

# Distribuciones Estadísticas

Mario Calvarro Marines



# Índice general

---

<b>1. Distribuciones Discretas</b>	<b>1</b>
1.1. Degenerada . . . . .	1
1.2. Bernoulli . . . . .	3
1.3. Binomial . . . . .	4
1.4. Geométrica . . . . .	5
1.5. Poisson . . . . .	6
<b>2. Distribuciones Continuas</b>	<b>7</b>
2.1. Uniforme . . . . .	7
2.2. Cauchy . . . . .	9
2.3. Gamma . . . . .	10
2.4. Exponencial . . . . .	12
2.5. Beta . . . . .	13
2.6. Normal . . . . .	14
<b>3. Distribuciones Normales</b>	<b>15</b>
3.1. Chi Cuadrado . . . . .	15
3.2. T-Student . . . . .	17
3.3. F-Snedecor . . . . .	18



# DISTRIBUCIONES DISCRETAS

---

## DEGENERADA

Distribución que vale 1 en un solo punto  $h$ .

$$\boxed{Deg(h)}$$

### Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

### Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

### Momentos

#### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = h^k$$

#### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

# BERNOULLI

Distribución que mide la probabilidad de que un experimento acabe en “éxito”, con posibilidad  $p$ , o “fracaso”.

$$\boxed{Be(p)}$$

## Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

## Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

## Momentos

### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = p$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = p$$

### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = p(1-p)$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = (1-p) + p \cdot \exp\{it\}$$

# BINOMIAL

Distribución que mide la probabilidad de que  $x$  experimentos, con posibilidad  $p$ , en  $n$  intentos, sean “éxitos”.

$$\boxed{B(n, p)}$$

## Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x \in \{0, \dots, n\}$$

## Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^x \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

## Momentos

### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = np$$

### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = np(1-p)$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = ((1-p) + p \exp\{it\})^n$$



# GEOMÉTRICA

Distribución que mide la probabilidad de que en  $x$  experimentos, con posibilidad  $p$ , haya algún “éxito”.

$$\boxed{G(p)}$$

## Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x \in \mathbb{N}$$

## Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - (1-p)^x, & x \geq 1 \end{cases}$$

## Momentos

### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}$$

# POISSON

Distribución que mide la probabilidad de que ocurran  $x$  eventos, que tienen un “ratio”  $\lambda$ , en un determinado intervalo de tiempo.

$$P(\lambda)$$

## Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0$$

## Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \exp\{-\lambda\} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Poco importante.

## Momentos

### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda$$

### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$$

## Otras características de interés

- Si tenemos  $X_i \sim P(\lambda_i)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

- Si tenemos una binomial, con un número de “éxitos” esperados que se mantiene más o menos constante, y hacemos tender  $n$ , número de casos, a infinito, tenemos como resultado una Poisson con  $\lambda = np$ .

# DISTRIBUCIONES CONTINUAS

---

## UNIFORME

Distribución que mide la probabilidad de un suceso que está en un punto de un intervalo de forma arbitraria con las mismas posibilidades.

$$U(a, b)$$

### Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

### Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

### Momentos

#### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{1}{2}(b+a)$$

#### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

# CAUCHY

Parámetros:  $\theta$  localización y  $\sigma$  escala?

$$C(\theta, \sigma)$$

## Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma \left[1 + \left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right]}$$

## Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}$$

## Momentos

### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \text{Indefinido.}$$

### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \text{Indefinido.}$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{\theta it - \sigma|t|\}$$

## GAMMA

Distribución que mide la probabilidad de que en un tiempo  $a$  ocurran  $p$  eventos. (Puede que el tiempo sea  $\frac{1}{a}$ )

$$\gamma(p, a)$$

### Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

### Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \gamma(p, ax)$$

(Poco importante)

### Momentos

#### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{p}{a}$$

#### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{p}{a^2}$$

### Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

### Otras características de interés

- Si tenemos  $X_i \sim \gamma(p_i, a)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i, a\right)$$

- Si  $X \sim \gamma(p, a) \Rightarrow$

$$cX \sim \gamma\left(p, \frac{a}{c}\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

- $\gamma(1, a) \equiv \exp(a)$

# EXPONENCIAL

Distribución que mide la probabilidad que una cantidad  $x$  de tiempo haya pasado entre dos eventos de una distribución Poisson  $\lambda$ .

$$\exp(\lambda)$$

## Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

## Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

## Momentos

### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda^{-1}$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$$

### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda^{-2}$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

## Otras características de interés

- $\exp(a) \equiv \gamma(1, a)$
- Si tenemos  $X_i \sim \exp(\lambda)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \gamma(n, \lambda^{-1})$$



## BETA

Distribución que abreviamos como:

$$\beta(\alpha, \beta)$$

### Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \cdot I_{(0,1)}(x)$$

donde  $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ .

### Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = I_x(\alpha, \beta)$$

que es la *regularización incompleta de la función beta*.

### Momentos

#### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

#### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

# NORMAL

Distribución de media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ :

$$N(\mu, \sigma)$$

## Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

## Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

## Momentos

### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \mu$$

### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \sigma^2$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

## Otras características de interés

- Es simétrica respecto de  $x = \mu$ .
- Si tenemos  $X \sim N(\mu, \sigma)$  e  $Y = aX + b \Rightarrow$ 
$$Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$$
- Si tenemos  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}\right)$$

# DISTRIBUCIONES NORMALES

---

## CHI CUADRADO

Sean  $X_i \sim N(0, 1)$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  definimos entonces:

$$\chi_n^2 \sim \sum_{i=1}^n X_i^2$$

como distribución **chi cuadrado de Pearson** con  $n$  grados de libertad.

### Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad x > 0$$

### Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

### Momentos

#### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = n$$

#### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 2n$$

## Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$$

## Teorema de Fisher-Cochran

Sea  $X \sim N(\mu, \sigma)$  y tomemos una m. a. s.  $(n)$  de esta variable. Entonces:

1.  $b_2$  y  $\bar{X}$  son independientes.
2. Sabemos que:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

3. Tenemos que:  $\frac{nb_2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$  ó,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

## Otras características de interés

- Si tenemos  $Y_1 \sim \chi_{n_1}^2$  y  $Y_2 \sim \chi_{n_2}^2$ . Entonces:

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$$

- Si tenemos  $X \sim \chi_n^2$ . Entonces:

$$X \sim \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- Si tenemos  $X \sim \chi_n^2$  y tomamos una m. a. s.  $(k)$ . Entonces:

$$\bar{X} \sim \gamma\left(nk, \frac{k}{2}\right)$$

## T-STUDENT

Sean  $Z \sim N(0, 1)$  e  $Y \sim \chi_n^2$  definimos entonces:

$$t_{n-1} \sim \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$$

como distribución **t-Student** con  $n$  grados de libertad.

### Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

### Momentos

#### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = 0$$

#### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{n}{n-2}$$

### Teorema de Student

Sea  $X \sim N(\mu, \sigma)$  y tomamos una m. a. s. ( $n$ ) de la variable aleatoria. Entonces:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$$

o lo que es lo mismo:  $\sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{b_2}} \sim t_{n-1}$ .

## F-SNEDECOR

Sean  $Y_n \sim \chi_n^2$  y  $Y_m \sim \chi_m^2$  definimos entonces:

$$F_{n,m} \sim \frac{Y_n/n}{Y_m/m}$$

### Momentos

#### Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[F] = \frac{m}{m-2}$$

#### Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{2m(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$$

### Teorema de Snedecor

Sean  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$  y  $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$  y tomamos m. a. s.  $(n)$  y m. a. s.  $(m)$  de cada una, respectivamente. Entonces:

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{S_2^2} \sim F_{n-1, m-1}$$

### Otras características de interés

- Sea  $F \sim F_{n,m}$ , entonces:

$$1/F \sim F_{m,n}$$

- Tenemos que:  $t_n \equiv F_{1,n}$ .