Задачи по Логическо Програмиране

13.11.2021

Задача 1:

Нека c е индивидна константа.

$\varphi_1 := \forall x(p(x,x)\&r(x,x))$,

$\varphi_2 := \forall x\forall y((p(x,y) \Rightarrow p(y,x))\&(r(x,y) \Rightarrow r(y,x)))$,

$\varphi_3 := \forall x\forall y\forall z((p(x,y)\&p(y,z) \Rightarrow p(x,z))\&(r(x,y)\&r(y,z) \Rightarrow r(x,z)))$,

$\varphi_4 := \forall x((r(x,c) \Rightarrow x = c)\&\exists y(p(x,y)\&\neg r(x,y)))$,

$\varphi_5 := \forall x(\neg(x = c) \Rightarrow \exists y(r(x,y)\&\neg p(x,y)))$,

$\varphi_6 := \forall x\forall y\forall z(p(x,y)\&p(y,z) \Rightarrow r(x,y) \vee r(x,z) \vee r(y,z))$.

Да се докаже, че множеството $\Gamma_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ е изпълнимо.

Решение:

Ще се отървем от квантора за съществуване, като *скуленизираме* φ_4:
$\varphi_4' \rightsquigarrow \forall x((r(x,c) \Rightarrow x = c)\&(p(x,d)\&\neg r(x,d)))$

1. Ще докажем, че $\mathbf{\Gamma_1} = \{\boldsymbol{\varphi_1}, \boldsymbol{\varphi_2}, \boldsymbol{\varphi_3}, \boldsymbol{\varphi_4}\}$ е изпълнимо.

Γ_1 е изпълнимо, ако съществува структура M, такава че за всяко $\varphi \in \Gamma_1$ е вярно $M \models \varphi$.

За решение използваме насочения граф $\langle V, E\rangle$, където $V = \{a, b\}$ и $E = \{\langle a, b\rangle,\ \langle b, a\rangle,\ \langle a, a\rangle,\ \langle b, b\rangle\}$.

Решението е структурата $\mathbf{M} = (\mathbf{V}, \mathbf{p}, \mathbf{r})$, където:

$\mathbf{p^M}(\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\mu_2}) \longleftrightarrow \langle \mu_1, \mu_2 \rangle \in \{\langle a, b\rangle,\ \langle b, a\rangle,\ \langle a, a\rangle,\ \langle b, b\rangle\}$
$\mathbf{r^M}(\boldsymbol{\mu_1}, \boldsymbol{\mu_2}) \longleftrightarrow \langle \mu_1, \mu_2 \rangle \in \{\langle a, a\rangle,\ \langle b, b\rangle\}$
$\mathbf{c^M} = a$
$\mathbf{d^M} = a$

Задача 2:

Нека S е множеството от всички безкрайни редици от естествени числа. Ако $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in S$, то с α_n ще означаваме n-тия член на редицата α. Нека $\mathcal{L}$ е предикатният език без формално равенство и с един триместен предикатен символ p. Да означим с $\mathcal{A}$ структурата за $\mathcal{L}$, която е с универсум (носител) множеството $\mathbb{N} \cup S$ и за произволни $\alpha, \beta, l \in \mathbb{N} \cup S$
$\langle \alpha, \beta, l \rangle \in p^{\mathcal{A}} \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \alpha, \beta \in S,\ l \in \mathbb{N}$ и за всяко $n \in \mathbb{N}$ $\beta_{ln} = \alpha_n$.
а) Да се докаже, че следните множества са определими в $\mathcal{A}$ с формула от $\mathcal{L}$:

1. $S, \{1\}, \{0\}$,
2. $\{\alpha \mid \alpha \in S$ и всички членове на α са равни $\}$,
3. $\{\langle a, b, c\rangle \mid a, b, c \in \mathbb{N}$ и $c = ab\}$.

б) Да се докаже, че множеството $\{3\}$ не е определимо в $\mathcal{A}$ с формула от $\mathcal{L}$.

Решение:

а)
$\varphi_{\mathbb{N}}[x] = \exists y \exists z (p(y, z, x))$ **определя** $\mathbb{N}$,

$\varphi_S[x] = \neg \varphi_{\mathbb{N}}[x]$ **определя** S,

$\varphi_{eq}[x] = \varphi_S[x] \& \forall y(\varphi_{\mathbb{N}}[y] \Rightarrow p(x, x, y))$
определя $\{\alpha \mid \alpha \in S$ **и всички членове на** α **са равни** $\}$,

$\varphi_0[x] = \varphi_{\mathbb{N}}[x] \& \forall y(\varphi_S[y] \& \neg\varphi_{eq}[y] \Rightarrow \neg p(y, y, x))$
определя $\{0\}$,

$\varphi_1[x] = \varphi_{\mathbb{N}}[x] \& \forall y(\varphi_S[y] \Rightarrow p(y, y, x))$ **определя** $\{1\}$,

$\varphi_{\langle a,b,c\rangle}[x, y, z] = \varphi_{\mathbb{N}}[x] \& \varphi_{\mathbb{N}}[y] \& \varphi_{\mathbb{N}}[z] \& \forall u \forall v(p(u, v, x) \& p(u, v, y) \Leftrightarrow p(u, v, z))$
определя $\{\langle a, b, c\rangle \mid a, b, c \in \mathbb{N}$ **и** $c = ab\}$.