ДС

Тема 1 - "Логика"

Просто съждение - просто разказвателно изр., което е или T, или F.

Наука за правенето на валидни изводи и правилни разсъждения

Логически съюзи:

$\vee$ "или", дизюнкция (включващо или)

$\wedge$ "и", конюнкция

$\oplus$ "или, или", изключващо или

$\Rightarrow$ "ако, то", импликация

$\Leftrightarrow$ "тогава и само тогава, когато", бимпликация

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
F	F	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	F	T
T	F	T	F	T	F	F	F
T	T	T	T	F	T	T	F

Приоритет: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Еквивалентност на съставни съждения

<u>Съст.съжд.</u> – образуват се от прости съжд, други съст. съжд. и логически конст. чрез лог. съюзи.

<u>Док. на екв.:</u>

I начин: Таблица на истинност

II начин: Еквивалентни преобразувания

<u>Теорема:</u> Нека p, q и r са произв. съжд. Следните екв. са в сила:

- свойства на константите:
  $p \wedge T \equiv p$, $p \vee F \equiv p$, $p \vee T \equiv T$, $p \wedge F \equiv F$
- свойства на отрицанието:
  $p \wedge \neg p \equiv F$, $p \vee \neg p \equiv T$
- идемпотентност:
  $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$
- закон за двойното отрицание:
  $\neg(\neg p) \equiv p$
- комутативност:
  $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- асоциативност:
  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

- дистрибутивност:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$,

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- закони на De Morgan:

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

- поглъщане:

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

- свойство на импликацията:

$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Док:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	F	T

- свойство на би-импликацията:

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Зад1 Докажете закона за поглъщане

$p\vee(p\wedge q)\equiv p$

Док:

$p\vee(p\wedge q) \overset{\text{дистр.}}{\equiv} (p\vee p)\wedge(p\vee q) \overset{\text{идемп.}}{\equiv}$

$p\wedge(p\vee q) \overset{\text{дистр.}}{\equiv} (p\wedge p)\vee(p\wedge q) \overset{\text{идемп.}}{\equiv}$

$p\vee(p\wedge q)$ $\leftarrow$ получихме същото

$\Rightarrow$ НЕ става !

Втори опит:

$p\vee(p\wedge q) \overset{\text{конст.}}{\equiv} (p\wedge T)\vee(p\wedge q) \overset{\text{обратна дистр.}}{\equiv}$

$p\wedge(T\vee q) \overset{\text{конст}}{\equiv} p\wedge T \overset{\text{конст}}{\equiv} p$ $\square$

Def Тавтология - съставно съжд., чиято ст-ст е T за всяка валюация на простите му съжд.

Def Противоречие - съставно съжд, чиято ст-ст е F за всяка валюация на простите му съжд.

Зад 2: Имаме дадени 3 съждения. Кои са еквивалентни?

1. Ако $\underbrace{\text{грее слънце}}_{p}$, то $\underbrace{\text{уча}}_{q}$ и $\underbrace{\text{тренирам}}_{t}$.
2. Уча и тренирам или не грее слънце.
3. Ако уча, то тренирам.

Реш:

1. $p \Rightarrow (q \wedge t)$
2. $(q \wedge t) \vee \neg p$
3. $q \Rightarrow t$

p	q	t	$q \wedge t$	1. $p \Rightarrow (q \wedge t)$	2. $(q \wedge t) \vee \neg p$	3. $q \Rightarrow t$
F	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T

След. $1 \equiv 2 \not\equiv 3$.

Зад 3: Вярно ли е, че следният израз е тавтология?

$$\underbrace{(\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p)}_{1} \oplus \underbrace{((r \wedge t) \wedge (\neg t \vee \neg r))}_{2}$$

Реш:

1 и 2 нямат общи пром., след. можем да ги разгледаме поотделно.

Изразът е тавтология тстк $1 \equiv T \wedge 2 \equiv F$ или $1 \equiv F \wedge 2 \equiv T$.

1

$\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \overset{\text{импл}}{\equiv} \neg(\neg p \vee q) \Rightarrow p \overset{\text{импл.}}{\equiv}$
$\neg p \vee q \vee p \overset{\text{комут.}}{\equiv} (\neg p \vee p) \vee q \overset{\text{с-во отр.}}{\equiv} T \vee q \overset{\text{конст.}}{\equiv}$
T.

2

$(r \wedge t) \wedge (\neg t \vee \neg r) \overset{\text{де Морган}}{\equiv} (r \wedge t) \wedge \neg(t \wedge r) \overset{\text{комут.}}{\equiv}$
$(r \wedge t) \wedge \neg(r \wedge t) \overset{\text{с-во отр}}{\equiv} F$

След. изразът е тавтология. $\square$

Зад. 4: Тавтология ли е следният израз?

$$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow t)]\Rightarrow(p\Rightarrow t)$$

Реш:

$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow t)]\Rightarrow(p\Rightarrow t)\equiv$ // импл.

$\neg[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow t)]\vee(\neg p\vee t)\equiv$ // де Морган

$\neg(p\Rightarrow q)\vee\neg(q\Rightarrow t)\vee(\neg p\vee t)\equiv$ // импл. + де Морган

$(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg t)\vee(\neg p\vee t)\equiv$ // комут.

$(p\wedge\neg q)\vee\neg p\vee(q\wedge\neg t)\vee t\equiv$ // дистр.

$\underbrace{(p\vee\neg p)}_{T}\wedge(\neg p\vee\neg q)\vee(t\vee q)\wedge\underbrace{(t\vee\neg t)}_{T}\equiv$ // конс

$(\neg p\vee\neg q)\vee(t\vee q)\equiv$ // комут.

$\neg p\vee t\vee\underbrace{(\neg q\vee q)}_{T}\equiv$ // конст

T.

Предикатна логика

Предикат – съждение с "празно място", в което се слага обект от дефинирана област, наречена домейн. За всеки обект от домейна предикатът е или истина, или лъжа.

<u>Пример</u>: Домейн: $\mathbb{N}$

$\mathbb{P}(x) \Leftrightarrow x$ е просто

$\mathbb{P}(7) \equiv T$

$\mathbb{P}(22) \equiv F$

Ако за поне един обект от домейна предикатът е в сила, то казваме:

$\exists x \, \mathbb{P}(x)$

Ако за всеки обект от домейна предикатът е в сила, то казваме:

$\forall x \, \mathbb{P}(x)$

! Ако домейнът е $\emptyset$, то за всеки предикат $\forall x \, \mathbb{P}(x) \equiv T$, $\exists x \, \mathbb{P}(x) \equiv F$.

⚠ $\neg(\forall x \, \mathbb{P}(x)) \equiv \exists x \neg \mathbb{P}(x)$

$\neg(\exists x \, \mathbb{P}(x)) \equiv \forall x \neg \mathbb{P}(x)$

Зад 5: Вярно ли е, че:

а) от $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ следва
$\forall x (P(x) \vee Q(x))$

б) от $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ следва
$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

а) Доп. че $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$. Ще док., че
$\forall x (P(x) \vee Q(x))$:

1сл) Нека $\forall x P(x) \equiv T$. Тогава:

$\cancel{\forall (x)(} \ \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv$

$\forall x \, (T \vee Q(x)) \equiv$

T. ✓

2сл) Нека $\forall x P(x) \equiv F$. Тогава $\forall x Q(x) \equiv T$.

Тогава $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x (P(x) \vee T) \equiv$

T. ✓

След. твърдението е изпълнено.

б) Твърдението НЕ е изпълнено. Контрапример:

Домейн: $\mathbb{N}$, $P(x) \iff x$ е четно,

$Q(x) \iff x$ е нечетно

$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv T$, но $\forall x P(x) \equiv F$ и $\forall x Q(x) \equiv F$

Зад. 6: Домейн $\mathbb{N}$

$Add(x,y,z) \Leftrightarrow x+y=z$

$Mult(x,y,z) \Leftrightarrow x*y=z$

$Less(x,y) \Leftrightarrow x<y$

Напишете предикати за четно, нечетно, нула, едно

Решение:

$Even(x) \Leftrightarrow \exists y\, Add(y,y,x)$

$Odd(x) \Leftrightarrow \neg Even(x)$

$Zero(x) \Leftrightarrow \neg \exists y\, Less(y,x)$

$One(x) \Leftrightarrow \forall y\, Mult(y,x,y)$

$Prime(x)$ - за домашно

Зад 7: Домейн $\mathbb{N}$

$E(x) \Leftrightarrow x$ е четно

$O(x) \Leftrightarrow x$ е нечетно

Кои от следните са верни?

- $\forall x\, (O(x) \oplus E(x))$ - вярно
- $\forall x\, (\neg O(x) \Rightarrow \neg E(x))$ - грешно
- $\exists x\, (O(x) \Rightarrow E(x))$ - вярно
- $\forall x\, ((O(x) \Rightarrow E(x)) \vee (E(x) \Rightarrow O(x)))$ - вярно