

Appunti di Geometria 2  
anno accademico 2019/2020

Marco Vergamini      Alessio Marchetti      Luigi Traino

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Spazi metrici e spazi topologici</b>	<b>3</b>
2.1	Spazi metrici . . . . .	3
2.2	Continuità in spazi metrici . . . . .	5
2.3	Spazi topologici . . . . .	8
2.4	Continuità in spazi topologici . . . . .	10
2.5	Ordinamento fra topologie, basi e prebasi . . . . .	11
2.6	Assiomi di numerabilità . . . . .	14
2.7	Sottospazi topologici . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Prodotti e quozienti topologici</b>	<b>23</b>
3.1	Topologie prodotto . . . . .	23
3.2	Proprietà delle topologie prodotto . . . . .	25
3.3	Assiomi di separazione . . . . .	29
3.4	Quozienti topologici . . . . .	35
3.5	Quozienti per azioni di gruppi . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Connessioni e compattezza</b>	<b>39</b>
4.1	Ricoprimenti . . . . .	39
4.2	Connessioni . . . . .	41
4.3	Compattezza . . . . .	46
4.4	Compattificazione di Alexandroff ed esaustioni . . . . .	54
4.5	Compattezza per successioni . . . . .	56
4.6	Completezza e caratterizzazione dei metrici compatti . . . . .	57
4.7	Spazi di Baire . . . . .	61
4.8	Azioni proprie . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Spazi proiettivi e varietà</b>	<b>66</b>
5.1	Spazi proiettivi . . . . .	66
5.2	Proiettivi complessi . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Omotopia</b>	<b>71</b>
6.1	Omotopie, equivalenze omotopiche e retrazioni . . . . .	71
6.2	Gruppo fondamentale . . . . .	74
6.3	Il gruppo fondamentale come funtore . . . . .	76
6.4	Rivestimenti . . . . .	78
6.5	Alcuni gruppi fondamentali . . . . .	81
6.6	Gruppi liberi . . . . .	83
6.7	Il teorema di Van Kampen . . . . .	84

# 1 Introduzione

Questi appunti sono basati sul corso di Geometria 2 tenuto dai professori Roberto Frigerio e Jacopo Gandini nell'anno accademico 2019/2020. Sono dati per buoni i contenuti dei corsi del primo anno, in particolare Analisi 1 e Geometria 1. Verranno omesse o soltanto hintate le dimostrazioni più semplici, ma si consiglia comunque di provare a svolgerle per conto proprio. Ogni tanto sarà commesso qualche abuso di notazione, facendo comunque in modo che il significato sia reso chiaro dal contesto. Inoltre, la notazione verrà alleggerita man mano, per evitare inutili ripetizioni e appesantimenti nella lettura. Si ricorda anche che questi appunti sono scritti a più mani, non sempre subito dopo le lezioni, non sempre con appunti completi, ecc. . . . Spesso saranno rivisti, verranno aggiunte cose che mancavano perché c'era poco tempo (o voglia. . . ), potrebbero mancare argomenti più o meno marginali. . . insomma, non è un libro di testo per il corso, ma vuole essere un valido supporto per aiutare gli studenti che seguono il corso. Speriamo di essere riusciti in questo intento.

## 2 Spazi metrici e spazi topologici

### 2.1 Spazi metrici

**Definizione 2.1.1.** Uno SPAZIO METRICO è una coppia  $(X, d)$ ,  $X$  insieme,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  t.c. per ogni  $x, y, z \in X$

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- (ii)  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (disuguaglianza triangolare).

In tal caso  $d$  si dice DISTANZA o METRICA.

**Esempio 2.1.2.** Ecco alcuni esempi di distanze:

- La distanza  $d_1$  su  $\mathbb{R}^n$ , che alla coppia di elementi  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  associa il numero

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

- la distanza  $d_2$  (o  $d_E$ , distanza euclidea) su  $\mathbb{R}^n$ ,

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2};$$

- la distanza  $d_\infty$  su  $\mathbb{R}^n$ ,  $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1, \dots, n} \{|x_i - y_i|\}$ ;
- la distanza discreta su un generico insieme  $X$ ,  $d(x, y) = 1$  se  $x \neq y$  e 0 altrimenti;

- le distanze  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_\infty$  sullo spazio delle funzioni continue da  $[0, 1]$  in  $\mathbb{R}$ , definite rispettivamente

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt},$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

**Definizione 2.1.3.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  viene detto EMBEDDING ISOMETRICO se  $d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$  per ogni  $x_1, x_2 \in X$ .

**Osservazione 2.1.4.** Valgono i seguenti fatti:

- l'identità è un embedding isometrico;
- composizione di embedding isometrici è un embedding isometrico;
- se un embedding isometrico  $f$  è biiettivo, anche  $f^{-1}$  è un embedding isometrico e  $f$  si dice ISOMETRIA;
- un embedding isometrico è sempre iniettivo, dunque è un'isometria se e solo se è suriettivo;
- se  $(X, d)$  è fissato, l'insieme delle isometrie da  $X$  in sé è un gruppo con la composizione, chiamato  $\text{Isom}(X, d)$ .

**Definizione 2.1.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Una norma su  $V$  è una funzione  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  che rispetta le seguenti proprietà, per ogni  $x, y \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

- (i)  $\|x\| = 0$  se e solo se  $x = 0$ ;
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Ogni norma induce una distanza  $d$  sullo spazio definita come  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

**Teorema 2.1.6.** Le norme su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita inducono distanze topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.* Sia  $n$  la dimensione dello spazio. Poichè lo ogni spazio reale di tale dimensione è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , assunto senza perdita di generalità che  $V = \mathbb{R}^n$ . Sia allora  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canonica. Sia inoltre  $M = \max_{i=1, \dots, n} \|e_i\|$ . Si ha dunque che

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \leq M \sum_i |x_i - y_i| = M d_1(x, y)$$

Ho ottenuto allora che  $\|\cdot\|$  è Lipschitziana nella distanza  $d_1$ , e dunque è anche continua. Poichè  $d_1$  e  $d_2$  sono equivalenti, la norma è continua anche con  $d_2$ .

Allora ammette massimo e minimo sui compatti, e in particolare sulla sfera unitaria. Siano essi rispettivamente  $M$  e  $m$ . Per ogni vettore  $v$  dello spazio, vale allora

$$\|v\| = \left\| \|v\|_2 \frac{v}{\|v\|_2} \right\| = \|v\|_2 \left\| \frac{v}{\|v\|_2} \right\|$$

che porta a

$$m \|v\|_2 \leq \|v\| \leq M \|v\|_2$$

Passando alle distanze indotte si ottiene l'equivalenza desiderata.  $\square$

## 2.2 Continuità in spazi metrici

**Definizione 2.2.1.** Dati  $p \in X, R > 0$ ,  $B(p, R) := \{x \in X \mid d(p, x) < R\}$  è detta la **PALLA APERTA** di centro  $p$  e raggio  $R$ . Se al posto del minore si utilizza il minore o uguale, si ottiene la definizione di **PALLA CHIUSA** (nelle definizioni seguenti useremo le palle aperte).

**Definizione 2.2.2.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  è *continua in*  $x_0$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.  $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ , cioè  $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \supseteq B(x_0, \delta)$ .

**Definizione 2.2.3.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  è detta **CONTINUA** se è continua in ogni  $x_0 \in X$ .

**Osservazione 2.2.4.** Gli embedding isometrici sono continui.

**Esempio 2.2.5.** Siano  $(X, d)$  spazio metrico,  $E \subseteq X$  e  $x_0 \in X$  fissato. Allora la funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x) = d(x, x_0)$  è continua.

*Dimostrazione.* Sia  $x \in E$  e  $\varepsilon > 0$ . Per avere la continuità, vogliamo trovare un  $\delta > 0$  t.c.  $f(B(x, \delta)) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ , cioè per ogni  $y \in E$  t.c.  $d(y, x) < \delta$  vogliamo  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ . Ma notiamo che  $|f(y) - f(x)| = |d(y, x_0) - d(x, x_0)|$  che per la disuguaglianza triangolare (opportunamente rimaneggiata) è minore o uguale di  $d(x, y) < \delta$ , dunque basta prendere  $\delta = \varepsilon$ .  $\square$

**Definizione 2.2.6.** Sia  $X$  uno spazio metrico,  $A \subseteq X$  è detto **APERTO** se per ogni  $x \in A$  esiste  $R > 0$  t.c.  $B(x, R) \subseteq A$ .

**Fatto 2.2.7.** Le palle aperte sono aperti. Per dimostrarlo, sfruttare la disuguaglianza triangolare.

**Teorema 2.2.8.**  $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$  è continua se e solo se per ogni aperto  $A$  di  $Y$   $f^{-1}(A)$  è aperto di  $X$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo  $f$  continua. Prendiamo  $x \in f^{-1}(A)$ , allora si ha che  $f(x) \in A$ , ma dato che  $A$  è aperto esiste una palla aperta  $B_Y$  di centro  $f(x)$  t.c.  $B_Y \subseteq A$ , da cui  $f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$ . Usando la definizione di continuità, detto  $\varepsilon$  il raggio di  $B_Y$ , scegliendo il  $\delta$  corrispondente come raggio di una palla di centro  $x$ , sia essa  $B_X$ , si ha che  $B_X \subseteq f^{-1}(B_Y) \subseteq f^{-1}(A)$ , perciò abbiamo trovato una palla centrata in  $x$  tutta contenuta in  $f^{-1}(A)$  e questo prova che è un aperto.

Viceversa, supponiamo che le controimmagini di aperti siano a loro volta aperti. Dati  $x_0 \in X$  e  $\varepsilon > 0$  si ha che  $B(f(x_0), \varepsilon)$  è un aperto di  $Y$ , perciò la sua controimmagine è un aperto, ma allora per definizione di aperto esiste  $\delta > 0$  tale che  $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$  e questo prova che  $f$  è continua.  $\square$

**Osservazione 2.2.9.** La continuità di una funzione dipende quindi solo indirettamente dalla metrica, mentre è direttamente collegata agli aperti generati dalla metrica stessa. Segue facilmente che due metriche che generano gli stessi aperti portano anche alla stessa famiglia di funzioni continue. Diamo dunque la seguente definizione.

**Definizione 2.2.10.** Due distanze  $d, d'$  su un insieme  $X$  si dicono TOPOLOGICAMENTE EQUIVALENTI se inducono la stessa famiglia di aperti.

**Lemma 2.2.11.** Siano  $d, d'$  distanze su  $X$  t.c. esiste  $k \geq 1$  t.c. per ogni  $x, y \in X$  valga  $d(x, y)/k \leq d'(x, y) \leq k \cdot d(x, y)$ . Allora  $d$  e  $d'$  sono topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un aperto indotto da  $d'$  e  $x_0 \in A$ . Per definizione di aperto esiste  $R > 0$  tale che  $B_{d'}(x_0, R) \subseteq A$ . Considero  $B_d(x_0, R/k)$ . Dato un elemento  $x \in B_d(x_0, R/k)$  ho che  $d'(x_0, x) \leq k \cdot d(x_0, x) < k \cdot R/k = R$ , dunque  $x \in B_{d'}(x_0, R)$ . Allora  $B_d(x_0, R/k) \subseteq B_{d'}(x_0, R) \subseteq A$  e dunque  $A$  è anche un aperto indotto da  $d$ . Per la simmetria delle disuguaglianze nelle ipotesi si dimostra anche l'opposto, perciò gli aperti di  $d$  e  $d'$  sono gli stessi, come voluto.  $\square$

**Corollario 2.2.12.**  $d_1, d_2, d_\infty$  sono topologicamente equivalenti su  $\mathbb{R}^n$ .



Nell'immagine sono rappresentate, nell'ordine dalla più interna alla più esterna, le palle aperte centrate nell'origine e di raggio 1 rispettivamente nelle metriche  $d_1, d_2, d_\infty$ .

*Dimostrazione.* Per AM-QM si ha che

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|}{n} \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n}},$$

da cui  $d_1(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_2(x, y)$ . Stimando tutti i termini con il massimo otteniamo che

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sup_{j=1, \dots, n} \{(x_j - y_j)^2\}} = \sqrt{n} \cdot \sup_{j=1, \dots, n} \{|x_j - y_j|\},$$

da cui  $d_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x, y)$ . Infine è ovvio che

$$\sup_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

, da cui  $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y)$ . Scegliendo  $k = \sqrt{n}$  è ora sufficiente applicare il lemma.  $\square$

Nella dimostrazione del corollario era importante che lo spazio fosse di dimensione finita. Nello spazio delle funzioni continue da  $[0, 1]$  a  $\mathbb{R}$  le tre distanze non sono topologicamente equivalenti. Dimostriamo ad esempio che due di esse non lo sono.

**Proposizione 2.2.13.** Nello spazio delle funzioni continue da  $[0, 1]$  in  $\mathbb{R}$ ,  $d_1$  e  $d_\infty$  non sono topologicamente equivalenti.

*Dimostrazione.* Se per assurdo fossero topologicamente equivalenti, l'identità da  $C([0, 1])$  in sé sarebbe continua. Sia dunque  $f_0$  la funzione costantemente nulla,

consideriamo la palla  $B_{d_\infty}(f_0, 1)$  (che equivale alle funzioni continue limitate in modulo da 1), se l'identità fosse continua potremmo trovare un  $\delta > 0$  t.c.  $B_{d_1}(f_0, \delta) \subseteq B_{d_\infty}(f_0, 1)$ . Ma la funzione  $f$  definita come segue sta in  $B_{d_1}(f_0, \delta)$  ma non in  $B_{d_\infty}(f_0, 1)$ . Sia dunque  $f(x) = 0$  per  $x = 0$  o  $x \geq \delta/2$ ,  $f(\delta/4) = 2$  e per il resto lineare a tratti. È un semplice esercizio verificare che fa quanto detto.  $\square$

## 2.3 Spazi topologici

**Definizione 2.3.1.** Uno SPAZIO TOPOLOGICO è una coppia  $(X, \tau)$ ,  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ , t.c.

- (i)  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- (ii)  $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$ ;
- (iii) se  $I$  è un insieme e  $A_i \in \tau \forall i \in I$ , allora  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ .

Allora  $\tau$  si dice TOPOLOGIA di  $X$  e gli elementi della topologia sono detti APERTI di  $\tau$ .

**Proposizione 2.3.2.** Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico, gli aperti rispetto a  $d$  definiscono una topologia.

**Definizione 2.3.3.** Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto METRIZZABILE se  $\tau$  è indotta da una distanza su  $X$ .

**Definizione 2.3.4.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico,  $C \subseteq X$  è CHIUSO se  $X \setminus C$  è aperto.

**Osservazione 2.3.5.**

- (i) possono esistere insiemi né aperti né chiusi;
- (ii)  $\emptyset$  e  $X$  sono chiusi;
- (iii) unione finita di chiusi è chiusa;
- (iv) intersezione arbitraria di chiusi è chiusa.

**Esempio 2.3.6.** Ecco alcuni esempi di spazi topologici:

- (i) tutte le topologie indotte da una metrica;
- (ii) la topologia discreta, cioè  $\tau = \mathcal{P}(X)$ , indotta dalla distanza discreta;
- (iii) la topologia indiscreta, cioè  $\tau = \{\emptyset, X\}$ ;
- (iv) la topologia cofinita, dove gli aperti sono l'insieme vuoto più tutti e soli gli insiemi il cui complementare è un insieme finito;
- (v) la topologia della semicontinuità (inferiore) su  $\mathbb{R}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\mathcal{O}_y | y \in \mathbb{R}\}$  dove  $\mathcal{O}_y = \{x \in \mathbb{R} | x > y\}$ .

**Definizione 2.3.7.** Dato uno spazio topologico  $X$  e un insieme  $B \subseteq X$ , si chiama *parte interna* di  $B$ , e la si indica con  $B^\circ$ , il più grande aperto contenuto



in  $B$ . Analogamente, la *chiusura* di  $B$ , indicata con  $\overline{B}$ , è il più piccolo chiuso che contiene  $B$ . Definiamo infine la *frontiera* (o *bordo*) di un insieme come l'insieme  $\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ$ .

Notiamo che parte interna e chiusura sono ben definite: per la prima basta prendere l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $B$  (alla peggio c'è solo il vuoto, che è contenuto in ogni insieme), per la seconda si prende l'intersezione di tutti i chiusi che lo contengono (alla peggio c'è solo  $X$ ). Per la stabilità degli aperti per unione arbitraria e dei chiusi per intersezione arbitraria, gli insiemi così ottenuti sono ancora un aperto e un chiuso e sono rispettivamente il più grande aperto contenuto e il più piccolo chiuso che contiene per come sono stati costruiti. Infine, è banale mostrare che la parte interna di un aperto è l'aperto stesso e la chiusura di un chiuso è il chiuso stesso.

**Fatto 2.3.8.**  $X = B^\circ \sqcup \partial B \sqcup (X \setminus B)^\circ$  dove con  $\sqcup$  si indica l'unione disgiunta.

*Dimostrazione.* Per definizione  $B^\circ \cup \partial B = \overline{B}$  e i due insiemi sono disgiunti. Inoltre, essendo  $\overline{B}$  il più piccolo chiuso che contiene  $B$ , il suo complementare dev'essere il più grande aperto disgiunto da  $B$ , cioè il più grande aperto contenuto in  $X \setminus B$ , che è la parte interna di quest'ultimo. La tesi segue facilmente.  $\square$

**Esercizio 2.3.9.** Sono lasciati come semplice esercizio alcuni fatti su parte interna e chiusura:

- (i)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ , ma  $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \overline{\{q\}} = \mathbb{Q}$ ,  $\overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}} = \mathbb{R}$ , quindi l'uguaglianza non vale in generale per unioni infinite;
- (ii)  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ , ma prendendo  $A = \mathbb{Q}$ ,  $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  otteniamo che può non valere l'uguaglianza;
- (iii) gli analoghi per la parte interna (attenzione: unione e intersezione si scambiano);
- (iv)  $\left(\overline{A}^\circ\right)^\circ = (\overline{A})^\circ$  e  $\overline{(\overline{A}^\circ)} = \overline{A}^\circ$ ;
- (v) trovare un esempio di  $X$  spazio topologico e  $A \subseteq X$  t.c.  
 $A, \overline{A}, (\overline{A})^\circ, \overline{(\overline{A})^\circ}, A^\circ, \overline{A}^\circ, (\overline{A}^\circ)^\circ$  sono tutti diversi.

Vediamo adesso la caratterizzazione della chiusura in spazi metrici. Premettiamo una definizione.

**Definizione 2.3.10.** Siano  $(X, d)$  spazio metrico e  $E \subseteq X$ . Diremo che  $x_0 \in X$  è *aderente* a  $E$  se per ogni  $r > 0$  vale che  $E \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$ .

Vale allora la seguente affermazione.

**Proposizione 2.3.11.** Dato  $E$  in uno spazio metrico,  $\overline{E}$  è l'insieme dei punti aderenti a  $E$ .

*Dimostrazione.* Sicuramente l'insieme dei punti aderenti contiene  $E$ , inoltre è un semplice esercizio verificare che è un insieme chiuso. Dobbiamo adesso dimostrare che è il più piccolo chiuso che contiene  $E$ . Sia dunque  $C$  un chiuso che contiene  $E$ , è ancora una volta un semplice esercizio verificare che il suo complementare è disgiunto dall'insieme dei punti aderenti, che è dunque contenuto in  $C$  e per minimalità della chiusura deve essere proprio  $\overline{E}$ .  $\square$

## 2.4 Continuità in spazi topologici

**Definizione 2.4.1.**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  si dice CONTINUA se  $f^{-1}(A) \in \tau, \forall A \in \tau'$ , cioè una funzione è continua se la controimmagine di aperti è aperta.

Notiamo che per il teorema 2.2.8, le due definizioni di funzione continua sono equivalenti per uno spazio metrico se si considera la topologia indotta dalla metrica.

**Teorema 2.4.2.**

- (i) L'identità è una funzione continua;
- (ii) composizione di funzioni continue è una funzione continua.

**Definizione 2.4.3.** Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  si dice OMEOMORFISMO se  $f$  è continua e esiste una funzione  $g : Y \rightarrow X$  continua tale che  $f \circ g = Id_Y$  e  $g \circ f = Id_X$ . Cioè  $f$  è continua, bigettiva e con inversa continua.

**Osservazione 2.4.4.**

- (i) Composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo; due spazi legati da un omeomorfismo si dicono OMEOMORFI e essere omeomorfi è una relazione di equivalenza;
- (ii) l'insieme degli omeomorfismi da  $(X, \tau)$  in sé è un gruppo;
- (iii) se  $f : X \rightarrow Y$  è continua e bigettiva non è detto che sia un omeomorfismo, cioè  $f^{-1}$  può non essere continua.



**Esempio 2.4.5.** Siano  $\tau_E$  la topologia euclidea,  $\tau_C$  la cofinita,  $\tau_D$  la discreta e  $\tau_I$  l'indiscreta. Le seguenti mappe sono dunque continue:

- $Id : (\mathbb{R}, \tau_D) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_E)$ ,
- $Id : (\mathbb{R}, \tau_E) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_C)$ ,
- $Id : (\mathbb{R}, \tau_C) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_I)$ .

Nessuna delle inverse è però continua. Più in generale,  $Id : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$  con  $\sigma \subsetneq \tau$  è continua ma l'inversa no.

**Esercizio 2.4.6.** Il seguente esercizio è frutto di una domanda fatta da uno studente a lezione e potrebbe essere più difficile di altri esercizi del corso. Trovare un esempio (o dimostrare che non esiste) di uno spazio topologico  $X$  e una funzione  $f : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau)$  continua e bigettiva con inversa non continua.



Stando a quanto dice Frigerio, probabilmente tale funzione esiste, euristicamente perché non c'è un modo facile di dimostrare il contrario.

**Soluzione** La seguente soluzione è un esempio mostrato a lezione da Gandini. Vedi te a volte il caso.

Mettiamo su  $\mathbb{Z}$  la seguente topologia:  $A \subseteq \mathbb{Z}$  è aperto se  $A = \mathbb{Z}$  o  $A \subseteq \mathbb{N}$ . È semplice verificare che è una topologia. Allora la funzione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  t.c.  $f(n) = n - 1$  è l'esempio cercato. Banalmente è bigettiva, è semplice verificare che è continua ma l'inversa no.

Introduciamo adesso un concetto che permetterà di caratterizzare la continuità in spazi topologici in modo analogo a quanto fatto per gli spazi metrici.

**Definizione 2.4.7.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico fissato e  $x_0 \in X$ . Un insieme  $U \subseteq X$  è un INTORNO di  $x_0$  se  $x_0 \in U^\circ$ , o equivalentemente se esiste  $V$  aperto con  $x_0 \in V \subseteq U$ . L'insieme degli intorni di  $x_0$  si denota con  $\mathcal{I}(x_0)$ .

**Definizione 2.4.8.**  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  è detta *continua in*  $x_0$  se per ogni intorno  $U$  di  $f(x_0)$  esiste un intorno  $V$  di  $x_0$  t.c.  $f(V) \subseteq U$ .

Appare dunque intuitivo il seguente risultato.

**Teorema 2.4.9.**  $f$  è continua  $\Leftrightarrow$  è continua in ogni  $x_0 \in X$ .

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Supponiamo  $f$  continua e  $x_0 \in X$ , sia inoltre  $U$  un intorno di  $f(x_0)$ . Per definizione di intorno esiste un aperto  $A$  con  $f(x_0) \in A \subseteq U$ , perciò  $x_0 \in f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(U)$ , ma poiché  $f$  è continua abbiamo che  $f^{-1}(A)$  è ancora un aperto, perciò ponendo  $V = f^{-1}(U)$  abbiamo che  $V$  è un intorno di  $x_0$  t.c.  $f(V) \subseteq U$ , che è quello che volevamo.

$(\Leftarrow)$  Supponiamo  $f$  continua in ogni punto di  $X$  e sia  $A$  un insieme aperto in  $Y$ . Per ogni  $x \in f^{-1}(A)$ ,  $A$  è un intorno di  $f(x)$ . Ma dato che  $f$  è continua in ogni punto di  $X$ , esiste un intorno  $V_x$  di  $x$  t.c.  $x \in V_x \subseteq f^{-1}(A)$ . Per definizione di intorno, ciò significa che esiste un aperto  $A_x$  di  $X$  t.c.  $x \in A_x \subseteq V_x \subseteq f^{-1}(A)$ . Dunque dev'essere  $f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} A_x$ , quindi  $f^{-1}(A)$  è un aperto in  $X$  per ogni  $A$  aperto in  $Y$ , il che equivale a dire che  $f$  è continua.  $\square$

## 2.5 Ordinamento fra topologie, basi e prebasi

Vogliamo mettere un ordinamento parziale sulle topologie di un certo insieme fissato.

**Definizione 2.5.1.** Dato un insieme  $X$  su cui sono definite le topologie  $\tau$  e  $\tau'$ , si dice che  $\tau$  è MENO FINE di  $\tau'$  se  $\tau \subseteq \tau'$ , cioè ogni aperto di  $\tau$  è anche aperto di  $\tau'$ .  $\tau'$  si dice PIÙ FINE di  $\tau$ .

**Osservazione 2.5.2.** Equivalentemente alla definizione sopra, si può dire che  $\tau$  è meno fine di  $\tau'$  se e solo se  $Id : (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$  è continua.

Quando  $\tau$  è meno fine di  $\tau'$  scriveremo  $\tau < \tau'$ . Si noti che dalla definizione ogni topologia è meno fine di se stessa, cioè  $\tau < \tau' \forall \tau$ .

**Esempio 2.5.3.**  $\tau_I < \tau_C < \tau_E < \tau_D$ ,  $\tau_I < \tau < \tau_D \forall \tau$ .

**Lemma 2.5.4.** Intersezione arbitraria di topologie su  $X$  è ancora una topologia su  $X$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\tau_i$ ,  $i \in I$  topologie su  $X$ . Verifichiamo che  $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$  soddisfa gli assiomi di topologia.

- (i)  $\emptyset, X \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow \emptyset, X \in \tau$ .
- (ii)  $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1, A_2 \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau$ .
- (iii) Siano  $A_j, j \in J$  insiemi che stanno in  $\tau$ .  
 $A_j \in \tau \forall j \in J \Rightarrow A_j \in \tau_i \forall i \in I, j \in J \Rightarrow \bigcup_{j \in J} A_j \in \tau_i \forall i \in I \Rightarrow$   
 $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$ .

□

**Corollario 2.5.5.** Data una famiglia  $\tau_i, i \in I$  di topologie su  $X$ , esiste la più fine tra le topologie meno fini di ogni  $\tau_i$ : è  $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ .

**Corollario 2.5.6.** Sia  $X$  un insieme,  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ , allora esiste la topologia meno fine tra quelle che contengono  $S$ . Tale topologia si dice *generata* da  $S$  e  $S$  si dice *PREBASE* della topologia. Se  $\Omega = \{\tau \text{ topologia} \mid S \in \tau\}$  (che è non vuoto perché contiene almeno la topologia discreta), la topologia cercata è  $\bigcap_{\tau \in \Omega} \tau$ .

**Definizione 2.5.7.** sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico fissato, una BASE di  $\tau$  è un insieme  $\mathcal{B} \subseteq \tau$  t.c.  $\forall A \in \tau, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$  t.c.  $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Ovvero  $\mathcal{B}$  è una base se ogni aperto di  $\tau$  può essere scritto come unione qualunque di elementi di  $\mathcal{B}$ .

**Esempio 2.5.8.** Se  $X$  è uno spazio metrico, una base della topologia indotta sono le palle.

**Definizione 2.5.9.**  $(X, \tau)$  si dice a *base numerabile* (o che soddisfa il SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ) se ammette una base numerabile.

**Proposizione 2.5.10.** Sia  $X$  un insieme senza topologia,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$  è base di una topologia su  $X \Leftrightarrow$  valgono le seguenti:

- (i)  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ ;

- (ii)  $\forall A, A' \in \mathcal{B}, \exists B_i \in \mathcal{B}, i \in I$  t.c.  $A \cap A' = \bigcup_{i \in I} B_i$ . Cioè ogni intersezione di una coppia di elementi di  $\mathcal{B}$  può essere scritta come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Ovviamente, se  $\mathcal{B}$  è la base di una topologia su  $X$ , l'insieme  $X$  deve essere unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , inoltre tutti gli elementi di  $\mathcal{B}$  devono essere sottoinsiemi di  $X$ , da cui discende (i).

$A, A' \in \mathcal{B} \Rightarrow A, A' \in \tau \Rightarrow A \cap A' \in \tau$ , per cui  $A \cap A'$  deve poter essere esprimibile come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , che è l'affermazione (ii).

( $\Leftarrow$ ) Dobbiamo mostrare che l'insieme  $\tau$  di tutte le possibili unioni di elementi di  $\mathcal{B}$  soddisfa gli assiomi di topologia.

Chiaramente  $\emptyset \in \tau$  come unione di un insieme vuoto di elementi di  $\mathcal{B}$  e  $X \in \tau$  per (ii). Se faccio l'unione arbitraria di insiemi ottenuti come unione di elementi di  $\mathcal{B}$  ottengo ovviamente un insieme che è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ .

Infine,  $A, A' \in \tau \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} B_i, A' = \bigcup_{j \in J} B_j$  con  $B_i, B_j \in \mathcal{B} \forall i \in I, j \in J$ .

$$\text{Allora } A \cap A' = \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j), \text{ ma tutti i } B_i \text{ e } B_j$$

stanno in  $\mathcal{B}$ , dunque per (ii) tutti i  $B_i \cap B_j$  sono rappresentabili come unione di elementi di  $\mathcal{B}$ , perciò anche la loro unione, che è proprio  $A \cap A'$ , può essere scritta in quel modo e quindi sta in  $\tau$ .  $\square$

**Proposizione 2.5.11.** Siano  $X$  un insieme e  $S \subseteq \mathcal{P}(X)$  la prebase di una topologia  $\tau$  su  $X$ . Allora:

- (i) le intersezioni finite di elementi di  $S \cup \{X\}$  sono una base di  $\tau$ ;
- (ii)  $A \in \tau \Leftrightarrow A$  è unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di  $S \cup \{X\}$ .

*Dimostrazione.* Sicuramente, poiché  $\tau$  è generata da  $S$ ,  $S \subseteq \tau$  e quindi anche tutte le intersezioni finite di elementi di  $S$  e le unioni arbitrarie di tali intersezioni devono stare in  $\tau$ . Se mostriamo che sono sufficienti a definire una topologia, abbiamo finito.

Chiaramente il vuoto è l'intersezione di un insieme vuoto di insiemi e  $X$  c'è perché lo abbiamo aggiunto a mano.

Unione arbitraria di unioni arbitrarie di elementi di un insieme è ancora unione arbitraria di elementi di tale insieme.

Siano ora  $A_1 = \bigcup_{i \in I} B_i, A_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$  con tutti i  $B_i, B_j$  intersezioni finite di elementi di  $S$ . Allora

$$A_1 \cap A_2 = \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{i \in I, j \in J} (B_i \cap B_j),$$

ma intersezione di due intersezioni finite di elementi di  $S$  è ancora un'intersezione finita di elementi di  $S$ , perciò  $A_1 \cap A_2$  è ancora un'unione di intersezioni

finita di elementi di  $S$ . Questo basta per dimostrare (i) e (ii) è una semplice riformulazione.  $\square$

**Proposizione 2.5.12.** Sia  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$  e  $S, \mathcal{B}$  rispettivamente una prebase e una base di  $\tau'$ . Allora sono equivalenti:

- (i)  $f$  è continua;
- (ii)  $f^{-1}(A)$  è aperto per ogni  $A \in S$ ;
- (iii)  $f^{-1}(A)$  è aperto per ogni  $A \in \mathcal{B}$ .

*Dimostrazione.* Poiché ogni base è una prebase,  $((i) \Leftrightarrow (ii)) \Rightarrow ((i) \Leftrightarrow (iii))$ .

$(i) \Rightarrow (ii)$  è ovvia, perciò resta da dimostrare  $(ii) \Rightarrow (i)$ .

Sia  $A$  un aperto di  $\tau'$ . Per la proposizione 2.5,  $A$  si può scrivere come unione di intersezioni finite di elementi di  $S$ . Poiché la controimmagine di un'unione è l'unione delle controimmagini e la controimmagine di un'intersezione è l'intersezione delle controimmagini, la controimmagine di  $A$  è unione di intersezioni finite di controimmagini di elementi di  $S$ , ma queste controimmagini sono aperte, perciò un'unione di loro intersezioni finite è ancora aperta, perciò  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $X$  per ogni  $A$  aperto in  $Y$ , e questo equivale a dire che  $f$  è continua.  $\square$

## 2.6 Assiomi di numerabilità

Nella definizione 2.5.9 abbiamo stabilito quando uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità. Vediamo gli altri due.

**Definizione 2.6.1.**  $Y \subseteq X$  si dice **DENSO** se  $\overline{Y} = X$ .

**Osservazione 2.6.2.**  $Y$  è denso  $\Leftrightarrow Y \cap A \neq \emptyset$  per ogni  $A$  aperto non vuoto.

**Definizione 2.6.3.**  $X$  si dice **SEPARABILE** (o che soddisfa il **TERZO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ**) se ammette un sottoinsieme denso numerabile.

**Proposizione 2.6.4.** Se  $X$  è a base numerabile,  $X$  è separabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\{B_i, i \in \mathbb{N}\}$  la base numerabile di  $X$  e scegliamo per ogni  $i \in \mathbb{N}$  un elemento  $x_i \in B_i$ . Vogliamo mostrare che  $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$  è un sottoinsieme denso numerabile di  $X$ .

Ovviamente è numerabile. Per dimostrare che è denso, mostriamo che interseca ogni aperto non vuoto.

Sia dunque  $A$  un aperto non vuoto di  $X$ , allora, dato che i  $B_i$  formano una base,  $A$  è esprimibile come unione di alcuni di essi, in particolare esiste  $i_0$  t.c.  $B_{i_0} \subseteq A$  e perciò  $x_{i_0} \in B_{i_0} \Rightarrow x_{i_0} \in A$ , dunque l'intersezione tra il nostro insieme e un aperto non vuoto non è mai vuota, come voluto.  $\square$

**Proposizione 2.6.5.** Se  $(X, \tau)$  è metrizzabile,  $X$  è separabile  $\Leftrightarrow$  è a base numerabile.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Mostriamo che per ogni aperto  $A$  e per ogni  $x \in A$ , esiste una palla di centro un elemento del sottoinsieme denso numerabile e raggio un razionale positivo tutta contenuta in  $A$ . Allora tali palle formano una base numerabile.

Sicuramente esiste una palla di centro  $x$  e raggio  $R \in \mathbb{R}^+$  tutta contenuta in  $A$ . Consideriamo la palla di centro  $x$  e raggio  $R/3$ , che è contenuta nella prima. Questa palla è in particolare un insieme aperto, dunque ha un elemento  $y$  in comune con il sottoinsieme denso numerabile. Scegliendo un razionale  $R/3 < r < 2 \cdot R/3$  si ottiene che la palla di centro  $y$  e raggio  $r$  è tutta contenuta nella palla di centro  $x$  e raggio  $R$ , dunque è tutta contenuta in  $A$ , e contiene  $x$ , come voluto.

L'altra freccia discende dalla proposizione 2.6.4.  $\square$

**Definizione 2.6.6.** Un SISTEMA FONDAMENTALE DI INTORNI per  $x_0$  è una famiglia  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}(x_0)$  t.c.  $\forall U \in \mathcal{I}(x_0) \exists V \in \mathcal{F}$  con  $V \subseteq U$ .

**Esempio 2.6.7.** Se  $X$  è uno spazio metrico, le palle centrate in  $x_0$  di raggio  $1/n$  al variare di  $n$  intero positivo sono un sistema fondamentale di intorni. In particolare, sono un sistema fondamentale di intorni numerabile.

**Definizione 2.6.8.**  $X$  soddisfa il PRIMO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ se ogni  $x_0 \in X$  ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

**Fatto 2.6.9.** Se  $X$  è metrizzabile  $X$  soddisfa il primo assioma di numerabilità. Ciò discende direttamente dall'esempio 2.6.7.

**Proposizione 2.6.10.** Il secondo assioma di numerabilità implica il primo e il terzo assioma di numerabilità. Discende dalla proposizione 2.6.5 che in spazi metrici vale anche che il terzo assioma di numerabilità implica il secondo assioma di numerabilità.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $X$  soddisfi il secondo assioma di numerabilità. Per la proposizione 2.6.4 otteniamo subito che soddisfa il terzo. Vogliamo adesso mostrare che soddisfa anche il primo. Sia  $\mathcal{B}$  una base numerabile. Dato  $x \in X$ , consideriamo l'insieme  $\{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ . Essendo un sottoinsieme di  $\mathcal{B}$  è sicuramente numerabile e contiene solo insiemi aperti, cioè intorni di  $x$ . Mostriamo che è un sistema fondamentale di intorni per  $x$ .

Consideriamo un intorno  $U$  di  $x$ . Questo ha un sottoinsieme aperto  $V \subseteq U$  contenente  $x$ , dunque  $V$  è esprimibile come unione di elementi di  $\mathcal{B}$  e ce ne dev'essere uno che contiene  $x$ , che sta quindi nel nostro insieme ed è contenuto in  $V$  e quindi in  $U$ . Dunque, per ogni intorno  $U$  di  $x$  troviamo un elemento del nostro insieme di intorni di  $x$  contenuto in  $U$ , che è quello che dovevamo dimostrare.  $\square$

**Proposizione 2.6.11.**

- (i)  $A \subseteq X$  è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto;
- (ii) sia  $C \subseteq X$  un insieme generico, allora  $x \in \overline{C}$  se e solo se ogni intorno di  $x$  interseca  $C$ .

*Dimostrazione.* (i) Sia  $A$  un insieme che è intorno di ogni suo punto, cioè per ogni  $x \in A$  esiste un aperto  $V_x \subseteq A$  che lo contiene. Allora vale che  $A = \bigcup_{x \in A} V_x$ . Poiché  $A$  è unione di aperti è aperto.

Viceversa sia  $A$  aperto. Allora ogni suo punto è interno ad esso.

- (ii) Si ha che  $\overline{C}$  è il complementare di  $(X \setminus C)^\circ$ . Dunque  $x$  appartiene a  $\overline{C}$  se e solo se non è interno a  $X \setminus C$ , cioè se e solo se ogni suo intorno  $U$  non è tutto contenuto nel complementare di  $C$ . Questo accade quando ogni intorno di  $x$  interseca  $C$  in almeno un punto.

□

**Esempio 2.6.12.** La retta di Sorgenfrey. Su  $X = \mathbb{R}$  consideriamo il seguente insieme:

$$\mathcal{B} = \{ [a, b) \mid a < b \}.$$

Allora valgono le seguenti:

- (i)  $\mathcal{B}$  è base di una topologia  $\tau$ ;
- (ii)  $\tau$  è più fine della topologia euclidea;
- (iii)  $\tau$  è separabile;
- (iv)  $\tau$  non è a base numerabile;
- (v)  $\tau$  non è metrizzabile;
- (vi)  $\tau$  è primo numerabile.

*Dimostrazione.* (i) Verifichiamo utilizzando la proposizione 2.5.10. Il primo punto vale in quanto  $\mathbb{R}$  è coperto da intervalli del tipo  $[-n, n)$  con  $n$  naturale. Inoltre dati i due intervalli  $[a, b)$  e  $[c, d)$ , distinguo:

- $b \leq c$ . Allora l'intersezione è vuota.
- $c < b$  e  $b \leq d$ . Allora l'intersezione è  $[c, b)$ .
- $c < b$  e  $b > d$ . Allora l'intersezione è  $[c, d)$ .

In ogni caso vale anche il secondo punto.

- (ii) Voglio mostrare che ogni aperto di  $\tau$  è anche aperto di  $\tau_E$ . Sia allora  $(a, b)$  un aperto della base degli intervalli aperti della topologia euclidea. Si considerino gli aperti in  $\tau$  della forma  $[a + \frac{1}{n}, b)$  con  $n$  naturale positivo. L'unione di tutti questi è allora  $(a, b)$ .
- (iii) Si noti che  $\mathbb{Q}$  è un denso numerabile.
- (iv) Sia  $\mathcal{D}$  una base di  $\tau$ . Si noti che ogni intervallo del tipo  $[x, x + 1)$ , con  $x$  reale, può essere scritto come unione degli elementi della base solo se in  $\mathcal{D}$  c'è un elemento  $D$  tale che  $x \in D \subseteq [x, x + 1)$ , da cui  $\inf(D) = x$ . Allora



la mappa

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ D &\mapsto \inf(D)\end{aligned}$$

deve essere surgettiva. Dunque la base scelta non può essere numerabile.

- (v) Semplice conseguenza dei punti precedenti e della proposizione 2.6.5.
- (vi) Basta notare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  l'insieme  $\{[x - 1/n, x + 1/n] | n \in \mathbb{Z}^+\}$  è una famiglia di intorni numerabile per  $x$ .

□

**Esempio 2.6.13.** Topologia di Zariski. Sia  $\mathbb{K}$  un campo. Definiamo una topologia  $\tau_Z$  in  $\mathbb{K}^n$  in cui i chiusi sono tutti e soli gli insiemi i cui elementi si annullano in tutti i polinomi di una famiglia arbitraria (non vuota)  $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  di polinomi a  $n$  variabili con coefficienti in  $\mathbb{K}$ . Dimostreremo che  $\tau_Z$  è effettivamente una topologia, che è meno fine di quella euclidea quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Inoltre, quando  $n = 1$  e per  $\mathbb{K}$  generico,  $\tau_Z$  coincide con la topologia cofinita.

*Dimostrazione.* Dimostreremo che i chiusi soddisfano le proprietà di topologia (per i chiusi, ovviamente), per passaggio al complementare si può concludere che  $\tau_Z$  è una topologia.

Ovviamente il vuoto è chiuso perché la proprietà dei suoi elementi di annullarsi in un qualunque insieme di polinomi è sempre vera a vuoto, mentre  $\mathbb{K}^n$  è chiuso perché tutti gli elementi si annullano nella famiglia formata dal solo polinomio nullo.

Siano ora  $C_1, C_2$  due chiusi i cui elementi si annullano, per definizione, nei polinomi rispettivamente delle famiglie  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ . Consideriamo la famiglia  $\mathcal{F}_{1,2} = \{f_1 \cdot f_2 | f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2\}$ . Mostriamo che l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di  $\mathcal{F}_{1,2}$  è proprio  $C_1 \cup C_2$ . Ovviamente se  $x \in C_1 \cup C_2$  possiamo dire senza perdita di generalità che  $x$  si annulla in tutti i polinomi in  $\mathcal{F}_1$ , e quindi banalmente anche in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_{1,2}$ . D'altro canto, se  $x$  si annulla in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_{1,2}$ , si deve annullare almeno o in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_1$  o in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_2$ . Se per assurdo così non fosse, esisterebbero  $f_1 \in \mathcal{F}_1, f_2 \in \mathcal{F}_2$  t.c.  $f_1(x) \neq 0 \neq f_2(x)$  e, poiché siamo in un campo, si avrebbe  $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ , assurdo. Dunque  $x \in C_1 \cup C_2$ .

Consideriamo adesso dei chiusi  $C_i, i \in I$  definiti dalle famiglie  $\mathcal{F}_i$ . Mostriamo che  $C = \bigcap_{i \in I} C_i$  è l'insieme dei punti che si annullano nei polinomi di  $\mathcal{F}_I = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ .

Se  $x \in C$  allora  $x \in C_i \forall i \in I$  e dunque si annulla in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_i$  per ogni  $i$ , quindi si annulla in tutti i polinomi della loro unione, che è proprio  $\mathcal{F}_I$ . Viceversa, se  $x$  si annulla in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_I$  allora si annulla in tutti i polinomi di ogni suo sottoinsieme, in particolare in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}_i \forall i \in I$ , quindi  $x \in C_i$  per ogni  $i$  da cui  $x \in C$ .

Poniamo ora  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Poiché i polinomi in  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  sono funzioni continue per la topologia euclidea, la controimmagine di un aperto è a sua volta un

aperto. Per passaggio al complementare la controimmagine di un chiuso è a sua volta un chiuso. Ma allora, sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di polinomi, ho che, essendo  $\{0\}$  chiuso in  $\tau_E$  di  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(0)$  (qui si intende la controimmagine) è chiuso in  $\tau_E$  di  $\mathbb{R}^n$  per ogni  $f \in \mathcal{F}$ . Ma l'insieme dei punti che si annullano in tutti i polinomi di  $\mathcal{F}$  può essere descritto come  $\bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(0)$ , che essendo intersezione di chiusi

è chiuso in  $\tau_E$ , quindi tutti i chiusi di  $\tau_Z$  sono chiusi in  $\tau_E$ , per passaggio al complementare la stessa cosa con gli aperti e dunque  $\tau_Z < \tau_E$ .

Sia adesso  $\mathbb{K}$  generico e  $n = 1$ . Sia  $p$  un generico polinomio in  $\mathbb{R}[x]$  e  $\overline{\mathbb{K}}$  la chiusura algebrica di  $\mathbb{K}$ . Per il teorema fondamentale dell'algebra,  $p$  ha al più  $\deg p$  zeri in  $\overline{\mathbb{K}}$ , quindi a maggior ragione ne ha al più un numero finito in  $\mathbb{K}$ . Dunque i punti che si annullano in tutti i polinomi di una generica famiglia di polinomi sono finiti (limitati dal grado di un qualsiasi polinomio della famiglia), dunque i chiusi sono tutti finiti. Considerando invece un insieme finito  $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{K}$ , esso si annulla in tutti i polinomi dell'ideale generato da  $(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_m)$ , dunque è vero anche il viceversa, cioè che tutti i finiti sono chiusi, quindi in questo caso  $\tau_Z$  coincide con la topologia euclidea.  $\square$

**Fatto 2.6.14.** Se  $X$  non è numerabile, la topologia cofinita su  $X$  soddisfa solo il terzo assioma di numerabilità.

*Dimostrazione.* Per la proposizione 2.6.10, se dimostriamo che non soddisfa il primo otteniamo anche che non soddisfa il secondo. Sia dunque per assurdo  $x_0 \in X$  e  $\mathcal{F}$  un suo sistema fondamentale di intorni numerabile. Notiamo che per ogni  $x \in X, x \neq x_0$  l'insieme  $X \setminus \{x\}$  è un aperto, dunque esiste un intorno di  $x_0$  tutto contenuto in esso, cioè che non contiene  $x$ . Notiamo, per come è definita la topologia cofinita, che gli intorni, essendo sovrainsiemi di insiemi aperti, sono a loro volta aperti, cioè il loro complementare è finito. Ma dato che per ogni  $x \in X \setminus \{x_0\}$  esiste un intorno di  $x_0$  che non contiene  $x$ , posso scrivere  $X \setminus \{x_0\}$ , che è ancora un insieme numerabile, come l'unione dei complementari degli insiemi in  $\mathcal{F}$ , cioè un'unione numerabile di insiemi finiti, che è numerabile, da cui l'assurdo.

Per dire che soddisfa il terzo assioma, osserviamo che qualunque sottoinsieme infinito di  $X$  deve necessariamente intersecare in qualche punto il complementare di un insieme finito, e quindi, se consideriamo un qualunque insieme infinito di cardinalità numerabile, esso ha intersezione non nulla con tutti gli aperti ed è di conseguenza un denso numerabile.  $\square$

Procediamo adesso a caratterizzare, negli insiemi che soddisfano il primo assioma di numerabilità, aperti, chiusi e continuità tramite successioni. Diamo prima una definizione.

**Definizione 2.6.15.**  $l \in X$  è detto *limite* della successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se per ogni intorno  $U$  di  $l$  esiste  $n_0 \in \mathbb{N}$  t.c. per ogni  $n \geq n_0$  si ha che  $a_n \in U$ .

Passiamo dunque alle varie caratterizzazioni. Nei tre enunciati seguenti,  $X$  sarà sempre uno spazio topologico primo numerabile.

**Proposizione 2.6.16.** Un sottoinsieme  $A \subseteq X$  è aperto  $\Leftrightarrow$  è aperto per successioni (si dice aperto per successioni?), cioè se per ogni successione  $(a_k)$  di elementi di  $x$  che converge a un limite  $l \in A$  esiste  $k_0$  t.c. per ogni  $k \geq k_0$  si ha  $a_k \in A$ .

*Dimostrazione.* Notiamo prima il seguente fatto: se  $U_k, n \in \mathbb{N}$  è un sistema fondamentale di intorni numerabile per  $x$ , definiamo  $V_k = U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_k$ . Allora  $V_k, k \in \mathbb{N}$  è un sistema fondamentale di intorni numerabile tale che  $V_{k+1} \subseteq V_k$ .

( $\Rightarrow$ ) Sia  $A$  un aperto e  $(a_k)$  una successione avente limite  $l \in A$ . Poiché  $A$  stesso è un intorno di  $l$ , si conclude che esiste  $k_0$  t.c.  $a_k \in A$  per ogni  $k \geq k_0$  dalla definizione di limite.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $A$  un insieme aperto per successioni e prendiamo  $x \in A$ . Vogliamo mostrare che esiste un intorno  $U_x$  di  $x$  tutto contenuto in  $A$ . Se per assurdo così non fosse, allora ogni intorno di  $x$  avrebbe un elemento non contenuto in  $A$ . Consideriamo adesso un sistema fondamentale di intorni numerabile  $V_k, k \in \mathbb{N}$ , e lo prendiamo t.c.  $V_{k+1} \subseteq V_k$ . Per ciascuno di questi intorni, prendiamo un elemento  $a_k \in V_k$  t.c.  $a_k \notin A$ , che esiste per ipotesi assurda (alcuni elementi possono anche ripetersi, non ha importanza). Allora avremmo, dato che il sistema di intorni è fondamentale e che  $V_{k'} \subseteq V_k$  se  $k' > k$  (segue da  $V_{k+1} \subseteq V_k$ ), che la successione  $(a_k)$  sta definitivamente in ogni intorno di  $x$  e dunque ha limite  $x$ , ma è tutta fuori da  $A$ , assurdo perché  $A$  è aperto per successioni. Allora per ogni  $x \in A$  esiste un intorno  $U_x$  t.c.  $U_x \subseteq A$ , ma questo ci dice anche che per ogni  $x \in A$  esiste un aperto  $A_x$  t.c.  $x \in A_x \subseteq U_x \subseteq A$ , da cui otteniamo che  $A = \bigcup_{x \in A} A_x$  è un'unione di aperti e dunque è aperto.  $\square$

**Proposizione 2.6.17.** Un sottoinsieme  $C \subseteq X$  è chiuso  $\Leftrightarrow$  è chiuso per successioni, cioè per ogni successione  $(a_k)$  di elementi di  $C$  che converge a un limite  $l$ , anche  $l \in C$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Supponiamo  $C$  chiuso e sia  $(a_k)$  una successione di elementi di  $C$  con limite  $l$ . Per assurdo,  $l \notin C$ . Allora  $l \in X \setminus C$ , che è un insieme aperto, in particolare  $X \setminus C$  è un intorno di  $l$ . Esiste dunque, per definizione di limite, un  $k_0 \in \mathbb{N}$  t.c. per ogni  $k \geq k_0$  si abbia che  $a_k \in X \setminus C$ , ma  $a_k \in C$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , assurdo. Questa freccia vale in tutti gli spazi topologici.

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo adesso che per ogni successione  $(a_k)$  di elementi di  $C$  avente limite  $l$  si abbia  $l \in C$ . Consideriamo un elemento  $x \in X \setminus C$ . Vogliamo mostrare che esiste un intorno  $U_x$  di  $x$  tutto contenuto in  $X \setminus C$ . Se così non fosse, per ogni intorno di  $x$  esisterebbe un elemento di  $C$  in esso contenuto. Poiché  $X$  è primo numerabile, consideriamo dunque un sistema fondamentale di intorni numerabile di  $x$ , sia esso  $V_k, k \in \mathbb{N}$ , e come nella dimostrazione precedente lo prendiamo t.c.  $V_{k+1} \subseteq V_k$ . Adesso scegliamo per ogni  $k$  un elemento  $a_k \in V_k$  t.c.

$a_k \in C$ , che esiste per l'ipotesi assurda. Notiamo che alcuni di questi elementi possono essere uguali, non ha importanza. Dato che abbiamo preso un sistema di intorni fondamentale, per ogni intorno  $U$  di  $x$  esiste un  $k_0$  t.c.  $V_{k_0} \subseteq U$ . Ma poiché  $V_k \subseteq V_{k_0}$  per ogni  $k \geq k_0$  (facile conseguenza di  $V_{k+1} \subseteq V_k$ ), ho che  $a_k \in V_k \subseteq V_{k_0} \subseteq U$  per ogni  $k \geq k_0$ . Riassumendo, per ogni  $U$  intorno di  $x$  esiste un  $k_0$  t.c. per ogni  $k \geq k_0$  si ha  $a_k \in U$ , ma questo per definizione significa che  $x$  è il limite di  $(a_k)$ , assurdo poiché  $a_k \in C$  per ogni  $k$  mentre  $x \in X \setminus C$ , contro l'ipotesi iniziale che per tutte le successioni in  $C$  aventi limite anche il limite è in  $C$ . Dunque per ogni  $x \in X \setminus C$  esiste un intorno  $U_x \subseteq X \setminus C$ , da cui si ha che esiste un aperto  $A_x$  con  $x \in A_x \subseteq U_x \subseteq X \setminus C$ . Ma allora,  $X \setminus C = \bigcup_{x \in X \setminus C} A_x$  che un'unione di aperti, perciò  $X \setminus C$  è aperto e di conseguenza  $C$  è chiuso.  $\square$

**Proposizione 2.6.18.** Sia  $Y$  uno spazio topologico (che non deve necessariamente soddisfare il primo assioma di numerabilità). Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è continua in  $\bar{x} \Leftrightarrow$  per ogni successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente a  $\bar{x}$  la successione  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(\bar{x})$ .

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Supponiamo che  $f$  sia continua in  $\bar{x}$  e consideriamo una generica successione  $(x_n)$  convergente a  $\bar{x}$ . Prendiamo un intorno  $U$  di  $f(\bar{x})$  in  $Y$ . Dato che  $f$  è continua in  $\bar{x}$ , esiste un intorno  $V$  di  $\bar{x}$  in  $X$  t.c.  $f(V) \subseteq U$ . Prendiamo, per ipotesi di convergenza,  $n_0 \in \mathbb{N}$  t.c.  $a_n \in V$  per ogni  $n \geq n_0$ . Allora si ha anche, sempre per ogni  $n \geq n_0$ ,  $f(x_n) \in U$ , da cui otteniamo che  $(f(x_n))$  converge a  $f(\bar{x})$ . Questa freccia vale per  $X$  spazio topologico qualsiasi.  $(\Leftarrow)$  Supponiamo adesso che per ogni successione convergente in  $X$  la successione immagine converga all'immagine del limite in  $Y$ . Per assurdo,  $f$  non è continua in  $\bar{x}$ . Allora deve esistere un intorno  $U$  di  $f(\bar{x})$  t.c. per ogni intorno  $V$  di  $\bar{x}$  si ha  $f(V) \not\subseteq U$ . Prendiamo un sistema fondamentale di intorni numerabile di  $\bar{x}$ , sia esso  $V_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e come nella dimostrazione precedente lo prendiamo t.c.  $V_{n+1} \subseteq V_n$  per ogni  $n$ . Prendiamo, per ogni  $n$ , un elemento  $x_n \in V_n$  t.c.  $f(x_n) \notin U$ , che esiste per l'ipotesi assurda. Allora si mostra, come nella dimostrazione precedente, che la successione  $(x_n)$  tende a  $\bar{x}$ , ma le loro immagini  $f(x_n)$  sono tutte fuori dallo stesso intorno  $U$  di  $f(\bar{x})$ , dunque la successione  $(f(x_n))$  non tende a  $f(\bar{x})$ , assurdo per ipotesi.  $\square$

## 2.7 Sottospazi topologici

**Definizione 2.7.1.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico,  $Y \subseteq X$  un sottoinsieme, cioè esiste una mappa iniettiva  $i : Y \hookrightarrow X$  di inclusione. La topologia ristretta su  $Y$  da  $\tau$  è la topologia meno fine che rende  $i$  continua.

**Osservazione 2.7.2.** Per avere  $i$  continua, serve che per ogni  $U$  aperto di  $\tau$ , si abbia  $i^{-1}(U)$  aperto nella topologia ristretta  $\tau|_Y$ . Poiché  $i^{-1}(U) = U \cap Y$ , si ha in effetti che per ogni aperto  $U$  di  $\tau$ ,  $U \cap Y \in \tau|_Y$ .

Siccome  $\sigma = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$  è una topologia su  $Y$  che rende continua  $i$  e  $\sigma \subseteq \tau|_Y$ , deve valere l'uguaglianza in quanto  $\tau|_Y$  è la meno fine con tali proprietà.

Questo ci permette anche di caratterizzare gli aperti (rispettivamente chiusi) di  $Y$  come l'intersezione degli aperti (rispettivamente chiusi) di  $X$  con  $Y$ .

**Esercizio 2.7.3.** Siano  $A \subseteq Y \subseteq X$ , allora la chiusura di  $A$  in  $Y$  con la topologia di sottospazio è  $\overline{A} \cap Y$ , dove con  $\overline{A}$  s'intende la chiusura di  $A$  in  $X$ .

**Osservazione 2.7.4.** Vale anche che se  $\mathcal{B}$  è base per  $\tau$ , allora

$$\mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

è una base per  $\tau|_Y$ . La dimostrazione è analoga a quella fatta per le topologie.

**Definizione 2.7.5.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $Y \subseteq X$  un sottoinsieme generico. La distanza  $d$  può essere ristretta a  $Y \times Y$ . In tal caso  $d|_{Y \times Y}$ , che verrà indicata anche come  $d|_Y$  è una distanza su  $Y$ .

**Proposizione 2.7.6.** Nel setting della definizione precedente, siano  $\tau$  la topologia indotta da  $d$  su  $X$ ,  $\tau|_Y$  la restrizione di  $\tau$  a  $Y$ , e  $\sigma$  la topologia indotta da  $d|_Y$  su  $Y$ . Allora  $\tau|_Y = \sigma$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{D}$  rispettivamente basi per  $\tau|_Y$  e  $\sigma$ . Cioè:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{Y \cap \{x \in X \text{ t.c. } d(x, x_0) < r, \quad x_0 \in X, \quad r \in \mathbb{R}^+\}\} \\ &= \{y \in Y \text{ t.c. } d(y, x_0) < r, \quad x_0 \in X, \quad r \in \mathbb{R}^+\} \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = \{y \in Y \text{ t.c. } d(y, y_0) < r, \quad y_0 \in Y, \quad r \in \mathbb{R}^+\}$$

Chiaramente  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$ , quindi anche  $\sigma \subseteq \tau|_Y$ .

Inoltre, poiché le palle sono aperte, preso un  $B \in \mathcal{B}$ , per ogni  $y \in B \cap Y$  esiste un  $r_y > 0$  tale che  $D_y = B(y, r_y)$  sia contenuto in  $B$ . per cui si ha che

$$B = \bigcup_{y \in B \cap Y} D_y.$$

Ma ogni  $D_y$  è un elemento della base  $\mathcal{D}$ , quindi ogni aperto di  $\tau|_Y$  è un aperto di  $\sigma$ , concludendo l'ultima inclusione.  $\square$

**Definizione 2.7.7.** Siano  $(X, \tau)$  spazio topologico,  $Y \subseteq X$ . Allora  $Y$  si dice discreto in  $X$  se  $\tau|_Y = \mathcal{P}(Y)$ , cioè la topologia ristretta a  $Y$  è quella discreta.

**Osservazione 2.7.8.** Se  $Y$  è discreto in  $X$ , allora per ogni  $y \in Y$  esiste un aperto  $U$  di  $X$  tale che  $U \cap Y = \{y\}$ .

**Teorema 2.7.9.** *Proprietà universale delle immersioni.* Sia  $X$  spazio topologico e  $Y \subseteq X$  con  $i : Y \hookrightarrow X$  mappa di immersione. Allora per ogni spazio topologico  $Z$  e per ogni funzione  $f : Z \rightarrow Y$ , si ha che  $f$  è continua se e solo se  $i \circ f$  è continua.

*Dimostrazione.* Poiché  $i$  è continua per la definizione della topologia su  $Y$ , e poiché la composizione di continue è continua, si ha che se  $f$  è continua, anche  $i \circ f$  lo è.

Per l'altra implicazione, supponiamo  $i \circ f$  continua e sia  $A$  un aperto di  $Y$ . Allora esiste  $U$  aperto di  $X$  tale che  $U \cap Y = A$ , e vale  $i^{-1}(U) = A$ . Allora  $(i \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = f^{-1}(A)$  è aperto in  $Z$ .  $\square$

**Teorema 2.7.10.** *Universalità della proprietà universale.* La proprietà universale delle immersioni caratterizza in modo unico la topologia ristretta. Cioè dato  $(X, \tau)$  spazio topologico con  $Y \subseteq X$  e immersione  $i : Y \hookrightarrow X$ ,  $\tau|_Y$  è l'unica topologia su  $Y$  che rispetta la proprietà universale.

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma$  una topologia su  $Y$  che rispetta la proprietà universale.

- (i) Prendo come  $Z$  lo spazio  $(Y, \tau|_Y)$  e come  $f$  l'identità su  $Y$ . Il diagramma della proprietà universale è allora il seguente:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \tau|_Y) & \xrightarrow{\text{id}} & (Y, \sigma) \\ & \searrow g=i & \downarrow i \\ & & (X, \tau) \end{array}$$

Per definizione  $g$  è continua,  $i$  è continua, quindi  $\text{id}$  è continua. Allora  $\sigma \subseteq \tau|_Y$ .

- (ii) Questa volta prendo come  $Z$  lo spazio  $(Y, \sigma)$  mantenendo come  $f$  l'identità. Il diagramma risulta essere:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \sigma) & \xrightarrow{\text{id}} & (Y, \sigma) \\ & \searrow g=i & \downarrow i \\ & & (X, \tau) \end{array}$$

Per definizione  $\text{id}$  è continua, quindi lo è anche  $g = i$  per la proprietà universale. Allora  $\sigma$  rende continua  $i$ , e dunque vale  $\tau|_Y \subseteq \sigma$  per la definizione della restrizione di  $\tau$ .

$\square$

**Definizione 2.7.11.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Essa si dice APERTA se manda aperti in aperti e CHIUSA se manda chiusi in chiusi.

**Osservazione 2.7.12.** Sia  $f$  come sopra continua e bigettiva. Allora essa è un omeomorfismo se e solo se è aperta, e se solo se è chiusa.

**Esempio 2.7.13.** Si consideri l'insieme  $\mathbb{Z}$  con la topologia  $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \cup \mathbb{Z}$ . Allora  $f : n \mapsto n - 1$  è bigettiva, continua, non aperta e non omeomorfismo.

**Definizione 2.7.14.** Sia  $f : X \hookrightarrow Y$  una funzione iniettiva continua. Allora  $f$  si dice IMMERSIONE TOPOLOGICA se per ogni  $A \subseteq X$  aperto esiste un aperto  $U \subseteq Y$  tale che  $A = f^{-1}(U)$ .

**Osservazione 2.7.15.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Allora  $f$  è chiusa e iniettiva se e solo se è un'immersione chiusa, se e solo se  $f$  è immersione con  $f(X)$  chiuso. Idem con gli aperti.

**Osservazione 2.7.16.** Sia  $Y \subseteq X$  un sottospazio. Allora:

- (i) se  $X$  è N1 allora  $Y$  è N1;
- (ii) idem con N2;
- (iii) se  $X$  è separabile e metrizzabile allora  $Y$  è separabile.

*Dimostrazione.* I primi punti sono ovvi. Per quanto riguarda l'ultimo, se  $X$  è metrizzabile e separabile, è N1. Dunque anche  $Y$  è metrizzabile e N1, e quindi anche separabile.  $\square$

**Esempio 2.7.17.** *Il piano di Sorgenfrey.* Si prenda lo spazio  $\mathbb{R}^2$  dotato della topologia generata dai rettangoli del tipo  $[a, b) \times [c, d)$ . Esso è chiamato il piano di Sorgenfrey. Si consideri il sottospazio della retta  $y = -x$ . La topologia indotta è la discreta, infatti per ogni punto  $(k, -k)$ , il rettangolo  $[k, k+1) \times [-k, -k+1)$  interseca la retta solo nel punto considerato. Dunque si è trovato uno spazio separabile (prendendo per esempio  $\mathbb{Q}^2$  come denso numerabile) che ha un sottospazio non separabile.

## 3 Prodotti e quozienti topologici

### 3.1 Topologie prodotto

**Definizione 3.1.1.** Sia  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  una famiglia di spazi topologici. Allora il PRODOTTO CARTESIANO della famiglia è:

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \mid f(\alpha) \in X_\alpha, \forall \alpha \in A\}$$

Se  $A = \{1, \dots, n\}$ , allora:

$$\prod_{i=1}^n X_i = X_1 \times \dots \times X_n \ni (x_1, \dots, x_n) \quad x_i := f(i)$$

**Definizione 3.1.2.** La TOPOLOGIA PRODOTTO su  $X = \prod_{i \in A} X_i$  è la topologia meno fine su  $X$  che rende continue tutte le proiezioni  $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ .

**Osservazione 3.1.3.**  $X$  viene naturalmente con proiezioni:

$$p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha \quad f \longmapsto f(\alpha) \quad \forall \alpha \in A$$

Inoltre questa topologia è ben definita poiché l'intersezione di topologie è una topologia.

**Proposizione 3.1.4.** Una base per la topologia prodotto su  $X$  è data da:

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha \text{ aperto}, U_\alpha = X_\alpha \text{ tranne al più un numero finito di } \alpha \right\}$$

*Dimostrazione.* Sia  $U_\alpha \subset X_\alpha$  aperto. Allora:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \prod_{\beta \in A} V_\beta \quad \text{dove} \quad V_\beta = \begin{cases} U_\alpha & \text{se } \beta = \alpha \\ X_\beta & \text{se } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Dunque le proiezioni  $p_\alpha$  sono continue se e solo se tutte le preimmagini di tale forma sono aperte nella topologia prodotto. Quindi:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset X \text{ aperto} \quad \forall \text{ aperto } U_\alpha \subset X_\alpha$$

Siano  $U_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n} \subset X_{\alpha_n}$  aperti, con  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ . Allora:

$$X \supset \bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \quad \text{dove} \quad V_\alpha = \begin{cases} U_{\alpha_i} & \text{se } \alpha = \alpha_i \\ X_\alpha & \text{se } \alpha \neq \alpha_i \end{cases}$$

Dunque ogni elemento di  $\mathcal{B}$  è aperto nella topologia prodotto su  $X$  (infatti l'intersezione di aperti è un aperto). Se  $\mathcal{B}$  è base di una topologia abbiamo finito, in quanto per definizione la topologia prodotto è la meno fine che rende continue tutte le  $p_\alpha$ . Altrimenti:

$$\left( \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \right) \cap \left( \prod_{\alpha \in A} V_\alpha \right) = \prod_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap V_\alpha)$$

Dunque le intersezioni di elementi di  $\mathcal{B}$  sono ancora in  $\mathcal{B}$ , che quindi è chiuso rispetto alle intersezioni finite, e perciò è una base.  $\square$



**Osservazione 3.1.5.** Supponiamo  $\mathcal{B}_\alpha$  base della topologia di  $X_\alpha$ . Definiamo:

$$\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{\alpha \in A} B_\alpha \mid B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, B_\alpha = X_\alpha \text{ tranne al più un numero finito di } \alpha \right\}$$

Allora  $\mathcal{B}'$  è una base per la topologia prodotto in  $X$ .

**Corollario 3.1.6.** Supponiamo  $A$  numerabile e  $\mathcal{B}_\alpha$  base numerabile per  $X_\alpha$  per ogni  $\alpha$ . Allora  $\mathcal{B}'$  è una base numerabile per  $X$ .

*Dimostrazione.* Per esercizio. □

**Corollario 3.1.7.** (analogo al precedente) Supponiamo  $A$  numerabile e che tutti gli  $X_\alpha$  siano primo-numerabili. Allora la topologia prodotto è primo-numerabile.

**Osservazione 3.1.8.** In generale, se  $A$  non è numerabile i due corollari sono falsi.

**Esempio 3.1.9.** Prendiamo  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea, e consideriamo:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

Esso eredita una topologia prodotto che coincide con la topologia euclidea su  $\mathbb{R}^n$ . In particolare, la topologia euclidea ha per base le palle aperte. La topologia prodotto ha per base i parallelepipedi retti aperti:

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

In effetti tali parallelepipedi sono aperti nella topologia euclidea (e viceversa).

## 3.2 Proprietà delle topologie prodotto

**Proposizione 3.2.1.**  $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$  è un'applicazione aperta  $\forall \alpha \in A$  (sempre prendendo  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  la base di  $X$ , allora  $p_\alpha$  è aperta se e solo se  $p_\alpha(B)$  aperto  $\forall B \in \mathcal{B}$ . Supponiamo  $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$  con  $U_\alpha \subset X_\alpha$  aperto. Allora  $p_\alpha(B) = U_\alpha$  è aperto per definizione. □

**Osservazione 3.2.2.** Le proiezioni  $p_\alpha$  in generale non sono chiuse.

**Esempio 3.2.3.** Prendiamo  $p_1 : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  e sia  $Z$  l'iperbole equilatera, ovvero  $Z = \{xy \mid xy = 1\}$ . Allora  $Z$  è chiuso in quanto  $Z = p_1^{-1}(0)$  con  $p = xy - 1$ ,  $p$  continua e  $0 \in \mathbb{R}$  è chiuso. Invece,  $p_1(\{xy \mid xy = 1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  non è chiuso perché  $\{0\}$  non è aperto.

**Proposizione 3.2.4.** Dato  $\alpha \in A$  fissiamo  $x_\beta \in X_\beta \forall \beta \neq \alpha$ , e definiamo  $X \supset X(\alpha) = \{f \in X \mid f(\beta) = x_\beta\}$ . Allora la restrizione:

$$p_\alpha|_{X(\alpha)} : X(\alpha) \longrightarrow X_\alpha$$

è un omeomorfismo.

*Dimostrazione.* (i)  $p_\alpha|_{X(\alpha)}$  è continua perché è restrizione di  $p_\alpha$ , che è continua.

(ii)  $p_\alpha|_{X(\alpha)}$  è bigettiva.

(iii)  $p_\alpha|_{X(\alpha)}$  è aperta: gli aperti di  $X(\alpha)$  sono:

$$\prod_{\beta \in A} U_\beta \cap X(\alpha)$$

dove

$$\prod_{\beta \in A} U_\beta = U := \{f \in X(\alpha) \mid f(\alpha) \in U_\alpha\}$$

D'altra parte  $p_\alpha|_{X(\alpha)}(U) = p_\alpha(U) = U_\alpha$ , che è aperto in  $X_\alpha$ . □

**Proposizione 3.2.5.** (*Proprietà universale della topologia prodotto*)

La topologia prodotto ha la seguente proprietà: dato  $Z$  spazio topologico e  $f : Z \longrightarrow X$  funzione arbitraria, allora  $f$  è continua se e solo se  $p_\alpha \circ f$  è continua. Il diagramma risulta essere:

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow f & \downarrow p_\alpha \\ Z & \xrightarrow{p_\alpha \circ f} & X_\alpha \end{array}$$

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) La composizione di funzioni continue è una funzione continua.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $U \subset X$  aperto. Vediamo se  $f^{-1}(U)$  aperto. Ci basta vederlo per  $U \in \mathcal{B}$ , quindi:

$$U = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \quad \text{con } U_\alpha \subset X_\alpha \text{ aperto}$$

Inoltre,  $\exists A_0 \subset A$  finito tale che  $U_\alpha = X_\alpha$  ( $\forall \alpha \notin A_0$ ). D'altra parte:

$$f^{-1}(U) = f^{-1} \left( \prod_{\alpha \in A} U_\alpha \right) = f^{-1} \left( \bigcap_{\alpha \in A} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (p_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

Dunque  $f^{-1}(U)$  è un'intersezione finita di aperti.  $\square$

**Teorema 3.2.6.** La topologia prodotto è univocamente caratterizzata dalla proprietà universale.

Equivalentemente: Se  $\tau_X$  è una topologia in  $X$  con la proprietà:

$\forall Z$  spazio topologico,  $f : Z \rightarrow X$ , allora  $f$  è continua se e solo se  $p_\alpha \circ f$  è continua.

*Dimostrazione.* Abbiamo visto che la topologia prodotto soddisfa la proprietà. Siano  $\tau_X$  una topologia che soddisfa la proprietà,  $\tau_\alpha$  la topologia in  $X_\alpha$  e  $\tau_{pr}$  la topologia prodotto su  $X$ . Prendiamo  $Z = (X, \tau_{pr})$ , e otteniamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & (X, \tau_X) & \\ \text{id}_X \nearrow & & \searrow p_\alpha \\ (X, \tau_{pr}) & \xrightarrow{p_\alpha} & (X_\alpha, \tau_\alpha) \end{array}$$

Abbiamo mostrato che  $p_\alpha : (X, \tau_{pr}) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$  è continua. Allora per la proprietà è continua anche  $\text{id}_X$ , quindi  $\tau_X \subset \tau_{pr}$ , ovvero  $\tau_X < \tau_{pr}$ . Viceversa, per la minimalità di  $\tau_{pr}$ , basta vedere che  $p_\alpha : (X, \tau_X) \rightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha)$  è continua  $\forall \alpha \in A$ . Prendiamo  $Z = (X, \tau_X)$  e  $f = \text{id}_X$ . Allora otteniamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & (X, \tau_X) & \\ \text{id}_X \nearrow & & \downarrow p_\alpha \\ (X, \tau_X) & & (X_\alpha, \tau_\alpha) \\ & \searrow p_\alpha & \end{array}$$

Da cui possiamo osservare che  $\text{id}_X$  è continua per la proprietà universale, e anche  $p_\alpha$  lo è.  $\square$

Diamo adesso alcune informazioni generali che verranno dimostrate più avanti, dopodiché vedremo alcune proprietà dei prodotti topologici nel caso degli spazi metrici.

- (i) Il prodotto di una quantità numerabile di spazi metrici è metrizzabile. In generale, è falso se la quantità non è numerabile.
- (ii) Il prodotto di una quantità al più continua di spazi separabili è separabile.

**Proposizione 3.2.7.** Sia  $(X, d)$  spazio metrico. Allora  $\bar{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  definita come:

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

è una distanza topologicamente equivalente a  $d$ . Dunque la topologia di uno spazio metrizzabile è indotta da una distanza  $\leq 1$ .

*Dimostrazione.* Verifichiamo che  $\bar{d}$  è una distanza.

- (i)  $\bar{d}(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y$  e  $\bar{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  è ovvio dalla definizione.
- (ii) Anche la simmetria di  $\bar{d}$  è ovvia dalla definizione
- (iii) Vediamo che  $\bar{d}(x, z) \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z) \quad \forall x, y, z$ . Se almeno una tra  $\bar{d}(x, y)$  e  $\bar{d}(y, z)$  è uguale a 1 la tesi è ovvia ( $\bar{d}(x, z) \leq 1$ ). Altrimenti:

$$\bar{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$$

Dunque  $\bar{d}$  è una distanza. Come base della topologia associata ad una distanza si possono prendere le palle di raggio  $R$ , al variare di  $R < 1$ . Ma  $\forall x \in X, \forall R < 1, B_d(x, R) = B_{\bar{d}}(x, R)$ , perciò le topologie indotte coincidono.  $\square$

**Definizione 3.2.8.**  $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$  si dice  $K$ -LIPSCHITZ se  $\forall K > 0, \forall x_1, x_2 \in X$ :

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd(x_1, x_2)$$

Inoltre, poiché  $f(B(x, \frac{\varepsilon}{K})) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$ , una funzione  $K$ -Lipschitz è continua.

**Teorema 3.2.9.** Sia  $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  una famiglia di spazi metrici. Allora  $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  è metrizzabile.

*Dimostrazione.* Costruiamo  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  distanza che induce  $\tau_{pr}$  (la topologia prodotto).  $\forall i \in \mathbb{N}$  posso supporre  $d_i \leq 1$ . Denotiamo con  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  i punti di  $X$ , dove  $x_i \in X_i, \forall i \in \mathbb{N}$ . Poniamo:

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \cdot d_i(x_i, y_i)$$

che è  $< +\infty$  poiché  $d_i \leq 1$ . È facile verificare che  $d$  è una distanza. Sia ora  $\tau_d$  la topologia indotta, e mostriamo che  $\tau_{pr} = \tau_d$ . Se  $\pi_i : X \longrightarrow X_i$  è la proiezione su  $X_i$ , allora:

$$d_i(\pi_i(x), \pi_i(y)) = d_i(x_i, y_i) = 2^i(2^{-i} \cdot d_i(x_i, y_i)) \leq 2^i d(x, y)$$

Quindi  $\pi_i$  è  $2^i$ -Lipschitz, dunque è continua. Allora ogni proiezione è continua rispetto a  $\tau_d$ , quindi  $\tau_d \supseteq \tau_{pr}$ . Vediamo adesso l'inclusione opposta ( $\tau_d \subseteq \tau_{pr}$ ). Basta osservare che ogni palla di  $d$  è aperta in  $\tau_{pr}$ . Sia  $B = B_d(x, \varepsilon) \subseteq X$  e sia  $y \in B$ . Allora  $\exists \delta > 0$  tale che  $B(y, \delta) \subseteq B$ . Dobbiamo allora mostrare

che  $\exists U$  aperto di  $\tau_{pr}$  con  $y \in U \subseteq B_d(y, \delta)$ . Sia quindi  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che  $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \delta/2$ . Poniamo:

$$U = \bigcap_{i=0}^{n_0} \pi_i^{-1} \left( B \left( y_i, \frac{\delta}{4} \right) \right) = B_{d_0} \left( y_0, \frac{\delta}{4} \right) \times \cdots \times B_{d_n} \left( y_n, \frac{\delta}{4} \right) \times X_{n_0+1} \times \cdots \times X_n \times \cdots$$

Se  $z \in U$ ,  $d_i(x_i, y_i) < \frac{\delta}{4} \quad \forall i \leq n_0$ , allora:

$$\begin{aligned} d(y, z) &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) = \sum_{i=0}^{n_0} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} d_i(y_i, z_i) < \\ &< \frac{\delta}{4} \left( \sum_{i=0}^{n_0} 2^{-i} \right) + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\delta}{4} \cdot 2 + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

Dunque  $U \subseteq B(y, \delta)$ . □

**Osservazione 3.2.10.** In realtà potevamo usare una qualsiasi serie convergente a termini positivi al posto di  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}$ .

**Osservazione 3.2.11.** Genericamente, se il prodotto più che numerabile di spazi metrici non è primo-numerabile allora non è metrizzabile.

**Proposizione 3.2.12.** (*Prodotti finiti*) Se  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  sono spazi metrici, allora  $X \times Y$  è metrizzabile, e ha topologia indotta da una qualsiasi delle seguenti distanze:

- (i)  $d_{\infty}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$
- (ii)  $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + d'(y_1, y_2)^2}$
- (iii)  $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d'(y_1, y_2)$

*Dimostrazione.* Si può verificare che  $d_1, d_2, d_{\infty}$  sono equivalenti, come già visto su  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre, è facile vedere che inducono la topologia prodotto. □

### 3.3 Assiomi di separazione

In un generico spazio topologico, vorremmo usare gli aperti per dire in qualche modo che punti o insiemi (che prenderemo chiusi) disgiunti sono separati anche a livello della topologia. Per questo richiediamo che gli spazi soddisfino alcune condizioni, i cosiddetti ASSIOMI DI SEPARAZIONE. Negli enunciati degli assiomi  $X$  è uno spazio topologico con una topologia data. Ecco i primi due.

- (T1)  $\forall x, y \in X, x \neq y$  esistono aperti  $U, V \subseteq X$  con  $x \in U \setminus V, y \in V \setminus U$ ;
- (T2)  $\forall x, y \in X, x \neq y$  esistono aperti  $U, V \subseteq X$  con  $U \cap V = \emptyset, x \in U, y \in V$ .

**Definizione 3.3.1.** Se  $X$  gode di T2 è detto SPAZIO DI HAUSDORFF, o spazio topologico *separato*.

Chiaramente  $T2 \Rightarrow T1$ .

**Osservazione 3.3.2.** In uno spazio T1, ogni punto è uguale all'intersezione di tutti i suoi interni.

**Proposizione 3.3.3.** Uno spazio topologico  $X$  è T1  $\Leftrightarrow$  i punti sono chiusi.

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Supponiamo  $X$  sia T1 e sia  $x \in X$ . Per ogni  $y \in X, y \neq x$  esistono  $U_y, V_y$  aperti che soddisfano le condizioni imposte da T1. Ma allora  $x \notin V_y, y \in V_y$ , da cui  $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X, y \neq x} V_y$ , essendo unione di aperti è aperto, perciò il suo complementare,  $\{x\}$ , è chiuso, come voluto.

$(\Leftarrow)$  Supponiamo adesso che i punti di  $X$  siano chiusi. Allora, dati  $x, y \in X, x \neq y$ , scegliendo gli aperti  $U = X \setminus \{y\}, V = X \setminus \{x\}$  si ha che questi soddisfano le condizioni di T1.  $\square$

**Osservazione 3.3.4.** Segue facilmente dalla proposizione sopra che in uno spazio T1 tutti gli insiemi cofiniti sono aperti. D'altra parte, se tutti i cofiniti sono aperti i punti sono chiusi. Dunque, se abbiamo uno spazio topologico generico  $(X, \tau)$ , possiamo affermare che esso è T1  $\Leftrightarrow \tau$  è più fine della topologia cofinita.

**Proposizione 3.3.5.**  $X$  è di Hausdorff  $\Leftrightarrow \Delta_X \subseteq X \times X$  è chiuso, dove  $\Delta_x = \{(x, x) | x \in X\}$  è la *diagonale di  $X$* .

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Sia  $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta_X$ . Allora  $x \neq y$ , dunque esistono due aperti disgiunti  $U_x, V_y$  t.c.  $x \in U_x, y \in V_y$ , da cui  $(x, y) \in U_x \times V_y$ , che è un aperto della topologia prodotto. Dunque  $X \times X \setminus \Delta_X = \bigcup_{(x,y) \in X \times X \setminus \Delta_X} U_x \times V_y$

è unione di aperti, dunque è aperto e il complementare,  $\Delta_X$ , è chiuso.

$(\Leftarrow)$  Supponiamo adesso  $\Delta_X$  chiuso. Dati due punti  $x, y \in X, x \neq y$  la coppia  $(x, y)$  sta nel complementare di  $\Delta_X$ , che è aperto. Esiste allora un elemento della base della topologia prodotto su  $X \times X$  tutto contenuto in  $X \times X \setminus \Delta_X$  che contiene  $(x, y)$ . Ma questo è della forma  $U \times V$  per qualche  $U$  e  $V$  aperti con  $x \in U, y \in V$  e dato che non interseca  $\Delta_X$ , significa che non possiamo trovare lo stesso elemento in entrambi gli insiemi, cioè  $U \cap V = \emptyset$ . Segue allora che  $X$  è di Hausdorff.  $\square$

**Esempio 3.3.6.** Un esempio di spazio di Hausdorff è un qualsiasi spazio metrizzabile. Lasciamo come semplice esercizio la dimostrazione che metrizzabile implica Hausdorff.

Un esempio, invece, di uno spazio T1 ma non T2, è un qualsiasi spazio infinito con la topologia cofinita. Lasciamo anche in questo caso la verifica di quanto appena detto come semplice esercizio.

**Proposizione 3.3.7.** Sottospazi e prodotti arbitrari di spazi topologici T1 (rispettivamente T2) sono ancora T1 (rispettivamente T2).

*Dimostrazione.* Per quanto riguarda i sottospazi, basta prendere l'intersezione degli aperti in questione con il sottospazio stesso ed è semplice verificare che rispettano ancora le condizioni, sia per T1 che per T2.

Per quanto riguarda i prodotti, ricordando la loro definizione come insiemi di funzioni, se due funzioni differiscono per almeno un elemento allora basta prendere gli aperti dati dall'assioma del caso (T1 o T2) per lo spazio topologico relativo a quell'elemento e tutto lo spazio per tutti gli altri elementi.  $\square$

**Proposizione 3.3.8.** Date due topologie, si vede facilmente che se in una abbiamo più aperti che nell'altra, e quest'ultima rispetta uno dei due assiomi, allora di sicuro possiamo trovare anche nella prima aperti che rispettano le condizioni del suddetto assioma, anzi, magari ne troviamo pure più di prima. Sia dunque  $X$  un insieme e  $\tau_1 < \tau_2$  topologie su  $X$ , se  $\tau_1$  è T1 (rispettivamente T2), allora anche  $\tau_2$  è T1 (rispettivamente T2).

Vediamo ora alcune applicazioni di questi primi due assiomi di separazione.

- (i)  $f : X \rightarrow Y$  continua,  $Y$  T2,  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subseteq X \times Y$  ( $\Gamma_f$  è il grafico di  $f$ ), allora  $\Gamma_f$  è chiuso in  $X \times Y$ ;
- (ii)  $f, g : X \rightarrow Y$  continue,  $Y$  T2, allora  $\{x \in X | f(x) = g(x)\} \subseteq X$  è chiuso in  $X$ ;
- (iii)  $f : X \rightarrow X$  continua,  $X$  T2, allora  $Fix(f) = \{x \in X | f(x) = x\} \subseteq X$  è chiuso in  $X$ ;
- (iv)  $f, g : X \rightarrow Y$  continue,  $Y$  T2,  $Z \subseteq X$  denso t.c.  $f(z) = g(z) \forall z \in Z$ , allora  $f = g$ ;
- (v)  $X$  T2,  $\{x_n\}$  successione convergente, allora il limite è unico.

*Dimostrazione.* (i) Sia  $(x, y) \in X \times Y \setminus \Gamma_f$ . Allora  $y \neq f(x)$  e poiché  $Y$  è T2 si ha che esistono due aperti disgiunti  $U_{f(x)}, V_y$  t.c.  $f(x) \in U_{f(x)}, y \in V_y$ . Per la continuità di  $f$ , abbiamo che  $U_x = f^{-1}(U_{f(x)})$  è un aperto contenente  $x$  t.c.  $U_x \times V_y \subseteq X \times Y$  è un aperto della topologia prodotto contenente  $(x, y)$  che per quanto detto prima non interseca mai  $\Gamma_f$ . Allora  $X \times Y \setminus \Gamma_f = \bigcup_{(x,y) \in X \times Y \setminus \Gamma_f} U_x \times V_y$  è unione di aperti, cioè apertp, e il suo complementare,  $\Gamma_f$ , è chiuso.

- (ii) Sia  $X_{|f=g}$  l'insieme che vogliamo mostrare essere chiuso e  $x \in X \setminus X_{|f=g}$ . Allora  $f(x) \neq g(x)$  e dato che  $Y$  è T2 esistono due aperti disgiunti  $U'_x, V'_x$  t.c.  $f(x) \in U'_x, g(x) \in V'_x$ . Supponiamo per assurdo  $f \neq g$ . Allora esiste  $x \in X$  t.c.  $f(x) \neq g(x)$ . Per la continuità di  $f$  e  $g$  ho che  $U_x = f^{-1}(U'_x), V_x = g^{-1}(V'_x)$  sono due aperti di  $X$  con intersezione non vuota (c'è almeno  $x$ ), sia dunque  $A_x$  la loro intersezione. Questo è un intorno aperto di  $x$  t.c. per ogni  $y \in A_x$  si ha  $f(y) \neq g(y)$ , per come è stato definito l'aperto.

Allora  $X \setminus X_{|f=g} = \bigcup_{x \in X \setminus X_{|f=g}} A_x$  è unione di aperti, cioè è aperto, dunque

il suo complementare,  $X_{|f=g}$ , è chiuso.

- (iii) Segue direttamente dalla precedente ponendo  $Y = X$  e  $g = id$ .
- (iv) Segue ancora una volta dalla seconda affermazione: poiché  $Z \subseteq X_{|f=g}$ , che è un chiuso, allora  $X \subseteq \overline{Z} \subseteq X_{|f=g} \subseteq X \Rightarrow X_{|f=g} = X$ .
- (v) Supponiamo per assurdo che il limite non sia unico e siano  $x \neq y$  due elementi di  $X$  a cui converge la successione. Poiché  $X$  è T2, esistono due aperti disgiunti  $U, V$  con  $x \in U, y \in V$ . Ma questi sono rispettivamente intornoi di  $x$  e  $y$ , dunque per definizione di limite la successione deve essere definitivamente contenuta in entrambi gli insiemi, assurdo poiché essi sono disgiunti.

□

Vediamo adesso gli altri due assiomi di separazione.

(T3) Per ogni chiuso  $C \subseteq X, x \in X \setminus C$ , esistono aperti  $U, V \subseteq X$  disgiunti con  $x \in U, C \subseteq V$ ;

(T4) per ogni coppia di chiusi disgiunti  $C, D \subseteq X$  esistono aperti  $U, V \subseteq X$  disgiunti con  $C \subseteq U, D \subseteq V$ .

**Osservazione 3.3.9.**  $T4+T1 \Rightarrow T3+T1 \Rightarrow T2 \Rightarrow T1$ . La dimostrazione è lasciata come utile esercizio al lettore.

**Definizione 3.3.10.**  $X$  è detto NORMALE se soddisfa T1+T4.  $X$  è detto REGOLARE se soddisfa T1+T3.

**Osservazione 3.3.11.** Possiamo riformulare la condizione T4 come segue: per ogni coppia di chiusi  $C, D \subseteq X$  esiste  $U \subseteq X$  aperto t.c.  $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus D$ .

*Dimostrazione.* Chiaramente se esiste un siffatto  $U$  possiamo prendere lui e l'aperto  $X \setminus \overline{U}$  per soddisfare T4. Viceversa, siano  $U, V$  gli aperti dati dalla condizione T4. Poiché  $X \setminus V$  è chiuso e contenuto in  $X \setminus D$  abbiamo dunque che  $C \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus D$ . □

**Proposizione 3.3.12.**  $X$  s.t. metrizzabile  $\Rightarrow X$  normale.

*Dimostrazione.* Dall'esempio 3.3.6 sappiamo già che  $X$  è T2, dunque anche T1. Resta da dimostrare che  $X$  è T4.

Siano dunque  $C, D \subseteq X$  due chiusi disgiunti e sia  $d$  la distanza su  $X$ . Definiamo  $d_C(x) = \inf_{y \in C} d(x, y)$ . Mostriamo che  $d_C(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C$ . Una freccia è banale. Per l'altra, se esistesse  $x \in X \setminus C$  t.c.  $d_C(x) = 0$  basta prendere le palle di raggio  $1/n$  per estrarre una successione in  $C$  che tende a  $x \notin C$ , assurdo per la proposizione 2.6.17. Analogamente definiamo  $d_D(x)$  e dimostriamo che  $d_D(x) = 0 \Leftrightarrow x \in D$ . Queste due funzioni così definite sono chiaramente continue. Definiamo adesso  $f(x) = \frac{3d_C(x)}{d_C(x) + d_D(x)}$ , che è



chiaramente continua perché ottenuta da funzioni continue con operazioni che conservano la continuità. Inoltre è ben definita, poiché essendo  $D$  e  $C$  disgiunti non può mai essere che  $d_C(x) = d_D(x) = 0$ , perciò il denominatore è sempre positivo. Osserviamo ora che  $f : X \rightarrow [0, 3]$ ,  $C = f^{-1}(0)$ ,  $D = f^{-1}(3)$ . Inoltre,  $[0, 3]$  ha la topologia di sottospazio, perciò  $[0, 1)$ ,  $(2, 3]$  sono due aperti disgiunti e per la continuità di  $f$  anche le loro controimmagini sono aperti disgiunti che contengono rispettivamente  $C$  e  $D$ , che è quello che serve per soddisfare T4.  $\square$

**Proposizione 3.3.13.** Sottospazi e prodotti arbitrari di T3 sono T3; sottospazi chiusi di T4 sono T4; in generale, sottospazi arbitrari di T4 o prodotti arbitrari di T4 non sono T4.

*Dimostrazione.* Sia  $X$  T3 e  $Y \subseteq X$  un sottoinsieme con la topologia di sottospazio. Siano adesso  $C \subseteq Y$  un chiuso e  $x \in Y \setminus C$ . Per definizione della topologia di sottospazio,  $C = \bar{Y} \cap D$  dove  $D$  è un chiuso di  $X$ . Ovviamente  $x \notin D$ , altrimenti, dato che  $x \in Y$ , avremmo  $x \in Y \cap D = C$ . Allora esistono due aperti disgiunti  $U, V$  di  $X$  t.c.  $x \in U, D \subseteq V$ . Allora  $U' = U \cap Y, V' = V \cap Y$  sono due aperti disgiunti di  $Y$  che soddisfano le condizioni per avere T3. Per quanto riguarda T4, questa dimostrazione non funziona, dato che due chiusi disgiunti in  $Y$  potrebbero non esserlo in  $X$ . Se però  $Y$  fosse chiuso in  $X$ , allora i due chiusi di  $Y$  sarebbero definiti a loro volta come intersezione di  $Y$ , che è chiuso in  $X$ , e un altro chiuso di  $X$ , quindi sarebbero a loro volta chiusi in  $X$  e potremmo ripetere la dimostrazione come sopra. Serve un esempio per dire che in generale non si può fare: pensateci.

Passiamo adesso ai prodotti. Sia  $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$  dove  $X_\alpha$  è T3 per ogni  $\alpha \in A$  e siano  $C \subseteq X$  un chiuso,  $x \in X \setminus C$ . Indichiamo con  $x_\alpha$  la proiezione di  $x$  su  $X_\alpha$ . Allora esiste un elemento  $B$  della base che contiene  $x$  e tutto contenuto in  $X \setminus C$ , perciò il suo complementare è un chiuso che contiene  $C$ . Sia  $S \subseteq A$  il sottoinsieme finito per cui, se scriviamo  $B = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$ , abbiamo che  $U_\alpha = X_\alpha \Leftrightarrow \alpha \notin S$ . Allora grazie alla proprietà T3 di ogni  $X_\alpha$  troviamo, per ogni  $\alpha \in S$ , due aperti disgiunti  $V_\alpha, V'_\alpha$  t.c.  $x_\alpha \in V_\alpha, X_\alpha \setminus U_\alpha \subseteq V'_\alpha$ . Ponendo dunque  $U = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha, V = \prod_{\alpha \in A} V'_\alpha$  (dove se  $\alpha \notin S$  allora  $V_\alpha = V'_\alpha = X_\alpha$ ) è facile verificare che questi sono due aperti disgiunti che separano  $x$  e  $C$ , dunque  $X$  è T3. Un esempio di prodotto di T4 non T4 sarà visto tra poco.  $\square$

Riassumendo, metrizzabile  $\xRightarrow{(i)}$  normale  $\xRightarrow{(ii)}$  regolare  $\xRightarrow{(iii)}$  T2. Vediamo dei controesempi che dimostrano che non valgono le implicazioni inverse.

**Esempio 3.3.14.**

- (i) retta di Sorgenfrey;
- (ii) piano di Sorgenfrey;
- (iii) la topologia su  $\mathbb{R}$  generata dagli intervalli  $(a, b)$  e dagli insiemi  $(a, b) \setminus K$  dove  $K = \{1/n | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ , detta topologia  $\mathbb{R}_K$ .

*Dimostrazione.* Per quanto visto nell'esempio 2.6.12 sappiamo già che la retta di Sorgenfrey non è metrizzabile. Mostriamo adesso che è normale. Essendo più fine della topologia euclidea, sicuramente è T1. Per dire che è T4, siano  $C, D \subseteq \mathbb{R}$  due chiusi disgiunti. Ovviamente  $C \subseteq \mathbb{R} \setminus D, D \subseteq \mathbb{R} \setminus C$  e questi ultimi sono aperti. Dunque per ogni  $c \in C$  esiste un  $r_c > 0$  t.c.  $[c, c + r_c) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$  e analogamente per ogni  $d \in D$  esiste un  $r_d > 0$  t.c.  $[d, d + r_d) \subseteq \mathbb{R} \setminus C$ . Siano dunque  $U = \bigcup_{c \in C} [c, c + r_c), V = \bigcup_{d \in D} [d, d + r_d)$ . Questi sono ovviamente aperti in quanto unioni di aperti e  $C \subseteq U, D \subseteq V$ . Se per assurdo non fossero disgiunti, allora esisterebbero  $c \in C, d \in D$  t.c.  $[c, c + r_c) \cap [d, d + r_d) \neq \emptyset$ . Senza perdita di generalità  $c < d$ , allora dev'essere  $d \in [c, c + r_c) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$ , assurdo.

Ancora una volta la topologia è T1 in quanto più fine della topologia euclidea. Inoltre è T3: siano infatti  $C \subseteq \mathbb{R}^2$  un chiuso e  $x \notin C$ . Allora esiste un intorno aperto di  $x$  della forma  $[a, b) \times [c, d)$  tutto contenuto in  $\mathbb{R} \setminus C$ . È un semplice esercizio verificare che tale intorno è anche chiuso, quindi ponendo  $U = [a, b) \times [c, d)$  e  $V$  il suo complementare troviamo due aperti disgiunti t.c.  $x \in U, C \subseteq V$ . Per mostrare che non è T4, dimostriamo prima un lemma.

**Lemma 3.3.15.** Siano  $X$  T4 e separabile e  $D \subseteq X$  chiuso e discreto (cioè t.c. la topologia di sottospazio è quella discreta). Allora  $|D| < |\mathbb{R}|$ .

*Dimostrazione.* Sia  $Q \subseteq X$  un denso numerabile e sia  $S \subseteq D$ .  $S$  è chiuso in  $D$ , ma ciò significa che è intersezione di un chiuso in  $X$  e di  $D$ , che è chiuso in  $X$ , quindi  $S$  è chiuso in  $X$ , e analogamente  $D \setminus S$ . Esistono allora due aperti disgiunti  $U_S, V_S$  t.c.  $S \subseteq U_S, D \setminus S \subseteq V_S$ . Definiamo  $f: \mathcal{P}(D) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  di modo che  $f(S) = Q \cap U_S$ .  $f$  è iniettiva: siano infatti  $S, T \subseteq D$  distinti e supponiamo senza perdita di generalità  $S \setminus T \neq \emptyset$ . Notiamo che  $S \setminus T \subseteq D \setminus T \subseteq V_T$ , perciò  $S \setminus T \subseteq U_S \cap V_T$ , quindi  $U_S \cap V_T \neq \emptyset$ , ma essendo intersezione di due aperti è un aperto, perciò esiste  $x \in Q$  t.c.  $x \in U_S \cap V_T \Rightarrow x \in f(S)$ , ma allora  $x \notin U_T \Rightarrow x \notin Q \cap U_T = f(T)$ , il che vuol dire che  $f$  è iniettiva. Perciò  $|D| < |\mathcal{P}(D)| \leq |\mathcal{P}(Q)| = |\mathbb{R}|$  poiché  $Q$  è numerabile.  $\square$

Adesso basta ricordare dall'esempio 2.7.17 che la retta  $y = -x$ , che ha la cardinalità del continuo, ha come topologia di sottospazio quella discreta. È facile mostrare che il piano di Sorgenfrey è separabile, quindi segue facilmente dal lemma che non è T4.

**Osservazione 3.3.16.** Il piano di Sorgenfrey è un esempio di prodotto di T4 che non è T4.

Essendo la topologia considerata più fine della topologia euclidea, sappiamo già che è T2. Mostriamo che non è T3. Si verifica facilmente che  $K$  è chiuso e  $0 \notin K$ . Se esistessero due aperti disgiunti che li separano, quello di 0 sarebbe necessariamente unione di intorni della forma  $(a, b) \setminus K$ . Sia quindi, senza perdita di generalità,  $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus K, \varepsilon > 0$  uno di questi intorni. Consideriamo allora  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  t.c.  $1/n < \varepsilon$ . Allora qualunque intorno contenente  $1/n$  interseca

banalmente  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , dunque due aperti disgiunti che separino 0 e  $K$  non possono esistere.  $\square$

**Teorema 3.3.17.** Se  $X$  è regolare a base numerabile, allora  $X$  è normale.

*Dimostrazione.* Essendo  $X$  regolare, ovviamente è T1. Dobbiamo verificare che sia T4. Siano quindi  $C, D \subseteq X$  due chiusi disgiunti e  $\mathcal{B}$  una base numerabile. Per ogni  $c \in C$  esiste un aperto  $U_c$  t.c.  $c \in U_c \subseteq \overline{U_c} \subseteq X \setminus D$ . Analogamente possiamo scegliere un  $V_d$  per ogni  $d \in D$  che li separi allo stesso modo da  $C$ . Notiamo che possiamo prendere  $U_c, V_d \in \mathcal{B}$  per ogni  $c \in C, d \in D$ . Definiamo adesso  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$  come  $\{U_c \in \mathcal{B} | \overline{U_c} \cap D = \emptyset\}$  e analogamente  $\mathcal{D}$ . Per quello che abbiamo detto prima,  $\mathcal{C}$  ricopre  $C$  e  $\mathcal{D}$  ricopre  $D$ . Essendo  $\mathcal{B}$  numerabile,

possiamo scrivere  $\mathcal{C} = \{U_n\}, \mathcal{D} = \{V_n\}$ . Siano adesso  $A_n = U_n \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{V_j}, B_n =$

$V_n \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{U_j}$ . Si può notare facilmente che sono tutti aperti, dunque  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  e

$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$  sono aperti, inoltre, dato che gli  $U_n$  ricoprono  $C$  mentre  $C \cap \overline{V_n} = \emptyset$

per ogni  $n$ , abbiamo  $C \subseteq A$  e analogamente  $D \subseteq B$ . È un semplice esercizio verificare che  $A_n \cap B_m = \emptyset$  per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$ , dunque  $A$  e  $B$  sono due aperti disgiunti contenenti rispettivamente  $C$  e  $D$ , da cui segue che  $X$  è T4.  $\square$

**Teorema 3.3.18.** Teorema di Urysohn: se  $X$  è regolare a base numerabile, allora  $X$  è metrizzabile.

*Dimostrazione.* Non verrà dimostrato in questo corso.  $\square$

### 3.4 Quozienti topologici

**Definizione 3.4.1.** Siano  $X$  uno spazio topologico e  $\sim$  una relazione di equivalenza definita su  $X$ . Vengono allora indotti un insieme  $Y = X/\sim$  e una proiezione  $\pi: X \rightarrow Y$  che manda ogni punto nella sua classe di equivalenza. La topologia quoziente definita su  $Y$  è la topologia più fine che rende  $\pi$  continua.

**Definizione 3.4.2.** Data la proiezione  $\pi$  come sopra, un sottoinsieme  $Z \subseteq X$  si dice saturo se è unione di classi di equivalenza per  $\sim$ . Cioè  $Z = \pi^{-1}\pi(Z)$ .

**Osservazione 3.4.3.** Nel setting di prima, detta  $\tau_Y$  la topologia quoziente, si ha che

$$A \in \tau_Y \iff \pi^{-1}(A) \text{ aperto} \iff A = \pi(B) \text{ con } B \text{ aperto saturo.}$$

**Teorema 3.4.4.** *Proprietà universale del quoziente.* Siano  $X$  un insieme con una relazione di equivalenza  $\sim$  e una proiezione  $\pi$ . Allora la topologia quoziente è l'unica topologia per cui per ogni spazio topologico  $Z$  e funzione  $f: X/\sim \rightarrow Z$ ,  $f$  è continua se e solo se  $f \circ \pi$  è continua.

*Dimostrazione.* Il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \pi & \searrow f \circ \pi & \\ X/\sim & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Come prima cosa verifichiamo che la topologia quoziente ha la proprietà universale. Un'implicazione è facile: se  $f$  e  $\pi$  sono continue, anche la loro composizione lo è. Viceversa sia  $f \circ \pi$  continua, e si prenda un aperto in  $Z$ . Allora  $(f \circ \pi)^{-1}(A) = (\pi^{-1} \circ f^{-1})(A)$  è aperto, e dunque anche  $f^{-1}(A)$  è aperto.

Mostriamo ora che se una certa topologia  $\sigma$  gode della proprietà universale, allora è uguale alla topologia quoziente  $\tau$ .

Si prenda  $Z = (X/\sim, \tau)$  e  $f$  l'identità. Allora poiché  $\pi$  è continua con la topologia  $\tau$ , si ha che

$$\text{id}: X/\sim, \sigma \rightarrow X/\sim, \tau$$

è dunque  $\sigma$  è più fine di  $\tau$ .

Viceversa, prendendo per  $Z$  lo stesso insieme ma dotato della topologia  $\sigma$  e  $f = \text{id}$ , si ottiene che  $\pi$  è continua anche con  $\sigma$ . Per definizione di topologia quoziente, allora  $\tau$  è più fine di  $\sigma$ .  $\square$

**Definizione 3.4.5.** Una funzione  $f: X \rightarrow Y$  continua e surgettiva si chiama identificazione quando per ogni  $A \subseteq Y$ ,  $A$  è aperto se e solo se  $f^{-1}(A)$  è aperto.

**Osservazione 3.4.6.** Sia  $f$  una bigezione continua. Sono equivalenti:

- (i)  $f$  è immersione;
- (ii)  $f$  è omeomorfismo;
- (iii)  $f$  è identificazione.

**Osservazione 3.4.7.** Sia  $f$  continua surgettiva. Allora:

- (i) Se  $f$  è aperta, è identificazione.
- (ii) Se  $f$  è chiusa, è identificazione.
- (iii) Ogni altra implicazione è abusiva.

**Proposizione 3.4.8.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'identificazione. Allora la funzione  $\bar{f}$  definita dal seguente diagramma commutativo è un omeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

*Dimostrazione.* Per come è definita  $\bar{f}$ , essa è ben definita e bigettiva. Poiché  $f$  è continua, per la proprietà universale, anche  $\bar{f}$  è continua. Voglio mostrare che  $\bar{f}$  è aperta. Sia allora  $A$  un aperto di  $X/\sim$ . Si ha che  $\bar{f}(A) = (f \circ \pi^{-1})(A)$  è aperto se e solo se  $(f^{-1} \circ f \circ \pi^{-1})(A)$  è aperto perché  $f$  è identificazione. Poiché  $\pi$  è la proiezione sulla topologia quoziente,  $A$  è aperto.  $\square$

**Osservazione 3.4.9.** Si ha che  $\bar{f}$  è un omeomorfismo se e solo se  $f$  è un'identificazione.

**Definizione 3.4.10.** Sia  $A \subseteq X$ . Si definisce il quoziente

$$X/A = X/\sim$$

dove  $x \sim x'$  se e solo se  $x = x'$  oppure  $x, x' \in A$ . Cioè in questo quoziente  $A$  “collassa” in un punto.

**Esempio 3.4.11.** Il disco quozientato sulla sua frontiera è isomorfo alla sfera. Cioè  $D^n/\partial D^n \cong S^n$ .

*Dimostrazione.* Basta verificare che la funzione

$$\begin{aligned} f: D^n/\partial D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longrightarrow (2\|x\|^2 - 1, x\sqrt{1 - \|x\|^2}) \end{aligned}$$

sia un omeomorfismo. Sicuramente si ha la continuità. Per l'iniettività si noti che il primo termine distingue i vettori con norma diversa, mentre il secondo distingue i vettori con direzione diversa, con l'eccezione dei punti di norma 1, che però sono identificati. Infine la funzione è surgettiva, in quanto l'immagine è composta effettivamente di vettori di lunghezza unitaria.  $\square$

**Esempio 3.4.12.** Sia

$$X = \{x \geq 0\} \cup \{y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e sia  $\pi: X \longrightarrow \mathbb{R}$  la proiezione sul primo elemento. Allora  $\pi$  è un'identificazione ma non è chiusa né aperta.

**Esempio 3.4.13.** Sia

$$A = \{(x, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e sia  $X = \mathbb{R}^2/A$ . Allora  $X$  non è primo numerabile.

### 3.5 Quozienti per azioni di gruppi

Consideriamo  $X$  spazio topologico e  $G$  gruppo. Diciamo che  $G$  agisce su  $X$  tramite omeomorfismi, cioè:

$$G \longrightarrow \text{Homeo}(X)$$

è un omomorfismo di gruppi. Consideriamo allora  $X/G$  con la relazione di equivalenza di essere nella stessa orbita, cioè:

$$x \sim y \iff \exists g \in G : g \cdot x = y$$

In altre parole, le classi di equivalenza sono le orbite di  $G$  in  $X$ .

**Esempio 3.5.1.**  $\mathbb{Z}$  agisce su  $\mathbb{R}$  per traslazione:

$$n \cdot x = n + x$$

Più in generale,  $\mathbb{Q}$  agisce su  $\mathbb{R}$  allo stesso modo.

**Osservazione 3.5.2.** (*Osservazione notazionale*) Il quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  può indicare due cose ben distinte:

- (i)  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  sottoinsieme  $\implies \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  bouquet infinito numerabile di circonferenze
- (ii)  $\mathbb{Z}$  agisce su  $\mathbb{R}$  come nell'esempio sopra  $\implies S^1$

**Proposizione 3.5.3.**  $\mathbb{Z}$  agisce su  $\mathbb{R}$  come nell'esempio sopra  $\implies S^1$

*Dimostrazione.* Consideriamo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

Se vediamo  $f$  identificazione, allora abbiamo finito in quanto le fibre di  $f$  sono proprio le orbite di  $\mathbb{Z}$ . Sappiamo inoltre che  $f$  è continua e surgettiva, vediamo allora che è aperta. Ci basta guardare  $f(I)$  con  $I \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto. Sia  $a \in \mathbb{R}$  e osserviamo che, preso  $I = (a, a + 1)$  si ha che:

$$f|_{(a, a+1)} : (a, a + 1) \longrightarrow S^1 \setminus \{f(a)\}$$

è invertibile con inversa continua. Dunque  $f|_I$  è un omeomorfismo. Segue allora che  $f|_I$  è aperta per ogni aperto  $A$ . Infatti se  $A$  è contenuto in un intervallo  $I$  di ampiezza 1 allora  $f(A)$  è aperto per l'osservazione. Altrimenti, più in generale, possiamo scrivere  $A = \bigcup_{j \in J} A_j$  dove  $A_j$  è un aperto contenuto in intervalli di ampiezza 1. Allora:

$$f(A) = f\left(\bigcup A_j\right) = \bigcup f(A_j)$$

che è aperto in quanto unione di aperti. □

**Proposizione 3.5.4.** Sia  $G$  gruppo che agisce su  $X$  spazio topologico (per omeomorfismi). Allora la proiezione al quoziente  $\pi : X \rightarrow X/G$  è aperta. Inoltre, se  $G$  è finito,  $\pi$  è anche chiusa.

*Dimostrazione.* Se  $U \subset X$  è un aperto, allora  $\pi(U) = \pi\left(\bigcup_{g \in G} gU\right)$  è un aperto saturo. Inoltre, poiché  $G$  agisce tramite omeomorfismi,  $gU$  è aperto  $\forall g \in G$ . Se  $G$  è finito, il ragionamento è analogo per i chiusi:

$$C \subset X \text{ chiuso} \implies \pi(C) = \pi\left(\bigcup_{g \in G} gC\right) \implies \pi(C) \text{ chiuso}$$

□

**Osservazione 3.5.5.** Se  $G$  è infinito, in generale non è vero che  $\pi$  è chiusa.

**Osservazione 3.5.6.** Siano  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  identificazioni per  $i = 1, 2$ . Allora l'applicazione:

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

è continua e surgettiva, ma in generale non è un'identificazione. Inoltre il prodotto cartesiano di identificazioni aperte è un'identificazione aperta.

**Proposizione 3.5.7.** Sia  $X$  spazio di Hausdorff e  $G$  gruppo che agisce su  $X$  tramite omeomorfismi. Sia  $K = \{(x, gx) \mid x \in X, g \in G\} \subset X \times X$ . Allora  $X/G$  è di Hausdorff se e solo se  $K$  è chiuso in  $X \times X$ .

*Dimostrazione.* In altre parole, possiamo riformulare l'enunciato come:

$$X/G \text{ Hausdorff} \iff \Delta_{X/G} \subset X/G \times X/G \text{ chiusa}$$

Sia  $\pi : X \rightarrow X/G$  la proiezione, allora  $\pi$  è un'identificazione aperta. Ma allora  $\pi \times \pi$  è a sua volta identificazione aperta. Dunque  $\Delta_{X/G}$  è chiusa se e solo se  $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/G}) \subset X \times X$  è chiuso. D'altra parte  $(\pi \times \pi)^{-1}(\Delta_{X/G}) = K$ . □

## 4 Connessioni e compattezza

### 4.1 Ricoprimenti

Sia  $X$  spazio topologico e  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ .

**Definizione 4.1.1.**  $\mathcal{U}$  è un RICOPRIMENTO DI  $X$  se  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Se tutti gli  $U \in \mathcal{U}$  sono aperti [chiusi] allora diremo che  $\mathcal{U}$  è un RICOPRIMENTO APERTO [RICOPRIMENTO CHIUSO].

**Definizione 4.1.2.**  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  è detto FAMIGLIA LOCALMENTE FINITA se  $\forall x \in X, \exists V \in \mathcal{U}(x)$  tale che  $V \cap U \neq \emptyset$  solamente per un numero finito di  $U \in \mathcal{U}$ .

**Esempio 4.1.3.**  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$  è un ricoprimento chiuso localmente finito.

**Definizione 4.1.4.**  $\mathcal{U}$  ricoprimento di  $X$  è detto FONDAMENTALE se, dato  $A \subset X$ , allora:

$$\begin{array}{lll} A \text{ aperto in } X \iff A \cap U \text{ aperto in } U & \forall U \in \mathcal{U} \\ \text{(Equivalentemente)} \quad C \text{ chiuso in } X \iff C \cap U \text{ chiuso in } U & \forall U \in \mathcal{U} \end{array}$$

**Esempio 4.1.5.**

- (i)  $\mathcal{U}$  ricoprimento aperto  $\implies \mathcal{U}$  ricoprimento fondamentale.
- (ii)  $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$  è un ricoprimento chiuso. D'altra parte però,  $A \cap \{x\}$  è aperto in  $\{x\} \forall x \in \mathbb{R}$ , quindi il ricoprimento non è fondamentale.

**Proposizione 4.1.6.** Sia  $\mathcal{U}$  ricoprimento fondamentale di  $X$ , e sia  $f : X \longrightarrow Y$  funzione tra spazi topologici. Allora  $f$  è continua se e solo se  $f|_U$  è continua  $\forall U \in \mathcal{U}$ .

*Dimostrazione.*  $(\implies)$  È ovvia.

$(\impliedby)$  Sia  $B \subseteq Y$  un aperto, allora, dato che  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento,  $f^{-1}(B) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f|_U^{-1}(B)$ , e dato che  $\mathcal{U}$  è fondamentale questa è un'unione di aperti, dunque un aperto.  $\square$

Enunciamo ora un lemma che ci permetterà di dimostrare un teorema particolarmente importante.

**Lemma 4.1.7.** Un'unione localmente finita di chiusi è chiusa.

*Dimostrazione.* Sia  $\{C_i\}_{i \in I}$  una famiglia localmente finita di chiusi.  $\forall x \in X$ ,  $\exists U_x \subseteq X$  aperto, con  $x \in U_x$  che interseca solo un numero finito di  $C_i$ . Sia  $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in X}$  il ricoprimento aperto così definito.  $\mathcal{U}$  è fondamentale, per cui basta vedere che  $(\bigcup_{i \in I} C_i) \cap U_x$  è chiuso in  $U_x$ ,  $\forall x \in X$ . Ma, fissato  $x$ , esistono  $i_1, \dots, i_n$  tali che:

$$U_x \cap \left( \bigcup_{i \in I} C_i \right) = U_x \cap (C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n})$$

che è chiuso in  $U_x$  in quanto  $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_n}$  è unione finita di chiusi.  $\square$



**Corollario 4.1.8.** In generale, se  $\{Y_i\}_{i \in I}$  è una famiglia localmente finita, allora:

$$\overline{\bigcup_{i \in I} Y_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$$

*Dimostrazione.*

$$Y_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i \implies \overline{Y_{i_0}} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i} \quad \forall i_0 \implies \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Y_i}$$

Per il viceversa, si mostra prima che se gli  $Y_i$  sono localmente finiti, anche gli  $\overline{Y_i}$  lo sono. Dunque, per il lemma appena visto,  $\bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$  è un chiuso che contiene  $\bigcup_{i \in I} Y_i$ . Per cui:

$$\overline{\bigcup_{i \in I} Y_i} \subseteq \bigcup_{i \in I} \overline{Y_i}$$

□

Possiamo adesso enunciare e dimostrare il seguente teorema:

**Teorema 4.1.9.** Un ricoprimento chiuso localmente finito è fondamentale.

*Dimostrazione.* Sia  $\{C_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento chiuso localmente finito, e sia  $Z \subseteq X$  tale che  $Z \cap C_i$  sia chiuso in  $C_i$ ,  $\forall i \in I$ . Poiché  $C_i$  è chiuso, e un chiuso di un chiuso di  $X$  è chiuso in  $X$ , allora  $Z \cap C_i$  è chiuso in  $X$   $\forall i \in I$ . Dunque la famiglia  $\{Z \cap C_i\}_{i \in I}$  è una famiglia localmente finita di chiusi. Allora, per il lemma,  $Z = \bigcup_{i \in I} (Z \cap C_i)$  è chiuso in  $X$ , da cui la tesi. □

## 4.2 Connessioni

**Definizione 4.2.1.** Uno spazio topologico  $X$  si dice **SCONNESSO** se vale una delle seguenti condizioni (equivalenti):

- (i)  $X = A \sqcup B$  (cioè  $X = A \cup B$  con  $A \cap B = \emptyset$ ) con  $A, B$  aperti non vuoti. Allora in particolare  $A$  e  $B$  sono anche chiusi, in quanto sono uno il complementare dell'altro.
- (ii)  $X = A \sqcup B$  con  $A, B$  chiusi non vuoti
- (iii)  $\exists A \subseteq X, A \neq \emptyset, A \neq X, A$  è sia aperto che chiuso

**Definizione 4.2.2.**  $X$  si dice **CONNESSO** se non è sconnesso. In altre parole, se:  $\forall A \subseteq X, A \neq \emptyset, A$  aperto e chiuso, allora  $A = X$ .

**Esempio 4.2.3.**  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  è sconnesso in quanto unione degli aperti  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ .

**Teorema 4.2.4.**  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  è connesso.

*Dimostrazione.* Siano  $A, B$  aperti non vuoti di  $[0, 1]$ , con  $[0, 1] = A \sqcup B$ . Posso supporre  $0 \in A$ . Dunque, se  $t_0 = \inf B$  (esiste poiché  $B$  è non vuoto e limitato inferiormente), allora  $t_0 \geq \varepsilon > 0$ , perché altrimenti avrei  $B \cap [0, \varepsilon) \neq \emptyset$ , che contraddice le ipotesi.  $B$  è chiuso ( $A$  e  $B$  sono entrambi aperti e chiusi), quindi  $t_0 \in B$ . Ma  $B$  è anche aperto e  $t_0 > 0$ , per cui  $\exists \delta > 0$  con  $(t_0 - \delta, t_0] \subseteq B$ , e ciò contraddice il fatto che  $t_0 = \inf B$ .  $\square$

**Definizione 4.2.5.**  $X$  si dice CONNESSO PER ARCHI se  $\forall x_0, x_1 \in X$ ,  $\exists \alpha : [0, 1] \rightarrow X$  continua tale che  $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$ .

**Proposizione 4.2.6.**  $X$  connesso per archi  $\implies X$  connesso.

*Dimostrazione.* Se  $X$  fosse sconnesso, allora  $X = A \sqcup B$  aperti non vuoti. Prendo allora  $x_0 \in A, x_1 \in B$ . Se  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$  fosse continua, avrei una partizione  $[0, 1] = \alpha^{-1}(A) \sqcup \alpha^{-1}(B)$  di  $[0, 1]$  in aperti non vuoti, il che è assurdo.  $\square$

**Proposizione 4.2.7.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Allora:

- (i) Se  $X$  è connesso,  $f(X)$  è connesso
- (ii) Se  $X$  è connesso per archi,  $f(X)$  è connesso per archi

*Dimostrazione.* Se  $f(X) = A \sqcup B$ , allora  $X = f^{-1}(A) \sqcup f^{-1}(B)$ , quindi  $X$  è sconnesso (abbiamo dimostrato la contronominale della (i)).

Dati  $y_0, y_1 \in f(X)$ ,  $\exists x_0, x_1 \in X$  con  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1$ , esiste  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  con  $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$ . Allora  $f \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow Y$  è un arco continuo che connette  $y_0$  a  $y_1$ .  $\square$

**Lemma 4.2.8.** Siano  $X$  spazio topologico,  $Y \subseteq X$  connesso e  $Z \subseteq X$  tale che  $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$ . Allora  $Z$  è connesso.

*Dimostrazione.* Osserviamo innanzitutto che  $Y$  è denso in  $Z$ , in quanto la chiusura di  $Y$  in  $Z$  è  $Y \cap Z = Z$  poiché  $Z \subseteq \overline{Y}$ . Sia  $A \neq \emptyset$  un aperto e chiuso di  $Z$ . Allora  $A \cap Y$  è aperto e chiuso in  $Y$  (per definizione di topologia di sottospazi), e  $A \cap Y \neq \emptyset$  in quanto  $Y$  è denso in  $Z$  e  $A$  è aperto in  $Z$ . Allora, per connessione di  $Y$ , si ha che  $A \cap Y = Y$ , cioè  $Y \subseteq A$ . Ma  $Y$  è denso in  $Z$ , per cui anche  $A$  lo è. Ma  $A$  è anche chiuso in  $Z$ , per cui  $A = Z$ .  $\square$

**Lemma 4.2.9.** Siano  $\{Y_i\}_{i \in I}$  sottospazi connessi di  $X$ , e sia  $x_0 \in X$  tale che  $x_0 \in Y_i, \forall i \in I$  (cioè  $x_0 \in \bigcup_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ ). Allora  $\bigcup_{i \in I} Y_i$  è connesso.

*Dimostrazione.* Sia  $A \neq \emptyset$  aperto e chiuso di  $Y = \bigcup Y_i$ . A meno di sostituire  $A$  con il suo complementare  $Y \setminus A$ , posso supporre  $x_0 \in A$ .  $\forall i \in I, A \cap Y_i$  è aperto e chiuso in  $Y_i$ , e non è vuoto perché contiene  $x_0$ . Per cui,  $Y_i$  connesso implica che  $A \cap Y_i = Y_i$ , cioè  $Y_i \subseteq A$ . Ma allora  $Y \subseteq A$ , cioè  $Y = A$ , da cui la tesi.  $\square$

**Definizione 4.2.10.** Sia  $x_0 \in X$ . Allora esiste il più grande sottospazio connesso di  $X$  che contiene  $x_0$ . Lo indicheremo con  $C(x_0)$  e lo chiameremo COMPONENTE CONNESSA di  $x_0$ .

*Dimostrazione.* (Esistenza di  $C(x_0)$ )

Pongo  $C(x_0) = \bigcup \{Y \mid Y \subseteq X, Y \text{ connesso}, x_0 \in Y\}$ . Per il lemma appena visto,  $C(x_0)$  è connesso, e contiene per costruzione qualsiasi connesso che contiene  $x_0$ , perciò è anche il più grande sottospazio connesso contenente  $x_0$ .  $\square$

**Proposizione 4.2.11.** Le componenti connesse realizzano una partizione dello spazio in chiusi.

*Dimostrazione.*  $\forall x_0, x_1 \in X, x_0 \in C(x_0)$  poiché  $\{x_0\}$  è connesso. Se  $C(x_0) \cap C(x_1) \neq \emptyset$ , per il lemma precedente  $C(x_0) \cup C(x_1)$  è connesso  $\implies C(x_0) \cup C(x_1) \subseteq C(x_0)$  e  $C(x_0) \cup C(x_1) \subseteq C(x_1) \implies C(x_0) = C(x_1)$ .

Infine,  $\overline{C(x_0)}$  è connesso per un lemma precedente e contiene  $x_0$ , dunque  $\overline{C(x_0)} \subseteq C(x_0)$ , per cui  $C(x_0) = \overline{C(x_0)}$ , ovvero  $C(x_0)$  è chiuso.  $\square$

**Osservazione 4.2.12.**  $A \subseteq X$  aperto, chiuso e connesso  $\implies A$  è una componente connessa. Infatti, se  $B \supseteq A$  è connesso,  $A$  è aperto e chiuso in  $B$  e non vuoto, allora  $A = B$ , per cui  $A$  è un connesso massimale, ovvero è una componente connessa.

**Osservazione 4.2.13.** Le componenti connesse di  $\mathbb{Q}$  sono i punti, cioè  $C(x_0) = \{x_0\}$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{Q}$ . Si dice allora che  $\mathbb{Q}$  è TOTALMENTE SCONNESSO. Infatti, supponiamo per assurdo che esista una componente connessa  $C$  che contiene due punti  $x_0, x_1 \in \mathbb{Q}$ , con  $x_0 < x_1$ , e sia  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  con  $x_0 < y < x_1$ . Allora  $(C \cap (-\infty, y)) \sqcup (C \cap (y, +\infty))$  è una partizione non banale di  $C$  in aperti. Ma allora  $C$  è sconnesso, il che contraddice l'ipotesi iniziale.

Dunque, in generale, le componenti connesse non sono aperte.

Studiamo adesso i connessi di  $\mathbb{R}$ :

$A \subset \mathbb{R}$  è convesso se  $\forall x, y \in A$  vale:

$$tx + (1 - t)y \in A \quad \forall t \in [0, 1]$$

**Osservazione 4.2.14.**

$$\begin{aligned} A \subset \mathbb{R} \text{ convesso} &\implies A \text{ connesso per archi} \\ &\implies A \text{ connesso} \end{aligned}$$

**Proposizione 4.2.15.** Se  $I \subset \mathbb{R}$ , sono equivalenti:

- (i)  $I$  è convesso ( $I$  è un intervallo)
- (ii)  $I$  è connesso per archi

(iii)  $I$  è connesso

*Dimostrazione.* (i)  $\implies$  (ii)  $\implies$  (iii) lo sappiamo già per l'osservazione precedente.

Vediamo allora (iii)  $\implies$  (i). Supponiamo  $I$  non connesso. Allora  $\exists a < b < c$  tali che  $a, c \in I, b \notin I$ . Allora:

$$I = ((-\infty, b) \cap I) \cup ((b, +\infty) \cap I)$$

che è assurdo per ipotesi.  $\square$

**Esempio 4.2.16.**  $(0,1)$  non è omeomorfo a  $[0,1]$ . Sia infatti  $f : [0,1] \longrightarrow (0,1)$  omeomorfismo. Allora:

$[0,1] \setminus \{0\}$  è connesso

$(0,1) \setminus \{f(0)\}$  non è connesso.

**Esempio 4.2.17.** (*Connesso  $\nrightarrow$  connesso per archi*)

Sia  $Y = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Poiché  $Y = F(0, +\infty)$  con:

$$\begin{aligned} F : (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

allora  $Y$  è connesso per archi. Sia:

$$X = \overline{Y} = Y \cup \{(0, t) \mid |t| \leq 1\}$$

che è connesso in quanto chiusura di un connesso. Vediamo allora che non è connesso per archi. Supponiamo che esista il cammino  $\alpha$  definito come:

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X \quad \text{con} \quad \alpha(0) = (0, 0) \text{ e } \alpha(1) \in Y$$

Consideriamo allora:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (x(t), y(t)) \\ x : [0, 1] &\longrightarrow [0, +\infty] \\ y : [0, 1] &\longrightarrow [-1, 1] \end{aligned}$$

Sia  $\Omega = \{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}$  chiuso, e sia  $t_0 = \max \Omega, t_0 < 1$  per ipotesi. Supponiamo  $y(t_0) \geq 0$  (l'altro caso è analogo). Per continuità:

$$\exists \delta > 0 : y(t) \geq -\frac{1}{2} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Vediamo che  $x([t_0, t_0 + \delta]) \subset [0, +\infty)$  è un connesso contenente  $0 = x(t_0)$ . Allora  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $[0, \varepsilon] \subset x([t_0, t_0 + \delta])$ . Cerchiamo allora  $\lambda \in [0, \varepsilon]$  con  $\sin \frac{1}{\lambda} = -1$ :

$$\lambda = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad \text{con } k \gg 0$$

Allora  $\sin \frac{1}{\lambda} = -1$ , vale a dire che se  $x(t) = \lambda$ , allora  $y(t) = \sin \frac{1}{\lambda} = -1$ .

Torniamo adesso ad un discorso generale sulle connessioni.

**Definizione 4.2.18.** Dato  $x \in X$ , la COMPONENTE CONNESSA PER ARCHI di  $x$  è il più grande connesso per archi che contiene  $x$ .

Equivalentemente: Dato  $x \in X$ , la sua componente connessa per archi  $C_a(x)$  è:

$$C_a(x) = \{y \in X \mid \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ con } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

Definiamo una relazione  $\sim$  su  $X$ :

$$x \sim y \text{ se } \exists \alpha : [0, 1] \longrightarrow X \text{ con } \alpha(0) = x, \alpha(1) = y$$

Vediamo che  $\sim$  è una relazione di equivalenza, dunque  $C_a(x) = [x]$ :

(i)  $\sim$  è riflessiva. Sia:

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto x \end{aligned}$$

Allora  $x \sim x$ .

(ii)  $\sim$  è simmetrica. Sia  $\alpha : [0, 1] \longrightarrow X$  continua con  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$ . Definiamo allora  $\beta : [0, 1] \longrightarrow X$  tale che  $\beta(t) = \alpha(1 - t)$ , e osserviamo che è continua in quanto composizione di funzioni continue. Allora, poiché  $\beta(0) = y, \beta(1) = x$ , si ha che  $y \sim x$ .

(iii)  $\sim$  è transitiva. Siano  $\alpha, \beta : [0, 1] \longrightarrow X$  continue con  $\alpha(0) = x, \alpha(1) = \beta(0) = y, \beta(1) = z$ . Definiamo allora la GIUNZIONE di  $\alpha$  e  $\beta$  nel seguente modo:

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & \text{se } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Allora abbiamo che:

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)(0) &= \alpha(0) = x \\ (\alpha * \beta)\left(\frac{1}{2}\right) &= \alpha(1) = \beta(0) = y \\ (\alpha * \beta)(1) &= \beta(1) = z \end{aligned}$$

Allora  $[0, 1] = [0, 1/2] \cup [1/2, 1]$  è un ricoprimento chiuso localmente finito, di conseguenza è fondamentale, e quindi  $\alpha * \beta$  è continua in quanto le sue restrizioni sono continue.

**Esempio 4.2.19.**  $X = X_1 \cup X_2$  dove:

$$X_1 = \{(0, t) \mid |t| \leq 1\} \quad X_2 = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}$$

$X$  ha due componenti connesse per archi:  $X_1$  e  $X_2$ . Infatti:

$$\begin{aligned} X_2 &= X \cap \{x > 0\} && \text{aperta, non chiusa} \\ X_1 &= X \cap \{x = 0\} && \text{chiusa, non aperta} \end{aligned}$$

Dunque in generale le componenti connesse per archi non sono né aperte né chiuse.

**Proposizione 4.2.20.** Supponiamo che ogni punto abbia un intorno connesso. Allora le componenti connesse sono aperte.

*Dimostrazione.* Sia  $x \in X$ , con  $C(x)$  la sua componente connessa. Sia  $y \in C(x)$ , e sia  $U \in I(y)$  intorno connesso. Allora  $C(x) \cup U$  è unione di due connessi che si intersecano in  $y$ , e quindi  $U \subset C(x)$ .  $\square$

**Proposizione 4.2.21.** Supponiamo che ogni punto abbia un intorno connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi sono aperte, e coincidono con le componenti connesse.

*Dimostrazione.* Sia  $x \in X$ , con  $C_a(x)$  la sua componente connessa per archi. Sia  $y \in C_a(x)$ , e sia  $U \in I(y)$  intorno componente connessa per archi. Allora  $C_a(x) \cup U$  è connesso per archi, e quindi  $U \subset C_a(x)$ . Vediamo adesso che  $C_a(x) = C(x)$ . Chiaramente,  $C_a(x) \subset C(x)$  aperto, infatti:

$$C(x) = \bigcup_{y \in C(x)} C_a(y)$$

Allora  $C(x) \setminus C_a(x)$  è aperto e  $C(x)$  è connesso, quindi  $C_a(x) = C(x)$ .  $\square$

**Definizione 4.2.22.**  $X$  è detto LOCALMENTE CONNESSO se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi.

**Definizione 4.2.23.**  $X$  è detto LOCALMENTE CONNESSO PER ARCHI se ogni punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.

**Esempio 4.2.24.**  $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$  è uno spazio connesso per archi non localmente connesso.

### 4.3 Compattezza

**Definizione 4.3.1.** Uno spazio topologico  $X$  è COMPATTO se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito, cioè se dato  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  t.c.  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  esistono  $i_0, \dots, i_n$  t.c.  $X = U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_n}$ . Un sottospazio  $Y \subseteq X$  è compatto se lo è con la topologia di sottospazio.

**Definizione 4.3.2.** Uno spazio metrico  $X$  è LIMITATO se esistono  $X_0 \in X$  e  $R > 0$  t.c.  $X = B(x_0, R)$  o equivalentemente se  $\text{diam}(X) = \sup \{d(x, y), x, y \in X\} < +\infty$ .

**Lemma 4.3.3.** Se  $X$  è metrico compatto, allora  $X$  è limitato.

*Dimostrazione.* Scelto  $x_0 \in X$ ,  $U_n = B(x_0, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Esistono allora  $i_0, \dots, i_n$  t.c.  $X = U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_n}$ . Poniamo allora  $R = \max\{i_0, \dots, i_n\}$  e otteniamo  $X = B(x_0, R)$ .  $\square$

**Corollario 4.3.4.**  $\mathbb{R}$  non è compatto.

**Osservazione 4.3.5.** La compattezza è invariante per omeomorfismo, dunque  $(-1, 1)$  non è compatto in quanto omeomorfo a  $\mathbb{R}$  tramite  $x \mapsto \tan \frac{\pi}{2}x$ , con inversa  $y \mapsto \frac{2}{\pi} \tan^{-1} y$ . Segue, per omeomorfismo affine con  $(-1, 1)$ , che nessun intervallo aperto  $(a, b)$  è compatto.

**Corollario 4.3.6.** Metrico e limitato non implica compatto.

**Teorema 4.3.7.**  $[0, 1]$  è compatto.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $[0, 1]$  e consideriamo  $t_0 = \sup A$  dove  $A = \{t \in [0, 1] \text{ t.c. } c' \text{ è un sottoricoprimento finito che ricopre } [0, t]\}$ . Chiaramente l'insieme è non vuoto e contiene elementi maggiori di 0, infatti c'è un aperto  $U_{i_0}$  che contiene 0 e dunque contiene un intervallo della forma  $[0, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ : qualunque numero maggiore di 0 e minore di  $\varepsilon$  sta dunque in  $A$ . Il sup di  $A$  è anche un massimo: infatti esiste un aperto  $U_{i_{t_0}}$  che contiene  $t_0$ , dunque contiene un intorno della forma  $(t_0 - \delta, t_0]$ . Prendendo allora un sottoricoprimento finito che ricopre  $[0, t_0 - \delta/2]$  e aggiungendoci  $U_{i_{t_0}}$  otteniamo un sottoricoprimento finito che ricopre  $[0, t_0]$ , da cui  $t_0 \in A$  e dunque è un massimo. Supponiamo per assurdo che  $t_0 \neq 1$ , cioè  $0 < t_0 < 1$ , allora sempre in  $U_{i_{t_0}}$  c'è un intorno della forma  $[t_0, t_1)$  con  $t_0 < t_1 < 1$ , quindi tutti i punti in  $(t_0, t_1)$  stanno in  $A$ , contro la massimalità di  $t_0$ , assurdo.  $\square$

**Teorema 4.3.8.**  $f : X \rightarrow Y$  continua,  $X$  compatto  $\Rightarrow f(X)$  compatto.

*Dimostrazione.* Sia  $\{U_i\}$  un ricoprimento aperto di  $f(X)$  con gli  $U_i$  aperti di  $f(X)$ , allora esistono  $\{V_i\}$  aperti di  $Y$  t.c.  $U_i = f(X) \cap V_i$ . Allora  $\{f^{-1}(U_i)\}$  è un ricoprimento di  $X$  e  $f^{-1}(U_i) = f^{-1}(f(X) \cap V_i) = f^{-1}(f(X)) \cap f^{-1}(V_i) = X \cap f^{-1}(V_i)$  (il penultimo uguale è vero perché  $f^{-1}(V_i) \subseteq f^{-1}(f(X))$ ), dunque per la continuità di  $f$  è un'intersezione di un aperto con tutto, cioè è aperto, dunque  $\{f^{-1}(U_i)\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ , ne estraiamo un sottoricoprimento, prendiamo le immagini degli aperti così trovati e questi sono un sottoricoprimento finito di  $f(X)$  estratto da  $\{U_i\}$ .  $\square$

**Fatto 4.3.9.** I seguenti sono fatti banali:

- (i) ogni spazio finito è compatto;
- (ii) unione finita di spazi compatti è compatta.

**Teorema 4.3.10.**  $X$  compatto,  $Y \subseteq X$  chiuso  $\Rightarrow Y$  compatto.

*Dimostrazione.* Sia  $\{U_i\}$  un ricoprimento di  $Y$  con gli  $U_i$  aperti di  $Y$ , allora per ogni  $i$  esiste un  $V_i$  aperto di  $X$  t.c.  $U_i = Y \cap V_i$  e  $\{V_i\}$  è ancora un ricoprimento di  $Y$ . Notiamo che anche  $W = X \setminus Y$  è un aperto e dunque  $\{V_i\} \cup \{W\}$  è un ricoprimento aperto di  $X$ . Allora, essendo  $X$  compatto, esiste un sottoricoprimento finito  $W, V_{i_0}, \dots, V_{i_n}$  (a priori,  $W$  potrebbe non essere necessario, ma aggiungerlo non cambia niente). Essendo  $W \cap Y = \emptyset$  dev'essere che  $V_{i_0}, \dots, V_{i_n}$  ricoprono  $Y$ , dunque i rispettivi  $U_{i_0}, \dots, U_{i_n}$  sono il sottoricoprimento finito cercato.  $\square$

**Osservazione 4.3.11.** Abbiamo visto (e useremo ancora) che  $Y \subseteq X$  è compatto se e solo se per ogni famiglia  $\{U_i\}_{i \in I}$  di aperti di  $X$  t.c.  $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$  esiste

$\mathcal{I} \subseteq I$  finito con  $Y \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ .

**Esempio 4.3.12.** Sia  $X$  un insieme con la topologia cofinita, allora ogni sottoinsieme di  $X$  è compatto. Infatti, sia  $Y \subseteq X$  e supponiamo  $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ ,  $U_i$  aperti di  $X$ . Se  $Y = \emptyset$  allora è compatto, altrimenti esiste  $y_0 \in Y$  e  $y_0 \in U_{i_0}$  per qualche  $i_0 \in I$ . Poiché  $X \setminus U_{i_0}$  è finito, anche  $Y \setminus U_{i_0}$  è finito, diciamo  $Y \setminus U_{i_0} = \{y_1, \dots, y_n\}$ , allora per ogni  $j = 1, \dots, n$  esiste  $i_j$  con  $y_j \in U_{i_j}$  e dunque  $Y \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \dots \cup U_{i_n}$ .

Ad esempio, se  $X = \mathbb{Z}$  con la topologia cofinita,  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$  è compatto ma non chiuso.

**Teorema 4.3.13.** Sia  $X$  spazio topologico T2,  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  compatto. Allora  $Y$  è chiuso.

*Dimostrazione.* Dimostriamo che  $X \setminus Y$  è aperto. Sia  $x \in X \setminus Y$ . Dato che  $X$  è T2, per ogni  $y \in Y$  esistono due aperti disgiunti  $U_y, V_y$  t.c.  $x \in U_y, y \in V_y$ .  $\{V_y\}_{y \in Y}$  è un ricoprimento aperto di  $Y$ , che è compatto, dunque esiste un sottoricoprimento finito  $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ . Notiamo allora che  $V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ ,  $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$  sono aperti disgiunti t.c.  $Y \subseteq V, x \in U$ . In particolare,  $U$  è un intorno aperto di  $x$  disgiunto da  $Y$  e, dato che lo possiamo trovare per ogni  $x \in X \setminus Y$ , possiamo concludere che  $X \setminus Y$  è aperto e dunque  $Y$  è chiuso.  $\square$

**Lemma 4.3.14.**  $X$  compatto T2  $\Rightarrow X$  regolare.



*Dimostrazione.*  $T2 \Rightarrow T1$ , dobbiamo dimostrare  $T3$ . Siano  $Y \subseteq X$  chiuso,  $x_0 \in X \setminus Y$ . Dal teorema 4.3.10  $Y$  è compatto, prendendo gli aperti  $U, V$  della dimostrazione del teorema 4.3.13 abbiamo esattamente quello che ci serve per soddisfare  $T3$ .  $\square$

**Teorema 4.3.15.**  $X$  compatto  $T2 \Rightarrow X$  normale.

*Dimostrazione.*  $T2 \Rightarrow T1$ , dobbiamo dimostrare  $T4$ . Siano  $C$  e  $D$  due chiusi disgiunti in  $X$ . Dal lemma 4.3.14 sappiamo che  $X$  è regolare, dunque per ogni  $x \in C$  esistono  $U_x, V_x$  aperti disgiunti  $x \in U_x, D \subseteq V_x$ .  $\{U_x\}_{x \in C}$  è un ricoprimento aperto di  $C$ , che per il teorema 4.3.10 è compatto, dunque esiste un sottoricoprimento finito  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$ . Allora prendendo  $U = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}, V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$  abbiamo che sono due aperti disgiunti t.c.  $C \subseteq U, D \subseteq V$ , che è esattamente quello che ci serve per dimostrare  $T4$ .  $\square$


**Proposizione 4.3.16.**  $X$   $T2$ ,  $C, D \subseteq X$  compatti e disgiunti, allora esistono  $U, V$  aperti disgiunti con  $C \subseteq U, D \subseteq V$ .

*Dimostrazione.* Dato che sfrutta le stesse idee delle dimostrazioni precedenti, è lasciata come esercizio al lettore.  $\square$

**Teorema 4.3.17.**  $X$  spazio topologico,  $Y_i, i \in I$  famiglia di sottoinsiemi chiusi con  $Y_{i_0}$  compatto per qualche  $i_0 \in I$ . Se per ogni  $J \subseteq I$  finito vale che  $\bigcap_{i \in J} Y_i \neq \emptyset$

(PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE FINITA), allora  $\bigcap_{i \in I} Y_i \neq \emptyset$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $i \in I, i \neq i_0$ , sia  $Z_i = Y_{i_0} \cap Y_i$ .  $Z_i$  è un chiuso di  $Y_{i_0}$ , dunque  $W_i = Y_{i_0} \setminus Z_i = Y_{i_0} \setminus Y_i$  è un aperto di  $Y_{i_0}$ . Quindi, se per assurdo  $\bigcap_{i \in I} Y_i = \emptyset$ , avremmo che  $\{W_i, i \in I\}$  sarebbe un ricoprimento aperto di  $Y_{i_0}$ . Allora, per compattezza di  $Y_{i_0}$ , esiste un sottoricoprimento finito  $W_{i_1}, \dots, W_{i_n}$ , cioè  $Y_{i_0} = W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_n} = (Y_{i_0} \setminus Y_{i_1}) \cup \dots \cup (Y_{i_0} \setminus Y_{i_n}) = Y_{i_0} \setminus (Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_n}) \Rightarrow Y_{i_0} \cap Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_n} = \emptyset$ , assurdo.  $\square$

**Esempio 4.3.18.** Serve un  $Y_i$  compatto:  $X = \mathbb{R}, Y_n = [n, +\infty)$  è un controesempio. 

**Corollario 4.3.19.** Se  $Y_n, n \in \mathbb{N}$  è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di  $X$  con  $Y_0$  compatto,  $Y_i$  chiuso per ogni  $i \in \mathbb{N}$ ,  $Y_{n+1} \subseteq Y_n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , allora  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Y_n \neq \emptyset$ .

**Lemma 4.3.20.** Sia  $X$  spazio topologico e  $\mathcal{B}$  una base di  $X$ . Se ogni ricoprimento di  $X$  con aperti di  $\mathcal{B}$  ammette un sottoricoprimento finito, allora  $X$  è compatto.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un qualsiasi ricoprimento aperto di  $X$ . Per definizione di ricoprimento si ha che per ogni  $x \in X$  esiste  $i(x) \in I$  t.c.  $x \in U_{i(x)}$  e per definizione di base esiste  $B_x \in \mathcal{B}$  t.c.  $x \in B_x \subseteq U_{i(x)}$ .  $\{B_x\}_{x \in X}$  è un ricoprimento di  $X$  con aperti di  $\mathcal{B}$  (si dice che  $\{B_x\}_{x \in X}$  è un *raffinamento* di  $\mathcal{U}$ ). Per ipotesi esistono allora  $x_1, \dots, x_n$  t.c.  $X = B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n} \subseteq U_{i(x_1)} \cup \dots \cup U_{i(x_n)}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 4.3.21.**  $X, Y$  compatti  $\Rightarrow X \times Y$  compatto.

*Dimostrazione.* Per il lemma 4.5, possiamo partire da un ricoprimento  $\mathcal{U} = \{U_i \times V_i\}_{i \in I}$  dove  $U_i$  è aperto in  $X$ ,  $V_i$  è aperto in  $Y$  per ogni  $i \in I$ . Per ogni  $x \in X$  il sottoinsieme  $\{x\} \times Y \subseteq X \times Y$  è compatto in quanto omeomorfo a  $Y$ , per cui esiste  $J_x \subseteq I$  finito t.c.  $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$ . Poniamo  $U_x = \bigcap_{i \in J_x} U_i$ , è aperto in quanto intersezione finita di aperti e per costruzione  $U_x \times Y \subseteq \bigcup_{i \in J_x} (U_i \times V_i)$ . Per compattezza di  $X$  e poiché  $\{U_x\}_{x \in X}$  è un ricoprimento aperto, abbiamo che  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$  per qualche  $x_1, \dots, x_n$ . Allora  $X \times Y = \bigcup_{k=1}^n (U_{x_k} \times Y) \subseteq$

$\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{i \in J_{x_k}} (U_i \times V_i)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione 4.3.22.** Se  $A \subseteq X, B \subseteq Y$ , la topologia prodotto di  $A \times B$ , ciascuno dotato della topologia di sottospazio, coincide con la topologia di sottospazio di  $X \times Y$ . Dunque, per il teorema 4.3.21, se  $A, B$  sono sottospazi compatti,  $A \times B$  è un sottospazio compatto di  $X \times Y$ .

**Proposizione 4.3.23.**  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  è compatto  $\Leftrightarrow$  è chiuso e limitato.

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Segue dal fatto che  $\mathbb{R}^n$  è un metrico T2, dal lemma 4.3.3 e dal teorema 4.3.13.

$(\Leftarrow)$  Se  $C$  è limitato, esiste  $R > 0$  t.c.  $C \subseteq [-R, R]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ , e  $[-R, R]^n$  è compatto in quanto prodotto finito di copie del compatto  $[-R, R]$  (che è compatto perché isomorfo a  $[0, 1]$ ), quindi  $C$ , essendo chiuso in un compatto, è compatto per il teorema 4.3.10.  $\square$

**Teorema 4.3.24.**  $f : X \rightarrow Y$  continua,  $X$  compatto,  $Y$  T2, allora  $f$  è chiusa.

*Dimostrazione.* Se  $C \subseteq X$  è chiuso, allora è chiuso in un compatto, dunque per il teorema 4.3.10 è compatto, quindi per il teorema 4.3.8  $f(C)$  è compatto in  $Y$ , allora è compatto in un T2, dunque per il teorema 4.3.13 è chiuso.  $\square$

**Definizione 4.3.25.**  $X$  spazio topologico si dice COMPATTAMENTE GENERATO se i compatti di  $X$  formano un ricoprimento fondamentale.

**Lemma 4.3.26.** Se ogni  $x \in X$  ha un intorno compatto,  $X$  è compattamente generato.

*Dimostrazione.* Basta far vedere che se  $A \subseteq X$  è t.c.  $A \cap K$  è aperto in  $K$  per ogni compatto  $K \subseteq X$ , allora  $A$  è aperto in  $X$ . Sia  $p \in A$ , basta mostrare che  $p \in A^\circ$ . Per ipotesi esiste un intorno compatto  $K$  di  $p$ , cioè  $p \in K^\circ \subseteq K$ . Ora,  $A \cap K^\circ$  è aperto in  $K^\circ$ , ed è perciò aperto in  $X$  in quanto aperti di aperti sono aperti, dunque  $p \in A \cap K^\circ \subseteq A$ , ma  $A \cap K^\circ$  è un aperto, da cui  $p \in A^\circ$  come voluto.  $\square$

**Definizione 4.3.27.**  $f : X \rightarrow Y$  continua è PROPRIA se  $f^{-1}(K)$  è un compatto di  $X$  per ogni  $K \subseteq Y$  compatto.

**Esempio 4.3.28.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua è propria se e solo se per ogni successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = +\infty$  si ha che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x_n)\| = +\infty$ . La dimostrazione è lasciata per esercizio al lettore.

**Teorema 4.3.29.**  $f : X \rightarrow Y$  continua e propria. Se  $Y$  è T2 e compattamente generato, allora  $f$  è chiusa.

*Dimostrazione.* Sia  $C \subseteq X$  chiuso. Poiché  $Y$  è compattamente generato, basta vedere che  $f(C) \cap K$  è chiuso in  $K$  per ogni  $K \subseteq Y$  compatto. Ora  $f(C) \cap K = f(C \cap f^{-1}(K))$ . Poiché  $f$  è propria,  $f^{-1}(K)$  è compatto, per cui  $C \cap f^{-1}(K)$  è chiuso in compatto, perciò è compatto per il lemma 4.3.10, dunque  $f(C \cap f^{-1}(K))$  è compatto in  $Y$  che è T2, che è chiuso per il lemma 4.3.13, da cui la tesi.  $\square$

**Esempio 4.3.30.** Ogni punto di  $\mathbb{R}^n$  ha un intorno compatto  $\Rightarrow \mathbb{R}^n$  è compattamente generato, dunque se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è propria, è chiusa. Se invece consideriamo  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $\pi(x, y) = x$ , non è propria poiché  $\pi^{-1}(\{0\}) = \{0\} \times \mathbb{R}$ , che non è compatto, e infatti non è neanche chiusa (si consideri ad esempio l'iperbole).

**Esempio 4.3.31.** Nessun  $p \in \mathbb{Q}$  ammette un intorno compatto (in  $\mathbb{Q}$ ). Infatti se  $U \subseteq \mathbb{Q}$  è un intorno di  $p$  in  $\mathbb{Q}$ , esiste  $V \subseteq \mathbb{Q}$  aperto di  $\mathbb{Q}$  con  $p \in V \subseteq U$ , perciò esiste  $\varepsilon > 0$  t.c.  $p \in ((p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}) \subseteq U$ . Se  $U$  fosse compatto sarebbe compatto anche in  $\mathbb{R}$  (ad esempio perché immagine della sua immersione, che è una funzione continua), dunque sarebbe chiuso in  $\mathbb{R}$ , per cui avremmo  $\overline{(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}} = [p - \varepsilon, p + \varepsilon] \subseteq U \subseteq \mathbb{Q}$  (dove la chiusura è in  $\mathbb{R}$ ), assurdo.

**Teorema 4.3.32.** Sia  $X$  uno spazio compatto e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Allora  $f(X)$  ha massimo e minimo.

*Dimostrazione.* Si ha che  $f(X)$  è un compatto di  $\mathbb{R}$ , dunque chiuso e limitato. Dalla limitatezza si ha che il  $\sup$  e l' $\inf$  esistono finiti, mentre dalla chiusura si ottiene che appartengono anche all'immagine.  $\square$

**Definizione 4.3.33.** Un insieme  $A$  si dice (*parzialmente*) *ordinato* se esiste su di esso una relazione d'ordine  $\leq$  tale che sia:

- (i) riflessiva, cioè  $a \leq a$  per ogni  $a \in A$ ;
- (ii) antisimmetrica, cioè  $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$ ;
- (iii) transitiva, cioè  $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$ .

Talvolta, per indicare  $a \leq b$ , scriveremo anche  $b \geq a$ . Un insieme ordinato  $A$  si dice *totalmente ordinato* se per ogni  $a, b \in A$  vale  $a \leq b$  o  $b \leq a$ .

**Definizione 4.3.34.** Sia  $A$  un insieme parzialmente ordinato, un sottoinsieme  $C \subseteq A$  è detto *catena* se  $C$  è un insieme totalmente ordinato con la relazione d'ordine indotta da  $A$ .

**Definizione 4.3.35.** Sia  $B \subseteq A$ , un elemento  $m \in A$  si dice *maggiorante* di  $B$  se  $b \leq m$  per ogni  $b \in B$ .

**Definizione 4.3.36.** Sia  $A$  un insieme parzialmente ordinato. Un elemento  $m \in A$  si dice *massimale* se, per ogni  $a \in A$ ,  $m \leq a \Rightarrow a = m$ .

**Teorema 4.3.37.** (Lemma di Zorn). Dato un insieme  $A$  parzialmente ordinato non vuoto, se ogni catena di  $A$  ammette maggiorante, allora  $A$  ammette almeno un elemento massimale.

**Osservazione 4.3.38.** Il lemma di Zorn è equivalente all'assioma della scelta, e la sua dimostrazione è ben al di fuori dagli scopi del corso.

**Teorema 4.3.39.** (di Alexander). Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\mathcal{P}$  una sua prebase. Se da ogni ricoprimento di  $X$  con elementi di  $\mathcal{P}$  si può estrarre un sottoricoprimento finito, allora  $X$  è compatto.

*Dimostrazione.* Per assurdo, sia  $X$  non compatto. Definiamo

$$\Omega = \{\mathcal{F} \text{ ricoprimento di } X \text{ da cui non si può estrarre un sottoricoprimento finito}\}$$

Ordiniamo  $\Omega$  con l'inclusione tra insiemi. Voglio applicare il lemma di Zorn a  $\Omega$  per dire che contiene un massimale. Per l'ipotesi dell'assurdo  $\Omega$  non è vuoto. Sia allora  $C$  una catena,

$$C = \{U_i\}_{i \in I}$$

con tutti gli  $U_i$  ricoprimenti aperti. Definisco

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Chiaramente  $U$  è un maggiorante di  $C$ . Voglio far vedere che  $U \subseteq \Omega$ . Allora per assurdo siano  $A_1, \dots, A_n$  aperti di  $U$  che ricoprono  $X$ . Ogni  $A_j$  appartiene ad un certo  $U_{i_j}$ . Poiché  $C$  è una catena, tutti gli  $U_{i_j}$  sono “inscatolati”, e quindi vi è un  $U_s$  fra questi che contiene tutti gli  $A_j$ . Ma questo non è possibile perché gli  $U$  erano scelti tali che non si poteva estrarre un sottoricoprimento finito. Quindi posso effettivamente applicare Zorn e ottenere un ricoprimento  $Z$  massimale.

Se mostro che  $\mathcal{P} \cap Z$  è ricoprimento di  $X$  ho l'assurdo che cercavo perché da quella intesezione non posso estrarre alcun sottoricoprimento finito (per come è costruito  $Z$ ).

Sia  $x \in X$ ,  $Z = \{Z_i\}_{i \in I}$ . Allora esiste  $i$  per cui  $x \in Z_i$ . Dunque esiste un  $B$  nella base associata a  $\mathcal{P}$  per cui  $x \in B \subseteq Z_i$ . Posso quindi prendere  $P_1, \dots, P_n$  in  $\mathcal{P}$  tali che la loro intersezione sia  $B$ . Vorrei trovare un  $P_j$  che sta anche in  $Z$ . Per assurdo supponiamo che nessun  $P_j$  sia in  $Z$ . Allora considero  $\{P_j\} \cup Z$ , che per massimalità di  $Z$  non appartiene a  $\Omega$ . Allora potrei scegliere un ricoprimento finito  $P_j, V_{j,1}, \dots, V_{j,m}$ , con i  $V_{j,i}$  in  $Z$ . Ma quindi avrei

$$X = \left( \bigcup_{j=1}^n P_j \right) \cup \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{s=1}^m V_{j,s} \subseteq Z_i \cup \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{s=1}^m V_{j,s} = X.$$

Questo è assurdo in quanto ho appena trovato un sottoricoprimento finito di  $Z$ . Quindi ho finito, osservando che  $P_j \in \mathcal{P} \cap Z$ .  $\square$

**Teorema 4.3.40.** (di Tychonoff). Siano  $X_i$  con  $i \in I$  spazi compatti. allora

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

è compatto.

*Dimostrazione.* Per il teorema di Alexander, possiamo restringerci a un ricoprimento  $\mathcal{U}$  fatto con aperti della prebase. Scegliamo la prebase canonica, allora si ha  $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{A}_i = \{\pi_i^{-1}(D), D \in \mathcal{D}_i\}$  dove  $\mathcal{D}_i$  è una famiglia di aperti di

$X_i$  per ogni  $i \in I$  e  $\pi_i$  sono le proiezioni. Mostriamo che esiste  $i_0 \in I$  per cui  $\mathcal{D}_{i_0}$  è un ricoprimento di  $X_{i_0}$ . Se per assurdo così non fosse, per ogni  $i \in I$  esisterebbe  $x_i \in X_i$  t.c.  $x_i \notin \bigcup_{D \in \mathcal{D}_i} D$ , allora l'elemento  $(x_i)_{i \in I}$  non apparterrebbe ad alcun elemento di  $\mathcal{U}$ , assurdo. Ma allora, dato che  $X_{i_0}$  è compatto,  $\mathcal{D}_{i_0}$  ammette, in quanto ricoprimento aperto, un sottoricoprimento finito  $D_1, \dots, D_n$  e  $\{\pi_{i_0}^{-1}(D_1), \dots, \pi_{i_0}^{-1}(D_n)\}$  è il sottoricoprimento finito di  $\mathcal{U}$  cercato.  $\square$

**Esempio 4.3.41.** Sia  $X$  un insieme,  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $Fun(X, A) = \{f : X \rightarrow A\} = A^X$ . Dotando  $A^X$  della topologia prodotto ( $A$  ha la topologia euclidea) si ottiene la topologia detta della convergenza puntuale.

**Lemma 4.3.42.** Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $f_n : X \rightarrow A$ , allora  $f_n \rightarrow f$  puntualmente  $\Leftrightarrow f_b \rightarrow f$  in  $A^X$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è molto semplice, ma per comprenderla al volo è necessaria un po' dimestichezza con basi, prebasi, topologia prodotto e "traduzioni in matematiche". Sono tutti dei se e solo se e i vari statement sono ridotti il più possibile a stringhe di simboli, quindi se non capite bene un enunciato o un passaggio non disperatevi: è tutto scritto in modo poco comprensibile, prendetelo come un buon esercizio per applicare ciò che avete imparato. Scusate.

$f_n \rightarrow f$  puntualmente  $\Leftrightarrow \forall x \in X, f_n(x) \rightarrow f(x) \Leftrightarrow \forall x \in X \forall \varepsilon > 0, \exists n_{x,\varepsilon} | \forall n \geq n_{x,\varepsilon}, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall x \in X, B \in \mathcal{B}$  base della topologia euclidea su  $A$  t.c.  $f \in \pi_x^{-1}(B), \exists n_{x,B} | \forall n \geq n_{x,B}, f_n \in \pi_x^{-1}(B) \Leftrightarrow \forall x \in X, B \subseteq A$  aperto t.c.  $f \in \pi_x^{-1}(B), \exists n_{x,B} | \forall n \geq n_{x,B}, f_n \in \pi_x^{-1}(B) \Leftrightarrow \forall P \in \mathcal{P}$  prebase della topologia prodotto su  $A^X$  t.c.  $f \in P, \exists n_P | \forall n \geq n_P, f_n \in P \Leftrightarrow \forall U \subseteq A^X | f \in U^\circ, \exists n_U | \forall n \geq n_U, f_n \in U \Leftrightarrow f_n \rightarrow f$  in  $A^X$ .  $\square$

#### 4.4 Compattificazione di Alexandroff ed esaustioni

**Esempio 4.4.1.** Sia  $p = (1, 0, \dots, 0)$  un punto di  $S^n$ . Voglio far vedere che  $S^n \setminus \{p\}$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . In effetti la proiezione stereografica mi fornisce la mappa

$$f: (x_0, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0} \right)$$

che è un isomorfismo.

Si ha anche che aggiungendo  $p$  allo spazio di partenza si ha un compatto che contiene isomorficamente  $\mathbb{R}^n$ . Lo scopo della sezione è quello di generalizzare questa idea. Cioè ottenere un compatto che contiene uno spazio dato aggiungendo un punto.

**Definizione 4.4.2.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico. Sia anche  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ . Definisco

$$\hat{\tau} = \tau \cup \{\hat{X} \setminus K \mid K \subseteq X \text{ chiuso e compatto}\}$$

Allora  $(\hat{X}, \hat{\tau})$  è detta COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROFF.

**Osservazione 4.4.3.**  $(\hat{X}, \hat{\tau})$  è uno spazio topologico compatto e vi è una naturale immersione aperta da  $X$  a  $\hat{X}$ .

**Definizione 4.4.4.** Uno spazio topologico si dice LOCALMENTE COMPATTO se ogni suo punto ammette un intorno compatto.

**Proposizione 4.4.5.** La compactificazione di uno spazio  $X$  è T2 se e solo se  $X$  è T2 e localmente compatto.

*Dimostrazione.* Hint: la dimostrazione, come molte di quelle che riguardano la compattificazione, si fa distinguendo il caso in cui si prende un punto di  $X$  e quello in cui si prende il punto  $\infty$ .  $\square$

**Proposizione 4.4.6.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  un'immersione aperta tra spazi T2. Si definisca  $g: Y \rightarrow \hat{X}$  con

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{se } f^{-1}(y) = \{x\} \\ \infty & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

Allora  $g$  è continua.

*Dimostrazione.* Hint: si prende un aperto nello spazio compattificato e si cerca di dire che la sua controimmagine è aperta. Per farlo si distingue il caso in cui l'infinito è nell'aperto da quello in cui non è nell'aperto.  $\square$

**Corollario 4.4.7.** Dato uno spazio  $X$  T2 compatto, esso è isomorfo alla compattificazione di  $X$  privato di un punto.

**Proposizione 4.4.8.** Sia  $f: X \rightarrow Y$  continua con  $Y$  T2. Si prenda  $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$  che manda  $x$  in  $f(x)$  e l'infinito nell'infinito. Allora  $\hat{f}$  è continua se e solo se  $f$  è propria.

**Definizione 4.4.9.** Sia  $X$  uno spazio topologico. Un'ESAUSTIONE IN COMPATTI di  $X$  è una famiglia  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di compatti di  $X$  tali che  $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$  e  $\bigcup_n K_n = X$ .

**Proposizione 4.4.10.** Sia  $K_n$  un'esaustione in compatti e  $H$  un compatto. Allora  $H$  è contenuto in  $K_i$  per qualche  $i$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $H \subseteq \bigcup_n K_n^\circ$ ,  $H$  è contenuto in un'unione finita di  $K_i$ , allora è contenuto nel più grande di questi.  $\square$

**Esempio 4.4.11.**  $\mathbb{R} \times (0, 1)$  non è isomorfo a  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ .

*Dimostrazione.* Si ha che  $K_n = [-n, n] \times [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$  è un esaustione in compatti di  $\mathbb{R} \times (0, 1)$ , mentre  $H = \{0\} \times [0, 1]$  è un compatto dell'altro spazio. Però l'immagine isomorfa di  $H$  non è contenuta in alcun  $K$ . Quindi si ha un assurdo.  $\square$

**Definizione 4.4.12.** Dato  $X$  spazio topologico,  $\pi_0(X)$  è l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$ .

**Esempio 4.4.13.**  $\mathbb{R}^n$  privato di  $s$  punti non è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  privato di  $t$  punti per  $s \neq t$ .

*Dimostrazione.* L'idea di base è quella di prendere esaustioni in compatti dei due spazi. Allora i compatti delle esaustioni (almeno definitivamente) avranno un buco per ogni punto tolto. Per ottenere un assurdo, basta contare le componenti connesse delle esaustioni.  $\square$

## 4.5 Compatezza per successioni

Sia  $\{a_n\}$  una successione a valori in  $X$  spazio topologico, allora una sottosuccessione di  $\{a_n\}$  è una sottofamiglia  $\{a_{n_i}\}$ , dove  $n_i, i = 1, 2, \dots$  è una successione strettamente crescente in  $\mathbb{N}$  (si tratta di una successione indicizzata da  $i$ ).

**Definizione 4.5.1.** Uno spazio topologico  $X$  si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI se ogni successione in  $X$  ammette una sottosuccessione convergente.

**Proposizione 4.5.2.** Sia  $X$  spazio topologico primo numerabile. Se  $X$  è compatto, allora è anche compatto per successioni.

*Dimostrazione.* Sia  $\{x_n\} \subseteq X$  una successione. Per ogni  $m \in \mathbb{N}$  sia  $C_m = \{x_n, n \geq m\}$ . Per ogni  $m$ ,  $C_m$  è chiuso e  $C_{m+1} \subseteq C_m$ . Per il teorema 4.3.17,  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m \neq \emptyset$ . Sia  $\bar{x} \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m$  cerchiamo una sottosuccessione che tende a  $\bar{x}$ . Sia  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  un sistema fondamentale numerabile di intorno di  $\bar{x}$  e supponiamo senza perdita di generalità  $U_{i+1} \subseteq U_i$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ . Costruiamo la sottosuccessione per induzione:  $\bar{x} \in C_0 = \{x_n\} \Rightarrow$  esiste  $n_0$  t.c.  $x_{n_0} \in U_0$ . Per ogni  $i \geq 0$ ,  $\bar{x} \in C_{n_i+1} = \{x_n, n \geq n_i + 1\} \Rightarrow$  esiste  $n_{i+1} > n_i$  t.c.  $x_{n_{i+1}} \in U_{i+1}$ . È un semplice esercizio verificare che  $\{x_{n_i}\}$  funziona.  $\square$

**Teorema 4.5.3.** Sia  $X$  a base numerabile. Allora  $X$  è compatto  $\Leftrightarrow$  è compatto per successioni.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Per la proposizione 4.5.2 e il teorema 2.6.10 abbiamo immediatamente quest'implicazione.

( $\Leftarrow$ ) Mostriamo la contronominale. Sia  $X$  non compatto e sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento aperto di  $X$  che non ammette sottoricoprimenti finiti.  $X$  a base numerabile  $\Rightarrow \mathcal{U}$  ammette un raffinamento numerabile, dunque un sottoricoprimento numerabile. In alternativa, per il lemma potevamo dire che esiste un ricoprimento con aperti di base che non ammette sottoricoprimenti finiti, ed essendo  $X$  a base numerabile potevamo scegliere quello come  $\mathcal{U}$ . Dunque senza perdita di generalità  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Sia  $x_i \in X \setminus (U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_i)$ , che è ben definita in quanto  $\mathcal{U}$  non ammette sottoricoprimenti finiti. Per assurdo, sia  $\bar{x}$  il limite di una sottosuccessione di  $\{x_i\}$ . Poiché  $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ ,  $\bar{x} \in U_{i_0}$  per qualche  $i_0 \in \mathbb{N}$ .  $U_{i_0}$  aperto  $\Rightarrow$  è intorno di  $\bar{x} \Rightarrow |\{i \in \mathbb{N} | x_i \in U_{i_0}\}| = |\mathbb{N}|$ , dove l'ultima implicazione segue dal fatto che  $\bar{x}$  è il limite di una sottosuccessione, ma  $x_i \notin U_{i_0}$  per ogni  $i \geq i_0$  per definizione, assurdo.  $\square$



**Esempio 4.5.4.**

**Fatto 4.5.5.**  $Fun([0, 1], [0, 1])$  con la topologia della convergenza puntuale è compatto ma non compatto per successioni.

*Dimostrazione.* È compatto per il teorema di Tychonoff 4.3.40.

Siano  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definite da  $f_n(x) = 10^n x - \lfloor 10^n x \rfloor$ . Allora  $\{f_n\}$  non ha sottosuccessioni puntualmente convergenti.  $\square$

**4.6 Completezza e caratterizzazione dei metrici compatti**

All'interno di tutto questo paragrafo,  $(X, d)$  indica uno spazio metrico.

**Definizione 4.6.1.**  $\{x_n\} \subseteq X$  è DI CAUCHY se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  t.c.  $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$  per ogni  $n, m \geq n_0$ .

**Lemma 4.6.2.** Se  $\{x_n\}$  è convergente, allora è di Cauchy.

*Dimostrazione.* Sia  $x \in X$  il limite a cui converge  $\{x_n\}$  e sia  $\varepsilon > 0$ , allora esiste  $n_0$  t.c. per ogni  $n \geq n_0$   $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ . Allora per la disuguaglianza triangolare si ha che per ogni  $m, n \geq n_0$  vale che  $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ , da cui la tesi.  $\square$

**Definizione 4.6.3.**  $(X, d)$  è COMPLETO se ogni successione di Cauchy in  $X$  converge.

**Esempio 4.6.4.**  $\mathbb{R}^n$  è completo.

**Esempio 4.6.5.**  $\mathbb{Q}$  non è completo.

**Lemma 4.6.6.** Sia  $\{x_n\}$  di Cauchy, se ha una sottosuccessione convergente allora è convergente.

*Dimostrazione.* Sia  $\{x_{n_i}\}$  la sottosuccessione che converge al limite  $x \in X$  e sia  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $i_0$  t.c. per ogni  $i \geq i_0$   $d(x_{n_i}, x) < \varepsilon/2$ . Inoltre, esiste  $\bar{n}$  t.c. per ogni  $n, m \geq \bar{n}$   $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon/2$ . Poniamo  $n^* = \max\{n_{\bar{n}}, n_{i_0}\}$  dove abbiamo usato  $n_{\bar{n}} \geq \bar{n}$  al posto di  $\bar{n}$  stesso per assicurarci che  $n^*$  faccia parte degli indici della sottosuccessione convergente. Si ha allora che per ogni  $n \geq n^*$   $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n^*}) + d(x_{n^*}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ , da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 4.6.7.**  $(X, d)$  compatto per successioni  $\Rightarrow (X, d)$  completo.

**Lemma 4.6.8.** Siano  $(X, d)$  spazio metrico completo,  $Y \subseteq X$  con la metrica indotta, allora  $Y$  è completo  $\Leftrightarrow Y$  è chiuso in  $X$ .

*Dimostrazione.* Per il fatto 2.6.9 e la proposizione 2.6.17, possiamo fare la dimostrazione supponendo o dimostrando (a seconda della freccia)  $Y$  chiuso per successioni.

( $\Rightarrow$ ) Sia  $\{y_n\}$  una successione in  $Y$  convergente a un elemento di  $X$ . Per il lemma 4.6.2 sappiamo che  $\{y_n\}$  è di Cauchy, ma stiamo supponendo  $Y$  completo, dunque  $\{y_n\}$  converge in  $Y$ , dunque  $Y$  è chiuso per successioni. Notiamo che per quest'implicazione non era necessaria l'ipotesi  $(X, d)$  completo.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $\{y_n\}$  una successione di Cauchy in  $Y$ . Dato che  $X$  è completo, questa converge a un elemento di  $X$ , ma  $Y$  è chiuso per successioni, dunque l'elemento appartiene anche a  $Y$  e la successione converge in  $Y$ .  $\square$

**Definizione 4.6.9.**  $(X, d)$  è TOTALMENTE LIMITATO se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un ricoprimento finito di  $X$  fatto con palle di raggio  $\varepsilon$ .

**Lemma 4.6.10.**  $(X, d)$  totalmente limitato implica  $(X, d)$  limitato.

*Dimostrazione.* Prendiamo  $\varepsilon = 1$ , fissiamo il centro  $x_0$  di una delle palle e sia  $D$  la massima distanza tra  $x_0$  e uno qualsiasi degli altri centri, che esiste perché le palle, dunque anche i loro centri, sono in numero finito. Allora è una banale applicazione della disuguaglianza triangolare verificare che la palla di centro  $x_0$  e raggio  $D + 1$  ricopre tutto  $X$ .  $\square$

**Esempio 4.6.11.** Consideriamo su  $\mathbb{R}$  la distanza  $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$ , allora  $(\mathbb{R}, d)$  è limitato ma non totalmente limitato.

**Proposizione 4.6.12.**  $(X, d)$  totalmente limitato implica  $(X, d)$  a base numerabile.

*Dimostrazione.* Per la proposizione 2.6.5 basta vedere che  $X$  è separabile. Per la totale limitatezza, per ogni  $n \geq 1$  esiste  $F_n \subseteq X$  finito con  $X = \bigcup_{p \in F_n} B(p, 1/n)$ .

Allora  $\bigcup_{n \geq 1} F_n$  è numerabile, mostriamo dunque che è denso. Sia dunque  $U \subseteq X$  aperto non vuoto, allora esiste  $n_0 \geq 1, z \in U$  con  $B(z, 1/n_0) \subseteq U$ . Abbiamo che  $z \in B(p, 1/n_0)$  per qualche  $p \in F_{n_0} \Rightarrow d(p, z) < 1/n_0 \Rightarrow p \in B(z, 1/n_0) \Rightarrow p \in U$ , da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 4.6.13.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico. Allora le seguenti sono equivalenti:

- (i)  $X$  è compatto;
- (ii)  $X$  è compatto per successioni;
- (iii)  $X$  è totalmente limitato e completo.

*Dimostrazione.* ((i)  $\Rightarrow$  (ii))  $(X, d)$  è metrico, dunque per il fatto 2.6.9 è primo numerabile, allora per la proposizione 4.5.2 otteniamo che (i)  $\Rightarrow$  (ii).

((ii)  $\Rightarrow$  (iii)) Per il corollario 4.6.7 abbiamo che  $X$  è completo. Supponiamo per assurdo che non sia totalmente limitato. Allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che non è possibile ricoprire  $X$  con un numero finito di palle di raggio  $\varepsilon$ . Fissiamo  $x_0 \in X$  e definiamo  $\{x_n\}$  induttivamente fissando  $x_{n+1} \in X \setminus (B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon))$ , che esiste per l'ipotesi assurda. Allora dati due naturali qualsiasi  $m \neq n$  abbiamo che  $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ , quindi non si possono estrarre da  $\{x_n\}$  sottosuccessioni di Cauchy, in particolare non si possono estrarre sottosuccessioni convergenti, assurdo perché siamo sotto l'ipotesi (ii).

((iii)  $\Rightarrow$  (i)) Per la proposizione 4.6.12 e per il teorema 4.5.3, sotto l'ipotesi (iii) abbiamo che (i)  $\Leftrightarrow$  (ii). Dimostriamo allora (ii). Sia  $\{x_n\}$  una successione in  $X$ .  $X$  è completo per ipotesi, quindi basta trovare una sottosuccessione di Cauchy. Per totale limitatezza esiste un ricoprimento con un numero finito di palle di raggio  $2^{-0}$ . Allora esiste una di queste palle che contiene infiniti  $\{x_n\}$ . Fissiamo  $n_0$  come il minimo indice tale che  $x_{n_0}$  sta in questa palla e procediamo induttivamente. Abbiamo  $x_{n_i}$  che appartiene a una palla di raggio  $2^{-i}$  contenente infiniti  $x_n$  (in particolare, infiniti di indice maggiore di  $n_i$ ). Ricopriamo  $X$  con un numero finito di palle di raggio  $2^{-(i+1)}$ . Allora ce ne dev'essere una che contiene infiniti di quegli  $x_n$  che stavano nella palla di raggio  $2^{-i}$  contenente  $x_{n_i}$ . Prendiamo dunque  $n_{i+1}$  come il minimo indice maggiore di  $n_i$  tale che  $x_{n_{i+1}}$  sta nella palla di raggio  $2^{-(i+1)}$  trovata. È una semplice verifica dimostrare che la sottosuccessione  $\{x_{n_i}\}$  è di Cauchy.  $\square$

**Teorema 4.6.14.** (*del numero di Lebesgue*) Sia  $(X, d)$  spazio metrico compatto, e sia  $\mathcal{U}$  ricoprimento aperto di  $X$ . Allora esiste  $\varepsilon > 0$  tale che  $\forall x \in X, \exists U \in \mathcal{U}$ , con  $B(x, \varepsilon) \subset U$ .

*Dimostrazione.* Sia  $X_n = \{x \in X \mid \exists U \in \mathcal{U} \text{ con } B(x, 2^{-n}) \subset U\}$ . Vogliamo mostrare che esiste  $n$  tale che  $X = X_n$ . Vediamo le proprietà degli  $X_n$ :

$$(i) \quad X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

$$(ii) \quad X_n \subset X_{n+1}$$

Vediamo che vale che  $X_n \subset \overset{\circ}{X}_{n+1}$ :

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{X}_n \implies X = \overset{\circ}{X}_n \text{ se } n \gg 0 \text{ in quanto per compattezza posso estrarre}$$

un sottoricoprimento finito. Sia  $x \in X_n$ , dunque  $\exists U \in \mathcal{U}$  tale che  $B(x, 2^{-n}) \subset U$ . Vediamo allora che  $B(x, 2^{-(n+1)}) \subset X_{n+1} \implies X_n \subset \overset{\circ}{X}_{n+1}$ . Sia  $y \in B(x, 2^{-(n+1)})$ , allora mostro che  $B(y, 2^{-(n+1)}) \subset U$  (e che dunque  $y \in X_{n+1}$  per definizione): data

$$d(y, x) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

prendiamo  $z \in B(y, 2^{-(n+1)})$ . Allora:

$$d(z, y) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad d(z, x) < \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \implies z \in B(x, 2^{-n}) \subset U$$

□

**Definizione 4.6.15.** Dati  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  spazi metrici e  $f : X \longrightarrow Y$ , allora  $f$  è UNIFORMEMENTE CONTINUA se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$  se  $d_X(x, x') < \delta$ .

**Osservazione 4.6.16.** Uniformemente continua  $\implies$  continua.

**Teorema 4.6.17.** (di Heine-Cantor) Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  spazi metrici con  $X$  compatto. Allora se  $f : X \longrightarrow Y$  è continua, è anche uniformemente continua.

*Dimostrazione.* Sia  $\varepsilon > 0$ . Cerchiamo  $\delta$  tale che  $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$  per ogni  $x \in X$ . Vale a dire che  $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ . Appliciamo il teorema del numero di Lebesgue al ricoprimento aperto

$$\mathcal{U} = \{f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))\}$$

Quindi  $\exists \delta > 0$  tale che  $\exists U \in \mathcal{U} : B(x, \delta) \subset U$ . Dunque  $\forall x \in X, \exists x' \in X$  con  $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x'), \varepsilon))$ . Sia  $y \in B(x, \delta)$ , allora

$$f(y) \in B(f(x'), \varepsilon) \ni f(x) \implies d_Y(f(x), f(y)) < 2\varepsilon$$

□

Vediamo quindi alcuni esempi di spazi metrici completi.

**Esempio 4.6.18.** Sia  $X$  insieme arbitrario e  $Y$  spazio metrico completo, e sia:

$$\mathcal{B}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ è limitata}\}$$

Allora  $\mathcal{B}(X, Y)$  è uno spazio metrico completo con la distanza

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Vediamo quindi che  $(\mathcal{B}(X, Y), d_\infty)$  è completo.

Sia  $\{f_n\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$  di Cauchy, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Definiamo  $f(x)$  per ogni  $x \in X$ . Abbiamo che  $\{f_n\}_N \in \mathbb{N}$  di Cauchy in  $\mathcal{B}(X, Y)$  implica che  $\forall x \in X, \{f_n(x)\} \subset Y \implies f_n(x)$  ammette limite in  $Y$  (infatti  $Y$  è completo), e definiamo allora  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Rimane da vedere che:

- (i)  $f$  è limitata
- (ii)  $f_n \longrightarrow f$  nella distanza  $d_\infty$

- i)  $d_Y(f(x), f(x')) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x')) + d_Y(f_n(x'), f(x'))$   
 ii)  $d_Y(f(x), f_n(x)) = d_Y(\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x), f_n(x)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon$

**Esempio 4.6.19.** Supponiamo adesso  $X$  spazio topologico, e poniamo:

$$\mathcal{C}_B(X, Y) = \{f \in \mathcal{B}(X, Y) \mid f \text{ è continua}\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$$

Vediamo che  $\mathcal{C}_B(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$  è chiuso, dunque  $\mathcal{C}_B(X, Y)$  è completo con  $d_\infty$ .

## 4.7 Spazi di Baire

**Definizione 4.7.1.** Un sottoinsieme di uno spazio topologico è raro se l'apertura della chiusura è vuota. Un sottoinsieme si dice magro se è unione numerabile di rari. Uno spazio si dice di Baire se le aperture dei magri sono vuote.

**Proposizione 4.7.2.** Sono equivalenti:

- (i)  $X$  è di Baire
- (ii) Unione numerabile di chiusi rari ha parte interna vuota
- (iii) Intersezione numerabile di aperti densi è densa

*Dimostrazione.* Le ultime due sono equivalenti per passaggio al complementare. La seconda è la definizione dell'essere di Baire. Per fare vedere che la seconda implica la prima, sia  $Y \subseteq X$  magro,  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$  con gli  $Y_n$  rari. Allora

$$\overset{\circ}{Y} = (\bigcup Y_n) \subseteq \bigcup \overset{\circ}{Y_n} = \emptyset$$

□

**Teorema 4.7.3.** (Versione debole del teorema di Baire) Ogni  $X$  metrico completo è di Baire.

*Dimostrazione.* La dimostrazione è uguale uguale a quella fatta da Manetti a pagina 115. □

**Definizione 4.7.4.** Un sottoinsieme di uno spazio si dice perfetto se è chiuso e privo di punti isolati.

**Proposizione 4.7.5.** Un sottoinsieme  $Y \subseteq \mathbb{R}$  perfetto è più che numerabile

*Dimostrazione.*  $Y$  è completo, quindi di Baire. Allora scrivendo per assurdo  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{y_n\}$  e  $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$ , non posso avere  $\overset{\circ}{\{y_n\}} = \{y_n\} = \emptyset$  □

## 4.8 Azioni proprie

Sia  $G$  gruppo che agisce tramite omeomorfismi su  $X$  spazio topologico. Sia quindi  $\phi$  definita come:

$$\begin{aligned}\phi : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (x, g \cdot x)\end{aligned}$$

Dotiamo allora  $G$  della topologia discreta, e osserviamo che  $\phi$  è continua se e solo se, date  $\phi_1$  e  $\phi_2$  come:

$$\begin{aligned}\phi_1 : G \times X &\longrightarrow X & \phi_2 : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto x & (g, x) &\longmapsto g \cdot x\end{aligned}$$

sono entrambe continue. In particolare:

- $\phi_1$  è continua perché proiezione
- $\phi_2^{-1}(U) = \{(g, x) \mid g \cdot x \in U\} = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times g^{-1}U$  aperto se  $U \subset X$  aperto

Indichiamo che  $G$  agisce su  $X$  con  $G \curvearrowright X$ .

**Definizione 4.8.1.** L'azione  $G \curvearrowright X$  è PROPRIA se  $\phi$  è un'applicazione propria (cioè per cui  $\phi^{-1}(K)$  è compatto se  $K \subset X \times X$  è compatto).

**Definizione 4.8.2.** Sia  $G \curvearrowright X$ . Dati  $Z, Y \subset X$ , il TRASPORTATORE di  $Y$  in  $Z$  è:

$$(Y|Z)_G = \{g \in G \mid gY \cap Z \neq \emptyset\}$$

**Teorema 4.8.3.** Sia  $G \curvearrowright X$  tramite omeomorfismi con  $X$  spazio di Hausdorff localmente compatto. Allora sono equivalenti:

- (i) L'azione è propria
- (ii)  $(K|K)_G$  è finito  $\forall K \subset X$  compatto
- (iii)  $\forall x, y \in X, \exists U \in I(x), V \in I(y)$  tali che  $(U|V)_G$  è finito

*Dimostrazione.* (i)  $\implies$  (ii): Sia  $K \subset X$  compatto. Allora:

$$K \times K \subset X \times X \text{ compatto} \implies \phi^{-1}(K \times K) \subseteq G \times X \text{ compatto}$$

Dove  $\phi^{-1}(K \times K) = \{(g, x) \mid x \in K, gx \in K\}$ . Allora  $p_1(\phi^{-1}(K \times K)) = (K|K)_G$  (ricordando che  $p_1$  è la proiezione  $G \times X \longrightarrow G$ ) è compatto in quanto immagine di compatto.  $G$  discreto  $\implies (K|K)_G$  compatto e discreto  $\implies (K|K)_G$  finito.

(ii)  $\implies$  (iii): Siano  $x, y \in X$  e  $U \in I(x), V \in I(y)$  intorni compatti  $\implies U \cup V$  compatto  $\implies (U \cup V|U \cup V)_G \supset (U|V)_G$  è finito.

(iii)  $\implies$  (i): Manca □

**Esempio 4.8.4.**  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$  per traslazione con:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (x + a, y + b)$$

L'azione è propria. Vediamo ora (ii). Sia  $D_{a,b} = [a, a+1] \times [b, b+1]$ . Allora  $(a, b) \cdot D_{0,0}$ , e inoltre

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a,b \in \mathbb{Z}} D_{a,b}$$

In generale,  $\exists! g \in \mathbb{Z}^2 \mid gD_{a,b} = D_{n,m}$  dati  $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ . Sia  $K \subset \mathbb{R}^2$  compatto, allora esistono finiti  $D_{a,b}$  tali che  $K \cap D_{a,b} \neq \emptyset$ . Siano  $D_{a_1,b_1}, \dots, D_{a_n,b_n}$ , e sia  $gK \cap K \neq \emptyset$  tale che  $g \in G$  permuta i  $D_{a_i,b_i}$ . Allora  $\exists i$  tale che  $gD_{a_i,b_i} = D_{a_j,b_j}$ , ma questo determina unicamente  $g$ , e quindi  $(K|K)_G$  è finito.

**Esercizio 4.8.5.** Seguendo la stessa strada dell'esempio, si mostri che  $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$  per traslazione è un'azione propria.

**Definizione 4.8.6.** L'azione  $G \curvearrowright X$  (con  $X$  Hausdorff e localmente compatto) è detta VAGANTE se  $\forall x \in X, \exists U \in I(x)$  tale che  $(U|U)_G$  è finito.

**Definizione 4.8.7.** L'azione  $G \curvearrowright X$ , nelle solite ipotesi, si dice PROPRIAMENTE DISCONTINUA se  $\forall x \in X, \exists U \in I(x)$  tale che  $(U|U)_G = \{1\}$ .

**Definizione 4.8.8.** L'azione  $G \curvearrowright X$ , nelle solite ipotesi, si dice LIBERA se  $\forall g \in G, g \neq 1, \forall x \in X$  vale che  $gx \neq x$ .

**Proposizione 4.8.9.** Sempre nelle stesse ipotesi:

- (i) Le azioni proprie sono vaganti
- (ii) Un'azione è propriamente discontinua se e solo se è vagante e libera

*Dimostrazione.* (i): Per quanto visto precedentemente,  $\forall K \subseteq X$  compatto,  $(K|K)_G$  è finito, e quindi abbiamo finito poiché  $X$  è localmente compatto.

(ii): Propriamente discontinua  $\implies$  vagante e libera.

Supponiamo  $gx = x$ . Allora  $\forall U \in I(x), g \in (U|U)_G \implies g = 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Per esercizio. □

**Osservazione 4.8.10.** Abbiamo dunque mostrato che propria  $\implies$  vagante, propriamente discontinua  $\implies$  vagante.

**Esempio 4.8.11.**  $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ , con:

$$n \cdot (x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$$

Per  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , l'azione è libera. Vediamo che  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \exists U \in I(x)$  tale che  $(U|U)_G = \{1\}$ . Supponiamo  $U \in I(x, y)$  con  $x \neq 0$ , e consideriamo il disco di centro  $(x, y)$  e raggio  $\frac{|x|}{4}$ . Allora  $nU \cap U \neq \emptyset \iff n = 0$ . Allora  $nU \cap U = \emptyset \iff n \neq 0$ .

Vediamo che l'azione non è propria: consideriamo  $p = (0, 1)$  e  $q = (1, 0)$ . Siano  $U \in I(p), V \in I(q)$ . Allora  $\exists n_0$  tale che  $\forall n \geq n_0$  vale  $(2^{-n}, 1) \in U, (1, 2^{-n}) \in V$ , ma  $n(2^{-n}, 1) = (1, 2^{-n})$ , ovvero l'azione di  $n$  li scambia. Allora  $n \in (U|V)_G, \forall n \geq n_0$ .

**Definizione 4.8.12.**  $Z \subset X$  è  $G$ -STABILE se  $\forall x \in Z, \forall g \in G, gx \in Z$ .

**Teorema 4.8.13.** Sia  $G \curvearrowright X$  un'azione vagante. Allora  $G \curvearrowright X$  è propria se e solo se  $X/G$  è di Hausdorff.

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ )  $X/G$  è di Hausdorff se e solo se  $\forall x, y \in X$  con  $Gx \neq Gy, \exists U_1 \in I(x), V_1 \in I(y)$   $G$ -stabili con  $U_1 \cap V_1 = \emptyset$ . Per ipotesi esistono  $U \in I(x), V \in I(y)$  tali che  $(U|V)_G$  è finito, fissati  $x, y \in X$ . Poniamo allora:

$$(U|V)_G = \{g_1, \dots, g_n\}$$

e consideriamo  $g_i x$  e  $y$ . Poiché  $X$  è di Hausdorff, quindi possiamo separarli  $\forall i = 1, \dots, n$ . Siano allora  $U_i \in I(g_i x)$  e  $V_i \in I(y)$  tali che  $U_i \cap V_i = \emptyset$ . Definiamo inoltre:

$$U' = U \cap \bigcap_{i=1}^n g_i^{-1}(U_i) \quad V' = V \cap \bigcap_{i=1}^n V_i$$

Allora  $U' \in I(x), V' \in I(y)$  e vediamo che  $(U'|V')_G = \emptyset$ . Infatti, supponiamo:

$$gU' \cap V' \neq \emptyset \Rightarrow g \in (U|V)_G \Rightarrow g \in \{g_1, \dots, g_n\}$$

Ma allora,  $g_i U' \cap V' \subset U_i \cap V_i = \emptyset \Rightarrow (U'|V')_G = \emptyset$ .

Poniamo adesso  $U'' = A = \bigcap_{g \in G} gU'$  e  $B = \bigcap_{g \in G} gV'$ , dunque  $A$  e  $B$  sono aperti e

$G$ -stabili. Vediamo che sono disgiunti: abbiamo che  $A \cap B = \bigcap_{g, h \in G} gU' \cap hV'$ , e

d'altra parte  $gU' \cap hV' \neq \emptyset$  se e solo se  $h^{-1}gU' \cap V' \neq \emptyset$ . Ma  $h^{-1}g \notin (U'|V')_G = \emptyset$ . Dunque  $gU' \cap hV' = \emptyset, \forall g, h \in G$ . Dunque  $X/G$  è di Hausdorff.  $\square$

**Esempio 4.8.14.**  $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$  per traslazione  $\Rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (S^1)^n$

Osserviamo che il prodotto di identificazioni aperte è un'identificazione aperta, e quindi:

$$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \left(\mathbb{R}/\mathbb{Z}\right)^n \simeq (S^1)^n$$

Consideriamo, per semplicità, il caso  $n = 2$ :

Sia  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ , allora  $D$  interseca tutte le orbite di  $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ . Posso vedere  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  come quoziente del quadrato?

Definiamo una relazione indotta su  $D$ :  $x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$ . Otteniamo il diagramma:



$$\begin{array}{ccc}
D & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^2 \\
\downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\
D/\sim & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2
\end{array}$$

Osserviamo che  $f$  è continua, vediamo che è un omeomorfismo.

$D/\sim \simeq S^1 \times S^1$ ,  $f$  è continua e biunivoca, ma  $D/\sim$  è compatto perché immagine di un compatto. Allora  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  Hausdorff implica che  $f$  è un omeomorfismo.

**Definizione 4.8.15.** Sia  $G \curvearrowright X$  tramite omeomorfismo. Un DOMINIO FONDAMENTALE per l'azione è un chiuso  $D \subset X$  tale che:

- (i)  $D = \overline{\mathring{D}}$
- (ii)  $g \neq \text{id}$ , allora  $g \mathring{D} \cap \mathring{D} = \emptyset$  (cioè  $(\mathring{D} \mid \mathring{D})_G = \{\text{id}\}$ )
- (iii)  $X = \bigcup_{g \in G} gD$  è un ricoprimento localmente finito

**Esempio 4.8.16.**  $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$  per traslazione. Allora  $[0, 1]^n$  è un dominio fondamentale.

**Esempio 4.8.17.**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$  per rotazione di angolo  $\frac{2\pi}{n}$ . Allora il cono di angolo  $\frac{2\pi}{n}$  è un dominio fondamentale.

**Teorema 4.8.18.** Sia  $G \curvearrowright X$  tramite omeomorfismo,  $X$  Hausdorff e localmente compatto, e  $D \subset X$  un dominio fondamentale. Allora  $D/\sim \simeq X/G$ . Inoltre l'azione di  $G$  su  $X$  è propria.

*Dimostrazione.* Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
D & \xhookrightarrow{i} & X \\
\downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_1 \\
D/\sim & \xrightarrow{f} & X/G
\end{array}$$

dove  $\sim$  è una relazione indotta dall'azione di  $G$  su  $D$ . Come nell'esempio precedente,  $f$  è continua e biunivoca, vediamo allora che è anche aperta (e che dunque è un omeomorfismo). Sia  $A \subseteq X$  aperto, allora  $f(A) \subset X/G$  è aperto se e solo se  $\pi_1^{-1}(f(A)) \subseteq X$  è aperto e  $\pi_2^{-1}(A) \subseteq D$ ,  $\exists B \subseteq D : \pi_2^{-1}(A) = B \cap D$  aperto. Allora:

$$\pi_1^{-1}(f(A)) = \bigcup_{g \in G} g(B \cap D) = V$$

Mostriamo che  $V$  è aperto. Per fare ciò, è sufficiente vedere che  $\forall x \in B \cap D$ ,  $\exists U \subset X$  aperto con  $U \subset V$  (cioè  $x \in U$ ). Allora, poiché  $\{gD\}$  è un ricoprimento localmente finito di  $X$ , esiste  $U' \in I(x)$  aperto tale che  $U' \cap gD \neq \emptyset$  per un numero finito di  $g$ .

Assumendo allora che  $U' \cap gD \neq \emptyset \implies x \in gD$ , basta sostituire  $U'$  con  $U' \setminus \bigcup_{x \notin gD} gD$ , ed ottengo ancora un intorno aperto di  $x$  con le stesse proprietà. Siano adesso  $g_1, \dots, g_n \in G$  gli elementi per cui  $x \in g_i D$ , allora  $U' \subset g_1 D \cup \dots \cup g_n D$ . Per ogni  $i$  abbiamo che:

$$g_i^{-1}x \in D \implies g_i^{-1}x \in \pi_2^{-1}(x) \implies g_i^{-1}(x) \in B \subset \pi_2^{-1}(A) \implies x \in g_i B$$

Poniamo:

$$U = U' \cap \bigcap_{i=1}^n g_i B \implies x \in U$$

intorno aperto di  $x$ . Vediamo che  $U \subseteq V$ . Infatti:

$$y \in U \implies y \in U' \implies y \in g_i D, \exists g_i : x \in g_i D \implies y \in g_i(D \cap B) \subset V$$

□

## 5 Spazi proiettivi e varietà

### 5.1 Spazi proiettivi

**Definizione 5.1.1.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo, e sia  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spazio vettoriale. Definiamo su  $V$  la relazione di equivalenza:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\} : v = \lambda w$$

Allora chiamiamo SPAZIO PROIETTIVO associato a  $V$  lo spazio:

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{0\} / \sim = V \setminus \{0\} / G \quad \text{con } G = \{\lambda \text{id} \mid \lambda \neq 0\}$$

$\mathbb{P}(V)$  è lo spazio delle rette di  $V$ .

**Definizione 5.1.2.**  $W \subseteq \mathbb{P}(V)$  è un SOTTOSPAZIO di dimensione  $k$  se  $W = \pi(H \setminus \{0\})$ , con  $H$  sottospazio di  $V$  di dimensione  $k+1$  e  $\pi : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ . In particolare,  $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$ . Se  $V = \mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$  si indica con  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ .

Considereremo adesso in particolare i casi  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oppure  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . In questi casi assumiamo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  dotato della topologia quoziente di  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

**Osservazione 5.1.3.**  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^{2(n+1)} \setminus \{0\}$

**Osservazione 5.1.4.** Se  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è la sfera unitaria,  $S^n$  interseca ogni retta in due punti della forma  $\pm v$ , per cui, come insieme:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n / \pm \text{id}$$

Vediamo che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è omeomorfo a  $S^n / \pm \text{id}$ . Infatti abbiamo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
S^n & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow \pi \\
S^n / \pm \text{id} & \xrightarrow{\bar{i}} & \mathbb{P}^n(\mathbb{R})
\end{array}$$

Poiché  $i \circ \pi$  è continua, per la proprietà universale della topologia quoziente,  $\bar{i}$  è continua. Consideriamo allora il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{r} & S^n \\
\downarrow \pi & & \downarrow \\
\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\bar{r}} & S^n / \pm \text{id}
\end{array}$$

con  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ . Analogamente,  $\bar{r}$  è continua e  $\bar{r}$  e  $\bar{i}$  sono una l'inversa dell'altra, dunque sono omeomorfismi.

**Osservazione 5.1.5.**  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è compatto T2. Infatti è quoziente di  $S^n$  (che è compatto T2) per l'azione di un gruppo finito, azione che perciò è sicuramente propria (in realtà è propriamente discontinua).

**Proposizione 5.1.6.** Sia  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ , e sia  $\sim_D$  definita da:

$$x \sim_D y \iff x = y \text{ o } (\|x\| = \|y\| = 1 \text{ e } x = -y)$$

Allora  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq D^n / \sim_D$ .

*Dimostrazione.* Sia  $H = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0 \geq 0\}$  e sia  $\sim_H$  data da:

$$v \sim_H w \iff v = w \text{ o } (v = -w \text{ e } x_0(v) = x_0(w) = 0)$$

La composizione  $H \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  induce una bigezione continua  $H / \sim_H \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , continua per la proprietà universale, mentre la bigezione deriva da ragioni insiemistiche.

$H$  compatto  $\implies H / \sim_H$  compatto. Inoltre  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è T2, dunque  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq H / \sim_H$ . Infine, l'omeomorfismo

$$\begin{aligned}
H &\longrightarrow D^n \\
(x_0, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

con inversa  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, x_1, \dots, x_n)$  induce un omeomorfismo  $H / \sim_H \simeq D^n / \sim_D$ .  $\square$

**Osservazione 5.1.7.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq S^1$  in quanto:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = D^2 / \sim = [-1, 1] / \{-1, 1\} = S^1$$

**Osservazione 5.1.8.**  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = D^2 / \sim$  dove  $x \sim y \iff x = y$  o  $\|x\| = \|y\| = 1$  è il nastro di Moebius.

In generale, l'inclusione  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  induce un'inclusione  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , tale che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \simeq (\overset{\circ}{D})^n$ .

**Definizione 5.1.9.** Un punto di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  è descritto da una  $(n+1)$ -upla a meno di multipli. La classe di  $(x_0, \dots, x_n)$  si denota con  $[x_0 : \dots : x_n]$  (COORDINATE OMOGENEE).

**Osservazione 5.1.10.** Se  $p \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$  è un polinomio, non ha senso chiedersi quanto vale  $p([x_0 : \dots : x_n])$ . Inoltre, se  $p$  è omogeneo di grado  $d$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*$ , vale:

$$p(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d p(x_0, \dots, x_n)$$

dunque, perlomeno, è ben definito il fatto che  $p$  si annulli su  $[x_0 : \dots : x_n]$ , cosa che avviene per definizione.

Torniamo adesso ad esaminare il caso generale. Prendiamo  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , e siano  $x_0, \dots, x_n$  le coordinate di  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Poniamo allora

$$U_i = \{x_i \neq 0\} = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i \neq 0\}$$

**Proposizione 5.1.11.** Esiste una bigezione naturale tra  $U_i$  e  $\mathbb{K}^n$  che, nel caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , è un omeomorfismo.

*Dimostrazione.* Siano  $\varphi : U_i \rightarrow \mathbb{K}^n$ ,  $\psi : \mathbb{K}^n \rightarrow U_i$  definite da:

$$\begin{aligned} \varphi([x_0 : \dots : x_n]) &= \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ \psi((x_1, \dots, x_n)) &= [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n] \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi(\psi((x_1, \dots, x_n))) &= (x_1, \dots, x_n) \\ \psi(\varphi([x_0 : \dots : x_n])) &= \psi\left(\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right) \\ &= \left[ \frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right] = [x_0 : \dots : x_n] \end{aligned}$$

Dunque  $\varphi$  e  $\psi$  sono una l'inversa dell'altra, e dunque sono bigezioni. Rimane da vedere che, se  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , sono continue.  $\psi$  è ovviamente continua, in quanto composizione delle mappe continue  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Inoltre  $\varphi$  si ottiene per passaggio al quoziente da  $\tilde{\varphi} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove:

$$\tilde{\varphi}(x_0, \dots, x_n) = \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

con  $\pi^{-1}(U_i) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$ . Allora  $\tilde{\varphi}$  è chiaramente continua, e dunque lo è anche  $\varphi$  (infatti la topologia quoziente di  $\pi^{-1}(U_i)/\sim$  coincide con quella di  $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  come sottospazio, in quanto  $\pi^{-1}(U_i)$  è saturo. Dunque  $\forall p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \exists U$  aperto in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  con  $p \in U$  e  $U$  omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Definizione 5.1.12.** Sia  $X$  spazio topologico. Allora  $X$  si dice **VARIETÀ**  $n$ -dimensionale se:

- (i)  $X$  è T2
- (ii)  $\forall p \in X, \exists$  aperto  $U$  con  $p \in U$  con  $U$  omeomorfo a un aperto  $V$  di  $\mathbb{R}^n$
- (iii)  $X$  è a base numerabile

**Osservazione 5.1.13.** Poiché le palle aperte sono una base della topologia di  $\mathbb{R}^n$  e una palla aperta è omeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , (ii) è equivalente a richiedere che esista  $U$  aperto con  $p \in U$  e  $U$  omeomorfo ad una palla (o a  $\mathbb{R}^n$ ).

**Osservazione 5.1.14.** Poiché  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è a base numerabile,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  è una  $n$ -varietà.

**Osservazione 5.1.15.** (i), (ii), (iii), sono indipendenti. Ad esempio:

$$\mathbb{R} \times \{-1, 1\} / \sim \quad \text{con} \quad (x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow (x, t) = (y, s) \text{ o } (x = y \text{ e } x, y \neq 0)$$

Verifica (ii) poiché è localmente euclidea, ma non è T2.

## 5.2 Proiettivi complessi

Con dimostrazioni analoghe, si mostra che  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è compatto, T2, ed è ricoperto da aperti  $U_i = \{z_i \neq 0\}$  omeomorfi a  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Essendo a base numerabile,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  è una varietà di dimensione  $2n$ .

**Proposizione 5.2.1.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$

*Dimostrazione.* Infatti:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{z_0 = 0\} \cup \{z_0 \neq 0\} = \{[0 : 1]\} \cup U_0$$

Poiché  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  è compatto T2, per l'unicità della compattificazione di Alexandroff,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \hat{U}_0 = \hat{\mathbb{R}}^2 = S^2$ .  $\square$

In generale:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \{x_0 = 0\} \cup \{x_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \cup U_0 \simeq \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \cup \mathbb{K}^n$$

**Esempio 5.2.2.** La restrizione di  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  a:

$$S^{n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \mid \|v\| = 1\}$$

è surgettiva, perché  $\pi(v) = \pi(\frac{v}{\|v\|})$  e ciò implica  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  compatto. Tuttavia,  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ,  $\pi(e^{i\theta}v) = \pi(v) \forall v \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Consideriamo la mappa  $f : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ottenuta restringendo  $\pi$ . Allora,  $\forall p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ,  $f^{-1}(p) \subseteq S^{2n+1}$  è omeomorfo a  $S^1$ . Infatti, se  $v \in f^{-1}(p)$  scelto a caso, allora:

$$f^{-1}(p) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$$

per cui la mappa

$$\begin{aligned} i : S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} &\longrightarrow f^{-1}(p) \\ \lambda &\longmapsto \lambda v \end{aligned}$$

è bigettiva e omeomorfismo (infatti va da un compatto a un T2). Perciò, se  $n = 1$ ,  $\exists f : S^3 \rightarrow S^2$  surgettiva tale che  $f^{-1}(p) \simeq S^1$  per ogni  $p$  in  $S^2$ . Si ottiene che  $S^3 \simeq S^2 \times S^1$ . Questa  $f$  si chiama FIBRATO DI LEFSCHETZ, ed è un esempio di fibrato non banale.

**Esempio 5.2.3.** (*Uno spazio compatto per successioni non compatto*)

Sia  $X = [0, 1]^{[0,1]}$  con la topologia prodotto, cioè la topologia della convergenza puntuale. Sia inoltre,  $\forall f \in X$ :

$$\text{supp}(f) = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\}$$

il supporto di  $f$ . Prendiamo allora:

$$Y = \{f \in X \mid \#\text{supp}(f) \leq \#\mathbb{N}\}$$

Allora:

- (i)  $Y$  è denso in  $X$
- (ii)  $X$  è T2
- (iii)  $Y$  non è compatto (compatto in T2  $\Rightarrow$  chiuso)
- (iv)  $Y$  è compatto per successioni

Sia  $f_n$  una successione in  $Y$ , ne devo trovare una estratta puntualmente convergente a una  $f \in Y$ . Sia:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{supp}(f_n)$$

Allora  $\#A \leq \#\mathbb{N}$ , quindi posso scrivere anche  $A = \{a_0, \dots, a_n, \dots\}$ . La successione  $\{f_n(a_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  è contenuta in  $[0, 1]$  che è compatto, dunque esiste una scelta crescente di indice  $k_0(n)$  tale che  $f_{k_0(n)}(a_0) \rightarrow \ell_0$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

Analogamente  $\{f_{k_0(n)}(a_1)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1]$ , dunque esiste una sottosuccessione  $k_1(n)$  estratta da  $k_0(n)$  con  $f_{k_1(n)}(a_1) \rightarrow \ell_1 \in [0, 1]$ . Procedendo così,  $\forall m$  costruisco una sottosuccessione  $k_m(n)$  con  $k_{m+1}(n)$  estratta da  $k_m(n)$  e tali che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{k_m(n)}(a_m) = \ell_m \in [0, 1]$$

Segue che,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} f_{k_i(i)}(a_m) = \ell_m$ .

Infatti  $f_{k_i(i)}$  è definitivamente una sottosuccessione di  $f_{k_i(n)}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Poniamo allora:

$$f(x) = \begin{cases} \ell_i & \text{se } x = a_i \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Allora  $f \in Y$  ( $\text{supp}(f)$  è numerabile) e  $f_{k_i(i)} \rightarrow f$  puntualmente.

## 6 Omotopia

### 6.1 Omotopie, equivalenze omotopiche e retrazioni

**Definizione 6.1.1.** Siano  $f, g : X \rightarrow Y$  continue. Una OMOTOPIA tra  $f$  e  $g$  è una mappa continua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  t.c.  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$  per ogni  $x \in X$ .

**Fatto 6.1.2.** Per ogni  $t \in [0, 1]$ ,  $H_t(x) = H(x, t)$ ,  $H_t : X \rightarrow Y$  è continua, per cui  $H$  descrive un'interpolazione tra  $f$  e  $g$ : deforma  $f$  in  $g$ .

Nel seguito,  $I = [0, 1]$ .

**Definizione 6.1.3.**  $f$  si dice OMOTOPA a  $g$  (e si scrive  $f \sim g$ ) se esiste un'omotopia tra  $f$  e  $g$ .

**Fatto 6.1.4.**

- (i)  $f \sim f$ ;
- (ii)  $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ ;
- (iii)  $f \sim g$  e  $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ .

Dunque l'omotopia è una relazione di equivalenza su  $C(X, Y)$  (le funzioni continue da  $X$  in  $Y$ ). L'insieme delle classi di omotopia si denota con  $[X, Y]$ .

**Esempio 6.1.5.** Se  $Y$  è un convesso di  $\mathbb{R}^n$ ,  $||[X, Y]|| = 1$ , cioè tutte le mappe  $f : X \rightarrow Y$  sono omotope fra loro. Infatti, date  $f$  e  $g$ , basta prendere  $H(x, t) = tf(x) + (1-t)g(x)$ . In realtà, dato che l'omotopia è una relazione di equivalenza, otteniamo di più: ci basta che  $Y$  sia "stellato" rispetto a un punto, cioè che esista  $p \in Y$  t.c. per ogni  $y \in Y$ ,  $t \in I$ ,  $ty + (1-t)p \in Y$ . Allora si dimostra che tutte le funzioni sono omotope alla funzione che vale costantemente  $p$ .

**Definizione 6.1.6.** Sia  $X$  spazio topologico,  $\pi_0(X)$  è l'insieme delle componenti connesse per archi di  $X$ .

**Lemma 6.1.7.**  $f : X \rightarrow Y$  continua induce una funzione ben definita  $f_\star : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  definita dalla richiesta che  $f(C) \subseteq f_\star(C)$  per ogni  $C \in \pi_0(X)$ . Allora il lemma dice questo: se  $f \sim g$ ,  $f_\star = g_\star$ .

*Dimostrazione.* Sia  $C \in \pi_0(X)$  e sia  $x_0 \in C$ . Se  $H$  è un'omotopia tra  $f$  e  $g$ , la mappa  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y, \gamma(t) = H(x_0, t)$  è un arco continuo in  $Y$  che congiunge  $f(x_0)$  con  $g(x_0)$ .  $\square$

**Fatto 6.1.8.** Se  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  è stellato rispetto a  $p$ , allora c'è una bigezione tra  $[X, Y]$  e  $\pi_0(Y)$ .

*Dimostrazione.*  $X$  stellato  $\Rightarrow X$  connesso per archi  $\Rightarrow |\pi_0(X)| = 1$ . Dunque possiamo definire  $\psi : C(X, Y) \rightarrow \pi_0(Y)$  data da  $\psi(f) = f_*(X)$ . Per il lemma,  $\psi$  induce al quoziente una ben definita  $\varphi : [X, Y] \rightarrow \pi_0(Y)$ .  $\varphi$  è ovviamente suriettiva (basta considerare le funzioni costanti). Per l'iniettività:  $f \in C(X, Y)$  è omotopa alla costante  $f(p)$  tramite l'omotopia  $H(x, t) = f(tx + (1 - t)p)$ . Se prendiamo  $f$  e  $g$  t.c.  $\varphi([f]) = \varphi([g])$ , allora dev'essere che  $f(p)$  e  $g(p)$  stanno nella stessa componente connessa per archi di  $Y$ , dunque le costanti  $f(p)$  e  $g(p)$  sono omotope tramite  $K(x, t) = \gamma(t)$  dove  $\gamma$  è il cammino che congiunge i due punti, da cui  $[f] = [g]$  e quindi  $\varphi$  è iniettiva.  $\square$

**Definizione 6.1.9.**  $f : X \rightarrow Y$  continua è un'EQUIVALENZA OMOTOPICA se ammetta un'INVERSA OMOTOPICA, cioè  $g : Y \rightarrow X$  continua t.c.  $f \circ g \sim \text{id}_Y, g \circ f \sim \text{id}_X$ .  $X$  e  $Y$  si dicono OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI (o OMOTOPI) se esiste un'equivalenza omotopica tra loro.

**Esercizio 6.1.10.** Essere omotopicamente equivalenti è una relazione di equivalenza. Per la transitività si usa il seguente lemma.

**Lemma 6.1.11.**  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y, g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$  continue,  $f_0 \sim f_1, g_0 \sim g_1 \Rightarrow g_0 \circ f_0 \sim g_1 \circ f_1$ .

*Dimostrazione.*  $(x, t) \mapsto K(H(x, t), t)$ , dove  $H$  è l'omotopia tra  $f_0$  e  $f_1$  e  $K$  quella tra  $g_0$  e  $g_1$ , è l'omotopia cercata.  $\square$

**Definizione 6.1.12.**  $X$  è CONTRAIBILE (o CONTRATTILE) se è omotopicamente equivalente a un punto.

**Proposizione 6.1.13.**  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  stellato  $\Rightarrow X$  contrattile.

*Dimostrazione.* Sia  $Y = \{q\}$  un punto. Siano  $f : X \rightarrow Y$  la costante e  $g : Y \rightarrow X$  t.c.  $g(q) = x_0 \in X$  (a caso, non necessariamente il punto rispetto a cui  $X$  è stellato).  $f$  e  $g$  sono continue e  $f \circ g$  è ovviamente l'identità.  $g \circ f : X \rightarrow Y$  è omotopa a  $\text{id}_X$  perché  $X$  stellato  $\Rightarrow |[X, X]| = 1$ .  $\square$



**Osservazione 6.1.14.**  $X$  contrattile  $\Rightarrow X$  connesso per archi. Infatti, se  $f : X \rightarrow Y$  è un'equivalenza omotopica,  $f_* : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  è bigettiva. Lo si dimostra considerando l'inversa  $g$  e facendo vedere che  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ .

**Definizione 6.1.15.**  $X$  spazio topologico,  $C \subseteq X$  si dice RETRATTO se esiste una mappa  $r$  (detta *retrazione*),  $r : X \rightarrow C$  continua t.c.  $r(x) = x$  per ogni  $x \in C$ .

$C$  si dice RETRATTO DI DEFORMAZIONE se esiste  $r : X \rightarrow C$  come sopra e t.c. sei  $i : C \rightarrow X$  è l'inclusione, esiste un omotopia  $H$  tra  $\text{id}_X$  e  $i \circ r$  t.c.  $H(x, t) = x$  per ogni  $x \in C, t \in I$ .

Segue che se  $Y$  è un retratto di deformazione  $X$  e  $Y$  sono omotopicamente equivalenti ( $i$  e  $r$  sono equivalenze omotopiche).

**Esempio 6.1.16.**  $p \in X \Rightarrow \{p\}$  è un retratto di  $X$ .

**Esempio 6.1.17.**  $S^n$  è un retratto di deformazione di  $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Basta prendere  $r : X \rightarrow S^n$  definita da  $r(x) = x/\|x\|$ , l'omotopia tra  $\text{id}_X$  e  $i \circ r$  è  $H(x, t) = (1-t)x + tx/\|x\|$ .

**Esempio 6.1.18.**  $GL^+(n, \mathbb{R})$  (le matrici con determinante positivo) si ritrae per deformazione a  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$ . Infatti, se  $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ ,  $\det A > 0$ , per cui  $tA + \frac{1-t}{\sqrt[n]{\det A}}A = \left(t + \frac{1-t}{\sqrt[n]{\det A}}\right)A \in GL^+(n, \mathbb{R})$  per ogni  $t \in I$  dato che  $t + \frac{1-t}{\sqrt[n]{\det A}} > 0$  per ogni  $t \in I$ . Allora è un semplice esercizio verificare che la funzione  $H : GL^+(n, \mathbb{R}) \times I \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$  data da  $H(A, t) = \left(t + \frac{1-t}{\sqrt[n]{\det A}}\right)A$  è l'omotopia che cerchiamo.

Si può dimostrare analogamente che  $GL^+(n, \mathbb{R})$  si ritrae per deformazione su  $SO(n, \mathbb{R})$  (le matrici ortonormali con determinante 1), ma la dimostrazione è difficile (più che altro lunga, secondo Frigerio) ed è lasciata al corso di geometria e topologia differenziale.

**Esercizio 6.1.19.**  $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^2$ . allora

- (i)  $\{(0, 0)\}$  è un retratto di deformazione di  $X$ , che perciò è contrattile;
- (ii)  $\{(0, 1)\}$  non è un retratto di deformazione di  $X$ .

**Soluzione**

- (i) Hint: prima schiacciare il "pettine" sulla retta, poi la retta sul punto.
- (ii) Per assurdo sia  $H : X \times I \rightarrow X$  tra  $\text{id}$  e la costante  $(0, 1)$  t.c.  $H((0, 1), t) = (0, 1)$  per ogni  $t \in I$ . Per ogni  $x \neq 0$ , i punti  $(0, 1)$  e  $(x, 1)$  giacciono in componenti connesse distinte di  $X \setminus \{y = 0\}$ , ma l'arco  $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow X$  dato da  $\gamma_x(t) = H((x, 1), t)$  è continuo e congiunge  $(x, 1)$  a  $(0, 1)$ , dunque deve passare per  $\{y = 0\}$ . Allora per ogni  $x \neq 0$  esiste  $t(x) \in I$  t.c.  $H((x, 1), t(x))$  ha ordinata nulla. Consideriamo la successione  $(1/n, 1)$ . Chiamando  $t_n = t(1/n)$  e sfruttando la compattezza di  $I$ , a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre senza perdita di generalità  $t_n \rightarrow \bar{t}$ .

Per continuità, se  $\pi_y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è la proiezione alla seconda coordinata, per continuità di  $H$  e  $\pi_y$  otteniamo che  $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi_y(H((1/n, 1), t_n)) = \pi_y(H((0, 1), \bar{t})) = \pi_y((0, 1)) = 1$ , assurdo.

## 6.2 Gruppo fondamentale

Siano  $X$  spazio topologico e  $a, b \in X$ .  $\Omega(a, b) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow X \text{ continuo t.c. } \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\}$ .


**Definizione 6.2.1.**  $\alpha, \beta \in \Omega(a, b)$  sono OMOTOPI (COME CAMMINI O A ESTREMI FISSI) se esiste  $H : [0, 1] \times I \rightarrow X$  omotopia tra  $\alpha$  e  $\beta$  e t.c.  $H(0, t) = a, H(1, t) = b$  per ogni  $t \in I$ . Essere omotopi è una relazione di equivalenza  $\sim$  tra cammini.

**Definizione 6.2.2.** Come insieme, il GRUPPO FONDAMENTALE DI  $X$  CON PUNTO BASE  $a$  è  $\pi_1(X, a) = \Omega(a, a)/\sim$ .

Il nostro prossimo obiettivo sarà quello di mettere su  $\pi_1(X, a)$  una struttura di gruppo.

Se  $\alpha, \beta \in \Omega(a, a)$ , è ben definita  $\alpha * \beta \in \Omega(a, a)$  data da  $\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ .

Notazione:  $1_a \in \Omega(a, a)$  è il cammino costante in  $a$ . Se  $\alpha \in \Omega(a, b)$ ,  $\bar{\alpha} \in \Omega(b, a)$  è  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ .

È vero che se  $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(a, a)$ , allora  $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$ ? No! Però sono omotopi. 

**Lemma 6.2.3.** Sia  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continua e t.c.  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$  e sia  $\gamma \in \Omega(a, b)$ , allora  $\gamma \sim \gamma \circ \varphi$ .

*Dimostrazione.* L'omotopia cercata è data da  $H(t, s) = \gamma(st + (1 - s)\varphi(t))$ .  $\square$

**Corollario 6.2.4.**  $\alpha \in \Omega(a, b), \beta \in \Omega(b, c), \gamma \in \Omega(c, d)$ , allora  $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$  in quanto sono una riparametrizzazione dell'altro.

**Lemma 6.2.5.**  $\alpha, \alpha' \in \Omega(a, b), \beta, \beta' \in \Omega(b, c), \alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$  in  $\Omega(a, c)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $H$  l'omotopia tra  $\alpha$  e  $\alpha'$  e  $K$  quella tra  $\beta$  e  $\beta'$ , allora la mappa

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} H(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ K(2t - 1, s) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è l'omotopia cercata.  $\square$

**Corollario 6.2.6.** L'operazione  $\pi_1(X, a) \times \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  t.c.  $([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha * \beta]$  è ben definita e associativa.

Notazione: con un abuso, d'ora in poi indicheremo con  $\alpha * \beta * \gamma$  il cammino  $(\alpha * \beta) * \gamma$  o  $\alpha * (\beta * \gamma)$ , che non dà problemi a meno di riparametrizzazione/omotopia. Stessa cosa per  $\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n$ .

Elemento neutro:  $1_a$  è il cammino costante. Allora  $1_a * \alpha$  e  $\alpha * 1_a$  sono riparametrizzazioni di  $\alpha$  per ogni  $\alpha \in \Omega(a, a)$ , per cui  $[1_a] \cdot [\alpha] = [1_a * \alpha] = [\alpha] = [\alpha * 1_a] = [\alpha] \cdot [1_a]$ .

Inverso: vogliamo dire che  $[\bar{\alpha}] \cdot [\alpha] = [\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] = [1_a] = 1$  per ogni  $\alpha \in \pi_1(X, a)$ . Mostriamo che  $\alpha * \bar{\alpha} \sim 1_a$ , che lo stesso vale per  $\bar{\alpha} * \alpha$  è analogo.

$$H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \leq s/2 \\ \alpha(s) & \text{se } s/2 \leq t \leq 1 - s/2 \\ \bar{\alpha}(2t - 1) = \alpha(2 - 2t) & \text{se } t \geq 1 - s/2 \end{cases}$$

è l'omotopia cercata.

Abbiamo così dimostrato che  $\pi_1(X, a)$  è un gruppo con l'operazione  $[\alpha] \dots [\beta] = [\alpha * \beta]$ . Vogliamo adesso studiare la dipendenza di  $\pi_1(X, a)$  da  $a$ . D'ora in poi, se non detto diversamente, assumeremo  $X$  connesso per archi (se  $Y$  è la componente connessa per archi di  $a$  in  $X$ ,  $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(Y, a)$ ).

Siano  $a, b \in X$  e  $\gamma \in \Omega(a, b)$ . Poniamo  $\gamma_{\#} : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$  t.c.  $\gamma_{\#}([\alpha]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$ . Osserviamo che è ben definita.

**Teorema 6.2.7.**  $\gamma_{\#} : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$  è un isomorfismo di gruppi.

*Dimostrazione.*  $\gamma_{\#}$  è un omomorfismo in quanto  $\gamma_{\#}([\alpha][\beta]) = \gamma_{\#}([\alpha * \beta]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma} * \beta * \gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma][\bar{\gamma} * \beta * \gamma] = \gamma_{\#}([\alpha]) \cdot \gamma_{\#}([\beta])$ .

È un isomorfismo con inversa  $\bar{\gamma}_{\#}$ . Infatti,  $\bar{\gamma}_{\#}(\gamma_{\#}([\alpha])) = \bar{\gamma}_{\#}([\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]) = [\bar{\bar{\gamma}} * \bar{\gamma} * \alpha * \gamma * \bar{\gamma}] = [\alpha]$ . Analogamente,  $\gamma_{\#}(\bar{\gamma}_{\#}([\beta])) = [\beta]$ .  $\square$

**Corollario 6.2.8.** Il tipo di isomorfismo di  $\pi_1(X, a)$  non dipende da  $a$ , per cui a volte si parla del gruppo fondamentale di  $X$ ,  $\pi_1(X)$ .

**Definizione 6.2.9.** Sia  $\Omega(S^1, a) = \{\gamma : S^1 \rightarrow X \text{ con } \gamma(1) = a\}$  ( $S^1$  lo vediamo in  $\mathbb{C}$ , cioè  $1 \in S^1$  è  $(1, 0)$ ). C'è una bigezione canonica tra  $\Omega(a, a)$  e  $\Omega(S^1, a)$  data da: se  $\alpha \in \Omega(a, a)$ , poiché  $\alpha(0) = \alpha(1)$ ,  $\alpha$  definisce una  $\hat{\alpha} : [0, 1] / \sim_{\{0, 1\}} \rightarrow X$  continua. Identifichiamo d'ora in poi  $[0, 1] / \sim_{\{0, 1\}}$  tramite l'identificazione  $\pi : [0, 1] \rightarrow S^1, \pi(t) = e^{2\pi it}$ , per cui  $\hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$  e  $\hat{\alpha}(1) = \gamma(1) = a$ . L'inverso della mappa  $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$  è  $\alpha(t) = \hat{\alpha}(\pi(t))$ .

**Lemma 6.2.10.**  $Q = [0, 1] \times [0, 1], C \subseteq Q, C = \{s = 1\} \cup \{t = 0\} \cup \{t = 1\}$ . Allora  $Q/C \cong D^2$  tramite un omeomorfismo che manda  $[t, 0]$  in  $e^{2\pi it}$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

*Dimostrazione.* Non è stata fatta esplicitamente perché i conti sono orrendamente schifosi, per cui vi chiediamo di fare uno sforzo di immaginazione cercando di vedere la dimostrazione con "l'occhio della mente" (aiutatevi con un disegno e attenzione a non sbagliare con i bordi).  $\square$

**Proposizione 6.2.11.**  $\alpha \in \Omega(a, a)$ , allora  $[\alpha] = 1$  in  $\pi_1(X, a) \Leftrightarrow \hat{\alpha} : S^1 \rightarrow X$  si estende in maniera continua a  $D^2$ .

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Se  $\alpha \sim 1_a$ , esiste  $H : Q \rightarrow X$  t.c.  $H(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $H(C) = \{a\}$  data dall'omotopia.  $H$  definisce per passaggio al quoziente una funzione continua.  $\hat{H} : Q/C \rightarrow X$ , cioè tramite l'identificazione del lemma 6.2.10  $\hat{H} : D^2 \rightarrow X$ . Per costruzione,  $\hat{H}|_{S^1} = \hat{\alpha}$ , che dunque si estende come voluto.

$(\Leftarrow)$  Viceversa, se  $\hat{\alpha}$  si estende a  $f : D^2 \rightarrow X$ , la mappa  $H : Q \rightarrow X$  data da  $H = f \circ \pi$ , dove  $\pi : Q/C \rightarrow D^2$  è l'identificazione, dà un'omotopia tra  $\alpha$  e  $1_a$ .  $\square$

**Corollario 6.2.12.** Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  un poligono convesso con lati  $e_1, \dots, e_n$  parametrizzati da  $\phi_i : [0, 1] \rightarrow e_i$  e siano  $\gamma : \partial P = e_1 \cup \dots \cup e_n \rightarrow X$ ,  $\alpha_1 = \gamma \circ \phi_i$  per ogni  $i$ . Allora  $\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_n \sim 1_{\alpha_1(0)} \Leftrightarrow \gamma$  si estende a  $P$  in maniera continua.

*Dimostrazione.* Esiste un omeomorfismo  $f : P \rightarrow D^2$  con  $f(\partial P) = S^1$ , per cui la tesi segue da quanto già visto.  $\square$

### 6.3 Il gruppo fondamentale come funtore

Sia  $f : X \rightarrow Y$  continua. Se  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  è continua, lo è anche  $f \circ \alpha$ , per cui  $f$  induce  $f_* : \Omega(a, a) \rightarrow \Omega(f(a), f(a))$ . Se  $\alpha \sim \beta$  in  $\Omega(a, a)$  e  $H : I^2 \rightarrow X$  è un'omotopia di cammini tra  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $f \circ H : I^2 \rightarrow Y$  è un'omotopia di cammini tra  $f_*\alpha$  e  $f_*\beta$ . Dunque  $f_*$  induce  $f_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, f(a))$ .

- (i)  $f_*$  è un omomorfismo di gruppi:  $f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta])$ .
- (ii) Se  $g : Y \rightarrow Z$ ,  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Z, g(f(a)))$ . Infatti,  $(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])) = (g_* \circ f_*)([\alpha])$ .
- (iii) Data  $\text{id} : X \rightarrow X$ ,  $\text{id}_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  è, ovviamente, l'identità.

Le proprietà appena elencate ci dicono che abbiamo trovato un funtore tra la categoria degli spazi topologici e quella dei gruppi.

**Corollario 6.3.1.**  $f : X \rightarrow Y$  omeomorfismo  $\Rightarrow f_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, f(a))$  isomorfismo di gruppi.

*Dimostrazione.* Sia  $g : X \rightarrow Y$  l'inversa continua di  $f$ ,  $g_* : \pi_1(Y, f(a)) \rightarrow \pi_1(X, a)$ .  $\text{id}_{\pi_1(X, a)} = (\text{id}_X)_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .  $\text{id}_{\pi_1(Y, f(a))} = (\text{id}_Y)_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ . Questo implica che  $f_*$  e  $g_*$  sono isomorfismi e sono uno l'inverso dell'altro.  $\square$

**Osservazione 6.3.2.**  $X$  omeomorfo a  $Y$  implica  $X$  omotopicamente equivalente a  $Y$ . Domanda:  $X$  omotopicamente equivalente a  $Y$  implica  $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ ?

**Proposizione 6.3.3.** Sia  $f : X \rightarrow X$  omotopa all'identità tramite  $H : X \times I \rightarrow X$  e sia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  t.c.  $\gamma(s) = H(a, s)$ . Allora le mappe  $f_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, f(a))$  e  $\gamma_\# : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, f(a))$  coincidono.

*Dimostrazione.* Per ogni  $\alpha \in \Omega(a, a)$  definisco  $K : I^2 \rightarrow X$ ,  $K(t, s) = H(\alpha(t), s)$ . Dunque la giunzione  $\alpha * \gamma * f_*(\alpha) * \bar{\gamma}$  è omotopa all'identità (esercizio; hint: "disegnate"  $K$ , poi al tempo  $t$  fermatevi prima lungo  $\gamma$ ), dunque per il corollario 6.2.12 si estende da  $\partial I^2$  a  $I^2$ . Lo stesso vale per  $f_*(\alpha) * \bar{\gamma} * \bar{\alpha} * \gamma$  che è perciò omotopo come cammino a  $1_{f(a)}$  e ciò implica che  $1_{\pi_1(X, f(a))} = [f_*(\alpha) * (\bar{\gamma} * \bar{\alpha} * \gamma)] = [f_*(\alpha)][\bar{\gamma} * \bar{\alpha} * \gamma]$ , cioè  $f_*([\alpha]) = [\bar{\gamma} * \bar{\alpha} * \gamma]^{-1} = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] = \gamma_\#([\alpha])$ .  $\square$

**Teorema 6.3.4.**  $f : X \rightarrow Y$  equivalenza omotopica  $\Rightarrow f_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, f(a))$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.* Sia  $g : Y \rightarrow X$  un'inversa omotopica di  $f$ . Poiché  $g \circ f \sim \text{id}_X$ , per la proposizione 6.3.3  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, g(f(a)))$  coincide con  $\gamma_\#$  per qualche  $\gamma \in \Omega(a, g(f(a)))$ , dunque è un isomorfismo. Analogamente,  $f_* \circ g_*$  è un isomorfismo. Dunque  $f_*$  è iniettiva e suriettiva, da cui la tesi.  $\square$

**Definizione 6.3.5.**  $X$  è SEMPLICEMENTE CONNESSO se  $X$  è connesso per archi e  $\pi_1(X, a) = 1$  per ogni  $a \in X$ .

**Corollario 6.3.6.** Se  $X$  è contrattile,  $X$  è semplicemente connesso.

**Proposizione 6.3.7.**  $A \subseteq X$  retracts, con inclusione  $i : A \rightarrow X$  e retrazione  $r : X \rightarrow A$ . Allora

- (i)  $i_*$  è iniettiva e  $r_*$  è suriettiva (per qualsiasi scelta del punto base in  $A$ );
- (ii) se la retrazione è per deformazione,  $i_*$  e  $r_*$  sono isomorfismi.

*Dimostrazione.* (i) Dato  $a \in A$ ,  $r \circ i = \text{id}_A \Rightarrow r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(A, a)}$ , da cui la tesi.

- (ii) Segue dal fatto che  $i$  e  $r$  sono equivalenze omotopiche e dal teorema 6.3.4.  $\square$

**Osservazione 6.3.8.** Se  $A \subseteq X$ ,  $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  può non essere iniettiva. Vedremo che è così per  $X = D^2$  e  $A = S^1$ .

**Esercizio 6.3.9.** Abbiamo studiato la mappa  $\Omega(a, a) \rightarrow \Omega(S^1, a)$  t.c.  $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$  e abbiamo osservato che se  $[\alpha] = [\beta]$  in  $\pi_1(X, a)$  allora  $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$  come mappe  $S^1 \rightarrow X$ . Perciò è ben definita la mappa  $\psi : \pi_1(X, a) \rightarrow [S^1, X]$  t.c.  $\psi([\alpha]) = [\hat{\alpha}]$ . Dimostrare che, se  $X$  è connesso per archi,  $\psi$  è suriettiva e  $\psi([\alpha]) = \psi([\beta]) \Leftrightarrow [\alpha]$  è coniugato a  $[\beta]$  in  $\pi_1(X, a)$  (dunque  $[S^1, X]$  è in bigezione con le classi di coniugio di  $\pi_1(X, a)$ ).

## 6.4 Rivestimenti

**Definizione 6.4.1.**  $f : X \rightarrow Y$  è un *omeomorfismo locale* se per ogni  $p \in X$  esistono  $U$  aperto con  $p \in U$  e  $V$  aperto di  $Y$  con  $f(p) \in V$  t.c.  $f(U) = V$  e  $f|_U : U \rightarrow V$  è un omeomorfismo.

**Fatto 6.4.2.**

- (i) Un omeomorfismo locale è una mappa aperta;
- (ii)  $f$  omeomorfismo locale  $\Rightarrow f^{-1}(y)$  è discreto per ogni  $y \in Y$ .

**Definizione 6.4.3.** Una mappa continua  $p : E \rightarrow X$  è un **RIVESTIMENTO** se  $X$  è connesso per archi e per ogni  $x \in X$  esiste  $U$  aperto di  $X$ ,  $x \in U$  t.c.  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ ,  $I \neq \emptyset$  e  $V_i$  aperto in  $E$  e  $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  è un omeomorfismo per ogni  $i \in I$ .

**Fatto 6.4.4.**

- (i) Un rivestimento è anche un omeomorfismo locale;
- (ii) un rivestimento è suriettivo;
- (iii) un intorno  $U$  come quello dato dalla definizione di rivestimento si dice *ben rivestito*.

**Esempio 6.4.5.**

- (i)  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  è un rivestimento;
- (ii)  $p : (-1, 1) \rightarrow S^1$ ,  $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  è un omeomorfismo locale suriettivo, ma non un rivestimento;
- (iii)  $\pi : \mathbb{R} \times \{-1, 1\} / \sim \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, \varepsilon) \sim (y, \varepsilon') \Leftrightarrow (x, \varepsilon) = (y, \varepsilon') \vee x = y \neq 0, \pi([x, \varepsilon]) = x$  è un omeomorfismo locale suriettivo, ma non un rivestimento;
- (iv)  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ,  $\pi(x) = [x]$  è un rivestimento.

**Proposizione 6.4.6.** Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $Y$  connesso,  $f : Y \rightarrow X$ . Siano  $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \rightarrow E$  con  $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g} = f$ . Se esiste  $y_0 \in Y$  con  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$ , allora  $\tilde{f} = \tilde{g}$ .

*Dimostrazione.* Basta vedere che  $\Omega = \{y \in Y | \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\} \subseteq Y$  è sia aperto che chiuso. Per ipotesi  $\Omega \neq \emptyset$  e  $Y$  è connesso, per cui avremmo necessariamente  $\Omega = Y$ , da cui la tesi.

$\Omega$  è aperto: sia  $y \in \Omega$ . Allora  $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y) = \tilde{x}_0$ . Siano  $x_0 = p(\tilde{x}_0) = f(y)$  e  $U$  un intorno di  $x_0$  ben rivestito.  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ . Sia  $i_0 \in I$  t.c.  $\tilde{x}_0 \in V_{i_0}$ .

$\tilde{f}, \tilde{g}$  continue  $\Rightarrow$  esiste un intorno  $W$  di  $y$  t.c.  $\tilde{f}(W) \subseteq V_{i_0}, \tilde{g}(W) \subseteq V_{i_0}$ .  $p|_{V_{i_0}}$  è iniettiva, dunque da  $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$  ne deduciamo che  $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W \Rightarrow W \subseteq \Omega$ .

$\Omega$  chiuso:  $\Omega^C = Y \setminus \Omega$  è aperto. Sia  $y \in \Omega^C \Rightarrow \tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$ . Tuttavia  $(p \circ \tilde{f})(y) = (p \circ \tilde{g})(y) = x_0$ . Se  $U$  è un intorno ben rivestito di  $x_0$ ,  $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$  e da  $\tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$  ne deduciamo che  $\tilde{f}(y) \in V_{i_0}, \tilde{g}(y) \in V_{i_1}, i_0 \neq i_1$ . Per continuità di  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  si conclude.  $\square$

**Teorema 6.4.7.** Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  un cammino continuo. Siano  $x_0 = \gamma(0)$  e  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Allora esiste un unico  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow E$  cammino continuo con  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$  e  $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .

*Dimostrazione.* L'unicità segue dalla proposizione 6.4.6. Ricopriamo adesso  $X$  con aperti ben rivestiti  $\{U_i\}_{i \in I}$  e sia  $\varepsilon > 0$  numero di Lebesgue per il ricoprimento  $\{\gamma^{-1}(U_i), i \in I\}$  di  $[0, 1]$ . Perciò, se  $1/n < \varepsilon$ , per ogni  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\gamma([k/n, (k+1)/n]) \subseteq U_{i_k}$  ben rivestito. Definiamo induttivamente  $\tilde{\gamma}$  su  $[k/n, (k+1)/n]$  come segue: per definizione di rivestimento esiste  $V_{i_0}$  aperto di  $E$  t.c.  $\tilde{x}_0 \in V_{i_0}$  e  $p_0 = p|_{V_{i_0}} : V_{i_0} \rightarrow U_{i_0}$  è un omeomorfismo; per ogni  $t \in [0, 1/n]$ ,  $\tilde{\gamma}(t) = p_0^{-1}(\gamma(t))$ . Una volta definito  $\tilde{\gamma}$  continuo su  $[0, k/n]$ , troviamo  $V_{i_k} \subseteq E$  t.c.  $\tilde{\gamma}(k/n) \in V_{i_k}$  e  $p_k = p|_{V_{i_k}} : V_{i_k} \rightarrow U_{i_k}$  è un omeomorfismo. Poniamo dunque  $\tilde{\gamma}(t) = p_k^{-1}(\gamma(t))$  per ogni  $t \in [k/n, (k+1)/n]$ . È ora facile verificare che questa definizione soddisfa le condizioni richieste.  $\square$

**Proposizione 6.4.8.** Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0, x_1 \in X$ . Allora esiste una bigezione tra  $p^{-1}(\{x_0\})$  e  $p^{-1}(\{x_1\})$ . La cardinalità di  $p^{-1}(\{x_0\})$  si dice *grado* del rivestimento e si indica con  $\deg p$ .

*Dimostrazione.*  $X$  connesso per archi  $\Rightarrow$  esiste  $\gamma \in \Omega(x_0, x_1)$  e, dato  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(\{x_0\})$ , esiste un sollevamento  $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} : [0, 1] \rightarrow E$  con punto iniziale  $\tilde{x}_0$ . È ben definita

$$\begin{aligned} \psi : p^{-1}(\{x_0\}) &\longrightarrow p^{-1}(\{x_1\}) \\ \tilde{x}_0 &\longmapsto \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1) \end{aligned}$$

che ammette inversa ottenuta da  $\tilde{\gamma} \in \Omega(x_1, x_0)$ .  $\square$

**Definizione 6.4.9.** (Sezione) Dato  $U \subseteq X$ , una SEZIONE  $s : U \rightarrow E$  di un rivestimento  $p : E \rightarrow X$  è una mappa continua t.c.  $p(s(x)) = x$  per ogni  $x \in U$ . Si dice *locale* se  $U$  è un aperto di  $X$ , *globale* se  $U = X$ .

**Osservazione 6.4.10.** Per definizione, se  $p$  è un rivestimento, per ogni  $x \in X$  esiste  $U \subseteq X$  aperto con sezione locale definita su  $U$ .

**Teorema 6.4.11.** (Sollevamento delle omotopie) Siano  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $f : Y \rightarrow X$  continua con  $Y$  localmente connesso per archi. Sia  $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  t.c.  $F(y, 0) = f(y)$  per ogni  $y \in Y$ . Sia  $\tilde{f} : Y \rightarrow E$  un

sollevamento di  $f$ , cioè  $p \circ \tilde{f} = f$ . Allora esiste  $\tilde{F} : Y \times [0, 1] \rightarrow E$  che solleva  $F$ , cioè  $p \circ \tilde{F} = F$ , ed estende  $\tilde{f}$ , cioè  $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$  per ogni  $y \in Y$ .

*Dimostrazione.* Poniamo, per ogni  $y_0 \in Y$ ,  $\gamma_{y_0} : [0, 1] \rightarrow X$  il cammino  $\gamma_{y_0}(t) = F(y_0, t)$ . Sia  $\tilde{\gamma}_{y_0}$  il sollevamento di  $\gamma_{y_0}$  a partire da  $\tilde{f}(y_0)$ . Poniamo infine  $\tilde{F}(y_0, t) = \tilde{\gamma}_{y_0}(t)$ . È chiaro che  $p \circ \tilde{F} = F$ . Serve  $\tilde{F}$  continua, basta vedere che per ogni  $(y_0, t) \in Y \times [0, 1]$  esiste un intorno  $U$  in  $Y \times [0, 1]$  t.c.  $\tilde{F}|_U = s \circ F|_U$  dove  $s$  è una sezione locale (continua) del rivestimento. Poiché  $[0, 1]$  è compatto, analizzando il ricoprimento  $\{F^{-1}(W)|W \text{ aperto ben rivestito di } X\}$  otteniamo un numero finito di aperti  $Z_1, \dots, Z_n$  di  $Y \times [0, 1]$  che ricoprono  $y_0 \times [0, 1] \cong [0, 1]$  e sono t.c.  $F(Z_i)$  è contenuto in un intorno ben rivestito di  $X$  per ogni  $i$ . Possiamo supporre  $Z_i = A_i \times B_i$ ,  $A_i$  aperto di  $Y$  e  $B_i$  aperto di  $[0, 1]$ ,  $y_0 \in A_i$  per ogni  $i$ . Sia  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$  aperto di  $Y$  con  $y_0 \in A$  e osserviamo che  $\bigcup_{i=1}^n B_i = [0, 1]$ . Sia  $1/k < \text{numero di Lebesgue di } \{B_1, \dots, B_n\}$ . Allora per ogni  $j = 0, 1, \dots, k-1$   $A \times [j/k, (j+1)/k] \subseteq A_i \times B_i$  per qualche  $i$ , perciò  $F(A \times [j/k, (j+1)/k]) \subseteq U_j$  con  $U_j$  aperto ben rivestito. Ora, per definizione di sollevamenti di cammini,  $\tilde{F}|_{A \times [0, 1/k]} = s_0 \circ F$  dove  $s_0 : U_0 \rightarrow E$  è una sezione locale (si suppone  $A$  connesso per archi). Induttivamente  $\tilde{F}|_{A \times [j, (j+1)/k]} = s_j \circ F$  con  $s_j : U_j \rightarrow E$  sezione locale per ogni  $j$ , da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 6.4.12.** Siano  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  cammini omotopi (a estremi fissi),  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x_0$ . Allora, se  $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ,  $(\tilde{\gamma}_1)_{\tilde{x}_0}$  è omotopo a  $(\tilde{\gamma}_2)_{\tilde{x}_0}$  (a estremi fissi). In particolare,  $(\tilde{\gamma}_1)_{\tilde{x}_0}(1) = (\tilde{\gamma}_2)_{\tilde{x}_0}(1)$ .

*Dimostrazione.* Si prenda come  $F$  l'omotopia tra i due cammini. Bisogna verificare che  $\tilde{F}$  data dal teorema 6.4.11 è un'omotopia tra i sollevamenti dei due cammini, cioè che è a estremi fissi e solleva le cose giuste. Tutto ciò segue dall'unicità del sollevamento data dalla proposizione 6.4.6.  $\square$

**Corollario 6.4.13.** Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento. Allora  $p_* : \pi_1(E, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  è iniettiva.

*Dimostrazione.*  $\alpha = [\gamma] \in \ker p_* \Rightarrow p \circ \gamma \sim c_{x_0}$  (cammino costante)  $\Rightarrow \gamma = \widetilde{(p \circ \gamma)}_{\tilde{x}_0} \sim \widetilde{(c_{x_0})}_{\tilde{x}_0} = c_{\tilde{x}_0} \Rightarrow [\gamma] = 1 \in \pi_1(E, \tilde{x}_0)$ .  $\square$

**Definizione 6.4.14.** (Azione di monodromia) Siano  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $x_0 \in X$ ,  $F = p^{-1}(x_0)$ . Allora esiste un'azione destra di  $\pi_1(X, x_0)$  su  $F$  definita così:

$$\begin{aligned} F \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow F \\ (\tilde{x}, [\gamma]) &\longmapsto \tilde{x} \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1), \end{aligned}$$

detta AZIONE DI MONODROMIA.



**Osservazione 6.4.15.** Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento,  $F = p^{-1}(x_0) \subseteq E$ ,  $x_0 \in X$ . La monodromia  $F \times \pi_1(X, x_0)$  è transitiva se e solo se  $E$  è connesso per archi.

**Definizione 6.4.16.** Un rivestimento  $p : E \rightarrow X$  si dice UNIVERSALE se  $E$  è semplicemente connesso, in particolare connesso per archi.

**Proposizione 6.4.17.** Sia  $p : E \rightarrow X$  un rivestimento universale,  $x_0 \in X$ ,  $\tilde{x}_0 \in F = p^{-1}(x_0)$ . La mappa  $\psi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow F$ ,  $\psi([\gamma]) = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma]$  è bigettiva, per cui  $|\pi_1(X, x_0)| = |F|$ .

*Dimostrazione.*  $E$  connesso per archi  $\Rightarrow$  la suriettività viene dal fatto che l'azione è transitiva. Se  $\psi([\gamma_1]) = \psi([\gamma_2])$ ,  $\tilde{x}_0 \cdot [\gamma_1] = \tilde{x}_0 \cdot [\gamma_2] \Rightarrow (\tilde{\gamma}_1)_{\tilde{x}_0}(1) = (\tilde{\gamma}_2)_{\tilde{x}_0}(1)$ . Poiché  $E$  è semplicemente connesso,  $(\tilde{\gamma}_1)_{\tilde{x}_0} = (\tilde{\gamma}_2)_{\tilde{x}_0} \Rightarrow \gamma_1 = p \circ \tilde{\gamma}_1 \sim p \circ \tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 \Rightarrow [\gamma_1] = [\gamma_2]$ , da cui l'injectività.  $\square$

## 6.5 Alcuni gruppi fondamentali

Abbiamo adesso gli strumenti per poter determinare il gruppo fondamentale di alcuni spazi topologici. Iniziamo da quello di  $S^1$ .

**Teorema 6.5.1.**  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ .

*Dimostrazione.* Analizziamo il rivestimento

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t), \end{aligned}$$

$F = p^{-1}(1, 0) = \mathbb{Z}$ . Poniamo  $\psi : \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\psi([\gamma]) = 0 \cdot [\gamma]$ .  $\mathbb{R}$  è semplicemente connesso, quindi basta vedere che  $\psi$  è un omeomorfismo. Dati  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(S^1, x_0)$ ,  $x_0 = (1, 0)$ , abbiamo che  $\psi([\alpha] \cdot [\beta]) = \psi([\alpha * \beta]) = (\alpha * \beta)_0(1) = \tilde{\alpha}_0 * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}(1)$ . Ora,  $\tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_0(1)}$  e  $\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0$  sono entrambi sollevamenti di  $\beta$  a partire dallo stesso punto iniziale. Dunque  $\psi([\alpha] \cdot [\beta]) = (\tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0)(1) = \tilde{\alpha}_0(1) + \tilde{\beta}_0(1) = \psi([\alpha]) + \psi([\beta])$ , da cui la tesi.  $\square$

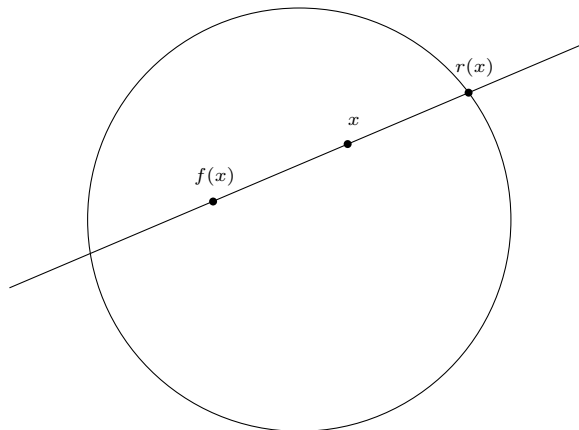
**Proposizione 6.5.2.**  $R \subseteq X$  retracts, allora per ogni  $x_0 \in R$   $i_* : \pi_1(R, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  è injectiva e  $r_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(R, x_0)$  è suriettiva.

*Dimostrazione.* Poiché  $r \circ i$  è l'identità di  $R$ ,  $r_* \circ i_* = \text{id}_{\pi_1(R, x_0)}$ , da cui segue la tesi.  $\square$

**Corollario 6.5.3.**  $S^1 = \partial D^2$  non è un retracts di  $D^2$ .

**Teorema 6.5.4.** (Teorema del punto fisso di Brouwer)  $f : D^2 \rightarrow D^2$  continua  $\Rightarrow f$  ha almeno un punto fisso.

*Dimostrazione.* Se  $f(x) \neq x$  per ogni  $x \in D^2$ , costruiamo una retrazione  $r : D^2 \rightarrow S^1$  come segue:



cerchiamo  $t > 0$  t.c.  $\|f(x) + t(x - f(x))\|^2 = 1$ , poniamo poi  $r(x) = f(x) + t(x - f(x))$  per cui basta vedere che  $t$  dipende in modo continuo da  $x$ . Risolviamo  $1 = \|f(x)\|^2 + 2t \langle f(x), x - f(x) \rangle + t^2 \|x - f(x)\|^2$  e prendiamo  $t > 0$ .  $\square$

**Osservazione 6.5.5.** Tramite  $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ , l'elemento  $n \in \mathbb{Z}$  è identificato da  $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  in quanto  $\tilde{\gamma}_0(t) = nt$  e  $\tilde{\gamma}_0(1) = n$ .

**Esercizio 6.5.6.**

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$z \longmapsto z^n$$

è un rivestimento di grado  $n$ .

**Teorema 6.5.7.** Dati  $X, Y$  e  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ ,  
 $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) = \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ .

*Dimostrazione.* È lasciata come esercizio per il lettore. Traccia:  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X, \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  le proiezioni,

$$i : X \longrightarrow X \times Y$$

$$x \longmapsto (x, y_0),$$

$$j : Y \longrightarrow X \times Y$$

$$y \longmapsto (x_0, y).$$

Poniamo  $\psi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ,  $\psi(\alpha) = ((\pi_X)_*(\alpha), (\pi_Y)_*(\alpha))$ . Si verifica che funziona.  $\square$

**Corollario 6.5.8.**  $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Esercizio 6.5.9.** Siano  $\alpha$  che genera  $\mathbb{Z} \times \{0\}$  e  $\beta$  che genera  $\{0\} \times \mathbb{Z}$  sul toro. Visualizzare l'omotopia di cammini tra  $\alpha * \beta$  e  $\beta * \alpha$ .

## 6.6 Gruppi liberi

Si fa un po' di algebra perché sì.

**Definizione 6.6.1.** Siano  $\{G_i\}$  con  $i \in I$  dei gruppi. Il loro prodotto libero è una coppia  $(G, \{\phi_i\}_{i \in I})$  con  $G$  gruppo e i  $\phi_i: G_i \rightarrow G$  omomorfismi tali che per ogni gruppo  $H$  e famiglia di omomorfismi  $\psi_i: G_i \rightarrow H$  esista unico un omomorfismo  $\psi: G \rightarrow H$  con la proprietà che  $\psi\phi_i = \psi_i$  per ogni  $i \in I$ . Spesso si indicherà il prodotto libero con il simbolo  $\ast_i G_i$ .

**Proposizione 6.6.2.** Il prodotto libero è unico a meno di isomorfismi.

*Dimostrazione.* Siano  $(G, \phi_i)$  e  $(G', \phi'_i)$  prodotti liberi dei  $G_i$ . La dimostrazione segue lo schema che si è sempre fatto con le proprietà universali. Inizio con lo scrivere la definizione del prodotto libero  $G$ , utilizzando  $H = G'$  e  $\psi_i = \phi'_i$ . Dunque ho garantito un'unica funzione  $\phi': G \rightarrow G'$  tale che  $\phi'\phi_i = \phi'_i$ . Analogamente trovo una funzione  $\phi: G' \rightarrow G$ . Allora  $\phi_i = \phi\phi'\phi_i$  e  $\phi'_i = \phi'\phi\phi'_i$ , da cui si ricava che  $\phi\phi'$  e  $\phi'\phi$  sono identità, e dunque  $\phi$  e  $\phi'$  sono gli isomorfismi tra  $G$  e  $G'$ .  $\square$

**Proposizione 6.6.3.** Il prodotto libero dei  $G_i$  esiste.

*Dimostrazione.* Sia  $W = \cup_{i \in I} (G_i \setminus \{e_i\})$ , dove gli  $e_i$  sono le unità nei rispettivi gruppi. Sia  $W^*$  l'insieme delle parole finite (eventualmente vuote) sull'alfabeto  $W$ . Definisco anche

$$G = \{g \in W^* \mid \forall k \in \mathbb{N}, g_k \in G_i \Rightarrow g_{k+1} \notin G_i\}$$

Su  $G$  voglio definire un'operazione che lo renda un gruppo. Lo faccio con una concatenazione più un'eventuale riduzione cioè:

$$(g_1, \dots, g_i)(h_1, \dots, h_j) = \begin{cases} (g_1, \dots, g_i, h_1, \dots, h_j) & \text{se } G_i \neq H_1 \\ (g_1, \dots, g_i h_1, \dots, h_j) & \text{se } G_i = H_1 \text{ e } g_i h_1 \neq e \\ (g_1, \dots, g_{i-1})(h_2, \dots, h_j) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa è un onefto gruppo, con elemento neutro, con elemento neutro la parola vuota  $()$ . Bisogna trovare degli omomorfismi e poi far vedere che rispettano la proprietà universale per essere il prodotto libero cercato.

Possiamo equipaggiare ogni gruppo con una funzione  $\phi_i: G_i \rightarrow G$  che associa  $\phi_i(x) = (x)$  la parola di una lettera. Si prenda un gruppo  $H$  e degli omomorfismi  $\psi: G_i \rightarrow H$ . Pongo allora  $\psi: G \rightarrow H$  come

$$\psi((g_1, \dots, g_n)) = \psi_{i_1}(g_1) \cdots \psi_{i_n}(g_n)$$

Si verifica che tale  $\psi$  è effettivamente l'omomorfismo cercato, unico per costruzione.  $\square$

**Definizione 6.6.4.** Dato  $S = \{x_i\}$  l'insieme  $F(S) = \ast_i G_i$  è il gruppo libero generato da  $S$ , dove  $G_i = \{x_i^m \mid m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ .

**Osservazione 6.6.5.** Si ha canonicamente un'immersione  $i: S \hookrightarrow F(S)$ , tale per cui, preso un gruppo  $H$  e una funzione  $\psi: S \rightarrow H$ , esiste unico un omomorfismo  $\phi: F(S) \rightarrow H$  tale che  $\phi i = \psi$ .

**Definizione 6.6.6.** Dato un gruppo  $G$  e un sottoinsieme  $S \subseteq G$ , la chiusura normale di  $S$ , detta  $N(S)$ , è il più piccolo sottogruppo normale contenente  $S$ .

**Osservazione 6.6.7.** Ogni chiusura normale si può esprimere come Span dei coniugati.

**Definizione 6.6.8.** Dato un insieme  $S$  e un sottoinsieme  $R \subseteq F(S)$ , si definisce la presentazione come  $\langle S \mid R \rangle = F(S)/N(R)$ .

**Esempio 6.6.9.**

- (i)  $\mathbb{Z} \cong \langle 1 \rangle$ ;
- (ii)  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong F(\{a, b\})$ ;
- (iii)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ .

**Proposizione 6.6.10.** Sia  $R \subseteq F(S)$ ,  $\psi: F(S) \rightarrow H$  un omomorfismo. Se  $\psi(R) = \{e\}$ , allora esiste un omomorfismo  $\bar{\psi}: \langle S \mid R \rangle \rightarrow H$  tale che  $\bar{\psi}([s]) = \psi(s)$  per ogni  $s \in F(S)$ .

**Proposizione 6.6.11.** Sia  $G_i = \langle S_i \mid R_i \rangle$   $i = 1, 2, 3$ ,  $\phi_1: G_0 \rightarrow G_1$ ,  $\phi_2: G_0 \rightarrow G_2$ . Sia  $G = G_1 * G_2 / N$  con  $N = N(\{\phi_1(g)\phi_2(g)^{-1} \mid g \in G_0\})$ . Allora

$$G \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R \rangle$$

con  $R = \{\tilde{\phi}_1(s)\tilde{\phi}_2(s)^{-1} \mid s \in S_0\}$ ,  $\tilde{\phi}_i: F(S_0) \rightarrow F(S_i)$  le estensioni naturali di  $\phi_i$ .

## 6.7 Il teorema di Van Kampen

**Teorema 6.7.1.**(di Van Kampen) Sia  $X$  uno spazio topologico con  $X = A \cup B$  dove  $A$ ,  $B$  e  $A \cap B$  sono aperti connessi per archi. Si considerino le inclusioni:

$$\begin{aligned} \alpha: A \cap B &\longrightarrow A \\ \beta: A \cap B &\longrightarrow B \\ f: A &\longrightarrow X \\ g: B &\longrightarrow X \end{aligned}$$

Sia inoltre  $G$  un gruppo e si considerino ancora gli omomorfismi

$$\begin{aligned} h: \pi_1(A) &\longrightarrow G \\ k: \pi_1(B) &\longrightarrow G \end{aligned}$$

tali per cui  $h \alpha_* = k \beta_*$ .

Allora esiste unico un omomorfismo  $\phi: \pi_1(X) \longrightarrow G$  tale che  $\phi f_* = h$  e  $\phi g_* = k$ .

*Dimostrazione.* La dimostrazione è una cosa bestiale in termini di grafici e disegni. Arriverà. □

**Corollario 6.7.2.** Nelle notazioni del teorema precedente, si ha che

$$\pi_1(X) \cong \frac{\pi_1(A) * \pi_1(B)}{N}$$

con  $N = N(\{i\alpha_*(g) j\beta_*(G)^{-1} \mid g \in \pi_1(A \cap B)\})$ , dove  $i$  e  $j$  sono le immersioni dei  $\pi_1$ .

*Dimostrazione.* Applico la definizione del prodotto libero con gli omomorfismi  $f_*$  e  $g_*$ . Questo mi dà un omomorfismo  $\psi$  che fa commutare il diagramma.

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(A) & & & & \\ & \searrow i & & f_* & \\ & & \pi_1(A) * \pi_1(B) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(X) \\ & \nearrow j & & g_* & \\ \pi_1(B) & & & & \end{array}$$

Con un po' di conti si mostra che  $\psi(N) = \{e\}$ , il che mi permette di applicare una proposizione sui prodotti liberi che mi garantisce l'esistenza di un omomorfismo

$$\bar{\psi}: \pi_1(X) \longrightarrow \frac{\pi_1(A) * \pi_1(B)}{N}$$

Per esercizio si verifichi che la funzione data da Van Kampen (utilizzando come  $G$  il quoziente di gruppi cercato,  $h = i$  e  $k = j$ ) è un'inversa di  $\psi$ . □

**Esempio 6.7.3.**  $\pi_1(S^n) = \{e\}$  per  $n \geq 2$ .

*Dimostrazione.* Prendo  $A = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$  e  $B = S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ . La proiezione stereografica mostra che sono entrambi semplicemente connessi, e dunque anche  $S^n$  lo è. □

**Esempio 6.7.4.**  $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$  è banale per ogni  $n$ .

*Dimostrazione.* Per induzione, il caso  $n = 0$  funziona. Prendiamo  $H = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_0 = 0\}$ ,  $A = \mathbb{P}^n \setminus H$  e  $B = \mathbb{P}^n \setminus \{[1 : 0 : \dots : 0]\}$ . Si ha che  $A \cong \mathbb{C}^n$  con

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Quindi  $A$  è semplicemente connesso.  $A \cap B$  è semplicemente connesso perché è isomorfo a tutto  $\mathbb{C}^n$  tolta l'origine.

Sia  $r \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  la retta generata da  $(1, 0, \dots, 0)$ . Sia  $h: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \times [0, 1]r \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  con  $h((x_0, \dots, x_n), t) = (tx_0, \dots, tx_n)$ . Si ha che  $h$  passa al quoziente che definisce lo spazio proiettivo, e ho ottenuto che  $B$  è omotopo a  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Quindi per ipotesi induttiva si conclude.  $\square$

**Definizione 6.7.5.**  $\Sigma_g$  è la superficie con  $g$  buchi. Per esempio  $\Sigma_0$  è la sfera e  $\Sigma_1$  è il toro.

**Esempio 6.7.6.** Vogliamo calcolare il gruppo fondamentale di  $\Sigma_g$ . Sia  $P$  un  $4g$ -agone, con i lati indicati con  $a_1, b_1, a_1, b_1, a_2, \dots$ . Allora  $\Sigma_g$  è  $P$  quozientato l'identificazione dei lati con lo stesso nome, in modo simile alla costruzione del toro. Non abbiamo formalizzato questo passaggio, basta soltanto essere in grado di vederlo.

Sia  $p$  un punto interno a  $P$ . Chiamo  $A = \pi(P \setminus \{p\})$  e  $B = \pi(P \setminus \partial P)$ , dove  $\pi$  è la proiezione al quoziente. Si ha innanzi tutto che  $B$  ha gruppo fondamentale banale.

Inoltre  $A$  si retrae (radialmente) su  $\pi(\partial P)$ . Ora un altro passaggio di cui si richiede solo l'intuito geometrico:  $\pi(\partial P)$  è il wedge di  $2g$  cerchi. Dunque  $\pi_1(A)$  è il prodotto libero di  $2g$  copie di  $\mathbb{Z}$ . Infine  $A \cap B$  è omotopo a una circonferenza. Un rappresentante  $\alpha$  del generatore del gruppo fondamentale è la proiezione di un laccio che fa un giro intorno a  $p$ . Allora dentro  $\pi_1(A)$  l'immagine di  $\alpha$  è  $\prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ . Allora

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, \dots, b_g \mid \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

**Proposizione 6.7.7.** Detto  $\Gamma_g = \pi_1(\Sigma_g)$ , si ha che  $\Gamma_g / [\Gamma_g, \Gamma_g] \cong \mathbb{Z}^{2g}$ .

*Dimostrazione.* Costruisco una funzione  $\phi: \Gamma_g \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$  che manda  $a_i$  e  $b_i$  distinti in generatori distinti. Si verifica che  $\psi$  è un omomorfismo surgettivo. Si mostra con rapido conto che  $[\Gamma_g, \Gamma_g] \subseteq \text{Ker } \psi$ . Infine si costruisce a mano l'inversa di  $\bar{\psi}: \Gamma_g / [\Gamma_g, \Gamma_g] \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ .  $\square$

**Corollario 6.7.8.** Si ha che  $\Sigma_m \sim \Sigma_n$  se e solo se  $\Sigma_m \cong \Sigma_n$  se e solo se  $n = m$ .