Distribuciones Estadísticas

Mario Calvarro Marines

Índice general

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

DEGENERADA

Distribución que vale 1 en un solo punto h.

$$\boxed{Deg\left(h\right)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X\left(x\right) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = h$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

BERNOULLI

Distribución que mide la probabilidad de que un experimento acabe en “éxito” ó “fracaso”.

$$\boxed{Ber\left(p\right)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X\left(x\right) = p^x\left(1-p\right)^{1-x},\ x \in \{0,1\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \geq x \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = p$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = p$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = p\left(1-p\right)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \left(1-p\right) + p \cdot \exp\left\{it\right\}$$

BINOMIAL

Distribución que mide la probabilidad de que x experimentos, con probabilidad p, en n intentos sean "éxitos".

$$\boxed{B\left(n,p\right)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X\left(x\right) = \binom{n}{x} p^x \left(1-p\right)^{n-x}\ ,\ x \in \{0,\dots,n\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \sum_{i=1}^{x} \binom{n}{i} p^i \left(1-p\right)^{n-i}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = np$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = np\left(1-p\right)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \left(\left(1-p\right) + p\exp\left\{it\right\}\right)^n$$

POISSON

Distribución que mide la probabilidad de que ocurran x eventos, que tienen una “velocidad” λ, en un determinado intervalo de tiempo.

$$\boxed{P(\lambda)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x \exp\{-\lambda\}}{x!}, \ x \in \mathbb{N}_0$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \exp\{-\lambda\} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Poco importante.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\left\{\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right\}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim P(\lambda_i)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda\right)$$

- Si tenemos una binomial, con número de “éxitos” esperados se mantiene más o menos constante, y hacemos tender n, número de casos, a infinito, tenemos como resultado una Poisson con $\lambda = np$.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

UNIFORME

Distribución que mide la probabilidad de un suceso que puede estar de forma arbitraria en un intervalo con las mismas posibilidades.

$$\boxed{U(a,b)}$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{1}{2}b + a$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

GAMMA

Distribución que mide la probabilidad de que en un tiempo a ocurran p eventos. (Puede que el tiempo sea $\frac{1}{a}$)

$$\boxed{\gamma\left(p, a\right)}$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X\left(x\right) = \frac{a^p}{\Gamma\left(p\right)} x^{p-1} e^{-ax}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right) = \frac{1}{\Gamma\left(p\right)} \gamma\left(p, ax\right)$$

(Poco importante)

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right] = \frac{p}{a}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right] = \frac{p}{a^2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi\left(t\right) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim \gamma\left(p_i, a\right)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \gamma\left(\sum_{i=1}^{n} p_i, a\right)$$

- Si $X \sim \gamma(p, a) \Rightarrow$

$$cX \sim \gamma\left(p, \frac{a}{c}\right), \ c \in \mathbb{R}$$

- $\gamma(1, a) \equiv \exp(a)$

EXPONENCIAL

Distribución que mide la probabilidad que una cantidad x de tiempo haya pasado entre dos eventos de una distribución Poisson λ.

$$\boxed{\exp(a)}$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda^{-1}$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda^{-2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Otras características de interés

- $\exp(a) \equiv \gamma(1, a)$
- Si tenemos $X_i \sim \exp(a)$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \exp(a)$$

BETA

Distribución que

$$\boxed{\beta\left(\alpha,\beta\right)}$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X\left(x\right)=\frac{x^{\alpha-1}\left(1-x\right)^{\beta-1}}{B\left(\alpha,\beta\right)}$$

donde $B\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X\left(x\right)=I_x\left(\alpha,\beta\right)$$

que es la *regularización incompleta de la función beta*.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E\left[X\right]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V\left[X\right]=\frac{\alpha\beta}{\left(\alpha+\beta\right)^2\left(\alpha+\beta+1\right)}$$

NORMAL

Distribución de media μ y desviación típica σ:

$$\boxed{N(\mu, \sigma)}$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \mu$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \sigma^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

Otras características de interés

- Es simétrica respecto de $x = \mu$.
- Si tenemos $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $Y = aX + b \Rightarrow$
$$Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$$
- Si tenemos $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}\right)$$

DISTRIBUCIONES NORMALES

CHI CUADRADO

Sean $X_i \sim N(0,1)$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ entonces definimos:

$$\chi^2(n) \sim \sum_{i=1}^{n} X_i$$

como distribución **chi cuadrado de Pearson** con n grados de libertad.

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} x^{\frac{n}{2}-1}, \ x > 0$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = n$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 2n$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $Y_1 \sim \chi^2_{n_1}$ y $Y_2 \sim \chi^2_{n_2}$. Entonces:

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}$$

- Si tenemos $X \sim \chi^2_n$ y tomamos una m. a. s. (k). Entonces:

$$\overline{X} \sim \gamma\left(nk, \frac{k}{2}\right)$$

T-STUDENT

Distribución que vale 1 en un solo punto h.

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

F-SNEDECOR

Distribución que vale 1 en un solo punto h.

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E\left[X^k\right] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$