

# Topología elemental

Mario Calvarro Marines, Juan Diego Barrado Daganzo  
e Iker Muñoz Jiménez



# Índice general

---

<b>I Topología general</b>	<b>1</b>
<b>1. Espacios topológicos</b>	<b>3</b>
1.1. Conjuntos abiertos . . . . .	3
1.2. Conjuntos cerrados . . . . .	6
1.3. Bases . . . . .	10
1.4. Topología relativa . . . . .	12
<b>2. Aplicaciones continuas</b>	<b>15</b>
2.1. Continuidad . . . . .	15
2.2. Continuidad y subespacios . . . . .	17
2.3. Homeomorfismos . . . . .	19
<b>3. Construcciones</b>	<b>23</b>
3.1. Imágenes inversas . . . . .	23
3.1.1. Caracterización de la imagen inversa . . . . .	23
3.1.2. Inmersiones . . . . .	25
3.2. Imágenes directas . . . . .	26
3.2.1. Caracterización de la imagen directa . . . . .	26
3.2.2. Identificaciones . . . . .	27
3.2.3. Cocientes . . . . .	29
3.3. Productos (finitos) . . . . .	32
3.4. Sumas (finitas) . . . . .	34
3.5. Espacios proyectivos reales . . . . .	36
3.5.1. Geometría lineal . . . . .	36

3.5.2. Topología de espacio proyectivos . . . . .	36
<b>4. Separación</b>	<b>41</b>
4.1. Concepto . . . . .	41
4.2. Tabla de comportamiento . . . . .	42
<b>5. Numerabilidad</b>	<b>45</b>
5.1. Axiomas . . . . .	45
5.1.1. I Axioma . . . . .	45
5.1.2. II Axioma . . . . .	46
5.1.3. Separable . . . . .	47
5.1.4. Lindelöf . . . . .	47
5.2. Tabla de comportamiento . . . . .	48
<b>6. Compacidad</b>	<b>51</b>
6.1. Concepto y mantras . . . . .	51
6.2. Tabla de comportamiento . . . . .	53
<b>7. Compacidad local</b>	<b>55</b>
7.1. Compacidad local y mantras . . . . .	55
7.2. Tabla de comportamiento . . . . .	57
7.3. Compactificación por un punto . . . . .	57
<b>8. Conexión</b>	<b>61</b>
8.1. Concepto y mantras . . . . .	61
8.2. Tabla de comportamiento . . . . .	63
<b>9. Componentes conexas y conexión local</b>	<b>65</b>
9.1. Componentes . . . . .	65
9.2. Conexión local . . . . .	66
9.3. Tabla de comportamiento . . . . .	67
<b>10. Conexión por caminos</b>	<b>69</b>
10.1. Conexión por caminos . . . . .	70
10.2. Mantras . . . . .	70
10.3. Tabla de comportamiento . . . . .	71

<b>11. Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos</b>	<b>73</b>
11.1. Componentes conexas por caminos . . . . .	73
11.2. Conexión local por caminos . . . . .	73
11.3. Tabla de comportamiento . . . . .	74
11.4. Relaciones entre las propiedades de conexión . . . . .	74
<b>II Topología algebraica</b>	<b>75</b>
<b>12. Homotopía</b>	<b>77</b>
12.1. Conceptos fundamentales . . . . .	77
12.2. Concepto relativo . . . . .	78
12.3. Contractibilidad . . . . .	78
<b>13. Homotopía de caminos</b>	<b>81</b>
13.1. El concepto básico . . . . .	81
13.2. Simple-conexión . . . . .	81
13.3. Esferas $\mathbb{S}^n$ , $n \geq 2$ . . . . .	82
<b>14. El grupo fundamental</b>	<b>85</b>
14.1. Operaciones con caminos . . . . .	85
14.2. El grupo fundamental . . . . .	86
14.3. Functorialidad . . . . .	87
<b>15. Retractos</b>	<b>89</b>
15.1. Retractos y deformaciones . . . . .	89
15.2. Cocientes . . . . .	90
15.3. Agujeros . . . . .	91
<b>16. Recubridores</b>	<b>93</b>
16.1. El problema de elevación . . . . .	93
16.2. Unicidad de elevación . . . . .	94
16.3. Lema de elevación . . . . .	94
<b>17. Cálculos mediante recubridores</b>	<b>97</b>
17.1. Espacios proyectivos reales . . . . .	97

17.2. La circunferencia . . . . .	98
<b>18. Aplicaciones en dimensión 2</b>	<b>101</b>
18.1. Teorema fundamental del Álgebra . . . . .	101
18.2. Teorema del punto fijo de Brouwer . . . . .	101
18.3. Teorema de la esfera de Brouwer . . . . .	102
<b>19. Más aplicaciones por el mismo precio</b>	<b>105</b>
19.1. Borsuk-Ulam . . . . .	105
19.2. Invarianza del dominio . . . . .	106
19.3. Divarianza del borde y de la dimensión . . . . .	107
<b>20. Superficies</b>	<b>109</b>
20.1. Concepto . . . . .	109
20.2. Sumas conexas . . . . .	109
20.3. Cocientes . . . . .	111
<b>21. Clasificación de superficies</b>	<b>113</b>
21.1. El teorema . . . . .	113
21.2. La relación fundamental . . . . .	114
21.3. Grupos fundamentales con un agujero . . . . .	115
<b>22. Grande finale</b>	<b>117</b>

# **Parte I**

# **Topología general**



# Espacios topológicos

---

## Conjuntos abiertos

---

### Definición (Espacio Topológico)

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos del mismo, decimos que  $\mathcal{T}$  es una **topología** de  $X$  si y sólo si:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2.  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$  donde  $U_i \in \mathcal{T}$
3.  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$  donde  $U_i \in \mathcal{T}$

y denotamos por **espacio topológico** al par  $(X, \mathcal{T})$ . A los elementos de  $X$  los llamaremos **puntos** y a los de  $\mathcal{T}$ , **abiertos**.

---

### Ejemplo:

1.  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  es la topología **trivial**, que está contenida en cualquier otra topología.
2.  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  es la topología **discreta**, que contiene a cualquier<sup>1</sup> otra topología.
3.  $\mathbb{R}^n$  junto con las bolas euclídeas es la topología habitual que utilizamos.
4. Cualquier distancia  $d(x, y)$  define una topología a través de sus bolas abiertas, igual que definíamos la usual en  $\mathbb{R}^n$ , de hecho, se puede demostrar sin mayor dificultad (y tal y como se ve en el dibujo) que todas las normas  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  definen bolas que contienen y están contenidas en las restantes. En consecuencia, si la definición de abierto usual se hacía a través de bolas redondas y hemos visto que estas contienen a bolas cuadradas o romboidales, también se tiene que es abierto cuadrado o romboidal y el recíproco por los contenidos en ambos lados.

---

<sup>1</sup>Porque si los puntos  $\{x\} \in X$  son abiertos, entonces cualquier conjunto  $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$  es abierto.

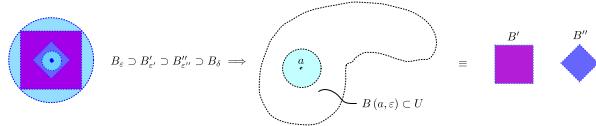


Figura 1.1: El dibujo representa distintas topologías generadas por distintas normas, pero todas equivalentes.

Es decir, cambiar de norma igual cambia la noción de distancia en  $\mathbb{R}^n$ , ¡pero no la topología asociada! Sigue siendo la topología usual de  $\mathbb{R}^n$ .

5. En general, cuando queramos ver resultados que no son ciertos pondremos un contraejemplo donde no se cumpla. Para poder hacer esto, tenemos que disponer de muchos y muy variados ejemplos de topologías poco usuales, como por ejemplo, la topología “del punto”:

$$\text{Fijado } a \in X : \mathcal{T}_a := \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

En esta topología, el punto  $\{a\}$  y todos los pares  $\{a, x\}$  son abiertos y, aunque puede parecer igual a la discreta, no lo es. Hay que fijarse en que los abiertos de esta topología son los que contienen al punto, no todos los puntos en general. De este modo,  $\{x\} \notin \mathcal{T}$ , pero  $\{a, x_1, x_2, \dots\} \in \mathcal{T}$ .

### Definición (Entorno)

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $x \in X$  un punto del mismo, definimos un **entorno**<sup>2</sup> de  $x$  como un conjunto  $V^x$  que contiene un abierto  $U$  que contiene al punto:

$$x \in U : U \subset V^x$$

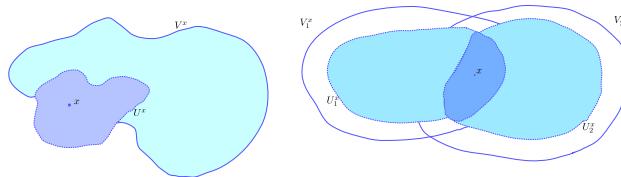


Figura 1.2: Definición de entornos

### Proposición (Caracterización de abierto)

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $W \subset X$  un subconjunto de puntos, este es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

<sup>2</sup>Cuando el abierto que contiene al punto es el propio entorno o, dicho de otra manera, el entorno de  $x$  es un abierto de la topología, decimos que es un entorno *abierto* de  $x$ .

### Demostración:

La implicación de izquierda a derecha es trivial, pues todo conjunto se contiene a sí mismo y, como el conjunto es abierto, contiene a un abierto que contiene al punto, es decir, es entorno de cualquiera de sus puntos.

Para probar el recíproco, si un subconjunto  $W \subset X$  es entorno de todos sus puntos, entonces para cada  $x$  del conjunto existe un  $U^x \subset W$  que contiene a  $x$ . Por tanto, podemos expresar  $W$  como unión arbitraria de todos estos abiertos, es decir,  $W = \bigcup_{x \in W} U^x$  y, por ser topología, la unión arbitraria de abiertos es abierta.

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $V_1^x$  y  $V_2^x$  dos entornos de un punto  $x \in X$ , entonces la intersección  $V^x := V_1^x \cap V_2^x$  es entorno de  $x$ .

### Demostración:

Por definición de entornos, existen dos abiertos  $U_1^x \subset V_1^x$  y  $U_2^x \subset V_2^x$  que contienen a  $x$ . Por la definición de topología, la intersección finita  $U^x := U_1^x \cap U_2^x$  es un abierto de la topología y vemos que  $U^x \subset V^x$ , luego  $V^x$  contiene a un abierto que contiene al punto, es decir, es entorno.

### Definición (Punto interior)

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $A \subset X$  un subconjunto de puntos, decimos que un punto  $x \in X$  es **punto interior de  $A$**  si y sólo si  $A$  es entorno de  $x$ .

$$x \in \text{Int}_X(A) \Leftrightarrow \exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} A : x \in U$$

Al conjunto de puntos interiores lo llamamos **interior de  $A$**  y se denota por  $\text{Int}_X(A)$  o  $\text{A}^\circ$ .

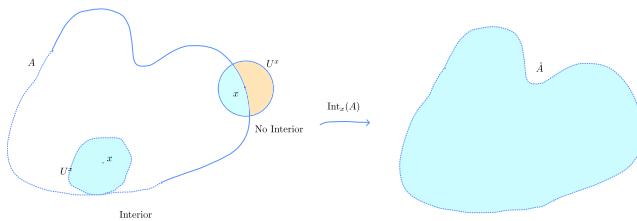


Figura 1.3: Definición de interior de un conjunto.

### Proposición

Sea  $A \subset X$  un subconjunto de puntos, entonces:

- $\text{A}^\circ$  es el mayor abierto en  $A$  o lo que es lo mismo  $\text{A}^\circ = \bigcup_{U \subset A} U$ .
- $A$  abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores, es decir,  $A = \text{A}^\circ$
- $A$  es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

### Demostración:

1. Si  $x \in \text{A}^\circ$ , entonces  $\exists U \subset A : x \in U \Rightarrow x \in \bigcup_{U \subset A} U$ , pero es que si  $x \in U$  para algún  $U \subset A$ , por definición es interior de  $A$ , luego  $x \in \text{A}^\circ$ .

Como  $\text{A}^\circ$  es unión de abiertos, la definición de topología nos asegura que será un abierto y además es el más grande de todos porque cualquier otro está contenido en él por ser la unión de todos los abiertos.

2. El contenido  $\overset{\circ}{A} \subset A$  se tiene siempre, puesto que  $x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists U \subset A : x \in U \subset A \Rightarrow x \in A$  (dicho de otra forma, los puntos interiores de  $A$  son aquellos para los cuales  $A$  es entorno y como un entorno contiene al punto se tiene trivialmente).

De esta manera, si  $A$  es abierto, como  $\overset{\circ}{A}$  es el mayor abierto de  $A$ , tiene que ser  $\overset{\circ}{A} = A$  y si  $\overset{\circ}{A} = A$ , como  $\overset{\circ}{A}$  es abierto, pues lo es  $A$ .

3. Se tiene trivialmente de la implicación anterior. Cuando  $A$  es abierto sabemos que todos los puntos son interiores y un punto es interior si y sólo si  $A$  es entorno para él, luego es entorno para todos sus puntos.

Recíprocamente,  $A$  es entorno de todos sus puntos, entonces todos sus puntos están en el interior y  $A = \overset{\circ}{A}$ , lo que indica que es abierto.

#### Ejemplo:

1.  $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}}) : A \neq X \Rightarrow A \not\ni X \Rightarrow \emptyset$  es el único abierto  $\subset A \Rightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$ .

2. En  $\mathbb{R}^n$  con  $\mathcal{T}_{\text{trivial}}$  ya lo sabemos bien:

$$\text{Int}(B[a, \varepsilon]) = B(a, \varepsilon); \quad \overset{\circ}{\mathbb{Q}^n} = \emptyset; \quad \overset{\circ}{\mathbb{Z}^n} = \emptyset$$

3. Si  $a \in X$ ,  $\mathcal{T}_a : \{\overset{\circ}{a}\} = \{a\}; x \neq a, \quad \{x\} = \emptyset$ .

#### **Corolario**

1.  $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

2.  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \text{Int}(A \cap B)$ .

#### Demostración:

1. La relación  $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset A \subset B$  implica que, como  $\overset{\circ}{A}$  es abierto y  $\overset{\circ}{B}$  es la unión de todos los abiertos de  $B$ ,  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .
2. En primer lugar, como  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  es intersección de abiertos, entonces es abierto y está contenido en  $A \cap B$ , luego por ser  $\text{Int}(A \cap B) = \bigcup_{U \in A \cap B} U$  sabemos que  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \text{Int}(A \cap B)$ .

Recíprocamente, si  $x \in \text{Int}(A \cap B)$  existe un abierto  $U \in A \cap B$  tal que  $x \in U$ . Por ser de la intersección, en particular también es abierto de cada conjunto, luego  $x \in \overset{\circ}{A}$  y  $x \in \overset{\circ}{B}$ , es decir,  $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

## Conjuntos cerrados

#### **Definición (Conjunto cerrado)**

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico, definimos un **conjunto cerrado** como  $F \subset X : U = X \setminus F$  es abierto.

#### Observación:

A pesar de lo que pueda sugerir el lenguaje habitual, la definición cerrado NO significa “no abierto”, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

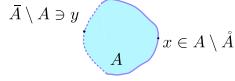


Figura 1.4: Ejemplo de conjunto que no es ni abierto ni cerrado.

y otros que son abiertos y cerrados simultáneamente, como el vacío y el total.

### Proposición

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y denotando por  $\mathcal{F}$  al conjunto de cerrados del espacio, entonces:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{F}$ .
2.  $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$  donde  $F_i \in \mathcal{F}$ .
3.  $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$  donde  $F_i \in \mathcal{F}$ .

Demostración:

- Trivial, porque el uno es el complementario del otro y ambos son abiertos.
- Porque el complementario de la intersección  $X \setminus (\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$  es abierto.
- Porque el complementario de la unión  $X \setminus (\bigcup_{i=0}^n F_i) = \bigcap_{i=0}^n (X \setminus F_i) = \bigcap_{i=0}^n U_i$  es abierto.

Ejemplo:

1. En la topología trivial solo son cerrados  $\emptyset$  y  $X$ . En la discreta, todos los subconjuntos son cerrados.
2. En  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual ya sabemos todos los ejemplos:  $B[a, \varepsilon] : \|x - a\| \leq \varepsilon$ .
3. Si  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ , todo cerrado de  $\mathcal{T}_1$  es cerrado de  $\mathcal{T}_2$ , pues es cerrado por ser el complementario de un abierto y los abiertos de  $\mathcal{T}_1$  también lo son en  $\mathcal{T}_2$ .

### Definición (Adherencia)

Sea  $A \subset X$  y  $x \in X$  un punto, decimos que es **adherente a  $A$**  si y sólo si todos sus entornos intersecan con  $A$ .

$$\text{Adh}_X(A) = \overline{A} := \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\} \supset A$$

al conjunto de puntos adherentes a  $A$  lo llamamos su **adherencia**.

Observación:

La propia definición nos sugiere ciertas equivalencias útiles que se obtienen escribiendo de forma distinta lo que hemos definido:

- $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$

$$x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$$

- $X \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{X \setminus B}$
- $$x \notin \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X \setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus B}$$

### Proposición

Sea  $A \subset X$  un subconjunto de puntos y denotando por  $\overline{A}$  a su adherencia, entonces:

- $\overline{A}$  es el menor cerrado que contiene a  $A$ , en otras palabras:

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A} F \text{ donde } F \text{ cerrado}$$

que, en particular, caracteriza que  $A$  es cerrado si y sólo si  $\overline{A} = A$ .

- $B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$ .
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

#### Demostración:

- Recordando que  $\overset{\circ}{B} = \bigcup_{U \subset B} U$ :

$$\overline{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \left( \bigcup_{U \subset X \setminus A} U \right) \stackrel{F=X \setminus U}{=} X \setminus \left( \bigcup_{F \supset A} (X \setminus F) \right) = \bigcap_{F \supset A} F$$

- Si  $B \subset A \Rightarrow$

$$B \subset A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

por el primer apartado.

- Veamos el doble contenido:

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} \supset A \cup B \supset A, B \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A}, \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

#### Ejemplo:

1. En  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{T}_{\text{usual}} : B[a, \varepsilon] = \overline{B(a, \varepsilon)}$ ;  $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ .

2. Sea  $a \in X$  con  $\mathcal{T}_a \Rightarrow$

- $\overline{\{a\}} = X$

#### Demostración:

$$\forall x, \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}}$$

- $\forall x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\}$

#### Demostración:

$$y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset$$

### Definición (Acumulación)

Sea  $A \subset X$  un subconjunto de puntos y  $x \in A$  un punto del mismo, decimos que  $x$  es:

- **punto aislado de  $A$**  si y sólo si existe algún entorno que sólo interseca con  $A$  en el propio punto, es decir:

$$\exists V^x \subset X : V^x \cap A = \{x\}$$

- **punto de acumulación de  $A$**  si y sólo si cualquier entorno interseca a  $A$  en más puntos, es decir:

$$\forall V^x \subset X : V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$


---

Observación:

La definición anterior para puntos aislados hace evidente el hecho de que los puntos aislados solo pueden ser de  $A$ . Por contra, los puntos de acumulación no tienen por qué y, de hecho, su definición en términos de entornos prescinde de ellos mismos para analizar su intersección con  $A$ . De esta manera, obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{A} = \underbrace{\{\text{puntos aislados}\}}_{\subset A} \sqcup \underbrace{\{\text{puntos de acumulación}\}}_{\supset \overline{A} \setminus A}$$

Además, nótese que si uno es punto de  $A$  sólo tiene dos posibilidades: ser aislado o ser de acumulación. Por tanto, podemos reescribir lo anterior como:

$$\overline{A} = A \cup A'$$


---

### Definición (Frontera)

Sea  $A \subset X$  un subconjunto de puntos y  $x \in A$  un punto del mismo, decimos que  $x$  es un **punto frontera de  $A$**  si y sólo si es adherente<sup>3</sup> a  $A$  y a su complementario  $X \setminus A$

$$\text{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

al conjunto de puntos de la frontera de  $A$  lo llamamos **frontera de  $A$** .

---

Ejemplo:

1. En  $\mathbb{R}$ , con la topología usual  $\mathcal{T}_u$ , todos los puntos de  $\mathbb{Z}$  son aislados,  $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ .
2. En  $\mathbb{R}^n$ , con la topología usual  $\mathcal{T}_u$ :  $\text{Fr}(B(a, \varepsilon)) = \text{Fr}(B[a, \varepsilon]) = S[a, \varepsilon] : \|x - a\| = \varepsilon$ .
3. En la topología  $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$  todos los puntos son aislados y todas las fronteras, vacías.
4. Para un punto cualquiera  $a \in X$  podemos escoger la topología del punto  $\mathcal{T}_a$  y entonces:

$$\begin{cases} \text{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} \setminus \overset{\circ}{\{a\}} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a \Rightarrow \text{Fr}(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \overset{\circ}{\{x\}} = \{x\} \end{cases}$$


---

### Definición (Densidad)

Sea  $X$  un conjunto de puntos y  $A \subset X$  un subconjunto suyo, decimos que  $A$  es **denso en  $X$**  si y sólo si  $\overline{A} = X$  o, dicho de otro modo, todo abierto no vacío corta a  $A$ .

---

Ejemplo:

1. El conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  es denso en  $\mathbb{R}$  con la topología usual  $\mathcal{T}_{\text{usual}}$ .
2.  $\{a\}$  es denso en  $(X, \mathcal{T}_a)$ .

---

<sup>3</sup>Por las observaciones hechas sobre las adherencias, también podríamos caracterizar los puntos frontera como los que no son interior de  $X \setminus A$  ni de  $A$ .

# Bases

---

## Definición (Base de entornos)

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $a \in X$  un punto, definimos una **base de entornos de  $a \in X$**  como una colección  $\mathcal{V}^a$  de entornos de  $a$  tales que cualquier otro entorno de  $a$  tenga que contener a alguno de los entornos de la colección  $\mathcal{V}^a$ :

$$\forall W^a, \exists V \in \mathcal{V}^a : W^a \supset V$$

---

### Observación:

La definición no ha hecho ninguna diferenciación especial en cuanto a si son cerrados, abiertos, etc. Precisamente esta “variedad” es la que permite que, escogiendo una base de entornos con las características adecuadas en cada caso, sea más sencillo estudiar la topología que tengamos entre manos.

En Topología, las bases de entornos tendrán propiedades parecidas a las bases de los espacios vectoriales en Álgebra: comprobar propiedades en una base de entornos extenderá automáticamente dichas propiedades a cualquier entorno arbitrario.

## Proposición

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $\{V_i^a\}_{i \in I}$  una base de entornos de un punto  $a$ , esta se puede refinar a una base de entornos abiertos  $\{U_i^a\}_{i \in I}$ .

### Demostración:

Como todos los elementos de la colección son entornos, para todos existe algún abierto  $U_i^a$  que contiene al punto. A este conjunto de abiertos (más bien de entornos abiertos) es al que llamamos  $\{U_i^a\}_{i \in I}$ . Cualquier otro entorno del punto  $a$  contiene a un entorno  $V_i^a$  de la base de entornos inicial, pero como estos contienen un abierto de la colección última, entonces  $\{U_i^a\}_{i \in I}$  es una base de entornos de  $a$ .

### Observación:

Podemos empezar a ver la utilidad de la base de entornos cuando tenemos que demostrar, por ejemplo, que un punto pertenece a la adherencia de un conjunto:

$$a \in \overline{A} \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall W^a \text{ entorno} : W^a \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset$$

luego si escogemos una base de entornos  $\mathcal{V}^a$  adecuada sobre la que sea muy fácil demostrar el resultado, este quedará demostrado para cualquier entorno “raro” que podamos encontrarnos.

### Ejemplo:

1. Sea el espacio real usual  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$  el espacio topológico a estudiar, entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B[a, \varepsilon] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$

2. Sea la topología del punto  $(a \in X, \mathcal{T}_a)$ , entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{\{a\}\} & x = a \\ \mathcal{B}^x = \{\{a, x\}\} & x \neq a \end{cases}$$

---

## Definición (Base de abiertos)

Sea  $\mathcal{T}$  una topología y  $\mathcal{B} := \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$  una colección de abiertos, decimos que es una **base de abiertos de  $\mathcal{T}$**  si y sólo si todo abierto de  $\mathcal{T}$  es unión de abiertos de  $\mathcal{B}$ .

---

### Proposición

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $\mathcal{B}$  es base de abiertos.
2.  $\forall x \in X, \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B}, x \in B\}$  es base de entornos (abiertos) de  $x$ .
3.  $\forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$ .

$\mathcal{B}$  base de abiertos  $\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$  es base de entornos (abiertos) de  $x \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$ .

Demostración:

Demostraremos 1.  $\Rightarrow$  2. y 3.  $\Rightarrow$  1. por ser 2.  $\Rightarrow$  3. trivial:

$$\Rightarrow) \forall V^x, \exists U \ni x : U \subset V^x \Rightarrow$$

$$\mathcal{B} \text{ base: } U = \bigcup_{i \in I} B_i : B_i \in \mathcal{B} \xrightarrow{x \in U} \exists B_i \ni x : B_i \subset U \subset V^x$$

$$\Leftarrow) \text{ Sea } U \in \mathcal{T} \Rightarrow \forall x \in U, \exists B^x \in \mathcal{B} : B^x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B^x \text{ unión de abiertos de } \mathcal{B}.$$

Ejemplo:

1. Si tomamos la topología discreta  $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$  entonces una base de abiertos sería  $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$ . Además, esta base es mínima pues cualquier otra base  $\mathcal{B}' := \{B_i\}_{i \in I}$  de abiertos cumpliría que  $\forall x : \{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists i \in I : B_i = \{x\}$ .
2. Si tomamos la topología del punto  $\mathcal{T}_a$ , entonces una base de abiertos es  $\mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}$ .
3. Si tomamos la topología usual  $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}}$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces una base de abiertos es el conjunto de bolas abiertas  $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n\}$  porque recordemos que un abierto se caracterizaba en  $\mathbb{R}^n$  por el hecho de que todos sus puntos tenían una bola alrededor contenida en el conjunto, luego la unión de dichas bolas es el abierto inicial. Sin embargo, la base de abiertos lo sigue siendo si escogemos otra norma en  $\mathbb{R}^n$  distinta de la euclídea, puesto que estas normas eran equivalentes en  $\mathbb{R}^n$  (o, visto geométricamente, cada bola de una norma contiene otra más pequeña de otra norma distinta y viceversa) porque

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} \square_i = \bigcup_{j \in J} \diamond_i$$

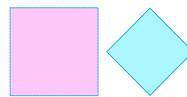
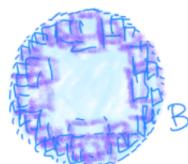


Figura 1.5: Bases alternativas en  $\mathbb{R}^n$



Política general:

Como antes, a menudo basta considerar los abiertos de  $\mathcal{B}$ .

Ilustración:

$A \subset X$  denso  $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset$ .

### Proposición

Sea  $X$  un conjunto de puntos y  $\mathcal{B} := \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$  una colección de subconjuntos, esta colección define una topología  $\mathcal{T}$  única en  $X$  si y sólo si:

- $X = \bigcup_{i \in I} B_i$ .
- $\forall B_i, B_j \in \mathcal{B} \text{ y } \forall x \in B_i \cap B_j, \exists B_k \in \mathcal{B} : x \in B_k \subset B_i \cap B_j$ .

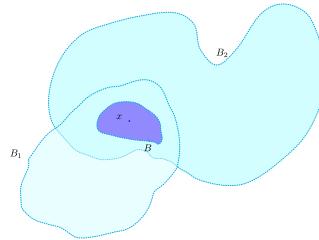


Figura 1.6: Caracterización de la topología dada una base

Demostración:

$\Rightarrow$ ) Trivial por las propiedades vistas sobre topología.

$\Leftarrow$ ) Veamos que se verifican las condiciones sobre la topología:

- **Unicidad:**  $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : \{B_i\} \subset \mathcal{B}\}$ .
- **Existencia:** Esa  $\mathcal{T}$  es efectivamente topología.
  - $\emptyset \in \mathcal{T}, X = \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}$ .
  - Uniones:  $\bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{j \in J} B_{ij} \in \mathcal{T}$ .
  - Intersecciones finitas:  $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B^x \in \mathcal{T}$ .

$$x \in \left( \bigcup_i B_i \right) \cap \left( \bigcup_k B_k \right) \Rightarrow x \in B_{i_0} \cap B_{k_0} \Rightarrow \exists B^x \in \mathcal{B} : x \in B^x \subset B_{i_0} \cap B_{k_0}$$

Por tanto, podemos decir que  $(\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_k B_k) = \bigcup_x B^x \in \mathcal{T}$  y se tiene el resultado.

## Topología relativa

### Definición (Topología Relativa)

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico e  $Y \subset X$  un subconjunto de puntos, definimos la **topología relativa**<sup>4</sup> en  $Y$  como

$$\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

Además, decimos que  $(Y, \mathcal{T}|_Y)$  es un **subespacio** de  $(X, \mathcal{T})$  y que  $(X, \mathcal{T})$  es el espacio **ambiente**.

<sup>4</sup>La comprobación de que efectivamente se trata de una topología es completamente trivial.

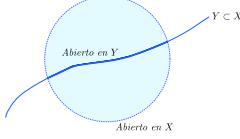


Figura 1.7: Definición de una topología relativa

Observación:

1. Los cerrados de la topología relativa  $\mathcal{T}|_Y$  son la intersección  $F \cap Y$  de  $Y$  con cerrados  $F$  en  $\mathcal{T}$ .

Demuestra:

Sea  $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow$

$$\begin{aligned} F = Y \setminus W : W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y &\Rightarrow \exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : Y \cap U = W \\ &\Rightarrow F = Y \setminus (Y \cap U) = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F_x : F_x \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \end{aligned}$$

2. Si tenemos una base  $\mathcal{V}^a$  de entornos en el espacio ambiente  $(X, \mathcal{T})$ , la base de entornos en el subespacio  $(Y, \mathcal{T}|_Y)$  se obtiene intersecando los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir,  $\mathcal{V}_Y^a := \mathcal{V}^a \cap Y := \{V^a \cap Y : V^a \in \mathcal{V}^a\}$ .
3. Si tenemos una base  $\mathcal{B}$  de abiertos en el espacio ambiente  $(X, \mathcal{T})$ , la base de abiertos en el subespacio  $(Y, \mathcal{T}|_Y)$  se obtiene intersecando<sup>5</sup> los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir,  $\mathcal{B}_Y := \mathcal{B} \cap Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ .

Ejemplo:

1. Si  $y$  es un punto aislado de  $Y$ , por la definición que hemos dado de la topología relativa, su topología relativa sería  $\mathcal{T}|_Y := \{U \cap \{y\}\} = \{y\}$ . Por tanto, es abierto en su topología.
2. Retomando el ejemplo anterior, si todos los puntos de  $Y$  son aislados, hemos visto que todos son abiertos (pues cortar un abierto con ellos da ellos mismos) y, por tanto, la topología  $\mathcal{T}|_Y$  es la discreta. Por ejemplo, en  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ :

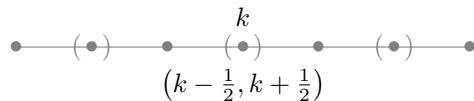


Figura 1.8: Enteros en los reales como subespacio discreto.

3. Si tomamos la topología del punto ( $a \in X, \mathcal{T}_a|_{X \setminus \{a\}}$ ) vemos que se trata de la discreta.

Observación:

1. Los abiertos  $W$  de un subespacio abierto  $Y \overset{\text{ab.}}{\subset} X$  son abiertos en el espacio ambiente  $X$ .

$$W = U \cap Y : U, Y \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$$

2. Los cerrados  $F$  de un subespacio cerrado  $Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$  son cerrados en el espacio ambiente  $X$ .

$$F = C \cap Y : Y, C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$$

---

<sup>5</sup>Esta idea suele ser general, las construcciones en los subespacios se hacen intersecando elementos del espacio ambiente con el subespacio.



# Aplicaciones continuas

---

## Continuidad

El famoso  $\varepsilon - \delta$  en  $\mathbb{R}^n$   $\mathcal{T}_u$ ,  $x_0 \in X$ ,  $f : \overbrace{X}^{\subset \mathbb{R}^p} \rightarrow \overbrace{Y}^{\subset \mathbb{R}^q}$ :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \begin{cases} \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow \\ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall B(f(x_0), \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)).$

---

### Definición (Continuidad)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función entre espacios topológicos, decimos que es **continua en  $x_0 \in X$**  si y sólo si:

$$\forall V^{f(x_0)} : f^{-1}\left(V^{f(x_0)}\right) = V^{x_0}$$

es decir, la preimagen de cualquier entorno de  $f(x_0)$  es entorno de  $x_0$ .

---

### Proposición (Composición de continuidades)

Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  funciones continuas en  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$  tales que  $f(x_0) = y_0$ , entonces la composición  $h = g \circ f$  es una función continua en  $x_0$ .

Demostración:

Escojamos un entorno  $V^{h(x_0)}$  de la imagen por  $h$  de  $x_0$ , entonces

$$h^{-1}V^{h(x_0)} = f^{-1}g^{-1}V^{g(y_0)} = f^{-1}V^{y_0} = V^{x_0}$$

Ejemplo:

1. Sea  $f : X_{\text{discreta}} \rightarrow Y$ , entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues todo es abierto y, en consecuencia, todo es entorno en  $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ .
2. Sea  $f : X \rightarrow Y_{\text{trivial}}$ , entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues como  $Y$  es el único abierto, entonces es el único entorno  $V^{f(x)}$  para cualquier  $f(x)$  y  $f^{-1}V^{f(x)} = f^{-1}Y = X$ , que es abierto.
3. Si una función  $f : X \rightarrow Y_{\text{discreta}}$  es continua, entonces  $f$  es localmente constante, pues como en la trivial los puntos son abiertos, entonces el punto  $\{f(x_0)\}$  es entorno  $V^{f(x_0)}$  de sí mismo. Por tanto, por la continuidad de  $f$ ,  $f^{-1}f(x_0) = V^{x_0}$ , luego  $f \equiv f(x_0)$  en ese entorno  $V^{x_0}$ .

4. Si una función  $f : X \rightarrow Y$  es localmente constante, entonces es continua, puesto que si es localmente constante para cualquier  $x_0 \in X$  existe un entorno  $U^{x_0} : f|_{U^{x_0}} \equiv f(x_0)$ . De este modo, cualquier entorno  $V^{f(x_0)}$  de la imagen  $f(x_0)$  cumple que  $f^{-1}V^{f(x_0)} \supset U^{x_0}$  y llamando  $V^{x_0} = f^{-1}V^{f(x_0)}$  entonces vemos que es entorno de  $x_0$ .

### **Proposición (Caracterización de Continuidad)**

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función entre espacios topológicos, entonces son equivalentes:

1.  $f$  es continua.
2.  $\forall U \overset{ab}{\subset} Y : f^{-1}(U) \overset{ab}{\subset} X$ .
3.  $\forall F \overset{cerr}{\subset} Y : f^{-1}(F) \overset{cerr}{\subset} X$ .
4.  $\forall A \subset Y : f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}(A))$ .
5.  $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

Demostración:

$$1. 1 \Rightarrow 2)$$

Escojamos un abierto cualquiera  $W^{\text{ab}} \subset Y$ . Por ser abierto, es entorno de todos sus puntos y, en particular, es entorno de las imágenes que puedan caer dentro de dicho abierto, es decir,  $\forall x \in f^{-1}(W) : W = V^{f(x)}$ . Por continuidad, las preimágenes de entornos de las imágenes son entornos de las preimágenes, luego  $\forall x \in f^{-1}W : f^{-1}W = V^x$  y como es entorno de todos sus puntos, entonces  $f^{-1}W \overset{ab}{\subset} X$ .

$$2. 2 \Rightarrow 3)$$

Como lo que sabemos es que las preimágenes de abiertos son abiertas y los cerrados se definen en términos de abiertos, no nos queda otra estrategia que intentar demostrarlo pasando los cerrados a sus complementarios: los abiertos.

Escojamos un cerrado cualquiera  $C \overset{cerr}{\subset} Y$  de modo que conocemos que  $Y \setminus C \overset{ab}{\subset} Y$ . Como conocemos el resultado para abiertos, podemos decir que  $f^{-1}(Y \setminus C) \overset{ab}{\subset} X$  y conjuntivamente  $X \setminus f^{-1}C = f^{-1}(Y \setminus C)$ , luego directamente tenemos que  $f^{-1}C \overset{cerr}{\subset} X$ .

$$3. 3 \Rightarrow 5)$$

$$\overline{f(A)} \overset{cerr}{\subset} Y \Rightarrow^3) \underbrace{f^{-1}\overline{f(A)}}_{\subset f^{-1}f(A) \supset A} \subset X \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$4. 5 \Rightarrow 4)$$

$$Y \setminus \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overline{Y \setminus A} \supset \overline{f(X \setminus f^{-1}A)} \stackrel{5)}{\supset} f(\overline{X \setminus f^{-1}(A)}) = f(X \setminus \text{Int}(f^{-1}A)) \Rightarrow \\ X \setminus \text{Int}(f^{-1}A) \subset f^{-1}(Y \setminus \overset{\circ}{A}) = X \setminus f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}A).$$

$$5. 4 \Rightarrow 1)$$

$$V^{f(x)} \Rightarrow f(x) \in \text{Int}(V^{f(x)}) \Rightarrow x \in f^{-1}(\text{Int}(V^{f(x)})) \subset \text{Int}(f^{-1}V^{f(x)}) \Rightarrow \\ f^{-1}V^{f(x)} \text{ entorno de } x.$$

Observación:

1. Los cuatro primeros enunciados tratan sobre “imágenes inversas”. Por ejemplo, la segunda dice que  $f^{-1}\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$ .

2. Pensando que un punto adherente es un “punto límite”, 5 nos dice que “la imagen del límite es el límite de la imagen”.
3.  $id : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$  es continua  $\Rightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ .

Demostración:

$$id^{-1}\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2.$$

Y no mencionamos todos los ejemplos conocidos en espacios afines  $\mathbb{R}^n$  con  $\mathcal{T}_u$ .

## Continuidad y subespacios

### Proposición

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y  $Z \subset X$  un subespacio topológico, entonces la restricción  $f|_Z : Z \rightarrow Y$  también es continua.

Demostración:

Aplicando la caracterización de continuidad a través de las preimágenes de abiertos, tenemos que:

$$\forall A \overset{ab}{\subset} Y : (f|_Z)^{-1}(A) = Z \cap f^{-1}A \overset{ab}{\subset} Z$$

donde este último conjunto es abierto por ser un abierto ambiente cortado con el subespacio (que es como son los abiertos de la topología relativa).

Observación:

1.  $Z \overset{j}{\subset} X$  es continua.

Demostración:

- $z \in Z : \forall V^{j(z)} : \underbrace{j^{-1}(V^{j(z)})}_{=V^{j(z)} \cap Z}$  entorno de  $z$  en  $Z$ .
- $\forall U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : \underbrace{j^{-1}(U)}_{U \cap Z} \overset{\text{ab.}}{\subset} Z$

2.  $Z \overset{j}{\subset} X \xrightarrow{f} Y$ . Si  $f$  es cont.  $\Rightarrow f|_Z$  continua. (No a la inversa).

Demostración:

Como  $f|_Z = f \circ j$  y ambas son continuas, por composición,  $f|_Z$  es continua.

3. La continuidad es local.

Si  $f|_{E^x}$  continua en  $x \Rightarrow f$  continua en  $x$ .

Demostración:  $\forall V^{f(x)} \Rightarrow (f|_E)^{-1} \left( \underbrace{V^{f(x)}}_{=W^x} \right)$  entorno de  $x$  en  $E^x$ .

Como  $W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} E^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X$  (entorno en entorno es entorno). Porque,

$$\left. \begin{array}{l} x \in W^x : \exists G \overset{\text{ab.}}{\subset} W^x \subset E^x : G = A \cap E^x \subset X \\ x \in E^x : \exists B \overset{\text{ab.}}{\subset} E^x \subset X \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \underbrace{A \cap B}_{\subset X \text{ ab.}} \subset \underbrace{A \cap E^x}_{=G} \subset W^x$$

4. Si  $f|_{U \subset X}$  es continua  $\Rightarrow f$  continua  $\forall x \in U$ .

5.  $x$  es aislado  $\Rightarrow f$  continua en  $x$ .

Demostración:

$x$  aislado  $\Leftrightarrow V^x = \{x\}$  es abierto de  $X$ .  $f|_{V^x} : \{x\} \rightarrow Y$ .

6.  $f : X \rightarrow Y \supset Z$  tal que  $f(X) \subset Z \subset Y$  (si no es así puede estar mal definido).

Entonces,  $f$  a  $Y$  es continua  $\Leftrightarrow f$  a  $Z$  es continua.

Demostración:

■  $f$  cont. en  $Z \xrightarrow{j \circ f} f$  cont. en  $Y$ .

■  $f$  cont. en  $Y \xrightarrow{?} f$  cont. en  $Z$ .

Sea  $U_z$  ab. en  $Z$ . Este será  $U_y \cap Z = U_z$  que cumple,  $f_z^{-1}(U_y \cap Z) \stackrel{f(X) \subset Z}{=} f_y^{-1}(U_y)$  que es abierto en  $X$  (por ser  $f_y$  continua).

### Proposición (Criterios de continuidad por recubrimientos)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  será continua si:

■ **Por abiertos:**  $\exists X = \bigcup_{i \in I} U_i^{ab.} : \forall f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$  es continua.

■ **Por cerrados:**  $\exists X = \bigcup_{i=0}^n F_i^{cerr.} : \forall f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y$  es continua.

Demostración:

■  $W \overset{ab.}{\subset} Y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W \\ (f|_{U_i})^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset}_{(\text{cont.})} U_i \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow (f|_{U_i})^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$$

Por unión de abiertos.

■  $C \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow$

$$\begin{cases} f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n (f|_{F_i})^{-1}C \\ (f|_{F_i})^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset}_{(\text{cont.})} F_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow (f|_{F_i})^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$$

Por unión finita de cerrados.

### Proposición (Continuidad por recubrimientos)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función entre espacios topológicos, si se da alguna de las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ donde } U_i \overset{ab.}{\subset} X \\ \forall f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y \text{ cont.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \bigcup_{i=0}^n F_i \text{ donde } F_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \\ \forall f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y \text{ cont.} \end{cases}$$

entonces la función  $f$  del inicio es continua.

Demostración:

■ Escojamos un abierto cualquiera  $W \overset{ab.}{\subset} Y$  y veamos si su preimagen  $f^{-1}W$  es un abierto en  $X$ . En primer lugar, por ser  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  podemos escribir que  $f^{-1}W = X \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap f^{-1}W) = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W$ . Como  $(f|_{U_i})^{-1}W \overset{ab.}{\subset} U_i \overset{ab.}{\subset} X$ , entonces  $(f|_{U_i})^{-1}W \overset{ab.}{\subset} X$  y de esta manera podemos escribir  $f^{-1}W$  como unión de abiertos  $\bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W$  de  $X$ , es decir, que  $f^{-1}W \overset{ab.}{\subset} X$ .

- Escojamos un cerradp cualquiera  $C \subset^{\text{cerr}} Y$  y veamos si su preimagen  $f^{-1}C$  es cerrada en  $X$ . En primer lugar, por ser  $X = \bigcup_{i=0}^n F_i$  podemos escribir que  $f^{-1}C = X \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^n (F_i \cap f^{-1}C) = \bigcup_{i=0}^n (f|_{F_i})^{-1} C$ . Como  $(f|_{F_i})^{-1} C \subset^{\text{cerr}} F_i \subset^{\text{cerr}} X$ , entonces  $(f|_{U_i})^{-1} C \subset^{\text{cerr}} X$  y de esta manera podemos escribir  $f^{-1}C$  como unión finita de cerrados  $\bigcup_{i=0}^n (f|_{F_i})^{-1} C$  de  $X$ , es decir, que  $f^{-1}C \subset^{\text{cerr}} X$ .

## Homeomorfismos

Recordemos las definiciones de continuidad que hemos visto:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}$$

Ahora veamos que ocurre al invertir la relación.

---

### Definición (Aplicaciones abiertas y cerradas)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función entre espacios topológicos, decimos que es:

- **abierta** si y sólo si las imágenes de abiertos son abiertos.
  - **cerrada** si y sólo si las imágenes de cerrados son cerrados.
- 

Observación:

La caracterización que dimos de la continuidad hacía referencia a las preimágenes de abiertos y cerrados, no a sus imágenes. De hecho, ni la continuidad implica que la aplicación sea abierta o cerrada, ni viceversa.

Ejemplo:

En la siguiente tabla podemos ver distintos ejemplos de funciones que verifican algunas de las condiciones que hemos definido, pero no otras simultáneamente:

funcion	continua	abierta	cerrada
$Id : X_{\text{trivial}} \rightarrow X_{\text{discreta}}$	✗	✓	✓
$Id : X_{\text{discreta}} \rightarrow X_{\text{trivial}}$	✓	✗	✗
$j : [0, 1] \subset \mathbb{R}_u$	✓	✗	✓
$j : (0, 1) \subset \mathbb{R}_u$	✓	✓	✗

### Proposición (Trivialidades esenciales)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función biyectiva, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $f$  es abierta
- $f$  es cerrada
- $f^{-1}$  es continua.

Demostración:

1.  $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow X \setminus F_{\text{ab}} \subset X \Rightarrow^{f \text{ ab}} \underbrace{f(X \setminus F)}_{=Y \setminus f(F)(\text{biy.})} \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(F) \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f \text{ cerr.}$
2.  $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow^{f \text{ cerr}} \underbrace{f(F)}_{=(f^{-1})^{-1}(F)(\text{biy})} \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f^{-1} \text{ cont.}$

$$3. U_{ab} \subset X \Rightarrow^{f^{-1}\text{ cont}} \underbrace{(f^{-1})^{-1}(U)}_{f(U)(\text{biy.})} \subset Y \Rightarrow f \text{ ab.}$$


---

### Definición (Homeomorfismo)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación biyectiva, decimos que es un **homeomorfismo** si y sólo si  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas, o equivalentemente si:

$$\begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{ab.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{cerr.} \end{cases}$$


---

Observación:

- Cuando  $f$  es homeomorfismo establecemos una biyección entre las topologías:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}_X &\rightarrow \mathcal{T}_Y \\ U &\mapsto f(U) \\ f^{-1}(W) &\leftarrow W. \end{aligned}$$

- Se conserva por rotación, por composición.
- 

### Definición (Localización de un homeomorfismo)

Sea  $f : X \rightarrow Y$ ,

- Es homeomorfismo local en  $x_0 \in X$  si  $f : V^{x_0} \rightarrow V^{f(x_0)}$  es homeomorfismo para entornos de  $x_0$  y  $f(x_0)$ . Se suele decir para entornos “suficientemente pequeños”.
  - Es homeomorfismo local si lo es en todo el dominio.
- 

Observación:

Se pueden tomar  $V^{x_0}, V^{f(x_0)}$  entornos abiertos.

Demostración:

Tenemos:

$$\underbrace{V^a}_{\subset X} \xrightarrow{f} \underbrace{V^{f(a)}}_{\subset Y}$$

Sabemos que  $\exists U^a (\subset V^a) \xrightarrow{\text{ab.}} f(U^a) (\subset V^{f(a)})$  al ser homeomorfismo.

Además, como  $f$  es abierto, local en  $V^{f(a)}$  (homeomorfismo local),  $f(U^a)$  es entorno de  $f(a)$ , pero no abierto (tal vez sí).

Por tanto, tiene un abierto ( $W^{f(a)} \subset f(U)$ ) que es imagen de un abierto,  $G$ , en  $X \rightarrow f(G) = W^{f(a)} \subset Y$ , con  $G \subset X$ .

### Proposición (Restricción de homeomorfismos)

Sea  $f : X \rightarrow Y$ , la restricción a  $Z \subset X$  también es homeomorfismo:  $f : Z \rightarrow f(Z)$ .

Demostración:

La restricción será biyectiva por serlo  $f$  (y por estar restringida la llegada  $Y$ ). Una biyección es homeomorfismo si son continuas ellas y su inversa, pero como ya vimos la restricción de una continua es continua, por lo tanto, la restricción de  $f$  y  $f^{-1}$  a  $Z$  y  $f(Z)$  son también continuas. Es decir,  $f|_Z$  es homeomorfismo.

### Proposición (Composición de homeomorfismos)

Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  homeomorfismos  $\Rightarrow h = f \circ g$  es homeomorfismo.

### Proposición

Un homeomorfismo local es abierto.

Demostración:

$$U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \xrightarrow{?} f(U) \text{ entorno } \forall y_0 = f(\overbrace{x_0}^{\in U}) \in f(U).$$

Como  $f$  homeomorfismo local  $\Rightarrow \forall x_0 \in U, \exists f| : V^{x_0} \rightarrow V^{y_0}$ , homeomorfismo  $\Rightarrow f(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\in f(U)}) \overset{\exists y_0=f(x_0)}{\subset} V^{y_0}$  es homeomorfismo  $\Rightarrow f(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\in f(U)})$  entorno de  $y_0 \Rightarrow f(U)$  entorno de  $y_0$ .

Se puede ver también porque, como  $U = \bigcup_{x \in U} W^x (\subset V^x) \Rightarrow f(U) = f(\bigcup_x W^x) = \bigcup_x f(W^x)$  es abierto por unión de abiertos.

### Definición (Homeomorfismo Local)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función entre espacios topológicos, decimos que es un **homeomorfismo local** en  $x_0 \in X$  si y sólo si  $f : V^{x_0} \rightarrow V^{f(x_0)}$  restringida a algunos entornos de  $x_0$  y  $f(x_0)$  es homeomorfismo.

Ejercicio: Se pueden tomar  $V^{x_0}, V^{f(x_0)}$  abiertos.

Observación:

Un homeomorfismo local es abierto.

Demostración:

$U \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(U) \text{ entorno } \forall y_0 = f(\overbrace{x_0}^{\in U}) \in f(U)$ . Como  $f$  homeomorfismo local  $\Rightarrow f| : V^{x_0} \rightarrow V^{y_0}$  es homeomorfismo  $\Rightarrow f(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\in f(U)}) \subset_{\text{ab}} V^{y_0} \Rightarrow f(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\in f(U)})$  entorno de  $y_0 \Rightarrow f(U)$  entorno de  $y_0$ .

Ejemplo: (¡Importantes!)

1. Proyección estereográfica:  $\mathbb{S}^m \setminus \{\text{punto}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  homeomorfismo. ( $\mathbb{R}^m$  es en realidad un hiperplano de  $\mathbb{R}^{m+1}$  en el que se encuentra contenida la “esfera”)
2. Proyección exponencial  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi \theta, \sin 2\pi \theta)$ , homeomorfismo local, pero no es inyectiva (periódica).
3. Proyección antipodal:  $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \supset \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{RP}^m : x \mapsto [x]$  homeomorfismo local. Es 2-1 por llevar las antípodas al mismo  $[x]$ .

Podemos dividir  $\mathbb{S}^m$  tal que:  $\mathbb{S}^m = S_+ \cup S_- \cup E$  (ecuador). Llamando  $U_p$  a todas las rectas no contenidas en el plano ortogonal a la recta formada por el punto que se quita y su antípoda. Con esto tenemos  $U_p \simeq \mathbb{R}^m$ . Uniéndolo con el hiperplano del infinito  $H_p^\infty$  tenemos que los polos van a  $U_p$  y  $E$  a  $H_p^\infty$ . Esta correspondencia es homeomorfa por lo que se puede trasladar la topología.

Con esto, esta proyección será un recubrimiento doble de  $\mathbb{RP}^m$ ,  $m \geq 2$ .

4. Lemniscata:  $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left( \frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4} \right)$  es biyectiva continua, pero no homeomorfismo local.

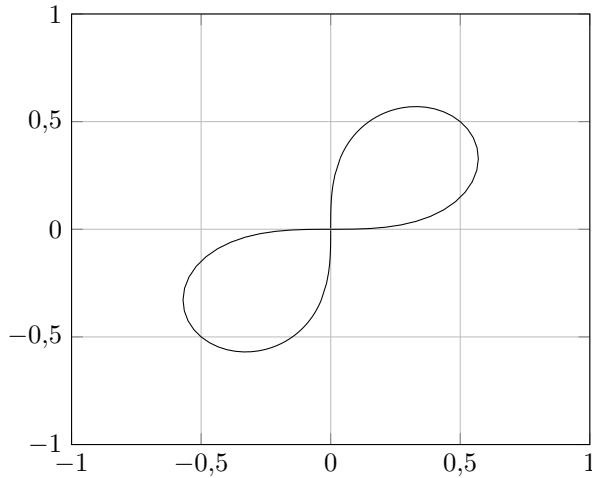


Figura 2.1: Representación Lemniscata.

Engañosamente:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) = I_\varepsilon : f| : I_\varepsilon \rightarrow f(I_\varepsilon)$$

es homeomorfismo.

En  $t = 0$ ,  $f(I_\varepsilon)$  no es entorno de  $f(0) = (0, 0)$ , porque se tienen que tomar elementos de la rama “vertical”.

5. Las coordenadas polares  $(0, \rightarrow) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  es homeomorfismo local con  $\theta_0 \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$  hasta  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  con  $L$  la recta entre  $O$  y  $\theta_0$ .

### Definición (Variedad Topológica)

Una **variedad topológica** de dimensión  $m$  es un espacio localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$ , es decir, que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una<sup>1</sup> bola  $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ .

Ejemplo:

Esferas, espacios proyectivos, toros...

---

<sup>1</sup>Luego, en el fondo, es homeomorfo a cualquier bola y, por ser éstas parte de una base de  $\mathbb{R}^m$ , es homeomorfo a todo  $\mathbb{R}^m$ .

# Construcciones

---

En este capítulo buscaremos topologías en base a unas aplicaciones con el objetivo de hacer a dichas aplicaciones continuas. Tras esto, daremos una caracterización de la topología construida. Por último, exploraremos las propiedades de las construcciones.

## Imágenes inversas

Supongamos que tenemos  $f : Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$  y buscamos hacerla continua. Trivialmente, podemos hacer que la topología en  $Y$  sea la discreta, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos la topología menos fina que haga  $f$  continua.

---

### Definición

Llamamos **topología de la imagen inversa** a:  $f^{-1}\mathcal{T} = \{f^{-1}U : U \in \mathcal{T}\}$ .

---

### Proposición

La topología de la imagen inversa cumple:

1. Es topología.
2. Es mínima.

#### Demostración:

1. Trivial.
2. Sea  $\mathcal{T}'$  otra topología en  $Y$  que haga  $f$  continua.

Tomamos  $U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{T} : f^{-1}V = U$ . Como  $f$  en  $\mathcal{T}'$  es también continua tenemos que  $U = f^{-1}V$  es abierto en  $\mathcal{T}'$ . Es decir, todo abierto en  $f\mathcal{T}$  es también abierto en  $\mathcal{T}' \Rightarrow f\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ .

#### Observación:

Con esta definición,  $f$  será continua.

## Caracterización de la imagen inversa

Veamos ahora una caracterización de la topología que acabamos de introducir.

### Teorema (Propiedad universal de las inmersiones)

Sean  $g : (Z, \mathcal{T}'') \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  y  $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ . Entonces:

$$\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow$$

$$[\forall g : g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}] \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ g \uparrow & \nearrow f \circ g & \\ (Z, \mathcal{T}'') & & \end{array}$$

Figura 3.1: Ilustración de la composición propuesta

Demostración:

- $\Rightarrow) \mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} :$ 
  - $g \text{ cont.} \Rightarrow f \circ g \text{ cont.}$  (Composición de continuas)
  - $f \circ g \text{ cont.} \Rightarrow g \text{ cont.}$  ( $V \in \mathcal{T}' \Rightarrow g^{-1}V \stackrel{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}}{=} g^{-1}f^{-1}U = (f \circ g)^{-1}U \stackrel{f \circ g \text{ cont.}}{\in} \mathcal{T}''$ )
- $\Leftarrow)$  Por otro lado, veamos la unicidad:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ id \uparrow & \nearrow f & \\ (Y, \mathcal{T}') & & \end{array}$$

Como esta  $id$  es continua, por (3.1),  $f \circ id = f$  es también continua. Al ser  $f^{-1}\mathcal{T}$  la menos fina,  $\mathcal{T}' \supset f^{-1}\mathcal{T}$ .

Además,

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{T}) \\ id \uparrow & \nearrow f \text{ cont.} & \\ (Y, f^{-1}\mathcal{T}) & & \end{array}$$

Como la  $f$  es continua, por (3.1), esta nueva  $id$  es también continua  $\Rightarrow f^{-1}\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$ .

### Enunciado

*Demostrar  $\Leftarrow$  sin usar que  $f^{-1}\mathcal{T}$  es la menos fina (usar que cumple la caracterización). Hecho en clase.*

## Inmersiones

Veamos ahora un caso de especial relevancia:

$$f : Y \rightarrow X \text{ inyectiva}$$

### Definición

Una aplicación continua inyectiva  $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$  tal que  $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$  se llama **inmersión**.

### Proposición

Sea  $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (f(Y), \mathcal{T})$ . Entonces:

$$\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow f : (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{\text{homeo.}} (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$$

Demostración:

- $\Rightarrow)$  Tenemos que  $f : (Y, f^{-1}\mathcal{T}) \rightarrow (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$ .

Al ser  $f$  inyectiva, también será biyectiva. Veamos que es continua y abierta:

- Continua: Sea  $U \in \mathcal{T}|_{f(Y)} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{T} : U = f(Y) \cap W \Rightarrow$

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(W \cap f(Y)) = Y \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(W)$$

que es abierto en  $f^{-1}\mathcal{T}$ .

- Abierta: Sea  $U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{T} : f^{-1}W = U$ . Aplicando  $f$ :

$$fU = ff^{-1}W = W \cap f(Y) \stackrel{\text{ab.}}{\subset} f(Y)$$

es decir que  $fU$  es abierto en  $f(Y)$ .

- $\Leftarrow)$  Veamos la doble contención:

- $\subset)$  Sea  $U \in \mathcal{T}' \stackrel{\text{ab.}}{\implies} fU \in \mathcal{T}|_{f(Y)}$ , es decir,  $\exists W \in \mathcal{T}|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$ . Por tanto,  $U \in f^{-1}\mathcal{T}$ .
- $\supset)$  Sea  $U \in f^{-1}\mathcal{T} \stackrel{\text{def.}}{\implies} \exists W \in \mathcal{T}|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$ . Como  $f$  es continua en  $\mathcal{T}'$ ,  $U = f^{-1}W \in \mathcal{T}'$ .

Observación:

1.  $f : Y \rightarrow X$  1 – 1 cont. +  $\begin{cases} \text{abierto} \Rightarrow \text{inmersión} \\ \text{cerrado} \Rightarrow \text{inmersión} \end{cases}$

Demostración:

- Abierto en  $X \Rightarrow$  abierto en  $f(Y)$ .
- Cerrado en  $X \Rightarrow$  cerrado en  $f(Y)$ .

2.  $f : Y \rightarrow X$  inmersión:  $\begin{cases} \text{abierto} \Leftrightarrow f(Y) \text{ abierto en } X \\ \text{cerrado} \Leftrightarrow f(Y) \text{ cerrado en } X \end{cases}$

Demostración:

- $f(Y) \stackrel{\text{ab.}}{\subset} X : V = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow fV = \overbrace{U \cap f(Y)}^{\text{inter. abiertos}} \in \mathcal{T}$ .
- $f(Y) \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X : C \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow Y \setminus C = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow f(C) = \underbrace{(X \setminus U) \cap f(Y)}_{\text{inter. cerrados}} \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X$

3. Tenemos como posibilidades:

- Inmersión + /ab. + /cerr.
- Inmersión + ab. + /cerr.
- Inmersión + /ab. + cerr.

Observación:

Las inmersiones permiten considerar unos espacios como subespacios de otros. Las frases “el plano proyectivo real no es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ ”, “la esfera no es un subespacio de  $\mathbb{R}^2$ ”, “el plano proyectivo real es un subespacio de  $\mathbb{R}^4$ ” se refieren a esto: cuándo hay o no hay una inmersión del primer espacio en el segundo, es decir, un subespacio del segundo homeomorfismo al primero. Es un problema fundamental de la topología y de la geometría.

## Imágenes directas

Supongamos que tenemos  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$  y buscamos hacerla continua. Trivialmente, podemos hacer que la topología en  $X$  sea la trivial, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos la topología más fina que haga  $f$  continua.

---

### Definición

Llamamos **topología de la imagen directa** a:  $f\mathcal{T} = \{V \subset Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}\}$ .

---

### Proposición

1. Es topología.

2. Máxima.

Demostración:

1. Trivial.

2. Sea  $\mathcal{T}'$  tal que haga  $f$  continua. Veamos que  $\mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$ .

Tomamos  $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow \exists W \in \mathcal{T}' : f^{-1}U = W$ . Por definición de  $f\mathcal{T}$ , ya tenemos que  $U \in f\mathcal{T}$  (porque  $W \in Y$ ).

Observación:

Con esta definición,  $f$  será continua.

## Caracterización de la imagen directa

Veamos ahora una caracterización de la topología que acabamos de introducir.

### Teorema (Propiedad universal de las identificaciones)

Sean  $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$  y  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ . Entonces:

$$\mathcal{T}' = f\mathcal{T} \Leftrightarrow$$

$$\forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow g \circ f \text{ cont.}] \quad (3.2)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\
 g \circ f \searrow & & \downarrow g \\
 & & (Z, \mathcal{T}'')
 \end{array}$$

Figura 3.2: Ilustración de la composición propuesta

Demostración:

1.  $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$ :

- $g$  cont.  $\Rightarrow g \circ f$  cont. (Composición de continuas)
- $g \circ f$  cont.  $\Rightarrow g$  cont. ( $W \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}W) = \underbrace{(g \circ f)^{-1}}_{\text{cont.}} W \in \mathcal{T} \stackrel{\mathcal{T}' = f\mathcal{T}}{\Rightarrow} g^{-1}W \in \mathcal{T}'$ )

2. Por otro lado, veamos la unicidad:

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\
 g \circ f = f \searrow & & \downarrow id \\
 & & (Y, \mathcal{T}'')
 \end{array}$$

Como  $id$  será continua, aplicamos 3.2 y tenemos que  $g \circ f = f$  es continua. Al ser  $f\mathcal{T}$  la más fina  $\Rightarrow \mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\
 f \text{ cont.} \searrow & & \downarrow id \\
 & & (Y, f\mathcal{T})
 \end{array}$$

Como  $f$  es continua por definición de  $f\mathcal{T}$ , aplicamos 3.2 y tenemos que esta  $id$  es continua. Por esta razón,  $f\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ .

### Enunciado

*Demostrar (ii) sin usar que  $f\mathcal{T}$  es la más fina (usar que cumple la caracterización)*

Observación:

$$f(X) \text{ es abierto y cerrado en } f\mathcal{T} : \begin{cases} \forall y \in Y \setminus f(X), f^{-1}y = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \{y\} \in f\mathcal{T} \\ f^{-1}f(X) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow f(X) \in f\mathcal{T} \end{cases}$$

### Identificaciones

Veamos ahora un caso de especial relevancia:

$f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva.

Para entender los abiertos de una imagen directa es conveniente representarlos en el dominio. El concepto es conjuntista en realidad:

## Conjuntos saturados

Conjuntos saturados

---

### Definición

Un conjunto  $A \subset X$  es **saturado** (respecto de  $f$ ) si  $f^{-1}f(A) = A$ .

---

### Proposición

Los abiertos de  $f\mathcal{T}$  son las imágenes de los abiertos saturados de  $\mathcal{T}$ :

$$U \in f\mathcal{T} \Leftrightarrow \exists W \in \mathcal{T}, \text{ saturado} : fW = U.$$

Demostración:

- $\Rightarrow)$   $V \in f\mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}V \in \mathcal{T}$  y  $V \stackrel{f \text{ sobre}}{\cong} f^{-1}fV$ , es decir, que  $f^{-1}V$  es saturado.
- $\Leftarrow)$  Sea  $V \in Y : \exists U \in \mathcal{T}$ , saturado tal que:  $fU = V$ . Debemos ver que  $f^{-1}V \in \mathcal{T}$ .  
Como  $f^{-1}V = f^{-1}fU \stackrel{\text{sat.}}{=} U \in \mathcal{T}$  ya lo tenemos.

Observación:

Los abiertos no saturados de  $X$  pueden tener imágenes no abiertas de  $Y$ .

Ejemplo:

1. Sea:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^1 = Y \\ t &\mapsto \underbrace{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}_{\exp(2\pi i t)} \end{aligned}$$

que geométricamente es:

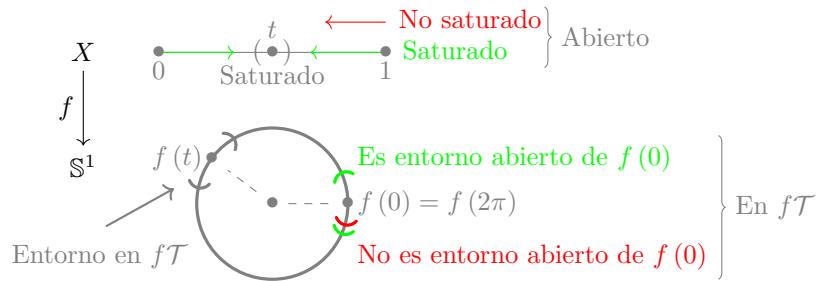


Figura 3.3: La topología imagen directa es la usual en  $\mathbb{S}^1$

2. Tenemos:

$$\begin{aligned} f : R = [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow C \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \\ (s, t) &\mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t). \end{aligned}$$

que geométricamente es:

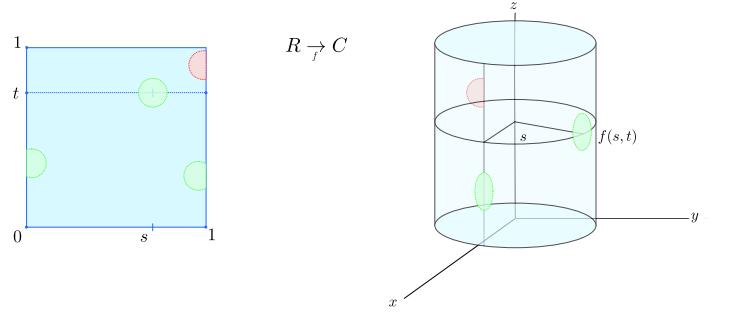


Figura 3.4: Analizando los abiertos saturados y no saturados se concluye que la topología imagen directa es la usual en el tronco del cilindro.

## Identificaciones

### Definición

Una aplicación continua sobre  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  tal que  $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$  se llama **identificación**

Observación:

1. Identificación:  $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Leftrightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

Continua:  $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Rightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

2. Sea  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva continua. Será identificación si además es:

- Abierta.

Demostración:

Por (1).

- Cerrada.

Demostración:

$$f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X \stackrel{\text{cerr.}}{\Rightarrow} \underbrace{f(X \setminus f^{-1}(V))}_{\substack{\text{sobr.} \\ Y \setminus V}} \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow V \overset{\text{ab}}{\subset} Y$$

3. Tenemos como posibilidades:

- Identificación + /ab. + /cerr.
- Identificación + ab. + /cerr.
- Identificación + /ab. + cerr.

## Cocientes

### Definición (Relación de inyectividad)

Llamamos **relación de inyectividad** a aquella relación de equivalencia que viene dada por una función  $f$  tal que dos elementos están relacionados si comparten imagen:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

---

### Definición (Proyección canónica)

Llamamos *proyección canónica* respecto de una relación de equivalencia a la aplicación:

$$\begin{aligned} p : X &\rightarrow X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

donde  $[x]$  es la clase de equivalencia de  $x$ .

---

Con esto vemos que dentro de las identificaciones tenemos el caso particular del cociente:

$$p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow X/\sim.$$

Con esto definimos:

---

### Definición (Topología cociente)

Llamamos *topología cociente* a:

$$\mathcal{T}_{/\sim} := \left\{ U \subset X/\sim : p^{-1}(U) \in \mathcal{T} \right\}$$

que viene a ser la topología imagen directa por  $p$ .

---

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, f(\mathcal{T})) \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} = f \circ p^{-1} & \downarrow \\ (X/\sim, p(\mathcal{T})) & & [x] \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & f(x) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ [x] & & \end{array}$$

Figura 3.5: Representación de la composición del cociente

Observación:

La relación de equivalencia que vamos a usar es la que viene dada por la relación de inyectividad respecto de  $f$ . Por esta razón,  $\bar{f}$  será una biyección.

Demostración:

Sea  $z \in Y$  como  $f$  es suprayectiva  $\exists x \in X : f(x) = z$ . A su vez,  $y \in [x] \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \bar{f}([x]) = z$ . Con esto,  $\bar{f}$  es sobreyectiva y bien definida.

Sean ahora  $[x], [y] \in X/\sim$  tal que  $\bar{f}[x] = \bar{f}[y] \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow [x] = [y]$ . Por tanto, también es inyectiva.

### Proposición

1.  $\exists \bar{f} \Leftrightarrow x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$
2.  $\exists \bar{f} : \bar{f} \text{ continua} \Leftrightarrow f \text{ continua.}$
3.  $\exists \bar{f} : \bar{f} \begin{cases} \text{sobre.} \\ \text{iny. 1-1} \end{cases} \Leftrightarrow f \begin{cases} \text{sobre.} \\ x \sim y \Leftrightarrow f(x) \sim f(y) \end{cases}$
4.  $\bar{f} \text{ homeomorfa} \Leftrightarrow f \text{ identificación.}$

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\quad f \quad} & (Y, \mathcal{T}') \\
 p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 (X_{\sim}, \bar{\mathcal{T}}) & & 
 \end{array}$$

ident.  
homeo.

Figura 3.6: Relación entre el cociente y una identificación.

Demostración:

1. Por la definición de  $\sim$  y de  $\bar{f}$ .
2. Sea  $\bar{f}$  continua. Tomemos  $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow \bar{f}^{-1}U \in \bar{\mathcal{T}}$ . Como  $p$  es continua por definición de  $\bar{\mathcal{T}}$ ,  $f^{-1}U = p^{-1}\bar{f}^{-1}U \in \mathcal{T}$ . Por lo que  $f$  es continua.  
 Sea ahora  $f$  continua. Tomemos  $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow W = f^{-1}U \in \mathcal{T}$ . Al ser  $p$  sobreyectiva  $W = p^{-1}pW \in \bar{\mathcal{T}}$  (ya que  $p^{-1}(pW) \in \mathcal{T}$  y la definición de  $\bar{\mathcal{T}}$ ).
3. (Anterior observación) Si  $\bar{f}$  es inyectiva 1-1  $\Rightarrow \underbrace{\bar{f}[x] = \bar{f}[y]}_{\Leftrightarrow f(x) \sim f(y)} \Rightarrow \underbrace{[x] = [y]}_{\Leftrightarrow x \sim y}$

Política general:

Los cocientes son cómodos para definir espacios, las identificaciones son mejores para estudiar las propiedades que tenemos. Conviene pues tener triángulos como el anterior (3.6).

Se puede contemplar  $Y$  como un modelo del cociente. Es decir, utilizamos el cociente como “modelo teórico” y la identificación como “modelo geométrico”. Esto no siempre será posible ya que dependerá de ciertas propiedades geométricas que veremos.

Ejemplo: (Anteriores)

- Circunferencia y el cilindro como cocientes:

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\
 p \downarrow & \nearrow \text{cont.} & \\
 [0, 1] & \xrightarrow{\quad} & \\
 & \scriptstyle 0 \equiv 1 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 [0, 1] \times [0, 1] & \longrightarrow & C \subset \mathbb{R}^3 \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{\quad} & \\
 & \scriptstyle (0, t) \equiv (1, t) & 
 \end{array}$$

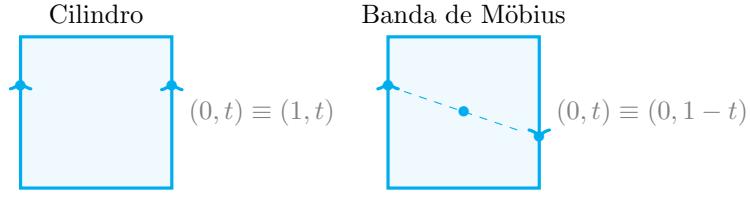
Figura 3.7: En el primero tomamos un segmento de longitud 1 y “pegamos” los extremos, lo que nos da una figura equivalente a un círculo. En el segundo, tomamos un rectángulo de área 1 y “pegamos” el lado izquierdo con el derecho directamente.

Para la circunferencia tenemos:

$$X_{\sim} = \{\{t\} : 0 < t < 1, \{0, 1\}\}$$

la biyección entre el cociente y la esfera se da por el punto (3) de la anterior proposición y la continuidad por (2). Por último, la identificación se da por el anterior ejemplo.

- Para representar cocientes se utilizan dibujos que indican las identificaciones en los espacios de partida:



## Productos (finitos)

Supongamos que tenemos  $p_i : X_1 \times \dots \times X_r = Y \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i), 1 \leq i \leq r$  y buscamos hacerlas continuas. Trivialmente, podemos hacer que la topología en  $X_i$  sea la discreta, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos las topologías menos finas que hagan  $p_i$  continuas.

Que  $p_i$  sea continua quiere decir que  $\forall U_i \in \mathcal{T}_i : p_i^{-1}U_i = X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_r$  debe ser abierto, es decir, que todos lo sean. Por tanto,  $\bigcap_{i=1}^r p_i^{-1}U_i = U_1 \times \dots \times U_r$  debe ser abierto, pero no es topología (la unión de productos no tiene porque ser producto). Por tanto, definimos:

---

### Definición

Llamamos **topología producto**,  $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_r$ , a aquella que viene determinada por la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$$


---

### Ejemplo:

La  $\mathcal{T}_u$  en  $\mathbb{R}^n$  es el producto de la usual en cada factor  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{R}^n$ . La base de la definición de topología producto está formada por las “bolas cuadradas”, que son productos de intervalos.

### Teorema (Propiedad universal de la topología producto)

Sea  $g : (Z, \mathcal{T}'') \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  y  $p_i : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ . Entonces:

$$\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T} \Leftrightarrow$$

$$\forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \quad (3.3)$$

$$\begin{array}{ccc}
 (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\
 g = (g_1, \dots, g_r) \downarrow & \nearrow g_i = p_i \circ g & \\
 (Z, \mathcal{T}'') & &
 \end{array}$$

Figura 3.8: Ilustración de la composición propuesta

### Demostración:

$$1. \mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T} :$$

- $g \text{ cont.} \Rightarrow g_i \text{ cont.}$  (Todas sus componentes son continuas o composición de continuas)
- $g_i \text{ cont.} \Rightarrow g^{-1}(U_1 \times \dots \times U_r) = \underbrace{g_1^{-1}(U_1)}_{\mathcal{T}''} \cap \dots \cap \underbrace{g_r^{-1}(U_r)}_{\mathcal{T}''} \in \mathcal{T}''$ . (Intersección finita de abiertos)

2. Por otro lado, veamos la unicidad:

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ id \text{ cont.} \uparrow & & \nearrow pr_i \\ (Y, \mathcal{T}') & & \end{array}$$

Como  $id$  será continua, aplicamos 3.3 y tenemos que  $g \circ p_i = pr_i$  es continua. Al ser  $\prod_i \mathcal{T}_i$  la menos fina  $\Rightarrow \mathcal{T}' \supset \prod_i \mathcal{T}_i$ .

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{T}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{T}_i) \\ id \uparrow & & \nearrow pr_i \text{ cont.} \\ (Y, \prod_i \mathcal{T}_i) & & \end{array}$$

Como  $pr_i$  es continua por definición de  $\prod_i \mathcal{T}_i$ , aplicamos 3.3 y tenemos que esta  $id$  es continua. Por esta razón,  $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i \supset \mathcal{T}'$ .

### Enunciado

*Demostrar (ii) sin usar que  $\prod_i \mathcal{T}_i$  es la menos fina (usar que cumple la caracterización)*

### Ejemplo:

La  $\mathcal{T}_{\text{rad}}$  no es producto.

#### Demostración:

Tomamos un abierto y veamos que no es producto.

Supongamos que sí:  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \text{arco} \ni (0,0) \Rightarrow U_1 \times U_2 \subset U$  y  $(0,0) \in U_1 \times U_2 \subset \mathcal{T}_{\text{rad}}$ . Tomando  $x_1 \in U_1$  y vemos  $x = x_1 \cap r$  con  $r$  línea vertical por  $x_1$  con esto  $y_1 = x \cap l$  con  $l$  línea horizontal por  $x$  no pertenece a  $U$  (de lo contrario el producto  $y_1$  con  $x_1 = x$  pertenecería). Por tanto,  $I_k = [(0, y_k), (x_k, y_k)]$  no tiene ningún punto en  $U_1 \times U_2$ . Haciendo converger  $I_k$  hacia 0 para cualquier recta por 0 tendremos un  $I_k$  que tenga intersección con la recta, es decir, la recta tendrá un punto que no pertenezca al abierto y  $U$  no sería abierto ¡!

Con esto,  $\nexists x_k \rightarrow 0 \Rightarrow$  habrá un intervalo  $(0, \varepsilon)$  en el eje  $x$  que no pertenece a  $U_1$  y tendremos un “vacío” que de nuevo incumple que  $U$  es abierto.

### Proposición

1.  $p_i : Y \rightarrow X_i$  es abierta.

2.  $X_j \xrightarrow{\alpha_j} Y : x_j \mapsto (a_1, \dots, x_j, \dots, a_r)$  es inmersión ( $a_i \in X_i$  fijados). La llamamos **aplicación parcial**.

#### Demostración:

1. Nos vale con probarlo para una base:  $p_i(U_1 \times \dots \times U_r) = U_i$

2. Trivialmente es inyectiva y continua. Por último,  $X_i \rightarrow j(X_i)$  es homeomorfismo, es decir, es abierta porque:

$$\begin{cases} \alpha_j(X_j) = \{a_1\} \times \dots \times X_j \times \dots \times \{a_r\} \\ \alpha_j(U_j) = \{a_1\} \times \dots \times U_j \times \dots \times \{a_r\} = \alpha_j(X_j) \cap (X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_r) \end{cases}$$

que es abierto porque estamos restringiendo la topología producto a  $\{a_1\} \times \dots \times X_i \times \dots \times \{a_r\} = \alpha_j(X_j)$ .

Ejemplo:

El ejemplo ahora de  $\mathcal{T}_{\text{rad}}$  simplemente es porque si fuese producto sus elementos deberían ser la usual y el producto de usuales es usual que es distinta de la radial.

Política general:

En una topología producto todo “se genera en productos”.

Ejemplo:

- Bases de entornos:  $\mathcal{V}^a = \mathcal{V}^{a_1} \times \dots \times \mathcal{V}^{a_r} \stackrel{\text{mut}??}{=} \{V_1 \times \dots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}^{a_i}\} (a \in Y)$ .
- Base de abiertos:  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_r = \{B_1 \times \dots \times B_r : B_i \in \mathcal{B}_i\}$  (esto repite la construcción de  $\prod_i \mathcal{T}_i$ )

## Sumas (finitas)

Supongamos que tenemos  $e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow Y = X_1 + \dots + X_r = (X_1 \times \{1\}) \cup \dots \cup (X_r \times \{r\}), 1 \leq i \leq r : x_i \mapsto (x_i, i)$  (ponemos los índices para hacerlos disjuntos) y buscamos hacerlas continuas. Trivialmente, podemos hacer que la topología en  $Y$  sea la trivial, sin embargo, esto carece de interés. Por esta razón, buscamos la topología más fina que haga  $f$  continua.

Debido a que,  $\forall U_i \in \mathcal{T}_i, e_i^{-1}(U_i \times \{i\})$  debe ser abierto, podemos definir lo siguiente:

---

### Definición

Llamamos **topología suma**,  $\sum_{i=1}^r \mathcal{T}_i$ , a aquella que viene determinada por la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \{1\}, \dots, U_r \times \{r\} : U_i \in \mathcal{T}_i, 1 \leq i \leq r\}$$

---

Observación:

Tenemos que los  $\{i\} \times X_i \in \sum_{i=1}^r \mathcal{T}_i$  son sumandos abiertos y cerrados (porque el complementario es la intersección del resto de sumandos que son abiertos?).

### Proposición

Con la anterior definición sabemos que

$$e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X_i \times \{i\}, \mathcal{T}|_{X_i \times \{i\}}), \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

es inmersión abierta y cerrada.

Demostración:

- Inmersión abierta:  $e_i(U_i) = U_i \times \{i\} \in \mathcal{T}$
- Cerrada:  $Y \setminus e_i(X_i) = Y \setminus X_i \times \{i\} = \bigcup_{j \neq i} X_j \times \{j\} \in \mathcal{T}$

### Teorema (Caracterización topología suma)

Sea  $g : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$  y  $e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r &\Leftrightarrow \\ \forall g [g \text{ cont.} &\Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{array}{ccc} (X_i, \mathcal{T}_i) & \xrightarrow{e_i} & (Y, \mathcal{T}') \\ g|_{X_i} = g \circ e_i & \searrow & \downarrow g \\ & & (Z, \mathcal{T}'') \end{array}$$

Figura 3.9: Ilustración de la composición propuesta

Demostración:

Análoga a las anteriores construcciones.

Política general:

Localmente  $Y = X_1 + \dots + X_r$  es como sea cada  $X_i$ . Por ejemplo, las bases de entornos de  $Y$  son las de los sumandos. Globalmente, se trata cada sumando separadamente. Por ejemplo, las bases de abiertos de los sumandos se unen para dar una base de abiertos de  $Y$ . Olvidando el tecnicismo  $X_i \times \{i\} \equiv X_i$ :

$Y$  es unión disjunta de los sumandos  
Los sumando son subespacios abiertos y cerrados de  $Y$

Es un formalismo para hacer cómodamente otras construcciones. Por ejemplo, “pegar dos discos por sus bordes” sería:

Disco  $D \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1$ , borde  $\partial D = \mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$

$$D_1 + D_2 / \sim \quad \overbrace{(p, 1)}^{\in \partial D} \sim (p, 2).$$

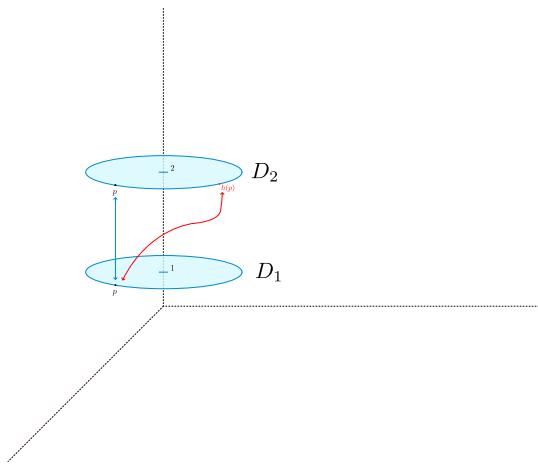


Figura 3.10: Dos discos

y más elaborado  $h : \partial D \xrightarrow{\text{homeo.}} \partial D$  con  $\overbrace{p}^{\in \partial D} \sim h(p)$ .

Finalmente, hay otros conceptos de “suma” más significativos que veremos en algún ejemplo.

## Espacios proyectivos reales

### Geometría lineal

En primer lugar, veamos un repaso de lo visto en geometría lineal sobre espacios proyectivos.

#### **Definición (Espacio proyectivo real)**

Usando  $\sim$ , proporcionalidad:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \Rightarrow \mathbb{P}^n = \{\text{rectas vectoriales de } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Que en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n). \end{aligned}$$

Observación:

Las ecuaciones serán de la forma:  $h \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$  homogénea  $\Rightarrow \begin{cases} h(x) = 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$  está bien definido en  $\mathbb{P}^n$ . Sabemos que el grado de la ecuación homogénea  $h$  nos dará lugar a:

- Grado 1: Variedades proyectivas lineales.
- Grado 2: Cuádricas proyectivas.
- Grado arbitrario: Variedades proyectivas algebraicas.

#### **Definición (Cartas afines)**

Sea  $H \subset \mathbb{P}^n$  un hiperplano proyectivo. Entonces, tenemos un hiperplano lineal  $\hat{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , con una forma lineal asociada  $h = 0$ , de la siguiente forma:

$$H = \hat{H} \setminus \{0\} / \sim$$

Decimos que  $H$  es **hiperplano del infinito** de la **carta afín**  $U = \mathbb{P}^n \setminus H$ .

#### **Proposición**

La aplicación

$$\pi| : \underbrace{\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{Hiperplano afín}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{P}^n \setminus H}_{\{h \neq 0\}} = U$$

es una biyección.

### Topología de espacio proyectivos

Para la topología en  $U$  usaremos la imagen directa de la usual en  $\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

### Proposición

Con la anterior suposición tenemos que la aplicación:

$$\pi| : \{h = 1\} \rightarrow U$$

es un homeomorfismo.

Demostración:

Ya sabemos que es biyección por lo que queda ver que es continua y abierta/cerrada. Continua lo será por tener  $U$  la topología imagen directa. Y abierta porque???

### Proposición

La siguiente definición es topología en  $\mathbb{P}^n$ :

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Demostración:

Ni idea

### Proposición (Topología en $\mathbb{P}^n$ )

- Cociente de la usual vía  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
- “Suma” de las definidas en las cartas afines:

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Estas dos topologías coinciden.

Demostración:

1.  $U$  es abierto en la topología cociente ya que  $\pi^{-1}U = \{h \neq 0\}$  es abierto usual.
2. La topología cociente en  $U$  coincide con la topología de carta afín:

$$\begin{array}{ccc}
 W \subset U : \pi^{-1}W = \text{cono sobre } (\underbrace{\pi^{-1}W}_{\substack{\text{para la top.} \\ \text{cociente}}} \cap \{h = 1\}) & \Downarrow & = (\underbrace{\pi|_{\{h=1\}}}_{\substack{\text{para la top.} \\ \text{de carta afín}}} )^{-1}W \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 \pi^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow (\pi|_{\{h=1\}})^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} \{h = 1\} & & \Updownarrow \\
 \Updownarrow & & \Updownarrow \\
 W \text{ abierto} & & W \text{ abierto} \\
 \text{top. cociente} & & \text{top. carta} \\
 & & \text{afín}
 \end{array}$$

Figura 3.11: Equivalencia entre las topologías cociente y suma.

1. + 2.  $\Rightarrow$  La top. cociente está generada por las topologías de las cartas afines, que forman un recubrimiento abierto de  $\mathbb{P}^n$ .

### Proposición

En este caso, la  $\mathcal{T}_{\text{cociente}}$  tendrá como base:  $\left\{ \pi(B) \subset U : B \overset{\text{ab.}}{\subset} \{h = 1\}, h \in \mathbb{P}[x_0, \dots, x_n] \right\}$  homogéneo de grado 1 :  $G = \bigcup_U G \cap U$  abierto en  $\mathbb{P}^n$  y abierto en  $U$ .

Observación:

En  $U_1 \cap U_2$  la topología definida por  $\pi_1 =$  definida por  $\pi_2$ .

Observación:

De lo anterior deducimos:

1.  $U_1, U_2$  dos cartas afines  $\Rightarrow U_1 \cap U_2$  abiertos.

Demostración:

$$\text{Cartas afines: } U_i = \{h_1 \neq 0\} \begin{cases} \pi| : \{h_1 = 1\} \rightarrow U_1 \text{ homeo.} \\ (\pi_1)^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} \stackrel{\text{ab.}}{\subset} \{h_1 = 1\} \end{cases}$$

2. Las topologías de  $U_1$  y  $U_2$  coinciden en  $U_1 \cap U_2$ .

Demostración:

De nuevo conviene entenderlo con cartas:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} & \xrightarrow[\text{homeo?}]{\text{homeo. para } U_1} & U_1 \cap U_2 \\ \uparrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 \neq 0, h_2 = 1\} & \xrightarrow[\text{homeo. para } U_2]{} & \end{array} \left. \right\} \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} x = y/h_1(y) \\ \uparrow \downarrow \\ y = x/h_2(x) \end{array} \quad \text{homeos usuales}$$

### Definición (Atlas afín canónico)

No se suelen utilizar todas las cartas afines:  $n + 1$  distintas ya cubren  $\mathbb{P}^n$ . Típicamente  $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$  con:

$$U_i = \{x_i \neq 0\} \leftrightarrow \underbrace{\{x_i = 1\}}_{\equiv \mathbb{R}^n} : (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \underbrace{1}_{\mathbb{R}^n \rightarrow}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), 0 \leq i \leq n$$

### Proposición (Cociente antipodal)

Toda recta de  $\mathbb{R}^{n+1}$  corta a  $\mathbb{S}^n : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$  en dos puntos antipodales, así que denotamos un “sub” cociente, que es también identificación.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \supset & \mathbb{S}^n \\ \downarrow & \nearrow \pi| & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

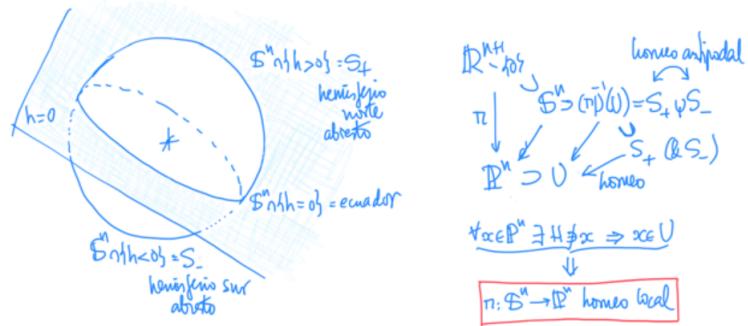
Figura 3.12: Cociente antipodal de  $\mathbb{S}^n$

Demostración:

Como antes tenemos conos:  $\pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}W}_{=(\pi/\mathbb{S}^n)^{-1}W}$ .

Observación:

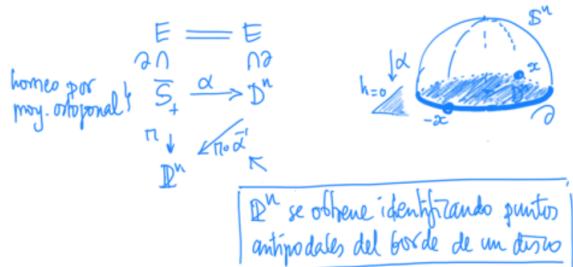
Las cartas afines tienen una representación muy conveniente:



### Proposición (Cociente de un disco)

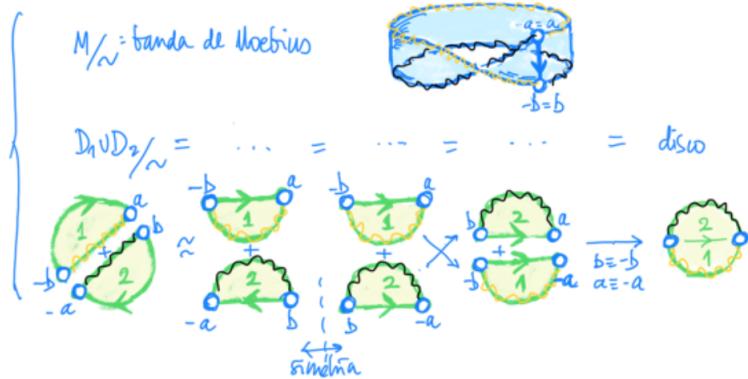
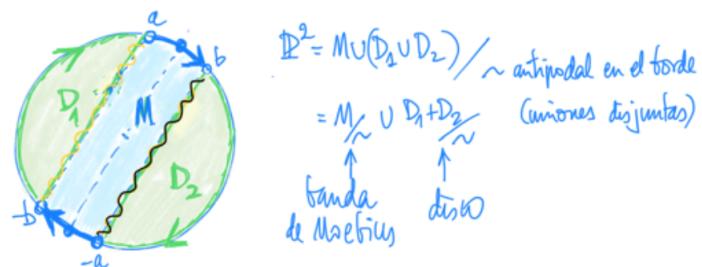
Consideremos un disco:

$$E = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \partial \left\{ \begin{array}{l} \overline{S}_+ = S^n \cap \{h \geq 0\} \text{ hemisferio cerrado.} \\ D^n = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \text{ disco.} \end{array} \right.$$



Ejemplo:

$\mathbb{P}^2 \setminus D^2$  = banda de Möbius.





# Separación

---

## Concepto

---

### Definición

Un espacio  $X$  es **Hausdorff** o  $T_2$  si cada par de puntos distintos  $x, y \in X$  existen entornos disjuntos:

$$\exists V^x, V^y : V^x \cap V^y = \emptyset$$

---

Hay otras formas de separación, más débiles o más fuertes, pero nos contentaremos con ésta al ser la más intuitiva.

Observación:

1. Si existen entornos disjuntos, existen entornos abiertos disjuntos.

Demostración:

$$\forall V^{\text{ent.}}, \exists U^{\text{ent. ab.}} : V \supset U$$

2. Si  $X$  es Hausdorff, los puntos son cerrados.

Demostración:

Sea  $x \in X$

$$\forall y \in X \setminus \{x\}, \exists U^y \ni x \Rightarrow X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U^y \text{ es abierto.}$$

3.  $(X, \mathcal{T}_{\text{CF}})$  no es Hausdorff. Sin embargo, tiene puntos cerrados.

Demostración:

No es Hausdorff porque, si  $X$  es infinito, dos abiertos cualesquiera se cortan. Sean  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\text{CF}} \Rightarrow X \setminus U_1, X \setminus U_2$  son finitos y como  $X$  es infinito  $\Rightarrow \exists x \notin X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2 \Rightarrow x \in U_1 \cap U_2$ .

4.  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$  es Hausdorff:  $x \neq y \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$  si  $\varepsilon \leq \|x - y\|/2$ . Como  $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_{\text{rad}}$ , esta última también es Hausdorff.

5. En  $(X, \mathcal{T}_a)$  el punto  $a$  no es cerrado. Por lo tanto, no es Hausdorff.

Demostración:

Veamos que  $a$  no es cerrado:  $a \notin X \setminus \{a\} \Rightarrow X \setminus \{a\}$  no es abierto.  $\forall x \neq a, U^x \supset \{a, x\} \ni a$ .

### Proposición

Sean  $f, g : X \rightarrow Y$  continuas con  $Y$  Hausdorff  $\Rightarrow \{f = g\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$  es cerrado.

Demostración:

En primer lugar, veamos que si un punto cumple  $f(x) \neq g(x) \Rightarrow$  tiene un entorno cuyos puntos cumplen todos que  $f(y) \neq g(y)$ . Con esto, tendremos que  $\{f \neq g\}$  es entorno de todos sus puntos y, por tanto, abierto.

1.  $f(x) \neq g(x) \xrightarrow{T_2} \exists V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset \xrightarrow{\text{cont.}} f^{-1}V^{f(x)} \cap g^{-1}V^{g(x)} = W^x$  entorno de  $x$  (cada uno es entorno de  $x$  y no son vacíos porque  $x$  pertenece a ellos).
  2. Vemos que  $W^x \cap \{f = g\} = \emptyset : y \in V^x \Rightarrow \begin{cases} f(y) \in V^{f(x)} \\ g(y) \in V^{g(x)} \end{cases} \xrightarrow{*} f(y) \neq g(y)$
1. + 2.  $X \setminus \{f = g\} = \{f \neq g\}$  es entorno de todos sus puntos, luego abierto, es decir,  $\{f = g\}$  es cerrado.

### Corolario

Si  $\{f = g\}$  es un subconjunto denso, es decir,  $\exists A \subset X : \overline{A} = X$  y  $\{f = g\}_A$ , entonces  $f \equiv g$

Demostración:

$$f|_A = g|_A \Rightarrow \{f = g\} \supset A \xrightarrow{\text{prop.}} \overline{\{f = g\}} = \{f = g\} \supset \overline{A} = X \Rightarrow [X = \{f = g\}].$$

Observación:

Este último resultado nos permite extender de forma única una función continua  $f$  a su adherencia.

Ejemplo: (Importante)

Un caso importante en el que  $Y$  es Hausdorff es:

$$f : X \rightarrow Y = \mathbb{R}$$

Observación:

$f : X \rightarrow Y$  continua con  $Y$  Hausdorff  $\Rightarrow f^{-1}(y)$  cerrado  $\forall y \in Y$ .

Demostración:

Porque los puntos de  $Y$  son cerrados y la preimagen de cerrados por continuidad es cerrada.

## Tabla de comportamiento

Se trata de saber si la propiedad se conserva por las construcciones que hemos visto.

Se tiene que:

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
$T_2$	$\Rightarrow$	$\times$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$

Cuadro 4.1: Tabla que nos indica como se conserva la propiedad Hausdorff en distintas construcciones.

Demostración:

- Veamos como los subespacios conservan la propiedad:

$$\text{Sea } Y \subset X = T_2 : y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{V^{y_1}}_{\text{En } X} \cap \underbrace{V^{y_2}}_{\text{En } X} = \emptyset \Rightarrow \underbrace{(V^{y_1} \cap Y)}_{\text{En } Y} \cap \underbrace{(V^{y_2} \cap Y)}_{\text{En } Y} = \emptyset.$$

- Veamos un contraejemplo de un cociente que no conserva Hausdorff:

Sea  $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \begin{cases} y_1 = \mathbb{Q} \in Y \\ y_2 = \sqrt{2} \in Y \end{cases} \nexists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset$  : todo entorno abierto de  $\sqrt{2}$  contiene racionales, luego al saturar, contiene  $\mathbb{Q}$ . Con esto, todo abierto en el cociente (recordemos que en el cociente los abiertos son imágenes por proyección de los saturados) contiene este punto y, por tanto, la intersección nunca es disjunta.

- Veamos que el producto conserva la propiedad:

$X$  y  $Y$  son ambos  $T_2 \Leftrightarrow X \times Y$  Hausdorff.

$\Rightarrow)$  Tomamos  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$ . Esto es posible en dos casos:

- $x_1 \neq x_2$ . Como  $X$  es  $T_2 \Rightarrow \exists V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times Y) \cap (V^{x_2} \times Y) = \emptyset$
- $y_1 \neq y_2$  podemos hacer lo mismo porque  $Y$  es también  $T_2$ .

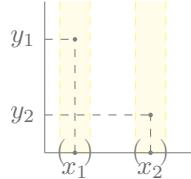


Figura 4.1: Siendo  $x_1 \neq x_2$  vemos que es posible separar los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  simplemente separando en el factor  $X$  del producto.

$\Leftarrow)$  Sabemos que  $X \approx X \times \{y_0\} \subset X \times Y$  que es  $T_2 \xrightarrow{1.} X \times \{y_0\}$  es  $T_2$  y, por homeomorfismo,  $X$  también.

- Veamos que la suma conserva la propiedad:

$X$  y  $Y$  son ambos  $T_2 \Leftrightarrow X + Y$  es Hausdorff.

Único comentario:  $x \in X$  e  $y \in Y \Rightarrow X = V^x, Y = V^y$  y  $X \cap Y = \emptyset$  (recordemos que hemos definido la suma como unión disjunta).



# Numerabilidad

---

## Axiomas

### I Axioma

---

#### **Definición (I Ax.)**

$X$  es **1er axioma** si  $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$  base numerable de entornos.

---

#### Observación:

1.  $\mathcal{B}^x = \{U_k = \dot{V}_k\}_{k \geq 1}$ , base numerable de entornos abiertos.
2.  $\mathcal{W}^x = \{W_k = U_1 \cap \dots \cap U_k\}_{k \geq 1}$ , base numerable de entornos abiertos encajados.

#### Demostración:

Sea  $\{V_k^x, k \geq 1\}$  base de entornos abiertos. Hacemos que:  $W_1^x = V_1^x$ ,  $W_2^x = V_1^x \cap V_2^x \dots W_k^x = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i^x$  y tenemos que:

$$W_{k+1}^x \subset W_k^x$$

que mantiene el ser base de entornos abiertos ( $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i^x$ ).

#### Ejemplo:

1.  $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u$  cumple el I Axioma

#### Demostración:

Sea  $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathcal{W}^x = \{B(x, \frac{1}{k}) : k \geq 1\}$  es base de entornos.

2.  $(X, \mathcal{T}_a), (X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$  cumplen el I Axioma.

3.  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$  no es I Axioma.

#### Demostración:

Sabemos que  $\{W_k\}$  no es base de entornos de  $x$  si  $\exists U^x \not\supseteq W_k, \forall k \geq 1, \forall k \exists \underbrace{x_k}_{\neq x} \in W_k \setminus U^x$ .

Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que  $\exists V^x$  numerable  $\Rightarrow$

$\exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1}$  abiertos encajados,  $W_k = \mathbb{R} \setminus F_k$  finito  $\Rightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k \Rightarrow U^x = \mathbb{R} \setminus \{y\} \not\supseteq W_k, \forall k \in \mathbb{N}$  (porque  $y$  pertenece a todos los  $W_k$ ). Por tanto, tenemos un entorno que no contiene a ninguno  $W_k$ .

4.  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{rad}})$  no es I axioma.

Demostración:  
 Sea  $\left\{ \underbrace{W_k}_{\ni x_0} : k \geq 1 \right\}$  y sea  $L_k$ : recta de pendiente  $\frac{1}{k}$ . Si hacemos  $W_k \cap L_k \supset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ni x_k$  tal que  $0 < \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k}$ . Ya vimos que  $U^{x_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_k : k \geq 1\}$  es abierto radial que no contiene ningún  $W_k$  ya que a estos pertenecen los  $x_k$ .

---

### Definición (Límites)

Decimos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Leftrightarrow$

$$\forall U^x, \exists k_0 : k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in U^x$$


---

Observación:

1.  $X$  es Hausdorff  $\Rightarrow \exists!$  límite.

Demostración:

$$x_k \rightarrow x \neq y, \exists U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \{x_k : k \geq k_0\} \subset U^x \text{ y } x_k \not\rightarrow y.$$

2. El I Axioma permite describir la topología con sucesiones:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset A : x_k \rightarrow x$$

Demostración:

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $x \in \overline{A} \Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1} \text{ encajados} \Rightarrow \exists x_k \in W_k \cap A \\ \forall U^x \underset{\text{base ent.}}{\supset} W_{k_0} \supset W_{k+1} \supset \dots \Rightarrow x_k \in U^x, \forall k \geq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_k \rightarrow x$$

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $\exists \{x_k\} \subset A : x_k \rightarrow x$ :

$$A \ni x_k \rightarrow x \Rightarrow \forall U^x, \exists x_{k_0} \in U^x \cap A$$

En general, los límites de sucesiones son poco útiles.

### II Axioma

---

#### Definición (II Ax.)

$X$  es **2º axioma** si  $\exists \mathcal{B}$ , base numerable de abiertos

Ejemplo:

- $\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_{\text{discr.}}$  en  $X$  no numerable no es II axioma.

Demostración:

En  $\mathcal{T}_a$  la base de abiertos es  $\mathcal{B}_a = \{\{a, x\} : x \in X\}$ , por tanto, si  $X$  no es numerable tampoco lo será esta base.

Por otro lado, en  $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$  tenemos como base  $X$  que no es numerable.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$  es II Axioma ya que tenemos como base a:  $\mathcal{B} = \{B(q, \frac{1}{k}) : q \in \mathbb{Q}^n, k \geq 1\}$ .

Demostración:

Ejercicio.

### **Proposición**

1.  $\text{II Ax.} \Rightarrow \text{I Ax.}$
2.  $\text{I Ax.} \not\Rightarrow \text{II Ax.}$

Demostración:

1. Sea la base de abiertos:  $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow \mathcal{B}^x = \{B_k : x \in B_k\}$  es base de entornos  $\forall x \in X$ .
2. Tenemos como contraejemplo  $(X, \mathcal{T}_{\text{discr.}})$  en  $X$  no numerable.

### **Separable**

#### **Definición (Separable)**

$X$  es **separable** si  $\exists A \subset X$ , numerable denso.

Ejemplo:

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$  es separable, porque  $\mathbb{Q}^n$  es denso.
- $(X, \mathcal{T}_{\text{discr.}})$ , si  $X$  es no numerable, no es separable.
- $\mathcal{T}_a$  sí es separable porque  $\overline{\{a\}} = X$ .
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ ,  $\forall A \subset \mathbb{R}$ , con  $A$  numerable infinito, es denso y, por tanto, separable.
- $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{rad}})$  también lo es.

### **Proposición**

1.  $\text{II Ax.} \Rightarrow \text{separable.}$
2.  $\text{I Ax.} + \text{separable} \not\Rightarrow \text{II Ax.}$
3.  $\text{I Ax.} \not\Rightarrow \text{separable.}$
4.  $\text{Separable} \not\Rightarrow \text{I Ax.}$

Demostración:

1.  $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow A = \{a_k : a_k \in B_k\}_{k \geq 1}$  corta a todo abierto (y, por tanto, denso).
2. Contraejemplo:  $(X, \mathcal{T}_a)$ ,  $X$  no numerable.
3. Contraejemplo: Topología discreta en un espacio no numerable.
4. Contraejemplo:  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}}) : \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$ .

### **Lindelöf**

#### **Definición (Lindelöf)**

$X$  es **Lindelöf** si  $\forall X = \bigcup_{i \in I} U_i$  (recubrimiento abierto),  $\exists X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k}$  (subrecubrimiento numerable).

Esta forma débil de compacidad se menciona como complemento en los ejercicios.

## Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
I Ax.	✓	✗ abiertos ✓	✓	✓
II Ax.	✓	✗ abiertos ✓	✓	✓
Separable	✗ abiertos ✓	✓	✓	✓
Lindelöf	✗ cerrados ✓	✓	✗	✓

Cuadro 5.1: Tabla que nos indica como se comportan las propiedades que hemos visto en la anterior sección con las distintas construcciones. Las sumas y productos son finitos.

Demostración:

■ Subespacios:

- I Ax. y II Ax. se heredan a subespacios intersecando bases.
- Separable se hereda a subespacios abiertos intersecando el conjunto denso.
- Lindelöf se hereda a subespacios cerrados como la compacidad.  
No en general: Sea  $Y$  no Lindelöf,  $X = Y \cup \{w\}$  compacto,  $\mathcal{B}^w = \{X \setminus F : F \subset Y\}$  con  $F$  finito.

■ Cocientes:

- $X = \mathbb{R}_u$  es I y II Axiomas,  $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  no es I.

Demostración:

$\alpha = \mathbb{Z} \in Y$ ,  $\exists \mathcal{W}^\alpha = \{W_k : k \geq 1\}$  abiertos saturados,  $W_k \supseteq \mathbb{Z}$ ,  $\forall k$

(Figura 5.1)  $\Rightarrow U = \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_k : k \geq 1\}$  entorno abierto saturado de  $\mathbb{Z}$ ,  $U \not\supseteq W_k$ ,  $\forall k$ .

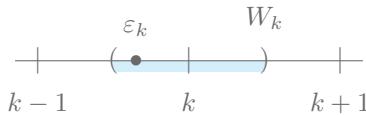


Figura 5.1: Si  $\varepsilon_k \notin \mathbb{Z}$ , vemos que aunque  $\mathbb{R}_u$  cumple el I y el II axioma, existe un cociente que no.

- Las aplicaciones continuas y abiertas conservan I y II.

Demostración:

La imagen de una base es una base.

- Las aplicaciones continuas conservan la separabilidad

Demostración:

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

- Las aplicaciones continuas conservan Lindelöf.

Demostración:

Como la compacidad, ya se sabe...

■ Productos/sumas (finitos):

- Para productos: producto finito de numerables es numerable.
- Para sumas: suma finita de numerables es numerable.

- Solo falla Lindelöf:
  - $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$  es Lindelöf (ejercicio no banal).
  - $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{[,]}^2)$  no es Lindelöf: si lo fuera,  $L = \{x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$  heredaría la propiedad, pero es discreto no numerable. ( $\perp$ )



# Compacidad

---

## Concepto y mantras

---

### Definición

$X$  es **compacto** si todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X$$

---

Observación: (Propiedad de la intersección finita)

Complementando lo anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \emptyset = \bigcap_{i \in I} F_i \Rightarrow \exists F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} = \emptyset \Rightarrow \\ \boxed{\forall F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset}. \end{aligned}$$

### Proposición (Subespacios)

Sea  $K \subset X$  (compacto)  $\Rightarrow K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  con  $U_i \overset{ab.}{\subset} X \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K$

#### Ejemplo:

1.  $K \subset \mathbb{R}_u^n$  es compacto  $\Leftrightarrow K$  es cerrado y acotado (Heine-Borel).
2.  $[a, b] \subset \mathbb{R}_u$  compacto. ( $\Rightarrow$  Heine-Borel por resultados generales).
3. Si  $X$  es compacto con  $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$   $\Rightarrow$  es finito

Demostración:

$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$  es recubrimiento abierto en  $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$  y como es compacto  $\exists \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} = X$ .

4.  $x_k \rightarrow x \Rightarrow K = \{x, x_k : k \geq 1\}$  es compacto.

Demostración:

$$\exists U_{i_0}^x \ni x \xrightarrow{\text{lím}} \left. \begin{array}{l} x_k \in U_{i_0}, \forall k > k_0 \\ x_k \in U_{i_k}, \forall k \leq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow K \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k_0}}$$

5.  $K \subset \mathbb{R}_u^n$  compacto  $\Leftrightarrow \forall A^\infty \subset K, A' \cap K \neq \emptyset$  (Bolzano-Weierstrass)

### **Proposición (Mantra 1)**

*Cerrado en compacto es compacto.*

Demostración:

Sea  $K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X = \bigcup U_i$ ,

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup U_i \Rightarrow X &= (X \setminus K) \cup \bigcup U_i \\ X \text{ compacto} \Rightarrow \exists (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} &= X \supset K \\ &\Rightarrow U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K. \end{aligned}$$

(Alternativa: Usar la propiedad de las intersecciones finitas)

### **Proposición (Mantra 2)**

*Infinito en compacto tiene puntos de acumulación.*

Demostración:

Sea  $A \subset X$  (compacto) con  $A' = \emptyset$  veamos que es finito:

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overbrace{\{\text{puntos aislados}\}}^{\subset A} \cup \overbrace{A'}^{\emptyset} = \{\text{puntos aislados}\} = A \\ &\Rightarrow A \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \text{ comp.} \Rightarrow A \text{ es compacto y discreto} \Rightarrow \#A < +\infty. \end{aligned}$$

El resultado del enunciado lo podemos sacar por el contrarrecíproco.

Observación:

Este mantra es como “la mitad” del teorema de Bolzano-Weierstrass.

### **Proposición (Mantra 3)**

*La imagen continua de un compacto es compacta.*

Demostración:

Sea  $f : X \rightarrow Y$  con  $f$  continua y  $X$  compacto  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(X) \subset \bigcup_i V_i \Rightarrow X &= \bigcup_i f^{-1}V_i \Rightarrow \exists f^{-1}V_{i_1} \cup \dots \cup f^{-1}V_{i_r} = X \\ &\Rightarrow V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r} \supset f(X). \end{aligned}$$

Ejemplo: (!Muy importante!)

$\mathbb{R}P^n$  es compacto al ser la imagen continua de  $\mathbb{S}^n$  por la proyección antipodal.

### **Proposición (Mantra 4)**

*Un compacto en  $T_2$  es cerrado.*

Demostración:

Vamos a ver que  $X \setminus K$  es abierto al ser entorno de todos sus puntos.

Sea  $K \subset X$  con  $K$  compacto y  $X$  Hausdorff  $\Rightarrow$

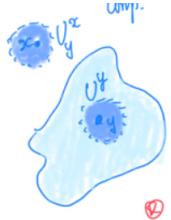
$$\forall x \in X \setminus K, \exists U^x \cap U^K = \emptyset \quad (6.1)$$

Porque  $\forall y \in K, \exists U_y^x \cap U^y = \emptyset$  por  $T_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_y U^y &\xrightarrow{\text{comp.}} K \subset U^{y_1} \cup \dots \cup U^{y_r} = U^K \\ &\xrightarrow{\text{comp.}} x \in U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x = U^x. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando 6.1  $\Rightarrow$

$$U^x \subset X \setminus K \wedge X \setminus K \text{ es entorno de } x \Rightarrow X \setminus K \text{ abierto.}$$



### Corolario

*Dos compactos disjuntos en un  $T_2$  se separan como puntos.*

Demostración:

Ejercicio usando 6.1.

### Proposición

*Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua,  $X$  compacto e  $Y$  Hausdorff  $\Rightarrow f$  es cerrada.*

Demostración:

Sea  $F \xrightarrow{\text{cerr.}} X \xrightarrow{\text{M1}}$

$$F \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M3}} f(F) \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M4}} f(F) \text{ cerr.}$$

### Corolario

*Sea la  $f$  de la anterior proposición entonces si además es:*

$$\begin{cases} \text{inyectiva} \\ \text{sobreyectiva} \\ \text{biyectiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{inmersión cerrada} \\ \text{identificación cerrada} \\ \text{homeomorfismo} \end{cases}$$

## Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad	$\times$ cerrados ✓	✓	✓	✓
	Mantra 1	Mantra 3	Tychonoff	Unión finita

Cuadro 6.1: La tabla nos indica como se mantiene (o no) la compacidad con las distintas construcciones que hemos visto. La última fila nos indica la demostración, o contraejemplo, de cada una.

### Teorema (de Tychonoff)

*Si  $X$  e  $Y$  son dos compactos  $\Rightarrow X \times Y$  es compacto.*

Demostración:

Sea  $X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$ ,  $W_i \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$ .

1.  $\forall x \forall y, \exists U_y^x \times V_x^y \subset W_i$ ,  $i$  depende de  $(x, y)$ .
  2.  $\forall x Y = \bigcup_y V_x^y \xrightarrow{Y \text{ comp.}} Y = V_x^{y_1} \cup \dots \cup V_x^{y_r}$ , los  $y_k$  y su n<sup>o</sup> dependen de  $x$ .
  3.  $U^x = U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x$ ,  $U^x \times V_x^{y_k} \subset W_{i_k}$ ,  $i_k$  depende de  $x$ .
  4.  $X = \bigcup_x U^x \xrightarrow{X \text{ comp.}} X = U^{x_1} \cup \dots \cup U^{x_s}$ .
  - 5.
- $$X \times Y = \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} U^{x_l} \times V_{x_l}^{y_k} \subset \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} W_{i_k}$$
, los  $i_k$  dependen de los  $x_l$ .

Observación:

1.  $X \times Y$  compacto  $\Rightarrow X$  e  $Y$  compactos.

Demostración:

Aplicamos el Mantra 3 para las proyecciones.

2. Heine-Borel:  $K \subset \mathbb{R}_u^n$  cerrado y acotado  $\Rightarrow$  compacto.

Demostración:

Ya que sabemos que  $[a, b]$  es compacto en  $\mathbb{R}_u$ , sabemos que:

$$\exists a_i, b_i : K \overset{\text{cerr.}}{\subset} \underbrace{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}_{\text{Compacto por Tych.}}$$

y aplicamos el Mantra 1.

# Compacidad local

---

## Definición

Sea  $Y \subset X$ , es localmente cerrado si cumple las condiciones equivalentes siguientes:

1.  $\forall y \in Y, \exists U^y \subset X : Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y. (\Rightarrow \text{lo mismo } \forall V^y \subset U^y)$
  2.  $Y$  es abierto en su adherencia.
  3.  $Y = F \cap U, F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X, U \overset{\text{ab.}}{\subset} X. (\Rightarrow \text{vale } F = \overline{Y})$
- 

## Demostración:

1.  $\Rightarrow$  2.)  $Y = \overline{Y} \cap \left( \bigcup_{y \in Y} U^y \right)$ :

$$\begin{aligned} x \in \overline{Y} \cap U^y &\Rightarrow x \in \text{Adh}_{U^y}(Y \cap U^y) = Y \cap U^y \subset Y \\ U^x \subset U^y &\Rightarrow \emptyset \neq Y \cap U^x = (Y \cap U^y) \cap U^x. \end{aligned}$$

2.  $\Rightarrow$  3.) Abierto en  $\overline{Y} = \underbrace{\overline{Y}}_{=F} \cap U$ .

$$F \cap U = Y \Rightarrow F \supset \overline{Y} \Rightarrow F \cap U = \overline{Y} \cap U.$$

3.  $\Rightarrow$  1.)  $Y = F \cap U \overset{\text{cerr.}}{\subset} U (= U^y, \forall y)$ .

Esto es un ejemplo de localización de una propiedad topológica  $\mathcal{P}$  (aquí es ser cerrado). Se puede entender como:

$$\begin{aligned} \forall x, \exists V^x \text{ que cumple } \mathcal{P} \text{ o} \\ \forall x, \exists \mathcal{V}^x \text{ base de entornos que cumplen } \mathcal{P}. \end{aligned}$$

A veces son equivalentes (como en este caso), a veces no. El concepto adecuado de localización es mediante bases de entornos.

# Compacidad local y mantras

---

## Definición

$X$  es localmente compacto si  $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$  base de entornos compactos.

---

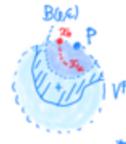
Ejemplo:

1.  $\mathbb{R}_u^n$  es localmente compactos:  $\mathcal{V}^x = \{B[x, \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$

2.  $T = B(0, 1) \cup \{p\}$ ,  $T_u$  no es compacto:

$$\begin{aligned} \exists V^p \text{ comp.} \subset T \Rightarrow \exists B(0, \varepsilon) \cap T \subset V^p \Rightarrow \exists \overbrace{x_k}^{\in V^p} \rightarrow x_0 \in S(0, 1) \setminus T \\ \Rightarrow \{x_k : k \geq 1\} \subset V^p \subset T. \end{aligned}$$

que es un conjunto infinito sin acumulación en  $T$ .



3. En general no basta que exista un entorno compacto.

En  $S = T \cup \{q\}$ ? tomamos como entornos del punto añadido  $q$  los  $W \subset S$  que tienen complementario finito (y  $q \in W$ ).

Pero este caso es un ejemplo con un espacio no separado.

### Proposición

Si  $X$  es  $T_2$  y  $x \in X$  tiene un entorno compacto, entonces tiene una base de entornos compactos.

Demostración:

$\exists \underbrace{V^x}_{\supseteq W^x \text{ ab.}} \text{ compacto} \Rightarrow \mathcal{V}^x = \text{entornos compactos } K^x \text{ base de entornos: } \forall U^x, \exists K^x \subset U^x.$

$\exists_{\text{ab.}} U_1^x \subset \overline{U_1^x} \subset U^x$ :

$$K^x = \overline{W^x \cap \overline{U_1^x}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{V^x \setminus U^x} \subset \overline{V^x} \text{ cerr.} \\ \overline{V^x} \cap \overline{U_1^x} = V^x \cap \overline{U_1^x} \subset V^x \cap \overline{X \setminus A} = V^x \cap \overline{(X \setminus A)} \subset U^x \\ \text{interdos ent.?} \Rightarrow \text{entorno} \\ W^x \cap U_1^x \subset V^x \text{ comp. en } T_2 \Rightarrow \overbrace{K^x}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{V^x}^{\text{comp.}} \end{array} \right. \text{ ab. disjuntos}$$

Y tenemos dos mantras:

### Proposición (Mantra 1)

Localmente cerrado en localmente compacto es localmente compacto.

Demostración:

Sea  $Y \subset X$  con  $Y$  loc. cerrado y  $X$  loc. compacto e  $y \in Y$ .

Tenemos:

$$\overline{U_1^x} \cap V^x \subset \overline{X \setminus A} \cap V^x = \overbrace{(X \setminus A)}^{\text{cerr.}} \cap V^x \subset U^x$$

Y como  $Y$  es loc. cerrado,  $\exists W^y \cap Y \subset^{\text{cerr.}} W^y$  ent. en  $X$ . Por ser  $X$  loc. compacto  $\exists K^y$  compacto tal que,  $K^y \subset W^y \Rightarrow K^y \cap W^y \cap Y \subset^{\text{cerr.}} K^y \Rightarrow$

$$L^y = \underbrace{K^y \cap W^y}_{\text{ent. en } X} \cap Y \subset^{\text{cerr.}} K^y \Rightarrow L^y \text{ ent. en } Y \text{ compacto.}$$

### Proposición (Mantra 2)

Localmente compacto en  $T_2$  es localmente compacto.

Demostración:

Sea  $Y \subset X$  con  $Y$  loc. compacto,  $X$  siendo  $T_2$  e  $y \in Y \Rightarrow$

$$\underbrace{\exists L^y}_{\text{comp.}} = \underbrace{V \cap Y}_{\text{ent. en } Y} \subset \underbrace{V}_{\text{ent. en } X} \xrightarrow{T_2} V \cap Y = L^y \text{ cerr.} V.$$

## Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad local	$\times$ Loc. cerrados ✓	$\times$ ab. ✓	✓	✓
	Mantra 1	$f(\text{ent.}) = \text{ent}$	Tychonoff	Loc. suma es como sum's

Ejemplo:

$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  no es localmente compacto.

1.  $\mathbb{Z} \subset \underbrace{W}_{\text{ab.}} \subset \mathbb{R} : \exists k + \underbrace{\varepsilon_k}_{0 < \varepsilon_k < 1} \in W \forall k \geq 1 \Rightarrow A = \{k + \varepsilon_k : k \geq 1\} \subset W$ 
  - Cerrado
  - Saturado ( $n\mathbb{Z} = \emptyset$ )
  - Infinito
  - Discreto
2.  $\exists K \subset Y$  entorno compacto de  $y = \mathbb{Z} \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{W^{\text{ab.}}}_{\supset \mathbb{Z}} \subset p^{-1}K \Rightarrow pA \subset K$  infinito sin acumulación.

## Compactificación por un punto

Este es otro problema importante: sumergir un espacio como subespacio abierto denso de un espacio compacto.

Intuitivamente se trata de añadir los límites que el espacio no tiene (por no ser compacto).

Ejemplo:

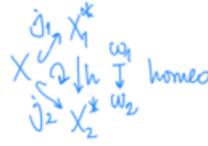
1.  $\mathbb{R}^n \equiv B^n \setminus \{a\} \subset \mathbb{S}^n$  vía proyección estéreo desde  $a$ .
2.  $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{RP}^n \setminus H \subset \mathbb{RP}^n$  vía cartas afines.

### Proposición

$X$  localmente compacto  $T_2$ .

1.  $\exists j : X \hookrightarrow X^*$  comp.  $T_2$ ,  $j$  inmersión abierta  $X^* \setminus j(X) = \{w\}$ .

2. Unicidad:



Demostración:

$$1. X^* = X \cup \{0\}, \mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus K : \overbrace{K}^{\subset X} \text{ comp.}\}.$$

- $\mathcal{T}^*$  es top: fácil por las hipótesis sobre  $X$ .

- $K_i \overset{\text{comp.}}{\subset} X \xrightarrow{T_2} K_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \overbrace{\bigcap_i K_i}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{K_{i_0}}^{\text{comp.}} \Rightarrow \bigcap_i K_i \text{ comp.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, X \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \setminus K = \text{ab.} \setminus \text{cerr.} = \text{ab.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, K \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus U), K \setminus U \subset K \text{ cerrado} \Rightarrow \text{compacto.}$

- $X \subset X^*$  inmersión abierta:  $(X^* \setminus K) \cap X = X \setminus K \in \mathcal{T}$  pues  $X$  es  $T_2$ .

- $X^*$  es compacto:  $X^* = \bigcup_i W_i$ .

$$\exists W_{i_0} \ni w \Rightarrow W_{i_0} = \underbrace{X^* \setminus K}_{\text{comp.}} \Rightarrow K \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r} \Rightarrow X^* = W_{i_0} \cup W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r}$$

- $X^*$  es  $T_2$ :

$$x \in X \text{ loc. comp.} \Rightarrow \exists K^x \text{ ent. comp.} \Rightarrow X^* \setminus K^x = U^w \text{ ent. de } w$$

2. Unicidad:

- $\begin{cases} h_{j_1} = j_2 \\ j_i \text{ inmersiones} \end{cases} \Rightarrow h| : j_1(X) \rightarrow j_2(X) \text{ homeomorfismo.}$
- $h$  continua en  $w_1$  (análogamente  $h^{-1}$  continua en  $w_2$ )

$$\begin{aligned} h(w_1) = w_2 \in W \overset{\text{ab.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{comp.}}{\subset} j_2(X) \\ \Rightarrow K = h^{-1}(X_2^* \setminus W) \overset{\text{comp.}}{\subset} j_1(X) \subset X_1^* \\ [X_1^* \text{ es } T_2] \Rightarrow K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_1^* \Rightarrow h^{-1}(W) = X_1^* \setminus K \overset{\text{ab.}}{\subset} X_1^*. \end{aligned}$$

### Definición

El espacio  $X^*$  se denomina compactificación por un punto de  $X$ .

También, compactificación de Alexandroff.

Por ejemplo,  $\mathbb{S}^n$  es la compactificación por un punto de  $\mathbb{R}^n$  (vía proyección estereotípica como dijimos antes).

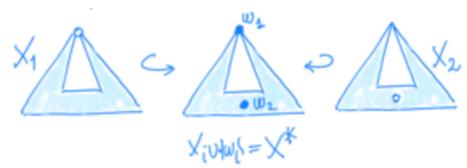
Observación: ¡Importante!

1. La unicidad justifica? que un espacio  $X^*$  compacto  $T_2$  es la compactificación de  $X^* \setminus \{0\}$  para cualquier  $w \in X^*$ .
2. Si dos espacios son homeomorfos, lo son sus compactos.

$$X_1 \xrightarrow[\text{homeo.}]{} X_2 \xrightarrow{j_2} X_2^* \Rightarrow j_1 = j_2 \circ f : X_1 \rightarrow X_2^*$$

que cumple las condiciones.

3. Si dos espacios no son homeomorfos, pueden serlo sus compactos.



[Ejercicio:  $\mathbb{R}_u^2$ : ¿Por qué  $X_1 \not\approx X_2$ ?]



# Conexión

---

## Concepto y mantras

---

### Definición

$X$  es conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1.  $\#X = U \sqcup Y$  abiertos  $\neq \emptyset$ .
  2.  $\#X = F \sqcup C$  cerrados  $\neq \emptyset$ .
  3.  $\#E \subsetneq X$  abierto y cerrado  $\neq \emptyset$ .
- 

Demostración:

Equivalencia:  $F = X \setminus V$ ,  $C = X \setminus U$ ,  $E = U = X \setminus V$ .

Observación:

$Y \subset X$  subespacio conexo:  $\#Y \subset U \cup V$  abierto de  $X$ ,

$$\begin{cases} U \cap Y \neq \emptyset \\ V \cap Y \neq \emptyset \\ U \cap V \cap Y = \emptyset \end{cases}$$

Ejemplo: (Fundamental)

$(0, 1) \subset \mathbb{R}_u$  es conexo.

Mantras generales  $\Rightarrow$  segmentos en  $\mathbb{R}^n$ , estrellados? y conexos son conexos.

### Teorema (del pivote. Mantra 1)

Sea  $X = \bigcup_i A_i$ ,  $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$ ,  $\forall A_i$  conexos  $\Rightarrow X$  conexos.

Demostración:

$$\begin{aligned} \emptyset \neq E &\stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} A_i \Rightarrow \forall i, \begin{cases} E \cap A_i = \emptyset \\ E \supset A_i \end{cases} \\ &\xrightarrow{E \neq \emptyset} \exists i_0 : E \supset A_{i_0} \supset \bigcap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \supset A_i \\ &\Rightarrow E \supset \bigcup_i A_i \Rightarrow E = X. \end{aligned}$$

### Corolario (Variantes)

$$1. X = \bigcup_{i \in I} A_i, \exists A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset.$$

Demostración:

$X = \bigcup_{i \in I} (A_{i_0} \cup A_i)$  conexo por mantra 1 y se aplica el mantra 1.

$$2. \text{ Cadenas: } X = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \dots}_{\text{conexos}} \quad A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ conexo.}$$

Demostración:

Se usa el mantra 1 dos veces:

$$\begin{cases} X_k = (\dots ((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots \cup) A_k \\ X = \bigcup_k (X_1 \cup \dots \cup X_k) \end{cases}$$



El “recíproco” es “fácil” pero útil.

### Proposición (Construcción de cadenas)

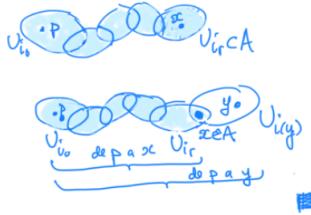
$X$  conexo,  $X = \bigcup_i U_i$  recubrimiento abierto,  $p, q \in X \Rightarrow \exists$  cadena finita  $U_{i_k}$  de  $p$  a  $q : p \in U_{i_0}, U_{i_{k-1}} \cap U_{i_k} \neq \emptyset, q \in U_{i_r}$ .

Demostración:

$A = \{x \in X : \exists U_{i_k} \text{ de } p \text{ a } x\} \neq \emptyset$  abierto y cerrado  $\Rightarrow A = X$  y  $q \in A$ . Por ser:

- $\neq \emptyset : \exists U_{i_0} \in ?p$  y  $U_{i_0}$  va de  $p$  a  $p$  !
- Abierto:  $\exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r}$  de  $p$  a  $x \Rightarrow U_{i_r} \subset A$ .
- Cerrado:

$$\begin{aligned} y \in \overline{A} \text{ e } y \in U_{i(y)} &\Rightarrow A \cap U_{i(y)} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r} \text{ de } p \text{ a } x \in U_{i(y)} \\ &\Rightarrow U_{i_0}, \dots, U_{i_r}, U_{i(y)} \text{ de } p \text{ a } y. \end{aligned}$$



### Proposición (Mantra 2)

Imagen continua de conexo es conexo.

Demostración:

$$f : X \rightarrow Y \text{ continua, } \emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} f(X) \xrightarrow{\text{cont.}} \emptyset \neq f^{-1}(E) \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow f^{-1}(E) = X \Rightarrow E = f(X).$$

### Proposición (Mantra 3)

Adherencia de conexo es conexo:  $Y \subset X$  con  $Y$  conexo y denso  $\Rightarrow X$  conexo.

Demostración:

$$\emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow E \cap Y \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow \begin{cases} E \cap Y = \emptyset \times \text{densidad.} \\ E \cap Y = Y \Rightarrow Y \subset E \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X = \overline{Y} \Rightarrow E = X. \end{cases}$$

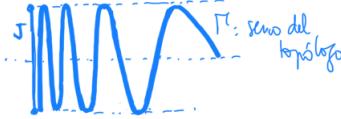
Ejemplo:

1.  $(0, 1) \stackrel{\text{denso}}{\subset} [0, 1] \xrightarrow{M1} [0, 1]$  conexo. Con una interpolación?:  $\sigma(t) = (1-t)a + tb$  es homeomorfismo con  $[a, b] \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{M2} [a, b]$  es conexo. Aplicando ahora:

- Pivote:  $E = \bigcup_{\substack{x \in E \\ \text{convx.}}} [a, x]$  estrellado (resp. de  $a$ ): convexos, bolas abiertas y cerradas, rectángulos...
- Mantra 2: Trazas de curvas continuas  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

2. Seno del topólogo (polaco):

$$\text{Conexos: } \begin{cases} \Gamma = \text{imagen} : t \mapsto \left(t, \sin \frac{1}{t}\right), t > 0 \\ J = \{0\} \times [0, 1] \\ \overline{\Gamma} = \Gamma \cup J \text{ (adh.)} \end{cases}$$



## Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión	✗	✓	✓	✗
	$\{0, 1\} \subset [0, 1]$	Mantra 3	Pivote	Cada sum. ab. y cerr.

### Proposición

$X \times Y$  conexo  $\Leftrightarrow X$  y  $Y$  conexo.

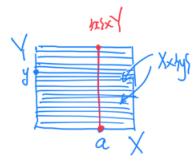
Demostración:

$\Rightarrow$ ) Mantra 3 para las proyecciones.

$\Leftarrow$ ) Fijamos  $a \in X$ .

$$\left. \begin{aligned} Z_y &= (\underbrace{X \times \{y\}}_{\approx X}) \cup (\underbrace{\{a\} \times Y}_{\approx Y}) \text{ dos convx. se cortan en } (a, y) \xrightarrow{\text{Piv.}} Z_y \text{ convx.} \\ \forall y \in Y, \quad \bigcap_{y \in Y} Z_y &= \{a\} \times Y \neq \emptyset \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Piv.}}$$

$$\bigcup_{y \in Y} Z_y = X \times Y \text{ convx.}$$



# Componentes conexas y conexión local

---

## Componentes

---

### Definición

Una componente conexa (c.c) de  $X$  es un subespacio conexo maximal.

---

### Proposición

1.  $\forall a \in X. C(a) = \bigcup_{a \in A_{conx}} A$  es conexo (pivot),  $a \in C(a)$ .
2.  $E \subset X$  conexo:

$C(a) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow C(a) \cup E$  conx. (pivot)  $\Rightarrow C(a) \cup E$  es uno de los  $A$  de  $C(a) \Rightarrow E \subset C(a)$

Luego,

- $C(a)$  maximal  $\Rightarrow$  componente conexa.
  - $a \neq b : C(a) = C(b)$  ó  $C(a) \cap C(b) = \emptyset$  [Usar  $E = C(b)$ ]
3.  $\overline{C(a)}$  conexo (mantra adh.)  $\Rightarrow \overline{C(a)} = \underbrace{C(a)}_{cerr.}$  (maximalidad)

1. + 2. + 3.  $\Rightarrow X = \bigsqcup_{C \subset X} C$  es una partición en cerrados disjuntos.

### Ejemplo:

1.  $X_{\text{discreto}} : C(x) = \{x\}$  (puntos abiertos y cerrados)
2.  $\mathbb{Q}_u : C(p) = \{p\}$  (todo intervalo de  $\mathbb{R}$  tiene racionales)
3.  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)}) : C(t) = \{t\}$  ( $\mathbb{R} = (\leftarrow, a) \cup [a, \rightarrow)$  abierto y cerrado)
4.  $X = \{0, Y_k, k \geq 1\} : \begin{cases} C(0) = \{0\} \text{ cerrado, no abierto } (\{\frac{1}{k} : k \geq 1\} \text{ no cerr.}) \\ C(\frac{1}{k}) = \{\frac{1}{k}\} \text{ cerrado y abierto.} \end{cases}$

---

### Definición

Un espacio cuyas componentes son los puntos se llama totalmente desconexo.

---

### Proposición

Las componentes conexas de  $X \times Y$  son los puntos de componentes conexas.

Demostración:

$$C \subset \underbrace{X}_{\xrightarrow{p} X} \times \underbrace{Y}_{\xrightarrow{q} Y} \Rightarrow p(C) \text{ y } q(C) \text{ conexos (imagen continua)} \Rightarrow \begin{cases} p(C) \subset E \overset{\text{c.c.}}{\subset} X \\ q(C) \subset F \overset{\text{c.c.}}{\subset} Y \end{cases} \Rightarrow C \subset E \times F \underset{\text{Max. de } C}{\xlongequal{}} C = E \times F.$$

## Conexión local

### Definición

$X$  es localmente conexo si  $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$  base de entornos abiertos conexos.

### Proposición

$X$  es localmente conexo  $\Leftrightarrow$  la componente conexa de un abierto es abierta.

Demostración:

- $\Rightarrow)$  Si  $x \in C \overset{\text{cerr.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow \exists \underbrace{U^x}_{\text{ab. conn.}} \subset U \Rightarrow U^x \subset C \Rightarrow C \overset{\text{ab.}}{\subset} X.$
- $\Leftarrow)$   $\mathcal{B}^x = \{C(x) \overset{\text{c.c.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : x \in U\}$ . Con  $C(x)$  abierto por ser c.c de abierto.

Ejercicio:  $X$  es localmente conexo  $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$  base de entornos conexos.

Ejemplo: (Esencial)

$\{0, \frac{1}{k} : k \geq 1\} = Y \subset \mathbb{R}_u$  no es localmente conexo.

Demostración:

La c.c  $(0) = \{0\}$  no es abierto. Directamente:

$$\begin{aligned} 0 \in \underbrace{V}_{\text{ent. de } 0 \in \mathbb{R}} \cap Y &\Rightarrow V \supset (0, \varepsilon), \exists 0 < \underbrace{\theta}_{\notin \mathbb{Q}} < \frac{1}{k} < \varepsilon < 1 \\ &\Rightarrow V \cap Y \subset \underbrace{(0, \theta)}_{\exists 0} \cup \underbrace{(\theta, \infty)}_{\exists \frac{1}{k}} \Rightarrow V \cap Y \text{ no conexo..} \end{aligned}$$

Ejercicio:

1. Analizar una sucesión de segmentos que convergen a otro:



2. ¿Y el seno del topólogo?

## Tabla de comportamiento

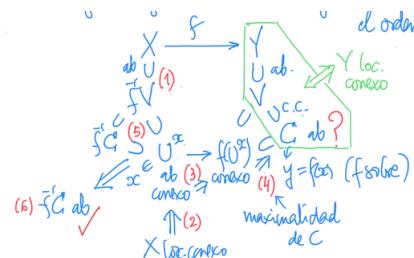
	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local	✗	✓	✓	✗
	Ejemplo esencial	No banal	Prod. ent. conx.	Suma como sum's

### Proposición

Sea  $f : X \rightarrow Y$  identificación con  $X$  localmente conexo  $\Rightarrow Y$  es localmente conexo.

Demostración:

El diagrama siguiente resume el argumento (si se lee en el orden adecuado).





# Conexión por caminos

## Definición

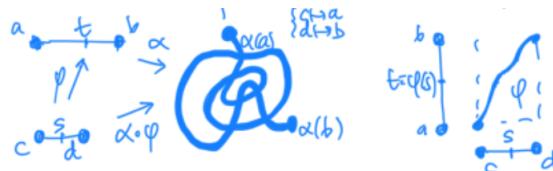
Un camino en un espacio  $X$  es una aplicación continua  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}_u \rightarrow X$ . Decimos:

- $\alpha$  va de  $\alpha(a)$  a  $\alpha(b)$ , conecta  $\alpha(a)$  con  $\alpha(b)$ , que son extremos.
- La imagen  $\alpha[a, b] \subset X$  es la traza, conexa por imagen continua.

## Proposición (Cambios de parámetros)

$\forall \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  continua  $\Rightarrow \beta = \alpha \circ \varphi$  es otro camino con igual traza.

$\varphi$  es un cambio de parámetro cuando es homeomorfismo (creciente o decreciente).

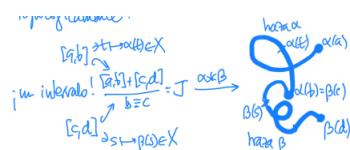


Ejemplo: (Interpolación lineal)

Dados  $p, q \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [p, q] : t \mapsto (1 - t)p + tq$  es un camino bien conocido y útil. También sirve para reparametrizar si  $[p, q] = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Vemos, por ejemplo, que siempre podemos reducirnos a caminos con dominio  $[0, 1]$ . Esto será fundamental más adelante.

## Proposición (Producto de caminos)

Topológicamente:



(Alternativa: Reparametrizar  $\beta$  con dominio  $[b, b + (d - c)]$ )

Ejemplo:

Si hacemos el producto de segmentos consecutivos obtenemos caminos poligonales.

# Conexión por caminos

## Definición

Un espacio  $X$  es conexo por caminos si sus puntos se pueden conectar con un camino:

$$\forall x \forall y \in X, \exists \sigma_y : [a, b] \rightarrow X, \sigma_y(a) = x \wedge \sigma_y(b) = y$$

En particular,  $X = \bigcup_y \sigma_y[a, b]$  es conexo (pivot,  $\alpha_y(a) = x, \forall y$ )

## Ejemplo:

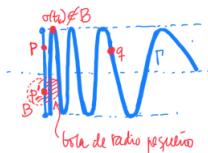
1. La mayor parte de los conexos conocidos son conexos por caminos:

- Los abiertos conexos (top. Usual) son conexos por poligonales, que son caminos.
- Los conjuntos convexos y los estrellados también.

2. El seno del topólogo  $\Gamma$  es la traza de  $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$ ,  $t > 0$ , es conexo y lo es su adherencia  $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$ ,  $J = \{0\} \times [0, 1]$ . Pero  $\bar{\Gamma}$  no es conexo por caminos.

Demostración:

No existen caminos  $\sigma : [a, b] \rightarrow \bar{\Gamma}$   $\begin{cases} \sigma(a) = p \in J \\ \sigma(b) = q \in \Gamma \end{cases}$ :



- a)  $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ ,  $\alpha, \beta$  continuas.  $\exists a' = \max\{t \in [a, b] : \alpha(t) = 0\} \Rightarrow (\alpha \text{ continua en un compacto}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(a') = 0, \sigma(a') = p' \in J \\ t > a' : \alpha(t) > 0 \Rightarrow \sigma(t) \in \Gamma \Rightarrow \beta(t) = \sin \frac{1}{\alpha(t)} \end{cases}$
- b) Supongamos  $p' = \sigma(a') \neq (0, 1)$  y  $\exists \delta : B(p', \delta) \cap \{y = 1\} = \emptyset$ .  $\sigma$  continua  $\Rightarrow \exists \sigma[a', \varepsilon] \subset B(p', \delta) \Rightarrow \sigma[a', \varepsilon] \cap \{y = 1\} = \emptyset$ . (si  $p' = (0, 1)$  evitariamos?  $\{y = -1\}$ )
- c)  $\alpha$  continua  $\Rightarrow \alpha[a', \varepsilon] \subset \mathbb{R}$  conexo compacto = intervalo:  $\alpha[a', \varepsilon] = [0, c]$ .
- d) La oscilación de  $\sin \frac{1}{x}$  lleva  $\sigma$  a  $\{y = 1\}$ , fuera de la bola elegida:

$$k \gg 0 \Rightarrow \frac{2}{(1 + 4k)\pi} \in [0, c] = \alpha[a', \varepsilon] \Rightarrow \exists a' < t_k < \varepsilon : \alpha(t_k) = \frac{2}{(1 + 4k)\pi}$$

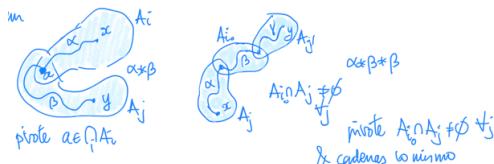
$$\Rightarrow \sigma(t_k) = \left( \alpha(t_k), \sin \left( \frac{1}{\alpha(t_k)} \right) \right) = (x_k, 1) !?$$

## Mantras

Todo (casi) lo que dijimos sobre la conexión nos vale:

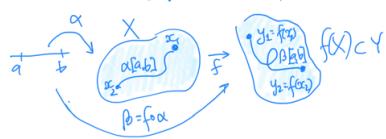
### Proposición (Mantra del pivot)

(Igual) Sea  $X = \bigcup_i A_i$ ,  $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$ ,  $\forall A_i$  conexos por caminos  $\Rightarrow X$  conexo por caminos.



### Proposición (Mantra de la imagen)

Sea  $f : X \rightarrow Y$  continua con  $X$  conexo por caminos  $\Rightarrow f(X)$  es conexo por caminos.



### Proposición (Mantra de la adherencia (!NO!))

El seno del topólogo  $\Gamma = \text{grafo de } \sin \frac{1}{t}$  es conexo por caminos:  $(a, \sin \frac{1}{a})$  y  $(b, \sin \frac{1}{b})$  se conectan por el camino evidente,  $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$ ,  $a \leq t \leq b$ . Pero, como hemos visto, la adherencia  $\bar{\Gamma}$  no es conexa por caminos.

## Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión por caminos	✗	✓	✓	✗

### Proposición (Productos)

Sean  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ :

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] \rightarrow X : & \left\{ \begin{array}{l} \sigma(a) = x_1 \\ \sigma(b) = x_2 \end{array} \right. \\ \tau : [a, b] \rightarrow Y : & \left\{ \begin{array}{l} \tau(a) = y_1 \\ \tau(b) = y_2 \end{array} \right. \end{aligned} \Rightarrow \gamma = (\sigma, \tau) : [a, b] \rightarrow X \times Y \left\{ \begin{array}{l} \gamma(a) = (x_1, y_1) \\ \gamma(b) = (x_2, y_2) \end{array} \right.$$



# Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos

---

## Componentes conexas por caminos

Todo análogo a las componentes conexas (casi). Sea  $X$  espacio topológico.

---

### Definición

*Una componente conexa por caminos (c.c.c) es un subconjunto conexo por caminos maximal.*

---

### Proposición (Descripción)

1. La c.c.c de  $x \in X$  es  $\bigcup_{x \in A} A$  con  $A$  conexa por caminos.
2. Las c.c.c forman una partición de  $X$ , más fina que la de las c.c.

Demostración:

Porque conexo por caminos  $\Rightarrow$  conexo pero no la inversa.

**¡OJO!** Las c.c.c no son necesariamente cerradas.

Como contraejemplo de ambas cosas dichas tenemos la adherencia del seno topólogo.

Ejemplo:

$\Gamma$  seno del topólogo y  $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$  son conexos. Tenemos que  $\bar{\Gamma}$  es una c.c, mientras que  $J$  y  $\Gamma$  son dos c.c.c, una cerrada ( $J$ ) y la otra no ( $\Gamma$ ). [Porque  $\bar{\Gamma}$  no es conexa por caminos]

## Conexión local por caminos

Imitamos sin sorpresa las demostraciones de la conexión local y tenemos:

---

### Definición

$X$  es localmente conexo por caminos si  $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$  base de entornos abiertos conexos por caminos.

---

### Proposición

$X$  es localmente conexo por caminos  $\Leftrightarrow$  c.c.c de un abierto es abierto.

Ejercicio: Localmente conexo  $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$  base de entornos conexos por caminos.

## Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local por caminos	✗	✓	✓	✓

También vale que las c.c.c del producto son los productos de las c.c.c de los factores.

## Relaciones entre las propiedades de conexión

Lo principal es que:

### Proposición

*Conexo y localmente conexo por caminos  $\Rightarrow$  Conexo por caminos.*

#### Demostración:

- Conexo  $\Rightarrow \forall x, y, \exists$  cadenas de  $x$  a  $y$ .
- Localmente conexo por caminos  $\Rightarrow$  cadenas de abiertos conexos por caminos  $\Rightarrow$  Var. pivote  
Estas cadenas son conexas por caminos.

Por tanto,  $\exists$  camino de  $x$  a  $y$ .

#### Observación:

Esta es la demostración de que un abierto conexo de  $\mathbb{R}_u^n$  lo es por poligonales (se usan cadenas de bolas).

#### Observación: (Resumen)

Por especificar todas las posibilidades:



Ejercicio: Contraejemplos. Los menos fáciles son \* y \*\*

# **Parte II**

# **Topología algebraica**



# Homotopía

---

## Conceptos fundamentales

---

### Definición

Una homotopía es una aplicación continua  $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ :

1.  $H_s : Y \rightarrow X : y \mapsto H(y, s)$ ,  $H \equiv \{H_s : 0 \leq s \leq 1\}$  familia uniparamétrica de aplicaciones.
2. Siendo  $f = H_0$  y  $g = H_1$ :

$$\begin{cases} H_s : f \simeq g \text{ homotopía entre } f \text{ y } g \\ H \text{ deformación continua de } f \text{ a } g \end{cases} \quad \boxed{\text{El problema: cuándo } f \simeq g}$$

3.  $f \simeq g$  relación de equivalencia:

- $f \simeq f$  vía  $H_s \equiv f$ .
- $H_s : f \simeq g \Rightarrow H_{1-s} : g \simeq f$ .
- $\begin{cases} F_s : f \simeq g \\ G_s : g \simeq h \end{cases} \Rightarrow H_s = \begin{cases} F_{2s}, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G_{2s-1}, & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} : f \simeq h$

Demostración:

$$\text{Continuidad: } \begin{cases} F_{2(1/2)} = F_1 = g \\ G_{2(1/2)-1} = G_0 = g \end{cases}$$

---

### Proposición

$X$  conexo por caminos,  $f, g : Y \rightarrow X$  constantes  $\Rightarrow f \simeq g$ .

Demostración:

$$\exists \sigma : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(0) = f(y_0) \text{ y } \sigma(1) = g(y_0) \Rightarrow H_s \equiv \sigma(s) : \begin{cases} H_0 \equiv \sigma(0) = f(y_0) \equiv f \\ H_1 \equiv \sigma(1) = g(y_0) \equiv g \end{cases}$$

---

### Definición

$f : Y \rightarrow X$  es nulhomótopa si  $f \simeq$  constante, esencial en caso contrario.

---

### Teorema (Problema esencial. Hopf.)

(1932)  $\exists f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  esencial con  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$  y  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C} : (z, z') \mapsto (\|z\|^2 - \|z'\|^2, 2zz')$

## Concepto relativo

### Definición

$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$  es relativa a  $A \subset Y$  si  $H_s(a) = H_0(a)$ ,  $\forall a \in A$ ,  $\forall s$ .

### Proposición

$H$  relativa a  $A$ ,  $f = H_0$ ,  $g = H_1 \Rightarrow f|_A = g|_A$ . Notación:  $H_s = f \xrightarrow{A} g$  (Relación de equivalencia).

Ejemplo: (Fundamentales. Interpolación)

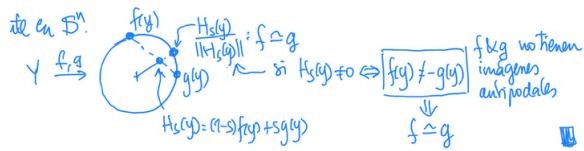
1.  $f, g : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$  convexo  $\Rightarrow \exists H_s = (1-s)f + sg : f \simeq g$ .

Demostración:

Pues por convexidad  $H_s(y) \in \underbrace{[f(y), g(y)]}_{\text{cond. crucial!}} \subset X$ .

$f(a) = g(a) \Rightarrow H_s(a) = f(a) = g(a) \Rightarrow H_s$  es relativa a  $A = \{f = g\}$ .

2.  $f : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$  estrellado verp?,  $x_0$ ,  $[x, x_0] \subset X$ ,  $\forall x \in X \Rightarrow H_s = (1-s)f + sx_0 : f \simeq x_0$  (relativa a  $A = f^{-1}(x_0)$ ).
3. Variante en  $\mathbb{S}^n$ :



## Contractibilidad

### Definición

$X$  es contrátil si  $\text{id} : X \rightarrow X$  es nulhomótopa:  $\exists H_s : \text{id} \simeq x_0$ .

$Y$  fuertemente contrátil si  $\exists H_s : \text{id} \xrightarrow{x_0} x_0$  (homótopa relativa a  $\{x_0\}$ )

Observación:

Los ejemplos son difíciles, pero son cosas distintas.

Ejemplo:

$X \subset \mathbb{R}^n$  estrellado verp?  $x_0 \Rightarrow$  fuertemente contrátil

Demostración:

$H_s = (1-s)\text{id} + sx_0$ .

### Proposición

1. Si  $X$  es contrátil  $\Rightarrow$  es conexo por caminos.

2. Si  $X$  es contrátil  $\Rightarrow \begin{cases} \forall f : Y \rightarrow X \text{ nulhomótopa}. \\ \forall g : X \rightarrow Z \text{ nulhomótopa}. \end{cases}$

Demostración:

1.  $H_s : id \simeq x_0 \Rightarrow S \mapsto H_s(x_0)$  camino de  $x$  a  $x_0$ .

2.  $H_s : id \simeq x_0 \begin{cases} H_s \circ f : f \simeq x_0 \\ g \circ H_s : g \simeq g(x_0) \end{cases}$

Observación:

Pocos espacios son contráctiles, pero no es inmediato verlo.



# Homotopía de caminos

---

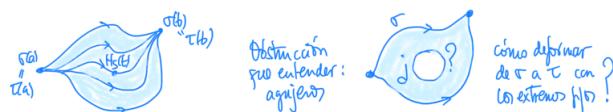
## El concepto básico

---

### Definición

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$  son homótopos con extremos fijos si  $\exists H_s : \sigma \simeq \tau$  relativa a  $\{a, b\}$ :

$$\begin{cases} H_s(a) = \sigma(a) = \tau(a) \\ H_s(b) = \sigma(b) = \tau(b) \end{cases} \quad \forall s$$

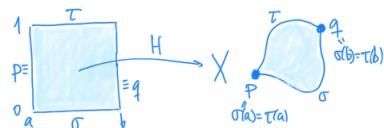


---

Observación:

Es un problema de extensión:

Definir  $H$  en el cuadrado  $[a, b] \times [0, 1]$  con valor determinado en su borde.



## Simple-conexión

---

### Definición

$X$  es simplemente conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1.  $\forall \sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$  con iguales extremos son homótopos con extremos fijos.
  2.  $\forall f : \mathbb{S}' \rightarrow X$  se extiende al disco interior de la circunferencia.
-

Demostración:

Colapsando dos lados de un cuadrado  $\xrightarrow{\pi}$  disco con dos puntos en la circunferencia unidos por dos ceros  $\alpha, \beta$ .

1.  $\Rightarrow$  2.)

$$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X \Rightarrow f \circ \pi \begin{cases} \alpha \rightarrow \text{camino } \sigma \\ \beta \rightarrow \text{camino } \tau \end{cases} \\ \Rightarrow \exists H \text{ con extremos fijos} \Rightarrow \text{compatible con } \pi \\ \Rightarrow H \text{ pasa al cociente por } \pi, \text{ dando } F..$$

2.  $\Rightarrow$  1.) Dos caminos  $\sigma, \tau$  con extremos  $p, q$  definen  $f$  en la circunferencia y su extensión  $F$  al disco define la homotopía  $H = F \circ \pi$ .

Ejemplo:

Los conjuntos convexos son simplemente conexos. ¿Los estrellados?

## Esferas $\mathbb{S}^n$ , $n \geq 2$

### Proposición

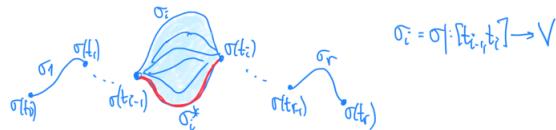
$\mathbb{S}^n : \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es simplemente conexo ( $n \geq 2$ ).

Demostración:

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $\sigma(a) = \tau(a) = p$ ,  $\sigma(b) = \tau(b) = q$ .

$$\left. \begin{array}{l} \exists c, -c \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, 1\} \wedge U = \mathbb{S}^n \setminus \{c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{proyección estereográfica.}$$

1.  $[a, b] \subset \sigma^{-1}U \cup \sigma^{-1}V \xrightarrow{\text{comp.}} \exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \sigma[t_{i-1}, t_i] \begin{cases} \subset U \\ \subset V \end{cases} \text{ donde } \sigma[t_{i-1}, t_i] \text{ es la traza de } \sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}.$
2. Si dos consecutivos están en el mismo  $U$  ó  $V$ , eliminamos la juntura común  $\Rightarrow$  al atravesar una juntura  $t_k$  cambiamos de  $U$  a  $V$  ó viceversa, en particular,  $x_k = \sigma(t_k) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$ , que es conexo por caminos, o bien, nos quedamos sin junturas y  $\sigma[a, b] \subset U$  ó  $V$ .
3. Consideramos los trozos en  $V$  (incluido que  $\sigma[a, b] \subset V$  porque no hay ya junturas)



(\*)

$$\begin{aligned} \sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i) &\in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\} \text{ conexo por caminos} \\ \Rightarrow \exists \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] &\rightarrow U \cap V \subset V \text{ mismos extremos que } \sigma_i. \end{aligned}$$

$$(***) \quad V \approx \mathbb{R}^n \text{ convexo} \Rightarrow \exists H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* \text{ en } V \text{ con extremos fijos. ¡Ojo! } [\sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U].$$

4. Pegando a trozos homotopías en  $\mathbb{S}^n$ :

$$\begin{cases} \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset U \Rightarrow H_s^i \equiv \sigma_i = \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U \subset \mathbb{S}^n \\ \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset V \xrightarrow{3} H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow V \subset \mathbb{S}^n \end{cases} \Rightarrow \sigma \simeq \sigma^*$$

Homótopos en  $\mathbb{S}^n$  con extremos fijos, pero  $\sigma^* [a, b] \subset U$ .

5. Igual,  $\exists H_s : \tau \simeq \tau^*$  homotopía en  $\mathbb{S}^n$  con extremos fijos, pero  $\tau^* [a, b] \subset U$ .

En conclusión:  $\sigma^* \simeq \tau^*$  en  $U (\approx \mathbb{R}^n)$  con extremos fijos  $\Rightarrow \sigma \simeq \sigma^* \simeq \tau^* \simeq \tau$  con extremos fijos.



# El grupo fundamental

---

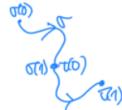
## Operaciones con caminos

Sea  $X$  es conexo por caminos.

### Definición (Producto)

$$\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(1) = \tau(0) \Rightarrow \sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tau(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

[Reescalando  $\begin{cases} \sigma \text{ de } [0, 1] \text{ a } [0, 1/2] \\ \tau \text{ de } [0, 1] \text{ a } [1/2, 1] \end{cases}$ ]



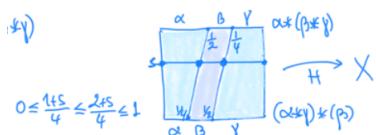
Las propiedades algebraicas son TODAS SALVO HOMOTOPÍA CON EXTREMOS FIJOS.

### Proposición

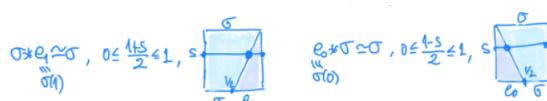
Propiedades de grupo:

1. Asociativa:  $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$ .

En cada altura  $s$  se reescalan los caminos con junturas.



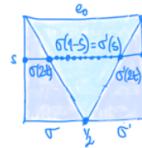
2. Neutros:



3. Inverso:  $\sigma'(t) = \sigma(1-t) \Rightarrow \sigma * \sigma' \simeq e_0$  y  $\sigma'' = \sigma \Rightarrow \sigma' * \sigma \simeq e_1$ .

No se reescalada:  $0 \leq \frac{1-s}{2} \leq \frac{1+s}{2} \leq 1$ .

Las junturas dicen dónde parar  $\sigma$  y empezar  $\sigma'$  en cada altura:



4. Invarianza por homotopía:

$$\begin{cases} F_s : \sigma_1 \simeq \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \simeq \tau_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Trans.}} F_s * G_s : \sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2$$

$$F_s * G_s(t) = \begin{cases} F_s(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G_s(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

## El grupo fundamental

Sea  $X$  conexo por caminos,  $x_0 \in X$  punto base fijo.

### Definición

1. Lazo de base  $x_0$ ,  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $\underbrace{\sigma(0) = \sigma(1)}_{\text{lazo}} = x_0$ , punto fijo.
2. ■  $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$  lazos de base  $x_0$ .  
■  $H_s : \sigma \simeq \tau$  de lazos:  $H_s(0) = H_s(1), \forall s$ .  
■  $H_s = \sigma \xrightarrow{x_0} \tau$  de lazos con punto base fijo:  $H_s(0) = H_s(1) = x_0, \forall s$ . [Relativa a  $\{0, 1\}$ ]

### Definición (Grupo fundamental)

- $\pi(X, x_0) = \{\text{lazos de base } x_0\} / \xrightarrow{x_0} \{\text{"Lazos / homotopía"}\}$
- $[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$  define bien un grupo por 14.1.

Ejemplo:

1.  $X$  simplemente conexo  $\Leftrightarrow \pi(X, x_0) = \{1\}, \forall x_0$ . [ $\Leftarrow$ ] ejercicio]

2.  $\pi(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}, n \geq 2$ .

Demostración:

Por 1) y ser  $\mathbb{S}^\times$ ,  $n \geq 2$  simplemente conexa.

3.  $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$ .

4.  $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$ ,  $\pi(\text{banda Möbius}) = \mathbb{Z}$ .

5.  $\pi(\infty, x_0) = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}$  que es una lemniscata y un grupo libre no comunitativo.

El cálculo de grupos fundamentales no es una tarea trivial, pero muy útil.

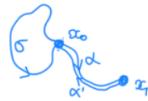
El punto base no es muy importante.

### Proposición

Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  de  $\alpha(0) = x_0$  a  $\alpha(1) = x_1$ . La conjugación:

$$\begin{aligned} \pi(X, x_0) &\rightarrow \pi(X, x_1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma' * \sigma * \sigma']. \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos.



Demostración:

Fácil con las propiedades de 14.1.

## Functorialidad

### Definición

Definimos  $h_*$  como:

$$\begin{aligned} h : X \rightarrow Y \text{ homeo, } h(x_0) = y_0 \Rightarrow \\ h_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0) \text{ iso.} \\ [\sigma] \mapsto [h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

Es fácil y útil: espacios homeomorfos deben tener grupos fundamentales isomorfos.

Por ejemplo,  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{RP}^2$  no son homeomorfos. Pero la construcción es mucho más general.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{espacio con}\} & \xrightarrow{\pi} & \{\text{grupos}\} \\ \{\text{punto base}\} & & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{\pi(X, x_0) \text{ iso}} & \pi(Y, y_0) \\ \text{cont. } f \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ (Y, y_0) & & \end{array}$$

bien definido, homeomorfismo de grupos  
 $f_*: \sigma \cong \tau$   
 $f_* \circ h_*: f_* \sigma \cong f_* \tau$   
 $f_* \circ h_* = (f \circ \sigma) \cong (f \circ \tau)$

### Definición (Functorialidad)

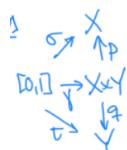
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \text{ y } (id_X)_* = id_{\pi(X, x_0)}.$$

### Ejemplo:

Si  $h : X \rightarrow Y$ ,  $x_0 \mapsto y_0$  es homeomorfismo  $\Rightarrow (h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$ . [Más preciso que  $h_*$  isomorfismo]

### Proposición (Producto de espacios)

Tenemos que si:



entonces:

$$\begin{aligned} \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) &\xrightarrow{p_*, q_*} \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \\ [\gamma] = [(\sigma; \tau)] &\mapsto ([\sigma], [\tau]). \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración:

Sean:

$$\left. \begin{array}{l} F_s : \sigma_1 \xrightarrow{x_0} \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \xrightarrow{y_0} \tau_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (F_s, G_s) : (\sigma_1, \tau_1) = \gamma_1 \mapsto \gamma_2 = (\sigma_2, \tau_2) \text{ y nada más...}$$

Ejemplo:

1.  $\pi(\mathbb{S} \times \mathbb{S}) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}^2$ .
2.  $\pi(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi([0, 1])$ .

# Retractos

---

## Retractos y deformaciones

---

### Definición

Una aplicación  $\rho : X \rightarrow A \subset X$  es:

1. Un retracto si  $\rho|_A = id_A$  ( $y A = \rho(A)$  es un retracto de  $X$ )
  2. Una deformación (fuerte) si:  $\exists H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho$ , homotopía relativa a  $A$ .
- 

### Ejemplo:

1.  $\forall$  cte :  $X \rightarrow \{x_0\} \subset X$  es retracto.
2. El retracto radial  $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto x/\|x\|$  es una deformación.  $H_s(x) = (1-s)x + s\rho(x)$ .
3.  $\left. \begin{array}{l} \rho : X \rightarrow A \subset X \subset \mathbb{R}^n \text{ retracto} \\ [x, \rho(x)] \subset X, \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \text{ deformación: } H_s = (1-s)id_X + s\rho \text{ (interpolación).}$
4. Cilindros:

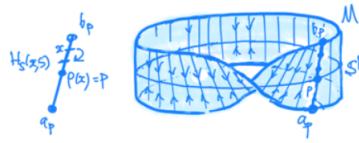
$$\begin{aligned} \rho : X \times [0, 1] &\rightarrow X \times \{0\} \\ (x, t) &\mapsto (x, 0) = \rho(x, t). \end{aligned}$$

con  $\rho$  deformación sobre  $X$ :  $H_s(x, t) = \begin{pmatrix} x, & \underbrace{(1-s)t}_{(1-s)t+s \cdot 0} \\ & \end{pmatrix}$ .



5. Banda de Möbius:  $\mathbb{S}^1 \subset M = \bigcup_{p \in \mathbb{S}^1} [a_p, b_p]$ .

Deformación sobre  $\mathbb{S}^1$ :  $\begin{cases} \rho : M \rightarrow \mathbb{S}^1 : x \mapsto \rho(x) \\ H_s(x, s) = (1-s)x + s\rho(x) \end{cases}$



### Proposición

Sea  $\rho : X \rightarrow A \subset X$ ,  $a_0 \in A$ ;  $\rho_* : \pi(X, a_0) \rightarrow \pi(A, a_0)$ .

1.  $\rho$  retracto  $\Rightarrow \rho_*$  suprayectivo.
2.  $\rho$  deformación  $\Rightarrow \rho_*$  isomorfismo.

Demostración:

1.  $\rho$  retracto:

$$A \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_A \end{array}} X \xrightarrow{\rho} A \Rightarrow \pi(A, a_0) \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_{\pi(A)} \end{array}} \pi(X, a_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\text{injektiva}} \pi(A, a_0) \text{ sobre} /$$

2.  $\rho$  deformación:

$$H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho \Rightarrow j_* \text{ sobre.} : \left\{ \begin{array}{l} [\sigma] \in \pi(X, a_0) \Rightarrow H_s \circ \sigma : \sigma \xrightarrow{A} \rho \circ \sigma = j \circ \rho \circ \sigma \\ \Rightarrow [\sigma] = [j \circ \rho \circ \sigma] = j_* [\rho \circ \sigma] \end{array} \right.$$

y por ser  $j_*$  sobre  $\Rightarrow \rho_*$  inyectiva.

Ejemplo:

$$1. \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \pi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \{1\}, n \geq 2 \\ \mathbb{Z}, n = 1 \end{cases}$$

$$2. \pi(\text{cilindro}) = \pi(\text{banda de Möbius}) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Demostración:

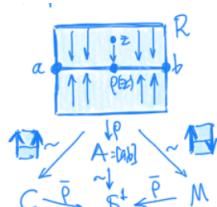
Veremos  $\mathbb{S}^1$ ...

## Cocientes

Muchos espacios son cocientes y las deformaciones se pueden hacer compatibles para facilitar las construcciones.

Ejemplo:

Cilindro  $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  y banda de Möbius  $M$ .



Tenemos  $C, M = R/\sim$  identificaciones adecuadas de lados opuestos y, por otro lado, la deformación de  $R$  sobre  $A = [a, b]$ ,  $H_s(z) = (1 - s)z + s\rho(z) \xrightarrow{(*)}$  deformación de  $R/\sim$  sobre  $[a, b]/\sim = \mathbb{S}^1$ .

Es decir,  $\mathbb{S}^1$  es deformación de  $C$  y de  $M$ , luego todos tienen  $\pi = \mathbb{Z}$ .

( $*$ ): porque  $p$  y  $H_s$  son compatibles con las relaciones:  $z \sim z' \Rightarrow H_s(z) \simeq H_s(z')$ , luego inducen aplicaciones continuas  $\bar{p}$  y  $\bar{H}_s : R/\sim \rightarrow A/\sim$ .

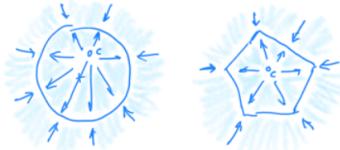
Normalmente se hacen las deformaciones pensando en que cumplan  $H_s(z) \simeq H_s(z')$ .

## Agujeros

Conviene insistir en un ejemplo importante de deformación y sus variantes.

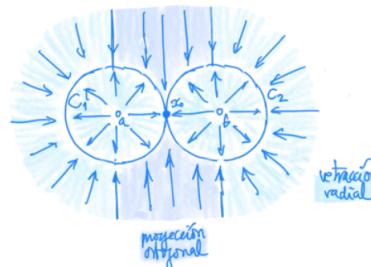
$$\begin{aligned} 1. \rho : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{esp. con "agujero"}} &\rightarrow \mathbb{S}^n \text{ deformación} \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0) = \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z}, n = 1 (\text{se verá...}) \\ \{1\}, n \geq 2 (\mathbb{S}^n, n \geq 2 \text{ simple-conexa}) \end{cases} \end{aligned}$$

2. Dibujos en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$  de retracciones sobre curvas “alrededor” del “agujero”  $c$ :



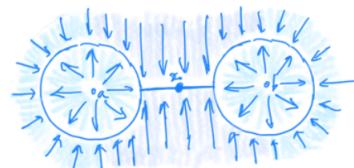
3. Dos agujeros  $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$ .

Se trocea el espacio en cerrados, en cada uno de los cuáles se hace una deformación, de manera que en las fronteras coincidan. En el dibujo se sombrean diferentes las zonas en las que se usan deformaciones diferentes. Las deformaciones más cómodas son las interpolaciones de  $id$  y una retracción geométrica.



En este caso,  $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow \infty$ ? es deformación y  $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\infty) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  (grupo fundamental de una lemniscata).

4. Otra variante:



$\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow dibujo$  deformación dice que:

$$\pi(dibujo) = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\underbrace{\infty?}_{=\mathbb{Z} * \mathbb{Z}})$$

que es igual al grupo fundamental, pero no homeomorfismo.

5. Aún más ejemplos así (ya sin especificar el punto base):

$$\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Demostración: (creo)

Cualesquiera tres puntos en  $\mathbb{R}^2$  se pueden recolocar con homeomorfismos para hacer, a partir de ellos, retracciones sobre las curvas dibujadas, no homeomorfas. (?)

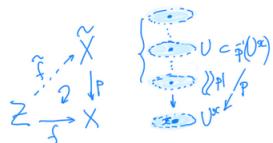
Ejercicio: Deformar  $\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}$  sobre una circunferencia, para obtener  $\pi(\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$ .

# Recubridores

---

## El problema de elevación

Fijada  $p$ , qué  $f$ 's tienen elevación  $\tilde{f}$ . i.e:  $p \circ \tilde{f} = f$




---

### Definición

$p$  es un recubridor si  $\forall x \in X$ ,  $\underbrace{\exists U^x}_{\text{ab. trivializante}} : p^{-1}(U^x) = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda}$  y  $\forall \lambda, p| : U_{\lambda} \rightarrow U^x$  homeomorfismo.

---

Es un tipo especial de homeomorfismo local sobrejetivo y, por eso, identificación abierta.

Ejemplo: (Importantes!)

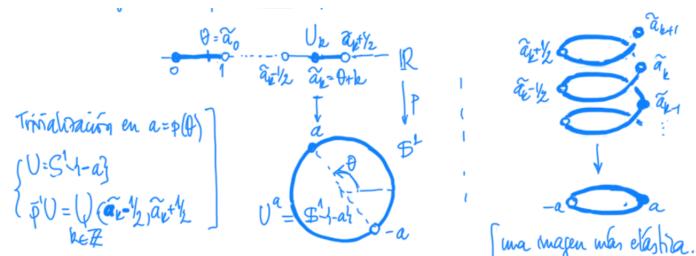
1. La identificación antipodal,  $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ ,

$$\forall x \in \mathbb{RP}^n \quad \underbrace{\exists U^x}_{\text{trivializante}} = \mathbb{RP}^n \setminus \underbrace{H}_{\text{hiperplano}} \quad \wedge \quad \pi^{-1}(U^x) = \mathbb{S}^n \setminus \pi^{-1}H = S_+ \sqcup S_-$$

hemisferios abiertos.

Ya se ilustró convenientemente en su lección. ¿Qué se tiene para  $n = 1$ ?

2. La identificación exponencial,  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ .



## Unicidad de elevación

### Proposición

Si  $Z$  es conexo, dos elevaciones que coinciden en algún puntos son iguales.

Demostración:

$$A = \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}, p \circ \tilde{f}_1 = f.$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{f(z)} \in U^x, p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización)} \Rightarrow \tilde{f}_i(z) \in p^{-1}U^x \wedge \exists! \lambda_i : \tilde{f}_i(z) \in U_{\lambda_i} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z = \tilde{f}_1^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_{\lambda_2}) : \hat{f}_1(\eta) = \hat{f}_2(\eta) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 (**). \end{aligned}$$

(\*) debido a:

- $\Rightarrow$ )  $U_{\lambda}$ 's disjuntos.
- $\Leftarrow$ )  $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$  y  $p|_{U_{\lambda}}$  1-1.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Ab.}}_A W^z \subset A \text{ si } z \in A : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \wedge \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} = U_{\lambda_2} \xrightarrow[p|]{\text{iny.}} \underbrace{U^x}_{\text{iny.}} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta), \tilde{f}_2(\eta) \mapsto \tau?(z) \Rightarrow \tilde{f}_1(\eta) = \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Cerr.}}_A W^z \subset Z \setminus A \text{ si } z \notin A : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \cap \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta) \neq \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\exists \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \Rightarrow \emptyset \neq A \underset{\text{cerr.}}{\subset} Z \text{ conx.} \Rightarrow A = Z \wedge \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$$

## Lema de elevación

### Proposición

Tenemos que:

$$\begin{cases} f = H : Y \times [0, 1] \rightarrow X \text{ (homotopía)} \\ \exists \tilde{H}_0 \text{ elevación de } H_0 : Y \rightarrow X \end{cases} \Rightarrow \exists \tilde{H} \text{ elevación, } (\tilde{H})_0 = \tilde{H}_0$$

Demostración:

1. Elevación semilocal:  $\forall y \in Y, \tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$  elevación de  $H|_{V^y \times [0, 1]}$ .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \{y\} \times [0, 1] \subset \bigcup_x H^{-1}(U^x), p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización en } x) \Rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \{y\} \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \forall i, \exists V_i^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \Rightarrow \exists V^y = V_1^y \cap \dots \cap V_r^y : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \stackrel{(*)}{\subset} H^{-1}(U^{x_i}). \end{aligned}$$

b) Inducción,  $i > 0 : \exists \tilde{H}_0 : V^y \times \{t_0\} \rightarrow \tilde{X}$  por hipótesis.

$$\begin{aligned}
 & \underline{i-1 \rightarrow i} : \exists H_{i-1}^y \text{ en } V^y \times [t_0, t_{i-1}] \Rightarrow \text{se puede extender a } V^y \times [t_{i-1}, t_i] \\
 (*) \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} H(y, t_{i-1}) \in U^{x_i} \xrightarrow{\exists \lambda} \tilde{H}_{i-1}^y(y, t_{i-1}) \in U_\lambda \xrightarrow{\text{red. } V^y} \\ \hat{H}_{i-1}^y(V^y \times (t_{i-1})) \subset U_\lambda \rightarrow U^{x_i} \\ \exists (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U_\lambda \text{ elevación (de } H) \end{array} \right. \\
 \Rightarrow & p \circ \tilde{H}_{i-1}^y = p \circ [(p|_{U_\lambda}^{-1} \circ H)] : V^y \times \{t_{i-1}\} \rightarrow U^{x_i} \\
 \xrightarrow{p|_{U_\lambda} \text{ iny.}} & \tilde{H}_{i-1}^y = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ H \text{ en } V^y \times \{t_{i-1}\} \\
 \Rightarrow & (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H \text{ extiende } \tilde{H}_{i-1}^y \text{ a } V^y \times [t_{i-1}, t_i].
 \end{aligned}$$

2. Elevación global. Las locales  $\{\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}\}_{y \in Y}$  encolan bien, pues coinciden en las intersecciones:  $\forall y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$ :

Observación:

1. La elevación de una aplicación  $Y \rightarrow X$  sólo depende de su clase de homotopía.
2. Todo camino  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  tiene una única elevación  $\tilde{\sigma}$  con origen  $\tilde{\sigma}(0) \in p^{-1}(\sigma(0))$ .

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}^{y_1}(y, \bullet) \\ \tilde{H}^{y_2}(y, \bullet) \end{array} \right\} \text{ elevan } H(y, \bullet) : \{y\} \times [0, 1] \\ \tilde{H}^{y_1}(y, 0) = \tilde{H}_0(y) = \tilde{H}^{y_2}(y, 0) \text{ 1er paso ind.} \right\} \xrightarrow{\text{Uni. elevación.}} \tilde{H}^{y_1}(y, t) = \tilde{H}^{y_2}(y, t), \forall z$$



# Cálculos mediante recubridores

---

Hemos visto ya que:

- $\pi(\text{estrellado}) = \{1\}$ ,  $\pi(\mathbb{S}^n) = \{1\}$ ,  $n \geq 2 \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \{1\}$ .
- $\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$ ,  $n \geq 2$  (no demostrado)
- $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$  (no demostrado).
  - $\pi(\text{toro}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,  $\pi(\text{cilindro}) = \mathbb{Z}$ .
  - $\pi(\text{banda de Möbius}) = \mathbb{Z}$ ,  $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$ .

Ahora toca demostrar  $\pi(\mathbb{P}^n)$  y  $\pi(\mathbb{S}^1)$ .

## Espacios proyectivos reales

### Teorema

$$\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$$

### Demostración:

Usamos el recubridor antipodal  $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n : \tilde{x}, -\tilde{x} \mapsto x = [\tilde{x}] = [-\tilde{x}]$ . Punto base en  $\mathbb{P}^n : x_0 = (0 : \dots : 1)$ ;  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ ,  $\tilde{x}_0 = (0, \dots, 1)$ . Ahora, por el lema de elevación:

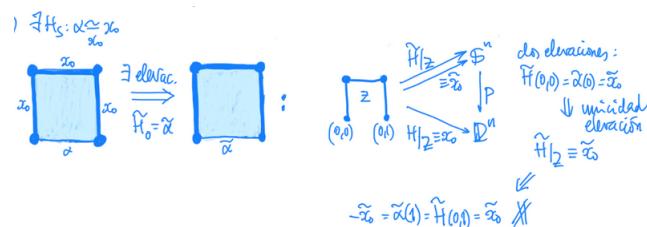
$$\Rightarrow \exists ! \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, p\tilde{\sigma} = \sigma, \tilde{\sigma} = \tilde{x}_0 \wedge \tilde{\sigma}(1) \in p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0\}$$

No veces? lazo.

$$1. \tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{x_0} \tilde{x}_0 \Rightarrow \exists p \circ \tilde{H}_s : \sigma \xrightarrow{x_0} x_0 \Rightarrow [\sigma] = 1 \in \pi(\mathbb{P}^n, x_0).$$

$$2. \tilde{\sigma}(1) = -\tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0} \tilde{\alpha} = (0, \dots, 0, \sin \pi t, \cos \pi t) \Rightarrow \exists p \circ H_s : \sigma \xrightarrow{x_0} \alpha = p \circ \tilde{\alpha}, \text{lazo de base } x_0, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

3. Tenemos:



1. 2. 3.  $\Rightarrow \pi(\mathbb{P}^n, x_0)$  tiene dos elementos distintos dependiendo del extremo de la elevación  $\Rightarrow$

$$\boxed{\pi(\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2}.$$

## La circunferencia

### Teorema

$$\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Observación:

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^1.$$

Demostración:

Usamos el recubridor exponencial  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ . Punto base  $x_0 \in \mathbb{S}^1$ ,  $\forall \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $s(0) = \sigma(1) = x_0$ . Por el lema de elevación:

$$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, p\tilde{\sigma} = \sigma \Rightarrow p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = \sigma(0) = p\tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(0) + k, k \in \mathbb{Z}$$

### Teorema

El  $n^o$  de vueltas:

$$\begin{aligned} \# : \pi(\mathbb{S}^1, x_0) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0). \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos bien definido.

Demostración:

1.  $k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$  no depende de  $\tilde{\sigma}$ .

$$\begin{aligned} p\tilde{\tau} = \sigma = p\tilde{\sigma} \Rightarrow \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(0) + l \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tau} & \text{elevan } \sigma \\ \tilde{\sigma} + l & \text{coinciden} \\ & \text{en } t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{uni. elev.}} \tilde{\tau} = \tilde{\sigma} + l \\ \Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (\tilde{\tau}(1) - l) - (\tilde{\tau}(0) - l) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

2.  $k$  no depende de homotopía de lazos, luego  $\#$  está bien definido. Sea  $H_s : \sigma \simeq \tau$  y  $H_s(1) = H_s(0)$ ,  $\forall s$ :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \simeq \tilde{\tau} \text{ entre elevaciones de } \sigma \wedge \tau \\ &\Rightarrow s \mapsto \underbrace{\tilde{H}_s(1)}_{\xrightarrow{p} H_s(1)} \setminus \underbrace{\tilde{H}_s(0)}_{\xrightarrow{p} H_s(0)} \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{cont.}} \tilde{H}_s(1) - \tilde{H}_s(0) \equiv cte. \\ &\Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \tilde{H}_0(1) - \tilde{H}_0(0) \stackrel{cte.}{=} \tilde{H}_1(1) - \tilde{H}_1(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

3.  $\#$  es isomorfismo. Sea  $\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$  y  $\#\tau = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)$  y:

$$\begin{aligned} \tau(0) = \tau(1) = p\tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) \text{ cond. inicial elev.} \\ \Rightarrow \exists \tilde{\tau} : \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma} * \tilde{\tau} = \sigma * \tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \#(\sigma * \tau) &= \sigma * \tau(1) - \sigma * \tau(0) = \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0) = \\ &= (\tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)) + (\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)) = \#\tau + \#\sigma. \end{aligned}$$

4.  $\#$  es suprayectiva:

$$\#(\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt) = kt|_0^1 = k$$

(Recorrer  $\mathbb{S}^1$   $k$  veces)

5.  $\#$  es 1-1:

$$0 = \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma(\tilde{1}) = \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{cases} H_s(0) = p\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0) = \sigma(0) = x_0 \\ H_s(1) = p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = x_0 \end{cases} \\ \underbrace{p((1-s)\tilde{\sigma}(t) + s\tilde{\sigma}(0))}_{H_s(t)} : \sigma \xrightarrow[\text{(*)}]{x_0} x_0 \end{array} \right\} (\ast)$$

$$[\Rightarrow (\sigma) = 1 \in \pi(\mathbb{S}^1, x_0)]$$



# Aplicaciones en dimensión 2

---

Veamos tres teoremas importantes que se pueden demostrar en dimensión 2 con lo que ya hemos visto del grupo fundamental.

## Teorema fundamental del Álgebra

### Teorema (Fundamental del Álgebra)

*Todo polinomio  $P(z) \in \mathbb{C}[z]$  tiene raíces complejas.*

Demostración:

Sea  $P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + \overbrace{a_d}^{\neq 0}$  (mónico después de dividir por el cof. director)

1. Tendremos:

$$P_s(z) = z^d + sa_1 z^{d-1} + \dots + sa_d = 0 \xrightarrow[0 \leq s \leq 1]{} |z| < 1 + |a_1| + \dots + |a_d| = r$$

$P_s \neq 0 \xrightarrow[z \neq 0]{} \text{entre } z^{d-1} : -z = s \left( a_1 + \dots + \frac{a_d}{z^{d-1}} \right) \Rightarrow |z| \leq \begin{cases} 1, & |z| \leq 1 \\ |a_1| + \dots + |a_d|, & |z| \geq 1 \end{cases}$ .

2.  $z(t) = r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \Rightarrow |z(t)| = r \Rightarrow \exists H_s(t) = \underbrace{\frac{P_s(z(t))}{|P_s(z(t))|}}_{\neq 0}$  por 1.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\cos 2\pi dt, \sin 2\pi dt) &= \frac{z(t)^d}{|z(t)^d|} = H_0(t) \xrightarrow[\text{lazos: } z(0)=z(1)]{} H_1(t) \\ &= \frac{P(z(t))}{|P(z(t))|} = \sigma(t) \Rightarrow d = \#(\dots) = \#\sigma. \end{aligned}$$

3.  $P(z) \neq 0, \forall z \Rightarrow \exists G_s(t) = \frac{P(sz(t))}{|P(sz(t))|} : G_0 \equiv \underbrace{\frac{a_d}{|a_d|}}_{\neq 0} \xrightarrow[\text{lazos}]{z(0)=z(1)} G_1 = \sigma \Rightarrow 0 = \#(\text{cte.}) = \#\sigma.$

## Teorema del punto fijo de Brouwer

### Teorema (de no retracto)

$\nexists$  retracto  $\rho : \mathbb{D}^2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Demostración:

Tenemos:

$$\exists \rho \Rightarrow \rho_* : \underbrace{\pi(\mathbb{D}^2)}_{\text{convexo}} \xrightarrow{\#_{\mathbb{Z}}} \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1)}_{= \{0\}} \text{ sobre (15.1)}$$

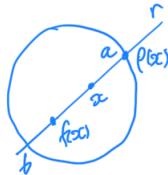
### Teorema (del punto fijo)

$\forall f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$  continua,  $\exists p$  punto fijo  $x = f(x)$ .

Demostración:

Al absurdo?:  $x \neq f(x), \forall x \Rightarrow \exists \rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  retracto.

Construcción de  $\rho$ :



La recta ( $x \neq f(x)$ ),  $r(x, f(x)) \cap \mathbb{S}^1 = \{a, b\} \Rightarrow \rho(x) = a = x + \lambda(x)(x - f(x))$ .

Ejercicio: Ecuación de  $\lambda$  y continuidad.

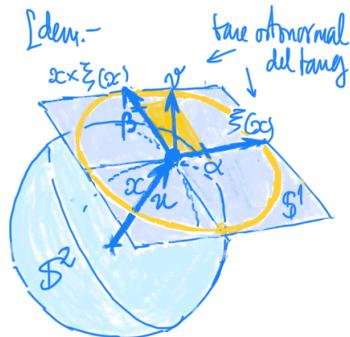
### Teorema de la esfera de Brouwer

#### Teorema (de la esfera de Brouwer)

$\nexists \eta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  campo tangente continuo sin ceros. ( $\text{Tangente} \equiv \eta(x) \perp x, \forall x \in \mathbb{S}^2$ )

Demostración:

Con una ilustración:



Sea  $\exists \eta$  sin ceros  $\Rightarrow \exists \frac{\eta}{\|\eta\|}$  unitario  $\Rightarrow$  podemos suponer  $\|\eta\| = 1$ :

1.  $h : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\approx \text{hom.}} SO(3) = \{\text{matrices } 3 \times 3 \text{ ortogonales, } \det > 0\}$

$$(\alpha, \beta; x) \xmapsto{h} A = (u, v, u \times v) \begin{cases} u = x \\ v = \alpha \eta(x) + \beta(x \times \eta(x)) \end{cases}$$

Con  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ,  $\|x\| = 1$ . Bien definida, continua y biyectiva  $\xrightarrow{\text{compacto a } T_2}$  homeo.

2.  $h_* : \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)}_{=\mathbb{Z} \times \{1\}} \rightarrow \pi(SO(3))$  isomorfismo  $\Rightarrow \pi(SO(3)) = \mathbb{Z}$ .

3. Abracadabra?:  $SO(3) \xrightarrow{\text{homeo.}} \mathbb{P}^3 \Rightarrow \mathbb{Z} = \pi(SO(3)) = \pi(\mathbb{P}^3)$ .



# Más aplicaciones por el mismo precio

---

Unos cuantos teoremas profundos más en dim = 2.

## Borsuk-Ulam

### Teorema (de Borsuk)

Sea  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  impar ( $f(-x) = -f(x)$ ) :  $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  impar ( $\Rightarrow \# \neq 0$ )

Demostración:

Tenemos que:

$$\begin{array}{c} \text{[dem.} \\ \tilde{\sigma} \rightarrow \mathbb{D} \\ \downarrow P \\ \mathbb{D}, \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{B}^4 \\ (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \rightarrow \mathbb{S}^1 \end{array}$$

$\tilde{\sigma}$  elevación de  $\sigma(t) = f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ .  $\begin{cases} x = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & (*) \\ 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$

$f(-x) = -f(x) \xrightarrow{(*)} \sigma(t + \frac{1}{2}) = -\sigma(t) \Rightarrow \tilde{\sigma}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{\sigma}(t) + k_t + \frac{1}{2}$ . Como  $k_t \equiv cte.$  es continua:

$$\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \left( \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) - \tilde{\sigma}(0) \right) = \underbrace{\left( k_{1/2} + \frac{1}{2} \right)}_{k_0} + \left( k_0 + \frac{1}{2} \right) = 2k_0 + 1$$

Análogamente,

### Teorema (de Hirsch)

Sea  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  par ( $f(-x) = f(x)$ ) :  $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  par.

### Corolario (Teorema de Borsuk-Ulam)

$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  impar  $\Rightarrow$  esencial.

Demostración:

$\exists H_s : f \simeq cte. \Rightarrow H_s(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : \sigma \simeq x_0 \Rightarrow \#\sigma = 0$ , con  $\sigma$  rotación anterior y la homotopía de lazos.

### Corolario (2)

$\nexists g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  impar.

Demostración:

Tenemos:

$$\begin{array}{c} \text{Idem-} \\ \mathbb{S}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1 \\ \downarrow \sigma \quad \xrightarrow{\text{fijo}} \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2 \\ \text{base } (1,0,0) \simeq (1,0,0) \end{array}$$

$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

■  $g$  impar  $\Rightarrow f$  impar  $\Rightarrow \#\sigma \neq 0$ .

■  $\mathbb{S}^2$  simple conexo  $\exists H_s : (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0) \xrightarrow[\sigma]{\text{base } (1,0,0) \text{ fijo}} (1,0,0)$ . Como  $f = g \circ \sigma = 0 \Rightarrow$

$$g \circ H_s : f \underbrace{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}_{\sigma} \simeq f(1,0,0) \text{ cte.} \Rightarrow \#\sigma = 0$$

### Corolario (3)

$\forall h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists h(x) = h(-x) (\Rightarrow h \text{ no es 1-1})$ .

Demostración:

$h(x) \neq h(-x), \forall x \Rightarrow \exists g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{\|h(x) - h(-x)\|} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  impar.

## Invarianza del dominio

### Teorema

Sea  $f : U_{ab.} \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua y 1-1  $\Rightarrow f(U)$  es abierto.

Demostración:

$\forall a \in U, \exists V^{\text{ab.}} \subset \mathbb{R}^2 : f(a) \in V \subset f(U)$ . Por traslaciones:  $a = f(a) = 0$ . Con esto,  $\exists \varepsilon > 0 :$

$$B(0, \varepsilon) \subset B[0, \varepsilon] \subset U; 0 \notin S = S[0, \varepsilon] \xrightarrow{1-1} 0 = f(0) \in f(S) \Rightarrow \exists V = C(0) \overset{\text{c.c.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \setminus f(S)$$

$S$  comp.  $\Rightarrow f(S)$  comp.  $\Rightarrow$  cerr. en  $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ loc. conx.} \Rightarrow V \underset{\text{conx.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \Rightarrow$  c. caminos(\*)

Este  $V$  es la solución:  $V \subset f(B) \subset f(U)$ .

Al absurdo:  $\exists c \in V \setminus f(B) \xrightarrow{(*)} \exists \sigma : [0, 1] \rightarrow V, \sigma(0) = c, \sigma(1) = 0$ .

Denotamos,

$$g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto f(\varepsilon x); h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto g(x) - g(-x)$$

y tenemos las homotopías:  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

- $\frac{f(\varepsilon sx) - c}{\|\cdot\|} : \frac{-c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g - c}{\|\cdot\|}$ .
- $\frac{f(\varepsilon x) - \sigma(s)}{\|\cdot\|} : \frac{g - c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g}{\|\cdot\|}$ .
- $\frac{f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon sx)}{\|\cdot\|} : \frac{g}{\|\cdot\|} \simeq \frac{h}{\|\cdot\|}$

Con esto,  $\frac{h}{\|\cdot\|} \simeq \text{cte.}!$  por Borsuk-Ulam.

Que los denominadores no se anulan es una comprobación rutinaria.

## Divarianza del borde y de la dimensión

### Teorema

$$S, T \subset \mathbb{R}^2, h : S \xrightarrow{\text{homeo.}} T \Rightarrow h(S \setminus \overset{\circ}{S}) = T \setminus \overset{\circ}{T}.$$

Demostración:

$$h : \overset{\circ}{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ inyectiva} \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \underset{19,2}{\subset} \text{ab.} \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \subset \overset{\circ}{T}. \text{ (el otro} \supset \text{ con } h^{-1})$$

Ejemplo:

$$S = T = \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(x = 0) = (x = 0).$$

### Teorema

$$U \xrightarrow{\text{ab.}} \mathbb{R}^n, V \xrightarrow{\text{ab.}} \mathbb{R}^2, h : U \xrightarrow{\text{homeo.}} V \Rightarrow n = 2.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \exists H \subset \mathbb{R}^n & [\text{plano afín interior vacío en } \mathbb{R}^n \text{ salvo si } n = 2] (*) : U \cap H \neq \emptyset \Rightarrow h| : \underbrace{U \cap H}_{\approx \text{ab.}} \xrightarrow{1-1} V \subset \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{19,2} h(U \cap H) \xrightarrow{\text{ab.}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h \text{ homeo.}} U \cap H = h^{-1}h(U \cap H) \xrightarrow{\text{ab.}} U \xrightarrow{(*)} n = 2 \end{aligned}$$



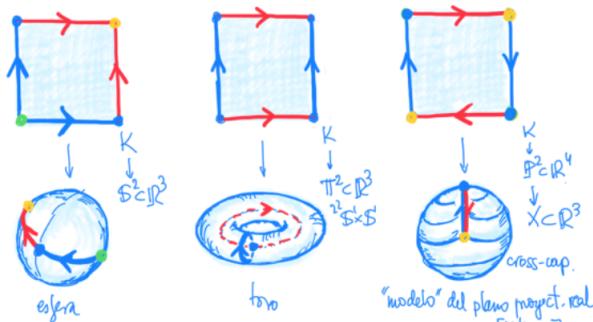
# Superficies

## Concepto

### Definición

Una superficie es un espacio localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Supondremos siempre que es  $T_2$  y el II Ax., lo que implica que se puede sumergir en  $\mathbb{R}^n$  para  $n$  grande.

Nos interesan las superficies compactas. Las tres primeras son cocientes:



Ejercicio:  $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \frac{(x_1^2 - x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$ .

Observación:

$P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene siempre identificaciones adicionales (como el cross-cap?)

## Sumas conexas

El método genérico para construir superficies requiere el concepto un poco más general siguiente:

### Definición

Una superficie con borde es un espacio local homeomorfo a  $\{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$  y los puntos del borde se corresponden con  $\{x = 0\}$  (es una definición consistente por la inversa? del borde)



---

### Observación:

Sin los puntos del borde se tiene una superficie ordinaria.

### Ejemplo:

1. Un disco cerrado, que tiene por borde la circunferencia.
2. Una corona circular, una banda entre rectas paralelas, un tronco de cilindro.



Con este concepto podemos “hacer agujeros” en superficies y, con ellos, definir:

---

### **Definición**

*La suma conexa  $M \# M'$  de dos superficies  $M$  y  $M'$  se construye haciendo un agujero en cada una y pegando las superficies agujereadas por sus bordes:*

1. *Agujeros:  $B \subset M$  y  $B \subset M'$  (discos abiertos) con bordes  $S = \overline{B} \setminus B$  y  $S' = \overline{B'} \setminus B'$  (circunferencias).*
2. *Superficies agujereadas:  $M \setminus B$  y  $M' \setminus B'$  con los mismos bordes  $S$  y  $S'$ .*
3. *Pegando por los bordes:  $M \# M' = ((M \setminus B) + (M' \setminus B')) / (S \equiv S')$ .*



---

### **Proposición**

*La suma conexa está bien definida y no depende de los agujeros elegidos (salvo homeomorfismos).*

### Demostración:

Que efectivamente es una superficie ordinaria (sin borde) es fácil si elegimos los agujeros en abiertos de las superficies homeomorfas a  $\mathbb{R}^2$ . Luego, hay que ver que si cambiamos los agujeros obtenemos el mismo resultado (salvo homeomorfismo) y esto ya requiere resultados profundos como el teorema de Jordan-Schoenflies.

### **Proposición**

*La suma conexa es una operación asociativa conmutativa con elemento neutro la esfera.*

### Demostración:

Que  $(M \# M') \# M'' \approx M \# (M' \# M'')$  es fácil tomando agujeros bien separados. También es obvio que  $M \# M' \approx M' \# M$ . Finalmente:

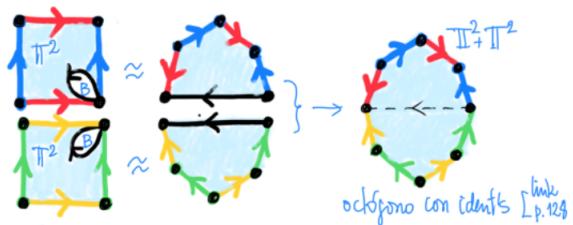
$$M \# \mathbb{S}^2 = ((M \setminus B) + (\mathbb{S}^2 \setminus B')) / (S \equiv S') = ((M \setminus B) + B) / (S \equiv S') = M$$

pues  $\mathbb{S}^2 \setminus B'$  es un disco cerrado que restituimos a  $M$ .

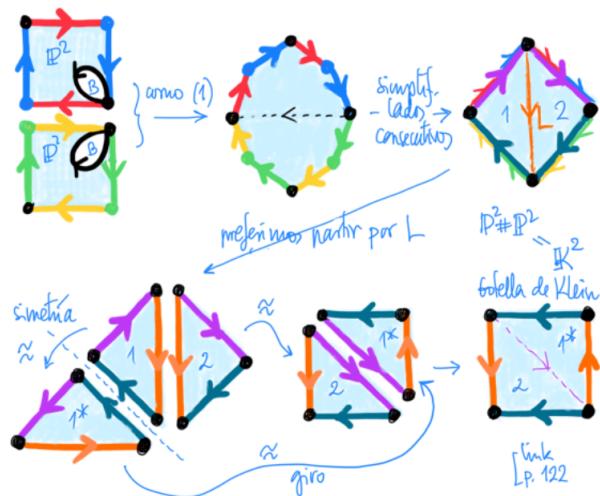
## Cocientes

Las sumas conexas se visualizan muy bien mediante identificaciones.

### 1. Suma conexa de toros:



### 2. Suma conexa de planos proyectivos:





# Clasificación de superficies

## El teorema

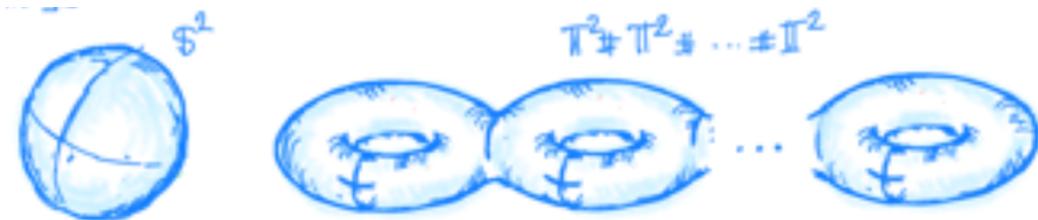
### Teorema

Toda superficie compacta es homeomorfa a una y sólo una entre:

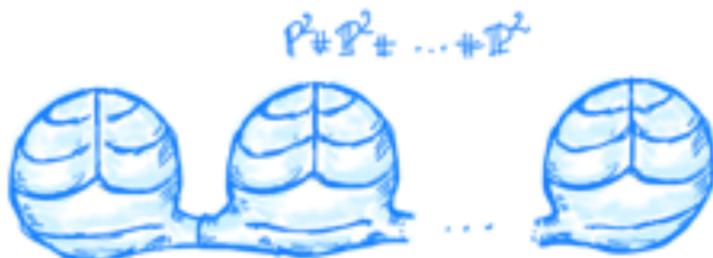
$$\mathbb{S}^2; \quad \mathbb{H}^2 \# \cdots \# \mathbb{H}^2, k \geq 1; \quad \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2, k \geq 1$$

Las podemos dibujar:

- En  $\mathbb{R}^3$ :



- En  $\mathbb{R}^4$  (modelo en  $\mathbb{R}^3$ ):



El “solo una” del enunciado nos dice que estas superficies son todas distintas (no homeomorfismo): el grupo fundamental las distingue. Ya sabemos que  $\pi(\mathbb{S}^2) = \{1\}$ ,  $\pi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{Z}^2$ ,  $\pi(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2$  y los demás  $H_0$ ? son desiguales (aunque no sepamos calcularlos).

## La relación fundamental

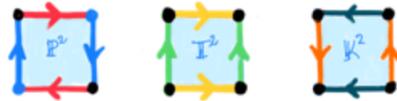
En la lista del teorema de clasificación no hay sumas “mixtas”:  $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2, \dots$ , pero el mismo teorema nos dice que están en la lista. Es claro que, por las propiedades de  $\#$ , cualquier suma conexa de  $\mathbb{S}^2, \Pi^2$  y  $\mathbb{P}^2$  estará en la lista en cuanto esté  $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2$ . En efecto:

### Proposición

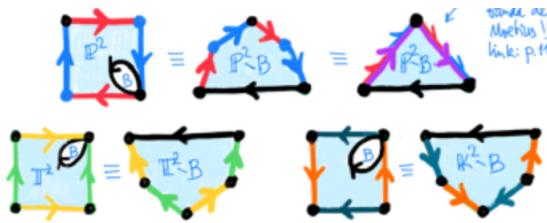
$$\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2.$$

Demostración:

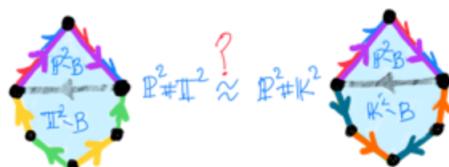
“Cut & paste” típico de identificaciones. Como  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$  (20.3) es la botella de Klein, el homeomorfismo que partiremos? es  $\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$  con:



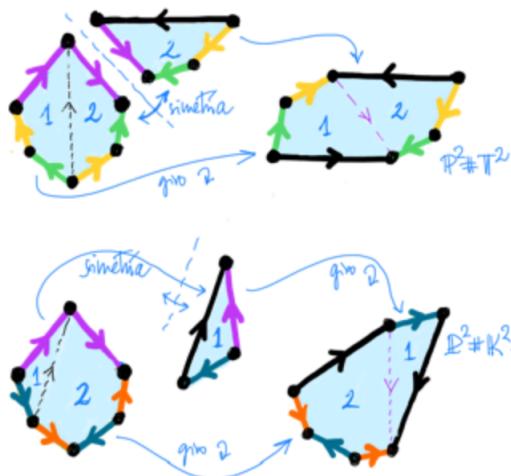
1. Agujeros:



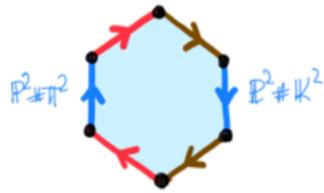
2. Pegados:



3. Cut & paste:



Obtenemos dos representaciones nuevas de  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{H}^2$  y  $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$ , con apariencias desiguales, pero topologías iguales: dos hexágonos con las mismas identificaciones de lados:



No dejarse engañar por los colores ni los sentidos de las flechas.

## Grupos fundamentales con un agujero

Aunque no podamos distinguir todas las superficies unas de otras porque no conocemos todos los grupos fundamentales, si podemos hacer algunas distinciones “haciendo agujeros”.

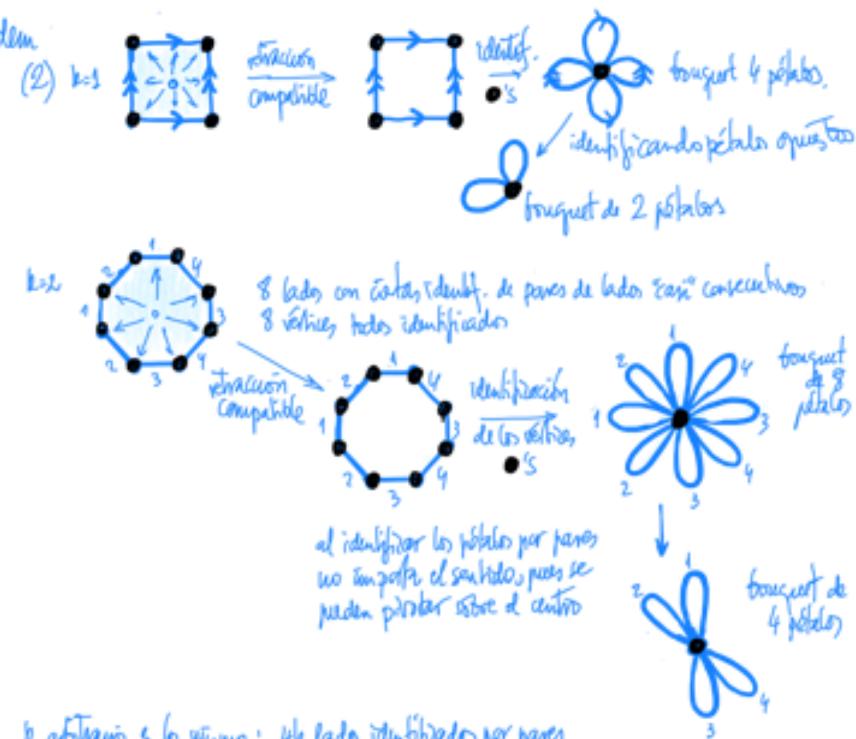
### Proposición

*Distinguimos:*

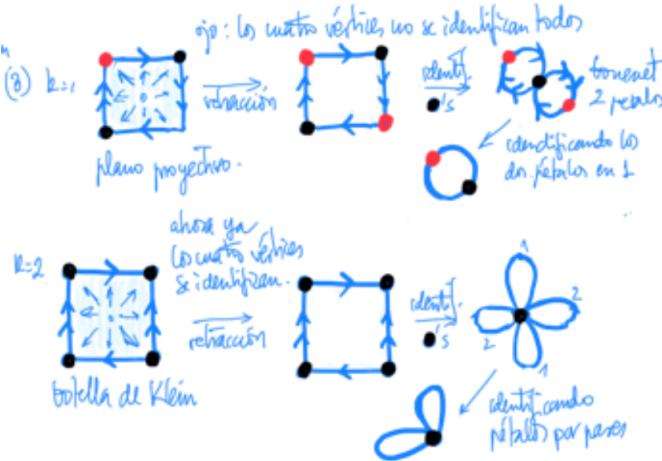
1.  $\pi(\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\mathbb{R}^2) = \{1\}$ .
2.  $\pi(\mathbb{H}^2 \# \dots \# \mathbb{H}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^{2k}) = \mathbb{Z}^{*^{2k}}$ .
3.  $\pi(\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^k) = \mathbb{Z}^{*^k}$ .

Demostración:

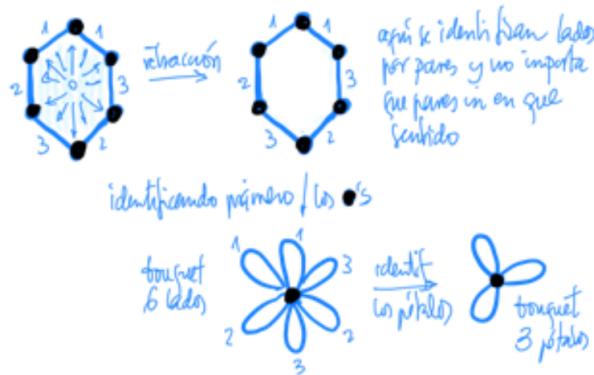
Tenemos



Con  $k$  arbitrario es lo mismo:  $4k$  lados identificados por pares,  $4k$  vértices todos identificados. Por retracción radical desde un punto interior (el agujero), obtenemos la poligonal con esas mismas identificaciones. Al identificar los vértices se tiene un bouquet de  $4k$  pétalos y, al identificar pétalos por pares, un bouquet de  $2k$  pétalos.



$k = 3$ . Por *cut & paste*, los lados, pueden sumar un proyectivo aporta? 2 lados identificados entre sí con tres vértices identificados todos (21.2).



Con  $k$  arbitrario es lo mismo: se empieza con un polígono de  $2k$  lados, que se retrae a una poligonal de  $2k$  lados, en la que se identifican los vértices para obtener un bouquet de  $2k$  pétalos, que se identifican por pares para tener un bouquet de  $k$ .

### Conclusión:

Todas las superficies se distinguen por el grupo fundamental después de quitar un punto, salvo los pares:

$$\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2 \wedge \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2 \# \cdots \# \mathbb{K}^2$$

para cada  $k \geq 1$ . El primer caso (y el esencial) es que el toro y la botella de Klein no son homeomorfos: La razón de fondo es la orientabilidad, que no hemos estudiado aquí.

En general:

- Cualquier  $\mathbb{P}^n \# \cdots \# \mathbb{P}^2$  contiene una banda de Möbius (de hecho, tantas como sumandos) y la banda es no orientable.
- Cualquier  $\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2$  es orientable, luego cualquier abierto suyo lo es, luego no puede contener una banda de Möbius.

# Grande finale

Vamos a probar que la esfera no es contrátil, utilizando el teorema de la esfera de Brouwer (18.3) y las ideas sobre vectores tangentes allí vistas:

## Proposición

$\mathbb{S}^2$  no es contráctil:  $\#H_t : \text{cte.} \simeq id_{\mathbb{S}^2}$ .

Demostración:

Absurdo: sea que  $\exists H_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,  $H_0(x) = x_0$ ,  $H_1(x) = x$ .

### 1. Problema de elevación:

Problema de elevación

Sea  $S^2$  un esferoide pero se plantea igual

?  $\exists \tilde{H}: S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) : x \perp x\}$

$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$

$\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array}$

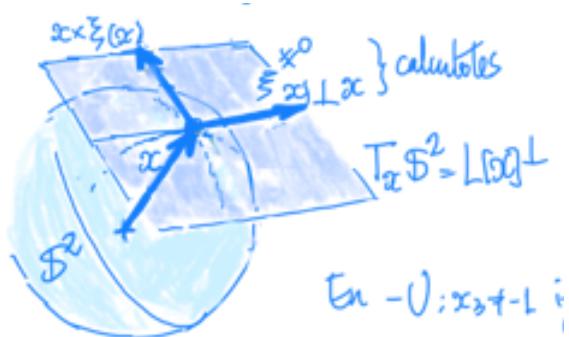
$\mathbb{S}^2 \times [0, 1] \xrightarrow{H} S^2 \quad x \quad \exists \tilde{H} \Rightarrow \tilde{H}_f(x) = (H_f(x), u_f(x)), \quad u_f(x) \perp H_f(x)$

$\begin{bmatrix} p(x), T_x S^2 \setminus \{0\} \\ \text{Núm tang a } S^2 \text{ en } x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_f(x) \perp H_f(x) = x \\ \text{campo tangente a la fibra sin ceros} \end{bmatrix}$

Véase para ver  $\tilde{H}$  contiene el teor de Brouwer

## 2. Estructura de $\tilde{\mathbb{S}}^1$ :

Como esquema tenemos,



Así,  $c = (0, 0, 1)$ ,  $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{c\} = \{x_3 \neq 1\}$ ,  $-U : \mathbb{S}^2 \setminus \{-c\} = \{x_3 \neq -1\}$ .

En  $U : x_3 \neq 1$ ,  $\{\eta(x) = (1 - x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, x_1(1 - x_3)), \eta(x) = x \times \eta(x)\}$  base de  $T_x \mathbb{S}^2$  ortogonal.  $\Rightarrow \forall \underbrace{u}_{\neq 0} \perp x : u = \lambda(u, x)\eta(x) + \mu(u, x)\eta(x)$ .

$$\begin{cases} \lambda(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \\ \mu(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \end{cases} \quad \text{cond's ?? continuas.}$$

En  $-U : x_3 \neq -1$  igual con  $\eta(x) = (1 + x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, -x_1(1 + x_3))$ .

3. Preparación local: Igual que en 16,2 para la elevación de recubridores:

$$\forall x \in \mathbb{S}^2, \exists W^x \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{S}^2, \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : W^x \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U) \text{ ó } H^{-1}(-U)$$

reducción  $W^x \supset \overline{V^x} \supset V^x$ .

¡La partición depende de  $x!$   $\Rightarrow \mathbb{S}^2 \text{ comp.} \mathbb{S}^2 = V^{x_1} \cup \dots \cup V^{x_v}$  y juntamos las  $v$  particiones.

$$\Rightarrow \mathbb{S}^2 = V_1 \cup \dots \cup V_v \wedge \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : H \left( \overbrace{W_k}^{\supset \overline{V}_k \supset V_k} \times [t_{i-1}, t_i] \right) \subset U \text{ ó } -U.$$

Objetivo: construir la elevación  $\tilde{H}$  en pasos sucesivos:

- dada  $\tilde{H}_t$  para  $0 \leq t \leq t_{i-1}$  extenderla a  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ , es decir,
- dada  $\tilde{H}_{t_{i-1}}$  extenderla a  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ .

Para empezar en  $i = 1$ :

$$\tilde{H}_{t_0}(x) = \tilde{H}_0(x) = (H_0(x), u_0(x)) = (x_0, u_0), \text{ cualquier } \overbrace{u_0}^{\neq 0} \perp x_0$$

El paso inductivo da más trabajo y para simplificar un escalamiento permite suponer  $[t_{i-1}, t_i] = [0, 1]$  y  $H(W_k \times [0, 1]) \subset U \text{ ó } -U \forall k(*)$ . Queremos:

- dada  $\tilde{H}_0$  extenderla a  $0 \leq t \leq 1$

Demostración:

$$\tilde{H}_0 = \tilde{H}_{t_{i-1}} \text{ no es la elevación de } i = 1.$$

4. Descomposición de la extensión en varios pasos: Tomamos  $C_k = \mathbb{S}^2 \setminus V_k$  y,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \varphi_k(x) &= \frac{\text{dist}(x, C_k)}{\sum_l \text{dist}(x, C_k)} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi_k \leq 1 \\ \{\varphi_k = 0\} = C_k \quad \text{por ser los } C_k \text{ cerrados.} \\ \sum_l \varphi_l = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad \psi_k &= \varphi_1 + \dots + \varphi_k \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots \leq \psi_k \equiv 1 \\ \{\psi_{k-1} < \psi_k\} = \{\varphi \neq 0\} = X \setminus C_k = V_k \\ \overline{\{\psi_{k-1} < \psi_k\}} = \overline{V_k} \subset W_k \end{cases} \end{aligned} \quad (*)$$

Las  $\psi_k$  son los límites superiores de la siguiente cadena de cerrados:

$$\mathbb{S}^2 \times \{0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k = \{t \leq \psi_k(x) : x \in \mathbb{S}^2\} \subset \dots \subset \Gamma_v = \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$$

y, empezando con  $\tilde{H}_0$  para  $k = 1$ , la cosa es:

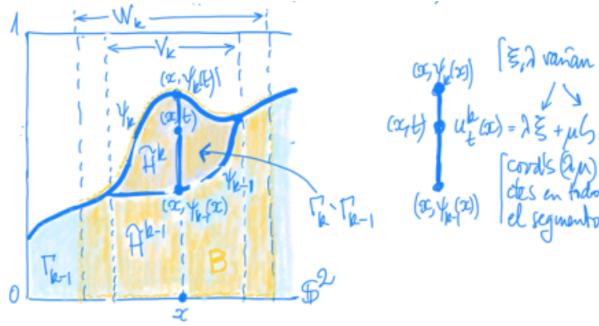
- dada  $\tilde{H}^{k-1} = (r, u^{k-1})$  elevación de  $H|_{\Gamma_{k-1}}$ , extenderla a  $\Gamma_k \setminus \Gamma_{k-1}$ . Como:

$$\begin{cases} \Gamma_{k-1} \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] \stackrel{(**)}{=} \Gamma_k \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] = A \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \\ \Gamma_{k-1} \cap (W_k \times [0, 1]) = B \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \end{cases} \quad \wedge \quad \Gamma_k = \underbrace{A}_{\subset \Gamma_{k-1}} \cup B$$

definiremos,

- $\tilde{H}^k$  en  $B$  tal que,  $\tilde{H}^k = \tilde{H}^{k-1}$  en  $A \cap B \subset \mathbb{S}^2 \setminus V_k \times [0, 1]$ .

$$5. \quad (x, t) \in B \xrightarrow{(*)} \begin{cases} H_t(x) \in U \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x) \in U \end{cases} \Rightarrow \exists \eta \text{ y } S \text{ en } \begin{cases} H_t(x). \text{ (ii)} \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x). \text{ (i)} \end{cases}.$$



$$\text{a)} \quad t \leq \psi_{k-1}(x) : (x, t) \in \Gamma_{k-1} \Rightarrow \tilde{H}_t^k(x) = \tilde{H}_t^{k-1}(x).$$

$$\underline{b}) \quad t \geq \psi_{k-1}(x) : \tilde{H}^{k-1} = (H, u^{k-1}).$$

(i)  $\Rightarrow$

$$\underbrace{u_{\psi_{k-1}(x)^{k-1}(x)}}_{\neq 0} = \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x) \eta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)) + \psi_{k-1}(x)(x) \zeta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)).$$

(ii)  $\uparrow$

$$\begin{aligned}\exists u_t^k(x) &= \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x)\eta(H_t(x)) + \mu_{\psi_{k-1}(x)}(x)\zeta(H_t(x)) \\ &\Rightarrow \exists \tilde{H}_t^k(x) = (H_t(x), u_t^k(x)).\end{aligned}$$

y por la construcción es continua.

a) y b) coinciden en  $t = \psi_{k-1}(x)$ .

$$6. \psi_{k-1} \stackrel{(**)}{=} \psi_k \text{ fuera de } V_k \Rightarrow \tilde{H}^k \text{ de 5.} = \tilde{H}^{k-1} \text{ en } A \cap B.$$

Esto completa la propuesta de que  $\exists \tilde{H}$  elevación de  $H$  y, con ello, se completa la contradicción buscada. Acaba aquí la demostración de que  $\mathbb{S}^2$  no es contráctil.