Тема 2 - "Множества"

Аксиоматизация на Zermelo-Fraenkel (ZF):
(разглеждаме само част от аксиомите)

1. Аксиома за обема:
$\forall X \forall Y (\forall z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y)$

2. Аксиома за отделянето:
Ако X е мн-во и П е предикат с домейн X, то съвкупността от ел. на X, които имат с-во П, е мн-во:
$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow \Pi(z))$

$Y \subseteq X$

3. Аксиома за степенното множество:
$\forall X \exists Y \forall z (z \in Y \Leftrightarrow z \subseteq X)$

степенното мн-во на X бележим с 2^X или $\mathcal{P}(X)$

Операции вху множества:

Нека A и B са множества

1. $A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}$ е мн-во
2. $A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$ е мн-во
3. $A \setminus B = \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$ е мн-во
4. $A \Delta B = \{a \mid a \in A \oplus a \in B\}$ е мн-во
5. $\overline{A}^{U} = \{a \mid a \in U \wedge a \notin A\}$ е мн-во

Свойства на операциите вху мн-ва – напълно аналогични на съотв. с-ва на лог. съюзи. Например:

- $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$ (идемпотентност)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистр.)
- $A \cup \emptyset = A$
  $A \cap \emptyset = \emptyset$
  $A \cup U = U$
  $A \cap U = A$

  $\}$ с-ва на константите, ако $\emptyset$ съотв. на F, а U – на T.
- $\overline{\overline{A}} = A$ (закон за двойното отрицание)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (де Морган)

Зад 1: Докажете, че ако

$x \in A \Rightarrow x \in C \wedge x \notin B$, то

$\overline{B} \cap \overline{C} \setminus B = \overline{B} \cap (C \cup A)$

Решение:

$x \in A \Rightarrow x \in C \wedge x \notin B$ е екв. на $A \subseteq C \setminus B$

Док. чрез табличен метод.

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \cap \overline{C}$	$\overline{\overline{B} \cap \overline{C}}$	$\overline{\overline{B} \cap \overline{C}} \setminus B$	$C \cup A$	$\overline{B} \cap (C \cup A)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

За редовете в червено предпоставката $A \subseteq C \setminus B$ НЕ е изпълнена. След те не ни интересуват. След. твърдението е доказано. $\square$

Зад. 2: Докажете, че ако $C \cap B = \emptyset$, то $(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle B$

Решение:

Ще докажем твърдението ~~[illegible]~~ директно.

1) Ще док., че $(A \triangle B) \cup C \subseteq (A \cup C) \triangle B$, т.е че $\forall x \, (x \in (A \triangle B) \cup C \Rightarrow x \in (A \cup C) \triangle B)$.

Нека x е произв. и $x \in (A \triangle B) \cup C$.

1.1) $x \in C$, след. $x \in A \cup C$

Но $C \cap B = \emptyset \Rightarrow x \notin B$.

След. $x \in (A \cup C) \triangle B$.

1.2) $x \in A \triangle B$

- $x \in A$, след $x \notin B$ $\Downarrow$ $x \in A \cup C$ $\Big\}$ след $x \in (A \cup C) \triangle B$

- $x \in B$, след $x \notin A$ $\Downarrow$ $x \notin C$ $\Big\}$ След. $x \notin A \cup C$ Но $x \in B$. Значи $x \in (A \cup C) \triangle B$.

Доказахме, че

$(A \triangle B) \cup C \subseteq (A \cup C) \triangle B$.

2) Ще док., че $(A \cup C) \Delta B \subseteq (A \Delta B) \cup C$, т.е.

$\forall x (x \in (A \cup C) \Delta B \Rightarrow x \in (A \Delta B) \cup C$.

Нека x е произв. и $x \in (A \cup C) \Delta B$

2.1) $x \in B$, след. $x \notin A \cup C$, т.е. $x \notin A \wedge x \notin C$

Но от $x \in B \wedge x \notin A$ следва, че $x \in A \Delta B$.

След. $x \in (A \Delta B) \cup C$.

2.2.) $x \in A \cup C$, след $x \notin B$

- $x \in A$

Но знаем, че $x \notin B$.

След. $x \in A \Delta B$, т.е. $x \in (A \Delta B) \cup C$

- $x \in C$

Но тогава $x \in (A \Delta B) \cup C$.

Доказахме, че $(A \cup B) \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup C$.

От 1) и 2) следва, че

$(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta B$. $\square$

Зад. 3: Докажете, че $A \subseteq B$ точно тогава, когато $A \cup B = B$.

Решение:

Твърдим, че $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

1) Нека $A \subseteq B$. Нека $x \in A \cup B$ - произв.
Тогава $x \in A \vee x \in B$. Но $A \subseteq B$ след. $x \in B$.
След. $A \cup B \subseteq B$
Нека $x \in B$. Но тогава $x \in A \cup B$.
Док., че $A \cup B = B$.

2) Нека $A \cup B = B$. Но тогава, ако $x \in A$, то
$x \in A \cup B = B$. След. $A \subseteq B$.

От 1) и 2) следва, че $A \subseteq B \iff A \cup B = B$. $\square$

Наредена двойка

Def: Всяко мн-во $\{\{a\},\{a,b\}\}$ наричаме **наредена двойка** с първи елемент a и втори елемент b. Краткият запис е $\langle a,b\rangle$. Наредена k-орка бележим с $\langle a_1,\dots,a_k\rangle$.

Def: Нека A и B са мн-ва. **Декартово** произв. на A и B е мн-вото

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A \land b\in B\}$$

Пример: Нека $A=\{1,2\}$ и $B=\{a,b,c\}$.
Тогава:

$$A\times B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle\}$$

$$\mathop{\times}_{i=1}^{k} A_i := A_1\times A_2\times\dots\times A_k=\{\langle a_1,a_2,\dots,a_k\rangle \mid a_i\in A_i\}$$

наричаме обобщено дек. произв. на мн-вата $A_1,A_2,\dots,A_k$

Фамилия наричаме мн-во от мн-ва.

Def: Нека A е непр. мн-во. **Покриване** на A е всяка фамилия $X = \{X_1, \dots, X_k\}$, т.че. $k \geq 1$ и:

① $\forall i \in \{1, \dots, k\} : X_i \subseteq A$

② $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : X_i \neq \emptyset$

③ $\bigcup\limits_{i=1} X_i = A$

Ако освен това е вярно, че:

④ $\forall i \forall j \, (1 \leq i < j \leq k \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset)$, то казваме, че X е **разбиване** на A

Пример:

Нека $A = \{a, b, c, d\}$.

- Примерно покриване е $\{\{a, b, d\}, \{b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$
- Примерно разбиване е $\{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}$