

Distribuciones Estadísticas

Mario Calvarro Marines

Índice general

1. Distribuciones Discretas	1
1.1. Degenerada	1
1.2. Bernoulli	3
1.3. Binomial	4
1.4. Poisson	5
2. Distribuciones Continuas	7
2.1. Uniforme	7
2.2. Gamma	9
2.3. Exponencial	11
2.4. Beta	12
2.5. Normal	13
3. Distribuciones Normales	15
3.1. Chi Cuadrado	15
3.2. T-Student	17
3.3. F-Snedecor	18

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

DEGENERADA

Distribución que vale 1 en un solo punto h .

$$\boxed{Deg(h)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

BERNOULLI

Distribución que mide la probabilidad de que un experimento acabe en “éxito” ó “fracaso”.

$$\boxed{Ber(p)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = p$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = p$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = p(1-p)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = (1-p) + p \cdot \exp\{it\}$$

BINOMIAL

Distribución que mide la probabilidad de que x experimentos, con probabilidad p , en n intentos sean “éxitos”.

$$\boxed{B(n, p)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x \in \{0, \dots, n\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^x \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = np$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = np(1-p)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = ((1-p) + p \exp\{it\})^n$$

POISSON

Distribución que mide la probabilidad de que ocurran x eventos, que tienen una “velocidad” λ , en un determinado intervalo de tiempo.

$$P(\lambda)$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x \exp\{-\lambda\}}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \exp\{-\lambda\} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Poco importante.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim P(\lambda_i)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

- Si tenemos una binomial, con número de “éxitos” esperados se mantiene más o menos constante, y hacemos tender n , número de casos, a infinito, tenemos como resultado una Poisson con $\lambda = np$.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

UNIFORME

Distribución que mide la probabilidad de un suceso que puede estar de forma arbitraria en un intervalo con las mismas posibilidades.

$$U(a, b)$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{1}{2}b + a$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

GAMMA

Distribución que mide la probabilidad de que en un tiempo a ocurran p eventos. (Puede que el tiempo sea $\frac{1}{a}$)

$$\gamma(p, a)$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \gamma(p, ax)$$

(Poco importante)

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{p}{a}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{p}{a^2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim \gamma(p_i, a)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i, a\right)$$

- Si $X \sim \gamma(p, a) \Rightarrow$

$$cX \sim \gamma\left(p, \frac{a}{c}\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

- $\gamma(1, a) \equiv \exp(a)$

EXPONENCIAL

Distribución que mide la probabilidad que una cantidad x de tiempo haya pasado entre dos eventos de una distribución Poisson λ .

$$\exp(a)$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda^{-1}$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda^{-2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Otras características de interés

- $\exp(a) \equiv \gamma(1, a)$
- Si tenemos $X_i \sim \exp(a)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \exp(a)$$

BETA

Distribución que

$$\beta(\alpha, \beta)$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$$

donde $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = I_x(\alpha, \beta)$$

que es la *regularización incompleta de la función beta*.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

NORMAL

Distribución de media μ y desviación típica σ :

$$N(\mu, \sigma)$$

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \mu$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \sigma^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

Otras características de interés

- Es simétrica respecto de $x = \mu$.
- Si tenemos $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $Y = aX + b \Rightarrow$

$$Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$$

- Si tenemos $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}\right)$$

DISTRIBUCIONES NORMALES

CHI CUADRADO

Distribución que vale 1 en un solo punto h .

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

T-STUDENT

Distribución que vale 1 en un solo punto h .

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

F-SNEDECOR

Distribución que vale 1 en un solo punto h .

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$