Distribuciones Estadísticas

Mario Calvarro Marines

Índice general

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

DEGENERADA

Distribución que vale 1 en un solo punto h.

$$\boxed{Deg\left(h\right)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X\left(x\right) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = h$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

BERNOULLI

Distribución que mide la probabilidad de que un experimento acabe en "éxito", con posibilidad p, o "fracaso".

$$\boxed{Be\left(p\right)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X\left(x\right) = p^x\left(1-p\right)^{1-x},\ x \in \{0,1\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = p$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = p$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = p\left(1-p\right)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \left(1-p\right) + p \cdot \exp\left\{it\right\}$$

BINOMIAL

Distribución que mide la probabilidad de que x experimentos, con posibilidad p, en n intentos, sean "éxitos".

$$\boxed{B\left(n, p\right)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X\left(x\right) = \binom{n}{x} p^x \left(1-p\right)^{n-x},\ x \in \{0, \ldots, n\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \sum_{i=1}^{x} \binom{n}{i} p^i \left(1-p\right)^{n-i}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = np$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = np\left(1-p\right)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \left(\left(1-p\right) + p\exp\left\{it\right\}\right)^n$$

GEOMÉTRICA

Distribución que mide la probabilidad de que en x experimentos, con posibilidad p, haya algún "éxito".

$$\boxed{G\left(p\right)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X\left(x\right) = p\left(1-p\right)^{x-1},\ x \in \mathbb{N}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1-\left(1-p\right), & x \geq 1 \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = \frac{1}{p}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = \frac{1-p}{p^2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \frac{pe^{it}}{1-\left(1-p\right)e^{it}}$$

POISSON

Distribución que mide la probabilidad de que ocurran x eventos, que tienen un “ratio” λ, en un determinado intervalo de tiempo.

$$\boxed{P(\lambda)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \ x \in \mathbb{N}_0$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \exp\{-\lambda\} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Poco importante.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right\}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim P(\lambda_i)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- Si tenemos una binomial, con un número de “éxitos” esperados que se mantiene más o menos constante, y hacemos tender n, número de casos, a infinito, tenemos como resultado una Poisson con $\lambda = np$.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

UNIFORME

Distribución que mide la probabilidad de un suceso que está en un punto de un intervalo de forma arbitraria con las mismas posibilidades.

$$\boxed{U\left(a,b\right)}$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X\left(x\right)=\frac{1}{b-a}I_{(a,b)}\left(x\right)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x\leq b\\ 1, & b<x\end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right]=\frac{1}{2}\left(b+a\right)$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right]=\frac{1}{12}\left(b-a\right)^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

CAUCHY

Parámetros: θ localización y σ escala?

$$\boxed{C(\theta, \sigma)}$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma\left[1 + \left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right]}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \text{Indefinido.}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \text{Indefinido.}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{\theta i t - \sigma|t|\}$$

GAMMA

Distribución que mide la probabilidad de que en un tiempo a ocurran p eventos. (Puede que el tiempo sea $\frac{1}{a}$)

$$\boxed{\gamma\left(p, a\right)}$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X\left(x\right) = \frac{a^p}{\Gamma\left(p\right)} x^{p-1} e^{-ax} \cdot I_{(0,+\infty)}\left(x\right)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(p\right)} \gamma\left(p, ax\right)$$

(Poco importante)

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = \frac{p}{a}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = \frac{p}{a^2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim \gamma\left(p_i, a\right)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} p_i, a\right)$$

- Si $X \sim \gamma(p, a) \Rightarrow$
$$cX \sim \gamma\left(p, \frac{a}{c}\right), \; c \in \mathbb{R}$$
- $\gamma(1, a) \equiv \exp(a)$
- Tenemos que si $a > 0$:
$$\int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1} e^{-at} \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

EXPONENCIAL

Distribución que mide la probabilidad que una cantidad x de tiempo haya pasado entre dos eventos de una distribución Poisson λ.

$$\boxed{\exp\left(\lambda\right)}$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X\left(x\right) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}\left(x\right)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}\left(x\right)$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = \lambda^{-1}$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = \lambda^{-2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Otras características de interés

- $\exp\left(a\right) \equiv \gamma\left(1, a\right)$
- Si tenemos $X_i \sim \exp\left(\lambda\right)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma\left(n, \lambda\right)$$

BETA

Distribución que abreviamos como:

$$\boxed{\beta\left(\alpha,\beta\right)}$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X\left(x\right)=\frac{x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}}{B\left(\alpha,\beta\right)}\cdot I_{(0,1)}\left(x\right)$$

donde $B\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right)=I_x\left(\alpha,\beta\right)$$

que es la *regularización incompleta de la función beta*.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right]=\frac{\alpha\beta}{\left(\alpha+\beta\right)^2\left(\alpha+\beta+1\right)}$$

Otras características de interés

- La definición de la función beta es:

$$B\left(x,y\right)=\int_0^1 t^{x-1}\left(1-t\right)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

NORMAL

Distribución de media μ y desviación típica σ:

$$\boxed{N(\mu, \sigma)}$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \mu$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \sigma^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

Otras características de interés

- Es simétrica respecto de $x = \mu$.
- Si tenemos $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $Y = aX + b \Rightarrow$

$$Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$$

- Si tenemos $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

- Tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2V}\theta^2 + \frac{E}{V}\theta\right\} = \sqrt{2\pi}\sqrt{V} \exp\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{E^2}{V}\right\}$$

DISTRIBUCIONES NORMALES

CHI CUADRADO

Sean $X_i \sim N(0,1)$ con $i \in \{1,\ldots,n\}$ definimos entonces:

$$\chi_n^2 \sim \sum_{i=1}^{n} X_i$$

como distribución **chi cuadrado de Pearson** con n grados de libertad.

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} x^{\frac{n}{2}-1},\ x > 0$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = n$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 2n$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = (1-2it)^{-n/2}$$

Teorema de Fisher-Cochran

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ y tomemos una m. a. s. (n) de esta variable. Entonces:

1. b_2 y $\overline{X}$ son independientes.
2. Sabemos que:
$$\boxed{\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$
3. Tenemos que: $\frac{nb_2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ ó,
$$\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $Y_1 \sim \chi^2_{n_1}$ y $Y_2 \sim \chi^2_{n_2}$. Entonces:
$$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}$$
- Si tenemos $X \sim \chi^2_n$. Entonces:
$$X \sim \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
- Si tenemos $X \sim \chi^2_n$ y tomamos una m. a. s. (k). Entonces:
$$\overline{X} \sim \gamma\left(nk, \frac{k}{2}\right)$$

T-STUDENT

Sean $Z \sim N(0,1)$ e $Y \sim \chi^2_n$ definimos entonces:

$$\boxed{t_{n-1} \sim \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}}$$

como distribución **t-Student** con n grados de libertad.

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = 0$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{n}{n-2}$$

Teorema de Student

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ y tomamos una m. a. s. (n) de la variable aleatoria. Entonces:

$$\boxed{\sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}}$$

o lo que es lo mismo: $\sqrt{n-1}\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{b_2}} \sim t_{n-1}$.

F-SNEDECOR

Sean $Y_n \sim \chi_n^2$ y $Y_m \sim \chi_m^2$ definimos entonces:

$$\boxed{F_{n,m} \sim \frac{Y_n/n}{Y_m/m}}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[F\right] = \frac{m}{m-2}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = \frac{2m\left(n+m-2\right)}{n\left(m-2\right)^2\left(m-4\right)}$$

Teorema de Snedecor

Sean $X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1\right)$ y $Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2\right)$ y tomamos m. a. s. (n) y m. a. s. (m) de cada una, respectivamente. Entonces:

$$\boxed{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{S_2^2} \sim F_{n-1,m-1}}$$

Otras características de interés

- Sea $F \sim F_{n,m}$, entonces:

$$1/F \sim F_{m,n}$$

- Tenemos que: $t_n \equiv F_{1,n}$.