

Distribuciones Estadísticas

Mario Calvarro Marines

Índice general

1. Distribuciones Discretas	1
1.1. Degenerada	1
1.2. Bernoulli	3
1.3. Binomial	4
1.4. Geométrica	5
1.5. Poisson	6
2. Distribuciones Continuas	7
2.1. Uniforme	7
2.2. Cauchy	9
2.3. Gamma	10
2.4. Exponencial	12
2.5. Beta	13
2.6. Normal	14
3. Distribuciones Normales	15
3.1. Chi Cuadrado	15
3.2. T-Student	17
3.3. F-Snedecor	18

DISTRIBUCIONES DISCRETAS

DEGENERADA

Distribución que vale 1 en un solo punto h .

$$\boxed{Deg(h)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & x = h \\ 0, & x \neq h \end{cases}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < h \\ 1, & x \geq h \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = h$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = h^k$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 0$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{ith\}$$

BERNOULLI

Distribución que mide la probabilidad de que un experimento acabe en “éxito”, con posibilidad p , o “fracaso”.

$$\boxed{Be(p)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1-p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = p$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = p$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = p(1-p)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = (1-p) + p \cdot \exp\{it\}$$

BINOMIAL

Distribución que mide la probabilidad de que x experimentos, con posibilidad p , en n intentos, sean “éxitos”.

$$\boxed{B(n, p)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x \in \{0, \dots, n\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^x \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = np$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = np(1-p)$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = ((1-p) + p \exp\{it\})^n$$

GEOMÉTRICA

Distribución que mide la probabilidad de que en x experimentos, con posibilidad p , haya algún “éxito”.

$$\boxed{G(p)}$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x \in \mathbb{N}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1 - (1-p)^x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}$$

POISSON

Distribución que mide la probabilidad de que ocurran x eventos, que tienen un “ratio” λ , en un determinado intervalo de tiempo.

$$P(\lambda)$$

Función de masa

La función de masa de la distribución es:

$$p_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x \in \mathbb{N}_0$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \exp\{-\lambda\} \sum_{j=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Poco importante.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim P(\lambda_i)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

- Si tenemos una binomial, con un número de “éxitos” esperados que se mantiene más o menos constante, y hacemos tender n , número de casos, a infinito, tenemos como resultado una Poisson con $\lambda = np$.

DISTRIBUCIONES CONTINUAS

UNIFORME

Distribución que mide la probabilidad de un suceso que está en un punto de un intervalo de forma arbitraria con las mismas posibilidades.

$$U(a, b)$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} I_{(a,b)}(x)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{1}{2}(b+a)$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

CAUCHY

Parámetros: θ localización y σ escala?

$$C(\theta, \sigma)$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma \left[1 + \left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2\right]}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \text{Indefinido.}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \text{Indefinido.}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\{\theta it - \sigma|t|\}$$

GAMMA

Distribución que mide la probabilidad de que en un tiempo a ocurran p eventos. (Puede que el tiempo sea $\frac{1}{a}$)

$$\gamma(p, a)$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \gamma(p, ax)$$

(Poco importante)

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{p}{a}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{p}{a^2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p}$$

Otras características de interés

- Si tenemos $X_i \sim \gamma(p_i, a)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \gamma\left(\sum_{i=1}^n p_i, a\right)$$

- Si $X \sim \gamma(p, a) \Rightarrow$

$$cX \sim \gamma\left(p, \frac{a}{c}\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

- $\gamma(1, a) \equiv \exp(a)$

- Tenemos que si $a > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1} e^{-at} dt = \frac{\Gamma(p)}{a^p}$$

EXPONENCIAL

Distribución que mide la probabilidad que una cantidad x de tiempo haya pasado entre dos eventos de una distribución Poisson λ .

$$\exp(\lambda)$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \cdot I_{(0,+\infty)}(x)$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \lambda^{-1}$$

y un momento genérico:

$$E[X^k] = \frac{k!}{\lambda^k}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \lambda^{-2}$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Otras características de interés

- $\exp(a) \equiv \gamma(1, a)$
- Si tenemos $X_i \sim \exp(\lambda)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \gamma(n, \lambda)$$

BETA

Distribución que abreviamos como:

$$\beta(\alpha, \beta)$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \cdot I_{(0,1)}(x)$$

donde $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = I_x(\alpha, \beta)$$

que es la *regularización incompleta de la función beta*.

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Otras características de interés

- La definición de la función beta es:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

NORMAL

Distribución de media μ y desviación típica σ :

$$N(\mu, \sigma)$$

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = \mu$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \sigma^2$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$$

Otras características de interés

- Es simétrica respecto de $x = \mu$.
- Si tenemos $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $Y = aX + b \Rightarrow$
$$Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$$
- Si tenemos $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}\right)$$

DISTRIBUCIONES NORMALES

CHI CUADRADO

Sean $X_i \sim N(0, 1)$ con $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos entonces:

$$\chi_n^2 \sim \sum_{i=1}^n X_i^2$$

como distribución **chi cuadrado de Pearson** con n grados de libertad.

Función de masa

La función de densidad de la distribución es:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{x}{2}\right\} x^{\frac{n}{2}-1}, \quad x > 0$$

Función de distribución

La función de distribución es:

$$F_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = n$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = 2n$$

Función característica

La función característica de la distribución es:

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$$

Teorema de Fisher-Cochran

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ y tomemos una m. a. s. (n) de esta variable. Entonces:

1. b_2 y \bar{X} son independientes.

2. Sabemos que:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

3. Tenemos que: $\frac{nb_2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$ ó,

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Otras características de interés

■ Si tenemos $Y_1 \sim \chi_{n_1}^2$ y $Y_2 \sim \chi_{n_2}^2$. Entonces:

$$Y_1 + Y_2 \sim \chi_{n_1+n_2}^2$$

■ Si tenemos $X \sim \chi_n^2$. Entonces:

$$X \sim \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

■ Si tenemos $X \sim \chi_n^2$ y tomamos una m. a. s. (k) . Entonces:

$$\bar{X} \sim \gamma\left(nk, \frac{k}{2}\right)$$

T-STUDENT

Sean $Z \sim N(0, 1)$ e $Y \sim \chi_n^2$ definimos entonces:

$$t_{n-1} \sim \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$$

como distribución **t-Student** con n grados de libertad.

Función de densidad

La función de densidad de la distribución es:

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[X] = 0$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{n}{n-2}$$

Teorema de Student

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ y tomamos una m. a. s. (n) de la variable aleatoria. Entonces:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$$

o lo que es lo mismo: $\sqrt{n-1} \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{b_2}} \sim t_{n-1}$.

F-SNEDECOR

Sean $Y_n \sim \chi_n^2$ y $Y_m \sim \chi_m^2$ definimos entonces:

$$F_{n,m} \sim \frac{Y_n/n}{Y_m/m}$$

Momentos

Respecto del origen

La **esperanza** es:

$$E[F] = \frac{m}{m-2}$$

Respecto del centro

La **varianza** es:

$$V[X] = \frac{2m(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$$

Teorema de Snedecor

Sean $X \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ y $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ y tomamos m. a. s. (n) y m. a. s. (m) de cada una, respectivamente. Entonces:

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{S_2^2} \sim F_{n-1, m-1}$$

Otras características de interés

- Sea $F \sim F_{n,m}$, entonces:

$$1/F \sim F_{m,n}$$

- Tenemos que: $t_n \equiv F_{1,n}$.