Appunti di Geometria 2
anno accademico 2019/2020

Marco Vergamini & Alessio Marchetti

Indice

1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso di Geometria 2 tenuto dai professori Roberto Frigerio e Jacopo Gandini nell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni i contenuti dei corsi del primo anno, in particolare Analisi 1 e Geometria 1. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura.

2 Spazi metrici e spazi topologici

2.1 Spazi metrici

Definizione 2.1. Uno SPAZIO METRICO è una coppia (X, d), X insieme, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c. per ogni $x, y, z \in X$

(i) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare).

In tal caso d si dice DISTANZA O METRICA.

Esempio 2.2. Ecco alcuni esempi di distanze:

- La distanza d_1 su $\mathbb{R}^n$, che alla coppia di elementi $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ associa il numero
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|;$$
- la distanza d_2 (o d_E, distanza euclidea) su $\mathbb{R}^n$,
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2};$$
- la distanza d_∞ su $\mathbb{R}^n$, $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\dots,n} \{|x_i - y_i|\}$;
- la distanza discreta su un generico insieme x, $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$ e 0 altrimenti;
- le distanze d_1, d_2, d_∞ sullo spazio delle funzioni continue da $[0, 1]$ in $\mathbb{R}$, definite rispettivamente
$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$
$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt},$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|.$$

Definizione 2.3. $f : (X,d) \to (Y,d')$ viene detto EMBEDDING ISOMETRICO se $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1,x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$.

Osservazione 2.4. Valgono i seguenti fatti:

- l'identità è un embedding isometrico;
- composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico;
- se un embedding isometrico f è biettivo, anche f^{-1} è un embedding isometrico e f si dice ISOMETRIA;
- un embedding isometrico è sempre iniettivo, dunque è un'isometria se e solo se è suriettivo;
- se (X,d) è fissato, l'insieme delle isometrie da X in sé è un gruppo con la composizione, chiamato $Isom(X,d)$.

2.2 Continuità in spazi metrici

Definizione 2.5. Dati $p \in X, R > 0$, $B(p,R) := \{x \in X \mid d(p,x) < R\}$ è detta la PALLA APERTA di centro p e raggio R.

Definizione 2.6. $f : (X,d) \to (Y,d')$ è CONTINUA IN x_0 se $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$, cioè $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon)) \supseteq B(x_0,\delta)$.

Definizione 2.7. $f(X,d) \to (Y,d')$ è detta CONTINUA se è continua in ogni $x_0 \in X$.

Osservazione 2.8. Gli embedding isometrici sono continui.

Definizione 2.9. Sia X uno spazio metrico, $A \subseteq X$ è detto APERTO se per ogni $x \in A$ esiste $R > 0$ t.c. $B(x,R) \subseteq A$.

Fatto 2.10. Le palle aperte sono aperti. Per dimostrarlo, sfruttare la disuguaglianza triangolare.

Teorema 2.11. $f(X,d) \to (Y,d')$ è continua se e solo se per ogni aperto A di Y $f^{-1}(A)$ è aperto di X.

Dimostrazione. Supponiamo f continua. Prendiamo $x \in f^{-1}(A)$, allora si ha che $f(x) \in A$, ma dato che A è aperto esiste una palla aperta di centro $f(x)$ B_Y t.c. $B_Y \subseteq A$, da cui $f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$. Usando la definizione di continuità, detto ε il raggio di B_Y, scegliendo il δ corrispondente come raggio di una palla di centro x, sia essa B_X, si ha che $B_X \subseteq f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$, perciò abbiamo trovato una palla centrata in x tutta contenuta in $f^{-1}(A)$ e questo prova che è un aperto.

Viceversa, supponiamo che le controimmagini di aperti siano a loro volta aperti. Dati $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$ si ha che $B(f(x_0), \varepsilon)$ è un aperto di Y, perciò la sua controimmagine è un aperto, ma allora per definizione di aperto esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ e questo prova che f è continua. $\square$

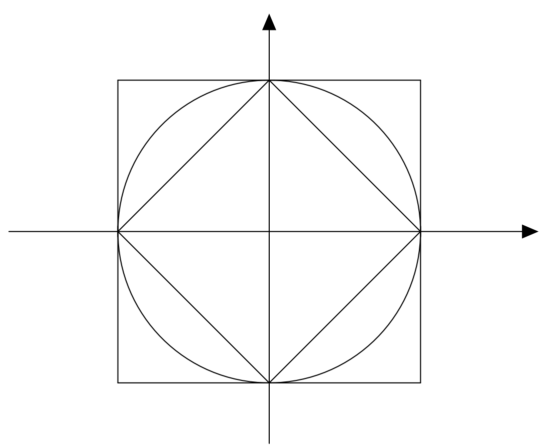
Osservazione 2.12. La continuità di una funzione dipende quindi solo indirettamente dalla metrica, mentre è direttamente collegata agli aperti generati dalla metrica stessa. Segue facilmente che due metriche che generano gli stessi aperti portano anche alla stessa famiglia di funzioni continue. Diamo dunque la seguente definizione.

Definizione 2.13. Due distanze d, d' su un insieme X si dicono TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI se inducono la stessa famiglia di aperti.

Lemma 2.14. Siano d, d' distanze su X t.c. esiste $k \geq 1$ t.c. per ogni $x, y \in X$ valga $d(x, y)/k \leq d'(x, y) \leq k \cdot d(x, y)$. Allora d e d' sono topologicamente equivalenti.

Dimostrazione. Sia A un aperto indotto da d' e $x_0 \in A$. Per definizione di aperto esiste $R > 0$ tale che $B_{d'}(x_0, R) \subseteq A$. Considero $B_d(x_0, R/k)$. Dato un elemento $x \in B_d(x_0, R/k)$ ho che $d'(x_0, x) \leq k \cdot d(x_0, x) < k \cdot R/k = R$, dunque $x \in B_{d'}(x_0, R)$. Allora $B_d(x_0, R/k) \subseteq B_{d'}(x_0, R/k) \subseteq A$ e dunque A è anche un aperto indotto da d. Per la simmetria delle disuguaglianze nelle ipotesi si dimostra anche l'opposto, perciò gli aperti di d e d' sono gli stessi, come voluto. $\square$

Corollario 2.15. d_1, d_2, d_∞ sono topologicamente equivalenti su $\mathbb{R}^n$.



Nell'immagine sono rappresentate, nell'ordine dalla più interna alla più esterna, le palle aperte centrate nell'origine e di raggio 1 rispettivamente nelle metriche d_1, d_2, d_∞.

Dimostrazione. Per AM-QM si ha che

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n}},$$

da cui $d_1(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot d_2(x,y)$. Stimando tutti i termini con il massimo otteniamo che

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sup_{j=1,\ldots,n} \{(x_j - y_j)^2\}} = \sqrt{n} \cdot \sup_{j=1,\ldots,n} \{|x_j - y_j|\},$$

da cui $d_2(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x,y)$. Infine è ovvio che

$$\sup_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

, da cui $d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y)$. Scegliendo $k = \sqrt{n}$ è ora sufficiente applicare il lemma. □

Nella dimostrazione del corollario era importante che lo spazio fosse di dimensione finita. Nello spazio delle funzioni continue da $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ le tre distanze non sono topologicamente equivalenti.

2.3 Spazi topologici

Definizione 2.16. Uno SPAZIO TOPOLOGICO è una coppia (X, τ), $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, t.c.

(i) $\varnothing,\ X \in \tau$;
(ii) $A_1,\ A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$;
(iii) se I è un insieme e $A_i \in \tau \, \forall \, i \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Allora τ si dice TOPOLOGIA di X e gli elementi della topologia sono detti APERTI di τ.

Proposizione 2.17. Se (X, d) è uno spazio metrico, gli aperti rispetto a d definiscono una topologia.

Definizione 2.18. Uno spazio topologico (X, τ) è detto METRIZZABILE se τ è indotta da una distanza su X.

Definizione 2.19. Sia (X, τ) uno spazio topologico, $C \subseteq X$ è CHIUSO se $X \setminus C$ è aperto.

Osservazione 2.20.

(i) possono esistere insiemi né aperti né chiusi;

(ii) $\varnothing$ e X sono chiusi;
(iii) unione finita di chiusi è chiusa;
(iv) intersezione arbitraria di chiusi è chiusa.

Esempio 2.21. Ecco alcuni esempi di spazi topologici:

– tutte le topologie indotte da una metrica;
– la topologia discreta, cioè $\tau = \mathcal{P}(X)$, indotta dalla distanza discreta;
– la topologia indiscreta, cioè $\tau = \{\varnothing, X\}$;
– la topologia cofinita, dove gli aperti sono l'insieme vuoto più tutti e soli gli insiemi il cui complementare è un insieme finito.

2.4 Continuità in spazi topologici

Definizione 2.22. $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ si dice CONTINUA se $f^{-1}(A) \in \tau$, $\forall\, A \in \tau'$, cioè una funzione è continua se la controimmagine di aperti è aperta.

Notiamo che per il teorema 2.11, le due definizioni di funzione continua sono equivalenti per uno spazio metrico se si considera la topologia indotta dalla metrica.

Teorema 2.23.

(i) L'identità è una funzione continua;
(ii) composizione di funzioni continue è una funzione continua.

Definizione 2.24. Una funzione $f : X \to Y$ si dice OMEOMORFISMO se f è continua e esiste una funzione $g : Y \to X$ continua tale che $f \circ g = Id_Y$ e $g \circ f = Id_x$. Cioè f è continua, bigettiva e con inversa continua.

Osservazione 2.25.

(i) Composizione di omeomorfismi è un omeomerfismo; due spazi legati da un omeomorfismo si dicomo OMEOMORFI e essere omeomorfi è una relazione di equivalenza;
(ii) l'insieme degli omeomorfismi da (X, τ) in sé è un gruppo;
(iii) se $f : X \to Y$ è continua e bigettiva non è detto che sia un omeomorfismo, cioè f^{-1} può non essere continua.

Esempio 2.26. Siano τ_E la topologia euclidea, τ_C la cofinita, τ_D la discreta e τ_I l'indiscreta. Le seguenti mappe sono dunque continue:

– $Id : (\mathbb{R}, \tau_D) \to (\mathbb{R}, \tau_E)$,
– $Id : (\mathbb{R}, \tau_E) \to (\mathbb{R}, \tau_C)$,
– $Id : (\mathbb{R}, \tau_C) \to (\mathbb{R}, \tau_I)$.

Nessuna delle inverse è però continua. Più in generale, $Id : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ con $\sigma \subsetneq \tau$ è continua ma l'inversa no.

2.5 Ordinamento fra topologie, basi e prebasi

Vogliamo mettere un ordinamento parziale sulle topologie di un certo insieme fissato.

Definizione 2.27. Dato un insieme X su cui sono definite le topologie τ e τ', si dice che τ è MENO FINE di τ' se $\tau \subseteq \tau'$, cioè ogni aperto di τ è anche aperto di τ'. τ' si dice PIÙ FINE di τ.

Osservazione 2.28. Equivalentemente alla definizione sopra, si può dire che τ è meno fine di τ' se e solo se $Id : (X, \tau') \to (X, \tau)$ è continua.

Quando τ è meno fine di τ' scriveremo $\tau < \tau'$. Si noti che dalla definizione ogni topologia è meno fine di se stessa, cioè $\tau < \tau' \, \forall \tau$.

Esempio 2.29. $\tau_I < \tau_C < \tau_E < \tau_D, \quad \tau_I < \tau < \tau_D \, \forall \tau$.

Lemma 2.30. Intersezione arbitraria di topologie su X è ancora una topologia su X.

Dimostrazione. Siano $\tau_i, \ i \in I$ topologie su X. Verifichiamo che $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ soddisfa gli assiomi di topologia.

(i) $\varnothing, X \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow \varnothing, X \in \tau$.
(ii) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1, A_2 \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$.
(iii) Siano $A_j, j \in J$ insiemi che stanno in τ.
$A_j \in \tau \, \forall \, j \in J \Rightarrow A_j \in \tau_i \, \forall \, i \in I, j \in J \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_i \, \forall \, i \in I \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$.

□

Corollario 2.31. Data una famiglia $\tau_i, i \in I$ di topologie su X, esiste la più fine tra le topologie meno fini di ogni τ_i: è $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \tau_i$.

Corollario 2.32. Sia X un insieme, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, allora esiste la topologia meno fine tra quelle che contengono S. Tale topologia si dice *generata* da S e S si dice PREBASE della topologia. Se $\Omega = \{\tau \text{ topologia} \mid S \in \tau\}$ (che è non vuoto perché contiene almeno la topologia discreta), la topologia cercata è $\displaystyle\bigcap_{\tau \in \Omega} \tau$.

Definizione 2.33. sia (X, τ) uno spazio topologico fissato, una BASE di τ è un insieme $\mathcal{B} \subseteq \tau$ t.c. $\forall \, A \in \tau, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ t.c. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Ovvero $\mathcal{B}$ è una base se ogni aperto di τ può essere scritto come unione qualunque di elementi di $\mathcal{B}$.

Esempio 2.34. Se X è uno spazio metrico, una base della topologia indotta sono le palle.

Definizione 2.35. (X, τ) si dice *a base numerabile* (o che soddisfa il SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ) se ammette una base numerabile.

Proposizione 2.36. Sia X un insieme senza topologia, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è base di una topologia su $X \Leftrightarrow$ valgono le seguenti:

(i) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$;

(ii) $\forall A, A' \in \mathcal{B}, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$ t.c. $A \cap A' = \bigcup_{i \in I} B_i$. Cioè ogni intersezione di una coppia di elementi di $\mathcal{B}$ può essere scritta come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Sia τ l'insieme di tutte le possibili unioni di elementi di $\mathcal{B}$. Si vuole dimostrare che che τ è una topologia su X.

(i) L'unione di zero elementi è l'insieme vuoto, dunque $\varnothing \in \tau$. Inoltre (i) dice che $X \in \tau$.

(ii) Per associatività dell'unione insiemistica, l'unione di unioni di aperti di $\mathcal{B}$ appartiene ancora a τ. Più precisamente, siano A_i, $i \in I$ elementi di τ. Allora, per ogni i, $A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_j$, con i $B_j \in \mathcal{B}$. Si può anche scrivere

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_j = \bigcup_{j \in J} B_j$$

dove $J = \bigcup_{i \in I} J_i$.

(iii) Dall'ipotesi (ii) discende direttamente il fatto che τ è chiuso per intersezione finita, e questo conclude la dimostrazione.

□

Proposizione 2.37. Siano X un insieme e $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ la prebase di una topologia τ su X. Allora:

(i) le intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$ sono una base di τ;

(ii) $A \in \tau \Leftrightarrow A$ è unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di $S \cup \{X\}$.

Dimostrazione. La parte (i) $\Leftrightarrow$ (ii) viene dalla definizione di base.

Osservando la proposizione 2.5, si vede che l'insieme delle intersezioni finite degli elementi $S \cup X$ è una base di una topologia. Per dire che tale topologia è proprio τ basta mostrare che comunque le intersezioni finite di S devono appartenere a tutte le topologie che contengono S, e quindi anche alla loro intersezione. Lo stesso vale per l'unione. □