, esiste un sottoricoprimento finito $W_{i_1}, \ldots, W_{i_n}$, cioè $Y_{i_0} = W_{i_1} \cup \cdots \cup W_{i_n} = (Y_{i_0} \setminus Y_{i_1}) \cup \cdots \cup (Y_{i_0} \setminus Y_{i_n}) = Y_{i_0} \setminus (Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_n}) \Rightarrow$
$\Rightarrow Y_{i_0} \cap Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_n} = \varnothing$, assurdo. $\square$

Esempio 2.15.18. Serve un Y_i compatto: $X = \mathbb{R}, Y_n = [n, +\infty)$ è un controesempio.

Corollario 2.15.19. Se $Y_n, n \in \mathbb{N}$ è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di X con Y_0 compatto, Y_i chiuso per ogni $i \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n \neq \varnothing$.

Lemma 2.15.20. Sia X spazio topologico e $\mathcal{B}$ una base di X. Se ogni ricoprimento di X con aperti di $\mathcal{B}$ ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di X. Per definizione di ricoprimento si ha che per ogni $x \in X$ esiste $i(x) \in I$ t.c. $x \in U_{i(x)}$ e per definizione di base esiste $B_x \in \mathcal{B}$ t.c. $x \in B_x \subseteq U_{i(x)}$. $\{B_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento di X con aperti di B (si dice che $\{B_x\}_{x \in X}$ è un *raffinamento* di $\mathcal{U}$). Per ipotesi esistono allora $x_1, \ldots, x_n$ t.c. $X = B_{x_1} \cup \cdots \cup B_{x_n} \subseteq U_{i(x_1)} \cup \cdots \cup U_{i(x_n)}$, da cui la tesi. $\square$

Teorema 2.15.21. X, Y compatti $\Rightarrow X \times Y$ compatto.

Dimostrazione. Per il lemma 2.15.20, possiamo partire da un ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ dove U_i è aperto in X, V_i è aperto in Y per ogni $i \in I$. Per ogni $x \in X$ il sottoinsieme $\{x\} \times Y \subseteq X \times Y$ è compatto in quanto omeomorfo a Y, per cui esiste $J_x \subseteq I$ finito t.c. $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$. Poniamo $U_x = \bigcap_{i \in J_x} U_i$, è aperto in quanto intersezione finita di aperti e per costruzione $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$. Per compattezza di X e poiché $\{U_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto, abbiamo che $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ per qualche $x_1, \ldots, x_n$. Allora $X \times Y = \bigcup_{k=1}^{n} (U_{x_k} \times Y) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i \in J_{x_k}} (U_i \times V_i)$, da cui la tesi. $\square$

Osservazione 2.15.22. Se $A \subseteq X, B \subseteq Y$, la topologia prodotto di $A \times B$, ciascuno dotato della topologia di sottospazio, coincide con la topologia di sottospazio di $X \times Y$. Dunque, per il teorema 2.15.21, se A, B sono sottospazi compatti, $A \times B$ è un sottospazio compatto di $X \times Y$.