

Topología elemental

Mario Calvarro Marines

Índice general

I Topología general	1
1. Espacios topológicos	3
1.1. Conjuntos abiertos	3
1.2. Conjuntos cerrados	6
1.3. Bases	9
1.4. Topología relativa	11
2. Aplicaciones continuas	13
2.1. Continuidad	13
2.2. Continuidad y subespacios	15
2.3. Homeomorfismos	17
3. Construcciones	21
3.1. Imágenes inversas	21
3.1.1. Caracterización de la imagen inversa	21
3.1.2. Inmersiones	23
3.2. Imágenes directas	24
3.2.1. Caracterización de la imagen directa	24
3.2.2. Identificaciones	25
3.2.3. Cocientes	27
3.3. Productos (finitos)	30
3.4. Sumas (finitas)	32
3.5. Espacios proyectivos reales	34
3.5.1. Geometría lineal	34

3.5.2. Topología de espacio proyectivos	34
4. Separación	39
4.1. Concepto	39
4.2. Tabla de comportamiento	40
5. Numerabilidad	43
5.1. Axiomas	43
5.1.1. I Axioma	43
5.1.2. II Axioma	44
5.1.3. Separable	45
5.1.4. Lindelöf	45
5.2. Tabla de comportamiento	46
6. Compacidad	49
6.1. Concepto y mantras	49
6.2. Tabla de comportamiento	51
7. Compacidad local	53
7.1. Compacidad local y mantras	53
7.2. Tabla de comportamiento	55
7.3. Compactificación por un punto	55
8. Conexión	59
8.1. Concepto y mantras	59
8.2. Tabla de comportamiento	61
9. Componentes conexas y conexión local	63
9.1. Componentes	63
9.2. Conexión local	64
9.3. Tabla de comportamiento	65
10. Conexión por caminos	67
10.1. Conexión por caminos	68
10.2. Mantras	68
10.3. Tabla de comportamiento	69

11. Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos	71
11.1. Componentes conexas por caminos	71
11.2. Conexión local por caminos	71
11.3. Tabla de comportamiento	72
11.4. Relaciones entre las propiedades de conexión	72
II Topología algebraica	73
12. Homotopía	75
12.1. Conceptos fundamentales	75
12.2. Concepto relativo	76
12.3. Contractibilidad	76
13. Homotopía de caminos	79
13.1. El concepto básico	79
13.2. Simple-conexión	79
13.3. Esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$	80
14. El grupo fundamental	83
14.1. Operaciones con caminos	83
14.2. El grupo fundamental	84
14.3. Functorialidad	85
15. Retractos	87
15.1. Retractos y deformaciones	87
15.2. Cocientes	88
15.3. Agujeros	89
16. Recubridores	91
16.1. El problema de elevación	91
16.2. Unicidad de elevación	92
16.3. Lema de elevación	92
17. Cálculos mediante recubridores	95
17.1. Espacios proyectivos reales	95

17.2. La circunferencia	96
18. Aplicaciones en dimensión 2	99
18.1. Teorema fundamental del Álgebra	99
18.2. Teorema del punto fijo de Brouwer	99
18.3. Teorema de la esfera de Brouwer	100
19. Más aplicaciones por el mismo precio	103
19.1. Borsuk-Ulam	103
19.2. Invarianza del dominio	104
19.3. Divarianza del borde y de la dimensión	105
20. Superficies	107
20.1. Concepto	107
20.2. Sumas conexas	107
20.3. Cocientes	109
21. Clasificación de superficies	111
21.1. El teorema	111
21.2. La relación fundamental	112
21.3. Grupos fundamentales con un agujero	113
22. Grande finale	115

Parte I

Topología general

Espacios topológicos

Conjuntos abiertos

Definición

Una topología en un conjunto X es una colección $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos tal que:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Las uniones arbitrarias de elementos de \mathcal{T} están en \mathcal{T} .
3. Las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{T} están en \mathcal{T} .

Se dice que (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, los elementos de \mathcal{T} se llaman abiertos y los elementos de X se llaman puntos.

Ejemplo:

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es la llamada topología trivial. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ es la topología discreta: como los puntos $\{x\} \in \mathcal{T}$, entonces cualquier $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ es abierto.
2. \mathbb{R}^n con la topología usual definida mediante las bolas euclídeas.
3. Cualquier distancia d define una topología mediante sus bolas abiertas, igual que se define la usual. Notación:

$$B(a, \varepsilon) = \{d(a, x) < \varepsilon\}, \quad B[a, \varepsilon] = \{d(a, x) \leq \varepsilon\}, \quad S[a, \varepsilon] = \{d(a, x) = \varepsilon\}$$

4. En un conjunto se pueden definir muchas topologías distintas (por ejemplo (1)) pero se puede asumir que solo “parezcan” distintas. Ya se sabe que la topología usual de \mathbb{R}^n se puede definir mediante muchas distancias distintas.

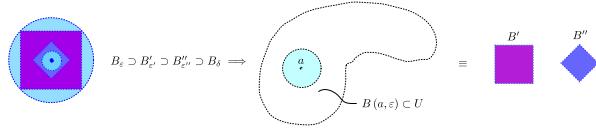


Figura 1.1: El dibujo representa distintas topologías generadas por distintas normas, pero todas equivalentes.

5. Una topología para ilustrar muchas propiedades (y contraejemplos).

Fijamos $a \in X$:

$$\mathcal{T}_a = \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

La topología “del punto”. El punto $\{a\}$ y todos los pares de puntos $\{a, x\}$ son abiertos. Se parece a la discreta pero difiere en que en esta última todos los puntos son abiertos.

Ya que en mismo conjunto podemos equiparlo con diversas topologías, es natural compararlas.

Definición

Dos topologías: $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ en X se llaman comparables: \mathcal{T}_2 es más “fina” que \mathcal{T}_1 .

Siempre se da:

$$\mathcal{T}_{\text{trivial}} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\text{discreta}}$$

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico; a menudo se omite \mathcal{T} ó el calificativo “topológico”.

Definición

1. Un entorno abierto de un punto $x \in X$ es un abierto U que lo contiene. Se suele escribir U^x .
2. Un entorno de un punto $x \in X$ es un conjunto V que contiene un abierto U que contiene al punto. Se suele escribir V^x .¹

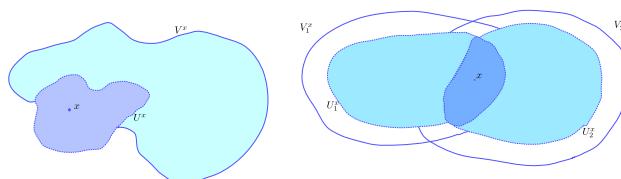


Figura 1.2: Definición de entornos

¹La intersección finita de entornos es entorno. (Si son abiertos es trivial)

Observación:

1. Con $U^x \subset V^x$:

$$\begin{aligned} V_1^x \cap V_2^x &= V^x \\ U_1^x \cap U_2^x &= U_{\text{ab}}^x \ni x \end{aligned}$$

2. $U \in \mathcal{T}$ es entorno de todos sus puntos.

Demostración:

$$x \in U \text{ abierto} \subset U$$

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto interior de A es un punto del que A es entorno (luego A lo contiene). El interior de A es el conjunto de sus puntos interiores:

$$\text{Int}_X(A) = \overset{\circ}{A} = \{x \in A : \exists U^x \overset{\text{ab.}}{\subset} A\}$$

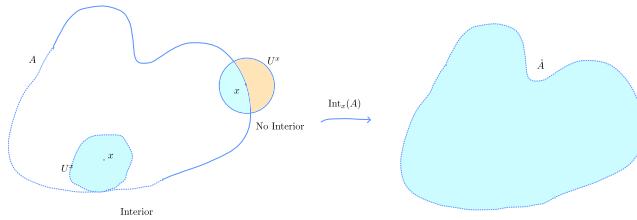


Figura 1.3: Definición de interior de un conjunto.

Proposición

$\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A :

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{U \text{ ab.} \\ U \subset A}} U$$

En particular, A abierto $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A$ es un entorno de todos los puntos.

Demostración:

1. $\overset{\circ}{A}$ es abierto:

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in \overset{\circ}{A} &\Rightarrow \exists U^x \overset{\text{ab.}}{\subset} A \\ \forall y \in U^x &\Rightarrow A \supset U^x \text{ es un abierto que contiene a } y \Rightarrow y \in \overset{\circ}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U^x \subset \overset{\circ}{A}$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{A} = \bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} U^x \text{ es abierto como unión de abiertos.}$$

2. $\overset{\circ}{A}$ es el mayor abierto contenido en A .

$$U \overset{\text{ab.}}{\subset} A \Rightarrow \forall x \in U \subset A \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow U \subset \overset{\circ}{A}$$

Ejemplo:

1. $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}}) : A \neq X \Rightarrow A \not\supseteq X \Rightarrow \emptyset$ es el único abierto $\subset A \Rightarrow \text{Int}(A) = \emptyset$.
2. En \mathbb{R}^n con $\mathcal{T}_{\text{trivial}}$ ya lo sabemos bien:

$$\text{Int}(B[a, \varepsilon]) = B(a, \varepsilon); \quad \text{Int}(\mathbb{Q}^n) = \emptyset; \quad \text{Int}(\mathbb{Z}^n) = \emptyset$$

3. Si $a \in X$, $\mathcal{T}_a : \{\overset{\circ}{a}\} = \{a\}$; $x \neq a$, $\{\overset{\circ}{x}\} = \emptyset$.

Proposición

1. $A \subset B \Rightarrow \text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.
2. $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$.

Demostración:

1. $A \subset B \Rightarrow \text{Int}(A) \subset A \subset B$ y $\text{Int}(A)$ es abierto $\Rightarrow \text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$.

2.

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \text{ abierto (intersección finita de abiertos)} \\ & \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subset A \cap B \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cap B) \\ & A \cap B \subset A, B \xrightarrow{\text{1.}} \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$$

$\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$.

Conjuntos cerrados

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico.

Definición

Un conjunto cerrado es un subconjunto $F \subset X$ tal que $U = X \setminus F$ es abierto.

Observación:

Cerrado no significa “no abierto”, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

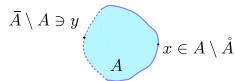


Figura 1.4: Ejemplo de conjunto que no es ni abierto ni cerrado.

Proposición

Se cumple que, $\mathcal{F} = \{\text{cerrados}\}$:

1. X, \emptyset son cerrados.

2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración:

Porque $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ y $\bigcup_{i=1}^n X \setminus U_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i$. Que son abiertos por ser unión arbitraria e intersección finita.

Ejemplo:

1. En la topología trivial solo son cerrados \emptyset y X . En la discreta, todos los subconjuntos son cerrados.
2. En \mathbb{R}^n con la topología usual ya sabemos todos los ejemplos: $B[a, \varepsilon] : \|x - a\| \leq \varepsilon$.
3. Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, todo cerrado de \mathcal{T}_1 es cerrado de \mathcal{T}_2 . (Cuidado con el orden)

Para saber cuándo se aleja un conjunto de ser cerrado tenemos:

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto adherente a A es un punto cuyos entornos intersecan todos a A . La adherencia de A es el conjunto de sus puntos adherentes.

$$\text{Adh}_X(A) = \overline{A} = \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\} \supset A$$

Observación:

Las primeras fórmulas importantes son:

$$X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$$

$$X \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{X \setminus B}.$$

Demostración:

- $x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$
- $x \notin \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X \setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus B}$.

Proposición

\overline{A} es el menor cerrado que contiene a A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerr.} \\ F \supset A}} F$$

En particular, A cerrado $\Leftrightarrow \overline{A} = A \Leftrightarrow A$ contiene todos sus puntos de adherencia.

Demostración:

$$\overline{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \underbrace{\bigcup_{U \subset X \setminus A} U}_{F=X \setminus U} = X \setminus \bigcup_{F \supset A} (X \setminus F) = \bigcap_{F \supset A} F.$$

Observación:

Lo anterior nos implica:

■ $B \supset A \Rightarrow \overline{B} \supset B \supset A \Rightarrow \overline{B} \supset \overline{A}$.

■ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} \supset A \cup B \supset \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \begin{cases} \overline{A} \\ \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$

La última implicación por que es cerrado al ser la unión de dos cerrados.

Ejemplo:

1. En \mathbb{R}^n , $\mathcal{T}_{\text{usual}} : B[a, \varepsilon] = \overline{B(a, \varepsilon)}$; $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

2. $a \in X$, \mathcal{T}_a

$$\begin{cases} \overline{\{a\}} = X \left[\forall x, \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}} \right] \\ x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\} [y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset] \end{cases}$$

Definición (Otros puntos especiales)

1. x es un punto aislado de A si $\exists V^x \cap A = \{x\}$.

2. x es un punto de acumulación de A si $\forall V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Y, evidentemente,

$$\overline{A} = \underbrace{\{puntos aislados\}}_{\subset A} \sqcup \underbrace{\{puntos de acumulación\}}_{\supset \overline{A} \setminus A}$$

3. x es un punto frontera de A si es adherente a A y a $X \setminus A$, o bien, si no es interior de $X \setminus A$ ni de A . La frontera de A es:

$$\text{Fr}(A) = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } A\} = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Ejemplo:

1. En \mathbb{R} , \mathcal{T}_u todos los puntos de \mathbb{Z} son aislados, $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

2. En \mathbb{R}^n , $\mathcal{T}_u : \text{Fr}(B(a, \varepsilon)) = \text{Fr}(B[a, \varepsilon]) = S[a, \varepsilon] : \|x - a\| = \varepsilon$.

3. En $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$ todos los puntos son aislados, todas las fronteras son vacías.

4. $a \in X$, \mathcal{T}_a :

$$\begin{cases} \text{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} \setminus \{\overset{\circ}{a}\} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a, \text{Fr}(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \{\overset{\circ}{x}\} = \{x\} \end{cases}$$

Ahora, un concepto importante:

Definición

$A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$, o bien, todo punto es adherente a A , o bien, todo abierto ($\neq \emptyset$) corta a A .

Ejemplo:

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{\text{usual}}$; $\mathbb{Q} \times \overbrace{\dots}^n \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_{\text{usual}}$ son densos.

2. $\{a\}$ es denso en (X, \mathcal{T}_a) .

Bases

Sea X, \mathcal{T} un espacio topológico.

Definición

Una base de entornos de $a \in X$ es una colección \mathcal{V}^a de entornos de a , tal que todo entorno de a contiene uno de \mathcal{V}^a .

Observación:

No se supone ninguna propiedad especial, ni que sean abiertos. Veremos que la existencia de base de entornos con propiedades adicionales es una de las cosas que determinan el comportamiento de la topología.

Pero, $\forall \mathcal{V}^a$ se puede refinar a una base \mathcal{B}^a de entornos de abiertos.

Demostración:

$$\forall V^a \in \mathcal{V}^a, \exists U^a \subset V^a \Rightarrow \mathcal{B}^a = \{U^a : V^a \in \mathcal{V}^a\} \text{ es base de entornos. } [\forall E^a \supset V^a \supset U^a]$$

Política general:

Bastan las bases de entornos para comprobar propiedades de todos los entornos.

Ilustración:

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a \in \overline{A} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall W^a \text{ entorno} : W^a \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}}$:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B[a, \varepsilon] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$

2. $a \in X, \mathcal{T}_a : \mathcal{B}^a = \{\{a\}\}, \mathcal{B}^x = \{\{a, x\}\}, x \neq a$.

Definición

Una base de abiertos de \mathcal{T} es una colección de abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que todo abierto es unión de abiertos de \mathcal{B} .

Proposición

\mathcal{B} base de abiertos $\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos (abiertos) de $x \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.

Demostración:

$$\Rightarrow) \forall V^x \Rightarrow x \in U \subset V^x \Rightarrow$$

$$\mathcal{B} \text{ base: } U = \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in \mathcal{B}} \stackrel{x \in U}{\iff} \exists x \in B_i \subset U \subset V^x$$

$$\Leftarrow) U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists \underbrace{B^x}_{\in \mathcal{B}} \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B^x \text{ unión de abiertos de } \mathcal{B}.$$

Ejemplo:

1. $\mathcal{T}_{\text{discreta}} : \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ es mínima.

Demuestra:

si B' es base : $\forall x, \{x\} = \bigcup_{i \in I} B'_i \Rightarrow B_i = \{x\}$

2. $\mathcal{T}_a : \mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}$.

3. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}} \mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$ Pero también,

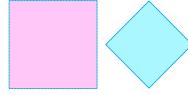
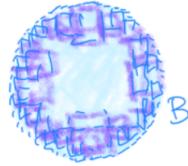


Figura 1.5: *Bases alternativas en \mathbb{R}^n*

porque

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} \square = \bigcup_{j \in J} \diamond$$

Ilustrado:



Política general:

Como antes, a menudo basta considerar los abiertos de \mathcal{B}

Ilustración:

$A \subset X$ denso $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset$.

Proposición

“ $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología (única) \mathcal{T} en X ” es equivalente a:

- $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
- $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B^x \subset B_1 \cap B_2$.

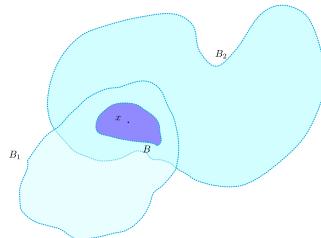


Figura 1.6: *Caracterización de la topología dada una base*

Demostración:

La implicación \Rightarrow) se cumple por propiedades vistadas.

En el otro sentido tenemos:

- Unicidad: $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : \{B_i\} \subset \mathcal{B}\}$.
- Existencia: Esa \mathcal{T} es efectivamente topología.
 - \emptyset unión de vacío, $X = \bigcup_i U_i \Rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{T}$.
 - Uniones: $\bigcup_j \underbrace{\bigcup_{\substack{i \\ \in \mathcal{T}}}}_j B_{ij} = \bigcup_{\substack{j \\ \in \mathcal{T}}} B_{ij}$.
 - Lo importante, intersecciones finitas: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B^x \in \mathcal{T}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \left(\bigcup_i B_i \right) \cap \left(\bigcup_k B_k \right) &\stackrel{?}{=} \bigcup_{\lambda} B_{\lambda} \\ x \in B_{i_0} \cap B_{k_0} \Rightarrow \exists B^x \subset B_{i_0} \cap B_{k_0} & \\ \bigcup_{\lambda} B_{\lambda} = \bigcup_x B^x. & \end{aligned}$$

Topología relativa

Sea (X, \mathcal{T}) espacio topológico.

Definición

$Y \subset X : \mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ es una topología en Y (fácil), denominada relativa ó restricción a Y ; también se dice que $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es un subespacio de (X, \mathcal{T}) y que (X, \mathcal{T}) es el espacio ambiente.

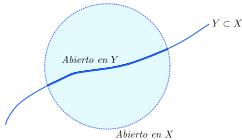


Figura 1.7: Definición topología relativa

Observación:

1. Los cerrados en $\mathcal{T}|_Y$ son $F \cap Y$ con F cerrado en \mathcal{T} .

Demostración:

$$Y \setminus U \cap Y = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F$$

$$2. \begin{cases} y \in Y \subset X \\ \mathcal{V}^y \text{ base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}^y \cap Y = \{V^y \cap Y : V^y \in \mathcal{V}^y\} \\ \text{base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{T}|_Y \end{cases}$$

3. \mathcal{B} base de $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B} \cap Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ base de $\mathcal{T}|_Y$

4. adh? int?

Esta idea es general: en un subespacio se hacen las construcciones intersecando.

Ejemplo:

1. y es un punto aislado de $Y \Leftrightarrow \{y\}$ abierto en $\mathcal{T}|_Y$.

Demostración:

$$\exists U_{\text{ab.}}^y : \{y\} = U^y \cap Y$$

2. Todos los puntos de Y son aislados $\Leftrightarrow \mathcal{T}|_Y = \text{discreta}$.

Se dice que Y es un subespacio discreto.

Por ejemplo, en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:

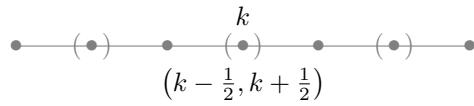


Figura 1.8: *Enteros en los reales como subespacio discreto*.

3. Sea $a \in X$ y \mathcal{T}_a . Entonces:

La base mínima es $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{a, x\}; x \in X\}$. Porque sea $B' \subset \mathcal{B}'$ (base), entonces como $\{a\} = \bigcup_{B'} B'$, $\exists B' = \{a\}$ y, por otro lado, $\{a, x\} = \bigcup_{B'} B'$, $\exists B' : x, a \in B' \Rightarrow \{x, a\} = B'$ al ser B' abierto. Con esto, los elementos de \mathcal{B} están contenidos en todas las posibles bases.

Por tanto, $a \in X, \mathcal{T}_a|_{X \setminus \{a\}}$ = discreta. Porque: $\mathcal{B} \cap Y = \{\{x\} : x \in X \setminus \{a\}\}$.

4. Sea $W \subset Y \subset X$ con W abierto/cerrado en Y que es abierto/cerrado en $X \Rightarrow W$ es abierto/cerrado en X .

5. Si $Y \subset X$ es abierto $\Rightarrow \mathcal{V}^a|_Y = \{V \cap Y : V \in \mathcal{V}^a\}$ es base entornos en Y y en X .

Demostración:

$$\text{Sea } (a \in) W \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow a \in W \cap Y \overset{\text{ab.}}{\subset} Y \supset V \in \mathcal{V}^a|_Y.$$

Por otro lado, como $a \in V^a \Rightarrow \exists a \in U \subset V^a \subset Y$ abierto. Como Y abierto $\Rightarrow U \subset X$ abierto $\Rightarrow V^a$ entorno de X .

Observación:

1. $Y \overset{\text{ab.}}{\subset} X : W$ abierto de $Y \Leftrightarrow W$ abierto de X contenido en Y .

Demostración:

$$W = U \cap Y^{\text{ab.}}, U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow W \overset{\text{ab.}}{\subset} X \text{ por intersección finita}$$

2. $Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} X : F$ cerrado de $Y \Leftrightarrow F$ cerrado de X contenido en Y .

Demostración:

$$C = F \cap Y^{\text{cerr.}}, F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \text{ por intersección finita}$$

Aplicaciones continuas

Continuidad

El famoso $\varepsilon - \delta$ en \mathbb{R}^n \mathcal{T}_u , $x_0 \in X$, $f : \overbrace{X}^{\subset \mathbb{R}^p} \rightarrow \overbrace{Y}^{\subset \mathbb{R}^q}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \begin{cases} \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \\ x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \\ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\forall B(f(x_0), \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))}.$$

Definición

$f : X \rightarrow Y$ será continua en $x_0 \in X$ si:

$$\forall V^{f(x_0)} : f^{-1}\left(V^{f(x_0)}\right) = V^{x_0},$$

es decir, $f^{-1}(V^{f(x_0)})$ será entorno de x_0 .

Proposición (Composición de continuidades)

La composición de funciones continuas es continua:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z : \begin{cases} f \text{ continua en } x_0 \\ g \text{ continua en } y_0 \end{cases} \Rightarrow h = g \circ f \text{ continua en } x_0$$

Demostración:

Sea $V^{h(x_0)} \rightarrow h^{-1}V^{h(x_0)} = f^{-1}g^{-1}V^{g(y_0)} = f^{-1}V^{y_0} = V^{x_0}$. Por las continuidades de g y f .

Definición

$f : X \rightarrow Y$ es continua si lo es en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo:

1. $\forall f : X_{\text{discreta}} \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

Todo es abierto, luego todo es entorno en $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.

2. $\forall f : X \rightarrow Y_{\text{trivial}}$ continua.

Demostración:

$V^{f(x)} = Y$ es el único abierto, luego el único entorno, de $f^{-1}V^{f(x)} = f^{-1}Y = X$ es abierto.

3. $f : X \rightarrow Y_{\text{discreta}}$ es continua $\Rightarrow f$ localmente constante.

Demostración:

$$\{f(x_0)\} = V^{f(x_0)} \text{ en } \mathcal{T}_{\text{discr}} \xrightarrow[f \text{ cont.}]{} f^{-1}f(x_0) = V^{x_0} \wedge f \equiv f(x_0), \forall x \in V^{x_0}.$$

4. $f : X \rightarrow Y$ localmente constante \Rightarrow continua.

Demostración:

$\forall x_0 \in X, \exists U^{x_0} : f \xrightarrow[U^{x_0}]{} f(x_0) \Rightarrow \forall V^{f(x_0)} : f^{-1}V^{f(x_0)} \supset U^{x_0} \Rightarrow f^{-1}V^{f(x_0)} = V^{x_0}$ es entorno de x_0 .

Proposición

Son equivalentes:

1. f es continua.

2. $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto}, \forall \text{abierto} \in Y$.

3. $f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}, \forall \text{cerrado de } Y$.

4. $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}(A)), \forall A \subset Y$

5. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subset X$.

Demostración:

1. $1 \Rightarrow 2)$

$$W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y \Rightarrow W \text{ ent. de } f(x), \forall x \in f^{-1}W \xrightarrow[f \text{ cont.}]{} f^{-1}W \text{ ent. } \forall x \in f^{-1}W \Rightarrow f^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$$

2. $2 \Rightarrow 3)$

$$C \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow Y \setminus C \overset{\text{ab.}}{\subset} Y \xrightarrow[2)]{} \underbrace{f^{-1}(Y \setminus C)}_{=X \setminus f^{-1}C} \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow f^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$$

3. $3 \Rightarrow 5)$

$$f(\overline{A}) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \xrightarrow[3)]{} \underbrace{f^{-1}\overline{f(A)}}_{\supset f^{-1}f(A) \supset A} \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

4. $5 \Rightarrow 4)$

$$Y \setminus \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overline{Y \setminus A} \supset \overline{f(X \setminus f^{-1}A)} \xrightarrow[5)]{} f(\overline{X \setminus f^{-1}(A)}) = f(X \setminus \text{Int}(f^{-1}A)) \Rightarrow X \setminus \text{Int}(f^{-1}A) \subset f^{-1}(Y \setminus \overset{\circ}{A}) = X \setminus f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \xrightarrow[c]{} f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}A).$$

5. $4 \Rightarrow 1)$

$$V^{f(x)} \Rightarrow f(x) \in \text{Int}(V^{f(x)}) \Rightarrow x \in f^{-1}(\text{Int}(V^{f(x)})) \subset \text{Int}(f^{-1}V^{f(x)}) \Rightarrow f^{-1}V^{f(x)} \text{ entorno de } x.$$

Observación:

1. Los cuatro primeros enunciados tratan sobre “imágenes inversas”. Por ejemplo, la segunda dice que $f^{-1}\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$.
2. Pensando que un punto adherente es un “punto límite”, 5 nos dice que “la imagen del límite es el límite de la imagen”.
3. $id : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua $\Rightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

Demostración:

$$id^{-1}\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2.$$

Y no mencionamos todos los ejemplos conocidos en espacios afines \mathbb{R}^n con \mathcal{T}_u .

Continuidad y subespacios

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y $Z \subset X$ un subespacio $\Rightarrow f|_Z : Z \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

Se aplica el criterio “imagen inversa de abierto es abierto” y la fórmula:

$$(f|_Z)^{-1}(A) = Z \cap f^{-1}A, \forall A \subset Y$$

que es abierta por definición de abierta en una restricción.

Observación:

1. $Z \xrightarrow{j} X$ es continua.

Demostración:

- $z \in Z : \forall V^{j(z)} : \underbrace{j^{-1}(V^{j(z)})}_{=V^{j(z)} \cap Z}$ entorno de z en Z .
- $\forall U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : \underbrace{j^{-1}(U)}_{U \cap Z} \overset{\text{ab.}}{\subset} Z$

2. $Z \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$. Si f es cont. $\Rightarrow f|_Z$ continua. (No a la inversa).

Demostración:

Como $f|_Z = f \circ j$ y ambas son continuas, por composición, $f|_Z$ es continua.

3. La continuidad es local.

Si $f|_{E^x}$ continua en $x \Rightarrow f$ continua en x .

Demostración: $\forall V^{f(x)} \Rightarrow (f|_E)^{-1} \left(\underbrace{V^{f(x)}}_{=W^x} \right)$ entorno de x en E^x .

Como $W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} E^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X$ (entorno en entorno es entorno). Porque,

$$\left. \begin{array}{l} x \in W^x : \exists G \overset{\text{ab.}}{\subset} W^x \subset E^x : G = A \cap E^x \subset X \\ x \in E^x : \exists B \overset{\text{ab.}}{\subset} E^x \subset X \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \underbrace{A \cap B}_{\subset X} \subset \underbrace{A \cap E^x}_{=G} \subset W^x$$

4. Si $f|_{U \subset X}^{\text{ab.}}$ es continua $\Rightarrow f$ continua $\forall x \in U$.

5. x es aislado $\Rightarrow f$ continua en x .

Demostración:

x aislado $\Leftrightarrow V^x = \{x\}$ es abierto de X . $f|_{V^x} : \{x\} \rightarrow Y$.

6. $f : X \rightarrow Y \supset Z$ tal que $f(X) \subset Z \subset Y$ (si no es así puede estar mal definido).

Entonces, f a Y es continua $\Leftrightarrow f$ a Z es continua.

Demostración:

■ f cont. en $Z \xrightarrow{j \circ f} f$ cont. en Y .

■ f cont. en $Y \stackrel{?}{\Rightarrow} f$ cont. en Z .

Sea U_z ab. en Z . Este será $U_y \cap Z = U_z$ que cumple, $f_z^{-1}(U_y \cap Z) \stackrel{f(X) \subset Z}{=} f_y^{-1}(U_y)$ que es abierto en X (por ser f_y continua).

Proposición (Criterios de continuidad por recubrimientos)

Sea $f : X \rightarrow Y$ será continua si:

■ **Por abiertos:** $\exists X = \bigcup_{i \in I} U_i^{\text{ab.}} : \forall f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ es continua.

■ **Por cerrados:** $\exists X = \bigcup_{i=0}^n F_i^{\text{cerr.}} : \forall f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

■ $W \subset Y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W \\ (f|_{U_i})^{-1}W \underset{(\text{cont.})}{\subset} U_i \underset{(\text{ab.})}{\subset} X \Rightarrow (f|_{U_i})^{-1}W \underset{(\text{ab.})}{\subset} X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}W \underset{(\text{ab.})}{\subset} X$$

Por unión de abiertos.

■ $C \subset Y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n (f|_{F_i})^{-1}C \\ (f|_{F_i})^{-1}C \underset{(\text{cont.})}{\subset} F_i \underset{(\text{cerr.})}{\subset} X \Rightarrow (f|_{F_i})^{-1}C \underset{(\text{cerr.})}{\subset} X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}C \underset{(\text{cerr.})}{\subset} X$$

Por unión finita de cerrados.

Definición (Aplicaciones continuas por recubrimientos)

■ **Por abiertos:** $\{f_i : U_i \xrightarrow{\text{cont.}} Y\}_{i \in I}$. Donde $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

$\exists f : X \rightarrow Y \Leftrightarrow f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$.

■ **Por cerrados:** $\{f_i : F_i \xrightarrow{\text{cont.}} Y\}_{i=1}^n$. Donde $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$.

$\exists f : X \rightarrow Y \Leftrightarrow f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j}$.

Homeomorfismos

Recordemos las definiciones de continuidad que hemos visto:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}$$

Ahora veamos que ocurre al invertir la relación.

Definición

$$\text{Sea } f : X \rightarrow Y, \text{ será } \begin{cases} \text{abierta} \\ \text{cerrada} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\text{ab.}) = \text{ab.} \\ f(\text{cerr.}) = \text{cerr.} \end{cases}$$

Observación:

Cuidado: Continuidad no implica que sea abierta, cerrada ni viceversa.

Ejemplo:

1. $id : X_{\text{trivial}} \rightarrow X_{\text{discreta}}$, -cont. +ab. +cerr.
2. $id : X_{\text{discreta}} \rightarrow X_{\text{trivial}}$, +cont. -ab. -cerr.
3. $j : [0, 1] \subset \mathbb{R}_u$, +cont. -ab. +cerr.
4. $j : (0, 1) \subset \mathbb{R}_u$, +cont. +ab. -cerr.
5. $j : (0, 1] \subset \mathbb{R}$, +cont. -ab. -cerr.

Proposición (Trivialidades esenciales)

Sea f biyectiva \Rightarrow Es equivalente:

- f es abierta
- f es cerrada
- f^{-1} es continua.

Demostración:

1. $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow X \setminus F \overset{\text{ab.}}{\subset} X \xrightarrow{f \text{ ab.}} \underbrace{f(X \setminus F)}_{\substack{= Y \setminus f(F) \\ \text{biy.}}} \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow f(F) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow f \text{ cerr.}$
 2. $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \xrightarrow{f \text{ cerr.}} \underbrace{f(F)}_{\substack{= (f^{-1})^{-1}(F) \\ \text{biy.}}} \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow f^{-1} \text{ cont.}$
 3. $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \xrightarrow{f^{-1} \text{ cont.}} \underbrace{(f^{-1})^{-1}(U)}_{\substack{= f(U) \\ \text{biy.}}} \overset{\text{ab.}}{\subset} Y \Rightarrow f \text{ ab.}$
-

Definición

Sea $f : X \rightarrow Y$ biyectiva, es homeomorfismo si f & f^{-1} son continuas, o equivalentemente si:

$$\begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ ab. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ cerr. \end{cases}$$

Observación:

- Cuando f es homeomorfismo establecemos una biyección entre las topologías:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}_X &\rightarrow \mathcal{T}_Y \\ U &\mapsto f(U) \\ f^{-1}(W) &\leftrightarrow W. \end{aligned}$$

- Se conserva por rotación, por composición.
-

Definición (Localización de un homeomorfismo)

Sea $f : X \rightarrow Y$,

- Es homeomorfismo local en $x_0 \in X$ si $f : V^{x_0} \rightarrow V^{f(x_0)}$ es homeomorfismo para entornos de x_0 y $f(x_0)$. Se suele decir para entornos “suficientemente pequeños”.
 - Es homeomorfismo local si lo es en todo el dominio.
-

Observación:

Se pueden tomar $V^{x_0}, V^{f(x_0)}$ entornos abiertos.

Demostración:

Tenemos:

$$\underbrace{V^a}_{\subset X} \xrightarrow{f} \underbrace{V^{f(a)}}_{\subset Y}$$

Sabemos que $\exists U^a (\subset V^a) \xrightarrow{\text{ab.}} f(U^a) (\subset V^{f(a)})$ al ser homeomorfismo.

Además, como f es abierto, local en $V^{f(a)}$ (homeomorfismo local), $f(U^a)$ es entorno de $f(a)$, pero no abierto (tal vez sí).

Por tanto, tiene un abierto ($W^{f(a)} \subset f(U^a)$) que es imagen de un abierto, G , en $X \rightarrow f(G) = W^{f(a)} \subset Y$, con $G \subset X$.

Proposición (Restricción de homeomorfismos)

Sea $f : X \rightarrow Y$, la restricción a $Z \subset X$ también es homeomorfismo: $f : Z \rightarrow f(Z)$.

Demostración:

La restricción será biyectiva por serlo f (y por estar restringida la llegada Y). Una biyección es homeomorfismo si son continuas ellas y su inversa, pero como ya vimos la restricción de una continua es continua, por lo tanto, la restricción de f y f^{-1} a Z y $f(Z)$ son también continuas. Es decir, $f|_Z$ es homeomorfismo.

Proposición (Composición de homeomorfismos)

Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ homeomorfismos $\Rightarrow h = f \circ g$ es homeomorfismo.

Proposición

Un homeomorfismo local es abierto.

Demostración:

$$U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \stackrel{?}{\Rightarrow} f(U) \text{ entorno } \forall y_0 = \overbrace{f(x_0)}^{\in U} \in f(U).$$

Como f homeomorfismo local $\Rightarrow \forall x_0 \in U, \exists f| : V^{x_0} \rightarrow V^{y_0}$, homeomorfismo $\Rightarrow f(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\subset f(U)}) \overset{\exists y_0=f(x_0)}{\subset} V^{y_0}$ $\Rightarrow f(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\subset f(U)})$ entorno de $y_0 \Rightarrow f(U)$ entorno de y_0 .

Se puede ver también porque, como $U = \bigcup_{x \in U} W^x (\subset V^x) \Rightarrow f(U) = f(\bigcup_x W^x) = \bigcup_x f(W^x)$ es abierto por unión de abiertos.

Ejemplo: (¡Importantes!)

1. Proyección estereográfica: $\mathbb{S}^m \setminus \{\text{punto}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo. (\mathbb{R}^m es en realidad un hiperplano de \mathbb{R}^{m+1} en el que se encuentra contenida la “esfera”)
2. Proyección exponencial $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi \theta, \sin 2\pi \theta)$, homeomorfismo local, pero no es inyectiva (periódica).
3. Proyección antipodal: $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \supset \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{RP}^m : x \mapsto [x]$ homeomorfismo local. Es 2-1 por llevar las antípodas al mismo $[x]$.

Podemos dividir \mathbb{S}^m tal que: $\mathbb{S}^m = S_+ \cup S_- \cup E$ (ecuador). Llamando U_p a todas las rectas no contenidas en el plano ortogonal a la recta formada por el punto que se quita y su antípoda. Con esto tenemos $U_p \simeq \mathbb{R}^m$. Uniéndolo con el hiperplano del infinito H_p^∞ tenemos que los polos van a U_p y E a H_p^∞ . Esta correspondencia es homeomorfa por lo que se puede trasladar la topología.

Con esto, esta proyección será un recubrimiento doble de \mathbb{RP}^m , $m \geq 2$.

4. Lemniscata: $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$ es biyectiva continua, pero no homeomorfismo local.

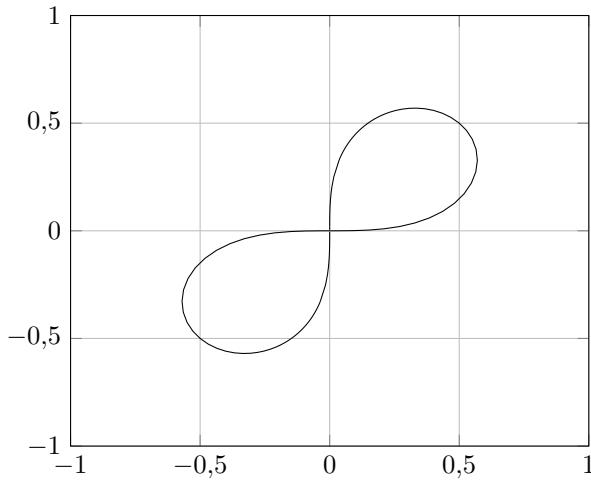


Figura 2.1: Representación Lemniscata.

Engañosamente:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) = I_\varepsilon : f| : I_\varepsilon \rightarrow f(I_\varepsilon)$$

es homeomorfismo.

En $t = 0, f(I_\varepsilon)$ no es entorno de $f(0) = (0,0)$, porque se tienen que tomar elementos de la rama “vertical”.

5. Las coordenadas polares $(0, \rightarrow) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ es homeomorfismo local con $\theta_0 \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ hasta $\mathbb{R}^2 \setminus L$ con L la recta entre O y θ_0 .

Definición

Una variedad topológica de dim m es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , es decir, cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ (luego a cualquier bola, luego a todo \mathbb{R}^m).

Ejemplo:

Esferas, espacios proyectivos, toros...

Construcciones

En este capítulo buscaremos topologías en base a unas aplicaciones con el objetivo de hacer a dichas aplicaciones continuas. Tras esto, daremos una caracterización de la topología construida. Por último, exploraremos las propiedades de las construcciones.

Imágenes inversas

Supongamos que tenemos $f : Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$ y buscamos hacerla continua. Trivialmente, podemos hacer que la topología en Y sea la discreta, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos la topología menos fina que haga f continua.

Definición

Llamamos **topología de la imagen inversa** a: $f^{-1}\mathcal{T} = \{f^{-1}U : U \in \mathcal{T}\}$.

Proposición

La topología de la imagen inversa cumple:

1. Es topología.
2. Es mínima.

Demostración:

1. Trivial.
2. Sea \mathcal{T}' otra topología en Y que haga f continua.

Tomamos $U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T} : f^{-1}V = U$. Como f en \mathcal{T}' es también continua tenemos que $U = f^{-1}V$ es abierto en \mathcal{T}' . Es decir, todo abierto en $f\mathcal{T}$ es también abierto en $\mathcal{T}' \Rightarrow f\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Observación:

Con esta definición, f será continua.

Caracterización de la imagen inversa

Veamos ahora una caracterización de la topología que acabamos de introducir.

Teorema (Propiedad universal de las inmersiones)

Sean $g : (Z, \mathcal{T}'') \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ y $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$. Entonces:

$$\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow$$

$$[\forall g : g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}] \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ g \uparrow & \nearrow f \circ g & \\ (Z, \mathcal{T}'') & & \end{array}$$

Figura 3.1: Ilustración de la composición propuesta

Demostración:

- $\Rightarrow) \mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} :$
 - $g \text{ cont.} \Rightarrow f \circ g \text{ cont.}$ (Composición de continuas)
 - $f \circ g \text{ cont.} \Rightarrow g \text{ cont.}$ ($V \in \mathcal{T}' \Rightarrow g^{-1}V \stackrel{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}}{=} g^{-1}f^{-1}U = (f \circ g)^{-1}U \stackrel{f \circ g \text{ cont.}}{\in} \mathcal{T}''$)
- $\Leftarrow)$ Por otro lado, veamos la unicidad:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ id \uparrow & \nearrow f & \\ (Y, \mathcal{T}') & & \end{array}$$

Como esta id es continua, por (3.1), $f \circ id = f$ es también continua. Al ser $f^{-1}\mathcal{T}$ la menos fina, $\mathcal{T}' \supset f^{-1}\mathcal{T}$.

Además,

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ id \uparrow & \nearrow f \text{ cont.} & \\ (Y, f^{-1}\mathcal{T}) & & \end{array}$$

Como la f es continua, por (3.1), esta nueva id es también continua $\Rightarrow f^{-1}\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$.

Enunciado

Demostrar \Leftarrow sin usar que $f^{-1}\mathcal{T}$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización). Hecho en clase.

Inmersiones

Veamos ahora un caso de especial relevancia:

$$f : Y \rightarrow X \text{ inyectiva}$$

Definición

Una aplicación continua inyectiva $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ tal que $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$ se llama **inmersión**.

Proposición

Sea $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (f(Y), \mathcal{T})$. Entonces:

$$\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow f : (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{\text{homeo.}} (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$$

Demostración:

- $\Rightarrow)$ Tenemos que $f : (Y, f^{-1}\mathcal{T}) \rightarrow (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$.

Al ser f inyectiva, también será biyectiva. Veamos que es continua y abierta:

- Continua: Sea $U \in \mathcal{T}|_{f(Y)} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{T} : U = f(Y) \cap W \Rightarrow$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(W \cap f(Y)) = Y \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(W)$$

que es abierto en $f^{-1}\mathcal{T}$.

- Abierta: Sea $U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{T} : f^{-1}W = U$. Aplicando f :

$$fU = ff^{-1}W = W \cap f(Y) \stackrel{\text{ab.}}{\subset} f(Y)$$

es decir que fU es abierto en $f(Y)$.

- $\Leftarrow)$ Veamos la doble contención:

- $\subset)$ Sea $U \in \mathcal{T}' \stackrel{\text{ab.}}{\implies} fU \in \mathcal{T}|_{f(Y)}$, es decir, $\exists W \in \mathcal{T}|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$. Por tanto, $U \in f^{-1}\mathcal{T}$.
- $\supset)$ Sea $U \in f^{-1}\mathcal{T} \stackrel{\text{def.}}{\implies} \exists W \in \mathcal{T}|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$. Como f es continua en \mathcal{T}' , $U = f^{-1}W \in \mathcal{T}'$.

Observación:

1. $f : Y \rightarrow X$ 1 – 1 cont. + $\begin{cases} \text{abierto} \Rightarrow \text{inmersión} \\ \text{cerrado} \Rightarrow \text{inmersión} \end{cases}$

Demostración:

- Abierto en $X \Rightarrow$ abierto en $f(Y)$.
- Cerrado en $X \Rightarrow$ cerrado en $f(Y)$.

2. $f : Y \rightarrow X$ inmersión: $\begin{cases} \text{abierto} \Leftrightarrow f(Y) \text{ abierto en } X \\ \text{cerrado} \Leftrightarrow f(Y) \text{ cerrado en } X \end{cases}$

Demostración:

- $f(Y) \stackrel{\text{ab.}}{\subset} X : V = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow fV = \overbrace{U \cap f(Y)}^{\text{inter. abiertos}} \in \mathcal{T}$.
- $f(Y) \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X : C \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow Y \setminus C = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow f(C) = \underbrace{(X \setminus U) \cap f(Y)}_{\text{inter. cerrados}} \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X$

3. Tenemos como posibilidades:

- Inmersión + /ab. + /cerr.
- Inmersión + ab. + /cerr.
- Inmersión + /ab. + cerr.

Observación:

Las inmersiones permiten considerar unos espacios como subespacios de otros. Las frases “el plano proyectivo real no es un subespacio de \mathbb{R}^3 ”, “la esfera no es un subespacio de \mathbb{R}^2 ”, “el plano proyectivo real es un subespacio de \mathbb{R}^4 ” se refieren a esto: cuándo hay o no hay una inmersión del primer espacio en el segundo, es decir, un subespacio del segundo homeomorfismo al primero. Es un problema fundamental de la topología y de la geometría.

Imágenes directas

Supongamos que tenemos $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ y buscamos hacerla continua. Trivialmente, podemos hacer que la topología en X sea la trivial, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos la topología más fina que haga f continua.

Definición

Llamamos **topología de la imagen directa** a: $f\mathcal{T} = \{V \subset Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}\}$.

Proposición

1. Es topología.

2. Máxima.

Demostración:

1. Trivial.

2. Sea \mathcal{T}' tal que haga f continua. Veamos que $\mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$.

Tomamos $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow \exists W \in \mathcal{T}' : f^{-1}U = W$. Por definición de $f\mathcal{T}$, ya tenemos que $U \in f\mathcal{T}$ (porque $W \in Y$).

Observación:

Con esta definición, f será continua.

Caracterización de la imagen directa

Veamos ahora una caracterización de la topología que acabamos de introducir.

Teorema (Propiedad universal de las identificaciones)

Sean $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ y $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$. Entonces:

$$\mathcal{T}' = f\mathcal{T} \Leftrightarrow$$

$$\forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow g \circ f \text{ cont.}] \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\
 g \circ f \searrow & & \downarrow g \\
 & & (Z, \mathcal{T}'')
 \end{array}$$

Figura 3.2: Ilustración de la composición propuesta

Demostración:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow g \circ f$ cont. (Composición de continuas)
- $g \circ f$ cont. $\Rightarrow g$ cont. ($W \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}W) = \underbrace{(g \circ f)^{-1}}_{\text{cont.}} W \in \mathcal{T} \stackrel{\mathcal{T}' = f\mathcal{T}}{\Rightarrow} g^{-1}W \in \mathcal{T}'$)

2. Por otro lado, veamos la unicidad:

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\
 g \circ f = f \searrow & & \downarrow id \\
 & & (Y, \mathcal{T}'')
 \end{array}$$

Como id será continua, aplicamos 3.2 y tenemos que $g \circ f = f$ es continua. Al ser $f\mathcal{T}$ la más fina $\Rightarrow \mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$.

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\
 f \text{ cont.} \searrow & & \downarrow id \\
 & & (Y, f\mathcal{T})
 \end{array}$$

Como f es continua por definición de $f\mathcal{T}$, aplicamos 3.2 y tenemos que esta id es continua. Por esta razón, $f\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Enunciado

Demostrar (ii) sin usar que $f\mathcal{T}$ es la más fina (usar que cumple la caracterización)

Observación:

$$f(X) \text{ es abierto y cerrado en } f\mathcal{T} : \begin{cases} \forall y \in Y \setminus f(X), f^{-1}y = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \{y\} \in f\mathcal{T} \\ f^{-1}f(X) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow f(X) \in f\mathcal{T} \end{cases}$$

Identificaciones

Veamos ahora un caso de especial relevancia:

$f : X \rightarrow Y$ sobreyectiva.

Para entender los abiertos de una imagen directa es conveniente representarlos en el dominio. El concepto es conjuntista en realidad:

Conjuntos saturados

Conjuntos saturados

Definición

Un conjunto $A \subset X$ es **saturado** (respecto de f) si $f^{-1}f(A) = A$.

Proposición

Los abiertos de $f\mathcal{T}$ son las imágenes de los abiertos saturados de \mathcal{T} :

$$U \in f\mathcal{T} \Leftrightarrow \exists W \in \mathcal{T}, \text{ saturado} : fW = U.$$

Demostración:

- $\Rightarrow)$ $V \in f\mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}V \in \mathcal{T}$ y $V \stackrel{f \text{ sobre}}{\cong} f^{-1}fV$, es decir, que $f^{-1}V$ es saturado.
- $\Leftarrow)$ Sea $V \in Y : \exists U \in \mathcal{T}$, saturado tal que: $fU = V$. Debemos ver que $f^{-1}V \in \mathcal{T}$.
Como $f^{-1}V = f^{-1}fU \stackrel{\text{sat.}}{=} U \in \mathcal{T}$ ya lo tenemos.

Observación:

Los abiertos no saturados de X pueden tener imágenes no abiertas de Y .

Ejemplo:

1. Sea:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 = Y \\ t &\mapsto \underbrace{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}_{\exp(2\pi i t)} \end{aligned}$$

que geométricamente es:

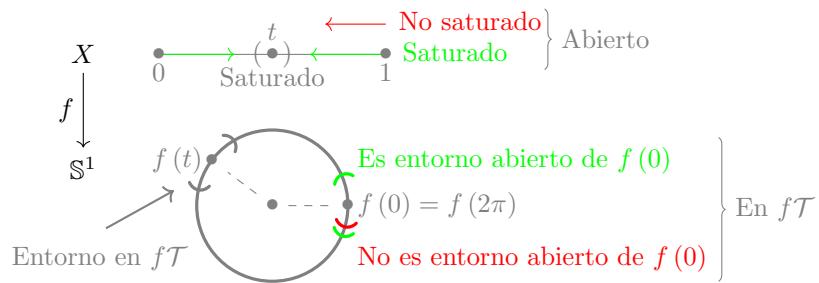


Figura 3.3: La topología imagen directa es la usual en \mathbb{S}^1

2. Tenemos:

$$\begin{aligned} f : R = [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow C \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 \\ (s, t) &\mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t). \end{aligned}$$

que geométricamente es:

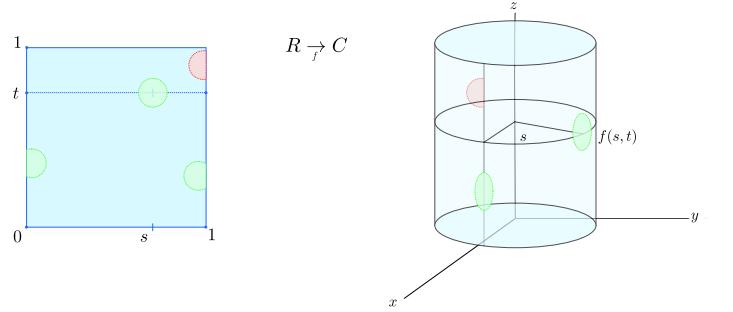


Figura 3.4: Analizando los abiertos saturados y no saturados se concluye que la topología imagen directa es la usual en el tronco del cilindro.

Identificaciones

Definición

Una aplicación continua sobre $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ tal que $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ se llama **identificación**

Observación:

1. Identificación: $V^{\text{ab}} \subset Y \Leftrightarrow f^{-1}V^{\text{ab}} \subset X$

Continua: $V^{\text{ab}} \subset Y \Rightarrow f^{-1}V^{\text{ab}} \subset X$

2. Sea $f : X \rightarrow Y$ sobreyectiva continua. Será identificación si además es:

- Abierta.

Demostración:

Por (1).

- Cerrada.

Demostración:

$$f^{-1}V^{\text{ab}} \subset X \stackrel{\text{cerr.}}{\Rightarrow} \underbrace{f(X \setminus f^{-1}(V))}_{\substack{\text{sobr.} \\ Y \setminus V}} \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow V^{\text{ab}} \subset Y$$

3. Tenemos como posibilidades:

- Identificación + /ab. + /cerr.
- Identificación + ab. + /cerr.
- Identificación + /ab. + cerr.

Cocientes

Definición (Relación de inyectividad)

Llamamos **relación de inyectividad** a aquella relación de equivalencia que viene dada por una función f tal que dos elementos están relacionados si comparten imagen:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Definición (Proyección canónica)

Llamamos *proyección canónica* respecto de una relación de equivalencia a la aplicación:

$$\begin{aligned} p : X &\rightarrow X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

donde $[x]$ es la clase de equivalencia de x .

Con esto vemos que dentro de las identificaciones tenemos el caso particular del cociente:

$$p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow X/\sim.$$

Con esto definimos:

Definición (Topología cociente)

Llamamos *topología cociente* a:

$$\mathcal{T}_{/\sim} := \left\{ U \subset X/\sim : p^{-1}(U) \in \mathcal{T} \right\}$$

que viene a ser la topología imagen directa por p .

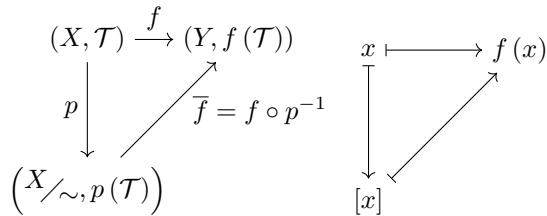


Figura 3.5: Representación de la composición del cociente

Observación:

La relación de equivalencia que vamos a usar es la que viene dada por la relación de inyectividad respecto de f . Por esta razón, \bar{f} será una biyección.

Demostración:

Sea $z \in Y$ como f es suprayectiva $\exists x \in X : f(x) = z$. A su vez, $y \in [x] \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \bar{f}([x]) = z$. Con esto, \bar{f} es sobreyectiva y bien definida.

Sean ahora $[x], [y] \in X/\sim$ tal que $\bar{f}[x] = \bar{f}[y] \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow [x] = [y]$. Por tanto, también es inyectiva.

Proposición

1. $\exists \bar{f} \Leftrightarrow x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$
2. $\exists \bar{f} : \bar{f} \text{ continua} \Leftrightarrow f \text{ continua.}$
3. $\exists \bar{f} : \bar{f} \begin{cases} \text{sobre.} \\ \text{iny. 1-1} \end{cases} \Leftrightarrow f \begin{cases} \text{sobre.} \\ x \sim y \Leftrightarrow f(x) \sim f(y) \end{cases}$
4. $\bar{f} \text{ homeomorfa} \Leftrightarrow f \text{ identificación.}$

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\quad f \quad} & (Y, \mathcal{T}') \\
 p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 (X/\sim, \bar{\mathcal{T}}) & &
 \end{array}$$

ident.
homeo.

Figura 3.6: Relación entre el cociente y una identificación.

Demostración:

1. Por la definición de \sim y de \bar{f} .
2. Sea \bar{f} continua. Tomemos $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow \bar{f}^{-1}U \in \bar{\mathcal{T}}$. Como p es continua por definición de $\bar{\mathcal{T}}$, $f^{-1}U = p^{-1}\bar{f}^{-1}U \in \mathcal{T}$. Por lo que f es continua.
 Sea ahora f continua. Tomemos $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow W = f^{-1}U \in \mathcal{T}$. Al ser p sobreyectiva $W = p^{-1}pW \in \bar{\mathcal{T}}$ (ya que $p^{-1}(pW) \in \mathcal{T}$ y la definición de $\bar{\mathcal{T}}$).
3. (Anterior observación) Si \bar{f} es inyectiva 1-1 $\Rightarrow \underbrace{\bar{f}[x]}_{\Leftrightarrow f(x) \sim f(y)} = \underbrace{\bar{f}[y]}_{\Leftrightarrow x \sim y} \Rightarrow \underbrace{[x]}_{\Leftrightarrow f(x) \sim f(y)} = \underbrace{[y]}_{\Leftrightarrow x \sim y}$

Política general:

Los cocientes son cómodos para definir espacios, las identificaciones son mejores para estudiar las propiedades que tenemos. Conviene pues tener triángulos como el anterior (3.6).

Se puede contemplar Y como un modelo del cociente. Es decir, utilizamos el cociente como “modelo teórico” y la identificación como “modelo geométrico”. Esto no siempre será posible ya que dependerá de ciertas propiedades geométricas que veremos.

Ejemplo: (Anteriores)

- Circunferencia y el cilindro como cocientes:

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\
 p \downarrow & \nearrow \text{cont.} & \\
 [0, 1]/_0 \equiv 1 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 [0, 1] \times [0, 1] & \longrightarrow & C \subset \mathbb{R}^3 \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 [0, 1] \times [0, 1]/(0, t) \equiv (1, t) & &
 \end{array}$$

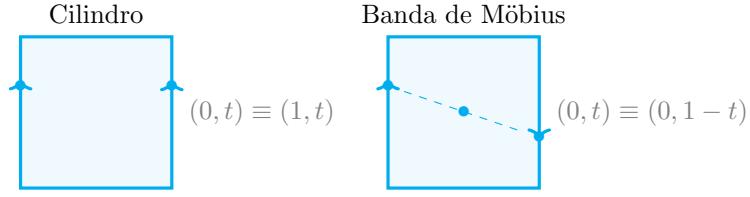
Figura 3.7: En el primero tomamos un segmento de longitud 1 y “pegamos” los extremos, lo que nos da una figura equivalente a un círculo. En el segundo, tomamos un rectángulo de área 1 y “pegamos” el lado izquierdo con el derecho directamente.

Para la circunferencia tenemos:

$$X/\sim = \{\{t\} : 0 < t < 1, \{0, 1\}\}$$

la biyección entre el cociente y la esfera se da por el punto (3) de la anterior proposición y la continuidad por (2). Por último, la identificación se da por el anterior ejemplo.

- Para representar cocientes se utilizan dibujos que indican las identificaciones en los espacios de partida:



Productos (finitos)

Supongamos que tenemos $p_i : X_1 \times \dots \times X_r = Y \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i), 1 \leq i \leq r$ y buscamos hacerlas continuas. Trivialmente, podemos hacer que la topología en X_i sea la discreta, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos las topologías menos finas que hagan p_i continuas.

Que p_i sea continua quiere decir que $\forall U_i \in \mathcal{T}_i : p_i^{-1}U_i = X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_r$ debe ser abierto, es decir, que todos lo sean. Por tanto, $\bigcap_{i=1}^r p_i^{-1}U_i = U_1 \times \dots \times U_r$ debe ser abierto, pero no es topología (la unión de productos no tiene porque ser producto). Por tanto, definimos:

Definición

Llamamos **topología producto**, $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_r$, a aquella que viene determinada por la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

Ejemplo:

La \mathcal{T}_u en \mathbb{R}^n es el producto de la usual en cada factor \mathbb{R} de \mathbb{R}^n . La base de la definición de topología producto está formada por las “bolas cuadradas”, que son productos de intervalos.

Teorema (Propiedad universal de la topología producto)

Sea $g : (Z, \mathcal{T}'') \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ y $p_i : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$. Entonces:

$$\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T} \Leftrightarrow$$

$$\forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \quad (3.3)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\
 g = (g_1, \dots, g_r) \downarrow & \nearrow g_i = p_i \circ g & \\
 (Z, \mathcal{T}'') & &
 \end{array}$$

Figura 3.8: Ilustración de la composición propuesta

Demostración:

- $\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T} :$

- $g \text{ cont.} \Rightarrow g_i \text{ cont.}$ (Todas sus componentes son continuas o composición de continuas)
- $g_i \text{ cont.} \Rightarrow g^{-1}(U_1 \times \dots \times U_r) = \underbrace{g_1^{-1}(U_1)}_{\mathcal{T}''} \cap \dots \cap \underbrace{g_r^{-1}(U_r)}_{\mathcal{T}''} \in \mathcal{T}''$. (Intersección finita de abiertos)

2. Por otro lado, veamos la unicidad:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ id \text{ cont.} \uparrow & & \nearrow pr_i \\ (Y, \mathcal{T}') & & \end{array}$$

Como id será continua, aplicamos 3.3 y tenemos que $g \circ p_i = pr_i$ es continua. Al ser $\prod_i \mathcal{T}_i$ la menos fina $\Rightarrow \mathcal{T}' \supset \prod_i \mathcal{T}_i$.

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ id \uparrow & & \nearrow pr_i \text{ cont.} \\ (Y, \prod_i \mathcal{T}_i) & & \end{array}$$

Como pr_i es continua por definición de $\prod_i \mathcal{T}_i$, aplicamos 3.3 y tenemos que esta id es continua. Por esta razón, $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i \supset \mathcal{T}'$.

Enunciado

Demostrar (ii) sin usar que $\prod_i \mathcal{T}_i$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización)

Ejemplo:

La \mathcal{T}_{rad} no es producto.

Demostración:

Tomamos un abierto y veamos que no es producto.

Supongamos que sí: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \text{arco} \ni (0,0) \Rightarrow U_1 \times U_2 \subset U$ y $(0,0) \in U_1 \times U_2 \subset \mathcal{T}_{\text{rad}}$. Tomando $x_1 \in U_1$ y vemos $x = x_1 \cap r$ con r línea vertical por x_1 con esto $y_1 = x \cap l$ con l línea horizontal por x no pertenece a U (de lo contrario el producto y_1 con $x_1 = x$ pertenecería). Por tanto, $I_k = [(0, y_k), (x_k, y_k)]$ no tiene ningún punto en $U_1 \times U_2$. Haciendo converger I_k hacia 0 para cualquier recta por 0 tendremos un I_k que tenga intersección con la recta, es decir, la recta tendrá un punto que no pertenezca al abierto y U no sería abierto ¡!

Con esto, $\nexists x_k \rightarrow 0 \Rightarrow$ habrá un intervalo $(0, \varepsilon)$ en el eje x que no pertenece a U_1 y tendremos un “vacío” que de nuevo incumple que U es abierto.

Proposición

1. $p_i : Y \rightarrow X_i$ es abierta.

2. $X_j \xrightarrow{\alpha_j} Y : x_j \mapsto (a_1, \dots, x_j, \dots, a_r)$ es inmersión ($a_i \in X_i$ fijados). La llamamos **aplicación parcial**.

Demostración:

1. Nos vale con probarlo para una base: $p_i(U_1 \times \dots \times U_r) = U_i$

2. Trivialmente es inyectiva y continua. Por último, $X_i \rightarrow j(X_i)$ es homeomorfismo, es decir, es abierta porque:

$$\begin{cases} \alpha_j(X_j) = \{a_1\} \times \dots \times X_j \times \dots \times \{a_r\} \\ \alpha_j(U_j) = \{a_1\} \times \dots \times U_j \times \dots \times \{a_r\} = \alpha_j(X_j) \cap (X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_r) \end{cases}$$

que es abierto porque estamos restringiendo la topología producto a $\{a_1\} \times \dots \times X_i \times \dots \times \{a_r\} = \alpha_j(X_j)$.

Ejemplo:

El ejemplo ahora de \mathcal{T}_{rad} simplemente es porque si fuese producto sus elementos deberían ser la usual y el producto de usuales es usual que es distinta de la radial.

Política general:

En una topología producto todo “se genera en productos”.

Ejemplo:

- Bases de entornos: $\mathcal{V}^a = \mathcal{V}^{a_1} \times \dots \times \mathcal{V}^{a_r} \stackrel{\text{mut}??}{=} \{V_1 \times \dots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}^{a_i}\} (a \in Y)$.
- Base de abiertos: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_r = \{B_1 \times \dots \times B_r : B_i \in \mathcal{B}_i\}$ (esto repite la construcción de $\prod_i \mathcal{T}_i$)

Sumas (finitas)

Supongamos que tenemos $e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow Y = X_1 + \dots + X_r = (X_1 \times \{1\}) \cup \dots \cup (X_r \times \{r\}), 1 \leq i \leq r : x_i \mapsto (x_i, i)$ (ponemos los índices para hacerlos disjuntos) y buscamos hacerlas continuas. Trivialmente, podemos hacer que la topología en Y sea la trivial, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos la topología más fina que haga f continua.

Debido a que, $\forall U_i \in \mathcal{T}_i, e_i^{-1}(U_i \times \{i\})$ debe ser abierto, podemos definir lo siguiente:

Definición

Llamamos **topología suma**, $\sum_{i=1}^r \mathcal{T}_i$, a aquella que viene determinada por la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \{1\}, \dots, U_r \times \{r\} : U_i \in \mathcal{T}_i, 1 \leq i \leq r\}$$

Observación:

Tenemos que los $\{i\} \times X_i \in \sum_{i=1}^r \mathcal{T}_i$ son sumandos abiertos y cerrados (porque el complementario es la intersección del resto de sumandos que son abiertos?).

Proposición

Con la anterior definición sabemos que

$$e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X_i \times \{i\}, \mathcal{T}|_{X_i \times \{i\}}), \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

es inmersión abierta y cerrada.

Demostración:

- Inmersión abierta: $e_i(U_i) = U_i \times \{i\} \in \mathcal{T}$
- Cerrada: $Y \setminus e_i(X_i) = Y \setminus X_i \times \{i\} = \bigcup_{j \neq i} X_j \times \{j\} \in \mathcal{T}$

Teorema (Caracterización topología suma)

Sea $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ y $e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r &\Leftrightarrow \\ \forall g [g \text{ cont.} &\Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{T}_i) & \xrightarrow{e_i} & (Y, \mathcal{T}') \\ g|_{X_i} = g \circ e_i & \searrow & \downarrow g \\ & & (Z, \mathcal{T}'') \end{array}$$

Figura 3.9: Ilustración de la composición propuesta

Demostración:

Análoga a las anteriores construcciones.

Política general:

Localmente $Y = X_1 + \dots + X_r$ es como sea cada X_i . Por ejemplo, las bases de entornos de Y son las de los sumandos. Globalmente, se trata cada sumando separadamente. Por ejemplo, las bases de abiertos de los sumandos se unen para dar una base de abiertos de Y . Olvidando el tecnicismo $X_i \times \{i\} \equiv X_i$:

Y es unión disjunta de los sumandos
Los sumando son subespacios abiertos y cerrados de Y

Es un formalismo para hacer cómodamente otras construcciones. Por ejemplo, “pegar dos discos por sus bordes” sería:

Disco $D \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1$, borde $\partial D = \mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$

$$D_1 + D_2 / \sim \quad \overbrace{(p, 1)}^{\in \partial D} \sim (p, 2).$$

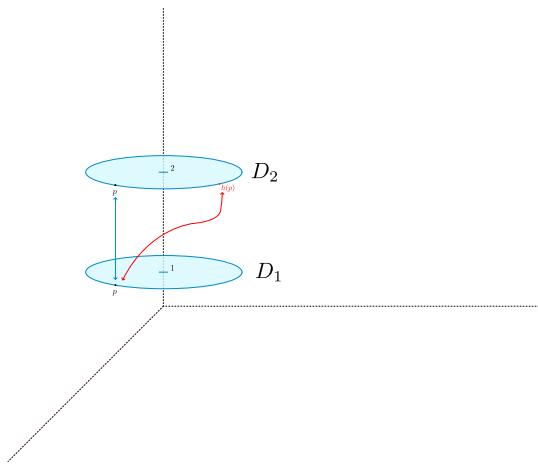


Figura 3.10: Dos discos

y más elaborado $h : \partial D \xrightarrow{\text{homeo.}} \partial D$ con $\overbrace{p}^{\in \partial D} \sim h(p)$.

Finalmente, hay otros conceptos de “suma” más significativos que veremos en algún ejemplo.

Espacios proyectivos reales

Geometría lineal

En primer lugar, veamos un repaso de lo visto en geometría lineal sobre espacios proyectivos.

Definición (Espacio proyectivo real)

Usando \sim , proporcionalidad:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \Rightarrow \mathbb{P}^n = \{\text{rectas vectoriales de } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Que en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n). \end{aligned}$$

Observación:

Las ecuaciones serán de la forma: $h \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ homogénea $\Rightarrow \begin{cases} h(x) = 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$ está bien definido en \mathbb{P}^n . Sabemos que el grado de la ecuación homogénea h nos dará lugar a:

- Grado 1: Variedades proyectivas lineales.
- Grado 2: Cuádricas proyectivas.
- Grado arbitrario: Variedades proyectivas algebraicas.

Definición (Cartas afines)

Sea $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano proyectivo. Entonces, tenemos un hiperplano lineal $\hat{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con una forma lineal asociada $h = 0$, de la siguiente forma:

$$H = \hat{H} \setminus \{0\} / \sim$$

Decimos que H es **hiperplano del infinito** de la **carta afín** $U = \mathbb{P}^n \setminus H$.

Proposición

La aplicación

$$\pi| : \underbrace{\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{Hiperplano afín}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{P}^n \setminus H}_{\{h \neq 0\}} = U$$

es una biyección.

Topología de espacio proyectivos

Para la topología en U usaremos la imagen directa de la usual en $\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Proposición

Con la anterior suposición tenemos que la aplicación:

$$\pi| : \{h = 1\} \rightarrow U$$

es un homeomorfismo.

Demostración:

Ya sabemos que es biyección por lo que queda ver que es continua y abierta/cerrada. Continua lo será por tener U la topología imagen directa. Y abierta porque???

Proposición

La siguiente definición es topología en \mathbb{P}^n :

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Demostración:

Ni idea

Proposición (Topología en \mathbb{P}^n)

- Cociente de la usual vía $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
- “Suma” de las definidas en las cartas afines:

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Estas dos topologías coinciden.

Demostración:

1. U es abierto en la topología cociente ya que $\pi^{-1}U = \{h \neq 0\}$ es abierto usual.
2. La topología cociente en U coincide con la topología de carta afín:

$$\begin{array}{ccc}
 W \subset U : \pi^{-1}W = \text{cono sobre } (\underbrace{\pi^{-1}W}_{\substack{\text{para la top.} \\ \text{cociente}}} \cap \{h = 1\}) & \Downarrow & = (\underbrace{\pi|_{\{h=1\}}}_{\substack{\text{para la top.} \\ \text{de carta afín}}})^{-1}W \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 \pi^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow (\pi|_{\{h=1\}})^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} \{h = 1\} & & \Updownarrow \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 W \text{ abierto} & & W \text{ abierto} \\
 \text{top. cociente} & & \text{top. carta} \\
 & & \text{afín}
 \end{array}$$

Figura 3.11: Equivalencia entre las topologías cociente y suma.

1. + 2. \Rightarrow La top. cociente está generada por las topologías de las cartas afines, que forman un recubrimiento abierto de \mathbb{P}^n .

Proposición

En este caso, la $\mathcal{T}_{\text{cociente}}$ tendrá como base: $\left\{ \pi(B) \subset U : B \overset{\text{ab.}}{\subset} \{h = 1\}, h \in \mathbb{P}[x_0, \dots, x_n] \right\}$ homogéneo de grado 1 : $G = \bigcup_U G \cap U$ abierto en \mathbb{P}^n y abierto en U .

Observación:

En $U_1 \cap U_2$ la topología definida por $\pi_1 =$ definida por π_2 .

Observación:

De lo anterior deducimos:

1. U_1, U_2 dos cartas afines $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ abiertos.

Demostración:

$$\text{Cartas afines: } U_i = \{h_1 \neq 0\} \begin{cases} \pi| : \{h_1 = 1\} \rightarrow U_1 \text{ homeo.} \\ (\pi_1)^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} \stackrel{\text{ab.}}{\subset} \{h_1 = 1\} \end{cases}$$

2. Las topologías de U_1 y U_2 coinciden en $U_1 \cap U_2$.

Demostración:

De nuevo conviene entenderlo con cartas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} & \xrightarrow[\text{homeo?}]{\text{homeo. para } U_1} & U_1 \cap U_2 \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 \neq 0, h_2 = 1\} & \xrightarrow[\text{homeo. para } U_2]{} & \end{array} \left. \right\} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} x = y/h_1(y) \\ \uparrow \downarrow \\ y = x/h_2(x) \end{array} \quad \text{homeos usuales}$$

Definición (Atlas afín canónico)

No se suelen utilizar todas las cartas afines: $n + 1$ distintas ya cubren \mathbb{P}^n . Típicamente $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$ con:

$$U_i = \{x_i \neq 0\} \leftrightarrow \underbrace{\{x_i = 1\}}_{\equiv \mathbb{R}^n} : (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \underbrace{1}_{\mathbb{R}^n \rightarrow}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), 0 \leq i \leq n$$

Proposición (Cociente antipodal)

Toda recta de \mathbb{R}^{n+1} corta a $\mathbb{S}^n : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$ en dos puntos antipodales, así que denotamos un “sub” cociente, que es también identificación.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \supset & \mathbb{S}^n \\ \downarrow & \nearrow \pi| & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

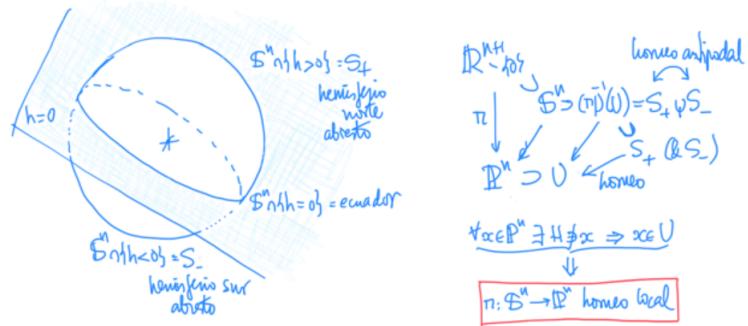
Figura 3.12: Cociente antipodal de \mathbb{S}^n

Demostración:

Como antes tenemos conos: $\pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}W}_{=(\pi/\mathbb{S}^n)^{-1}W}$.

Observación:

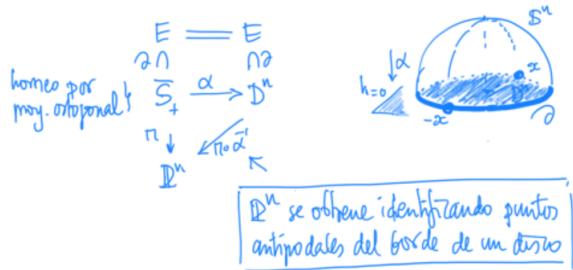
Las cartas afines tienen una representación muy conveniente:



Proposición (Cociente de un disco)

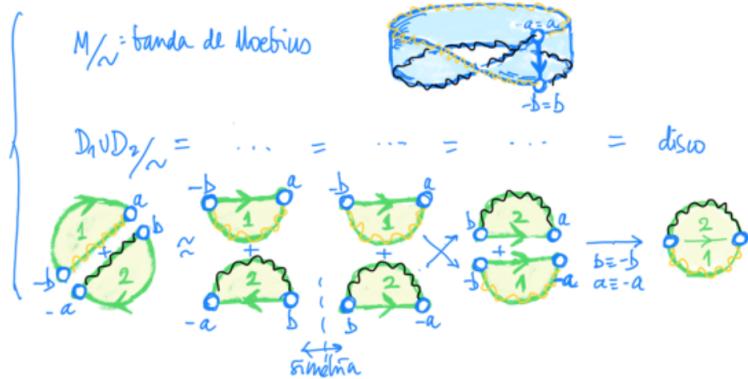
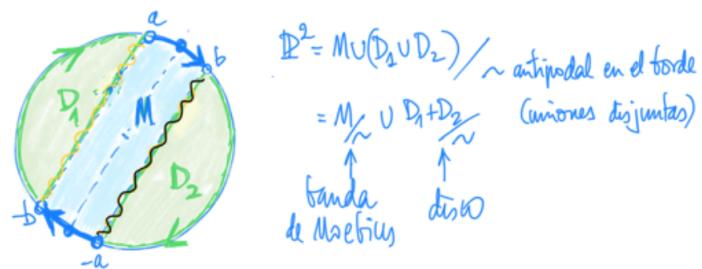
Consideremos un disco:

$$E = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \partial \left\{ \begin{array}{l} \overline{S}_+ = S^n \cap \{h \geq 0\} \text{ hemisferio cerrado.} \\ D^n = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \text{ disco.} \end{array} \right.$$



Ejemplo:

$$\mathbb{P}^2 \setminus D^2 = \text{banda de Möbius.}$$



Separación

Concepto

Definición

Un espacio X es **Hausdorff** o T_2 si cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen entornos disjuntos:

$$\exists V^x, V^y : V^x \cap V^y = \emptyset$$

Hay otras formas de separación, más débiles o más fuertes, pero nos contentaremos con ésta al ser la más intuitiva.

Observación:

1. Si existen entornos disjuntos, existen entornos abiertos disjuntos.

Demostración:

$$\forall V^{\text{ent.}}, \exists U^{\text{ent. ab.}} : V \supset U$$

2. Si X es Hausdorff, los puntos son cerrados.

Demostración:

Sea $x \in X$

$$\forall y \in X \setminus \{x\}, \exists U^y \ni x \Rightarrow X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U^y \text{ es abierto.}$$

3. $(X, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ no es Hausdorff. Sin embargo, tiene puntos cerrados.

Demostración:

No es Hausdorff porque, si X es infinito, dos abiertos cualesquiera se cortan. Sean $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\text{CF}} \Rightarrow X \setminus U_1, X \setminus U_2$ son finitos y como X es infinito $\Rightarrow \exists x \notin X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2 \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2$.

4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es Hausdorff: $x \neq y \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ si $\varepsilon \leq \|x - y\|/2$. Como $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_{\text{rad}}$, esta última también es Hausdorff.

5. En (X, \mathcal{T}_a) el punto a no es cerrado. Por lo tanto, no es Hausdorff.

Demostración:

Veamos que a no es cerrado: $a \notin X \setminus \{a\} \Rightarrow X \setminus \{a\}$ no es abierto. $\forall x \neq a, U^x \supset \{a, x\} \ni a$.

Proposición

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas con Y Hausdorff $\Rightarrow \{f = g\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Demostración:

En primer lugar, veamos que si un punto cumple $f(x) \neq g(x) \Rightarrow$ tiene un entorno cuyos puntos cumplen todos que $f(y) \neq g(y)$. Con esto, tendremos que $\{f \neq g\}$ es entorno de todos sus puntos y, por tanto, abierto.

1. $f(x) \neq g(x) \xrightarrow{T_2} \exists V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset \xrightarrow{\text{cont.}} f^{-1}V^{f(x)} \cap g^{-1}V^{g(x)} = W^x$ entorno de x (cada uno es entorno de x y no son vacíos porque x pertenece a ellos).
 2. Vemos que $W^x \cap \{f = g\} = \emptyset : y \in V^x \Rightarrow \begin{cases} f(y) \in V^{f(x)} \\ g(y) \in V^{g(x)} \end{cases} \xrightarrow{*} f(y) \neq g(y)$
1. + 2. $X \setminus \{f = g\} = \{f \neq g\}$ es entorno de todos sus puntos, luego abierto, es decir, $\{f = g\}$ es cerrado.

Corolario

Si $\{f = g\}$ es un subconjunto denso, es decir, $\exists A \subset X : \overline{A} = X$ y $\{f = g\}_A$, entonces $f \equiv g$

Demostración:

$$f|_A = g|_A \Rightarrow \{f = g\} \supset A \xrightarrow{\text{prop.}} \overline{\{f = g\}} = \{f = g\} \supset \overline{A} = X \Rightarrow [X = \{f = g\}].$$

Observación:

Este último resultado nos permite extender de forma única una función continua f a su adherencia.

Ejemplo: (Importante)

Un caso importante en el que Y es Hausdorff es:

$$f : X \rightarrow Y = \mathbb{R}$$

Observación:

$f : X \rightarrow Y$ continua con Y Hausdorff $\Rightarrow f^{-1}(y)$ cerrado $\forall y \in Y$.

Demostración:

Porque los puntos de Y son cerrados y la preimagen de cerrados por continuidad es cerrada.

Tabla de comportamiento

Se trata de saber si la propiedad se conserva por las construcciones que hemos visto.

Se tiene que:

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
T_2	\Rightarrow	\times	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow

Cuadro 4.1: Tabla que nos indica como se conserva la propiedad Hausdorff en distintas construcciones.

Demostración:

- Veamos como los subespacios conservan la propiedad:

$$\text{Sea } Y \subset X = T_2 : y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{V^{y_1}}_{\text{En } X} \cap \underbrace{V^{y_2}}_{\text{En } X} = \emptyset \Rightarrow \underbrace{(V^{y_1} \cap Y)}_{\text{En } Y} \cap \underbrace{(V^{y_2} \cap Y)}_{\text{En } Y} = \emptyset.$$

- Veamos un contraejemplo de un cociente que no conserva Hausdorff:

Sea $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \begin{cases} y_1 = \mathbb{Q} \in Y \\ y_2 = \sqrt{2} \in Y \end{cases} \nexists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset$: todo entorno abierto de $\sqrt{2}$ contiene racionales, luego al saturar, contiene \mathbb{Q} . Con esto, todo abierto en el cociente (recordemos que en el cociente los abiertos son imágenes por proyección de los saturados) contiene este punto y, por tanto, la intersección nunca es disjunta.

- Veamos que el producto conserva la propiedad:

X y Y son ambos $T_2 \Leftrightarrow X \times Y$ Hausdorff.

$\Rightarrow)$ Tomamos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Esto es posible en dos casos:

- $x_1 \neq x_2$. Como X es $T_2 \Rightarrow \exists V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times Y) \cap (V^{x_2} \times Y) = \emptyset$
- $y_1 \neq y_2$ podemos hacer lo mismo porque Y es también T_2 .

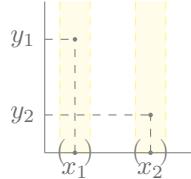


Figura 4.1: Siendo $x_1 \neq x_2$ vemos que es posible separar los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) simplemente separando en el factor X del producto.

$\Leftarrow)$ Sabemos que $X \approx X \times \{y_0\} \subset X \times Y$ que es $T_2 \xrightarrow{1.} X \times \{y_0\}$ es T_2 y, por homeomorfismo, X también.

- Veamos que la suma conserva la propiedad:

X y Y son ambos $T_2 \Leftrightarrow X + Y$ es Hausdorff.

Único comentario: $x \in X$ e $y \in Y \Rightarrow X = V^x, Y = V^y$ y $X \cap Y = \emptyset$ (recordemos que hemos definido la suma como unión disjunta).

Numerabilidad

Axiomas

I Axioma

Definición (I Ax.)

X es **1er axioma** si $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base numerable de entornos.

Observación:

1. $\mathcal{B}^x = \{U_k = \dot{V}_k\}_{k \geq 1}$, base numerable de entornos de abiertos.
2. $\mathcal{W}^x = \{W_k = U_1 \cap \dots \cap U_k\}_{k \geq 1}$, base numerable de entornos abiertos encajados.

Demostración:

Sea $\{V_k^x, k \geq 1\}$ base de entornos abiertos. Hacemos que: $W_1^x = V_1^x$, $W_2^x = V_1^x \cap V_2^x \dots W_k^x = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i^x$ y tenemos que:

$$W_{k+1}^x \subset W_k^x$$

que mantiene el ser base de entornos abiertos ($x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i^x$).

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u$ cumple el I Axioma

Demostración:

Sea $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{W}^x = \{B(x, \frac{1}{k}) : k \geq 1\}$ es base de entornos.

2. $(X, \mathcal{T}_a), (X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$ cumplen el I Axioma.

3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ no es I Axioma.

Demostración:

Sabemos que $\{W_k\}$ no es base de entornos de x si $\exists U^x \not\supseteq W_k, \forall k \geq 1, \forall k \exists \underbrace{x_k}_{\neq x} \in W_k \setminus U^x$.

Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que $\exists V^x$ numerable \Rightarrow

$\exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1}$ abiertos encajados, $W_k = \mathbb{R} \setminus F_k$ finito $\Rightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k \Rightarrow U^x = \mathbb{R} \setminus \{y\} \not\supseteq W_k, \forall k \in \mathbb{N}$ (porque y pertenece a todos los W_k). Por tanto, tenemos un entorno que no contiene a ninguno W_k .

4. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{rad}})$ no es I axioma.

Demostración:
 Sea $\left\{ \underbrace{W_k}_{\ni x_0} : k \geq 1 \right\}$ y sea L_k : recta de pendiente $\frac{1}{k}$. Si hacemos $W_k \cap L_k \supset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ni x_k$ tal que $0 < \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k}$. Ya vimos que $U^{x_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_k : k \geq 1\}$ es abierto radial que no contiene ningún W_k ya que a estos pertenecen los x_k .

Definición (Límites)

Decimos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Leftrightarrow$

$$\forall U^x, \exists k_0 : k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in U^x$$

Observación:

1. X es Hausdorff $\Rightarrow \exists!$ límite.

Demostración:

$$x_k \rightarrow x \neq y, \exists U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \{x_k : k \geq k_0\} \subset U^x \text{ y } x_k \not\rightarrow y.$$

2. El I Axioma permite describir la topología con sucesiones:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset A : x_k \rightarrow x$$

Demostración:

\Rightarrow) Supongamos que $x \in \overline{A} \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1} \text{ encajados} \Rightarrow \exists x_k \in W_k \cap A \\ \forall U^x \underset{\text{base ent.}}{\supset} W_{k_0} \supset W_{k+1} \supset \dots \Rightarrow x_k \in U^x, \forall k \geq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_k \rightarrow x$$

\Leftarrow) Supongamos que $\exists \{x_k\} \subset A : x_k \rightarrow x$:

$$A \ni x_k \rightarrow x \Rightarrow \forall U^x, \exists x_{k_0} \in U^x \cap A$$

En general, los límites de sucesiones son poco útiles.

II Axioma

Definición (II Ax.)

X es **2º axioma** si $\exists \mathcal{B}$, base numerable de abiertos

Ejemplo:

- $\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_{\text{discr.}}$ en X no numerable no es II axioma.

Demostración:

En \mathcal{T}_a la base de abiertos es $\mathcal{B}_a = \{\{a, x\} : x \in X\}$, por tanto, si X no es numerable tampoco lo será esta base.

Por otro lado, en $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$ tenemos como base X que no es numerable.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es II Axioma ya que tenemos como base a: $\mathcal{B} = \{B(q, \frac{1}{k}) : q \in \mathbb{Q}^n, k \geq 1\}$.

Demostración:

Ejercicio.

Proposición

1. $\text{II Ax.} \Rightarrow \text{I Ax.}$
2. $\text{I Ax.} \not\Rightarrow \text{II Ax.}$

Demostración:

1. Sea la base de abiertos: $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow \mathcal{B}^x = \{B_k : x \in B_k\}$ es base de entornos $\forall x \in X$.
2. Tenemos como contraejemplo $(X, \mathcal{T}_{\text{discr.}})$ en X no numerable.

Separable

Definición (Separable)

X es **separable** si $\exists A \subset X$, numerable denso.

Ejemplo:

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es separable, porque \mathbb{Q}^n es denso.
- $(X, \mathcal{T}_{\text{discr.}})$, si X es no numerable, no es separable.
- \mathcal{T}_a sí es separable porque $\overline{\{a\}} = X$.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$, $\forall A \subset \mathbb{R}$, con A numerable infinito, es denso y, por tanto, separable.
- $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{rad}})$ también lo es.

Proposición

1. $\text{II Ax.} \Rightarrow \text{separable.}$
2. $\text{I Ax.} + \text{separable} \not\Rightarrow \text{II Ax.}$
3. $\text{I Ax.} \not\Rightarrow \text{separable.}$
4. $\text{Separable} \not\Rightarrow \text{I Ax.}$

Demostración:

1. $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow A = \{a_k : a_k \in B_k\}_{k \geq 1}$ corta a todo abierto (y, por tanto, denso).
2. Contraejemplo: (X, \mathcal{T}_a) , X no numerable.
3. Contraejemplo: Topología discreta en un espacio no numerable.
4. Contraejemplo: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}}) : \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

Lindelöf

Definición (Lindelöf)

X es **Lindelöf** si $\forall X = \bigcup_{i \in I} U_i$ (recubrimiento abierto), $\exists X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k}$ (subrecubrimiento numerable).

Esta forma débil de compacidad se menciona como complemento en los ejercicios.

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
I Ax.	✓	✗ abiertos ✓	✓	✓
II Ax.	✓	✗ abiertos ✓	✓	✓
Separable	✗ abiertos ✓	✓	✓	✓
Lindelöf	✗ cerrados ✓	✓	✗	✓

Cuadro 5.1: Tabla que nos indica como se comportan las propiedades que hemos visto en la anterior sección con las distintas construcciones. Las sumas y productos son finitos.

Demostración:

■ Subespacios:

- I Ax. y II Ax. se heredan a subespacios intersecando bases.
- Separable se hereda a subespacios abiertos intersecando el conjunto denso.
- Lindelöf se hereda a subespacios cerrados como la compacidad.
No en general: Sea Y no Lindelöf, $X = Y \cup \{w\}$ compacto, $\mathcal{B}^w = \{X \setminus F : F \subset Y\}$ con F finito.

■ Cocientes:

- $X = \mathbb{R}_u$ es I y II Axiomas, $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es I.

Demostración:

$\alpha = \mathbb{Z} \in Y$, $\exists \mathcal{W}^\alpha = \{W_k : k \geq 1\}$ abiertos saturados, $W_k \supseteq \mathbb{Z}$, $\forall k$

(Figura 5.1) $\Rightarrow U = \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_k : k \geq 1\}$ entorno abierto saturado de \mathbb{Z} , $U \not\supseteq W_k$, $\forall k$.

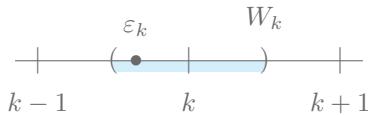


Figura 5.1: Si $\varepsilon_k \notin \mathbb{Z}$, vemos que aunque \mathbb{R}_u cumple el I y el II axioma, existe un cociente que no.

- Las aplicaciones continuas y abiertas conservan I y II.

Demostración:

La imagen de una base es una base.

- Las aplicaciones continuas conservan la separabilidad

Demostración:

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

- Las aplicaciones continuas conservan Lindelöf.

Demostración:

Como la compacidad, ya se sabe...

■ Productos/sumas (finitos):

- Para productos: producto finito de numerables es numerable.
- Para sumas: suma finita de numerables es numerable.

- Solo falla Lindelöf:
 - $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$ es Lindelöf (ejercicio no banal).
 - $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{[,]}^2)$ no es Lindelöf: si lo fuera, $L = \{x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ heredaría la propiedad, pero es discreto no numerable. (\perp)

Compacidad

Concepto y mantras

Definición

X es **compacto** si todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X$$

Observación:

Complementando lo anterior tenemos la propiedad de la intersección finita:

$$\begin{aligned} \emptyset = \bigcap_{i \in I} F_i &\Rightarrow \exists F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} = \emptyset \Rightarrow \\ \boxed{\forall F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset}. \end{aligned}$$

Proposición (Subespacios)

Sea $K \subset X$ (compacto) $\Rightarrow K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ con $U_i \overset{ab.}{\subset} X \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K$

Ejemplo:

1. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ es compacto $\Leftrightarrow K$ es cerrado y acotado (Heine-Borel).
2. $[a, b] \subset \mathbb{R}_u$ compacto. (\Rightarrow Heine-Borel por resultados generales).
3. Si es compacto y discreto \Rightarrow es finito

Demostración:

$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ es rec. abierto en $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$

4. $x_k \rightarrow x \Rightarrow K = \{x, x_k : k \geq 1\}$ es compacto.

Demostración:

$$\exists U_{i_0} \ni x \xrightarrow{\lim} \left. \begin{array}{l} x_k \in U_{i_0}, \forall k > k_0 \\ x_k \in U_{i_k}, \forall k \leq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow K \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k_0}}$$

5. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ compacto $\Leftrightarrow \forall A^\infty \subset K, A' \cap K \neq \emptyset$ (Bolzano-Weierstrass)

Proposición (Mantra 1)

Cerrado en compacto es compacto.

Demostración:

Sea $K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$,

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_i U_i \Rightarrow X = (X \setminus K) \cup \bigcup_i U_i \\ X \text{ comp.} \Rightarrow \exists (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X \supset K \\ \Rightarrow U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K. \end{aligned}$$

(Alternativa: Usar la propiedad de las intersecciones finitas)

Proposición (Mantra 2)

Infinito en compacto tiene puntos de acumulación.

Demostración:

Sea $A \subset X$ (compacto) con $A' = \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overbrace{\{ \text{puntos aislados} \}}^{\subset A} \cup \overbrace{A'}^{=\emptyset} = \{ \text{puntos aislados} \} = A \\ \Rightarrow A &\overset{\text{cerr.}}{\subset} X \text{ comp.} \Rightarrow \underbrace{A}_{=\{ \text{pts. aisl.} \}} \text{ es compacto y discreto} \Rightarrow \#A < +\infty. \end{aligned}$$

Proposición (Mantra 3)

La imagen continua de un compacto es compacta.

Demostración:

Sea $f : X \rightarrow Y$ con f continua y X compacto \Rightarrow

$$\begin{aligned} f(X) \times \bigcup_i V_i &\Rightarrow X = \bigcup_i f^{-1}V_i \Rightarrow \exists f^{-1}V_{i_1} \cup \dots \cup f^{-1}V_{i_r} = X \\ &\Rightarrow V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r} \supset f(X). \end{aligned}$$

Ejemplo: (!Muy importante!)

$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es compacto: La imagen continua de \mathbb{S}^n por la proyección antipodal.

Proposición (Mantra 4)

Un compacto en T_2 es cerrado.

Demostración:

Sea $K \subset X$ con K compacto y $X = T_2 \Rightarrow$

$$\forall x \in X \setminus K, \exists U^x \cap U^k = \emptyset \quad (6.1)$$

A su vez, $\forall y \in K, \exists U_y^x \cap U^y = \emptyset$ por $T_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_y U^y &\xrightarrow{\text{comp.}} K \subset U^{y_1} \cup \dots \cup U^{y_r} = U^k \\ &\Rightarrow x \in U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x = U^x. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando 6.1 \Rightarrow

$U^x \subset X \setminus K \wedge X \setminus K$ es entorno de $x \Rightarrow X \setminus K$ abierto.



Corolario

Dos compactos disjuntos en un T_2 se separan como puntos.

Demostración:

Ejercicio usando 6.1.

Proposición

Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, X compacto e $Y = T_2 \Rightarrow$ cerrada.

Demostración:

$$F^{\text{cerr.}} \subset X \xrightarrow{\text{M1}} F \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M3}} f(F) \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M4}} f(F) \text{ cerr.}$$

Corolario

Sea la f de la anterior proposición entonces si además es:

$$\begin{cases} \text{inyectiva} \\ \text{sobreyectiva} \\ \text{biyectiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{inmersión cerrada} \\ \text{identificación cerrada} \\ \text{homeomorfismo} \end{cases}$$

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compactidad	✗ cerrados ✓	✓	✓	✓
	Mantra 1	Mantra 3	Tychonoff	Unión finita

Teorema (de Tychonoff)

Si X e Y son dos compactos $\Rightarrow X \times Y$ es compacto.

Demostración:

Sea $X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$, $W_i \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

1. $\forall x \forall y, \exists U_y^x \times V_x^y \subset W_i$, i depende de (x, y) .
2. $\forall x Y = \bigcup_y V_x^y \xrightarrow{Y \text{ comp.}} Y = V_x^{y_1} \cup \dots \cup V_x^{y_r}$, los y_k y su n° dependen de x .

3. $U^x = U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x$, $U^x \times V_x^{y_k} \subset W_{i_k}$, i_k depende de x .

4. $X = \bigcup_x U^x \xrightarrow{X \text{ comp.}} X = U^{x_1} \cup \dots \cup U^{x_s}$.

5.

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} U^{x_l} \times V_{x_l}^{y_k} \subset \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} W_{i_k}, \text{ los } i_k \text{ dependen de los } x_l.$$

Observación:

1. $X \times Y$ compacto $\Rightarrow X$ e Y compactos. [Mantra 3 para proyecciones]

2. Heine-Borel: $K \subset \mathbb{R}_u^n$ cerrado y acotado \Rightarrow compacto porque:

$$\exists a_i, b_i : K \overset{\text{cerr.}}{\subset} \underbrace{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}_{\text{Compacto por Tych.}^1}$$

Y aplicamos el Mantra 1.

¹ $[a, b]$ es compacto.

Compacidad local

Definición

Sea $Y \subset X$, es localmente cerrado si cumple las condiciones equivalentes siguientes:

1. $\forall y \in Y, \exists U^y \subset X : Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y. (\Rightarrow \text{lo mismo } \forall V^y \subset U^y)$
 2. Y es abierto en su adherencia.
 3. $Y = F \cap U, F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X, U \overset{\text{ab.}}{\subset} X. (\Rightarrow \text{vale } F = \overline{Y})$
-

Demostración:

1. \Rightarrow 2.) $Y = \overline{Y} \cap \left(\bigcup_{y \in Y} U^y \right)$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{Y} \cap U^y &\Rightarrow x \in \text{Adh}_{U^y}(Y \cap U^y) = Y \cap U^y \subset Y \\ U^x \subset U^y &\Rightarrow \emptyset \neq Y \cap U^x = (Y \cap U^y) \cap U^x. \end{aligned}$$

2. \Rightarrow 3.) Abierto en $\overline{Y} = \underbrace{\overline{Y}}_{=F} \cap U$.

$$F \cap U = Y \Rightarrow F \supset \overline{Y} \Rightarrow F \cap U = \overline{Y} \cap U.$$

3. \Rightarrow 1.) $Y = F \cap U \overset{\text{cerr.}}{\subset} U (= U^y, \forall y)$.

Esto es un ejemplo de localización de una propiedad topológica \mathcal{P} (aquí es ser cerrado). Se puede entender como:

$$\begin{aligned} \forall x, \exists V^x \text{ que cumple } \mathcal{P} \text{ o} \\ \forall x, \exists \mathcal{V}^x \text{ base de entornos que cumplen } \mathcal{P}. \end{aligned}$$

A veces son equivalentes (como en este caso), a veces no. El concepto adecuado de localización es mediante bases de entornos.

Compacidad local y mantras

Definición

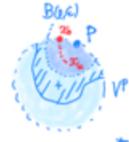
X es localmente compacto si $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos compactos.

Ejemplo:

1. \mathbb{R}_u^n es localmente compactos: $\mathcal{V}^x = \{B[x, \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$
2. $T = B(0, 1) \cup \{p\}$, T_u no es compacto:

$$\begin{aligned} \exists V^p \text{ comp.} \subset T \Rightarrow \exists B(0, \varepsilon) \cap T \subset V^p \Rightarrow \exists \overbrace{x_k}^{\in V^p} \rightarrow x_0 \in S(0, 1) \setminus T \\ \Rightarrow \{x_k : k \geq 1\} \subset V^p \subset T. \end{aligned}$$

que es un conjunto infinito sin acumulación en T .



3. En general no basta que exista un entorno compacto.

En $S = T \cup \{q\}$? tomamos como entornos del punto añadido q los $W \subset S$ que tienen complementario finito (y $q \in W$).

Pero este caso es un ejemplo con un espacio no separado.

Proposición

Si X es T_2 y $x \in X$ tiene un entorno compacto, entonces tiene una base de entornos compactos.

Demostración:

$$\exists \underbrace{V^x}_{\supset W^x \text{ ab.}} \text{ compacto} \Rightarrow \mathcal{V}^x = \text{entornos compactos } K^x \text{ base de entornos: } \forall U^x, \exists K^x \subset U^x.$$

$$\exists_{\text{ab.}} U_1^x \subset \overline{U_1^x} \subset U^x:$$

$$K^x = \overline{W^x \cap \overline{U_1^x}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{V^x \setminus U^x} \subset \overline{V^x} \text{ cerr.} \\ \overline{V^x} \cap \overline{U_1^x} = V^x \cap \overline{U_1^x} \subset V^x \cap \overline{X \setminus A} = V^x \cap \overline{(X \setminus A)} \subset U^x \\ \text{interdos ent.?} \Rightarrow \text{entorno} \\ W^x \cap U_1^x \subset V^x \text{ comp. en } T_2 \Rightarrow \overbrace{K^x}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{V^x}^{\text{comp.}} \end{array} \right. \text{ ab. disjuntos}$$

Y tenemos dos mantras:

Proposición (Mantra 1)

Localmente cerrado en localmente compacto es localmente compacto.

Demostración:

Sea $Y \subset X$ con Y loc. cerrado y X loc. compacto e $y \in Y$.

Tenemos:

$$\overline{U_1^x} \cap V^x \subset \overline{X \setminus A} \cap V^x = \overbrace{(X \setminus A)}^{\text{cerr.}} \cap V^x \subset U^x$$

Y como Y es loc. cerrado, $\exists W^y \cap Y \subset^{\text{cerr.}} W^y$ ent. en X . Por ser X loc. compacto $\exists K^y$ compacto tal que, $K^y \subset W^y \Rightarrow K^y \cap W^y \cap Y \subset^{\text{cerr.}} K^y \Rightarrow$

$$L^y = \underbrace{K^y \cap W^y}_{\text{ent. en } X} \cap Y \subset^{\text{cerr.}} K^y \Rightarrow L^y \text{ ent. en } Y \text{ compacto.}$$

Proposición (Mantra 2)

Localmente compacto en T_2 es localmente compacto.

Demostración:

Sea $Y \subset X$ con Y loc. compacto, X siendo T_2 e $y \in Y \Rightarrow$

$$\underbrace{\exists L^y}_{\text{comp.}} = \underbrace{V \cap Y}_{\text{ent. en } Y} \subset \underbrace{V}_{\text{ent. en } X} \xrightarrow{T_2} V \cap Y = L^y \text{ cerr.} \subset V.$$

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad local	\times Loc. cerrados ✓	\times ab. ✓	✓	✓
	Mantra 1	$f(\text{ent.}) = \text{ent}$	Tychonoff	Loc. suma es como sum's

Ejemplo:

$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es localmente compacto.

1. $\mathbb{Z} \subset \underbrace{W}_{\text{ab.}} \subset \mathbb{R} : \exists k + \underbrace{\varepsilon_k}_{0 < \varepsilon_k < 1} \in W \forall k \geq 1 \Rightarrow A = \{k + \varepsilon_k : k \geq 1\} \subset W$
 - Cerrado
 - Saturado ($n\mathbb{Z} = \emptyset$)
 - Infinito
 - Discreto
2. $\exists K \subset Y$ entorno compacto de $y = \mathbb{Z} \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{W^{\text{ab.}}}_{\supset \mathbb{Z}} \subset p^{-1}K \Rightarrow pA \subset K$ infinito sin acumulación.

Compactificación por un punto

Este es otro problema importante: sumergir un espacio como subespacio abierto denso de un espacio compacto.

Intuitivamente se trata de añadir los límites que el espacio no tiene (por no ser compacto).

Ejemplo:

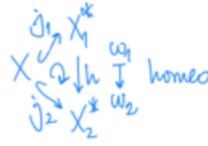
1. $\mathbb{R}^n \equiv B^n \setminus \{a\} \subset \mathbb{S}^n$ vía proyección estéreo desde a .
2. $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{RP}^n \setminus H \subset \mathbb{RP}^n$ vía cartas afines.

Proposición

X localmente compacto T_2 .

1. $\exists j : X \hookrightarrow X^*$ comp. T_2 , j inmersión abierta $X^* \setminus j(X) = \{w\}$.

2. Unicidad:



Demostración:

$$1. X^* = X \cup \{0\}, \mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus K : \overbrace{K}^{\subset X} \text{ comp.}\}.$$

- \mathcal{T}^* es top: fácil por las hipótesis sobre X .

- $K_i \overset{\text{comp.}}{\subset} X \xrightarrow{T_2} K_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \overbrace{\bigcap_i K_i}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{K_{i_0}}^{\text{comp.}} \Rightarrow \bigcap_i K_i \text{ comp.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, X \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \setminus K = \text{ab.} \setminus \text{cerr.} = \text{ab.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, K \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus U), K \setminus U \subset K \text{ cerrado} \Rightarrow \text{compacto.}$

- $X \subset X^*$ inmersión abierta: $(X^* \setminus K) \cap X = X \setminus K \in \mathcal{T}$ pues X es T_2 .

- X^* es compacto: $X^* = \bigcup_i W_i$.

$$\exists W_{i_0} \ni w \Rightarrow W_{i_0} = \underbrace{X^* \setminus K}_{\text{comp.}} \Rightarrow K \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r} \Rightarrow X^* = W_{i_0} \cup W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r}$$

- X^* es T_2 :

$$x \in X \text{ loc. comp.} \Rightarrow \exists K^x \text{ ent. comp.} \Rightarrow X^* \setminus K^x = U^w \text{ ent. de } w$$

2. Unicidad:

- $\begin{cases} h_{j_1} = j_2 \\ j_i \text{ inmersiones} \end{cases} \Rightarrow h| : j_1(X) \rightarrow j_2(X) \text{ homeomorfismo.}$
- h continua en w_1 (análogamente h^{-1} continua en w_2)

$$\begin{aligned} h(w_1) = w_2 \in W \overset{\text{ab.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{comp.}}{\subset} j_2(X) \\ \Rightarrow K = h^{-1}(X_2^* \setminus W) \overset{\text{comp.}}{\subset} j_1(X) \subset X_1^* \\ [X_1^* \text{ es } T_2] \Rightarrow K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_1^* \Rightarrow h^{-1}(W) = X_1^* \setminus K \overset{\text{ab.}}{\subset} X_1^*. \end{aligned}$$

Definición

El espacio X^* se denomina compactificación por un punto de X .

También, compactificación de Alexandroff.

Por ejemplo, \mathbb{S}^n es la compactificación por un punto de \mathbb{R}^n (vía proyección estereotípica como dijimos antes).

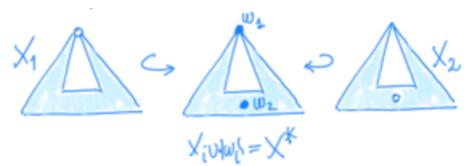
Observación: ¡Importante!

1. La unicidad justifica? que un espacio X^* compacto T_2 es la compactificación de $X^* \setminus \{0\}$ para cualquier $w \in X^*$.
2. Si dos espacios son homeomorfos, lo son sus compactos.

$$X_1 \xrightarrow[\text{homeo.}]{} X_2 \xrightarrow{j_2} X_2^* \Rightarrow j_1 = j_2 \circ f : X_1 \rightarrow X_2^*$$

que cumple las condiciones.

3. Si dos espacios no son homeomorfos, pueden serlo sus compactos.



[Ejercicio: \mathbb{R}_u^2 : ¿Por qué $X_1 \not\approx X_2$?]

Conexión

Concepto y mantras

Definición

X es conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\#X = U \sqcup Y$ abiertos $\neq \emptyset$.
 2. $\#X = F \sqcup C$ cerrados $\neq \emptyset$.
 3. $\#E \subsetneq X$ abierto y cerrado $\neq \emptyset$.
-

Demostración:

Equivalencia: $F = X \setminus V$, $C = X \setminus U$, $E = U = X \setminus V$.

Observación:

$Y \subset X$ subespacio conexo: $\#Y \subset U \cup V$ abierto de X ,

$$\begin{cases} U \cap Y \neq \emptyset \\ V \cap Y \neq \emptyset \\ U \cap V \cap Y = \emptyset \end{cases}$$

Ejemplo: (Fundamental)

$(0, 1) \subset \mathbb{R}_u$ es conexo.

Mantras generales \Rightarrow segmentos en \mathbb{R}^n , estrellados? y conexos son conexos.

Teorema (del pivote. Mantra 1)

Sea $X = \bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, $\forall A_i$ conexos $\Rightarrow X$ conexos.

Demostración:

$$\begin{aligned} \emptyset \neq E &\stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} A_i \Rightarrow \forall i, \begin{cases} E \cap A_i = \emptyset \\ E \supset A_i \end{cases} \\ &\xrightarrow{E \neq \emptyset} \exists i_0 : E \supset A_{i_0} \supset \bigcap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \supset A_i \\ &\Rightarrow E \supset \bigcup_i A_i \Rightarrow E = X. \end{aligned}$$

Corolario (Variantes)

$$1. X = \bigcup_{i \in I} A_i, \exists A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset.$$

Demostración:

$X = \bigcup_{i \in I} (A_{i_0} \cup A_i)$ conexo por mantra 1 y se aplica el mantra 1.

$$2. \text{ Cadenas: } X = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \dots}_{\text{conexos}} \quad A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ conexo.}$$

Demostración:

Se usa el mantra 1 dos veces:

$$\begin{cases} X_k = (\dots ((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots \cup) A_k \\ X = \bigcup_k (X_1 \cup \dots \cup X_k) \end{cases}$$



El “recíproco” es “fácil” pero útil.

Proposición (Construcción de cadenas)

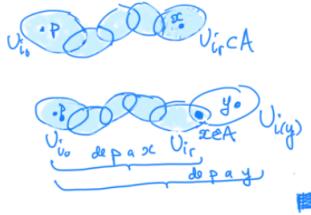
X conexo, $X = \bigcup_i U_i$ recubrimiento abierto, $p, q \in X \Rightarrow \exists$ cadena finita U_{i_k} de p a $q : p \in U_{i_0}, U_{i_{k-1}} \cap U_{i_k} \neq \emptyset, q \in U_{i_r}$.

Demostración:

$A = \{x \in X : \exists U_{i_k} \text{ de } p \text{ a } x\} \neq \emptyset$ abierto y cerrado $\Rightarrow A = X$ y $q \in A$. Por ser:

- $\neq \emptyset : \exists U_{i_0} \in ?p$ y U_{i_0} va de p a p !
- Abierto: $\exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r}$ de p a $x \Rightarrow U_{i_r} \subset A$.
- Cerrado:

$$\begin{aligned} y \in \overline{A} \text{ e } y \in U_{i(y)} &\Rightarrow A \cap U_{i(y)} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r} \text{ de } p \text{ a } x \in U_{i(y)} \\ &\Rightarrow U_{i_0}, \dots, U_{i_r}, U_{i(y)} \text{ de } p \text{ a } y. \end{aligned}$$



Proposición (Mantra 2)

Imagen continua de conexo es conexo.

Demostración:

$$f : X \rightarrow Y \text{ continua, } \emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} f(X) \xrightarrow{\text{cont.}} \emptyset \neq f^{-1}(E) \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow f^{-1}(E) = X \Rightarrow E = f(X).$$

Proposición (Mantra 3)

Adherencia de conexo es conexo: $Y \subset X$ con Y conexo y denso $\Rightarrow X$ conexo.

Demostración:

$$\emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow E \cap Y \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow \begin{cases} E \cap Y = \emptyset \times \text{densidad.} \\ E \cap Y = Y \Rightarrow Y \subset E \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X = \overline{Y} \Rightarrow E = X. \end{cases}$$

Ejemplo:

1. $(0, 1) \stackrel{\text{denso}}{\subset} [0, 1] \xrightarrow{M1} [0, 1]$ conexo. Con una interpolación?: $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ es homeomorfismo con $[a, b] \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{M2} [a, b]$ es conexo. Aplicando ahora:

- Pivote: $E = \bigcup_{\substack{x \in E \\ \text{convx.}}} [a, x]$ estrellado (resp. de a): convexos, bolas abiertas y cerradas, rectángulos...
- Mantra 2: Trazas de curvas continuas $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2. Seno del topólogo (polaco):

$$\text{Conexos: } \begin{cases} \Gamma = \text{imagen} : t \mapsto \left(t, \sin \frac{1}{t}\right), t > 0 \\ J = \{0\} \times [0, 1] \\ \overline{\Gamma} = \Gamma \cup J \text{ (adh.)} \end{cases}$$



Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión	✗	✓	✓	✗
	$\{0, 1\} \subset [0, 1]$	Mantra 3	Pivote	Cada sum. ab. y cerr.

Proposición

$X \times Y$ conexo $\Leftrightarrow X$ y Y conexo.

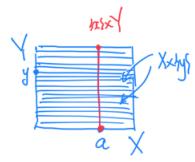
Demostración:

\Rightarrow) Mantra 3 para las proyecciones.

\Leftarrow) Fijamos $a \in X$.

$$\left. \begin{aligned} Z_y &= (\underbrace{X \times \{y\}}_{\approx X}) \cup (\underbrace{\{a\} \times Y}_{\approx Y}) \text{ dos convx. se cortan en } (a, y) \xrightarrow{\text{Piv.}} Z_y \text{ convx.} \\ \forall y \in Y, \quad \bigcap_{y \in Y} Z_y &= \{a\} \times Y \neq \emptyset \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Piv.}}$$

$$\bigcup_{y \in Y} Z_y = X \times Y \text{ convx.}$$



Componentes conexas y conexión local

Componentes

Definición

Una componente conexa (c.c) de X es un subespacio conexo maximal.

Proposición

1. $\forall a \in X. C(a) = \bigcup_{a \in A_{conx}} A$ es conexo (pivot), $a \in C(a)$.
2. $E \subset X$ conexo:

$C(a) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow C(a) \cup E$ conx. (pivot) $\Rightarrow C(a) \cup E$ es uno de los A de $C(a) \Rightarrow E \subset C(a)$

Luego,

- $C(a)$ maximal \Rightarrow componente conexa.
 - $a \neq b : C(a) = C(b)$ ó $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ [Usar $E = C(b)$]
3. $\overline{C(a)}$ conexo (mantra adh.) $\Rightarrow \overline{C(a)} = \underbrace{C(a)}_{cerr.}$ (maximalidad)

1. + 2. + 3. $\Rightarrow X = \bigsqcup_{C \subset X} C$ es una partición en cerrados disjuntos.

Ejemplo:

1. $X_{\text{discreto}} : C(x) = \{x\}$ (puntos abiertos y cerrados)
2. $\mathbb{Q}_u : C(p) = \{p\}$ (todo intervalo de \mathbb{R} tiene racionales)
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)}) : C(t) = \{t\}$ ($\mathbb{R} = (\leftarrow, a) \cup [a, \rightarrow)$ abierto y cerrado)
4. $X = \{0, Y_k, k \geq 1\} : \begin{cases} C(0) = \{0\} \text{ cerrado, no abierto } (\{\frac{1}{k} : k \geq 1\} \text{ no cerr.}) \\ C(\frac{1}{k}) = \{\frac{1}{k}\} \text{ cerrado y abierto.} \end{cases}$

Definición

Un espacio cuyas componentes son los puntos se llama totalmente desconexo.

Proposición

Las componentes conexas de $X \times Y$ son los puntos de componentes conexas.

Demostración:

$$C \subset \underbrace{X}_{\xrightarrow{p} X} \times \underbrace{Y}_{\xrightarrow{q} Y} \Rightarrow p(C) \text{ y } q(C) \text{ conexos (imagen continua)} \Rightarrow \begin{cases} p(C) \subset E \overset{\text{c.c.}}{\subset} X \\ q(C) \subset F \overset{\text{c.c.}}{\subset} Y \end{cases} \Rightarrow C \subset E \times F \underset{\text{Max. de } C}{\xlongequal{}} C = E \times F.$$

Conexión local

Definición

X es localmente conexo si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos.

Proposición

X es localmente conexo \Leftrightarrow la componente conexa de un abierto es abierta.

Demostración:

- $\Rightarrow)$ Si $x \in C \overset{\text{cerr.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow \exists \underbrace{U^x}_{\text{ab. conn.}} \subset U \Rightarrow U^x \subset C \Rightarrow C \overset{\text{ab.}}{\subset} X.$
- $\Leftarrow)$ $\mathcal{B}^x = \{C(x) \overset{\text{c.c.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : x \in U\}$. Con $C(x)$ abierto por ser c.c de abierto.

Ejercicio: X es localmente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos.

Ejemplo: (Esencial)

$\{0, \frac{1}{k} : k \geq 1\} = Y \subset \mathbb{R}_u$ no es localmente conexo.

Demostración:

La c.c $(0) = \{0\}$ no es abierto. Directamente:

$$\begin{aligned} 0 \in \underbrace{V}_{\text{ent. de } 0 \in \mathbb{R}} \cap Y &\Rightarrow V \supset (0, \varepsilon), \exists 0 < \underbrace{\theta}_{\notin \mathbb{Q}} < \frac{1}{k} < \varepsilon < 1 \\ &\Rightarrow V \cap Y \subset \underbrace{(0, \theta)}_{\exists 0} \cup \underbrace{(\theta, \infty)}_{\exists \frac{1}{k}} \Rightarrow V \cap Y \text{ no conexo..} \end{aligned}$$

Ejercicio:

1. Analizar una sucesión de segmentos que convergen a otro:



2. ¿Y el seno del topólogo?

Tabla de comportamiento

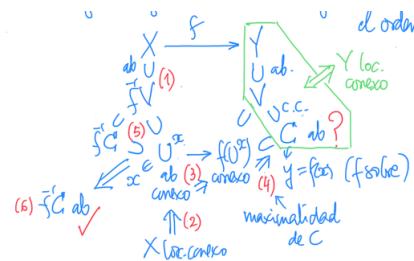
	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local	✗	✓	✓	✗
	Ejemplo esencial	No banal	Prod. ent. conx.	Suma como sum's

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ identificación con X localmente conexo $\Rightarrow Y$ es localmente conexo.

Demostración:

El diagrama siguiente resume el argumento (si se lee en el orden adecuado).



Conexión por caminos

Definición

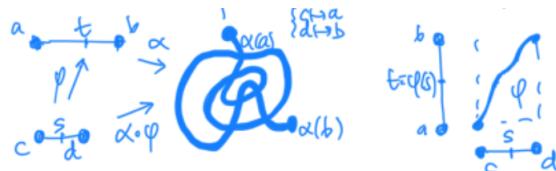
Un camino en un espacio X es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}_u \rightarrow X$. Decimos:

- α va de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, conecta $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$, que son extremos.
- La imagen $\alpha[a, b] \subset X$ es la traza, conexa por imagen continua.

Proposición (Cambios de parámetros)

$\forall \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ continua $\Rightarrow \beta = \alpha \circ \varphi$ es otro camino con igual traza.

φ es un cambio de parámetro cuando es homeomorfismo (creciente o decreciente).

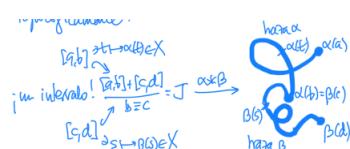


Ejemplo: (Interpolación lineal)

Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow [p, q] : t \mapsto (1 - t)p + tq$ es un camino bien conocido y útil. También sirve para reparametrizar si $[p, q] = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Vemos, por ejemplo, que siempre podemos reducirnos a caminos con dominio $[0, 1]$. Esto será fundamental más adelante.

Proposición (Producto de caminos)

Topológicamente:



(Alternativa: Reparametrizar β con dominio $[b, b + (d - c)]$)

Ejemplo:

Si hacemos el producto de segmentos consecutivos obtenemos caminos poligonales.

Conexión por caminos

Definición

Un espacio X es conexo por caminos si sus puntos se pueden conectar con un camino:

$$\forall x \forall y \in X, \exists \sigma_y : [a, b] \rightarrow X, \sigma_y(a) = x \wedge \sigma_y(b) = y$$

En particular, $X = \bigcup_y \sigma_y[a, b]$ es conexo (pivot, $\alpha_y(a) = x, \forall y$)

Ejemplo:

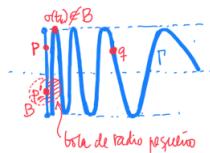
- La mayor parte de los conexos conocidos son conexos por caminos:

- Los abiertos conexos (top. Usual) son conexos por poligonales, que son caminos.
- Los conjuntos convexos y los estrellados también.

- El seno del topólogo Γ es la traza de $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $t > 0$, es conexo y lo es su adherencia $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$, $J = \{0\} \times [0, 1]$. Pero $\bar{\Gamma}$ no es conexo por caminos.

Demostración:

No existen caminos $\sigma : [a, b] \rightarrow \bar{\Gamma}$ $\begin{cases} \sigma(a) = p \in J \\ \sigma(b) = q \in \Gamma \end{cases}$:



- $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, α, β continuas. $\exists a' = \max\{t \in [a, b] : \alpha(t) = 0\} \Rightarrow (\alpha \text{ continua en un compacto}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(a') = 0, \sigma(a') = p' \in J \\ t > a' : \alpha(t) > 0 \Rightarrow \sigma(t) \in \Gamma \Rightarrow \beta(t) = \sin \frac{1}{\alpha(t)} \end{cases}$
- Supongamos $p' = \sigma(a') \neq (0, 1)$ y $\exists \delta : B(p', \delta) \cap \{y = 1\} = \emptyset$. σ continua $\Rightarrow \exists \sigma[a', \varepsilon] \subset B(p', \delta) \Rightarrow \sigma[a', \varepsilon] \cap \{y = 1\} = \emptyset$. (si $p' = (0, 1)$ evitariamos? $\{y = -1\}$)
- α continua $\Rightarrow \alpha[a', \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ conexo compacto = intervalo: $\alpha[a', \varepsilon] = [0, c]$.
- La oscilación de $\sin \frac{1}{x}$ lleva σ a $\{y = 1\}$, fuera de la bola elegida:

$$k \gg 0 \Rightarrow \frac{2}{(1 + 4k)\pi} \in [0, c] = \alpha[a', \varepsilon] \Rightarrow \exists a' < t_k < \varepsilon : \alpha(t_k) = \frac{2}{(1 + 4k)\pi}$$

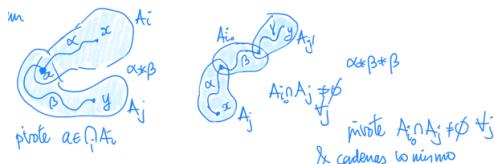
$$\Rightarrow \sigma(t_k) = \left(\alpha(t_k), \sin \left(\frac{1}{\alpha(t_k)} \right) \right) = (x_k, 1) !?$$

Mantras

Todo (casi) lo que dijimos sobre la conexión nos vale:

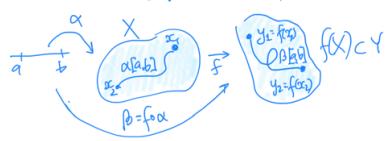
Proposición (Mantra del pivot)

(Igual) Sea $X = \bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, $\forall A_i$ conexos por caminos $\Rightarrow X$ conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la imagen)

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua con X conexo por caminos $\Rightarrow f(X)$ es conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la adherencia (!NO!))

El seno del topólogo $\Gamma = \text{grafo de } \sin \frac{1}{t}$ es conexo por caminos: $(a, \sin \frac{1}{a})$ y $(b, \sin \frac{1}{b})$ se conectan por el camino evidente, $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $a \leq t \leq b$. Pero, como hemos visto, la adherencia $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos.

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión por caminos	✗	✓	✓	✗

Proposición (Productos)

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] \rightarrow X : & \left\{ \begin{array}{l} \sigma(a) = x_1 \\ \sigma(b) = x_2 \end{array} \right. \\ \tau : [a, b] \rightarrow Y : & \left\{ \begin{array}{l} \tau(a) = y_1 \\ \tau(b) = y_2 \end{array} \right. \end{aligned} \Rightarrow \gamma = (\sigma, \tau) : [a, b] \rightarrow X \times Y \left\{ \begin{array}{l} \gamma(a) = (x_1, y_1) \\ \gamma(b) = (x_2, y_2) \end{array} \right.$$

Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos

Componentes conexas por caminos

Todo análogo a las componentes conexas (casi). Sea X espacio topológico.

Definición

Una componente conexa por caminos (c.c.c) es un subconjunto conexo por caminos maximal.

Proposición (Descripción)

1. La c.c.c de $x \in X$ es $\bigcup_{x \in A} A$ con A conexa por caminos.
2. Las c.c.c forman una partición de X , más fina que la de las c.c.

Demostración:

Porque conexo por caminos \Rightarrow conexo pero no la inversa.

¡OJO! Las c.c.c no son necesariamente cerradas.

Como contraejemplo de ambas cosas dichas tenemos la adherencia del seno topólogo.

Ejemplo:

Γ seno del topólogo y $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$ son conexos. Tenemos que $\bar{\Gamma}$ es una c.c, mientras que J y Γ son dos c.c.c, una cerrada (J) y la otra no (Γ). [Porque $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos]

Conexión local por caminos

Imitamos sin sorpresa las demostraciones de la conexión local y tenemos:

Definición

X es localmente conexo por caminos si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos por caminos.

Proposición

X es localmente conexo por caminos \Leftrightarrow c.c.c de un abierto es abierto.

Ejercicio: Localmente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos por caminos.

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local por caminos	✗	✓	✓	✓

También vale que las c.c.c del producto son los productos de las c.c.c de los factores.

Relaciones entre las propiedades de conexión

Lo principal es que:

Proposición

Conexo y localmente conexo por caminos \Rightarrow Conexo por caminos.

Demostración:

- Conexo $\Rightarrow \forall x, y, \exists$ cadenas de x a y .
- Localmente conexo por caminos \Rightarrow cadenas de abiertos conexos por caminos \Rightarrow Var. pivote
Estas cadenas son conexas por caminos.

Por tanto, \exists camino de x a y .

Observación:

Esta es la demostración de que un abierto conexo de \mathbb{R}_u^n lo es por poligonales (se usan cadenas de bolas).

Observación: (Resumen)

Por especificar todas las posibilidades:



Ejercicio: Contraejemplos. Los menos fáciles son * y **

Parte II

Topología algebraica

Homotopía

Conceptos fundamentales

Definición

Una homotopía es una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$:

1. $H_s : Y \rightarrow X : y \mapsto H(y, s)$, $H \equiv \{H_s : 0 \leq s \leq 1\}$ familia uniparamétrica de aplicaciones.
2. Siendo $f = H_0$ y $g = H_1$:

$$\begin{cases} H_s : f \simeq g \text{ homotopía entre } f \text{ y } g \\ H \text{ deformación continua de } f \text{ a } g \end{cases} \quad \boxed{\text{El problema: cuándo } f \simeq g}$$

3. $f \simeq g$ relación de equivalencia:

- $f \simeq f$ vía $H_s \equiv f$.
- $H_s : f \simeq g \Rightarrow H_{1-s} : g \simeq f$.
- $\begin{cases} F_s : f \simeq g \\ G_s : g \simeq h \end{cases} \Rightarrow H_s = \begin{cases} F_{2s}, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G_{2s-1}, & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} : f \simeq h$

Demostración:

$$\text{Continuidad: } \begin{cases} F_{2(1/2)} = F_1 = g \\ G_{2(1/2)-1} = G_0 = g \end{cases}$$

Proposición

X conexo por caminos, $f, g : Y \rightarrow X$ constantes $\Rightarrow f \simeq g$.

Demostración:

$$\exists \sigma : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(0) = f(y_0) \text{ y } \sigma(1) = g(y_0) \Rightarrow H_s \equiv \sigma(s) : \begin{cases} H_0 \equiv \sigma(0) = f(y_0) \equiv f \\ H_1 \equiv \sigma(1) = g(y_0) \equiv g \end{cases}$$

Definición

$f : Y \rightarrow X$ es nulhomótopa si $f \simeq$ constante, esencial en caso contrario.

Teorema (Problema esencial. Hopf.)

(1932) $\exists f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ esencial con $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C} : (z, z') \mapsto (\|z\|^2 - \|z'\|^2, 2zz')$

Concepto relativo

Definición

$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ es relativa a $A \subset Y$ si $H_s(a) = H_0(a)$, $\forall a \in A$, $\forall s$.

Proposición

H relativa a A , $f = H_0$, $g = H_1 \Rightarrow f|_A = g|_A$. Notación: $H_s = f \xrightarrow{A} g$ (Relación de equivalencia).

Ejemplo: (Fundamentales. Interpolación)

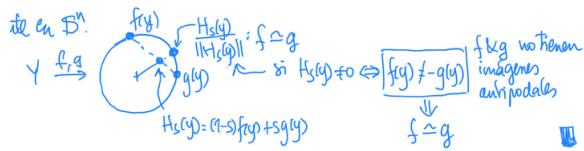
1. $f, g : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s = (1-s)f + sg : f \simeq g$.

Demostración:

Pues por convexidad $H_s(y) \in \underbrace{[f(y), g(y)]}_{\text{cond. crucial!}} \subset X$.

$f(a) = g(a) \Rightarrow H_s(a) = f(a) = g(a) \Rightarrow H_s$ es relativa a $A = \{f = g\}$.

2. $f : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado verp?, x_0 , $[x, x_0] \subset X$, $\forall x \in X \Rightarrow H_s = (1-s)f + sx_0 : f \simeq x_0$ (relativa a $A = f^{-1}(x_0)$).
3. Variante en \mathbb{S}^n :



Contractibilidad

Definición

X es contrátil si $\text{id} : X \rightarrow X$ es nulhomótopa: $\exists H_s : \text{id} \simeq x_0$.

Y fuertemente contrátil si $\exists H_s : \text{id} \xrightarrow{x_0} x_0$ (homótopa relativa a $\{x_0\}$)

Observación:

Los ejemplos son difíciles, pero son cosas distintas.

Ejemplo:

$X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado verp? $x_0 \Rightarrow$ fuertemente contrátil

Demostración:

$H_s = (1-s)\text{id} + sx_0$.

Proposición

1. Si X es contrátil \Rightarrow es conexo por caminos.

2. Si X es contrátil $\Rightarrow \begin{cases} \forall f : Y \rightarrow X \text{ nulhomótopa}. \\ \forall g : X \rightarrow Z \text{ nulhomótopa}. \end{cases}$

Demostración:

1. $H_s : id \simeq x_0 \Rightarrow S \mapsto H_s(x_0)$ camino de x a x_0 .

2. $H_s : id \simeq x_0 \begin{cases} H_s \circ f : f \simeq x_0 \\ g \circ H_s : g \simeq g(x_0) \end{cases}$

Observación:

Pocos espacios son contráctiles, pero no es inmediato verlo.

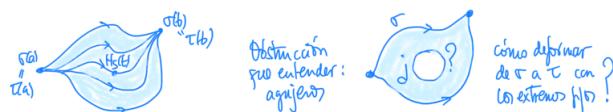
Homotopía de caminos

El concepto básico

Definición

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$ son homótopos con extremos fijos si $\exists H_s : \sigma \simeq \tau$ relativa a $\{a, b\}$:

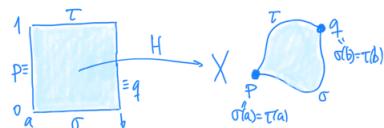
$$\begin{cases} H_s(a) = \sigma(a) = \tau(a) \\ H_s(b) = \sigma(b) = \tau(b) \end{cases} \quad \forall s$$



Observación:

Es un problema de extensión:

Definir H en el cuadrado $[a, b] \times [0, 1]$ con valor determinado en su borde.



Simple-conexión

Definición

X es simplemente conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\forall \sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$ con iguales extremos son homótopos con extremos fijos.
2. $\forall f : \mathbb{S}' \rightarrow X$ se extiende al disco interior de la circunferencia.

Demostración:

Colapsando dos lados de un cuadrado $\xrightarrow{\pi}$ disco con dos puntos en la circunferencia unidos por dos ceros α, β .

1. \Rightarrow 2.)

$$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X \Rightarrow f \circ \pi \begin{cases} \alpha \rightarrow \text{camino } \sigma \\ \beta \rightarrow \text{camino } \tau \end{cases} \\ \Rightarrow \exists H \text{ con extremos fijos} \Rightarrow \text{compatible con } \pi \\ \Rightarrow H \text{ pasa al cociente por } \pi, \text{ dando } F..$$

2. \Rightarrow 1.) Dos caminos σ, τ con extremos p, q definen f en la circunferencia y su extensión F al disco define la homotopía $H = F \circ \pi$.

Ejemplo:

Los conjuntos convexos son simplemente conexos. ¿Los estrellados?

Esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$

Proposición

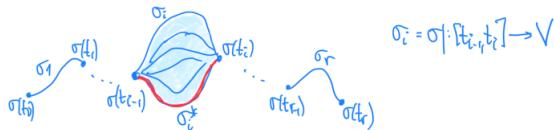
$\mathbb{S}^n : \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es simplemente conexo ($n \geq 2$).

Demostración:

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$, $\sigma(a) = \tau(a) = p$, $\sigma(b) = \tau(b) = q$.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c, -c \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, 1\} \wedge U = \mathbb{S}^n \setminus \{c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{proyección estereográfica.}$$

1. $[a, b] \subset \sigma^{-1}U \cup \sigma^{-1}V \xrightarrow{\text{comp.}} \exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \sigma[t_{i-1}, t_i] \begin{cases} \subset U \\ \subset V \end{cases} \quad \text{dónde } \sigma[t_{i-1}, t_i] \text{ es la traza de } \sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}.$
2. Si dos consecutivos están en el mismo U ó V , eliminamos la juntura común \Rightarrow al atravesar una juntura t_k cambiamos de U a V ó viceversa, en particular, $x_k = \sigma(t_k) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$, que es conexo por caminos, o bien, nos quedamos sin junturas y $\sigma[a, b] \subset U$ ó V .
3. Consideramos los trozos en V (incluido que $\sigma[a, b] \subset V$ porque no hay ya junturas)



(*)

$\sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$ conexo por caminos
 $\Rightarrow \exists \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U \cap V \subset V$ mismos extremos que σ_i .

(***) $V \approx \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^*$ en V con extremos fijos. ¡Ojo! $\boxed{\sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U}$.

4. Pegando a trozos homotopías en \mathbb{S}^n :

$$\begin{cases} \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset U \Rightarrow H_s^i \equiv \sigma_i = \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U \subset \mathbb{S}^n \\ \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset V \xrightarrow{3} H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow V \subset \mathbb{S}^n \end{cases} \Rightarrow \sigma \simeq \sigma^*$$

Homótopos en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\sigma^* [a, b] \subset U$.

5. Igual, $\exists H_s : \tau \simeq \tau^*$ homotopía en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\tau^* [a, b] \subset U$.

En conclusión: $\sigma^* \simeq \tau^*$ en $U (\approx \mathbb{R}^n)$ con extremos fijos $\Rightarrow \sigma \simeq \sigma^* \simeq \tau^* \simeq \tau$ con extremos fijos.

El grupo fundamental

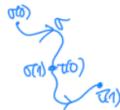
Operaciones con caminos

Sea X es conexo por caminos.

Definición (Producto)

$$\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(1) = \tau(0) \Rightarrow \sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tau(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$[Reescalando \begin{cases} \sigma \text{ de } [0, 1] \text{ a } [0, 1/2] \\ \tau \text{ de } [0, 1] \text{ a } [1/2, 1] \end{cases}]$$



Las propiedades algebraicas son TODAS SALVO HOMOTOPÍA CON EXTREMOS FIJOS.

Proposición

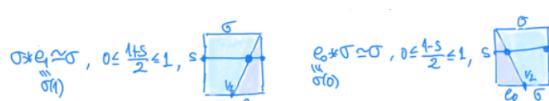
Propiedades de grupo:

1. Asociativa: $(\alpha * \beta) * \gamma \cong \alpha * (\beta * \gamma)$.

En cada altura se reescalan los caminos con junturas.



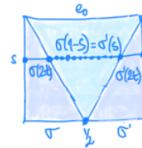
- ## 2. Neutros:



3. Inverso: $\sigma'(t) = \sigma(1-t) \Rightarrow \sigma * \sigma' \cong e_0$ y $\sigma'' = \sigma \Rightarrow \sigma' * \sigma \cong e_1$.

No se reescaló: $0 < \frac{1-s}{2} < \frac{1+s}{2} < 1$.

Las junturas dicen dónde parar σ y empezar σ' en cada altura:



4. Invarianza por homotopía:

$$\begin{cases} F_s : \sigma_1 \simeq \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \simeq \tau_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Trans.}} F_s * G_s : \sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2$$

$$F_s * G_s(t) = \begin{cases} F_s(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G_s(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

El grupo fundamental

Sea X conexo por caminos, $x_0 \in X$ punto base fijo.

Definición

1. Lazo de base x_0 , $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$, $\underbrace{\sigma(0) = \sigma(1)}_{\text{lazo}} = x_0$, punto fijo.
2. ■ $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ lazos de base x_0 .
■ $H_s : \sigma \simeq \tau$ de lazos: $H_s(0) = H_s(1), \forall s$.
■ $H_s = \sigma \xrightarrow{x_0} \tau$ de lazos con punto base fijo: $H_s(0) = H_s(1) = x_0, \forall s$. [Relativa a $\{0, 1\}$]

Definición (Grupo fundamental)

- $\pi(X, x_0) = \{\text{lazos de base } x_0\} / \xrightarrow{x_0} \{\text{"Lazos / homotopía"}\}$
- $[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$ define bien un grupo por 14.1.

Ejemplo:

1. X simplemente conexo $\Leftrightarrow \pi(X, x_0) = \{1\}, \forall x_0$. [\Leftarrow] ejercicio]

2. $\pi(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}, n \geq 2$.

Demostración:

Por 1) y ser \mathbb{S}^\times , $n \geq 2$ simplemente conexa.

3. $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$.

4. $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$, $\pi(\text{banda Möbius}) = \mathbb{Z}$.

5. $\pi(\infty, x_0) = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}$ que es una lemniscata y un grupo libre no comunitativo.

El cálculo de grupos fundamentales no es una tarea trivial, pero muy útil.

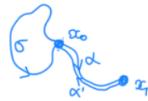
El punto base no es muy importante.

Proposición

Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de $\alpha(0) = x_0$ a $\alpha(1) = x_1$. La conjugación:

$$\begin{aligned} \pi(X, x_0) &\rightarrow \pi(X, x_1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma' * \sigma * \sigma']. \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos.



Demostración:

Fácil con las propiedades de 14.1.

Functorialidad

Definición

Definimos h_* como:

$$\begin{aligned} h : X \rightarrow Y \text{ homeo, } h(x_0) = y_0 \Rightarrow \\ h_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0) \text{ iso.} \\ [\sigma] \mapsto [h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

Es fácil y útil: espacios homeomorfos deben tener grupos fundamentales isomorfos.

Por ejemplo, \mathbb{S}^2 y \mathbb{RP}^2 no son homeomorfos. Pero la construcción es mucho más general.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{espacio con}\} & \xrightarrow{\pi} & \{\text{grupos}\} \\ \{\text{punto base}\} & & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{\pi(X, x_0) \text{ iso}} & \pi(Y, y_0) \\ \text{cont. } f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ (Y, y_0) & & \pi(Y, y_0) \text{ iso} \end{array}$$

bien definido, homomorfismo de grupos
 $f_*: \sigma \simeq \tau \quad \downarrow$
 $f_* \circ h_*: f_* \sigma \simeq f_* \tau$
 $f_* \circ h_* = (f \circ \sigma) \simeq (f \circ \tau)$

Definición (Functorialidad)

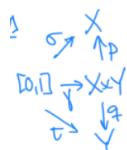
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \text{ y } (id_X)_* = id_{\pi(X, x_0)}.$$

Ejemplo:

Si $h : X \rightarrow Y$, $x_0 \mapsto y_0$ es homeomorfismo $\Rightarrow (h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$. [Más preciso que h_* isomorfismo]

Proposición (Producto de espacios)

Tenemos que si:



entonces:

$$\begin{aligned} \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) &\xrightarrow{p_*, q_*} \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \\ [\gamma] = [(\sigma; \tau)] &\mapsto ([\sigma], [\tau]). \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración:

Sean:

$$\left. \begin{array}{l} F_s : \sigma_1 \xrightarrow{x_0} \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \xrightarrow{y_0} \tau_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (F_s, G_s) : (\sigma_1, \tau_1) = \gamma_1 \mapsto \gamma_2 = (\sigma_2, \tau_2) \text{ y nada más...}$$

Ejemplo:

1. $\pi(\mathbb{S} \times \mathbb{S}) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}^2$.
2. $\pi(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi([0, 1])$.

Retractos

Retractos y deformaciones

Definición

Una aplicación $\rho : X \rightarrow A \subset X$ es:

1. Un retracto si $\rho|_A = id_A$ ($y A = \rho(A)$ es un retracto de X)
 2. Una deformación (fuerte) si: $\exists H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho$, homotopía relativa a A .
-

Ejemplo:

1. \forall cte : $X \rightarrow \{x_0\} \subset X$ es retracto.
2. El retracto radial $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto x/\|x\|$ es una deformación. $H_s(x) = (1-s)x + s\rho(x)$.
3. $\left. \begin{array}{l} \rho : X \rightarrow A \subset X \subset \mathbb{R}^n \text{ retracto} \\ [x, \rho(x)] \subset X, \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \text{ deformación: } H_s = (1-s)id_X + s\rho \text{ (interpolación).}$
4. Cilindros:

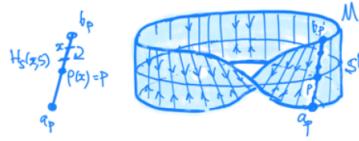
$$\begin{aligned} \rho : X \times [0, 1] &\rightarrow X \times \{0\} \\ (x, t) &\mapsto (x, 0) = \rho(x, t). \end{aligned}$$

con ρ deformación sobre X : $H_s(x, t) = \begin{pmatrix} x, & \underbrace{(1-s)t}_{(1-s)t+s \cdot 0} \\ & \end{pmatrix}$.



5. Banda de Möbius: $\mathbb{S}^1 \subset M = \bigcup_{p \in \mathbb{S}^1} [a_p, b_p]$.

Deformación sobre \mathbb{S}^1 : $\begin{cases} \rho : M \rightarrow \mathbb{S}^1 : x \mapsto \rho(x) \\ H_s(x, s) = (1-s)x + s\rho(x) \end{cases}$



Proposición

Sea $\rho : X \rightarrow A \subset X$, $a_0 \in A$; $\rho_* : \pi(X, a_0) \rightarrow \pi(A, a_0)$.

1. ρ retracto $\Rightarrow \rho_*$ suprayectivo.
2. ρ deformación $\Rightarrow \rho_*$ isomorfismo.

Demostración:

1. ρ retracto:

$$A \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_A \end{array}} X \xrightarrow{\rho} A \Rightarrow \pi(A, a_0) \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_{\pi(A, a_0)} \end{array}} \pi(X, a_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\text{injektiva}} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\rho_* \text{ sobre}} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\text{injektiva}} \pi(A, a_0)$$

2. ρ deformación:

$$H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho \Rightarrow j_* \text{ sobre.} : \left\{ \begin{array}{l} [\sigma] \in \pi(X, a_0) \Rightarrow H_s \circ \sigma : \sigma \xrightarrow{A} \rho \circ \sigma = j \circ \rho \circ \sigma \\ \Rightarrow [\sigma] = [j \circ \rho \circ \sigma] = j_* [\rho \circ \sigma] \end{array} \right.$$

y por ser j_* sobre $\Rightarrow \rho_*$ inyectiva.

Ejemplo:

$$1. \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \pi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \{1\}, n \geq 2 \\ \mathbb{Z}, n = 1 \end{cases}$$

$$2. \pi(\text{cilindro}) = \pi(\text{banda de Möbius}) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Demostración:

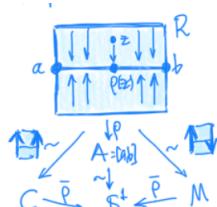
Veremos \mathbb{S}^1 ...

Cocientes

Muchos espacios son cocientes y las deformaciones se pueden hacer compatibles para facilitar las construcciones.

Ejemplo:

Cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y banda de Möbius M .



Tenemos $C, M = R/\sim$ identificaciones adecuadas de lados opuestos y, por otro lado, la deformación de R sobre $A = [a, b]$, $H_s(z) = (1 - s)z + s\rho(z) \xrightarrow{(*)}$ deformación de R/\sim sobre $[a, b]/\sim = \mathbb{S}^1$.

Es decir, \mathbb{S}^1 es deformación de C y de M , luego todos tienen $\pi = \mathbb{Z}$.

($*$): porque p y H_s son compatibles con las relaciones: $z \sim z' \Rightarrow H_s(z) \simeq H_s(z')$, luego inducen aplicaciones continuas \bar{p} y $\bar{H}_s : R/\sim \rightarrow A/\sim$.

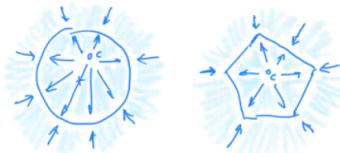
Normalmente se hacen las deformaciones pensando en que cumplan $H_s(z) \simeq H_s(z')$.

Agujeros

Conviene insistir en un ejemplo importante de deformación y sus variantes.

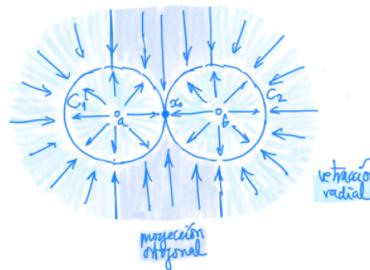
$$\begin{aligned} 1. \rho : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{esp. con "agujero"}} &\rightarrow \mathbb{S}^n \text{ deformación} \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0) = \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z}, n = 1 (\text{se verá...}) \\ \{1\}, n \geq 2 (\mathbb{S}^n, n \geq 2 \text{ simple-conexa}) \end{cases} \end{aligned}$$

2. Dibujos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$ de retracciones sobre curvas “alrededor” del “agujero” c :



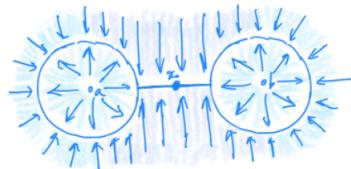
3. Dos agujeros $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$.

Se trocea el espacio en cerrados, en cada uno de los cuáles se hace una deformación, de manera que en las fronteras coincidan. En el dibujo se sombrean diferentes las zonas en las que se usan deformaciones diferentes. Las deformaciones más cómodas son las interpolaciones de id y una retracción geométrica.



En este caso, $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow \infty$? es deformación y $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (grupo fundamental de una lemniscata).

4. Otra variante:



$\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow dibujo$ deformación dice que:

$$\pi(dibujo) = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\underbrace{\infty?}_{=\mathbb{Z} * \mathbb{Z}})$$

que es igual al grupo fundamental, pero no homeomorfismo.

5. Aún más ejemplos así (ya sin especificar el punto base):

$$\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Demostración: (creo)

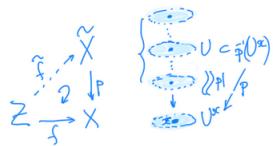
Cualesquiera tres puntos en \mathbb{R}^2 se pueden recolocar con homeomorfismos para hacer, a partir de ellos, retracciones sobre las curvas dibujadas, no homeomorfas. (?)

Ejercicio: Deformar $\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}$ sobre una circunferencia, para obtener $\pi(\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.

Recubridores

El problema de elevación

Fijada p , qué f 's tienen elevación \tilde{f} . i.e: $p \circ \tilde{f} = f$



Definición

p es un recubridor si $\forall x \in X$, $\underbrace{\exists U^x}_{\text{ab. trivializante}} : p^{-1}(U^x) = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda}$ y $\forall \lambda, p| : U_{\lambda} \rightarrow U^x$ homeomorfismo.

Es un tipo especial de homeomorfismo local sobrejetivo y, por eso, identificación abierta.

Ejemplo: (Importantes!)

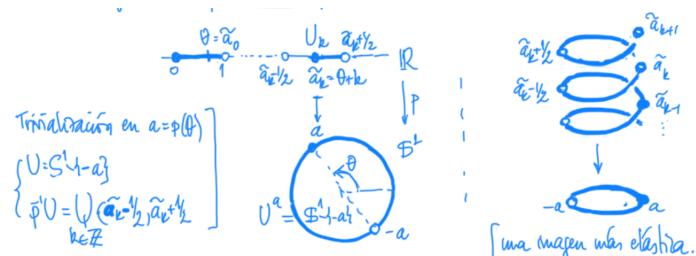
1. La identificación antipodal, $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n \quad \underbrace{\exists U^x}_{\text{trivializante}} = \mathbb{R}\mathbb{P}^n \setminus \underbrace{H}_{\text{hiperplano}} \quad \wedge \quad \pi^{-1}(U^x) = \mathbb{S}^n \setminus \pi^{-1}H = S_+ \sqcup S_-$$

hemisferios abiertos.

Ya se ilustró convenientemente en su lección. ¿Qué se tiene para $n = 1$?

2. La identificación exponencial, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$.



Unicidad de elevación

Proposición

Si Z es conexo, dos elevaciones que coinciden en algún puntos son iguales.

Demostración:

$$A = \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}, p \circ \tilde{f}_1 = f.$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{f(z)} \in U^x, p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización)} \Rightarrow \tilde{f}_i(z) \in p^{-1}U^x \wedge \exists! \lambda_i : \tilde{f}_i(z) \in U_{\lambda_i} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z = \tilde{f}_1^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_{\lambda_2}) : \hat{f}_1(\eta) = \hat{f}_2(\eta) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 (**). \end{aligned}$$

(*) debido a:

- \Rightarrow) U_{λ} 's disjuntos.
- \Leftarrow) $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$ y $p|_{U_{\lambda}}$ 1-1.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Ab.}}_A W^z \subset A \text{ si } z \in A : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \wedge \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} = U_{\lambda_2} \xrightarrow[p|]{\text{iny.}} \underbrace{U^x}_{\text{iny.}} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta), \tilde{f}_2(\eta) \mapsto \tau?(z) \Rightarrow \tilde{f}_1(\eta) = \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Cerr.}}_A W^z \subset Z \setminus A \text{ si } z \notin A : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \cap \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta) \neq \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\exists \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \Rightarrow \emptyset \neq A \underset{\text{cerr.}}{\subset} Z \text{ conx.} \Rightarrow A = Z \wedge \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$$

Lema de elevación

Proposición

Tenemos que:

$$\begin{cases} f = H : Y \times [0, 1] \rightarrow X \text{ (homotopía)} \\ \exists \tilde{H}_0 \text{ elevación de } H_0 : Y \rightarrow X \end{cases} \Rightarrow \exists \tilde{H} \text{ elevación, } (\tilde{H})_0 = \tilde{H}_0$$

Demostración:

1. Elevación semilocal: $\forall y \in Y, \tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ elevación de $H|_{V^y \times [0, 1]}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \{y\} \times [0, 1] \subset \bigcup_x H^{-1}(U^x), p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización en } x) \Rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \{y\} \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \forall i, \exists V_i^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \Rightarrow \exists V^y = V_1^y \cap \dots \cap V_r^y : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \stackrel{(*)}{\subset} H^{-1}(U^{x_i}). \end{aligned}$$

b) Inducción, $i > 0 : \exists \tilde{H}_0 : V^y \times \{t_0\} \rightarrow \tilde{X}$ por hipótesis.

$$\begin{aligned}
 & \underline{i-1 \rightarrow i} : \exists H_{i-1}^y \text{ en } V^y \times [t_0, t_{i-1}] \Rightarrow \text{se puede extender a } V^y \times [t_{i-1}, t_i] \\
 (*) \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} H(y, t_{i-1}) \in U^{x_i} \xrightarrow{\exists \lambda} \tilde{H}_{i-1}^y(y, t_{i-1}) \in U_\lambda \xrightarrow{\text{red. } V^y} \\ \hat{H}_{i-1}^y(V^y \times (t_{i-1})) \subset U_\lambda \rightarrow U^{x_i} \\ \exists (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U_\lambda \text{ elevación (de } H) \end{array} \right. \\
 \Rightarrow & p \circ \tilde{H}_{i-1}^y = p \circ [(p|_{U_\lambda}^{-1} \circ H)] : V^y \times \{t_{i-1}\} \rightarrow U^{x_i} \\
 \xrightarrow{p|_{U_\lambda} \text{ iny.}} & \tilde{H}_{i-1}^y = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ H \text{ en } V^y \times \{t_{i-1}\} \\
 \Rightarrow & (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H \text{ extiende } \tilde{H}_{i-1}^y \text{ a } V^y \times [t_{i-1}, t_i].
 \end{aligned}$$

2. Elevación global. Las locales $\{\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}\}_{y \in Y}$ encolan bien, pues coinciden en las intersecciones: $\forall y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$:

Observación:

1. La elevación de una aplicación $Y \rightarrow X$ sólo depende de su clase de homotopía.
2. Todo camino $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ tiene una única elevación $\tilde{\sigma}$ con origen $\tilde{\sigma}(0) \in p^{-1}(\sigma(0))$.

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}^{y_1}(y, \bullet) \\ \tilde{H}^{y_2}(y, \bullet) \end{array} \right\} \text{ elevan } H(y, \bullet) : \{y\} \times [0, 1] \\ \tilde{H}^{y_1}(y, 0) = \tilde{H}_0(y) = \tilde{H}^{y_2}(y, 0) \text{ 1er paso ind.} \right\} \xrightarrow{\text{Uni. elevación.}} \tilde{H}^{y_1}(y, t) = \tilde{H}^{y_2}(y, t), \forall z$$

Cálculos mediante recubridores

Hemos visto ya que:

- $\pi(\text{estrellado}) = \{1\}$, $\pi(\mathbb{S}^n) = \{1\}$, $n \geq 2 \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \{1\}$.
- $\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$ (no demostrado)
- $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ (no demostrado).
 - $\pi(\text{toro}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\pi(\text{cilindro}) = \mathbb{Z}$.
 - $\pi(\text{banda de Möbius}) = \mathbb{Z}$, $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.

Ahora toca demostrar $\pi(\mathbb{P}^n)$ y $\pi(\mathbb{S}^1)$.

Espacios proyectivos reales

Teorema

$$\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$$

Demostración:

Usamos el recubridor antipodal $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n : \tilde{x}, -\tilde{x} \mapsto x = [\tilde{x}] = [-\tilde{x}]$. Punto base en $\mathbb{P}^n : x_0 = (0 : \dots : 1)$; $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, $\tilde{x}_0 = (0, \dots, 1)$. Ahora, por el lema de elevación:

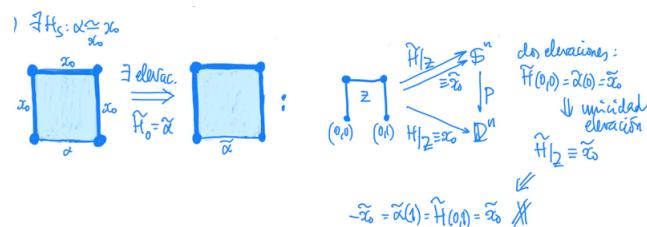
$$\Rightarrow \exists ! \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, p\tilde{\sigma} = \sigma, \tilde{\sigma} = \tilde{x}_0 \wedge \tilde{\sigma}(1) \in p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0\}$$

No veces? lazo.

$$1. \tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{x_0} \tilde{x}_0 \Rightarrow \exists p \circ \tilde{H}_s : \sigma \xrightarrow{x_0} x_0 \Rightarrow [\sigma] = 1 \in \pi(\mathbb{P}^n, x_0).$$

$$2. \tilde{\sigma}(1) = -\tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0} \tilde{\alpha} = (0, \dots, 0, \sin \pi t, \cos \pi t) \Rightarrow \exists p \circ H_s : \sigma \xrightarrow{x_0} \alpha = p \circ \tilde{\alpha}, \text{lazo de base } x_0, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

3. Tenemos:



1. 2. 3. $\Rightarrow \pi(\mathbb{P}^n, x_0)$ tiene dos elementos distintos dependiendo del extremo de la elevación \Rightarrow

$$\boxed{\pi(\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2}.$$

La circunferencia

Teorema

$$\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Observación:

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^1.$$

Demostración:

Usamos el recubridor exponencial $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$. Punto base $x_0 \in \mathbb{S}^1$, $\forall \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, $s(0) = \sigma(1) = x_0$. Por el lema de elevación:

$$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, p\tilde{\sigma} = \sigma \Rightarrow p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = \sigma(0) = p\tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(0) + k, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema

El n^o de vueltas:

$$\begin{aligned} \# : \pi(\mathbb{S}^1, x_0) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0). \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos bien definido.

Demostración:

1. $k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ no depende de $\tilde{\sigma}$.

$$\begin{aligned} p\tilde{\tau} = \sigma = p\tilde{\sigma} \Rightarrow \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(0) + l \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tau} & \text{elevan } \sigma \\ \tilde{\sigma} + l & \text{coinciden} \\ & \text{en } t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{uni. elev.}} \tilde{\tau} = \tilde{\sigma} + l \\ \Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (\tilde{\tau}(1) - l) - (\tilde{\tau}(0) - l) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

2. k no depende de homotopía de lazos, luego $\#$ está bien definido. Sea $H_s : \sigma \simeq \tau$ y $H_s(1) = H_s(0)$, $\forall s$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \simeq \tilde{\tau} \text{ entre elevaciones de } \sigma \wedge \tau \\ &\Rightarrow s \mapsto \underbrace{\tilde{H}_s(1)}_{\xrightarrow{p} H_s(1)} \setminus \underbrace{\tilde{H}_s(0)}_{\xrightarrow{p} H_s(0)} \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{cont.}} \tilde{H}_s(1) - \tilde{H}_s(0) \equiv cte. \\ &\Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \tilde{H}_0(1) - \tilde{H}_0(0) \stackrel{cte.}{=} \tilde{H}_1(1) - \tilde{H}_1(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

3. $\#$ es isomorfismo. Sea $\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ y $\#\tau = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)$ y:

$$\begin{aligned} \tau(0) = \tau(1) = p\tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) \text{ cond. inicial elev.} \\ \Rightarrow \exists \tilde{\tau} : \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma} * \tilde{\tau} = \sigma * \tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \#(\sigma * \tau) &= \sigma * \tau(1) - \sigma * \tau(0) = \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0) = \\ &= (\tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)) + (\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)) = \#\tau + \#\sigma. \end{aligned}$$

4. $\#$ es suprayectiva:

$$\#(\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt) = kt|_0^1 = k$$

(Recorrer \mathbb{S}^1 k veces)

5. $\#$ es 1-1:

$$0 = \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{cases} \sigma(\tilde{1}) = \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{cases} H_s(0) = p\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0) = \sigma(0) = x_0 \\ H_s(1) = p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = x_0 \end{cases} \\ \underbrace{p((1-s)\tilde{\sigma}(t) + s\tilde{\sigma}(0))}_{H_s(t)} : \sigma \xrightarrow[\text{(*)}]{x_0} x_0 \end{cases} (*)$$

$$[\Rightarrow (\sigma) = 1 \in \pi(\mathbb{S}^1, x_0)]$$

Aplicaciones en dimensión 2

Veamos tres teoremas importantes que se pueden demostrar en dimensión 2 con lo que ya hemos visto del grupo fundamental.

Teorema fundamental del Álgebra

Teorema (Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ tiene raíces complejas.

Demostración:

Sea $P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + \overbrace{a_d}^{\neq 0}$ (mónico después de dividir por el cof. director)

1. Tendremos:

$$P_s(z) = z^d + sa_1 z^{d-1} + \dots + sa_d = 0 \xrightarrow[0 \leq s \leq 1]{} |z| < 1 + |a_1| + \dots + |a_d| = r$$

$P_s \neq 0 \xrightarrow[z \neq 0]{} \text{entre } z^{d-1} : -z = s \left(a_1 + \dots + \frac{a_d}{z^{d-1}} \right) \Rightarrow |z| \leq \begin{cases} 1, & |z| \leq 1 \\ |a_1| + \dots + |a_d|, & |z| \geq 1 \end{cases}$.

2. $z(t) = r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \Rightarrow |z(t)| = r \Rightarrow \exists H_s(t) = \underbrace{\frac{P_s(z(t))}{|P_s(z(t))|}}_{\neq 0} \text{ por 1.}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\cos 2\pi dt, \sin 2\pi dt) &= \frac{z(t)^d}{|z(t)^d|} = H_0(t) \xrightarrow[\text{lazos: } z(0)=z(1)]{} H_1(t) \\ &= \frac{P(z(t))}{|P(z(t))|} = \sigma(t) \Rightarrow d = \#(\dots) = \#\sigma. \end{aligned}$$

3. $P(z) \neq 0, \forall z \Rightarrow \exists G_s(t) = \frac{P(sz(t))}{|P(sz(t))|} : G_0 \equiv \underbrace{\frac{a_d}{|a_d|}}_{\neq 0} \xrightarrow[\text{lazos}]{z(0)=z(1)} G_1 = \sigma \Rightarrow 0 = \#(\text{cte.}) = \#\sigma.$

Teorema del punto fijo de Brouwer

Teorema (de no retracto)

\nexists retracto $\rho : \mathbb{D}^2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Demostración:

Tenemos:

$$\exists \rho \Rightarrow \rho_* : \underbrace{\pi(\mathbb{D}^2)}_{\text{convexo}} \xrightarrow{\#_{\mathbb{Z}}} \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1)}_{=\{0\}} \text{ sobre (15.1)}$$

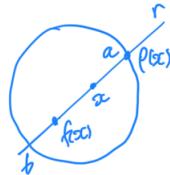
Teorema (del punto fijo)

$\forall f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ continua, $\exists p$ punto fijo $x = f(x)$.

Demostración:

Al absurdo?: $x \neq f(x), \forall x \Rightarrow \exists \rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ retracto.

Construcción de ρ :



La recta $(x \neq f(x)), r(x, f(x)) \cap \mathbb{S}^1 = \{a, b\} \Rightarrow \rho(x) = a = x + \lambda(x)(x - f(x))$.

Ejercicio: Ecuación de λ y continuidad.

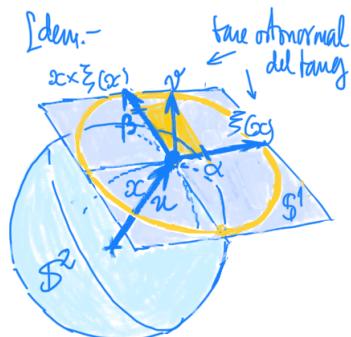
Teorema de la esfera de Brouwer

Teorema (de la esfera de Brouwer)

$\nexists \eta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo tangente continuo sin ceros. ($\text{Tangente} \equiv \eta(x) \perp x, \forall x \in \mathbb{S}^2$)

Demostración:

Con una ilustración:



Sea $\exists \eta$ sin ceros $\Rightarrow \exists \frac{\eta}{\|\eta\|}$ unitario \Rightarrow podemos suponer $\|\eta\| = 1$:

1. $h : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\approx \text{hom.}} SO(3) = \{\text{matrices } 3 \times 3 \text{ ortogonales, } \det > 0\}$

$$(\alpha, \beta; x) \xmapsto{h} A = (u, v, u \times v) \begin{cases} u = x \\ v = \alpha \eta(x) + \beta(x \times \eta(x)) \end{cases}$$

Con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\|x\| = 1$. Bien definida, continua y biyectiva $\xrightarrow{\text{compacto a } T_2}$ homeo.

2. $h_* : \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)}_{=\mathbb{Z} \times \{1\}} \rightarrow \pi(SO(3))$ isomorfismo $\Rightarrow \pi(SO(3)) = \mathbb{Z}$.

3. Abracadabra?: $SO(3) \xrightarrow{\text{homeo.}} \mathbb{P}^3 \Rightarrow \mathbb{Z} = \pi(SO(3)) = \pi(\mathbb{P}^3)$.

Más aplicaciones por el mismo precio

Unos cuantos teoremas profundos más en dim = 2.

Borsuk-Ulam

Teorema (de Borsuk)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar ($f(-x) = -f(x)$) : $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ impar ($\Rightarrow \# \neq 0$)

Demostración:

Tenemos que:

$$\begin{array}{c} \text{[dem.} \\ \tilde{\sigma} \rightarrow \mathbb{D} \\ \downarrow P \\ \mathbb{D}, \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{B}^4 \\ (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \rightarrow \mathbb{S}^1 \end{array}$$

$\tilde{\sigma}$ elevación de $\sigma(t) = f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. $\begin{cases} x = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & (*) \\ 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$

$f(-x) = -f(x) \xrightarrow{(*)} \sigma(t + \frac{1}{2}) = -\sigma(t) \Rightarrow \tilde{\sigma}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{\sigma}(t) + k_t + \frac{1}{2}$. Como $k_t \equiv cte.$ es continua:

$$\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \left(\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) - \tilde{\sigma}(0) \right) = \underbrace{\left(k_{1/2} + \frac{1}{2} \right)}_{k_0} + \left(k_0 + \frac{1}{2} \right) = 2k_0 + 1$$

Análogamente,

Teorema (de Hirsch)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ par ($f(-x) = f(x)$) : $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ par.

Corolario (Teorema de Borsuk-Ulam)

$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar \Rightarrow esencial.

Demostración:

$\exists H_s : f \simeq cte. \Rightarrow H_s(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : \sigma \simeq x_0 \Rightarrow \#\sigma = 0$, con σ rotación anterior y la homotopía de lazos.

Corolario (2)

$\nexists g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar.

Demostración:

Tenemos:

$$\begin{array}{c} \text{Idem-} \\ \mathbb{S}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1 \\ \downarrow \sigma \quad \xrightarrow{\text{fijo}} \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2 \\ \text{base } (1,0,0) \simeq (1,0,0) \end{array}$$

$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

■ g impar $\Rightarrow f$ impar $\Rightarrow \#\sigma \neq 0$.

■ \mathbb{S}^2 simple conexo $\exists H_s : (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0) \xrightarrow[\sigma]{\text{base } (1,0,0) \text{ fijo}} (1,0,0)$. Como $f = g \circ \sigma = 0 \Rightarrow$

$$g \circ H_s : f \underbrace{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}_{\sigma} \simeq f(1,0,0) \text{ cte.} \Rightarrow \#\sigma = 0$$

Corolario (3)

$\forall h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists h(x) = h(-x) (\Rightarrow h \text{ no es 1-1})$.

Demostración:

$h(x) \neq h(-x), \forall x \Rightarrow \exists g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{\|h(x) - h(-x)\|} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar.

Invarianza del dominio

Teorema

Sea $f : U_{ab.} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua y 1-1 $\Rightarrow f(U)$ es abierto.

Demostración:

$\forall a \in U, \exists V^{\text{ab.}} \subset \mathbb{R}^2 : f(a) \in V \subset f(U)$. Por traslaciones: $a = f(a) = 0$. Con esto, $\exists \varepsilon > 0 :$

$$B(0, \varepsilon) \subset B[0, \varepsilon] \subset U; 0 \notin S = S[0, \varepsilon] \xrightarrow{1-1} 0 = f(0) \in f(S) \Rightarrow \exists V = C(0) \overset{\text{c.c.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \setminus f(S)$$

S comp. $\Rightarrow f(S)$ comp. \Rightarrow cerr. en \mathbb{R}^2

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ loc. conx.} \Rightarrow V \underset{\text{conx.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ c. caminos(*)

Este V es la solución: $V \subset f(B) \subset f(U)$.

Al absurdo: $\exists c \in V \setminus f(B) \xrightarrow{(*)} \exists \sigma : [0, 1] \rightarrow V, \sigma(0) = c, \sigma(1) = 0$.

Denotamos,

$$g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto f(\varepsilon x); h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto g(x) - g(-x)$$

y tenemos las homotopías: $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$.

- $\frac{f(\varepsilon sx) - c}{\|\cdot\|} : \frac{-c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g - c}{\|\cdot\|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x) - \sigma(s)}{\|\cdot\|} : \frac{g - c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g}{\|\cdot\|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon sx)}{\|\cdot\|} : \frac{g}{\|\cdot\|} \simeq \frac{h}{\|\cdot\|}$

Con esto, $\frac{h}{\|\cdot\|} \simeq \text{cte.}!$ por Borsuk-Ulam.

Que los denominadores no se anulan es una comprobación rutinaria.

Divarianza del borde y de la dimensión

Teorema

$$S, T \subset \mathbb{R}^2, h : S \xrightarrow{\text{homeo.}} T \Rightarrow h(S \setminus \overset{\circ}{S}) = T \setminus \overset{\circ}{T}.$$

Demostración:

$$h : \overset{\circ}{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ inyectiva} \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \underset{19,2}{\subset} \text{ab.} \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \subset \overset{\circ}{T}. \text{ (el otro} \supset \text{ con } h^{-1})$$

Ejemplo:

$$S = T = \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(x = 0) = (x = 0).$$

Teorema

$$U \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n, V \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^2, h : U \xrightarrow{\text{homeo.}} V \Rightarrow n = 2.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \exists H \subset \mathbb{R}^n & [\text{plano afín interior vacío en } \mathbb{R}^n \text{ salvo si } n = 2] (*) : U \cap H \neq \emptyset \Rightarrow h| : \underbrace{U \cap H}_{\approx \text{ab.}} \xrightarrow{1-1} V \subset \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{19,2} h(U \cap H) \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h \text{ homeo.}} U \cap H = h^{-1}h(U \cap H) \underset{\text{ab.}}{\subset} U \xrightarrow{(*)} n = 2 \end{aligned}$$

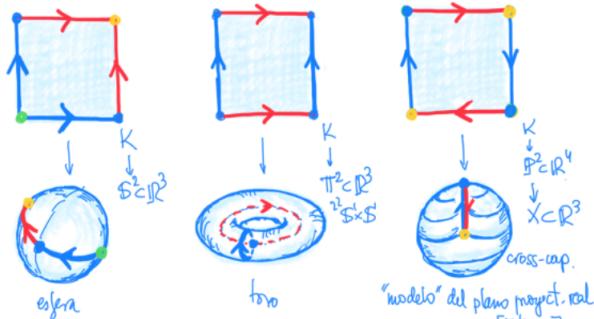
Superficies

Concepto

Definición

Una superficie es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Supondremos siempre que es T_2 y el II Ax., lo que implica que se puede sumergir en \mathbb{R}^n para n grande.

Nos interesan las superficies compactas. Las tres primeras son cocientes:



Ejercicio: $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \frac{(x_1^2 - x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$.

Observación:

$P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene siempre identificaciones adicionales (como el cross-cap?)

Sumas conexas

El método genérico para construir superficies requiere el concepto un poco más general siguiente:

Definición

Una superficie con borde es un espacio local homeomorfo a $\{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ y los puntos del borde se corresponden con $\{x = 0\}$ (es una definición consistente por la inversa? del borde)



Observación:

Sin los puntos del borde se tiene una superficie ordinaria.

Ejemplo:

1. Un disco cerrado, que tiene por borde la circunferencia.
2. Una corona circular, una banda entre rectas paralelas, un tronco de cilindro.

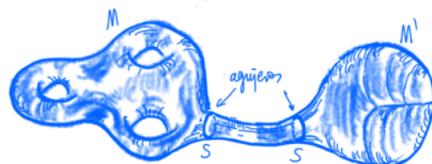


Con este concepto podemos “hacer agujeros” en superficies y, con ellos, definir:

Definición

La suma conexa $M \# M'$ de dos superficies M y M' se construye haciendo un agujero en cada una y pegando las superficies agujereadas por sus bordes:

1. *Agujeros: $B \subset M$ y $B \subset M'$ (discos abiertos) con bordes $S = \overline{B} \setminus B$ y $S' = \overline{B'} \setminus B'$ (circunferencias).*
2. *Superficies agujereadas: $M \setminus B$ y $M' \setminus B'$ con los mismos bordes S y S' .*
3. *Pegando por los bordes: $M \# M' = ((M \setminus B) + (M' \setminus B')) / (S \equiv S')$.*



Proposición

La suma conexa está bien definida y no depende de los agujeros elegidos (salvo homeomorfismos).

Demostración:

Que efectivamente es una superficie ordinaria (sin borde) es fácil si elegimos los agujeros en abiertos de las superficies homeomorfas a \mathbb{R}^2 . Luego, hay que ver que si cambiamos los agujeros obtenemos el mismo resultado (salvo homeomorfismo) y esto ya requiere resultados profundos como el teorema de Jordan-Schoenflies.

Proposición

La suma conexa es una operación asociativa conmutativa con elemento neutro la esfera.

Demostración:

Que $(M \# M') \# M'' \approx M \# (M' \# M'')$ es fácil tomando agujeros bien separados. También es obvio que $M \# M' \approx M' \# M$. Finalmente:

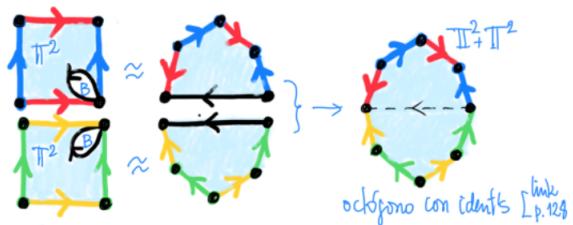
$$M \# \mathbb{S}^2 = ((M \setminus B) + (\mathbb{S}^2 \setminus B')) / (S \equiv S') = ((M \setminus B) + B) / (S \equiv S') = M$$

pues $\mathbb{S}^2 \setminus B'$ es un disco cerrado que restituimos a M .

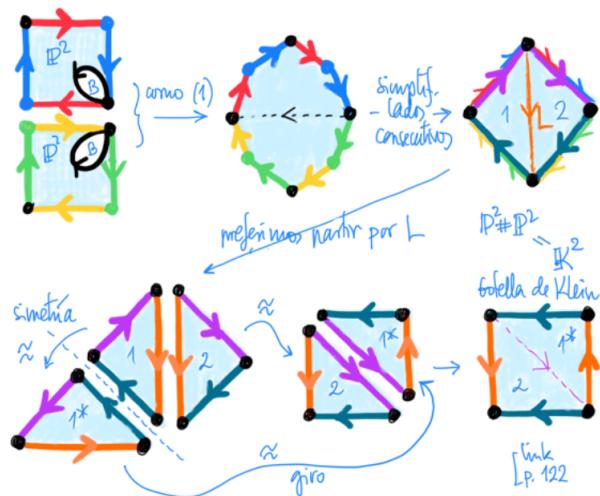
Cocientes

Las sumas conexas se visualizan muy bien mediante identificaciones.

1. Suma conexa de toros:



2. Suma conexa de planos proyectivos:



Clasificación de superficies

El teorema

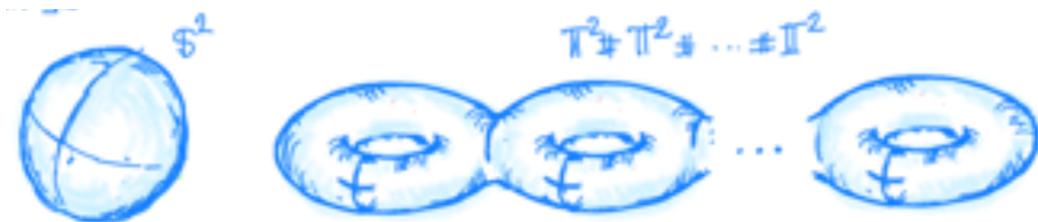
Teorema

Toda superficie compacta es homeomorfa a una y sólo una entre:

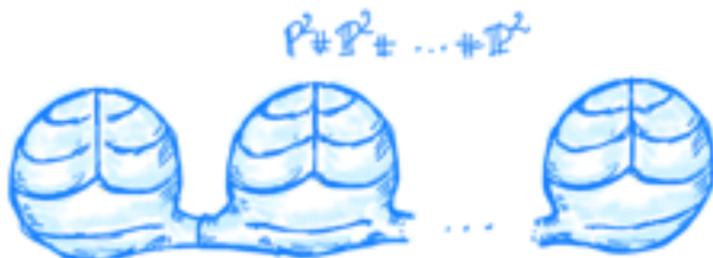
$$\mathbb{S}^2; \quad \mathbb{H}^2 \# \cdots \# \mathbb{H}^2, k \geq 1; \quad \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2, k \geq 1$$

Las podemos dibujar:

- En \mathbb{R}^3 :



- En \mathbb{R}^4 (modelo en \mathbb{R}^3):



El “solo una” del enunciado nos dice que estas superficies son todas distintas (no homeomorfismo): el grupo fundamental las distingue. Ya sabemos que $\pi(\mathbb{S}^2) = \{1\}$, $\pi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{Z}^2$, $\pi(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2$ y los demás H_0 ? son desiguales (aunque no sepamos calcularlos).

La relación fundamental

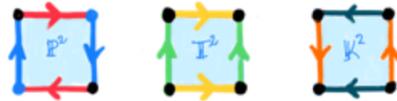
En la lista del teorema de clasificación no hay sumas “mixtas”: $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2, \dots$, pero el mismo teorema nos dice que están en la lista. Es claro que, por las propiedades de $\#$, cualquier suma conexa de \mathbb{S}^2, Π^2 y \mathbb{P}^2 estará en la lista en cuanto esté $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2$. En efecto:

Proposición

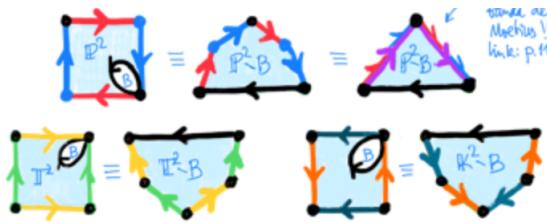
$$\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2.$$

Demostración:

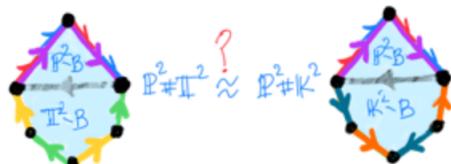
“Cut & paste” típico de identificaciones. Como $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$ (20.3) es la botella de Klein, el homeomorfismo que partiremos? es $\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$ con:



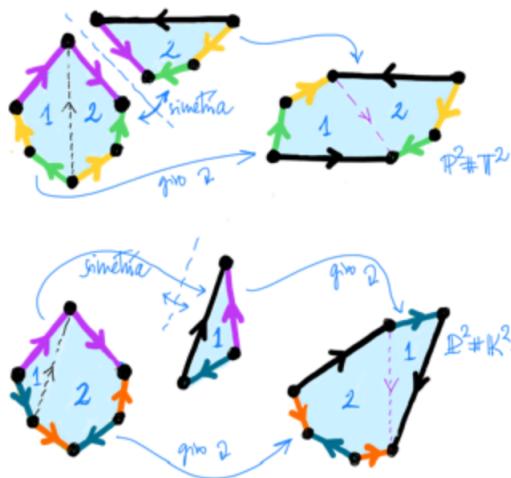
1. Agujeros:



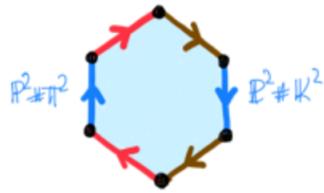
2. Pegados:



3. Cut & paste:



Obtenemos dos representaciones nuevas de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{H}^2$ y $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$, con apariencias desiguales, pero topologías iguales: dos hexágonos con las mismas identificaciones de lados:



No dejarse engañar por los colores ni los sentidos de las flechas.

Grupos fundamentales con un agujero

Aunque no podamos distinguir todas las superficies unas de otras porque no conocemos todos los grupos fundamentales, si podemos hacer algunas distinciones “haciendo agujeros”.

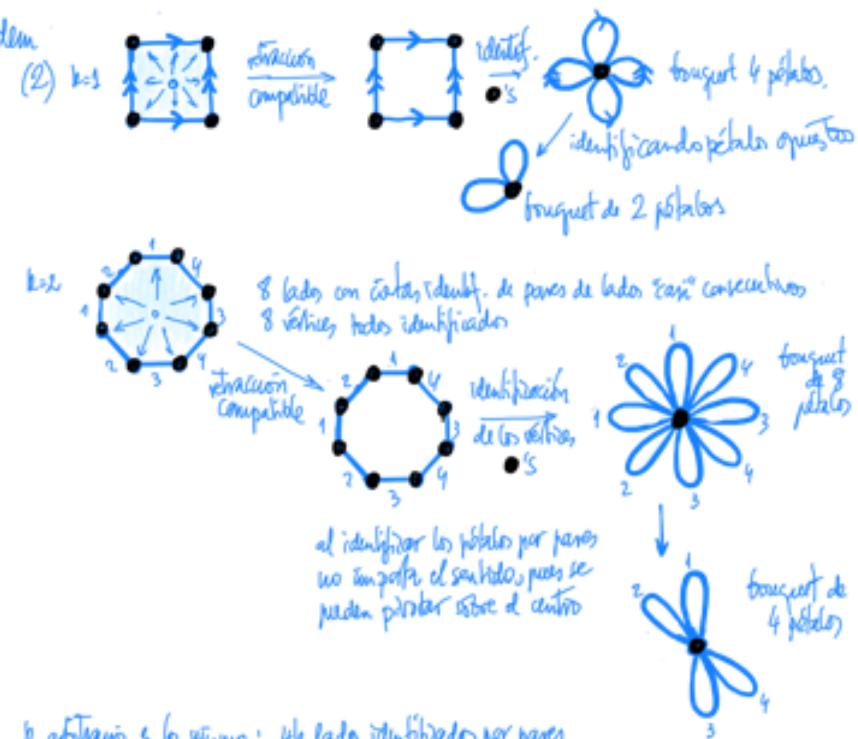
Proposición

Distinguimos:

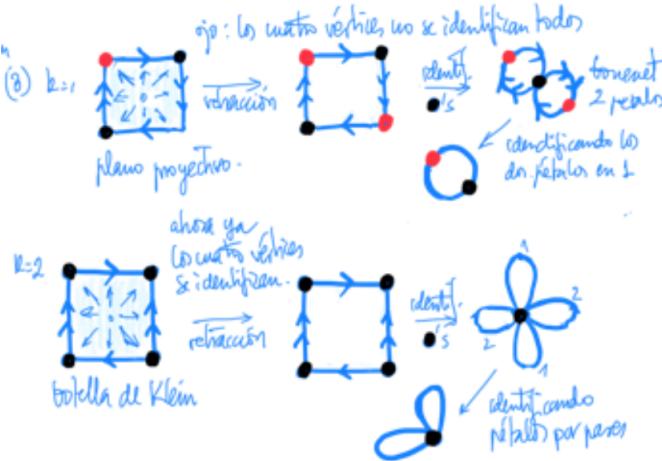
1. $\pi(\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\mathbb{R}^2) = \{1\}$.
2. $\pi(\mathbb{H}^2 \# \dots \# \mathbb{H}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^{2k}) = \mathbb{Z}^{*^{2k}}$.
3. $\pi(\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^k) = \mathbb{Z}^{*^k}$.

Demostración:

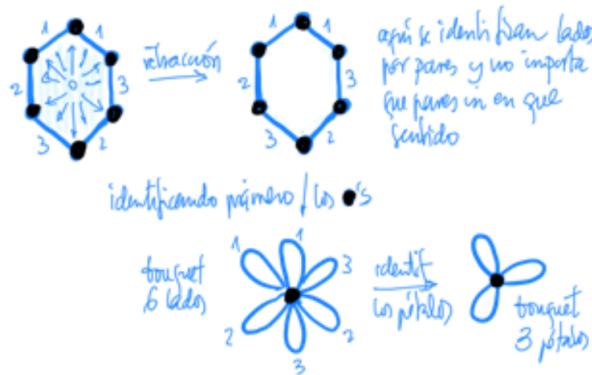
Tenemos



Con k arbitrario es lo mismo: $4k$ lados identificados por pares, $4k$ vértices todos identificados. Por retracción radical desde un punto interior (el agujero), obtenemos la poligonal con esas mismas identificaciones. Al identificar los vértices se tiene un bouquet de $4k$ pétalos y, al identificar pétalos por pares, un bouquet de $2k$ pétalos.



$k = 3$. Por *cut & paste*, los lados, pueden sumar un proyectivo aporta? 2 lados identificados entre sí con tres vértices identificados todos (21.2).



Con k arbitrario es lo mismo: se empieza con un polígono de $2k$ lados, que se retrae a una poligonal de $2k$ lados, en la que se identifican los vértices para obtener un bouquet de $2k$ pétalos, que se identifican por pares para tener un bouquet de k .

Conclusión:

Todas las superficies se distinguen por el grupo fundamental después de quitar un punto, salvo los pares:

$$\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2 \wedge \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2 \# \cdots \# \mathbb{K}^2$$

para cada $k \geq 1$. El primer caso (y el esencial) es que el toro y la botella de Klein no son homeomorfos: La razón de fondo es la orientabilidad, que no hemos estudiado aquí.

En general:

- Cualquier $\mathbb{P}^n \# \cdots \# \mathbb{P}^2$ contiene una banda de Möbius (de hecho, tantas como sumandos) y la banda es no orientable.
- Cualquier $\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2$ es orientable, luego cualquier abierto suyo lo es, luego no puede contener una banda de Möbius.

Grande finale

Vamos a probar que la esfera no es contrátil, utilizando el teorema de la esfera de Brouwer (18.3) y las ideas sobre vectores tangentes allí vistas:

Proposición

\mathbb{S}^2 no es contráctil: $\#H_t : \text{cte.} \simeq id_{\mathbb{S}^2}$.

Demostración:

Absurdo: sea que $\exists H_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, $H_0(x) = x_0$, $H_1(x) = x$.

1. Problema de elevación:

Problema de elevación

? $\exists \tilde{H}: \tilde{S}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) : x \perp x\}$

$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$

$\mathbb{S}^2 \times [0, 1] \xrightarrow{H} \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} \#(x, y) & T_x(\mathbb{S}^2) \ni x \end{bmatrix}$

[número tangente a \mathbb{S}^2 en x] $\Rightarrow \begin{bmatrix} u_x(x) & \perp H_x(x) = x \end{bmatrix}$

campo tangente a la esfera sin zeros $\cancel{\cancel{x}}$

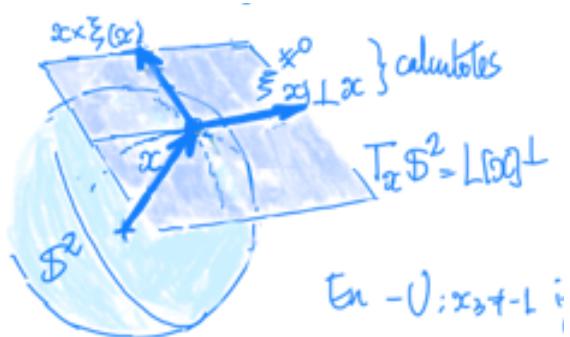
Veamos pues que $\exists H$

sea $\tilde{H} = \tilde{H}_f(x) = (H_f(x), u_f(x))$, $u_f(x) \perp H_f(x)$

es un vectorial pero x planta igual

2. Estructura de $\tilde{\mathbb{S}}^1$:

Como esquema tenemos,



Así, $c = (0, 0, 1)$, $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{c\} = \{x_3 \neq 1\}$, $-U : \mathbb{S}^2 \setminus \{-c\} = \{x_3 \neq -1\}$.

En $U : x_3 \neq 1$, $\{\eta(x) = (1 - x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, x_1(1 - x_3)), \eta(x) = x \times \eta(x)\}$ base de $T_x \mathbb{S}^2$ ortogonal. $\Rightarrow \forall \underbrace{u}_{\neq 0} \perp x : u = \lambda(u, x)\eta(x) + \mu(u, x)\eta(x)$.

$$\begin{cases} \lambda(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \\ \mu(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \end{cases} \quad \text{cond's ?? continuas.}$$

En $-U : x_3 \neq -1$ igual con $\eta(x) = (1 + x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, -x_1(1 + x_3))$.

3. Preparación local: Igual que en 16,2 para la elevación de recubridores:

$$\forall x \in \mathbb{S}^2, \exists W^x \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{S}^2, \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : W^x \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U) \text{ ó } H^{-1}(-U)$$

reducción $W^x \supset \overline{V^x} \supset V^x$.

¡La partición depende de $x!$ $\Rightarrow \mathbb{S}^2 \text{ comp.} \mathbb{S}^2 = V^{x_1} \cup \dots \cup V^{x_v}$ y juntamos las v particiones.

$$\Rightarrow \mathbb{S}^2 = V_1 \cup \dots \cup V_v \wedge \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : H \left(\overbrace{W_k}^{\supset \overline{V}_k \supset V_k} \times [t_{i-1}, t_i] \right) \subset U \text{ ó } -U.$$

Objetivo: construir la elevación \tilde{H} en pasos sucesivos:

- dada \tilde{H}_t para $0 \leq t \leq t_{i-1}$ extenderla a $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, es decir,
- dada $\tilde{H}_{t_{i-1}}$ extenderla a $t_{i-1} \leq t \leq t_i$.

Para empezar en $i = 1$:

$$\tilde{H}_{t_0}(x) = \tilde{H}_0(x) = (H_0(x), u_0(x)) = (x_0, u_0), \text{ cualquier } \overbrace{u_0}^{\neq 0} \perp x_0$$

El paso inductivo da más trabajo y para simplificar un escalamiento permite suponer $[t_{i-1}, t_i] = [0, 1]$ y $H(W_k \times [0, 1]) \subset U \text{ ó } -U \forall k(*)$. Queremos:

- dada \tilde{H}_0 extenderla a $0 \leq t \leq 1$

Demostración:

$$\tilde{H}_0 = \tilde{H}_{t_{i-1}} \text{ no es la elevación de } i = 1.$$

4. Descomposición de la extensión en varios pasos: Tomamos $C_k = \mathbb{S}^2 \setminus V_k$ y,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \varphi_k(x) &= \frac{\text{dist}(x, C_k)}{\sum_l \text{dist}(x, C_k)} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi_k \leq 1 \\ \{\varphi_k = 0\} = C_k \quad \text{por ser los } C_k \text{ cerrados.} \\ \sum_l \varphi_l = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad \psi_k &= \varphi_1 + \dots + \varphi_k \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots \leq \psi_k \equiv 1 \\ \{\psi_{k-1} < \psi_k\} = \{\varphi \neq 0\} = X \setminus C_k = V_k \\ \overline{\{\psi_{k-1} < \psi_k\}} = \overline{V_k} \subset W_k \end{cases} \end{aligned} \quad (*)$$

Las ψ_k son los límites superiores de la siguiente cadena de cerrados:

$$\mathbb{S}^2 \times \{0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k = \{t \leq \psi_k(x) : x \in \mathbb{S}^2\} \subset \dots \subset \Gamma_v = \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$$

y, empezando con \tilde{H}_0 para $k = 1$, la cosa es:

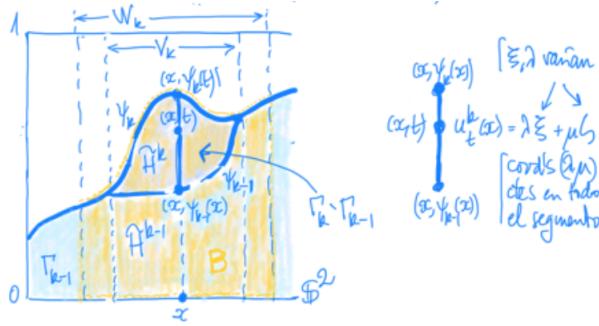
- dada $\tilde{H}^{k-1} = (r, u^{k-1})$ elevación de $H|_{\Gamma_{k-1}}$, extenderla a $\Gamma_k \setminus \Gamma_{k-1}$. Como:

$$\begin{cases} \Gamma_{k-1} \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] \stackrel{(**)}{=} \Gamma_k \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] = A \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \\ \Gamma_{k-1} \cap (W_k \times [0, 1]) = B \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \end{cases} \quad \wedge \quad \Gamma_k = \underbrace{A}_{\subset \Gamma_{k-1}} \cup B$$

definiremos,

- \tilde{H}^k en B tal que, $\tilde{H}^k = \tilde{H}^{k-1}$ en $A \cap B \subset \mathbb{S}^2 \setminus V_k \times [0, 1]$.

$$5. \quad (x, t) \in B \xrightarrow{(*)} \begin{cases} H_t(x) \in U \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x) \in U \end{cases} \Rightarrow \exists \eta \text{ y } S \text{ en } \begin{cases} H_t(x). \text{ (ii)} \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x). \text{ (i)} \end{cases}.$$



$$\text{a)} \quad t \leq \psi_{k-1}(x) : (x, t) \in \Gamma_{k-1} \Rightarrow \tilde{H}_t^k(x) = \tilde{H}_t^{k-1}(x).$$

$$\underline{b}) \quad t \geq \psi_{k-1}(x) : \tilde{H}^{k-1} = (H, u^{k-1}).$$

(i) \Rightarrow

$$\underbrace{u_{\psi_{k-1}(x)^{k-1}(x)}}_{\neq 0} = \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x) \eta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)) +_{\psi_{k-1}(x)}(x) \zeta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)).$$

(ii) \Rightarrow

$$\begin{aligned}\exists u_t^k(x) &= \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x)\eta(H_t(x)) + \mu_{\psi_{k-1}(x)}(x)\zeta(H_t(x)) \\ &\Rightarrow \exists \tilde{H}_t^k(x) = (H_t(x), u_t^k(x)).\end{aligned}$$

y por la construcción es continua.

a) y b) coinciden en $t = \psi_{k-1}(x)$.

$$6. \psi_{k-1} \stackrel{(**)}{=} \psi_k \text{ fuera de } V_k \Rightarrow \tilde{H}^k \text{ de 5.} = \tilde{H}^{k-1} \text{ en } A \cap B.$$

Esto completa la propuesta de que $\exists \tilde{H}$ elevación de H y, con ello, se completa la contradicción buscada. Acaba aquí la demostración de que \mathbb{S}^2 no es contráctil.