

Topología elemental

Mario Calvarro Marines, Juan Diego Barrado Daganzo
e Iker Muñoz Jiménez

Índice general

I Topología general	1
1. Espacios topológicos	3
1.1. Conjuntos abiertos	3
1.2. Conjuntos cerrados	6
1.3. Bases	10
1.4. Topología relativa	12
2. Aplicaciones continuas	15
2.1. Continuidad	15
2.2. Continuidad y subespacios	17
2.3. Homeomorfismos	19
3. Construcciones	23
3.1. Imágenes inversas	23
3.1.1. Caracterización de la imagen inversa	24
3.1.2. Inmersiones	25
3.2. Imágenes directas	26
3.2.1. Caracterización de la imagen directa	27
3.2.2. Identificaciones	28
3.2.3. Espacio Cociente	29
3.3. Productos finitos	32
3.4. Sumas finitas	36
3.5. Espacios proyectivos reales	38
3.5.1. Geometría lineal	38

3.5.2. Topología de espacio proyectivos	39
4. Separación	45
4.1. Concepto	45
4.2. Tabla de comportamiento	47
5. Numerabilidad	49
5.1. Axiomas	49
5.1.1. I Axioma	49
5.1.2. II Axioma	50
5.1.3. Separable	51
5.1.4. Lindelöf	51
5.2. Tabla de comportamiento	52
5.3. Sucesiones	53
6. Compacidad	55
6.1. Concepto y mantras	55
6.2. Tabla de comportamiento	58
7. Compacidad local	61
7.1. Compacidad local y mantras	62
7.2. Tabla de comportamiento	64
7.3. Compactificación por un punto	64
8. Conexión	67
8.1. Concepto y mantras	67
8.2. Tabla de comportamiento	70
9. Componentes conexas y conexión local	73
9.1. Componentes	73
9.2. Conexión local	74
9.3. Tabla de comportamiento	75
10. Conexión por caminos	77
10.1. Conexión por caminos	78

10.2. Mantras	78
10.3. Tabla de comportamiento	79
11. Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos	81
11.1. Componentes conexas por caminos	81
11.2. Conexión local por caminos	81
11.3. Tabla de comportamiento	82
11.4. Relaciones entre las propiedades de conexión	82
II Topología algebraica	85
12. Homotopía	87
12.1. Conceptos fundamentales	87
12.2. Concepto relativo	88
12.3. Contractibilidad	89
13. Homotopía de caminos	91
13.1. El concepto básico	91
13.2. Simple-conexión	91
13.3. Esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$	92
14. El grupo fundamental	95
14.1. Operaciones con caminos	95
14.2. El grupo fundamental	96
14.3. Functorialidad	97
15. Retractos	99
15.1. Retractos y deformaciones	99
15.2. Cocientes	100
15.3. Agujeros	101
16. Recubridores	103
16.1. El problema de elevación	103
16.2. Unicidad de elevación	104

16.3. Lema de elevación	104
17. Cálculos mediante recubridores	107
17.1. Espacios proyectivos reales	107
17.2. La circunferencia	108
18. Aplicaciones en dimensión 2	111
18.1. Teorema fundamental del Álgebra	111
18.2. Teorema del punto fijo de Brouwer	111
18.3. Teorema de la esfera de Brouwer	112
19. Más aplicaciones por el mismo precio	115
19.1. Borsuk-Ulam	115
19.2. Invarianza del dominio	116
19.3. Divarianza del borde y de la dimensión	117
20. Superficies	119
20.1. Concepto	119
20.2. Sumas conexas	119
20.3. Cocientes	121
21. Clasificación de superficies	123
21.1. El teorema	123
21.2. La relación fundamental	124
21.3. Grupos fundamentales con un agujero	125
22. Grande finale	127

Parte I

Topología general

ESPACIOS TOPOLOGICOS

La primera parte de este manual pretende hacer un estudio formal de la definición de la estructura de espacio topológico. Uno de los objetivos de esta noción es, por ejemplo, desvincular los conceptos topológicos como son abiertos, cerrados, fronteras, etc. de las propiedades métricas en \mathbb{R}^n . Fundamentalmente, esto servirá para poder estudiar características como continuidad, convergencia, conexión... en espacios más enrevesados y, como añadido, estudiar estas propiedades en espacios ya conocidos, pero con una estructura asociada distinta.

CONJUNTOS ABIERTOS

Al igual que en el Álgebra Lineal la parte más básica y fundamental eran los vectores, vamos a ver que en la topología las piezas claves son los abiertos. Estos nos permiten dar forma y definir el resto de nociones del capítulo. Además, la familia de abiertos en un conjunto caracteriza y diferencia las topologías con las que pueda ser equipado este.

Definición (Espacio Topológico)

Sea X un conjunto de elementos que denotaremos por **puntos** y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos que denotaremos **abiertos**, decimos que \mathcal{T} es una **topología** de X si y sólo si:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ donde $U_i \in \mathcal{T}$
3. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ donde $U_i \in \mathcal{T}$

y, ese caso, la dupla (X, \mathcal{T}) se denomina **espacio topológico**.

Ejemplo:

1. **Topología trivial:**

La topología es $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ para cualquier conjunto X sobre el que se equipe. Es la topología con menos abiertos posibles y esto hace que esté contenida en cualquier otra topología.

2. **Topología discreta:**

La topología es $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ para cualquier conjunto X sobre el que se equipe. Es la topología con más¹ abiertos posibles y esto hace que cualquier otra esté contenida en ella.

3. **Topología usual:**

Si al conjunto \mathbb{R}^n le equipamos la topología en las que los abiertos son los conjuntos formados por unión de bolas euclídeas, obtenemos la topología habitual que utilizamos en \mathbb{R}^n .

¹Porque si los puntos $\{x\} \in X$ son abiertos, entonces cualquier conjunto $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ es abierto.

4. Cualquier distancia $d(x, y)$ define una topología a través de sus bolas abiertas, igual que definíamos la usual en \mathbb{R}^n , de hecho, se puede demostrar sin mayor dificultad (tal y como se ve en el dibujo) que todas las normas p en \mathbb{R}^n definen bolas que contienen y están contenidas en las restantes. En consecuencia, si la definición de abierto usual se hacía a través de bolas redondas y hemos visto que estas contienen a bolas cuadradas o romboidales, también se tiene que es abierto cuadrado o romboidal y el recíproco por los contenidos en ambos lados.



Figura 1.1: El dibujo representa distintas topologías generadas por distintas normas, pero todas equivalentes.

Es decir, cambiar de norma igual cambia la noción de distancia en \mathbb{R}^n , ¡pero no la topología asociada! Sigue siendo la topología usual de \mathbb{R}^n .

5. Topología del punto:

La topología es $\mathcal{T}_a := \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$ para un $a \in X$ fijado previamente. Lo curioso de esta topología es que todos los abiertos son los conjuntos que contienen a $a \in X$, es decir, que la topología queda caracterizada como $\mathcal{T}_a := \{\{a, W\} : \text{donde } W \subset X\}$.

Definición (Entorno)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $x \in X$ un punto del mismo, definimos un **entorno² del punto** x como un conjunto V^x que contiene un abierto U que contiene al punto:

$$V^x := V \subset X : \exists U \subset V \text{ donde } x \in U$$

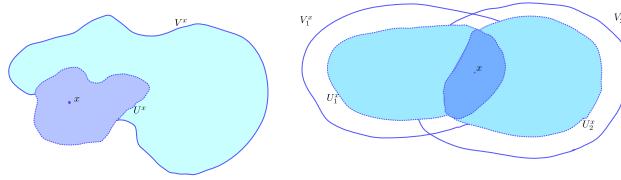


Figura 1.2: Definición de entornos

Proposición (Caracterización de abierto)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $W \subset X$ un subconjunto de puntos, este es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

²Cuando el abierto que contiene al punto es el propio entorno o, dicho de otra manera, el entorno de x es un abierto de la topología, decimos que es un entorno *abierto* de x .

Demostración:

La implicación de izquierda a derecha es trivial, pues todo conjunto se contiene a sí mismo y, como el conjunto es abierto, contiene a un abierto que contiene al punto, es decir, es entorno de cualquiera de sus puntos.

Para probar el recíproco, si un subconjunto $W \subset X$ es entorno de todos sus puntos, entonces para cada x del conjunto existe un abierto $U^x \subset W$ que contiene a x . Por tanto, podemos expresar W como unión arbitraria de todos estos abiertos, es decir, $W = \bigcup_{x \in W} U^x$ y, por ser topología, la unión arbitraria de abiertos es abierta.

Proposición

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y V_1^x, V_2^x dos entornos de un punto $x \in X$, entonces la intersección $V^x := V_1^x \cap V_2^x$ es entorno de x .

Demostración:

Por definición de entornos, existen dos abiertos $U_1^x \subset V_1^x$ y $U_2^x \subset V_2^x$ que contienen a x . Por la definición de topología, la intersección finita $U^x := U_1^x \cap U_2^x$ es un abierto de la topología y vemos que $U^x \subset V^x$, luego V^x contiene a un abierto que contiene al punto, es decir, es entorno.

Definición (Punto interior)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que un punto $x \in X$ es **punto interior de A** si y sólo si A es entorno de x .

$$x \in \text{Int}_X(A) \Leftrightarrow \exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} A : x \in U$$

Al conjunto de puntos interiores, que denotamos por A° o $\text{Int}(A)$, lo llamamos **interior de A** .

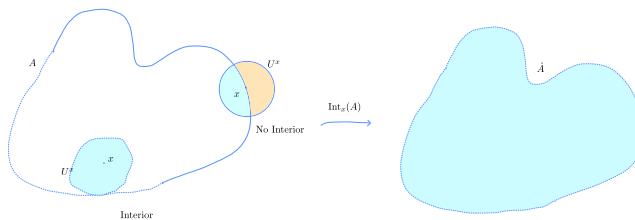


Figura 1.3: Definición de interior de un conjunto.

Proposición

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos, entonces:

- A° es el mayor abierto en A o, lo que es lo mismo, $\text{A}^\circ = \bigcup_{U \subset A} U$.
- A abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores, es decir, $A = \text{A}^\circ$

Demostración:

1. Si $x \in \text{A}^\circ$, entonces $\exists U \subset A : x \in U \Rightarrow x \in \bigcup_{U \subset A} U$, pero es que si $x \in U$ para algún $U \subset A$, por definición es interior de A , luego $x \in \text{A}^\circ$.

Como A° es unión de abiertos, la definición de topología nos asegura que será un abierto y además es el más grande de todos porque cualquier otro está contenido en él por ser la unión de todos los abiertos.

2. El contenido $\text{̄}A \subset A$ se tiene siempre, puesto que $x \in \text{̄}A \Leftrightarrow \exists U \subset A : x \in U \subset A \Rightarrow x \in A$ (dicho de otra forma, los puntos interiores de A son aquellos para los cuales A es entorno y como un entorno contiene al punto se tiene trivialmente).

De esta manera, si A es abierto, como $\text{̄}A$ es el mayor abierto de A , tiene que ser $\text{̄}A = A$ y si $\text{̄}A = A$, como $\text{̄}A$ es abierto, pues lo es A .

Ejemplo:

1. Si consideramos un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$, vemos que cualquier subconjunto $A \subsetneq X$ puede contener únicamente a \emptyset como abierto, luego su interior es el vacío $\text{̄}A = \emptyset$.
2. Si consideramos $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ algunos de los interiores comunes son $\text{Int}(B[a, \varepsilon]) = B(a, \varepsilon)$, $\text{̄}\mathbb{Q}^n = \emptyset$ y $\text{̄}\mathbb{Z}^n = \emptyset$.
3. Si consideramos la topología del punto \mathcal{T}_a , entonces $\{\overset{\circ}{a}\} = \{a\}$ y, en general, ocurre lo mismo para cualquier conjunto que contenga a a (porque son abiertos). Sin embargo, cualquier $x \neq a$ verifica que $\{x\} = \emptyset$.

Corolario

1. $A \subset B \Rightarrow \text{̄}A \subset \text{̄}B$.
2. $\text{̄}A \cap \text{̄}B = \text{Int}(A \cap B)$.

Demostración:

1. La relación $A \subset B \Rightarrow \text{̄}A \subset \text{̄}B$ implica que, como $\text{̄}A$ es abierto, contenido en B , y $\text{̄}B$ es la unión de todos los abiertos de B , $\text{̄}A \subset \text{̄}B$.
2. En primer lugar, como $\text{̄}A \cap \text{̄}B$ es intersección de abiertos, entonces es abierto y está contenido en $A \cap B$, luego por ser $\text{Int}(A \cap B) = \bigcup_{U \in A \cap B} U$ sabemos que $\text{̄}A \cap \text{̄}B \subset \text{Int}(A \cap B)$.

Recíprocamente, si $x \in \text{Int}(A \cap B)$ existe un abierto $U \in A \cap B$ tal que $x \in U$. Por ser de la intersección, en particular también es abierto de cada conjunto, luego $x \in \text{̄}A$ y $x \in \text{̄}B$, es decir, $x \in \text{̄}A \cap \text{̄}B$.

CONJUNTOS CERRADOS

Los conjuntos cerrados por definición están íntimamente relacionados con los conjuntos abiertos. Revisten gran importancia por la relación que tienen con dos conjuntos de puntos importantes: la acumulación y la adherencia. Estas dos últimas nociones permiten caracterizar conceptos como la convergencia de sucesiones o la densidad de un conjunto.

Definición (Conjunto cerrado)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $F \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que es un **conjunto cerrado** si y sólo si su complementario es un abierto, es decir, $U = X \setminus F$ es abierto.

Observación:

En muchas ocasiones el lenguaje natural confunde las definiciones precisas que se dan en matemáticas. Este caso es un ejemplo de ello: uno podría pensar que la definición de cerrado desprende el hecho de que un cerrado es un “no abierto”. Sin embargo, podemos encontrar multitud de conjuntos que no ni abiertos ni cerrados



Figura 1.4: Ejemplo de conjunto que no es ni abierto ni cerrado.

e incluso otros que son abiertos y cerrados simultáneamente, como el vacío y el total.

Proposición

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y denotando por \mathcal{F} al conjunto de cerrados del espacio, entonces:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
2. $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$ donde $F_i \in \mathcal{F}$.
3. $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$ donde $F_i \in \mathcal{F}$.

Demostración:

- Trivial, porque el uno es el complementario del otro y ambos son abiertos.
- Porque el complementario de la intersección $X \setminus (\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$ es abierto.
- Porque el complementario de la unión $X \setminus (\bigcup_{i=0}^n F_i) = \bigcap_{i=0}^n (X \setminus F_i) = \bigcap_{i=0}^n U_i$ es abierto.

Ejemplo:

1. Topología trivial:

En este caso, como \emptyset y X son los únicos abiertos, únicamente pueden ser cerrados sus complementarios, es decir, ellos mismos.

2. Topología usual:

Habitualmente los conjuntos que conocemos como cerrados son aquellos que pueden ser escritos en términos de bolas cerradas $B[a, \varepsilon] : \|x - a\| \leq \varepsilon$.

3. Si tenemos dos topologías $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, entonces cualquier cerrado de \mathcal{T}_1 es cerrado de \mathcal{T}_2 , pues es cerrado por ser el complementario de un abierto y los abiertos de \mathcal{T}_1 también lo son en \mathcal{T}_2 .

Definición (Adherencia)

Sea $A \subset X$ y $x \in X$ un punto, decimos que es **adherente a A** si y sólo si todos sus entornos V^x intersecan con A , esto es:

$$\text{Adh}_X(A) = \overline{A} := \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\} \supset A$$

Al conjunto de puntos adherentes a A lo llamamos **adherencia** de A .

Observación:

La propia definición nos sugiere ciertas equivalencias útiles que se obtienen escribiendo de forma distinta lo que hemos definido:

- $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$

$$x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$$

- $X \setminus \mathring{B} = \overline{X \setminus B}$

$$x \notin \mathring{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X \setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus B}$$

Proposición

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y denotando por \overline{A} a su adherencia, entonces:

- \overline{A} es el menor cerrado que contiene a A o, lo que es lo mismo, $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A} F$ donde los F son cerrados.
- El conjunto A es cerrado si y sólo si coincide con su adherencia, es decir, $\overline{A} = A$.
- $B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración:

- Recordando que $\mathring{B} = \bigcup_{U \subset B} U$:

$$\overline{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \left(\bigcup_{U \subset X \setminus A} U \right) \stackrel{F=X \setminus U}{=} X \setminus \left(\bigcup_{F \supset A} (X \setminus F) \right) = \bigcap_{F \supset A} F$$

- Se deduce inmediatamente de la primera, pues si el conjunto es cerrado él mismo debe ser el menor cerrado que lo contiene.

- Si $B \subset A \Rightarrow$

$$B \subset A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

por el primer apartado.

- Veamos el doble contenido:

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} \supset A \cup B \supset A, B \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A}, \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

Ejemplo:

1. Si consideramos $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ algunas adherencias comunes son $\overline{B(a, \varepsilon)} = B[a, \varepsilon]$ y $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.
2. Sea $a \in X$ y (X, \mathcal{T}_a) \Rightarrow

- $\overline{\{a\}} = X$

Demostración:

Sea $x \in X$, $\forall U^x \subset X : U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}}$

- $\forall x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\}$

Demostración:

Sea $y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset$

Definición (Acumulación)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y $x \in A$ un punto del mismo, decimos que x es:

- **punto aislado de A** si y sólo si existe algún entorno que sólo interseca con A en el propio punto, es decir:

$$\exists V^x \subset X : V^x \cap A = \{x\}$$

- **punto de acumulación de A** si y sólo si en cualquier entorno del punto encontramos puntos de A que no sean el propio punto, es decir:

$$\forall V^x \subset X : V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

Observación:

La definición anterior para puntos aislados hace evidente el hecho de que los puntos aislados solo pueden ser de A . Por contra, los puntos de acumulación no tienen por qué serlo y, de hecho, su definición en términos de entornos prescinde de ellos mismos para analizar su intersección con A . De esta manera, obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{A} = \underbrace{\{ \text{puntos aislados} \}}_{\subset A} \sqcup \underbrace{\{ \text{puntos de acumulación} \}}_{\supset \overline{A} \setminus A}$$

Además, nótese que si uno es punto de A sólo tiene dos posibilidades: ser aislado o ser de acumulación. Por tanto, podemos reescribir lo anterior como:

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Definición (Frontera)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y $x \in A$ un punto del mismo, decimos que x es un **punto frontera de A** si y sólo si es adherente³ a A y a su complementario $X \setminus A$

$$\text{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

al conjunto de puntos de la frontera de A lo llamamos **frontera de A** .

Ejemplo:

1. En \mathbb{R} , con la topología usual \mathcal{T}_u , todos los puntos de \mathbb{Z} son aislados. Por tanto, la frontera de los enteros es $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
2. En \mathbb{R}^n , con la topología usual \mathcal{T}_u , la frontera de las bolas $\text{Fr}(B(a, \varepsilon)) = \text{Fr}(B[a, \varepsilon]) = S[a, \varepsilon] : \|x - a\| = \varepsilon$ son los discos exteriores de las mismas.
3. En la topología $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$, sobre cualquier conjunto que se equipe, todos los puntos son aislados y, en consecuencia, todas las fronteras, vacías.
4. En la topología del punto, \mathcal{T}_a , sobre un punto $a \in X$ concreto vemos que:

$$\begin{cases} \text{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} \setminus \{\overset{\circ}{a}\} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a \Rightarrow \text{Fr}(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \{\overset{\circ}{x}\} = \{x\} \end{cases}$$

Definición (Densidad)

Sea X un conjunto de puntos y $A \subset X$ un subconjunto suyo, decimos que A es **denso en X** si y sólo si $\overline{A} = X$ o, dicho de otro modo, todo abierto no vacío corta a A .

Ejemplo:

1. En \mathbb{R} , con la topología usual \mathcal{T}_u , el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es denso en \mathbb{R} .
2. En la topología del punto \mathcal{T}_a , el conjunto $\{a\}$ es denso, pues cualquier abierto corta con él (lo contiene).

³Por las observaciones hechas sobre las adherencias, también podríamos caracterizar los puntos frontera como los que no son interior de $X \setminus A$ ni de A .

BASES

En general, probar una cierta propiedad para una topología hace necesario verificar dicha propiedad en todos los abiertos de la misma. Esto, ya de por sí complicado, puede serlo mucho más cuando la definición de abierto es compleja y poco intuitiva. Por esto, del mismo modo que en el Álgebra Lineal surgían las bases para trabajar con un espacio vectorial al completo observando únicamente un conjunto pequeño de vectores, en Topología tendremos las bases de entornos y de abiertos que jugaran un papel similar en los espacios topológicos.

Definición (Base de entornos)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $a \in X$ un punto, definimos una **base de entornos de $a \in X$** como una colección \mathcal{V}^a de entornos de a tales que cualquier otro entorno de a tenga que contener a alguno de los entornos de la colección \mathcal{V}^a , esto es:

$$\forall W^a, \exists V \in \mathcal{V}^a : V \subset W^a$$

Observación:

La definición no ha hecho ninguna diferenciación especial en cuanto a si son cerrados, abiertos, etc. Precisamente esta “variedad” es la que permite que, escogiendo una base de entornos con las características adecuadas en cada caso, sea más sencillo estudiar la topología que tengamos entre manos.

Tal y como hemos comentado al inicio, comprobar propiedades en una base de entornos extenderá automáticamente dichas propiedades a cualquier entorno arbitrario, haciendo el estudio de estos conjuntos más sencillos en función de la topología y la base escogida.

Proposición

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\{V_i^a\}_{i \in I}$ una base de entornos de un punto a , esta se puede refinar a una base de entornos abiertos $\{U_i^a\}_{i \in I}$.

Demostración:

Como todos los elementos de la colección son entornos, para todos existe algún abierto U_i^a que contiene al punto. A este conjunto de abiertos (más bien de entornos abiertos) es al que llamamos $\{U_i^a\}_{i \in I}$. Cualquier otro entorno del punto a contiene a un entorno V_i^a de la base de entornos inicial, pero como estos contienen un abierto de la colección última, entonces $\{U_i^a\}_{i \in I}$ es una base de entornos de a .

Observación:

Podemos empezar a ver la utilidad de la base de entornos cuando tenemos que demostrar, por ejemplo, que un punto pertenece a la adherencia de un conjunto:

$$a \in \overline{A} \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall W^a \text{ entorno} : W^a \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset$$

luego si escogemos una base de entornos \mathcal{V}^a adecuada sobre la que sea muy fácil demostrar el resultado, este quedará demostrado para cualquier entorno “raro” que podamos encontrarnos.

Ejemplo:

1. Sea el espacio real usual, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, el espacio topológico a estudiar, entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B[a, \varepsilon] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$

2. Sea la topología del punto $(a \in X, \mathcal{T}_a)$, entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{\{a\}\} & x = a \\ \mathcal{B}^x = \{\{a, x\}\} & x \neq a \end{cases}$$

Definición (Base de abiertos)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\mathcal{B} := \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ una colección de abiertos, decimos que es una **base de abiertos** de \mathcal{T} si y sólo si todo abierto de \mathcal{T} es unión de abiertos de \mathcal{B} .

Proposición (Caracterización de base de abiertos)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\mathcal{B} := \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ una colección de abiertos, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. \mathcal{B} es base de abiertos.
2. $\forall x \in X, \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de x .
3. $\forall x \in U \overset{ab.}{\subset} X, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.

Demostración:

La implicación 2. \Rightarrow 3. es trivial, pues si U es abierto y contiene al punto x es un entorno del mismo, luego por 2. debe contener a alguna $B \in \mathcal{B}$. Por tanto, demostraremos 1. \Rightarrow 2. y 3. \Rightarrow 1. para completar las equivalencias.

- 1. \Rightarrow 2.

Si V^x es entorno, entonces $\exists U \subset V^x$ abierto que contiene al punto x . Como por 1. el conjunto B es base de abiertos, $U = \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}} B_i$ y como $x \in U$, entonces $\exists B_i \ni x$. De esta manera, tenemos $B_i \subset U \subset V^x$, es decir, que cualquier entorno debe contener algún elemento de la base que contenga al punto.

- 3. \Rightarrow 1.

Por darse 3., escogido cualquier abierto U necesariamente contiene a una $B^x \in \mathcal{B}$ para cada $x \in U$, es decir, que podemos escribir $U = \bigcup_{x \in U} B^x$ unión de abiertos de \mathcal{B} .

Ejemplo:

1. Si tomamos la topología discreta, $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$, entonces una base de abiertos sería $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Además, esta base es mínima pues cualquier otra base $\mathcal{B}' := \{B_i\}_{i \in I}$ de abiertos cumpliría que $\forall x \in X : \{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists i \in I : B_i = \{x\}$.
2. Si tomamos la topología del punto \mathcal{T}_a , entonces una base de abiertos es $\mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}$.
3. Si tomamos la topología usual en \mathbb{R}^n , $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, entonces una base de abiertos es el conjunto de bolas abiertas $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n\}$ porque recordemos que un abierto se caracterizaba en \mathbb{R}^n por el hecho de que todos sus puntos tenían una bola alrededor contenida en el conjunto, luego la unión de dichas bolas es el abierto inicial.

Sin embargo, la base de abiertos sigue siéndolo si escogemos otra norma en \mathbb{R}^n distinta de la euclídea, puesto que estas normas son equivalentes en \mathbb{R}^n (o, visto geométricamente, cada bola de una norma contiene otra más pequeña de otra norma distinta y viceversa) porque:

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} \square_i = \bigcup_{j \in J} \diamond_j$$

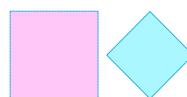


Figura 1.5: Bases alternativas en \mathbb{R}^n

Observación: (Política general)

Como antes, a menudo basta considerar los abiertos de \mathcal{B} . Por ejemplo,

Proposición

Sea $A \subset X$ y \mathcal{B} una base de abierto de $X \Rightarrow$

$$A \subset X \text{ denso} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset$$

Proposición

Sea X un conjunto de puntos y $\mathcal{B} := \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos, esta colección define una topología \mathcal{T} única en X si y sólo si:

- $X = \bigcup_{i \in I} B_i$.
- $\forall B_i, B_j \in \mathcal{B}$ y $\forall x \in B_i \cap B_j$, $\exists B_k \in \mathcal{B} : x \in B_k \subset B_i \cap B_j$.



Figura 1.6: Caracterización de la topología dada una base

Demostración:

\Rightarrow) Trivial por las propiedades vistas sobre topología.

\Leftarrow) Veamos que se verifican las condiciones sobre la topología:

- **Unicidad:** $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}\}$.
- **Existencia:** Esa \mathcal{T} es efectivamente topología.
 - $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X = \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}$.
 - Uniones: $\bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{j \in J} B_{ij} \in \mathcal{T}$.
 - Intersecciones finitas: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B^x \in \mathcal{T}$.

$$x \in \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{k \in K} B_k \right) \Rightarrow x \in B_{i_0} \cap B_{k_0} \Rightarrow \exists B^x \in \mathcal{B} : x \in B^x \subset B_{i_0} \cap B_{k_0}$$

Por tanto, podemos decir que $(\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_k B_k) = \bigcup_x B^x \in \mathcal{T}$ y se tiene el resultado.

TOPOLOGÍA RELATIVA

De la misma manera que en Álgebra, una vez definida la estructura de espacio vectorial, estudiábamos como se comportaba esta estructura con los subconjuntos del conjunto inicial, tiene sentido preocuparnos por cómo cambia la topología cuando nos restringimos a un subconjunto de puntos del total. A esta topología “restringida” la conocemos como topología relativa y, a diferencia de lo que ocurría en espacios vectoriales, puede tener un comportamiento muy distinto a la topología ambiente de la que proviene.

Definición (Topología Relativa)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto de puntos, definimos la **topología relativa**⁴ en Y como

$$\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

Además, decimos que $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es un **subespacio** de (X, \mathcal{T}) y que (X, \mathcal{T}) es el **espacio ambiente**.



Figura 1.7: Definición de una topología relativa

Observación:

- Los cerrados de la topología relativa $\mathcal{T}|_Y$ son la intersección $F \cap Y$ de Y con cerrados F en \mathcal{T} .

Demuestra:

Sea $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F = Y \setminus W : W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y &\Rightarrow \exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : Y \cap U = W \\ &\Rightarrow F = Y \setminus (Y \cap U) = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F_X : F_X \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \end{aligned}$$

- Si tenemos una base \mathcal{V}^a de entornos en el espacio ambiente (X, \mathcal{T}) , la base de entornos en el subespacio $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ se obtiene intersecando los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir, $\mathcal{V}_Y^a := \mathcal{V}^a \cap Y := \{V^a \cap Y : V^a \in \mathcal{V}^a\}$.
- Si tenemos una base \mathcal{B} de abiertos en el espacio ambiente (X, \mathcal{T}) , la base de abiertos en el subespacio $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ se obtiene intersecando⁵ los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir, $\mathcal{B}_Y := \mathcal{B} \cap Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$.

Ejemplo:

- Si y es un punto aislado de Y , por la definición que hemos dado de la topología relativa, su topología relativa sería $\mathcal{T}|_Y := \{U \cap \{y\}\} = \{y\}$. Por tanto, es abierto en su topología.
- Retomando el ejemplo anterior, si todos los puntos de Y son aislados, hemos visto que todos son abiertos (pues cortar un abierto con ellos da ellos mismos) y, por tanto, la topología $\mathcal{T}|_Y$ es la discreta. Por ejemplo, en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:

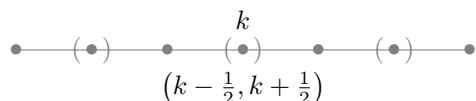


Figura 1.8: Enteros en los reales como subespacio discreto.

- Si tomamos la topología del punto relativa a $X \setminus \{a\}$, $\mathcal{T}_a|_{X \setminus \{a\}}$, vemos que se trata de la discreta.

⁴La comprobación de que efectivamente se trata de una topología es completamente trivial.

⁵Esta idea suele ser general, las construcciones en los subespacios se hacen intersecando elementos del espacio ambiente con el subespacio.

Observación:

1. Los abiertos W de un subespacio abierto $Y \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ son abiertos en el espacio ambiente X .

$$W = U \cap Y : U, Y \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$$

2. Los cerrados F de un subespacio cerrado $Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$ son cerrados en el espacio ambiente X .

$$F = C \cap Y : Y, C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$$

APLICACIONES CONTINUAS

Una vez vista la estructura de espacio topológico, nos encaminamos a estudiar los morfismos entre estructuras de este tipo. El primer paso para realizar este estudio es una característica clave, no sólo para el Análisis, sino también para la Topología: la continuidad.

A partir de este capítulo, vamos a estudiar las buenas propiedades que adquieren las aplicaciones continuas por la forma en que transforman los abiertos entre espacios y relacionan las topologías de cada uno.

CONTINUIDAD

Si hacemos memoria, recordaremos la famosa definición $\varepsilon - \delta$ para la continuidad que nos dieron para $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$. Esta venía decir que una función $f : X \rightarrow Y$ era continua en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon)$$

y podemos reescribir esto último como $x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ o también como $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Lo anterior sugiere que la definición más ajena a las propiedades métricas y topológicas de \mathbb{R}^n sería:

$$\forall B(f(x_0), \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$$

Sin embargo, esta definición sólo es válida para los espacios con la topología usual, pues el concepto de bola puede ser (y significar) cosas muy distintas en función de la topología empleada (sin ir más lejos puede no ser un abierto). Por ello, la siguiente definición pretende desligar el concepto de continuidad de la topología usual de \mathbb{R}^n para que pueda ser aplicable a cualquier espacio topológico.

Definición (Continuidad)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos, decimos que es **continua en $x_0 \in X$** si y sólo si:

$$\forall V^{f(x_0)} : f^{-1}\left(V^{f(x_0)}\right) = V^{x_0}$$

es decir, la preimagen de cualquier entorno de $f(x_0)$ es entorno de x_0 .

Proposición (Composición de continuidades)

Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas en $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tales que $f(x_0) = y_0$, entonces la composición $h = g \circ f$ es una función continua en x_0 .

Demostración:

Escojamos un entorno $V^{h(x_0)}$ de la imagen por h de x_0 , entonces

$$h^{-1}V^{h(x_0)} = f^{-1}g^{-1}V^{g(y_0)} = f^{-1}V^{y_0} = V^{x_0}$$

Ejemplo:

1. Sea $f : X_{\text{discreta}} \rightarrow Y$, entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues todo es abierto y, en consecuencia, todo es entorno en $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.
2. Sea $f : X \rightarrow Y_{\text{trivial}}$, entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues como Y es el único abierto, entonces es el único entorno $V^{f(x)}$ para cualquier $f(x)$ y $f^{-1}V^{f(x)} = f^{-1}Y = X$, que es abierto.
3. Si una función $f : X \rightarrow Y_{\text{discreta}}$ es continua, entonces f es localmente constante, pues como en la trivial los puntos son abiertos, entonces el punto $\{f(x_0)\}$ es entorno $V^{f(x_0)}$ de sí mismo. Por tanto, por la continuidad de f , $f^{-1}f(x_0) = V^{x_0}$, luego $f \equiv f(x_0)$ en ese entorno V^{x_0} .
4. Si una función $f : X \rightarrow Y$ es localmente constante, entonces es continua, puesto que si es localmente constante para cualquier $x_0 \in X$ existe un entorno $U^{x_0} : f|_{U^{x_0}} \equiv f(x_0)$. De este modo, cualquier entorno $V^{f(x_0)}$ de la imagen $f(x_0)$ cumple que $f^{-1}V^{f(x_0)} \supset U^{x_0}$ y llamando $V^{x_0} = f^{-1}V^{f(x_0)}$ entonces vemos que es entorno de x_0 .

Proposición (Caracterización de Continuidad)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos, entonces son equivalentes:

1. f es continua.
2. $\forall U \overset{\text{ab.}}{\subset} Y : f^{-1}(U) \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.
3. $\forall F \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y : f^{-1}(F) \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$.
4. $\forall A \subset Y : f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}(A))$.
5. $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demostración:

- 1. \Rightarrow 2.

Escojamos un abierto cualquiera $W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Por ser abierto, es entorno de todos sus puntos y, en particular, es entorno de las imágenes que puedan caer dentro de dicho abierto, es decir, $\forall x \in f^{-1}(W) : W = V^{f(x)}$. Por continuidad, las preimágenes de entornos de las imágenes son entornos de las preimágenes, luego $\forall x \in f^{-1}W : f^{-1}W = V^x$ y, como es entorno de todos sus puntos, entonces $f^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.

- 2. \Rightarrow 3.

Como lo que sabemos es que las preimágenes de abiertos son abiertas y los cerrados se definen en términos de abiertos, no nos queda otra estrategia que intentar demostrarlo pasando los cerrados a sus complementarios: los abiertos.

Escojamos un cerrado cualquiera $C \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$ de modo que conocemos que $Y \setminus C \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Como conocemos el resultado para abiertos, podemos decir que $f^{-1}(Y \setminus C) \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y, conjuntivamente, $X \setminus f^{-1}C = f^{-1}(Y \setminus C)$, luego directamente tenemos que $f^{-1}C \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.

- 3. \Rightarrow 5.

Como $\overline{f(A)} \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$ sabemos que $f^{-1}\overline{f(A)} \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$. Como $A \subset f^{-1}f(A) \subset f^{-1}\overline{f(A)}$ y este último es cerrado en X , entonces $\overline{A} \subset f^{-1}f(A)$ y, por tanto, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

- 5. \Rightarrow 4.

$$Y \setminus \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overline{Y \setminus A} \supset \overline{f(X \setminus f^{-1}A)} \stackrel{5)}{\supset} f\left(\overline{X \setminus f^{-1}(A)}\right) = f(X \setminus \text{Int}(f^{-1}A)) \Rightarrow \\ X \setminus \text{Int}(f^{-1}A) \subset f^{-1}\left(Y \setminus \overset{\circ}{A}\right) = X \setminus f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \Rightarrow f^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset \text{Int}(f^{-1}A).$$

■ $4 \Rightarrow 1)$

$$V^{f(x)} \Rightarrow f(x) \in \text{Int}(V^{f(x)}) \Rightarrow x \in f^{-1}(\text{Int}(V^{f(x)})) \subset \text{Int}(f^{-1}V^{f(x)}) \Rightarrow \\ f^{-1}V^{f(x)} \text{ entorno de } x.$$

Observación:

La definición y posterior caracterización nos permiten recuperar las propiedades de continuidad a las que estamos habituados, como por ejemplo el quinto apartado del que se desprende que la imagen del límite es el límite de la imagen, pero también nos da la posibilidad de utilizar dicha continuidad con fines meramente topológicos, como por ejemplo $\text{id} : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ (por 1).

CONTINUIDAD Y SUBESPACIOS

En muchas ocasiones tiene interés estudiar el comportamiento de una función, no en el conjunto total, sino en un subconjunto de puntos concreto. Como hemos definido anteriormente los subespacios topológicos, tiene sentido querer ver cómo se comportan las aplicaciones y, sobre todo, la continuidad cuando trabajamos con estos subconjuntos.

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua y $Z \subset X$ un subespacio topológico, entonces la restricción $f|_Z : Z \rightarrow Y$ también es continua.

Demostración:

Aplicando la caracterización de continuidad a través de las preimágenes de abiertos, tenemos que:

$$\forall A \overset{\text{ab.}}{\subset} Y : (f|_Z)^{-1}(A) = Z \cap f^{-1}A \overset{\text{ab.}}{\subset} Z$$

donde este último conjunto es abierto por la definición de topología relativa.

Observación:

1. La aplicación inclusión $Z \xrightarrow{j} X$ es continua.

Demostración:

Para cualquier abierto $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ la preimagen $j^{-1}(U)$ corresponde a los puntos de $U \cap Z$, y este último conjunto es abierto en Z por definición.

2. La continuidad se hereda en la restricción a un subespacio, es decir, si consideramos la aplicación $Z \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$, entonces la continuidad de f implica¹ la continuidad de $f|_Z$.

Demostración:

Como $f|_Z = f \circ j$ y ambas son continuas, por composición, $f|_Z$ es continua.

3. La continuidad es una propiedad local, es decir, que si $f|_{E^x}$ continua en x , entonces f continua en x .

Demostración:

La preimagen de cualquier entorno $V^{f(x)}$ es $(f|_E)^{-1}(V^{f(x)}) = W^x$ un entorno de x en E^x , pero tenemos que ver que lo es en X para poder afirmar que es continua. Como $W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} E^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X$, entonces $W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X$, ya que entorno de entorno es entorno.

¹Pero el recíproco no es cierto, la continuidad en un subespacio no extiende la continuidad a todo el espacio.

Esta última afirmación es cierta porque:

$$\left. \begin{array}{l} W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} E^x \Rightarrow \exists G \overset{\text{ab.}}{\subset} E^x \text{ tal que } G \subset W^x, G = A \cap E^x \subset X \\ E^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X \Rightarrow \exists B \overset{\text{ab.}}{\subset} X \text{ tal que } B \subset E^x \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$x \in \underbrace{A \cap B}_{\substack{\text{ab.} \\ \subset X}} \subset \underbrace{A \cap E^x}_{=G} \subset W^x$$

4. Si $f|_{U \overset{\text{ab.}}{\subset} X}$ es continua $\Rightarrow f$ continua $\forall x \in U$.

5. x es aislado $\Rightarrow f$ continua en x .

Demostración:

x aislado $\Leftrightarrow V^x = \{x\}$ es abierto de X . $f|_{V^x} : \{x\} \rightarrow Y$.

6. $f : X \rightarrow Y \supset Z$ tal que $f(X) \subset Z \subset Y$ (si no es así puede estar mal definido).

Entonces, f a Y es continua $\Leftrightarrow f$ a Z es continua.

Demostración:

- f cont. en $Z \xrightarrow{j \circ f} f$ cont. en Y .
- f cont. en $Y \xrightarrow{?} f$ cont. en Z .

Sea U_z ab. en Z . Este será $U_y \cap Z = U_z$ que cumple, $f_z^{-1}(U_y \cap Z) \overset{f(X) \subset Z}{=} f_y^{-1}(U_y)$ que es abierto en X (por ser f_y continua).

Proposición (Criterios de continuidad por recubrimientos)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos, si se da alguna de las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ donde } U_i \overset{\text{ab.}}{\subset} X \\ \forall f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y \text{ cont.} \end{cases} \quad \begin{cases} X = \bigcup_{i=0}^n F_i \text{ donde } F_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \\ \forall f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y \text{ cont.} \end{cases}$$

entonces la función f del inicio es continua.

Demostración:

- Escojamos un abierto cualquiera $W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ y veamos si su preimagen $f^{-1}W$ es un abierto en X .

En primer lugar, por ser $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ podemos escribir que $f^{-1}W = X \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap f^{-1}W) = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W$. Como $(f|_{U_i})^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} U_i \overset{\text{ab.}}{\subset} X$, (cont.)

entonces $(f|_{U_i})^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y de esta manera podemos escribir $f^{-1}W$ como unión de abiertos $\bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W$ de X , es decir, que $f^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.

- Escojamos un cerrado cualquiera $C \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$ y veamos si su preimagen $f^{-1}C$ es cerrada en X .

En primer lugar, por ser $X = \bigcup_{i=0}^n F_i$ podemos escribir que $f^{-1}C = X \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n (F_i \cap f^{-1}C) = \bigcup_{i=0}^n (f|_{F_i})^{-1}C$. Como $(f|_{F_i})^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} F_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, entonces (cont.)

$(f|_{F_i})^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$ y de esta manera podemos escribir $f^{-1}C$ como unión finita de cerrados $\bigcup_{i=0}^n (f|_{F_i})^{-1}C$ de X , es decir, que $f^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$.

HOMEOMORFISMOS

Supongamos que tenemos una función f biyectiva y continua. Con las definiciones de continuidad anteriores hemos caracterizado la topología de las imágenes por f^{-1} , pero no sabemos nada de cómo se comporta la función f con respecto a abiertos, cerrados, etc. Nos gustaría poder destacar en qué condiciones una función establece una biyección entre abiertos de dos espacios, pues de esa forma existiría un “isomorfismo” entre ambas topologías a la hora de trabajar con ellas. Esta idea es precisamente la que hay detrás de la definición de homeomorfismo.

Definición (Aplicaciones abiertas y cerradas)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos, decimos que es:

- **abierta** si y sólo si las imágenes de abiertos son abiertos.
- **cerrada** si y sólo si las imágenes de cerrados son cerrados.

Observación:

La caracterización que dimos de la continuidad hacía referencia a las preimágenes de abiertos y cerrados, no a sus imágenes. De hecho, ni la continuidad implica que la aplicación sea abierta o cerrada, ni viceversa.

Ejemplo:

En la siguiente tabla podemos ver distintos ejemplos de funciones que verifican algunas de las condiciones que hemos definido, pero no otras simultáneamente:

Función	continua	abierta	cerrada
$Id : X_{\text{trivial}} \rightarrow X_{\text{discreta}}$	✗	✓	✓
$Id : X_{\text{discreta}} \rightarrow X_{\text{trivial}}$	✓	✗	✗
$j : [0, 1] \subset \mathbb{R}_u$	✓	✗	✓
$j : (0, 1) \subset \mathbb{R}_u$	✓	✓	✗

Cuadro 2.1: En la tabla anterior podemos ver ejemplos de funciones que son continuas, abiertas o cerradas de distintas formas.

Proposición (Trivialidades esenciales)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es abierta
2. f es cerrada
3. f^{-1} es continua.

Demostración:

- 1. \Rightarrow 2.

Sea $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, por la definición de cerrado su complementario $X \setminus F$ es abierto en X . De esta manera, como f es abierta, entonces $f(X \setminus F) \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Por la biyectividad, $f(X \setminus F) = Y \setminus f(F)$, es decir, que $f(F) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$, lo que demuestra que f es cerrada.

- 2. \Rightarrow 3.

Sea $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, como f es cerrada, $f(F) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$. Pero $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ por la biyectividad de f , luego hemos demostrado que f^{-1} continua porque las preimágenes de cerrados son cerrados.

■ 3. \Rightarrow 1.

Sea $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$, por la continuidad de f^{-1} , la preimagen $(f^{-1})^{-1}(U) \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Por tanto, como $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$, hemos demostrado que f es abierta.

Definición (Homeomorfismo)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación biyectiva, decimos que es un **homeomorfismo** si y sólo si f y f^{-1} son continuas o, equivalentemente, si f es continua y abierta o cerrada.

Observación:

La definición de homeomorfismo es importante porque no establece simples biyecciones entre conjuntos, establece biyecciones sobre topologías:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}_X &\rightarrow \mathcal{T}_Y \\ U &\mapsto f(U) \\ f^{-1}(W) &\leftrightarrow W \end{aligned}$$

Esto permite trabajar con los abiertos de un lado y trasladar el mismo trabajo a los del otro de forma canónica.

Definición (Homeomorfismo Local)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos, decimos que es un **homeomorfismo local en $x_0 \in X$** si y sólo si existen algunos entornos V^{x_0} y $V^{f(x_0)}$ tales que la restricción $f : V^{x_0} \rightarrow V^{f(x_0)}$ es un homeomorfismo.

Observación:

En general, cuando decimos que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo local sin especificar en qué punto, estamos diciendo que es homeomorfismo local para cualquier punto $x \in X$.

Observación:

En la definición de homeomorfismo local anterior, podemos tomar V^{x_0} y $V^{f(x_0)}$ como entornos abiertos.

Demostración:

Si f es homeomorfismo local, entonces $\exists V^a \subset X$ y $V^{f(a)} \subset Y$ tal que $f : V^a \rightarrow V^{f(a)}$ es homeomorfismo y, por esta razón, sabemos que $\exists U^a \overset{\text{ab.}}{\subset} V^a$ tal que $f(U^a) \overset{\text{ab.}}{\subset} V^{f(a)}$.

Además, como $f(U^a)$ es abierto en $V^{f(a)}$, sabemos que $f(U^a)$ es entorno² de $f(a)$ en $V^{f(a)}$. Como tenemos la secuencia $f(U^a) \overset{\text{ent.}}{\subset} V^{f(a)} \overset{\text{ent.}}{\subset} Y$, sabemos que $f(U^a) \overset{\text{ent.}}{\subset} Y$ de $f(a)$ y, por tanto, podemos encontrar un abierto $W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ tal que $W \subset f(U^a)$.

Por tanto, como se trata de un homeomorfismo local, existirá algún $G \overset{\text{ab.}}{\subset} U^a$ de forma que $f(G) = W$. Pero como U^a es abierto global, entonces tenemos que $G \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y hemos acabado, pues tenemos el homeomorfismo local definido en $f : G \rightarrow W$.

Proposición (Restricción de homeomorfismos)

Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo, la restricción $f : Z \rightarrow f(Z)$ a cualquier subespacio $Z \subset X$ también es homeomorfismo.

²En este punto no podemos parar y decir que es abierto porque lo que sabemos es que $f(U^a)$ es abierto en $V^{f(a)}$, pero no sabemos nada sobre si es abierto en Y , que es lo que necesitamos.

Demostración:

La restricción será biyectiva por serlo f y ser el conjunto de llegada $f(Z)$. Una biyección es homeomorfismo si tanto f como f^{-1} son continuas y como ya vimos que la restricción de una continua es continua, sabemos que la restricción de f y f^{-1} a Z y $f(Z)$ son también continuas, es decir, $f|_Z$ es homeomorfismo.

Proposición (Composición de homeomorfismos)

Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ dos homeomorfismos, su composición $h = f \circ g$ también es homeomorfismo.

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo local, entonces es abierto.

Demostración:

Hay dos formas de demostrarlo, la primera es intentando ver que para cualquier $U \subset X$ ocurre que $f(U)$ es entorno de las imágenes de todos los puntos de U .

Con este objetivo, sabemos que por ser f homeomorfismo local existe una restricción $\exists f| : V^{x_0} \rightarrow V^{y_0}$ para cada punto $x_0 \in U$ y usando la notación $y_0 = f(x_0)$. Como esta restricción es homeomorfismo, $f(U \cap V^{x_0}) \subset V^{y_0}$ y, por tanto, $f(U \cap V^{x_0})$ es entorno en Y de y_0 . Al ocurrir esto para todos los puntos y , teniendo en cuenta que $f(U \cap V^{x_0}) \subset f(U)$, sabemos que $f(U)$ es entorno de las imágenes de todos los puntos de U .

La otra forma de verlo es que, por ser homeomorfismo local, para cualquier punto $x \in X$ existe un entorno abierto $W^x \subset X$ de forma que $f(W^x) \subset Y$ es abierto. De esta manera, y abusando de la notación, escribiendo $W^x = W^x \cap U$, U puede expresarse como $U = \bigcup_{x \in U} W^x$. Por tanto, $f(U) = f(\bigcup_{x \in U} W^x) = \bigcup_{x \in U} f(W^x)$ que es unión de abiertos, luego es abierto.

Ejemplo: (¡Importantes!)

1. Proyección estereográfica:

Sea \mathbb{S}^m y $a \in \mathbb{S}^m \Rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo. (\mathbb{R}^m es en realidad un hiperplano de \mathbb{R}^{m+1} en el que se encuentra contenida la “esfera”)

2. Proyección exponencial:

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ es homeomorfismo local, pero no es inyectiva al ser periódica.

3. Proyección antipodal:

$\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \supset \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{RP}^m : x \mapsto [x]$ es homeomorfismo local. Es 2-1 por llevar las antípodas al mismo $[x]$.

Podemos dividir \mathbb{S}^m tal que: $\mathbb{S}^m = S_+ \cup S_- \cup E$ (ecuador). Llamando U_p a todas las rectas no contenidas en el plano ortogonal a la recta formada por el punto que se quita y su antípoda. Con esto tenemos $U_p \simeq \mathbb{R}^m$. Uniéndolo con el hiperplano del infinito H_p^∞ tenemos que los polos van a U_p y E a H_p^∞ . Esta correspondencia es homeomorfa por lo que se puede trasladar la topología.

Con esto, esta proyección será un recubrimiento doble de \mathbb{RP}^m , $m \geq 2$.

4. Lemniscata:

$f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$ es biyectiva y continua, pero NO homeomorfismo local.



Figura 2.1: Representación Lemniscata.

Engañosamente:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) = I_\varepsilon : f| : I_\varepsilon \rightarrow f(I_\varepsilon)$$

es homeomorfismo.

En $t = 0$, $f(I_\varepsilon)$ NO es entorno de $f(0) = (0, 0)$, porque se tienen que tomar elementos de la rama “vertical”.

5. Las **coordenadas polares** $(0, \rightarrow) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ son homeomorfismo local con $\theta_0 \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ hasta $\mathbb{R}^2 \setminus L$ con L la recta entre O y θ_0 .

Definición (Variedad Topológica)

Una **variedad topológica** de dimensión m es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , es decir, que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola³ $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$.

Ejemplo:

Esferas, espacios proyectivos, toros...

³Luego, en el fondo, es homeomorfo a cualquier bola y, por ser éstas parte de una base de \mathbb{R}^m , es homeomorfo a todo \mathbb{R}^m .

CONSTRUCCIONES

En este capítulo buscaremos topologías en base a unas aplicaciones con el objetivo de hacer a dichas aplicaciones continuas. Tras esto, daremos una caracterización de la topología construida. Por último, exploraremos las propiedades de las construcciones.

IMÁGENES INVERSAS

El objetivo de esta construcción es crear una topología que, al ser equipada en el conjunto de partida, haga la aplicación $f : (Y, ?) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ continua. Recordemos que, para poder cumplir con la definición de continuidad, las preimágenes de abiertos deben ser abiertos, luego cuantos más abiertos “metamos” en dicha topología más “fácil” será que las imágenes inversas caigan en abiertos.

Con dicha observación lo que se nos viene a la cabeza es tomar como topología la discreta, sin embargo, esto carece de interés: lo que realmente nos gustaría es la topología con menos abiertos posibles que haga la función continua.

Definición (Topología Imagen Inversa)

Sea $f : Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$ una aplicación, definimos la **topología de la imagen inversa** como la topología menos fina que podemos equipar a Y para que la aplicación f sea continua:

$$f^{-1}\mathcal{T} = \{f^{-1}U : U \in \mathcal{T}\}$$

donde los abiertos son exactamente las preimágenes de los abiertos la topología de llegada.

Observación:

Tras la introducción de la sección, la topología de la definición parece la más razonable para ser candidata a menos fina posible, puesto que de ser topología (hay que probarlo) hemos “metido” los abiertos indispensables para la continuidad que son precisamente las imágenes inversas.

Proposición

Sea $f : (Y, f^{-1}\mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ donde $f^{-1}\mathcal{T}$ es la topología de la imagen inversa, entonces:

1. $f^{-1}\mathcal{T}$ es topología.
2. $f^{-1}\mathcal{T}$ es la menos fina posible.

Demostración:

1. Las imágenes inversas funcionan muy bien con uniones, intersecciones, etc. Por tanto, la demostración de que es topología es trivial.

2. Consideremos cualquier otra topología \mathcal{T}' en Y que haga la función f continua. Si tomamos un abierto $U \in f^{-1}\mathcal{T}$ en la topología inversa, entonces $\exists V \in \mathcal{T} : f^{-1}V = U$. Asimismo, como f también es continua en \mathcal{T}' sabemos que $U = f^{-1}V$ también es abierto en \mathcal{T}' , es decir, todo abierto en $f^{-1}\mathcal{T}$ es también abierto en \mathcal{T}' y, por tanto, $f^{-1}\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Caracterización de la imagen inversa

En muchas ocasiones, tendremos diagramas con varias aplicaciones entre varios espacios topológicos. En estas situaciones, es de utilidad tener algún teorema para poder identificar unas topologías con otras, ya que entender y manejar bien unas puede tener buenas “traslaciones” en las otras. Es por ello que tiene gran utilidad el siguiente teorema de caracterización de la topología inversa en circunstancias como las descritas.

Teorema (Propiedad universal de las inmersiones)

Sean $g : (Z, \mathcal{T}'') \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ y $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ dos funciones entre espacios topológicos:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ g \uparrow & \nearrow f \circ g & \\ (Z, \mathcal{T}'') & & \end{array}$$

Figura 3.1: Ilustración de la composición propuesta

entonces $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$ si y sólo si:

$$\forall g : g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}$$

Demostración:

$$\Rightarrow) \mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} :$$

- $g \text{ cont.} \Rightarrow f \circ g \text{ cont.}$ es trivial por composición de continuas.
- $f \circ g \text{ cont.} \Rightarrow g \text{ cont.}$

Para probarlo, basta ver para cualquier abierto $V \in \mathcal{T}'$, $g^{-1}V$ es abierto en \mathcal{T}'' . Por ser $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$, entonces $g^{-1}V = g^{-1}f^{-1}U$ para algún abierto $U \in \mathcal{T}$, pero es que precisamente $g^{-1}f^{-1}U = (f \circ g)^{-1}U \in \mathcal{T}''$ por ser $f \circ g$ continua.

$$\Leftarrow) \text{ Para demostrarla vamos a ver el doble contenido de } \mathcal{T}' \text{ en } f^{-1}\mathcal{T} \text{ y viceversa.}$$

Como la propiedad de caracterización se cumple para cualquier g que escogamos, podemos escoger como g la aplicación identidad. De esta manera, $g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}$ implica que $id \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ id = f \text{ cont.}$, luego hemos demostrado que f es continua.

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ id \uparrow & \nearrow f & \\ (Y, \mathcal{T}') & & \end{array}$$

Y como precisamente $f^{-1}\mathcal{T}$ es la topología menos fina que posibilita la continuidad de f , sabemos que $\mathcal{T}' \supset f^{-1}\mathcal{T}$.

Si ahora utilizamos como g la identidad puramente conjuntista (las topologías no se conservan, pero los puntos van a ellos mismos), entonces:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ id \uparrow & \nearrow f \text{ cont.} & \\ (Y, f^{-1}\mathcal{T}) & & \end{array}$$

De nuevo, por la propiedad de caracterización sabemos que esta nueva “identidad” es una función continua. Por tanto, si tomamos $U \in \mathcal{T}'$ sabemos que $id^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T}$ y como es una identidad, $U = f^{-1}U$ (como conjunto), es decir, $U \in f^{-1}\mathcal{T}$.

Inmersiones

La construcción anterior cobra especial relevancia cuando la aplicación $f : Y \rightarrow X$ que hemos hecho continua con la topología imagen inversa es inyectiva porque de alguna forma permite “sumergir” el espacio de salida en el de llegada.

Definición (Inmersión)

Sea $f : (Y, f^{-1}\mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ una aplicación continua gracias a la topología de la imagen inversa, decimos que es una **inmersión** si y sólo si es inyectiva.

Proposición (Caracterización de Inmersiones)

Sea $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ una aplicación entre espacios topológicos, entonces:

$$f \text{ es inmersión} \Leftrightarrow f : (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{\text{homeo.}} (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$$

Demostración:

$$\Rightarrow) \text{ Tenemos que } f : (Y, f^{-1}\mathcal{T}) \rightarrow (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)}).$$

Como f es inmersión sabemos que es inyectiva, lo que sumado a que el espacio de llegada es $f(Y)$, nos permite saber que es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva. De los requisitos para ver que es un homeomorfismo, nos quedaría confirmar que es continua y abierta :

- Continua:

Si escogemos un abierto cualquier $U \in \mathcal{T}|_{f(Y)}$, por ser abierto de la topología relativa, sabemos que $\exists W \in \mathcal{T} : U = f(Y) \cap W$ y entonces su imagen inversa

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(W \cap f(Y)) = Y \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(W) \in f^{-1}\mathcal{T}$$

- Abierta:

Observamos que cualquier abierto $U \in f^{-1}\mathcal{T}$ de la topología imagen inversa es preimagen de un abierto de la topología de llegada, es decir, $\exists W \in \mathcal{T} : f^{-1}W = U$. Por tanto, si calculamos la imagen de U por f , tenemos que:

$$fU = ff^{-1}W = W \cap f(Y) \stackrel{\text{ab.}}{\subset} f(Y)$$

es decir que fU es abierto en $f(Y)$.

$$\Leftarrow) \text{ Veamos por el doble contenido de } \mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$$

- ⊂) Sea $U \in \mathcal{T}'$, como es homeomorfismo, es abierto, luego $fU \in \mathcal{T}|_{f(Y)}$, es decir, $\exists W \in \mathcal{T}'|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$, luego podemos decir que $U \in f^{-1}\mathcal{T}$.
- ⊃) Sea $U \in f^{-1}\mathcal{T}$, por definición, $\exists W \in \mathcal{T}|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$ y, como f es continua en \mathcal{T}' , $U = f^{-1}W \in \mathcal{T}'$.

Observación:

Podemos extraer de la definición, pero sobre todo de la caracterización anterior de inmersión las siguientes conclusiones:

1. Si una función $f : Y \rightarrow X$ es inyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces es inmersión.

Demostración:

La caracterización de imagen inversa exige continuidad, biyectividad y apertura o cierre (es decir, que sea homeomorfismo) de la aplicación $g : Y \rightarrow f(Y)$.

Como f es inyectiva y coincide con g en la imagen $f(Y)$, ésta última también es inyectiva, luego por ser sobreyectiva es biyectiva. La continuidad también se extiende a g naturalmente y falta solo ver que es abierta o cerrada respectivamente. Si f lo es, entonces para cualquier abierto o cerrado $W \subset Y$ su imagen $f(W)$ será abierta o cerrada en X . Del mismo modo, para cualquier abierto o cerrado $W \subset Y$ su imagen $g(W)$ se puede escribir como $g(W) = f(W) \cap f(Y)$ que es abierto o cerrado por ser un corte de un abierto o cerrado ambiente con el subespacio $f(Y)$.

2. Si $f : Y \rightarrow X$ es una inmersión, entonces:

- es una aplicación abierta si y sólo si $f(Y)$ es abierto en X .
- es una aplicación cerrada si y sólo si $f(Y)$ es cerrado en X .

Demostración:

En ambos casos, la implicación de izquierda a derecha es trivial, luego sólo es necesaria la de derecha a izquierda:

- $\forall V = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T}, fV = \overbrace{U \cap f(Y)}^{\text{inter. abiertos}} \in \mathcal{T}$.
- $\forall C \subset^{\text{cerr.}} f^{-1}\mathcal{T}, Y \setminus C = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow f(C) = \underbrace{(X \setminus U) \cap f(Y)}_{\text{inter. cerrados}} \subset^{\text{cerr.}} X$

3. Las inmersiones y la apertura o cierre de la aplicación no están relacionadas. Esto quiere decir que existen inmersiones que no son abiertas ni cerradas, que sólo son abiertas, que sólo son cerradas y ambas cosas simultáneamente.

Observación:

Las inmersiones son las que justifican la idea de considerar unos espacios como subespacios de otros. Las frases “el plano proyectivo real no es un subespacio de \mathbb{R}^3 ”, “la esfera no es un subespacio de \mathbb{R}^2 ” o “el plano proyectivo real es un subespacio de \mathbb{R}^4 ” se refieren a esto mismo: cuándo hay o no hay una inmersión del primer espacio en el segundo, es decir, un subespacio del segundo homeomorfo al primero.

IMÁGENES DIRECTAS

El objetivo de esta construcción es crear una topología que, al ser equipada en el conjunto de llegada, haga la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, ?)$ continua. De nuevo, recordemos que, para poder cumplir con la definición de continuidad, las preimágenes de abiertos deben ser abiertos, luego cuantos menos abiertos “metamos” en dicha topología menos posibilidades habrá de que sus preimágenes no caigan en abiertos.

Con dicha observación, en este caso lo que se nos viene a la cabeza es tomar como topología la trivial, sin embargo, esto vuelve a carecer de interés: lo que realmente nos gustaría es la topología con más abiertos posibles que haga la función continua.

Definición (Topología Imagen Directa)

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ una aplicación, definimos la **topología de la imagen directa** como la topología más fina que podemos equipar a Y para que la aplicación f sea continua, que es la topología:

$$f\mathcal{T} = \{V \subset Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}\}$$

donde los abiertos son exactamente aquellos cuyas preimágenes son abiertos de la topología de salida.

Observación:

Tras la introducción de la sección, de nuevo, parece que la topología de la definición es la más razonable para ser candidata a más fina posible, puesto que de ser topología (hay que probarlo) hemos “metido” todo lo que podemos meter como abierto conservando el requisito de la continuidad.

Proposición

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, f\mathcal{T})$ donde $f\mathcal{T}$ es la topología de la imagen directa, entonces:

1. $f\mathcal{T}$ es topología.
2. $f\mathcal{T}$ es la más fina posible.

Demostración:

1. Trivial.
2. Consideremos cualquier otra topología \mathcal{T}' en Y tal que haga f continua. Si tomamos un abierto $U \in \mathcal{T}'$, como conserva la continuidad, $f^{-1}U = W \in \mathcal{T}$. Sin embargo, tal y como hemos definido $f\mathcal{T}$, sabemos que $U \in f\mathcal{T}$ porque $W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$, luego $\mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$.

Caracterización de la imagen directa

De nuevo, en las situaciones en las que haya diagramas con varias aplicaciones entre varios espacios topológicos, es de utilidad tener algún teorema para poder identificar unas topologías con otras, ya que entender y manejar bien unas pueden tener buenas “traslaciones” en las otras. Por ello, tiene gran utilidad el teorema de caracterización de la topología directa en circunstancias como las descritas.

Teorema (Propiedad universal de las identificaciones)

Sean $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ y $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ dos funciones entre espacio topológicos

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & (Z, \mathcal{T}'') \end{array}$$

Figura 3.2: Ilustración de la composición propuesta

entonces $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ si y sólo si:

$$\forall g, g \text{ cont.} \Leftrightarrow g \circ f \text{ cont.}$$

Demostración:

$\Rightarrow) \mathcal{T}' = f\mathcal{T} :$

- g cont. $\Rightarrow g \circ f$ cont. es trivial por composición de continuas.

- $g \circ f$ cont. $\Rightarrow g$ cont.

Si escogemos un $W \in \mathcal{T}''$ sabemos que $f^{-1}(g^{-1}W) = (g \circ f)^{-1}W \in \mathcal{T}$ porque la aplicación $g \circ f$ es continua. Sin embargo, que $f^{-1}V \in \mathcal{T}$ implica que $V \in \mathcal{T}'$ porque $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$, luego $g^{-1}W \in \mathcal{T}'$, es decir, es continua.

$\Leftarrow)$ Para demostrarla vamos a ver el doble contenido de $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$.

Como la caracterización se cumple para cualquier g , en particular podemos seleccionar como g la identidad. Como la identidad es continua, por la caracterización, $id \circ f = f$ es continua y, como $f\mathcal{T}$ es la topología más fina que hace f continua, entonces $\mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$.

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ g \circ f = f & \searrow & \downarrow id \\ & & (Y, \mathcal{T}') \end{array}$$

De la misma manera que antes, podemos seleccionar como g la identidad meramente conjuntista (donde cada punto va a sí mismo, pero no se conserva la topología porque son distintas la de salida y la de llegada).

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ f \text{ cont.} & \searrow & \downarrow id \\ & & (Y, f\mathcal{T}) \end{array}$$

En este caso, como f va de (X, \mathcal{T}) a $(Y, f\mathcal{T})$ es continua por definición de $f\mathcal{T}$ y, por la caracterización, sabemos que la “identidad” que hemos seleccionado también lo es. Esto quiere decir que $\forall W \in f\mathcal{T}, id^{-1}W = W \in \mathcal{T}'$, por tanto, $f\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Observación:

$f(X)$ es abierto y cerrado en $f\mathcal{T}$: $\begin{cases} \forall y \in Y \setminus f(X), f^{-1}y = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \{y\} \in f\mathcal{T} \\ f^{-1}f(X) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow f(X) \in f\mathcal{T} \end{cases}$

Identificaciones

La construcción anterior cobra especial relevancia cuando la aplicación $f : Y \rightarrow X$ que hemos hecho continua con la topología imagen directa es sobreyectiva porque de alguna forma permite “identificar” el espacio de llegada en el de salida.

Definición (Identificación)

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ una aplicación sobreyectiva, decimos que es una **identificación** si y sólo si $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$.

Observación:

1. Las identificaciones verifican $V \subset^{\text{ab.}} Y \Leftrightarrow f^{-1}V \subset^{\text{ab.}} X$ y la continuidad $V \subset^{\text{ab.}} Y \Rightarrow f^{-1}V \subset^{\text{ab.}} X$.

2. Si una función $f : X \rightarrow Y$ es sobreyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces es identificación.

Demostración:

Las hipótesis ya nos otorgan la continuidad y la sobreyectividad, hay que demostrar pues que $f\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ utilizando que es abierta o cerrada.

■ Abierta:

Hay que ver que $\forall V \subset Y : f^{-1}V \overset{\text{ab.}}{\subset} X$, $V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Por ser f sobreyectiva, $f^{-1}V$ está bien definido y, por tanto, podemos escribir $V = f(f^{-1}V)$. Como f es abierta, $\forall W \overset{\text{ab.}}{\subset} X : f(W) \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ y como $f^{-1}V$ es abierto por la continuidad de f , entonces $V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$.

■ Cerrada:

$$f^{-1}V \overset{\text{ab.}}{\subset} X \overset{\text{cerr.}}{\Rightarrow} \underbrace{f(X \setminus f^{-1}(V))}_{\text{sobr. } Y \setminus V} \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$$

3. Las identificaciones y la apertura o cierre de la aplicación no están relacionadas. Esto quiere decir que existen identificaciones que no son abiertas ni cerradas, que sólo son abiertas, que sólo son cerradas y ambas cosas simultáneamente.

Espacio Cociente

Para entender los abiertos de una imagen directa es conveniente representarlos en el dominio. El concepto es conjuntista en realidad:

Definición (Conjunto Saturado)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que es **saturado respecto de f** si y sólo si $f^{-1}f(A) = A$.

Proposición (Caracterización de abiertos de $f\mathcal{T}$)

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, f\mathcal{T})$ donde $f\mathcal{T}$ es la topología imagen directa, los abiertos de $f\mathcal{T}$ son las imágenes de los abiertos saturados de \mathcal{T} , es decir:

$$f\mathcal{T} := \{fU \text{ donde } U \in \mathcal{T} \text{ y } f^{-1}fU = U\}$$

Demostración:

$\Rightarrow) V \in f\mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}V \in \mathcal{T}$ y $V \overset{f \text{ sobre}}{=} f^{-1}fV$, es decir, que $f^{-1}V$ es saturado.

$\Leftarrow) \text{ Sea } V \in Y : \exists U \in \mathcal{T}, \text{ saturado tal que: } fU = V$. Debemos ver que $f^{-1}V \in \mathcal{T}$.

Como $f^{-1}V = f^{-1}fU \overset{\text{sat.}}{=} U \in \mathcal{T}$ ya lo tenemos.

Observación:

Los abiertos no saturados de X pueden tener imágenes no abiertas de Y .

Ejemplo:

1. Consideremos la aplicación que transforma el intervalo $[0, 1]$ en la circunferencia unidad de \mathbb{R}^2 definida como:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

que geométricamente es:



Figura 3.3: La topología imagen directa es la usual en \mathbb{S}^1

2. Tenemos:

$$f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 \\ (s, t) \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t).$$

que geométricamente es:



Figura 3.4: Analizando los abiertos saturados y no saturados se concluye que la topología imagen directa es la usual en el tronco del cilindro.

Definición (Relación de inyectividad)

Llamamos **relación de inyectividad** a aquella relación de equivalencia que viene dada por una función f tal que dos elementos están relacionados si comparten imagen:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Definición (Proyección canónica)

Llamamos **proyección canónica** respecto de una relación de equivalencia a la aplicación:

$$p : X \rightarrow X_{/\sim} \\ x \mapsto [x]$$

donde $[x]$ es la clase de equivalencia de x .

Con esto vemos que dentro de las identificaciones tenemos el caso particular del cociente:

$$p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow X_{/\sim}.$$

Con esto definimos:

Definición (Topología cociente)

Llamamos **topología cociente** a:

$$\mathcal{T}_{/\sim} := \left\{ U \subset X_{/\sim} : p^{-1}(U) \in \mathcal{T} \right\}$$

que viene a ser la topología imagen directa por p .

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, f(\mathcal{T})) \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} = f \circ p^{-1} & \downarrow \\ (X_{/\sim}, p(\mathcal{T})) & & [x] \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \longmapsto & f(x) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ [x] & & \end{array}$$

Figura 3.5: Representación de la composición del cociente

Observación:

La relación de equivalencia que vamos a usar es la que viene dada por la relación de inyectividad respecto de f . Por esta razón, \bar{f} será una biyección.

Demostración:

Sea $z \in Y$ como f es suprayectiva $\exists x \in X : f(x) = z$. A su vez, $y \in [x] \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \bar{f}([x]) = z$. Con esto, \bar{f} es sobreyectiva y bien definida.

Sean ahora $[x], [y] \in X_{/\sim}$ tal que $\bar{f}[x] = \bar{f}[y] \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow [x] = [y]$. Por tanto, también es inyectiva.

Proposición

1. $\exists \bar{f} \Leftrightarrow x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$
2. $\exists \bar{f} : \bar{f} \text{ continua} \Leftrightarrow f \text{ continua.}$
3. $\exists \bar{f} : \bar{f} \begin{cases} \text{sobre.} \\ \text{iny. 1-1} \end{cases} \Leftrightarrow f \begin{cases} \text{sobre.} \\ x \sim y \Leftrightarrow f(x) \sim f(y) \end{cases}$
4. $\bar{f} \text{ homeomorfa} \Leftrightarrow f \text{ identificación.}$

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow[\text{ident.}]{} & (Y, \mathcal{T}') \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \downarrow \\ (X_{/\sim}, \bar{\mathcal{T}}) & & \end{array}$$

homeo.

Figura 3.6: Relación entre el cociente y una identificación.

Demostración:

1. Por la definición de \sim y de \bar{f} .
2. Sea \bar{f} continua. Tomemos $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow \bar{f}^{-1}U \in \bar{\mathcal{T}}$. Como p es continua por definición de $\bar{\mathcal{T}}$, $f^{-1}U = p^{-1}\bar{f}^{-1}U \in \mathcal{T}$. Por lo que f es continua.
Sea ahora f continua. Tomemos $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow W = f^{-1}U \in \mathcal{T}$. Al ser p sobreyectiva $W = p^{-1}pW$, es decir, que $pW \in \bar{\mathcal{T}}$ (ya que $p^{-1}(pW) \in \mathcal{T}$ y la definición de $\bar{\mathcal{T}}$).
3. (Anterior observación) Si \bar{f} es inyectiva $1-1 \Rightarrow \underbrace{\bar{f}[x] = \bar{f}[y]}_{\Leftrightarrow f(x) \sim f(y)} \Rightarrow \underbrace{[x] = [y]}_{\Leftrightarrow x \sim y}$

Política general:

Los cocientes son cómodos para definir espacios, las identificaciones son mejores para estudiar las propiedades que tenemos. Conviene pues tener triángulos como el anterior (3.6).

Se puede contemplar Y como un modelo del cociente. Es decir, utilizamos la identificación como “modelo teórico” y el cociente como “modelo geométrico”. Esto no siempre será posible ya que dependerá de ciertas propiedades geométricas que veremos.

Ejemplo: (Anteriores)

- Circunferencia y el cilindro como cocientes:

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ p \downarrow & \nearrow \text{cont.} & \downarrow \\ [0, 1] & \diagup \!\! \diagup & \\ & 0 \equiv 1 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \longrightarrow & C \subset \mathbb{R}^3 \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ [0, 1] \times [0, 1] & \diagup \!\! \diagup & \\ & (0, t) \equiv (1, t) & \end{array}$$

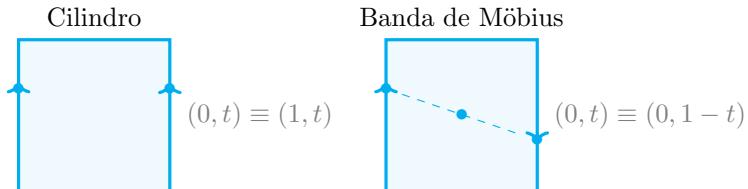
Figura 3.7: En el primero tomamos un segmento de longitud 1 y “pegamos” los extremos, lo que nos da una figura equivalente a un circunferencia. En el segundo, tomamos un rectángulo de área 1 y “pegamos” el lado izquierdo con el derecho directamente.

Para la circunferencia tenemos:

$$X_{/\sim} = \{\{t\} : 0 < t < 1, \{0, 1\}\}$$

la biyección entre el cociente y la esfera se da por el punto (3) de la anterior proposición y la continuidad por (2). Por último, la identificación se da por el anterior ejemplo.

- Para representar cocientes se utilizan dibujos que indican las identificaciones en los espacios de partida:



PRODUCTOS FINITOS

El objetivo de esta construcción es, dado un producto cartesiano $Y := X_1 \times \cdots \times X_r$, generar una topología que garantice la continuidad de las aplicaciones $p_i : Y \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ al ser equipada sobre

el mismo, es decir, que haga continuas las proyecciones sobre cada factor. Inmediatamente uno repara en que la discreta sobre Y cumple los requisitos. Sin embargo, el interés está en saber cuál es la topología menos fina que hace las p_i continuas.

Tal y como venimos haciendo en las construcciones anteriores, vamos a tratar de introducir lo mínimo indispensable para verificar la continuidad. En primer lugar, como las preimágenes de abiertos deben ser abiertos, entonces $\forall U_i \in \mathcal{T}_i : p_i^{-1}U_i = X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_r$ debe ser un abierto. Como para que pueda ser topología la intersección finita de abiertos tiene que ser abierto, sabemos que $\bigcap_{i=1}^r p_i^{-1}U_i = U_1 \times \dots \times U_r$ debe ser abierto, pero a diferencia de como venía ocurriendo en las construcciones anteriores no podemos decir aún que sea topología porque las uniones arbitrarias no funcionan bien (las uniones de productos no tienen por qué ser producto).

Sin embargo, se puede demostrar sin demasiada dificultad que el conjunto $\{U_1 \times \dots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$ caracteriza una topología en Y de la que es base de abiertos y, de esta manera, ahora sí tenemos determinada de modo único la topología buscada.

Definición (Topología Producto)

Sea $Y := X_1 \times \dots \times X_n$ un producto cartesiano de espacios topológicos y $p_i : Y \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ las proyecciones sobre cada uno de sus factores, definimos la **topología producto** $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ como aquella determinada por la base de abiertos:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

Ejemplo:

Si consideramos \mathcal{T}_u en \mathbb{R}^n es automático ver el resultado anterior. Una base de abiertos de la topología son las “bolas cuadradas” y estas son productos cartesianos de intervalos de \mathbb{R} con la \mathcal{T}_u .

Teorema (Propiedad universal de la topología producto)

Sea $g : (Z, \mathcal{T}'') \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ y $p_i : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ g = (g_1, \dots, g_r) \downarrow & \nearrow g_i = p_i \circ g & \\ (Z, \mathcal{T}'') & & \end{array}$$

Figura 3.8: Ilustración de la composición propuesta

entonces $\mathcal{T}' = \prod_{i=1}^r \mathcal{T}_i$ si y sólo si:

$$g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}$$

Demostración:

$$\Rightarrow) \mathcal{T}' = \prod_{i=1}^r \mathcal{T}_i :$$

- g cont. implica que g_i cont. porque $g_i = p_i \circ g$ y p_i es continua si la topología es la producto.

- g_i cont. implica que $g_i^{-1}(U_i) = \overbrace{g_1^{-1}(U_1)}^{\in \mathcal{T}''} \cap \dots \cap \overbrace{g_r^{-1}(U_r)}^{\in \mathcal{T}''} \in \mathcal{T}''$ y como esto es una intersección finita de abiertos, es abierto.

$$\Leftarrow) \text{ Para demostrarlo, vamos a ver el doble contenido de } \mathcal{T}' = \prod_{i=1}^r \mathcal{T}_i :$$

Como la propiedad de caracterización se cumple para cualquier función g que escogamos, podemos elegir la identidad de modo que:

$$\begin{array}{ccc}
 (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\
 id \text{ cont.} \uparrow & \nearrow p_i \circ id = p_i & \\
 (Y, \mathcal{T}') & &
 \end{array}$$

La continuidad de id nos asegura la continuidad de $g_i = p_i \circ id = p_i$. Como tenemos que p_i es continua y $\prod \mathcal{T}_i$ es la topología menos fina que verifica esto, entonces $\prod \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}'$.

Para ver el otro contenido, elegimos de nuevo la identidad, pero esta vez la identidad mera-mente conjuntista:

$$\begin{array}{ccc}
 (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\
 id \uparrow & \nearrow p_i \circ id = p_i \text{ cont.} & \\
 (Y, \prod \mathcal{T}_i) & &
 \end{array}$$

En este caso, sabemos que $g_i = p_i \circ id = p_i$ es continua porque p_i lo es por construcción. Esto quiere decir que la identidad conjuntista id es continua, es decir, $\forall U \in \mathcal{T}' : id^{-1}U = U \in \prod \mathcal{T}_i$. Por tanto, tenemos que $\mathcal{T}' \subset \prod \mathcal{T}_i$.

Ejemplo:

La \mathcal{T}_{rad} no es producto.

Demostración:

Tomamos un abierto y veamos que no es producto.

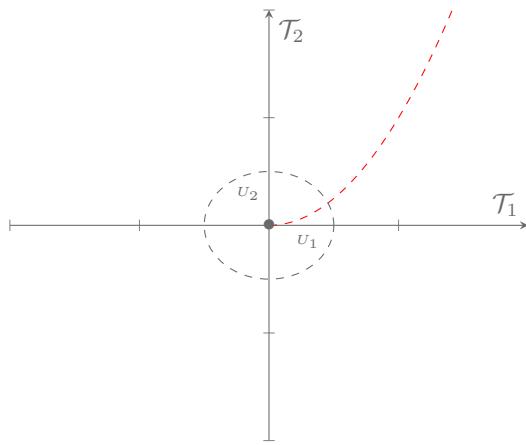


Figura 3.9: La topología radial no es producto de topologías.

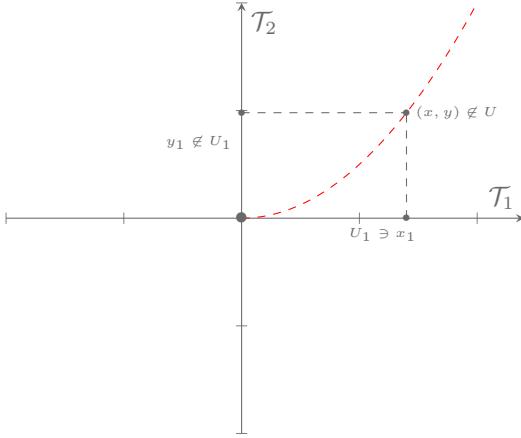


Figura 3.10: La topología radial no es producto de topologías.

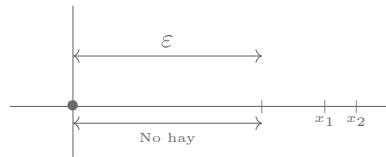


Figura 3.11: La topología radial no es producto de topologías.

Supongamos que sí: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \text{arco } \ni (0,0) \Rightarrow U_1 \times U_2 \subset U$ y $(0,0) \in U_1 \times U_2 \subset \mathcal{T}_{\text{rad}}$. Tomando $x_1 \in U_1$ y vemos $x = x_1 \cap r$ con r línea vertical por x_1 con esto $y_1 = x \cap l$ con l línea horizontal por x no pertenece a U (de lo contrario el producto y_1 con $x_1 = x$ pertenecería). Por tanto, $I_k = [(0, y_k), (x_k, y_k)]$ no tiene ningún punto en $U_1 \times U_2$. Haciendo converger I_k hacia 0 para cualquier recta por 0 tendremos un I_k que tenga intersección con la recta, es decir, la recta tendrá un punto que no pertenezca al abierto y U no sería abierto ¡!

Con esto, $\nexists x_k \rightarrow 0 \Rightarrow$ habrá un intervalo $(0, \varepsilon)$ en el eje x que no pertenece a U_1 y tendremos un “vacío” que de nuevo incumple que U es abierto.

Proposición

1. Las proyecciones $p_i : Y \rightarrow X_i$ sobre los factores del producto son aplicaciones abiertas.
2. La aplicación natural¹ que sumerge un factor en el producto

$$\begin{aligned}\alpha_j : X_j &\longrightarrow Y \\ x_j &\longmapsto (a_1, \dots, x_j, \dots, a_r)\end{aligned}$$

es una inmersión que llamamos aplicación parcial.

Demostración:

1. Nos vale con probarlo para una base: $p_i(U_1 \times \dots \times U_r) = U_i$
2. Trivialmente es inyectiva y continua. Por último, $X_i \rightarrow j(X_i)$ es homeomorfismo, es decir, es abierta porque:

$$\begin{cases} \alpha_j(X_j) = \{a_1\} \times \dots \times X_j \times \dots \times \{a_r\} \\ \alpha_j(U_j) = \{a_1\} \times \dots \times U_j \times \dots \times \{a_r\} = \alpha_j(X_j) \cap (X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_r) \end{cases}$$

que es abierto porque estamos restringiendo la topología producto a $\{a_1\} \times \dots \times X_i \times \dots \times \{a_r\} = \alpha_j(X_j)$.

¹Obviamente, con los a_i fijados.

Ejemplo:

Ahora el ejemplo de \mathcal{T}_{rad} simplemente es porque si fuese producto, sus elementos deberían ser la usual y el producto de usuales es usual que es distinta de la radial.

Observación: (Política general)

En una topología producto todo “se genera en productos”.

Ejemplo:

- Bases de entornos: $\mathcal{V}^a = \mathcal{V}^{a_1} \times \dots \times \mathcal{V}^{a_r} \stackrel{\text{mut}??}{=} \{V_1 \times \dots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}^{a_i}\} (a \in Y).$
- Base de abiertos: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_r = \{B_1 \times \dots \times B_r : B_i \in \mathcal{B}_i\}$ (esto repite la construcción de $\prod_i \mathcal{T}_i$)

SUMAS FINITAS

El objetivo de esta construcción es, dada una unión² $Y := X_1 + \dots + X_r := X_1 \times \{1\} \cup \dots \cup X_n \times \{n\}$, generar una topología que garantice la continuidad de las aplicaciones $j_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow Y$ al ser equipada sobre el mismo, es decir, que haga continua la suma desde cada sumando. Inmediatamente uno repará en que la trivial sobre Y cumple los requisitos. Sin embargo, el interés está en saber cuál es la topología más fina que hace las j_i continuas.

De nuevo, vamos a tratar de introducir todo lo posible sin violar la condición de continuidad como abierto en la topología. En primer lugar, nos damos cuenta de que cualquier abierto $U_i \in \mathcal{T}_i$ de una de las topologías concretas es preimagen $j_i^{-1}(U_i \times \{i\})$, luego si estos son abiertos respetan la definición de continuidad. Como son los únicos sobre los manejamos algo que podamos utilizar, la idea es proponer como base de la topología suma $\mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_n$ el conjunto $B := \{U_1 \times \{1\}, \dots, U_n \times \{n\} : U_i \in \mathcal{T}_i\}$.

Definición (Topología Suma)

Sea $Y := X_1 + \dots + X_r := X_1 \times \{1\} \cup \dots \cup X_n \times \{n\}$ la unión de espacios topológicos (X_i, \mathcal{T}_i) y $j_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow Y$ la inclusión de cada sumando en el total, definimos la **topología suma** $\sum_{i=1}^k \mathcal{T}_i$ como aquella determinada por base de abiertos:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \{1\}, \dots, U_r \times \{r\} : U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

Observación:

Por como se ha definido la topología, es trivial ver que cada sumando $X_i \times \{i\}$ es abierto en la topología suma $\sum_{i=1}^r \mathcal{T}_i$. Pero es que además también son cerrados, pues su complementario $Y \setminus (X_i \times \{i\}) = \bigcup_{j \neq i} (X_j \times \{j\})$ es unión de abiertos, es decir, abierto.

Proposición

Con la anterior definición sabemos que

$$j_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X_i \times \{i\}, \mathcal{T}|_{X_i \times \{i\}}), \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

es inmersión abierta y cerrada.

Demostración:

Para probar que es inmersión hay que probar que la aplicación anterior es un homeomorfismo. Para empezar, por construcción, la aplicación es continua y además biyectiva, pues manda el conjunto a sí mismo conjuntistamente hablando. Ahora basta probar que es abierta y cerrada:

²Los índices i de las expresiones $X_i \times \{i\}$ se utilizan para poder utilizar el mismo conjunto como dos sumandos distintos y diferenciarlos entre sí (pues de otra manera la unión de ambos sería solo uno de ellos).

- Abierta: $j_i(U_i) = U_i \times \{i\} \in \mathcal{T}$
- Cerrada: $Y \setminus j_i(U_i) = Y \setminus U_i$ que es cerrado en $\sum \mathcal{T}_i$.

Teorema (Caracterización topología suma)

Sea $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$ y $j_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$:

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{T}_i) & \xrightarrow{j_i} & (Y, \mathcal{T}') \\ g|_{X_i} = g \circ j_i & \searrow & \downarrow g \\ & & (Z, \mathcal{T}'') \end{array}$$

Figura 3.12: Ilustración de la composición propuesta

entonces $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r$ si y sólo si:

$$g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}$$

Demostración:

Análoga a las anteriores construcciones.

Política general:

Localmente $Y = X_1 + \dots + X_r$ es como sea cada X_i . Por ejemplo, las bases de entornos de Y son las de los sumandos. Globalmente, se trata cada sumando separadamente. Por ejemplo, las bases de abiertos de los sumandos se unen para dar una base de abiertos de Y . Olvidando el tecnicismo $X_i \times \{i\} \equiv X_i$:

Y es unión disjunta de los sumandos
Los sumando son subespacios abiertos y cerrados de Y

Es un formalismo para hacer cómodamente otras construcciones. Por ejemplo, “pegar dos discos por sus bordes” sería:

$$\text{Disco } D \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \text{ borde } \partial D = \mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$D_1 + D_2 / \sim \quad \overbrace{(p, 1)}^{\epsilon_{\partial D}} \sim (p, 2).$$

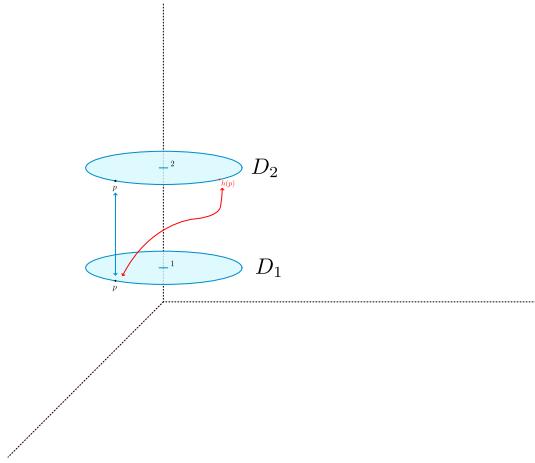


Figura 3.13: *Dos discos*

y más elaborado $h : \partial D \xrightarrow{\text{homeo.}} \partial D$ con $\overset{\in \partial D}{p} \sim h(p)$.

Finalmente, hay otros conceptos de “suma” más significativos que veremos en algún ejemplo.

ESPACIOS PROYECTIVOS REALES

Geometría lineal

En primer lugar, veamos un repaso de lo visto en geometría lineal sobre espacios proyectivos.

Definición (Espacio proyectivo real)

Usando \sim , proporcionalidad:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \Rightarrow \mathbb{P}^n = \{\text{rectas vectoriales de } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Que en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n). \end{aligned}$$

Observación:

Las ecuaciones serán de la forma: $h \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ homogénea $\Rightarrow \begin{cases} h(x) = 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$ está bien definido en \mathbb{P}^n . Sabemos que el grado de la ecuación homogénea h nos dará lugar a:

- Grado 1: Variedades proyectivas lineales.
- Grado 2: Cuádricas proyectivas.
- Grado arbitrario: Variedades proyectivas algebraicas.

Definición (Cartas afines)

Sea $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano proyectivo. Entonces, tenemos un hiperplano lineal $\hat{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con una forma lineal asociada $h = 0$, de la siguiente forma:

$$H = \hat{H} \setminus \{0\} / \sim$$

Decimos que H es **hiperplano del infinito** de la **carta afín** $U = \mathbb{P}^n \setminus H$.

Proposición

La aplicación

$$\pi| : \underbrace{\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{Hiperplano afín}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{P}^n \setminus H}_{\{h \neq 0\}} = U$$

es una biyección.

Topología de espacio proyectivos

Para la topología en U usaremos la imagen directa de la usual en $\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Proposición

Con la anterior suposición tenemos que la aplicación:

$$\pi| : \{h = 1\} \rightarrow U$$

es un homeomorfismo.

Demostración:

Ya sabemos que es biyección por lo que queda ver que es continua y abierta/cerrada. Continua lo será por tener U la topología imagen directa. Y abierta porque???

Proposición

La siguiente definición es topología en \mathbb{P}^n :

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Demostración:

Ni idea

Proposición (Topología en \mathbb{P}^n)

- Cociente de la usual vía $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
- “Suma” de las definidas en las cartas afines:

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Estas dos topologías coinciden.

Demostración:

1. U es abierto en la topología cociente ya que $\pi^{-1}U = \{h \neq 0\}$ es abierto usual.

2. La topología cociente en U coincide con la topología de carta afín:

$$\begin{array}{ccc}
 W \subset U : \pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{(\pi^{-1}W) \cap \{h=1\}}_{=(\pi|_{\{h=1\}})^{-1}W} & & \text{para la top.} \\
 \xrightarrow{\text{para la top.}} & \downarrow & \leftarrow \text{de carta afín} \\
 \pi^{-1}W \stackrel{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow (\pi|_{\{h=1\}})^{-1}W \stackrel{\text{ab.}}{\subset} \{h=1\} & & \\
 \uparrow \quad \downarrow & & \uparrow \quad \downarrow \\
 W \text{ abierto} & & W \text{ abierto} \\
 \text{top. cociente} & & \text{top. carta} \\
 & & \text{afín}
 \end{array}$$

Figura 3.14: Equivalencia entre las topologías cociente y suma.

1. + 2. \Rightarrow La top. cociente está generada por las topologías de las cartas afines, que forman un recubrimiento abierto de \mathbb{P}^n .

Proposición

En este caso, la $\mathcal{T}_{\text{cociente}}$ tendrá como base: $\left\{ \pi(B) \subset U : B \stackrel{\text{ab.}}{\subset} \{h=1\}, h \in \mathbb{P}[x_0, \dots, x_n] \right\}$ homogéneo de grado 1: $G = \bigcup_U G \cap U$ abierto en \mathbb{P}^n y abierto en U .

Observación:

En $U_1 \cap U_2$ la topología definida por $\pi_1 =$ definida por π_2 .

Observación:

De lo anterior deducimos:

1. U_1, U_2 dos cartas afines $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ abiertos.

Demostración:

Cartas afines: $U_i = \{h_1 \neq 0\} \left\{ \begin{array}{l} \pi| : \{h_1 = 1\} \rightarrow U_1 \text{ homeo.} \\ (\pi_1)^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} \stackrel{\text{ab.}}{\subset} \{h_1 = 1\} \end{array} \right.$

2. Las topologías de U_1 y U_2 coinciden en $U_1 \cap U_2$.

Demostración:

De nuevo conviene entenderlo con cartas:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} & \xrightarrow{\text{homeo. para } U_1} & x = y/h_1(y) \\
 \uparrow \text{homeo?} & \searrow & \uparrow \text{homeos usuales} \\
 \mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 \neq 0, h_2 = 1\} & \xrightarrow{\text{homeo. para } U_2} & y = x/h_2(x)
 \end{array}$$

Definición (Atlas afín canónico)

No se suelen utilizar todas las cartas afines: $n+1$ distintas ya cubren \mathbb{P}^n . Típicamente $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$ con:

$$U_i = \{x_i \neq 0\} \leftrightarrow \underbrace{\{x_i = 1\}}_{\equiv \mathbb{R}^n} : (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \underbrace{1}_{\mathbb{R}^n \rightarrow}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), 0 \leq i \leq n$$

Proposición (Cociente antipodal)

Toda recta de \mathbb{R}^{n+1} corta a $\mathbb{S}^n : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$ en dos puntos antipodales, así que denotamos un “sub” cociente, que es también identificación.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \supset & \mathbb{S}^n \\ \downarrow & \swarrow \pi| & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

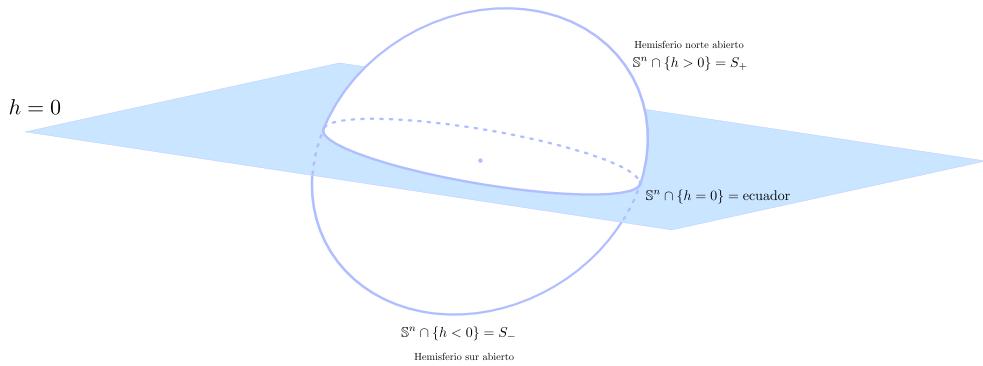
Figura 3.15: *Cociente antipodal de \mathbb{S}^n*

Demostración:

Como antes tenemos conos: $\pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}W}_{=(\pi/\mathbb{S}^n)^{-1}W}$.

Observación:

Las cartas afines tienen una representación muy conveniente:



$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & & \\
 \downarrow & \curvearrowleft & \curvearrowright \text{Homeomorfismo antipodal} \\
 \mathbb{P}^n & \supset U & \curvearrowright \text{Homeomorfismo} \\
 & & S_+ \wedge S_- \\
 & & \downarrow \text{Homeomorfismo local}
 \end{array}$$

$\forall x \in \mathbb{P}^n, \exists H \not\ni x \implies x \in U$

Figura 3.16: Representación cartas afines.

Proposición (Cociente de un disco)

Consideremos un disco:

$$E = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \partial \begin{cases} \bar{S}_+ = \mathbb{S}^n \cap \{h \geq 0\} \text{ hemisferio cerrado.} \\ D^n = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \text{ disco.} \end{cases}$$

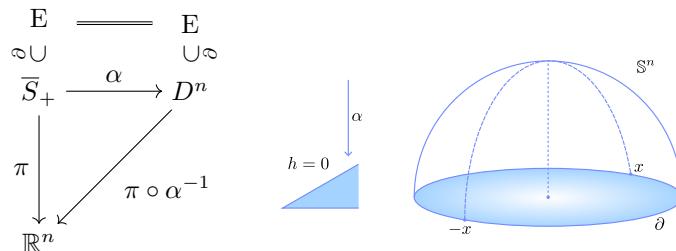
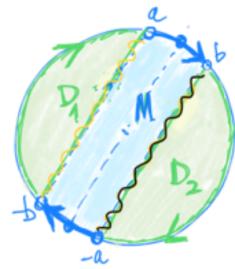


Figura 3.17: \mathbb{R}^n se obtiene identificando puntos antipodales del borde de un disco.

Ejemplo:

$\mathbb{P}^2 \setminus D^2$ = banda de Möbius.



$$\begin{aligned}\mathbb{P}^2 &= M \cup (D_1 \cup D_2) / \sim_{\text{antipodal en el borde}} \\ &= M / \sim \cup D_1 + D_2 / \sim_{\text{(uniones disjuntas)}} \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\text{banda} \quad \text{disco} \\ &\text{de Möbius}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M / \sim = \text{banda de Möbius} \\ D_1 \cup D_2 / \sim = \dots = \dots = \dots = \dots = \text{disco} \end{array} \right.$$

$a = -a$
 $b = -b$
 $\alpha = -\alpha$

SEPARACIÓN

CONCEPTO

En este apartado vamos a estudiar la noción de separación en profundidad. Veremos que propiedades tienen los espacios que poseen esta característica y qué consecuencias tiene tenerla sobre el resto de la topología del mismo.

Definición (Espacio Hausdorff o T_2)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **Hausdorff** o T_2 si y sólo si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existen algunos entornos de cada uno disjuntos entre sí.*

Hay otras formas de separación, más débiles o más fuertes, pero nos contentaremos con ésta al ser la más intuitiva.

Proposición

Sea X un espacio topológico, si es Hausdorff podemos encontrar dichos entornos abiertos y disjuntos.

Demostración:

Para cada entorno $V \subset^{\text{ent.}} X$, por ser entorno, existe $U \subset^{\text{ab.}} X$ y $U \subset V$ que también es entorno. Escogiendo a esos dos abiertos (uno en cada entorno) siguen siendo disjuntos y cumplen la definición de T_2 .

Proposición

Sea X un espacio topológico Hausdorff, entonces los puntos son cerrados.

Demostración:

Para cualquier $x \in X$ y cualquier $y \in X \setminus \{x\}$, por ser Hausdorff, existe un entorno abierto $U^y \not\ni x$. Por tanto, podemos escribir el complementario de $\{x\}$ como la unión de todos esos entornos para los puntos que no son x , es decir, $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U^y$ y como el complementario es unión de abiertos, $\{x\}$ es cerrado.

Observación:

1. Un espacio topológico con la topología de los complementarios finitos ($X, \mathcal{T}_{\text{CF}}$) no es Hausdorff y, sin embargo, tiene puntos cerrados.

No es Hausdorff porque, si X es infinito, dos abiertos cualesquiera se cortan ya que si cogemos dos abiertos $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$, como sus complementarios $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son finitos y X es infinito, entonces siempre podremos encontrar un $x \notin X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2$, es decir, que $x \in U_1 \cap U_2$.

2. Si una topología contiene a una topología Hausdorff, entonces también es Hausdorff.

Este es precisamente el caso de la radial \mathcal{T}_{rad} que contiene a la usual \mathcal{T}_u , que es Hausdorff. Que la usual es Hausdorff es sencillo, pues para dos puntos x e y distintos basta con escoger $B(x, \varepsilon)$ y $B(y, \varepsilon)$ que son disjuntos si tomamos $\varepsilon < \frac{\|x-y\|}{2}$. Ahora ver que la radial es Hausdorff es trivial, pues como los abiertos usuales son abiertos radiales podemos coger las mismas bolas como entornos.

3. En la topología del punto (X, \mathcal{T}_a) el punto clave a no es cerrado, lo que impide que sea Hausdorff.

Si el punto a fuera cerrado, el conjunto $X \setminus \{a\}$ sería abierto, pero en esta topología la definición de abierto es contener al punto a y precisamente $X \setminus \{a\}$ no lo contiene por definición.

Proposición

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas e Y un espacio topológico Hausdorff, entonces el conjunto de puntos donde coinciden:

$$\{f = g\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

es un conjunto cerrado.

Demostración:

Para demostrar que nuestro conjunto es cerrado habrá que demostrar que el complementario es abierto, es decir, que si un punto cumple $f(x) \neq g(x)$ entonces habrá un entorno suyo cuyos puntos también verificarán $f(y) \neq g(y)$. Con esto, tendremos que $\{f \neq g\}$ es entorno de todos sus puntos y, por tanto, abierto.

Si $f(x) \neq g(x)$, entonces por ser T_2 , $\exists V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset$. Como la aplicación f es continua, entonces $f^{-1}V^{f(x)}$ y $g^{-1}V^{g(x)}$ son entornos de x y, por tanto, su intersección $f^{-1}V^{f(x)} \cap g^{-1}V^{g(x)} = W^x$ es también entorno de x (y es no vacío porque x pertenece a él).

Si observamos ahora la intersección de W^x con el complementario $\{f = g\}$, entonces vemos que:

$$\forall y \in W^x \Rightarrow \begin{cases} f(y) \in V^{f(x)} & V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset \\ g(y) \in V^{g(x)} & f(y) \neq g(y) \end{cases}$$

es decir, que $W^x \cap \{f = g\} = \emptyset$, luego $W^x \subset \{f \neq g\}$.

Corolario (Extensión por continuidad a la adherencia)

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas, Y un espacio topológico Hausdorff y $\{f = g\}$ es denso¹, entonces $f \equiv g$.

Demostración:

Si f y g coinciden en un subconjunto A , entonces $\{f = g\} \supset A$ y como $\{f = g\}$ es cerrado, entonces $\{f = g\} \supset \overline{A}$. Como A es denso, entonces $\overline{A} = X$ y esto implica que $\{f = g\} \supset X$, es decir, que $\{f = g\} = X$.

Observación:

Este último resultado es importante, pues nos permite extender con continuidad (y de forma única) una función a su adherencia.

Ejemplo: (Importante)

Un caso importante en el que Y es Hausdorff es:

$$f : X \rightarrow Y = \mathbb{R}$$

¹Esto quiere decir que existe un subconjunto $A \subset X$ denso donde las funciones coinciden.

Observación:

$f : X \rightarrow Y$ continua con Y Hausdorff $\Rightarrow f^{-1}(y)$ cerrado $\forall y \in Y$.

Demostración:

Porque los puntos de Y son cerrados y la preimagen de cerrados por continuidad es cerrada.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como comporta la propiedad definida con respecto a las construcciones del tema Construcciones. Se trata de ver cuándo se conserva, cuándo no y qué hipótesis podemos añadir para que se conserve en los casos que no.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
T_2	\Rightarrow	\times	\Leftrightarrow	\Leftrightarrow

Cuadro 4.1: Tabla de comportamiento de la separación.

Demostración:

1. Subespacios:

Consideremos un subespacio $Y \subset X$ de un espacio X que es Hausdorff. Por ser X Hausdorff, cualesquiera dos puntos $y_1, y_2 \in Y$ verifican que $\exists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset$ donde V^{y_1} y V^{y_2} son entornos en X . Pues si tomamos los correspondientes entornos, pero en la topología relativa a Y , entonces $(V^{y_1} \cap Y) \cap (V^{y_2} \cap Y) = \emptyset$ vemos que siguen sin cortarse.

2. Cociente:

Para demostrar que no se cumple basta con dar un contraejemplo: consideremos el cociente y los respectivos puntos

$$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \left. \begin{array}{l} y_1 = \mathbb{Q} \in Y \\ y_2 = \sqrt{2} \in Y \end{array} \right\}$$

y veamos que $\nexists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset$. Cualquier entorno abierto de $\sqrt{2}$ contiene racionales (por su densidad en \mathbb{R}), por tanto al saturar contiene \mathbb{Q} . Como todo abierto en el cociente es proyección de un saturado, cualquier abierto contiene al punto gordo \mathbb{Q} y, en consecuencia, la intersección nunca es disjunta.

3. Producto

Veamos que se da la doble implicación, es decir, que X e Y son ambos T_2 si y sólo si $X \times Y$ es T_2 .

$\Rightarrow)$ Tomamos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Esto es posible en dos casos:

- $x_1 \neq x_2$. Como X es $T_2 \Rightarrow \exists V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times Y) \cap (V^{x_2} \times Y) = \emptyset$
- $y_1 \neq y_2$ podemos hacer lo mismo porque Y es también T_2 .

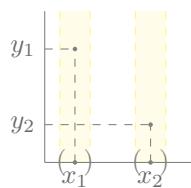


Figura 4.1: Separación en el producto gracias a la separación en el factor.

$\Leftarrow)$ Sabemos que $X \approx X \times \{y_0\} \subset X \times Y$. Como $X \times Y$ es T_2 y hemos visto que esta propiedad se hereda por subespacios, entonces $X \times \{y_0\}$ es T_2 y, por homeomorfismo, X también.

4. Suma:

Recordemos que se ha definido la suma como la unión disjunta de los sumandos. Esto quiere decir que para cualquier $x \in X$ el propio X es entorno de x y lo mismo ocurre con Y para sus puntos. Esto quiere decir que $X = V^x$, $Y = V^y$ y $V^x \cap V^y = X \cap Y = \emptyset$. Por tanto, los puntos de distintos conjuntos lo verifican.

Si X y Y son ambos T_2 , entonces la suma lo es porque hemos visto que entre conjuntos se cumple y si son T_2 dentro del propio conjunto se cumple también. Pero es que además el recíproco es cierto, pues si se cumple en la suma se debe cumplir en cada uno de los conjuntos.

NUMERABILIDAD

Los axiomas de numerabilidad son definiciones y resultados que describen las buenas propiedades que puede tener una topología si algunos elementos como las bases de entornos, las bases de abiertos, los conjuntos densos, etc. son numerables.

AXIOMAS

En esta sección presentamos los cuatro principales resultados sobre numerabilidad: 1^{er} Axioma, 2^o Axioma, separable y Lindelöf. Pretendemos desmigajar estos conceptos que muchas veces tomamos como “naturales” porque estamos acostumbrados a trabajar con ellos en \mathbb{R}^n , pero que de no aparecer dotan de propiedades muy distintas a los espacios topológicos.

I Axioma

Definición (1^{er} Axioma)

Sea X un espacio topológico, decimos que es **1^{er} Axioma** si y sólo si para cualquier punto $x \in X$ existe una base \mathcal{V}^x de entornos numerable.

Observación:

Como hemos visto otras veces, de cualquier base de entornos se puede sacar una base de entornos abiertos. De esta manera, si existe una base como la de la definición existe una base $\mathcal{B}^x = \{U_k = V_k\}_{k=1}^\infty$ numerable de entornos abiertos.

Proposición

Sea X un espacio topológico 1^{er} Axioma, entonces existe una base de entornos numerable $\mathcal{W}^x := \{W_k\}_{k=1}^\infty$, donde $W_k := U_1 \cap \dots \cap U_k$, compuesta por entornos abiertos y encajados.

Demostración:

Como X es 1^{er} Axioma, existe una base numerable de entornos $\{V_k^x\}_{k=1}^\infty$ compuesta por entornos abiertos. Si tomamos el conjunto de los entornos definidos como:

$$\begin{cases} W_1^x = V_1^x \\ W_2^x = V_1^x \cap V_2^x \\ \vdots \\ W_k^x = \bigcap_{i=1}^k V_i^x \end{cases}$$

entonces tenemos un conjunto de entornos abiertos y encajados, pues $W_{k+1}^x \subset W_k^x$, y que conforma una base de entornos.

Ejemplo:

1. La topología usual $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es un ejemplo de topología 1^{er} Axioma, pues el conjunto $\mathcal{W}^x = \{B(x, \frac{1}{k}) : k \geq 1\}$ es una base de entornos numerable.
2. Las topologías del punto (X, \mathcal{T}_a) y discreta $(X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$ también son ejemplos de topologías 1^{er} Axioma.
3. La topología de los complementarios finitos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ es un ejemplo de las topologías que no son 1^{er} Axioma.

Para verlo, supongamos que sí, que existe una base $\exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1}$ de abiertos encajados. Como son abiertos, entonces $W_k = \mathbb{R} \setminus F_k$ donde F_k es un conjunto finito. De esta manera, $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ y es no vacía porque es una unión numerable de puntos (y \mathbb{R} es una unión no numerable). Por tanto, si escogemos $y \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k$, el abierto $U^x = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ es un entorno de $x \in X$, pero no contiene a ningón W_k pues el punto y no pertenece al conjunto.

4. La topología radial $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{rad}})$ tampoco es 1^{er} Axioma.

Para verlo, supongamos que sí, que existe una base numerable $\{W_k : W_k \ni x_0\}_{k \geq 1}$ de entornos abiertos de un punto x_0 . Denotamos por L_k a las rectas de pendiente $\frac{1}{k}$ que pasan por ese mismo x_0 . La intersección $W_k \cap L_k$ contiene un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tal que $0 < \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k}$ del que podemos tomar un x_k cualquiera. Ya vimos que $U^{x_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_k : k \geq 1\}$ es abierto radial y no contiene ningón W_k ya que a estos pertenecen los x_k .

II Axioma

Definición (2º Axioma)

Sea X un espacio topológico, decimos que es **2º Axioma** si y sólo si existe una base numerable \mathcal{B} de abiertos.

Ejemplo:

- La topología del punto \mathcal{T}_a y la discreta $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$ equipadas sobre un conjunto X no numerable no son 2º Axioma, pues para la del punto la base mínima de abiertos es $\mathcal{B}_a = \{\{a, x\} : x \in X\}$, que es no numerable si X lo es. Por otro lado, en $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$ tenemos como base mínima $\{\{x\} : x \in X\}$ que no es numerable cuando X no lo es.
- La topología usual $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es 2º Axioma, ya que tenemos como base de abiertos $\mathcal{B} = \{B(q, \frac{1}{k}) : q \in \mathbb{Q}^n, k \geq 1\}$.

Proposición

Sea X un espacio topológico, si es 2º Axioma es 1^{er} Axioma.

Demostración:

Sea la base de abiertos que verifica el 2º Axioma $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1}$, entonces el conjunto $\mathcal{B}^x = \{B_k : x \in B_k\}$ es base de entornos $\forall x \in X$ y además, si \mathcal{B} es numerable, también lo será \mathcal{B}^x .

Observación:

El recíproco no es cierto, pues tenemos como contraejemplo la topología discreta cuando se equipa sobre un conjunto de puntos X no numerable.

Separable

Definición (Separable)

Sea X un espacio topológico, decimos que es **separable** si y sólo si existe un subconjunto $A \subset X$ numerable y denso.

Ejemplo:

- El espacio usual $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es separable porque el subconjunto \mathbb{Q}^n es numerable y denso.
- Cualquier espacio $(X, \mathcal{T}_{\text{discr.}})$ donde X no sea numerable, no es separable. Ya que, en caso de serlo, habría un subconjunto $A \subset X$ tal que $\bar{A} = X$ y, como en la trivial todo es abierto y cerrado, en particular A sería cerrado y $A = \bar{A} = X$.
- La topología del punto \mathcal{T}_a sí es separable porque el punto clave $\{a\}$ es denso y es un conjunto finito.
- En la topología de los complementarios finitos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ numerable infinito es denso porque en cualquier entorno de un punto $x \in X$ hay un abierto U^x que contiene a x y, por ser abierto, le faltan un número finito de puntos, luego tiene que tener puntos de A . De esta manera, por numerable y denso sabemos que el conjunto X es separable.
- La topología radial $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{rad}})$ también es separable

Proposición

Sea X un espacio topológico, si es 2º Axioma es separable.

Demostración:

Sea $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1}$ la base de abiertos de la propiedad de ser 2º Axioma, entonces $A := \{a_k : a_k \in B_k\}_{k \geq 1}$ corta a todo abierto y, por tanto, es denso.

Observación:

Sin embargo, aquí mostramos algunas de las no propiedades que uno puede tener la tentación de creer e intentar demostrar:

1. I Ax. + separable $\not\Rightarrow$ II Ax.

Contraejemplo: (X, \mathcal{T}_a) , X no numerable.

2. I Ax. $\not\Rightarrow$ separable.

Contraejemplo: Topología discreta en un espacio no numerable.

3. Separable $\not\Rightarrow$ I Ax.

Contraejemplo: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}}) : \bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

Lindelöf

La propiedad de Lindelöf es una forma más débil de compacidad que tiene resultados, si no los mismos, muy parecidos.

Definición (Lindelöf)

Sea X un espacio topológico, decimos que es **Lindelöf** si y sólo si para todo recubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ existe un subrecubrimiento $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k}$ numerable.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como se comportan los axiomas de numerabilidad con respecto a las construcciones del tema Construcciones para ver cuándo se conservan, cuándo se pierden y qué podemos añadir para no perderlas.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
I Ax.	✓	X abiertos ✓	✓	✓
II Ax.	✓	X abiertos ✓	✓	✓
Separable	X abiertos ✓	✓	✓	✓
Lindelöf	X cerrados ✓	✓	X	✓

Cuadro 5.1: Tabla de comportamiento de la numerabilidad con respecto a las construcciones.

Demostración:

■ Subespacios:

- I Ax. y II Ax. se heredan a subespacios intersecando las bases ambientes que cumplen los axiomas con el subespacio.
- Separable no se hereda en general, por ejemplo, la topología (X, \mathcal{T}_a) sobre un X no numerable hace que el subespacio $X \setminus \{a\}$ tenga la topología discreta y hemos visto que en X no numerable esta no es separable.
Sin embargo, si el subespacio es abierto sí se hereda intersecando el conjunto denso con el subespacio.
- Lindelöf no se hereda en general, por ejemplo, tomamos Y no Lindelöf y el conjunto $X = Y \cup \{w\}$ que es compacto, $\mathcal{B}^w = \{X \setminus F : F \subset Y\}$ con F finito.
Sin embargo, a subespacios cerrados, como la compacidad, sí se hereda.

■ Cocientes:

- $X = \mathbb{R}_u$ es I y II Axiomas, $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es I.

Demostración:

$\alpha = \mathbb{Z} \in Y, \exists \mathcal{W}^\alpha = \{W_k : k \geq 1\}$ abiertos saturados, $W_k \supset \mathbb{Z}, \forall k$
 $(\text{Figura 5.1}) \Rightarrow U = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_k : k \geq 1\}}_{\text{cerr.}}$ entorno abierto saturado de \mathbb{Z} , $U \not\supset W_k, \forall k$. Esto último porque $\varepsilon_k \in W_k$, pero $\varepsilon_k \notin \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_k : k \geq 1\}$.

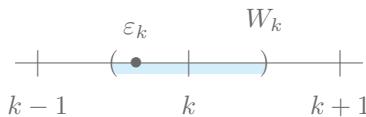


Figura 5.1: Si $\varepsilon_k \notin \mathbb{Z}$, vemos que aunque \mathbb{R}_u cumple el I y el II axioma, existe un cociente que no.

- Las aplicaciones continuas y abiertas conservan I y II.

Demostración:

La imagen de una base es una base.

- Las aplicaciones continuas conservan la separabilidad

Demostración:

Sabemos que $f(\overline{A}) \stackrel{\text{cont.}}{\subset} \overline{f(A)}$. Entonces, si $\overline{A} = X$, $Y = f(X) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \Rightarrow \overline{f(A)} = Y$.

- Las aplicaciones continuas conservan Lindelöf, pues es un resultado más débil que el de compacidad y para compacidad se cumple.

Estas tres últimas propiedades se pueden aplicar al cociente porque la proyección es una aplicación continua.

■ Productos y Sumas:

- Para productos: producto finito de familias numerables es numerable.
- Para sumas: suma finita de familias numerables es numerable.
- La separabilidad se mantiene porque: $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A_1} \times \overline{A_2}$.
- Solo falla Lindelöf:
 - $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,]})$ es Lindelöf (ejercicio no banal).
 - $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{[,]}^2)$ no es Lindelöf: si lo fuera, $L = \{x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ heredaría la propiedad, pero es discreto no numerable. (\perp)

SUCESIONES

Cuando en \mathbb{R}^n usábamos las sucesiones para describir elementos de la topología en realidad estábamos usando, de fondo, otros resultados topológicos que nos permitían hacer esas simplificaciones. Por ello, merece un comentario destacado (sobre todo al final de este capítulo que es el que habilita el poder usar sucesiones) para distinguir cuándo esto es posible y cuándo no.

Definición (Sucesión y Límite)

Sea X un espacio topológico, definimos una **sucesión** como una aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ que denotamos¹ por $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y definimos su **límite** como un valor $x \in X$ que cumple:

$$\forall U^x \subset X, \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in U^x$$

Proposición

Sea X un espacio topológico Hausdorff y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente, entonces el límite de convergencia es único.

Demostración:

La clave de la demostración es que el ser T_2 nos permite considerar dos entornos disjuntos donde deben estar todos los términos de la sucesión a partir de uno concreto y, como son disjuntos, no pueden estar en ambos entornos simultáneamente. Supongamos que tenemos dos límites de la sucesión $x \neq y$, entonces:

$$\exists U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \{x_k : k \geq k_0\} \subset U^x \\ \{x_k : k \geq k_1\} \subset U^y \end{cases} \Rightarrow \forall k \geq \max\{k_0, k_1\} : \{x_k : k \geq k_1\} \subset U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \#$$

Observación:

Cuando en \mathbb{R}^n utilizábamos sucesiones para describir elementos de la topología tales como la adherencia, la acumulación, etc. en realidad lo que estábamos utilizando es que \mathbb{R}^n es 1^{er} Axioma. El 1^{er} Axioma es el elemento topológico que permite describir una la topología vía sucesiones, por ejemplo:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset A : x_k \rightarrow x$$

¹Con esta notación queremos decir que $x_n = f(n)$.

$\Rightarrow)$ Supongamos que $x \in \overline{A}$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \mathcal{W}^x = \{W_k^x\}_{k \geq 1} \text{ base ent. encajados} \xrightarrow{x \in \overline{A}} \exists x_k \in W_k \cap A \\ \forall U^x \underset{\text{base}}{\supset} W_{k_0}^x \underset{\text{enc.}}{\supset} W_{k_0+1}^x \supset \dots \Rightarrow x_k \in U^x, \forall k \geq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_k \rightarrow x$$

$\Leftarrow)$ Supongamos que $\exists \{x_k\} \subset A : x_k \rightarrow x$:

$$A \ni x_k \rightarrow x \Rightarrow \forall U^x, \exists x_{k_0} \in U^x \cap A$$

Pero, salvo cuando podamos trabajar en un espacio 1^{er} Axioma, en general, los límites de sucesiones son poco útiles para trabajar con la topología.

Enunciado

Caracterizar la continuidad por sucesiones, si es posible:

$$f : X \rightarrow Y$$

COMPACIDAD

CONCEPTO Y MANTRAS

Definición (Compacidad)

Un espacio topológico X decimos que es **compacto** si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones equivalentes:

- De todo recubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento finito:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X$$

- Dada una familia de cerrados, si la intersección finita de algunos de ellos es no vacía, entonces la intersección no finita del total es no vacía:

$$\forall F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$$

Ejemplo:

Como estamos más acostumbrados a la primera de las definiciones que se ha dado, vamos a ejemplificar que la 2^a no se cumple si, por ejemplo, los conjuntos no son cerrados. Para ello, podemos considerar la familia de conjuntos $\{(0, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$. De dicha familia, cualquier cantidad finita tiene intersección no vacía, pero cuando hacemos la intersección arbitraria ésta sí es vacía.

Definición (Subespacios compactos)

Sea X un espacio topológico y $K \subset X$ un subconjunto, decimos que K es **compacto en X** si y sólo si para cualquier recubrimiento suyo por abiertos de X

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{ con } U_i \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K$$

existe un subrecubrimiento finito.

Observación:

La definición anterior es trivialmente equivalente a dar la definición de compacidad del inicio del capítulo, pero considerando K como espacio topológico con su topología relativa.

Ejemplo:

1. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ es compacto $\Leftrightarrow K$ es cerrado y acotado (Heine-Borel).

2. $[a, b] \subset \mathbb{R}_u$ compacto. (\Rightarrow Heine-Borel por resultados generales).

3. Si X es compacto con $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$ \Rightarrow es finito

Demostración:

$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ es recubrimiento abierto en $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$ y como es compacto $\exists \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} = X$.

4. $x_k \rightarrow x \Rightarrow K = \{x, x_k : k \geq 1\}$ es compacto.

Demostración:

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ tal que, $\bigcup_{i \in I} U_i = K \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \exists U_{i_0}^x \ni x \xrightarrow{\text{lím}} x_k \in U_{i_0}, \forall k > k_0 \\ x_k \in U_{i_k}, \forall k \leq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow K \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k_0}}$$

Por ser k_0 finito.

5. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ compacto $\Leftrightarrow \forall A^\infty \subset K, A' \cap K \neq \emptyset$ (Bolzano-Weierstrass)

Proposición (Mantra 1)

Sea X un espacio topológico compacto y K un subespacio cerrado suyo, entonces es compacto.

$$F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_{\text{compacto}} \Rightarrow F \text{ compacto.}$$

Demostración:

Dado un recubrimiento $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ podemos escribir el total en términos de unión de abiertos como $X = (X \setminus K) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$. Como X es compacto, de este recubrimiento podemos extraer otro finito, es decir, $\exists (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X$. Por ser subespacio $K \subset X = (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$ y como no puede estar contenido en su complementario, entonces está $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$, es decir, es compacto.

Proposición (Mantra 2)

Sea X un espacio topológico compacto y $A \subset X$ un subconjunto con infinitos puntos, entonces tiene puntos de acumulación en X .

$$A_\infty \subset X_{\text{compacto}} \Rightarrow A' \neq \emptyset$$

Demostración:

Vimos en su momento que la adherencia puede expresarse como $\overline{A} = A \cup A'$ y, si $A' = \emptyset$, entonces $\overline{A} = A$ y esto indica que A es cerrado. Cerrado en compacto hemos visto que es compacto luego A es compacto.

Pero recordemos también que al adherencia se podía escribir como

$$\overline{A} = \{\text{puntos aislados}\} \sqcup A'$$

es decir, que A está compuesto únicamente por puntos aislados. Como hemos visto que A es compacto y sus puntos son aislados, si proponemos como recubrimiento de abiertos los entornos abiertos disjuntos de cada punto (que existen porque son aislados) tiene que existir un subrecubrimiento finito y, como cada punto sólo pertenece a uno de los conjuntos, no se puede prescindir de ninguno, luego el recubrimiento inicial era finito. Esto indica que existe un número finito de puntos aislados, es decir, que A es finito #.

Proposición (Mantra 3)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y $K \subset X$ un subespacio compacto, entonces $f(K)$ es compacto en Y .

Demostración:

$$f(X) \subset \bigcup_i U_i \Rightarrow X = \bigcup_i f^{-1}U_i \Rightarrow \exists f^{-1}U_{i_1} \cup \dots \cup f^{-1}U_{i_r} = X \Rightarrow U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset f(X)$$

Observación:

La propiedad de conservación de la compacidad a través de aplicaciones continuas es muy importante porque permite demostrar la compacidad de espacios muy complicados a través de una aplicación continua desde espacios más sencillos. Por ejemplo, el proyectivo real \mathbb{P}^n es compacto porque es imagen continua de la esfera \mathbb{S}^n por la aplicación de la proyección antipodal y la esfera es compacta.

Proposición (Mantra 4)

Sea X un espacio topológico T_2 y $K \subset X$ un subespacio compacto, entonces K es cerrado.

Demostración:

Vamos a ver que $X \setminus K$ es abierto probando que es entorno de todos sus puntos, es decir, vamos a probar que $\forall x \in X \setminus K : \exists U^x \cap K = \emptyset$ (que es lo mismo que $U^x \subset X \setminus K$).

Dado cualquier punto $x \in X \setminus K$, para cualquier $y \in K$ que escogamos se verifica que existen entornos de ambos V_y^x y W^y disjuntos, por ser el espacio T_2 . De esta manera, podemos escribir $K := \bigcup_{y \in K} W^y$ y, como es compacto, $K := W^{y_1} \cup \dots \cup W^{y_r}$.

Como buscamos un abierto U^x que no corte con K y tenemos definido este en términos de unos entornos finitos (de los que hemos calculado otros homólogos que no cortan con ellos), lo único que es posible hacer es considerar el abierto $U^x := V_{y_1}^x \cap \dots \cap V_{y_r}^x$ que es disjunto a cualquier W^{y_i} , es decir, a K .

Observación:

En un espacio topológico T_2 , los resultados que se aplican a puntos se suelen poder aplicar a compactos. Es sencillo, utilizando el Mantra 4, demostrar que dos compactos disjuntos en un T_2 se separan como puntos.

Proposición

Sea X un espacio compacto, Y un espacio Hausdorff y $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre ambos, entonces f es cerrada.

Demostración:

Si escogemos un cerrado $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, entonces por ser X compacto, F es compacto. Como la aplicación es continua $f(F)$ es compacto en Y y, por ser T_2 , es cerrado en Y . Por tanto, hemos demostrado que la aplicación es cerrada.

Corolario

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua, X compacto e Y Hausdorff, si añadimos las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} \text{inyectiva} \\ \text{sobreinyectiva} \\ \text{biyectiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{inmersión cerrada} \\ \text{identificación cerrada} \\ \text{homeomorfismo} \end{cases}$$

se tienen los anteriores resultados.

Demostración:

Por las caracterizaciones que hicimos en el tema de Construcciones.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como se comporta la compacidad con respecto a las construcciones del tema Construcciones para ver cuándo se conservan, cuándo se pierden y qué podemos añadir para no perderlas.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad	✗ cerrados ✓	✓	✓	✓
Demostración:	Mantra 1	Mantra 3	Tychonoff	Unión finita

Cuadro 6.1: Tabla de comportamiento de la compacidad respecto a las construcciones, con demostración incluida.

Teorema (de Tychonoff)

Si X e Y son dos compactos $\Rightarrow X \times Y$ es compacto.

Demostración:

Sea $X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$, $W_i \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

1. $\forall (x, y) \in X \times Y$, $\exists U_y^x \times V_x^y \subset W_i$, i depende de (x, y) . Por la definición de la topología producto por base de abiertos.
2. $\forall x \in X$, $Y = \bigcup_{y \in Y} V_x^y \xrightarrow{Y \text{ comp.}} Y = V_x^{y_1} \cup \dots \cup V_x^{y_r}$, los y_k y su número, r , dependen de x .
3. $U^x = U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x$, $U^x \times V_x^{y_k} \subset U_{y_k}^x \times V_x^{y_k} \subset W_{i_k}$, i_k depende de x .
4. $X = \bigcup_{x \in X} U^x \xrightarrow{X \text{ comp.}} X = U^{x_1} \cup \dots \cup U^{x_s}$.
5. Veamos que:

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{1 \leq l \leq s \\ 1 \leq k \leq r}} U^{x_l} \times V_{x_l}^{y_k} \subset \bigcup_{\substack{1 \leq l \leq s \\ 1 \leq k \leq r}} W_{i_k}, \text{ los } i_k \text{ dependen de los } x_l.$$

Ya que:

- $x \in X \Rightarrow \exists U^{x_l} \ni x$.
- $y \in Y = V_{x_l}^{y_1} \cup \dots \cup V_{x_l}^{y_r} \Rightarrow \exists V_{x_l}^{y_{l_k}} \ni y$

Con lo que tenemos un subrecubrimiento finito a partir de un recubrimiento cualquiera.

Observación:

1. $X \times Y$ compacto $\Rightarrow X$ e Y compactos.

Demostración:

Aplicamos el Mantra 3 para las proyecciones.

2. Heine-Borel: $K \subset \mathbb{R}_u^n$ cerrado y acotado \Rightarrow compacto.

Demostración:

Si K es acotado, pertenece al producto cartesiano de intervalos acotados y si además es cerrado, entonces pertenece a un producto cartesiano de intervalos cerrados y acotados de la forma

$$K \subset [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Como sabemos que el intervalo $[0, 1]$ es compacto, por homeomorfismo, los intervalos $[a, b]$ son compactos. Además, por Tychonov, el producto de ellos también lo es, luego tenemos K cerrado contenido en un compacto, es decir, compacto.

COMPACIDAD LOCAL

Definición (Localmente cerrado)

Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$ un subconjunto, decimos que Y es **localmente cerrado** si y sólo si:

1. $\forall y \in Y, \exists V^y \overset{\text{ent.}}{\subset} X : Y \cap V^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} V^y.$
2. $Y \overset{\text{ab.}}{\subset} \overline{Y}.$
3. $\exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U$

donde las condiciones anteriores son equivalentes.

Observación:

En realidad, podemos reescribir las condiciones anteriores de otra forma para ver más claro lo que estamos queriendo decir:

1. Si se cumple la propiedad, se cumple para una base de entornos.

Para cualquier entorno $U^y \subset V^y$ también se cumple la propiedad, pues $Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y$ si y sólo si $Y \cap U^y = F \cap U^y$ donde F es un cerrado ambiente, es decir, de V^y . Tomamos como $F = V^y \cap Y$ y hemos terminado.

2. Escrito de otra forma, como los abiertos de \overline{Y} son abiertos ambiente cortados con \overline{Y} , estamos diciendo que $Y = \overline{Y} \cap U$ donde $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.
3. De nuevo, los cerrados en U son cerrados ambientes cortados con U , es decir que podemos reescribir lo anterior como $\exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X : Y = F \cap U$.

Demostración:

- 1. \Rightarrow 2.

Vamos a ver, por el doble contenido, que $Y = \overline{Y} \cap \left(\bigcup_{y \in Y} U^y \right)$.

\subset) Trivial.

\supset)

$$x \in \overline{Y} \cap U^y \Rightarrow x \in \text{Adh}_{U^y} (Y \cap U^y) \stackrel{Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y}{=} Y \cap U^y \subset Y$$

- 2. \Rightarrow 3.

Con la observación posterior a la definición, la demostración es inmediata, pues que se cumpla dos implica que existe un $U \subset^{\text{ab.}} X$ tal que $Y = \overline{Y} \cap U$. Luego si tomamos ese U como el abierto de 3. y \overline{Y} como el cerrado F hemos acabado.

- 3. \Rightarrow 1.

De nuevo, vuelve a ser trivial por la definición, pues basta con tomar como V^y el abierto U de 3.

Observación:

La definición anterior es un buen ejemplo de localización de una cierta propiedad topológica y es una técnica habitual para otras muchas propiedades: se trata de hacer la siguiente construcción $\forall x, \exists V^x$ base de entornos que cumplen \mathcal{P} .

En ocasiones, se utiliza otro enunciado similar: $\forall x, \exists V^x$ que cumple \mathcal{P} , pero porque en dicho contexto es equivalente al anterior. Como en general, no son enunciados equivalentes, la construcción adecuada es mediante bases de entornos.

Ejemplo:

El conjunto del dibujo, en la topología usual de \mathbb{R}^n no es localmente cerrado,

puesto que cualquier entorno de un punto del margen derecho mantiene la apertura que da el margen discontinuo derecho.

COMPACIDAD LOCAL Y MANTRAS

Definición (Compacidad Local)

Sea X un espacio topológico, decimos que es **localmente compacto** si y sólo si para todo punto, existe una base de entornos formada por entornos compactos.

Ejemplo:

1. El espacio \mathbb{R}^n con la topología usual es localmente compactos porque para cualquier punto $V^x = \{B[x, \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$ es una base de entornos compactos.
2. Utilizando el mismo ejemplo visto para localmente cerrado, podemos añadir un punto q y considerar la topología usual en todos los puntos menos en q , donde consideramos únicamente como entornos los conjuntos cuyo complementario es finito.

Esta definición hace el conjunto X compacto (pues si consideramos $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ alguno recubrirá a q y el complementario de ese es un conjunto finito), pero no podremos encontrar para p ninguna base de entornos compactos, pues no existe dicha base de cerrados (y en \mathbb{R} usual están caracterizados así).

3. $T = B(0, 1) \cup \{p\}$, T_u no es localmente compacto.

Demostración:

Veamos un conjunto infinito sin acumulación en T :

$$\begin{aligned} \exists V^p \stackrel{\text{comp.}}{\subset} T \Rightarrow \exists B(0, \varepsilon) \cap T \subset V^p \Rightarrow \exists \overbrace{x_k}^{\in V^p} \rightarrow x_0 \in S(0, 1) \setminus T \\ \Rightarrow \{x_k : k \geq 1\} \subset V^p \subset T. \end{aligned}$$

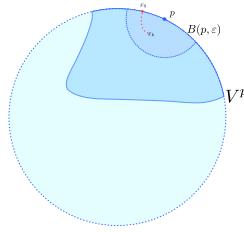


Figura 7.1: Visualización de un conjunto que no es localmente compacto en la topología usual de \mathbb{R}^2 .

4. En general NO basta que exista un entorno compacto.

En $S = T \sqcup \{q\}$ tomamos como entornos del punto añadido q los $W \subset S$ que tienen complementario finito (y $q \in W$). Es decir, para q tenemos la topología de los complementarios finitos mientras que para el resto de puntos tenemos la topología usual. En este caso, S es compacto, pero sus puntos no son localmente compactos (por lo menos, q)

Pero este caso es un ejemplo con un espacio no separado.

Proposición

Sea X un espacio topológico T_2 y $x \in X$ un punto con un entorno compacto, entonces existe una base de entornos compactos para dicho punto.

Demostración:

Queremos ver que $\forall U^x$ abierto, $\exists K^x \subset^{ent.} U^x$ compactos.

$\exists V^x (\supset^{\text{ab.}} W^x)$ compacto $\stackrel{?}{\Rightarrow} \mathcal{V}^x = \{\text{entornos compactos } K^x\}$ base de entornos.

$\exists_{\text{ab.}} U_1^x \subset \overline{U_1^x} \subset U^x$:

$$V^x \setminus U^x \subset^{ cerr. } V_{\text{comp.}}^x \Rightarrow \overbrace{V \setminus U}^{\not\subset^x} \text{ comp. en } T_2 \Rightarrow \exists \underbrace{U_1^x \& A}_{\text{ab. disjuntos}} \subset V^x \setminus U^x$$

Y tenemos que: $K^x = \overline{W^x \cap U^x} \Rightarrow$

- $\overline{V^x}_{\text{comp.}} \cap \overline{U_1^x} = V_{\text{comp.}}^x \cap \overline{U_1^x} \subset V^x \cap \overline{X \setminus A} = V^x \cap \overbrace{(X \setminus A)}^{\text{cerr.}} \subset U^x$.
- Intersección de dos entornos es entorno.
- $W^x \cap U_1^x \subset V^x \underset{\text{comp. en } T_2}{=} \overline{V^x} \subset X \Rightarrow \underbrace{K^x}_{\text{cerr.}} \subset \underbrace{V^x}_{\text{comp.}} \Rightarrow K^x \text{ comp.}$

Proposición (Mantra 1)

Sea X un espacio topológico localmente compacto y $Y \subset X$ un subespacio localmente cerrado, entonces es localmente compacto.

Demostración:

Tenemos:

$$\overline{U_1^x} \cap V^x \subset \overline{X \setminus A} \cap V^x = \overbrace{(X \setminus A)}^{\text{cerr.}} \cap V^x \subset U^x$$

Y como Y es localmente cerrado, $\exists W^y \cap Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} W^y$ ent. en X . Por ser X localmente compacto $\exists K^y$ compacto tal que, $K^y \subset W^y \Rightarrow K^y \cap W^y \cap Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} K^y \Rightarrow$

$$L^y = \underbrace{K^y \cap W^y}_{\text{ent. en } X} \cap Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} K^y \Rightarrow L^y \text{ ent. en } Y \text{ compacto.}$$

Proposición (Mantra 2)

Sea X un espacio topológico T_2 y $Y \subset X$ un espacio localmente compacto, entonces es localmente cerrado.

Demostración:

$$\underbrace{\exists L^y}_{\text{comp.}} = \underbrace{V^y \cap Y}_{\text{ent. en } Y} \subset \underbrace{V^y}_{\text{ent. en } X} \xrightarrow{T_2} V^y \cap Y = L^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} V^y.$$

Corolario

En un T_2 localmente compacto, ser localmente cerrado es equivalente a localmente compacto.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad local	✗ Loc. cerrados ✓	✗ Abiertos ✓	✓	✓
Demostración:	Mantra 1	$f(\text{ent.}) = \text{ent}$	Tychonoff	Loc. suma es como sum's

Cuadro 7.1: La tabla nos indica como se conserva la compacidad local en las distintas construcciones que hemos visto. Las sumas y los productos son finitos.

Ejemplo:

$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es localmente compacto.

1. $\mathbb{Z} \subset \underbrace{W}_{\text{ab.}} \subset \mathbb{R} : \exists k + \underbrace{\varepsilon_k}_{0 < \varepsilon_k < 1} \in W \forall k \geq 1 \Rightarrow A = \{k + \varepsilon_k : k \geq 1\} \subset W$
 - Cerrado
 - Saturado ($n\mathbb{Z} = \emptyset$)
 - Infinito
 - Discreto
2. $\exists K \subset Y$ entorno compacto de $y = \mathbb{Z} \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{W^{\text{ab.}}}_{\supseteq \mathbb{Z}} \subset p^{-1}K \Rightarrow pA \subset K$ infinito sin acumulación.

COMPACTIFICACIÓN POR UN PUNTO

Este es otro problema importante: sumergir un espacio como subespacio abierto denso de un espacio compacto. Con “sumergir” nos referimos a una inmersión.

$$X \xleftarrow[\text{denso}]{\text{ab.}} X^*$$

donde X es no compacto y X^* es compacto y Hausdorff, es decir, es localmente compacto y, por ende, la imagen de X es localmente compacta.

Intuitivamente se trata de añadir los límites que el espacio no tiene (por no ser compacto).

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n \equiv B^n \setminus \{a\} \subset \mathbb{S}^n$ vía proyección estereográfica desde a .
2. $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{RP}^n \setminus H \subset \mathbb{RP}^n$ vía cartas afines.

Definición

Llamamos **residuo** a la diferencia entre el espacio desde el que surge la inmersión y el de llegada.

Proposición

X (no compacto) localmente compacto y T_2 . Entonces:

1. $\exists j : X \hookrightarrow X^*$ compacto T_2 , j inmersión abierta $X^* \setminus j(X) = \{\omega\}$.
2. Unicidad:

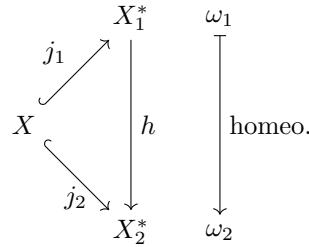


Figura 7.2: Con esto vemos que la unicidad es por homeomorfismo.

Demostración:

1. $X^* = X \sqcup \{\omega\}$, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus K : K \subset X \text{ comp.}\}$.

■ \mathcal{T}^* es topología: fácil por las hipótesis sobre X .

- $K_i^{\text{comp.}} \subset X \xrightarrow{T_2} K_i^{\text{cerr.}} \subset X \Rightarrow \bigcap_i^{\text{cerr.}} K_i \subset \overbrace{K_{i_0}}^{\text{comp.}} \Rightarrow \bigcap_i K_i \text{ comp.}$
- $U \subset X$, $X \subset^{\text{comp.}} X \Rightarrow U \setminus K = \text{ab.} \setminus \text{cerr.} = \text{ab.}$
- $U \subset X$, $K \subset^{\text{comp.}} X \Rightarrow U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus U)$, $K \setminus U \subset K$ cerrado \Rightarrow compacto.
- $X \subset X^*$ inmersión abierta: $(X^* \setminus K) \cap X = X \setminus K \in \mathcal{T}$ pues X es T_2 .
- X^* es compacto: $X^* = \bigcup_i W_i$.

$$\exists W_{i_0} \ni w \Rightarrow W_{i_0} = X^* \setminus \underbrace{K}_{\text{comp.}} \Rightarrow K \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r} \Rightarrow X^* = W_{i_0} \cup W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r}$$

- X^* es T_2 : Si tomamos dos puntos de X simplemente utilizamos que es T_2 . Por tanto, lo interesante es separar $x \in X$ de ω :

$$x \in X \text{ loc. comp.} \Rightarrow \exists K^x \text{ ent. comp.} \Rightarrow X^* \setminus K^x = U^\omega \text{ ent. de } \omega$$

- X es denso:

$$\overline{X} = X^*, \forall \overbrace{W^x}^{=X \setminus K} \cap X = X \setminus K \neq \emptyset$$

porque X no es compacto, pero K sí.

2. Unicidad:

$$\left. \begin{array}{l} h_{j_1} = j_2 \\ j_i \text{ inmersiones} \end{array} \right\} \Rightarrow h| : j_1(X) \rightarrow j_2(X) \text{ homeomorfismo.}$$

- h continua en ω_1 (análogamente h^{-1} continua en ω_2)

$$\begin{aligned} h(\omega_1) = \omega_2 \in W &\stackrel{\text{ab.}}{\subset} X_2^* \setminus W \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \stackrel{\text{comp.}}{\subset} j_2(X) \\ &\Rightarrow K = h^{-1}(X_2^* \setminus W) \stackrel{\text{comp.}}{\subset} j_1(X) \subset X_1^* \\ [X_1^* \text{ es } T_2] &\Rightarrow K \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X_1^* \Rightarrow h^{-1}(W) = X_1^* \setminus K \stackrel{\text{ab.}}{\subset} X_1^*. \end{aligned}$$

Definición

El espacio X^* se denomina **compactificación por un punto** de X .

También, **compactificación de Alexandroff**.

Por ejemplo, \mathbb{S}^n es la compactificación por un punto de \mathbb{R}^n (vía proyección estéreo como dijimos antes).

Observación: ¡Importante!

1. La unicidad justifica? que un espacio X^* compacto T_2 es la compactificación de $X^* \setminus \{0\}$ para cualquier $w \in X^*$.
2. Si dos espacios son homeomorfos, lo son sus compactos.

$$X_1 \xrightarrow[\text{homeo.}]{} X_2 \xrightarrow{j_2} X_2^* \Rightarrow j_1 = j_2 \circ f : X_1 \rightarrow X_2^*$$

que cumple las condiciones.

3. Si dos espacios no son homeomorfos, pueden serlo sus compactos.



No son homeomorfos porque ningún punto de X_1 desconecta sus entornos. Por otro lado, el punto del vértice superior de X_2 si que desconecta TODOS sus entornos suficientemente pequeños. Es decir, X_1 tiene distintas características topológicas de X_2 .

CONEXIÓN

CONCEPTO Y MANTRAS

Definición (Conexión)

Sea X un espacio topológico, decimos que es **conexo** si y sólo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\#U, V \overset{\text{ab.}}{\subsetneq} X : X = U \sqcup V$ donde U y V son no vacíos y disjuntos.
 2. $\#F, C \overset{\text{cerr.}}{\subsetneq} X : X = F \sqcup C$ donde F y C son no vacíos y disjuntos.
 3. $\#E \subsetneq X$ no vacío que sea abierto y cerrado simultáneamente.
-

Demostración:

Equivalencia: $F = \underbrace{X \setminus V}_{=U}, C = \underbrace{X \setminus U}_{=V}, E = U = X \setminus V$.

Observación:

Si quisieramos estudiar la conexión de un subespacio no como un espacio en sí mismo sino en términos relativos al espacio ambiente inicial, bastaría con dar la siguiente definición:

$$\#U, V \overset{\text{ab.}}{\subset} X : Y \subset U \cup V \text{ y } \begin{cases} U \cap Y \neq \emptyset \\ V \cap Y \neq \emptyset \\ U \cap V \cap Y = \emptyset \end{cases}$$

y esta sería equivalente a estudiar la conexión en Y con su topología relativa, esto es, como espacio topológico en sí mismo.

Ejemplo:

- El espacio real usual \mathbb{R} es conexo.
- El espacio de los racionales \mathbb{Q} con la topología usual no es conexo y, de hecho, es **totalmente desconexo** porque los únicos conexos son los puntos.

Demostración:

Si dividimos \mathbb{R} en dos segmentos disjuntos separados por $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tenemos que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap ([-\infty, \alpha) \sqcup (\alpha, +\infty])$ que son abiertos en \mathbb{Q} y disjuntos.

- En \mathbb{R} con la topología *Sorgenfrey* sólo son conexos los puntos, es decir, es totalmente desconexo.

- El intervalo $(0, 1)$ con la topología usual es conexo.
- En general, los segmentos en \mathbb{R}^n , los estrellados y los convexos son conexos.

Teorema (del pivote)

Sea X un espacio topológico y A un conjunto definido como $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ donde los A_i son una familia de conexos en X , si se da alguna de las siguientes condiciones:

1. $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.
2. $\exists i_0 \in I : \forall i \in I, A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$.
3. $\forall i \in I : A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$.

entonces el conjunto A es conexo.

Demostración:

1. Para demostrar la primera implicación, podemos ver que cualquier conjunto $E \subset A$ no vacío que sea abierto y cerrado simultáneamente ha de ser A .

En primer lugar, hay que tener en cuenta que $E \cap A_i \overset{\text{ab.}}{\underset{\text{cerr.}}{\subset}} A_i$ y, como estos son conexos, sólo hay dos alternativas: $E \cap A_i = \emptyset$ o $E \cap A_i = A_i$. No puede ocurrir que $\forall i \in I : E \cap A_i = \emptyset$ porque entonces $E \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$, es decir, $E \cap A = \emptyset$ lo que sería absurdo. Así pues, podemos decir que $\exists i_0 \in I : A_{i_0} \cap E = A_{i_0}$ y, como $P := \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ y $P \subset E$ sabemos que todos los demás $A_i \cap E$ deben ser necesariamente A_i pues no pueden ser vacíos ya que $\emptyset \neq P \subset A_i \cap E$.

De esta manera, hemos conseguido ver que $E \supset E \cap A_i = A_i$ y entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset E \Rightarrow A = E$, es decir, A es conexo.

2. Para demostrar la segunda implicación, basta con aplicar la primera que ya ha sido demostrada.

Como la intersección $A_{i_0} \cap A_i$ es no vacía y ambos conjuntos son conexos, por la primera implicación la unión $B_i := A_{i_0} \cup A_i$ es conexa. De esta manera, podemos escribir el total como

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \underbrace{A_i \cup A_{i_0}}_{B_i} \text{ donde } \bigcap_{i \in I} B_i = A_{i_0} \neq \emptyset$$

así que podemos decir que es conexo por la primera implicación.

3. Para A_1 y A_2 , como la intersección es no vacía y ambos son conexos, por la primera implicación la unión $A_1 \cup A_2 =: B_2$ es conexa. Si ahora miramos B_2 y A_3 , vemos que la intersección es no vacía (pues $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$) y, como ambos son conexos, la unión $B_3 := B_2 \cup A_3$ es conexa. De esta manera y de forma inductiva, se llega a que la unión de todos es conexa, es decir, que A es conexo.

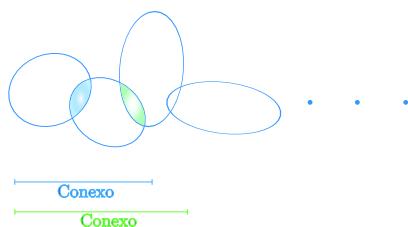


Figura 8.1: Ejemplo de una cadena de conexos.

Proposición (Construcción de cadenas)

Sea X conexo tal que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, recubrimiento abierto y $p, q \in X \Rightarrow \exists U_{i_0} \cup \dots \cup U_{i_k}$ de p a $q : p \in U_{i_0}, U_{i_{k-1}} \cap U_{i_k} \neq \emptyset, q \in U_{i_r}$.

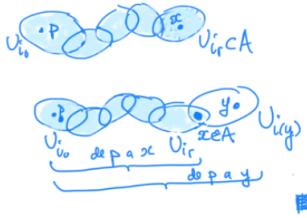
Demostración:

Veamos que $A = \{x \in X : \exists U_{i_k}, \text{ cadena, de } p \text{ a } x\} \neq \emptyset$ abierto y cerrado $\Rightarrow A = X$ y $q \in A$, es decir, para cualquier elemento de X existe una cadena desde p que es lo que buscamos. Esto se debe a que:

- No vacío: $\exists U_{i_0} \ni p$ y U_{i_0} va de p a p .
- Abierto: $\exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r}$ de p a $x \Rightarrow U_{i_r} \subset A$, es decir, es entorno de todos sus puntos.
- Cerrado:

$$\begin{aligned} y \in \overline{A} \text{ e } y \in U_{i(y)} &\Rightarrow A \cap U_{i(y)} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r} \text{ de } p \text{ a } x \in U_{i(y)} \\ &\Rightarrow U_{i_0}, \dots, U_{i_r}, U_{i(y)} \text{ de } p \text{ a } y. \end{aligned}$$

Por tanto, $y \in A$, es decir, $A = \overline{A}$.



Con esto es un subconjunto de uno conexo, no vacío, abierto y cerrado, es decir, es el total.

Proposición (Mantra 2)

Sean X e Y espacios topológicos, X conexo y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre ambos espacios, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración:

Escogemos un conjunto $E \subset f(X)$ abierto en la imagen. La preimagen $f^{-1}(E)$ es no vacía, abierta y cerrada en X por la continuidad de la función f y, como A es conexo entonces $f^{-1}(E) = X$, lo que quiere decir que $E = f(X)$.

Proposición (Mantra 3)

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto conexo, la adherencia \overline{A} es un conjunto conexo.

Demostración:

La demostración puede hacerse a través del hecho de que si $Y \subset X$ es denso en X y Y es conexo, entonces X es conexo, pues si esto está demostrado $A \subset \overline{A}$ y todo conjunto es denso en su adherencia.

De esta manera y suponiendo $Y \subset X$ denso y Y conexo, tomamos un conjunto

$$\emptyset \neq E \subset^{\text{ab.}}_{\text{cerr.}} X \Rightarrow \underbrace{E \cap Y}_{\neq \emptyset} \subset^{\text{ab.}}_{\text{cerr.}} Y \Rightarrow E \cap Y = Y \Rightarrow Y \subset E \subset^{\text{cerr.}} X = \overline{Y} \Rightarrow E = X$$

Observación:

El resultado anterior es importante por el hecho de que permite demostrar que un conjunto es conexo a través de la conexión de un subconjunto denso. Como la adherencia es el total, si el conjunto denso es conexo, el total también lo es.

Ejemplo:

1. Como el intervalo $(0, 1)$ es denso en el intervalo $[0, 1]$ (pues se trata de su adherencia), entonces $[0, 1]$ conexo.
2. Sabiendo que $[0, 1]$ es conexo, podemos generalizar el razonamiento anterior a través de otro método: viendo que la aplicación $\sigma(t) = (1 - t)a + tb$ establece un homeomorfismo con $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ y, por ser continua y $[0, 1]$ conexo, entonces $[a, b]$ es conexo.
3. Con aún más generalidad y conociendo los casos anteriores, podemos deducir que otros conjuntos también son conexos:
 - Los conjuntos estrellados $E = \bigcup_{x \in E} [a, x]$ respecto de a , los convexos, las bolas abiertas y cerradas, los rectángulos... son todos conexos gracias al teorema del pivote y los resultados anteriores.
 - Las trazas de curvas continuas $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales como caminos, etc. son conexos, pues son imagen continua de conexos.

4. Seno del topólogo/polaco:

Si uno considera la función $f(t) = \operatorname{sen}(1/t)$ la gráfica que observa es la que se ve en la figura 8.2. Dicha gráfica, que denotaremos por Γ es un conjunto conexo, pues es imagen continua de un conexo. La línea vertical donde se “aprieta” la función, que denotaremos por J , también lo es por ser un segmento (más bien homólogo a uno). Lo interesante es que la unión de ambas cosas es conexa pues precisamente es la adherencia de la gráfica J .

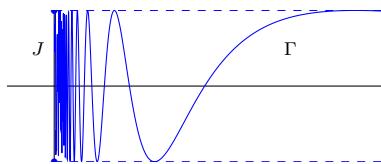


Figura 8.2: *Seno del topólogo o de Varsovia.*

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como comporta la propiedad definida con respecto a las construcciones del tema Construcciones. Se trata de ver cuándo se conserva, cuándo no y qué hipótesis podemos añadir para que se conserve en los casos que no.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión	\times	✓	✓	\times
Demostración:	$\{0, 1\} \subset [0, 1]$	Mantra 3	Pivote	Cada sum. es ab. y cerr.

Cuadro 8.1: *Tabla de comportamiento de la conexión con respecto a las construcciones.*

Proposición

$X \times Y$ conexo $\Leftrightarrow X$ y Y conexo.

Demostración:

- \Rightarrow) Cada factor es imagen del total a través de la función proyección, que es continua. Como el total es conexo, la imagen continua a través de un conexo es conexa, luego se tiene el resultado.

\Leftrightarrow) Fijamos un valor $a \in X$ y entonces vemos que el conjunto

$$Z_y = \underbrace{(X \times \{y\})}_{\approx X} \cup \underbrace{(\{a\} \times Y)}_{\approx Y}$$

es conexo por ser dos conexos que se cortan en el punto (a, y) (teorema del pivote).

Además, la intersección de todos los Z_y

$$\bigcap_{y \in Y} Z_y = \{a\} \times Y \neq \emptyset$$

es no nula, luego por el teorema del pivote de nuevo, tenemos que:

$$\bigcup_{y \in Y} Z_y = X \times Y \text{ conx.}$$

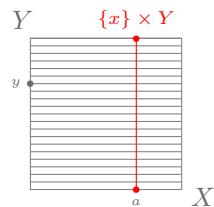


Figura 8.3: Representación de que el producto conexos es conexo: cada línea del cuadrado es un $X \times \{y\}$.

COMPONENTES CONEXAS Y CONEXIÓN LOCAL

COMPONENTES

Definición

Una **componente conexa** (c.c) de X es un subespacio conexo maximal.

Proposición (Construcción)

1. $\forall a \in X$ definimos: $C(a) = \bigcup_{a \in A_{\text{conx}}} A$ es conexo (por t. pivote), $a \in C(a)$.
2. $E \subset X$ conexo tal que $C(a) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow$

$$C(a) \cup E \text{ conx. (pivote)} \Rightarrow C(a) \cup E \text{ es uno de los } A \text{ de } C(a) \Rightarrow E \subset C(a)$$

Luego,

- $C(a)$ maximal \Rightarrow componente conexa.
 - $a \neq b : C(a) = C(b)$ ó $C(a) \cap C(b) = \emptyset$. Usamos $E = C(b)$.
3. $\overline{C(a)}$ conexo (mantra adh.) $\Rightarrow \overline{\overline{C(a)}} = \overline{C(a)}$ (maximalidad)
$$\overbrace{C(a)}^{\text{cerr.}}$$

1. + 2. + 3. $\Rightarrow X = \bigsqcup_{C \subset X} C$ es una partición de cerrados disjuntos.

Ejemplo:

1. $X_{\text{discreto}} : C(x) = \{x\}$ (puntos abiertos y cerrados)
2. $\mathbb{Q}_u : C(p) = \{p\}$ (todo intervalo de \mathbb{R} tiene racionales)
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)}) : C(t) = \{t\}$ ($\mathbb{R} = (\leftarrow, a) \cup [a, \rightarrow)$ abierto y cerrado)
4. $X = \{0, Y_k, k \geq 1\} : \begin{cases} C(0) = \{0\} \text{ cerrado, no abierto } (\{\frac{1}{k} : k \geq 1\} \text{ no cerr.}) \\ C(\frac{1}{k}) = \{\frac{1}{k}\} \text{ cerrado y abierto.} \end{cases}$

Definición

Un espacio cuyas componentes son los puntos se llama **totalmente desconexo**.

Proposición

Las componentes conexas de $X \times Y$ son los productos de componentes conexas.

Demostración:

$$C \overset{\text{c.c.}}{\subset} \underbrace{X \times Y}_{\xrightarrow{p} X \xrightarrow{q} Y} \Rightarrow p(C) \text{ y } q(C) \text{ conexos en } X \text{ e } Y, \text{ respectivamente, (imagen continua)} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} p(C) \subset E \overset{\text{c.c.}}{\subset} X \\ q(C) \subset F \overset{\text{c.c.}}{\subset} Y \end{cases} \Rightarrow C \subset E \times F \xrightarrow{\text{Max. de } C} C = E \times F.$$

CONEXIÓN LOCAL

Definición

X es **localmente conexo** si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos.

Proposición

X es localmente conexo \Leftrightarrow las componentes conexas de un abierto son abiertas:

$$U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \text{ y } C \overset{\text{c.c.}}{\subset} U \Rightarrow C \overset{\text{ab.}}{\subset} X.$$

Demostración:

$\Rightarrow)$ Si $x \in C \overset{\text{c.c.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow \exists \underbrace{U^x}_{\text{ab. conn.}} \subset U \Rightarrow U^x \subset C \Rightarrow C \overset{\text{ab.}}{\subset} X$. Es decir, U es entorno de todos sus puntos.

$\Leftarrow)$ $\mathcal{B}^x = \{C(x) \overset{\text{c.c.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : x \in U\}$. Con $C(x)$ abierto por ser c.c de abierto.

Enunciado

X es localmente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos.

Ejemplo: (Esencial)

$\{0, \frac{1}{k} : k \geq 1\} = Y \subset \mathbb{R}_u$ no es localmente conexo.

Demostración:

La c.c $(0) = \{0\}$ no es abierto. Directamente:

$$0 \in \underbrace{V}_{\text{ent. de } 0 \in \mathbb{R}} \cap Y \Rightarrow V \supset (0, \varepsilon), \exists 0 < \underbrace{\theta}_{\notin \mathbb{Q}} < \frac{1}{k} < \varepsilon < 1$$
$$\Rightarrow V \cap Y \subset \underbrace{(-, \theta)}_{\ni 0} \cup \underbrace{(\theta, \rightarrow)}_{\ni \frac{1}{k}} \Rightarrow V \cap Y \text{ no conexo..}$$

Enunciado

1. Analizar una sucesión de segmentos que convergen a otro:

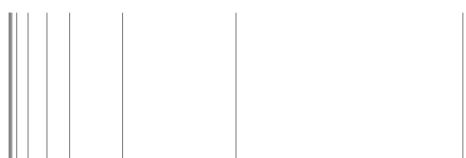


Figura 9.1: Ejemplo

TABLA DE COMPORTAMIENTO

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local	\times	✓	✓	✓
Demostración:	Ejemplo esencial	No banal	Prod. ent. conx.	Suma como sum's

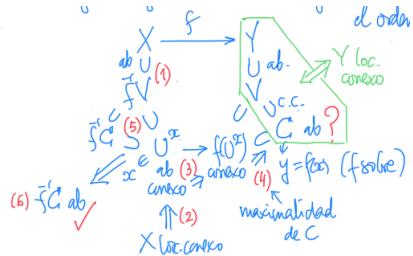
Cuadro 9.1: La tabla nos indica como se conserva la compacidad local en las construcciones que hemos visto. Las sumas y los productos son finitos.

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ identificación con X localmente conexo $\Rightarrow Y$ es localmente conexo.

Demostración:

El diagrama siguiente resume el argumento (si se lee en el orden adecuado).



CONEXIÓN POR CAMINOS

Definición

Un **camino** en un espacio X es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}_u \rightarrow X$. Decimos:

- α va de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, conecta $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$, que son **extremos**.
- La imagen $\alpha[a, b] \subset X$ es la **traza**, conexa por imagen continua.

Proposición (Cambios de parámetros)

$\forall \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ continua $\Rightarrow \beta = \alpha \circ \varphi$ es otro camino con igual traza.

φ es un **cambio de parámetro** cuando es homeomorfismo (creciente o decreciente).

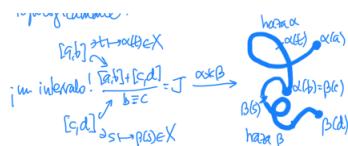


Ejemplo: (Interpolación lineal)

Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow [p, q] : t \mapsto (1 - t)p + tq$ es un camino bien conocido y útil. También sirve para reparametrizar si $[p, q] = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Vemos, por ejemplo, que siempre podemos reducirnos a caminos con dominio $[0, 1]$. Esto será fundamental más adelante.

Proposición (Producto de caminos)

Topológicamente:



(Alternativa: Reparametrizar β con dominio $[b, b + (d - c)]$)

Ejemplo:

Si hacemos el producto de segmentos consecutivos obtenemos **caminos poligonales**.

CONEXIÓN POR CAMINOS

Definición

Un espacio X es **conexo por caminos** si sus puntos se pueden conectar con un camino:

$$\forall x \forall y \in X, \exists \sigma_y : [a, b] \rightarrow X, \sigma_y(a) = x \wedge \sigma_y(b) = y$$

Observación:

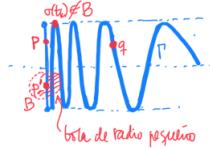
En particular, $X = \bigcup_{y \in X} \sigma_y[a, b]$ es **conexo** (pivote, $\alpha_y(a) = x, \forall y$)

Ejemplo:

1. La mayor parte de los conexos conocidos son conexos por caminos:
 - Los abiertos conexos (top. usual) son conexos por poligonales, que son caminos.
 - Los conjuntos convexos y los estrellados también.
2. El seno del topólogo Γ es la traza de $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $t > 0$, es conexo y lo es su adherencia $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$, $J = \{0\} \times [0, 1]$. Pero $\bar{\Gamma}$ no es conexo por caminos.

Demostración:

No existen caminos $\sigma : [a, b] \rightarrow \bar{\Gamma}$ $\begin{cases} \sigma(a) = p \in J \\ \sigma(b) = q \in \Gamma \end{cases}$:



- a) $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, α, β continuas. $\exists a' = \max\{t \in [a, b] : \alpha(t) = 0\} \Rightarrow (\alpha \text{ continua en un compacto}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(a') = 0, \sigma(a') = p' \in J \\ t > a' : \alpha(t) > 0 \Rightarrow \sigma(t) \in \Gamma \Rightarrow \beta(t) = \sin \frac{1}{\alpha(t)} \end{cases}$
- b) Supongamos $p' = \sigma(a') \neq (0, 1)$ (punto) y $\exists \delta : B(p', \delta) \cap \{y = 1\} = \emptyset$. σ continua $\Rightarrow \exists \sigma[a', \varepsilon] \subset B(p', \delta) \Rightarrow \sigma[a', \varepsilon] \cap \{y = 1\} = \emptyset$. (si $p' = (0, 1)$ evitaríamos $\{y = -1\}$)
- c) α continua $\Rightarrow \alpha[a', \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ conexo compacto = intervalo: $\alpha[a', \varepsilon] = [0, c]$.
- d) La oscilación de $\sin \frac{1}{x}$ lleva σ a $\{y = 1\}$, fuera de la bola elegida:

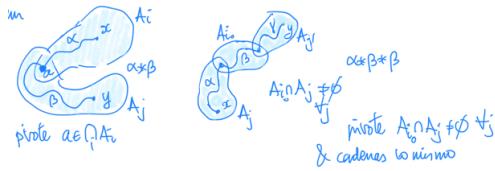
$$\begin{aligned} k \gg 0 \Rightarrow \frac{2}{(1 + 4k)\pi} &\in [0, c] = \alpha[a', \varepsilon] \Rightarrow \exists a' < t_k < \varepsilon : \alpha(t_k) = \frac{2}{(1 + 4k)\pi} \\ \Rightarrow \sigma(t_k) &= \left(\alpha(t_k), \sin \left(\frac{1}{\alpha(t_k)} \right) \right) = (x_k, 1) \perp \end{aligned}$$

MANTRAS

Casi todo lo que dijimos sobre la conexión nos vale:

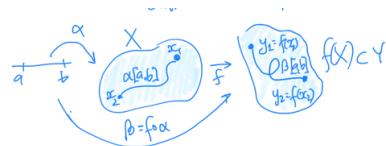
Proposición (Mantra del pivote)

Sea $X = \bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, $\forall A_i$ conexos por caminos $\Rightarrow X$ conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la imagen)

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua con X conexo por caminos $\Rightarrow f(X)$ es conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la adherencia (!NO!))

El seno del topólogo Γ es conexo por caminos: $(a, \sin \frac{1}{a})$ y $(b, \sin \frac{1}{b})$ se conectan por el camino evidente, $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $a \leq t \leq b$. Pero, como hemos visto, la adherencia $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión por caminos	✗	✓	✓	✗

Cuadro 10.1: La tabla nos indica como se conserva la conexión por caminos en las construcciones que hemos visto. Las sumas y los productos son finitos.

Proposición (Productos)

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] \rightarrow X : & \left\{ \begin{array}{l} \sigma(a) = x_1 \\ \sigma(b) = x_2 \end{array} \right. \\ \tau : [a, b] \rightarrow Y : & \left\{ \begin{array}{l} \tau(a) = y_1 \\ \tau(b) = y_2 \end{array} \right. \end{aligned} \Rightarrow \gamma = (\sigma, \tau) : [a, b] \rightarrow X \times Y : \left\{ \begin{array}{l} \gamma(a) = (x_1, y_1) \\ \gamma(b) = (x_2, y_2) \end{array} \right.$$

COMPONENTES CONEXAS POR CAMINOS Y CONEXIÓN LOCAL POR CAMINOS

COMPONENTES CONEXAS POR CAMINOS

Todo análogo a las componentes conexas (casi). Sea X espacio topológico.

Definición

Una *componente conexa por caminos* (*c.c.c*) es un subconjunto conexo por caminos maximal.

Proposición (Descripción)

1. La *c.c.c* de $x \in X$ es $\bigcup_{x \in A} A$ con A conexa por caminos.
2. Las *c.c.c* forman una partición de X , más fina que la de las c.c.

Demostración:

Porque conexo por caminos \Rightarrow conexo, pero no a la inversa.

¡OJO! Las *c.c.c* no son necesariamente cerradas.

Como contraejemplo de ambas cosas dichas tenemos la adherencia del seno topólogo.

Ejemplo:

Γ seno del topólogo y $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$ son conexos. Tenemos que $\bar{\Gamma}$ es una c.c, mientras que J y Γ son dos *c.c.c*, una cerrada (J) y la otra no (Γ).

Demostración:

Porque $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos.

CONEXIÓN LOCAL POR CAMINOS

Imitamos sin sorpresa las demostraciones de la conexión local y tenemos:

Definición

X es *localmente conexo por caminos* si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos por caminos.

Proposición

X es localmente conexo por caminos \Leftrightarrow las c.c.c de un abierto son abiertas.

Enunciado

Locamente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos por caminos.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local por caminos	✗	✓	✓	✓

Cuadro 11.1: También vale que las c.c.c del producto son los productos de las c.c.c de los factores.

RELACIONES ENTRE LAS PROPIEDADES DE CONEXIÓN

Lo principal es que:

Proposición

Conexo y localmente conexo por caminos \Rightarrow Conexo por caminos.

Demostración:

- Conexo $\Rightarrow \forall x, y, \exists$ cadenas de x a y .
- Localmente conexo por caminos \Rightarrow cadenas de abiertos conexos por caminos $\xrightarrow{\text{Variante del pivote}}$
Estas cadenas son conexas por caminos.

Por tanto, \exists camino de x a y .

Observación:

Esta es la demostración de que un abierto conexo de \mathbb{R}_u^n lo es por poligonales (se usan cadenas de bolas).

Observación: (Resumen)

Por especificar todas las posibilidades:



Enunciado

Contraejemplos. Los menos fáciles son * y **

Ejemplo:

- Sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{rad}})$. Veamos si es conexo por caminos porque entonces será conexo.

Primero intentamos parametrizar por interpolación: $(1-t)a + tb$. Como $\mathcal{T}_{\text{rad}}|_r = \mathcal{T}_u|_r$ es correcto el camino (r es una recta). En cambio si el camino es una curva cualquiera, la topología relativa es la discreta, es decir, la preimagen de un punto es todo $[0, 1]$ al ser un abierto y cerrado en un conexo. Por tanto, f será constante (contradicción).

En definitiva, tomamos como caminos entre dos puntos, la recta que los une. Con esto, el espacio es conexo por caminos \Rightarrow conexo.

La usual es localmente conexa por caminos. Si en la radial es localmente conexa por caminos tenemos que si $x_0 \in U$ entonces $\exists U \supset V_{ab} = C_{\text{cam.}}$ (x_0) es el candidato a entorno abierto conexo por caminos de la base buscada.

Usaremos $V = \{x \in U : \exists P \supset U : x_0 \rightarrow x\}$ con P poligonal que será conexo por caminos radiales. Veamos que es abierto (radial).

Esto quiere decir que $\forall x \in V$ se cumple “la condición radial”. $\exists \underbrace{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)}_{\ni y} \subset U \cap L$.

Formamos $P_y = P_x \cup [x, y] \subset U \Rightarrow (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V \cap L$.

- Veamos ahora la compacidad tenemos que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_r \Rightarrow$ si K compacto en la radial \Rightarrow también lo será en la usual. Por tanto, al no ser \mathbb{R}^2 con la usual compacto, tampoco lo será con la radial.

En cambio como con la usual, \mathbb{R}^2 sí es Lindelöf no podemos decidir directamente si con la radial lo es o no. Pero no es así porque las curvas son cerradas pero su topología relativa es la discreta y, por tanto, no son Lindelöf. Como se hereda, la radial no puede ser Lindelöf.

- Veamos la compacidad local. No lo es.

Parte II

Topología algebraica

HOMOTOPÍA

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Definición

Una **homotopía** es una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$.

Observación:

1. $H_s : Y \rightarrow X : y \mapsto H(y, s)$, $H \equiv \{H_s : 0 \leq s \leq 1\}$ familia uniparamétrica de aplicaciones.
2. Siendo $f = H_0$ y $g = H_1$:

$$\begin{cases} H_s : f \simeq g, \text{ homotopía entre } f \text{ y } g \\ H \text{ deformación continua de } f \text{ a } g \end{cases}$$

Con esto, el problema que deseamos resolver es ver cuándo dos aplicaciones son **homótopas**:

$$f \simeq g$$

3. $f \simeq g$ relación de equivalencia:

- $f \simeq f$ vía $H_s \equiv f$.
- $H_s : f \simeq g \Rightarrow H_{1-s} : g \simeq f$.
- $\begin{cases} F_s : f \simeq g \\ G_s : g \simeq h \end{cases} \Rightarrow H_s = \begin{cases} F_{2s}, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G_{2s-1}, & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} : f \simeq h$

Demostración:

Continuidad: $\begin{cases} F_{2(1/2)} = F_1 = g \\ G_{2(1/2)-1} = G_0 = g \end{cases}$. En el resto de puntos la continuidad se da por serlo F y G .

Como notación tenemos que $H_s = F_s * H_s$.

Habitualmente tomamos como hipótesis que el espacio sea conexo por caminos y conexo local por caminos.

Proposición

X conexo por caminos, $f, g : Y \rightarrow X$ constantes $\Rightarrow f \simeq g$.

Demostración:

Por hipótesis tenemos que $f \equiv x_0$ y $g \equiv x_1$. Entonces, como $\exists \sigma : [0, 1] \rightarrow X$, $\sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1 \Rightarrow H_s \equiv \sigma(s) : \begin{cases} H_0 \equiv \sigma(0) = x_0 \equiv f \\ H_1 \equiv \sigma(1) = x_1 \equiv g \end{cases}$

Definición

$f : Y \rightarrow X$ es **nulhomótopa** si $f \simeq \text{constante}$, **esencial** en caso contrario.

Teorema (Problema esencial. Fibración de Hopf)

(1932) $\exists f : S^3 \rightarrow S^2$ esencial con $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ y $S^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$(z, z') \mapsto (\|z\|^2 - \|z'\|^2, 2zz')$$

Este ejemplo es importante porque demuestra que no todas las aplicaciones son nulhomótopas.

CONCEPTO RELATIVO

Definición

$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ es una **homotopía relativa a A** si $H_s(a) = H_0(a)$, $\forall a \in A$ y $\forall s \in [0, 1]$.

Proposición

H relativa a A , $f = H_0$, $g = H_1 \Rightarrow f|_A = g|_A$. Notación: $H_s = f \xrightarrow{A} g$ (Relación de equivalencia).

Ejemplo: (Fundamentales. Interpolación)

1. $f, g : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s = (1-s)f + sg : f \simeq g$.

Demostración:

Pues por convexidad $H_s(y) \in \underbrace{[f(y), g(y)]}_{\text{cond. crucial!}} \subset X$.

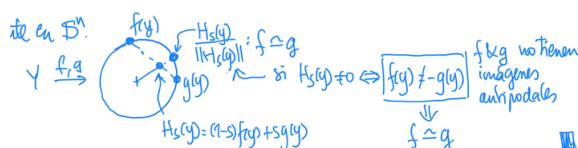
$f(a) = g(a) \Rightarrow H_s(a) = (1-s)f(a) + sg(a) = f(a) = g(a) \Rightarrow H_s$ es relativa a $A = \{f = g\}$.

Con esto vemos que dos funciones continuas en un convexo con homótopas.

2. $f : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado respecto de x_0 , $[x, x_0] \subset X$, $\forall x \in X \Rightarrow H_s = (1-s)f + sx_0 : f \simeq x_0$ (relativa a $A = f^{-1}(x_0)$).

De nuevo, por transitividad, dos funciones continuas en un estrellado son homótopas.

3. Variante en S^n :



CONTRACTIBILIDAD

Definición

X es **contrátil** si $\text{id} : X \rightarrow X$ es nulhomótopa: $\exists H_s : \text{id} \simeq x_0$.

Y fuertemente contrátil si $\exists H_s : \text{id} \xrightarrow{x_0} x_0$ (homótopa relativa a $\{x_0\}$)

Observación:

Los ejemplos son difíciles, pero son cosas distintas.

Ejemplo:

$X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado respecto $x_0 \Rightarrow$ fuertemente contrátil

Demostración:

$$H_s = (1 - s) \text{id} + sx_0.$$

Proposición

1. Si X es contrátil \Rightarrow es conexo por caminos.
2. Si X es contrátil \Rightarrow $\begin{cases} \forall f : Y \rightarrow X \text{ nulhomótopa}. \\ \forall g : X \rightarrow Z \text{ nulhomótopa}. \end{cases}$

Demostración:

$$1. H_s : \text{id} \simeq x_0 \Rightarrow S \mapsto H_s(x_0) \text{ camino de } x \text{ a } x_0.$$

$$2. H_s : \text{id} \simeq x_0 \begin{cases} H_s \circ f : f \simeq x_0 \\ g \circ H_s : g \simeq g(x_0) \end{cases}$$

Observación:

Pocos espacios son contráctiles, pero no es inmediato verlo.

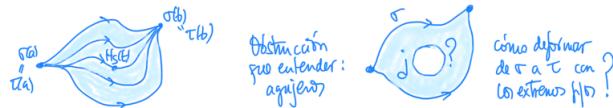
HOMOTOPÍA DE CAMINOS

EL CONCEPTO BÁSICO

Definición

Sean $\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$, decimos que son homótopos **con extremos fijos** si $\exists H_s : \sigma \simeq \tau$ relativa a $\{a, b\}$:

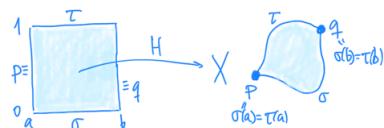
$$\begin{cases} H_s(a) = \sigma(a) = \tau(a) \\ H_s(b) = \sigma(b) = \tau(b) \end{cases} \quad \forall s \in [0, 1]$$



Observación:

Es un problema de extensión:

Definir H en el cuadrado $[a, b] \times [0, 1]$ con valor determinado en sus bordes.



SIMPLE-CONEXIÓN

Definición

X es **simplemente conexo** si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\forall \sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$ con iguales extremos son homótopos con extremos fijos.
2. $\forall f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$ se extiende al disco interior de la circunferencia:

$$\exists \bar{f} : D^2 \rightarrow X$$

Demostración:

Colapsando dos lados de un cuadrado $\xrightarrow{\pi}$ disco con dos puntos en la circunferencia unidos por dos ceros α, β .

π es un cociente del cuadrado que hemos visto antes a \mathbb{S}^1 .

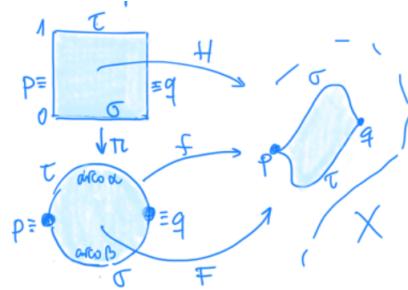
1. \Rightarrow 2.)

$$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X \Rightarrow f \circ \pi \begin{cases} \alpha \rightarrow \text{camino } \sigma \\ \beta \rightarrow \text{camino } \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists H \text{ con extremos fijos} \Rightarrow \text{compatible con } \pi$$

$$\Rightarrow H \text{ pasa al cociente por } \pi, \text{ dando } \bar{f}.$$

2. \Rightarrow 1.) Dos caminos σ, τ con extremos p, q definen f en la circunferencia y su extensión \bar{f} al disco define la homotopía $H = \bar{f} \circ \pi$.



Ejemplo:

Los conjuntos convexos son simplemente conexos. ¿Los estrellados?

ESFERAS \mathbb{S}^N , $N \geq 2$

Proposición

$\mathbb{S}^n : \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es simplemente conexo ($n \geq 2$).

Demostración:

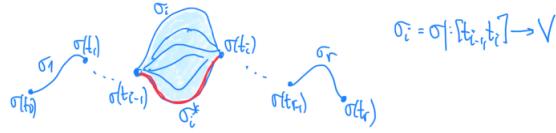
$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$, $\sigma(a) = \tau(a) = p$, $\sigma(b) = \tau(b) = q$.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c, -c \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, 1\} \wedge U = \mathbb{S}^n \setminus \{c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{proyección estéreo.}$$

1. $[a, b] \subset \sigma^{-1}U \cup \tau^{-1}V \xrightarrow{\text{comp.}} \exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \sigma[t_{i-1}, t_i] \subset \begin{cases} U, & \text{ó} \\ V & \end{cases}$ donde $\sigma[t_{i-1}, t_i]$ es la traza de $\sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}$.

2. Si dos consecutivos están en el mismo U ó V , eliminamos la juntura común \Rightarrow al atravesar una juntura t_k cambiamos de U a V ó viceversa, en particular, $x_k = \sigma(t_k) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$, que es conexo por caminos, o bien, nos quedamos sin junturas y $\sigma[a, b] \subset U$ ó V .

3. Consideramos los trozos en V (incluido que $\sigma [a, b] \subset V$ porque no hay ya junturas)



(*)

$$\begin{aligned} \sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i) &\in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\} \text{ conexo por caminos} \\ \Rightarrow \exists \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] &\rightarrow U \cap V \subset V \text{ mismos extremos que } \sigma_i. \end{aligned}$$

(***) $V \approx \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^*$ en V con extremos fijos. ¡Ojo! $\boxed{\sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U}$.

4. Pegando a trozos homotopías en \mathbb{S}^n :

$$\begin{cases} \sigma[t_{i_1}, t_i] \subset U \Rightarrow H_s^i \equiv \sigma_i = \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U \subset \mathbb{S}^n \\ \sigma[t_{i_1}, t_i] \subset V \xrightarrow{3} H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow V \subset \mathbb{S}^n \end{cases} \Rightarrow \sigma \simeq \sigma^*$$

Homótopos en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\sigma^*[a, b] \subset U$.

5. Igual, $\exists H_s : \tau \simeq \tau^*$ homotopía en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\tau^*[a, b] \subset U$.

En conclusión: $\sigma^* \simeq \tau^*$ en U ($\approx \mathbb{R}^n$) con extremos fijos $\Rightarrow \sigma \simeq \sigma^* \simeq \tau^* \simeq \tau$ con extremos fijos.

EL GRUPO FUNDAMENTAL

OPERACIONES CON CAMINOS

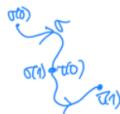
Sea X es conexo por caminos y localmente conexo por caminos.

Definición (Producto de caminos)

Sean $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(1) = \tau(0) \Rightarrow$

$$(\sigma * \tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Que consiste en reescalar $\begin{cases} \sigma \text{ de } [0, 1] \text{ a } [0, \frac{1}{2}] \\ \tau \text{ de } [0, 1] \text{ a } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$



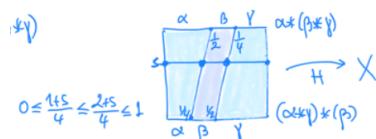
Las propiedades algebraicas son todas salvo *homotopía con extremos fijos*¹.

Proposición

Propiedades de grupo:

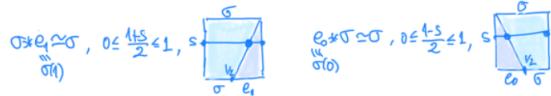
1. Asociativa: $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.

En cada altura s se reescalán los caminos con junturas.



2. Neutral:

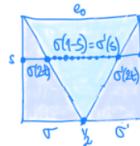
¹Es decir, la asociatividad, el elemento neutro y el inverso no tienen porque darse en el sentido tradicional de igualdad sino por homotopías.



3. Inverso: $\sigma'(t) = \sigma(1-t) \Rightarrow \sigma * \sigma' \simeq e_0$ y $\sigma'' = \sigma \Rightarrow \sigma' * \sigma \simeq e_1$.

No se reescalas: $0 \leq \frac{1-s}{2} \leq \frac{1+s}{2} \leq 1$.

Las junturas dicen dónde parar σ y empezar σ' en cada altura:



4. Invarianza por homotopía:

$$\begin{cases} F_s : \sigma_1 \simeq \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \simeq \tau_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Trans.}} F_s * G_s : \sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2$$

$$F_s * G_s(t) = \begin{cases} F_s(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G_s(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

EL GRUPO FUNDAMENTAL

Sea X conexo por caminos, $x_0 \in X$ punto base fijo.

Definición

1. **Lazo de base x_0** :

$$\sigma : [0, 1] \rightarrow X, \underbrace{\sigma(0) = \sigma(1)}_{\text{lazo}} = x_0, \text{ punto fijo.}$$

2. Sean $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ lazos de base x_0 :

- **Homotopía de lazos**: $H_s : \sigma \simeq \tau$ tal que $H_s(0) = H_s(1), \forall s$.
- **Homotopía de lazos con punto base fijo**: $H_s = \sigma \xrightarrow{x_0} \tau$ tal que $H_s(0) = H_s(1) = x_0, \forall s$. (Relativa a $\{0, 1\}$)

Definición (Grupo fundamental)

Llamamos **grupo fundamental de X con base x_0** a:

$$\boxed{\pi(X, x_0) = \{\text{lazos de base } x_0\} / \underset{x_0}{\sim}}$$

("Lazos" / "Homotopía")

Observación:

$[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$ define bien un grupo por 14.1.

Ejemplo:

1. X simplemente conexo $\Leftrightarrow \pi(X, x_0) = \{1\}, \forall x_0$. [\Leftarrow] ejercicio]
2. $\pi(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}, n \geq 2$.

Demostración:

Por 1) y ser \mathbb{S}^k , $n \geq 2$ simplemente conexa.

3. $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$.
4. $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$, $\pi(\text{banda Möbius}) = \mathbb{Z}$.
5. $\pi(\infty, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ que es una lemniscata y un **grupo libre no conmutativo**.

El cálculo de grupos fundamentales no es una tarea trivial, pero muy útil.

El punto base no es muy importante.

Proposición (Isomorfismo por punto base)

Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de $\alpha(0) = x_0$ a $\alpha(1) = x_1$. La **conjugación por α** :

$$\begin{aligned} \pi(X, x_0) &\rightarrow \pi(X, x_1) \\ [\sigma] &\mapsto [\alpha' * \sigma * \alpha]. \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos (por homotopía).



Demostración:

Fácil con las propiedades de 14.1.

FUNTORIALIDAD

Definición

Definimos h_* como:

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow Y \text{ homeo}, h(x_0) = y_0 \Rightarrow \\ h_* : \pi(X, x_0) &\rightarrow \pi(Y, y_0) \text{ iso.} \\ [\sigma] &\mapsto [h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

Es fácil y útil: espacios homeomorfos deben tener grupos fundamentales isomorfos.

Por ejemplo, \mathbb{S}^2 y $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ no son homeomorfos. Pero la construcción es mucho más general.

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{espacio con} \} & \xrightarrow{\pi} & \{ \text{grupos} \} \\ \{ \text{punto base} \} & & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{\quad} & \pi(X, x_0) \\ \text{cont. } f \downarrow & & \downarrow \text{is.} \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{\quad} & \pi(Y, y_0) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{bien definido} \\ H : \Omega \xrightarrow{\cong} \Omega \\ f \circ H = f \circ \sigma \cong f \circ \sigma \\ f = (f \circ T) = f \circ O * (f \circ T) \end{array}$$

Definición (Functorialidad)

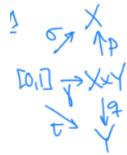
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \text{ y } (id_X)_* = id_{\pi(X, x_0)}.$$

Ejemplo:

Si $h : X \rightarrow Y$, $x_0 \mapsto y_0$ es homeomorfismo $\Rightarrow (h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$. [Más preciso que h_* isomorfismo]

Proposición (Producto de espacios)

Tenemos que si:



entonces:

$$\begin{aligned}\pi(X \times Y, (x_0, y_0)) &\xrightarrow{p^*, q^*} \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \\ [\gamma] &= ([\sigma], [\tau]) \mapsto ([\sigma], [\tau]).\end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración:

Sean:

$$\left. \begin{array}{l} F_s : \sigma_1 \xrightarrow{x_0} \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \xrightarrow{y_0} \tau_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (F_s, G_s) : (\sigma_1, \tau_1) = \gamma_1 \mapsto \gamma_2 = (\sigma_2, \tau_2) \text{ y nada más...}$$

Ejemplo:

1. $\pi(\mathbb{S} \times \mathbb{S}) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}^2$.
2. $\pi(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi([0, 1])$.

RETRACTOS

RETRACTOS Y DEFORMACIONES

Definición

Una aplicación $\rho : X \rightarrow A \subset X$ es:

1. Un **retracto** si $\rho|_A = id_A$ (y $A = \rho(A)$ es un retracto de X)
 2. Una **deformación (fuerte)** si: $\exists H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho$, homotopía relativa a A .
-

Ejemplo:

1. \forall cte : $X \rightarrow \{x_0\} \subset X$ es retracto.
2. El retracto radial $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto x/\|x\|$ es una deformación. $H_s(x) = (1-s)x + s\rho(x)$.

$$3. \left. \begin{array}{l} \rho : X \rightarrow A \subset X \subset \mathbb{R}^n \text{ retracto} \\ [x, \rho(x)] \subset X, \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \text{ deformación: } H_s = (1-s)id_X + s\rho \text{ (interpolación).}$$

4. Cilindros:

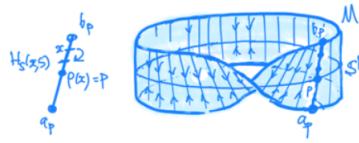
$$\begin{aligned} \rho : X \times [0, 1] &\rightarrow X \times \{0\} \\ (x, t) &\mapsto (x, 0) = \rho(x, t). \end{aligned}$$

con ρ deformación sobre X : $H_s(x, t) = \begin{pmatrix} x, & \underbrace{(1-s)t}_{(1-s)t+s \cdot 0} \\ & \end{pmatrix}$.



5. Banda de Möbius: $\mathbb{S}^1 \subset M = \bigcup_{p \in \mathbb{S}^1} [a_p, b_p]$.

Deformación sobre \mathbb{S}^1 : $\begin{cases} \rho : M \rightarrow \mathbb{S}^1 : x \mapsto \rho(x) \\ H_s(x, s) = (1-s)x + s\rho(x) \end{cases}$



Proposición

Sea $\rho : X \rightarrow A \subset X$, $a_0 \in A$; $\rho_* : \pi(X, a_0) \rightarrow \pi(A, a_0)$.

1. ρ retracto $\Rightarrow \rho_*$ suprayectivo.
2. ρ deformación $\Rightarrow \rho_*$ isomorfismo.

Demostración:

1. ρ retracto:

$$A \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_A \end{array}} X \xrightarrow{\rho} A \Rightarrow \pi(A, a_0) \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_{\pi(A, a_0)} \end{array}} \pi(X, a_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \text{ inyectiva} \\ \rho_* \text{ sobre} \end{array}}$$

2. ρ deformación:

$$H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho \Rightarrow j_* \text{ sobre.} : \left\{ \begin{array}{l} [\sigma] \in \pi(X, a_0) \Rightarrow H_s \circ \sigma : \sigma \xrightarrow{A} \rho \circ \sigma = j \circ \rho \circ \sigma \\ \Rightarrow [\sigma] = [j \circ \rho \circ \sigma] = j_* [\rho \circ \sigma] \end{array} \right.$$

y por ser j_* sobre $\Rightarrow \rho_*$ inyectiva.

Ejemplo:

$$1. \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \pi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \{1\}, n \geq 2 \\ \mathbb{Z}, n = 1 \end{cases}$$

$$2. \pi(\text{cilindro}) = \pi(\text{banda de Möbius}) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Demostración:

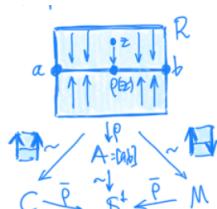
Veremos \mathbb{S}^1 ...

COCIENTES

Muchos espacios son cocientes y las deformaciones se pueden hacer compatibles para facilitar las construcciones.

Ejemplo:

Cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y banda de Möbius M .



Tenemos $C, M = R/\sim$ identificaciones adecuadas de lados opuestos y, por otro lado, la deformación de R sobre $A = [a, b]$, $H_s(z) = (1 - s)z + s\rho(z) \xrightarrow{(*)}$ deformación de R/\sim sobre $[a, b]/\sim = \mathbb{S}^1$.

Es decir, \mathbb{S}^1 es deformación de C y de M , luego todos tienen $\pi = \mathbb{Z}$.

($*$): porque p y H_s son compatibles con las relaciones: $z \sim z' \Rightarrow H_s(z) \simeq H_s(z')$, luego inducen aplicaciones continuas \bar{p} y $\bar{H}_s : R/\sim \rightarrow A/\sim$.

Normalmente se hacen las deformaciones pensando en que cumplan $H_s(z) \simeq H_s(z')$.

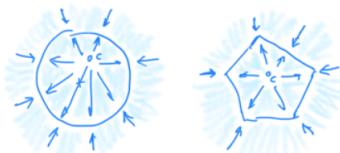
AGUJEROS

Conviene insistir en un ejemplo importante de deformación y sus variantes.

$$1. \rho : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{esp. con "agujero"}} \rightarrow \mathbb{S}^n \text{ deformación} \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0) =$$

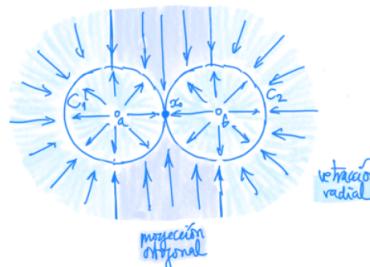
$$= \begin{cases} \mathbb{Z}, n = 1 (\text{se verá...}) \\ \{1\}, n \geq 2 (\mathbb{S}^n, n \geq 2 \text{ simple-conexa}) \end{cases}$$

2. Dibujos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$ de retracciones sobre curvas “alrededor” del “agujero” c :



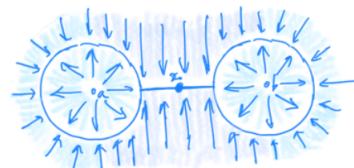
3. Dos agujeros $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$.

Se trocea el espacio en cerrados, en cada uno de los cuáles se hace una deformación, de manera que en las fronteras coincidan. En el dibujo se sombrean diferentes las zonas en las que se usan deformaciones diferentes. Las deformaciones más cómodas son las interpolaciones de id y una retracción geométrica.



En este caso, $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow \infty$? es deformación y $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (grupo fundamental de una lemniscata).

4. Otra variante:



$\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow dibujo$ deformación dice que:

$$\pi(dibujo) = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\underbrace{\infty?}_{=\mathbb{Z} * \mathbb{Z}})$$

que es igual al grupo fundamental, pero no homeomorfismo.

5. Aún más ejemplos así (ya sin especificar el punto base):

$$\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Demostración: (creo)

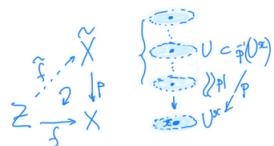
Cualesquiera tres puntos en \mathbb{R}^2 se pueden recolocar con homeomorfismos para hacer, a partir de ellos, retracciones sobre las curvas dibujadas, no homeomorfas. (?)

Ejercicio: Deformar $\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}$ sobre una circunferencia, para obtener $\pi(\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.

RECUBRIDORES

EL PROBLEMA DE ELEVACIÓN

Fijada p , qué f 's tienen elevación \tilde{f} . i.e: $p \circ \tilde{f} = f$



Definición

p es un **recubridor** si $\forall x \in X$, $\exists U^x$, abierto **trivializante**: $p^{-1}(U^x) = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda}$ y $\forall \lambda, p|: U_{\lambda} \rightarrow U^x$ homeomorfismo.

Es un tipo especial de homeomorfismo local sobrejetivo y, por eso, identificación abierta.

Ejemplo: (Importantes!)

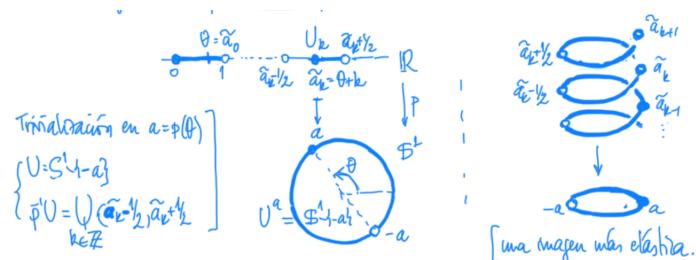
1. La identificación antipodal, $\pi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{RP}^n$,

$$\forall x \in \mathbb{RP}^n \quad \underbrace{\exists U^x}_{\text{trivializante}} = \mathbb{RP}^n \setminus \underbrace{H}_{\text{hiperplano}} \quad \wedge \quad \pi^{-1}(U^x) = \mathbb{S}^n \setminus \pi^{-1}H = S_+ \sqcup S_-$$

hemisferios abiertos.

Ya se ilustró convenientemente en su lección. ¿Qué se tiene para $n = 1$?

2. La identificación exponencial, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1: \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$.



UNICIDAD DE ELEVACIÓN

Proposición

Si Z es conexo, dos elevaciones que coinciden en algún puntos son iguales.

Demostración:

$$A = \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}, p \circ \tilde{f}_1 = f.$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{f(z)} \in U^x, p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización)} \Rightarrow \tilde{f}_i(z) \in p^{-1}U^x \wedge \exists! \lambda_i : \tilde{f}_i(z) \in U_{\lambda_i} \\ \Rightarrow \forall \xi \in W^z = \tilde{f}_1^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_{\lambda_2}) : \hat{f}_1(\xi) = \hat{f}_2(\xi) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 (**). \end{aligned}$$

(*) debido a:

- \Rightarrow) U_{λ} 's disjuntos.
- \Leftarrow) $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$ y $p|_{U_{\lambda}}$ 1-1.

Por tanto,

- Abierto:

$$\begin{aligned} W^z \subset A \text{ si } z \in A : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \wedge \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} = U_{\lambda_2} \xrightarrow[p|]{\text{iny.}} \underbrace{U^x}_{\text{iny.}} \\ \Rightarrow \forall \xi \in W^z : \tilde{f}_1(\xi), \tilde{f}_2(\xi) \mapsto f(z) \Rightarrow \tilde{f}_1(\xi) = \tilde{f}_2(\xi). \end{aligned}$$

- Cerrado:

$$\begin{aligned} W^z \subset Z \setminus A \text{ si } z \notin A : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \cap \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset \\ \Rightarrow \forall \xi \in W^z : \tilde{f}_1(\xi) \neq \tilde{f}_2(\xi). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\exists \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \Rightarrow \emptyset \neq A \underset{\text{cerr.}}{\subset} Z \text{ conx.} \Rightarrow A = Z \wedge \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$$

LEMA DE ELEVACIÓN

Proposición

Tenemos que:

$$\begin{cases} f = H : Y \times [0, 1] \rightarrow X \text{ (homotopía)} \\ \exists \tilde{H}_0 \text{ elevación de } H_0 : Y \rightarrow X \end{cases} \Rightarrow \exists \tilde{H} \text{ elevación, } (\tilde{H})_0 = \tilde{H}_0$$

Demostración:

1. Elevación semilocal: $\forall y \in Y, \tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ elevación de $H|_{V^y \times [0, 1]}$.

$$\begin{aligned}
a) \quad & \{y\} \times [0, 1] \subset \bigcup_x H^{-1}(U^x), \quad p^{-1}U^x = \bigsqcup_\lambda U_\lambda \text{ (trivialización en } x) \Rightarrow \\
& \xrightarrow{\text{comp.}} \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \{y\} \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\
& \xrightarrow{\text{comp.}} \forall i, \exists V_i^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\
& \Rightarrow \exists V^y = V_1^y \cap \dots \cap V_r^y : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \stackrel{(*)}{\subset} H^{-1}(U^{x_i}).
\end{aligned}$$

b) Inducción, $i > 0 : \exists \tilde{H}_0 : V^y \times \{t_0\} \rightarrow \tilde{X}$ por hipótesis.

$$\begin{aligned}
& \underline{i-1 \rightarrow i} : \exists H_{i-1}^y \text{ en } V^y \times [t_0, t_{i-1}] \Rightarrow \text{se puede extender a } V^y \times [t_{i-1}, t_i] \\
& (*) \Rightarrow \begin{cases} H(y, t_{i-1}) \in U^{x_i} \xrightarrow{\exists \lambda} \tilde{H}_{i-1}^y(y, t_{i-1}) \in U_\lambda \xrightarrow{\text{red. } V^y} \\ \hat{H}_{i-1}^y(V^y \times (t_{i-1})) \subset U_\lambda \rightarrow U^{x_i} \\ \exists (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U_\lambda \text{ elevación (de } H) \end{cases} \\
& \Rightarrow p \circ \tilde{H}_{i-1}^y = p \circ [(p|_{U_\lambda}^{-1} \circ H)] : V^y \times \{t_{i-1}\} \rightarrow U^{x_i} \\
& \xrightarrow{p|_{U_\lambda} \text{ iny.}} \tilde{H}_{i-1}^y = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ H \text{ en } V^y \times \{t_{i-1}\} \\
& \Rightarrow (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H \text{ extiende } \tilde{H}_{i-1}^y \text{ a } V^y \times [t_{i-1}, t_i].
\end{aligned}$$

2. Elevación global. Las locales $\{\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}\}_{y \in Y}$ encolan bien, pues coinciden en las intersecciones: $\forall y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$:

Observación:

1. La elevación de una aplicación $Y \rightarrow X$ sólo depende de su clase de homotopía.
2. Todo camino $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ tiene una única elevación $\tilde{\sigma}$ con origen $\tilde{\sigma}(0) \in p^{-1}(\sigma(0))$.

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \tilde{H}^{y_1}(y, \bullet) \\ \tilde{H}^{y_2}(y, \bullet) \end{array} \right\} \text{ elevan } H(y, \bullet) : \{y\} \times [0, 1] \\ \tilde{H}^{y_1}(y, 0) = \tilde{H}_0(y) = \tilde{H}^{y_2}(y, 0) \quad 1^{\text{er}} \text{ paso ind.} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Uni. elevación.}} \tilde{H}^{y_1}(y, t) = \tilde{H}^{y_2}(y, t), \forall z$$

CÁLCULOS MEDIANTE RECURRIDORES

Hemos visto ya que:

- $\pi(\text{estrellado}) = \{1\}$, $\pi(\mathbb{S}^n) = \{1\}$, $n \geq 2 \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \{1\}$.
- $\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$ (no demostrado)
- $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ (no demostrado).
 - $\pi(\text{toro}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\pi(\text{cilindro}) = \mathbb{Z}$.
 - $\pi(\text{banda de Möbius}) = \mathbb{Z}$, $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.

Ahora toca demostrar $\pi(\mathbb{P}^n)$ y $\pi(\mathbb{S}^1)$.

ESPACIOS PROYECTIVOS REALES

Teorema

$$\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$$

Demostración:

Usamos el recubridor antipodal $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n : \tilde{x}, -\tilde{x} \mapsto x = [\tilde{x}] = [-\tilde{x}]$. Punto base en $\mathbb{P}^n : x_0 = (0 : \dots : 1)$; $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, $\tilde{x}_0 = (0, \dots, 1)$. Ahora, por el lema de elevación:

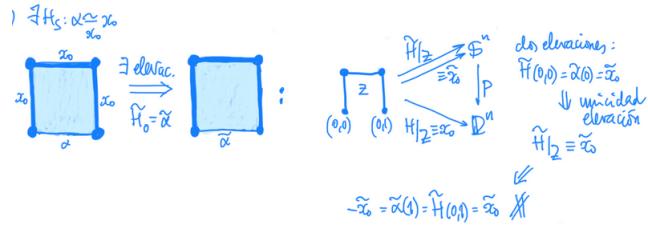
$$\Rightarrow \exists! \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, p\tilde{\sigma} = \sigma, \tilde{\sigma} = \tilde{x}_0 \wedge \tilde{\sigma}(1) \in p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0\}$$

No veces? lazo.

$$1. \tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{x_0} \tilde{x}_0 \Rightarrow \exists p \circ \tilde{H}_s : \sigma \xrightarrow{x_0} x_0 \Rightarrow [\sigma] = 1 \in \pi(\mathbb{P}^n, x_0).$$

$$2. \tilde{\sigma}(1) = -\tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0} \tilde{\alpha} = (0, \dots, 0, \sin \pi t, \cos \pi t) \Rightarrow \exists p \circ H_s : \sigma \xrightarrow{x_0} \alpha = p \circ \tilde{\alpha}, \text{lazo de base } x_0, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

3. Tenemos:



1. 2. 3. $\Rightarrow \pi(\mathbb{P}^n, x_0)$ tiene dos elementos distintos dependiendo del extremo de la elevación \Rightarrow

$$\boxed{\pi(\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2}.$$

LA CIRCUNFERENCIA

Teorema

$$\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Observación:

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^1.$$

Demostración:

Usamos el recubridor exponencial $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$. Punto base $x_0 \in \mathbb{S}^1, \forall \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, s(0) = \sigma(1) = x_0$. Por el lema de elevación:

$$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, p\tilde{\sigma} = \sigma \Rightarrow p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = \sigma(0) = p\tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(0) + k, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema

El n^o de vueltas:

$$\begin{aligned} \# : \pi(\mathbb{S}^1, x_0) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0). \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos bien definido.

Demostración:

1. $k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ no depende de $\tilde{\sigma}$.

$$\begin{aligned} p\tilde{\tau} = \sigma = p\tilde{\sigma} \Rightarrow \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(0) + l \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tau} & \text{elevan } \sigma \\ \tilde{\sigma} + l & \text{coinciden} \\ & \text{en } t = 0 \end{cases} &\xrightarrow{\text{uni. elev.}} \tilde{\tau} = \tilde{\sigma} + l \\ \Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (\tilde{\tau}(1) - l) - (\tilde{\tau}(0) - l) &= \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

2. k no depende de homotopía de lazos, luego $\#$ está bien definido. Sea $H_s : \sigma \simeq \tau$ y $H_s(1) = H_s(0), \forall s$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \simeq \tilde{\tau} \text{ entre elevaciones de } \sigma \wedge \tau \\ &\Rightarrow s \mapsto \underbrace{\tilde{H}_s(1)}_{\xrightarrow{p} H_s(1)} \setminus \underbrace{\tilde{H}_s(0)}_{\xrightarrow{p} H_s(0)} \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{cont.}} \tilde{H}_s(1) - \tilde{H}_s(0) \equiv cte. \\ &\Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \tilde{H}_0(1) - \tilde{H}_0(0) \stackrel{cte.}{=} \tilde{H}_1(1) - \tilde{H}_1(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

3. $\#$ es isomorfismo. Sea $\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ y $\#\tau = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)$ y:

$$\begin{aligned}\tau(0) &= \tau(1) = p\tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) \text{ cond. inicial elev.} \\ &\Rightarrow \exists \tilde{\tau} : \underline{\tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(1)} \Rightarrow \tilde{\sigma} * \tilde{\tau} = \sigma * \tilde{\tau}.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\#\(\sigma * \tau) &= \sigma * \tilde{\tau}(1) - \sigma * \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \\ &= (\tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)) + (\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)) = \#\tau + \#\sigma.\end{aligned}$$

4. $\#$ es suprayectiva:

$$\#\(\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt) = kt|_0^1 = k$$

(Recorrer \mathbb{S}^1 k veces)

5. $\#$ es 1-1:

$$0 = \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma(\tilde{1}) = \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{cases} H_s(0) = p\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0) = \sigma(0) = x_0 \\ H_s(1) = p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = x_0 \end{cases} \\ \underbrace{p((1-s)\tilde{\sigma}(t) + s\tilde{\sigma}(0))}_{H_s(t)} : \sigma \xrightarrow[\substack{(*) \\ (*)}]{} x_0 \end{array} \right\} (*)$$

$[\Rightarrow (\sigma) = 1 \in \pi(\mathbb{S}^1, x_0)]$

APLICACIONES EN DIMENSIÓN 2

Veamos tres teoremas importantes que se pueden demostrar en dimensión 2 con lo que ya hemos visto del grupo fundamental.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Teorema (Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ tiene raíces complejas.

Demostración:

Sea $P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + \overbrace{a_d}^{\neq 0}$ (mónico después de dividir por el cof. director)

1. Tendremos:

$$P_s(z) = z^d + s a_1 z^{d-1} + \dots + s a_d = 0 \xrightarrow{0 \leq s \leq 1} |z| < 1 + |a_1| + \dots + |a_d| = r$$

$$P_s \neq 0 \xrightarrow{z \neq 0} \text{entre } z^{d-1} : -z = s \left(a_1 + \dots + s \frac{a_d}{z^{d-1}} \right) \Rightarrow |z| \leq \begin{cases} 1, & |z| \leq 1 \\ |a_1| + \dots + |a_d|, & |z| \geq 1 \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} 2. \ z(t) = r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \Rightarrow |z(t)| = r \Rightarrow \exists H_s(t) = \underbrace{\frac{P_s(z(t))}{|P_s(z(t))|}}_{\neq 0} \text{ por 1.} \\ \Rightarrow (\cos 2\pi dt, \sin 2\pi dt) = \frac{z(t)^d}{|z(t)^d|} = H_0(t) \xrightarrow{\text{lazos: } z(0)=z(1)} H_1(t) \\ = \frac{P(z(t))}{|P(z(t))|} = \sigma(t) \Rightarrow d = \#(\dots) = \#\sigma. \end{aligned}$$

$$3. \ P(z) \neq 0, \forall z \Rightarrow \exists G_s(t) = \frac{P(sz(t))}{|P(sz(t))|} : G_0 \equiv \underbrace{\frac{a_d}{|a_d|}}_{\text{lazos}} \simeq G_1 = \sigma \Rightarrow 0 = \#(\text{cte.}) = \#\sigma.$$

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

Teorema (de no retracto)

\nexists retracto $\rho : \mathbb{D}^2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Demostración:

Tenemos:

$$\exists \rho \Rightarrow \rho_* : \underbrace{\pi(\mathbb{D}^2)}_{\text{convexo}} \xrightarrow{\#_{\mathbb{Z}}} \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1)}_{= \{0\}} \text{ sobre (15.1)}$$

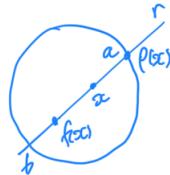
Teorema (del punto fijo)

$\forall f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ continua, $\exists p$ punto fijo $x = f(x)$.

Demostración:

Al absurdo?: $x \neq f(x), \forall x \Rightarrow \exists \rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ retracto.

Construcción de ρ :



La recta ($x \neq f(x)$), $r(x, f(x)) \cap \mathbb{S}^1 = \{a, b\} \Rightarrow \rho(x) = a = x + \lambda(x)(x - f(x))$.

Ejercicio: Ecuación de λ y continuidad.

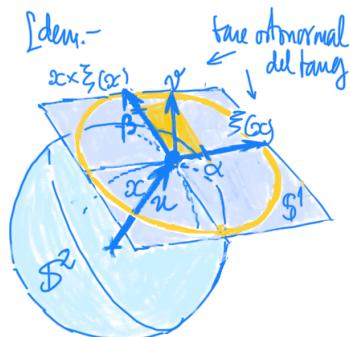
TEOREMA DE LA ESFERA DE BROUWER

Teorema (de la esfera de Brouwer)

$\nexists \eta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo tangente continuo sin ceros. ($\text{Tangente} \equiv \eta(x) \perp x, \forall x \in \mathbb{S}^2$)

Demostración:

Con una ilustración:



Sea $\exists \eta$ sin ceros $\Rightarrow \exists \frac{\eta}{\|\eta\|}$ unitario \Rightarrow podemos suponer $\|\eta\| = 1$:

1. $h : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\approx \text{hom.}} SO(3) = \{\text{matrices } 3 \times 3 \text{ ortogonales, } \det > 0\}$

$$(\alpha, \beta; x) \xmapsto{h} A = (u, v, u \times v) \begin{cases} u = x \\ v = \alpha \eta(x) + \beta(x \times \eta(x)) \end{cases}$$

Con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\|x\| = 1$. Bien definida, continua y biyectiva $\xrightarrow{\text{compacto a } T_2}$ homeo.

2. $h_* : \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)}_{=\mathbb{Z} \times \{1\}} \rightarrow \pi(SO(3))$ isomorfismo $\Rightarrow \pi(SO(3)) = \mathbb{Z}$.

3. Abracadabra?: $SO(3) \xrightarrow{\text{homeo.}} \mathbb{P}^3 \Rightarrow \mathbb{Z} = \pi(SO(3)) = \pi(\mathbb{P}^3)$.

MÁS APLICACIONES POR EL MISMO PRECIO

Unos cuantos teoremas profundos más en dim = 2.

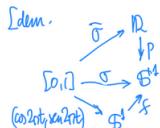
BORSUK-ULAM

Teorema (de Borsuk)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar ($f(-x) = -f(x)$) : $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ impar ($\Rightarrow \# \neq 0$)

Demostración:

Tenemos que:



$\tilde{\sigma}$ elevación de $\sigma(t) = f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. $\begin{cases} x = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & (*) \\ 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$

$f(-x) = -f(x) \xrightarrow{(*)} \sigma(t + \frac{1}{2}) = -\sigma(t) \Rightarrow \tilde{\sigma}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{\sigma}(t) + k_t + \frac{1}{2}$. Como $k_t \equiv cte.$ es continua:

$$\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \left(\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) - \tilde{\sigma}(0) \right) = \underbrace{\left(k_{1/2} + \frac{1}{2} \right)}_{k_0} + \left(k_0 + \frac{1}{2} \right) = 2k_0 + 1$$

Análogamente,

Teorema (de Hirsch)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ par ($f(-x) = f(x)$) : $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ par.

Corolario (Teorema de Borsuk-Ulam)

$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar \Rightarrow esencial.

Demostración:

$\exists H_s : f \simeq cte. \Rightarrow H_s(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : \sigma \simeq x_0 \Rightarrow \#\sigma = 0$, con σ rotación anterior y la homotopía de lazos.

Corolario (2)

$\nexists g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar.

Demostración:

Tenemos:

$$\begin{array}{c} \text{Idem-} \\ \mathbb{S}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1 \\ \downarrow \sigma \quad \downarrow f = g \\ \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\text{base } (1,0,0) \text{ fijo}} (1,0,0) \\ (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{array}$$

■ g impar $\Rightarrow f$ impar $\Rightarrow \#\sigma \neq 0$.

■ \mathbb{S}^2 simple conexo $\exists H_s : (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0) \xrightarrow{\text{base } (1,0,0) \text{ fijo}} (1,0,0)$. Como $f = g \circ \sigma = 0 \Rightarrow$

$$g \circ H_s : f \underbrace{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}_{\sigma} \simeq f(1,0,0) \text{ cte.} \Rightarrow \#\sigma = 0$$

Corolario (3)

$\forall h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists h(x) = h(-x) (\Rightarrow h \text{ no es 1-1})$.

Demostración:

$h(x) \neq h(-x), \forall x \Rightarrow \exists g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{\|h(x) - h(-x)\|} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar.

INVARIANZA DEL DOMINIO

Teorema

Sea $f : U_{ab.} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua y 1-1 $\Rightarrow f(U)$ es abierto.

Demostración:

$\forall a \in U, \exists V^{\text{ab.}} \subset \mathbb{R}^2 : f(a) \in V \subset f(U)$. Por traslaciones: $a = f(a) = 0$. Con esto, $\exists \varepsilon > 0 :$

$$B(0, \varepsilon) \subset B[0, \varepsilon] \subset U; 0 \notin S = S[0, \varepsilon] \xrightarrow{1-1} 0 = f(0) \in f(S) \Rightarrow \exists V = C(0) \overset{\text{c.c.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \setminus f(S)$$

S comp. $\Rightarrow f(S)$ comp. \Rightarrow cerr. en \mathbb{R}^2

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ loc. conx.} \Rightarrow V \underset{\text{conx.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{c. caminos}(*).$$

Este V es la solución: $V \subset f(B) \subset f(U)$.

Al absurdo: $\exists c \in V \setminus f(B) \xrightarrow{(*)} \exists \sigma : [0, 1] \rightarrow V, \sigma(0) = c, \sigma(1) = 0$.

Denotamos,

$$g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto f(\varepsilon x); h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto g(x) - g(-x)$$

y tenemos las homotopías: $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$.

- $\frac{f(\varepsilon sx) - c}{\|\cdot\|} : \frac{-c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g - c}{\|\cdot\|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x) - \sigma(s)}{\|\cdot\|} : \frac{g - c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g}{\|\cdot\|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon sx)}{\|\cdot\|} : \frac{g}{\|\cdot\|} \simeq \frac{h}{\|\cdot\|}$

Con esto, $\frac{h}{\|\cdot\|} \simeq \text{cte.}!$ por Borsuk-Ulam.

Que los denominadores no se anulan es una comprobación rutinaria.

DIVARIANZA DEL BORDE Y DE LA DIMENSIÓN

Teorema

$$S, T \subset \mathbb{R}^2, h : S \xrightarrow{\text{homeo.}} T \Rightarrow h(S \setminus \overset{\circ}{S}) = T \setminus \overset{\circ}{T}.$$

Demostración:

$$h : \overset{\circ}{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ inyectiva} \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \underset{19,2}{\subset} \text{ab.} \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \subset \overset{\circ}{T}. \text{ (el otro} \supset \text{ con } h^{-1})$$

Ejemplo:

$$S = T = \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(x = 0) = (x = 0).$$

Teorema

$$U \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n, V \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^2, h : U \xrightarrow{\text{homeo.}} V \Rightarrow n = 2.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \exists H \subset \mathbb{R}^n & [\text{plano afín interior vacío en } \mathbb{R}^n \text{ salvo si } n = 2] (*) : U \cap H \neq \emptyset \Rightarrow h| : \underbrace{U \cap H}_{\approx \text{ab.}} \xrightarrow{1-1} V \subset \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{19,2} h(U \cap H) \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h \text{ homeo.}} U \cap H = h^{-1}h(U \cap H) \underset{\text{ab.}}{\subset} U \xrightarrow{(*)} n = 2 \end{aligned}$$

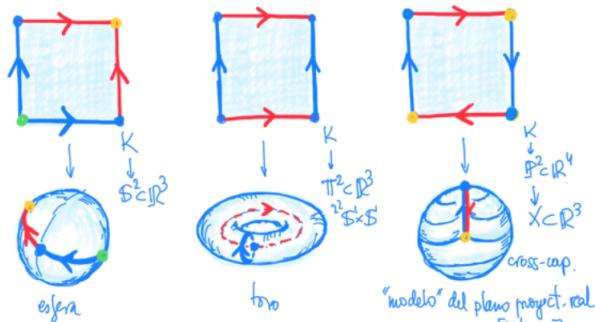
SUPERFICIES

CONCEPTO

Definición

Una superficie es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Supondremos siempre que es T_2 y el II Ax., lo que implica que se puede sumergir en \mathbb{R}^n para n grande.

Nos interesan las superficies compactas. Las tres primeras son cocientes:



Ejercicio: $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \frac{(x_1^2 - x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$.

Observación:

$P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene siempre identificaciones adicionales (como el cross-cap?)

SUMAS CONEXAS

El método genérico para construir superficies requiere el concepto un poco más general siguiente:

Definición

Una superficie con borde es un espacio local homeomorfo a $\{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ y los puntos del borde se corresponden con $\{x = 0\}$ (es una definición consistente por la inversa? del borde)



Observación:

Sin los puntos del borde se tiene una superficie ordinaria.

Ejemplo:

1. Un disco cerrado, que tiene por borde la circunferencia.
2. Una corona circular, una banda entre rectas paralelas, un tronco de cilindro.



Con este concepto podemos “hacer agujeros” en superficies y, con ellos, definir:

Definición

La suma conexa $M \# M'$ de dos superficies M y M' se construye haciendo un agujero en cada una y pegando las superficies agujereadas por sus bordes:

1. *Agujeros: $B \subset M$ y $B \subset M'$ (discos abiertos) con bordes $S = \overline{B} \setminus B$ y $S' = \overline{B'} \setminus B'$ (circunferencias).*
2. *Superficies agujereadas: $M \setminus B$ y $M' \setminus B'$ con los mismos bordes S y S' .*
3. *Pegando por los bordes: $M \# M' = ((M \setminus B) + (M' \setminus B')) / (S \equiv S')$.*



Proposición

La suma conexa está bien definida y no depende de los agujeros elegidos (salvo homeomorfismos).

Demostración:

Que efectivamente es una superficie ordinaria (sin borde) es fácil si elegimos los agujeros en abiertos de las superficies homeomorfas a \mathbb{R}^2 . Luego, hay que ver que si cambiamos los agujeros obtenemos el mismo resultado (salvo homeomorfismo) y esto ya requiere resultados profundos como el teorema de Jordan-Schoenflies.

Proposición

La suma conexa es una operación asociativa conmutativa con elemento neutro la esfera.

Demostración:

Que $(M \# M') \# M'' \approx M \# (M' \# M'')$ es fácil tomando agujeros bien separados. También es obvio que $M \# M' \approx M' \# M$. Finalmente:

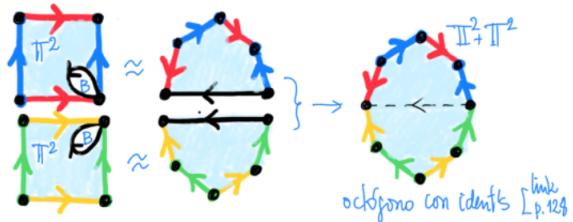
$$M \# \mathbb{S}^2 = ((M \setminus B) + (\mathbb{S}^2 \setminus B')) / (S \equiv S') = ((M \setminus B) + B) / (S \equiv S') = M$$

pues $\mathbb{S}^2 \setminus B'$ es un disco cerrado que restituimos a M .

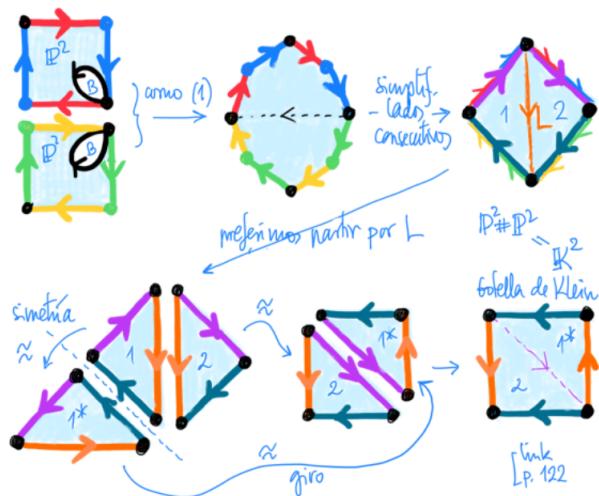
COCIENTES

Las sumas conexas se visualizan muy bien mediante identificaciones.

1. Suma conexa de toros:



2. Suma conexa de planos proyectivos:



CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

EL TEOREMA

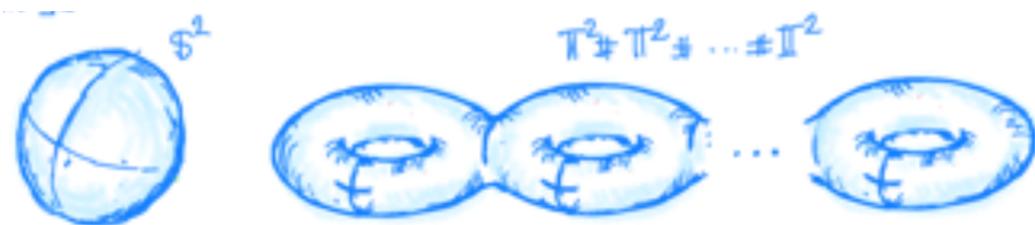
Teorema

Toda superficie compacta es homeomorfa a una y sólo una entre:

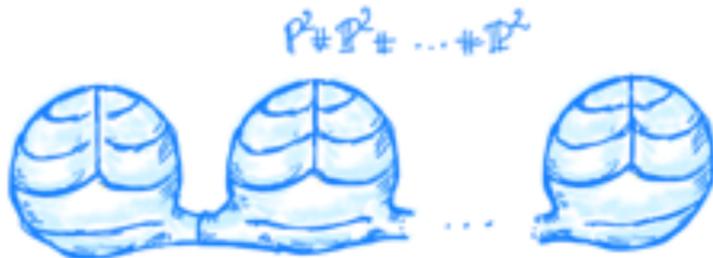
$$\mathbb{S}^2; \quad \Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2, k \geq 1; \quad \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2, k \geq 1$$

Las podemos dibujar:

- En \mathbb{R}^3 :



- En \mathbb{R}^4 (modelo en \mathbb{R}^3):



El “solo una” del enunciado nos dice que estas superficies son todas distintas (no homeomorfismo): el grupo fundamental las distingue. Ya sabemos que $\pi(\mathbb{S}^2) = \{1\}$, $\pi(\Pi^2) = \mathbb{Z}^2$, $\pi(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2$ y los demás H_0 ? son desiguales (aunque no sepamos calcularlos).

LA RELACIÓN FUNDAMENTAL

En la lista del teorema de clasificación no hay sumas “mixtas”: $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2, \dots$, pero el mismo teorema nos dice que están en la lista. Es claro que, por las propiedades de $\#$, cualquier suma conexa de \mathbb{S}^2, Π^2 y \mathbb{P}^2 estará en la lista en cuanto esté $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2$. En efecto:

Proposición

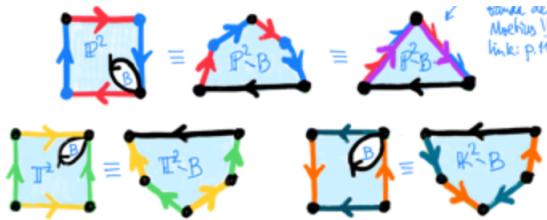
$$\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2.$$

Demostración:

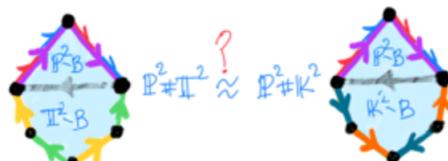
“Cut & paste” típico de identificaciones. Como $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$ (20.3) es la botella de Klein, el homeomorfismo que partiremos? es $\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$ con:



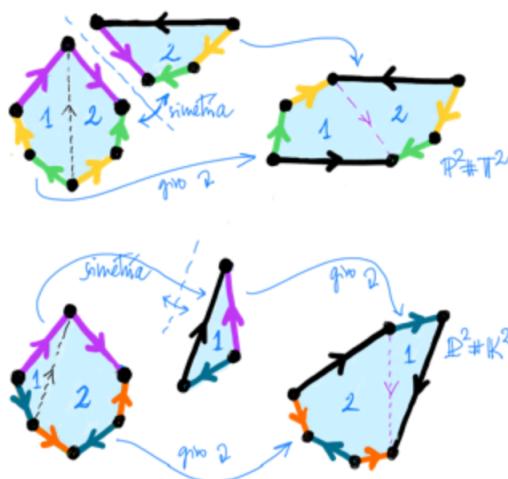
1. Agujeros:



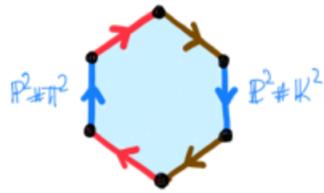
2. Pegados:



3. Cut & paste:



Obtenemos dos representaciones nuevas de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{H}^2$ y $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$, con apariencias desiguales, pero topologías iguales: dos hexágonos con las mismas identificaciones de lados:



No dejarse engañar por los colores ni los sentidos de las flechas.

GRUPOS FUNDAMENTALES CON UN AGUJERO

Aunque no podamos distinguir todas las superficies unas de otras porque no conocemos todos los grupos fundamentales, si podemos hacer algunas distinciones “haciendo agujeros”.

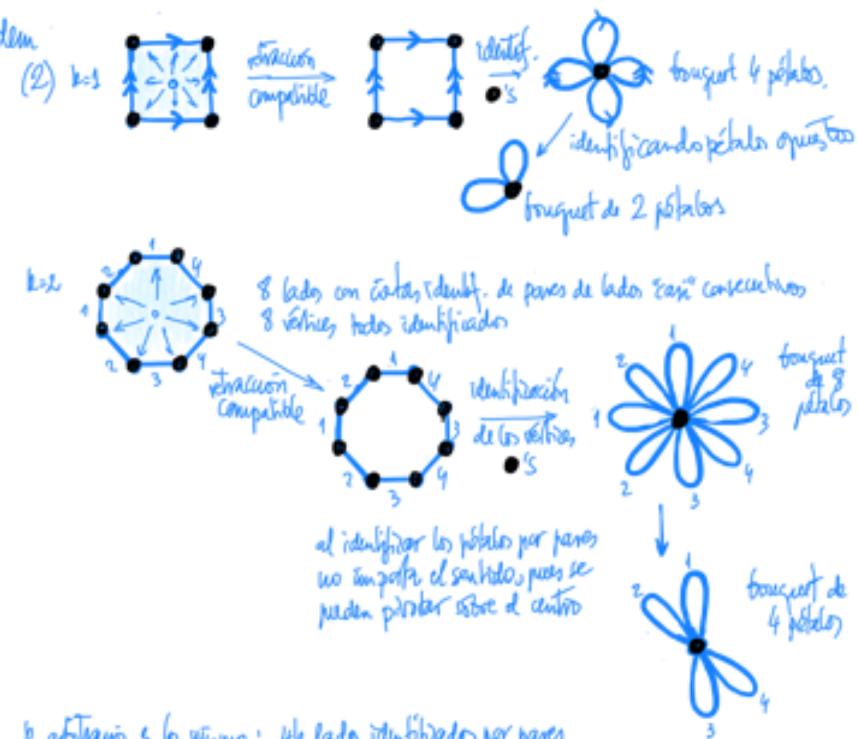
Proposición

Distinguimos:

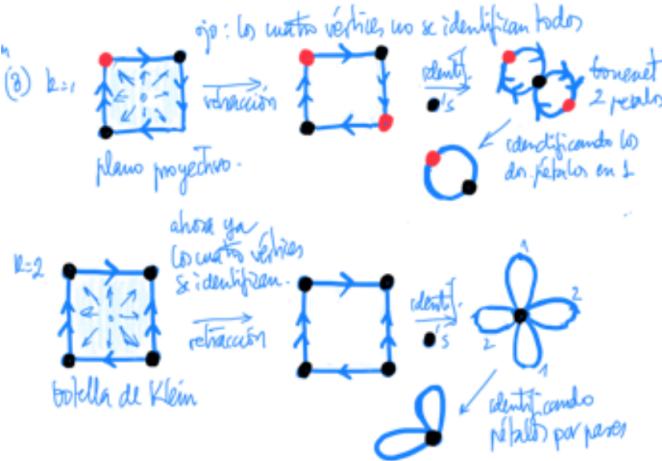
1. $\pi(\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\mathbb{R}^2) = \{1\}$.
2. $\pi(\mathbb{H}^2 \# \dots \# \mathbb{H}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^{2k}) = \mathbb{Z}^{*^{2k}}$.
3. $\pi(\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^k) = \mathbb{Z}^{*^k}$.

Demostración:

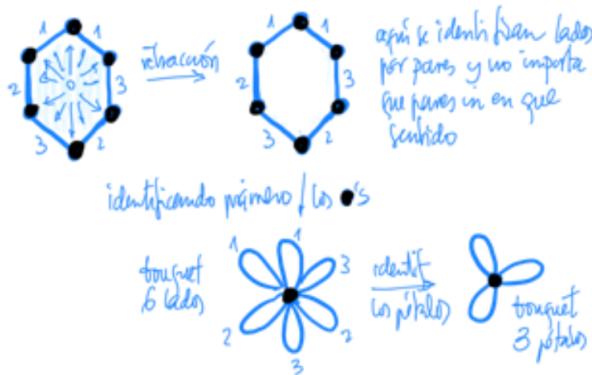
Tenemos



Con k arbitrario es lo mismo: $4k$ lados identificados por pares, $4k$ vértices todos identificados. Por retracción radical desde un punto interior (el agujero), obtenemos la poligonal con esas mismas identificaciones. Al identificar los vértices se tiene un bouquet de $4k$ pétalos y, al identificar pétalos por pares, un bouquet de $2k$ pétalos.



$k = 3$. Por *cut & paste*, los lados, pueden? sumar un proyectivo aporta? 2 lados identificados entre sí con tres vértices identificados todos (21.2).



Con k arbitrario es lo mismo: se empieza con un polígono de $2k$ lados, que se retrae a una poligonal de $2k$ lados, en la que se identifican los vértices para obtener un bouquet de $2k$ pétalos, que se identifican por pares para tener un bouquet de k .

Conclusión:

Todas las superficies se distinguen por el grupo fundamental después de quitar un punto, salvo los pares:

$$\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2 \wedge \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2 \# \cdots \# \mathbb{K}^2$$

para cada $k \geq 1$. El primer caso (y el esencial) es que el toro y la botella de Klein no son homeomorfos: La razón de fondo es la orientabilidad, que no hemos estudiado aquí.

En general:

- Cualquier $\mathbb{P}^n \# \cdots \# \mathbb{P}^2$ contiene una banda de Möbius (de hecho, tantas como sumandos) y la banda es no orientable.
- Cualquier $\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2$ es orientable, luego cualquier abierto suyo lo es, luego no puede contener una banda de Möbius.

GRANDE FINALE

Vamos a probar que la esfera no es contráctil, utilizando el teorema de la esfera de Brouwer (18.3) y las ideas sobre vectores tangentes allí vistas:

Proposición

\mathbb{S}^2 no es contráctil: $\#H_t : cte. \simeq id_{\mathbb{S}^2}$.

Demostración:

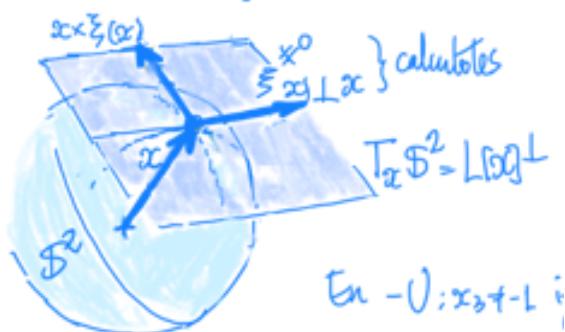
Absurdo: sea que $\exists H_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, $H_0(x) = x_0$, $H_1(x) = x$.

1. Problema de elevación:

$$\begin{aligned}
 & \text{Problema de elevación} \\
 & ? \exists \tilde{H} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \quad \text{ta q. } \tilde{H}(x) = (H_1(x), n(x)) \quad \text{y } \tilde{H}(x) \perp H_1(x) \\
 & \text{y } \tilde{H}(x) \perp n(x) \quad \text{pero } n \text{ es un vector unitario} \\
 & \text{y } \tilde{H}(x) \in T_x \mathbb{S}^2 \quad \text{pero } T_x \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{y } \tilde{H}(x) \in \mathbb{R}^3 \\
 & \text{y } \tilde{H}(x) \perp n(x) \quad \text{y } n(x) \perp H_1(x) \\
 & \text{y } \tilde{H}(x) \perp H_1(x) \quad \text{y } H_1(x) \perp H_0(x) \\
 & \text{y } \tilde{H}(x) \perp H_0(x) \quad \text{y } H_0(x) \perp H_1(x) \\
 & \text{y } \tilde{H}(x) \perp \tilde{H}(x) \quad \text{contradicción}
 \end{aligned}$$

2. Estructura de \mathbb{S}^1 :

Como esquema tenemos,



Así, $c = (0, 0, 1)$, $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{c\} = \{x_3 \neq 1\}$, $-U : \mathbb{S}^2 \setminus \{-c\} = \{x_3 \neq -1\}$.

En $U : x_3 \neq 1$, $\{\eta(x) = (1 - x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, x_1(1 - x_3)), \eta(x) = x \times \eta(x)\}$ base de $T_x \mathbb{S}^2$ ortogonal. $\Rightarrow \forall \underbrace{u}_{\neq 0} \perp x : u = \lambda(u, x) \eta(x) + \mu(u, x) \eta(x)$.

$$\begin{cases} \lambda(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \\ \mu(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \end{cases} \quad \text{cond's ?? continuas.}$$

En $-U : x_3 \neq -1$ igual con $\eta(x) = (1 + x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, -x_1(1 + x_3))$.

3. Preparación local: Igual que en 16,2 para la elevación de recubridores:

$$\forall x \in \mathbb{S}^2, \exists W^x \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{S}^2, \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : W^x \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U) \text{ ó } H^{-1}(-U)$$

reducción $W^x \supset \overline{V^x} \supset V^x$.

¡La partición depende de $x!$ $\Rightarrow \mathbb{S}^2 \text{ comp.} \mathbb{S}^2 = V^{x_1} \cup \dots \cup V^{x_v}$ y juntamos las v particiones.

$$\Rightarrow \mathbb{S}^2 = V_1 \cup \dots \cup V_v \wedge \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : H \left(\overbrace{W_k}^{\supset \overline{V}_k \supset V_k} \times [t_{i-1}, t_i] \right) \subset U \text{ ó } -U.$$

Objetivo: construir la elevación \tilde{H} en pasos sucesivos:

- dada \tilde{H}_t para $0 \leq t \leq t_{i-1}$ extenderla a $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, es decir,
- dada $\tilde{H}_{t_{i-1}}$ extenderla a $t_{i-1} \leq t \leq t_i$.

Para empezar en $i = 1$:

$$\tilde{H}_{t_0}(x) = \tilde{H}_0(x) = (H_0(x), u_0(x)) = (x_0, u_0), \text{ cualquier } \overbrace{u_0}^{\neq 0} \perp x_0$$

El paso inductivo da más trabajo y para simplificar un escalamiento permite suponer $[t_{i-1}, t_i] = [0, 1]$ y $H(W_k \times [0, 1]) \subset U \text{ ó } -U \forall k(*)$. Queremos:

- dada \tilde{H}_0 extenderla a $0 \leq t \leq 1$

Demostración:

$$\tilde{H}_0 = \tilde{H}_{t_{i-1}} \text{ no es la elevación de } i = 1.$$

4. Descomposición de la extensión en varios pasos: Tomamos $C_k = \mathbb{S}^2 \setminus V_k$ y,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \varphi_k(x) &= \frac{\text{dist}(x, C_k)}{\sum_l \text{dist}(x, C_k)} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi_k \leq 1 \\ \{\varphi_k = 0\} = C_k \quad \text{por ser los } C_k \text{ cerrados.} \\ \sum_l \varphi_l = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad \psi_k &= \varphi_1 + \dots + \varphi_k \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots \leq \psi_k \equiv 1 \\ \{\psi_{k-1} < \psi_k\} = \{\varphi \neq 0\} = X \setminus C_k = V_k \\ \overline{\{\psi_{k-1} < \psi_k\}} = \overline{V_k} \subset W_k \end{cases} \end{aligned} \quad (*)$$

Las ψ_k son los límites superiores de la siguiente cadena de cerrados:

$$\mathbb{S}^2 \times \{0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k = \{t \leq \psi_k(x) : x \in \mathbb{S}^2\} \subset \dots \subset \Gamma_v = \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$$

y, empezando con \tilde{H}_0 para $k = 1$, la cosa es:

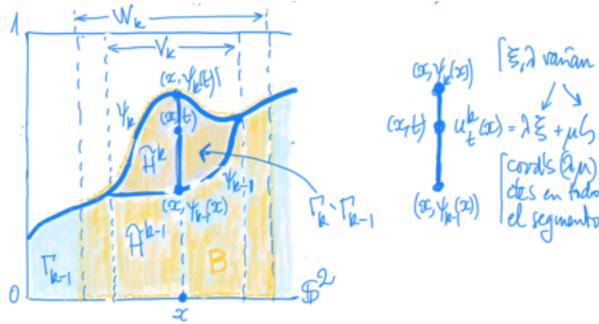
- dada $\tilde{H}^{k-1} = (r, u^{k-1})$ elevación de $H|_{\Gamma_{k-1}}$, extenderla a $\Gamma_k \setminus \Gamma_{k-1}$. Como:

$$\begin{cases} \Gamma_{k-1} \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] \stackrel{(**)}{=} \Gamma_k \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] = A \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \\ \Gamma_{k-1} \cap (W_k \times [0, 1]) = B \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \end{cases} \quad \wedge \quad \Gamma_k = \underbrace{A}_{\subset \Gamma_{k-1}} \cup B$$

definiremos,

- \tilde{H}^k en B tal que, $\tilde{H}^k = \tilde{H}^{k-1}$ en $A \cap B \subset \mathbb{S}^2 \setminus V_k \times [0, 1]$.

$$5. \quad (x, t) \in B \xrightarrow{(*)} \begin{cases} H_t(x) \in U \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x) \in U \end{cases} \Rightarrow \exists \eta \text{ y } S \text{ en } \begin{cases} H_t(x). \text{ (ii)} \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x). \text{ (i)} \end{cases}.$$



$$\text{a) } t \leq \psi_{k-1}(x) : (x, t) \in \Gamma_{k-1} \Rightarrow \tilde{H}_t^k(x) = \tilde{H}_t^{k-1}(x).$$

$$\underline{b}) \quad t \geq \psi_{k-1}(x) : \tilde{H}^{k-1} = (H, u^{k-1}).$$

(i) \Rightarrow

$$\underbrace{u_{\psi_{k-1}(x)^{k-1}(x)}}_{\neq 0} = \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x) \eta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)) + {}_{\psi_{k-1}(x)}(x) \zeta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)).$$

(ii) \Rightarrow

$$\begin{aligned}\exists u_t^k(x) &= \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x)\eta(H_t(x)) + \mu_{\psi_{k-1}(x)}(x)\zeta(H_t(x)) \\ &\Rightarrow \exists \tilde{H}_t^k(x) = (H_t(x), u_t^k(x)).\end{aligned}$$

y por la construcción es continua.

a) y b) coinciden en $t = \psi_{k-1}(x)$.

$$6. \psi_{k-1} \stackrel{(**)}{=} \psi_k \text{ fuera de } V_k \Rightarrow \tilde{H}^k \text{ de 5.} = \tilde{H}^{k-1} \text{ en } A \cap B.$$

Esto completa la propuesta de que $\exists \tilde{H}$ elevación de H y, con ello, se completa la contradicción buscada. Acaba aquí la demostración de que \mathbb{S}^2 no es contráctil.