

TOPOLOGÍA ELEMENTAL

Mario Calvarro Marines, Juan Diego Barrado Daganzo
e Iker Muñoz Jiménez

Índice general

1. Espacios topológicos	7
1.1. Conjuntos abiertos	7
1.2. Conjuntos cerrados	10
1.3. Bases	12
1.4. Topología relativa	15
2. Aplicaciones continuas	17
2.1. Continuidad	17
2.2. Continuidad y subespacios	19
2.3. Homeomorfismos	19
3. Construcciones	23
3.1. Imágenes inversas	23
3.2. Imágenes directas	24
3.3. Productos (finitos)	27
3.4. Sumas (finitas)	29
3.5. Espacios proyectivos reales	30
4. Separación	33
4.1. Concepto	33
4.2. Tabla de comportamiento	34
5. Numerabilidad	35
5.1. Axiomas	35
5.1.1. I Axioma	35
5.1.2. II AX	36
5.1.3. Separable	36

5.1.4. Lindelöf	36
5.2. Tabla de comportamiento	36
6. Compacidad	39
6.1. Concepto y mantras	39
6.2. Tabla de comportamiento	41
7. Compacidad local	43
7.1. Compacidad local y mantras	43
7.2. Tabla de comportamiento	45
7.3. Compactificación por un punto	45
8. Conexión	49
8.1. Concepto y mantras	49
8.2. Tabla de comportamiento	51
9. Componentes conexas y conexión local	53
9.1. Componentes	53
9.2. Conexión local	54
9.3. Tabla de comportamiento	55
10. Conexión por caminos	57
10.1. Conexión por caminos	58
10.2. Mantras	58
10.3. Tabla de comportamiento	59
11. Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos	61
11.1. Componentes conexas por caminos	61
11.2. Conexión local por caminos	61
11.3. Tabla de comportamiento	62
11.4. Relaciones entre las propiedades de conexión	62
12. Homotopía	63
12.1. Conceptos fundamentales	63
12.2. Concepto relativo	64
12.3. Contractibilidad	64

13. Homotopía de caminos	67
13.1. El concepto básico	67
13.2. Simple-conexión	67
13.3. Esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$	68
14. El grupo fundamental	71
14.1. Operaciones con caminos	71
14.2. El grupo fundamental	72
14.3. Functorialidad	73
15. Retractos	75
15.1. Retractos y deformaciones	75
15.2. Cocientes	76
15.3. Agujeros	77
16. Recubridores	79
16.1. El problema de elevación	79
16.2. Unicidad de elevación	80
16.3. Lema de elevación	80
17. Cálculos mediante recubridores	83
17.1. Espacios proyectivos reales	83
17.2. La circunferencia	84
18. Aplicaciones en dimensión 2	87
18.1. Teorema fundamental del Álgebra	87
18.2. Teorema del punto fijo de Brouwer	87
18.3. Teorema de la esfera de Brouwer	88
19. Más aplicaciones por el mismo precio	91
19.1. Borsuk-Ulam	91
19.2. Invarianza del dominio	92
19.3. Divarianza del borde y de la dimensión	93
20. Superficies	95
20.1. Concepto	95

20.2. Sumas conexas	95
20.3. Cocientes	97
21. Clasificación de superficies	99
21.1. El teorema	99
21.2. La relación fundamental	100
21.3. Grupos fundamentales con un agujero	101
22. Grande finale	103

Espacios topológicos

Conjuntos abiertos

Definición (Topología)

Sea X un conjunto, definimos una **topología** como una colección $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos tal que:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ donde $U_i \in \mathcal{T}$
3. $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ donde $U_i \in \mathcal{T}$

Al par (X, \mathcal{T}) lo llamamos **espacio topológico**, a los elementos de \mathcal{T} **abiertos** y a los elementos de X **puntos**.

Ejemplo:

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es la topología **trivial**, que está contenida en cualquier otra topología.
2. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ es la topología **discreta**, que contiene a cualquier¹ otra topología.
3. \mathbb{R}^n junto con las bolas euclídeas es la topología habitual que utilizamos.
4. Cualquier distancia $d(x, y)$ define una topología a través de sus bolas abiertas, igual que definíamos la usual en \mathbb{R}^n , de hecho, se puede demostrar sin mayor dificultad (y tal y como se ve en el dibujo) que todas las normas p en \mathbb{R}^n definen bolas que contienen y están contenidas en las restantes. En consecuencia, si la definición de abierto usual se hacía a través de bolas redondas y hemos visto que estas contienen a bolas cuadradas o romboidales, también se tiene que es abierto cuadrado o romboidal y el recíproco por los contenidos en ambos lados.



El dibujo representa distintas distancias² en \mathbb{R}^n , pero todas definen la misma topología.

Es decir, cambiar de norma igual cambia la noción de distancia en \mathbb{R}^n , ¡pero no la topología asociada! Sigue siendo la topología usual de \mathbb{R}^n .

¹En parte porque si los puntos $\{x\} \in \mathcal{T}$ son abiertos, entonces cualquier conjunto $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ es abierto.

²Procedentes de *normas*.

5. En general, cuando queramos ver resultados que no son ciertos pondremos un contraejemplo donde no se cumpla. Para poder hacer esto, tenemos que disponer de muchos y muy variados ejemplos de topologías poco usuales, como por ejemplo, la topología “del punto”:

$$\text{Fijado } a \in X : \mathcal{T}_a := \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

En esta topología, el punto $\{a\}$ y todos los pares $\{a, x\}$ son abiertos y, aunque puede parecer igual a la discreta, no lo es. Hay que fijarse en que los abiertos de esta topología son los que contienen al punto, no todos los puntos en general. De este modo, $\{x\} \notin \mathcal{T}$, pero $\{a, x_1, x_2, \dots\} \in \mathcal{T}$.

Definición (Entorno)

Sea X un conjunto y \mathcal{T} una topología y $x \in X$ un punto, definimos:

1. Un **entorno abierto** de x como un abierto U^x que lo contiene.
2. Un **entorno** de x como un conjunto V^x que contiene un abierto U que contiene al punto.

Observación:

1. La intersección finita³ de entornos es, de nuevo, un entorno:

$$U_1^x \cap U_2^x = U^x \quad V_1^x \cap V_2^x = V^x$$

2. Cualquier abierto $U \in \mathcal{T}$ es entorno de todos sus puntos.

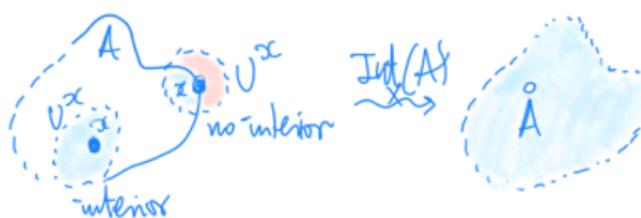


Definición (Punto interior)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que un punto x es **punto interior de A** si y sólo si A es entorno de x :

$$x \in \text{Int}_X(A) \Leftrightarrow \exists U^{ab.} \subset A : x \in U$$

Al conjunto de puntos interiores lo llamamos **interior de A** y se denota por $\text{Int}_X(A)$ o $\overset{\circ}{A}$.



Proposición

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos, entonces:

³La demostración es trivial si son entornos abiertos. Si no lo son, como habrá dos abiertos contenidos en ellos y que contengan al punto, la intersección de esos abiertos es abierta, está en la intersección de esos entornos y al menos contienen al punto, luego la intersección de entornos es entorno de nuevo.

- A° es el mayor abierto en A o lo que es lo mismo $\text{A}^\circ = \bigcup_{U \subset A} U$.
- A abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores, es decir, $A = \text{A}^\circ$
- A es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

Demostración:

- Si $x \in \text{A}^\circ$, entonces $\exists U \subset A : x \in U \Rightarrow x \in \bigcup_{U \subset A} U$, pero es que si $x \in U$ para algún $U \subset A$, por definición es interior de A , luego $x \in \text{A}^\circ$.

Como A° es unión de abiertos, la definición de topología nos asegura que será un abierto y además es el más grande de todos porque cualquier otro está contenido en él por ser la unión de todos los abiertos.

- El contenido $\text{A}^\circ \subset A$ se tiene siempre, puesto que $x \in \text{A}^\circ \Leftrightarrow \exists U \subset A : x \in U \subset A \Rightarrow x \in A$ (dicho de otra forma, los puntos interiores de A son aquellos para los cuales A es entorno y como un entorno contiene al punto se tiene trivialmente).

De esta manera, si A es abierto, como A° es el mayor abierto de A , tiene que ser $\text{A}^\circ = A$ y si $\text{A}^\circ = A$, como A° es abierto, pues lo es A .

- Se tiene trivialmente de la implicación anterior. Cuando A es abierto sabemos que todos los puntos son interiores y un punto es interior si y sólo si A es entorno para él, luego es entorno para todos sus puntos.

Recíprocamente, A es entorno de todos sus puntos, entonces todos sus puntos están en el interior y $A = \text{A}^\circ$, lo que indica que es abierto.

Ejemplo:

- $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}}) : A \neq X \Rightarrow A \not\ni X \Rightarrow \emptyset$ es el único abierto $\subset A \Rightarrow \text{A}^\circ = \emptyset$.
- En \mathbb{R}^n con $\mathcal{T}_{\text{trivial}}$ ya lo sabemos bien:

$$\text{Int}(B[a, \varepsilon]) = B(a, \varepsilon); \quad \mathring{\mathbb{Q}}^n = \emptyset; \quad \mathring{\mathbb{Z}}^n = \emptyset$$

- Si $a \in X$, $\mathcal{T}_a : \{a\} = \{a\}; \quad x \neq a, \quad \{x\} = \emptyset$.

Corolario

- $A \subset B \Rightarrow \text{A}^\circ \subset \text{B}^\circ$.
- $\text{A}^\circ \cap \text{B}^\circ = \text{Int}(A \cap B)$.

Demostración:

- La relación $A \subset B \Rightarrow \text{A}^\circ \subset A \subset B$ implica que, como A° es abierto y B° es la unión de todos los abiertos de B , $\text{A}^\circ \subset \text{B}^\circ$.
- En primer lugar, como $\text{A}^\circ \cap \text{B}^\circ$ es intersección de abiertos, entonces es abierto y está contenido en $A \cap B$, luego por ser $\text{Int}(A \cap B) = \bigcup_{U \in A \cap B} U$ sabemos que $\text{A}^\circ \cap \text{B}^\circ \subset \text{Int}(A \cap B)$.

Recíprocamente, si $x \in \text{Int}(A \cap B)$ existe un abierto $U \in A \cap B$ tal que $x \in U$. Por ser de la intersección, en particular también es abierto de cada conjunto, luego $x \in \text{A}^\circ$ y $x \in \text{B}^\circ$, es decir, $x \in \text{A}^\circ \cap \text{B}^\circ$.

Conjuntos cerrados

Definición (Conjunto cerrado)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico, definimos un **conjunto cerrado** como $F \subset X : U = X \setminus F$ es abierto.

Observación:

A pesar de lo que pueda sugerir el lenguaje habitual, la definición cerrado NO significa “no abierto”, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.



y otros que son abiertos y cerrados simultáneamente, como son el vacío y el total.

Proposición

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y denotando por \mathcal{F} al conjunto de cerrados del espacio, entonces:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
2. $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{F}$
3. $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$ donde $F_i \in \mathcal{F}$

Demostración:

- Trivial, porque el uno es el complementario del otro y ambos son abiertos.
- Porque el complementario de la intersección $X \setminus (\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} U_F$ es abierto.
- Porque el complementario de la unión $X \setminus (\bigcup_{i=0}^n F_i) = \bigcap_{i=0}^n (X \setminus F_i) = \bigcap_{i=0}^n U_i$ es abierto.

Ejemplo:

1. En la topología trivial solo son cerrados \emptyset y X y en la discreta, todos los subconjuntos son cerrados.
2. En \mathbb{R}^n con la topología usual ya sabemos todos los ejemplos: $B[a, \varepsilon] : \|x - a\| \leq \varepsilon$.
3. Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, todo cerrado de \mathcal{T}_1 es cerrado de \mathcal{T}_2 , pues es cerrado por ser el complementario de un abierto y los abiertos de \mathcal{T}_1 también lo son en \mathcal{T}_2 .

Definición (Adherencia)

Sea $A \subset X$ y $x \in X$ un punto, decimos que es **adherente a A** si y sólo si todos sus entornos intersecan con A .

$$\text{Adh}_X(A) = \overline{A} := \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\} \supset A$$

al conjunto de puntos adherentes a A lo llamamos su **adherencia**.

Observación:

La propia definición nos sugiere ciertas equivalencias útiles que se obtienen escribiendo de forma distinta lo que hemos definido:

- $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$

$$x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$$

- $X \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{X \setminus B}$

$$x \notin \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X \setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus B}$$

Proposición

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y denotando por \overline{A} a su adherencia, entonces:

- \overline{A} es el menor cerrado que contiene a A , en otras palabras:

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A} F \text{ donde } F \text{ cerrado}$$

que, en particular, caracteriza que A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.

- $B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración:

- $$\overline{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \left(\bigcup_{U \subset X \setminus A} U \right) \stackrel{F=X \setminus U}{=} X \setminus \left(\bigcup_{F \supset A} (X \setminus F) \right) = \bigcap_{F \supset A} F$$
- $$B \subset A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$
- $$\begin{cases} \overline{A \cup B} \supset A \cup B \supset A, B \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A}, \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

Ejemplo:

1. En \mathbb{R}^n , $\mathcal{T}_{\text{usual}} : B[a, \varepsilon] = \overline{B(a, \varepsilon)}$; $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.

2. $a \in X$, \mathcal{T}_a

$$\begin{cases} \overline{\{a\}} = X \left[\forall x, \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}} \right] \\ x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\} [y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset] \end{cases}$$

Definición (Acumulación)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y $x \in A$ un punto del mismo, decimos que x es:

- **punto aislado de A** si y sólo si existe algún entorno que sólo interseca con A en el propio punto, es decir:

$$\exists V^x \subset X : V^x \cap A = \{x\}$$

- **punto de acumulación de A** si y sólo si cualquier entorno interseca a A en más puntos, es decir:

$$\forall V^x \subset X : V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

Observación:

La definición anterior para puntos aislados hace evidente el hecho de que los puntos aislados solo pueden ser de A . Por contra, los puntos de acumulación no tienen por qué y, de hecho, su definición en términos de entornos prescinde de ellos mismos para analizar su intersección con A . De esta manera, obtenemos el siguiente resultado:

$$\overline{A} = \underbrace{\{\text{puntos aislados}\}}_{\subset A} \sqcup \underbrace{\{\text{puntos de acumulación}\}}_{\supset \overline{A} \setminus A}$$

Además, nótese que si uno es punto de A sólo tiene dos posibilidades: ser aislado o ser de acumulación. Por tanto, podemos reescribir lo anterior como:

$$\overline{A} = A \cup A'$$

Definición (Frontera)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y $x \in A$ un punto del mismo, decimos que x es un **punto frontera de A** si y sólo si es adherente⁴ a A y a su complementario $X \setminus A$

$$\text{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

al conjunto de puntos de la frontera de A lo llamamos **frontera de A** .

Ejemplo:

1. En \mathbb{R} , con la topología usual \mathcal{T}_u , todos los puntos de \mathbb{Z} son aislados, $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
2. En \mathbb{R}^n , con la topología usual \mathcal{T}_u : $\text{Fr}(B(a, \varepsilon)) = \text{Fr}(B[a, \varepsilon]) = S[a, \varepsilon] : \|x - a\| = \varepsilon$.
3. En la topología $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$ todos los puntos son aislados y todas las fronteras, vacías.
4. Para un punto cualquiera $a \in X$ podemos escoger la topología del punto \mathcal{T}_a y entonces:

$$\begin{cases} \text{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} \setminus \overset{\circ}{\{a\}} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a \Rightarrow \text{Fr}(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \overset{\circ}{\{x\}} = \{x\} \end{cases}$$

Definición (Densidad)

Sea X un conjunto de puntos y $A \subset X$ un subconjunto suyo, decimos que A es **denso en X** si y sólo si $\overline{A} = X$ o, dicho de otro modo, todo abierto no vacío corta a A .

Ejemplo:

1. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es denso en \mathbb{R} con la topología usual $\mathcal{T}_{\text{usual}}$.
2. $\{a\}$ es denso en (X, \mathcal{T}_a) .

Bases

Definición (Base de entornos)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $a \in X$ un punto, definimos una **base de entornos de $a \in X$** como una colección \mathcal{V}^a de entornos de a tales que cualquier otro entorno de a tenga que contener a alguno de los entornos de la colección \mathcal{V}^a .

⁴Por las observaciones hechas sobre las adherencias, también podríamos caracterizar los puntos frontera como los que no son interior de $X \setminus A$ ni de A .

Observación:

La definición no ha hecho ninguna diferenciación especial en cuanto a si son cerrados, abiertos, etc. Precisamente esta “variedad” es la que permite que, escogiendo una base de entornos con las características adecuadas en cada caso, sea más sencillo estudiar la topología que tengamos entre manos.

En Topología, las bases de entornos tendrán propiedades parecidas a las bases de los espacios vectoriales en Álgebra: comprobar propiedades en una base de entornos extenderá automáticamente dichas propiedades a cualquier entorno arbitrario.

Proposición

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $\{V_i^a\}_{i \in I}$ una base de entornos de un punto a , esta se puede refinar a una base de entornos abiertos $\{U_i^a\}_{i \in I}$.

Demostración:

Como todos los elementos de la colección son entornos, para todos existe algún abierto U_i^a que contiene al punto. A este conjunto de abiertos (más bien de entornos abiertos) es al que llamamos $\{U_i^a\}_{i \in I}$. Cualquier otro entorno del punto a contiene a un entorno V_i^a de la base de entornos inicial, pero como estos contienen un abierto de la colección última, entonces $\{U_i^a\}_{i \in I}$ es una base de entornos de a .

Observación:

Podemos empezar a ver la utilidad de la base de entornos cuando tenemos que demostrar, por ejemplo, que un punto pertenece a la adherencia de un conjunto:

$$a \in \overline{A} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall W^a \text{ entorno} : W^a \cap A \neq \emptyset \iff \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset$$

luego si escogemos una base de entornos \mathcal{V}^a adecuada sobre la que sea muy fácil demostrar el resultado, este quedará demostrado para cualquier entorno “raro” que podamos encontrarnos.

Ejemplo:

1. Sea el espacio real usual $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ el espacio topológico a estudiar, entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B[a, \varepsilon] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$

2. Sea la topología del punto $(a \in X, \mathcal{T}_a)$, entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{\{a\}\} & x = a \\ \mathcal{B}^x = \{\{a, x\}\} & x \neq a \end{cases}$$

Definición (Base de abiertos)

Sea \mathcal{T} una topología y $B := \{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ una colección de abiertos, decimos que es una **base de abiertos de \mathcal{T}** si y sólo si todo abierto de \mathcal{T} es unión de abiertos de B .

Proposición

\mathcal{B} base de abiertos $\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos (abiertos) de $x \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.

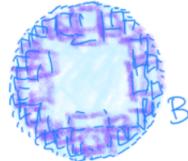
Demostración:

$$\Rightarrow \forall V^x \Rightarrow x \in U \subset V^x \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \text{ base: } U &= \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in \mathcal{B}} \xrightarrow{x \in U} \exists x \in B_i \subset U \subset V^x \\ \Leftarrow U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists \underbrace{B^x}_{\in \mathcal{B}} \subset U \Rightarrow U &= \bigcup_{x \in U} B^x \text{ unión de abiertos de } \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Ejemplo:

1. Si tomamos la topología discreta $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$ entonces una base de abiertos sería $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Además, esta base es mínima pues cualquier otra base $\mathcal{B}' := \{B_i\}_{i \in I}$ de abiertos se cumpliría que $\forall x : \{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists i \in I : B_i = \{x\}$.
2. Si tomamos la topología del punto \mathcal{T}_a , entonces una base de abiertos es $\mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}$.
3. Si tomamos la topología usual \mathbb{R}^n , $\mathcal{T}_{\text{usual}}$ en \mathbb{R}^n , entonces una base de abiertos es el conjunto de bolas abiertas $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n\}$ porque recordemos que un abierto se caracterizaba en \mathbb{R}^n por el hecho de que todos sus puntos tenían una bola alrededor contenida en el conjunto, luego la unión de dichas bolas es el abierto inicial.



Sin embargo, la base de abiertos lo sigue siendo si escogemos otra norma en \mathbb{R}^n distinta de la euclídea, puesto que estas normas eran equivalentes en \mathbb{R}^n (o visto geométricamente, cada bola de una norma contiene otra más pequeña de otra norma distinta y viceversa)



porque

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} \text{cuadrados} = \bigcup_{j \in J} \text{rectangulos}$$

Política general:

Como antes, a menudo basta considerar los abiertos de \mathcal{B}

Ilustración:

$$A \subset X \text{ denso} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset.$$

Proposición

Sea X un conjunto de puntos y $\mathcal{B} := \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos, esta colección define una topología \mathcal{T} única en X si y sólo si:

- $X = \bigcup_{i \in I} B_i$.
- $\forall B_i, B_j \in \mathcal{B} \text{ y } \forall x \in B_i \cap B_j, \exists B_k \in \mathcal{B} : x \in B_k \subset B_i \cap B_j$.



Demostración:

■ \Rightarrow

Trivial por las propiedades vistas sobre topología.

■ \Leftarrow

Veamos que se verifican las condiciones sobre la topología:

- **Unicidad:** $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : \{B_i\} \subset \mathcal{B}\}$.
- **Existencia:** Esa \mathcal{T} es efectivamente topología.
 - $\emptyset \in \mathcal{T}, X = \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T}$.
 - Uniones: $\bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{j \in J} B_{ij} \in \mathcal{T}$.
 - Intersecciones finitas: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B^x \in \mathcal{T}$.

$$x \in \left(\bigcup_i B_i \right) \cap \left(\bigcup_k B_k \right) \Rightarrow x \in B_{i_0} \cap B_{k_0} \Rightarrow \exists B^x \in \mathcal{B} : x \in B^x \subset B_{i_0} \cap B_{k_0}$$

Por tanto, podemos decir que $(\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_k B_k) = \bigcup_x B^x \in \mathcal{T}$ y se tiene el resultado.

Topología relativa

Definición (Topología Relativa)

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto de puntos, definimos la **topología relativa**⁵ en Y como

$$\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

Además, decimos que $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es un **subespacio** de (X, \mathcal{T}) y que (X, \mathcal{T}) es el espacio **ambiente**.



Observación:

1. Los cerrados de la topología relativa $\mathcal{T}|_Y$ son la intersección $F \cap Y$ de Y con cerrados F en \mathcal{T} .

$$F \overset{cerr}{\subset} Y \Rightarrow F = Y \setminus W : W \overset{ab}{\subset} Y \Rightarrow \exists U \overset{ab}{\subset} X : Y \cap U = W \Rightarrow F = Y \setminus (Y \cap U) = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F_x : F_x \overset{cerr}{\subset} X$$

2. Si tenemos una base \mathcal{V}^a de entornos en el espacio ambiente (X, \mathcal{T}) , la base de entornos en el subespacio $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ se obtiene intersecando los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir, $\mathcal{V}_Y^a := \mathcal{V}^a \cap Y := \{V^a \cap Y : V^a \in \mathcal{V}^a\}$.

3. Si tenemos una base \mathcal{B} de abiertos en el espacio ambiente (X, \mathcal{T}) , la base de abiertos en el subespacio $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ se obtiene intersecando⁶ los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir, $\mathcal{B}_Y := \mathcal{B} \cap Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$.

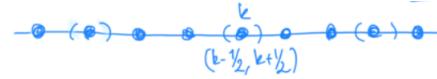
Ejemplo:

1. Si y es un punto aislado de Y , por la definición que hemos dado de la topología relativa, su topología relativa sería $\mathcal{T}|_Y := \{U \cap \{y\}\} = \{y\}$. Por tanto, es abierto en su topología.

⁵La comprobación de que efectivamente se trata de una topología es completamente trivial.

⁶Esta idea suele ser general, las construcciones en los subespacios se hacen intersecando elementos del espacio ambiente con el subespacio.

2. Retomando el ejemplo anterior, si todos los puntos de Y son aislados, hemos visto que todos son abiertos (pues cortar un abierto con ellos da ellos mismos) y, por tanto, la topología $\mathcal{T}|_Y$ es la discreta. Por ejemplo, en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:



3. Si tomamos la topología del punto ($a \in X, \mathcal{T}_a|_{X \setminus \{a\}}$) vemos que se trata de la discreta.

Observación:

1. Los abiertos W de un subespacio abierto $Y \overset{ab}{\subset} X$ son abiertos en el espacio ambiente X .

$$W = U \cap Y : U, Y \overset{ab}{\subset} X \Rightarrow W \overset{ab}{\subset} X$$

2. Los cerrados F de un subespacio cerrado $Y \overset{cerr}{\subset} X$ son cerrados en el espacio ambiente X .

$$F = C \cap Y : Y, C \overset{cerr}{\subset} X \Rightarrow F \overset{cerr}{\subset} X$$

Aplicaciones continuas

Continuidad

El famoso $\varepsilon - \delta$ en $\mathbb{R}^n \mathcal{T}_u; x_0 \in X, f : \overbrace{X}^{\mathbb{C}\mathbb{R}^p} \rightarrow \overbrace{Y}^{\mathbb{C}\mathbb{R}^q}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \begin{cases} \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow \\ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall B(f(x_0), \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)).$

Definición (Continuidad)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos, decimos que es **continua en $x_0 \in X$** si y sólo si:

$$\forall V^{f(x_0)} : f^{-1}(V^{f(x_0)}) = V^{x_0}$$

es decir, la preimagen de cualquier entorno de $f(x_0)$ es entorno de x_0 .

Proposición (Composición de continuidades)

Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas en $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tales que $f(x_0) = y_0$, entonces la composición $h = g \circ f$ es una función continua en x_0 .

Demostración:

Escojamos un entorno $V^{h(x_0)}$ de la imagen por h de x_0 , entonces

$$h^{-1}V^{h(x_0)} = f^{-1}g^{-1}V^{g(y_0)} = f^{-1}V^{y_0} = V^{x_0}$$

Ejemplo:

1. Sea $f : X_{\text{discreta}} \rightarrow Y$, entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues todo es abierto y, en consecuencia, todo es entorno en $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.
2. Sea $f : X \rightarrow Y_{\text{trivial}}$, entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues como Y es el único abierto, entonces es el único entorno $V^{f(x)}$ para cualquier $f(x)$ y $f^{-1}V^{f(x)} = f^{-1}Y = X$, que es abierto.
3. Si una función $f : X \rightarrow Y_{\text{discreta}}$ es continua, entonces f es localmente constante, pues como en la trivial los puntos son abiertos, entonces el punto $\{f(x_0)\}$ es entorno $V^{f(x_0)}$ de sí mismo. Por tanto, por la continuidad de f , $f^{-1}f(x_0) = V^{x_0}$, luego $f \equiv f(x_0)$ en ese entorno V^{x_0} .

4. $f : X \rightarrow Y$ localmente constante \Rightarrow continua.

$[\forall x_0 \in X, \exists U^{x_0} : f \stackrel{U^{x_0}}{\equiv} f(x_0) \Rightarrow \forall V^{f(x_0)} : f^{-1}V^{f(x_0)} \supset U^{x_0} \Rightarrow f^{-1}V^{f(x_0)} = V^{x_0}$ es entorno de $x_0]$

Proposición (Caracterización de Continuidad)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos, entonces son equivalentes:

1. f es continua.
2. $\forall U \overset{ab}{\subset} Y : f^{-1}(U) \overset{ab}{\subset} X$.
3. $\forall F \overset{cerr}{\subset} Y : f^{-1}(F) \overset{cerr}{\subset} X$.
4. $\forall A \subset Y : f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}(A))$.
5. $\forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demostración:

$$1. 1 \Rightarrow 2)$$

$$W^{\text{ab}} \subset Y \Rightarrow W \text{ ent. de } f(x), \forall x \in f^{-1}W \Rightarrow f^{-1}W \text{ ent. de } \forall x \in f^{-1}W \Rightarrow f^{-1}W \subset X$$

$$2. 2 \Rightarrow 3)$$

$$C_{\text{cerr}} \subset Y \Rightarrow Y \setminus C \subset Y \Rightarrow^2 \underbrace{f^{-1}(Y \setminus C)}_{=X \setminus f^{-1}C} \subset X \Rightarrow f^{-1}C \overset{\text{cerr}}{\subset} X$$

$$3. 3 \Rightarrow 5)$$

$$\overline{f(A)} \overset{\text{cerr}}{\subset} Y \Rightarrow^3 \underbrace{f^{-1}\overline{f(A)}}_{\subset f^{-1}f(A) \supset A} \subset X \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$4. 5 \Rightarrow 4)$$

$$\begin{aligned} Y \setminus \overset{\circ}{A} &\Rightarrow \overline{Y \setminus A} \supset \overline{f(X \setminus f^{-1}A)} \stackrel{5)}{\supset} f(\overline{X \setminus f^{-1}(A)}) = f(X \setminus \text{Int}(f^{-1}A)) \Rightarrow \\ &X \setminus \text{Int}(f^{-1}A) \subset f^{-1}(Y \setminus \overset{\circ}{A}) = X \setminus f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}A). \end{aligned}$$

$$5. 4 \Rightarrow 1)$$

$$\begin{aligned} V^{f(x)} \Rightarrow f(x) \in \text{Int}(V^{f(x)}) &\Rightarrow x \in f^{-1}(\text{Int}(V^{f(x)})) \subset \text{Int}(f^{-1}V^{f(x)}) \Rightarrow \\ &f^{-1}V^{f(x)} \text{ entorno de } x. \end{aligned}$$

Observación:

1. Los cuatro primeros enunciados tratan sobre “imágenes inversas”. Por ejemplo, la segunda dice que $f^{-1}\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$.
2. Pensando que un punto adherente es un “punto límite”, 5 nos dice que “la imagen del límite es el límite de la imagen”.
3. $Id : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua $\Rightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. [$Id^{-1}\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$]

Y no mencionamos todos los ejemplos conocidos en espacios afines \mathbb{R}^n con \mathcal{T}_u .

Continuidad y subespacios

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y $Z \subset X$ subespacio $\Rightarrow f|_Z : Z \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

Se aplica el criterio “imagen inversa de abierto es abierto” y la fórmula:

$$(f|_Z)^{-1}(A) = Z \cap f^{-1}A, \forall A \subset Y$$

Criterios de continuidad por recubrimientos. Sea $f : X \rightarrow Y$.

- **Por abiertos:** $\exists X = \bigcup_{i \in I} U_i : \forall f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

$$W \subset Y \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W \\ (f|_{U_i})^{-1}W \subset U_i \subset X \Rightarrow (f|_{U_i})^{-1}W \subset X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}W \subset X$$

Por unión de abiertos.

- **Por cerrados:** $\exists X = \bigcup_{i=0}^n F_i : \forall f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

$$C \subset Y \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f^{-1}C = \bigcup_{i \in I} F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i \in I} (f|_{F_i})^{-1}C \\ (f|_{F_i})^{-1}C \subset F_i \subset X \Rightarrow (f|_{F_i})^{-1}C \subset X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}C \subset X$$

Por unión finita de cerrados.

Homeomorfismos

Recordemos las definiciones de continuidad que hemos visto:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}$$

Ahora veamos que ocurre al invertir la relación.

Definición

$$\text{Sea } f : X \rightarrow Y, \text{ será } \begin{cases} \text{abierta} \\ \text{cerrada} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(ab) = ab \\ f(cerr) = cerr \end{cases}$$

Observación:

Cuidado: Continuidad no implica que sea abierta, cerrada ni viceversa.

Ejemplo:

1. $Id : X_{\text{trivial}} \rightarrow X_{\text{discreta}}$, -cont. +ab. +cerr.

2. $Id : X_{\text{discreta}} \rightarrow X_{\text{trivial}}$, +cont. -ab. -cerr.

3. $j : [0, 1] \subset \mathbb{R}_u$, +cont. -ab. +cerr.
4. $j : (0, 1) \subset \mathbb{R}_u$, +cont. +ab. -cerr.

Proposición (Trivialidades esenciales)

Sea f biyectiva, es equivalente:

- f es abierta
- f es cerrada
- f^{-1} es continua.

Demostración:

1. $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow X \setminus F_{\text{ab}} \subset X \Rightarrow^{f \text{ ab}} \underbrace{f(X \setminus F)}_{=Y \setminus f(F)(\text{biy.})} \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(F) \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f \text{ cerr.}$
 2. $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow^{f \text{ cerr}} \underbrace{f(F)}_{=(f^{-1})^{-1}(F)(\text{biy.})} \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f^{-1} \text{ cont.}$
 3. $U_{\text{ab}} \subset X \Rightarrow^{f^{-1} \text{ cont.}} \underbrace{(f^{-1})^{-1}(U)}_{f(U)(\text{biy.})} \subset Y \Rightarrow f \text{ ab.}$
-

Definición

Sea $f : X \rightarrow Y$ biyectiva, es homeomorfismo si f & f^{-1} son continuas, o equivalentemente si:

$$\begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{ab.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{cerr.} \end{cases}$$

Definición (Localización de un homeomorfismo)

Sea $f : X \rightarrow Y$, es homeomorfismo local en $x_0 \in X$ si $f : V^{x_0} \rightarrow V^{f(x_0)}$ es homeomorfismo para entornos de x_0 y $f(\overline{x_0})$. Se suele decir para entornos “suficientemente pequeños”.

Ejercicio: Se pueden tomar $V^{x_0}, V^{f(x_0)}$ abiertos.

Observación:

Un homeomorfismo local es abierto.

Demostración:

$U \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(U)$ entorno $\forall y_0 = f\left(\overbrace{x_0}^{\in U}\right) \in f(U)$. Como f homeomorfismo local $\Rightarrow f| : V^{x_0} \rightarrow V^{y_0}$ es homeomorfismo $\Rightarrow f\left(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\exists y_0 = f(x_0)}\right) \subset_{\text{ab}} V^{y_0} \Rightarrow f\left(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\subset f(U)}\right)$ entorno de $y_0 \Rightarrow f(U)$ entorno de y_0 .

Ejemplo: (**¡Importantes!**)

1. Proyección estéreo? $\mathbb{S}^m \setminus \{\text{punto}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo.
2. Proyección exponencial $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}' : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi \theta, \sin 2\pi \theta)$, homeomorfismo local.

3. Proyección antipodal: $\mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}P^m : x \mapsto [x]$ homeomorfismo local.
4. Lemniscata: $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t_4} \right)$ es biy. cont, pero no homeomorfismo local.

Engañosamente:

$$\forall t \in \mathbb{R} \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) = I_\varepsilon : f| : I_\varepsilon \rightarrow f(I_\varepsilon)$$

es homeomorfismo.

En $t = 0$, $f(I_\varepsilon)$ no es entorno de $f(0) = (0, 0)$.

Definición

Una variedad topológica de dim m es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , es decir, cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ (luego a cualquier bola, luego a todo \mathbb{R}^m).

Ejemplo:

Esferas, espacios proyectivos, toros...

Construcciones

Imágenes inversas

Problema: Hacer $f : Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$ continua con $\begin{cases} \text{top. discreta en } Y \text{ (matricialidad)} \\ \text{top. } \underline{\text{menos fina}} \text{ en } Y \end{cases}$

Sol: $f^{-1}\mathcal{T} = \{f^{-1}U : U \in \mathcal{T}\}$ top. imagen inversa.

1. Es topología (inm.)
2. Es mínima. [f es continua $\Rightarrow \forall f^{-1}U$ es abierto]

Teorema (Caracterización imagen inversa)

1.

$$\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}] \quad (3.1)$$

2. Y .

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{E}) \\ g \uparrow & & \\ (Z, \mathcal{E}'') & \xrightarrow{f \circ g} & \end{array}$$

Demostración:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow f \circ g$ cont. (Composición de continuas)
- $f \circ g$ cont. $\Rightarrow g$ cont. ($V \in \mathcal{T}' \Rightarrow g^{-1}V \stackrel{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}}{=} g^{-1}f^{-1}U \Rightarrow f^{-1}U$ cont. $\Rightarrow f$ cont. $\Rightarrow g$ cont.)

2. Por otro lado,

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{E}) \\ \text{id} \uparrow \text{cont} & & \\ (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{f \text{ cont}} & Z \subset X \\ & \uparrow & \\ & Z \subset X & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{f} & (X, \mathcal{E}) \\ \text{id} \uparrow \text{cont} & & \\ (Z, \mathcal{E}'') & \xleftarrow{f \text{ cont}} & Z \subset X \\ \downarrow & & \\ Z \subset X & & \end{array}$$

\mathcal{E} es la menor fina

Ejercicio: Demostrar (ii) sin usar que $f^{-1}\mathcal{T}$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización).

La anterior caracterización se llama propiedad universal.

Caso esencial:

$$f : Y \rightarrow X \text{ inyectiva}$$

Definición

Una aplicación continua inyectiva $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ tal que $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$ se llama inmersión (se suelen omitir las topologías).

Observación:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{\text{homeomorfismo}} (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$

$$[V \in f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow V = f^{-1} \underbrace{U}_{\mathcal{T}} = f^{-1} \left(\underbrace{U \cap f(Y)}_{\mathcal{T}|f(Y)} \right)]$$
2. $f : Y \rightarrow X$ 1 - 1 cont. + $\begin{cases} \text{ab.} \Rightarrow \text{inmersión} [\text{ab. en } X \Rightarrow \text{ab. en } f(Y)] \\ \text{cerr.} \Rightarrow \text{inmersión} [\text{cerr. en } X \Rightarrow \text{cerr. en } f(Y)] \end{cases}$

$$\begin{cases} f(Y) \xrightarrow{\text{ab.}} X : V = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow fV = U \cap f(Y) \in \mathcal{T} (\text{inter. abierto}) \\ f(Y) \xrightarrow{\text{cerr.}} X : C \subset f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow Y \setminus C = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow f(C)(X \setminus U) \cap f(Y) \subset X \text{ i. c.} \end{cases}$$
3. Tenemos:
 - Inmersión + ab. + cerr.
 - Inmersión + ab. + /cerr.
 - Inmersión + ab. + cerr.

Observación:

Las inmersiones permiten considerar unos espacios como subespacios de otros. Las frases “el plano proyectivo real no es un subespacio de \mathbb{R}^3 ”, “la esfera no es un subespacio de \mathbb{R}^2 ”, “el plano proyectivo real es un subespacio de \mathbb{R}^4 ” se refieren a esto: cuándo hay o no hay una inmersión del primer espacio en el segundo, es decir, un subespacio del segundo homeomorfismo al primero. Es un problema fundamental de la topología y de la geometría.

Imágenes directas

Problema: Hacer $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ continua en $\begin{cases} \text{top. trivial en } Y (\text{matrivialidad}) \\ \text{top. más fina en } Y \end{cases}$

Sol: $f\mathcal{T} = \{V \subset Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}\}$ top. imagen directa.

1. Es topología (inm.)
2. Máxima [f es continua $\Leftrightarrow \forall f^{-1}V$ es abierto]

Teorema (Caracterización imágenes directas)

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = f\mathcal{T} &\Leftrightarrow \\ \forall g [g \text{ cont.} &\Leftrightarrow g \circ f \text{ cont.}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

2. Y .

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ g \circ f \downarrow & & \\ (Z, \mathcal{T}'') & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

Demostración:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow g \circ f$ cont. (Composición de continuas)
- $g \circ f$ cont. $\Rightarrow g$ cont. ($W \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}W) = \underbrace{(g \circ f)^{-1}W}_{\text{cont.}} \in \mathcal{T} \stackrel{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}}{\Rightarrow} g^{-1}W \in \mathcal{T}'$)

2. Por otro lado,

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ \text{antif} \downarrow & & \\ (Y, \mathcal{T}') & \xleftarrow{\text{Id}} & (Y, \mathcal{T}) \\ \text{antif} \uparrow & & \\ (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ f \circ \text{antif} \uparrow & & \\ \text{la más fina} & & \mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \end{array}$$

Ejercicio: Demostrar (ii) sin usar que $f\mathcal{T}$ es la más fina (usar que cumple la caracterización)

La caracterización anterior se llama propiedad universal.

Observación:

$$f(X) \text{ es abierto y cerrado en } f\mathcal{T} : \begin{cases} \forall y \in Y \setminus f(X), f^{-1}y = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \{y\} \in f\mathcal{T} \\ f^{-1}f(X) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow f(X) \in f\mathcal{T} \end{cases}$$

Caso esencial:

$$f : X \rightarrow Y \text{ sobreyectiva.}$$

Para entender los abiertos de una imagen directa es conveniente representarlos en el dominio. El concepto es conjuntista en realidad:

Definición

Un conjunto $A \subset X$ es saturado (respecto de f) si $f^{-1}f(A) = A$.

Proposición

Los abiertos de $f\mathcal{T}$ son las imágenes de los abiertos saturados de \mathcal{T} .

Demostración:

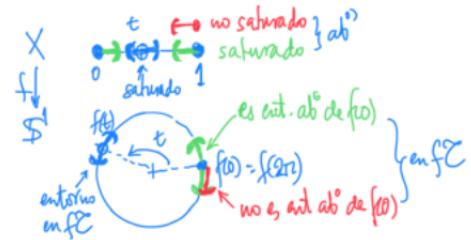
1. $V \in f\mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}V \in \mathcal{T}$ y $V \xrightarrow{\text{sobre}} f^{-1}fV$
2. $U \in \mathcal{T}$, saturado $\Rightarrow f(U) = V \in f\mathcal{T} : f^{-1}V = f^{-1}f(U) \xrightarrow{U \text{ sat.}} U \in \mathcal{T}$

Observación:

Los abiertos no saturados de X pueden tener imágenes no abiertas de Y .

Ejemplo:

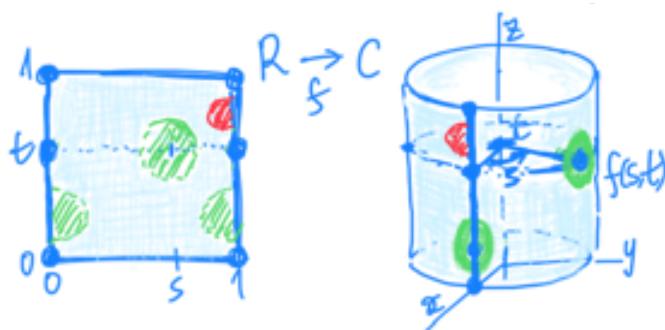
1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 = Y : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \exp(2\pi i t)$



La topología imagen directa es la usual en \mathbb{S}^1 .

2. Tenemos:

$$f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 \\ (s, t) \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t).$$



Analizando los abiertos saturados y no saturados se concluye que la topología imagen directa es la usual en el tronco del cilindro.

Definición

Una aplicación continua sobre $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ tal que $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ se llama identificación (se suelen omitir las topologías)

Observación:

1. Identificación: $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Leftrightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

Continua: $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Rightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

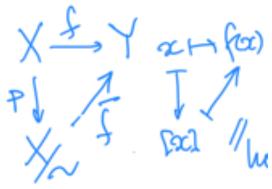
2. Sea $f : X \rightarrow Y$ sobre. continua. Si además es:

■ Abierta $\Rightarrow f$ es identificación [por (1)]

■ Cerrada $\Rightarrow f$ es identificación [$f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X \stackrel{\text{+ cerr.}}{\Rightarrow} f\left(\underbrace{X \setminus f^{-1}(V)}_{=Y \setminus V}\right) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow V \overset{\text{ab}}{\subset} Y$]

Definición (Cociente)

Dentro de las identificaciones tenemos un caso particular: $(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{p} Y = \underbrace{X / \sim}_{p\mathcal{T} = \text{top. cociente}}$. Cociente respecto de una relación de equivalencia en X .



Tenemos que $x_1 \sim x_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$. Homeoforma de $p\mathcal{T}$ sobre $f\mathcal{T} \Leftrightarrow f$ identificación tal que:

$$\begin{cases} \bar{f} \text{ es biyección} \\ p^{-1}V = f^{-1}\bar{f}V \text{ y } f^{-1}W = p^{-1}\bar{f}^{-1}W \end{cases}$$

Política general:

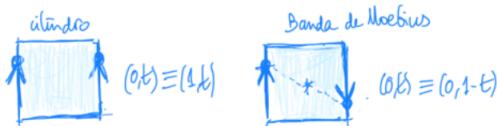
Los cocientes son cómodos para definir espacios, las identificaciones son mejores para estudiar las propiedades que tenemos. Conviene pues tener triángulos como el anterior. Se puede contemplar Y como un modelo del cociente.

Ejemplo: (Anteriores)

La circunferencia y el cilindro como cocientes:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2 & & [0,1] \times [0,1] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ [0,1]/\{0\} & & [0,1] \times [0,1] \\ & & (0,t) \equiv (1,t) \end{array}$$

Para representar cocientes se utilizan dibujos que indican las identificaciones en los espacios de partida:



Productos (finitos)

Problema: Hacer $X_1 \times \dots \times X_r = Y \xrightarrow{p_i} (X_i, \mathcal{T}_i), 1 \leq i \leq r$ continuas con

$$\begin{cases} \text{top. discreta en } Y \text{ matriuialidad} \\ \text{top. } \underline{\text{menos fina}} \text{ en } Y \end{cases}$$

Solución: p_i cont. $\Rightarrow p_i^{-1} \underbrace{U_i}_{\mathcal{T}_i} = \underbrace{X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_r}_{\text{deben ser abiertos}} \Rightarrow \bigcap_i p_i^{-1} U_i = \underbrace{U_1 \times \dots \times U_r}_{\text{abiertos}}$ pero no son topología \Rightarrow

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\} \text{ es la } \underline{\text{base}} \text{ de la } \underline{\text{topología producto:}} \boxed{\prod_i \mathcal{T}_i}$$

Ejemplo:

La \mathcal{T}_u en \mathbb{R}^n es el producto de la usual en cada factor \mathbb{R} de \mathbb{R}^n . La base de la definición de topología producto está formada por las “bolas cuadradas”.

Teorema (Caracterización topología producto)

1.

$$\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \quad (3.3)$$

2. Y .

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{E}_i) \\ g = g_0 \circ g_1 \uparrow & & \\ (Z, \mathcal{E}'') & \xrightarrow{g_i = p_i \circ g} & \end{array}$$

Demostración:

1. $\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow g_i$ cont. (Composición de continuas)
- g_i cont. $\Rightarrow g^{-1}(U_1 \times \dots \times U_r) = \underbrace{g_1^{-1}(U_1)}_{\mathcal{T}''} \cap \dots \cap \underbrace{g_r^{-1}(U_r)}_{\mathcal{T}''} \in \mathcal{T}''$ (intersección finita de abiertos)

2. Por otro lado,

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{E}_i) \\ \text{id} \uparrow \text{cont} & \text{(*)} \Downarrow & \\ (Y, \mathcal{E}) & \xrightarrow{p_i \text{ cont}} \mathcal{E}' \supset \mathcal{E}_i & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_i \\ \mathcal{E}' \text{ es la menor fina} \end{array} \right. \\ & \uparrow & \\ & \mathcal{E}' \text{ es la menor fina} & \end{array}$$

Ejemplo:

Demostrar (ii) sin usar que $\prod_i \mathcal{T}_i$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización)

La anterior caracterización se llama propiedad universal.

Proposición

1. $p_i : Y \rightarrow X_i$ es abierta. $[p_i(U_1 \times \dots \times U_r) = U_i]$

2. $X_j \xrightarrow{\alpha_j} Y : x_j \mapsto (a_1, \dots, x_j, \dots, a_r)$ es inmersión ($a_i \in X_i$ fijados).

$$\left[\begin{cases} \alpha_j(X_j) = \{a_1\} \times \dots \times X_j \times \dots \times \{a_r\} \\ \alpha_j(U_j) = \{a_1\} \times \dots \times U_j \times \dots \times \{a_r\} = \alpha(X_j) \cap (X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_r) \end{cases} \right]$$

Política general:

En una topología producto “todo se genera en productos”.

Ejemplo:

- Bases de entornos: $\mathcal{V}^a = \mathcal{V}^{a_1} \times \dots \times \mathcal{V}^{a_r} \stackrel{\text{mut}??}{=} \{V_1 \times \dots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}^{a_i}\} (a \in Y)$.
- Base de abiertos: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_r = \{B_1 \times \dots \times B_r : B_i \in \mathcal{B}_i\}$ (esto repite la construcción de $\prod_i \mathcal{T}_i$)

Sumas (finitas)

Problema: Hacer $(X_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{e_i} Y = X_1 + \dots + X_r = (X_1 \times \{1\}) \cup \dots \cup (X_r \times \{r\}), 1 \leq i \leq r : x_i \mapsto (x_i, i)$ continuas, ,con

$$\begin{cases} \text{top. trivial en } Y \text{ matrivialidad} \\ \text{top. más fina en } Y \end{cases}$$

Solución: $\underbrace{U_i}_{\mathcal{T}_i} \in e_i^{-1}(U_i \times \{i\}) \Rightarrow \mathcal{B} = \{U_1 \times \{1\}, \dots, U_r \times \{r\} : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_r \in \mathcal{T}_r\}$ es base de una topología en Y , la topología suma: $\mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r$.

Proposición

$\forall i, e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X_i \times \{i\}, \mathcal{T}|_{X_i \times \{i\}})$ es inmersión abierta y cerrada.

Demostración:

- Inmersión abierta: $e_i(U_i) = U_i \times \{i\} \in \mathcal{T}$
- Cerrada: $Y \setminus e_i(X_i) = Y \setminus X_i \times \{i\} = \bigcup_{j \neq i} X_j \times \{j\} \in \mathcal{T}$

Teorema (Caracterización topología suma)

1.

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r \Leftrightarrow \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \text{ (Propiedad universal)} \quad (3.4)$$

2. Y .

$$\begin{array}{ccc} \text{inclusión} & \xrightarrow{\iota} & (Y, \mathcal{U}) \\ (X_i, \mathcal{U}_i) & \downarrow \iota & \\ g|_{X_i} = g \circ \iota & \xrightarrow{\quad} & (Z, \mathcal{V}) \end{array}$$

Demostración:

Análoga a las anteriores construcciones.

Política general:

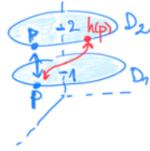
Localmente $Y = X_1 + \dots + X_r$ es como sea cada X_i . Por ejemplo, las bases de entornos de Y son las de los sumandos. Globalmente, se trata cada sumando separadamente. Por ejemplo, las bases de abiertos de los sumandos se unen para dar una base de abiertos de Y . Olvidando el tecnicismo $X_i \times \{i\} \equiv X_i$:

Y es unión disjunta de los sumandos
Los sumando son subespacios abiertos y cerrados de Y

Es un formalismo para hacer cómodamente otras construcciones. Por ejemplo, “pegar dos discos por sus bordes” sería:

$$\text{disco} D \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \text{ borde } \partial D = \mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$D_1 + D_2 / \sim \quad \overbrace{(p, 1)}^{\partial D} \sim (p, 2).$$



y más elaborado $h : \partial D \xrightarrow{\text{homeo.}} \partial D$ con $\overset{\in \partial D}{\underset{\text{Prop.}}{\sim}} p \sim h(p)$.

Finalmente, hay otros conceptos de “suma” más significativos que veremos en algún ejemplo.

Espacios proyectivos reales

Como vimos en geometría lineal tenemos que:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{nH} \setminus \{0\} / \underset{\text{Prop.}}{\sim} \Rightarrow \mathbb{P}^n = \{\text{rectas vectoriales de } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Que en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{nH} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n). \end{aligned}$$

Las ecuaciones serán de la forma: $h \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ homogénea $\Rightarrow \begin{cases} h(x) = 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$ está bien definido en \mathbb{P}^n .

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> · Variedades proyectivas lineales · Variedades proyectivas · Variedades proyectivas algebraicas | ecuaciones homogéneas de grado: $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ \text{arbitrario} \end{cases}$ |
|---|---|

Cartas afines:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{H \subset \mathbb{P}^n}_{\text{hiperplano proyectivo}} & \rightarrow & \underbrace{\hat{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}}_{\text{hiperplano lineal}} : \underbrace{h=0}_{\text{forma lineal}}, H = \hat{H} \setminus \{0\} / \sim \\ \pi| : \underbrace{\{h=1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{hiperplano afín}} & \rightarrow & \underbrace{\mathbb{P}^n \setminus H}_{\{h \neq 0\}} = 0 \text{ es biyección..} \end{array}$$

Terminología: H es hiperplano del infinito de la carta afín U .

Topología en U : La imagen directa de la usual en $\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \pi| : \{h = 1\} \rightarrow U$ homeomorfismo.

Topología en \mathbb{P}^n :

- Cociente de la usual vía $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
- “Suma” de las definidas en las cartas afines:

W abierto si $W \cap U$ es abierto $\forall U$ carta afín. [Es top. en \mathbb{P}^n]

Estas dos topologías coinciden.

Demostración:

1. U es abierto en la top. cociente. $[\pi^{-1}U = \{h \neq 0\}$ abierto usual]

2. La topología cociente en U coincide con la topología de carta afín:

$$\begin{array}{ccc}
 W \subset U : \pi^{-1}W = \text{cono sobre } (\pi^{-1}W) \cap h=1 & & \\
 \text{top. cociente} \quad \Downarrow \quad \text{de carta afín.} & & \\
 \pi^{-1}W \subset \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\text{ab}} (h|_{h=1})^{-1}W \subset h=1 & & \\
 \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow & & \\
 W \text{ ab top. cociente} & & W \text{ ab top. carta afín}
 \end{array}$$

1. + 2. \Rightarrow La top. cociente está generada por las topologías de las cartas afines, que forman un recubrimiento abierto de \mathbb{P}^n .

Observación:

De lo anterior deducimos:

1. U_1, U_2 dos cartas afines $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ abiertos.

$$\left[\text{Cartas afines: } U_i = \{h_i \neq 0\} \left\{ \begin{array}{l} \pi : \{h_1 = 1\} \rightarrow U_1 \text{ homeo.} \\ (\pi_i)^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} \xrightarrow{\text{ab.}} \{h_1 = 1\} \end{array} \right. \right]$$

2. Las topologías de U_1 y U_2 coinciden en $U_1 \cap U_2$.

[De nuevo conviene entenderlo con cartas:

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\{h_1=1, h_2 \neq 0\}} \text{homeo para } U_1 \\
 \text{homeo?} \uparrow \qquad \qquad \qquad \text{homeo para } U_1 \cap U_2 \\
 \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\{h_2 \neq 0, h_1=1\}} \text{homeo para } U_2
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{explico}}
 \begin{array}{c}
 x = y/h_1(y) \text{ homeo usual, } \checkmark \\
 y = x/h_2(x)
 \end{array}
]$$

Atlas afín canónico: No se suelen utilizar todas las cartas afines: $n+1$ distintas ya cubren \mathbb{P}^n . Típicamente $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$ con:

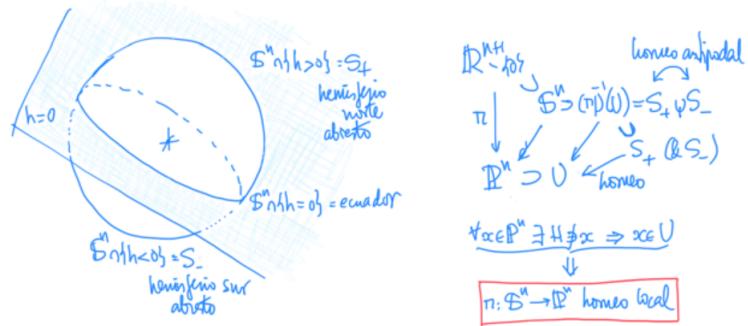
$$U_i = \{x_i \neq 0\} \leftrightarrow \underbrace{\{x_i = 1\}}_{\equiv \mathbb{R}^n} : (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \overbrace{1}^{\mathbb{R}^n \rightarrow}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), 0 \leq i \leq n$$

Cociente antipodal: Toda recta de \mathbb{R}^{n+1} corta a $\mathbb{S}^n : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$ en dos puntos antipodales, así que denotamos un “sub” cociente, que es también identificación.

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\text{cones}} \mathbb{S}^n \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \text{cones} \\
 \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{cones}} \text{cociente antipodal de } \mathbb{S}^n
 \end{array}$$

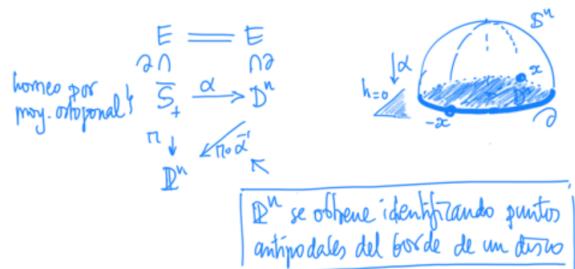
$$[\text{Como antes tenemos conos: } \pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}W}_{=(\pi/\mathbb{S}^n)^{-1}W}]$$

Las cartas afines tienen una representación muy conveniente:



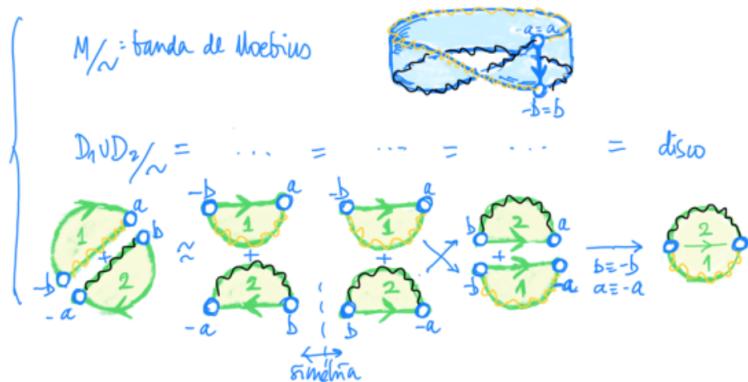
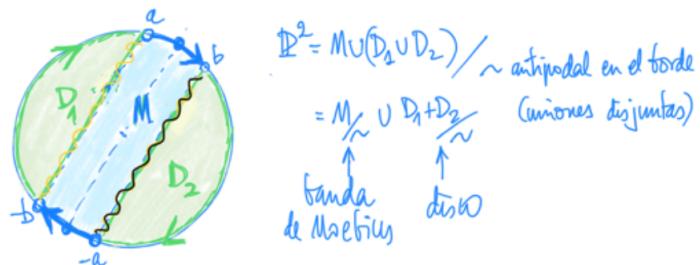
Cociente de un disco:

$$E = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \partial \begin{cases} \bar{S}_+ = S^n \cap \{h \geq 0\} \text{ hemisferio cerrado.} \\ D^n = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \text{ disco.} \end{cases}$$



Ejemplo:

$$\mathbb{P}^2 \setminus D^2 = \text{banda de Möbius.}$$



Separación

Concepto

Definición

Un espacio X es Hausdorff o T_2 si cada par de puntos distintos $x, y \in X$ tienen entornos disjuntos: $V^x \cap V^y = \emptyset$.

Hay otras formas de separación, más débiles o más fuertes, pero nos contentaremos con ésta al ser la más intuitiva.

Observación:

1. Si existen entornos disjuntos, existen entornos abiertos disjuntos $[\forall V \supset U]$
2. Si X es Hausdorff, los puntos son cerrados.
$$\left[\forall y \neq x, \exists U^y \ni x \Rightarrow X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U^y \text{ es abierto.} \right]$$
3. (X, \mathcal{T}_{CF}) no es Hausdorff: dos abiertos cualesquiera se cortan (X infinito) tiene puntos cerrados: $X \setminus \{x\}$ es abierto.
4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es Hausdorff: $x \neq y \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ si $\varepsilon \leq \|x - y\|/2$
5. En (X, \mathcal{T}_a) el punto a no es cerrado: $a \notin X \setminus \{a\} \Rightarrow X \setminus \{a\}$ no es abierto. $\forall x \neq a \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a$!!!.

Proposición

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas con Y Hausdorff $\Rightarrow \{f = g\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Demostración:

1. $f(x) \neq g(x) \xrightarrow{T_2} \exists V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset \xrightarrow{\text{cont.}} f^{-1}V^{f(x)} \cap g^{-1}V^{g(x)} = V^x$ entorno de x .
 2. $V^x \cap \{f = g\} = \emptyset : y \in V^x \Rightarrow \begin{cases} f(y) \in V^{f(x)} \\ g(y) \in V^{g(x)} \end{cases} \Rightarrow f(y) \neq g(y)$
1. + 2. $X \setminus \{f = g\} = \{f \neq g\}$ es entorno de todos sus puntos, luego abierto, luego $\{f = g\}$ es cerrado.

Corolario

Si $f = g$ es un subconjunto denso, entonces $f \equiv g$

Demostración:

$$\exists \bar{A} = X : f|_A = g|_A \Rightarrow \{f = g\} \supset A \xrightarrow{\text{prop.}} \{f = g\} \supset \bar{A} = X.$$

Caso particular importante: Funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación:

$$f : X \rightarrow \underbrace{Y}_{\in T_2} \text{ continua} \Rightarrow f^{-1}(Y) \text{ cerrado } \forall y \in Y.$$

Porque los puntos de Y son cerrados y, de hecho, eso basta.

Tabla de comportamiento

Se trata de saber si la propiedad se conserva por las construcciones conocidas.

Se tiene:

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
T_2	✓	✗	✓	✓

$$1. Y \subset X = T_2 : y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{V^{y_1}}_{\text{En } X} \cap \underbrace{V^{y_2}}_{\text{En } Y} = \emptyset \Rightarrow (\underbrace{V^{y_1} \cap Y}_{\text{En } X}) \cap (\underbrace{V^{y_2} \cap Y}_{\text{En } Y}) = \emptyset.$$

$$2. Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \begin{cases} y_1 = \mathbb{Q} \in Y \\ y_2 = \sqrt{2} \in Y \end{cases} \nexists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset : \text{todo entorno abierto de } \sqrt{2} \text{ contiene racionales, luego al saturar, contiene } \mathbb{Q}.$$

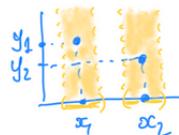
$$3. X \text{ y } Y \text{ ambos } T_2 \Leftrightarrow X \times Y \text{ } T_2.$$

$\Rightarrow)$

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y \Rightarrow \left\{ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times Y) \cap (V^{x_2} \times Y) = \emptyset \right.$$

$\Leftarrow)$

$$X \approx X \times \{y_0\} \subset X \times Y, T_2 \xrightarrow{1} X \times \{y_0\} T_2 \Rightarrow X T_2$$



$$4. X \text{ y } Y \text{ ambos } T_2 \Leftrightarrow X + Y \text{ } T_2$$

Único comentario: $x \in X \text{ y } y \in Y \Rightarrow X = V^x, Y = V^y \text{ y } X \cap Y = \emptyset$.

Numerabilidad

Axiomas

I Axioma

Definición (I Ax.)

X es 1er axioma si $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base numerable de entornos.

Observación:

1. $\mathcal{B}^x = \{U_k = \overset{\circ}{V}_k\}_{k \geq 1}$, base numerable de entornos de abiertos.
2. $\mathcal{W}^x = \{W_k = U_1 \cap \dots \cap U_k\}_{k \geq 1}$, base numerable de entornos abiertos encajados.

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u$ I Ax. $\mathcal{W}^x = \{B(x, y_k) : k \geq 1\}$
 2. $(X, \mathcal{T}_a), (X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$, I Ax.
 3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no es I Ax. $\exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1}$ abiertos encajados, $W_k = \mathbb{R} \setminus F_k$ finito $\Rightarrow \bigcap_k W_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \text{ num.}} F_k \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in \bigcap_k W_k \Rightarrow U^x = \mathbb{R} \setminus \{y\} \not\supseteq W_k, \forall k$
-

Definición (Límites)

Decimos que $x_k \rightarrow x \Leftrightarrow$

$$\forall U^x \exists k_0 : k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in U^x$$

Observación:

1. $X T_2 \Rightarrow \exists!$ límite. $[x_k \rightarrow x \neq y, \exists U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \{x_k : k \geq k_0\} \subset U^x \text{ y } x_k \not\rightarrow y]$
2. I Ax. permite describir la topología con sucesiones: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset A, x_k \rightarrow x$.

Demostración:

$\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1} \text{ encajados} \Rightarrow \exists x_k \in W_k \cap A \\ \forall U^x \underset{\text{base ent.}}{\supset} W_{k_0} \supset W_{k+1} \supset \dots \Rightarrow x_k \in U^x, \forall k \geq k_0 \end{aligned} \} \Rightarrow x_k \rightarrow x$$

$\Leftarrow)$

$$A \ni x_k \rightarrow x \Rightarrow \forall U^x, \exists x_{k_0} \in U^x \cap A$$

En general, los límites de sucesiones son poco útiles.

II AX

Definición (II Ax.)

X es 2º axioma si $\exists \mathcal{B}$ base numerable de abiertos

Observación:

1. II Ax. \Rightarrow I Ax. $[\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow \mathcal{B}^x = \{B_k : x \in B_k\}]$
2. I Ax. $\not\Rightarrow$ II Ax. [Espacio discreto no numerable]
3. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ II Ax. $\mathcal{B} = \{B(q, \frac{1}{k}) : q \in \mathbb{Q}^n, k \geq 1\}$ [Ejercicio]

Separable

Definición (Separable)

X es separable si $\exists A$ numerable denso.

Observación:

1. II Ax. \Rightarrow separable. $[\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow A = \{\overbrace{a_k}^{\in B_k}\}_{k \geq 1} \text{ corta a todo abierto}]$
2. I Ax. + separable $\not\Rightarrow$ II Ax. $[(X, \mathcal{T}_a), X \text{ no numerable}]$
3. I Ax. $\not\Rightarrow$ separable. [Espacio discreto no numerable]
4. Separable $\not\Rightarrow$ I Ax. $[(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF}) : \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}]$

Lindelöf

Definición (Lindelöf)

X es Lindelöf si $\forall X = \bigcup_i U_i$ (recubrimiento abierto) $\exists X = \bigcup_k U_{i_k}$ (subrecubrimiento numerable).

Esta forma débil de compacidad se menciona como complemento. [Ejercicios]

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
I Ax.	✓	✗ abierto ✓	✓	✓
II Ax.	✓	✗ abierto ✓	✓	✓
Separable	✗ abierto ✓	✗	✓	✓
Lindelöf	✗ abierto ✓	✓	✗	✓

- I Ax. y II Ax. se heredan a subespacios intersecando bases.
- Separable se hereda a subespacios abiertos intersecando el conjunto denso.
- Lindelöf se hereda a subespacios cerrados como la compacidad. No en general: Y no Lindelöf, $X = Y \cup \{w\}$ compacto, $\mathcal{B}^w = \{X \setminus F : F \subset Y\}$ con F finito.
- $X = \mathbb{R}_u$ I y II Ax's, $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es I.



Demostración:

$\alpha = \mathbb{Z} \in Y$, $\exists \mathcal{W}^\alpha = \{W_k : k \geq 1\}$ abiertos saturados, $W_k \supset \mathbb{Z}$, $\forall k$
 (figura) $\Rightarrow U = \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_k : k \geq 1\}$ entorno abierto saturado de $\mathbb{Z} \not\supset W_k$, $\forall k$.

- \forall aplicación continua y abierta conserva I y II [Imagen de base es base]
- \forall aplicación continua conserva separabilidad [$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$]
- \forall aplicación continua conserva Lindelöf [Como la compacidad, ya se sabe...]
- Para productos: producto finito de numerables es numerable.
- Para sumas: suma finita de numerables es numerable.
- Solo falla Lindelöf:
 - $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,]})$ es Lindelöf [ejercicio no banal]
 - $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{[,]}^2)$ no es Lindelöf: si lo fuera, $L = \{x+y=0\} \subset \mathbb{R}^2$ heredaría la propiedad, pero es discreto no numerable ¡!

Compacidad

Concepto y mantras

Definición

X es compacto si todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X$$

Observación:

Complementando lo anterior tenemos la propiedad de la intersección finita:

$$\begin{aligned} \emptyset = \bigcap_{i \in I} F_i &\Rightarrow \exists F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} = \emptyset \Rightarrow \\ \forall F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} \neq \emptyset &\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Proposición (Subespacios)

Sea $K \subset X$ (compacto) $\Rightarrow K \subset \underbrace{\bigcup_{i \in I} U_i}_{\subset X} \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K$

Ejemplo:

1. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ es compacto $\Leftrightarrow K$ es cerrado y acotado (Heine-Borel).
2. $[a, b] \subset \mathbb{R}_u$ compacto.
3. Si es compacto y discreto \Rightarrow es finito [$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ es rec. abierto en $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$]
4. $x_k \rightarrow x \Rightarrow K = \{x, x_k : k \geq 1\}$ es compacto.

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \exists U_{i_0} \ni x \xrightarrow{\lim} x_k \in U_{i_0}, \quad \forall k > k_0 \\ x_k \in U_{i_k}, \quad \forall k \leq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow K \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k_0}}$$

5. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ compacto $\Leftrightarrow \forall A^\infty \subset K, A' \cap K \neq \emptyset$ (Bolzano-Weierstrass)

Proposición (Mantra 1)

Cerrado en compacto es compacto.

Demostración:

Sea $K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$,

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_i U_i \Rightarrow X = (X \setminus K) \cup \bigcup_i U_i \\ X \text{ comp.} \Rightarrow \exists (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X \supset K \\ \Rightarrow U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K. \end{aligned}$$

(Alternativa: Usar la propiedad de las intersecciones finitas)

Proposición (Mantra 2)

Infinito en compacto tiene puntos de acumulación.

Demostración:

Sea $A \subset X$ (compacto) con $A' = \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \overline{A} = \overbrace{\{ \text{puntos aislados} \}}^{\subset A} \cup \overbrace{A'}^{=\emptyset} = \{ \text{puntos aislados} \} = A \\ \Rightarrow A \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \text{ comp.} \Rightarrow \underbrace{A}_{=\{ \text{pts. aisl.} \}} \text{ es compacto y discreto} \Rightarrow \#A < +\infty. \end{aligned}$$

Proposición (Mantra 3)

La imagen continua de un compacto es compacta.

Demostración:

Sea $f : X \rightarrow Y$ con f continua y X compacto \Rightarrow

$$\begin{aligned} f(X) \times \bigcup_i V_i \Rightarrow X = \bigcup_i f^{-1}V_i \Rightarrow \exists f^{-1}V_{i_1} \cup \dots \cup f^{-1}V_{i_r} = X \\ \Rightarrow V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r} \supset f(X). \end{aligned}$$

Ejemplo: (!Muy importante!)

$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es compacto: La imagen continua de \mathbb{S}^n por la proyección antipodal.

Proposición (Mantra 4)

Un compacto en T_2 es cerrado.

Demostración:

Sea $K \subset X$ con K compacto y $X = T_2 \Rightarrow$

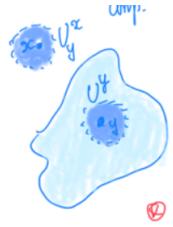
$$\forall x \in X \setminus K, \exists U^x \cap U^k = \emptyset \quad (6.1)$$

A su vez, $\forall y \in K, \exists U_y^x \cap U^y = \emptyset$ por $T_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_y U^y \xrightarrow{\text{comp.}} K \subset U^{y_1} \cup \dots \cup U^{y_r} = U^k \\ \Rightarrow x \in U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x = U^x. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando 6.1 \Rightarrow

$U^x \subset X \setminus K \wedge X \setminus K$ es entorno de $x \Rightarrow X \setminus K$ abierto.



Corolario

Dos compactos disjuntos en un T_2 se separan como puntos.

Demostración:

Ejercicio usando 6.1.

Proposición

Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, X compacto e $Y = T_2 \Rightarrow f(X)$ cerrada.

Demostración:

$$F \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X \xrightarrow{\text{M1}} F \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M3}} f(F) \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M4}} f(F) \text{ cerr.}$$

Corolario

Sea la f de la anterior proposición entonces si además es:

$$\begin{cases} \text{inyectiva} \\ \text{sobreyectiva} \\ \text{biyectiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{inmersión cerrada} \\ \text{identificación cerrada} \\ \text{homeomorfismo} \end{cases}$$

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compactidad	✗ cerrados ✓	✓	✓	✓
	Mantra 1	Mantra 3	Tychonoff	Unión finita

Teorema (de Tychonoff)

Si X e Y son dos compactos $\Rightarrow X \times Y$ es compacto.

Demostración:

Sea $X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$, $W_i \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

1. $\forall x \forall y, \exists U_y^x \times V_x^y \subset W_i$, i depende de (x, y) .
2. $\forall x Y = \bigcup_y V_x^y \xrightarrow{Y \text{ comp.}} Y = V_x^{y_1} \cup \dots \cup V_x^{y_r}$, los y_k y su n° dependen de x .

3. $U^x = U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x$, $U^x \times V_x^{y_k} \subset W_{i_k}$, i_k depende de x .

4. $X = \bigcup_x U^x \xrightarrow{X \text{ comp.}} X = U^{x_1} \cup \dots \cup U^{x_s}$.

5.

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} U^{x_l} \times V_{x_l}^{y_k} \subset \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} W_{i_k}, \text{ los } i_k \text{ dependen de los } x_l.$$

Observación:

1. $X \times Y$ compacto $\Rightarrow X$ e Y compactos. [Mantra 3 para proyecciones]

2. Heine-Borel: $K \subset \mathbb{R}_u^n$ cerrado y acotado \Rightarrow compacto porque:

$$\exists a_i, b_i : K \overset{\text{cerr.}}{\subset} \underbrace{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}_{\text{Compacto por Tych.}^1}$$

Y aplicamos el Mantra 1.

¹ $[a, b]$ es compacto.

Compacidad local

Definición

Sea $Y \subset X$, es localmente cerrado si cumple las condiciones equivalentes siguientes:

1. $\forall y \in Y, \exists U^y \subset X : Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y. (\Rightarrow \text{lo mismo } \forall V^y \subset U^y)$
 2. Y es abierto en su adherencia.
 3. $Y = F \cap U, F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X, U \overset{\text{ab.}}{\subset} X. (\Rightarrow \text{vale } F = \overline{Y})$
-

Demostración:

1. \Rightarrow 2.) $Y = \overline{Y} \cap \left(\bigcup_{y \in Y} U^y \right)$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{Y} \cap U^y &\Rightarrow x \in \text{Adh}_{U^y}(Y \cap U^y) = Y \cap U^y \subset Y \\ U^x \subset U^y &\Rightarrow \emptyset \neq Y \cap U^x = (Y \cap U^y) \cap U^x. \end{aligned}$$

2. \Rightarrow 3.) Abierto en $\overline{Y} = \underbrace{\overline{Y}}_{=F} \cap U$.

$$F \cap U = Y \Rightarrow F \supset \overline{Y} \Rightarrow F \cap U = \overline{Y} \cap U.$$

3. \Rightarrow 1.) $Y = F \cap U \overset{\text{cerr.}}{\subset} U (= U^y, \forall y)$.

Esto es un ejemplo de localización de una propiedad topológica \mathcal{P} (aquí es ser cerrado). Se puede entender como:

$$\begin{aligned} \forall x, \exists V^x \text{ que cumple } \mathcal{P} \text{ o} \\ \forall x, \exists \mathcal{V}^x \text{ base de entornos que cumplen } \mathcal{P}. \end{aligned}$$

A veces son equivalentes (como en este caso), a veces no. El concepto adecuado de localización es mediante bases de entornos.

Compacidad local y mantras

Definición

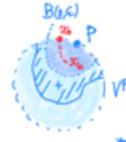
X es localmente compacto si $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos compactos.

Ejemplo:

1. \mathbb{R}_u^n es localmente compactos: $\mathcal{V}^x = \{B[x, \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$
2. $T = B(0, 1) \cup \{p\}$, T_u no es compacto:

$$\begin{aligned} \exists V^p \text{ comp.} \subset T \Rightarrow \exists B(0, \varepsilon) \cap T \subset V^p \Rightarrow \exists \overbrace{x_k}^{\in V^p} \rightarrow x_0 \in S(0, 1) \setminus T \\ \Rightarrow \{x_k : k \geq 1\} \subset V^p \subset T. \end{aligned}$$

que es un conjunto infinito sin acumulación en T .



3. En general no basta que exista un entorno compacto.

En $S = T \cup \{q\}$? tomamos como entornos del punto añadido q los $W \subset S$ que tienen complementario finito (y $q \in W$).

Pero este caso es un ejemplo con un espacio no separado.

Proposición

Si X es T_2 y $x \in X$ tiene un entorno compacto, entonces tiene una base de entornos compactos.

Demostración:

$$\exists \underbrace{V^x}_{\supset W^x \text{ ab.}} \text{ compacto} \Rightarrow \mathcal{V}^x = \text{entornos compactos } K^x \text{ base de entornos: } \forall U^x, \exists K^x \subset U^x.$$

$$\exists_{\text{ab.}} U_1^x \subset \overline{U_1^x} \subset U^x:$$

$$K^x = \overline{W^x \cap \overline{U_1^x}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{V^x \setminus U^x} \subset \overline{V^x} \text{ cerr.} \\ \overline{V^x} \cap \overline{U_1^x} = V^x \cap \overline{U_1^x} \subset V^x \cap \overline{X \setminus A} = V^x \cap \overline{(X \setminus A)} \subset U^x \\ \text{interdos ent.?} \Rightarrow \text{entorno} \\ W^x \cap U_1^x \subset V^x \text{ comp. en } T_2 \Rightarrow \overbrace{K^x}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{V^x}^{\text{comp.}} \Rightarrow K^x \text{ comp.} \end{array} \right.$$

Y tenemos dos mantras:

Proposición (Mantra 1)

Localmente cerrado en localmente compacto es localmente compacto.

Demostración:

Sea $Y \subset X$ con Y loc. cerrado y X loc. compacto e $y \in Y$.

Tenemos:

$$\overline{U_1^x} \cap V^x \subset \overline{X \setminus A} \cap V^x = \overbrace{(X \setminus A)}^{\text{cerr.}} \cap V^x \subset U^x$$

Y como Y es loc. cerrado, $\exists W^y \cap Y \subset^{\text{cerr.}} W^y$ ent. en X . Por ser X loc. compacto $\exists K^y$ compacto tal que, $K^y \subset W^y \Rightarrow K^y \cap W^y \cap Y \subset^{\text{cerr.}} K^y \Rightarrow$

$$L^y = \underbrace{K^y \cap W^y}_{\text{ent. en } X} \cap Y \subset^{\text{cerr.}} K^y \Rightarrow L^y \text{ ent. en } Y \text{ compacto.}$$

Proposición (Mantra 2)

Localmente compacto en T_2 es localmente compacto.

Demostración:

Sea $Y \subset X$ con Y loc. compacto, X siendo T_2 e $y \in Y \Rightarrow$

$$\underbrace{\exists L^y}_{\text{comp.}} = \underbrace{V \cap Y}_{\text{ent. en } Y} \subset \underbrace{V}_{\text{ent. en } X} \xrightarrow{T_2} V \cap Y = L^y \text{ cerr.} V.$$

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad local	\times Loc. cerrados ✓	\times ab. ✓	✓	✓
	Mantra 1	$f(\text{ent.}) = \text{ent}$	Tychonoff	Loc. suma es como sum's

Ejemplo:

$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es localmente compacto.

1. $\mathbb{Z} \subset \underbrace{W}_{\text{ab.}} \subset \mathbb{R} : \exists k + \underbrace{\varepsilon_k}_{0 < \varepsilon_k < 1} \in W \forall k \geq 1 \Rightarrow A = \{k + \varepsilon_k : k \geq 1\} \subset W$
 - Cerrado
 - Saturado ($n\mathbb{Z} = \emptyset$)
 - Infinito
 - Discreto
2. $\exists K \subset Y$ entorno compacto de $y = \mathbb{Z} \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{W^{\text{ab.}}}_{\supset \mathbb{Z}} \subset p^{-1}K \Rightarrow pA \subset K$ infinito sin acumulación.

Compactificación por un punto

Este es otro problema importante: sumergir un espacio como subespacio abierto denso de un espacio compacto.

Intuitivamente se trata de añadir los límites que el espacio no tiene (por no ser compacto).

Ejemplo:

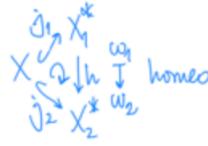
1. $\mathbb{R}^n \equiv B^n \setminus \{a\} \subset \mathbb{S}^n$ vía proyección estéreo desde a .
2. $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{RP}^n \setminus H \subset \mathbb{RP}^n$ vía cartas afines.

Proposición

X localmente compacto T_2 .

1. $\exists j : X \hookrightarrow X^*$ comp. T_2 , j inmersión abierta $X^* \setminus j(X) = \{w\}$.

2. Unicidad:



Demostración:

$$1. X^* = X \cup \{0\}, \quad \mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus K : \overbrace{K}^{\subset X} \text{ cerrado}\}.$$

- \mathcal{T}^* es top: fácil por las hipótesis sobre X .
- $K_i \overset{\text{comp.}}{\subset} X \xrightarrow{T_2} K_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \overbrace{\bigcap_i K_i}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{K_{i_0}}^{\text{comp.}} \Rightarrow \bigcap_i K_i \text{ comp.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, X \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \setminus K = \text{ab.} \setminus \text{cerr.} = \text{ab.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, K \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus U), K \setminus U \subset K \text{ cerrado} \Rightarrow \text{compacto.}$
- $X \subset X^*$ inmersión abierta: $(X^* \setminus K) \cap X = X \setminus K \in \mathcal{T}$ pues X es T_2 .
- X^* es compacto: $X^* = \bigcup_i W_i$.
- $\exists W_{i_0} \ni w \Rightarrow W_{i_0} = \underbrace{X^* \setminus K}_{\text{comp.}} \Rightarrow K \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r} \Rightarrow X^* = W_{i_0} \cup W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r}$
- X^* es T_2 :

$$x \in X \text{ loc. comp.} \Rightarrow \exists K^x \text{ ent. comp.} \Rightarrow X^* \setminus K^x = U^w \text{ ent. de } w$$

2. Unicidad:

- $\begin{cases} h_{j_1} = j_2 \\ j_i \text{ inmersiones} \end{cases} \Rightarrow h| : j_1(X) \rightarrow j_2(X) \text{ homeomorfismo.}$
- h continua en w_1 (análogamente h^{-1} continua en w_2)

$$\begin{aligned} h(w_1) = w_2 \in W \overset{\text{ab.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{comp.}}{\subset} j_2(X) \\ \Rightarrow K = h^{-1}(X_2^* \setminus W) \overset{\text{comp.}}{\subset} j_1(X) \subset X_1^* \\ [X_1^* \text{ es } T_2] \Rightarrow K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_1^* \Rightarrow h^{-1}(W) = X_1^* \setminus K \overset{\text{ab.}}{\subset} X_1^*. \end{aligned}$$

Definición

El espacio X^* se denomina compactificación por un punto de X .

También, compactificación de Alexandroff.

Por ejemplo, \mathbb{S}^n es la compactificación por un punto de \mathbb{R}^n (vía proyección estereotípica como dijimos antes).

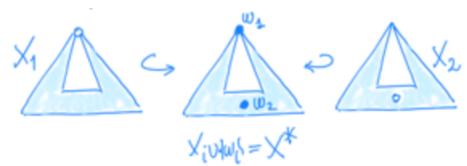
Observación: ¡Importante!

1. La unicidad justifica? que un espacio X^* compacto T_2 es la compactificación de $X^* \setminus \{0\}$ para cualquier $w \in X^*$.
2. Si dos espacios son homeomorfos, lo son sus compactos.

$$X_1 \xrightarrow[\text{homeo.}]{} X_2 \xrightarrow{j_2} X_2^* \Rightarrow j_1 = j_2 \circ f : X_1 \rightarrow X_2^*$$

que cumple las condiciones.

3. Si dos espacios no son homeomorfos, pueden serlo sus compactos.



[Ejercicio: \mathbb{R}_u^2 : ¿Por qué $X_1 \not\approx X_2$?]

Conexión

Concepto y mantras

Definición

X es conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\#X = U \sqcup Y$ abiertos $\neq \emptyset$.
 2. $\#X = F \sqcup C$ cerrados $\neq \emptyset$.
 3. $\#E \subsetneq X$ abierto y cerrado $\neq \emptyset$.
-

Demostración:

Equivalencia: $F = X \setminus V$, $C = X \setminus U$, $E = U = X \setminus V$.

Observación:

$Y \subset X$ subespacio conexo: $\#Y \subset U \cup V$ abierto de X ,

$$\begin{cases} U \cap Y \neq \emptyset \\ V \cap Y \neq \emptyset \\ U \cap V \cap Y = \emptyset \end{cases}$$

Ejemplo: (Fundamental)

$(0, 1) \subset \mathbb{R}_u$ es conexo.

Mantras generales \Rightarrow segmentos en \mathbb{R}^n , estrellados? y conexos son conexos.

Teorema (del pivote. Mantra 1)

Sea $X = \bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, $\forall A_i$ conexos $\Rightarrow X$ conexos.

Demostración:

$$\begin{aligned} \emptyset \neq E &\stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} A_i \Rightarrow \forall i, \begin{cases} E \cap A_i = \emptyset \\ E \supset A_i \end{cases} \\ &\xrightarrow{E \neq \emptyset} \exists i_0 : E \supset A_{i_0} \supset \bigcap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \supset A_i \\ &\Rightarrow E \supset \bigcup_i A_i \Rightarrow E = X. \end{aligned}$$

Corolario (Variantes)

1. $X = \bigcup_{i \in I} A_i, \exists A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset.$

Demostración:

$X = \bigcup_{i \in I} (A_{i_0} \cup A_i)$ conexo por mantra 1 y se aplica el mantra 1.

2. *Cadenas:* $X = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \dots}_{\text{conexos}} \quad A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ conexo.}$

Demostración:

Se usa el mantra 1 dos veces:

$$\begin{cases} X_k = (\dots ((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots \cup) A_k \\ X = \bigcup_k (X_1 \cup \dots \cup X_k) \end{cases}$$



El “recíproco” es “fácil” pero útil.

Proposición (Construcción de cadenas)

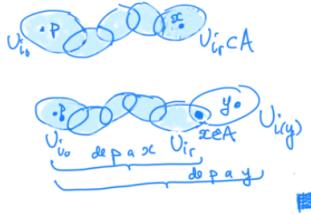
X conexo, $X = \bigcup_i U_i$ recubrimiento abierto, $p, q \in X \Rightarrow \exists$ cadena finita U_{i_k} de p a $q : p \in U_{i_0}, U_{i_{k-1}} \cap U_{i_k} \neq \emptyset, q \in U_{i_r}.$

Demostración:

$A = \{x \in X : \exists U_{i_k} \text{ de } p \text{ a } x\} \neq \emptyset$ abierto y cerrado $\Rightarrow A = X$ y $q \in A$. Por ser:

- $\neq \emptyset : \exists U_{i_0} \in ?p$ y U_{i_0} va de p a $p !$
- Abierto: $\exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r}$ de p a $x \Rightarrow U_{i_r} \subset A.$
- Cerrado:

$$\begin{aligned} y \in \overline{A} \text{ e } y \in U_{i(y)} &\Rightarrow A \cap U_{i(y)} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r} \text{ de } p \text{ a } x \in U_{i(y)} \\ &\Rightarrow U_{i_0}, \dots, U_{i_r}, U_{i(y)} \text{ de } p \text{ a } y. \end{aligned}$$



Proposición (Mantra 2)

Imagen continua de conexo es conexo.

Demostración:

$$f : X \rightarrow Y \text{ continua, } \emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} f(X) \xrightarrow{\text{cont.}} \emptyset \neq f^{-1}(E) \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow f^{-1}(E) = X \Rightarrow E = f(X).$$

Proposición (Mantra 3)

Adherencia de conexo es conexo: $Y \subset X$ con Y conexo y denso $\Rightarrow X$ conexo.

Demostración:

$$\emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow E \cap Y \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow \begin{cases} E \cap Y = \emptyset \times \text{densidad.} \\ E \cap Y = Y \Rightarrow Y \subset E \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X = \overline{Y} \Rightarrow E = X. \end{cases}$$

Ejemplo:

1. $(0, 1) \stackrel{\text{denso}}{\subset} [0, 1] \xrightarrow{M1} [0, 1]$ conexo. Con una interpolación?: $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ es homeomorfismo con $[a, b] \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{M2} [a, b]$ es conexo. Aplicando ahora:

- Pivote: $E = \bigcup_{\substack{x \in E \\ \text{convx.}}} [a, x]$ estrellado (resp. de a): convexos, bolas abiertas y cerradas, rectángulos...
- Mantra 2: Trazas de curvas continuas $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2. Seno del topólogo (polaco):

$$\text{Conexos: } \begin{cases} \Gamma = \text{imagen} : t \mapsto \left(t, \sin \frac{1}{t}\right), t > 0 \\ J = \{0\} \times [0, 1] \\ \overline{\Gamma} = \Gamma \cup J \text{ (adh.)} \end{cases}$$

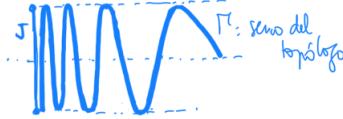


Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión	✗	✓	✓	✗
	$\{0, 1\} \subset [0, 1]$	Mantra 3	Pivote	Cada sum. ab. y cerr.

Proposición

$X \times Y$ conexo $\Leftrightarrow X$ y Y conexo.

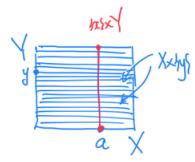
Demostración:

\Rightarrow) Mantra 3 para las proyecciones.

\Leftarrow) Fijamos $a \in X$.

$$\left. \begin{aligned} Z_y &= (\underbrace{X \times \{y\}}_{\approx X}) \cup (\underbrace{\{a\} \times Y}_{\approx Y}) \text{ dos convx. se cortan en } (a, y) \xrightarrow{\text{Piv.}} Z_y \text{ convx.} \\ \forall y \in Y, \quad \bigcap_{y \in Y} Z_y &= \{a\} \times Y \neq \emptyset \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Piv.}}$$

$$\bigcup_{y \in Y} Z_y = X \times Y \text{ convx.}$$



Componentes conexas y conexión local

Componentes

Definición

Una componente conexa (c.c) de X es un subespacio conexo maximal.

Proposición

1. $\forall a \in X. C(a) = \bigcup_{a \in A_{conx}} A$ es conexo (pivot), $a \in C(a)$.
2. $E \subset X$ conexo:

$C(a) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow C(a) \cup E$ conx. (pivot) $\Rightarrow C(a) \cup E$ es uno de los A de $C(a) \Rightarrow E \subset C(a)$

Luego,

- $C(a)$ maximal \Rightarrow componente conexa.
 - $a \neq b : C(a) = C(b)$ ó $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ [Usar $E = C(b)$]
3. $\overline{C(a)}$ conexo (mantra adh.) $\Rightarrow \overline{C(a)} = \underbrace{C(a)}_{cerr.}$ (maximalidad)

1. + 2. + 3. $\Rightarrow X = \bigsqcup_{C \subset X} C$ es una partición en cerrados disjuntos.

Ejemplo:

1. $X_{\text{discreto}} : C(x) = \{x\}$ (puntos abiertos y cerrados)
2. $\mathbb{Q}_u : C(p) = \{p\}$ (todo intervalo de \mathbb{R} tiene racionales)
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)}) : C(t) = \{t\}$ ($\mathbb{R} = (\leftarrow, a) \cup [a, \rightarrow)$ abierto y cerrado)
4. $X = \{0, Y_k, k \geq 1\} : \begin{cases} C(0) = \{0\} \text{ cerrado, no abierto } (\{\frac{1}{k} : k \geq 1\} \text{ no cerr.}) \\ C(\frac{1}{k}) = \{\frac{1}{k}\} \text{ cerrado y abierto.} \end{cases}$

Definición

Un espacio cuyas componentes son los puntos se llama totalmente desconexo.

Proposición

Las componentes conexas de $X \times Y$ son los puntos de componentes conexas.

Demostración:

$$C \subset \underbrace{X}_{\xrightarrow{p} X} \times \underbrace{Y}_{\xrightarrow{q} Y} \Rightarrow p(C) \text{ y } q(C) \text{ conexos (imagen continua)} \Rightarrow \begin{cases} p(C) \subset E \overset{\text{c.c.}}{\subset} X \\ q(C) \subset F \overset{\text{c.c.}}{\subset} Y \end{cases} \Rightarrow C \subset E \times F \underset{\text{Max. de } C}{\xlongequal{}} C = E \times F.$$

Conexión local

Definición

X es localmente conexo si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos.

Proposición

X es localmente conexo \Leftrightarrow la componente conexa de un abierto es abierta.

Demostración:

- $\Rightarrow)$ Si $x \in C \overset{\text{cerr.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow \exists \underbrace{U^x}_{\text{ab. conn.}} \subset U \Rightarrow U^x \subset C \Rightarrow C \overset{\text{ab.}}{\subset} X.$
- $\Leftarrow)$ $\mathcal{B}^x = \{C(x) \overset{\text{c.c.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : x \in U\}$. Con $C(x)$ abierto por ser c.c de abierto.

Ejercicio: X es localmente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos.

Ejemplo: (Esencial)

$\{0, \frac{1}{k} : k \geq 1\} = Y \subset \mathbb{R}_u$ no es localmente conexo.

Demostración:

La c.c $(0) = \{0\}$ no es abierto. Directamente:

$$\begin{aligned} 0 \in \underbrace{V}_{\text{ent. de } 0 \in \mathbb{R}} \cap Y &\Rightarrow V \supset (0, \varepsilon), \exists 0 < \underbrace{\theta}_{\notin \mathbb{Q}} < \frac{1}{k} < \varepsilon < 1 \\ &\Rightarrow V \cap Y \subset \underbrace{(0, \theta)}_{\exists 0} \cup \underbrace{(\theta, \infty)}_{\exists \frac{1}{k}} \Rightarrow V \cap Y \text{ no conexo..} \end{aligned}$$

Ejercicio:

1. Analizar una sucesión de segmentos que convergen a otro:



2. ¿Y el seno del topólogo?

Tabla de comportamiento

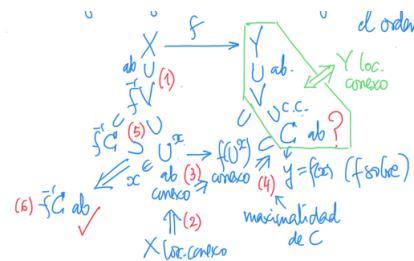
	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local	✗	✓	✓	✗
	Ejemplo esencial	No banal	Prod. ent. conx.	Suma como sum's

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ identificación con X localmente conexo $\Rightarrow Y$ es localmente conexo.

Demostración:

El diagrama siguiente resume el argumento (si se lee en el orden adecuado).



Conexión por caminos

Definición

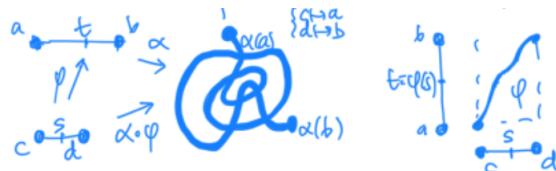
Un camino en un espacio X es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}_u \rightarrow X$. Decimos:

- α va de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, conecta $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$, que son extremos.
- La imagen $\alpha[a, b] \subset X$ es la traza, conexa por imagen continua.

Proposición (Cambios de parámetros)

$\forall \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ continua $\Rightarrow \beta = \alpha \circ \varphi$ es otro camino con igual traza.

φ es un cambio de parámetro cuando es homeomorfismo (creciente o decreciente).

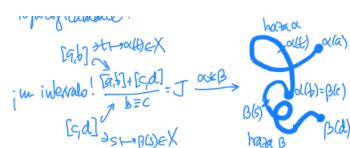


Ejemplo: (Interpolación lineal)

Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow [p, q] : t \mapsto (1 - t)p + tq$ es un camino bien conocido y útil. También sirve para reparametrizar si $[p, q] = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Vemos, por ejemplo, que siempre podemos reducirnos a caminos con dominio $[0, 1]$. Esto será fundamental más adelante.

Proposición (Producto de caminos)

Topológicamente:



(Alternativa: Reparametrizar β con dominio $[b, b + (d - c)]$)

Ejemplo:

Si hacemos el producto de segmentos consecutivos obtenemos caminos poligonales.

Conexión por caminos

Definición

Un espacio X es conexo por caminos si sus puntos se pueden conectar con un camino:

$$\forall x \forall y \in X, \exists \sigma_y : [a, b] \rightarrow X, \sigma_y(a) = x \wedge \sigma_y(b) = y$$

En particular, $X = \bigcup_y \sigma_y[a, b]$ es conexo (pivot, $\alpha_y(a) = x, \forall y$)

Ejemplo:

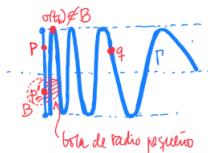
- La mayor parte de los conexos conocidos son conexos por caminos:

- Los abiertos conexos (top. Usual) son conexos por poligonales, que son caminos.
- Los conjuntos convexos y los estrellados también.

- El seno del topólogo Γ es la traza de $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $t > 0$, es conexo y lo es su adherencia $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$, $J = \{0\} \times [0, 1]$. Pero $\bar{\Gamma}$ no es conexo por caminos.

Demostración:

No existen caminos $\sigma : [a, b] \rightarrow \bar{\Gamma}$ $\begin{cases} \sigma(a) = p \in J \\ \sigma(b) = q \in \Gamma \end{cases}$:



- $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, α, β continuas. $\exists a' = \max\{t \in [a, b] : \alpha(t) = 0\} \Rightarrow (\alpha \text{ continua en un compacto}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(a') = 0, \sigma(a') = p' \in J \\ t > a' : \alpha(t) > 0 \Rightarrow \sigma(t) \in \Gamma \Rightarrow \beta(t) = \sin \frac{1}{\alpha(t)} \end{cases}$
- Supongamos $p' = \sigma(a') \neq (0, 1)$ y $\exists \delta : B(p', \delta) \cap \{y = 1\} = \emptyset$. σ continua $\Rightarrow \exists \sigma[a', \varepsilon] \subset B(p', \delta) \Rightarrow \sigma[a', \varepsilon] \cap \{y = 1\} = \emptyset$. (si $p' = (0, 1)$ evitariamos? $\{y = -1\}$)
- α continua $\Rightarrow \alpha[a', \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ conexo compacto = intervalo: $\alpha[a', \varepsilon] = [0, c]$.
- La oscilación de $\sin \frac{1}{x}$ lleva σ a $\{y = 1\}$, fuera de la bola elegida:

$$k \gg 0 \Rightarrow \frac{2}{(1 + 4k)\pi} \in [0, c] = \alpha[a', \varepsilon] \Rightarrow \exists a' < t_k < \varepsilon : \alpha(t_k) = \frac{2}{(1 + 4k)\pi}$$

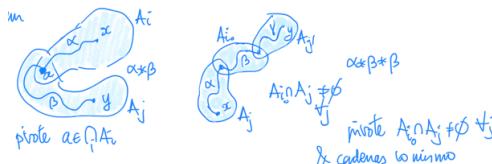
$$\Rightarrow \sigma(t_k) = \left(\alpha(t_k), \sin \left(\frac{1}{\alpha(t_k)} \right) \right) = (x_k, 1) !?$$

Mantras

Todo (casi) lo que dijimos sobre la conexión nos vale:

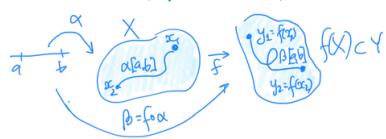
Proposición (Mantra del pivot)

(Igual) Sea $X = \bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, $\forall A_i$ conexos por caminos $\Rightarrow X$ conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la imagen)

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua con X conexo por caminos $\Rightarrow f(X)$ es conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la adherencia (!NO!))

El seno del topólogo $\Gamma = \text{grafo de } \sin \frac{1}{t}$ es conexo por caminos: $(a, \sin \frac{1}{a})$ y $(b, \sin \frac{1}{b})$ se conectan por el camino evidente, $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $a \leq t \leq b$. Pero, como hemos visto, la adherencia $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos.

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión por caminos	✗	✓	✓	✗

Proposición (Productos)

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] \rightarrow X : & \left\{ \begin{array}{l} \sigma(a) = x_1 \\ \sigma(b) = x_2 \end{array} \right. \\ \tau : [a, b] \rightarrow Y : & \left\{ \begin{array}{l} \tau(a) = y_1 \\ \tau(b) = y_2 \end{array} \right. \end{aligned} \Rightarrow \gamma = (\sigma, \tau) : [a, b] \rightarrow X \times Y \left\{ \begin{array}{l} \gamma(a) = (x_1, y_1) \\ \gamma(b) = (x_2, y_2) \end{array} \right.$$

Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos

Componentes conexas por caminos

Todo análogo a las componentes conexas (casi). Sea X espacio topológico.

Definición

Una componente conexa por caminos (c.c.c) es un subconjunto conexo por caminos maximal.

Proposición (Descripción)

1. La c.c.c de $x \in X$ es $\bigcup_{x \in A} A$ con A conexa por caminos.
2. Las c.c.c forman una partición de X , más fina que la de las c.c.

Demostración:

Porque conexo por caminos \Rightarrow conexo pero no la inversa.

¡OJO! Las c.c.c no son necesariamente cerradas.

Como contraejemplo de ambas cosas dichas tenemos la adherencia del seno topólogo.

Ejemplo:

Γ seno del topólogo y $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$ son conexos. Tenemos que $\bar{\Gamma}$ es una c.c, mientras que J y Γ son dos c.c.c, una cerrada (J) y la otra no (Γ). [Porque $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos]

Conexión local por caminos

Imitamos sin sorpresa las demostraciones de la conexión local y tenemos:

Definición

X es localmente conexo por caminos si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos por caminos.

Proposición

X es localmente conexo por caminos \Leftrightarrow c.c.c de un abierto es abierto.

Ejercicio: Localmente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos por caminos.

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local por caminos	✗	✓	✓	✓

También vale que las c.c.c del producto son los productos de las c.c.c de los factores.

Relaciones entre las propiedades de conexión

Lo principal es que:

Proposición

Conexo y localmente conexo por caminos \Rightarrow Conexo por caminos.

Demostración:

- Conexo $\Rightarrow \forall x, y, \exists$ cadenas de x a y .
- Localmente conexo por caminos \Rightarrow cadenas de abiertos conexos por caminos \Rightarrow Var. pivote
Estas cadenas son conexas por caminos.

Por tanto, \exists camino de x a y .

Observación:

Esta es la demostración de que un abierto conexo de \mathbb{R}_u^n lo es por poligonales (se usan cadenas de bolas).

Observación: (Resumen)

Por especificar todas las posibilidades:



Ejercicio: Contraejemplos. Los menos fáciles son * y **

Homotopía

Conceptos fundamentales

Definición

Una homotopía es una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$:

1. $H_s : Y \rightarrow X : y \mapsto H(y, s)$, $H \equiv \{H_s : 0 \leq s \leq 1\}$ familia uniparamétrica de aplicaciones.
2. Siendo $f = H_0$ y $g = H_1$:

$$\begin{cases} H_s : f \simeq g \text{ homotopía entre } f \text{ y } g \\ H \text{ deformación continua de } f \text{ a } g \end{cases} \quad \boxed{\text{El problema: cuándo } f \simeq g}$$

3. $f \simeq g$ relación de equivalencia:

- $f \simeq f$ vía $H_s \equiv f$.
- $H_s : f \simeq g \Rightarrow H_{1-s} : g \simeq f$.
- $\begin{cases} F_s : f \simeq g \\ G_s : g \simeq h \end{cases} \Rightarrow H_s = \begin{cases} F_{2s}, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G_{2s-1}, & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} : f \simeq h$

Demostración:

$$\text{Continuidad: } \begin{cases} F_{2(1/2)} = F_1 = g \\ G_{2(1/2)-1} = G_0 = g \end{cases}$$

Proposición

X conexo por caminos, $f, g : Y \rightarrow X$ constantes $\Rightarrow f \simeq g$.

Demostración:

$$\exists \sigma : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(0) = f(y_0) \text{ y } \sigma(1) = g(y_0) \Rightarrow H_s \equiv \sigma(s) : \begin{cases} H_0 \equiv \sigma(0) = f(y_0) \equiv f \\ H_1 \equiv \sigma(1) = g(y_0) \equiv g \end{cases}$$

Definición

$f : Y \rightarrow X$ es nulhomótopa si $f \simeq$ constante, esencial en caso contrario.

Teorema (Problema esencial. Hopf.)

(1932) $\exists f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ esencial con $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C} : (z, z') \mapsto (\|z\|^2 - \|z'\|^2, 2zz')$

Concepto relativo

Definición

$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ es relativa a $A \subset Y$ si $H_s(a) = H_0(a)$, $\forall a \in A$, $\forall s$.

Proposición

H relativa a A , $f = H_0$, $g = H_1 \Rightarrow f|_A = g|_A$. Notación: $H_s = f \xrightarrow{A} g$ (Relación de equivalencia).

Ejemplo: (Fundamentales. Interpolación)

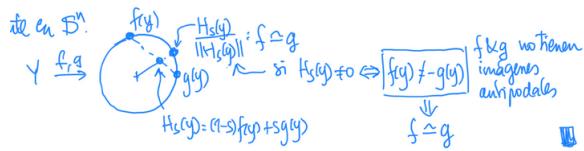
1. $f, g : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s = (1-s)f + sg : f \simeq g$.

Demostración:

Pues por convexidad $H_s(y) \in \underbrace{[f(y), g(y)]}_{\text{cond. crucial!}} \subset X$.

$f(a) = g(a) \Rightarrow H_s(a) = f(a) = g(a) \Rightarrow H_s$ es relativa a $A = \{f = g\}$.

2. $f : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado verp?, x_0 , $[x, x_0] \subset X$, $\forall x \in X \Rightarrow H_s = (1-s)f + sx_0 : f \simeq x_0$ (relativa a $A = f^{-1}(x_0)$).
3. Variante en \mathbb{S}^n :



Contractibilidad

Definición

X es contrátil si $\text{id} : X \rightarrow X$ es nulhomótopa: $\exists H_s : \text{id} \simeq x_0$.

Y fuertemente contrátil si $\exists H_s : \text{id} \xrightarrow{x_0} x_0$ (homótopa relativa a $\{x_0\}$)

Observación:

Los ejemplos son difíciles, pero son cosas distintas.

Ejemplo:

$X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado verp? $x_0 \Rightarrow$ fuertemente contrátil

Demostración:

$H_s = (1-s)\text{id} + sx_0$.

Proposición

1. Si X es contrátil \Rightarrow es conexo por caminos.

2. Si X es contrátil $\Rightarrow \begin{cases} \forall f : Y \rightarrow X \text{ nulhomótopa}. \\ \forall g : X \rightarrow Z \text{ nulhomótopa}. \end{cases}$

Demostración:

1. $H_s : id \simeq x_0 \Rightarrow S \mapsto H_s(x_0)$ camino de x a x_0 .

2. $H_s : id \simeq x_0 \begin{cases} H_s \circ f : f \simeq x_0 \\ g \circ H_s : g \simeq g(x_0) \end{cases}$

Observación:

Pocos espacios son contráctiles, pero no es inmediato verlo.

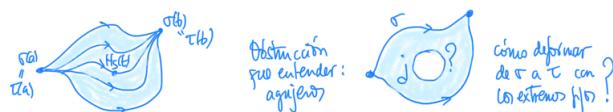
Homotopía de caminos

El concepto básico

Definición

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$ son homótopos con extremos fijos si $\exists H_s : \sigma \simeq \tau$ relativa a $\{a, b\}$:

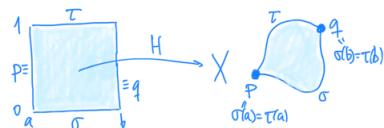
$$\begin{cases} H_s(a) = \sigma(a) = \tau(a) \\ H_s(b) = \sigma(b) = \tau(b) \end{cases} \quad \forall s$$



Observación:

Es un problema de extensión:

Definir H en el cuadrado $[a, b] \times [0, 1]$ con valor determinado en su borde.



Simple-conexión

Definición

X es simplemente conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\forall \sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$ con iguales extremos son homótopos con extremos fijos.
2. $\forall f : \mathbb{S}' \rightarrow X$ se extiende al disco interior de la circunferencia.

Demostración:

Colapsando dos lados de un cuadrado $\xrightarrow{\pi}$ disco con dos puntos en la circunferencia unidos por dos ceros α, β .

1. \Rightarrow 2.)

$$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X \Rightarrow f \circ \pi \begin{cases} \alpha \rightarrow \text{camino } \sigma \\ \beta \rightarrow \text{camino } \tau \end{cases} \\ \Rightarrow \exists H \text{ con extremos fijos} \Rightarrow \text{compatible con } \pi \\ \Rightarrow H \text{ pasa al cociente por } \pi, \text{ dando } F..$$

2. \Rightarrow 1.) Dos caminos σ, τ con extremos p, q definen f en la circunferencia y su extensión F al disco define la homotopía $H = F \circ \pi$.

Ejemplo:

Los conjuntos convexos son simplemente conexos. ¿Los estrellados?

Esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$

Proposición

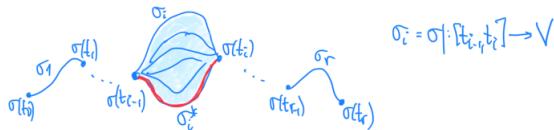
$\mathbb{S}^n : \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es simplemente conexo ($n \geq 2$).

Demostración:

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$, $\sigma(a) = \tau(a) = p$, $\sigma(b) = \tau(b) = q$.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c, -c \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, 1\} \wedge U = \mathbb{S}^n \setminus \{c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{proyección estereográfica.}$$

1. $[a, b] \subset \sigma^{-1}U \cup \sigma^{-1}V \xrightarrow{\text{comp.}} \exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \sigma[t_{i-1}, t_i] \begin{cases} \subset U \\ \subset V \end{cases} \text{ donde } \sigma[t_{i-1}, t_i] \text{ es la traza de } \sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}.$
2. Si dos consecutivos están en el mismo U ó V , eliminamos la juntura común \Rightarrow al atravesar una juntura t_k cambiamos de U a V ó viceversa, en particular, $x_k = \sigma(t_k) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$, que es conexo por caminos, o bien, nos quedamos sin junturas y $\sigma[a, b] \subset U$ ó V .
3. Consideramos los trozos en V (incluido que $\sigma[a, b] \subset V$ porque no hay ya junturas)



(*)

$$\begin{aligned} \sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i) &\in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\} \text{ conexo por caminos} \\ \Rightarrow \exists \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] &\rightarrow U \cap V \subset V \text{ mismos extremos que } \sigma_i. \end{aligned}$$

$$(***) \quad V \approx \mathbb{R}^n \text{ convexo} \Rightarrow \exists H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* \text{ en } V \text{ con extremos fijos. ¡Ojo! } [\sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U].$$

4. Pegando a trozos homotopías en \mathbb{S}^n :

$$\begin{cases} \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset U \Rightarrow H_s^i \equiv \sigma_i = \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U \subset \mathbb{S}^n \\ \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset V \xrightarrow{3} H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow V \subset \mathbb{S}^n \end{cases} \Rightarrow \sigma \simeq \sigma^*$$

Homótopos en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\sigma^* [a, b] \subset U$.

5. Igual, $\exists H_s : \tau \simeq \tau^*$ homotopía en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\tau^* [a, b] \subset U$.

En conclusión: $\sigma^* \simeq \tau^*$ en $U (\approx \mathbb{R}^n)$ con extremos fijos $\Rightarrow \sigma \simeq \sigma^* \simeq \tau^* \simeq \tau$ con extremos fijos.

El grupo fundamental

Operaciones con caminos

Sea X es conexo por caminos.

Definición (Producto)

$$\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(1) = \tau(0) \Rightarrow \sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tau(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

[Reescalando $\begin{cases} \sigma \text{ de } [0, 1] \text{ a } [0, 1/2] \\ \tau \text{ de } [0, 1] \text{ a } [1/2, 1] \end{cases}$]



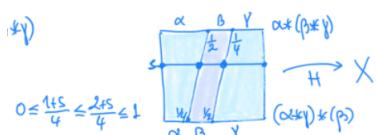
Las propiedades algebraicas son TODAS SALVO HOMOTOPÍA CON EXTREMOS FIJOS.

Proposición

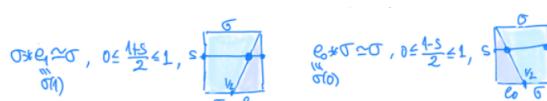
Propiedades de grupo:

1. Asociativa: $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.

En cada altura s se reescalan los caminos con junturas.



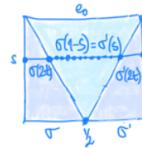
2. Neutros:



3. Inverso: $\sigma'(t) = \sigma(1-t) \Rightarrow \sigma * \sigma' \simeq e_0$ y $\sigma'' = \sigma \Rightarrow \sigma' * \sigma \simeq e_1$.

No se reescalada: $0 \leq \frac{1-s}{2} \leq \frac{1+s}{2} \leq 1$.

Las junturas dicen dónde parar σ y empezar σ' en cada altura:



4. Invarianza por homotopía:

$$\begin{cases} F_s : \sigma_1 \simeq \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \simeq \tau_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Trans.}} F_s * G_s : \sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2$$

$$F_s * G_s(t) = \begin{cases} F_s(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G_s(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

El grupo fundamental

Sea X conexo por caminos, $x_0 \in X$ punto base fijo.

Definición

1. Lazo de base x_0 , $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$, $\underbrace{\sigma(0) = \sigma(1)}_{\text{lazo}} = x_0$, punto fijo.
2. ■ $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ lazos de base x_0 .
■ $H_s : \sigma \simeq \tau$ de lazos: $H_s(0) = H_s(1), \forall s$.
■ $H_s = \sigma \xrightarrow{x_0} \tau$ de lazos con punto base fijo: $H_s(0) = H_s(1) = x_0, \forall s$. [Relativa a $\{0, 1\}$]

Definición (Grupo fundamental)

- $\pi(X, x_0) = \{\text{lazos de base } x_0\} / \xrightarrow{x_0} \{\text{"Lazos / homotopía"}\}$
- $[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$ define bien un grupo por 14.1.

Ejemplo:

1. X simplemente conexo $\Leftrightarrow \pi(X, x_0) = \{1\}, \forall x_0$. [\Leftarrow] ejercicio]

2. $\pi(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}, n \geq 2$.

Demostración:

Por 1) y ser \mathbb{S}^\times , $n \geq 2$ simplemente conexa.

3. $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$.

4. $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$, $\pi(\text{banda Möbius}) = \mathbb{Z}$.

5. $\pi(\infty, x_0) = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}$ que es una lemniscata y un grupo libre no comunitativo.

El cálculo de grupos fundamentales no es una tarea trivial, pero muy útil.

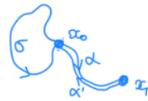
El punto base no es muy importante.

Proposición

Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de $\alpha(0) = x_0$ a $\alpha(1) = x_1$. La conjugación:

$$\begin{aligned} \pi(X, x_0) &\rightarrow \pi(X, x_1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma' * \sigma * \sigma']. \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos.



Demostración:

Fácil con las propiedades de 14.1.

Functorialidad

Definición

Definimos h_* como:

$$\begin{aligned} h : X \rightarrow Y \text{ homeo, } h(x_0) = y_0 \Rightarrow \\ h_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0) \text{ iso.} \\ [\sigma] \mapsto [h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

Es fácil y útil: espacios homeomorfos deben tener grupos fundamentales isomorfos.

Por ejemplo, \mathbb{S}^2 y \mathbb{RP}^2 no son homeomorfos. Pero la construcción es mucho más general.

$$\begin{array}{c} \{\text{espacio con}\} \xrightarrow{\pi} \{\text{grupos}\} \\ \{\text{punto base}\} \\ (X, x_0) \xrightarrow{x_0} \pi(X, x_0) \\ \text{cont. } f \downarrow \quad \curvearrowright \quad \downarrow \quad \text{bien definido, homeomorfismo de} \\ (Y, y_0) \xrightarrow{y_0} \pi(Y, y_0) \quad f_* : f_* \circ \tau \cong \tau \quad f_* \circ (g_* \circ \sigma) = (f_* \circ g_*) \circ (\tau \circ \sigma) \end{array}$$

Definición (Functorialidad)

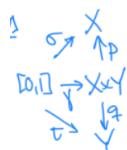
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \text{ y } (id_X)_* = id_{\pi(X, x_0)}.$$

Ejemplo:

Si $h : X \rightarrow Y$, $x_0 \mapsto y_0$ es homeomorfismo $\Rightarrow (h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$. [Más preciso que h_* isomorfismo]

Proposición (Producto de espacios)

Tenemos que si:



entonces:

$$\begin{aligned} \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) &\xrightarrow{p_*, q_*} \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \\ [\gamma] = [(\sigma; \tau)] &\mapsto ([\sigma], [\tau]). \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración:

Sean:

$$\left. \begin{array}{l} F_s : \sigma_1 \xrightarrow{x_0} \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \xrightarrow{y_0} \tau_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (F_s, G_s) : (\sigma_1, \tau_1) = \gamma_1 \mapsto \gamma_2 = (\sigma_2, \tau_2) \text{ y nada más...}$$

Ejemplo:

1. $\pi(\mathbb{S} \times \mathbb{S}) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}^2$.
2. $\pi(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi([0, 1])$.

Retractos

Retractos y deformaciones

Definición

Una aplicación $\rho : X \rightarrow A \subset X$ es:

1. Un retracto si $\rho|_A = id_A$ ($y A = \rho(A)$ es un retracto de X)
 2. Una deformación (fuerte) si: $\exists H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho$, homotopía relativa a A .
-

Ejemplo:

1. \forall cte : $X \rightarrow \{x_0\} \subset X$ es retracto.
2. El retracto radial $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto x/\|x\|$ es una deformación. $H_s(x) = (1-s)x + s\rho(x)$.
3. $\left. \begin{array}{l} \rho : X \rightarrow A \subset X \subset \mathbb{R}^n \text{ retracto} \\ [x, \rho(x)] \subset X, \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \text{ deformación: } H_s = (1-s)id_X + s\rho \text{ (interpolación).}$
4. Cilindros:

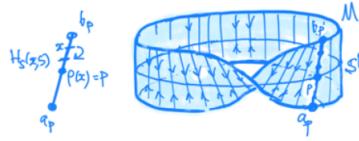
$$\begin{aligned} \rho : X \times [0, 1] &\rightarrow X \times \{0\} \\ (x, t) &\mapsto (x, 0) = \rho(x, t). \end{aligned}$$

con ρ deformación sobre X : $H_s(x, t) = \begin{pmatrix} x, & \underbrace{(1-s)t}_{(1-s)t+s \cdot 0} \\ & \end{pmatrix}$.



5. Banda de Möbius: $\mathbb{S}^1 \subset M = \bigcup_{p \in \mathbb{S}^1} [a_p, b_p]$.

Deformación sobre \mathbb{S}^1 : $\begin{cases} \rho : M \rightarrow \mathbb{S}^1 : x \mapsto \rho(x) \\ H_s(x, s) = (1-s)x + s\rho(x) \end{cases}$



Proposición

Sea $\rho : X \rightarrow A \subset X$, $a_0 \in A$; $\rho_* : \pi(X, a_0) \rightarrow \pi(A, a_0)$.

1. ρ retracto $\Rightarrow \rho_*$ suprayectivo.
2. ρ deformación $\Rightarrow \rho_*$ isomorfismo.

Demostración:

1. ρ retracto:

$$A \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_A \end{array}} X \xrightarrow{\rho} A \Rightarrow \pi(A, a_0) \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_{\pi(A, a_0)} \end{array}} \pi(X, a_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\text{injektiva}} \pi(A, a_0) \text{ sobre} /$$

2. ρ deformación:

$$H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho \Rightarrow j_* \text{ sobre.} : \left\{ \begin{array}{l} [\sigma] \in \pi(X, a_0) \Rightarrow H_s \circ \sigma : \sigma \xrightarrow{A} \rho \circ \sigma = j \circ \rho \circ \sigma \\ \Rightarrow [\sigma] = [j \circ \rho \circ \sigma] = j_* [\rho \circ \sigma] \end{array} \right.$$

y por ser j_* sobre $\Rightarrow \rho_*$ inyectiva.

Ejemplo:

$$1. \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \pi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \{1\}, n \geq 2 \\ \mathbb{Z}, n = 1 \end{cases}$$

$$2. \pi(\text{cilindro}) = \pi(\text{banda de Möbius}) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Demostración:

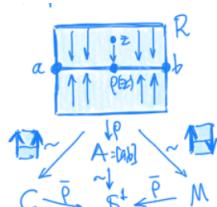
Veremos \mathbb{S}^1 ...

Cocientes

Muchos espacios son cocientes y las deformaciones se pueden hacer compatibles para facilitar las construcciones.

Ejemplo:

Cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y banda de Möbius M .



Tenemos $C, M = R/$ identificaciones adecuadas de lados opuestos y, por otro lado, la deformación de R sobre $A = [a, b]$, $H_s(z) = (1 - s)z + s\rho(z) \xrightarrow{(*)}$ deformación de R/ \sim sobre $[a, b] / \sim = \mathbb{S}^1$.

Es decir, \mathbb{S}^1 es deformación de C y de M , luego todos tienen $\pi = \mathbb{Z}$.

($*$): porque p y H_s son compatibles con las relaciones: $z \sim z' \Rightarrow H_s(z) \simeq H_s(z')$, luego inducen aplicaciones continuas \bar{p} y $\bar{H}_s : R/ \sim \rightarrow A/ \sim$.

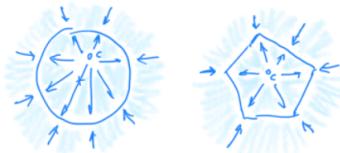
Normalmente se hacen las deformaciones pensando en que cumplan $H_s(z) \simeq H_s(z')$.

Agujeros

Conviene insistir en un ejemplo importante de deformación y sus variantes.

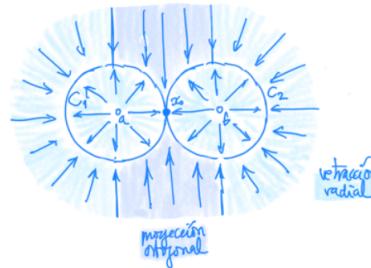
$$\begin{aligned} 1. \rho : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{esp. con "agujero"}} &\rightarrow \mathbb{S}^n \text{ deformación} \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0) = \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z}, n = 1 (\text{se verá...}) \\ \{1\}, n \geq 2 (\mathbb{S}^n, n \geq 2 \text{ simple-conexa}) \end{cases} \end{aligned}$$

2. Dibujos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$ de retracciones sobre curvas “alrededor” del “agujero” c :



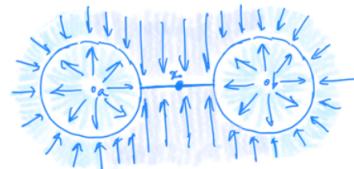
3. Dos agujeros $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$.

Se trocea el espacio en cerrados, en cada uno de los cuáles se hace una deformación, de manera que en las fronteras coincidan. En el dibujo se sombrean diferentes las zonas en las que se usan deformaciones diferentes. Las deformaciones más cómodas son las interpolaciones de id y una retracción geométrica.



En este caso, $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow \infty?$ es deformación y $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\infty?) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (grupo fundamental de una lemniscata).

4. Otra variante:



$\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow dibujo$ deformación dice que:

$$\pi(dibujo) = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\underbrace{\infty?}_{=\mathbb{Z} * \mathbb{Z}})$$

que es igual al grupo fundamental, pero no homeomorfismo.

5. Aún más ejemplos así (ya sin especificar el punto base):

$$\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Demostración: (creo)

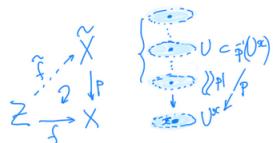
Cualesquiera tres puntos en \mathbb{R}^2 se pueden recolocar con homeomorfismos para hacer, a partir de ellos, retracciones sobre las curvas dibujadas, no homeomorfas. (?)

Ejercicio: Deformar $\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}$ sobre una circunferencia, para obtener $\pi(\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.

Recubridores

El problema de elevación

Fijada p , qué f 's tienen elevación \tilde{f} . i.e: $p \circ \tilde{f} = f$



Definición

p es un recubridor si $\forall x \in X$, $\underbrace{\exists U^x}_{\text{ab. trivializante}} : p^{-1}(U^x) = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda}$ y $\forall \lambda, p| : U_{\lambda} \rightarrow U^x$ homeomorfismo.

Es un tipo especial de homeomorfismo local sobrejetivo y, por eso, identificación abierta.

Ejemplo: (Importantes!)

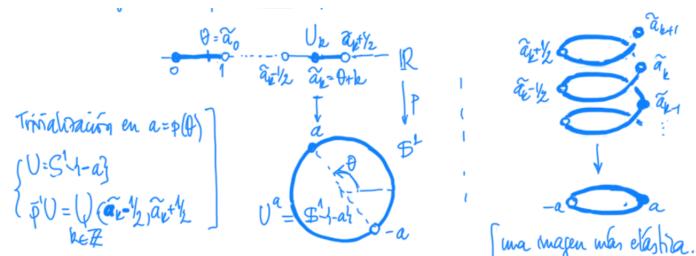
1. La identificación antipodal, $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{RP}^n$,

$$\forall x \in \mathbb{RP}^n \quad \underbrace{\exists U^x}_{\text{trivializante}} = \mathbb{RP}^n \setminus \underbrace{H}_{\text{hiperplano}} \quad \wedge \quad \pi^{-1}(U^x) = \mathbb{S}^n \setminus \pi^{-1}H = S_+ \sqcup S_-$$

hemisferios abiertos.

Ya se ilustró convenientemente en su lección. ¿Qué se tiene para $n = 1$?

2. La identificación exponencial, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$.



Unicidad de elevación

Proposición

Si Z es conexo, dos elevaciones que coinciden en algún puntos son iguales.

Demostración:

$$A = \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}, p \circ \tilde{f}_1 = f.$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{f(z)} \in U^x, p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización)} \Rightarrow \tilde{f}_i(z) \in p^{-1}U^x \wedge \exists! \lambda_i : \tilde{f}_i(z) \in U_{\lambda_i} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z = \tilde{f}_1^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_{\lambda_2}) : \hat{f}_1(\eta) = \hat{f}_2(\eta) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 (**). \end{aligned}$$

(*) debido a:

- \Rightarrow) U_{λ} 's disjuntos.
- \Leftarrow) $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$ y $p|_{U_{\lambda}}$ 1-1.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Ab.}}_A W^z \subset A \text{ si } z \in A : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \wedge \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} = U_{\lambda_2} \xrightarrow[p|]{\text{iny.}} \underbrace{U^x}_{\text{iny.}} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta), \tilde{f}_2(\eta) \mapsto \tau?(z) \Rightarrow \tilde{f}_1(\eta) = \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Cerr.}}_A W^z \subset Z \setminus A \text{ si } z \notin A : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \cap \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta) \neq \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\exists \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \Rightarrow \emptyset \neq A \underset{\text{cerr.}}{\subset} Z \text{ conx.} \Rightarrow A = Z \wedge \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$$

Lema de elevación

Proposición

Tenemos que:

$$\begin{cases} f = H : Y \times [0, 1] \rightarrow X \text{ (homotopía)} \\ \exists \tilde{H}_0 \text{ elevación de } H_0 : Y \rightarrow X \end{cases} \Rightarrow \exists \tilde{H} \text{ elevación, } (\tilde{H})_0 = \tilde{H}_0$$

Demostración:

1. Elevación semilocal: $\forall y \in Y, \tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ elevación de $H|_{V^y \times [0, 1]}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \{y\} \times [0, 1] \subset \bigcup_x H^{-1}(U^x), p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización en } x) \Rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \{y\} \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \forall i, \exists V_i^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \Rightarrow \exists V^y = V_1^y \cap \dots \cap V_r^y : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \stackrel{(*)}{\subset} H^{-1}(U^{x_i}). \end{aligned}$$

b) Inducción, $i > 0 : \exists \tilde{H}_0 : V^y \times \{t_0\} \rightarrow \tilde{X}$ por hipótesis.

$$\begin{aligned}
 & \underline{i-1 \rightarrow i : \exists H_{i-1}^y \text{ en } V^y \times [t_0, t_{i-1?}] \Rightarrow \text{se puede extender a } V^y \times [t_{i-1}, t_i]} \\
 (*) \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} H(y, t_{i-1}) \in U^{x_i} \xrightarrow{\exists \lambda} \tilde{H}_{i-1}^y(y, t_{i-1}) \in U_\lambda \xrightarrow{\text{red. } V^y} \\ \hat{H}_{i-1}^y(V^y \times (t_{i-1})) \subset U_\lambda \rightarrow U^{x_i} \\ \exists (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U_\lambda \text{ elevación (de } H) \end{array} \right. \\
 \Rightarrow & p \circ \tilde{H}_{i-1}^y = p \circ [(p|_{U_\lambda}^{-1} \circ H)] : V^y \times \{t_{i-1}\} \rightarrow U^{x_i} \\
 \xrightarrow{p|_{U_\lambda} \text{ iny.}} & \tilde{H}_{i-1}^y = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ H \text{ en } V^y \times \{t_{i-1}\} \\
 \Rightarrow & (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H \text{ extiende } \tilde{H}_{i-1}^y \text{ a } V^y \times [t_{i-1}, t_i].
 \end{aligned}$$

2. Elevación global. Las locales $\{\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}\}_{y \in Y}$ encolan bien, pues coinciden en las intersecciones: $\forall y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$:

Observación:

1. La elevación de una aplicación $Y \rightarrow X$ sólo depende de su clase de homotopía.
2. Todo camino $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ tiene una única elevación $\tilde{\sigma}$ con origen $\tilde{\sigma}(0) \in p^{-1}(\sigma(0))$.

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}^{y_1}(y, \bullet) \\ \tilde{H}^{y_2}(y, \bullet) \end{array} \right\} \text{ elevan } H(y, \bullet) : \{y\} \times [0, 1] \\ \tilde{H}^{y_1}(y, 0) = \tilde{H}_0(y) = \tilde{H}^{y_2}(y, 0) \text{ 1er paso ind.} \right\} \xrightarrow{\text{Uni. elevación.}} \tilde{H}^{y_1}(y, t) = \tilde{H}^{y_2}(y, t), \forall z$$

Cálculos mediante recubridores

Hemos visto ya que:

- $\pi(\text{estrellado}) = \{1\}$, $\pi(\mathbb{S}^n) = \{1\}$, $n \geq 2 \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \{1\}$.
- $\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$ (no demostrado)
- $\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ (no demostrado).
 - $\pi(\text{toro}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\pi(\text{cilindro}) = \mathbb{Z}$.
 - $\pi(\text{banda de Möbius}) = \mathbb{Z}$, $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.

Ahora toca demostrar $\pi(\mathbb{P}^n)$ y $\pi(\mathbb{S}^1)$.

Espacios proyectivos reales

Teorema

$$\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2, n \geq 2$$

Demostración:

Usamos el recubridor antipodal $p : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n : \tilde{x}, -\tilde{x} \mapsto x = [\tilde{x}] = [-\tilde{x}]$. Punto base en $\mathbb{P}^n : x_0 = (0 : \dots : 1)$; $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^n$, $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$, $\tilde{x}_0 = (0, \dots, 1)$. Ahora, por el lema de elevación:

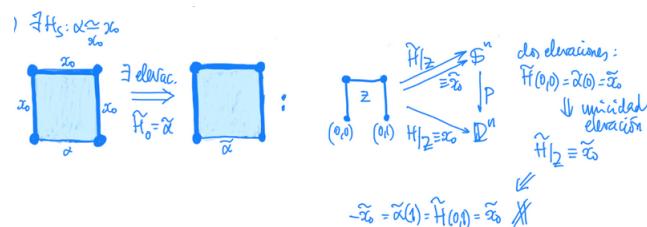
$$\Rightarrow \exists ! \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, p\tilde{\sigma} = \sigma, \tilde{\sigma} = \tilde{x}_0 \wedge \tilde{\sigma}(1) \in p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0\}$$

No veces? lazo.

$$1. \tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{x_0} \tilde{x}_0 \Rightarrow \exists p \circ \tilde{H}_s : \sigma \xrightarrow{x_0} x_0 \Rightarrow [\sigma] = 1 \in \pi(\mathbb{P}^n, x_0).$$

$$2. \tilde{\sigma}(1) = -\tilde{x}_0 \xrightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \xrightarrow{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0} \tilde{\alpha} = (0, \dots, 0, \sin \pi t, \cos \pi t) \Rightarrow \exists p \circ H_s : \sigma \xrightarrow{x_0} \alpha = p \circ \tilde{\alpha}, \text{lazo de base } x_0, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0.$$

3. Tenemos:



1. 2. 3. $\Rightarrow \pi(\mathbb{P}^n, x_0)$ tiene dos elementos distintos dependiendo del extremo de la elevación \Rightarrow

$$\boxed{\pi(\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2}.$$

La circunferencia

Teorema

$$\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Observación:

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^1.$$

Demostración:

Usamos el recubridor exponencial $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$. Punto base $x_0 \in \mathbb{S}^1$, $\forall \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, $s(0) = \sigma(1) = x_0$. Por el lema de elevación:

$$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, p\tilde{\sigma} = \sigma \Rightarrow p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = \sigma(0) = p\tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(0) + k, k \in \mathbb{Z}$$

Teorema

El n^o de vueltas:

$$\begin{aligned} \# : \pi(\mathbb{S}^1, x_0) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0). \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos bien definido.

Demostración:

1. $k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ no depende de $\tilde{\sigma}$.

$$\begin{aligned} p\tilde{\tau} = \sigma = p\tilde{\sigma} \Rightarrow \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(0) + l \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tau} & \text{elevan } \sigma \\ \tilde{\sigma} + l & \text{coinciden} \\ & \text{en } t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{uni. elev.}} \tilde{\tau} = \tilde{\sigma} + l \\ \Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (\tilde{\tau}(1) - l) - (\tilde{\tau}(0) - l) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

2. k no depende de homotopía de lazos, luego $\#$ está bien definido. Sea $H_s : \sigma \simeq \tau$ y $H_s(1) = H_s(0)$, $\forall s$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \simeq \tilde{\tau} \text{ entre elevaciones de } \sigma \wedge \tau \\ &\Rightarrow s \mapsto \underbrace{\tilde{H}_s(1)}_{\xrightarrow{p} H_s(1)} \setminus \underbrace{\tilde{H}_s(0)}_{\xrightarrow{p} H_s(0)} \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{cont.}} \tilde{H}_s(1) - \tilde{H}_s(0) \equiv cte. \\ &\Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \tilde{H}_0(1) - \tilde{H}_0(0) \stackrel{cte.}{=} \tilde{H}_1(1) - \tilde{H}_1(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0). \end{aligned}$$

3. $\#$ es isomorfismo. Sea $\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ y $\#\tau = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)$ y:

$$\begin{aligned} \tau(0) = \tau(1) = p\tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) \text{ cond. inicial elev.} \\ \Rightarrow \exists \tilde{\tau} : \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma} * \tilde{\tau} = \sigma * \tilde{\tau}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \#(\sigma * \tau) &= \sigma * \tau(1) - \sigma * \tau(0) = \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0) = \\ &= (\tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)) + (\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)) = \#\tau + \#\sigma. \end{aligned}$$

4. $\#$ es suprayectiva:

$$\#(\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt) = kt|_0^1 = k$$

(Recorrer \mathbb{S}^1 k veces)

5. $\#$ es 1-1:

$$0 = \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{cases} \sigma(\tilde{1}) = \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{cases} H_s(0) = p\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0) = \sigma(0) = x_0 \\ H_s(1) = p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = x_0 \end{cases} \\ \underbrace{p((1-s)\tilde{\sigma}(t) + s\tilde{\sigma}(0))}_{H_s(t)} : \sigma \xrightarrow[\text{(*)}]{x_0} x_0 \end{cases} (*)$$

$$[\Rightarrow (\sigma) = 1 \in \pi(\mathbb{S}^1, x_0)]$$

Aplicaciones en dimensión 2

Veamos tres teoremas importantes que se pueden demostrar en dimensión 2 con lo que ya hemos visto del grupo fundamental.

Teorema fundamental del Álgebra

Teorema (Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ tiene raíces complejas.

Demostración:

Sea $P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \dots + \overbrace{a_d}^{\neq 0}$ (mónico después de dividir por el cof. director)

1. Tendremos:

$$P_s(z) = z^d + sa_1 z^{d-1} + \dots + sa_d = 0 \xrightarrow[0 \leq s \leq 1]{} |z| < 1 + |a_1| + \dots + |a_d| = r$$

$P_s \neq 0 \xrightarrow[z \neq 0]{} \text{entre } z^{d-1} : -z = s \left(a_1 + \dots + \frac{a_d}{z^{d-1}} \right) \Rightarrow |z| \leq \begin{cases} 1, & |z| \leq 1 \\ |a_1| + \dots + |a_d|, & |z| \geq 1 \end{cases}$.

2. $z(t) = r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \Rightarrow |z(t)| = r \Rightarrow \exists H_s(t) = \underbrace{\frac{P_s(z(t))}{|P_s(z(t))|}}_{\neq 0}$ por 1.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\cos 2\pi dt, \sin 2\pi dt) &= \frac{z(t)^d}{|z(t)^d|} = H_0(t) \xrightarrow[\text{lazos: } z(0)=z(1)]{} H_1(t) \\ &= \frac{P(z(t))}{|P(z(t))|} = \sigma(t) \Rightarrow d = \#(\dots) = \#\sigma. \end{aligned}$$

3. $P(z) \neq 0, \forall z \Rightarrow \exists G_s(t) = \frac{P(sz(t))}{|P(sz(t))|} : G_0 \equiv \underbrace{\frac{a_d}{|a_d|}}_{\neq 0} \xrightarrow[\text{lazos}]{z(0)=z(1)} G_1 = \sigma \Rightarrow 0 = \#(\text{cte.}) = \#\sigma.$

Teorema del punto fijo de Brouwer

Teorema (de no retracto)

\nexists retracto $\rho : \mathbb{D}^2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Demostración:

Tenemos:

$$\exists \rho \Rightarrow \rho_* : \underbrace{\pi(\mathbb{D}^2)}_{\text{convexo}} \xrightarrow{\quad =\{0\} \quad} \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1)}_{\frac{\#}{\mathbb{Z}}} \text{ sobre (15.1)}$$

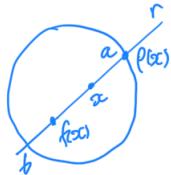
Teorema (del punto fijo)

$\forall f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ continua, $\exists p$ punto fijo $x = f(x)$.

Demostración:

Al absurdo?: $x \neq f(x), \forall x \Rightarrow \exists \rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ retracto.

Construcción de ρ :



La recta $(x \neq f(x)), r(x, f(x)) \cap \mathbb{S}^1 = \{a, b\} \Rightarrow \rho(x) = a = x + \overbrace{\lambda(x)}^{>0} (x - f(x)).$

Ejercicio: Ecuación de λ y continuidad.

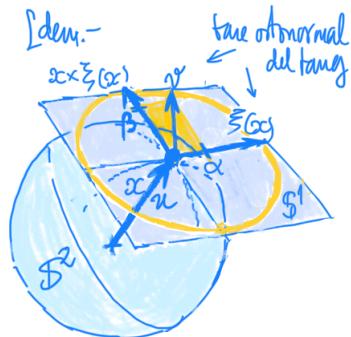
Teorema de la esfera de Brouwer

Teorema (de la esfera de Brouwer)

$\# \eta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo tangente continuo sin ceros. ($Tangente \equiv \eta(x) \perp x, \forall x \in \mathbb{S}^2$)

Demostración:

Con una ilustración:



Sea $\exists \eta$ sin ceros $\Rightarrow \exists \frac{\eta}{\|\eta\|}$ unitario \Rightarrow podemos suponer $\|\eta\| = 1$:

1. $h : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\approx \text{hom.}} SO(3) = \{\text{matrices } 3 \times 3 \text{ ortogonales, } \det > 0\}$

$$(\alpha, \beta; x) \xmapsto{h} A = (u, v, u \times v) \begin{cases} u = x \\ v = \alpha \eta(x) + \beta(x \times \eta(x)) \end{cases}$$

Con $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\|x\| = 1$. Bien definida, continua y biyectiva $\xrightarrow{\text{compacto a } T_2}$ homeo.

2. $h_* : \underbrace{\pi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2)}_{=\mathbb{Z} \times \{1\}} \rightarrow \pi(SO(3))$ isomorfismo $\Rightarrow \pi(SO(3)) = \mathbb{Z}$.

3. Abracadabra?: $SO(3) \xrightarrow{\text{homeo.}} \mathbb{P}^3 \Rightarrow \mathbb{Z} = \pi(SO(3)) = \pi(\mathbb{P}^3)$.

Más aplicaciones por el mismo precio

Unos cuantos teoremas profundos más en dim = 2.

Borsuk-Ulam

Teorema (de Borsuk)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar ($f(-x) = -f(x)$) : $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ impar ($\Rightarrow \# \neq 0$)

Demostración:

Tenemos que:

$$\begin{array}{c} \text{[dem.} \\ \tilde{\sigma} \rightarrow \mathbb{D} \\ \downarrow P \\ \mathbb{D}, \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{B}^4 \\ (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \rightarrow \mathbb{S}^1 \end{array}$$

$\tilde{\sigma}$ elevación de $\sigma(t) = f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. $\begin{cases} x = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) & (*) \\ 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$

$f(-x) = -f(x) \xrightarrow{(*)} \sigma(t + \frac{1}{2}) = -\sigma(t) \Rightarrow \tilde{\sigma}(t + \frac{1}{2}) = \tilde{\sigma}(t) + k_t + \frac{1}{2}$. Como $k_t \equiv cte.$ es continua:

$$\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \left(\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) - \tilde{\sigma}(0) \right) = \underbrace{\left(k_{1/2} + \frac{1}{2} \right)}_{k_0} + \left(k_0 + \frac{1}{2} \right) = 2k_0 + 1$$

Análogamente,

Teorema (de Hirsch)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ par ($f(-x) = f(x)$) : $\#f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ par.

Corolario (Teorema de Borsuk-Ulam)

$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar \Rightarrow esencial.

Demostración:

$\exists H_s : f \simeq cte. \Rightarrow H_s(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : \sigma \simeq x_0 \Rightarrow \#\sigma = 0$, con σ rotación anterior y la homotopía de lazos.

Corolario (2)

$\nexists g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar.

Demostración:

Tenemos:

$$\begin{array}{c} \text{Idem-} \\ \mathbb{S}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1 \\ \downarrow \sigma \quad \xrightarrow{\text{fijo}} \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^1 \cap \mathbb{S}^2 \\ \text{base } (1,0,0) \simeq (1,0,0) \end{array}$$

$(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

■ g impar $\Rightarrow f$ impar $\Rightarrow \#\sigma \neq 0$.

■ \mathbb{S}^2 simple conexo $\exists H_s : (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0) \xrightarrow[\sigma]{\text{base } (1,0,0) \text{ fijo}} (1,0,0)$. Como $f = g \circ \sigma = 0 \Rightarrow$

$$g \circ H_s : f \underbrace{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}_{\sigma} \simeq f(1,0,0) \text{ cte.} \Rightarrow \#\sigma = 0$$

Corolario (3)

$\forall h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \exists h(x) = h(-x) (\Rightarrow h \text{ no es 1-1})$.

Demostración:

$h(x) \neq h(-x), \forall x \Rightarrow \exists g(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{\|h(x) - h(-x)\|} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ impar.

Invarianza del dominio

Teorema

Sea $f : U_{ab.} \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua y 1-1 $\Rightarrow f(U)$ es abierto.

Demostración:

$\forall a \in U, \exists V^{\text{ab.}} \subset \mathbb{R}^2 : f(a) \in V \subset f(U)$. Por traslaciones: $a = f(a) = 0$. Con esto, $\exists \varepsilon > 0 :$

$$B(0, \varepsilon) \subset B[0, \varepsilon] \subset U; 0 \notin S = S[0, \varepsilon] \xrightarrow{1-1} 0 = f(0) \in f(S) \Rightarrow \exists V = C(0) \overset{\text{c.c.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \setminus f(S)$$

S comp. $\Rightarrow f(S)$ comp. \Rightarrow cerr. en \mathbb{R}^2

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ loc. conx.} \Rightarrow V \underset{\text{conx.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ c. caminos(*)

Este V es la solución: $V \subset f(B) \subset f(U)$.

Al absurdo: $\exists c \in V \setminus f(B) \xrightarrow{(*)} \exists \sigma : [0, 1] \rightarrow V, \sigma(0) = c, \sigma(1) = 0$.

Denotamos,

$$g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto f(\varepsilon x); h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto g(x) - g(-x)$$

y tenemos las homotopías: $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$.

- $\frac{f(\varepsilon sx) - c}{\|\cdot\|} : \frac{-c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g - c}{\|\cdot\|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x) - \sigma(s)}{\|\cdot\|} : \frac{g - c}{\|\cdot\|} \simeq \frac{g}{\|\cdot\|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x) - f(-\varepsilon sx)}{\|\cdot\|} : \frac{g}{\|\cdot\|} \simeq \frac{h}{\|\cdot\|}$

Con esto, $\frac{h}{\|\cdot\|} \simeq \text{cte.}!$ por Borsuk-Ulam.

Que los denominadores no se anulan es una comprobación rutinaria.

Divarianza del borde y de la dimensión

Teorema

$$S, T \subset \mathbb{R}^2, h : S \xrightarrow{\text{homeo.}} T \Rightarrow h(S \setminus \overset{\circ}{S}) = T \setminus \overset{\circ}{T}.$$

Demostración:

$$h : \overset{\circ}{S} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ inyectiva} \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \underset{19,2}{\subset} \text{ab.} \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(\overset{\circ}{S}) \subset \overset{\circ}{T}. \text{ (el otro} \supset \text{ con } h^{-1})$$

Ejemplo:

$$S = T = \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow h(x = 0) = (x = 0).$$

Teorema

$$U \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^n, V \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^2, h : U \xrightarrow{\text{homeo.}} V \Rightarrow n = 2.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \exists H \subset \mathbb{R}^n & [\text{plano afín interior vacío en } \mathbb{R}^n \text{ salvo si } n = 2] (*) : U \cap H \neq \emptyset \Rightarrow h| : \underbrace{U \cap H}_{\approx \text{ab.}} \xrightarrow{1-1} V \subset \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{19,2} h(U \cap H) \underset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h \text{ homeo.}} U \cap H = h^{-1}h(U \cap H) \underset{\text{ab.}}{\subset} U \xrightarrow{(*)} n = 2 \end{aligned}$$

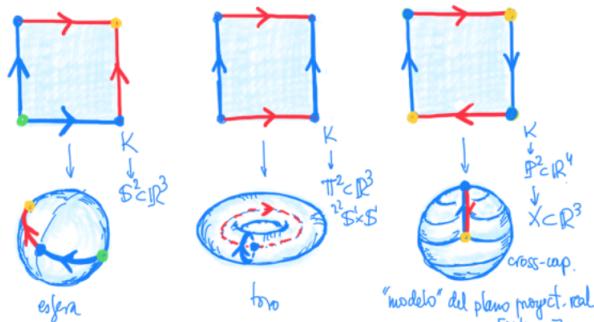
Superficies

Concepto

Definición

Una superficie es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Supondremos siempre que es T_2 y el II Ax., lo que implica que se puede sumergir en \mathbb{R}^n para n grande.

Nos interesan las superficies compactas. Las tres primeras son cocientes:



Ejercicio: $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \frac{(x_1^2 - x_2^2, x_0 x_1, x_0 x_2, x_1 x_2)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}$.

Observación:

$P^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene siempre identificaciones adicionales (como el cross-cap?)

Sumas conexas

El método genérico para construir superficies requiere el concepto un poco más general siguiente:

Definición

Una superficie con borde es un espacio local homeomorfo a $\{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ y los puntos del borde se corresponden con $\{x = 0\}$ (es una definición consistente por la inversa? del borde)



Observación:

Sin los puntos del borde se tiene una superficie ordinaria.

Ejemplo:

1. Un disco cerrado, que tiene por borde la circunferencia.
2. Una corona circular, una banda entre rectas paralelas, un tronco de cilindro.

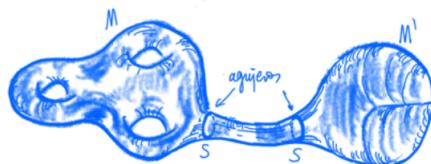


Con este concepto podemos “hacer agujeros” en superficies y, con ellos, definir:

Definición

La suma conexa $M \# M'$ de dos superficies M y M' se construye haciendo un agujero en cada una y pegando las superficies agujereadas por sus bordes:

1. *Agujeros: $B \subset M$ y $B \subset M'$ (discos abiertos) con bordes $S = \overline{B} \setminus B$ y $S' = \overline{B'} \setminus B'$ (circunferencias).*
2. *Superficies agujereadas: $M \setminus B$ y $M' \setminus B'$ con los mismos bordes S y S' .*
3. *Pegando por los bordes: $M \# M' = ((M \setminus B) + (M' \setminus B')) / (S \equiv S')$.*



Proposición

La suma conexa está bien definida y no depende de los agujeros elegidos (salvo homeomorfismos).

Demostración:

Que efectivamente es una superficie ordinaria (sin borde) es fácil si elegimos los agujeros en abiertos de las superficies homeomorfas a \mathbb{R}^2 . Luego, hay que ver que si cambiamos los agujeros obtenemos el mismo resultado (salvo homeomorfismo) y esto ya requiere resultados profundos como el teorema de Jordan-Schoenflies.

Proposición

La suma conexa es una operación asociativa conmutativa con elemento neutro la esfera.

Demostración:

Que $(M \# M') \# M'' \approx M \# (M' \# M'')$ es fácil tomando agujeros bien separados. También es obvio que $M \# M' \approx M' \# M$. Finalmente:

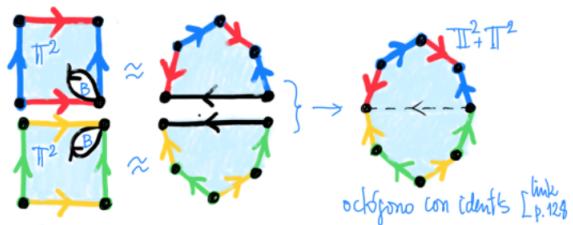
$$M \# \mathbb{S}^2 = ((M \setminus B) + (\mathbb{S}^2 \setminus B')) / (S \equiv S') = ((M \setminus B) + B) / (S \equiv S') = M$$

pues $\mathbb{S}^2 \setminus B'$ es un disco cerrado que restituimos a M .

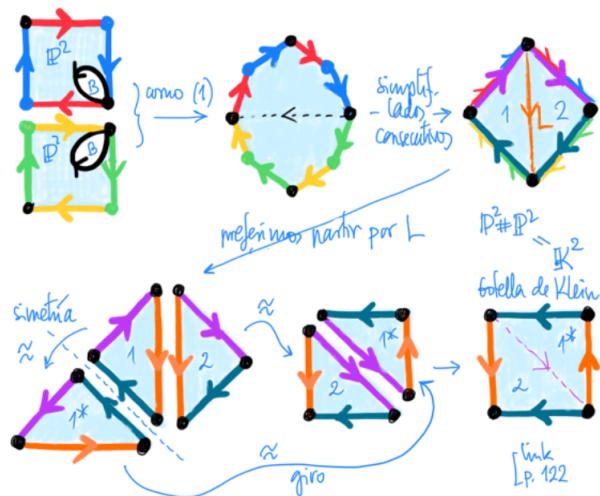
Cocientes

Las sumas conexas se visualizan muy bien mediante identificaciones.

1. Suma conexa de toros:



2. Suma conexa de planos proyectivos:



Clasificación de superficies

El teorema

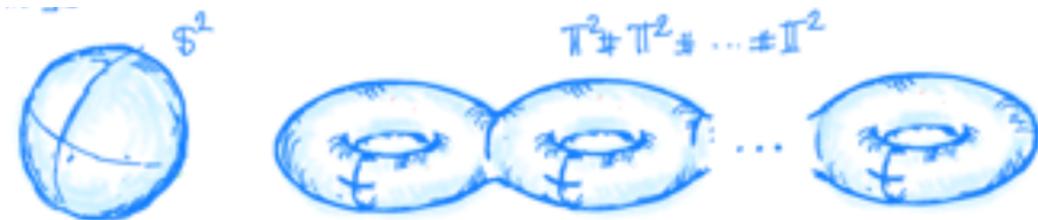
Teorema

Toda superficie compacta es homeomorfa a una y sólo una entre:

$$\mathbb{S}^2; \quad \mathbb{H}^2 \# \cdots \# \mathbb{H}^2, k \geq 1; \quad \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2, k \geq 1$$

Las podemos dibujar:

- En \mathbb{R}^3 :



- En \mathbb{R}^4 (modelo en \mathbb{R}^3):



El “solo una” del enunciado nos dice que estas superficies son todas distintas (no homeomorfismo): el grupo fundamental las distingue. Ya sabemos que $\pi(\mathbb{S}^2) = \{1\}$, $\pi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{Z}^2$, $\pi(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2$ y los demás H_0 ? son desiguales (aunque no sepamos calcularlos).

La relación fundamental

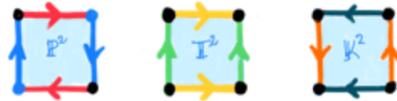
En la lista del teorema de clasificación no hay sumas “mixtas”: $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2, \dots$, pero el mismo teorema nos dice que están en la lista. Es claro que, por las propiedades de $\#$, cualquier suma conexa de \mathbb{S}^2, Π^2 y \mathbb{P}^2 estará en la lista en cuanto esté $\Pi^2 \# \mathbb{P}^2$. En efecto:

Proposición

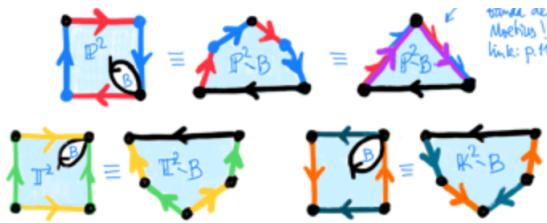
$$\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2.$$

Demostración:

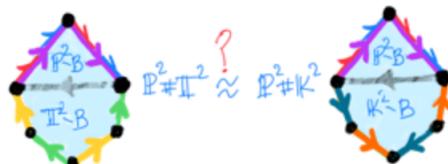
“Cut & paste” típico de identificaciones. Como $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$ (20.3) es la botella de Klein, el homeomorfismo que partiremos? es $\mathbb{P}^2 \# \Pi^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$ con:



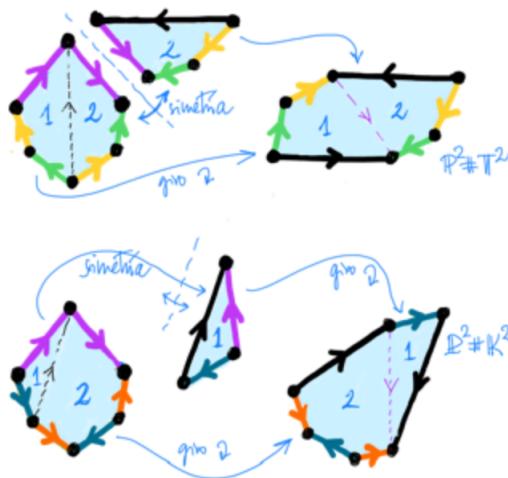
1. Agujeros:



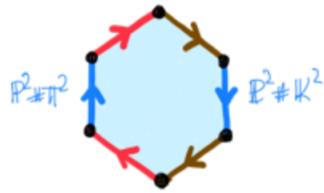
2. Pegados:



3. Cut & paste:



Obtenemos dos representaciones nuevas de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{H}^2$ y $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{K}^2$, con apariencias desiguales, pero topologías iguales: dos hexágonos con las mismas identificaciones de lados:



No dejarse engañar por los colores ni los sentidos de las flechas.

Grupos fundamentales con un agujero

Aunque no podamos distinguir todas las superficies unas de otras porque no conocemos todos los grupos fundamentales, si podemos hacer algunas distinciones “haciendo agujeros”.

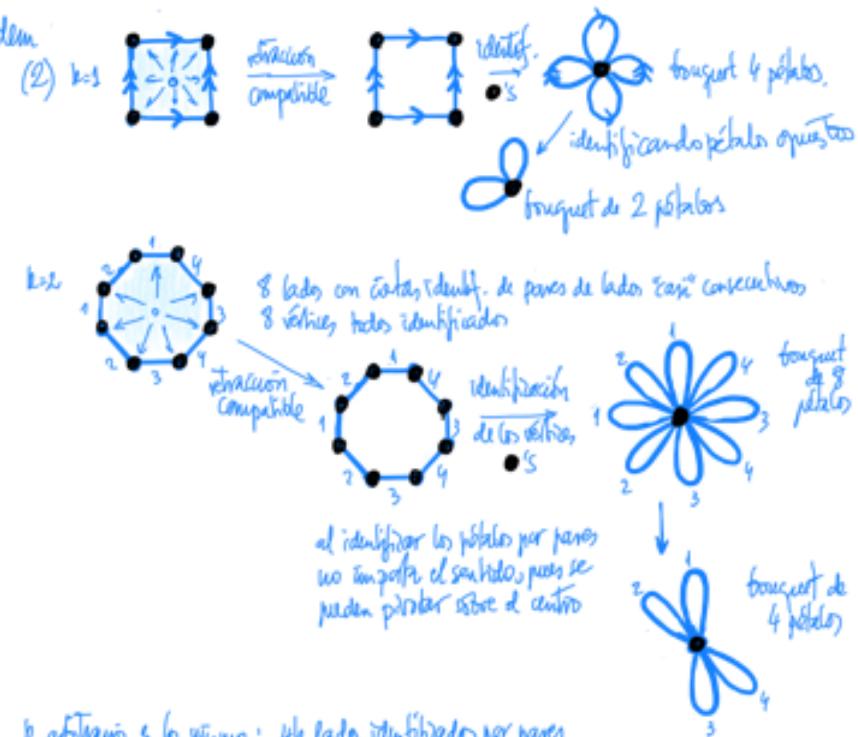
Proposición

Distinguimos:

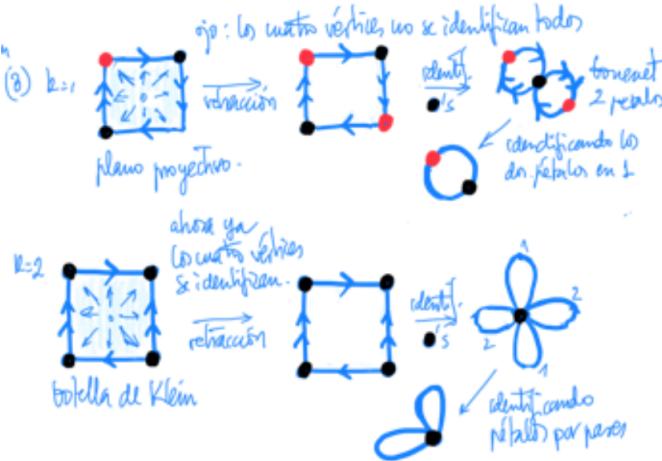
1. $\pi(\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\mathbb{R}^2) = \{1\}$.
2. $\pi(\mathbb{H}^2 \# \dots \# \mathbb{H}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^{2k}) = \mathbb{Z}^{*^{2k}}$.
3. $\pi(\mathbb{P}^2 \# \dots \# \mathbb{P}^2 \setminus \{a\}) = \pi(\text{dibujo}^k) = \mathbb{Z}^{*^k}$.

Demostración:

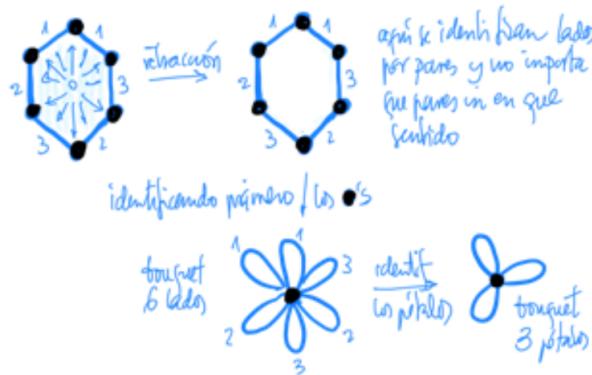
Tenemos



Con k arbitrario es lo mismo: $4k$ lados identificados por pares, $4k$ vértices todos identificados. Por retracción radical desde un punto interior (el agujero), obtenemos la poligonal con esas mismas identificaciones. Al identificar los vértices se tiene un bouquet de $4k$ pétalos y, al identificar pétalos por pares, un bouquet de $2k$ pétalos.



$k = 3$. Por *cut & paste*, los lados, pueden? sumar un proyectivo aporta? 2 lados identificados entre sí con tres vértices identificados todos (21.2).



Con k arbitrario es lo mismo: se empieza con un polígono de $2k$ lados, que se retrae a una poligonal de $2k$ lados, en la que se identifican los vértices para obtener un bouquet de $2k$ pétalos, que se identifican por pares para tener un bouquet de k .

Conclusión:

Todas las superficies se distinguen por el grupo fundamental después de quitar un punto, salvo los pares:

$$\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2 \wedge \mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2 \# \cdots \# \mathbb{K}^2$$

para cada $k \geq 1$. El primer caso (y el esencial) es que el toro y la botella de Klein no son homeomorfos: La razón de fondo es la orientabilidad, que no hemos estudiado aquí.

En general:

- Cualquier $\mathbb{P}^n \# \cdots \# \mathbb{P}^2$ contiene una banda de Möbius (de hecho, tantas como sumandos) y la banda es no orientable.
- Cualquier $\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2$ es orientable, luego cualquier abierto suyo lo es, luego no puede contener una banda de Möbius.

Grande finale

Vamos a probar que la esfera no es contrátil, utilizando el teorema de la esfera de Brouwer (18.3) y las ideas sobre vectores tangentes allí vistas:

Proposición

\mathbb{S}^2 no es contráctil: $\#H_t : \text{cte.} \simeq id_{\mathbb{S}^2}$.

Demostración:

Absurdo: sea que $\exists H_t : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, $H_0(x) = x_0$, $H_1(x) = x$.

1. Problema de elevación:

Problema de elevación

Sea $\tilde{S}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) : x \perp x\}$

? $\exists \tilde{H}: \tilde{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \quad \text{y} \quad \tilde{H}^*(x) = (H_f(x), u_f(x)), \quad u_f(x) \perp H_f(x)$

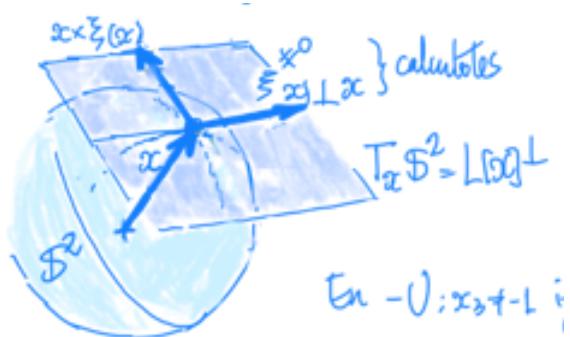
$\tilde{S}^2 \times [0, 1] \xrightarrow{H} \mathbb{S}^2 \quad \text{y} \quad \exists \tilde{H} \Rightarrow \tilde{H}_f(x) = (H_f(x), u_f(x))$

$\begin{bmatrix} H_f(x), T_x \mathbb{S}^2 \setminus \{0\} \\ \text{Nombremos a } \mathbb{S}^2 \text{ en } x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_f(x) \perp H_f(x) = x \\ \text{campo tangente a la esfera sin ceros} \end{bmatrix}$

Veamos pues que $\exists H$ entre el teoría de Brouwer

2. Estructura de $\tilde{\mathbb{S}}^1$:

Como esquema tenemos,



Así, $c = (0, 0, 1)$, $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{c\} = \{x_3 \neq 1\}$, $-U : \mathbb{S}^2 \setminus \{-c\} = \{x_3 \neq -1\}$.

En $U : x_3 \neq 1$, $\{\eta(x) = (1 - x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, x_1(1 - x_3)), \eta(x) = x \times \eta(x)\}$ base de $T_x \mathbb{S}^2$ ortogonal. $\Rightarrow \forall \underbrace{u}_{\neq 0} \perp x : u = \lambda(u, x)\eta(x) + \mu(u, x)\eta(x)$.

$$\begin{cases} \lambda(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \\ \mu(u, x) = \langle u, \eta(x) \rangle / \|\eta(x)\|^2 \end{cases} \quad \text{cond's ?? continuas.}$$

En $-U : x_3 \neq -1$ igual con $\eta(x) = (1 + x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, -x_1(1 + x_3))$.

3. Preparación local: Igual que en 16,2 para la elevación de recubridores:

$$\forall x \in \mathbb{S}^2, \exists W^x \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{S}^2, \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : W^x \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U) \text{ ó } H^{-1}(-U)$$

reducción $W^x \supset \overline{V^x} \supset V^x$.

¡La partición depende de $x!$ $\Rightarrow \mathbb{S}^2 \text{ comp.} \mathbb{S}^2 = V^{x_1} \cup \dots \cup V^{x_v}$ y juntamos las v particiones.

$$\Rightarrow \mathbb{S}^2 = V_1 \cup \dots \cup V_v \wedge \exists 0 = t_0 < \dots < t_r = 1 : H \left(\overbrace{W_k}^{\supset \overline{V}_k \supset V_k} \times [t_{i-1}, t_i] \right) \subset U \text{ ó } -U.$$

Objetivo: construir la elevación \tilde{H} en pasos sucesivos:

- dada \tilde{H}_t para $0 \leq t \leq t_{i-1}$ extenderla a $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, es decir,
- dada $\tilde{H}_{t_{i-1}}$ extenderla a $t_{i-1} \leq t \leq t_i$.

Para empezar en $i = 1$:

$$\tilde{H}_{t_0}(x) = \tilde{H}_0(x) = (H_0(x), u_0(x)) = (x_0, u_0), \text{ cualquier } \overbrace{u_0}^{\neq 0} \perp x_0$$

El paso inductivo da más trabajo y para simplificar un escalamiento permite suponer $[t_{i-1}, t_i] = [0, 1]$ y $H(W_k \times [0, 1]) \subset U \text{ ó } -U \forall k (*)$. Queremos:

- dada \tilde{H}_0 extenderla a $0 \leq t \leq 1$

Demostración:

$$\tilde{H}_0 = \tilde{H}_{t_{i-1}} \text{ no es la elevación de } i = 1.$$

4. Descomposición de la extensión en varios pasos: Tomamos $C_k = \mathbb{S}^2 \setminus V_k$ y,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \varphi_k(x) &= \frac{\text{dist}(x, C_k)}{\sum_l \text{dist}(x, C_k)} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi_k \leq 1 \\ \{\varphi_k = 0\} = C_k \quad \text{por ser los } C_k \text{ cerrados.} \\ \sum_l \varphi_l = 1 \end{cases} \\ \text{b)} \quad \psi_k &= \varphi_1 + \dots + \varphi_k \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv \psi_0 \leq \psi_1 \leq \dots \leq \psi_k \equiv 1 \\ \{\psi_{k-1} < \psi_k\} = \{\varphi \neq 0\} = X \setminus C_k = V_k \\ \overline{\{\psi_{k-1} < \psi_k\}} = \overline{V_k} \subset W_k \end{cases} \end{aligned} \quad (*)$$

Las ψ_k son los límites superiores de la siguiente cadena de cerrados:

$$\mathbb{S}^2 \times \{0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k = \{t \leq \psi_k(x) : x \in \mathbb{S}^2\} \subset \dots \subset \Gamma_v = \mathbb{S}^2 \times [0, 1]$$

y, empezando con \tilde{H}_0 para $k = 1$, la cosa es:

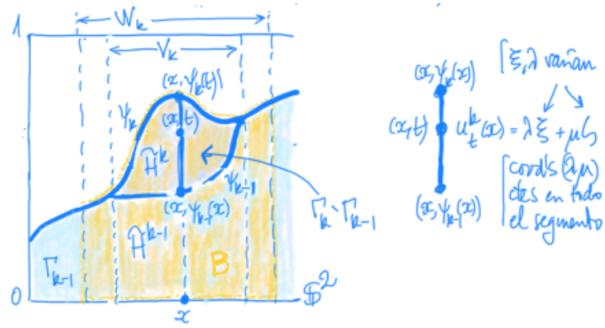
- dada $\tilde{H}^{k-1} = (r, u^{k-1})$ elevación de $H|_{\Gamma_{k-1}}$, extenderla a $\Gamma_k \setminus \Gamma_{k-1}$. Como:

$$\begin{cases} \Gamma_{k-1} \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] \stackrel{(**)}{=} \Gamma_k \setminus \overline{V}_k \times [0, 1] = A \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \\ \Gamma_{k-1} \cap (W_k \times [0, 1]) = B \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \end{cases} \quad \wedge \quad \Gamma_k = \underbrace{A}_{\subset \Gamma_{k-1}} \cup B$$

definiremos,

- \tilde{H}^k en B tal que, $\tilde{H}^k = \tilde{H}^{k-1}$ en $A \cap B \subset \mathbb{S}^2 \setminus V_k \times [0, 1]$.

$$5. \quad (x, t) \in B \xrightarrow{(*)} \begin{cases} H_t(x) \in U \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x) \in U \end{cases} \Rightarrow \exists \eta \text{ y } S \text{ en } \begin{cases} H_t(x). \text{ (ii)} \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x). \text{ (i)} \end{cases}.$$



a) $t \leq \psi_{k-1}(x) : (x, t) \in \Gamma_{k-1} \Rightarrow \tilde{H}_t^k(x) = \tilde{H}_t^{k-1}(x).$

b) $t \geq \psi_{k-1}(x) : \tilde{H}^{k-1} = (H, u^{k-1}).$

(i) \Rightarrow

$$\underbrace{u_{\psi_{k-1}(x)^{k-1}(x)}}_{\neq 0} = \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x) \eta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)) + \psi_{k-1}(x) \zeta(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)).$$

(ii) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \exists u_t^k(x) &= \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x) \eta(H_t(x)) + \mu_{\psi_{k-1}(x)}(x) \zeta(H_t(x)) \\ \Rightarrow \exists \tilde{H}_t^k(x) &= (H_t(x), u_t^k(x)). \end{aligned}$$

y por la construcción es continua.

a) y b) coinciden en $t = \psi_{k-1}(x)$.

6. $\psi_{k-1} \stackrel{(**)}{=} \psi_k$ fuera de $V_k \Rightarrow \tilde{H}^k$ de 5. = \tilde{H}^{k-1} en $A \cap B$.

Esto completa la propuesta de que $\exists \tilde{H}$ elevación de H y, con ello, se completa la contradicción buscada. Acaba aquí la demostración de que \mathbb{S}^2 no es contráctil.