Topología elemental

Mario Calvarro Marines, Juan Diego Barrado Daganzo
e Iker Muñoz Jiménez

Índice general

Parte I

Topología general

ESPACIOS TOPOLÓGICOS

La primera parte de este manual pretende hacer un estudio formal de la definición de la estructura de espacio topológico. Uno de los objetivos de esta noción es, por ejemplo, desvincular los conceptos topológicos como son abiertos, cerrados, fronteras, etc. de las propiedades métricas en $\mathbb{R}^n$. Fundamentalmente, esto servirá para poder estudiar características como continuidad, convergencia, conexión... en espacios más enrevesados y, como añadido, estudiar estas propiedades en espacios ya conocidos, pero con una estructura asociada distinta.

CONJUNTOS ABIERTOS

Al igual que en el Álgebra Lineal la parte más básica y fundamental eran los vectores, vamos a ver que en la topología las piezas claves son los abiertos. Estos nos permiten dar forma y definir el resto de nociones del capítulo y del manual. Además, la familia de abiertos en un conjunto caracteriza y diferencia las topologías equipadas sobre el mismo entre sí.

Definición (Espacio Topológico)

*Sea X un conjunto de elementos que denotaremos por **puntos** y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos que denotaremos **abiertos**, decimos que $\mathcal{T}$ es una **topología** de X si y sólo si:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$ *donde* $U_i \in \mathcal{T}$
3. $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$ *donde* $U_i \in \mathcal{T}$

*y, ese caso, la dupla $(X, \mathcal{T})$ se denomina **espacio topológico**.*

Ejemplo:

1. **Topología trivial**:

   La topología es $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ para cualquier conjunto X sobre el que se equipe. Es la topología con menos abiertos posibles y esto hace que esté contenida en cualquier otra topología.

2. **Topología discreta**:

   La topología es $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ para cualquier conjunto X sobre el que se equipe. Es la topología con más[1] abiertos posibles y esto hace que cualquier otra esté contenida en ella.

3. **Topología usual**:

   Si al conjunto $\mathbb{R}^n$ le equipamos la topología en las que los abiertos son los conjuntos formados por unión de bolas euclídeas, obtenemos la topología habitual que utilizamos en $\mathbb{R}^n$.

[1]Porque si los puntos $\{x\} \in X$ son abiertos, entonces cualquier conjunto $A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$ es abierto.

4. Cualquier distancia $d(x,y)$ define una topología a través de sus bolas abiertas, igual que definíamos la usual en $\mathbb{R}^n$, de hecho, se puede demostrar sin mayor dificultad (tal y como se ve en el dibujo) que todas las normas p en $\mathbb{R}^n$ definen bolas que contienen y están contenidas en las restantes. En consecuencia, si la definición de abierto usual se hacía a través de bolas redondas y hemos visto que estas contienen a bolas cuadradas o romboidales, también se tiene que es abierto cuadrado o romboidal y el recíproco por los contenidos en ambos lados.

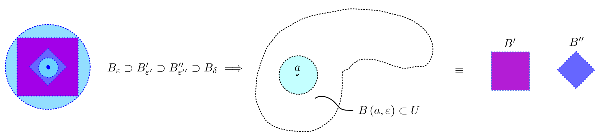


Figura 1.1: *El dibujo representa distintas topologías generadas por distintas normas, pero todas equivalentes.*

Es decir, cambiar de norma igual cambia la noción de distancia en $\mathbb{R}^n$, ¡pero no la topología asociada! Sigue siendo la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

5. **Topología del punto**:

   La topología es $\mathcal{T}_a := \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$ para un $a \in X$ fijado previamente. Lo curioso de esta topología es que todos los abiertos son los conjuntos que contienen a $a \in X$, es decir, que la topología queda caracterizada como $\mathcal{T}_a := \{\{a, W\}$: donde $W \subset X\}$.

6. **Topología radial**

   Los abiertos de la topología son los conjuntos que verifican la siguiente propiedad:

$$\forall x \in A \text{ y } \forall L \text{ recta },\ \exists \varepsilon_L > 0 : B(x, \varepsilon_L) \cap L \subset A$$

   Para entender mejor quiénes son estos abiertos vamos dar la siguiente ilustración: mientras que en la topología usual los abiertos son los que en cada punto hay una bola de radio ε contenida en el conjunto, estos abiertos son los mismos pero el ε de la bola puede ser distinto en cada dirección posible. Esto quiere decir que lo relevante es que para cada recta que pase por el punto exista un intervalo en dicha recta contenido en el conjunto (en la usual la longitud de dicho intervalo tendría que ser la misma en todas las rectas, pero aquí puede variar).

Definición (Entorno)

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$ un punto del mismo, definimos un ***entorno***[2] ***del punto*** *x como un conjunto V^x que contiene un abierto U que contiene al punto:*

$$V^x := V \subset X : \exists U \subset V \textit{ donde } x \in U$$

---

[2] Cuando el abierto que contiene al punto es el propio entorno o, dicho de otra manera, el entorno de x es un abierto de la topología, decimos que es un entorno *abierto* de x.

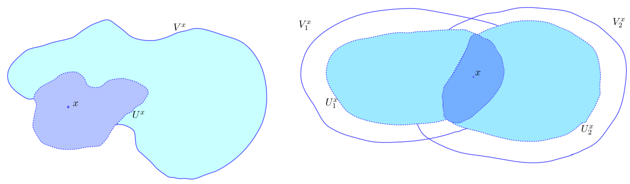


Figura 1.2: *Definición de entornos*

Proposición (Caracterización de abierto)

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $W \subset X$ un subconjunto de puntos, este es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

Demostración:

La implicación de izquierda a derecha es trivial, pues todo conjunto se contiene a sí mismo y, como el conjunto es abierto, contiene a un abierto que contiene al punto, es decir, es entorno de cualquiera de sus puntos.

Para probar el recíproco, si un subconjunto $W \subset X$ es entorno de todos sus puntos, entonces para cada x del conjunto existe un abierto $U^x \subset W$ que contiene a x. Por tanto, podemos expresar W como unión arbitraria de todos estos abiertos, es decir, $W = \bigcup_{x \in W} U^x$ y, por ser topología, la unión arbitraria de abiertos es abierta.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y V_1^x, V_2^x dos entornos de un punto $x \in X$, entonces la intersección $V^x := V_1^x \cap V_2^x$ es entorno de x.

Demostración:

Por definición de entornos, existen dos abiertos $U_1^x \subset V_1^x$ y $U_2^x \subset V_2^x$ que contienen a x. Por la definición de topología, la intersección finita $U^x := U_1^x \cap U_2^x$ es un abierto de la topología y vemos que $U^x \subset V^x$, luego V^x contiene a un abierto que contiene al punto, es decir, es entorno.

Definición (Punto interior)

*Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que un punto $x \in X$ es **punto interior de** A si y sólo si A es entorno de x.*

$$x \in \operatorname{Int}_X(A) \Leftrightarrow \exists U \overset{ab.}{\subset} A : x \in U$$

*Al conjunto de puntos interiores, que denotamos por $\mathring{A}$ o $\operatorname{Int}(A)$, lo llamamos **interior de** A.*

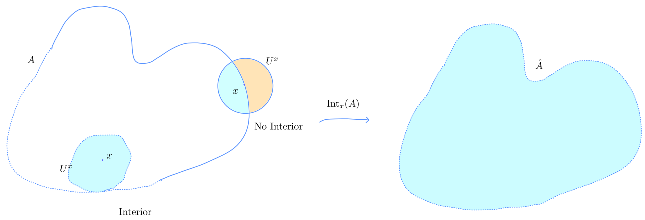


Figura 1.3: *Definición de interior de un conjunto.*

Proposición

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos, entonces:

- *$\mathring{A}$ es el mayor abierto en A o, lo que es lo mismo, $\mathring{A} = \bigcup_{U \subset A} U$.*
- *A abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores, es decir, $A = \mathring{A}$*

Demostración:

1. Si $x \in \mathring{A}$, entonces $\exists U \subset A : x \in U \Rightarrow x \in \bigcup_{U \subset A} U$, pero es que si $x \in U$ para algún $U \subset A$, por definición es interior de A, luego $x \in \mathring{A}$.

   Como $\mathring{A}$ es unión de abiertos, la definición de topología nos asegura que será un abierto y además es el más grande de todos porque cualquier otro está contenido en él por ser la unión de todos los abiertos.

2. El contenido $\mathring{A} \subset A$ se tiene siempre, puesto que $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists U \subset A : x \in U \subset A \Rightarrow x \in A$ (dicho de otra forma, los puntos interiores de A son aquellos para los cuales A es entorno y como un entorno contiene al punto se tiene trivialmente).

   De esta manera, si A es abierto, como $\mathring{A}$ es el mayor abierto de A, tiene que ser $\mathring{A} = A$ y si $\mathring{A} = A$, como $\mathring{A}$ es abierto, pues lo es A.

Ejemplo:

1. Si consideramos un espacio topológico $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$, vemos que cualquier subconjunto $A \subsetneq X$ puede contener únicamente a $\emptyset$ como abierto, luego su interior es el vacío $\mathring{A} = \emptyset$.

2. Si consideramos $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ algunos de los interiores comunes son $\mathrm{Int}\,(B\,[a, \varepsilon]) = B\,(a, \varepsilon)$, $\mathring{\mathbb{Q}}^n = \emptyset$ y $\mathring{\mathbb{Z}}^n = \emptyset$.

3. Si consideramos la topología del punto $\mathcal{T}_a$, entonces $\{\mathring{a}\} = \{a\}$ y, en general, ocurre lo mismo para cualquier conjunto que contenga a a (porque son abiertos). Sin embargo, cualquier $x \neq a$ verifica que $\{\mathring{x}\} = \emptyset$.

Corolario

1. *$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.*
2. *$\mathring{A} \cap \mathring{B} = \mathrm{Int}\,(A \cap B)$.*

Demostración:

1. La relación $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset A \subset B$ implica que, como $\mathring{A}$ es abierto, contenido en B, y $\mathring{B}$ es la unión de todos los abiertos de B, $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

2. En primer lugar, como $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ es intersección de abiertos, entonces es abierto y está contenido en $A \cap B$, luego por ser $\operatorname{Int}(A \cap B) = \bigcup_{U \in A \cap B} U$ sabemos que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \operatorname{Int}(A \cap B)$.

   Recíprocamente, si $x \in \operatorname{Int}(A \cap B)$ existe un abierto $U \in A \cap B$ tal que $x \in U$. Por ser de la intersección, en particular también es abierto de cada conjunto, luego $x \in \mathring{A}$ y $x \in \mathring{B}$, es decir, $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

CONJUNTOS CERRADOS

Los conjuntos cerrados, como veremos en esta sección, están íntimamente relacionados con los conjuntos abiertos y revisten gran importancia por la relación que tienen con dos conjuntos de puntos importantes: la acumulación y la adherencia. Estas dos últimas nociones permiten caracterizar conceptos como la convergencia de sucesiones o la densidad de un conjunto.

Definición (Conjunto cerrado)

*Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $F \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que es un **conjunto cerrado** si y sólo si su complementario es un abierto, es decir, $U = X \setminus F$ es abierto.*

Observación:

En muchas ocasiones el lenguaje natural confunde las definiciones precisas que se dan en matemáticas. Este caso es un ejemplo de ello: uno podría pensar que la definición de cerrado desprende el hecho de que un cerrado es un "no abierto".

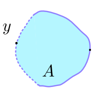


Figura 1.4: *Ejemplo de conjunto que no es ni abierto ni cerrado.*

Sin embargo, podemos encontrar multitud de conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados e incluso otros que son abiertos y cerrados simultáneamente, como el vacío y el total.

Proposición

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y denotando por $\mathcal{F}$ al conjunto de cerrados del espacio, entonces:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$.
2. $\bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$ *donde* $F_i \in \mathcal{F}$.
3. $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$ *donde* $F_i \in \mathcal{F}$.

Demostración:

- Trivial, porque el uno es el complementario del otro y ambos son abiertos.
- Porque el complementario de la intersección $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$ es abierto.

- Porque el complementario de la unión $X \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n} F_i\right) = \bigcap_{i=0}^{n} (X \setminus F_i) = \bigcap_{i=0}^{n} U_i$ es abierto.

Ejemplo:

1. **Topología trivial**:

   En este caso, como $\emptyset$ y X son los únicos abiertos, únicamente pueden ser cerrados sus complementarios, es decir, ellos mismos.

2. **Topología usual**:

   Habitualmente los conjuntos que conocemos como cerrados son aquellos que pueden ser escritos en términos de bolas cerradas $B[a, \varepsilon] : \|x - a\| \leq \varepsilon$.

3. Si tenemos dos topologías $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, entonces cualquier cerrado de $\mathcal{T}_1$ es cerrado de $\mathcal{T}_2$, pues es cerrado por ser el complementario de un abierto y los abiertos de $\mathcal{T}_1$ también lo son el $\mathcal{T}_2$.

Definición (Adherencia)

*Sea $A \subset X$ y $x \in X$ un punto, decimos que es **adherente a** A si y sólo si todos sus entornos V^x intersecan con A, esto es:*

$$\mathrm{Adh}_X(A) = \overline{A} := \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\} \supset A$$

*Al conjunto de puntos adherentes a A lo llamamos **adherencia** de A.*

Observación:

La propia definición nos sugiere ciertas equivalencias útiles que se obtienen escribiendo de forma distinta lo que hemos definido:

- $X \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}(X \setminus A)$

$$x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \mathrm{Int}(X \setminus A)$$

- $X \setminus \mathring{B} = \overline{X \setminus B}$

$$x \notin \mathring{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X \setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus B}$$

Proposición

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y denotando por $\overline{A}$ a su adherencia, entonces:

- *$\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A o, lo que es lo mismo, $\overline{A} = \bigcap_{F \supset A} F$ donde los F son cerrados.*
- *El conjunto A es cerrado si y sólo si coincide con su adherencia, es decir, $\overline{A} = A$.*
- *$B \subset A \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.*
- *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Demostración:

- Recordando que $\mathring{B} = \bigcup_{U \subset B} U$:

$$\overline{A} = X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \left(\bigcup_{U \subset X \setminus A} U\right) \overset{F = X \setminus U}{=} X \setminus \left(\bigcup_{F \supset A} (X \setminus F)\right) = \bigcap_{F \supset A} F$$

- Se deduce inmediatamente de la primera, pues si el conjunto es cerrado él mismo debe ser el menor cerrado que lo contiene.

- Si $B \subset A \Rightarrow$
$$B \subset A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$
por el primer apartado.
- Veamos el doble contenido:
$$\begin{cases} \overline{A \cup B} \supset A \cup B \supset A, B \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A}, \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B} \\ A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

Ejemplo:

1. Si consideramos $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ algunas adherencias comunes son $\overline{B(a,\varepsilon)} = B[a,\varepsilon]$ y $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.
2. Sea $a \in X$ y $(X, \mathcal{T}_a) \Rightarrow$
   - $\overline{\{a\}} = X$
     Demostración:
     Sea $x \in X$, $\forall U^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X : U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}}$
   - $\forall x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\}$
     Demostración:
     Sea $y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset$

Definición (Acumulación)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y $x \in A$ un punto del mismo, decimos que x es:

- ***punto aislado de*** *A si y sólo si existe algún entorno que sólo interseca con A en el propio punto, es decir:*
$$\exists V^x \subset X : V^x \cap A = \{x\}$$
- ***punto de acumulación de*** *A si y sólo si en cualquier entorno del punto encontramos puntos de A que no sean el propio punto, es decir:*
$$\forall V^x \subset X : V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$$

Observación:

La definición anterior para puntos aislados hace evidente el hecho de que los puntos aislados solo pueden ser de A. Por contra, los puntos de acumulación no tienen por qué serlo y, de hecho, su definición en términos de entornos prescinde de ellos mismos para analizar su intersección con A. De esta manera, obtenemos el siguiente resultado:
$$\overline{A} = \underbrace{\{\text{puntos aislados}\}}_{\subset A} \sqcup \underbrace{\{\text{puntos de acumulación}\}}_{\supset \overline{A} \setminus A}$$
Además, nótese que si uno es punto de A sólo tiene dos posibilidades: ser aislado o ser de acumulación. Por tanto, podemos reescribir lo anterior como:
$$\overline{A} = A \cup A'$$

Definición (Frontera)

Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos y $x \in A$ un punto del mismo, decimos que x es un ***punto frontera de*** *A si y sólo si es adherente[3] a A y a su complementario $X \setminus A$*
$$\operatorname{Fr}(A) := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus \mathring{A}$$
al conjunto de puntos de la frontera de A lo llamamos ***frontera*** *de A.*

[3] Por las observaciones hechas sobre las adherencias, también podríamos caracterizar los puntos frontera como los que no son interior de $X \setminus A$ ni de A.

Ejemplo:

1. En $\mathbb{R}$, con la topología usual $\mathcal{T}_u$, todos los puntos de $\mathbb{Z}$ son aislados. Por tanto, la frontera de los enteros es $\operatorname{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

2. En $\mathbb{R}^n$, con la topología usual $\mathcal{T}_u$, la frontera de las bolas $\operatorname{Fr}(B(a,\varepsilon)) = \operatorname{Fr}(B[a,\varepsilon]) = S[a,\varepsilon] : \|x-a\| = \varepsilon$ son los discos exteriores de las mismas.

3. En la topología $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$, sobre cualquier conjunto que se equipe, todos los puntos son aislados y, en consecuencia, todas las fronteras, vacías.

4. En la topología del punto, $\mathcal{T}_a$, sobre un punto $a \in X$ concreto vemos que:

$$\begin{cases} \operatorname{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} \setminus \{\mathring{a}\} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a \Rightarrow \operatorname{Fr}(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \{\mathring{x}\} = \{x\} \end{cases}$$

Definición (Densidad)

*Sea X un conjunto de puntos y $A \subset X$ un subconjunto suyo, decimos que A es **denso en** X si y sólo si $\overline{A} = X$ o, dicho de otro modo, todo abierto no vacío corta a A.*

Ejemplo:

1. En $\mathbb{R}$, con la topología usual $\mathcal{T}_u$, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es denso en $\mathbb{R}$.

2. En la topología del punto $\mathcal{T}_a$, el conjunto $\{a\}$ es denso, pues cualquier abierto corta con él (lo contiene).

BASES DE ENTORNOS Y ABIERTOS

En general, probar una cierta propiedad para una topología hace necesario verificar dicha propiedad en todos los abiertos de la misma. Esto, ya de por sí complicado, puede serlo mucho más cuando la definición de abierto es compleja y poco intuitiva. Para solventar este problema, es útil definir un conjunto que representa las "piezas elementales" de las que se componen los abiertos (como las bases en espacios vectoriales para los vectores).

Definición (Base de entornos)

*Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico, $a \in X$ un punto y $\mathcal{V}^a := \{V_i^a\}_{i\in I}$ una familia de entornos de a, decimos que es una **base de entornos de** $a \in X$ si y sólo si cualquier otro entorno W^a contiene a algún elemento de $\mathcal{V}^a$.*

Observación:

La definición no ha hecho ninguna diferenciación especial en cuanto a si son cerrados, abiertos, etc. Precisamente esta "variedad" es la que permite que, escogiendo una base de entornos con las características adecuadas en cada caso, sea más sencillo estudiar la topología que tengamos entre manos.

Tal y como hemos comentado al inicio, comprobar propiedades en una base de entornos extenderá automáticamente dichas propiedades a cualquier entorno arbitrario, haciendo el estudio de estos conjuntos más sencillos en función de la topología y la base escogida.

Proposición

Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{V_i^a\}_{i\in I}$ una base de entornos de un punto a, esta se puede refinar a una base de entornos abiertos $\{U_i^a\}_{i\in I}$.

Demostración:

Como todos los elementos de la colección son entornos, para todos existe algún abierto U_i^a que contiene al punto. A este conjunto de abiertos (más bien de entornos abiertos) es al que llamamos $\{U_i^a\}_{i\in I}$. Cualquier otro entorno del punto a contiene a un entorno V_i^a de la base de entornos inicial, pero como estos contienen un abierto de la colección última, entonces $\{U_i^a\}_{i\in I}$ es una base de entornos de a.

Observación:

Podemos empezar a ver la utilidad de la base de entornos cuando tenemos que demostrar, por ejemplo, que un punto pertenece a la adherencia de un conjunto:

$$a \in \overline{A} \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall W^a \text{ entorno} : W^a \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset$$

luego si escogemos una base de entornos $\mathcal{V}^a$ adecuada sobre la que sea muy fácil demostrar el resultado, este quedará demostrado para cualquier entorno "raro" que podamos encontrarnos.

Ejemplo:

1. Sea el espacio real usual, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, el espacio topológico a estudiar, entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B\left(a,\varepsilon\right) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B\left[a,\varepsilon\right] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$

2. Sea la topología del punto $(a \in X, \mathcal{T}_a)$, entonces:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{\{a\}\} & x = a \\ \mathcal{B}^x = \{\{a,x\}\} & x \neq a \end{cases}$$

Definición (Base de abiertos)

*Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} := \{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ una colección de abiertos, decimos que es una **base de abiertos de $\mathcal{T}$** si y sólo si todo abierto de $\mathcal{T}$ es unión de abiertos de $\mathcal{B}$.*

Proposición (Caracterización de base de abiertos)

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} := \{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ una colección de abiertos, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *$\mathcal{B}$ es base de abiertos.*
2. *$\forall x \in X,\ \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos de x.*
3. *$\forall x \in U \overset{ab.}{\subset} X,\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.*

Demostración:

La implicación 2. $\Rightarrow$ 3. es trivial, pues si U es abierto y contiene al punto es un entorno del mismo, luego por 2. debe contener a alguna $B \in \mathcal{B}$. Por tanto, demostraremos 1. $\Rightarrow$ 2. y 3. $\Rightarrow$ 1. para completar las equivalencias.

- 1. $\Rightarrow$ 2.

  Si V^x es entorno, entonces $\exists U \subset V^x$ abierto que contiene al punto x. Como por 1. el conjunto B es base de abiertos, $U = \bigcup_{B_i\in\mathcal{B}} B_i$ y como $x \in U$, entonces $\exists B_i \ni x$. De esta manera, tenemos $B_i \subset U \subset V^x$, es decir, que cualquier entorno debe contener algún elemento de la base que contenga al punto.

- 3. $\Rightarrow$ 1.

  Por darse 3., escogido cualquier abierto U necesariamente contiene a una $B^x \in \mathcal{B}$ para cada $x \in U$, es decir, que podemos escribir $U = \bigcup_{x \in U} B^x$ unión de abiertos de $\mathcal{B}$.

Ejemplo:

1. Si tomamos la topología discreta, $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$, entonces una base de abiertos sería $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. Además, esta base es mínima pues cualquier otra base $B' := \{B_i\}_{i \in I}$ de abiertos cumpliría que $\forall x \in X : \{x\} = \bigcup_{i \in I} B_i \Rightarrow \exists i \in I : B_i = \{x\}$.

2. Si tomamos la topología del punto $\mathcal{T}_a$, entonces una base de abiertos es $\mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}$.

3. Si tomamos la topología usual en $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, entonces una base de abiertos es el conjunto de bolas abiertas $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}^n\}$ porque recordemos que un abierto se caracterizaba en $\mathbb{R}^n$ por el hecho de que todos sus puntos tenían una bola alrededor contenida en el conjunto, luego la unión de dichas bolas es el abierto inicial.

   Sin embargo, la base de abiertos sigue siéndolo si escogemos otra norma en $\mathbb{R}^n$ distinta de la euclídea, puesto que estas normas son equivalentes en $\mathbb{R}^n$ (o, visto geométricamente, cada bola de una norma contiene otra más pequeña de otra norma distinta y viceversa) porque:

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} \square_i = \bigcup_{j \in J} \diamond_j$$

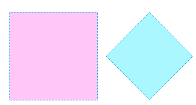


Figura 1.5: *Bases alternativas en* $\mathbb{R}^n$

Proposición

Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ un subconjunto y $\mathcal{B}$ una base de abiertos de X, entonces A es denso en X si y sólo si $\forall B \in \mathcal{B} : B \cap A \neq \emptyset$.

Aunque hemos comentado que la utilidad de las bases es reducir la complejidad de los conjuntos sobre los que hay que probar los resultados para los abiertos, la caracterización de los abiertos gracias a las bases de entornos permiten también caracterizar topologías a través de subconjuntos de un conjunto.

Proposición

Sea X un conjunto de puntos y $\mathcal{B} := \{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ una colección de subconjuntos, esta colección define una topología $\mathcal{T}$ única en X si y sólo si:

- $X = \bigcup_{i \in I} B_i$.

- $\forall B_i, B_j \in \mathcal{B}$ *y* $\forall x \in B_i \cap B_j,\ \exists B_k \in \mathcal{B} : x \in B_k \subset B_i \cap B_j$.

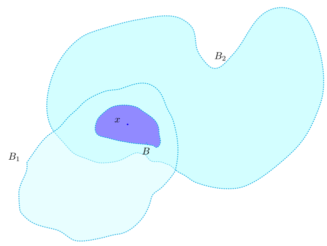


Figura 1.6: *Caracterización de la topología dada una base*

Demostración:

$\Rightarrow$) Trivial por las propiedades vistas sobre topología.

$\Leftarrow$) Veamos que se verifican las condiciones sobre la topología:

- **Unicidad**: $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i\in I} B_i : \{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}\}$.
- **Existencia**: Esa $\mathcal{T}$ es efectivamente topología.
  - $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X = \bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{T}$.
  - Uniones: $\bigcup_{j\in J} \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{j\in J} B_{ij} \in \mathcal{T}$.
  - Intersecciones finitas: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x\in B_1\cap B_2} B^x \in \mathcal{T}$.

$$x \in \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) \Rightarrow x \in B_{i_0} \cap B_{k_0} \Rightarrow \exists B^x \in \mathcal{B} : x \in B^x \subset B_{i_0} \cap B_{k_0}$$

Por tanto, podemos decir que $(\bigcup_i B_i) \cap (\bigcup_k B_k) = \bigcup_x B^x \in \mathcal{T}$ y se tiene el resultado.

TOPOLOGÍA RELATIVA

Habiendo definido y estudiado la estructura de espacio topológico, tiene sentido preguntarse acerca del comportamiento de dicha estructura con los subconjuntos del espacio ambiente. Esto quiere decir, ¿qué ocurre con la topología restringida a un subconjunto de puntos del espacio total? Esto es lo que conocemos como topología relativa y, contra la primera intuición que pueda uno tener, puede ser completamente distinta a la topología ambiente que rige el espacio.

Definición (Topología Relativa)

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e $Y \subset X$ un subconjunto de puntos, definimos la ***topología relativa***[4] ***en*** Y *como*

$$\mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

y decimos que $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es un ***subespacio*** *del espacio $(X, \mathcal{T})$* ***ambiente***.

---

[4]La comprobación de que efectivamente se trata de una topología es completamente trivial.

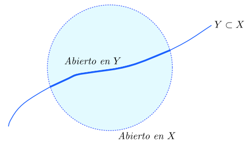


Figura 1.7: *Definición de una topología relativa*

Observación:

1. Los cerrados de la topología relativa $\mathcal{T}|_Y$ son la intersección $F \cap Y$ de Y con cerrados F en $\mathcal{T}$.
   Demostración:
   Sea $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow$
   $$F = Y \setminus W : W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y \Rightarrow \exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : Y \cap U = W$$
   $$\Rightarrow F = Y \setminus (Y \cap U) = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F_X : F_X \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$$

2. Si tenemos una base $\mathcal{V}^a$ de entornos en el espacio ambiente $(X, \mathcal{T})$, la base de entornos en el subespacio $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ se obtiene intersecando los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir, $\mathcal{V}_Y^a := \mathcal{V}^a \cap Y := \{V^a \cap Y : V^a \in \mathcal{V}^a\}$.

3. Si tenemos una base $\mathcal{B}$ de abiertos en el espacio ambiente $(X, \mathcal{T})$, la base de abiertos en el subespacio $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ se obtiene intersecando[5] los elementos de la base ambiente con el subespacio, es decir, $\mathcal{B}_Y := \mathcal{B} \cap Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$.

Ejemplo:

1. Si y es un punto aislado de Y, por la definición que hemos dado de la topología relativa, su topología relativa sería $\mathcal{T}|_Y := \{U \cap \{y\}\} = \{y\}$. Por tanto, es abierto en su topología.

2. Retomando el ejemplo anterior, si todos los puntos de Y son aislados, hemos visto que todos son abiertos (pues cortar un abierto con ellos da ellos mismos) y, por tanto, la topología $\mathcal{T}|_Y$ es la discreta. Por ejemplo, en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:

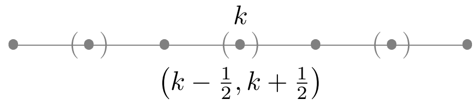


Figura 1.8: *Enteros en los reales como subespacio discreto.*

3. Si tomamos la topología del punto relativa a $X \setminus \{a\}$, $\mathcal{T}_a|_{X \setminus \{a\}}$, vemos que se trata de la discreta.

Observación:

1. Los abiertos W de un subespacio abierto $Y \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ son abiertos en el espacio ambiente X.
   $$W = U \cap Y : U,\ Y \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$$

2. Los cerrados F de un subespacio cerrado $Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$ son cerrados en el espacio ambiente X.
   $$F = C \cap Y : Y,\ C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$$

[5]Esta idea suele ser general, las construcciones en los subespacios se hacen intersecando elementos del espacio ambiente con el subespacio.

APLICACIONES CONTINUAS

En general en Matemáticas, cuando se estudia una estructura y sus propiedades, el paso inmediatamente posterior es estudiar los morfismos (las transformaciones) entre estas estructuras. En nuestro caso, el estudio de las aplicaciones entre espacios topológicos estará fundamentado en una característica clave, no sólo para el Análisis, sino también para la Topología: la continuidad.

A partir de este capítulo, vamos a estudiar las buenas propiedades que adquieren las aplicaciones continuas por la forma en que transforman los abiertos entre espacios y relacionan las topologías de cada uno.

DEFINICIÓN DE CONTINUIDAD

Si hacemos memoria, recordaremos la famosa definición $\varepsilon - \delta$ para la continuidad que nos dieron para $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$. Esta venía decir que una función $f : X \to Y$ era continua en un punto $x_0 \in X$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : (\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|)$$

y podemos reescribir esto último como $x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ o también como $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Lo anterior sugiere que la definición más ajena a las propiedades métricas y topológicas de $\mathbb{R}^n$ sería:

$$\forall B(f(x_0), \varepsilon),\ \exists B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$$

Sin embargo, esta definición sólo es válida para los espacios con la topología usual, pues el concepto de bola puede ser (y significar) cosas muy distintas en función de la topología empleada (sin ir más lejos puede no ser un abierto). Por ello, la siguiente definición pretende desligar el concepto de continuidad de la topología usual de $\mathbb{R}^n$ para que pueda ser aplicable a cualquier espacio topológico.

Definición (Continuidad)

*Sean X e Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación entre ambos, decimos que f es **continua en** $x_0 \in X$ si y sólo si:*

$$\forall V^{f(x_0)} : f^{-1}\left(V^{f(x_0)}\right) = V^{x_0}$$

es decir, la preimagen de cualquier entorno de $f(x_0)$ es entorno de x_0.

Proposición (Composición de continuidades)

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones continuas en $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tales que $f(x_0) = y_0$, la composición $h = g \circ f$ es una función continua en x_0.

Demostración:

Escojamos un entorno $V^{h(x_0)}$ de la imagen por h de x_0, entonces

$$h^{-1}V^{h(x_0)} = f^{-1}g^{-1}V^{g(y_0)} = f^{-1}V^{y_0} = V^{x_0}$$

Ejemplo:

1. Sea $f : X_{\text{discreta}} \to Y$, entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues todo es abierto y, en consecuencia, todo es entorno en $\mathcal{T}_{\text{disc}}$.
2. Sea $f : X \to Y_{\text{trivial}}$, entonces es continua sean cuales sean los conjuntos de partida y de llegada, pues como Y es el único abierto, entonces es el único entorno $V^{f(x)}$ para cualquier $f(x)$ y $f^{-1}V^{f(x)} = f^{-1}Y = X$, que es abierto.
3. Si una función $f : X \to Y_{\text{discreta}}$ es continua, entonces f es localmente constante, pues como en la trivial los puntos son abiertos, entonces el punto $\{f(x_0)\}$ es entorno $V^{f(x_0)}$ de sí mismo. Por tanto, por la continuidad de f, $f^{-1}f(x_0) = V^{x_0}$, luego $f \equiv f(x_0)$ en ese entorno V^{x_0}.
4. Si una función $f : X \to Y$ es localmente constante, entonces es continua, puesto que si es localmente constante para cualquier $x_0 \in X$ existe un entorno $U^{x_0} : f|_{U^{x_0}} \equiv f(x_0)$. De este modo, cualquier entorno $V^{f(x_0)}$ de la imagen $f(x_0)$ cumple que $f^{-1}V^{f(x_0)} \supset U^{x_0}$ y llamando $V^{x_0} = f^{-1}V^{f(x_0)}$ entonces vemos que es entorno de x_0.

Proposición (Caracterización de Continuidad)

Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos, entonces son equivalentes:

1. *f es continua.*
2. *$\forall U \overset{ab.}{\subset} Y : f^{-1}(U) \overset{ab.}{\subset} X$.*
3. *$\forall F \overset{cerr.}{\subset} Y : f^{-1}(F) \overset{cerr.}{\subset} X$.*
4. *$\forall A \subset Y : f^{-1}\left(\mathring{A}\right) \subset \operatorname{Int}\left(f^{-1}(A)\right)$.*
5. *$\forall A \subset X : f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.*

Demostración:

- 1. $\Rightarrow$ 2.

  Escojamos un abierto cualquiera $W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Por ser abierto, es entorno de todos sus puntos y, en particular, es entorno de las imágenes que puedan caer dentro de dicho abierto, es decir, $\forall x \in f^{-1}(W) : W = V^{f(x)}$. Por continuidad, las preimágenes de entornos de las imágenes son entornos de las preimágenes, luego $\forall x \in f^{-1}W : f^{-1}W = V^x$ y, como es entorno de todos sus puntos, entonces $f^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.

- 2. $\Rightarrow$ 3.

  Como lo que sabemos es que las preimágenes de abiertos son abiertas y los cerrados se definen en términos de abiertos, no nos queda otra estrategia que intentar demostrarlo pasando los cerrados a sus complementarios: los abiertos.

  Escojamos un cerrado cualquiera $C \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$ de modo que conocemos que $Y \setminus C \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Como conocemos el resultado para abiertos, podemos decir que $f^{-1}(Y \setminus C) \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y, conjuntistamente, $X \setminus f^{-1}C = f^{-1}(Y \setminus C)$, luego directamente tenemos que $f^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$.

- 3. $\Rightarrow$ 5.

  Como $\overline{f(A)} \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$ sabemos que $f^{-1}\overline{f(A)} \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$. Como $A \subset f^{-1}f(A) \subset f^{-1}\overline{f(A)}$ y este último es cerrado en X, entonces $\overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)}$ y, por tanto, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

- 5. $\Rightarrow$ 4.

$$Y \setminus \mathring{A} \Rightarrow \overline{Y \setminus A} \supset \overline{f\left(X \setminus f^{-1}A\right)} \overset{5)}{\supset} f\left(\overline{X \setminus f^{-1}\left(A\right)}\right) = f\left(X \setminus \operatorname{Int}\left(f^{-1}A\right)\right) \Rightarrow$$
$$X \setminus \operatorname{Int}\left(f^{-1}A\right) \subset f^{-1}\left(Y \setminus \mathring{A}\right) = X \setminus f^{-1}\left(\mathring{A}\right) \Rightarrow f^{-1}\left(\mathring{A}\right) \subset \operatorname{Int}\left(f^{-1}A\right).$$

- 4 $\Rightarrow$ 1)

$$V^{f(x)} \Rightarrow f\left(x\right) \in \operatorname{Int}\left(V^{f(x)}\right) \Rightarrow x \in f^{-1}\left(\operatorname{Int}\left(V^{f(x)}\right)\right) \subset \operatorname{Int}\left(f^{-1}V^{f(x)}\right) \Rightarrow$$
$$f^{-1}V^{f(x)} \text{ entorno de } x.$$

Observación:

La definición y posterior caracterización nos permiten recuperar las propiedades de continuidad a las que estamos habituados, como por ejemplo el quinto apartado del que se desprende que la imagen del límite es el límite de la imagen, pero también nos da la posibilidad de utilizar dicha continuidad con fines meramente topológicos, como por ejemplo $id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ es continua si y sólo si $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ (por 1).

CONTINUIDAD Y SUBESPACIOS

En muchas ocasiones tiene interés estudiar el comportamiento de una función, no en el conjunto total, sino en un subconjunto de puntos concreto. Como hemos definido anteriormente los subespacios topológicos, tiene sentido querer ver cómo se comportan las aplicaciones y sobre todo la continuidad, cuando trabajamos con estos subconjuntos.

Proposición

Sea $f : X \to Y$ una función continua y $Z \subset X$ un subespacio topológico, entonces la restricción $f|_Z : Z \to Y$ también es continua.

Demostración:

Aplicando la caracterización de continuidad a través de las preimágenes de abiertos, tenemos que:

$$\forall A \overset{\text{ab.}}{\subset} Y : \left(f|_Z\right)^{-1}\left(A\right) = Z \cap f^{-1}A \overset{\text{ab.}}{\subset} Z$$

donde este último conjunto es abierto por la definición de topología relativa.

Observación:

1. La aplicación inclusión $Z \overset{j}{\subset} X$ es continua.

   Demostración:

   Para cualquier abierto $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ la preimagen $j^{-1}\left(U\right)$ corresponde a los puntos de $U \cap Z$, y este último conjunto es abierto en Z por definición.

2. La continuidad se hereda en la restricción a un subespacio, es decir, si consideramos la aplicación $Z \overset{j}{\subset} X \xrightarrow{f} Y$, entonces la continuidad de f implica[1] la continuidad de $f|_Z$.

   Demostración:

   Como $f|_Z = f \circ j$ y ambas son continuas, por composición, $f|_Z$ es continua.

3. La continuidad es una propiedad local, es decir, que si $f|_{E^x}$ continua en x, entonces f continua en x.

[1] Pero el recíproco no es cierto, la continuidad en un subespacio no extiende la continuidad a todo el espacio.

Demostración:

La preimagen de cualquier entorno $V^{f(x)}$ es $(f|_E)^{-1}\left(V^{f(x)}\right) = W^x$ un entorno de x en E^x, pero tenemos que ver que lo es en X para poder afirmar que es continua. Como $W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} E^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X$, entonces $W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X$, ya que entorno de entorno es entorno.

Esta última afirmación es cierta porque:

$$\left.\begin{array}{l} W^x \overset{\text{ent.}}{\subset} E^x \Rightarrow \exists G \overset{\text{ab.}}{\subset} E^x \text{ tal que } G \subset W^x,\ G = A \cap E^x \subset X \\ E^x \overset{\text{ent.}}{\subset} X \Rightarrow \exists B \overset{\text{ab.}}{\subset} X \text{ tal que } B \subset E^x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x \in \underbrace{A \cap B}_{\overset{\text{ab.}}{\subset} X} \subset \underbrace{A \cap E^x}_{=G} \subset W^x$$

4. Si $f|_{U \overset{\text{ab.}}{\subset} X}$ es continua $\Rightarrow f$ continua $\forall x \in U$.
5. x es aislado $\Rightarrow f$ continua en x.

   Demostración:

   x aislado $\Leftrightarrow V^x = \{x\}$ es abierto de X. $f|_{V^x} : \{x\} \to Y$.

6. $f : X \to Y \supset Z$ tal que $f(X) \subset Z \subset Y$ (si no es así puede estar mal definido).

   Entonces, f a Y es continua $\Leftrightarrow f$ a Z es continua.

   Demostración:

   - f cont. en $Z \overset{j \circ f}{\Longrightarrow} f$ cont. en Y.
   - f cont. en $Y \overset{?}{\Rightarrow} f$ cont. en Z.

     Sea U_z ab. en Z. Este será $U_y \cap Z = U_z$ que cumple, $f_z^{-1}(U_y \cap Z) \overset{f(X) \subset Z}{=} f_y^{-1}(U_y)$ que es abierto en X (por ser f_y continua).

Proposición (Criterios de continuidad por recubrimientos)

Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos, si se da alguna de las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} X = \bigcup_{i \in I} U_i \text{ donde } U_i \overset{ab.}{\subset} X \\ \forall f|_{U_i} : U_i \to Y \text{ cont.} \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \bigcup_{i=0}^{n} F_i \text{ donde } F_i \overset{cerr.}{\subset} X \\ \forall f|_{F_i} : F_i \to Y \text{ cont.} \end{cases}$$

entonces la función f del inicio es continua.

Demostración:

- Escojamos un abierto cualquiera $W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ y veamos si su preimagen $f^{-1}W$ es un abierto en X.

  En primer lugar, por ser $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ podemos escribir que $f^{-1}W = X \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I}\left(U_i \cap f^{-1}W\right) = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1} W$. Como $(f|_{U_i})^{-1} W \underset{\text{(cont.)}}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} U_i \overset{\text{ab.}}{\subset} X$, entonces $(f|_{U_i})^{-1} W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y de esta manera podemos escribir $f^{-1}W$ como unión de abiertos $\bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1} W$ de X, es decir, que $f^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.

- Escojamos un cerrado cualquiera $C \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$ y veamos si su preimagen $f^{-1}C$ es cerrada en X.

  En primer lugar, por ser $X = \bigcup_{i=0}^{n} F_i$ podemos escribir que $f^{-1}C = X \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^{n} F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i=0}^{n}\left(F_i \cap f^{-1}C\right) = \bigcup_{i=0}^{n} (f|_{F_i})^{-1} C$. Como $(f|_{F_i})^{-1} C \underset{\text{(cont.)}}{\overset{\text{cerr.}}{\subset}} F_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, entonces $(f|_{U_i})^{-1} C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$ y de esta manera podemos escribir $f^{-1}C$ como unión finita de cerrados $\bigcup_{i=0}^{n} (f|_{F_i})^{-1} C$ de X, es decir, que $f^{-1}C \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$.

HOMEOMORFISMOS

Supongamos que tenemos una función f biyectiva y continua. Con las definiciones de continuidad anteriores hemos caracterizado la topología de las imágenes por f^{-1}, pero no sabemos nada de cómo se comporta la función f con respecto a abiertos, cerrados, etc. Nos gustaría poder destacar en qué condiciones una función establece una biyección entre abiertos de dos espacios, pues de esa forma existiría un "isomorfismo" entre ambas topologías a la hora de trabajar con ellas.

Definición (Aplicaciones abiertas y cerradas)

Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos, decimos que es:

- ***abierta*** *si y sólo si las imágenes de abiertos son abiertos.*
- ***cerrada*** *si y sólo si las imágenes de cerrados son cerrados.*

Observación:

La caracterización que dimos de la continuidad hacía referencia a las preimágenes de abiertos y cerrados, no a sus imágenes. De hecho, ni la continuidad implica que la aplicación sea abierta o cerrada, ni viceversa.

Ejemplo:

En la siguiente tabla podemos ver distintos ejemplos de funciones que verifican algunas de las condiciones que hemos definido, pero no otras simultáneamente:

Función	continua	abierta	cerrada
$Id : X_{\text{trivial}} \to X_{\text{discreta}}$	✗	✓	✓
$Id : X_{\text{discreta}} \to X_{\text{trivial}}$	✓	✗	✗
$j : [0,1] \subset \mathbb{R}_u$	✓	✗	✓
$j : (0,1) \subset \mathbb{R}_u$	✓	✓	✗

Cuadro 2.1: *En la tabla anterior podemos ver ejemplos de funciones que son continuas, abiertas o cerradas de distintas formas.*

Proposición (Trivialidades esenciales)

Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva, entonces las siguientes afirmaciones:

1. *f es abierta*
2. *f es cerrada*
3. *f^{-1} es continua.*

son equivalentes.

Demostración:

- 1. $\Rightarrow$ 2.

  Sea $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, por la definición de cerrado su complementario $X \setminus F$ es abierto en X. De esta manera, como f es abierta, entonces $f(X \setminus F) \overset{\text{ab.}}{\subset} X$. Por la biyectividad, $f(X \setminus F) = Y \setminus f(F)$, es decir, que $f(F) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$, lo que demuestra que f es cerrada.

- 2. $\Rightarrow$ 3.

  Sea $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, como f es cerrada, $f(F) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y$. Pero $f(F) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ por la biyectividad de f, luego hemos demostrado que f^{-1} continua porque las preimágenes de cerrados son cerrados.

- 3. $\Rightarrow$ 1.

  Sea $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$, por la continuidad de f^{-1}, la preimagen $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Por tanto, como $f(U) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(U)$, hemos demostrado que f es abierta.

Definición (Homeomorfismo)

*Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva, decimos que es un **homeomorfismo** si y sólo si f y f^{-1} son continuas o, equivalentemente, si f es continua y abierta o cerrada.*

Observación:

La definición de homeomorfismo es importante porque no establece simples biyecciones entre conjuntos, establece biyecciones sobre topologías:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{T}_X &\to \mathcal{T}_Y \\ U &\mapsto f(U) \\ f^{-1}(W) &\leftarrow\!\shortmid W \end{aligned}$$

lo que permite trabajar con los abiertos de un lado y trasladar el mismo trabajo a los del otro de forma canónica.

Definición (Homeomorfismo Local)

*Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos, decimos que es un **homeomorfismo local en** $x_0 \in X$ si y sólo si existen algunos entornos V^{x_0} y $V^{f(x_0)}$ tales que la restricción $f : V^{x_0} \to V^{f(x_0)}$ es un homeomorfismo.*

Observación:

En general, cuando decimos que una aplicación $f : X \to Y$ es un homeomorfismo local sin especificar en qué punto, estamos diciendo que es homeomorfismo local para cualquier punto $x \in X$.

Además, en la definición de homeomorfismo local anterior, podemos tomar V^{x_0} y $V^{f(x_0)}$ como entornos abiertos.

Demostración:

Si f es homeomorfismo local, entonces $\exists V^a \subset X$ y $V^{f(a)} \subset Y$ tal que $f : V^a \to V^{f(a)}$ es homeomorfismo y, por esta razón, sabemos que $\exists U^a \overset{\text{ab.}}{\subset} V^a$ tal que $f(U^a) \overset{\text{ab.}}{\subset} V^{f(a)}$.

Además, como $f(U^a)$ es abierto en $V^{f(a)}$, sabemos que $f(U^a)$ es entorno[2] de $f(a)$ en $V^{f(a)}$. Como tenemos la secuencia $f(U^a) \overset{\text{ent.}}{\subset} V^{f(a)} \overset{\text{ent.}}{\subset} Y$, sabemos que $f(U^a) \overset{\text{ent.}}{\subset} Y$ de $f(a)$ y, por tanto, podemos encontrar un abierto $W \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ tal que $W \subset f(U^a)$.

Por tanto, como se trata de un homeomorfismo local, existirá algún $G \overset{\text{ab.}}{\subset} U^a$ de forma que $f(G) = W$. Pero como U^a es abierto global, entonces tenemos que $G \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y hemos acabado, pues tenemos el homeomorfismo local definido en $f : G \to W$.

Proposición (Conservación por restricción)

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo, la restricción $f : Z \to f(Z)$ a cualquier subespacio $Z \subset X$ también es homeomorfismo.

[2] En este punto no podemos parar y decir que es abierto porque lo que sabemos es que $f(U^a)$ es abierto en $V^{f(a)}$, pero no sabemos nada sobre si es abierto en Y, que es lo que necesitamos.

Demostración:

La restricción será biyectiva por serlo f y ser el conjunto de llegada $f(Z)$. Una biyección es homeomorfismo si tanto f como f^{-1} son continuas y como ya vimos que la restricción de una continua es continua, sabemos que la restricción de f y f^{-1} a Z y $f(Z)$ son también continuas, es decir, $f|_Z$ es homeomorfismo.

Proposición (Conservación por composición)

Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos homeomorfismos, su composición $h = f \circ g$ también es homeomorfismo.

Proposición

Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo local, entonces es abierto.

Demostración:

Hay dos formas de demostrarlo, la primera es intentando ver que para cualquier $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ ocurre que $f(U)$ es entorno de las imágenes de todos los puntos de U.

Con este objetivo, sabemos que por ser f homeomorfismo local existe una restricción $\exists f| : V^{x_0} \to V^{y_0}$ para cada punto $x_0 \in U$ y usando la notación $y_0 = f(x_0)$. Como esta restricción es homeomorfismo, $f(U \cap V^{x_0}) \overset{\text{ab.}}{\subset} V^{y_0}$ y, por tanto, $f(U \cap V^{x_0})$ es entorno en Y de y_0. Al ocurrir esto para todos los puntos y, teniendo en cuenta que $f(U \cap V^{x_0}) \subset f(U)$, sabemos que $f(U)$ es entorno de las imágenes de todos los puntos de U.

La otra forma de verlo es que, por ser homeomorfismo local, para cualquier punto $x \in X$ existe un entorno abierto $W^x \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ de forma que $f(W^x) \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ es abierto. De esta manera, y abusando de la notación, escribiendo $W^x = W^x \cap U$, U puede expresarse como $U = \bigcup_{x\in U} W^x$. Por tanto, $f(U) = f(\bigcup_{x\in U} W^x) = \bigcup_{x\in U} f(W^x)$ que es unión de abiertos, luego es abierto.

Ejemplo: (¡Importantes!)

1. **Proyección estereográfica**:

   Sea $\mathbb{S}^m$ y $a \in \mathbb{S}^m \Rightarrow \mathbb{S}^m \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m$ homeomorfismo. ($\mathbb{R}^m$ es en realidad un hiperplano de $\mathbb{R}^{m+1}$ en el que se encuentra contenida la "esfera")

2. **Proyección exponencial**:

   $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i\theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$ es homeomorfismo local, pero no es inyectiva al ser periódica.

3. **Proyección antipodal**:

   $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \supset \mathbb{S}^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^m : x \mapsto [x]$ es homeomorfismo local. Es 2-1 por llevar las antípodas al mismo $[x]$.

   Podemos dividir $\mathbb{S}^m$ tal que: $\mathbb{S}^m = S_+ \cup S_- \cup E$ (ecuador). Llamando U_p a todas las rectas no contenidas en el plano ortogonal a la recta formada por el punto que se quita y su antípoda. Con esto tenemos $U_p \simeq \mathbb{R}^m$. Uniéndolo con el hiperplano del infinito H_p^∞ tenemos que los polos van a U_p y E a H_p^∞. Esta correspondencia es homeomorfa por lo que se puede trasladar la topología.

   Con esto, esta proyección será un recubrimiento doble de $\mathbb{R}\mathrm{P}^m,\ m \geq 2$.

4. **Lemniscata**:

   $f : \mathbb{R} \to X \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right)$ es biyectiva y continua, pero NO homeomorfismo local.

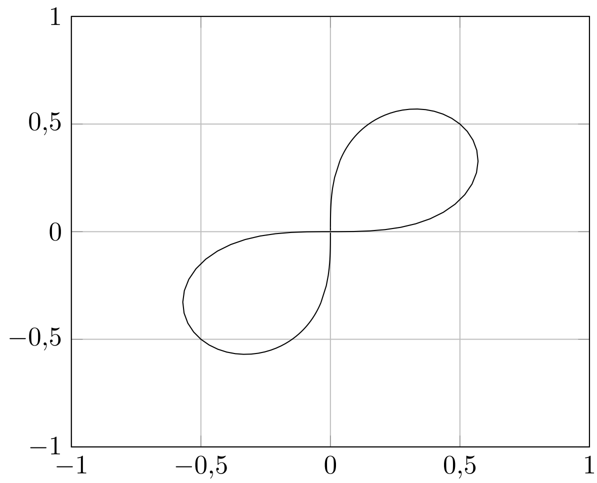


Figura 2.1: *Representación Lemniscata.*

Engañosamente:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exists\, (t-\varepsilon, t+\varepsilon) = I_\varepsilon : f| : I_\varepsilon \to f\,(I_\varepsilon)$$

es homeomorfismo.

En $t = 0$, $f\,(I_\varepsilon)$ NO es entorno de $f\,(0) = (0,0)$, porque se tienen que tomar elementos de la rama "vertical".

5. Las **coordenadas polares** $(0, \to) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ son homeomorfismo local con $\theta_0 \in (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$ hasta $\mathbb{R}^2 \setminus L$ con L la recta entre O y θ_0.

Definición (Variedad Topológica)

*Una **variedad topológica** de dimensión m es un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^m$, es decir, que cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola*[3] $B\,(0,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$.

Ejemplo:

Esferas, espacios proyectivos, toros...

[3] Luego, en el fondo, es homeomorfo a cualquier bola y, por ser éstas parte de una base de $\mathbb{R}^m$, es homeomorfo a todo $\mathbb{R}^m$.

CONSTRUCCIONES

En ocasiones, será de gran utilidad que ciertas aplicaciones de un espacio topológico en un conjunto sean continuas. Para ello, vamos a estudiar qué topologías podemos "construir" artificialmente en estos conjuntos para forzar que dichas aplicaciones sean continuas. En general, la noción más importante será la del cociente y las identificaciones, pues nos permitirán hacer "corta pega" para transformar los conjuntos como deseemos.

IMÁGENES INVERSAS

El objetivo de esta construcción es crear una topología que, al ser equipada en el conjunto de partida, haga la aplicación $f : (Y, ?) \to (X, \mathcal{T})$ continua. Recordemos que, para poder cumplir con la definición de continuidad, las preimágenes de abiertos deben ser abiertos, luego cuantos más abiertos "metamos" en dicha topología más "fácil" será que las imágenes inversas caigan en abiertos.

Con dicha observación lo que se nos viene a la cabeza es tomar como topología la discreta, sin embargo, esto carece de interés: lo que realmente nos gustaría es la topología con menos abiertos posibles que haga la función continua.

Definición (Topología Imagen Inversa)

Sea $f : Y \to (X, \mathcal{T})$ una aplicación, definimos la ***topología de la imagen inversa*** *como la topología menos fina que podemos equipar a Y para que la aplicación f sea continua:*

$$f^{-1}\mathcal{T} = \{f^{-1}U : U \in \mathcal{T}\}$$

donde los abiertos son exactamente las preimágenes de los abiertos la topología de llegada.

Observación:

Tras la introducción de la sección, la topología de la definición parece la más razonable para ser candidata a menos fina posible, puesto que de ser topología (hay que probarlo) hemos "metido" los abiertos indispensables para la continuidad que son precisamente las imágenes inversas.

Proposición

Sea $f : (Y, f^{-1}\mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ donde $f^{-1}\mathcal{T}$ es la topología de la imagen inversa, entonces:

1. *$f^{-1}\mathcal{T}$ es topología.*
2. *$f^{-1}\mathcal{T}$ es la menos fina posible.*

Demostración:

1. Las imágenes inversas funcionan muy bien con uniones, intersecciones, etc. Por tanto, la demostración de que es topología es trivial.

2. Consideremos cualquier otra topología $\mathcal{T}'$ en Y que haga la función f continua. Si tomamos un abierto $U \in f^{-1}\mathcal{T}$ en la topología inversa, entonces $\exists V \in \mathcal{T} : f^{-1}V = U$. Asimismo, como f también es continua en $\mathcal{T}'$ sabemos que $U = f^{-1}V$ también es abierto en $\mathcal{T}'$, es decir, todo abierto en $f^{-1}\mathcal{T}$ es también abierto en $\mathcal{T}'$ y, por tanto, $f^{-1}\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Caracterización de la imagen inversa

En muchas ocasiones, tendremos diagramas con varias aplicaciones entre varios espacios topológicos. En estas situaciones, es de utilidad tener algún teorema para poder identificar unas topologías con otras, ya que entender y manejar bien unas puede tener buenas "traslaciones" en las otras. Es por ello que tiene gran utilidad el siguiente teorema de caracterización de la topología inversa en circunstancias como las descritas.

Teorema (Propiedad universal de las inmersiones)

Sean $g : (Z, \mathcal{T}'') \to (Y, \mathcal{T}')$ *y* $f : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T})$ *dos funciones entre espacios topológicos:*

$$
\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{T}') \arrow[r, "f"] & (X, \mathcal{T}) \\
(Z, \mathcal{T}'') \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f \circ g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.1: *Ilustración de la composición propuesta*

entonces $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$ *si y sólo si:*

$$\forall g : g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}$$

Demostración:

$\Rightarrow$) $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow f \circ g$ cont. es trivial por composición de continuas.
- $f \circ g$ cont. $\Rightarrow g$ cont.

  Para probarlo, basta ver para cualquier abierto $V \in \mathcal{T}'$, $g^{-1}V$ es abierto en $\mathcal{T}''$. Por ser $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$, entonces $g^{-1}V = g^{-1}f^{-1}U$ para algún abierto $U \in \mathcal{T}$, pero es que precisamente $g^{-1}f^{-1}U = (f \circ g)^{-1} U \in \mathcal{T}''$ por ser $f \circ g$ continua.

$\Leftarrow$) Para demostrarla vamos a ver el doble contenido de $\mathcal{T}'$ en $f^{-1}\mathcal{T}$ y viceversa.

Como la propiedad de caracterización se cumple para cualquier g que escojamos, podemos escoger como g la aplicación identidad. De esta manera, g cont. $\Leftrightarrow f \circ g$ cont. implica que id cont. $\Leftrightarrow f \circ id = f$ cont., luego hemos demostrado que f es continua.

$$
\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{T}') \arrow[r, "f"] & (X, \mathcal{T}) \\
(Y, \mathcal{T}') \arrow[u, "id"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Y como precisamente $f^{-1}\mathcal{T}$ es la topología menos fina que posibilita la continuidad de f, sabemos que $\mathcal{T}' \supset f^{-1}\mathcal{T}$.

Si ahora utilizamos como g la identidad puramente conjuntista (las topologías no se conservan, pero los puntos van a ellos mismos), entonces:

$$\begin{tikzcd}
(Y, \mathcal{T}') \arrow[r, "f"] & (X, \mathcal{T}) \\
(Y, f^{-1}\mathcal{T}) \arrow[u, "id"] \arrow[ur, "f \text{ cont.}"'] &
\end{tikzcd}$$

De nuevo, por la propiedad de caracterización sabemos que esta nueva "identidad" es una función continua. Por tanto, si tomamos $U \in \mathcal{T}'$ sabemos que $id^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T}$ y como es una identidad, $U = f^{-1}U$ (como conjunto), es decir, $U \in f^{-1}\mathcal{T}$.

Inmersiones

La construcción anterior cobra especial relevancia cuando la aplicación $f : Y \to X$ que hemos hecho continua con la topología imagen inversa es inyectiva porque de alguna forma permite "sumergir" el espacio de salida en el de llegada.

Definición (Inmersión)

*Sea $f : \left(Y, f^{-1}\mathcal{T}\right) \to (X, \mathcal{T})$ una aplicación continua gracias a la topología de la imagen inversa, decimos que es una **inmersión** si y sólo si es inyectiva.*

Proposición (Caracterización de Inmersiones)

Sea $f : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ una aplicación entre espacios topológicos, entonces f es una inmersión si y sólo si la aplicación:

$$f : (Y, \mathcal{T}') \longrightarrow \left(f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)}\right)$$

es un homeomorfismo.

Demostración:

$\Rightarrow$) Tenemos que $f : \left(Y, f^{-1}\mathcal{T}\right) \to \left(f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)}\right)$.

Como f es inmersión sabemos que es inyectiva, lo que sumado a que el espacio de llegada es $f(Y)$, nos permite saber que es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva. De los requisitos para ver que es un homeomorfismo, nos quedaría confirmar que es continua y abierta :

- Continua:
  Si escogemos un abierto cualquier $U \in \mathcal{T}|_{f(Y)}$, por ser abierto de la topología relativa, sabemos que $\exists W \in \mathcal{T} : U = f(Y) \cap W$ y entonces su imagen inversa
  $$f^{-1}(U) = f^{-1}(W \cap f(Y)) = Y \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(W) \in f^{-1}\mathcal{T}$$

- Abierta:
  Observamos que cualquier abierto $U \in f^{-1}\mathcal{T}$ de la topología imagen inversa es preimagen de un abierto de la topología de llegada, es decir, $\exists W \in \mathcal{T} : f^{-1}W = U$. Por tanto, si calculamos la imagen de U por f, tenemos que:
  $$fU = ff^{-1}W = W \cap f(Y) \overset{\text{ab.}}{\subset} f(Y)$$
  es decir que fU es abierto en $f(Y)$.

$\Leftarrow$) Veamos por el doble contenido de $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$

- $\subset$) Sea $U \in \mathcal{T}'$, como es homeomorfismo, es abierto, luego $fU \in \mathcal{T}|_{f(Y)}$, es decir, $\exists W \in \mathcal{T}'|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$, luego podemos decir que $U \in f^{-1}\mathcal{T}$.
- $\supset$) Sea $U \in f^{-1}\mathcal{T}$, por definición, $\exists W \in \mathcal{T}|_{f(Y)} : f^{-1}W = U$ y, como f es continua en $\mathcal{T}'$, $U = f^{-1}W \in \mathcal{T}'$.

Observación:

Podemos extraer de la definición, pero sobre todo de la caracterización anterior de inmersión, las siguientes conclusiones:

1. Si una función $f : Y \to X$ es inyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces es inmersión.

   Demostración:

   La caracterización de imagen inversa exige continuidad, biyectividad y apertura o cierre (es decir, que sea homeomorfismo) de la aplicación $g : Y \to f(Y)$.

   Como f es inyectiva y coincide con g en la imagen $f(Y)$, ésta última también es inyectiva, luego por ser sobreyectiva es biyectiva. La continuidad también se extiende a g naturalmente y falta solo ver que es abierta o cerrada respectivamente. Si f lo es, entonces para cualquier abierto o cerrado $W \subset Y$ su imagen $f(W)$ será abierta o cerrada en X. Del mismo modo, para cualquier abierto o cerrado $W \subset Y$ su imagen $g(W)$ se puede escribir como $g(W) = f(W) \cap f(Y)$ que es abierto o cerrado por ser un corte de un abierto o cerrado ambiente con el subespacio $f(Y)$.

2. Si $f : Y \to X$ es una inmersión, entonces:

   - es una aplicación abierta si y sólo si $f(Y)$ es abierto en X.
   - es una aplicación cerrada si y sólo si $f(Y)$ es cerrado en X.

   Demostración:

   En ambos casos, la implicación de izquierda a derecha es trivial, luego sólo es necesaria la de derecha a izquierda:

   - $\forall V = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T},\ fV = \overbrace{U \cap f(Y)}^{\text{inter. abiertos}} \in \mathcal{T}.$
   - $\forall C \overset{\text{cerr.}}{\subset} f^{-1}\mathcal{T},\ Y \setminus C = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow f(C) = \underbrace{(X \setminus U) \cap f(Y)}_{\text{inter. cerrados}} \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$

3. Las inmersiones y la apertura o cierre de la aplicación no están relacionadas. Esto quiere decir que existen inmersiones que no son abiertas ni cerradas, que sólo son abiertas, que sólo son cerradas y ambas cosas simultáneamente.

Observación:

Las inmersiones son las que justifican la idea de considerar unos espacios como subespacios de otros. Las frases “el plano proyectivo real no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$”, “la esfera no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$” o “el plano proyectivo real es un subespacio de $\mathbb{R}^4$” se refieren a esto mismo: cuándo hay o no hay una inmersión del primer espacio en el segundo, es decir, un subespacio del segundo homeomorfo al primero.

IMÁGENES DIRECTAS

El objetivo de esta construcción es crear una topología que, al ser equipada en el conjunto de llegada, haga la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, ?)$ continua. De nuevo, recordemos que, para poder cumplir con la definición de continuidad, las preimágenes de abiertos deben ser abiertos, luego cuantos menos abiertos "metamos" en dicha topología menos posibilidades habrá de que sus preimágenes no caigan en abiertos.

Con dicha observación, en este caso lo que se nos viene a la cabeza es tomar como topología la trivial, sin embargo, esto vuelve a carecer de interés: lo que realmente nos gustaría es la topología con más abiertos posibles que haga la función continua.

Definición (Topología Imagen Directa)

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to Y$ una aplicación, definimos la ***topología de la imagen directa*** *como la topología más fina que podemos equipar a Y para que la aplicación f sea continua, que es la topología:*

$$f\mathcal{T} = \{V \subset Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}\}$$

donde los abiertos son exactamente aquellos cuyas preimágenes son abiertos de la topología de salida.

Observación:

Tras la introducción de la sección, de nuevo, parece que la topología de la definición es la más razonable para ser candidata a más fina posible, puesto que de ser topología (hay que probarlo) hemos "metido" todo lo que podemos meter como abierto conservando el requisito de la continuidad.

Proposición

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, f\mathcal{T})$ donde $f\mathcal{T}$ es la topología de la imagen directa, entonces:

1. *$f\mathcal{T}$ es topología.*
2. *$f\mathcal{T}$ es la más fina posible.*

Demostración:

1. Trivial.
2. Consideremos cualquier otra topología $\mathcal{T}'$ en Y tal que haga f continua. Si tomamos un abierto $U \in \mathcal{T}'$, como conserva la continuidad , $f^{-1}U = W \in \mathcal{T}$. Sin embargo, tal y como hemos definido $f\mathcal{T}$, sabemos que $U \in f\mathcal{T}$ porque $W \overset{\text{ab.}}{\subset} X$, luego $\mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$.

Caracterización de la imagen directa

De nuevo, en las situaciones en las que haya diagramas con varias aplicaciones entre varios espacios topológicos, es de utilidad tener algún teorema para poder identificar unas topologías con otras, ya que entender y manejar bien unas pueden tener buenas "traslaciones" en las otras. Por ello, tiene gran utilidad el teorema de caracterización de la topología directa en circunstancias como las descritas.

Teorema (Caracterización de imágenes directas)

Sean $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ y $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ dos funciones entre espacio topológicos

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & (Y, \mathcal{T}') \arrow[d, "g"] \\
& (Z, \mathcal{T}'')
\end{tikzcd}$$

Figura 3.2: *Ilustración de la composición propuesta* *entonces $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ si y sólo si:*

$$\forall g,\ g \text{ cont.} \Leftrightarrow g \circ f \text{ cont.}$$

Demostración:

$\Rightarrow$) $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow g \circ f$ cont. es trivial por composición de continuas.
- $g \circ f$ cont. $\Rightarrow g$ cont.
  Si escogemos un $W \in \mathcal{T}''$ sabemos que $f^{-1}\left(g^{-1}W\right) = (g \circ f)^{-1} W \in \mathcal{T}$ porque la aplicación $g \circ f$ es continua. Sin embargo, que $f^{-1}V \in \mathcal{T}$ implica que $V \in \mathcal{T}'$ porque $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$, luego $g^{-1}W \in \mathcal{T}'$, es decir, es continua.

$\Leftarrow$) Para demostrarla vamos a ver el doble contenido de $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$.

Como la caracterización se cumple para cualquier g, en particular podemos seleccionar como g la identidad. Como la identidad es continua, por la caracterización, $id \circ f = f$ es continua y, como $f\mathcal{T}$ es la topología más fina que hace f continua, entonces $\mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f = f"'] & (Y,\mathcal{T}') \arrow[d, "id"] \\
& (Y,\mathcal{T}')
\end{tikzcd}$$

De la misma manera que antes, podemos seleccionar como g la identidad meramente conjuntista (donde cada punto va a sí mismo, pero no se conserva la topología porque son distintas la de salida y la de llegada).

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f \text{ cont.}"'] & (Y,\mathcal{T}') \arrow[d, "id"] \\
& (Y,f\mathcal{T})
\end{tikzcd}$$

En este caso, como f va de $(X,\mathcal{T})$ a $(Y,f\mathcal{T})$ es continua por definición de $f\mathcal{T}$ y, por la caracterización, sabemos que la "identidad" que hemos seleccionado también lo es. Esto quiere decir que $\forall W \in f\mathcal{T},\ id^{-1}W = W \in \mathcal{T}'$, por tanto, $f\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$.

Observación:

$f(X)$ es abierto y cerrado en $f\mathcal{T}$: $\begin{cases} \forall y \in Y \setminus f(X), f^{-1}y = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \{y\} \in f\mathcal{T} \\ f^{-1}f(X) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow f(X) \in f\mathcal{T} \end{cases}$

Identificaciones

La construcción anterior cobra especial relevancia cuando la aplicación $f : Y \to X$ que hemos hecho continua con la topología imagen directa es sobreyectiva porque de alguna forma permite "identificar" el espacio de llegada en el de salida.

Definición (Identificación)

Sea $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{T}')$ una aplicación sobreyectiva, decimos que es una ***identificación*** *si y sólo si $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$.*

Observación:

1. Las identificaciones verifican $V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y \Leftrightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y la continuidad $V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y \Rightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.
2. Si una función $f : X \to Y$ es sobreyectiva, continua y abierta o cerrada, entonces es identificación.
   Demostración:

   Las hipótesis ya nos otorgan la continuidad y la sobreyectividad, hay que demostrar pues que $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ utilizando que es abierta o cerrada.

   - Abierta:

     Hay que ver que $\forall V \subset Y : f^{-1}V \overset{\text{ab.}}{\subset} X,\ V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$. Por ser f sobreyectiva, $f^{-1}V$ está bien definido y, por tanto, podemos escribir $V = f(f^{-1}V)$. Como f es abierta, $\forall W \overset{\text{ab.}}{\subset} X : f(W) \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ y como $f^{-1}V$ es abierto por la continuidad de f, entonces $V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$.
   - Cerrada:
     $$f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X \overset{\text{cerr.}}{\Rightarrow} \underbrace{f\left(X \setminus f^{-1}\left(V\right)\right)}_{\overset{\text{sobr.}}{=} Y \setminus V} \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow V \overset{\text{ab}}{\subset} Y$$

3. Las identificaciones y la apertura o cierre de la aplicación no están relacionadas. Esto quiere decir que existen identificaciones que no son abiertas ni cerradas, que sólo son abiertas, que sólo son cerradas y ambas cosas simultáneamente.

Tal y como hemos dicho, una identificación nos va a permitir, valga la redundancia, identificar los espacios que relaciona. En general, el espacio que conoceremos bien será el del dominio y, por ello, para entender y manejar los abiertos del espacio de llegada con la topología imagen directa es conveniente representarlos en el de partida.

Definición (Conjunto Saturado)

*Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que es **saturado respecto de f** si y sólo si $f^{-1}f\left(A\right) = A$.*

Los conjuntos saturados nos van a permitir caracterizar los abiertos de la topología imagen directa. Sin embargo y de forma preeliminar, vamos a detenernos un instante a analizar qué significa que un conjunto sea saturado.

Un conjunto no es saturado cuando existe otro conjunto que tenga la misma imagen que él, es decir, en cierta manera el concepto está relacionado con la inyectividad. Para justificar la afirmación previa veamos que si $f^{-1}f(A) \neq A$, entonces existen más pregimágenes de $f(A)$ a parte de A, es decir, existe otro conjunto B tal que $f(B) = f(A)$.

Definición (Relación de inyectividad)

*Sea f una función, definimos la **relación de inyectividad** como la relación de equivalencia inducida por*

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f\left(x\right) = f\left(y\right)$$

es decir, dos elementos están relacionados si comparten la misma imagen.

De esta manera, un conjunto saturado es aquel que aglutina, a través de la relación de inyectividad previamente definida, a todos los conjuntos que comparten la misma imagen.

Definición (Conjunto Saturado)

*Sea $A \subset X$ un subconjunto de puntos, decimos que es **saturado respecto de f** si y sólo si:*

$$\forall x \in A, [x] \subset A \text{ donde } [x] := \{y \in A : y \sim_f x\}$$

donde $\sim_f$ denota la relación inyectividad inducida por f.

Observación:

Esto quiere decir que para saturar un conjunto A no tengo más que añadir los puntos del espacio cuya imagen está contenida en $f(A)$. Es por esto que el nombre es "saturado", porque añadimos todos los puntos con la misma imagen hasta que ya no quedan más.

Estudiado un poco más en profundidad el concepto, la proposición siguiente va a permitiri caracterizar los abiertos de $f\mathcal{T}$ a través de abiertos de $\mathcal{T}$, lo que es útil para poder estudiar abiertos del espacio de llegada conociendo abiertos (saturados) del espacio de salida.

Proposición (Caracterización de abiertos de $f\mathcal{T}$)

Sea $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, f\mathcal{T})$ donde $f\mathcal{T}$ es la topología imagen directa, los abiertos de $f\mathcal{T}$ son las imágenes de los abiertos saturados de $\mathcal{T}$, es decir:

$$f\mathcal{T} := \{fU \text{ donde } U \in \mathcal{T} \text{ y } f^{-1}fU = U\}$$

Demostración:

Hay que probar que $V \in f\mathcal{T}$ si y sólo si $\exists A \in \mathcal{T} : f^{-1}fA = A$ y $f(A) = V$.

$\Rightarrow$) Escogido un $V \in f\mathcal{T}$ cualquiera, entonces $f^{-1}V \in \mathcal{T}$ y precisamente conjunto es al que vamos a llamar A. En general, $f(A) = ff^1V \subset V$, pero como f es sobreyectiva, entonces $f(A) = ff^{-1}V = V$. En consecuencia, $f^{-1}fA = f^{-1}V = A$, es decir, A es abierto saturado.

$\Leftarrow$) Escogido un conjunto A cualquiera que sea abierto saturado de $\mathcal{T}$ hay que ver que su imagen $V := f(A)$ es abierto de $f\mathcal{T}$. Que V sea abierto de $f\mathcal{T}$ quiere decir que $f^{-1}V$ es abierto de $\mathcal{T}$, pero como $f^{-1}V = f^{-1}f(A) = A$ por ser saturado, se tiene trivialmente que $f^{-1}V$ es abierto de $\mathcal{T}$.

Observación:

Sin embargo, no hemos afirmado nada acerca de los abiertos **no saturados** de X, que pueden tener imágenes no abiertas de Y (y también abiertas sin ser saturados).

Ejemplo:

1. Consideremos la aplicación que transforma el intervalo $[0, 1]$ en la circunferencia unidad de $\mathbb{R}^2$ y que viene definida por la expresión:

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \end{aligned}$$

La transformación que realiza entre el intervalo y la circunferencia está representada en la figura 3.3:

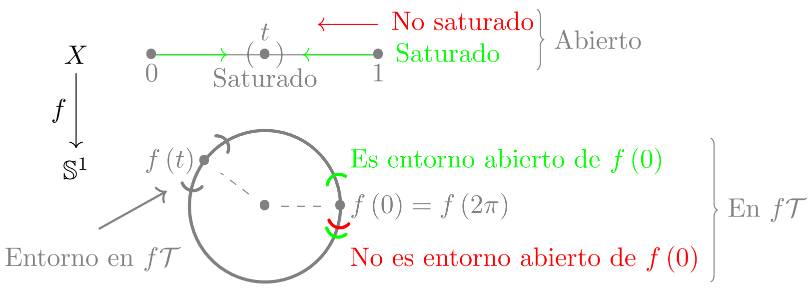


Figura 3.3: *La topología imagen directa es la usual en $\mathbb{S}^1$*

donde podemos observar dos comportamientos distintos: cualquier punto del intervalo $(0, 1)$ tiene asignado un único punto de la circunferencia $\mathcal{S}^1$ y los puntos 0 y 1 tienen asignado el mismo punto $f(0) = f(1) = (1, 0)$.

De esta manera, podemos ver que los entornos que no contienen a ninguno de estos dos puntos especiales son entornos abiertos en la circunferencia. Sin embargo, en cuanto tocamos el 0 o el 1, la imagen de ese entorno ya no es un abierto de la circunferencia: necesitamos incluir al 0 o al 1 (el que nos hayamos dejado sin coger) para que la imagen sí sea abierta. Esto es porque, de no coger ambos puntos, la preimagen de la imagen del entorno siempre contendría a uno de los dos puntos no escogidos, es decir, que tenemos que saturar el conjunto.

2. Consideremos la aplicación que transforma el cuadrado unidad en el cilindro de la figura 3.4.

$$\begin{aligned} f : R = [0,1] \times [0,1] &\to C \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le 1 \\ (s,t) &\mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t)\,. \end{aligned}$$

De nuevo, vemos en este ejemplo que los puntos problemáticos son los que comparten la misma imagen por la aplicación mencionada. Los abiertos en el cilindro imagen que involucran a estos puntos son imagen de abiertos saturados del cuadrado, es decir, de conjuntos que aglutinan los lados izquierdo y derecho en sí mismos para cumplir la relación de inyectividad descrita en el apartado anterior.

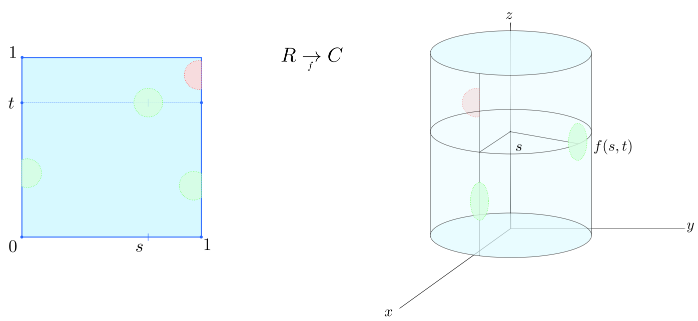


Figura 3.4: *Representación visual de los abiertos saturados y usuales de la transformación.*

Analizando los abiertos saturados y no saturados podemos concluir que la topología imagen directa por la aplicación definida es la usual en el tronco del cilindro.

Espacio Cociente

Habiendo hablado previamente sobre una relación de equivalencia, surge de forma natural la necesidad de estudiar la topología que induce generar un cociente en un espacio topológico. La topología del cociente va a ser la misma que la de imagen directa, pero esta vez la función f de la definición sí es una función concreta y específica.

Definición (Proyección canónica)

Sea X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en dicho espacio, llamamos ***proyección canónica*** *a la aplicación:*

$$\begin{aligned} p : X &\to X/\sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

que a cada elemento x le asigna su clase de equivalencia $[x]$.

Tal y como hemos dicho, la topología que va a tener el espacio cociente y que llamaremos topología cociente es la que induce la proyección canónica como imagen directa de la misma.

Definición (Topología cociente)

*Llamamos **topología cociente** a:*

$$\mathcal{T}/\sim := \left\{ U \subset X/\sim : p^{-1}(U) \in \mathcal{T} \right\}$$

que viene a ser la topología imagen directa por p.

Llegados a este punto y suponiendo que tenemos una identificación concreta de X en otro espacio Y, tiene sentido preguntarnos qué ocurre si formamos un cociente con la relación de inyectividad asociada a la identificación f. ¿Existirá alguna relación entre la identificación correspondiente y el cociente del espacio? La respuesta es sí y dicha relación será de gran utilidad para tener un modelo algebraico (cociente) del modelo geométrico (identificación) del espacio X.

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{T}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (Y, f(\mathcal{T})) \\
\left(X/\sim, p(\mathcal{T})\right) \arrow[ur, "\overline{f} = f \circ p^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & f(x) \\
{[x]} \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.5: *Construcción del homeomorfismo entre el cociente y la identificación.*

El resultado fundamental que vamos a ver es que si tenemos una construcción como la del triángulo de la figura 3.5, entonces podemos construir una aplicación entre el conjunto con la topología imagen y el cociente de manera que ésta sea homeomorfismo. Para ello, a continuación vamos a ver una serie de resultados que justifican las propiedades de la aplicación mencionada a través de las dos aplicaciones fundamentales de la construcción: la identificación f y la proyección p.

Proposición

Sea $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva y $p : X \to X/\sim$ la proyección canónica, entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} f \circ p^{-1} =: \overline{f} : X/\sim &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

existe y está bien definida si y sólo si la relación de equivalencia es $x \sim_f y$.

Demostración:

La implicación de izquierda a derecha es natural porque, como la aplicación $\overline{f}$ asigna a cada elemento de la clase su imagen por f, para que una misma clase sea consistente y tenga una única imagen todos los elementos de dicha clase deben tener la misma, es decir, que si $x \sim y$ entonces $f(x) = f(y)$.

Recíprocamente, si ocurre que $x \sim y$ implica que $f(x) = f(y)$ hemos conseguido que la imagen que asigna $\overline{f}$ a una clase de equivalencia concreta no dependa del representante escogido, pues todos tienen la misma imagen.

Proposición

Sea $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva y $p : X \to X/\sim$ la proyección canónica del cociente inducido por $\sim_f$, entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} f \circ p^{-1} =: \overline{f} : X/\sim &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es una biyección entre espacios topológicos.

Demostración:

La suprayectividad de f nos asegura que para cualquier $y \in Y$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) = y$ y, como $[x]$ viaja a $f(x) = y$ por la aplicación $\overline{f}$, ya tenemos un elemento en el cociente del que es imagen y.

Para probar la inyectividad basta con escoger dos clases $[x], [y] \in {}^{X}\!/\!_{\sim}$ cuyas imágenes $\overline{f}\,[x]$ y $\overline{f}\,[y]$ coincidan y ver que deben ser la misma clase:

$$\overline{f}\,[x] = \overline{f}\,[y] \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x \sim_f y \Rightarrow [x] = [y]$$

Proposición

Sea $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva y $p : X \to {}^{X}\!/\!_{\sim}$ la proyección canónica del cociente inducido por $\sim_f$, entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} f \circ p^{-1} =: \overline{f} : {}^{X}\!/\!_{\sim} &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es continua si y sólo si f es continua.

Demostración:

Supongamos que la función $\overline{f}$ es continua, entonces dado un abierto $U \in f\mathcal{T}$ el conjunto $\overline{f}^{-1}U$ es abierto en $\overline{\mathcal{T}}$. Como la proyección p es una aplicación continua, entonces $p^{-1}\overline{f}^{-1}U$ es un abierto de $\mathcal{T}$, pero como $f^{-1}U = p^{-1}\overline{f}^{-1}$ hemos demostrado que la imagen inversa por f de abiertos de $f\mathcal{T}$ es abierta en $\mathcal{T}$.

Recíprocamente, supongamos que la función f es continua y tengamos en cuenta que $\overline{f}^{-1}U = p \circ f^{-1}U$. Si tomamos un abierto U de $f\mathcal{T}$, entonces $f^{-1}U$ es abierto de $\mathcal{T}$. Es más, $f^{-1}U$ es abierto saturado de $\mathcal{T}$, lo que quiere decir que $\forall y \in X : \exists x \in U$ tal que $f(y) = f(x) \Rightarrow y \in U$. Este último razonamiento hace evidente que también es un abierto saturado para la aplicación p y, como los abiertos del cociente son las imágenes de los abiertos saturados del conjunto inicial (pues la topología del cociente es la topología imagen directa de la aplicación p), entonces $pf^{-1}U$ es abierto de $\overline{\mathcal{T}}$. Y se tiene el resultado de observar que $\overline{f}^{-1}U = p \circ f^{-1}U$.

Los resultados anteriores prueban que si f es identificación, entonces la aplicación $\overline{f}$ está bien definida, es biyectiva y es continua. Vamos a ver para terminar que también la inversa es continua, es decir, $\overline{f}$ es homeomorfismo. Pero además, se va a verificar que se obtiene el recíproco, esto es, que si $\overline{f}$ es homeomorfismo podemos afirmar que f es una identificación.

Proposición

Sea $f : X \to Y$ una aplicación sobreyectiva y $p : X \to {}^{X}\!/\!_{\sim}$ la proyección canónica del cociente inducido por $\sim_f$, entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} f \circ p^{-1} =: \overline{f} : {}^{X}\!/\!_{\sim} &\longrightarrow Y \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es homeomorfismo si y sólo si f es identificación.

Demostración:

Para probar la implicación de izquierda a derecha falta solo probar que la aplicación inversa de $\overline{f}$ es continua. Para ello, escojamos un abierto $U \in \overline{\mathcal{T}}$ y veamos que ocurre con $\overline{f}U$. Por la definición de $\overline{f}$, sabemos que $\overline{f}U = f \circ p^{-1}U$ y el conjunto $p^{-1}U$ es abierto saturado (por la continuidad y la relación de equivalencia) de $\mathcal{T}$. Por último, como sabemos que los abiertos de $f\mathcal{T}$ son las imágenes de los abiertos saturados de $\mathcal{T}$, entonces $f \circ p^{-1}U$ es abierto de la topología imagen directa.

La implicación de izquierda a derecha cumple trivialmente la parte de la sobreyectividad para que sea identificación porque hemos visto que para que el cociente esté bien definido y sea una aplicación biyectiva es indispensable, luego sólo hay que probar que la topología tiene que ser la topología imagen directa. Sin embargo, este último punto es muy sencillo. Escogido un abierto cualquiera $V \in \mathcal{T}'$, vemos que $f^{-1}V = p^{-1}\overline{f}^{-1}V$. Como $\overline{f}$ es homeomorfismo, $W := \overline{f}^{-1}V$ es abierto de $p\mathcal{T}$ y, como p es continua, $p^{-1}W$ es abierto de $\mathcal{T}$. Por tanto, hemos demostrado que si eres abierto de la topología $\mathcal{T}'$, entonces tu preimagen es abierta en $\mathcal{T}$, es decir, que $\mathcal{T}' \subset f\mathcal{T}$. Como $f\mathcal{T}$ es la más fina que hace f continua, tenemos que $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$.

Observación:

Este último resultado acerca del homeomorfismo existente cuando f es una identificación permite considerar, tal y como hemos comentado, el cociente $X/\sim$ como la definición algebraica del modelo geométrico Y. En general, los cocientes son cómodos para definir los espacios algebraicamente y las identificaciones son mejores para estudiar las propiedades que tiene dicho espacio y es por ello por lo que es útil tener construcciones como la mencionada en la figura 3.5.

Ejemplo:

Podemos retomar los ejemplos que vimos para identificaciones y añadir el cociente del que son modelo las identificaciones.

- Circunferencia $\mathcal{S}^1$:

  Si recordamos habíamos definido la aplicación $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ que asigna a cada punto del intervalo $[0,1]$ su correspondiente punto de la circunferencia y seguimos los pasos descritos en este último apartado, tenemos que asociar en la misma clase de equivalencia los puntos con la misma imagen, es decir, todos los puntos forman una clase de equivalencia distinta excepto el 0 y el 1 que forman la misma.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{cont.}"] \\
{[0,1]}/_{0 \equiv 1} &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.6: *Triángulo de relaciones entre el segmento* $[0,1]$*, el cociente que asocia el* 0 *y el* 1 *y la circunferencia unidad.*

  De esta manera, el conjunto cociente que genera la relación de inyectividad de la aplicación f es $X/\sim = \{\{t\} : 0 < t < 1, \{0,1\}\}$ y, como habíamos visto que la aplicación f era una identificación, la aplicación $\overline{f}$ del cociente al modelo es un homeomorfismo.

- Cilindro:

  Recuperando la aplicación del ejemplo del cilindro, aplicamos el mismo razonamiento de agrupar en la misma clase de equivalencia a los puntos que tengan la misma imagen, es decir, que todos los puntos tendrán su propia clase individual salvo los puntos de los lados izquierdo y derecho que tendrán asociado su homólogo del lado contrario.

$$
\begin{tikzcd}
{[0,1]\times[0,1]} \arrow[r] \arrow[d] & C \subset \mathbb{R}^3 \arrow[dl] \\
{[0,1]\times[0,1]}\big/(0,t)\equiv(1,t) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 3.7: *Triángulo de relaciones entre el cuadrado unidad, el cociente que asocia el lado izquierdo con el derecho y el cilindro del ejemplo.*

De nuevo y para terminar, como la aplicación f que habíamos definido era una identificación, la función que asocia el modelo con el cociente $X\big/\sim \; := \{(x,y) \in (0,1)\times[0,1] \text{ y } (0,y) \sim (1,y)\}$ es un homeomorfismo.

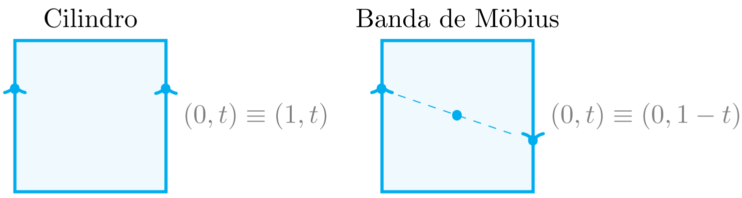


Figura 3.8: *Ejemplos de identificaciones habituales.*

PRODUCTOS FINITOS

El objetivo de esta construcción es, dado un producto cartesiano $Y := X_1 \times \cdots \times X_r$, generar una topología que garantice la continuidad de las aplicaciones $p_i : Y \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ al ser equipada sobre el mismo, es decir, que haga continuas las proyecciones sobre cada factor. Inmediatamente uno repara en que la discreta sobre Y cumple los requisitos. Sin embargo, el interés está en saber cuál es la topología menos fina que hace las p_i continuas.

Tal y como venimos haciendo en las construcciones anteriores, vamos a tratar de introducir lo mínimo indispensable para verificar la continuidad. En primer lugar, como las preimágenes de abiertos deben ser abiertos, entonces $\forall U_i \in \mathcal{T}_i : p_i^{-1}U_i = X_1 \times \ldots U_i \times \ldots \times X_r$ debe ser un abierto. Como para que pueda ser topología la intersección finita de abiertos tiene que ser abierto, sabemos que $\bigcap_{i=1}^r p_i^{-1}U_i = U_1 \times \ldots \times U_r$ debe ser abierto, pero a diferencia de como venía ocurriendo en las construcciones anteriores no podemos decir aún que sea topología porque las uniones arbitrarias no funcionan bien (las uniones de productos no tienen por qué ser producto).

Sin embargo, se puede demostrar sin demasiada dificultad que el conjunto $\{U_1 \times \cdots \times U_r$ donde $U_i \in \mathcal{T}_i\}$ caracteriza una topología en Y de la que es base de abiertos y, de esta manera, ahora sí tenemos determinada de modo único la topología buscada.

Definición (Topología Producto)

*Sea $Y := X_1 \times \cdots \times X_n$ un producto cartesiano de espacios topológicos y $p_i : Y \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ las proyecciones sobre cada uno de sus factores, definimos la **topología producto** $\prod_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ como aquella determinada por la base de abiertos:*

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \ldots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

Ejemplo:

Si consideramos la topología usual $\mathcal{T}_u$ equipada en $\mathbb{R}^n$ estudiar el resultado anterior es inmediato, pero si consideramos como base de abiertos las bolas cuadradas en lugar de las bolas redondas que utilizamos habitualmente. Este último detalle s relevante para poder ver el producto pues las bolas cuadradas son productos cartesianos de intervalos de $\mathbb{R}$ con la topología usual $\mathcal{T}_u$, lo que nos proporciona un ejemplo real de la aplicación de la construcción anterior.

Teorema (Propiedad universal de la topología producto)

Sea $g : (Z, \mathcal{T}'') \to (Y, \mathcal{T}')$ y $p_i : (Y, \mathcal{T}') \to (X_i, \mathcal{T}_i)$:

$$\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{T}') \arrow[r, "p_i"] & (X_i,\mathcal{T}_i) \\
(Z,\mathcal{T}'') \arrow[u, "{g=(g_1,\ldots,g_r)}"] \arrow[ur, "g_i = p_i \circ g"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.9: *Ilustración de la composición propuesta*

entonces $\mathcal{T}' = \prod_{i=1}^r \mathcal{T}_i$ si y sólo si:

$$g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}$$

Demostración:

$\Rightarrow$) $\mathcal{T}' = \prod_{i=1}^r \mathcal{T}_i$:

- g cont. implica que g_i cont. porque $g_i = p_i \circ g$ y p_i es continua si la topología es la producto.
- g_i cont. implica que $g^{-1}(U_1 \times \ldots \times U_r) = \overbrace{g_1^{-1}(U_1)}^{\in \mathcal{T}''} \cap \ldots \cap \overbrace{g_r^{-1}(U_i)}^{\in \mathcal{T}''} \in \mathcal{T}''$ y como esto es una intersección finita de abiertos, es abierto.

$\Leftarrow$) Para demostrarlo, vamos a ver el doble contenido de $\mathcal{T}' = \prod_{i=1}^r \mathcal{T}$:

Como la propiedad de caracterización se cumple para cualquier función g que escojamos, podemos elegir la identidad de modo que:

$$\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{T}') \arrow[r, "p_i"] & (X_i,\mathcal{T}_i) \\
(Y,\mathcal{T}') \arrow[u, "id\text{ cont.}"] \arrow[ur, "p_i \circ id = p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

La continuidad de id nos asegura la continuidad de $g_i = p_i \circ id = p_i$. Como tenemos que p_i es continua y $\prod \mathcal{T}_i$ es la topología menos fina que verifica esto, entonces $\prod \mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}'$.

Para ver el otro contenido, elegimos de nuevo la identidad, pero esta vez la identidad meramente conjuntista:

$$\begin{tikzcd}
(Y,\mathcal{T}') \arrow[r, "p_i"] & (X_i,\mathcal{T}_i) \\
(Y,\prod \mathcal{T}_i) \arrow[u, "id"] \arrow[ur, "p_i \circ id = p_i\text{ cont.}"'] &
\end{tikzcd}$$

En este caso, sabemos que $g_i = p_i \circ id = p_i$ es continua porque p_i lo es por construcción. Esto quiere decir que la identidad conjuntista id es continua, es decir, $\forall U \in \mathcal{T}' : id^{-1}U = U \in \prod \mathcal{T}_i$. Por tanto, tenemos que $\mathcal{T}' \subset \prod \mathcal{T}_i$.

Ejemplo:

Para ejemplificar que la topología producto no se da “por defecto”, vamos a demostrar que la topología radial $\mathcal{T}_{\text{rad}}$ no es producto.

Para verlo, vamos a tomar como abierto el conjunto $U := \mathbb{R}^2 \setminus$ arco que se ve en la figura.

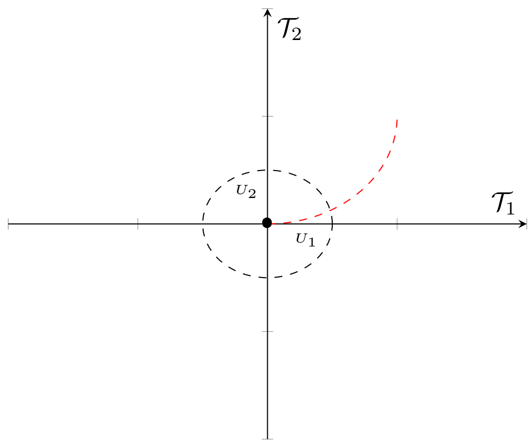


Figura 3.10: *La topología radial no es producto de topologías.*

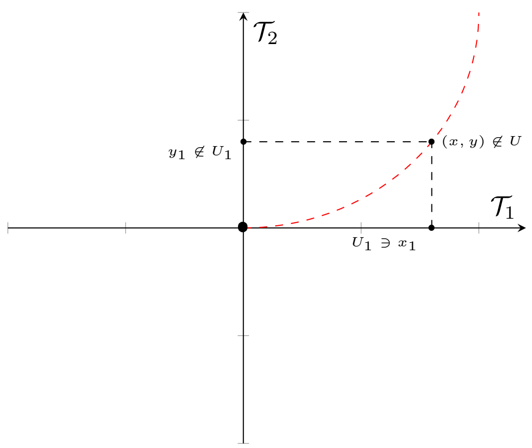


Figura 3.11: *La topología radial no es producto de topologías.*

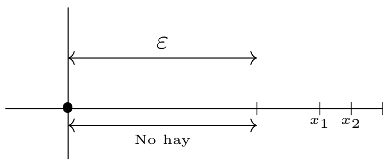


Figura 3.12: *La topología radial no es producto de topologías.*

Si consideramos que la topología radial es producto, entonces existen $U_1 \times U_2 \subset U$ abiertos de alguna topología en las proyecciones y además tales que $U_1 \times U_2 \ni (0, 0)$. Escogemos un $x_1 \in U_1$ cualquiera y para cualquiera que escojamos podemos encontrar un y_1 tal que $(x_1, y_1) \in$ arco, lo cual implica que $y_2 \notin U_2$ (porque si estuviera no podría estar en el arco).

Este último resultado indica que el segmento $[(0, y_1), (x_1, y_1)]$ no está en $U_1 \times U_2$, así que si escogemos x_1 cada vez más cercanos al punto $(0, 0)$ se nos va formando una sucesión de segmentos cada vez más pequeños y más cercanos al eje de abcisas tal y como se muestra en la figura. De esta manera, cualquier recta con pendiente $m \in (0, \pi/2)$ tiene infinitos puntos de corte con estas rectas cada vez más cercanas a $(0,0)$, es decir, infinitos puntos que no están en $U_1 \times U_2$, así que llegamos a contradicción porque dicho producto debería ser abierto radial.

La reducción al absurdo anterior demuestra que no puede haber ninguna sucesión de puntos x_k que converja a 0, pues de otro modo ocurriría lo mencionado anteriormente. Es decir, que hay un intervalo $(0, \varepsilon)$ donde no puede haber ningún $x_1 \in U_1$, pero si esto fuese así toda la banda $(0, \varepsilon) \times \mathbb{R}$ no estaría en U, luego absurdo de nuevo.

Proposición

Sea $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ un espacio topológico producto, entonces:

1. *Las proyecciones $p_i : Y \to X_i$ sobre los factores del producto son aplicaciones abiertas.*
2. *La aplicación natural*[1] *que sumerge un factor en el producto*

$$\begin{aligned} \alpha_j : X_j &\longrightarrow Y \\ x_j &\longmapsto (a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_r) \end{aligned}$$

   es una inmersión que llamamos aplicación parcial.

Demostración:

1. Nos vale con probarlo para una base: $p_i (U_1 \times \ldots \times U_r) = U_i$
2. Trivialmente es inyectiva y continua. Por último, $X_i \to j(X_i)$ es homeomorfismo, es decir, es abierta porque:

$$\begin{cases} \alpha_j (X_j) = \{a_1\} \times \ldots \times X_j \times \ldots \times \{a_r\} \\ \alpha_j (U_j) = \{a_1\} \times \ldots \times U_j \times \ldots \times \{a_r\} = \alpha_j (X_j) \cap (X_1 \times \ldots \times U_j \times \ldots \times X_r) \end{cases}$$

   que es abierto porque estamos restringiendo la topología producto a $\{a_1\} \times \ldots \times X_i \times \ldots \times \{a_r\} = \alpha_j (X_j)$.

Ejemplo:

Podemos redemostrar el ejemplo anterior que prueba que la topología radial no es producto de forma más sencilla si utilizamos este resultado, pues en caso de serlo sus factores deberían ser la usual y el producto de usuales es usual, que es distinto de la radial.

Observación:

En general, es una buena idea trabajar con productos en la topología producto. En cierta manera, en una topología producto todo "se genera en productos":

- Bases de entornos: $\mathcal{V}^a = \mathcal{V}^{a_1} \times \ldots \times \mathcal{V}^{a_r} \overset{mut??}{=} \{V_1 \times \ldots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}^{a_i}\} \, (a \in Y)$.
- Base de abiertos: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_r = \{B_1 \times \ldots \times B_r : B_i \in \mathcal{B}_i\}$ (esto repite la construcción de $\prod_i \mathcal{T}_i$)

SUMAS FINITAS

El objetivo de esta construcción es, dada una unión[2] $Y := X_1 + \cdots + X_r := X_1 \times \{1\} \cup \cdots \cup X_n \times \{n\}$, generar una topología que garantice la continuidad de las aplicaciones $j_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to Y$ al ser

[1] Obviamente, con los a_i fijados.

[2] Los índices i de las expresiones $X_i \times \{i\}$ se utilizan para poder utilizar el mismo conjunto como dos sumandos distintos y diferenciarlos entre sí (pues de otra manera la unión de ambos sería solo uno de ellos).

equipada sobre el mismo, es decir, que haga continua la suma desde cada sumando. Inmediatamente uno repara en que la trivial sobre Y cumple los requisitos. Sin embargo, el interés está en saber cuál es la topología más fina que hace las j_i continuas.

De nuevo, vamos a tratar de introducir todo lo posible sin violar la condición de continuidad como abierto en la topología. En primer lugar, nos damos cuenta de que cualquier abierto $U_i \in \mathcal{T}_i$ de una de las topologías concretas es preimagen $j_i^{-1}(U_i \times \{i\})$, luego si estos son abiertos respetan la definición de continuidad. Como son los únicos sobre los manejamos algo que podamos utilizar, la idea es proponer como base de la topología suma $\mathcal{T}_1 + \cdots + \mathcal{T}_n$ el conjunto $B := \{U_1 \times \{1\}, \cdots, U_n \times \{n\} : U_i \in \mathcal{T}_i\}$.

Definición (Topología Suma)

*Sea $Y := X_1 + \cdots + X_r := X_1 \times \{1\} \cup \cdots \cup X_n \times \{n\}$ la unión de espacios topológicos $(X_i, \mathcal{T}_i)$, definimos la **topología suma** $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i$ como aquella determinada por la base de abiertos:*

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \{1\}, \ldots, U_r \times \{r\} : U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

Observación:

Por como se ha definido la topología, es trivial ver que cada sumando $X_i \times \{i\}$ es abierto en la topología suma $\sum_{i=1}^{r} \mathcal{T}_i$. Pero es que además también son cerrados, pues su complementario $Y \setminus (X_i \times \{i\}) = \bigcup_{j \neq i} (X_j \times \{j\})$ es unión de abiertos, es decir, abierto.

Proposición

Sea $Y := X_1 + \cdots + X_n$ el espacio topológico suma, la aplicación inclusión de cada sumando

$$j_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to \left(X_i \times \{i\}, \mathcal{T}|_{X_i \times \{i\}}\right), \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

es una inmersión abierta y cerrada.

Demostración:

Para probar que es inmersión hay que probar que la aplicación anterior es un homeomorfismo. Para empezar, por construcción, la aplicación es continua y además biyectiva, pues manda el conjunto a sí mismo conjuntistamente hablando. Ahora basta probar que es abierta y cerrada:

- Abierta: $j_i(U_i) = U_i \times \{i\} \in \mathcal{T}$
- Cerrada: $Y \setminus j_i(U_i) = Y \setminus U_i$ que es cerrado en $\sum \mathcal{T}_i$.

Teorema (Caracterización topología suma)

Sea $g : (Y, \mathcal{T}') \to (Z, \mathcal{T}'')$ y $j_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T}')$:

$$\begin{tikzcd}
(X_i, \mathcal{T}_i) \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "g|_{X_i} = g \circ j_i"'] & (Y, \mathcal{T}') \arrow[d, "g"] \\
 & (Z, \mathcal{T}'')
\end{tikzcd}$$

Figura 3.13: *Ilustración de la composición propuesta*

entonces $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 + \ldots + \mathcal{T}_r$ si y sólo si:

$$g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}$$

Demostración:

Análoga a las anteriores construcciones.

Política general:

Localmente $Y = X_1 + \ldots + X_r$ es como sea cada X_i. Por ejemplo, las bases de entornos de Y son las de los sumandos. Globalmente, se trata cada sumando separadamente. Por ejemplo, las bases de abiertos de los sumandos se unen para dar una base de abiertos de Y. Olvidando el tecnicismo $X_i \times \{i\} \equiv X_i$:

Y es unión disjunta de los sumandos
Los sumando son subespacios abiertos y cerrados de Y

Es un formalismo para hacer cómodamente otras construcciones. Por ejemplo, "pegar dos discos por sus bordes" sería:

$$\text{Disco } D \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \text{ borde } \partial D = \mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$D_1 + D_2 \big/ \sim \quad \overbrace{(p, 1)}^{\in \partial D} \sim (p, 2)\,.$$

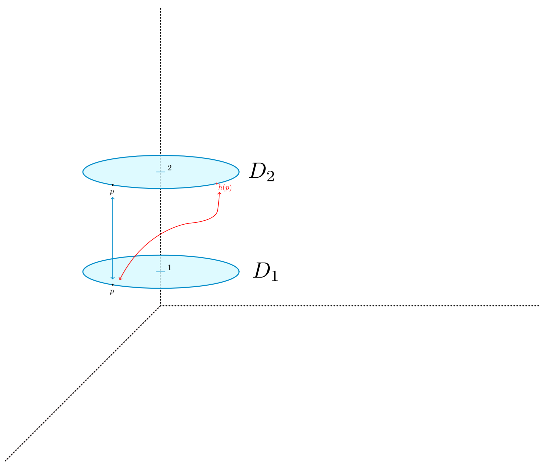


Figura 3.14: *Dos discos*

y más elaborado $h : \partial D \overset{\text{homeo.}}{\approx} \partial D$ con $\overbrace{p}^{\in \partial D} \sim h\,(p)$.

Finalmente, hay otros conceptos de "suma" más significativos que veremos en algún ejemplo.

ESPACIOS PROYECTIVOS REALES

Geometría lineal

En primer lugar, veamos un repaso de lo visto en geometría lineal sobre espacios proyectivos.

Definición (Espacio proyectivo real)

Usando $\sim$, proporcionalidad:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{P}^n = {}^{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}\!/\!_{\sim} \Rightarrow \mathbb{P}^n = \{\textit{rectas vectoriales de } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Que en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{P}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) &\mapsto (x_0 : \ldots : x_n)\,. \end{aligned}$$

Observación:

Las ecuaciones serán de la forma: $h \in \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n]$ homogénea $\Rightarrow \begin{cases} h(x) = 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$ está bien definido en $\mathbb{P}^n$. Sabemos que el grado de la ecuación homogénea h nos dará lugar a:

- Grado 1: Variedades proyectivas lineales.
- Grado 2: Cuádricas proyectivas.
- Grado arbitrario: Variedades proyectivas algebraicas.

Definición (Cartas afines)

Sea $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano proyectivo. Entonces, tenemos un hiperplano lineal $\hat{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con una forma lineal asociada $h = 0$, de la siguiente forma:

$$H = {}^{\hat{H} \setminus \{0\}}\!/\!_{\sim}$$

*Decimos que H es **hiperplano del infinito** de la **carta afín** $U = \mathbb{P}^n \setminus H$.*

Proposición

La aplicación

$$\pi| : \underbrace{\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\textit{Hiperplano afín}} \to \underbrace{\mathbb{P}^n \setminus H}_{\{h \neq 0\}} = U$$

es una biyección.

Topología de espacio proyectivos

Para la topología en U usaremos la imagen directa de la usual en $\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Proposición

Con la anterior suposición tenemos que la aplicación:

$$\pi| : \{h = 1\} \to U$$

es un homeomorfismo.

Demostración:

Ya sabemos que es biyección por lo que queda ver que es continua y abierta/cerrada. Continua lo será por tener U la topología imagen directa. Y abierta porque???

Proposición

La siguiente definición es topología en $\mathbb{P}^n$:

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Demostración:

Ni idea

Proposición (Topología en Pn)

- *Cociente de la usual vía* $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n : (x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0 : \ldots : x_n)$
- *"Suma" de las definidas en las cartas afines:*

$$W \text{ abierto si } W \cap U \text{ es abierto } \forall U \text{ carta afín.}$$

Estas dos topologías coinciden.

Demostración:

1. U es abierto en la topología cociente ya que $\pi^{-1}U = \{h \neq 0\}$ es abierto usual.
2. La topología cociente en U coincide con la topología de carta afín:

$$W \subset U : \pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{\left(\pi^{-1}W\right) \cap \{h=1\}}_{=\left(\pi|_{\{h=1\}}\right)^{-1}W}$$

para la top. cociente

para la top. de carta afín

$$\pi^{-1}W \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1} \Leftrightarrow \left(\pi|^{-1}_{\{h=1\}}\right) W \overset{\text{ab.}}{\subset} \{h=1\}$$

W abierto top. cociente $\Updownarrow$ (izquierda); W abierto top. carta afín $\Updownarrow$ (derecha)

Figura 3.15: *Equivalencia entre las topologías cociente y suma.*

1. + 2. $\Rightarrow$ La top. cociente está generada por las topologías de las cartas afines, que forman un recubrimiento abierto de $\mathbb{P}^n$.

Proposición

En este caso, la $\mathcal{T}_{cociente}$ tendrá como base: $\left\{\pi(B) \subset U : B \overset{ab.}{\subset} \{h=1\},\ h \in \mathbb{P}[x_0, \ldots, x_n]\right\}$ *homogéneo de grado* $1 : G = \bigcup_U G \cap U$ *abierto en* $\mathbb{P}^n$ *y abierto en* U.

Observación:

En $U_1 \cap U_2$ la topología definida por π_1 = definida por π_2.

Observación:

De lo anterior deducimos:

1. U_1, U_2 dos cartas afines $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ abiertos.

   Demostración:

$$\text{Cartas afines: } U_i = \{h_1 \neq 0\} \begin{cases} \pi| : \{h_1 = 1\} \to U_1 \text{homeo.} \\ (\pi_1)^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} \overset{\text{ab.}}{\subset} \{h_1 = 1\} \end{cases}$$

2. Las topologías de U_1 y U_2 coinciden en $U_1 \cap U_2$.

   Demostración:

   De nuevo conviene entenderlo con cartas:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} \arrow[dr, "\substack{\text{homeo.}\\ \text{para } U_1}"] \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{homeo?}"'] & & & x = {}^{y}\!/_{h_1}(y) \arrow[dd, leftrightarrow, "\text{homeos usuales}"] \\
& U_1 \cap U_2 \Big\} \arrow[r, Rightarrow] & & \\
\mathbb{R}^{n+1} \supset \{h_1 \neq 0, h_2 = 1\} \arrow[ur, "\substack{\text{homeo.}\\ \text{para } U_2}"'] & & & y = {}^{x}\!/_{h_2}(x)
\end{tikzcd}$$

Definición (Atlas afín canónico)

No se suelen utilizar todas las cartas afines: $n+1$ distintas ya cubren $\mathbb{P}^n$. Típicamente $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \ldots \cup U_n$ con:

$$U_i = \{x_i \neq 0\} \leftrightarrow \{\underbrace{x_i = 1}_{\equiv \mathbb{R}^n}\} : (x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \underbrace{\cancel{1}}_{\mathbb{R}^n \to}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right), 0 \leq i \leq n$$

Proposición (Cociente antipodal)

Toda recta de $\mathbb{R}^{n+1}$ corta a $\mathbb{S}^n : x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ en dos puntos antipodales, así que denotamos un "sub" cociente, que es también identificación.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \supset \mathbb{S}^n \arrow[d] \arrow[d, shift left=6, "\pi|"] \\
\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

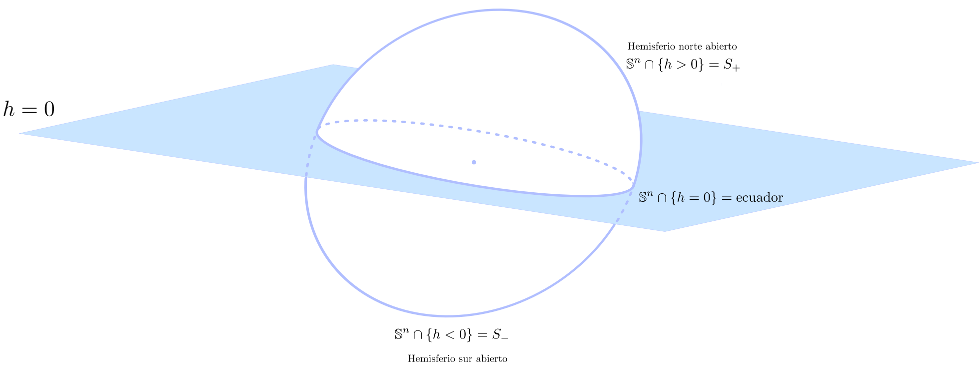
Figura 3.16: *Cociente antipodal de $\mathbb{S}^n$*

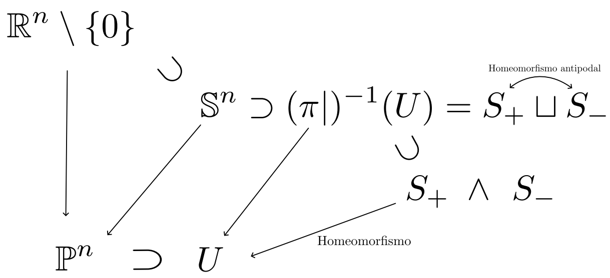
Demostración:

Como antes tenemos conos: $\pi^{-1}W =$ cono sobre $\underbrace{\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}W}_{=(\pi/\mathbb{S}^n)^{-1}W}$.

Observación:

Las cartas afines tienen una representación muy conveniente:





$$\forall x \in \mathbb{P}^n,\ \exists H \not\ni x \implies x \in U$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n \text{ homeomorfismo local}}$$

Figura 3.17: *Representación cartas afines.*

Proposición (Cociente de un disco)

Consideremos un disco:

$$E = \{h = 0, x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} = \partial \begin{cases} \overline{S}_+ = \mathbb{S}^n \cap \{h \geq 0\} \text{ hemisferio cerrado.} \\ D^n = \{h = 0, x_0^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\} \text{ disco.} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, equal] & E \\ \overline{S}_+ \arrow[u, phantom, "\partial\cup"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & D^n \arrow[u, phantom, "\cup\partial"] \arrow[dl, "\pi \circ \alpha^{-1}"] \\ \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

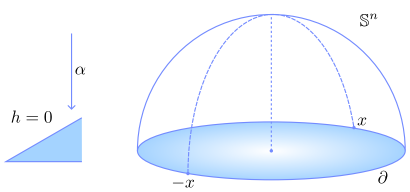
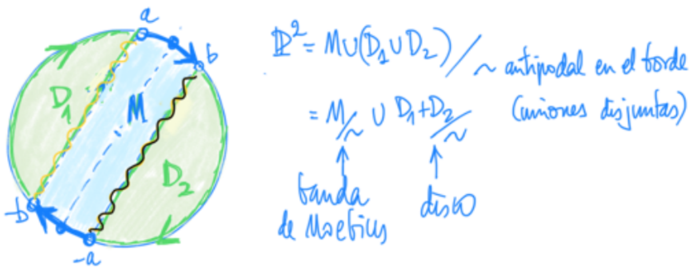
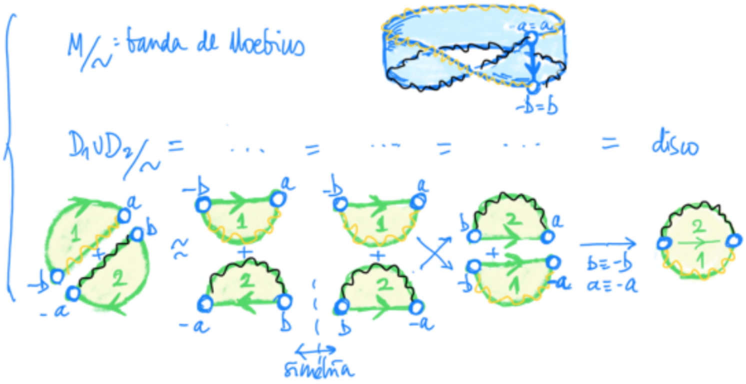


Figura 3.18: $\mathbb{R}^n$ *se obtiene identificando puntos antipodales del borde de un disco.*

Ejemplo:

$\mathbb{P}^2 \setminus D^2 =$ banda de Möbius.





SEPARACIÓN

En este apartado vamos a estudiar la noción de separación en profundidad. Veremos que propiedades tienen los espacios que poseen esta característica y qué consecuencias tiene tenerla sobre el resto de la topología del mismo.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

En primer lugar, vamos a tratar de definir el concepto de separación. Al principio, es un poco complicado asumir que esta propiedad no tiene que cumplirse trivialmente porque estamos muy mal acostumbrados con $\mathbb{R}^n$, pero es importante distinguir aquellos espacios donde no podemos separar claramente dos puntos.

Definición (Espacio Hausdoff o T_2)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **Hausdorff o** T_2 si y sólo si para todo par de puntos distintos $x, y \in X$ existen algunos entornos de cada uno disjuntos entre sí.*

Proposición

Sea X un espacio topológico, si es Hausdorff podemos encontrar dichos entornos abiertos y disjuntos.

Demostración:

Para cada entorno $V \overset{\text{ent.}}{\subset} X$, por ser entorno, existe $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y $U \subset V$ que también es entorno. Escogiendo a esos dos abiertos (uno en cada entorno) siguen siendo disjuntos y cumplen la definición de T_2.

Proposición

Sea X un espacio topológico Hausdorff, entonces los puntos son cerrados.

Demostración:

Para cualquier $x \in X$ y cualquier $y \in X \setminus \{x\}$, por ser Hausdorff, existe un entorno abierto $U^y \not\ni x$. Por tanto, podemos escribir el complementario de $\{x\}$ como la unión de todos esos entornos para los puntos que no son x, es decir, $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U^y$ y como el complementario es unión de abiertos, $\{x\}$ es cerrado.

Observación:

1. Un espacio topológico con la topología de los complementarios finitos $(X, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ no es Hausdorff y, sin embargo, tiene puntos cerrados.

No es Hausdorff porque, si X es infinito, dos abiertos cualesquiera se cortan ya que si cogemos dos abiertos $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\text{CF}}$, como sus complementarios $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son finitos y X es infinito, entonces siempre podremos encontrar un $x \notin X \setminus U_1 \cup X \setminus U_2$, es decir, que $x \in U_1 \cap U_2$.

2. Si una topología contiene a una topología Hausdorff, entonces también es Hausdorff.

   Este es precisamente el caso de la radial $\mathcal{T}_{\text{rad}}$ que contiene a la usual $\mathcal{T}_u$, que es Hausdorff. Que la usual es Hausdorff es sencillo, pues para dos puntos x e y distintos basta con escoger $B(x, \varepsilon)$ y $B(y, \varepsilon)$ que son disjuntos si tomamos $\varepsilon < \frac{\|x-y\|}{2}$. Ahora ver que la radial es Hausdorff es trivial, pues como los abiertos usuales son abiertos radiales podemos coger las mismas bolas como entornos.

3. En la topología del punto $(X, \mathcal{T}_a)$ el punto clave a no es cerrado, lo que impide que sea Hausdorff.

   Si el punto a fuera cerrado, el conjunto $X \setminus \{a\}$ sería abierto, pero en esta topología la definición de abierto es contener al punto a y precisamente $X \setminus \{a\}$ no lo contiene por definición.

A continuación, lo que vamos a ver es uno de los teoremas más habituales y útiles que hemos venido utilizando en el Análisis en general. En primer lugar, el conjunto de puntos donde dos funciones coinciden es cerrado (o donde una toma un cierto valor también porque se puede considerar dicho valor como la aplicación constante ese valor) y, en segundo lugar, si dos funciones coinciden en un conjunto denso, entonces coinciden en todos sus puntos.

Proposición

Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas e Y un espacio topológico Hausdorff, entonces el conjunto de puntos donde coinciden:

$$\{f = g\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

es un conjunto cerrado.

Demostración:

Para demostrar que nuestro conjunto es cerrado habrá que demostrar que el complementario es abierto, es decir, que si un punto cumple $f(x) \neq g(x)$ entonces habrá un entorno suyo cuyos puntos también verificarán $f(y) \neq g(y)$. Con esto, tendremos que $\{f \neq g\}$ es entorno de todos sus puntos y, por tanto, abierto.

Si $f(x) \neq g(x)$, entonces por ser T_2, $\exists V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset$. Como la aplicación f es continua, entonces $f^{-1}V^{f(x)}$ y $g^{-1}V^{g(x)}$ son entornos de x y, por tanto, su intersección $f^{-1}V^{f(x)} \cap g^{-1}V^{g(x)} = W^x$ es también entorno de x (y es no vacío porque x pertenece a él).

Si observamos ahora la intersección de W^x con el complementario $\{f = g\}$, entonces vemos que:

$$\forall y \in V^x \Rightarrow \begin{cases} f(y) \in V^{f(x)} \\ g(y) \in V^{g(x)} \end{cases} \overset{V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset}{\Rightarrow} f(y) \neq g(y)$$

es decir, que $W^x \cap \{f = g\} = \emptyset$, luego $W^x \subset \{f \neq g\}$.

Corolario (Extensión por continuidad a la adherencia)

Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas, Y un espacio topológico Hausdorff y $\{f = g\}$ es denso[1]*, entonces $f \equiv g$.*

Demostración:

Si f y g coinciden en un subconjunto A, entonces $\{f = g\} \supset A$ y como $\{f = g\}$ es cerrado, entonces $\{f = g\} \supset \overline{A}$. Como A es denso, entonces $\overline{A} = X$ y esto implica que $\{f = g\} \supset X$, es decir, que $\{f = g\} = X$.

[1] Esto quiere decir que existe un subconjunto $A \subset X$ denso donde las funciones coinciden.

Con este último corolario, reafirmamos lo comentado al inicio. Cuando se dan las condiciones adecuadas en un espacio Hausdorff, podemos extender una función en un conjunto a su adherencia.

Observación:

Tiene especial relevancia que el espacio real usual $\mathbb{R}$ sea Hausdorff y vamos a ver por qué. Si tenemos una función $f : X \to Y$ continua donde Y es Hausdorff, entonces la preimagen $f^{-1}(y)$ de cualquier $y \in Y$ es un cerrado de X porque hemos visto que en estas condiciones los puntos de Y son cerrados y la preimagen de cerrados por continuidad es cerrada.

¿Por qué es entonces relevante que $\mathbb{R}$ sea Hausdorff? Porque este último resultado implica que cualquier conjunto del estilo $\{x \in X : f(x) = \alpha \text{ donde } \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto cerrado, puesto que dicho conjunto en realidad es $f^{-1}(\alpha)$ y α es cerrado.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como comporta la propiedad definida con respecto a las construcciones del tema Construcciones. Se trata de ver cuándo se conserva, cuándo no y qué hipótesis podemos añadir para que se conserve en los casos que no.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
T_2	$\Rightarrow$	✗	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$

Cuadro 4.1: Tabla de comportamiento de la separación.

Demostración:

1. **Subespacios**:

   Consideremos un subespacio $Y \subset X$ de un espacio X que es Hausdorff. Por ser X Hausdorff, cualesquiera dos puntos $y_1, y_2 \in Y$ verifican que $\exists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset$ donde V^{y_1} y V^{y_2} son entornos en X. Pues si tomamos los correspondientes entornos, pero en la topología relativa a Y, entonces $(V^{y_1} \cap Y) \cap (V^{y_2} \cap Y) = \emptyset$ vemos que siguen sin cortarse.

2. **Cociente**:

   Para demostrar que no se cumple basta con dar un contraejemplo: consideremos el cociente y los respectivos puntos

   $$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \left.\begin{array}{l} y_1 = \mathbb{Q} \in Y \\ y_2 = \sqrt{2} \in Y \end{array}\right\}$$

   y veamos que $\nexists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset$. Cualquier entorno abierto de $\sqrt{2}$ contiene racionales (por su densidad en $\mathbb{R}$), por tanto al saturar contiene $\mathbb{Q}$. Como todo abierto en el cociente es proyección de un saturado, cualquier abierto contiene al punto gordo $\mathbb{Q}$ y, en consecuencia, la intersección nunca es disjunta.

3. **Producto**

   Veamos que se da la doble implicación, es decir, que X e Y son ambos T_2 si y sólo si $X \times Y$ es T_2.

   $\Rightarrow$) Tomamos $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Esto es posible en dos casos:

   - $x_1 \neq x_2$. Como X es $T_2 \Rightarrow \exists V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times Y) \cap (V^{x_2} \times Y) = \emptyset$
   - $y_1 \neq y_2$ podemos hacer lo mismo porque Y es también T_2.

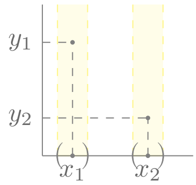


Figura 4.1: Separación en el producto gracias a la separación en el factor.

$\Leftarrow$) Sabemos que $X \approx X \times \{y_0\} \subset X \times Y$. Como $X \times Y$ es T_2 y hemos visto que esta propiedad se hereda por subespacios, entonces $X_0 \times \{y_0\}$ es T_2 y, por homeomorfismo, X también.

4. **Suma**:

Recordemos que se ha definido la suma como la unión disjunta de los sumandos. Esto quiere decir que para cualquier $x \in X$ el propio X es entorno de x y lo mismo ocurre con Y para sus puntos. Esto quiere decir que $X = V^x$, $Y = V^y$ y $V^x \cap V^y = X \cap Y = \emptyset$. Por tanto, los puntos de distintos conjuntos lo verifican.

Si X y Y son ambos T_2, entonces la suma lo es porque hemos visto que entre conjuntos se cumple y si son T_2 dentro del propio conjunto se cumple también. Pero es que además el recíproco es cierto, pues si se cumple en la suma se debe cumplir en cada uno de los conjuntos.

NUMERABILIDAD

Los axiomas de numerabilidad son definiciones y resultados que describen las buenas propiedades que puede tener una topología si algunos elementos como las bases de entornos, las bases de abiertos, los conjuntos densos, etc. son numerables.

AXIOMAS DE NUMERABILIDAD

En esta sección presentamos los cuatro principales resultados sobre numerabilidad: 1^{er} Axioma, 2º Axioma, separable y Lindelöf. Pretendemos desmigajar estos conceptos que muchas veces tomamos como "naturales" porque estamos acostumbrados a trabajar con ellos en $\mathbb{R}^n$, pero que de no aparecer dotan de propiedades muy distintas a los espacios topológicos.

I Axioma

El primer axioma hace referencia a la numerabilidad de las bases de entornos de cualquier punto del conjunto X que estemos estudiando.

Definición (1^{er} Axioma)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **1^{er} Axioma** si y sólo si para cualquier punto $x \in X$ existe una base $\mathcal{V}^x$ de entornos numerable.*

Observación:

Como hemos visto otras veces, de cualquier base de entornos se puede sacar una base de entornos abiertos. De esta manera, si existe una base como la de la definición existe una base $\mathcal{B}^x = \{U_k = \mathring{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ numerable de entornos abiertos.

Proposición

Sea X un espacio topológico 1^{er} Axioma, entonces existe una base de entornos numerable $\mathcal{W}^x := \{W_k\}_{k=1}^{\infty}$, donde $W_k := U_1 \cap \ldots \cap U_k$, compuesta por entornos abiertos y encajados.

Demostración:

Como X es 1^{er} Axioma, existe una base numerable de entornos $\{V_k^x\}_{k=1}^{\infty}$ compuesta por entornos abiertos. Si tomamos el conjunto de los entornos definidos como:

$$\begin{cases} W_1^x = V_1^x \\ W_2^x = V_1^x \cap V_2^x \\ \vdots \\ W_k^x = \bigcap_{i=1}^{k} V_i^x \end{cases}$$

entonces tenemos un conjunto de entornos abiertos y encajados, pues $W_{k+1}^x \subset W_k^x$, y que conforma una base de entornos.

Ejemplo:

1. La topología usual $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es un ejemplo de topología 1$^{\text{er}}$ Axioma, pues el conjunto $\mathcal{W}^x = \{B\left(x, \frac{1}{k}\right) : k \geq 1\}$ es una base de entornos numerable.
2. Las topologías del punto $(X, \mathcal{T}_a)$ y discreta $(X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$ también son ejemplos de topologías 1$^{\text{er}}$ Axioma.
3. La topología de los complementarios finitos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ es un ejemplo de las topologías que no son 1$^{\text{er}}$ Axioma.

   Para verlo, supongamos que sí, que existe una base $\exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k\geq 1}$ de abiertos encajados. Como son abiertos, entonces $W_k = \mathbb{R} \setminus F_k$ donde F_k es un conjunto finito. De esta manera, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ y es no vacía porque es una unión numerable de puntos (y $\mathbb{R}$ es una unión no numerable). Por tanto, si escogemos $y \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W_k$, el abierto $U^x = \mathbb{R} \setminus \{y\}$ es un entorno de $x \in X$, pero no contiene a ningún W_k pues el punto y no pertenece al conjunto.
4. La topología radial $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{rad}})$ tampoco es 1$^{\text{er}}$ Axioma.

   Para verlo, supongamos que sí, que existe una base numerable $\{W_k : W_k \ni x_0\}_{k\geq 1}$ de entornos abiertos de un punto x_0. Denotamos por L_k a las rectas de pendiente $\frac{1}{k}$ que pasan por ese mismo x_0. La intersección $W_k \cap L_k$ contiene un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tal que $0 < \|x_k - x_0\| < \frac{1}{k}$ del que podemos tomar un x_k cualquiera. Ya vimos que $U^{x_0} = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_k : k \geq 1\}$ es abierto radial y no contiene ningún W_k ya que a estos pertenecen los x_k.

II Axioma

El segundo axioma también hace referencia a numerabilidad de bases, pero esta vez son bases de abiertos. Además, a diferencia del primer axioma, el segundo no pide que todas las bases sean numerables sino que alguna lo sea.

Definición (2º Axioma)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **2º Axioma** si y sólo si existe una base numerable $\mathcal{B}$ de abiertos.*

Ejemplo:

- La topología del punto $\mathcal{T}_a$ y la discreta $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$ equipadas sobre un conjunto X no numerable no son 2º Axioma, pues para la del punto la base mínima de abiertos es $\mathcal{B}_a = \{\{a, x\} : x \in X\}$, que es no numerable si X lo es. Por otro lado, en $\mathcal{T}_{\text{discr.}}$ tenemos como base mínima $\{\{x\} : x \in X\}$ que no es numerable cuando X no lo es.
- La topología usual $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es 2º Axioma, ya que tenemos como base de abiertos $\mathcal{B} = \{B\left(q, \frac{1}{k}\right) : q \in \mathbb{Q}^n, k \geq 1\}$.

Proposición

Sea X un espacio topológico, si es 2º Axioma es 1er Axioma.

Demostración:

Sea la base de abiertos que verifica el 2º Axioma $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k\geq 1}$, entonces el conjunto $\mathcal{B}^x = \{B_k : x \in B_k\}$ es base de entornos $\forall x \in X$ y además, si $\mathcal{B}$ es numerable, también lo será $\mathcal{B}^x$.

Observación:

El recíproco no es cierto, pues tenemos como contraejemplo la topología discreta cuando se equipa sobre un conjunto de puntos X no numerable.

Separable

El tercer axioma, denominado separable, hace referencia a la numerabilidad de los conjuntos densos del conjunto ambiente y no debe confundirse con la noción de separación del capítulo anterior.

Definición (Separable)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **separable** si y sólo si existe un subconjunto $A \subset X$ numerable y denso.*

Ejemplo:

- El espacio usual $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es separable porque el subconjunto $\mathbb{Q}^n$ es numerable y denso.
- Cualquier espacio $(X, \mathcal{T}_{\text{discr.}})$ donde X no sea numerable, no es separable. Ya que, en caso de serlo, habría un subconjunto $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$ y, como en la trivial todo es abierto y cerrado, en particular A sería cerrado y $A = \overline{A} = X$.
- La topología del punto $\mathcal{T}_a$ sí es separable porque el punto clave $\{a\}$ es denso y es un conjunto finito.
- En la topología de los complementarios finitos $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}})$ cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ numerable infinito es denso porque en cualquier entorno de un punto $x \in X$ hay un abierto U^x que contiene a x y, por ser abierto, le faltan un número finito de puntos, luego tiene que tener puntos de A. De esta manera, por numerable y denso sabemos que el conjunto X es separable.
- La topología radial $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{rad}}\right)$ también es separable

Proposición

Sea X un espacio topológico, si es 2º Axioma es separable.

Demostración:

Sea $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1}$ la base de abiertos de la propiedad de ser 2º Axioma, entonces $A := \{a_k : a_k \in B_k\}_{k \geq 1}$ corta a todo abierto y, por tanto, es denso.

Observación:

Sin embargo, aquí mostramos algunas de las no propiedades que uno puede tener la tentación de creer e intentar demostrar:

1. I Ax. + separable $\not\Rightarrow$ II Ax.
   Contraejemplo: $(X, \mathcal{T}_a)$, X no numerable.
2. I Ax. $\not\Rightarrow$ separable.
   Contraejemplo: Topología discreta en un espacio no numerable.
3. Separable $\not\Rightarrow$ I Ax.
   Contraejemplo: $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{CF}}) : \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

Lindelöf

El último de los axiomas de numerabilidad es la propiedad de Lindelöf. Ésta constituye una forma más débil de compacidad que tiene resultados, lo que resulta en multitud de resultados muy similares entre ambos conceptos.

Definición (Lindelöf)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **Lindelöf** si y sólo si para todo recubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ existe un subrecubrimiento $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k}$ numerable.*

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como se comportan los axiomas de numerabilidad con respecto a las construcciones del tema Construcciones para ver cuándo se conservan, cuándo se pierden y qué podemos añadir para no perderlas.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
I Ax.	✓	✗ abiertos ✓	✓	✓
II Ax.	✓	✗ abiertos ✓	✓	✓
Separable	✗ abiertos ✓	✓	✓	✓
Lindelöf	✗ cerrados ✓	✓	✗	✓

Cuadro 5.1: Tabla de comportamiento de la numerabilidad con respecto a las construcciones.

Demostración:

- **Subespacios**:
  - I Ax. y II Ax. se heredan a subespacios intersecando las bases ambientes que cumplen los axiomas con el subespacio.
  - Separable no se hereda en general, por ejemplo, la topología $(X, \mathcal{T}_a)$ sobre un X no numerable hace que el subespacio $X \setminus \{a\}$ tenga la topología discreta y hemos visto que en X no numerable esta no es separable.

    Sin embargo, si el subespacio es abierto sí se hereda intersecando el conjunto denso con el subespacio.
  - Lindelöf no se hereda en general, por ejemplo, tomamos Y no Lindelöf y el conjunto $X = Y \cup \{w\}$ que es compacto, $\mathcal{B}^w = \{X \setminus F : F \subset Y\}$ con F finito.

    Sin embargo, a subespacios cerrados, como la compacidad, sí se hereda.
- **Cocientes**:
  - $X = \mathbb{R}_u$ es I y II Axiomas, $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es I.

    Demostración:

    $\alpha = \mathbb{Z} \in Y,\ \exists \mathcal{W}^\alpha = \{W_k : k \geq 1\}$ abiertos saturados, $W_k \supset \mathbb{Z},\ \forall k$
    (Figura 5.1) $\Rightarrow U = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\{\varepsilon_k : k \geq 1\}}_{\text{cerr.}}$ entorno abierto saturado de $\mathbb{Z}$, $U \not\supset W_k,\ \forall k$. Esto último porque $\varepsilon_k \in W_k$, pero $\varepsilon_k \notin \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_k : k \geq 1\}$.

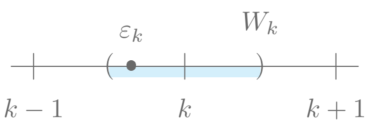


Figura 5.1: *Si $\varepsilon_k \notin \mathbb{Z}$, vemos que aunque $\mathbb{R}_u$ cumple el I y el II axioma, existe un cociente que no.*

  - Las aplicaciones continuas y abiertas conservan I y II.

    Demostración:

    La imagen de una base es una base.
  - Las aplicaciones continuas conservan la separabilidad

Demostración:

Sabemos que $f\left(\overline{A}\right) \overset{\text{cont.}}{\subset} \overline{f\left(A\right)}$. Entonces, si $\overline{A} = X$, $Y = f\left(X\right) = f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f\left(A\right)} \Rightarrow \overline{f\left(A\right)} = Y$.

- Las aplicaciones continuas conservan Lindelöf, pues es un resultado más débil que el de compacidad y para compacidad se cumple.

  Estas tres últimas propiedades se pueden aplicar al cociente porque la proyección es una aplicación continua.

- **Productos y Sumas**:
  - Para productos: producto finito de familias numerables es numerable.
  - Para sumas: suma finita de familias numerables es numerable.
  - La separabilidad se mantiene porque: $\overline{A_1 \times A_2} = \overline{A}_1 \times \overline{A}_2$.
  - Solo falla Lindelöf:
    - $\left(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)}\right)$ es Lindelöf (ejercicio no banal).
    - $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}^2_{[,)}\right)$ no es Lindelöf: si lo fuera, $L = \{x + y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ heredaría la propiedad, pero es discreto no numerable. $(\perp)$

SUCESIONES

Cuando en $\mathbb{R}^n$ usábamos las sucesiones para describir elementos de la topología en realidad estábamos usando, de fondo, otros resultados topológicos que nos permitían hacer esas simplificaciones. Por ello, merece un comentario destacado (sobre todo al final de este capítulo que es el que habilita el poder usar sucesiones) para distinguir cuándo esto es posible y cuándo no.

Definición (Sucesión y Límite)

*Sea X un espacio topológico, definimos una **sucesión** como una aplicación $f : \mathbb{N} \to X$ que denotamos[1] por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y definimos su **límite** como un valor $x \in X$ que cumple:*

$$\forall U^x \subset X,\ \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in U^x$$

Proposición

Sea X un espacio topológico Hausdorff y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, entonces el límite de convergencia es único.

Demostración:

La clave de la demostración es que el ser T_2 nos permite considerar dos entornos disjuntos donde deben estar todos los términos de la sucesión a partir de uno concreto y, como son disjuntos, no pueden estar en ambos entornos simultáneamente. Supongamos que tenemos dos límites de la sucesión $x \neq y$, entonces:

$$\exists U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \{x_k : k \geq k_0\} \subset U^x \\ \{x_k : k \geq k_1\} \subset U^x \end{cases} \Rightarrow \forall k \geq \max\{k_0, k_1\} : \{x_k : k \geq k_1\} \subset U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \#$$

Observación:

Cuando en $\mathbb{R}^n$ utilizábamos sucesiones para describir elementos de la topología tales como la adherencia, la acumulación, etc. en realidad lo que estábamos utilizando es que $\mathbb{R}^n$ es 1^er^ Axioma. El 1^er^ Axioma es el elemento topológico que permite describir una la topología vía sucesiones, por ejemplo:

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\{x_k\} \subset A : x_k \to x$$

[1] Con esta notación queremos decir que $x_n = f\left(n\right)$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \overline{A}$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \mathcal{W}^x = \{W_k^x\}_{k\geq 1} \text{ base ent. encajados} \xRightarrow{x\in\overline{A}} \exists x_k \in W_k \cap A \\ \forall U^x \overset{\text{base}}{\supset} W_{k_0}^x \overset{\text{enc.}}{\supset} W_{k_0+1}^x \supset \ldots \Rightarrow x_k \in U^x,\ \forall k \geq k_0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_k \to x$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\exists \{x_k\} \subset A : x_k \to x$:

$$A \ni x_k \to x \Rightarrow \forall U^x,\ \exists x_{k_0} \in U^x \cap A$$

Pero, salvo cuando podamos trabajar en un espacio 1^{er} Axioma, en general, los límites de sucesiones son poco útiles para trabajar con la topología.

Enunciado

Caracterizar la continuidad por sucesiones, si es posible:

$$f : X \to Y$$

COMPACIDAD

La compacidad es una característica esencial para un montón de proposiciones y aplicaciones útiles de la topología. No es una noción intuitiva y, en general, cuesta bastante caracterizar los compactos de un espacio dado. En este capítulo vamos a estudiar el concepto y las propiedades y consecuencias que la definición del mismo tiene.

CONCEPTO Y MANTRAS

La definición de compacidad no nos va a revelar nada, pero en cuanto comencemos a ver propiedades de dicha definición vamos a ver la relación que tiene con los conjuntos cerrados y las buenas propiedades que asumíamos por defecto en $\mathbb{R}^n$ con anterioridad.

Definición (Compacidad)

*Un espacio topológico X decimos que es **compacto** si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones equivalentes:*

- *De todo recubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento finito:*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r} = X$$

- *Dada una familia de cerrados, si la intersección finita de algunos de ellos es no vacía, entonces la intersección no finita del total es no vacía:*

$$\forall F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_r} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$$

Ejemplo:

Como estamos más acostumbrados a la primera de las definiciones que se ha dado, vamos a ejemplificar que la 2ª no se cumple si, por ejemplo, los conjuntos no son cerrados. Para ello, podemos considerar la familia de conjuntos $\{(0, \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$. De dicha familia, cualquier cantidad finita tiene intersección no vacía, pero cuando hacemos la intersección arbitraria ésta sí es vacía.

Definición (Subespacios compactos)

*Sea X un espacio topológico y $K \subset X$ un subconjunto, decimos que K es **compacto en** X si y sólo si para cualquier recubrimiento suyo por abiertos de X*

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{ con } U_i \overset{ab.}{\subset} X \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r} \supset K$$

existe un subrecubrimiento finito.

Observación:

La definición anterior es trivialmente equivalente a dar la definición de compacidad del inicio del capítulo, pero considerando K como espacio topológico con su topología relativa.

Ejemplo:

1. $K \subset \mathbb{R}^n_u$ es compacto $\Leftrightarrow$ K es cerrado y acotado (Heine-Borel).
2. $[a, b] \subset \mathbb{R}_u$ compacto. ($\Rightarrow$ Heine-Borel por resultados generales).
3. Si X es compacto con $\mathcal{T}_{\text{discr.}} \Rightarrow$ es finito
4. Dada una sucesión $x_k \to x$ el conjunto de los términos más el límite $K = \{x, x_k : k \geq 1\}$ es compacto.

   Para ello, basta ver que si $K = \bigcup_{i\in I} U_i = K$ entonces x debe pertenecer a un U_{i_0}. Por la convergencia, $\forall k \geq k_0 : x_k \in U_{i_0}$ y los que no estén en dicho entorno son un conjunto finito, luego escogiendo los U_i a los que pertenezcan ya tenemos un subrecubrimiento finito.
5. $K \subset \mathbb{R}^n_u$ compacto $\Leftrightarrow \forall A^\infty \subset K, A' \cap K \neq \emptyset$ (Bolzano-Weierstrass)

Proposición (Mantra 1)

Sea X un espacio topológico compacto y K un subespacio cerrado suyo, entonces es compacto.

$$F \overset{cerr.}{\subset} X_{compacto} \Rightarrow F \textit{ compacto.}$$

Demostración:

Dado un recubrimiento $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ podemos escribir el total en términos de unión de abiertos como $X = (X \setminus K) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$. Como X es compacto, de este recubrimiento podemos extraer otro finito, es decir, $\exists\, (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r} = X$. Por ser subespacio $K \subset X = (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r}$ y como no puede estar contenido en su complementario, entonces está $K \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r}$, es decir, es compacto.

Proposición (Mantra 2)

Sea X un espacio topológico compacto y $A \subset X$ un subconjunto con infinitos puntos, entonces tiene puntos de acumulación en X.

$$A_\infty \subset X_{compacto} \Rightarrow A' \neq \emptyset$$

Demostración:

Vimos en su momento que la adherencia puede expresarse como $\overline{A} = A \cup A'$ y , si $A' = \emptyset$, entonces $\overline{A} = A$ y esto indica que A es cerrado. Cerrado en compacto hemos visto que es compacto luego A es compacto.

Pero recordemos también que al adherencia se podía escribir como

$$\overline{A} = \{\text{puntos aislados}\} \sqcup A'$$

es decir, que A está compuesto únicamente por puntos aislados. Como hemos visto que A es compacto y sus puntos son aislados, si proponemos como recubrimiento de abiertos los entornos abiertos disjuntos de cada punto (que existen porque son aislados) tiene que existir un subrecubrimiento finito y, como cada punto sólo pertenece a uno de los conjuntos, no se puede prescindir de ninguno, luego el recubrimiento inicial era finito. Esto indica que existe un número finito de puntos aislados, es decir, que A es finito $\#$.

Proposición (Mantra 3)

Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y $K \subset X$ un subespacio compacto, entonces $f(K)$ es compacto en Y.

Demostración:

$$f(X) \subset \bigcup_i U_i \Rightarrow X = \bigcup_i f^{-1} U_i \Rightarrow \exists f^{-1} U_{i_1} \cup \ldots \cup f^{-1} U_{i_r} = X \Rightarrow U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_r} \supset f(X)$$

Observación:

La propiedad de conservación de la compacidad a través de aplicaciones continuas es muy importante porque permite demostrar la compacidad de espacios muy complicados a través de una aplicación continua desde espacios más sencillos. Por ejemplo, el proyectivo real $\mathbb{P}^n$ es compacto porque es imagen continua de la esfera $\mathbb{S}^n$ por la aplicación de la proyección antipodal y la esfera es compacta.

Proposición (Mantra 4)

Sea X un espacio topológico T_2 y $K \subset X$ un subespacio compacto, entonces K es cerrado.

Demostración:

Vamos a ver que $X \setminus K$ es abierto probando que es entorno de todos sus puntos, es decir, vamos a probar que $\forall x \in X \setminus K : \exists U^x \cap K = \emptyset$ (que es lo mismo que $U^x \subset X \setminus K$).

Dado cualquier punto $x \in X \setminus K$, para cualquier $y \in K$ que escojamos se verifica que existen entornos de ambos V_y^x y W^y disjuntos, por ser el espacio T_2. De esta manera, podemos escribir $K := \bigcup_{y \in K} W^y$ y, como es compacto, $K := W^{y_1} \cup \cdots \cup W^{y_r}$.

Como buscamos un abierto U^x que no corte con K y tenemos definido este en términos de unos entornos finitos (de los que hemos calculado otros homólogos que no cortan con ellos), lo único que es posible hacer es considerar el abierto $U^x := V_{y_1}^x \cap \cdots \cap V_{y_r}^x$ que es disjunto a cualquier W^{y_i}, es decir, a K.

Observación:

En un espacio topológico T_2, los resultados que se aplican a puntos se suelen poder aplicar a compactos. Es sencillo, utilizando el Mantra 4, demostrar que dos compactos disjuntos en un T_2 se separan como puntos.

Proposición

Sea X un espacio compacto, Y un espacio Haussdorff y $f : X \to Y$ una función continua entre ambos, entonces f es cerrada.

Demostración:

Si escogemos un cerrado $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$, entonces por ser X compacto, F es compacto. Como la aplicación es continua $f(F)$ es compacto en Y y, por ser T_2, es cerrado en Y. Por tanto, hemos demostrado que la aplicación es cerrada.

Corolario

Sea $f : X \to Y$ una función continua, X compacto e Y Hausdorff, si añadimos las siguientes hipótesis:

$$\begin{cases} \textit{inyectiva} \\ \textit{sobreyectiva} \\ \textit{biyectiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textit{inmersión cerrada} \\ \textit{identificación cerrada} \\ \textit{homeomorfismo} \end{cases}$$

se tienen los anteriores resultados.

Demostración:

Por las caracterizaciones que hicimos en el tema de Construcciones.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como se comporta la compacidad con respecto a las construcciones del tema Construcciones para ver cuándo se conservan, cuándo se pierden y qué podemos añadir para no perderlas.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad	✗ cerrados ✓	✓	✓	✓
Demostración:	Mantra 1	Mantra 3	Tychonoff	Unión finita

Cuadro 6.1: Tabla de comportamiento de la compacidad respecto a las construcciones, con demostración incluida.

Teorema (de Tychonoff)

Si X e Y son dos compactos $\Rightarrow X \times Y$ es compacto.

Demostración:

Sea $X \times Y = \bigcup_{i\in I} W_i,\ W_i \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

1. $\forall\,(x,y) \in X \times Y,\ \exists U_y^x \times V_x^y \subset W_i$, i depende de (x,y). Por la definición de la topología producto por base de abiertos.
2. $\forall x \in X,\ Y = \bigcup_{y\in Y} V_x^y \xRightarrow{Y\text{comp.}} Y = V_x^{y_1} \cup \ldots \cup V_x^{y_r}$, los y_k y su número, r, dependen de x.
3. $U^x = U_{y_1}^x \cap \ldots \cap U_{y_r}^x,\ U^x \times V_x^{y_k} \subset U_{y_k}^x \times V_x^{y_k} \subset W_{i_k}$, i_k depende de x.
4. $X = \bigcup_{x\in X} U^x \xRightarrow{X\text{comp.}} X = U^{x_1} \cup \ldots \cup U^{x_s}$.
5. Veamos que:

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{1\leq l\leq s\\ 1\leq k\leq r}} U^{x_l} \times V_{x_l}^{y_k} \subset \bigcup_{\substack{1\leq l\leq s\\ 1\leq k\leq r}} W_{i_k}, \text{ los } i_k \text{ dependen de los } x_l.$$

   Ya que:

   - $x \in X \Rightarrow \exists U^{x_l} \ni x$.
   - $y \in Y = V_{x_l}^{y_{l_1}} \cup \ldots \cup V_{x_l}^{l_r} \Rightarrow \exists V_{x_l}^{y_{l_k}} \ni y$

   Con lo que tenemos un subrecubrimiento finito a partir de un recubrimiento cualquiera.

Observación:

1. $X \times Y$ compacto $\Rightarrow X$ e Y compactos.

   Demostración:

   Aplicamos el Mantra 3 para las proyecciones.

2. Heine-Borel: $K \subset \mathbb{R}_u^n$ cerrado y acotado $\Rightarrow$ compacto.

Demostración:

Si K es acotado, pertenece al producto cartesiano de intervalos acotados y si además es cerrado, entonces pertenece a un producto cartesiano de intervalos cerrados y acotados de la forma

$$K \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

Como sabemos que el intervalo $[0, 1]$ es compacto, por homeomorfismo, los intervalos $[a, b]$ son compactos. Además, por Tychonov, el producto de ellos también lo es, luego tenemos K cerrado contenido en un compacto, es decir, compacto.

COMPACIDAD LOCAL

En ocasiones, es útil saber que trabajar localmente en un punto tiene ciertas propiedades favorables. Nos gustaría poder definir qué es esto de trabajar localmente en un punto y qué condiciones han de satisfacer los entornos de dicho punto para poder trabajar cerca de él como si el espacio fuese compacto, lo que es precisamente la compacidad local.

Definición (Localmente cerrado)

Sea X un espacio topológico y $Y \subset X$ un subconjunto, decimos que Y es ***localmente cerrado*** *si y sólo si:*

1. $\forall y \in Y,\ \exists V^y \overset{ent.}{\subset} X : Y \cap V^y \overset{cerr.}{\subset} V^y$.
2. $Y \overset{ab.}{\subset} \overline{Y}$.
3. $\exists U \overset{ab.}{\subset} X : Y \overset{cerr.}{\subset} U$

donde las condiciones anteriores son equivalentes.

Observación:

En realidad, podemos reescribir las condiciones anteriores de otra forma para ver más claro lo que estamos queriendo decir:

1. Si se cumple la propiedad, se cumple para una base de entornos.

   Para cualquier entorno $U^y \subset V^y$ también se cumple la propiedad, pues $Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y$ si y sólo si $Y \cap U^y = F \cap U^y$ donde F es un cerrado ambiente, es decir, de V^y. Tomamos como $F = V^y \cap Y$ y hemos terminado.

2. Escrito de otra forma, como los abiertos de $\overline{Y}$ son abiertos ambiente cortados con $\overline{Y}$, estamos diciendo que $Y = \overline{Y} \cap U$ donde $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$.

3. De nuevo, los cerrados en U son cerrados ambientes cortados con U, es decir que podemos reescribir lo anterior como $\exists U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ y $F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X : Y = F \cap U$.

Demostración:

- 1. $\Rightarrow$ 2.

  Vamos a ver, por el doble contenido, que $Y = \overline{Y} \cap \left(\bigcup_{y \in Y} U^y\right)$.

  $\subset)$ Trivial.

$\supset$)

$$x \in \overline{Y} \cap U^y \Rightarrow x \in \mathrm{Adh}_{U^y}\left(Y \cap U^y\right) \overset{Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y}{=} Y \cap U^y \subset Y$$

- 2. $\Rightarrow$ 3.

  Con la observación posterior a la definición, la demostración es inmediata, pues que se cumpla dos implica que existe un $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ tal que $Y = \overline{Y} \cap U$. Luego si tomamos ese U como el abierto de 3. y $\overline{Y}$ como el cerrado F hemos acabado.

- 3. $\Rightarrow$ 1.

  De nuevo, vuelve a ser trivial por la definición, pues basta con tomar como V^y el abierto U de 3.

Observación:

La definición anterior es un buen ejemplo de localización de una cierta propiedad topológica y es una técnica habitual para otras muchas propiedades: se trata de hacer la siguiente construcción $\forall x,\ \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos que cumplen $\mathcal{P}$.

En ocasiones, se utiliza otro enunciado similar: $\forall x,\ \exists V^x$ que cumple $\mathcal{P}$, pero porque en dicho contexto es equivalente al anterior. Como en general, no son enunciados equivalentes, la construcción adecuada es mediante bases de entornos.

Ejemplo:

El conjunto del dibujo, en la topología usual de $\mathbb{R}^n$ no es localmente cerrado,

puesto que cualquier entorno de un punto del margen derecho mantiene la apertura que da el margen discontinuo derecho.

COMPACIDAD LOCAL Y MANTRAS

Definición (Compacidad Local)

Sea X un espacio topológico, decimos que es ***localmente compacto*** *si y sólo si para todo punto, existe una base de entornos formada por entornos compactos.*

Ejemplo:

1. El espacio $\mathbb{R}^n$ con la topología usual es localmente compactos porque para cualquier punto $\mathcal{V}^x = \{B\left[x, \varepsilon\right] : \varepsilon > 0\}$ es una base de entornos compactos.

2. Utilizando el mismo ejemplo visto para localmente cerrado, podemos añadir un punto q y considerar la topología usual en todos los puntos menos en q, donde consideramos únicamente como entornos los conjuntos cuyo complementario es finito.

   Esta definición hace el conjunto X compacto (pues si consideramos $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ alguno recubrirá a q y el complementario de ese es un conjunto finito), pero no podremos encontrar para p ninguna base de entornos compactos, pues no existe dicha base de cerrados (y en $\mathbb{R}$ usual están caracterizados así).

3. $T = B\left(0, 1\right) \cup \{p\},\ T_u$ no es localmente compacto.

   Demostración:

   Veamos un conjunto infinito sin acumulación en T:

$$\exists V^p \overset{\text{comp.}}{\subset} T \Rightarrow \exists B\left(0, \varepsilon\right) \cap T \subset V^p \Rightarrow \exists \overbrace{x_k}^{\in V^p} \to x_0 \in S\left(0, 1\right) \setminus T$$
$$\Rightarrow \{x_k : k \geq 1\} \subset V^p \subset T.$$

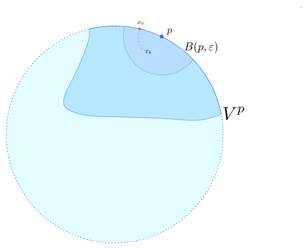


Figura 7.1: *Visualización de un conjunto que no es localmente compacto en la topología usual de* $\mathbb{R}^2$.

4. En general NO basta que exista un entorno compacto.

   En $S = T \sqcup \{q\}$ tomamos como entornos del punto añadido q los $W \subset S$ que tienen complementario finito (y $q \in W$). Es decir, para q tenemos la topología de los complementarios finitos mientras que para el resto de puntos tenemos la topología usual. En este caso, S es compacto, pero sus puntos no son localmente compactos (por lo menos, q)

   Pero este caso es un ejemplo con un espacio no separado.

Proposición

Sea X un espacio topológico T_2 y $x \in X$ un punto con un entorno compacto, entonces existe una base de entornos compactos para dicho punto.

Demostración:

Queremos ver que $\forall U^x$ abierto, $\exists K^x \overset{\text{ent.}}{\subset} U^x$ compactos.

$\exists V^x (\overset{\text{ab.}}{\supset} W^x)$ compacto $\overset{?}{\Rightarrow} \mathcal{V}^x = \{\text{entornos compactos } K^x\}$ base de entornos.

$\exists_{\text{ab.}} U_1^x \subset \overline{U_1^x} \subset U^x$:

$$V^x \setminus U^x \overset{\text{cerr.}}{\subset} V^x_{\text{comp.}} \Rightarrow \overbrace{V \setminus U}^{\not\ni x} \text{comp. en } T_2 \Rightarrow \exists \overbrace{U_1^x \ \& \ A}^{\text{ab. disjuntos}} \supset V^x \setminus U^x$$

Y tenemos que: $K^x = \overline{W^x \cap U^x} \Rightarrow$

- $\overline{V^x}_{\text{comp.}} \cap \overline{U_1^x} = V^x_{\text{comp.}} \cap \overline{U_1^x} \subset V^x \cap \overline{X \setminus A} = V^x \cap \overbrace{(X \setminus A)}^{\text{cerr.}} \subset U^x$.
- Intersección de dos entornos es entorno.
- $W^x \cap U_1^x \subset V^x \overset{\text{comp. en } T_2}{=} \overline{V^x} \subset X \Rightarrow \underbrace{K^x}_{\text{cerr.}} \subset \underbrace{V^x}_{\text{comp.}} \Rightarrow K^x$ comp.

Proposición (Mantra 1)

Sea X un espacio topológico localmente compacto y $Y \subset X$ un subespacio localmente cerrado, entonces es localmente compacto.

Demostración:

Tenemos:

$$\overline{U_1^x} \cap V^x \subset \overline{X \setminus A} \cap V^x = \overbrace{(X \setminus A)}^{\text{cerr.}} \cap V^x \subset U^x$$

Y como Y es localmente cerrado, $\exists W^y \cap Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} W^y$ ent. en X. Por ser X localmente compacto $\exists K^y$ compacto tal que, $K^y \subset W^y \Rightarrow K^y \cap W^y \cap Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} K^y \Rightarrow$

$$L^y = \underbrace{K^y \cap W^y}_{\text{ent. en } X} \cap Y \overset{\text{cerr.}}{\subset} K^y \Rightarrow L^y \text{ ent. en } Y \text{ compacto.}$$

Proposición (Mantra 2)

Sea X un espacio topológico T_2 y $Y \subset X$ un espacio localmente compacto, entonces es localmente cerrado.

Demostración:

$$\underbrace{\exists L^y}_{\text{comp.}} = \underbrace{V^y \cap Y}_{\text{ent. en } Y} \subset \underbrace{V^y}_{\text{ent. en } X} \overset{T_2}{\Longrightarrow} V^y \cap Y = L^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} V^y.$$

Corolario

En un T_2 localmente compacto, ser localmente cerrado es equivalente a localmente compacto.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad local	✗ Loc. cerrados ✓	✗ Abiertos ✓	✓	✓
Demostración:	Mantra 1	f (ent.) = ent	Tychonoff	Loc. suma es como sum's

Cuadro 7.1: *La tabla nos indica como se conserva la compacidad local en las distintas construcciones que hemos visto. Las sumas y los productos son finitos.*

Ejemplo:

$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es localmente compacto.

1. $\mathbb{Z} \subset \underbrace{W}_{\text{ab.}} \subset \mathbb{R} : \exists k + \underbrace{\varepsilon_k}_{0<\varepsilon_k<1} \in W \ \forall k \geq 1 \Rightarrow A = \{k + \varepsilon_k : k \geq 1\} \subset W$
   - Cerrado
   - Saturado ($n\mathbb{Z} = \emptyset$)
   - Infinito
   - Discreto
2. $\exists K \subset Y$ entorno compacto de $y = \mathbb{Z} \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{W^{\text{ab.}}}_{\supset \mathbb{Z}} \subset p^{-1}K \Rightarrow pA \subset K$ infinito sin acumulación.

COMPACTIFICACIÓN POR UN PUNTO

Este es otro problema importante: sumergir un espacio como subespacio abierto denso de un espacio compacto. Con "sumergir" nos referimos a una inmersión.

$$X \xhookrightarrow[\text{denso}]{\text{ab.}} X^*$$

donde X es no compacto y X^* es compacto y Hausdorff, es decir, es localmente compacto y, por ende, la imagen de X es localmente compacta.

Intuitivamente se trata de añadir los límites que el espacio no tiene (por no ser compacto).

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n \equiv B^n \setminus \{a\} \subset \mathbb{S}^n$ vía proyección estereográfica desde a.
2. $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}P^n \setminus H \subset \mathbb{R}P^n$ vía cartas afines.

Definición

Llamamos ***residuo*** *a la diferencia entre el espacio desde el que surge la inmersión y el de llegada.*

Proposición

X (no compacto) localmente compacto y T_2. Entonces:

1. *$\exists j : X \hookrightarrow X^*$ compacto T_2, j inmersión abierta $X^* \setminus j(X) = \{\omega\}$.*
2. *Unicidad:*

$$\begin{tikzcd} & X_1^* \arrow[dd, "h"] & \omega_1 \arrow[dd, mapsto, "\text{homeo.}"] \\ X \arrow[ur, hook, "j_1"] \arrow[dr, hook, "j_2"'] & & \\ & X_2^* & \omega_2 \end{tikzcd}$$

Figura 7.2: *Con esto vemos que la unicidad es por homeomorfismo.*

Demostración:

1. $X^* = X \sqcup \{0\}$, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus K : K \subset X \text{ comp.}\}$.
   - $\mathcal{T}^*$ es topología: fácil por las hipótesis sobre X.
     - $K_i \overset{\text{comp.}}{\subset} X \overset{T_2}{\Longrightarrow} K_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \overbrace{\bigcap_i K_i}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{K_{i_0}}^{\text{comp.}} \Rightarrow \bigcap_i K_i$ comp.
     - $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X,\ X \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \setminus K = \text{ab.} \setminus \text{cerr.} = \text{ab.}$
     - $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X,\ K \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus U),\ K \setminus U \subset K$ cerrado $\Rightarrow$ compacto.
   - $X \subset X^*$ inmersión abierta: $(X^* \setminus K) \cap X = X \setminus K \in \mathcal{T}$ pues X es T_2.
   - X^* es compacto: $X^* = \bigcup_i W_i$.

     $$\exists W_{i_0} \ni w \Rightarrow W_{i_0} = X^* \setminus \underbrace{K}_{\text{comp.}} \Rightarrow K \subset W_{i_1} \cup \ldots \cup W_{i_r} \Rightarrow X^* = W_{i_0} \cup W_{i_1} \cup \ldots \cup W_{i_r}$$

   - X^* es T_2 :. Si tomamos dos puntos de X simplemente utilizamos que es T_2. Por tanto, lo interesante es separar $x \in X$ de ω:

     $$x \in X \text{ loc. comp.} \Rightarrow \exists K^x \text{ ent. comp.} \Rightarrow X^* \setminus K^x = U^\omega \text{ ent. de } \omega$$

   - X es denso:

     $$\overline{X} = X^*,\ \forall \overbrace{W^x}^{=X\setminus K} \cap X = X \setminus K \neq \emptyset$$

     porque X no es compacto, pero K sí.

2. Unicidad:

   - $\left.\begin{array}{l} h_{j_1} = j_2 \\ j_i \text{ inmersiones} \end{array}\right\} \Rightarrow h| : j_1(X) \to j_2(X)$ homeomorfismo.
   - h continua en ω_1 (análogamente h^{-1} continua en ω_2)

$$\begin{aligned} h(\omega_1) = \omega_2 \in W \overset{\text{ab.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{comp.}}{\subset} j_2(X) \\ \Rightarrow K = h^{-1}(X_2^* \setminus W) \overset{\text{comp.}}{\subset} j_1(X) \subset X_1^* \\ [X_1^* \text{ es } T_2] \Rightarrow K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_1^* \Rightarrow h^{-1}(W) = X_1^* \setminus K \overset{\text{ab.}}{\subset} X_1^*. \end{aligned}$$

Definición

*El espacio X^* se denomina **compactificación por un punto** de X.*

*También, **compactificación de Alexandroff**.*

Por ejemplo, $\mathbb{S}^n$ es la compactificación por un punto de $\mathbb{R}^n$ (vía proyección estéreo como dijimos antes).

Observación: (¡Importante!)

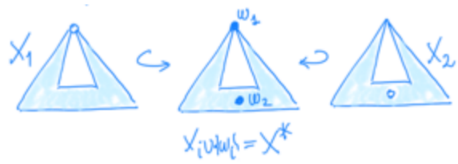
1. La unicidad justifica? que un espacio X^* compacto T_2 es la compactificación de $X^* \setminus \{0\}$ para cualquier $w \in X^*$.

2. Si dos espacios son homeomorfos, lo son sus compactos.

$$X_1 \xrightarrow[\text{homeo.}]{f} X_2 \overset{j_2}{\hookrightarrow} X_2^* \Rightarrow j_1 = j_2 \circ f : X_1 \to X_2^*$$

   que cumple las condiciones.

3. Si dos espacios no son homeomorfos, pueden serlo sus compactos.



   No son homeomorfos porque ningún punto de X_1 desconecta sus entornos. Por otro lado, el punto del vértice superior de X_2 si que desconecta TODOS sus entornos suficientemente pequeños. Es decir, X_1 tiene distintas características topológicas de X_2.

CONEXIÓN

En este capítulo vamos a estudiar cuándo podemos decir que un conjunto está "conectado", o dicho de otro modo, cuando no está dividido en trozos y qué significa esto. Además, al final vamos a estudiar cómo se comporta esta nueva propiedad con respecto a las construcciones que hemos estudiado.

CONCEPTO Y MANTRAS

El concepto fundamental de conexión es que no estás dividido en trozos y precisamente esta es la idea intuitiva de la definición formal que viene a continuación. En esta sección vamos a ver no sólo la definición sino también algunas propiedades, como las técnicas que podemos emplear para "conectar" un conjunto conexo.

Definición (Conexión)

Sea X un espacio topológico, decimos que es ***conexo*** *si y sólo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:*

1. $\nexists U, V \overset{ab.}{\subsetneq} X : X = U \sqcup V$ *donde* U *y* V *son no vacíos y disjuntos.*
2. $\nexists F, C \overset{cerr.}{\subsetneq} X : X = F \sqcup C$ *donde* F *y* C *son no vacíos y disjuntos.*
3. $\nexists E \subsetneq X$ *no vacío que sea abierto y cerrado simultáneamente.*

<u>Demostración</u>:

Veamos que 1. es equivalente a 2.: si suponemos que existen tales U y V y escogemos como cerrados $F = \underbrace{X \setminus V}$ y $C = \underbrace{X \setminus U}$, entonces tenemos dos cerrados no vacíos y disjuntos que no son el total y cuya unión es el total. Recíprocamente, para ver la implicación inversa basta con hacer una analogía a este último razonamiento.

Veamos que 1. es equivalente a 3.: si existen los conjuntos U y V mencionados, entonces $X \setminus V = U$ y vemos que U es cerrado también, luego hemos encontrado un conjunto abierto y cerrado en el total. Recíprocamente, si tenemos un conjunto E abierto y cerrado en el total, quiere decir que $X \setminus E$ es abierto, luego E y $X \setminus E$ son los conjuntos mencionados en 1.

Observación:

Si quisiéramos estudiar la conexión de un subespacio no como un espacio en sí mismo sino en términos relativos al espacio ambiente inicial, bastaría con dar la siguiente definición:

$$\nexists U, V \overset{\text{ab.}}{\subset} X : Y \subset U \cup V \text{ y } \begin{cases} U \cap Y \neq \emptyset \\ V \cap Y \neq \emptyset \\ U \cap V \cap Y = \emptyset \end{cases}$$

y esta sería equivalente a estudiar la conexión en Y con su topología relativa, esto es, como espacio topológico en sí mismo.

Ejemplo:

- El espacio real usual $\mathbb{R}$ es conexo.
- El espacio de los racionales $\mathbb{Q}$ con la topología usual no es conexo y, de hecho, es **totalmente disconexo** porque los únicos conexos son los puntos.

  Demostración:

  Si dividimos $\mathbb{R}$ en dos segmentos disjuntos separados por $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tenemos que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cap ([-\infty, \alpha) \sqcup (\alpha, +\infty])$ que son abiertos en $\mathbb{Q}$ y disjuntos.

- En $\mathbb{R}$ con la topología *Sorgenfrey*, sólo son conexos los puntos, es decir, es totalmente disconexo.
- El intervalo $(0, 1)$ con la topología usual es conexo.
- En general, los segmentos en $\mathbb{R}^n$, los estrellados y los convexos son conexos.

Teorema (del pivote)

Sea X un espacio topológico y A un conjunto definido como $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ donde los A_i son una familia de conexos en X, si se da alguna de las siguientes condiciones:

1. $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.
2. $\exists i_0 \in I : \forall i \in I,\ A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$.
3. $\forall i \in I : A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$.

entonces el conjunto A es conexo.

Demostración:

1. Para demostrar la primera implicación, podemos ver que cualquier conjunto $E \subset A$ no vacío que sea abierto y cerrado simultáneamente ha de ser A.

   En primer lugar, hay que tener en cuenta que $E \cap A_i \underset{\text{cerr.}}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} A_i$ y, como estos son conexos, sólo hay dos alternativas: $E \cap A_i = \emptyset$ o $E \cap A_i = A_i$. No puede ocurrir que $\forall i \in I : E \cap A_i = \emptyset$ porque entonces $E \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$, es decir, $E \cap A = \emptyset$ lo que sería absurdo. Así pues, podemos decir que $\exists i_0 \in I : A_{i_0} \cap E = A_{i_0}$ y, como $P := \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ y $P \subset E$ sabemos que todos los demás $A_i \cap E$ deben ser necesariamente A_i pues no pueden ser vacíos ya que $\emptyset \neq P \subset A_i \cap E$.

   De esta manera, hemos conseguido ver que $E \supset E \cap A_i = A_i$ y entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i \subset E \Rightarrow A = E$, es decir, A es conexo.

2. Para demostrar la segunda implicación, basta con aplicar la primera que ya ha sido demostrada.

   Como la intersección $A_{i_0} \cap A_i$ es no vacía y ambos conjuntos son conexos, por la primera implicación la unión $B_i := A_{i_0} \cup A_i$ es conexa. De esta manera, podemos escribir el total como

   $$A = \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \underbrace{A_i \cup A_{i_0}}_{B_i} \text{ donde } \bigcap_{i \in I} B_i = A_{i_0} \neq \emptyset$$

   así que podemos decir que es conexo por la primera implicación.

3. Para A_1 y A_2, como la intersección es no vacía y ambos son conexos, por la primera implicación la unión $A_1 \cup A_2 =: B_2$ es conexa. Si ahora miramos B_2 y A_3, vemos que la intersección es no vacía (pues $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$) y, como ambos son conexos, la unión $B_3 := B_2 \cup A_3$ es conexa. De esta manera y de forma inductiva, se llega a que la unión de todos es conexa, es decir, que A es conexo.

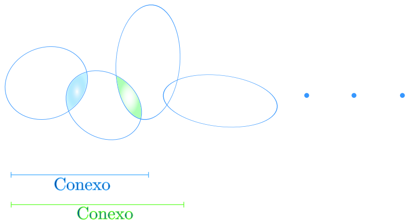


Figura 8.1: *Ejemplo de una cadena de conexos.*

Proposición (Construcción de cadenas)

Sea X un espacio topológico, $A \subset X$ un conexo tal que $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ de abiertos y $p, q \in X$ dos puntos, existe una cadena $U_{i_0} \cup \ldots \cup U_{i_k}$ tal que $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ y $p \in U_{i_0}$ y $q \in U_{i_r}$.

Demostración:

La demostración va a consistir fundamentalmente en ver que el conjunto $E = \{x \in X : \exists U_{i_k}, \text{ cadena, de } p \text{ a } x\} \neq \emptyset$ es abierto y cerrado no vacío para ver que es el total y poder deducir que entonces existe una cadena hasta $q \in A$.

- No vacío:

  Es no vacío porque como $\exists i_0 \in I : p \in U_{i_0}$ el propio U_{i_0} ya forma la cadena hasta p de la que es inicio y final, es decir, que podemos llegar de p a p y entonces $p \in E$.

- Abierto:

  Para verlo vamos a demostrar la caracterización: el conjunto E es entorno de todos sus puntos. Para cualquier $x \in E$, existe una cadena $U_{i_0}, \cdots, U_{i_k}$ tal que $U_{i_j} \cap U_{i_{j+1}} \neq \emptyset$, pero para todos los puntos del último eslabón U_{i_k} también ocurre que hay una cadena que llega hasta ellos, pues es la misma que para x. Es decir, hemos encontrado un abierto $U_{i_k} \subset E$, luego E es entorno de x.

- Cerrado:

  Si escogemos cualquier valor $y \in \overline{E}$, entonces por pertenecer a la misma existe un entorno U_y abierto que corta con E. Es decir, hay puntos $x \in E \cap U_y$ lo que implica que existe una cadena hasta dichos puntos. Basta entonces con añadir U_y a la cadena de abiertos (también es abierto) para llegar hasta $y \in \overline{E}$, luego $E = \overline{E}$.

Por tanto, como hemos demostrado que E es no vacío, abierto y cerrado en un conexo A, entonces debe ocurrir que $A = E$.

Proposición (Mantra 2)

Sean X e Y espacios topológicos, X conexo y $f : X \to Y$ una aplicación continua entre ambos espacios, entonces $f(X)$ es conexo.

Demostración:

Escogemos un conjunto $E \underset{\text{cerr.}}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} f(X)$ no vacío en la imagen. La preimagen $f^{-1}(X)$ es no vacía, abierta y cerrada en X por la continuidad de la función f y, como A es conexo entonces $f^{-1}(E) = X$, lo que quiere decir que $E = f(X)$.

Proposición (Mantra 3)

Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto conexo, la adherencia $\overline{A}$ es un conjunto conexo.

Demostración:

La demostración puede hacerse a través del hecho de que si $Y \subset X$ es denso en X y Y es conexo, entonces X es conexo, pues si esto está demostrado $A \subset \overline{A}$ y todo conjunto es denso en su adherencia.

De esta manera y suponiendo $Y \subset X$ denso y Y conexo, tomamos un conjunto

$$\emptyset \neq E \underset{\text{cerr.}}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} X \Rightarrow \underbrace{E \cap Y}_{\neq \emptyset} \underset{\text{cerr.}}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} Y \Rightarrow E \cap Y = Y \Rightarrow Y \subset E \overset{\text{cerr.}}{\subset} X = \overline{Y} \Rightarrow E = X$$

Observación:

El resultado anterior es importante por el hecho de que permite demostrar que un conjunto es conexo a través de la conexión de un subconjunto denso. Como la adherencia es el total, si el conjunto denso es conexo, el total también lo es.

Ejemplo:

1. Como el intervalo $(0, 1)$ es denso en el intervalo $[0, 1]$ (pues se trata de su adherencia), entonces $[0, 1]$ conexo.

2. Sabiendo que $[0, 1]$ es conexo, podemos generalizar el razonamiento anterior a través de otro método: viendo que la aplicación $\sigma(t) = (1 - t) a + tb$ establece un homeomorfismo con $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ y, por ser continua y $[0, 1]$ conexo, entonces $[a, b]$ es conexo.

3. Con aún más generalidad y conociendo los casos anteriores, podemos deducir que otros conjuntos también son conexos:

   - Los conjuntos estrellados $E = \bigcup_{\substack{x \in E \\ \text{conx.}}} [a, x]$ respecto de a, los convexos, las bolas abiertas y cerradas, los rectángulos... son todos conexos gracias al teorema del pivote y los resultados anteriores.
   - Las trazas de curvas continuas $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ tales como caminos, etc. son conexos, pues son imagen continua de conexos.

4. Seno del topólogo/polaco:

   Si uno considera la función $f(t) = sen(1/t)$ la gráfica que observa es la que se ve en la figura 8.2. Dicha gráfica, que denotaremos por Γ es un conjunto conexo, pues es imagen continua de un conexo. La línea vertical donde se "aprieta" la función, que denotaremos por J, también lo es por ser un segmento (más bien homólogo a uno). Lo interesante es que la unión de ambas cosas es conexa pues precisamente es la adherencia de la gráfica J.

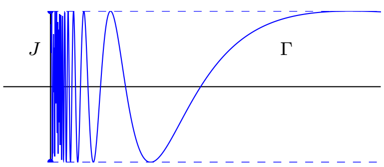


Figura 8.2: *Seno del topólogo o de Varsovia.*

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como comporta conexión con respecto a las construcciones del tema Construcciones. Se trata de ver cuándo se conserva, cuándo no y qué hipótesis podemos añadir para que se conserve en los casos que no.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión	✗	✓	✓	✗
Demostración:	$\{0,1\} \subset [0,1]$	Mantra 2	Pivote	Cada sum. es ab. y cerr.

Cuadro 8.1: *Tabla de comportamiento de la conexión con respecto a las construcciones.*

Proposición

$X \times Y$ *conexo* $\Leftrightarrow X$ *y* Y *conexo.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Cada factor es imagen del total a través de la función proyección, que es continua. Como el total es conexo, la imagen continua a través de un conexo es conexa, luego se tiene el resultado.

$\Leftarrow$) Fijamos un valor $a \in X$ y entonces vemos que el conjunto

$$Z_y = \underbrace{(X \times \{y\})}_{\approx X} \cup \underbrace{(\{a\} \times Y)}_{\approx Y}$$

es conexo por ser dos conexos que se cortan en el punto (a, y) (teorema del pivote).

Además, la intersección de todos los Z_y

$$\bigcap_{y \in Y} Z_y = \{a\} \times Y \neq \emptyset$$

es no nula, luego por el teorema del pivote de nuevo, tenemos que:

$$\bigcup_{y \in Y} Z_y = X \times Y \text{ conx.}$$

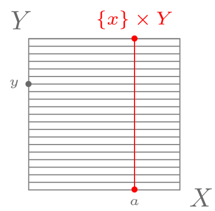


Figura 8.3: *Representación de que el producto conexos es conexo: cada línea del cuadrado es un* $X \times \{y\}$ *.*

COMPONENTES CONEXAS Y CONEXIÓN LOCAL

Una vez estudiada la noción de conexión, vamos a repetir el procedimiento que venimos haciendo varios capítulos atrás y vamos a estudiar la versión local de la propiedad. Además, es de especial interés estudiar unos subespacios especiales en cuanto a conexión se refiere que son las componentes conexas y que permiten dividir el espacio en una partición de conjuntos conexos.

COMPONENTES

Cuando un conjunto no es conexo, tiene sentido preguntarse en cada punto ¿cuál será el mayor subespacio que contiene al punto y que sí es conexo? Porque trabajar en dicho subespacio cuando estemos trabajando en entornos del punto permitirá trabajar como si de un conexo se tratara. Además, este mismo subespacio será el mayor conexo que contiene también a otros puntos distintos, luego en cierta manera podemos verlo como una "clase de equivalencia" que asocia puntos con el mismo subespacio conexo maximal.

Definición (Componente Conexa)

*Sea X un espacio topológico, definimos una **componente conexa** de dicho espacio como un subespacio conexo maximal.*

Aunque la definición anterior es correcta y va en la línea de la intuición explicada al comienzo de la sección, necesitamos formalizar de alguna forma como se calculan dichas componentes conexas cuando nos dan un punto concreto. Esto nos va a permitir no sólo calcular la componente conexa a la que pertenece un punto, sino caracterizar las propiedades que éstas pueden tener dentro del espacio topológico.

Proposición (Caracterización de componentes conexas)

Sea X un espacio topológico y $a \in X$ un punto del mismo, el conjunto:

$$C(a) := \bigcup_{C \ni a} C \text{ donde } C \text{ es conexo}$$

verifica las siguientes propiedades:

- *Es conexo*
- *Para cualquier $E \subset X$ conexo tal que $C(a) \cap E \neq \emptyset$, se cumple que $E \subset C(a)$.*

por tanto, podemos decir que $C(a)$ es la componente[1] *conexa a la que pertenece a.*

Demostración:

En primer lugar, como la intersección de todos los conexos de la unión es no vacía (porque a está contenido en la misma) y todos son conexos, por el teorema del pivote el conjunto $C(a)$ es conexo.

Por otro lado, si escogemos un conexo $E \subset X$ tal que $C(a) \cap E \neq \emptyset$, por el teorema del pivote, el conjunto $W := C(a) \cup E$ es conexo y contiene a a. Precisamente por esto último, este conjunto es uno de los de la unión que definía $C(a)$, luego $W \subset C(a) \Rightarrow E \subset E \cup C(a) \subset C(a)$, es decir, $E \subset C(a)$.

Observación:

Tras la caracterización anterior, hay un par de observaciones que son evidentes:

- Las componentes conexas de dos puntos distintos $a \neq b$ son la misma o son disjuntas, pues si la intersección es no vacía la una está contenida en la otra y viceversa, es decir, son la misma.
- Como se trata de un conjunto conexo, sabemos que la adherencia $\overline{C(a)}$ es un conjunto conexo. Sin embargo, como $\overline{C(a)}$ es un conjunto conexo que contiene a a, tiene que estar contenido en $C(a)$, luego $\overline{C(a)} \subset C(a) \Rightarrow C(a) = \overline{C(a)}$.

Las dos observaciones anteriores sumadas a la caracterización, permiten darse cuenta de que el espacio X se puede escribir como unión disjunta

$$X = \bigsqcup_{C \subset X} C \text{ donde } C \text{ es comp. conexa}$$

es decir, que X es una partición de cerrados conexos y disjuntos.

Ejemplo:

1. $X_{\text{discreto}} : C(x) = \{x\}$ (puntos abiertos y cerrados)
2. $\mathbb{Q}_u : C(p) = \{p\}$ (todo intervalo de $\mathbb{R}$ tiene racionales)
3. $\left(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)}\right) : C(t) = \{t\}$ $(\mathbb{R} = (\leftarrow, a) \cup [a, \rightarrow)$ abierto y cerrado)
4. $X = \{0, Y_k,\ k \geq 1\} : \begin{cases} C(0) = \{0\} \text{ cerrado, no abierto } \left(\{\frac{1}{k} : k \geq 1\} \text{ no cerr.}\right) \\ C\left(\frac{1}{k}\right) = \{\frac{1}{k}\} \text{ cerrado y abierto.} \end{cases}$

Definición (Espacio totalmente disconexo)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **totalmente disconexo** si y sólo si $\forall a \in X : C(a) = \{a\}$ o, lo que es lo mismo, las componentes conexas del conjunto son los puntos.*

Proposición

Sean X e Y espacios topológicos y $X \times Y$ el espacio topológico producto, las componentes conexas de $X \times Y$ son los productos de componentes conexas de X y de Y.

Demostración:

- $\Rightarrow$ Las componentes conexas del producto son producto de componentes conexas.

  Sea $C \subset X \times Y$ una componente conexa del producto, si denotamos por p y q a las proyecciones sobre cada factor, entonces $p(C)$ y $q(C)$ son conexos en X e Y respectivamente (por ser

[1] Puesto que si verifica las dos propiedades mencionadas, entonces es un subespacio conexo maximal.

imagen continua de conexo). Estos conexos estarán a su vez contenidos en alguna componente conexa del factor de forma que:

$$\begin{cases} p\left(C\right) \subset E \overset{\text{c.c}}{\subset} X \\ q\left(C\right) \subset F \overset{\text{c.c}}{\subset} Y \end{cases} \Rightarrow C \subset E \times F \text{ donde } E \times F \text{ es conexo}$$

y como C es un subespacio conexo maximal, necesariamente debe ocurrir que $C = E \times F$.

- $\Leftarrow$ El producto de componentes conexas es una componente conexa

  Supongamos que tenemos dos componentes conexas C_x y C_y de X e Y respectivamente y que $\exists E \subset X$ conexo tal que $E \cap C_x \times C_y \neq \emptyset$, pero $E \not\subset C$. Como $E \cap C_x \times C_y \neq \emptyset$, por el teorema del pivote, $E \cup C_x \times C_y$ es conexo. La proyección $p(E \cup C_x \times C_y)$ es el conjunto conexo formado por los valores $x \in X : x \in E_x \ \vee \ x \in C_x$ y como $C_x \subset p(E \cup C_x \times C_y)$ y es conexo maximal, sabemos que $C_x = p(E \cup C_x \times C_y)$. Un razonamiento análogo para q revela que $C_y = q(E \cup C_x \times C_y)$. Por tanto, hemos conseguido que $E \cup C_x \times C_y = C_x \times C_y$, es decir, que $E \subset C_x \times C_y$, luego absurdo.

CONEXIÓN LOCAL

En ocasiones es muy útil poder tener la certeza de que puedo trabajar en cada punto de forma local sabiendo que se cumple cierta propiedad. Para ello, vamos a definir qué significa ser conexo localmente y cómo puede esta definición ayudar a satisfacer la cuestión mencionada.

Definición (Localmente Conexo)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **localmente conexo** si y sólo si para todo punto $x \in X$ existe una base de entornos $\mathcal{B}^x$ formada por entornos abiertos conexos.*

Proposición (Caracterización de conexión local)

Sea X un espacio topológico, este es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de un abierto son abiertas.

Demostración:

$\Rightarrow$) Vamos a ver que las componentes conexas son entornos de todos sus puntos. Para ello, consideremos $x \in C \overset{\text{c.c}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X$. Como X es localmente conexo, con seguridad existirá un $U^x \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ conexo y contenido en U (porque como hay una base de entornos de abiertos conexos, U debe contener alguno). La conexión de U^x implica que $U^x \subset C$ por ser esta componente conexa, luego acabamos de demostrar que C es entorno de todos sus puntos, es decir, abierto.

$\Leftarrow$) Dado un punto $x \in X$, basta con que escojamos como base de entornos las componentes conexas de los abiertos que contienen al punto

$$\mathcal{B}^x := \{C\left(x\right) \overset{\text{c.c}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : x \in U\}$$

Dicho conjunto es base de entornos porque cada $C(x)$ es entorno (por ser abierta) y cualquier otro entorno debe contener a alguna, puesto que por ser entorno contendrá algún abierto que contenga al punto y, en consecuencia, alguna de las componentes conexas del conjunto.

Observación:

Sin muchísima dificultad, es sencillo demostrar que la definición de conexión local puede prescindir de la apertura de los conexos que forman la base de entornos, esto es, que la definición dada es equivalente a: "X es localmente conexo si y sólo si $\forall x \in X,\ \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos".

Ejemplo: (Esencial)

$\{0, \frac{1}{k} : k \geq 1\} = Y \subset \mathbb{R}_u$ no es localmente conexo.

Demostración:

La c.c $(0) = \{0\}$ no es abierto. Directamente:

$$0 \in \underbrace{V}_{\text{ent. de } 0 \in \mathbb{R}} \cap Y \Rightarrow V \supset (0, \varepsilon)\,,\ \exists 0 < \underbrace{\theta}_{\notin \mathbb{Q}} < \frac{1}{k} < \varepsilon < 1$$

$$\Rightarrow V \cap Y \subset \underbrace{(\leftarrow, \theta)}_{\ni 0} \cup \underbrace{(\theta, \rightarrow)}_{\ni \frac{1}{k}} \Rightarrow V \cap Y \text{ no conexo..}$$

Ejemplo:

Supongamos que tenemos un conjunto de segmentos verticales que convergen al segmento de la izquierda del todo, que también incluimos en el conjunto, tal y como muestra la figura

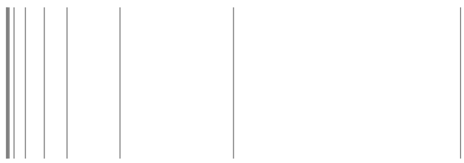


Figura 9.1: *Ejemplo*

¿Es este conjunto localmente conexo? La respuesta es no. Para ver esto, tenemos que ver que para cada punto existe una base de entornos formada por abiertos conexos. En cualquier segmento que no sea el de la izquierda del todo, podemos encontrar una bola $B(x, \rho)$ con ρ real tal que dicha bola no interseque con ningún otro segmento del conjunto, luego la colección $\{B(x, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < \rho\}$ es una base de entornos de cualquier punto de estos segmentos. El problema principal está en el segmento de la izquierda del todo, pues cualquier bola $B(x, \rho)$ centrada en dichos puntos necesariamente interseca con muchos otros segmentos (porque los segmentos convergen hacia la izquierda). Con esto hemos demostrado que cualquier entorno de uno de estos puntos, necesariamente contiene puntos de otros segmentos y entonces el entorno inicial siempre será disjunto.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como se comportan la conexión local con respecto a las construcciones del tema Construcciones para ver cuándo se conservan, cuándo se pierden y qué podemos añadir para no perderlas.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local	✗ $\checkmark_{abierto}$	✓	✓ ✓	✓ ✓
Demostración:	Ejemplo esencial	No banal	Prod. ent. conx.	Suma como sum's

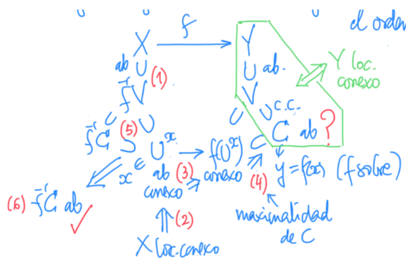
Cuadro 9.1: *La tabla nos indica como se conserva la compacidad local en las construcciones que hemos visto. Las sumas y los productos son finitos.*

Proposición

Sea X un espacio topológico localmente conexo y $f : X \to Y$ una identificación a un espacio Y, el espacio Y es localmente conexo.

Demostración:

Para demostrar la local conexión, vamos a demostrar que las componentes conexas de abiertos son abiertas. Para ello, tomemos un abierto $V \overset{\text{ab.}}{\subset} Y$ y una componente conexa suya $C \subset V$ y veamos que tiene que ser abierta.



En primer lugar, por la continuidad de f, $f^{-1}V \overset{\text{ab.}}{\subset} X$ así que la local conexión de X nos asegura que $\exists U^x \overset{\text{ab.}}{\subset} f^{-1}V$ pero además este es conexo. Como f es continua, $f(U^x)$ es conexo y contiene a x, luego por la maximalidad de C debe ocurrir que $f(U^x) \subset C$. Por tanto, ahora vemos con facilidad que $f^{-1}C \subset f^{-1}V$ contiene a U^x, es decir, hemos visto que la preimagen $f^{-1}C$ es abierta en X y como es abierto saturado C es abierto.

CONEXIÓN POR CAMINOS

La conexión por caminos va a ser un elemento central sobre todo en la parte de topología algebraica posterior. Es similar al concepto de conexión que hemos visto, pero la diferencia es que introducimos un elemento "conector": los caminos.

Definición (Camino)

Sea X un espacio topológico, definimos un ***camino en*** *X como una aplicación continua $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R}_u \to X$ y decimos que:*

- *Los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ son los extremos inicial y final del camino.*
- *La imagen $\alpha[a,b] \subset X$ es[1] la* ***traza****.*

Proposición (Cambios de parámetros)

Sea X un espacio topológico, $\alpha : [a,b] \to X$ un camino en él y $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ una aplicación, entonces:

- *Si φ es continua, la aplicación $\alpha \circ \varphi : [c,d] \to X$ es otro camino sobre X con la misma traza que α.*
- *Si φ es un homeomorfismo[2], la aplicación $\alpha \circ \varphi : [c,d] \to X$ es exactamente el mismo camino que α, pero con parametrización distinta.*

al último resultado se le conoce como ***cambio de parámetro****.*

Observación:

Es importante tener en cuenta que sólo se trata del mismo camino cuando φ es homeomorfismo. La principal diferencia está en que cuando φ es sólo continua, se conserva la traza, pero no la velocidad a la que se recorre.

Ejemplo:

Un cambio de parámetro muy útil en lo que queda de documento va a ser la interpolación lineal, que consiste en la parametrización de cualquier segmento en términos del segmento $[0,1]$. El cambio, considerando $p, q \in \mathbb{R}^n$, viene dado por la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \varphi : [0,1] &\longrightarrow [p,q] \\ t &\longmapsto (1-t)p + tq \end{aligned}$$

Este resultado es muy potente porque permite reducir cualquier camino a uno parametrizado en $[0,1]$, lo que será de gran utilidad en los capítulos posteriores.

[1] Nótese que la traza es un conexo, pues es imagen continua del conexo $[a,b]$.

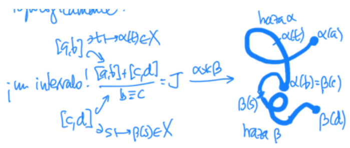
[2] En funciones de un variable, la equivalencia a ser homeomorfismo (biyectiva, continua y continua la inversa) es ser una función continua y monótona.

Definición (Producto de caminos)

Sea X un espacio topológico y $\alpha : [a, b] \to X$ y $\beta : [c, d] \to X$ dos caminos tales que $\alpha(b) = \beta(c)$, entonces la aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha * \beta : [a, b] \cup [c, d] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \alpha(t) & t \in [a, b] \\ \beta(t) & t \in [c, d] \end{cases} \end{aligned}$$

es el camino que resulta de unir los caminos α y β.



Observación:

Una alternativa para ver mejor que se trata de un camino es reparametrizar el camino β al intervalo $[b, b + (d - c)]$. Como $\beta(b) = \alpha(b)$, el camino $\alpha * b$ definido en $[a, b + (d - c)]$ ahora ya tiene un aspecto más uniforme que el de la definición.

Ejemplo:

Si hacemos el producto de segmentos consecutivos obtenemos **caminos poligonales**.

MANTRAS Y PROPIEDADES

Una vez definidos los conectores fundamentales que serán los caminos, ahora sí podemos estudiar qué significa estár conectado por caminos y qué consecuencias tiene con respecto a la conexión y las propiedades del espacio.

Definición (Conexión por caminos)

Sea X un espacio topológico, decimos que es ***conexo por caminos*** *si y sólo si*

$$\forall x, y \in X,\ \exists \sigma : [a, b] \to X,\ \sigma(a) = x \ \wedge \ \sigma(b) = y$$

cualesquiera dos de sus puntos se pueden conectar con un camino.

Observación:

Fijemos un $x_0 \in X$ y consideremos $\sigma_x : [a, b] \to X$ tal que $\sigma_x(a) = x_0$ y $\sigma_x(b) = x$. Como la traza de σ_x hemos comentado que es conexa y podemos escribir[3] $X = \bigcup_{x \in X} \sigma_x$, el conjunto X es conexo por el teorema del pivote (pues todos los σ_x intersecan en x_0).

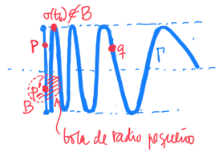
Ejemplo:

1. La mayor parte de los conexos conocidos son conexos por caminos:
   - Los abiertos conexos de la topología usual son conexos por poligonales, que son caminos.
   - Los conjuntos convexos y los estrellados también son conexos (casi por definición se prueba).
2. El seno del topólogo Γ es la traza de $\alpha(t) = \left(t, \sin \frac{1}{t}\right) : t > 0$ y es conexo tanto él como su adherencia $\overline{\Gamma} = J \cup \Gamma$ donde $J = \{0\} \times [0, 1]$. Sin embargo, la adherencia $\overline{\Gamma}$ sirve como contraejemplo para ver un conjunto conexo que no es conexo por caminos.

[3] En este caso, σ_x es un abuso de notación para escribir que es la traza de σ_x.

Demostración:

Fundamentalmente hay que demostrar que no todos los puntos están conectados por caminos. En particular, vamos a demostrar que no existen caminos que $\sigma : [a, b] \to \overline{\Gamma}$ donde $\sigma(a) = p \in J$ y $\sigma(b) = q \in \Gamma$, es decir, al intentar buscar un camino de J a Γ la cosa se estropea.



Supongamos que sí, que existe un camino con $\sigma(0) = p \in J$ y $\sigma(1) = q \in \Gamma$ definido como:

$$\begin{aligned} \sigma : [0,1] &\longrightarrow \overline{J} \\ t &\longmapsto (\alpha(t), \beta(t)) \end{aligned}$$

entonces el valor $t_0 = \text{máx}\{t \in [a, b] : \alpha(t) = 0\}$ existe porque (falta explicación) y es menor estricto que 1, pues $\sigma(1) = (\alpha(1), \beta(1)) = q \in J \Rightarrow \alpha(1) \neq 0$. Al valor $\sigma(t_0) = (0, \beta(t_0))$ lo denotaremos por p' en lo sucesivo.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(a') = 0, \ \sigma(a') = p' \in J \\ t > a' : \alpha(t) > 0 \Rightarrow \sigma(t) \in \Gamma \Rightarrow \beta(t) = \sin \frac{1}{\alpha(t)} \end{cases}$$

Supongamos $p' = \sigma(a') \neq (0, 1)$ (punto) y $\exists \delta : B(p', \delta) \cap \{y = 1\} = \emptyset$. σ continua $\Rightarrow \exists \sigma[a', \varepsilon] \subset B(p', \delta) \Rightarrow \sigma[a', \varepsilon] \cap \{y = 1\} = \emptyset$. (si $p' = (0, 1)$ evitaríamos $\{y = -1\}$)

α continua $\Rightarrow \alpha[a', \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ conexo compacto $=$ intervalo: $\alpha[a', \varepsilon] = [0, c]$.

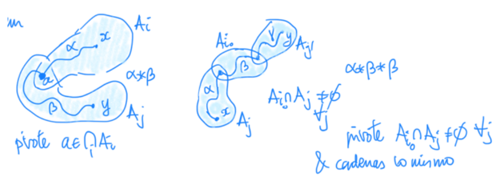
La oscilación de $\sin \frac{1}{x}$ lleva σ a $\{y = 1\}$, fuera de la bola elegida:

$$k \gg 0 \Rightarrow \frac{2}{(1 + 4k)\pi} \in [0, c] = \alpha[a', \varepsilon] \Rightarrow \exists a' < t_k < \varepsilon : \alpha(t_k) = \frac{2}{(1 + 4k)\pi}$$
$$\Rightarrow \sigma(t_k) = \left(\alpha(t_k), \sin\left(\frac{1}{\alpha(t_k)}\right)\right) = (x_k, 1) \perp$$

Como el concepto también tiene que ver con la conexión de un conjunto y parece muy similar al que hemos comentado, parece razonable que casi todo lo que dijimos acerca de conexión sea válido en este caso.

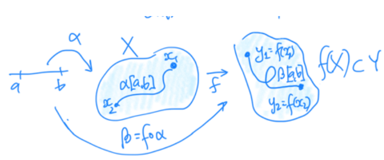
Teorema (del pivote)

Sea X un espacio topológico, A un subespacio definido como $A = \bigcup_i A_i$ donde los A_i son una familia de conexos por caminos de X, si $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, entonces A es conexo por caminos.



Teorema (Conservación por continuidad)

Sean X e Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua y $A \subset X$ un conjunto conexo por caminos, entonces $f(A)$ es conexo por caminos.



Observación:

Uno podría pensar, por la similitud que estamos viendo con la conexión del capítulo anterior, que el teorema sobre la conexión de la adherencia es extensible a la conexión por caminos. Sin embargo ¡Esto no es cierto!

El seno del topólogo Γ es conexo por caminos: $\left(a, \sin \frac{1}{a}\right)$ y $\left(b, \sin \frac{1}{b}\right)$ se conectan por el camino evidente, $\alpha(t) = \left(t, \sin \frac{1}{t}\right),\ a \leq t \leq b$. Pero, como hemos visto, la adherencia $\overline{\Gamma}$ no es conexa por caminos.

TABLA DE COMPORTAMIENTO

En este apartado estudiamos como se comportan la conexión por caminos con respecto a las construcciones del tema Construcciones para ver cuándo se conservan, cuándo se pierden y qué podemos añadir para no perderlas.

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión por caminos	✗	✓	✓ ✓	✗
Demostración: Conexo	Continuidad	Prop	???	

Cuadro 10.1: *La tabla nos indica como se conserva la conexión por caminos en las construcciones que hemos visto. Las sumas y los productos son finitos.*

Proposición (Conservación por producto)

Sean X e Y dos espacios topológicos, el producto $X \times Y$ es conexo por caminos si y sólo si X e Y son conexos por caminos.

Demostración:

- $\Leftarrow$

  Escojamos dos puntos cuales quiera $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in X \times Y$ y veamos que existe un camino que los une. Por la conexión por caminos de cada componente del producto, sabemos que ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} \sigma : [a,b] \to X : \begin{cases} \sigma(a) = x_1 \\ \sigma(b) = x_2 \end{cases} \\ \tau : [a,b] \to Y : \begin{cases} \tau(a) = y_1 \\ \tau(b) = y_2 \end{cases} \end{cases}$$

  Luego la composición de ambos caminos sobre cada componente como componentes de un camino en el producto necesariamente será un camino que unirá los puntos del inicio.

$$\gamma = (\sigma, \tau) : [a,b] \to X \times Y : \begin{cases} \gamma(a) = (x_1, y_1) \\ \gamma(b) = (x_2, y_2) \end{cases}$$

- $\Rightarrow$

  Como para que una función con varias componentes sea continua cada componente debe ser continua, el proceso de la implicación anterior es completamente reversible porque la existencia de un camino en el producto implica la existencia de un camino en cada componente considerando dicha componente como camino en el factor.

COMPONENTES CONEXAS POR CAMINOS Y CONEXIÓN LOCAL POR CAMINOS

Del mismo modo que estudiamos en el capítulo de conexión las "piezas conexas" en las que se podían dividir los conjuntos que no eran conexos y localizamos la noción de conexión, tiene sentido definir los mismos conceptos para conexión local.

COMPONENTES CONEXAS POR CAMINOS

La definición y las propiedades de las componentes conexas por caminos serán prácticamente iguales a las de conexión salvo por algún detalle menor. El fundamento de la idea, que es la de subconjunto conexo maximal, sigue siendo el componente básico de la teoría.

Definición (Componente conexa por caminos)

Sea X un espacio topológico, definimos una ***componente conexa por caminos*** *como un subconjunto conexo por caminos maximal.*

Proposición (Caracterización de componentes conexas por caminos)

Sea X un espacio topológico y $a \in X$ un punto del mismo, el conjunto:

$$C_c(a) := \bigcup_{A \ni a} A \text{ donde } A \text{ es conexo por caminos}$$

verifica las siguientes propiedades:

- *Es conexo por caminos*
- *Para cualquier $E \subset X$ conexo por caminos tal que $E \cap C_c(a) \neq \emptyset$, se cumple que $E \subset C_c(a)$.*

Demostración:

Si uno se fija en la demostración de la misma proposición para componentes conexas, se dará cuenta que principalmente la herramienta que utiliza es el teorema del pivote y, como hemos demostrado dicho teorema para la conexión por caminos, la demostración es completamente análoga.

Observación:

De la misma forma que las componentes conexas formaban una partición de X, las componentes conexas por caminos formarán una partición de X ¡pero más fina y no necesariamente de cerrados! De nuevo, el seno del topólogo es un buen contraejemplo: si consideramos el espacio $X = \overline{\Gamma}$, los conjuntos J y Γ son dos componentes conexas por caminos donde la primera es cerrada y la otra no. Además, $\overline{\Gamma}$ sólo tiene una componente conexa (ella misma), pero acabamos de ver que tiene dos componentes conexas por caminos, luego la partición es más fina.

CONEXIÓN LOCAL POR CAMINOS

En este caso, también es útil conocer cuándo podemos trabajar de forma local a un punto asumiendo que dicha localización es conexa por caminos y a esto es lo que llamamos conexión local por caminos.

Definición (Conexión local por caminos)

*Sea X un espacio topológico, decimos que es **localmente conexo por caminos** si y sólo si para todo punto $x \in X$ existe una base de entornos $\mathcal{B}^x$ formada por abiertos conexos por caminos.*

Proposición (Caracterización de la conexión local)

Sea X un espacio topológico, X es localmente conexo por caminos si y sólo si las componentes conexas por caminos de un abierto son abiertas.

Demostración:

De nuevo, las demostraciones son completamente análogas a sus homólogas del capítulo de conexión.

Observación:

Sin excesiva dificultad, es sencillo demostrar que la definición de conexión local puede prescindir de la apertura de los conexos que forman la base de entornos, esto es, que la definición dada es equivalente a "X es localmente conexo por caminos si y sólo si $\forall x \in X$, $\exists \mathcal{V}^x$ base de entornos formada por conexos por caminos"

TABLA DE COMPORTAMIENTO

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local por caminos	✗	✓	✓	✓

Cuadro 11.1: *También vale que las c.c.c del producto son los productos de las c.c.c de los factores.*

RELACIONES ENTRE LAS PROPIEDADES DE CONEXIÓN

Por las similitudes entre ambos tipos de conexión definidos, no está demás estudiar qué condiciones han de darse para obtener unas a partir de otras y viceversa.

Proposición

Conexo y localmente conexo por caminos $\Rightarrow$ Conexo por caminos.

Demostración:

- Conexo $\Rightarrow \forall x, y,\ \exists$ cadenas de x a y.
- Localmente conexo por caminos $\Rightarrow$ cadenas de abiertos conexos por caminos $\xRightarrow{\text{Variante del pivote}}$ Estas cadenas son conexas por caminos.

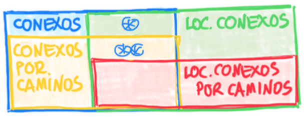
Por tanto, $\exists$ camino de x a y.

Observación:

Esta es la demostración de que un abierto conexo de $\mathbb{R}^n_u$ lo es por poligonales (se usan cadenas de bolas).

Observación: (Resumen)

Por especificar todas las posibilidades:



Enunciado

Contraejemplos. Los menos fáciles son $*$ y $**$

Ejemplo:

- Sea $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\text{rad}})$. Veamos si es conexo por caminos porque entonces será conexo.

  Primero intentamos parametrizar por interpolación: $(1-t)\,a + tb$. Como $\mathcal{T}_{\text{rad}}|_r = \mathcal{T}_u|_r$ es correcto el camino (r es una recta). En cambio si el camino es una curva cualquiera, la topología relativa es la discreta, es decir, la preimagen de un punto es todo $[0,1]$ al ser un abierto y cerrado en un conexo. Por tanto, f será constante (contradicción).

  En definitiva, tomamos como caminos entre dos puntos, la recta que los une. Con esto, el espacio es conexo por caminos $\Rightarrow$ conexo.

  La usual es localmente conexa por caminos. Si en la radial es localmente conexa por caminos tenemos que si $x_0 \in U$ entonces $\exists U \supset V_{\text{ab}} = C_{\text{cam.}}(x_0)$es el candidato a entorno abierto conexo por caminos de la base buscada.

  Usaremos $V = \{x \in U : \exists P \supset U : x_0 \to x\}$ con P poligonal que será conexo por caminos radiales. Veamos que es abierto (radial).

  Esto quiere decir que $\forall x \in V$ se cumple "la condición radial". $\exists \underbrace{(x-\varepsilon, x+\varepsilon)}_{\exists y} \subset U \cap L$.

  Formamos $P_y = P_x \cup [x,y] \subset U \Rightarrow (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V \cap L$.

- Veamos ahora la compacidad tenemos que $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}_r \Rightarrow$ si K compacto en la radial $\Rightarrow$ también lo será en la usual. Por tanto, al no ser $\mathbb{R}^2$ con la usual compacto, tampoco lo será con la radial.

  En cambio como con la usual, $\mathbb{R}^2$ sí es Lindelöf no podemos decidir directamente si con la radial lo es o no. Pero no es así porque las curvas son cerradas pero su topología relativa es la discreta y, por tanto, no son Lindelöf. Como se hereda, la radial no puede ser Lindelöf.

- Veamos la compacidad local. No lo es.

Parte II

Topología algebraica

HOMOTOPÍA

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Definición

*Una **homotopía** es una aplicación continua $H : Y \times [0,1] \to X$.*

Observación:

1. $H_s : Y \to X : y \mapsto H(y,s)\,,\ H \equiv \{H_s : 0 \le s \le 1\}$ familia uniparamétrica de aplicaciones.
2. Siendo $f = H_0$ y $g = H_1$:

$$\begin{cases} H_s : f \simeq g, \text{ homotopía entre } f \text{ y } g \\ H \text{ deformación continua de } f \text{ a } g \end{cases}$$

   Con esto, el problema que deseamos resolver es ver cuándo dos aplicaciones son **homótopas**:

$$\boxed{f \simeq g}$$

3. $f \simeq g$ relación de equivalencia:
   - $f \simeq f$ vía $H_s \equiv f$.
   - $H_s : f \simeq g \Rightarrow H_{1-s} : g \simeq f$.
   - $\left.\begin{matrix} F_s : f \simeq g \\ G_s : g \simeq h \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_s = \begin{cases} F_{2s}, & 0 \le s \le 1/2 \\ G_{2s-1} & 1/2 \le s \le 1 \end{cases} \quad : f \simeq h$

     Demostración:
     Continuidad: $\begin{cases} F_{2(1/2)} = F_1 = g \\ G_{2(1/2)-1} = G_0 = g \end{cases}$. En el resto de puntos la continuidad se da por serlo F y G.

     Como notación tenemos que $H_s = F_s * H_s$.

Habitualmente tomamos como hipótesis que el espacio sea conexo por caminos y conexo local por caminos.

Proposición

X conexo por caminos, $f, g : Y \to X$ constantes $\Rightarrow f \simeq g$.

Demostración:

Por hipótesis tenemos que $f \equiv x_0$ y $g \equiv x_1$. Entonces, como $\exists \sigma : [0,1] \to X,\ \sigma(0) = x_0$ y $\sigma(1) = x_1 \Rightarrow H_s \equiv \sigma(s) : \begin{cases} H_0 \equiv \sigma(0) = x_0 \equiv f \\ H_1 \equiv \sigma(1) = x_1 \equiv g \end{cases}$

Definición

*$f : Y \to X$ es **nulhomótopa** si $f \simeq$ constante, **esencial** en caso contrario.*

Teorema (Problema esencial. Fibración de Hopf)

(1932) $\exists f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ esencial con $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$(z, z') \mapsto \left(\|z\|^2 - \|z'\|^2, 2zz'\right)$$

Este ejemplo es importante porque demuestra que no todas las aplicaciones son nulhomótopas.

CONCEPTO RELATIVO

Definición

*$H : Y \times [0,1] \to X$ es una **homotopía relativa a** $A \subset Y$ si $H_s(a) = H_0(a)$, $\forall a \in A$ y $\forall s \in [0,1]$.*

Proposición

H relativa a A, $f = H_0$, $g = H_1 \Rightarrow f|_A = g|_A$. Notación: $H_s = f \overset{A}{\simeq} g$ (Relación de equivalencia).

Ejemplo: (Fundamentales. Interpolación)

1. $f, g : Y \to X \subset \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s = (1-s) f + sg : f \simeq g$.

   Demostración:

   Pues por convexidad $H_s(y) \in \underbrace{[f(y), g(y)] \subset X}_{\textbf{cond. crucial!}}$.

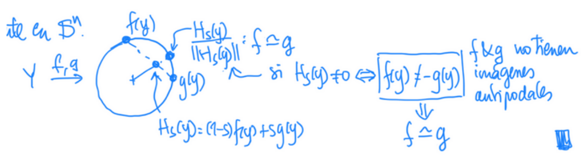
   $f(a) = g(a) \Rightarrow H_s(a) = (1-s) f(a) + sg(a) = f(a) = g(a) \Rightarrow H_s$ es relativa a $A = \{f = g\}$.

   Con esto vemos que dos funciones continuas en un convexo con homótopas.

2. $f : Y \to X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado respecto de x_0, $[x, x_0] \subset X$, $\forall x \in X \Rightarrow H_s = (1-s) f + sx_0 : f \simeq x_0$ (relativa a $A = f^{-1}(x_0)$).

   De nuevo, por transitividad, dos funciones continuas en un estrellado son homótopas.

3. Variante en $\mathbb{S}^n$:



CONTRACTIBILIDAD

Definición

*X es **contráctil** si $id : X \to X$ es nulhomótopa: $\exists H_s : id \simeq x_0$.*

*Y **fuertemente contrátil** si $\exists H_s : id \overset{x_0}{\simeq} x_0$ (homótopa relativa a $\{x_0\}$)*

Observación:

Los ejemplos son difíciles, pero son cosas distintas.

Ejemplo:

$X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado respecto $x_0 \Rightarrow$ fuertemente contráctil

Demostración:

$H_s = (1-s)\, id + s x_0$.

Proposición

1. *Si X es contrátil $\Rightarrow$ es conexo por caminos.*
2. *Si X es contráctil $\Rightarrow \begin{cases} \forall f : Y \to X \text{ nulhomótopa.} \\ \forall g : X \to Z \text{ nulhomótopa.} \end{cases}$*

Demostración:

1. $H_s : id \simeq x_0 \Rightarrow S \mapsto H_s(x_0)$ camino de x a x_0.
2. $H_s : id \simeq x_0 \begin{cases} H_s \circ f : f \simeq x_0 \\ g \circ H_s : g \simeq g(x_0) \end{cases}$

Observación:

Pocos espacios son contráctiles, pero no es inmediato verlo.

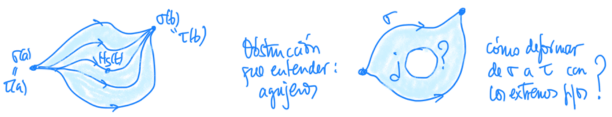
HOMOTOPÍA DE CAMINOS

EL CONCEPTO BÁSICO

Definición

Sean $\sigma, \tau : [a,b] \to X$, decimos que son homótopos ***con extremos fijos*** *si $\exists H_s : \sigma \simeq \tau$ relativa a $\{a,b\}$:*

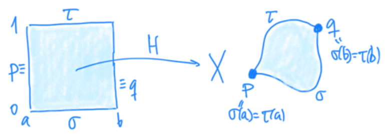
$$\begin{cases} H_s(a) = \sigma(a) = \tau(a) \\ H_s(b) = \sigma(b) = \tau(b) \end{cases} \quad \forall s \in [0,1]$$



Observación:

Es un problema de extensión:

Definir H en el cuadrado $[a,b] \times [0,1]$ con valor determinado en sus bordes.



SIMPLE-CONEXIÓN

Definición

X es ***simplemente conexo*** *si cumple las siguientes condiciones equivalentes:*

1. *$\forall \sigma, \tau : [a,b] \to X$ con iguales extremos son homótopos con extremos fijos.*
2. *$\forall f : \mathbb{S}^1 \to X$ se extiende al disco interior de la circunferencia:*

$$\exists \overline{f} : D^2 \to X$$

Demostración:

Colapsando dos lados de un cuadrado $\xrightarrow{\pi}$ disco con dos puntos en la circunferencia unidos por dos ceros α, β.

π es un cociente del cuadrado que hemos visto antes a $\mathbb{S}^1$.

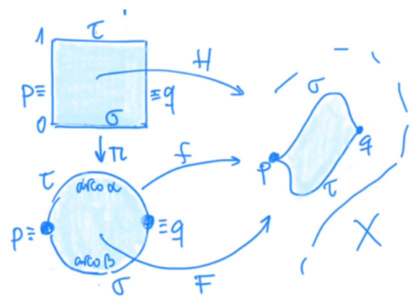
1. $\Rightarrow$ 2.)

$$f : \mathbb{S}^1 \to X \Rightarrow f \circ \pi \begin{cases} \alpha \to & \text{camino } \sigma \\ \beta \to & \text{camino } \tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists H \text{ con extremos fijos} \Rightarrow \text{compatible con } \pi$$

$$\Rightarrow H \text{ pasa al cociente por } \pi, \text{ dando } \overline{f}.$$

2. $\Rightarrow$ 1.) Dos caminos σ, τ con extremos p, q definen f en la circunferencia y su extensión $\overline{f}$ al disco define la homotopía $H = \overline{f} \circ \pi$.



Ejemplo:

Los conjuntos convexos son simplemente conexos. ¿Los estrellados?

ESFERAS $\mathbb{S}^N, \ N \geq 2$

Proposición

$\mathbb{S}^n : \{x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *es simplemente conexo* $(n \geq 2)$.

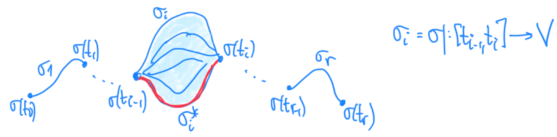
Demostración:

$\sigma, \tau : [a, b] \to \mathbb{S}^n, \ \sigma(a) = \tau(a) = p, \ \sigma(b) = \tau(b) = q.$

$$\exists c, -c \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, 1\} \ \wedge \ \left.\begin{array}{l} U = \mathbb{S}^n \setminus \{c\} \overset{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-c\} \overset{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \text{proyección estéreo.}$$

1. $[a, b] \subset \sigma^{-1}U \cup \sigma^{-1}V \xrightarrow{\text{comp.}} \exists a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1 : \sigma[t_{i-1}, t_1] \subset \begin{cases} U, \text{ ó} \\ V \end{cases}$ dónde $\sigma[t_{i-1}, t_i]$ es la traza de $\sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}$.
2. Si dos consecutivos están en el mismo U ó V, eliminamos la juntura común $\Rightarrow$ al atravesar una juntura t_k cambiamos de U a V ó viceversa, en particular, $x_k = \sigma(t_k) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$, que es conexo por caminos, o bien, nos quedamos sin junturas y $\sigma[a, b] \subset U$ ó V.

3. Consideramos los trozos en V (incluido que $\sigma\,[a,b] \subset V$ porque no hay ya junturas)



(*)

$$\sigma\,(t_{i-1})\,,\sigma\,(t_i) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\} \text{ conexo por caminos}$$
$$\Rightarrow \exists \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \to U \cap V \subset V \text{ mismos extremos que } \sigma_i.$$

(**) $V \approx \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^*$ en V con extremos fijos. ¡Ojo! $\boxed{\sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \to U}$.

4. Pegando a trozos homotopías en $\mathbb{S}^n$:

$$\begin{cases} \sigma\,[t_{i_1}, t_i] \subset U \Rightarrow H_s^i \equiv \sigma_i = \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \to U \subset \mathbb{S}^n \\ \sigma\,[t_{i_1}, t_i] \subset V \overset{3}{\Longrightarrow} H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \to V \subset \mathbb{S}^n \end{cases} \Rightarrow \sigma \simeq \sigma^*$$

Homótopos en $\mathbb{S}^n$ con extremos fijos, pero $\sigma^*\,[a,b] \subset U$.

5. Igual, $\exists H_s : \tau \simeq \tau^*$ homotopía en $\mathbb{S}^n$ con extremos fijos, pero $\tau^*\,[a,b] \subset U$.

En conclusión: $\sigma^* \simeq \tau^*$ en $U\,(\approx \mathbb{R}^n)$ con extremos fijos $\Rightarrow \sigma \simeq \sigma^* \simeq \tau^* \simeq \tau$ con extremos fijos.

EL GRUPO FUNDAMENTAL

OPERACIONES CON CAMINOS

Sea X es conexo por caminos y localmente conexo por caminos.

Definición (Producto de caminos)

Sean $\sigma, \tau : [0,1] \to X$ *tal que* $\sigma(1) = \tau(0) \Rightarrow$

$$(\sigma * \tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Que consiste en reescalar $\begin{cases} \sigma \ de \ [0,1] \ a \ \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \tau \ de \ [0,1] \ a \ \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

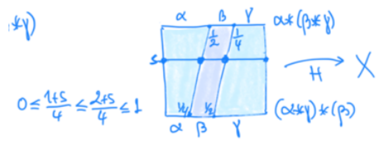
Las propiedades algebraicas son todas salvo *homotopía con extremos fijos*[1].

Proposición

Propiedades de grupo:

1. *Asociativa:* $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.

   En cada altura s *se reescalan los caminos con junturas.*



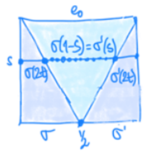
2. *Neutro:*

[1]Es decir, la asociatividad, el elemento neutro y el inverso no tienen porque darse en el sentido tradicional de igualdad sino por homotopías.

$\underset{\underset{\sigma(1)}{\shortparallel}}{\sigma * e_1} \simeq \sigma$, $0 \leq \frac{1+s}{2} \leq 1$,

$\underset{\underset{\sigma(0)}{\shortparallel}}{e_0 * \sigma} \simeq \sigma$, $0 \leq \frac{1-s}{2} \leq 1$,

3. *Inverso: $\sigma'(t) = \sigma(1-t) \Rightarrow \sigma * \sigma' \simeq e_0$ y $\sigma'' = \sigma \Rightarrow \sigma' * \sigma \simeq e_1$.*
   No se reescala: $0 \leq \frac{1-s}{2} \leq \frac{1+s}{2} \leq 1$.
   Las junturas dicen dónde parar σ y empezar σ' en cada altura:



4. *Invarianza por homotopía:*

$$\begin{cases} F_s : \sigma_1 \simeq \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \simeq \tau_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Trans.}} F_s * G_s : \sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2$$

$$F_s * G_s(t) = \begin{cases} F_s(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G_s(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

EL GRUPO FUNDAMENTAL

Sea X conexo por caminos, $x_0 \in X$ punto base fijo.

Definición

1. ***Lazo de base** x_0:*
$$\sigma : [0,1] \to X, \ \underbrace{\sigma(0) = \sigma(1)}_{\text{lazo}} = x_0, \text{ punto fijo.}$$

2. *Sean $\sigma, \tau : [0,1] \to X$ lazos de base x_0:*
   - ***Homotopía de lazos**: $H_s : \sigma \simeq \tau$ tal que $H_s(0) = H_s(1)$, $\forall s$.*
   - ***Homotopía de lazos con punto base fijo**: $H_s = \sigma \overset{x_0}{\simeq} \tau$ tal que $H_s(0) = H_s(1) = x_0$, $\forall s$. (Relativa a $\{0,1\}$)*

Definición (Grupo fundamental)

*Llamamos **grupo fundamental de X con base** x_0 a:*

$$\boxed{\pi(X, x_0) = \{\text{lazos de base } x_0\} \big/ \underset{x_0}{\simeq}}$$

("Lazos" / "Homotopía")

Observación:

$[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$ define bien un grupo por 14.1.

Ejemplo:

1. X simplemente conexo $\Leftrightarrow \pi(X, x_0) = \{1\}$, $\forall x_0$. [$\Leftarrow$) ejercicio]
2. $\pi(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}$, $n \geq 2$.

Demostración:

Por 1) y ser $\mathbb{S}^{\ltimes}$, $n \geq 2$ simplemente conexa.

3. $\pi(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2,\ n \geq 2$.
4. $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z},\ \pi(\text{banda Möbius}) = \mathbb{Z}$.
5. $\pi(\infty, x_0) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ que es una lemniscata y un **grupo libre** no conmutativo.

El cálculo de grupos fundamentales no es una tarea trivial, pero muy útil.

El punto base no es muy importante.

Proposición (Isomorfismo por punto base)

*Sea $\alpha : [0,1] \to X$ de $\alpha(0) = x_0$ a $\alpha(1) = x_1$. La **conjugación por** α:*

$$\begin{aligned} \pi(X, x_0) &\to \pi(X, x_1) \\ [\sigma] &\mapsto [\alpha' * \sigma * \alpha]. \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos (por homotopía).

Demostración:

Fácil con las propiedades de 14.1.

FUNTORIALIDAD

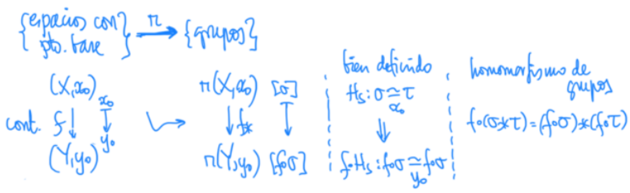
Definición

Definimos h_* como:

$$\begin{aligned} h : X \to Y \ \textit{homeo},\ h(x_0) = y_0 \Rightarrow \\ h_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0) \ \textit{iso}. \\ [\sigma] \mapsto [h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

Es fácil y útil: espacios homeomorfos deben tener grupos fundamentales isomorfos.

Por ejemplo, $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{R}P^2$ no son homeomorfos. Pero la construcción es mucho más general.



Definición (Funtorialidad)

$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ *y* $(id_X)_* = id_{\pi(X, x_0)}$.

Ejemplo:

Si $h : X \to Y,\ x_0 \mapsto y_0$ es homeomorfismo $\Rightarrow (h_*)^{-1} = \left(h^{-1}\right)_*$. [Más preciso que h_* isomorfismo]

Proposición (Producto de espacios)

Tenemos que si:

$$\begin{tikzcd} 1 & X \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\tau"'] & X\times Y \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \pi\left(X\times Y,(x_0,y_0)\right) &\xrightarrow{p_*,q_*} \pi\left(X,x_0\right)\times\pi\left(Y,y_0\right) \\ [\gamma] = [(\sigma;\tau)] &\mapsto \left([\sigma],[\tau]\right). \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración:

Sean:

$$\left.\begin{array}{l} F_s : \sigma_1 \overset{x_0}{\simeq} \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \overset{y_0}{\simeq} \tau_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(F_s, G_s\right) : \left(\sigma_1,\tau_1\right) = \gamma_1 \mapsto \gamma_2 = \left(\sigma_2,\tau_2\right) \text{ y nada más...}$$

Ejemplo:

1. $\pi\left(\mathbb{S}\times\mathbb{S}\right) = \pi\left(\mathbb{S}\right)\times\pi\left(\mathbb{S}\right) = \mathbb{Z}^2$.
2. $\pi\left(\mathbb{S}^1\times[0,1]\right) = \pi\left(\mathbb{S}\right)\times\pi\left([0,1]\right)$.

RETRACTOS

RETRACTOS Y DEFORMACIONES

Definición

Una aplicación $\rho : X \to A \subset X$ *es:*

1. *Un* ***retracto*** *si* $\rho|_A = id_A$ *(y* $A = \rho(A)$ *es un* <u>*retracto de* X</u>*)*

2. *Una* ***deformación*** *(fuerte) si:* $\exists H_s : id_X \overset{A}{\simeq} \rho$*, homotopía relativa a* A*.*

<u>Ejemplo</u>:

1. $\forall$ cte $: X \to \{x_0\} \subset X$ es retracto.

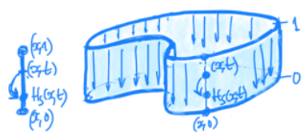
2. El retracto <u>radial</u> $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n : x \mapsto x/\|x\|$ es una deformación. $H_s(x) = (1-s)x + s\rho(x)$.

3. $\left.\begin{array}{l} \rho : X \to A \subset X \subset \mathbb{R}^n \text{ retracto} \\ [x, \rho(x)] \subset X, \ \forall x \end{array}\right\} \Rightarrow \rho$ deformación: $H_s = (1-s)\, id_X + s\rho$ (interpolación).

4. Cilindros:

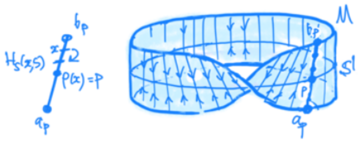
$$\begin{aligned} \rho : X \times [0,1] &\to X \times \{0\} \\ (x,t) &\mapsto (x,0) = \rho(x,t). \end{aligned}$$

con ρ deformación sobre $X : H_s(x,t) = \left(x, \underbrace{(1-s)\,t}_{(1-s)t + s\cdot 0}\right)$.



5. Banda de Möbius: $\mathbb{S}^1 \subset M = \bigcup_{p \in \mathbb{S}^1} [a_p, b_p]$.

Deformación sobre $\mathbb{S}^1$: $\begin{cases} \rho : M \to \mathbb{S}^1 : x \mapsto \rho(x) \\ H_s(x,s) = (1-s)\,x + s\rho(x) \end{cases}$



Proposición

Sea $\rho : X \to A \subset X,\ a_0 \in A;\ \rho_* : \pi(X, a_0) \to \pi(A, a_0)$.

1. *ρ retracto $\Rightarrow \rho_*$ suprayectivo.*
2. *ρ deformación $\Rightarrow \rho_*$ isomorfismo.*

Demostración:

1. ρ retracto:

$$A \overset{j}{\subset} X \xrightarrow{\rho} A,\quad \mathrm{Id}_A \Rightarrow \pi(A,a_0) \xrightarrow{j_*} \pi(X,a_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi(A,a_0),\quad \mathrm{Id}_{A*} \Rightarrow \begin{cases} j_* \text{ inyectiva} \\ \rho_* \text{ sobre} \end{cases} \checkmark$$

2. ρ deformación:

$$H_s : id_X \overset{A}{\simeq} \rho \Rightarrow j_* \text{ sobre.} : \begin{cases} [\sigma] \in \pi(X, a_0) & \Rightarrow H_s \circ \sigma : \sigma \overset{A}{\simeq} \rho \circ \sigma = j \circ \rho \circ \sigma \\ & \Rightarrow [\sigma] = [j \circ \rho \circ \sigma] = j_*[\rho \circ \sigma] \end{cases}$$

y por ser j_* sobre $\Rightarrow \rho_*$ inyectiva.

Ejemplo:

1. $\pi\left(\mathbb{R}^{n+1?} \setminus \{0\}\right) = \pi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \{1\}, & n \geq 2 \\ \mathbb{Z}, & n = 1 \end{cases}$
2. $\pi(\text{cilindro}) = \pi(\text{banda de Möbius}) = \pi\left(\mathbb{S}^1\right) = \mathbb{Z}$.

Demostración:

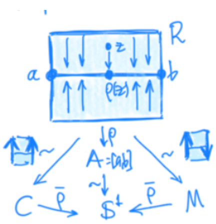
Veremos $\mathbb{S}^1$...

COCIENTES

Muchos espacios son cocientes y las deformaciones se pueden hacer compatibles para facilitar las construcciones.

Ejemplo:

Cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y banda de Möbius M.



Tenemos $C, M = R/$ identificaciones adecuadas de lados opuestos y, por otro lado, la deformación de R sobre $A = [a,b]$, $H_s(z) = (1-s)\,z + s\rho(z) \overset{(*)}{\Longrightarrow}$ deformación de $R/\sim$ sobre $[a,b]/\sim = \mathbb{S}^1$.

Es decir, $\boxed{\mathbb{S}^1 \text{ es deformación de } C \text{ y de } M\text{, luego todos tienen } \pi = \mathbb{Z}.}$

$(*)$: porque p y H_s son <u>compatibles con las relaciones</u>: $z \sim z' \Rightarrow H_s(z) \simeq H_s(z')$, luego inducen aplicaciones continuas $\overline{\rho}$ y $\overline{H_s} : R/\sim \to A/\sim$.

Normalmente se hacen las deformaciones pensando en que cumplan $H_s(z) \simeq H_s(z')$.

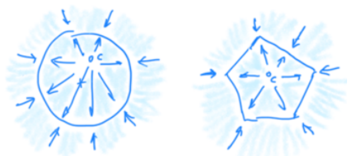
AGUJEROS

Conviene insistir en un ejemplo importante de deformación y sus variantes.

1. $\rho : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{esp. con “agujero”}} \to \mathbb{S}^n$ deformación $\Rightarrow \pi\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0\right) =$

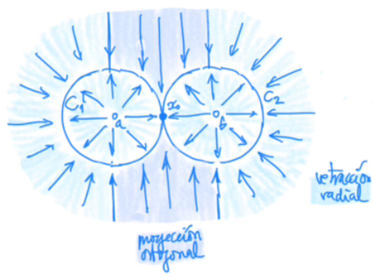
$$= \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 1 \text{ (se verá...)} \\ \{1\}, & n \geq 2 \;(\mathbb{S}^n,\ n \geq 2 \text{ simple-conexa}) \end{cases}$$

2. Dibujos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$ de retracciones sobre curvas “alrededor” del “agujero” c:



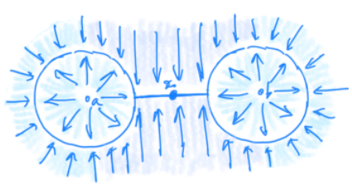
3. Dos agujeros $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$.

   Se trocea el espacio en cerrados, en cada uno de los cuáles se hace una deformación, de manera que en las fronteras coincidan. En el dibujo se sombrean diferentes las zonas en las que se usan deformaciones diferentes. Las deformaciones más cómodas son las interpolaciones de id y una retracción geométrica.



   En este caso, $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{a,b\} \to \infty?$ es deformación y $\pi\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{a,b\}, x_0\right) = \pi(\infty?) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (grupo fundamental de una lemniscata).

4. Otra variante:



$\mathbb{R}^2 \setminus \{a,b\} \to dibujo$ deformación dice que:

$$\pi\left(dibujo\right) = \pi\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{a,b\}, x_0\right) = \pi \underbrace{(\infty ?)}_{=\mathbb{Z}*\mathbb{Z}}$$

que es igual al grupo fundamental, pero <u>no</u> homeomorfismo.

5. Aún más ejemplos así (ya sin especificar el punto base):

$$\pi\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{a,b,c\}\right) = \pi\left(dibujo\right) = \pi\left(dibujo\right) = \pi\left(dibujo\right) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

<u>Demostración</u>: (creo)

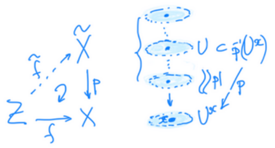
Cualesquiera tres puntos en $\mathbb{R}^2$ se pueden recolocar con homeomorfismos para hacer, a partir de ellos, retracciones sobre las curvas dibujadas, <u>no homeomorfas</u>. (?)

<u>Ejercicio</u>: Deformar $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{a\}$ sobre una circunferencia, para obtener $\pi\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \setminus \{a\}\right) = \mathbb{Z}$.

RECUBRIDORES

EL PROBLEMA DE ELEVACIÓN

Fijada p, qué f's tienen elevación $\tilde{f}$. i.e: $p \circ \tilde{f} = f$



Definición

*p es un **recubridor** si $\forall x \in X,\ \exists U^x,$ abierto **trivializante** : $p^{-1}(U^x) = \bigsqcup_\lambda U_\lambda$ y $\forall \lambda, p| : U_\lambda \to U^x$ homeomorfismo.*

Es un tipo especial de homeomorfismo local sobreyectivo y, por eso, identificación abierta.

Ejemplo: (¡Importantes!)

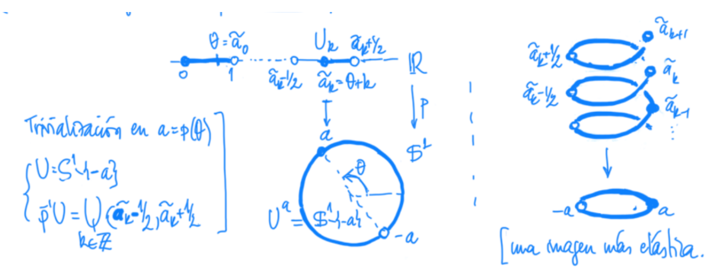
1. La identificación antipodal, $\pi : \mathbb{S} \to \mathbb{RP}^n$,

$$\forall x \in \mathbb{RP}^n \quad \underbrace{\exists U^x}_{\text{trivializante}} = \mathbb{RP}^n \setminus \underbrace{H}_{\text{hiperplano}} \wedge \pi^{-1}(U^x) = \mathbb{S}^n \setminus \pi^{-1}H = S_+ \sqcup S_-$$

   hemisferios abiertos.

   Ya se ilustró convenientemente en su lección. ¿Qué se tiene para $n = 1$?

2. La identificación exponencial, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2ni\theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$.



UNICIDAD DE ELEVACIÓN

Proposición

Si Z es conexo, dos elevaciones que coinciden en algún puntos son iguales.

Demostración:

$A = \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}, p \circ \tilde{f}_1 = f$.

$$\underbrace{x}_{f(z)} \in U^x,\ p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_\lambda \text{ (trivialización)} \Rightarrow \tilde{f}_i(z) \in p^{-1}U^x \ \wedge\ \exists! \lambda_i : \tilde{f}_i(z) \in U_{\lambda_i}$$

$$\Rightarrow \forall \xi \in W^z = \tilde{f}_1^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_{\lambda_2}) : \hat{f}_1(\xi) = \hat{f}_2(\xi) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 (**).$$

$(*)$ debido a:

- $\Rightarrow) U_\lambda$'s disjuntos.
- $\Leftarrow) p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$ y $p|_{U_\lambda}$ 1-1.

Por tanto,

- Abierto:

$$W^z \subset A \text{ si } z \in A : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \overset{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \ \wedge\ \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} = U_{\lambda_2} \xrightarrow{p|} \underbrace{U^x}_{\text{iny.}}$$

$$\Rightarrow \forall \xi \in W^z : \tilde{f}_1(\xi),\ \tilde{f}_2(\xi) \mapsto f(z) \Rightarrow \tilde{f}_1(\xi) = \tilde{f}_2(\xi).$$

- Cerrado:

$$W^z \subset Z \setminus A \text{ si } z \notin A : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \overset{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \cap \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \xi \in W^z : \tilde{f}_1(\xi) \neq \tilde{f}_2(\xi).$$

Por tanto,

$$\exists \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \Rightarrow \emptyset \neq A \underset{\text{cerr.}}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} Z \text{ conx.} \Rightarrow A = Z \ \wedge\ \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$$

LEMA DE ELEVACIÓN

Proposición

Tenemos que:

$$\begin{cases} f = H : Y \times [0,1] \to X \ \textit{(homotopía)} \\ \exists \tilde{H}_0 \ \textit{elevación de } H_0 : Y \to X \end{cases} \Rightarrow \exists \tilde{H} \ \textit{elevación}, \ \left(\tilde{H}\right)_0 = \tilde{H}_0$$

Demostración:

1. Elevación semilocal: $\forall y \in Y,\ \tilde{H}^y : V^y \times [0,1] \to \tilde{X}$ elevación de $H|_{V^y \times [0,1]}$.

a) $\{y\} \times [0,1] \subset \bigcup_x H^{-1}(U^x)\,,\ p^{-1}U^x = \bigsqcup_\lambda U_\lambda$ (trivialización en x) $\Rightarrow$

$$\xRightarrow{\text{comp.}} \exists 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1 : \{y\} \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i})$$
$$\xRightarrow{\text{comp.}} \forall i,\ \exists V_i^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i})$$
$$\Rightarrow \exists V^y = V_1^y \cap \ldots \cap V_r^y : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \overset{(*)}{\subset} H^{-1}(U^{x_i})\,.$$

b) Inducción, $i > 0 : \exists \tilde{H}_0 : V^y \times \{t_0\} \to \tilde{X}$ por hipótesis.

$\underline{i-1 \to i}$: $\exists H_{i-1}^y$ en $V^y \times [t_0, t_{i-1?}] \Rightarrow$ se puede extender a $V^y \times [t_{i-1}, t_i]$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} H(y, t_{i-1}) \in U^{x_i} \xRightarrow{\exists\lambda} \tilde{H}_{i-1}^y(y, t_{i-1}) \in U_\lambda \xRightarrow{\text{red. } V^y} \\ \qquad \hat{H}_{i-1}^y(V^y \times (t_{i-1})) \subset U_\lambda \to U^{x_i} \\ \exists \left(p|_{U_\lambda}^{-1}\right) \circ H : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \to U_\lambda \text{ elevación (de } H) \end{cases}$$
$$\Rightarrow p \circ \tilde{H}_{i-1}^y = p \circ \left[\left(p|_{U_\lambda}^{-1} \circ H\right)\right] : V^y \times \{t_{i-1}\} \to U^{x_i}$$
$$\xRightarrow{p|_{U_\lambda} \text{ iny.}} \tilde{H}_{i-1}^y = \left(p|_{U_\lambda}\right)^{-1} \circ H \text{ en } V^y \times \{t_{i-1}\}$$
$$\Rightarrow \left(p|_{U_\lambda}^{-1}\right) \circ H \text{ extiende } \tilde{H}_{i-1}^y \text{ a } V^y \times [t_{i-1}, t_i]\,.$$

2. Elevación global. Las locales $\{\tilde{H}^y : V^y \times [0,1] \to \tilde{X}\}_{y \in Y}$ encolan bien, pues coinciden en las intersecciones: $\forall y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$:

Observación:

1. La elevación de una aplicación $Y \to X$ sólo depende de su clase de homotopía.
2. Todo camino $\sigma : [0,1] \to X$ tiene uan única elevación $\tilde{\sigma}$ con origen $\tilde{\sigma}(0) \in p^{-1}(\sigma(0))$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \tilde{H}^{y_1}(y, \bullet) \\ \tilde{H}^{y_2}(y, \bullet) \end{array}\right\} \text{elevan } H(y, \bullet) : \{y\} \times [0,1] \\ \tilde{H}^{y_1}(y, 0) = \tilde{H}_0(y) = \tilde{H}^{y_2}(y, 0) \ \ 1^{\text{er}} \text{ paso ind.} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Uni. elevaccón.}} \tilde{H}^{y_1}(y, t) = \tilde{H}^{y_2}(y, t)\,,\ \forall z$$

CÁLCULOS MEDIANTE RECUBRIDORES

Hemos visto ya que:

- $\pi(\text{estrellado}) = \{1\},\ \pi(\mathbb{S}^n) = \{1\},\ n \geq 2 \Rightarrow \pi\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) = \{1\}$.
- $\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2,\ n \geq 2$ (no demostrado)
- $\pi\left(\mathbb{S}^1\right) = \mathbb{Z}$ (no demostrado).
  - $\pi(\text{toro}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ \pi(\text{cilindro}) = \mathbb{Z}$.
  - $\pi(\text{banda de Möbius}) = \mathbb{Z},\ \pi\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}\right) = \mathbb{Z}$.

  Ahora toca demostrar $\pi(\mathbb{P}^n)$ y $\pi\left(\mathbb{S}^1\right)$.

ESPACIOS PROYECTIVOS REALES

Teorema

$\pi(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2,\ n \geq 2$

Demostración:

Usamos el recubridor antipodal $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n : \tilde{x}, -\tilde{x} \mapsto x = [\tilde{x}] = [-\tilde{x}]$. Punto base en $\mathbb{P}^n : x_0 = (0 : \ldots : 1)\,;\ \sigma : [0,1] \to \mathbb{P}^n,\ \sigma(0) = \sigma(1) = x_0,\ \tilde{x}_0 = (0, \ldots, 1)$. Ahora, por el lema de elevación:

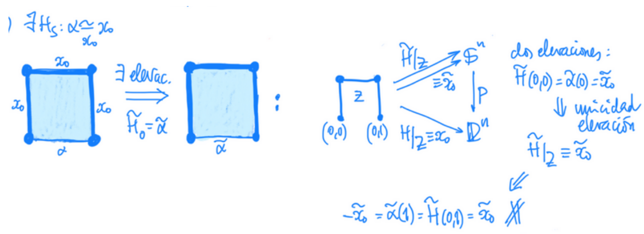
$$\Rightarrow \exists! \tilde{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{S}^n,\ p\tilde{\sigma} = \sigma,\ \tilde{\sigma} = \tilde{x}_0\ \wedge\ \tilde{\sigma}(1) \in p^{-1}(x_0) = \{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0\}$$

No veces? lazo.

1. $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{x}_0 \xRightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \overset{x_0}{\simeq} \tilde{x}_0 \Rightarrow \exists p \circ \tilde{H}_s : \sigma \overset{x_0}{\simeq} x_0 \Rightarrow [\sigma] = 1 \in \pi(\mathbb{P}^n, x_0)$.

2. $\tilde{\sigma}(1) = -\tilde{x}_0 \xRightarrow{\mathbb{S}^n \text{ simple conx.}} \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \overset{\tilde{x}_0, -\tilde{x}_0}{\simeq} \tilde{\alpha} = (0, \ldots, 0, \sin \pi t, \cos \pi t) \Rightarrow \exists p \circ H_s : \sigma \overset{x_0}{\simeq} \alpha = p \circ \tilde{\alpha}$, lazo de base $x_0,\ \alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.

3. Tenemos:



1. 2. 3. $\Rightarrow \pi(\mathbb{P}^n, x_0)$ tiene dos elementos distintos dependiendo del extremo de la elevación $\Rightarrow$

$$\boxed{\pi(\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2}.$$

LA CIRCUNFERENCIA

Teorema

$\pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Observación:

$\mathbb{S}^1 = \mathbb{P}^1$.

Demostración:

Usamos el recubridor exponencial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$. Punto base $x_0 \in \mathbb{S}^1$, $\forall \sigma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$, $s(0) = \sigma(1) = x_0$. Por el lema de elevación:

$$\Rightarrow \exists \tilde{\sigma} : [0,1] \to \mathbb{R}, p\tilde{\sigma} = \sigma \Rightarrow p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = \sigma(0) = p\tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) = \tilde{\sigma}(0) + k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Teorema

El n<u>º de vueltas</u>:

$$\begin{aligned} \# : \pi(\mathbb{S}^1, x_0) &\to \mathbb{Z} \\ [\sigma] &\mapsto \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0). \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos bien definido.

Demostración:

1. $k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ no depende de $\tilde{\sigma}$.

$$p\tilde{\tau} = \sigma = p\tilde{\sigma} \Rightarrow \tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(0) + l \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tau} & \text{elevan } \sigma \\ & \text{coinciden} \\ \tilde{\sigma} + l & \text{en } t = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{uni. elev.}} \tilde{\tau} = \tilde{\sigma} + l$$
$$\Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = (\tilde{\tau}(1) - l) - (\tilde{\tau}(0) - l) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0).$$

2. k no depende de homotopía de lazos, luego $\#$ está bien definido. Sea $H_s : \sigma \simeq \tau$ y $H_s(1) = H_s(0)$, $\forall s$:

$$\Rightarrow \exists \tilde{H}_s : \tilde{\sigma} \simeq \tilde{\tau} \text{ entre elevaciones de } \sigma \wedge \tau$$
$$\Rightarrow s \mapsto \underbrace{\tilde{H}_s(1)}_{\xrightarrow{p} H_s(1)} \setminus \underbrace{\tilde{H}_s(0)}_{\xrightarrow{p} H_s(0)} \in \mathbb{Z} \xRightarrow{\text{cont.}} \tilde{H}_s(1) - \tilde{H}_s(0) \equiv cte.$$
$$\Rightarrow k = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \tilde{H}_0(1) - \tilde{H}_0(0) \overset{cte.}{=} \tilde{H}_1(1) - \tilde{H}_1(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0).$$

3. # es isomorfismo. Sea $\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)$ y $\#\tau = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)$ y:

$$\begin{aligned}\tau(0) = \tau(1) = p\tilde{\sigma}(1) \Rightarrow \tilde{\sigma}(1) \text{ cond. inicial elev.} \\ \Rightarrow \exists \tilde{\tau} : \underline{\tilde{\tau}(0) = \tilde{\sigma}(1)} \Rightarrow \tilde{\sigma} * \tilde{\tau} = \sigma \,\tilde{*}\, \tau.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\#(\sigma * \tau) = \sigma \,\tilde{*}\, \tau(1) - \sigma \,\tilde{*}\, \tau(0) = \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma} * \tilde{\tau}(0) = \tilde{\tau}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \\ = (\tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0)) + (\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0)) = \#\tau + \#\sigma.\end{aligned}$$

4. # es suprayectiva:

$$\#(\cos 2\pi kt, \sin 2\pi kt) = kt|_0^1 = k$$

(Recorrer $\mathbb{S}^1$ k veces)

5. # es 1-1:

$$0 = \#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{cases} \left.\sigma\tilde{(1)} = \tilde{\sigma}(0) \Rightarrow \begin{array}{l} H_s(0) = p\tilde{\sigma}(0) = \sigma(0) = \sigma(0) = x_0 \\ H_s(1) = p\tilde{\sigma}(1) = \sigma(1) = x_0 \end{array}\right\}(*) \\ \\ \underbrace{p((1-s)\tilde{\sigma}(t) + s\tilde{\sigma}(0))}_{H_s(t)} : \sigma \underset{(*)}{\overset{x_0}{\simeq}} x_0 \end{cases}$$

$[\Rightarrow (\sigma) = 1 \in \pi\left(\mathbb{S}^1, x_0\right)]$

APLICACIONES EN DIMENSIÓN 2

Veamos tres teoremas importantes que se pueden demostrar en dimensión 2 con lo que ya hemos visto del grupo fundamental.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Teorema (Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ tiene raíces complejas.

Demostración:
Sea $P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \ldots + \overbrace{a_d}^{\neq 0}$ (mónico después de dividir por el cof. director)

1. Tendremos:
$$P_s(z) = z^d + s a_1 z^{d-1} + \ldots + s a_d = 0 \xrightarrow{0 \le s \le 1} |z| < 1 + |a_1| + \ldots + |a_d| = r$$
$$P_s \neq 0 \xrightarrow{z \neq 0} \text{entre } z^{d-1} : -z = s\left(a_1 + \ldots + s\frac{a_d}{z^{d-1}}\right) \Rightarrow |z| \le \begin{cases} 1, & |z| \le 1 \\ |a_1| + \ldots + |a_d|, & |z| \ge 1 \end{cases}.$$

2. $z(t) = r(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \Rightarrow |z(t)| = r \Rightarrow \exists H_s(t) = \frac{P_s(z(t))}{\underbrace{|P_s(z(t))|}_{\neq 0}}$ por 1.
$$\Rightarrow (\cos 2\pi dt, \sin 2\pi dt) = \frac{z(t)^d}{|z(t)^d|} = H_0(t) \overset{\text{lazos: } z(0)=z(1)}{\simeq} H_1(t)$$
$$= \frac{P(z(t))}{|P(z(t))|} = \sigma(t) \Rightarrow d = \#(\ldots) = \#\sigma.$$

3. $P(z) \neq 0,\ \forall z \Rightarrow \exists G_s(t) = \frac{P(sz(t))}{|P(sz(t))|} : G_0 \equiv \frac{a_d}{|a_d|} \overset{\text{lazos}}{\simeq} G_1 = \sigma \Rightarrow 0 = \#(cte.) = \#\sigma.$

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER

Teorema (de no retracto)

$\nexists$ retracto $\rho : \mathbb{D}^2 = \{x^2 + y^2 \le 1\} \to \mathbb{S}^1$.

Demostración:

Tenemos:

$$\exists\rho \Rightarrow \rho_* : \overbrace{\underbrace{\pi\left(\mathbb{D}^2\right)}_{\text{convexo}}}^{=\{0\}} \rightarrow \underbrace{\pi\left(\mathbb{S}^1\right)}_{\overset{\#}{=}\mathbb{Z}} \text{ sobre } (15.1)$$

Teorema (del punto fijo)

$\forall f : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ continua, $\exists p$ punto fijo $x = f(x)$.

Demostración:

Al absurdo?: $x \neq f(x), \forall x \Rightarrow \exists \rho : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ retracto.

Construcción de ρ:

La recta $(x \neq f(x))$, $r(x, f(x)) \cap \mathbb{S}^1 = \{a, b\} \Rightarrow \rho(x) = a = x + \overbrace{\lambda(x)}^{>0}(x - f(x))$.

Ejercicio: Ecuación de λ y continuidad.

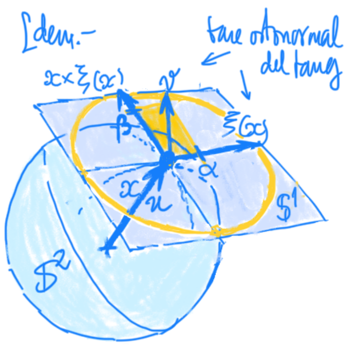
TEOREMA DE LA ESFERA DE BROUWER

Teorema (de la esfera de Brouwer)

$\nexists\eta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo tangente continuo sin ceros. (Tangente $\equiv \eta(x) \perp x,\ \forall x \in \mathbb{S}^2$)

Demostración:

Con una ilustración:



Sea $\exists\eta$ sin ceros $\Rightarrow \exists\frac{\eta}{\|\eta\|}$ unitario $\Rightarrow$ podemos suponer $\|\eta\| = 1$:

1. $h : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\approx \text{ hom.}} SO\left(3\right) = \{\text{matrices } 3x3 \text{ ortogonales, } \det > 0\}$

$$\left(\alpha, \beta; x\right) \overset{h}{\mapsto} A = \left(u, v, u \times v\right) \begin{cases} u = x \\ v = \alpha\eta\left(x\right) + \beta\left(x \times \eta\left(x\right)\right) \end{cases}$$

   Con $\alpha^2 + \beta^2 = 1,\ \|x\| = 1$. Bien definida, continua y biyectiva $\xRightarrow{\text{compacto a } T_2}$ homeo.

2. $h_* : \underbrace{\pi\left(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2\right)}_{=\mathbb{Z}\times\{1\}} \to \pi\left(SO\left(3\right)\right)$ isomorfismo $\Rightarrow \pi\left(SO\left(3\right)\right) = \mathbb{Z}$.

3. Abracadabra?: $SO\left(3\right) \overset{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{P}^3 \Rightarrow \mathbb{Z} = \pi\left(SO\left(3\right)\right) = \pi\left(\mathbb{P}^3\right)$.

MÁS APLICACIONES POR EL MISMO PRECIO

Unos cuantos teoremas profundos más en $\dim = 2$.

BORSUK-ULAM

Teorema (de Borsuk)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ impar $(f(-x) = -f(x))$: $\# f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ impar $(\Rightarrow \# \neq 0)$

<u>Demostración</u>:

Tenemos que:

[dem.

$$\begin{tikzcd} & & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[urr, "\tilde{\sigma}"] \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "{(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)}"'] & & \mathbb{S}^1 \\ & \mathbb{S}^1 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\sigma}$ elevación de $\sigma(t) = f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. $\begin{cases} x = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \\ 0 \leq t \leq 1/2 \end{cases}$ $(*)$.

$f(-x) = -f(x) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \sigma\left(t + \frac{1}{2}\right) = -\sigma(t) \Rightarrow \tilde{\sigma}\left(t + \frac{1}{2}\right) = \tilde{\sigma}(t) + k_t + \frac{1}{2}$. Como $k_t \equiv cte.$ es continua:

$$\#\sigma = \tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}(0) = \left(\tilde{\sigma}(1) - \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) + \tilde{\sigma}\left(\frac{1}{2}\right) - \tilde{\sigma}(0)\right) = \left(\underbrace{k_{1/2}}_{k_0} + \frac{1}{2}\right) + \left(k_0 + \frac{1}{2}\right) = 2k_0 + 1$$

Análogamente,

Teorema (de Hirsch)

Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ par $(f(-x) = f(x))$: $\# f(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ par.

Corolario (Teorema de Borsuk-Ulam)

$f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ impar $\Rightarrow$ esencial.

Demostración:

$\exists H_s : f \simeq cte. \Rightarrow H_s(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : \sigma \simeq x_0 \Rightarrow \#\sigma = 0$, con σ rotación anterior y la homotopía de lazos.

Corolario (2)

$\nexists g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ impar.

Demostración:

Tenemos:

Idem.-

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{S}^1 \\ {[0,1]} \arrow[r, "\sigma", "{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}"'] & \mathbb{S}^1 = \{z=0\} \cap \mathbb{S}^2 \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f=g|"'] & \end{tikzcd}$$

- g impar $\Rightarrow f$ impar $\Rightarrow \#\sigma \neq 0$.
- $\mathbb{S}^2$ simple conexo $\exists H_s : (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0) \overset{\text{base }(1,0,0)\text{ fijo}}{\simeq} (1,0,0)$. Como $f = g_{-}z = 0 \Rightarrow$

$$g \circ H_s : f\underbrace{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)}_{\sigma} \simeq f(1,0,0)\, cte. \Rightarrow \#\sigma = 0$$

Corolario (3)

$\forall h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \exists h(x) = h(-x)\ (\Rightarrow h$ no es 1-1).

Demostración:

$h(x) \neq h(-x),\ \forall x \Rightarrow \exists g(x) = \frac{h(x)-h(-x)}{\|h(x)-h(-x)\|} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ impar.

INVARIANZA DEL DOMINIO

Teorema

Sea $f : U_{ab.} \to \mathbb{R}^2$ continua y 1-1 $\Rightarrow f(U)$ es abierto.

Demostración:

$\forall a \in U,\ \exists V^{\text{ab.}} \subset \mathbb{R}^2 : f(a) \in V \subset f(U)$. Por traslaciones: $a = f(a) = 0$. Con esto, $\exists \varepsilon > 0 :$

$$B(0,\varepsilon) \subset B[0,\varepsilon] \subset U;\ 0 \notin S = S[0,\varepsilon] \xRightarrow{\text{1-1}} 0 = f(0) \in f(S) \Rightarrow \exists V = C(0) \overset{\text{c.c}}{\subset} \mathbb{R}^2 \setminus f(S)$$

$$S \text{ comp.} \Rightarrow f(S)\,\text{comp.} \Rightarrow \text{cerr. en } \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2\text{loc. conx.} \Rightarrow V \underset{\text{conx.}}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{c. caminos}(*).$$

Este V es la solución: $V \subset f(B) \subset f(U)$.

Al absurdo: $\exists c \in V \setminus f(B) \xRightarrow{(*)} \exists \sigma : [0,1] \to V,\ \sigma(0) = c,\ \sigma(1) = 0$.

Denotamos,

$$g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto f(\varepsilon x);\ h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto g(x) - g(-x)$$

y tenemos las homotopías: $\mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1$.

- $\frac{f(\varepsilon s x)-c}{\| \quad \|} : \frac{-c}{\| \|} \simeq \frac{g-c}{\| \|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x)-\sigma(s)}{\| \quad \|} : \frac{g-c}{\| \|} \simeq \frac{g}{\| \|}$.
- $\frac{f(\varepsilon x)-f(-\varepsilon s x)}{\| \quad \|} : \frac{g}{\| \|} \simeq \frac{h}{\| \|}$

Con esto, $\frac{h}{\| \|} \simeq cte.$! por Borsuk-Ulam.

Que los denominadores no se anulan es una comprobación rutinaria.

DIVARIANZA DEL BORDE Y DE LA DIMENSIÓN

Teorema

$S,T \subset \mathbb{R}^2,\ h : S \overset{homeo.}{\approx} T \Rightarrow h\left(S \setminus \mathring{S}\right) = T \setminus \mathring{T}.$

Demostración:

$h : \mathring{S} \to \mathbb{R}^2$ inyectiva $\Rightarrow h\left(\mathring{S}\right) \underset{19,2}{\overset{\text{ab.}}{\subset}} \mathbb{R}^2 \Rightarrow h\left(\mathring{S}\right) \subset \mathring{T}$. (el otro $\supset$ con h^{-1})

Ejemplo:

$S = T = \{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow h\,(x=0) = (x=0).$

Teorema

$U \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^n,\ V \overset{ab.}{\subset} \mathbb{R}^2,\ h : U \overset{homeo.}{\approx} V \Rightarrow n = 2.$

Demostración:

$\exists H \subset \mathbb{R}^n$ [plano afín interior vacío en $\mathbb{R}^n$ salvo si $n=2$](*) : $U \cap H \neq \emptyset \Rightarrow h| : \underbrace{U \cap H}_{\approx \text{ab.}} \xrightarrow{\text{1-1}} V \subset \mathbb{R}^2 \xRightarrow{19,2} h\,(U \cap H) \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{R}^2 \xRightarrow{h \text{ homeo.}} U \cap H = h^{-1}h\,(U \cap H) \overset{\text{ab.}}{\subset} U \xRightarrow{(*)} n = 2$

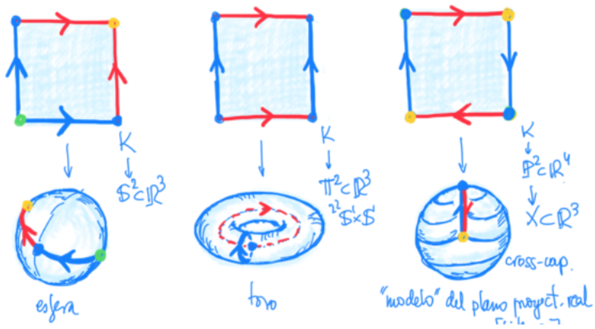
SUPERFICIES

CONCEPTO

Definición

Una superficie es un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Supondremos siempre que es T_2 y el II Ax., lo que implica que se puede sumergir en $\mathbb{R}^n$ para n grande.

Nos interesan las superficies compactas. Las tres primeras son cocientes:



Ejercicio: $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto \frac{(x_1^2 - x_2^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2}$.

Observación:

$P^2 \to \mathbb{R}^3$ tiene siempre identificaciones adicionales (como el cros-cap?)

SUMAS CONEXAS

El método genérico para construir superficies requiere el concepto un poco más general siguiente:

Definición

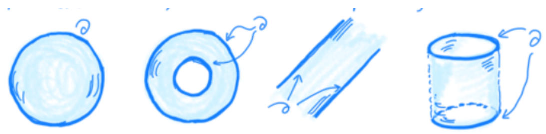
Una superficie con borde es un espacio local homeomorfo a $\{x \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ y los puntos del borde se corresponden con $\{x = 0\}$ (es una definición consistente por la inversa? del borde)

Observación:

Sin los puntos del borde se tiene una superficie ordinaria.

Ejemplo:

1. Un disco cerrado, que tiene por borde la circunferencia.
2. Una corona circular, una banda entre rectas paralelas, un tronco de cilindro.

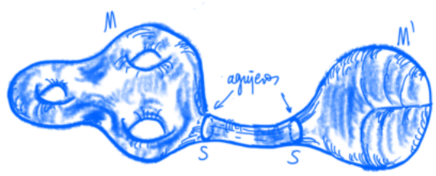


Con este concepto podemos "hacer agujeros" en superficies y, con ellos, definir:

Definición

La suma conexa $M\#M'$ de dos superficies M y M' se construye haciendo un agujero en cada una y pegando las superficies agujereadas por sus bordes:

1. *Agujeros: $B \subset M$ y $B \subset M'$ (discos abiertos) con bordes $S = \overline{B} \setminus B$ y $S' = \overline{B'} \setminus B'$ (circunferencias).*
2. *Superficies agujereadas: $M \setminus B$ y $M' \setminus B$ con los mismos bordes S y S'.*
3. *Pegando por los bordes: $M\#M' = ((M \setminus B) + (M' \setminus B')) \,/\, (S \equiv S')$.*



Proposición

La suma conexa está bien definida y no depende de los agujeros elegidos (salvo homeomorfismos).

Demostración:

Que efectivamente es una superficie ordinaria (sin borde) es fácil si elegimos los agujeros en abiertos de las superficies homeomorfas a $\mathbb{R}^2$. Luego, hay que ver que si cambiamos los agujeros obtenemos el mismo resultado (salvo homeomorfismo) y esto ya requiere resultados profundos como el teorema de Jordan-Schoenflies.

Proposición

La suma conexa es una operación asociativa conmutativa con elemento neutro la esfera.

Demostración:

Que $(M\#M')\#M'' \approx M\#(M'\#M'')$ es fácil tomando agujeros bien separados. También es obvio que $M\#M' \approx M'\#M$. Finalmente:

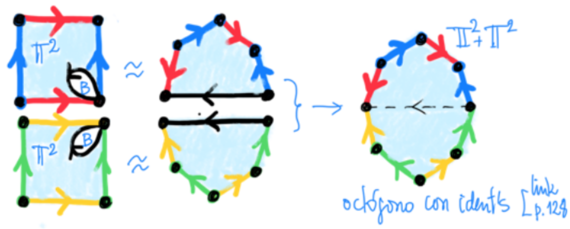
$$M\#\mathbb{S}^2 = \left((M \setminus B) + \left(\mathbb{S}^2 \setminus B'\right)\right) / (S \equiv S') = ((M \setminus B) + B) / (S \equiv S') = M$$

pues $\mathbb{S}^2 \setminus B'$ es un disco cerrado que restituimos a M.

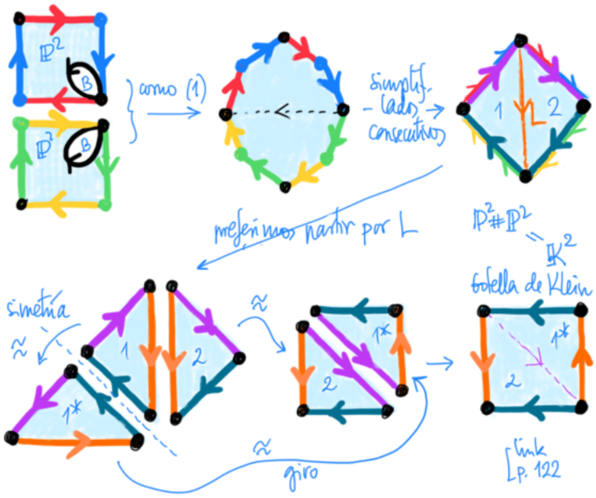
COCIENTES

Las sumas conexas se visualizan muy bien mediante identificaciones.

1. <u>Suma conexa de toros</u>:



2. <u>Suma conexa de planos proyectivos</u>:



CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES

EL TEOREMA

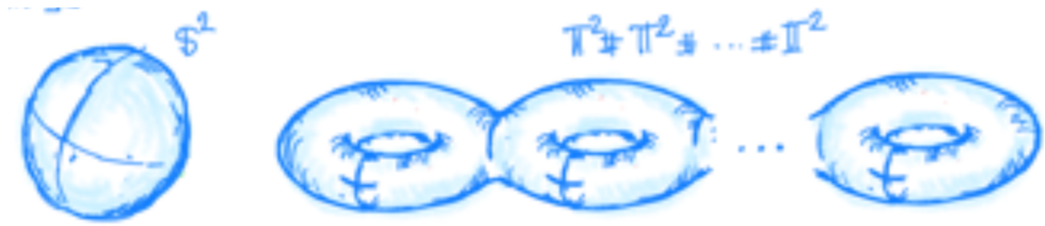
Teorema

Toda superficie compacta es homeomorfa a una y sólo una entre:

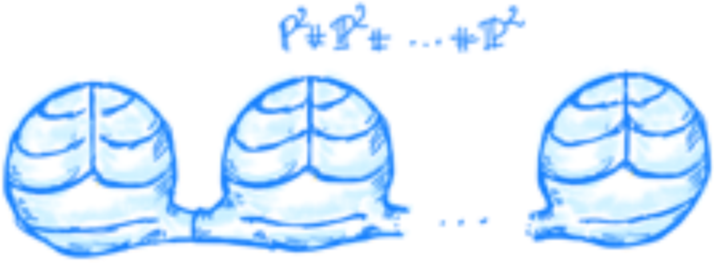
$$\mathbb{S}^2;\ \Pi^2 \# \overset{k}{\cdots} \Pi^2, k \geq 1;\ \mathbb{P}^2 \# \overset{k}{\cdots} \# \mathbb{P}^2, k \geq 1$$

Las podemos dibujar:

- En $\mathbb{R}^3$:



- En $\mathbb{R}^4$ (modelo en $\mathbb{R}^3$):



El "solo una" del enunciado nos dice que estas superficies son <u>todas distintas</u> (no homeomorfismo): el grupo fundamental las distingue. Ya sabemos que $\pi\left(\mathbb{S}^2\right) = \{1\},\ \pi\left(\Pi^2\right) = \mathbb{Z}^2,\ \pi\left(\mathbb{P}^2\right) = \mathbb{Z}_2$ y los demás H_0? son desiguales (aunque no sepamos calcularlos).

LA RELACIÓN FUNDAMENTAL

En la lista del teorema de clasificación no hay sumas "mixtas": $\Pi^2\#\mathbb{P}^2, \ldots$, pero el mismo teorema nos dice que están en la lista. Es claro que, por las propiedades de $\#$, cualquier suma conexa de $\mathbb{S}^2, \Pi^2$ y $\mathbb{P}^2$ estará en la lista en cuanto esté $\Pi^2\#\mathbb{P}^2$. En efecto:

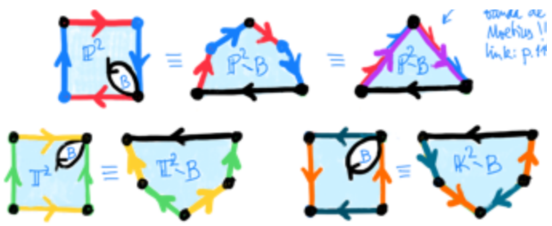
Proposición

$\mathbb{P}^2\#\Pi^2 = \mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$.

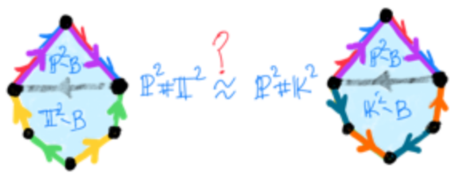
Demostración:

"Cut & paste" típico de identificaciones. Como $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2$ (20.3) es la botella de Klein, el homeomorfismo que partiremos? es $\mathbb{P}^2\#\Pi^2 = \mathbb{P}^2\#\mathbb{K}^2$ con:

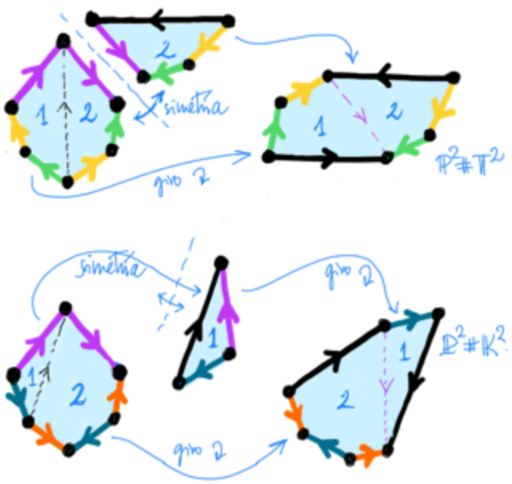
1. Agujeros:



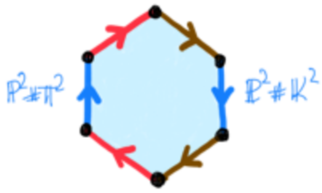
2. Pegados:



3. *Cut & paste*:



Obtenemos dos representaciones nuevas de $\mathbb{P}^2\#\Pi^2$ y $\mathbb{P}^2\#\mathbb{K}^2$, con apariencias desiguales, pero topologías iguales: dos hexágonos con las mismas identificaciones de lados:



No dejarse engañar por los colores ni los sentidos de las flechas.

GRUPOS FUNDAMENTALES CON UN AGUJERO

Aunque no podamos distinguir todas las superficies unas de otras porque no conocemos todos los grupos fundamentales, si podemos hacer algunas distinciones "haciendo agujeros".

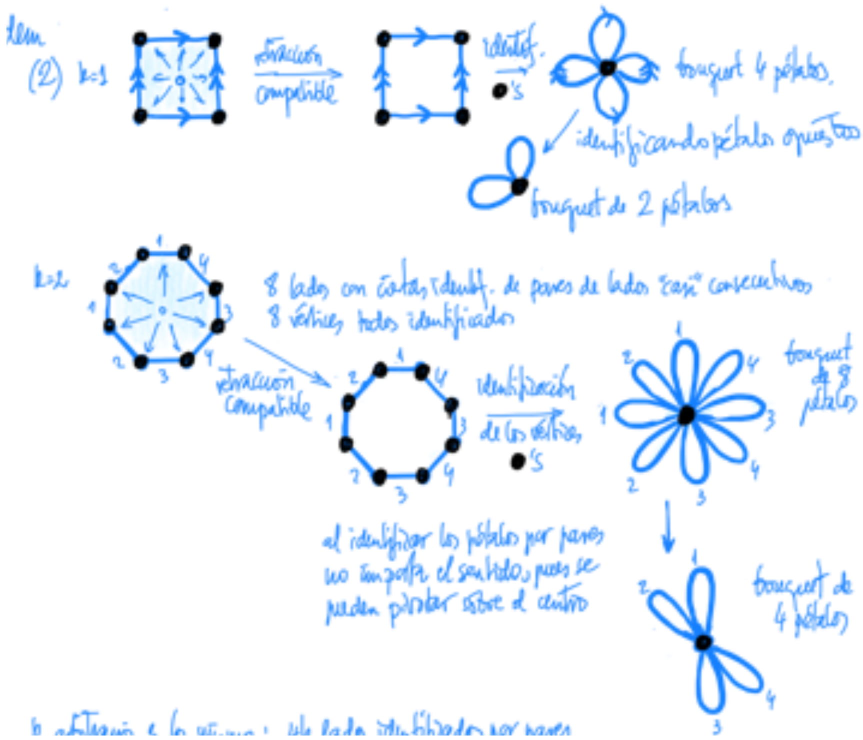
Proposición

Distinguimos:

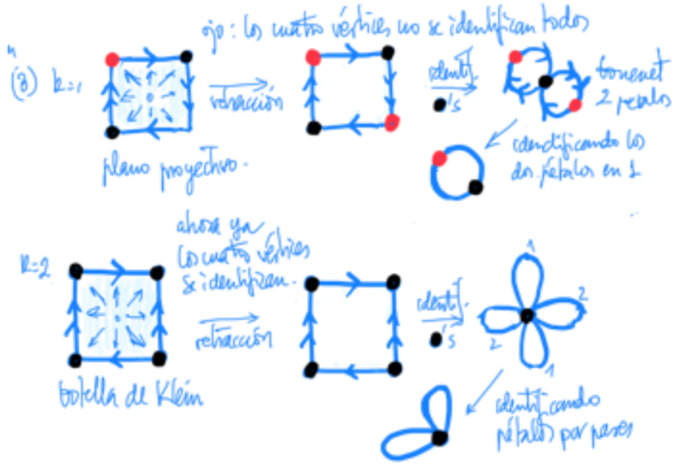
1. $\pi\left(\mathbb{S}^2 \setminus \{a\}\right) = \pi\left(\mathbb{R}^2\right) = \{1\}$.
2. $\pi\left(\Pi^2 \# \overset{k}{\cdots} \# \Pi^2 \setminus \{a\}\right) = \pi\left(dibujo^{2k}\right) = \mathbb{Z}^{*^{2k}}$.
3. $\pi\left(\mathbb{P}^2 \# \overset{k}{\cdots} \# \mathbb{P}^2 \setminus \{a\}\right) = \pi\left(dibujo^{k}\right) = \mathbb{Z}^{*^{k}}$.

Demostración:

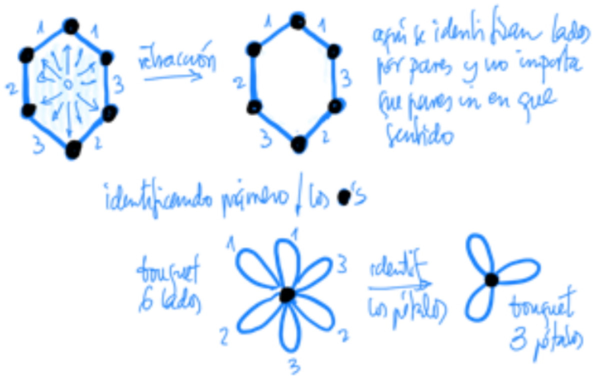
Tenemos



Con k arbitrario es lo mismo: $4k$ lados identificados por pares, $4k$ vértices todos identificados. Por retracción radical desde un punto interior (el agujero), obtenemos la poligonal con esas mismas identificaciones. Al identificar los vértices se tiene un bouquet de $4k$ pétalos y, al identificar pétalos por pares, un bouquet de $2k$ pétalos.



$k = 3$. Por *cut & paste*, los lados, pueden? sumar un proyectivo aporta? 2 lados identificados entre sí con tres vértices identificados todos (21.2).



Con k arbitrario es lo mismo: se empieza con un polígono de $2k$ lados, que se retrae a una poligonal de $2k$ lados, en la que se identifican los vértices para obtener un bouquet de $2k$ pétalos, que se identifican por pares para tener un bouquet de k.

<u>Conclusión</u>:

Todas las superficies se distinguen por el grupo fundamental después de quitar un punto, salvo los pares:

$$\Pi^2 \# \overset{k}{\cdots} \# \Pi^2 \ \wedge \ \mathbb{P}^2 \# \overset{2k}{\cdots} \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{K}^2 \# \overset{k}{\cdots} \# \mathbb{K}^2$$

para cada $k \geq 1$. El primer caso (y el esencial) es que el toro y la botella de Klein no son homeomorfos: La razón de fondo es la orientabilidad, que no hemos estudiado aquí.

En general:

- Cualquier $\mathbb{P}^n \# \cdots \# \mathbb{P}^2$ contiene una banda de Möbius (de hecho, tantas como sumandos) y la banda es no orientable.
- Cualquier $\Pi^2 \# \cdots \# \Pi^2$ es orientable, luego cualquier abierto suyo lo es, luego no puede contener una banda de Möbius.

GRANDE FINALE

Vamos a probar que la esfera <u>no</u> es contrátil, utilizando el teorema de la esfera de Brouwer (18.3) y las ideas sobre vectores tangentes allí vistas:

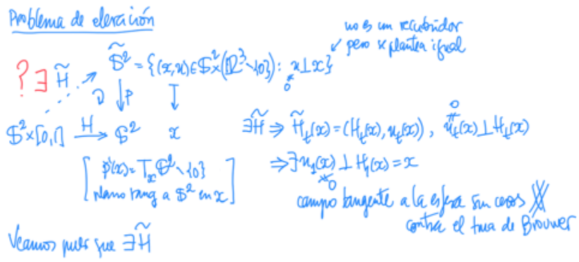
Proposición

$\mathbb{S}^2$ *<u>no</u> es contráctil:* $\nexists H_t : cte. \simeq id_{\mathbb{S}^2}$.

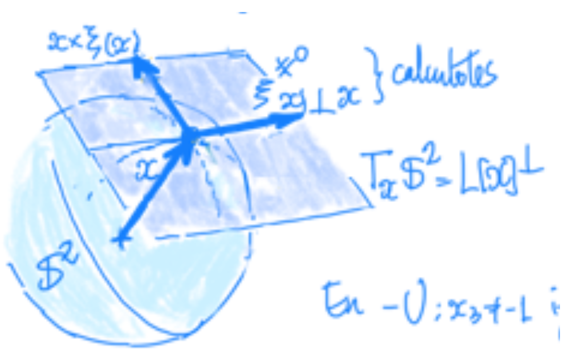
<u>Demostración</u>:

Absurdo: sea que $\exists H_t : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2,\ H_0(x) = x_0,\ H_1(x) = x$.

1. <u>Problema de elevación</u>:



2. <u>Estructura de $\tilde{\mathbb{S}}^1$</u>:
   Como esquema tenemos,



Así, $c = (0,0,1)$, $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{c\} = \{x_3 \neq 1\}$, $-U : \mathbb{S}^2 \setminus \{-c\} = \{x_3 \neq -1\}$.
En $U : x_3 \neq 1$, $\{\eta(x) = \left(1 - x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, x_1(1 - x_3)\right),\ \eta(x) = x \times \eta(x)\}$ base de $T_x\mathbb{S}^2$ ortogonal. $\Rightarrow \forall \underbrace{u}_{\neq 0} \perp x : u = \lambda(u,x)\,\eta(x) + \mu(u,x)\,\eta(x)$.

$$\begin{cases} \lambda(u,x) = \langle u, \eta(x)\rangle / \|\eta(x)\|^2 \\ \mu(u,x) = \langle u, \eta(x)\rangle / \|\eta(x)\|^2 \end{cases} \quad \text{cond's ?? continuas.}$$

En $-U : x_3 \neq -1$ igual con $\eta(x) = \left(1 + x_3 - x_1^2, -x_1 x_2, -x_1(1 + x_3)\right)$.

3. Preparación local: Igual que en 16,2 para la elevación de recubridores:

$$\forall x \in \mathbb{S}^2,\ \exists W^x \overset{\text{ab.}}{\subset} \mathbb{S}^2,\ \exists 0 = t_0 < \ldots < t_r = 1 : W^x \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U) \text{ ó } H^{-1}(-U)$$
$$\text{reducción } W^x \supset \overline{V^x} \supset V^x.$$

¡La partición depende de x! $\Rightarrow \mathbb{S}^2$ comp.$\mathbb{S}^2 = V^{x_1} \cup \ldots \cup V^{x_v}$ y juntamos las v particiones.

$$\Rightarrow \mathbb{S}^2 = V_1 \cup \ldots \cup V_v \ \wedge\ \exists 0 = t_0 < \ldots < t_r = 1 : H\left(\overbrace{W_k}^{\supset \overline{V}_k \supset V_k} \times [t_{i-1,i}]\right) \subset U \text{ ó } -U.$$

Objetivo: construir la elevación $\tilde{H}$ en pasos sucesivos:

- dada $\tilde{H}_t$ para $0 \le t \le t_{i-1}$ extenderla a $t_{i-1} \le t \le t_i$, es decir,
- dada $\tilde{H}_{t_{i-1}}$ extenderla a $t_{i-1} \le t \le t_i$.

Para empezar en $i = 1$:

$$\tilde{H}_{t_0}(x) = \tilde{H}_0(x) = (H_0(x), u_0(x)) = (x_0, u_0),\ \text{cualquier } \overbrace{u_0}^{\neq 0} \perp x_0$$

El paso inductivo da más trabajo y para simplificar un escalamiento permite suponer $[t_{i-1}, t_i] = [0,1]$ y $H(W_k \times [0,1]) \subset U$ ó $-U$ $\forall k$(*). Queremos:

- dada $\tilde{H}_0$ extenderla a $0 \le t \le 1$

  Demostración:

  $\tilde{H}_0 = \tilde{H}_{t_i-1}$ no es la elevación de $i = 1$.

4. Descomposición de la extensión en varios pasos: Tomamos $C_k = \mathbb{S}^2 \setminus V_k$ y,

a) $\varphi_k(x) = \frac{\text{dist}(x, C_k)}{\sum_l \text{dist}(x, C_k)} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \varphi_k \le 1 \\ \{\varphi_k = 0\} = C_k & \text{por ser los } C_k \text{ cerrados.} \\ \sum_l \varphi_l = 1 \end{cases}$

b) $\psi_k = \varphi_1 + \cdots + \varphi_k \Rightarrow \begin{cases} 0 \equiv \psi_0 \le \psi_1 \le \ldots \le \psi_k \equiv 1 \\ \{\psi_{k-1} < \psi_k\} = \{\varphi \neq 0\} = X \setminus C_k = V_k(**) \\ \overline{\{\psi_{k-1} < \psi_k\}} = \overline{V_k} \subset W_k \end{cases}$

Las ψ_k son los límites superiores de la siguiente cadena de cerrados:

$$\mathbb{S}^2 \times \{0\} = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_k = \{t \le \psi_k(x) : x \in \mathbb{S}^2\} \subset \ldots \subset \Gamma_v = \mathbb{S}^2 \times [0,1]$$

y, empezando con $\tilde{H}_0$ para $k = 1$, la cosa es:

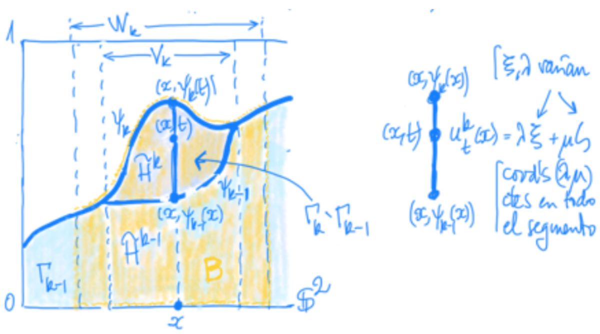
- dada $\tilde{H}^{k-1} = \left(r, u^{k-1}\right)$ elevación de $H|_{\Gamma_{k-1}}$, extenderla a $\Gamma_k \setminus \Gamma_{k-1}$. Como:

$$\begin{cases} \Gamma_{k-1} \setminus \overline{V}_k \times [0,1] \overset{(**)}{=} \Gamma_k \setminus \overline{V}_k \times [0,1] = A \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \\ \Gamma_{k-1} \cap (W_k \times [0,1]) = B \overset{\text{ab.}}{\subset} \Gamma_k \end{cases} \quad \wedge\ \Gamma_k = \underbrace{A}_{\subset \Gamma_{k-1}} \cup B$$

  definiremos,

- $\tilde{H}^k$ en B tal que, $\tilde{H}^k = \tilde{H}^{k-1}$ en $A \cap B \subset \mathbb{S}^2 \setminus V_k \times [0,1]$.

5. $(x,t) \in B \overset{(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} H_t(x) \in U \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x) \in U \end{cases} \Rightarrow \exists \eta \text{ y } S \text{ en } \begin{cases} H_t(x).\ (ii) \\ H_{\psi_{k-1}(x)}(x).\ (i) \end{cases}$.



a) $t \leq \psi_{k-1}(x) : (x,t) \in \Gamma_{k-1} \Rightarrow \tilde{H}_t^k(x) = \tilde{H}_t^{k-1}(x)$.

b) $t \geq \psi_{k-1}(x) : \tilde{H}^{k-1} = \left(H, u^{k-1}\right)$.

(i) $\Rightarrow$

$$\underbrace{u_{\psi_{k-1}(x)^{k-1}(x)}}_{\neq 0} = \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x)\,\eta\left(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)\right) +_{\psi_{k-1}(x)}(x)\,\zeta\left(H_{\psi_{k-1}(x)}(x)\right).$$

(ii) $\Rightarrow$

$$\exists u_t^k(x) = \lambda_{\psi_{k-1}(x)}(x)\,\eta\left(H_t(x)\right) + \mu_{\psi_{k-1}(x)}(x)\,\zeta\left(H_t(x)\right)$$
$$\Rightarrow \exists \tilde{H}_t^k(x) = \left(H_t(x), u_t^k(x)\right).$$

y por la construcción es continua.

a) y b) coinciden en $t = \psi_{k-1}(x)$.

6. $\psi_{k-1} \overset{(**)}{=} \psi_k$ fuera de $V_k \Rightarrow \tilde{H}^k$ de 5. $= \tilde{H}^{k-1}$ en $A \cap B$.

Esto completa la propuesta de que $\exists \tilde{H}$ elevación de H y, con ello, se completa la contradicción buscada. Acaba aquí la demostración de que $\mathbb{S}^2$ no es contráctil.