Теория на Множествата

Мария Гроздева

18.02.2022г.

Задача 1 (ZFC):

Да се докаже, че едно множество A е крайно точно тогава, когато всяко непразно подмножество на $\mathcal{P}(A)$ има максимален относно $\subseteq$ елемент.

Решение:

$\Longrightarrow$) Нека $Fin(A)$, $B \subseteq \mathcal{P}(A)$, $B \neq \emptyset$.

$C \rightleftharpoons \{n \mid (\exists x \in B)(|x| = n)\}$.
$C \neq \emptyset$ (защото $B \neq \emptyset$), $C \subseteq \omega$.
$n \in C \Rightarrow n \leq |A|$ (всяко подмножество на A има най-много $|A|$ елемента).

Твърдя, че C има най-голям елемент.
Наистина, нека D е множеството от всички горни граници на C, т.е.
$D \rightleftharpoons \{k \mid (\forall n \in C)(n \leq k)\}$.
$D \neq \emptyset$ (защото $|A| \in D$), $D \subseteq \omega$.
Нека k_0 е най-малкият елемент на D.
Нека $k_0 = 0$. Тогава $C = \{0\}$. Значи, $B = \emptyset$. Но, по условие, $B \neq \emptyset$.
Следователно $k_0 \neq 0$.
k_0 е естествено число, т.е. $\neg Limit(k_0)$. Тогава, $k_0 = S(k_0')$ за някое k_0'.
$k_0' < k_0$, k_0 е най-малкият елемент на мн-вото D. Следователно $k_0' \notin D$. Тогава $\exists n_0 \in C$, такова че $k_0' < n_0$. Нека n_0 е свидетел за това съществуване, т.е. $n_0 \in C$, $k_0' < n_0$.
Забелязваме, че $S(k_0') = n_0,\ k_0 = S(k_0') = n_0,\ k_0 = n_0$.
$n_0 \in C$. Тогава съществува $b \in B, |b| = n_0$. Нека b е свидетел.

Твърдя, че b е максимален относно $\subseteq$ елемент за B.
Наистина, нека $x \in B, |x| = m$.
Нека $b \subseteq x$. Тогава $|b| = n_0 \leq m = |x|,\ n_0 \leq m$.
Но n_0 е най-големият елемент на множеството $C, |x| = m \in C$, следователно $n_0 = m,\ b = x, b$ е максимален елемент за B.
Нека $b \subseteq x, b \neq x$. Тогава $|b| < |x|$. Но $|b| \in C, |x| \in C, |b| = n_0$ - максимален елемент. Следователно $|x| \leq |b|$ Противоречие.
Следователно, b е максимален относно $\subseteq$ елемент за B.

$\Longleftarrow$) Ще докажа контрапозицията на твърдението:
Ако едно множество A не е крайно, то съществува непразно подмножество на $\mathcal{P}(A)$, което няма максимален елемент относно $\subseteq$,
$\neg Fin(A) \Rightarrow \neg\forall B(B \neq \emptyset \ \&\ B \subseteq \mathcal{P}(A) \Rightarrow (\exists b \in B)(\forall x \in B)(b \subseteq x \Rightarrow x = b))$

Нека $\neg Fin(A)$.
Нека $B = \{x \mid x \in \mathcal{P}(A) \ \&\ Fin(x)\},\ B \neq \emptyset,\ B \subseteq \mathcal{P}(A)$.
Твърдя, че B няма максимален елемент относно $\subseteq$.
Наистина, нека $b \in B$. Тогава $Fin(b),\ |b| = n$.
$\neg Fin(A \setminus b)$ (защото $\neg Fin(A)$), в частност $A \setminus b \neq \emptyset$.
Нека $u \in A \setminus b$. Тогава $b \cup \{u\} \subseteq A,\ b \cup \{u\} \in B$.
$|b \cup \{u\}| = S(n) > n = |b|,\ b \subsetneq b \cup \{u\}$.
Така, $(\forall b \in B)(\exists b' \in B)(b \subseteq b' \ \&\ b \neq b')$.
Следователно, B няма максимален елемент относно $\subseteq$.
$\square$

Задача 2:

Нека $f : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ е монотонна функция и I е нейната най-малка неподвижна точка. Докажете, че:

- ако $I \subseteq A \subseteq B$ и $f_A : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е дефинирана с $f_A(X) = A \cap f(X)$ за всяко $X \subseteq A$, то I е най-малката неподвижна точка и на f_A;
- ако $B \subseteq C$ и $f^C : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C)$ е дефинирана с $f^C(X) = f(X \cap B)$ за всяко $X \subseteq C$, то I е най-малката неподвижна точка и на f^C.

Решение:

- Твърдя, че I е неподвижна точка на f_A.
  Наистина,
  $I \subseteq A,\ f_A(I) = A \cap f(I) = A \cap I =$ // I е неподвижна точка на f
  $= I.$ // $I \subseteq A$

  Твърдя, че I е най-малката неподвижна точка на f_A.
  Наистина, да допуснем, че J е най-малката неподвижна точка на f_A, т.е. $J \subseteq I \subseteq A \subseteq B$, $f_A(J) = J$.
  J е неподвижна точка и за f.
  Наистина, от монотонността на f и $J \subseteq I$, получаваме $f(J) \subseteq f(I) = I \subseteq A$. Тогава $J = f_A(J) = A \cap f(J) = f(J)$.
  Но I е най-малката неподвижна точка на f. Така $I \subseteq J$.
  Следователно $J = I$ и I е най-малката неподвижна точка на f_A.

- Твърдя, че I е неподвижна точка на f^C.
  Наистина,
  $f^C(I) = f(I \cap B) = f(I) = I.$

Твърдя, че I е най-малката неподвижна точка на f^C.
Наистина, да допуснем, че J е най-малката неподвижна точка на f^C, т.е. $J \subseteq I \subseteq B \subseteq C$, $f^C(J) = J$.
J е неподвижна точка и за f.
Наистина, $J = f^C(J) = f(J \cap B) = f(J)$.
Но I е най-малката неподвижна точка на f. Така $I \subseteq J$.
Следователно $J = I$ и I е най-малката неподвижна точка на f^C.
$\square$

Задача 3 (ZF):

Нека x е множество. Тогава x е ординал точно тогава, когато всяко транзитивно собствено подмножество на x е елемент на x.

Решение:

$\Longrightarrow$) Нека $ord(x)$.

Твърдим, че ако $y \subsetneq x$ и $trans(y)$, то $y \in x$.
Нека $u = x \setminus y$. $u \neq \emptyset$, защото ако $u = \emptyset$, то $y = x$.
$\in WO(x)$ и значи $\exists z(z \in u \ \&\ z \cap u = \emptyset)$, тоест z е най-малкият елемент относно $\in$ на множеството u.

Твърдя, че $y = z$.
Наистина, нека $t \in y$, произволен елемент. Ще покажа, че $t \in z$.
$t \in y$, значи $t \in x^*$, защото $y \subsetneq x$.
$z \in u,\ u \subseteq x$, значи $z \in x^{**}$.
От $^*,^{**}$ и това, че $\in WO(x)$, точно едно от $t \in z,\ z \in t,\ t = z$ е в сила.

Твърдя, че е в сила $t \in z$.
Наистина, да допуснем, че $z \in t$.
$t \in y,\ trans(y)$, значи $t \subseteq y$. Тогава $z \in y$. Но $z \in u,\ u = x \setminus y$ и значи $z \in y$ и $z \notin y$. Невъзможно!
Да допуснем, че $t = z$.
Отново, $t = z,\ z \in u,\ u = x \setminus y$ и $t \notin y$. Противоречие.
Следователно, $t \in z$.
Следователно $y \subseteq z$.

Нека $t \in z$, произволен елемент. Ще покажа, че $t \in y$.
От избора на z следва, че $t \notin u$. Освен това, $t \in z, z \in x$, откъдето по транзитивността на x следва, че $t \in x$. Получаваме, че $t \in x \setminus u = y$.
Следователно $z \subseteq y$.

Следователно $y = z$.
$y = z,\ z \in u,\ u \subseteq x$. Тогава $y \in x$.

$\Longleftarrow$) Нека x е множество. Твърдим, че
$\forall u((u \subsetneq x \ \& \ trans(u) \Rightarrow u \in x) \Rightarrow ord(x))$.

1 случай: Ако $x = \emptyset$, то твърдението е тривиално изпълнено.

2 случай: Нека $x \neq \emptyset$.
Нека $\forall u(u \subsetneq x \ \& \ trans(u) \Rightarrow u \in x)$ и да допуснем, че $\neg ord(x)$.
Ще докажа, че всеки ординал е собствено подмножество на x,

$$\forall \alpha(\alpha \subsetneq x).$$

Нека $\varphi(\alpha, x) \leftrightharpoons \alpha \subsetneq x$.
Чрез трансфинитна индукция ще докажа, че $\forall \alpha \varphi(\alpha, x)$:

- $\varphi(0, x)$, $\emptyset \subsetneq x$ $(x \neq \emptyset)$.
- Ще докажа, че $\forall \alpha(\varphi(\alpha, x) \Rightarrow \varphi(S(\alpha), x))$.
  Нека α - произволен ординал и нека $\varphi(\alpha, x)$.
  $\alpha \subsetneq x,\ ord(\alpha) \Rightarrow trans(\alpha)$. Тогава $\alpha \in x$.
  $\alpha \subsetneq x,\ \alpha \in x$. Следователно $\alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha) \subsetneq x$.
- Ще докажа, че $\forall \alpha(Limit(\alpha) \ \& \ (\forall \beta < \alpha)\varphi(\beta, x) \Rightarrow \varphi(\alpha, x))$.
  Нека $Limit(\alpha)$ и нека $(\forall \beta < \alpha)(\varphi(\beta, x))$, т.е. $(\forall \beta < \alpha)(\beta \subsetneq x)$.
  Но $\alpha = \cup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$.
  Следователно $\alpha \subseteq x$. Но $ord(\alpha), \neg ord(x)$. Значи $\alpha \subsetneq x$, т.е. $\varphi(\alpha, x)$.

Доказахме, че $\forall \alpha(\alpha \subsetneq x)$.
Но $trans(\alpha)$. Следователно $\forall \alpha(\alpha \subsetneq x \ \& \ trans(\alpha))^*$.
Но от * получаваме, че $\forall \alpha(\alpha \in x)$. Тоест, получихме множество на всички ординали. Абсурд! Противоречието се получи, защото допуснахме, че $\neg ord(x)$. Следователно $ord(x)$.
$\square$

Задача 4 (ZF):

Нека $\varphi(x)$ е теоретико-множествено свойство. Ще казваме, че φ е транзитивно върху ординалите, ако е в сила, че:

$$(\forall \alpha)(\forall \beta)[\alpha \in \beta \ \& \ \varphi(\beta) \Rightarrow \varphi(\alpha)].$$

Докажете, че ако φ е транзитивно върху ординалите, то:
(i) за всеки ординал α, за който $\neg\varphi(\alpha)$, е в сила, че $(\forall \beta)[\varphi(\beta) \Rightarrow \beta < \alpha]$;
(ii) ако не съществува множество A, такова че $(\forall \alpha)[\alpha \in A \iff \varphi(\alpha)]$, то $\forall \alpha(\varphi(\alpha))$.

Решение:

(i) Нека α е ординал и нека $\neg\varphi(\alpha)$.
Нека β е произволен ординал и нека $\varphi(\beta)$.
Твърдя, че $\beta < \alpha$.
Знаем, че $(\forall\alpha)(\forall\beta)[\alpha \in \beta \ \& \ \varphi(\beta) \Rightarrow \varphi(\alpha)]$. Но $\neg\varphi(\alpha)$.
Значи, $\neg(\alpha \in \beta \ \& \ \varphi(\beta)),\ \alpha \notin \beta \vee \neg\varphi(\beta)$. Но $\varphi(\beta)$. Тогава $\alpha \notin \beta \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha \not< \beta$.
Но α и β - ординали. Тогава е в сила точно едно от трите:
$\alpha < \beta,\ \beta < \alpha,\ \alpha = \beta$. Но $\alpha \not< \beta$. Значи или $\beta < \alpha$, или $\alpha = \beta$. Твърдя, че $\beta < \alpha$.
Наистина, да допуснем, че $\alpha = \beta$. Но $\varphi(\beta)$, значи $\varphi(\alpha)$. Но $\neg\varphi(\alpha)$.
Невъзможно!
Следователно, $\beta < \alpha$.

(ii) Ще докажа контрапозицията на твърдението, т.е.
Ако $\exists\alpha(\neg\varphi(\alpha))$, то съществува множество A, такова че $(\forall\alpha)[\alpha \in A \iff \varphi(\alpha)]$.
Нека е изпълнено $\exists\alpha(\neg\varphi(\alpha))$ и нека β е най-малкият ординал, за който $\neg\varphi(\beta)$, т.е. $\forall\gamma(\gamma < \beta \Rightarrow \varphi(\gamma))$ *.

Твърдя, че β е такова множество, че $(\forall\alpha)[\alpha \in \beta \iff \varphi(\alpha)]$.

Наистина, нека първо $\gamma \in \beta$ е произволен ординал. Тогава $\gamma < \beta$ и от * следва, че $\varphi(\gamma)$.
Нека сега γ е произволен ординал, за който $\varphi(\gamma)$. Твърдя, че $\gamma \in \beta$.
Наистина, да допуснем, че $\gamma = \beta$. Но $\neg\varphi(\beta)$, значи $\neg\varphi(\gamma)$. Противоречие.
Да допуснем, че $\beta < \gamma$. Тогава $\beta \in \gamma \ \& \ \varphi(\gamma)$. Но φ е транзитивно, следователно $\varphi(\beta)$. Противоречие.
Следователно $\gamma < \beta$, т.е. $\gamma \in \beta$.

Тогава $(\forall\alpha)[\alpha \in \beta \iff \varphi(\alpha)]$, с което съществуването на търсеното множество е доказано.
$\square$

Задача 5 (ZF):

Нека A е безкрайно множество, т.е. $\forall n(\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{n}})$. Да се докаже, че ако съществува добра наредба $\leq_1$ в A, то съществува добра наредба $\leq_2$ в A, за която добре наредените множества $\langle A, \leq_1\rangle$ и $\langle A, \leq_2\rangle$ не са изоморфни.

Решение:

Доказани теореми и твърдения, които ще използвам в доказателството:

- Нека $\langle W, \leq\rangle$ е д.н.м. Тогава съществуват единствен ординал α и единствен изоморфизъм $f : W \to \alpha$ между д.н.м. $\langle W, \leq\rangle$ и $\langle \alpha, \in\rangle$. *

- $\forall \alpha(\omega \leq \alpha \Rightarrow \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{S(\alpha)}})$. **
- Нека W_1 и W_2 са д.н.м. Тогава е в сила точно едно от трите: ***
  - W_1 е изоморфно на W_2,
  - W_1 е изоморфно на собствен начален сегмент на W_2,
  - W_2 е изоморфно на собствен начален сегмент на W_1.

Нека $\langle A, \leq_1 \rangle$ е д.н.м.
Нека α е единственият ординал и $f : A \to \alpha$ - единственият изоморфизъм, за които $\langle A, \leq_1 \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$. (*)
$\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{S(\alpha)}}$ (**). Следователно, $\exists g(g : \alpha \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S(\alpha))$. Нека g е свидетел, т.е $g : \alpha \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S(\alpha)$.

Твърдя, че $\langle \alpha, \in \rangle \ncong \langle S(\alpha), \in \rangle$.
α е собствен начален сегмент на $S(\alpha)$, защото $\alpha \subsetneq S(\alpha))$ и α е затворено надолу относно $\in$.
Но тогава $\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$ с единствен изоморфизъм идентитетът и значи $\langle \alpha, \in \rangle \ncong \langle S(\alpha), \in \rangle$. (***)

Дефинираме $\leq_2$ по следния начин:
$a \leq_2 b \Longleftrightarrow g(f(a)) \in g(f(b))$.
Твърдя, че $\langle A, \leq_2 \rangle \cong \langle S(\alpha), \in \rangle$, а от там $\langle A, \leq_2 \rangle$ е д.н.м.
Наистина, $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha$, $g : \alpha \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S(\alpha)$, значи $f \circ g : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow S(\alpha)$. Освен това $f \circ g$ запазва наредбата (от деф. на $\leq_2$).
Значи, $\langle A, \leq_2 \rangle \cong \langle S(\alpha), \in \rangle$ с единствен изоморфизъм $f \circ g$. Следователно $\langle A, \leq_2 \rangle$ е д.н.м.

Получихме, че:
$\langle A, \leq_1 \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle$,
$\langle A, \leq_2 \rangle \cong \langle S(\alpha), \in \rangle$,
$\langle \alpha, \in \rangle \ncong \langle S(\alpha), \in \rangle$.

Тогава, $\langle A, \leq_1 \rangle$ и $\langle A, \leq_2 \rangle$ са д.н.м. и $\langle A, \leq_1 \rangle \ncong \langle A, \leq_2 \rangle$.
$\square$

Задача 6 (ZF):

Да се докаже, че в $\langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq \rangle$ има вериги, които са равномощни с $\mathcal{P}(\omega)$.

Решение:

$\overline{\overline{\mathcal{P}(\omega)}} = \overline{\overline{2^\omega}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.
Следователно, свеждаме доказателството до намиране на верига в $\langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq \rangle$, която е равномощна с континуума $\mathbb{R}$.

$\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ е линейно наредено множество.
Разрез (англ. cut) на л.н.м. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ е наредена двойка $\langle A, B \rangle$ от множества, такива че:

- A и B са непразни непресичащи се подмножества на $\mathbb{Q}$, такива че $A \cup B = \mathbb{Q}$.
- Ако $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$.

Разрез $\langle A, B \rangle$ е разрез на Дедекинд (англ. Dedekind cut), ако A няма най-голям елемент.
Заб.: Ще идентифицираме разрез само с първия му елемент A, тъй като $B = \mathbb{Q} \setminus A$.

Ще използвам конструкцията на Дедекинд за представяне на реалните числа (англ. Dedekind cut construction of reals). Тя ни "казва", че всеки разрез на Дедекинд представлява единствено **реално число**.
Нека r_1 и r_2 са реални числа. Тогава дефинираме следната линейна наредба върху реалните числа:
$r_1 \leq r_2 \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} r_1 \subseteq r_2$.

Получихме, че $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $r \in \mathbb{R}, f(r) = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\} \subsetneq \mathbb{Q}$ и f запазва наредбата.
Но $\exists h (h : \mathbb{Q} \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow \omega)$, откъдето следва, че $\langle \mathcal{P}(\mathbb{Q}), \subseteq \rangle \cong \langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq \rangle$. Нека t е изоморфизмът между тях.
Получаваме, че $f \circ t : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathcal{P}(\omega)$ и $f \circ t$ запазва наредбата.

Нека $g : \mathbb{R} \to f \circ t[\mathbb{R}]$, $r \in \mathbb{R}, g(r) = f(r)$. Твърдя, че $g : \mathbb{R} \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow f \circ t[\mathbb{R}]$.
Наистина, нека $g(r_1) = g(r_2)$ за някои $r_1 \in \mathbb{R}, r_2 \in \mathbb{R}$.
$g(r_1) \in f \circ t[\mathbb{R}], g(r_2) \in f \circ t[\mathbb{R}]$. Но $f \circ t$ е инекция, следователно $r_1 = r_2$.
Значи $g : \mathbb{R} \rightarrowtail f \circ t[\mathbb{R}]$.
Нека $a \in Range(g)$. Тогава $a \in f \circ t[\mathbb{R}]$. Значи има $r \in \mathbb{R}$, такова че $f \circ t(r) = a$.
Значи $g : \mathbb{R} \twoheadrightarrow f \circ t[\mathbb{R}]$.

Следователно, $g : \mathbb{R} \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow f \circ t[\mathbb{R}]$.
Но също така, g запазва наредбата (от дефиницията ѝ).
Тогава, $\langle \mathbb{R}, < \rangle \cong \langle f \circ t[\mathbb{R}], \subseteq \rangle$ с единствен изоморфизъм g.
Но тогава $f \circ t[\mathbb{R}]$ е линейно наредено и $f \circ t[\mathbb{R}] \subsetneq \mathcal{P}(\omega)$
С това доказахме, че $f \circ t[\mathbb{R}]$ е верига в $\langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq \rangle$.

$g : \mathbb{R} \rightarrowtail\!\!\!\rightarrow f \circ t[\mathbb{R}]$.
Следователно, $\overline{\overline{\mathcal{P}(\omega)}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{f \circ t[\mathbb{R}]}}$.
$\square$

Задача 7 (ZF):

Да се докаже, че за произволно множество A са в сила следните:

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}}$;
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$.

Решение:

Ако $A = \emptyset$ или $Fin(A)$, то предпоставките на импликациите са лъжа, следователно твърденията са тривиално верни. Нека $A \neq \emptyset$ и $\neg Fin(A)$.

1. Нека $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \cup \{A\}$.
   $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A \cup \{A\}$ и $A \in Range(f)$. Тогава $\exists! a_0 \in Dom(f) = A$, т.че $f(a_0) = A$. Нека a_0 е свидетел, т.е. $a_0 \in A, f(a_0) = A$.

   Нека $C = \{\{c\} \mid c \in A\}$. $C \subseteq \mathcal{P}(A)$, защото $(\forall a \in A)(\{a\} \subseteq A)$, т.е. $(\forall a \in A)(\{a\} \in \mathcal{P}(A))$.

   Нека $id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}$ е идентитетът на множеството $\mathcal{P}(A) \setminus C$.

   Дефинираме функцията g по следния начин:
   $g(\{x\}) = \begin{cases} \mathcal{P}(A), & x = a_0, \\ \{f(x)\}, & x \neq a_0 \ \& \ x \in A. \end{cases}$
   $g : C \to C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.
   Наистина, $\{x\} \in Dom(g) \iff x \in A$. Но от дефиницията на C следва, че $\{x\} \in C$.
   Тогава $Dom(g) = C$.

   Ако $x = a_0$, то $g(\{x\}) = \mathcal{P}(A) \in C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.
   Ако $x \neq a_0$ и $x \in A$, то $g(\{x\}) = \{f(x)\}$. Но $f(x) \in A$, следователно $\{f(x)\} \in C \subseteq C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.
   Тогава $Range(g) = C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.

   Твърдя, че $g : C \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.
   Наистина, нека $g(\{x\}), g(\{y\}) \in Range(g)$ и нека $g(\{x\}) = g(\{y\})$.

   - Ако $g(\{x\}) = g(\{y\}) = \mathcal{P}(A)$, то $x = y = a_0$. Но a_0 беше единствено. Следователно $x = y$.
   - Ако $\{f(x)\} = g(\{x\}) = g(\{y\}) = \{f(y)\}$, то $\{f(x)\} = \{f(y)\}$ за $x, y \in A$. Но $\{f(x)\} = \{f(y)\} \iff f(x) = f(y)$. Но f е инекция, следователно $x = y$.

   Следователно, $g : C \rightarrowtail C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.

   Нека $y \in Range(g)$. Тогава:

   - $y = \mathcal{P}(A)$. Тогава $g(\{a_0\}) = y = \mathcal{P}(A)$.

- $y = \{f(x)\}$. $Dom(f) = A$. Значи $x \in A, x \neq a_0$, защото ако допуснем, че $x = a_0$, то $y = \{f(a_0)\} = \{A\}$. Но $y \in Range(g) \Rightarrow \{A\} \in Range(g)$. Тогава $\{A\} \in C$ и от дефиницията на C, $A \in A$.
  Противоречие.
  Тогава $x \in A, x \neq a_0$ и значи $g(\{x\}) = y$.

Следователно, $g : C \twoheadrightarrow C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$ и значи
$g : C \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.

Дефинираме функцията h по следния начин: $h = g \cup id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}$.
Очевидно функциите g и $id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}$ са съвместими, тъй като
$Dom(g) = C,\ Dom(id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}) = \mathcal{P}(A) \setminus C$.
Тогава $Func(h)$,
$Dom(h) = Dom(g) \cup Dom(id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}) = C \cup \mathcal{P}(A) \setminus C = \mathcal{P}(A)$,
$Range(h) = Range(g) \cup Range(id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}) = C \cup \{\mathcal{P}(A)\} \cup \mathcal{P}(A) \setminus C = \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.
Следователно, $h : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.

Твърдя, че $h : \mathcal{P}(A) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$.
$h = g \cup id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}$,
$Dom(g) \cap Dom(id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}) = \emptyset$,
$Range(g) \cap Range(id_{\mathcal{P}(A) \setminus C}) = \emptyset$.
Но обединение на биективни функции, чиито дефиниционни области и области от стойности са непресичащи се, е биективна функция.

Тогава $h : \mathcal{P}(A) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$, откъдето $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}}$.

2. Ще разгледам поотделно двете страни:

   - $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A)}2}}$, защото $\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} = \overline{\overline{{}^{X}2}}$,
     $\overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A)}2}} = \overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}2}}$, от 1),
     $\overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}2}} = \overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A)}2 \times {}^{\{\mathcal{P}(A)\}}2}}$, защото ако $B \cap C = \emptyset$, то $\overline{\overline{{}^{B \cup C}2}} = \overline{\overline{{}^{B}2 \times {}^{C}2}}$.
   - $\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A)}2 \times {}^{\mathcal{P}(A)}2}}$, защото $\overline{\overline{\mathcal{P}(X)}} = \overline{\overline{{}^{X}2}}$.

   Трябва да покажем, че $\overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A)}2 \times {}^{\{\mathcal{P}(A)\}}2}} = \overline{\overline{{}^{\mathcal{P}(A)}2 \times {}^{\mathcal{P}(A)}2}}$.

$\square$

Задача 8 (ZFC):

Нека $X \subseteq \mathbb{R}$ е добре наредено от обичайната наредба в $\mathbb{R}$. Докажете, че X е или крайно, или изброимо.

Решение:

Твърдим, че ако X е безкрайно, то X е изброимо.
Нека $\neg Fin(X)$.
Нека $\langle \mathbb{Q}_k \mid k \in \omega \rangle$ е индексиране на рационалните числа.

Нека x е произволен елемент на множеството X.
Нека $S(x)$ е най-малкият елемент на множеството $C = \{y \mid x < y\}$. Такъв елемент със сигурност съществува, тъй като $WO(X)$, $C \subseteq X$, следователно C има най-малък елемент.
Ако X има най-голям елемент, нека го означим със z и нека $S(z) = z + 1$.

$x \neq S(x)$. Рационалните числа са гъсти в множеството на реалните. Следователно $\exists q_x(x < q_x < S(x))$. Нека q_x е първото рационално число от зададената индексация на $\mathbb{Q}$, такова че $x < q_x < S(x)$.

Нека $f : X \to \mathbb{Q}$, $f(x) = q_x$ е функцията, която на всеки елемент от множеството X ни съпоставя рационално число по описания по- горе начин.
Твърдя, че $f : X \rightarrowtail \mathbb{Q}$.
Наистина, нека за някои $x, y \in X, x \leq y$,
$f(x) = q_x \in \mathbb{Q}, f(y) = q_y \in \mathbb{Q}$ и $q_x = q_y$.
От избора на q_x имаме, че $x < q_x = q_y < S(x)$.
От избора на q_y имаме, че $x \leq y < q_x = q_y < S(x)$.
Но $S(x)$ е най-малкият елемент на множеството X, такъв че $x < S(x)$. Следователно $y \leq x$. Тогава $x = y$.

Доказахме, че $f : X \rightarrowtail \mathbb{Q}$, а от това следва, че множеството X е изброимо.
$\square$

Задача 9:

Нека $\Lambda \neq \emptyset$ и $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е Λ-индексирана фамилия от множества.

Нека f е биекция на Λ върху Λ и Λ-индексираната фамилия от множества $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е дефинирана така: $B_\lambda = A_{f(\lambda)}$ за всяко $\lambda \in \Lambda$.
Да се докаже, че:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \text{ и } \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

(Комутативен закон за безкрайните обединения и безкрайните сечения)

Решение:

$x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff$
$x \in \bigcup Range(A) \iff$

$\exists\lambda(\lambda \in \Lambda \ \& \ x \in A(\lambda)) \Longleftrightarrow$
$\exists\lambda(\lambda \in \Lambda \ \& \ \exists\lambda_1(\lambda_1 \in \Lambda \ \& \ \lambda = f(\lambda_1) \ \& \ x \in A(\lambda))) \Longleftrightarrow$
$\exists\lambda\exists\lambda_1(\lambda \in \Lambda \ \& \ \lambda_1 \in \Lambda \ \& \ \lambda = f(\lambda_1) \ \& \ x \in A(\lambda)) \Longleftrightarrow$
$\exists\lambda_1(\exists\lambda(\lambda \in \Lambda \ \& \ \lambda = f(\lambda_1)) \ \& \ \lambda_1 \in \Lambda \ \& \ x \in A(f(\lambda_1))) \Longleftrightarrow$
$\exists\lambda_1(\lambda_1 \in \Lambda \ \& \ x \in A(f(\lambda_1))) \Longleftrightarrow$
$\exists\lambda_1(\lambda_1 \in \Lambda \ \& \ x \in B(\lambda_1)) \Longleftrightarrow$
$x \in \bigcup\limits_{\lambda_1 \in \Lambda} B_{\lambda_1} \Longleftrightarrow$
$x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} B_{\lambda}.$
$\square$

Задача 10 (ZFC):

Нека $\langle A, \leq_A \rangle$ е добре наредено множество. В множеството ${}^A\alpha$ на всички функции от A към α дефинираме бинарната релация $\prec$ така:

$$f \prec g \ \longleftrightarrow \ (\exists a \in A)((\forall b \in A)(b <_A a \Rightarrow f(b) = g(b)) \ \& \ f(a) < g(a)).$$

Проверете дали $\langle {}^A\alpha, \preceq \rangle$ е добре наредено множество.

Решение:

Множеството $\langle {}^A\alpha, \preceq \rangle$ НЕ е добре наредено.
Ще покажа, че съществува $\emptyset \neq B \subseteq^A \alpha$, което няма минимален елемент относно релацията $\prec$.

Нека $A = \alpha = \omega$.

Дефинираме функцията $f_n : \omega \to \{0, 1\}$ по следния начин:
$f_n(k) = \begin{cases} 0 & k < n \\ 1 & k \geq n \end{cases}$

$f_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, .., \langle m, 1\rangle, ..\}$
$f_2 = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, .., \langle m, 1\rangle, ..\}$
$f_3 = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 3, 1\rangle, .., \langle m, 1\rangle, ..\}$
...
$f_m = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 3, 0\rangle, .., \langle m-1, 0\rangle, \langle m, 1\rangle, ..\}$
...

Множеството $B = \{f_n \mid n < \omega\}$ е непразно подмножество на ${}^\omega\omega$, тъй като за произволно $f_k \in B$, $Dom(f_k) = \omega \subseteq \omega$, $Range(f_k) = \{0, 1\} \subseteq \omega$, следователно $f_k \in^\omega \omega$.

Твърдя, че множеството B няма минимален елемент.

Да разгледаме функциите $f_1 \in B$ и $f_2 \in B$.

$f_2 \prec f_1 \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} (\exists a \in \omega)((\forall b \in \omega)(b < a \Rightarrow f_2(b) = f_1(b))\ \&\ f_2(a) < f_1(a))$.

Нека $a = 1$.
Тогава, наистина $((\forall b \in \omega)(b < 1 \Rightarrow f_2(b) = f_1(b))\ \&\ f_2(1) < f_1(1))$.
Следователно $f_2 \prec f_1$.
Аналогично, за:
$a = 2,\ f_3 \prec f_2 \prec f_1,$
...
$a = k,\ f_{k+1} \prec f_k \prec f_{k-1} \prec ... \prec f_3 \prec f_2 \prec f_1$.

Но $\neg Fin(\omega)$. Следователно, редицата $f_1, f_2, f_3, .., f_k, ..$, такава че $f_1 \succ f_2 \succ f_3 \succ ... \succ f_k \succ ...$, е безкрайна.

Но в добре наредено множество не съществуват такива безкрайни редици.
Следователно, $\langle {}^A\alpha, \preceq \rangle$ не е добре наредено.
$\square$