Тема 3 - "Индукция"

Предикат $P(n)$

Искаме да док., че $\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$.

① Док. $P(0)$

② Показваме, че ако $P(n)$, то $P(n+1)$ за произв. $n \in \mathbb{N}$

Зад. 1: $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

$P(k) = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$

$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$

Док. с индукция:

① **База:** $P(0)$

$$\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 \overset{\checkmark}{=} 2^{0+1} - 1$$

② **Инд. предп.:** Доп. $P(k) \equiv T$ за някое $k \in \mathbb{N}$, т.е. $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

③ **Инд. стъпка:** Ще док., че $P(k+1)$ е изпълнено

$P(k+1) \Leftrightarrow 2^0+2^1+\ldots+2^{k+1}=2^{k+2}-1$

$\underbrace{2^0+2^1+\ldots+2^k}_{\text{от ИП} \; 2^{k+1}-1}+2^{k+1}=2^{k+1}-1+2^{k+1}=$

$=2 \cdot 2^{k+1}-1=2^{k+1+1}-1=2^{k+2}-1.$

$\Rightarrow P(k+1) \checkmark$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; P(n). \; \square$

Зад. 2: Док., че всяка сума от k лева ($k \geq 12$) може да се получи само от банкноти с номинал 4лв. и 5лв.

$P(k) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} \; \exists b \in \mathbb{N}: 5a+4b=k.$

$\forall n \in \mathbb{N} \; P(n).$

Док. с индукция:

① **База:** $k=12$ (НЕ 0)!

$P(12) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{N} \; \exists b \in \mathbb{N}: 5a+4b=12$

$\left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=3 \end{array}\right\} 5.0+4.3=12 \checkmark$

② **Инд. предп:** Доп., че $P(k) \equiv T$ за някое $k \in \mathbb{N}$,

т.е. $\exists a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N}: 5a + 4b = k$

③ **Инд. стъпка:** Ще док., че $P(k+1)$ е изпълнено.

$P(k+1) \iff \exists a \in \mathbb{N}\ \exists b \in \mathbb{N}: \quad 5a + 4b = k+1$

От ИП $5a + 4b = k$

1сл.) Нека $b \geq 1$. $\quad + \boxed{5}$

Нека $a' = a + 1$, $a' \in \mathbb{N}$ $\quad - \boxed{4}$

$b' = b - 1$, $b' \in \mathbb{N}$ $(b \geq 1)$

$$5a' + 4b' = 5(a+1) + 4(b-1) =$$
$$= 5a + 5 + 4b - 4 =$$
$$= \underbrace{5a + 4b}_{\substack{\text{от ИП} \\ k}} + 1 =$$
$$= k + 1$$
$$\Rightarrow P(k+1) \checkmark$$

2сл.) Нека $b = 0$ $\quad - \boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{5}$

Тогава $a \geq 3$ $(k \geq 12)$ $+ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}\ \boxed{4}$

Нека $a' = a - 3$, $a' \in \mathbb{N}$ $(a \geq 3)$

$b' = b + 4$

$$5a' + 4b' = 5(a-3) + 4(b+4) =$$
$$= 5a - 15 + 4b + 16 =$$
$$= \underbrace{5a + 4b}_{\text{от ИП}} + 1 =$$
$$k$$
$$= k + 1$$
$$\Rightarrow P(k+1).$$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ P(n).$ $\square$

Зад. 3: Док., че $\forall k \geq 3$ числото 30 може да се представи като израз само с k 5-ици и $+, -, *, /, ($ $)$

Примери:

$k=6$: $5+5+5+5+5+5$

$k=12$: $5*5+5/5+5/5+5/5+5/5+5/5$

$P(k) \Leftrightarrow$ 30 може да се представи с k 5-ици

$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$

Док. с индукция:

① База: $k=3$:

$30 = 5*5+5$ ✓

$$\underbrace{\underbrace{\alpha}_{30} + 5 - 5}_{30}$$

$P(k) \Rightarrow P(k+2)$!

$k=4: 30 = (5+5/5)*5$

Инд.предп: Доп. $P(k) \equiv T$ за някое $k \in \mathbb{N}$, т.е. 30 може да се представи с k 5-ици

Инд.стъпка: Ще док., че $P(k+2)$ е изпълнено.
От ИП знаем, че $\alpha = 30$, където α е израз, съдържащ k 5-ици и някои от операциите $+, -, *, /, (,)$.
Тогава $\alpha + 5 - 5 = 30$ съдържа точно $k+2$ 5-ици.
$\Rightarrow P(k+2) \equiv T$

база2

$1, 2, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}, \boxed{6}, \boxed{7}, \boxed{8}, \boxed{9}, \boxed{10}, \ldots$

база1

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ P(n). \ \square$

Зад. 4:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \\ a_2 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} + 9a_{n-3} \end{cases}$$

Док., че $\forall n \in \mathbb{N} \, (a_n = 3^n)$

Док. с индукция:

① База: $a_0 = 1 = 3^0$ ✓

$a_1 = 3 = 3^1$ ✓

$a_2 = 9 = 3^2$ ✓

$0, 1, 2, 3, 4, 5$

база

② Инд. предп.

Доп., че за някое $k \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$ са в сила:

$$\begin{cases} a_{k-3} = 3^{k-3} \\ a_{k-2} = 3^{k-2} \\ a_{k-1} = 3^{k-1} \end{cases}$$

③ <u>Инд. стъпка:</u> Ще док., че $a_k = 3^k$

$$a_k = \underbrace{a_{k-1}}_{3^{k-1}} + 3\underbrace{a_{k-2}}_{3^{k-2}} + 9\underbrace{a_{k-3}}_{3^{k-3}} \overset{ИП}{=}$$

$= 3^{k-1} + 3.3^{k-2} + 9.3^{k-3} =$

$= 3^{k-1} + 3^{k-1} + 3^{k-1} =$

$= 3.3^{k-1} =$

$= 3^k$

$\square$

Домашно

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \end{cases}$$

Док., че $\forall n \in \mathbb{N} (a_n = 2^n)$

Мат. индукция:

екв. $\equiv$ $\mathbb{P}(0)$

$\mathbb{P}(k) \Rightarrow \mathbb{P}(k+1)$ за някое k.

Силна индукция

$\mathbb{P}(0)$

$\mathbb{P}(0) \wedge \mathbb{P}(1) \wedge \mathbb{P}(2) \wedge \dots \wedge \mathbb{P}(k-1) \wedge \mathbb{P}(k) \Rightarrow \mathbb{P}(k+1)$

Зад.5: Док., че $\forall k \geq 2$ числото може да се разбие на прости множители.

$P(k) \iff k$ може да се разбие на прости множители.

$\forall n \in N \; P(n)$

Док. с индукция:

① База: $P(2) \iff 2$ може да се представи като произв. на прости мн-ли изпълнено ✓

② Инд. предп: Доп., че $P(0) \wedge P(1) \wedge \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \equiv T$ за някое $k \in N$.

③ Инд. стъпка: Ще док., че $P(k+1)$ е изпълнено

1) сл. $k+1$ е просто. Тогава $P(k+1) \equiv T$ ✓

2 сл.) $k+1$ не е просто. Тогава $\exists a, b \in N$:

$a \geq 2, b \geq 2 \wedge a.b = k+1$

$\underbrace{a < k+1, b < k+1}$

Тогава $a \leq k \wedge b \leq k$ и от ИП a и b могат да се представят като произв. на прости мн-ли:

$a = p_1 p_2 \dots p_s$
$b = q_1 q_2 \dots q_r$ } от ИП

След. $k+1 = ab = p_1 p_2 \dots p_s q_1 q_2 \dots q_r$
Значи $k+1$ може да се разбие на прости мн-ли.
$\Rightarrow P(k+1)$
$\Rightarrow \forall n \in P(n)$ $\square$

Зад. 6: Док., че $\forall n \in \mathbb{N}^+$ сумата на първите n нечетни числа е точен квадрат.

Док. с индукция:

① База: $n=1$, $1=1^2$ ✓

② Инд. предп: Нека за някое k е изп:
$1+3+\dots+2k-1 = s^2$

③ Инд. стъпка: Ще док., че твърдението е изпълнено за $k+1$, т.е.

$$\underbrace{1+3+\dots+2k-1}_{\text{от ИП} \; s^2} + 2k+1 =$$

$= s^2 + 2k + 1 = ??$
$\Rightarrow$ НЕ става.

Засилване на инд. предположение

$\forall x\, P(x)$

$P(0)$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Доказваме:

$\forall x\, Q(x)$

$Q(0)$

$Q(k) \Rightarrow Q(k+1)$

$\boxed{Q(k) \Rightarrow P(k)}$

Ще док., че сумата на първите n нечетни числа е n^2.

① **База:** $n=1,\ 1=1^2$ ✓

② **Инд. предп.:** Нека за някое k е изпълнено:

$1+3+\dots+2k+1=k^2$

③ **Инд. стъпка:** $k+1$:

$$\underbrace{1+3+\dots+2k-1}_{\text{от ИП}\ k^2}+2k+1=$$

$$=k^2+2k+1=(k+1)^2 \checkmark$$

$\Rightarrow P(k+1)$

$\Rightarrow \forall n\in N\ P(k)$ □

Домашно:

ДОД, че $\forall n \in N^+$:

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{n^2}<2$