

Topología elemental

Mario Calvarro Marines

Índice general

1. Espacios topológicos	7
1.1. Conjuntos abiertos	7
1.2. Conjuntos cerrados	9
1.3. Bases	12
1.4. Topología relativa	14
2. Aplicaciones continuas	17
2.1. Continuidad	17
2.2. Continuidad y subespacios	19
2.3. Homeomorfismos	19
3. Construcciones	23
3.1. Imágenes inversas	23
3.2. Imágenes directas	24
3.3. Productos (finitos)	27
3.4. Sumas (finitas)	29
3.5. Espacios proyectivos reales	30
4. Separación	33
4.1. Concepto	33
4.2. Tabla de comportamiento	34
5. Numerabilidad	35
5.1. Axiomas	35
5.1.1. I Axioma	35
5.1.2. II AX	36
5.1.3. Separable	36

5.1.4. Lindelöf	36
5.2. Tabla de comportamiento	36
6. Compacidad	39
6.1. Concepto y mantras	39
6.2. Tabla de comportamiento	41
7. Compacidad local	43
7.1. Compacidad local y mantras	43
7.2. Tabla de comportamiento	45
7.3. Compactificación por un punto	45
8. Conexión	49
8.1. Concepto y mantras	49
8.2. Tabla de comportamiento	51
9. Componentes conexas y conexión local	53
9.1. Componentes	53
9.2. Conexión local	54
9.3. Tabla de comportamiento	55
10. Conexión por caminos	57
10.1. Conexión por caminos	58
10.2. Mantras	58
10.3. Tabla de comportamiento	59
11. Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos	61
11.1. Componentes conexas por caminos	61
11.2. Conexión local por caminos	61
11.3. Tabla de comportamiento	62
11.4. Relaciones entre las propiedades de conexión	62
12. Homotopía	63
12.1. Conceptos fundamentales	63
12.2. Concepto relativo	64
12.3. Contractibilidad	64

13.Homotopía de caminos	67
13.1. El concepto básico	67
13.2. Simple-conexión	67
13.3. Esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$	68
14.El grupo fundamental	71
14.1. Operaciones con caminos	71
14.2. El grupo fundamental	72
14.3. Functorialidad	73
15.Retractos	75
15.1. Retractos y deformaciones	75
15.2. Cocientes	76
15.3. Agujeros	77
16.Recubridores	79
16.1. El problema de elevación	79
16.2. Unicidad de elevación	80
16.3. Lema de elevación	80
17.Cálculos mediante recubridores	83
18.Aplicaciones en dimensión 2	85
19.Más aplicaciones por el mismo precio	87
20.Superficies	89
21.Clasificación de superficies	91
22.Grande finale	93

Espacios topológicos

Conjuntos abiertos

Definición

Una topología en un conjunto X es una colección $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos tal que:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. Las uniones arbitrarias de elementos de \mathcal{T} están en \mathcal{T} .
3. Las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{T} están en \mathcal{T} .

Se dice que (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, los elementos de \mathcal{T} se llaman abiertos y los elementos de X se llaman puntos.

Ejemplo:

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es la topología trivial; $\mathcal{T} = P(X)$, topología discreta: si los puntos $\{x\} \in \mathcal{T}$, entonces cualquier $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ es abierto.
2. \mathbb{R}^n con la topología usual definida mediante las bolas euclídeas.
3. Cualquier distancia d define una topología mediante sus bolas abiertas, igual que se define la usual. Notación:

$$B(a, \varepsilon) = \{d(a, x) < \varepsilon\}, \quad B[a, \varepsilon] = \{d(a, x) \leq \varepsilon\}, \quad S[a, \varepsilon] = \{d(a, x) = \varepsilon\}$$

4. En un conjunto se pueden definir muchas topologías distintas (por ejemplo (1)) pero se puede asumir que solo “parezcan” distintas. Ya se sabe que la topología usual de \mathbb{R}^n se puede definir mediante muchas distancias distintas.



El dibujo representa distintas distancias¹ en \mathbb{R}^n , pero todas definen la misma topología.

¹Procedentes de normas.

5. Una topología para ilustrar muchas propiedades (y contraejemplos).

Fijamos $a \in X$:

$$\mathcal{T}_a = \{U \subset X : a \in U\} \cup \{\emptyset\}$$

La topología “del punto”. El punto $\{a\}$ y todos los pares de puntos $\{a, x\}$ son abiertos. Se parece a la discreta pero difiere en que en esta última todos los puntos son abiertos.

Definición

Dos topologías $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ en X se llaman comparables: \mathcal{T}_2 es más “fina” que \mathcal{T}_1 .

Siempre se da:

$$\mathcal{T}_{\text{trivial}} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\text{discreta}}$$

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico; a menudo se omite \mathcal{T} ó el calificativo “topológico”.

Definición

1. Un entorno abierto de un punto $x \in X$ es un abierto U que lo contiene. Se suele escribir U^x .
2. Un entorno de un punto $x \in X$ es un conjunto V que contiene un abierto U que contiene al punto. Se suele escribir V^x .²



Observación:

1. Con $U^x \subset V^x$:

$$V_1^x \cap V_2^x = V^x$$

$$U_1^x \cap U_2^x = U_{ab}^x \ni x$$

2. $U \in \mathcal{T}$ es entorno de todos sus puntos.

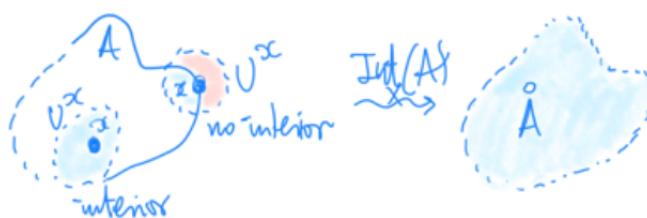
Demostración:

$$x \in U \text{ abierto} \subset U$$

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto interior de A es un punto del que A es entorno (luego A lo contiene). El interior de A es el conjunto de sus puntos interiores:

$$\text{Int}_X(A) = \text{A}^\circ = \{x \in A : \exists U_{ab}^x \subset A\}$$



²La intersección finita de entornos es entorno. (Si son abiertos es trivial)

Proposición

$\text{̄}A$ es el mayor abierto contenido en A :

$$\text{̄}A = \bigcup_{U^{\text{ab}} \subset A} U$$

En particular, A abierto $\Leftrightarrow A = \text{̄}A \Leftrightarrow A$ es un entorno de todos los puntos.

Demostración:

1. $\text{̄}A$ es abierto:

$$\begin{aligned} \forall x \in \text{̄}A &\Rightarrow \exists U_{\text{ab}}^x \subset A \\ \forall y \in U^x &\Rightarrow A \supset U^x \text{ es un abierto que contiene a } y \Rightarrow y \in \text{̄}A. \end{aligned} \left. \right\} \Rightarrow U^x \subset \text{̄}A$$
$$\Rightarrow \text{̄}A = \bigcup_{x \in \text{̄}A} U^x \text{ es abierto como unión de abiertos.}$$

2. $\text{̄}A$ es el mayor abierto contenido en A .

$$U^{\text{ab}} \subset A \Rightarrow \forall x \in U^{\text{ab}} \subset A \Rightarrow x \in \text{̄}A \Rightarrow U \subset \text{̄}A$$

Ejemplo:

1. $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}}) : A \neq X \Rightarrow A \not\supset X \Rightarrow \emptyset$ es el único abierto $\subset A \Rightarrow \text{̄}A = \emptyset$.

2. En \mathbb{R}^n con $\mathcal{T}_{\text{trivial}}$ ya lo sabemos bien:

$$\text{Int}(B[a, \varepsilon]) = B(a, \varepsilon); \quad \mathring{\mathbb{Q}}^n = \emptyset; \quad \mathring{\mathbb{Z}}^n = \emptyset$$

3. Si $a \in X$, $\mathcal{T}_a : \{a\} = \{a\}; \quad x \neq a, \quad \{x\} = \emptyset$.

Proposición

1. $A \subset B \Rightarrow \text{̄}A \subset \text{̄}B$.

2. $\text{̄}A \cap \text{̄}B = \text{Int}(A \cap B)$.

Demostración:

1. $A \subset B \Rightarrow \text{̄}A \subset A \subset B$ y $\text{̄}A$ es abierto $\Rightarrow \text{̄}A \subset \text{̄}B$.

2.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \text{̄}A \cap \text{̄}B &\text{ abierto (intersección finita de abiertos)} \\ \text{̄}A \cap \text{̄}B &\subset A \cap B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{̄}A \cap \text{̄}B \subset \text{Int}(A \cap B) \\ A \cap B \subset A, B \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) \subset \text{̄}A, \text{̄}B \quad \left. \begin{aligned} \Rightarrow \text{Int}(A \cap B) &\subset \text{̄}A \cap \text{̄}B \\ \boxed{\text{̄}A \cap \text{̄}B = \text{Int}(A \cap B)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

Conjuntos cerrados

Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico.

Definición

Un conjunto cerrado es un subconjunto $F \subset X$ tal que $U = X \setminus F$ es abierto.

Observación:

Cerrado no significa “no abierto”, hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.



Observación:

Se cumple, $\mathcal{F} = \{\text{cerrados}\}$:

1. X, \emptyset son cerrados.
2. La intersección arbitraria de cerrados es cerrada.
3. La unión finita de cerrados es cerrado.

Demostración:

Porque $\bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ y $\bigcup_{i \in I} X \setminus U_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} U_i$.

Ejemplo:

1. En la topología trivial solo son cerrados \emptyset y X . En la discreta, todos los subconjuntos son cerrados.
2. En \mathbb{R}^n con la topología usual ya sabemos todos los ejemplos: $B[a, \varepsilon] : \|x - a\| \leq \varepsilon$.
3. Si $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, todo cerrado de \mathcal{T}_1 es cerrado de \mathcal{T}_2 . (Cuidado con el orden)

Para saber cuándo se aleja un conjunto de ser cerrado tenemos:

Definición

Sea $A \subset X$. Un punto adherente a A es un punto cuyos entornos intersecan todos a A . La adherencia de A es el conjunto de sus puntos adherentes.

$$\text{Adh}_X(A) = \overline{A} = \{x \in X : \forall V^x \cap A \neq \emptyset\} \supset A$$

Observación:

Las primeras fórmulas importantes son:

$$\boxed{X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)}$$
$$\boxed{X \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{X \setminus B}}.$$

Demostración:

- $x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists U^x \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists U^x \subset X \setminus A \Leftrightarrow x \in \text{Int}(X \setminus A)$
- $x \notin \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow \nexists U^x \subset B \Leftrightarrow \forall U^x \cap (X \setminus B) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X \setminus B}$.

Proposición

\bar{A} es el menor cerrado que contiene a A :

$$\boxed{\bar{A} = \bigcap_{F_{\text{cerrado}} \supset A} F}$$

En particular, A cerrado $\Leftrightarrow \bar{A} = A \Leftrightarrow A$ contiene todos sus puntos de adherencia.

Demostración:

$$\bar{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A) = X \setminus \underbrace{\bigcup_{U \subset X \setminus A} U}_{F = X \setminus U} = X \setminus \underbrace{\bigcup_{F \supset A} (X \setminus F)}_{F \supset A} = \bigcap_{F \supset A} F.$$

Observación:

Lo anterior nos implica:

- $B \supset A \Rightarrow \bar{B} \supset B \supset A \Rightarrow \bar{B} \supset \bar{A}$.
- $\bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$:

$$\begin{cases} \bar{A} \cup \bar{B} \supset A \cup B \supset \begin{cases} A \\ B \end{cases} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \supset \begin{cases} \bar{A} \\ \bar{B} \end{cases} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \supset \bar{A} \cup \bar{B} \\ A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \end{cases}$$

La última implicación por que es cerrado al ser la unión de dos cerrados.

Ejemplo:

1. En $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}}$: $B[a, \varepsilon] = \overline{B(a, \varepsilon)}$; $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$.
2. $a \in X, \mathcal{T}_a$

$$\begin{cases} \overline{\{a\}} = X \left[\forall x, \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a \Rightarrow x \in \overline{\{a\}} \right] \\ x \neq a, \overline{\{x\}} = \{x\} [y \neq x \Rightarrow U^y = \{a, y\} \cap \{x\} = \emptyset] \end{cases}$$

Definición (Otros puntos especiales)

1. x es un punto aislado de A si $\exists V^x \cap A = \{x\}$.
2. x es un punto de acumulación de A si $\forall V^x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. Y, evidentemente,

$$\bar{A} = \underbrace{\{puntos aislados\}}_{\subset A} \sqcup \underbrace{\{puntos de acumulación\}}_{\supset \bar{A} \setminus A}$$

3. x es un punto frontera de A si es adherente a A y a $X \setminus A$, o bien, si no es interior de $X \setminus A$ ni de A . La frontera de A es:

$$\text{Fr}(A) = \{x \in X : x \text{ es punto frontera de } A\} = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

Ejemplo:

1. En $\mathbb{R}, \mathcal{T}_n$ todos los puntos de \mathbb{Z} son aislados, $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
2. En $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_n$: $\text{Fr}(B(a, \varepsilon)) = \text{Fr}(B[a, \varepsilon]) = S[a, \varepsilon] : \|x - a\| = \varepsilon$.
3. En $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$ todos los puntos son aislados, todas las fronteras son vacías.

4. $a \in X, \mathcal{T}_a :$

$$\begin{cases} \text{Fr}(\{a\}) = \overline{\{a\}} \setminus \{a\} = X \setminus \{a\} \\ x \neq a, \text{Fr}(\{x\}) = \overline{\{x\}} \setminus \{x\} = \{x\} \end{cases}$$

Ahora, un concepto importante:

Definición

$A \subset X$ es denso si $\overline{A} = X$, o bien, todo punto es adherente a A , o bien, todo abierto ($\neq \emptyset$) corta a A .

Ejemplo:

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}}$; $\mathbb{Q} \times \overbrace{\dots}^n \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}}$ son densos.
2. $\{a\}$ es denso en (X, \mathcal{T}_a) .

Bases

Sea X, \mathcal{T} un espacio topológico.

Definición

Una base de entornos de $a \in X$ es una colección \mathcal{V}^a de entornos de a , tal que todo entorno de a contiene uno de \mathcal{V}^a .

Observación:

No se supone ninguna propiedad especial, ni que sean abiertos. Veremos que la existencia de base de entornos con propiedades adicionales es una de las cosas que determinan el comportamiento de la topología.

Pero, $\forall \mathcal{V}^a$ se puede refinar a una base \mathcal{B}^a de entornos de abiertos.

Demostración:

$$\forall V^a \in \mathcal{V}^a, \exists U^a \subset V^a \Rightarrow \mathcal{B}^a = \{U^a : V^a \in \mathcal{V}^a\} \text{ es base de entornos. } [\forall E^a \supset V^a \supset U^a]$$

Política general:

Bastan las bases de entornos para comprobar propiedades de todos los entornos.

Ilustración:

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a \in \overline{A} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall W^a \text{ entorno} : W^a \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \forall V^a \in \mathcal{V}^a : V^a \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}}$:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^a = \{B(a, \varepsilon) : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos abiertos.} \\ \mathcal{V}^a = \{B[a, \varepsilon] : \varepsilon > 0\} \text{ base de entornos cerrados.} \end{cases}$$

2. $a \in X, \mathcal{T}_a : \mathcal{B}^a = \{\{a\}\}, \mathcal{B}^x = \{\{a, x\}\}, x \neq a$.

Definición

Una base de abiertos de \mathcal{T} es una colección de abiertos $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ tal que todo abierto es unión de abiertos de \mathcal{B} .

Proposición

\mathcal{B} base de abiertos $\Leftrightarrow \forall x \in X, \mathcal{B}^x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es base de entornos (abiertos) de $x \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} : x \in B \subset U$.

Demostración:

$$\Rightarrow \forall V^x \Rightarrow x \in U \subset V^x \Rightarrow$$

$$\mathcal{B} \text{ base: } U = \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in \mathcal{B}} \xrightleftharpoons{x \in U} \exists x \in B_i \subset U \subset V^x$$

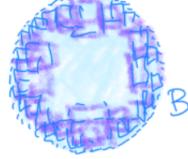
$$\Leftarrow U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists \underbrace{B^x}_{\in \mathcal{B}} \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} B^x \text{ unión de abiertos de } \mathcal{B}.$$

Ejemplo:

$$1. \mathcal{T}_{\text{discreta}} : \mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} \text{ es } \underline{\text{mínima}}. \left[\text{si } \mathcal{B}' \text{ es base : } \forall x, \{x\} = \bigcup_{i \in I} \overbrace{B_i}^{\in \mathcal{B}'} \Rightarrow B_i = \{x\} \right]$$

$$2. \mathcal{T}_a : \mathcal{B} = \{\{a, x\} : x \in X\}.$$

$$3. \mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usual}} \mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n\}$$



Pero también,



porque

$$B(x, \varepsilon) = \bigcup_{i \in I} \text{cuadrados} = \bigcup_{j \in J} \text{rectangulos}$$

Política general:

Como antes, a menudo basta considerar los abiertos de \mathcal{B}

Ilustración:

$$A \subset X \text{ denso} \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{B}, B \cap A \neq \emptyset.$$

Proposición

“ $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ es base de una topología (única) \mathcal{T} en X ”, equivalente a:

- $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
- $\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B^x \subset B_1 \cap B_2$.



Demostración:

La implicación \Rightarrow) se cumple por propiedades vistas.

En el otro sentido tenemos:

- Unicidad: $\mathcal{T} = \{\bigcup_{i \in I} B_i : \{B_i\} \subset \mathcal{B}\}$.
- Existencia: Esa \mathcal{T} es efectivamente topología.
 - \emptyset unión de vacío, $X = \bigcup_i U_i \Rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{T}$.
 - Uniones: $\bigcup_j \bigcup_i \underbrace{B_{ij}}_{\in \mathcal{T}} = \bigcup_j \underbrace{\bigcup_i B_{ij}}_{\in \mathcal{T}}$.
 - Lo importante, intersecciones finitas: $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B^x \in \mathcal{T}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \left(\bigcup_i B_i \right) \cap \left(\bigcup_k B_k \right) &\stackrel{?}{=} \bigcup_\lambda B_\lambda \\ x \in B_{i_0} \cap B_{k_0} \Rightarrow \exists B^x \subset B_{i_0} \cap B_{k_0} & \\ \bigcup_\lambda B_\lambda &= \bigcup_x B^x. \end{aligned}$$

Topología relativa

Sea (X, \mathcal{T}) espacio topológico.

Definición

$Y \subset X : \mathcal{T}|_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ es una topología en Y (fácil), denominada relativa ó restricción a Y ; también se dice que $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ es un subespacio de (X, \mathcal{T}) y que (X, \mathcal{T}) es el espacio ambiente.



Observación:

1. Los cerrados en $\mathcal{T}|_Y$ son $F \cap Y$ con F cerrado en \mathcal{T} .

$$[Y \setminus U \cap Y = Y \cap (X \setminus U) = Y \cap F]$$

$$2. \begin{cases} y \in Y \subset X \\ \mathcal{V}^y \text{ base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{V}^y \cap Y = \{V^y \cap Y : V^y \in \mathcal{V}^y\} \\ \text{base de entornos de } y \text{ en } \mathcal{T}|_Y \end{cases}$$

3. \mathcal{B} base de $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B} \cap Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ base de $\mathcal{T}|_Y$

Esta idea es general: en un subespacio se hacen las construcciones intersecando.

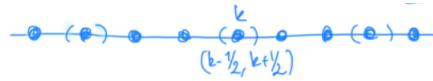
Ejemplo:

1. y es un punto aislado de $Y \Leftrightarrow \{y\}$ abierto en $\mathcal{T}|_Y$. [$\{y\} = V^y \cap Y$]

2. Todos los puntos de Y son aislados $\Leftrightarrow C|_Y = \text{discreta}$.

Se dice: Y es un subespacio discreto.

Por ejemplo, en $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:



3. $a \in X, \mathcal{T}_a|_{X \setminus \{a\}} = \text{discreta}$.

Observación:

1. $Y \subset_{\text{ab}} X : W$ abierto de $Y \Leftrightarrow W$ abierto de X contenido en Y .

$$[W = U \cap Y^{\text{ab}}, U^{\text{ab}} \subset X \Rightarrow W^{\text{ab}} \subset X \text{ por intersección finita}]$$

2. $Y \subset_{\text{cerr}} X : F$ cerrado de $Y \Leftrightarrow F$ cerrado de X contenido en Y .

$$[C = F \cap Y^{\text{cerr}}, F^{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow C^{\text{cerr}} \subset X \text{ por intersección finita}]$$

Aplicaciones continuas

Continuidad

El famoso $\varepsilon - \delta$ en $\mathbb{R}^n \mathcal{T}_u; x_0 \in X, f : \overbrace{X}^{\mathbb{C}\mathbb{R}^p} \rightarrow \overbrace{Y}^{\mathbb{C}\mathbb{R}^q}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \begin{cases} \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \Leftrightarrow \\ x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Leftrightarrow \\ f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \end{cases} \Rightarrow \\ \boxed{\forall B(f(x_0), \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))}.$$

Definición

$f : X \rightarrow Y$ será continua en $x_0 \in X$ si:

$$\forall V^{f(x_0)} : f^{-1}(V^{f(x_0)}) = V^{x_0}$$

Proposición (Composición de continuidades)

La composición de funciones continuas es continua:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z : \left. \begin{array}{l} f \text{ continua en } x_0 \\ g \text{ continua en } y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow h = g \circ f \text{ continua en } x_0$$

Demostración:

Sea $V^{h(x_0)} \rightarrow h^{-1}V^{h(x_0)} = f^{-1}g^{-1}V^{g(y_0)} = f^{-1}V^{y_0} = V^{x_0}$.

Ejemplo:

1. $\forall f : X_{\text{discreta}} \rightarrow Y$ es continua. [Todo es abierto, luego todo es entorno en $\mathcal{T}_{\text{disc}}$]
2. $\forall f : X \rightarrow Y_{\text{trivial}}$ continua. [$V^{f(x)} = Y$ es el único abierto, luego el único entorno, de $f^{-1}V^{f(x)} = f^{-1}Y = X$ es abierto]
3. $f : X \rightarrow Y_{\text{discreta}}$ es continua $\Rightarrow f$ localmente creciente. [$\{f(x_0)\} = V^{f(x_0)}$ en $\mathcal{T}_{\text{discr}}$ $\xrightarrow[f \text{ cont.}]{} f^{-1}f(x_0) = V^{x_0} \wedge f \equiv f(x_0)$]

4. $f : X \rightarrow Y$ localmente constante \Rightarrow continua.

$[\forall x_0 \in X, \exists U^{x_0} : f \stackrel{U^{x_0}}{\equiv} f(x_0) \Rightarrow \forall V^{f(x_0)} : f^{-1}V^{f(x_0)} \supset U^{x_0} \Rightarrow f^{-1}V^{f(x_0)} = V^{x_0}$ es entorno de $x_0]$

Proposición

Son equivalentes:

1. f es continua.
2. $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto}, \forall \text{abierto} \in Y.$
3. $f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}, \forall \text{ cerrado de } Y.$
4. $f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}(A)), \forall A \subset Y$
5. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subset X$

Demostración:

$$1. 1 \Rightarrow 2)$$

$$W^{\text{ab}} \subset Y \Rightarrow W \text{ ent. de } f(x), \forall x \in f^{-1}W \Rightarrow f^{-1}W \text{ ent. de } \forall x \in f^{-1}W \Rightarrow f^{-1}W \subset X$$

$$2. 2 \Rightarrow 3)$$

$$C_{\text{cerr}} \subset Y \Rightarrow Y \setminus C \subset Y \Rightarrow^2 \underbrace{f^{-1}(Y \setminus C)}_{=X \setminus f^{-1}C} \subset X \Rightarrow f^{-1}C \overset{\text{cerr}}{\subset} X$$

$$3. 3 \Rightarrow 5)$$

$$\overline{f(A)} \overset{\text{cerr}}{\subset} Y \Rightarrow^3 \underbrace{f^{-1}\overline{f(A)}}_{\subset f^{-1}f(A) \supset A} \subset X \Rightarrow \overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)} \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

$$4. 5 \Rightarrow 4)$$

$$Y \setminus \overset{\circ}{A} \Rightarrow \overline{Y \setminus A} \supset \overline{f(X \setminus f^{-1}A)} \stackrel{5)}{\supset} f(\overline{X \setminus f^{-1}(A)}) = f(X \setminus \text{Int}(f^{-1}A)) \Rightarrow \\ X \setminus \text{Int}(f^{-1}A) \subset f^{-1}(Y \setminus \overset{\circ}{A}) = X \setminus f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \Rightarrow f^{-1}(\overset{\circ}{A}) \subset \text{Int}(f^{-1}A).$$

$$5. 4 \Rightarrow 1)$$

$$V^{f(x)} \Rightarrow f(x) \in \text{Int}(V^{f(x)}) \Rightarrow x \in f^{-1}(\text{Int}(V^{f(x)})) \subset \text{Int}(f^{-1}V^{f(x)}) \Rightarrow \\ f^{-1}V^{f(x)} \text{ entorno de } x.$$

Observación:

1. Los cuatro primeros enunciados tratan sobre “imágenes inversas”. Por ejemplo, la segunda dice que $f^{-1}\mathcal{T}_Y \subset \mathcal{T}_X$.
2. Pensando que un punto adherente es un “punto límite”, 5 nos dice que “la imagen del límite es el límite de la imagen”.
3. $Id : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua $\Rightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. [$Id^{-1}\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$]

Y no mencionamos todos los ejemplos conocidos en espacios afines \mathbb{R}^n con \mathcal{T}_u .

Continuidad y subespacios

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua y $Z \subset X$ subespacio $\Rightarrow f|_Z : Z \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

Se aplica el criterio “imagen inversa de abierto es abierto” y la fórmula:

$$(f|_Z)^{-1}(A) = Z \cap f^{-1}A, \forall A \subset Y$$

Criterios de continuidad por recubrimientos. Sea $f : X \rightarrow Y$.

- **Por abiertos:** $\exists X = \bigcup_{i \in I} U_i : \forall f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

$$W \subset Y \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} U_i \cap f^{-1}W = \bigcup_{i \in I} (f|_{U_i})^{-1}W \\ (f|_{U_i})^{-1}W \subset U_i \subset X \Rightarrow (f|_{U_i})^{-1}W \subset X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}W \subset X$$

Por unión de abiertos.

- **Por cerrados:** $\exists X = \bigcup_{i=0}^n F_i : \forall f|_{F_i} : F_i \rightarrow Y$ es continua.

Demostración:

$$C \subset Y \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f^{-1}C = \bigcup_{i \in I} F_i \cap f^{-1}C = \bigcup_{i \in I} (f|_{F_i})^{-1}C \\ (f|_{F_i})^{-1}C \subset F_i \subset X \Rightarrow (f|_{F_i})^{-1}C \subset X \end{cases} \Rightarrow f^{-1}C \subset X$$

Por unión finita de cerrados.

Homeomorfismos

Recordemos las definiciones de continuidad que hemos visto:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \Leftrightarrow f^{-1}(\text{cerrado}) = \text{cerrado}$$

Ahora veamos que ocurre al invertir la relación.

Definición

$$\text{Sea } f : X \rightarrow Y, \text{ será } \begin{cases} \text{abierta} \\ \text{cerrada} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(ab) = ab \\ f(cerr) = cerr \end{cases}$$

Observación:

Cuidado: Continuidad no implica que sea abierta, cerrada ni viceversa.

Ejemplo:

$$1. Id : X_{\text{trivial}} \rightarrow X_{\text{discreta}}, \text{-cont. +ab. +cerr.}$$

$$2. Id : X_{\text{discreta}} \rightarrow X_{\text{trivial}}, \text{+cont. -ab. -cerr.}$$

3. $j : [0, 1] \subset \mathbb{R}_u$, +cont. -ab. +cerr.
4. $j : (0, 1) \subset \mathbb{R}_u$, +cont. +ab. -cerr.

Proposición (Trivialidades esenciales)

Sea f biyectiva, es equivalente:

- f es abierta
- f es cerrada
- f^{-1} es continua.

Demostración:

1. $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow X \setminus F_{\text{ab}} \subset X \Rightarrow^{f \text{ ab}} \underbrace{f(X \setminus F)}_{=Y \setminus f(F)(\text{biy.})} \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(F) \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f \text{ cerr.}$
 2. $F_{\text{cerr}} \subset X \Rightarrow^{f \text{ cerr}} \underbrace{f(F)}_{=(f^{-1})^{-1}(F)(\text{biy.})} \subset_{\text{cerr}} Y \Rightarrow f^{-1} \text{ cont.}$
 3. $U_{\text{ab}} \subset X \Rightarrow^{f^{-1} \text{ cont.}} \underbrace{(f^{-1})^{-1}(U)}_{f(U)(\text{biy.})} \subset Y \Rightarrow f \text{ ab.}$
-

Definición

Sea $f : X \rightarrow Y$ biyectiva, es homeomorfismo si f & f^{-1} son continuas, o equivalentemente si:

$$\begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{ab.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ biy.} \\ \text{cont.} \\ \text{cerr.} \end{cases}$$

Definición (Localización de un homeomorfismo)

Sea $f : X \rightarrow Y$, es homeomorfismo local en $x_0 \in X$ si $f : V^{x_0} \rightarrow V^{f(x_0)}$ es homeomorfismo para entornos de x_0 y $f(\overline{x_0})$. Se suele decir para entornos “suficientemente pequeños”.

Ejercicio: Se pueden tomar $V^{x_0}, V^{f(x_0)}$ abiertos.

Observación:

Un homeomorfismo local es abierto.

Demostración:

$U \subset_{\text{ab}} X \Rightarrow f(U)$ entorno $\forall y_0 = f\left(\overbrace{x_0}^{\in U}\right) \in f(U)$. Como f homeomorfismo local $\Rightarrow f| : V^{x_0} \rightarrow V^{y_0}$ es homeomorfismo $\Rightarrow f\left(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\exists y_0 = f(x_0)}\right) \subset_{\text{ab}} V^{y_0} \Rightarrow f\left(\overbrace{U \cap V^{x_0}}^{\subset f(U)}\right)$ entorno de $y_0 \Rightarrow f(U)$ entorno de y_0 .

Ejemplo: (**¡Importantes!**)

1. Proyección estéreo? $\mathbb{S}^m \setminus \{\text{punto}\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ homeomorfismo.
2. Proyección exponencial $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}' : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi \theta, \sin 2\pi \theta)$, homeomorfismo local.

3. Proyección antipodal: $\mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}P^m : x \mapsto [x]$ homeomorfismo local.
4. Lemniscata: $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t_4} \right)$ es biy. cont, pero no homeomorfismo local.

Engañosamente:

$$\forall t \in \mathbb{R} \exists (t - \varepsilon, t + \varepsilon) = I_\varepsilon : f| : I_\varepsilon \rightarrow f(I_\varepsilon)$$

es homeomorfismo.

En $t = 0$, $f(I_\varepsilon)$ no es entorno de $f(0) = (0, 0)$.

Definición

Una variedad topológica de dim m es un espacio localmente homeomorfo a \mathbb{R}^m , es decir, cada punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una bola $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ (luego a cualquier bola, luego a todo \mathbb{R}^m).

Ejemplo:

Esferas, espacios proyectivos, toros...

Construcciones

Imágenes inversas

Problema: Hacer $f : Y \rightarrow (X, \mathcal{T})$ continua con $\begin{cases} \text{top. discreta en } Y \text{ (matricialidad)} \\ \text{top. } \underline{\text{menos fina}} \text{ en } Y \end{cases}$

Sol: $f^{-1}\mathcal{T} = \{f^{-1}U : U \in \mathcal{T}\}$ top. imagen inversa.

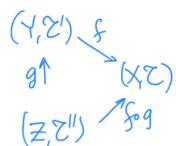
1. Es topología (inm.)
 2. Es mínima. [f es continua $\Rightarrow \forall f^{-1}U$ es abierto]

Teorema (Caracterización imagen inversa)

1.

$$\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow \\ \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow f \circ g \text{ cont.}] \quad (3.1)$$

2. Y.

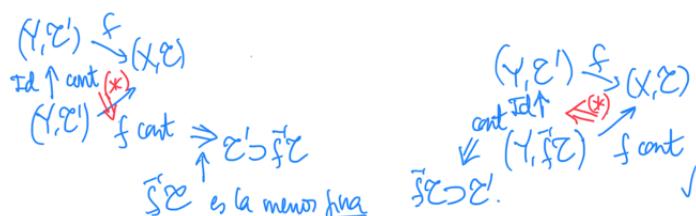


Demostración:

$$1. \quad \mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} :$$

- g cont. $\Rightarrow f \circ g$ cont. (Composición de continuas)
 - $f \circ g$ cont. $\Rightarrow g$ cont. ($V \in \mathcal{T}' \Rightarrow g^{-1}V \stackrel{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}}{\equiv} g^{-1}f^{-1}U = (f \circ g)^{-1}U \stackrel{f \circ g \text{ cont.}}{\in} \mathcal{T}''$)

2. Por otro lado,



Ejercicio: Demostrar (ii) sin usar que $f^{-1}\mathcal{T}$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización).

La anterior caracterización se llama propiedad universal.

Caso esencial:

$$f : Y \rightarrow X \text{ inyectiva}$$

Definición

Una aplicación continua inyectiva $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (X, \mathcal{T})$ tal que $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$ se llama inmersión (se suelen omitir las topologías).

Observación:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow (Y, \mathcal{T}') \xrightarrow{\text{homeomorfismo}} (f(Y), \mathcal{T}|_{f(Y)})$

$$[V \in f^{-1}\mathcal{T} \Leftrightarrow V = f^{-1} \underbrace{U}_{\mathcal{T}} = f^{-1} \left(\underbrace{U \cap f(Y)}_{\mathcal{T}|f(Y)} \right)]$$
2. $f : Y \rightarrow X$ 1 - 1 cont. + $\begin{cases} \text{ab.} \Rightarrow \text{inmersión} [\text{ab. en } X \Rightarrow \text{ab. en } f(Y)] \\ \text{cerr.} \Rightarrow \text{inmersión} [\text{cerr. en } X \Rightarrow \text{cerr. en } f(Y)] \end{cases}$

$$\begin{cases} f(Y) \xrightarrow{\text{ab.}} X : V = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow fV = U \cap f(Y) \in \mathcal{T} (\text{inter. abierto}) \\ f(Y) \xrightarrow{\text{cerr.}} X : C \subset f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow Y \setminus C = f^{-1}U \in f^{-1}\mathcal{T} \Rightarrow f(C)(X \setminus U) \cap f(Y) \subset X \text{ i. c.} \end{cases}$$
3. Tenemos:
 - Inmersión + ab. + cerr.
 - Inmersión + ab. + /cerr.
 - Inmersión + ab. + cerr.

Observación:

Las inmersiones permiten considerar unos espacios como subespacios de otros. Las frases “el plano proyectivo real no es un subespacio de \mathbb{R}^3 ”, “la esfera no es un subespacio de \mathbb{R}^2 ”, “el plano proyectivo real es un subespacio de \mathbb{R}^4 ” se refieren a esto: cuándo hay o no hay una inmersión del primer espacio en el segundo, es decir, un subespacio del segundo homeomorfismo al primero. Es un problema fundamental de la topología y de la geometría.

Imágenes directas

Problema: Hacer $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ continua en $\begin{cases} \text{top. trivial en } Y (\text{matrivialidad}) \\ \text{top. más fina en } Y \end{cases}$

Sol: $f\mathcal{T} = \{V \subset Y : f^{-1}V \in \mathcal{T}\}$ top. imagen directa.

1. Es topología (inm.)
2. Máxima [f es continua $\Leftrightarrow \forall f^{-1}V$ es abierto]

Teorema (Caracterización imágenes directas)

1.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}' = f\mathcal{T} &\Leftrightarrow \\ \forall g [g \text{ cont.} &\Leftrightarrow g \circ f \text{ cont.}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

2. Y .

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ g \circ f \downarrow & & \\ (Z, \mathcal{T}'') & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

Demostración:

1. $\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow g \circ f$ cont. (Composición de continuas)
- $g \circ f$ cont. $\Rightarrow g$ cont. ($W \in \mathcal{T}'' \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}W) = \underbrace{(g \circ f)^{-1}W}_{\text{cont.}} \in \mathcal{T} \stackrel{\mathcal{T}' = f^{-1}\mathcal{T}}{\Rightarrow} g^{-1}W \in \mathcal{T}'$)

2. Por otro lado,

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ \text{antif} \downarrow & & \\ (Y, \mathcal{T}') & \xleftarrow{\text{Id}} & (Y, \mathcal{T}) \\ \text{antif} \uparrow & & \\ (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ f \circ \text{antif} \uparrow & & \\ \text{la más fina} & & \mathcal{T} \subset \mathcal{T}' \end{array}$$

Ejercicio: Demostrar (ii) sin usar que $f\mathcal{T}$ es la más fina (usar que cumple la caracterización)

La caracterización anterior se llama propiedad universal.

Observación:

$$f(X) \text{ es abierto y cerrado en } f\mathcal{T} : \begin{cases} \forall y \in Y \setminus f(X), f^{-1}y = \emptyset \in \mathcal{T} \Rightarrow \{y\} \in f\mathcal{T} \\ f^{-1}f(X) = X \in \mathcal{T} \Rightarrow f(X) \in f\mathcal{T} \end{cases}$$

Caso esencial:

$$f : X \rightarrow Y \text{ sobreyectiva.}$$

Para entender los abiertos de una imagen directa es conveniente representarlos en el dominio. El concepto es conjuntista en realidad:

Definición

Un conjunto $A \subset X$ es saturado (respecto de f) si $f^{-1}f(A) = A$.

Proposición

Los abiertos de $f\mathcal{T}$ son las imágenes de los abiertos saturados de \mathcal{T} .

Demostración:

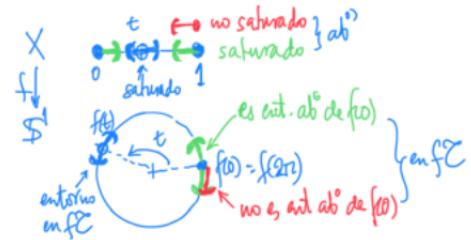
1. $V \in f\mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}V \in \mathcal{T}$ y $V \xrightarrow{\text{sobre}} f^{-1}fV$
2. $U \in \mathcal{T}$, saturado $\Rightarrow f(U) = V \in f\mathcal{T} : f^{-1}V = f^{-1}f(U) \xrightarrow{U \text{ sat.}} U \in \mathcal{T}$

Observación:

Los abiertos no saturados de X pueden tener imágenes no abiertas de Y .

Ejemplo:

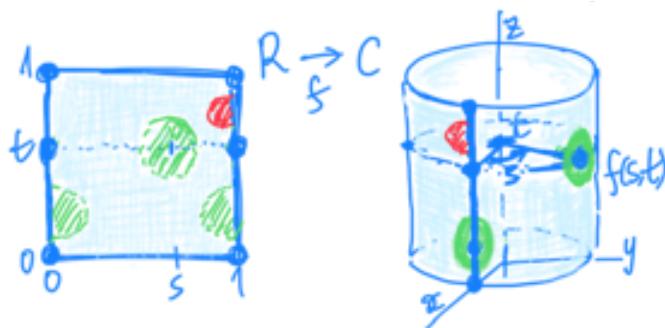
1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 = Y : t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \exp(2\pi i t)$



La topología imagen directa es la usual en \mathbb{S}^1 .

2. Tenemos:

$$f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow C \subset \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1 \\ (s, t) \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t).$$



Analizando los abiertos saturados y no saturados se concluye que la topología imagen directa es la usual en el tronco del cilindro.

Definición

Una aplicación continua sobre $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ tal que $\mathcal{T}' = f\mathcal{T}$ se llama identificación (se suelen omitir las topologías)

Observación:

1. Identificación: $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Leftrightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

Continua: $V \overset{\text{ab}}{\subset} Y \Rightarrow f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X$

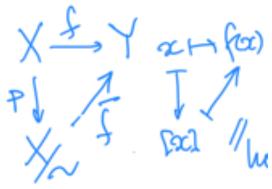
2. Sea $f : X \rightarrow Y$ sobre. continua. Si además es:

■ Abierta $\Rightarrow f$ es identificación [por (1)]

■ Cerrada $\Rightarrow f$ es identificación [$f^{-1}V \overset{\text{ab}}{\subset} X \stackrel{\text{+ cerr.}}{\Rightarrow} f\left(\underbrace{X \setminus f^{-1}(V)}_{=Y \setminus V}\right) \overset{\text{cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow V \overset{\text{ab}}{\subset} Y$]

Definición (Cociente)

Dentro de las identificaciones tenemos un caso particular: $(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{p} Y = \underbrace{X / \sim}_{p\mathcal{T} = \text{top. cociente}}$. Cociente respecto de una relación de equivalencia en X .



Tenemos que $x_1 \sim x_2 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$. Homeoforma de $p\mathcal{T}$ sobre $f\mathcal{T} \Leftrightarrow f$ identificación tal que:

$$\begin{cases} \bar{f} \text{ es biyección} \\ p^{-1}V = f^{-1}\bar{f}V \text{ y } f^{-1}W = p^{-1}\bar{f}^{-1}W \end{cases}$$

Política general:

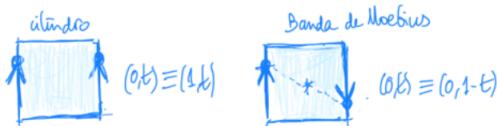
Los cocientes son cómodos para definir espacios, las identificaciones son mejores para estudiar las propiedades que tenemos. Conviene pues tener triángulos como el anterior. Se puede contemplar Y como un modelo del cociente.

Ejemplo: (Anteriores)

La circunferencia y el cilindro como cocientes:

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\quad} & S^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ [0,1]/0 \equiv 1 & & [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{\quad} C \subset \mathbb{R}^3 \\ & & \downarrow \\ & & [0,1] \times [0,1] \\ & & (0,t) \equiv (1,t) \end{array}$$

Para representar cocientes se utilizan dibujos que indican las identificaciones en los espacios de partida:



Productos (finitos)

Problema: Hacer $X_1 \times \dots \times X_r = Y \xrightarrow{p_i} (X_i, \mathcal{T}_i), 1 \leq i \leq r$ continuas con

$$\begin{cases} \text{top. discreta en } Y \text{ matriuialidad} \\ \text{top. } \underline{\text{menos fina}} \text{ en } Y \end{cases}$$

Solución: p_i cont. $\Rightarrow p_i^{-1} \underbrace{U_i}_{\mathcal{T}_i} = \underbrace{X_1 \times \dots \times U_i \times \dots \times X_r}_{\text{deben ser abiertos}} \Rightarrow \bigcap_i p_i^{-1} U_i = \underbrace{U_1 \times \dots \times U_r}_{\text{abiertos}}$ pero no son topología \Rightarrow

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \dots \times U_r : U_i \in \mathcal{T}_i\} \text{ es la } \underline{\text{base}} \text{ de la } \underline{\text{topología producto:}} \boxed{\prod_i \mathcal{T}_i}$$

Ejemplo:

La \mathcal{T}_u en \mathbb{R}^n es el producto de la usual en cada factor \mathbb{R} de \mathbb{R}^n . La base de la definición de topología producto está formada por las “bolas cuadradas”.

Teorema (Caracterización topología producto)

1.

$$\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \quad (3.3)$$

2. Y .

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{E}_i) \\ g = g_0 \circ g_1 \uparrow & & \\ (Z, \mathcal{E}'') & \xrightarrow{g_i = p_i \circ g} & \end{array}$$

Demostración:

1. $\mathcal{T}' = \prod_i \mathcal{T}$:

- g cont. $\Rightarrow g_i$ cont. (Composición de continuas)
- g_i cont. $\Rightarrow g^{-1}(U_1 \times \dots \times U_r) = \underbrace{g_1^{-1}(U_1)}_{\mathcal{T}''} \cap \dots \cap \underbrace{g_r^{-1}(U_r)}_{\mathcal{T}''} \in \mathcal{T}''$ (intersección finita de abiertos)

2. Por otro lado,

$$\begin{array}{ccc} (Y, \mathcal{E}') & \xrightarrow{p_i} & (X_i, \mathcal{E}_i) \\ \text{id} \uparrow \text{cont} & \text{(*)} \Downarrow & \\ (Y, \mathcal{E}) & \xrightarrow{p_i \text{ cont}} \mathcal{E}' \supset \mathcal{E}_i & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}_i \\ \mathcal{E}' \text{ es la menor fina} \end{array} \right. \\ & \uparrow & \\ & \mathcal{E}' \text{ es la menor fina} & \end{array}$$

Ejemplo:

Demostrar (ii) sin usar que $\prod_i \mathcal{T}_i$ es la menos fina (usar que cumple la caracterización)

La anterior caracterización se llama propiedad universal.

Proposición

1. $p_i : Y \rightarrow X_i$ es abierta. $[p_i(U_1 \times \dots \times U_r) = U_i]$

2. $X_j \xrightarrow{\alpha_j} Y : x_j \mapsto (a_1, \dots, x_j, \dots, a_r)$ es inmersión ($a_i \in X_i$ fijados).

$$\left[\begin{cases} \alpha_j(X_j) = \{a_1\} \times \dots \times X_j \times \dots \times \{a_r\} \\ \alpha_j(U_j) = \{a_1\} \times \dots \times U_j \times \dots \times \{a_r\} = \alpha(X_j) \cap (X_1 \times \dots \times U_j \times \dots \times X_r) \end{cases} \right]$$

Política general:

En una topología producto “todo se genera en productos”.

Ejemplo:

- Bases de entornos: $\mathcal{V}^a = \mathcal{V}^{a_1} \times \dots \times \mathcal{V}^{a_r} \stackrel{\text{mut}??}{=} \{V_1 \times \dots \times V_r : V_i \in \mathcal{V}^{a_i}\} (a \in Y)$.
- Base de abiertos: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_r = \{B_1 \times \dots \times B_r : B_i \in \mathcal{B}_i\}$ (esto repite la construcción de $\prod_i \mathcal{T}_i$)

Sumas (finitas)

Problema: Hacer $(X_i, \mathcal{T}_i) \xrightarrow{e_i} Y = X_1 + \dots + X_r = (X_1 \times \{1\}) \cup \dots \cup (X_r \times \{r\}), 1 \leq i \leq r : x_i \mapsto (x_i, i)$ continuas, ,con

$$\begin{cases} \text{top. trivial en } Y \text{ matrivialidad} \\ \text{top. más fina en } Y \end{cases}$$

Solución: $\underbrace{U_i}_{\mathcal{T}_i} \in e_i^{-1}(U_i \times \{i\}) \Rightarrow \mathcal{B} = \{U_1 \times \{1\}, \dots, U_r \times \{r\} : U_1 \in \mathcal{T}_1, U_r \in \mathcal{T}_r\}$ es base de una topología en Y , la topología suma: $\mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r$.

Proposición

$\forall i, e_i : (X_i, \mathcal{T}_i) \rightarrow (X_i \times \{i\}, \mathcal{T}|_{X_i \times \{i\}})$ es inmersión abierta y cerrada.

Demostración:

- Inmersión abierta: $e_i(U_i) = U_i \times \{i\} \in \mathcal{T}$
- Cerrada: $Y \setminus e_i(X_i) = Y \setminus X_i \times \{i\} = \bigcup_{j \neq i} X_j \times \{j\} \in \mathcal{T}$

Teorema (Caracterización topología suma)

1.

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 + \dots + \mathcal{T}_r \Leftrightarrow \forall g [g \text{ cont.} \Leftrightarrow \forall g_i \text{ cont.}] \text{ (Propiedad universal)} \quad (3.4)$$

2. Y .

$$\begin{array}{ccc} \text{inclusión} & \xrightarrow{\iota} & (Y, \mathcal{U}) \\ (X_i, \mathcal{U}_i) & \downarrow g & \\ g|_{X_i} = g \circ \iota & \xrightarrow{\quad} & (Z, \mathcal{V}) \end{array}$$

Demostración:

Análoga a las anteriores construcciones.

Política general:

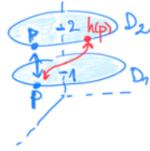
Localmente $Y = X_1 + \dots + X_r$ es como sea cada X_i . Por ejemplo, las bases de entornos de Y son las de los sumandos. Globalmente, se trata cada sumando separadamente. Por ejemplo, las bases de abiertos de los sumandos se unen para dar una base de abiertos de Y . Olvidando el tecnicismo $X_i \times \{i\} \equiv X_i$:

Y es unión disjunta de los sumandos
Los sumando son subespacios abiertos y cerrados de Y

Es un formalismo para hacer cómodamente otras construcciones. Por ejemplo, “pegar dos discos por sus bordes” sería:

$$\text{disco} D \subset \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \text{ borde } \partial D = \mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$D_1 + D_2 / \sim \quad \overbrace{(p, 1)}^{\partial D} \sim (p, 2).$$



y más elaborado $h : \partial D \xrightarrow{\text{homeo.}} \partial D$ con $\overset{\in \partial D}{\underset{\text{Prop.}}{\sim}} p \sim h(p)$.

Finalmente, hay otros conceptos de “suma” más significativos que veremos en algún ejemplo.

Espacios proyectivos reales

Como vimos en geometría lineal tenemos que:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{P}^n = \mathbb{R}^{nH} \setminus \{0\} / \underset{\text{Prop.}}{\sim} \Rightarrow \mathbb{P}^n = \{\text{rectas vectoriales de } \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Que en coordenadas es:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^{nH} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{P}^n \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 : \dots : x_n). \end{aligned}$$

Las ecuaciones serán de la forma: $h \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$ homogénea $\Rightarrow \begin{cases} h(x) = 0 \\ h(x) \neq 0 \end{cases}$ está bien definido en \mathbb{P}^n .

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> · Variedades proyectivas lineales · Variedades proyectivas · Variedades proyectivas algebraicas | ecuaciones homogéneas de grado: $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ \text{arbitrario} \end{cases}$ |
|---|---|

Cartas afines:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{H \subset \mathbb{P}^n}_{\text{hiperplano proyectivo}} & \rightarrow & \underbrace{\hat{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}}_{\text{hiperplano lineal}} : \underbrace{h=0}_{\text{forma lineal}}, H = \hat{H} \setminus \{0\} / \sim \\ \pi| : \underbrace{\{h=1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{hiperplano afín}} & \rightarrow & \underbrace{\mathbb{P}^n \setminus H}_{\{h \neq 0\}} = 0 \text{ es biyección..} \end{array}$$

Terminología: H es hiperplano del infinito de la carta afín U .

Topología en U : La imagen directa de la usual en $\{h = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow \pi| : \{h = 1\} \rightarrow U$ homeomorfismo.

Topología en \mathbb{P}^n :

- Cociente de la usual vía $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n : (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n)$
- “Suma” de las definidas en las cartas afines:

W abierto si $W \cap U$ es abierto $\forall U$ carta afín. [Es top. en \mathbb{P}^n]

Estas dos topologías coinciden.

Demostración:

1. U es abierto en la top. cociente. $[\pi^{-1}U = \{h \neq 0\}$ abierto usual]

2. La topología cociente en U coincide con la topología de carta afín:

$$\begin{array}{ccc}
 W \subset U : \pi^{-1}W = \text{cono sobre } (\pi^{-1}W) \cap h=1 & & \\
 \text{top. cociente} \quad \Downarrow \quad \text{de carta afín.} & & \\
 \pi^{-1}W \subset \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\text{ab}} (h|_{h=1})^{-1}W \subset h=1 & & \\
 \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow & & \\
 W \text{ ab top. cociente} & & W \text{ ab top. carta afín}
 \end{array}$$

1. + 2. \Rightarrow La top. cociente está generada por las topologías de las cartas afines, que forman un recubrimiento abierto de \mathbb{P}^n .

Observación:

De lo anterior deducimos:

1. U_1, U_2 dos cartas afines $\Rightarrow U_1 \cap U_2$ abiertos.

$$\left[\text{Cartas afines: } U_i = \{h_i \neq 0\} \left\{ \begin{array}{l} \pi : \{h_1 = 1\} \rightarrow U_1 \text{ homeo.} \\ (\pi_i)^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{h_1 = 1, h_2 \neq 0\} \xrightarrow{\text{ab.}} \{h_1 = 1\} \end{array} \right. \right]$$

2. Las topologías de U_1 y U_2 coinciden en $U_1 \cap U_2$.

[De nuevo conviene entenderlo con cartas:

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\{h_1=1, h_2 \neq 0\}} \text{homeo para } U_1 \\
 \text{homeo?} \uparrow \qquad \qquad \qquad \text{homeo para } U_1 \cap U_2 \\
 \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\{h_2 \neq 0, h_1=1\}} \text{homeo para } U_2
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{explico}}
 \begin{array}{c}
 x = y/h_1(y) \text{ homeo usual, } \checkmark \\
 y = x/h_2(x)
 \end{array}
]$$

Atlas afín canónico: No se suelen utilizar todas las cartas afines: $n+1$ distintas ya cubren \mathbb{P}^n . Típicamente $\mathbb{P}^n = U_0 \cup \dots \cup U_n$ con:

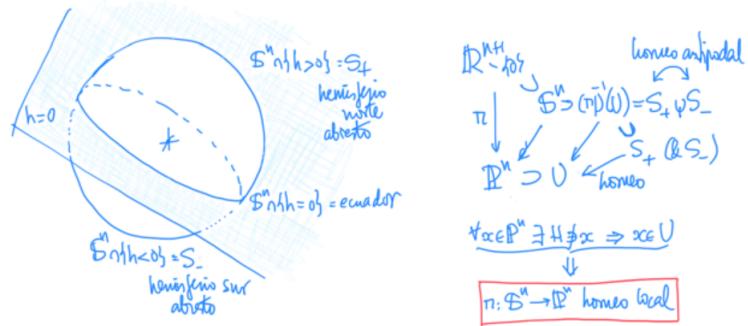
$$U_i = \{x_i \neq 0\} \leftrightarrow \underbrace{\{x_i = 1\}}_{\equiv \mathbb{R}^n} : (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \overbrace{1}^{\mathbb{R}^n \rightarrow}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), 0 \leq i \leq n$$

Cociente antipodal: Toda recta de \mathbb{R}^{n+1} corta a $\mathbb{S}^n : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$ en dos puntos antipodales, así que denotamos un “sub” cociente, que es también identificación.

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\text{cones}} \mathbb{S}^n \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \text{cones} \\
 \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{cones}} \text{cociente antipodal de } \mathbb{S}^n
 \end{array}$$

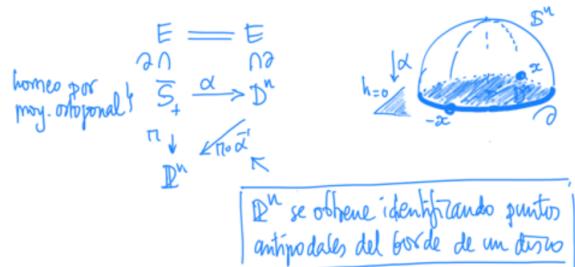
$$[\text{Como antes tenemos conos: } \pi^{-1}W = \text{cono sobre } \underbrace{\mathbb{S}^n \cap \pi^{-1}W}_{=(\pi/\mathbb{S}^n)^{-1}W}]$$

Las cartas afines tienen una representación muy conveniente:



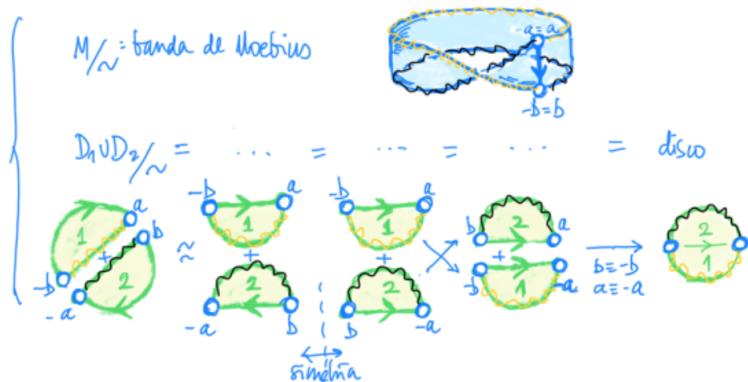
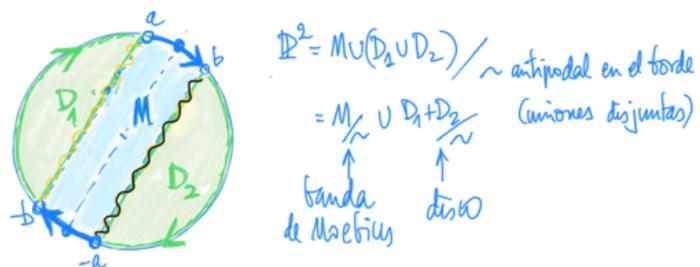
Cociente de un disco:

$$E = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\} = \partial \begin{cases} \bar{S}_+ = S^n \cap \{h \geq 0\} \text{ hemisferio cerrado.} \\ D^n = \{h = 0, x_0^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\} \text{ disco.} \end{cases}$$



Ejemplo:

$$\mathbb{P}^2 \setminus D^2 = \text{banda de M\"obius.}$$



Separación

Concepto

Definición

Un espacio X es Hausdorff o T_2 si cada par de puntos distintos $x, y \in X$ tienen entornos disjuntos: $V^x \cap V^y = \emptyset$.

Hay otras formas de separación, más débiles o más fuertes, pero nos contentaremos con ésta al ser la más intuitiva.

Observación:

1. Si existen entornos disjuntos, existen entornos abiertos disjuntos $[\forall V \supset U]$
2. Si X es Hausdorff, los puntos son cerrados.
$$\left[\forall y \neq x, \exists U^y \ni x \Rightarrow X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U^y \text{ es abierto.} \right]$$
3. (X, \mathcal{T}_{CF}) no es Hausdorff: dos abiertos cualesquiera se cortan (X infinito) tiene puntos cerrados: $X \setminus \{x\}$ es abierto.
4. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ es Hausdorff: $x \neq y \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap B(y, \varepsilon) = \emptyset$ si $\varepsilon \leq \|x - y\|/2$
5. En (X, \mathcal{T}_a) el punto a no es cerrado: $a \notin X \setminus \{a\} \Rightarrow X \setminus \{a\}$ no es abierto. $\forall x \neq a \forall U^x \supset \{a, x\} \ni a$!!!.

Proposición

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas con Y Hausdorff $\Rightarrow \{f = g\} = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.

Demostración:

1. $f(x) \neq g(x) \xrightarrow{T_2} \exists V^{f(x)} \cap V^{g(x)} = \emptyset \xrightarrow{\text{cont.}} f^{-1}V^{f(x)} \cap g^{-1}V^{g(x)} = V^x$ entorno de x .
 2. $V^x \cap \{f = g\} = \emptyset : y \in V^x \Rightarrow \begin{cases} f(y) \in V^{f(x)} \\ g(y) \in V^{g(x)} \end{cases} \Rightarrow f(y) \neq g(y)$
1. + 2. $X \setminus \{f = g\} = \{f \neq g\}$ es entorno de todos sus puntos, luego abierto, luego $\{f = g\}$ es cerrado.

Corolario

Si $f = g$ es un subconjunto denso, entonces $f \equiv g$

Demostración:

$$\exists \bar{A} = X : f|_A = g|_A \Rightarrow \{f = g\} \supset A \xrightarrow{\text{prop.}} \{f = g\} \supset \bar{A} = X.$$

Caso particular importante: Funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación:

$$f : X \rightarrow \underbrace{Y}_{\in T_2} \text{ continua} \Rightarrow f^{-1}(Y) \text{ cerrado } \forall y \in Y.$$

Porque los puntos de Y son cerrados y, de hecho, eso basta.

Tabla de comportamiento

Se trata de saber si la propiedad se conserva por las construcciones conocidas.

Se tiene:

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
T_2	✓	✗	✓	✓

$$1. Y \subset X = T_2 : y_1, y_2 \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{V^{y_1}}_{\text{En } X} \cap \underbrace{V^{y_2}}_{\text{En } Y} = \emptyset \Rightarrow (\underbrace{V^{y_1} \cap Y}_{\text{En } X}) \cap (\underbrace{V^{y_2} \cap Y}_{\text{En } Y}) = \emptyset.$$

$$2. Y = \mathbb{R}/\mathbb{Q} : \begin{cases} y_1 = \mathbb{Q} \in Y \\ y_2 = \sqrt{2} \in Y \end{cases} \nexists V^{y_1} \cap V^{y_2} = \emptyset : \text{todo entorno abierto de } \sqrt{2} \text{ contiene racionales, luego al saturar, contiene } \mathbb{Q}.$$

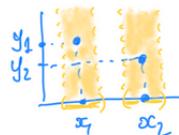
$$3. X \text{ y } Y \text{ ambos } T_2 \Leftrightarrow X \times Y \text{ } T_2.$$

$\Rightarrow)$

$$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y \Rightarrow \left\{ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists V^{x_1} \cap V^{x_2} = \emptyset \Rightarrow (V^{x_1} \times Y) \cap (V^{x_2} \times Y) = \emptyset \right.$$

$\Leftarrow)$

$$X \approx X \times \{y_0\} \subset X \times Y, T_2 \xrightarrow{1} X \times \{y_0\} T_2 \Rightarrow X T_2$$



$$4. X \text{ y } Y \text{ ambos } T_2 \Leftrightarrow X + Y \text{ } T_2$$

Único comentario: $x \in X \text{ y } y \in Y \Rightarrow X = V^x, Y = V^y \text{ y } X \cap Y = \emptyset$.

Numerabilidad

Axiomas

I Axioma

Definición (I Ax.)

X es 1er axioma si $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base numerable de entornos.

Observación:

1. $\mathcal{B}^x = \{U_k = \overset{\circ}{V}_k\}_{k \geq 1}$, base numerable de entornos de abiertos.
2. $\mathcal{W}^x = \{W_k = U_1 \cap \dots \cap U_k\}_{k \geq 1}$, base numerable de entornos abiertos encajados.

Ejemplo:

1. $\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u$ I Ax. $\mathcal{W}^x = \{B(x, y_k) : k \geq 1\}$
 2. $(X, \mathcal{T}_a), (X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$, I Ax.
 3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF})$ no es I Ax. $\exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1}$ abiertos encajados, $W_k = \mathbb{R} \setminus F_k$ finito $\Rightarrow \bigcap_k W_k = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \text{ num.}} F_k \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in \bigcap_k W_k \Rightarrow U^x = \mathbb{R} \setminus \{y\} \not\supseteq W_k, \forall k$
-

Definición (Límites)

Decimos que $x_k \rightarrow x \Leftrightarrow$

$$\forall U^x \exists k_0 : k \geq k_0 \Rightarrow x_k \in U^x$$

Observación:

1. $X T_2 \Rightarrow \exists!$ límite. $[x_k \rightarrow x \neq y, \exists U^x \cap U^y = \emptyset \Rightarrow \{x_k : k \geq k_0\} \subset U^x \text{ y } x_k \not\rightarrow y]$
2. I Ax. permite describir la topología con sucesiones: $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists \{x_k\} \subset A, x_k \rightarrow x$.

Demostración:

$\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{W}^x = \{W_k\}_{k \geq 1} \text{ encajados} \Rightarrow \exists x_k \in W_k \cap A \\ \forall U^x \underset{\text{base ent.}}{\supset} W_{k_0} \supset W_{k+1} \supset \dots \Rightarrow x_k \in U^x, \forall k \geq k_0 \end{aligned} \} \Rightarrow x_k \rightarrow x$$

$\Leftarrow)$

$$A \ni x_k \rightarrow x \Rightarrow \forall U^x, \exists x_{k_0} \in U^x \cap A$$

En general, los límites de sucesiones son poco útiles.

II AX

Definición (II Ax.)

X es 2º axioma si $\exists \mathcal{B}$ base numerable de abiertos

Observación:

1. II Ax. \Rightarrow I Ax. $[\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow \mathcal{B}^x = \{B_k : x \in B_k\}]$
2. I Ax. $\not\Rightarrow$ II Ax. [Espacio discreto no numerable]
3. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$ II Ax. $\mathcal{B} = \{B(q, \frac{1}{k}) : q \in \mathbb{Q}^n, k \geq 1\}$ [Ejercicio]

Separable

Definición (Separable)

X es separable si $\exists A$ numerable denso.

Observación:

1. II Ax. \Rightarrow separable. $[\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \geq 1} \Rightarrow A = \{\overbrace{a_k}^{\in B_k}\}_{k \geq 1} \text{ corta a todo abierto}]$
2. I Ax. + separable $\not\Rightarrow$ II Ax. $[(X, \mathcal{T}_a), X \text{ no numerable}]$
3. I Ax. $\not\Rightarrow$ separable. [Espacio discreto no numerable]
4. Separable $\not\Rightarrow$ I Ax. $[(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CF}) : \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}]$

Lindelöf

Definición (Lindelöf)

X es Lindelöf si $\forall X = \bigcup_i U_i$ (recubrimiento abierto) $\exists X = \bigcup_k U_{i_k}$ (subrecubrimiento numerable).

Esta forma débil de compacidad se menciona como complemento. [Ejercicios]

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
I Ax.	✓	✗ abierto ✓	✓	✓
II Ax.	✓	✗ abierto ✓	✓	✓
Separable	✗ abierto ✓	✗	✓	✓
Lindelöf	✗ abierto ✓	✓	✗	✓

- I Ax. y II Ax. se heredan a subespacios intersecando bases.
- Separable se hereda a subespacios abiertos intersecando el conjunto denso.
- Lindelöf se hereda a subespacios cerrados como la compacidad. No en general: Y no Lindelöf, $X = Y \cup \{w\}$ compacto, $\mathcal{B}^w = \{X \setminus F : F \subset Y\}$ con F finito.
- $X = \mathbb{R}_u$ I y II Ax's, $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es I.



Demostración:

$\alpha = \mathbb{Z} \in Y$, $\exists \mathcal{W}^\alpha = \{W_k : k \geq 1\}$ abiertos saturados, $W_k \supset \mathbb{Z}$, $\forall k$
 (figura) $\Rightarrow U = \mathbb{R} \setminus \{\varepsilon_k : k \geq 1\}$ entorno abierto saturado de $\mathbb{Z}U \not\supset W_k$, $\forall k$.

- \forall aplicación continua y abierta conserva I y II [Imagen de base es base]
- \forall aplicación continua conserva separabilidad [$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$]
- \forall aplicación continua conserva Lindelöf [Como la compacidad, ya se sabe...]
- Para productos: producto finito de numerables es numerable.
- Para sumas: suma finita de numerables es numerable.
- Solo falla Lindelöf:
 - $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,]})$ es Lindelöf [ejercicio no banal]
 - $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{[,]}^2)$ no es Lindelöf: si lo fuera, $L = \{x+y=0\} \subset \mathbb{R}^2$ heredaría la propiedad, pero es discreto no numerable ¡!

Compacidad

Concepto y mantras

Definición

X es compacto si todo recubrimiento abierto tiene un subrecubrimiento finito:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X$$

Observación:

Complementando lo anterior tenemos la propiedad de la intersección finita:

$$\begin{aligned} \emptyset = \bigcap_{i \in I} F_i &\Rightarrow \exists F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} = \emptyset \Rightarrow \\ \forall F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_r} \neq \emptyset &\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Proposición (Subespacios)

Sea $K \subset X$ (compacto) $\Rightarrow K \subset \underbrace{\bigcup_{i \in I} U_i}_{\subset X} \Rightarrow \exists U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K$

Ejemplo:

1. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ es compacto $\Leftrightarrow K$ es cerrado y acotado (Heine-Borel).
2. $[a, b] \subset \mathbb{R}_u$ compacto.
3. Si es compacto y discreto \Rightarrow es finito [$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ es rec. abierto en $\mathcal{T}_{\text{discreta}}$]
4. $x_k \rightarrow x \Rightarrow K = \{x, x_k : k \geq 1\}$ es compacto.

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \exists U_{i_0} \ni x \xrightarrow{\lim} x_k \in U_{i_0}, \quad \forall k > k_0 \\ x_k \in U_{i_k}, \quad \forall k \leq k_0 \end{array} \right\} \Rightarrow K \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{k_0}}$$

5. $K \subset \mathbb{R}_u^n$ compacto $\Leftrightarrow \forall A^\infty \subset K, A' \cap K \neq \emptyset$ (Bolzano-Weierstrass)

Proposición (Mantra 1)

Cerrado en compacto es compacto.

Demostración:

Sea $K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X$,

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_i U_i \Rightarrow X = (X \setminus K) \cup \bigcup_i U_i \\ X \text{ comp.} \Rightarrow \exists (X \setminus K) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} = X \supset K \\ \Rightarrow U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \supset K. \end{aligned}$$

(Alternativa: Usar la propiedad de las intersecciones finitas)

Proposición (Mantra 2)

Infinito en compacto tiene puntos de acumulación.

Demostración:

Sea $A \subset X$ (compacto) con $A' = \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \overbrace{\{ \text{puntos aislados} \}}^{\subset A} \cup \overbrace{A'}^{=\emptyset} = \{ \text{puntos aislados} \} = A \\ \Rightarrow A &\overset{\text{cerr.}}{\subset} X \text{ comp.} \Rightarrow \underbrace{A}_{=\{ \text{pts. aisl.} \}} \text{ es compacto y discreto} \Rightarrow \#A < +\infty. \end{aligned}$$

Proposición (Mantra 3)

La imagen continua de un compacto es compacta.

Demostración:

Sea $f : X \rightarrow Y$ con f continua y X compacto \Rightarrow

$$\begin{aligned} f(X) \times \bigcup_i V_i &\Rightarrow X = \bigcup_i f^{-1}V_i \Rightarrow \exists f^{-1}V_{i_1} \cup \dots \cup f^{-1}V_{i_r} = X \\ &\Rightarrow V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r} \supset f(X). \end{aligned}$$

Ejemplo: (!Muy importante!)

$\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es compacto: La imagen continua de \mathbb{S}^n por la proyección antipodal.

Proposición (Mantra 4)

Un compacto en T_2 es cerrado.

Demostración:

Sea $K \subset X$ con K compacto y $X = T_2 \Rightarrow$

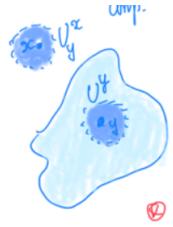
$$\forall x \in X \setminus K, \exists U^x \cap U^k = \emptyset \quad (6.1)$$

A su vez, $\forall y \in K, \exists U_y^x \cap U^y = \emptyset$ por $T_2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} K \subset \bigcup_y U^y &\xrightarrow{\text{comp.}} K \subset U^{y_1} \cup \dots \cup U^{y_r} = U^k \\ &\Rightarrow x \in U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x = U^x. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizando 6.1 \Rightarrow

$U^x \subset X \setminus K \wedge X \setminus K$ es entorno de $x \Rightarrow X \setminus K$ abierto.



Corolario

Dos compactos disjuntos en un T_2 se separan como puntos.

Demostración:

Ejercicio usando 6.1.

Proposición

Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, X compacto e $Y = T_2 \Rightarrow$ cerrada.

Demostración:

$$F^{\text{cerr.}} \subset X \xrightarrow{\text{M1}} F \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M3}} f(F) \text{ comp.} \xrightarrow{\text{M4}} f(F) \text{ cerr.}$$

Corolario

Sea la f de la anterior proposición entonces si además es:

$$\begin{cases} \text{inyectiva} \\ \text{sobreyectiva} \\ \text{biyectiva} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{inmersión cerrada} \\ \text{identificación cerrada} \\ \text{homeomorfismo} \end{cases}$$

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad	✗ cerrados ✓	✓	✓	✓
	Mantra 1	Mantra 3	Tychonoff	Unión finita

Teorema (de Tychonoff)

Si X e Y son dos compactos $\Rightarrow X \times Y$ es compacto.

Demostración:

Sea $X \times Y = \bigcup_{i \in I} W_i$, $W_i \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y$.

1. $\forall x \forall y, \exists U_y^x \times V_x^y \subset W_i$, i depende de (x, y) .
2. $\forall x Y = \bigcup_y V_x^y \xrightarrow{Y \text{ comp.}} Y = V_x^{y_1} \cup \dots \cup V_x^{y_r}$, los y_k y su n° dependen de x .

3. $U^x = U_{y_1}^x \cap \dots \cap U_{y_r}^x$, $U^x \times V_x^{y_k} \subset W_{i_k}$, i_k depende de x .

4. $X = \bigcup_x U^x \xrightarrow{X \text{ comp.}} X = U^{x_1} \cup \dots \cup U^{x_s}$.

5.

$$X \times Y = \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} U^{x_l} \times V_{x_l}^{y_k} \subset \bigcup_{\substack{l,k \\ \text{fin.}}} W_{i_k}, \text{ los } i_k \text{ dependen de los } x_l.$$

Observación:

1. $X \times Y$ compacto $\Rightarrow X$ e Y compactos. [Mantra 3 para proyecciones]

2. Heine-Borel: $K \subset \mathbb{R}_u^n$ cerrado y acotado \Rightarrow compacto porque:

$$\exists a_i, b_i : K \overset{\text{cerr.}}{\subset} \underbrace{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]}_{\text{Compacto por Tych.}^1}$$

Y aplicamos el Mantra 1.

¹ $[a, b]$ es compacto.

Compacidad local

Definición

Sea $Y \subset X$, es localmente cerrado si cumple las condiciones equivalentes siguientes:

1. $\forall y \in Y, \exists U^y \subset X : Y \cap U^y \overset{\text{cerr.}}{\subset} U^y. (\Rightarrow \text{lo mismo } \forall V^y \subset U^y)$
 2. Y es abierto en su adherencia.
 3. $Y = F \cap U, F \overset{\text{cerr.}}{\subset} X, U \overset{\text{ab.}}{\subset} X. (\Rightarrow \text{vale } F = \overline{Y})$
-

Demostración:

1. \Rightarrow 2.) $Y = \overline{Y} \cap \left(\bigcup_{y \in Y} U^y \right)$:

$$\begin{aligned} x \in \overline{Y} \cap U^y &\Rightarrow x \in \text{Adh}_{U^y}(Y \cap U^y) = Y \cap U^y \subset Y \\ U^x \subset U^y &\Rightarrow \emptyset \neq Y \cap U^x = (Y \cap U^y) \cap U^x. \end{aligned}$$

2. \Rightarrow 3.) Abierto en $\overline{Y} = \underbrace{\overline{Y}}_{=F} \cap U$.

$$F \cap U = Y \Rightarrow F \supset \overline{Y} \Rightarrow F \cap U = \overline{Y} \cap U.$$

3. \Rightarrow 1.) $Y = F \cap U \overset{\text{cerr.}}{\subset} U (= U^y, \forall y)$.

Esto es un ejemplo de localización de una propiedad topológica \mathcal{P} (aquí es ser cerrado). Se puede entender como:

$$\begin{aligned} \forall x, \exists V^x \text{ que cumple } \mathcal{P} \text{ o} \\ \forall x, \exists \mathcal{V}^x \text{ base de entornos que cumplen } \mathcal{P}. \end{aligned}$$

A veces son equivalentes (como en este caso), a veces no. El concepto adecuado de localización es mediante bases de entornos.

Compacidad local y mantras

Definición

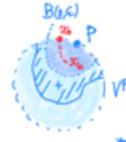
X es localmente compacto si $\forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos compactos.

Ejemplo:

1. \mathbb{R}_u^n es localmente compactos: $\mathcal{V}^x = \{B[x, \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$
2. $T = B(0, 1) \cup \{p\}$, T_u no es compacto:

$$\begin{aligned} \exists V^p \text{ comp.} \subset T \Rightarrow \exists B(0, \varepsilon) \cap T \subset V^p \Rightarrow \exists \overbrace{x_k}^{\in V^p} \rightarrow x_0 \in S(0, 1) \setminus T \\ \Rightarrow \{x_k : k \geq 1\} \subset V^p \subset T. \end{aligned}$$

que es un conjunto infinito sin acumulación en T .



3. En general no basta que exista un entorno compacto.

En $S = T \cup \{q\}$? tomamos como entornos del punto añadido q los $W \subset S$ que tienen complementario finito (y $q \in W$).

Pero este caso es un ejemplo con un espacio no separado.

Proposición

Si X es T_2 y $x \in X$ tiene un entorno compacto, entonces tiene una base de entornos compactos.

Demostración:

$$\exists \underbrace{V^x}_{\supset W^x \text{ ab.}} \text{ compacto} \Rightarrow \mathcal{V}^x = \text{entornos compactos } K^x \text{ base de entornos: } \forall U^x, \exists K^x \subset U^x.$$

$$\exists_{\text{ab.}} U_1^x \subset \overline{U_1^x} \subset U^x:$$

$$K^x = \overline{W^x \cap \overline{U_1^x}} \left\{ \begin{array}{l} \overline{V^x \setminus U^x} \subset \overline{V^x} \text{ cerr.} \\ \overline{V^x} \cap \overline{U_1^x} = V^x \cap \overline{U_1^x} \subset V^x \cap \overline{X \setminus A} = V^x \cap \overline{(X \setminus A)} \subset U^x \\ \text{interdos ent.?} \Rightarrow \text{entorno} \\ W^x \cap U_1^x \subset V^x \text{ comp. en } T_2 \Rightarrow \overbrace{K^x}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{V^x}^{\text{comp.}} \end{array} \right. \text{ ab. disjuntos}$$

Y tenemos dos mantras:

Proposición (Mantra 1)

Localmente cerrado en localmente compacto es localmente compacto.

Demostración:

Sea $Y \subset X$ con Y loc. cerrado y X loc. compacto e $y \in Y$.

Tenemos:

$$\overline{U_1^x} \cap V^x \subset \overline{X \setminus A} \cap V^x = \overbrace{(\overline{X \setminus A})}^{\text{cerr.}} \cap V^x \subset U^x$$

Y como Y es loc. cerrado, $\exists W^y \cap Y \subset \overline{W^y}$ ent. en X . Por ser X loc. compacto $\exists K^y$ compacto tal que, $K^y \subset W^y \Rightarrow K^y \cap W^y \cap Y \subset K^y \Rightarrow$

$$L^y = \underbrace{K^y \cap W^y}_{\text{ent. en } X} \cap Y \subset K^y \Rightarrow L^y \text{ ent. en } Y \text{ compacto.}$$

Proposición (Mantra 2)

Localmente compacto en T_2 es localmente compacto.

Demostración:

Sea $Y \subset X$ con Y loc. compacto, X siendo T_2 e $y \in Y \Rightarrow$

$$\exists L^y = \underbrace{V \cap Y}_{\text{comp.}} \subset \underbrace{V}_{\text{ent. en } X} \xrightarrow{T_2} V \cap Y = L^y \text{ cerr.} V.$$

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Compacidad local	\times Loc. cerrados ✓	\times ab. ✓	✓	✓
	Mantra 1	$f(\text{ent.}) = \text{ent}$	Tychonoff	Loc. suma es como sum's

Ejemplo:

$Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ no es localmente compacto.

1. $\mathbb{Z} \subset \underbrace{W}_{\text{ab.}} \subset \mathbb{R} : \exists k + \underbrace{\varepsilon_k}_{0 < \varepsilon_k < 1} \in W \forall k \geq 1 \Rightarrow A = \{k + \varepsilon_k : k \geq 1\} \subset W$
 - Cerrado
 - Saturado ($n\mathbb{Z} = \emptyset$)
 - Infinito
 - Discreto
2. $\exists K \subset Y$ entorno compacto de $y = \mathbb{Z} \in Y \Rightarrow \exists \underbrace{W}_{\supset \mathbb{Z}}^{\text{ab.}} \subset p^{-1}K \Rightarrow pA \subset K$ infinito sin acumulación.

Compactificación por un punto

Este es otro problema importante: sumergir un espacio como subespacio abierto denso de un espacio compacto.

Intuitivamente se trata de añadir los límites que el espacio no tiene (por no ser compacto).

Ejemplo:

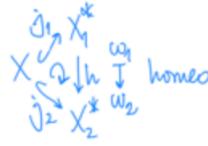
1. $\mathbb{R}^n \equiv B^n \setminus \{a\} \subset \mathbb{S}^n$ vía proyección estéreo desde a .
2. $\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{RP}^n \setminus H \subset \mathbb{RP}^n$ vía cartas afines.

Proposición

X localmente compacto T_2 .

1. $\exists j : X \hookrightarrow X^*$ comp. T_2 , j inmersión abierta $X^* \setminus j(X) = \{w\}$.

2. Unicidad:



Demostración:

$$1. X^* = X \cup \{0\}, \mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{X^* \setminus K : \overbrace{K}^{\subset X} \text{ comp.}\}.$$

- \mathcal{T}^* es top: fácil por las hipótesis sobre X .

- $K_i \overset{\text{comp.}}{\subset} X \xrightarrow{T_2} K_i \overset{\text{cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \overbrace{\bigcap_i K_i}^{\text{cerr.}} \subset \overbrace{K_{i_0}}^{\text{comp.}} \Rightarrow \bigcap_i K_i \text{ comp.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, X \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \setminus K = \text{ab.} \setminus \text{cerr.} = \text{ab.}$
- $U \overset{\text{ab.}}{\subset} X, K \overset{\text{comp.}}{\subset} X \Rightarrow U \cup (X^* \setminus K) = X^* \setminus (K \setminus U), K \setminus U \subset K \text{ cerrado} \Rightarrow \text{compacto.}$

- $X \subset X^*$ inmersión abierta: $(X^* \setminus K) \cap X = X \setminus K \in \mathcal{T}$ pues X es T_2 .

- X^* es compacto: $X^* = \bigcup_i W_i$.

$$\exists W_{i_0} \ni w \Rightarrow W_{i_0} = \underbrace{X^* \setminus K}_{\text{comp.}} \Rightarrow K \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r} \Rightarrow X^* = W_{i_0} \cup W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_r}$$

- X^* es T_2 :

$$x \in X \text{ loc. comp.} \Rightarrow \exists K^x \text{ ent. comp.} \Rightarrow X^* \setminus K^x = U^w \text{ ent. de } w$$

2. Unicidad:

- $\begin{cases} h_{j_1} = j_2 \\ j_i \text{ inmersiones} \end{cases} \Rightarrow h| : j_1(X) \rightarrow j_2(X) \text{ homeomorfismo.}$
- h continua en w_1 (análogamente h^{-1} continua en w_2)

$$\begin{aligned} h(w_1) = w_2 \in W \overset{\text{ab.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_2^* \Rightarrow X_2^* \setminus W \overset{\text{comp.}}{\subset} j_2(X) \\ \Rightarrow K = h^{-1}(X_2^* \setminus W) \overset{\text{comp.}}{\subset} j_1(X) \subset X_1^* \\ [X_1^* \text{ es } T_2] \Rightarrow K \overset{\text{cerr.}}{\subset} X_1^* \Rightarrow h^{-1}(W) = X_1^* \setminus K \overset{\text{ab.}}{\subset} X_1^*. \end{aligned}$$

Definición

El espacio X^* se denomina compactificación por un punto de X .

También, compactificación de Alexandroff.

Por ejemplo, \mathbb{S}^n es la compactificación por un punto de \mathbb{R}^n (vía proyección estereotípica como dijimos antes).

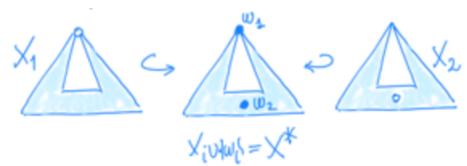
Observación: ¡Importante!

1. La unicidad justifica? que un espacio X^* compacto T_2 es la compactificación de $X^* \setminus \{0\}$ para cualquier $w \in X^*$.
2. Si dos espacios son homeomorfos, lo son sus compactos.

$$X_1 \xrightarrow[\text{homeo.}]{} X_2 \xrightarrow{j_2} X_2^* \Rightarrow j_1 = j_2 \circ f : X_1 \rightarrow X_2^*$$

que cumple las condiciones.

3. Si dos espacios no son homeomorfos, pueden serlo sus compactos.



[Ejercicio: \mathbb{R}_u^2 : ¿Por qué $X_1 \not\approx X_2$?]

Conexión

Concepto y mantras

Definición

X es conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\#X = U \sqcup Y$ abiertos $\neq \emptyset$.
 2. $\#X = F \sqcup C$ cerrados $\neq \emptyset$.
 3. $\#E \subsetneq X$ abierto y cerrado $\neq \emptyset$.
-

Demostración:

Equivalencia: $F = X \setminus V$, $C = X \setminus U$, $E = U = X \setminus V$.

Observación:

$Y \subset X$ subespacio conexo: $\#Y \subset U \cup V$ abierto de X ,

$$\begin{cases} U \cap Y \neq \emptyset \\ V \cap Y \neq \emptyset \\ U \cap V \cap Y = \emptyset \end{cases}$$

Ejemplo: (Fundamental)

$(0, 1) \subset \mathbb{R}_u$ es conexo.

Mantras generales \Rightarrow segmentos en \mathbb{R}^n , estrellados? y conexos son conexos.

Teorema (del pivote. Mantra 1)

Sea $X = \bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, $\forall A_i$ conexos $\Rightarrow X$ conexos.

Demostración:

$$\begin{aligned} \emptyset \neq E &\stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} A_i \Rightarrow \forall i, \begin{cases} E \cap A_i = \emptyset \\ E \supset A_i \end{cases} \\ &\xrightarrow{E \neq \emptyset} \exists i_0 : E \supset A_{i_0} \supset \bigcap_i A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \cap A_i \neq \emptyset \Rightarrow \forall i, E \supset A_i \\ &\Rightarrow E \supset \bigcup_i A_i \Rightarrow E = X. \end{aligned}$$

Corolario (Variantes)

1. $X = \bigcup_{i \in I} A_i, \exists A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset.$

Demostración:

$X = \bigcup_{i \in I} (A_{i_0} \cup A_i)$ conexo por mantra 1 y se aplica el mantra 1.

2. *Cadenas:* $X = \underbrace{A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \dots}_{\text{conexos}} \quad A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ conexo.}$

Demostración:

Se usa el mantra 1 dos veces:

$$\begin{cases} X_k = (\dots ((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cup \dots \cup) A_k \\ X = \bigcup_k (X_1 \cup \dots \cup X_k) \end{cases}$$



El “recíproco” es “fácil” pero útil.

Proposición (Construcción de cadenas)

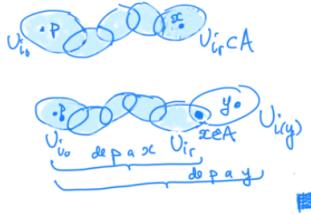
X conexo, $X = \bigcup_i U_i$ recubrimiento abierto, $p, q \in X \Rightarrow \exists$ cadena finita U_{i_k} de p a $q : p \in U_{i_0}, U_{i_{k-1}} \cap U_{i_k} \neq \emptyset, q \in U_{i_r}.$

Demostración:

$A = \{x \in X : \exists U_{i_k} \text{ de } p \text{ a } x\} \neq \emptyset$ abierto y cerrado $\Rightarrow A = X$ y $q \in A$. Por ser:

- $\neq \emptyset : \exists U_{i_0} \in ?p$ y U_{i_0} va de p a $p !$
- Abierto: $\exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r}$ de p a $x \Rightarrow U_{i_r} \subset A.$
- Cerrado:

$$\begin{aligned} y \in \overline{A} \text{ e } y \in U_{i(y)} &\Rightarrow A \cap U_{i(y)} \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \exists U_{i_0}, \dots, U_{i_r} \text{ de } p \text{ a } x \in U_{i(y)} \\ &\Rightarrow U_{i_0}, \dots, U_{i_r}, U_{i(y)} \text{ de } p \text{ a } y. \end{aligned}$$



Proposición (Mantra 2)

Imagen continua de conexo es conexo.

Demostración:

$$f : X \rightarrow Y \text{ continua, } \emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} f(X) \xrightarrow{\text{cont.}} \emptyset \neq f^{-1}(E) \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow f^{-1}(E) = X \Rightarrow E = f(X).$$

Proposición (Mantra 3)

Adherencia de conexo es conexo: $Y \subset X$ con Y conexo y denso $\Rightarrow X$ conexo.

Demostración:

$$\emptyset \neq E \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} X \Rightarrow E \cap Y \stackrel{\text{ab. cerr.}}{\subset} Y \Rightarrow \begin{cases} E \cap Y = \emptyset \times \text{densidad.} \\ E \cap Y = Y \Rightarrow Y \subset E \stackrel{\text{cerr.}}{\subset} X = \overline{Y} \Rightarrow E = X. \end{cases}$$

Ejemplo:

1. $(0, 1) \stackrel{\text{denso}}{\subset} [0, 1] \xrightarrow{M1} [0, 1]$ conexo. Con una interpolación?: $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ es homeomorfismo con $[a, b] \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{M2} [a, b]$ es conexo. Aplicando ahora:

- Pivote: $E = \bigcup_{\substack{x \in E \\ \text{convx.}}} [a, x]$ estrellado (resp. de a): convexos, bolas abiertas y cerradas, rectángulos...
- Mantra 2: Trazas de curvas continuas $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2. Seno del topólogo (polaco):

$$\text{Conexos: } \begin{cases} \Gamma = \text{imagen} : t \mapsto \left(t, \sin \frac{1}{t}\right), t > 0 \\ J = \{0\} \times [0, 1] \\ \overline{\Gamma} = \Gamma \cup J \text{ (adh.)} \end{cases}$$



Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión	✗	✓	✓	✗
	$\{0, 1\} \subset [0, 1]$	Mantra 3	Pivote	Cada sum. ab. y cerr.

Proposición

$X \times Y$ conexo $\Leftrightarrow X$ y Y conexo.

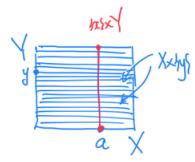
Demostración:

\Rightarrow) Mantra 3 para las proyecciones.

\Leftarrow) Fijamos $a \in X$.

$$\left. \begin{aligned} Z_y &= (\underbrace{X \times \{y\}}_{\approx X}) \cup (\underbrace{\{a\} \times Y}_{\approx Y}) \text{ dos convx. se cortan en } (a, y) \xrightarrow{\text{Piv.}} Z_y \text{ convx.} \\ \forall y \in Y, \quad \bigcap_{y \in Y} Z_y &= \{a\} \times Y \neq \emptyset \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{Piv.}}$$

$$\bigcup_{y \in Y} Z_y = X \times Y \text{ convx.}$$



Componentes conexas y conexión local

Componentes

Definición

Una componente conexa (c.c) de X es un subespacio conexo maximal.

Proposición

1. $\forall a \in X. C(a) = \bigcup_{a \in A_{conx}} A$ es conexo (pivot), $a \in C(a)$.
2. $E \subset X$ conexo:

$C(a) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow C(a) \cup E$ conx. (pivot) $\Rightarrow C(a) \cup E$ es uno de los A de $C(a) \Rightarrow E \subset C(a)$

Luego,

- $C(a)$ maximal \Rightarrow componente conexa.
 - $a \neq b : C(a) = C(b)$ ó $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ [Usar $E = C(b)$]
3. $\overline{C(a)}$ conexo (mantra adh.) $\Rightarrow \overline{C(a)} = \underbrace{C(a)}_{cerr.}$ (maximalidad)

1. + 2. + 3. $\Rightarrow X = \bigsqcup_{C \subset X} C$ es una partición en cerrados disjuntos.

Ejemplo:

1. $X_{\text{discreto}} : C(x) = \{x\}$ (puntos abiertos y cerrados)
2. $\mathbb{Q}_u : C(p) = \{p\}$ (todo intervalo de \mathbb{R} tiene racionales)
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)}) : C(t) = \{t\}$ ($\mathbb{R} = (\leftarrow, a) \cup [a, \rightarrow)$ abierto y cerrado)
4. $X = \{0, Y_k, k \geq 1\} : \begin{cases} C(0) = \{0\} \text{ cerrado, no abierto } (\{\frac{1}{k} : k \geq 1\} \text{ no cerr.}) \\ C(\frac{1}{k}) = \{\frac{1}{k}\} \text{ cerrado y abierto.} \end{cases}$

Definición

Un espacio cuyas componentes son los puntos se llama totalmente desconexo.

Proposición

Las componentes conexas de $X \times Y$ son los puntos de componentes conexas.

Demostración:

$$C \subset \underbrace{X}_{\xrightarrow{p} X} \times \underbrace{Y}_{\xrightarrow{q} Y} \Rightarrow p(C) \text{ y } q(C) \text{ conexos (imagen continua)} \Rightarrow \begin{cases} p(C) \subset E \overset{\text{c.c.}}{\subset} X \\ q(C) \subset F \overset{\text{c.c.}}{\subset} Y \end{cases} \Rightarrow C \subset E \times F \underset{\text{Max. de } C}{\xlongequal{}} C = E \times F.$$

Conexión local

Definición

X es localmente conexo si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos.

Proposición

X es localmente conexo \Leftrightarrow la componente conexa de un abierto es abierta.

Demostración:

- $\Rightarrow)$ Si $x \in C \overset{\text{cerr.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X \Rightarrow \exists \underbrace{U^x}_{\text{ab. conn.}} \subset U \Rightarrow U^x \subset C \Rightarrow C \overset{\text{ab.}}{\subset} X.$
- $\Leftarrow)$ $\mathcal{B}^x = \{C(x) \overset{\text{c.c.}}{\subset} U \overset{\text{ab.}}{\subset} X : x \in U\}$. Con $C(x)$ abierto por ser c.c de abierto.

Ejercicio: X es localmente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos.

Ejemplo: (Esencial)

$\{0, \frac{1}{k} : k \geq 1\} = Y \subset \mathbb{R}_u$ no es localmente conexo.

Demostración:

La c.c $(0) = \{0\}$ no es abierto. Directamente:

$$\begin{aligned} 0 \in \underbrace{V}_{\text{ent. de } 0 \in \mathbb{R}} \cap Y &\Rightarrow V \supset (0, \varepsilon), \exists 0 < \underbrace{\theta}_{\notin \mathbb{Q}} < \frac{1}{k} < \varepsilon < 1 \\ &\Rightarrow V \cap Y \subset \underbrace{(0, \theta)}_{\exists 0} \cup \underbrace{(\theta, \infty)}_{\exists \frac{1}{k}} \Rightarrow V \cap Y \text{ no conexo..} \end{aligned}$$

Ejercicio:

1. Analizar una sucesión de segmentos que convergen a otro:



2. ¿Y el seno del topólogo?

Tabla de comportamiento

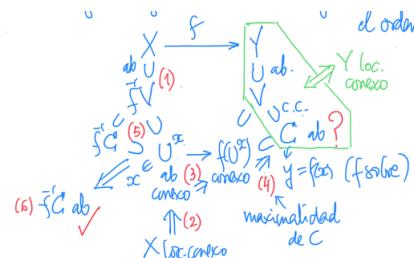
	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local	✗	✓	✓	✗
	Ejemplo esencial	No banal	Prod. ent. conx.	Suma como sum's

Proposición

Sea $f : X \rightarrow Y$ identificación con X localmente conexo $\Rightarrow Y$ es localmente conexo.

Demostración:

El diagrama siguiente resume el argumento (si se lee en el orden adecuado).



Conexión por caminos

Definición

Un camino en un espacio X es una aplicación continua $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R}_u \rightarrow X$. Decimos:

- α va de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, conecta $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$, que son extremos.
- La imagen $\alpha[a, b] \subset X$ es la traza, conexa por imagen continua.

Proposición (Cambios de parámetros)

$\forall \varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ continua $\Rightarrow \beta = \alpha \circ \varphi$ es otro camino con igual traza.

φ es un cambio de parámetro cuando es homeomorfismo (creciente o decreciente).

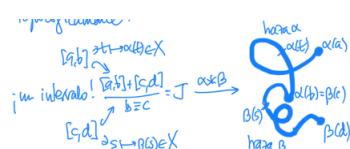


Ejemplo: (Interpolación lineal)

Dados $p, q \in \mathbb{R}^n$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow [p, q] : t \mapsto (1 - t)p + tq$ es un camino bien conocido y útil. También sirve para reparametrizar si $[p, q] = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Vemos, por ejemplo, que siempre podemos reducirnos a caminos con dominio $[0, 1]$. Esto será fundamental más adelante.

Proposición (Producto de caminos)

Topológicamente:



(Alternativa: Reparametrizar β con dominio $[b, b + (d - c)]$)

Ejemplo:

Si hacemos el producto de segmentos consecutivos obtenemos caminos poligonales.

Conexión por caminos

Definición

Un espacio X es conexo por caminos si sus puntos se pueden conectar con un camino:

$$\forall x \forall y \in X, \exists \sigma_y : [a, b] \rightarrow X, \sigma_y(a) = x \wedge \sigma_y(b) = y$$

En particular, $X = \bigcup_y \sigma_y[a, b]$ es conexo (pivot, $\alpha_y(a) = x, \forall y$)

Ejemplo:

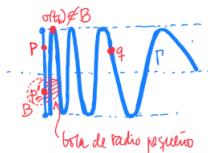
1. La mayor parte de los conexos conocidos son conexos por caminos:

- Los abiertos conexos (top. Usual) son conexos por poligonales, que son caminos.
- Los conjuntos convexos y los estrellados también.

2. El seno del topólogo Γ es la traza de $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $t > 0$, es conexo y lo es su adherencia $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$, $J = \{0\} \times [0, 1]$. Pero $\bar{\Gamma}$ no es conexo por caminos.

Demostración:

No existen caminos $\sigma : [a, b] \rightarrow \bar{\Gamma}$ $\begin{cases} \sigma(a) = p \in J \\ \sigma(b) = q \in \Gamma \end{cases}$:



- a) $\sigma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$, α, β continuas. $\exists a' = \max\{t \in [a, b] : \alpha(t) = 0\} \Rightarrow (\alpha \text{ continua en un compacto}) \Rightarrow \begin{cases} \alpha(a') = 0, \sigma(a') = p' \in J \\ t > a' : \alpha(t) > 0 \Rightarrow \sigma(t) \in \Gamma \Rightarrow \beta(t) = \sin \frac{1}{\alpha(t)} \end{cases}$
- b) Supongamos $p' = \sigma(a') \neq (0, 1)$ y $\exists \delta : B(p', \delta) \cap \{y = 1\} = \emptyset$. σ continua $\Rightarrow \exists \sigma[a', \varepsilon] \subset B(p', \delta) \Rightarrow \sigma[a', \varepsilon] \cap \{y = 1\} = \emptyset$. (si $p' = (0, 1)$ evitariamos? $\{y = -1\}$)
- c) α continua $\Rightarrow \alpha[a', \varepsilon] \subset \mathbb{R}$ conexo compacto = intervalo: $\alpha[a', \varepsilon] = [0, c]$.
- d) La oscilación de $\sin \frac{1}{x}$ lleva σ a $\{y = 1\}$, fuera de la bola elegida:

$$k \gg 0 \Rightarrow \frac{2}{(1 + 4k)\pi} \in [0, c] = \alpha[a', \varepsilon] \Rightarrow \exists a' < t_k < \varepsilon : \alpha(t_k) = \frac{2}{(1 + 4k)\pi}$$

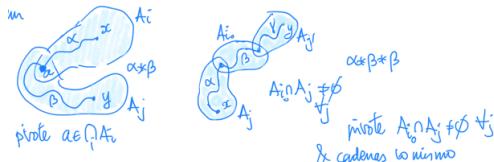
$$\Rightarrow \sigma(t_k) = \left(\alpha(t_k), \sin \left(\frac{1}{\alpha(t_k)} \right) \right) = (x_k, 1) !?$$

Mantras

Todo (casi) lo que dijimos sobre la conexión nos vale:

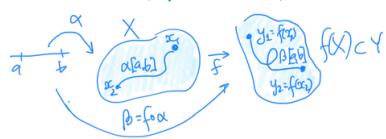
Proposición (Mantra del pivot)

(Igual) Sea $X = \bigcup_i A_i$, $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$, $\forall A_i$ conexos por caminos $\Rightarrow X$ conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la imagen)

Sea $f : X \rightarrow Y$ continua con X conexo por caminos $\Rightarrow f(X)$ es conexo por caminos.



Proposición (Mantra de la adherencia (!NO!))

El seno del topólogo $\Gamma = \text{grafo de } \sin \frac{1}{t}$ es conexo por caminos: $(a, \sin \frac{1}{a})$ y $(b, \sin \frac{1}{b})$ se conectan por el camino evidente, $\alpha(t) = (t, \sin \frac{1}{t})$, $a \leq t \leq b$. Pero, como hemos visto, la adherencia $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos.

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión por caminos	✗	✓	✓	✗

Proposición (Productos)

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$:

$$\begin{aligned} \sigma : [a, b] \rightarrow X : & \left\{ \begin{array}{l} \sigma(a) = x_1 \\ \sigma(b) = x_2 \end{array} \right. \\ \tau : [a, b] \rightarrow Y : & \left\{ \begin{array}{l} \tau(a) = y_1 \\ \tau(b) = y_2 \end{array} \right. \end{aligned} \Rightarrow \gamma = (\sigma, \tau) : [a, b] \rightarrow X \times Y \left\{ \begin{array}{l} \gamma(a) = (x_1, y_1) \\ \gamma(b) = (x_2, y_2) \end{array} \right.$$

Componentes conexas por caminos y conexión local por caminos

Componentes conexas por caminos

Todo análogo a las componentes conexas (casi). Sea X espacio topológico.

Definición

Una componente conexa por caminos (c.c.c) es un subconjunto conexo por caminos maximal.

Proposición (Descripción)

1. La c.c.c de $x \in X$ es $\bigcup_{x \in A} A$ con A conexa por caminos.
2. Las c.c.c forman una partición de X , más fina que la de las c.c.

Demostración:

Porque conexo por caminos \Rightarrow conexo pero no la inversa.

¡OJO! Las c.c.c no son necesariamente cerradas.

Como contraejemplo de ambas cosas dichas tenemos la adherencia del seno topólogo.

Ejemplo:

Γ seno del topólogo y $\bar{\Gamma} = J \cup \Gamma$ son conexos. Tenemos que $\bar{\Gamma}$ es una c.c, mientras que J y Γ son dos c.c.c, una cerrada (J) y la otra no (Γ). [Porque $\bar{\Gamma}$ no es conexa por caminos]

Conexión local por caminos

Imitamos sin sorpresa las demostraciones de la conexión local y tenemos:

Definición

X es localmente conexo por caminos si $\forall x \in X, \exists \mathcal{B}^x$ base de entornos abiertos conexos por caminos.

Proposición

X es localmente conexo por caminos \Leftrightarrow c.c.c de un abierto es abierto.

Ejercicio: Localmente conexo $\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists \mathcal{V}^x$ base de entornos conexos por caminos.

Tabla de comportamiento

	Subespacios	Cocientes	Productos	Sumas
Conexión local por caminos	✗	✓	✓	✓

También vale que las c.c.c del producto son los productos de las c.c.c de los factores.

Relaciones entre las propiedades de conexión

Lo principal es que:

Proposición

Conexo y localmente conexo por caminos \Rightarrow Conexo por caminos.

Demostración:

- Conexo $\Rightarrow \forall x, y, \exists$ cadenas de x a y .
- Localmente conexo por caminos \Rightarrow cadenas de abiertos conexos por caminos \Rightarrow Var. pivote
Estas cadenas son conexas por caminos.

Por tanto, \exists camino de x a y .

Observación:

Esta es la demostración de que un abierto conexo de \mathbb{R}_u^n lo es por poligonales (se usan cadenas de bolas).

Observación: (Resumen)

Por especificar todas las posibilidades:



Ejercicio: Contraejemplos. Los menos fáciles son * y **

Homotopía

Conceptos fundamentales

Definición

Una homotopía es una aplicación continua $H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$:

1. $H_s : Y \rightarrow X : y \mapsto H(y, s)$, $H \equiv \{H_s : 0 \leq s \leq 1\}$ familia uniparamétrica de aplicaciones.
2. Siendo $f = H_0$ y $g = H_1$:

$$\begin{cases} H_s : f \simeq g \text{ homotopía entre } f \text{ y } g \\ H \text{ deformación continua de } f \text{ a } g \end{cases} \quad \boxed{\text{El problema: cuándo } f \simeq g}$$

3. $f \simeq g$ relación de equivalencia:

- $f \simeq f$ vía $H_s \equiv f$.
- $H_s : f \simeq g \Rightarrow H_{1-s} : g \simeq f$.
- $\begin{cases} F_s : f \simeq g \\ G_s : g \simeq h \end{cases} \Rightarrow H_s = \begin{cases} F_{2s}, & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G_{2s-1}, & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases} : f \simeq h$

Demostración:

$$\text{Continuidad: } \begin{cases} F_{2(1/2)} = F_1 = g \\ G_{2(1/2)-1} = G_0 = g \end{cases}$$

Proposición

X conexo por caminos, $f, g : Y \rightarrow X$ constantes $\Rightarrow f \simeq g$.

Demostración:

$$\exists \sigma : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(0) = f(y_0) \text{ y } \sigma(1) = g(y_0) \Rightarrow H_s \equiv \sigma(s) : \begin{cases} H_0 \equiv \sigma(0) = f(y_0) \equiv f \\ H_1 \equiv \sigma(1) = g(y_0) \equiv g \end{cases}$$

Definición

$f : Y \rightarrow X$ es nulhomótopa si $f \simeq$ constante, esencial en caso contrario.

Teorema (Problema esencial. Hopf.)

(1932) $\exists f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ esencial con $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ y $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{C} : (z, z') \mapsto (\|z\|^2 - \|z'\|^2, 2zz')$

Concepto relativo

Definición

$H : Y \times [0, 1] \rightarrow X$ es relativa a $A \subset Y$ si $H_s(a) = H_0(a)$, $\forall a \in A$, $\forall s$.

Proposición

H relativa a A , $f = H_0$, $g = H_1 \Rightarrow f|_A = g|_A$. Notación: $H_s = f \xrightarrow{A} g$ (Relación de equivalencia).

Ejemplo: (Fundamentales. Interpolación)

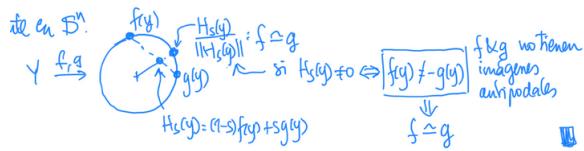
1. $f, g : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ convexo $\Rightarrow \exists H_s = (1-s)f + sg : f \simeq g$.

Demostración:

Pues por convexidad $H_s(y) \in \underbrace{[f(y), g(y)]}_{\text{cond. crucial!}} \subset X$.

$f(a) = g(a) \Rightarrow H_s(a) = f(a) = g(a) \Rightarrow H_s$ es relativa a $A = \{f = g\}$.

2. $f : Y \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado verp?, x_0 , $[x, x_0] \subset X$, $\forall x \in X \Rightarrow H_s = (1-s)f + sx_0 : f \simeq x_0$ (relativa a $A = f^{-1}(x_0)$).
3. Variante en \mathbb{S}^n :



Contractibilidad

Definición

X es contrátil si $\text{id} : X \rightarrow X$ es nulhomótopa: $\exists H_s : \text{id} \simeq x_0$.

Y fuertemente contrátil si $\exists H_s : \text{id} \xrightarrow{x_0} x_0$ (homótopa relativa a $\{x_0\}$)

Observación:

Los ejemplos son difíciles, pero son cosas distintas.

Ejemplo:

$X \subset \mathbb{R}^n$ estrellado verp? $x_0 \Rightarrow$ fuertemente contrátil

Demostración:

$H_s = (1-s)\text{id} + sx_0$.

Proposición

1. Si X es contrátil \Rightarrow es conexo por caminos.

2. Si X es contrátil $\Rightarrow \begin{cases} \forall f : Y \rightarrow X \text{ nulhomótopa}. \\ \forall g : X \rightarrow Z \text{ nulhomótopa}. \end{cases}$

Demostración:

1. $H_s : id \simeq x_0 \Rightarrow S \mapsto H_s(x_0)$ camino de x a x_0 .

2. $H_s : id \simeq x_0 \begin{cases} H_s \circ f : f \simeq x_0 \\ g \circ H_s : g \simeq g(x_0) \end{cases}$

Observación:

Pocos espacios son contráctiles, pero no es inmediato verlo.

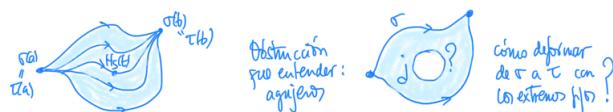
Homotopía de caminos

El concepto básico

Definición

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$ son homótopos con extremos fijos si $\exists H_s : \sigma \simeq \tau$ relativa a $\{a, b\}$:

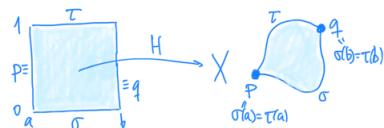
$$\begin{cases} H_s(a) = \sigma(a) = \tau(a) \\ H_s(b) = \sigma(b) = \tau(b) \end{cases} \quad \forall s$$



Observación:

Es un problema de extensión:

Definir H en el cuadrado $[a, b] \times [0, 1]$ con valor determinado en su borde.



Simple-conexión

Definición

X es simplemente conexo si cumple las siguientes condiciones equivalentes:

1. $\forall \sigma, \tau : [a, b] \rightarrow X$ con iguales extremos son homótopos con extremos fijos.
 2. $\forall f : \mathbb{S}' \rightarrow X$ se extiende al disco interior de la circunferencia.
-

Demostración:

Colapsando dos lados de un cuadrado $\xrightarrow{\pi}$ disco con dos puntos en la circunferencia unidos por dos ceros α, β .

1. \Rightarrow 2.)

$$f : \mathbb{S}^1 \rightarrow X \Rightarrow f \circ \pi \begin{cases} \alpha \rightarrow \text{camino } \sigma \\ \beta \rightarrow \text{camino } \tau \end{cases} \\ \Rightarrow \exists H \text{ con extremos fijos} \Rightarrow \text{compatible con } \pi \\ \Rightarrow H \text{ pasa al cociente por } \pi, \text{ dando } F..$$

2. \Rightarrow 1.) Dos caminos σ, τ con extremos p, q definen f en la circunferencia y su extensión F al disco define la homotopía $H = F \circ \pi$.

Ejemplo:

Los conjuntos convexos son simplemente conexos. ¿Los estrellados?

Esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$

Proposición

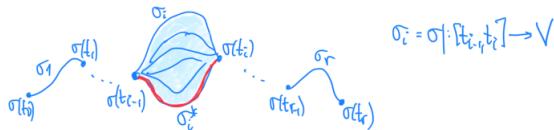
$\mathbb{S}^n : \{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es simplemente conexo ($n \geq 2$).

Demostración:

$\sigma, \tau : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^n$, $\sigma(a) = \tau(a) = p$, $\sigma(b) = \tau(b) = q$.

$$\left. \begin{array}{l} \exists c, -c \in \mathbb{S}^n \setminus \{p, 1\} \wedge U = \mathbb{S}^n \setminus \{c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \\ V = \mathbb{S}^n \setminus \{-c\} \stackrel{\text{homeo.}}{\approx} \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{proyección estereográfica.}$$

1. $[a, b] \subset \sigma^{-1}U \cup \sigma^{-1}V \xrightarrow{\text{comp.}} \exists a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \sigma[t_{i-1}, t_i] \begin{cases} \subset U \\ \subset V \end{cases} \text{ donde } \sigma[t_{i-1}, t_i] \text{ es la traza de } \sigma_i = \sigma|_{[t_{i-1}, t_i]}.$
2. Si dos consecutivos están en el mismo U ó V , eliminamos la juntura común \Rightarrow al atravesar una juntura t_k cambiamos de U a V ó viceversa, en particular, $x_k = \sigma(t_k) \in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$, que es conexo por caminos, o bien, nos quedamos sin junturas y $\sigma[a, b] \subset U$ ó V .
3. Consideramos los trozos en V (incluido que $\sigma[a, b] \subset V$ porque no hay ya junturas)



(*)

$$\begin{aligned} \sigma(t_{i-1}), \sigma(t_i) &\in U \cap V \approx \mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\} \text{ conexo por caminos} \\ \Rightarrow \exists \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] &\rightarrow U \cap V \subset V \text{ mismos extremos que } \sigma_i. \end{aligned}$$

$$(***) \quad V \approx \mathbb{R}^n \text{ convexo} \Rightarrow \exists H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* \text{ en } V \text{ con extremos fijos. ¡Ojo! } [\sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U].$$

4. Pegando a trozos homotopías en \mathbb{S}^n :

$$\begin{cases} \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset U \Rightarrow H_s^i \equiv \sigma_i = \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U \subset \mathbb{S}^n \\ \sigma [t_{i_1}, t_i] \subset V \xrightarrow{3} H_s^i : \sigma_i \simeq \sigma_i^* : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow V \subset \mathbb{S}^n \end{cases} \Rightarrow \sigma \simeq \sigma^*$$

Homótopos en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\sigma^* [a, b] \subset U$.

5. Igual, $\exists H_s : \tau \simeq \tau^*$ homotopía en \mathbb{S}^n con extremos fijos, pero $\tau^* [a, b] \subset U$.

En conclusión: $\sigma^* \simeq \tau^*$ en $U (\approx \mathbb{R}^n)$ con extremos fijos $\Rightarrow \sigma \simeq \sigma^* \simeq \tau^* \simeq \tau$ con extremos fijos.

El grupo fundamental

Operaciones con caminos

Sea X es conexo por caminos.

Definición (Producto)

$$\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X, \sigma(1) = \tau(0) \Rightarrow \sigma * \tau(t) = \begin{cases} \sigma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tau(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

[Reescalando $\begin{cases} \sigma \text{ de } [0, 1] \text{ a } [0, 1/2] \\ \tau \text{ de } [0, 1] \text{ a } [1/2, 1] \end{cases}$]



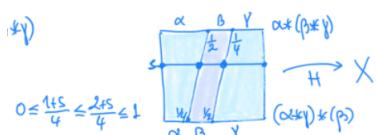
Las propiedades algebraicas son TODAS SALVO HOMOTOPÍA CON EXTREMOS FIJOS.

Proposición

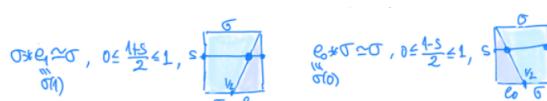
Propiedades de grupo:

1. Asociativa: $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.

En cada altura s se reescalan los caminos con junturas.



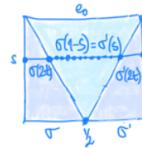
2. Neutros:



3. Inverso: $\sigma'(t) = \sigma(1-t) \Rightarrow \sigma * \sigma' \simeq e_0$ y $\sigma'' = \sigma \Rightarrow \sigma' * \sigma \simeq e_1$.

No se reescalada: $0 \leq \frac{1-s}{2} \leq \frac{1+s}{2} \leq 1$.

Las junturas dicen dónde parar σ y empezar σ' en cada altura:



4. Invarianza por homotopía:

$$\begin{cases} F_s : \sigma_1 \simeq \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \simeq \tau_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Trans.}} F_s * G_s : \sigma_1 * \tau_1 \simeq \sigma_2 * \tau_2$$

$$F_s * G_s(t) = \begin{cases} F_s(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G_s(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

El grupo fundamental

Sea X conexo por caminos, $x_0 \in X$ punto base fijo.

Definición

1. Lazo de base x_0 , $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$, $\underbrace{\sigma(0) = \sigma(1)}_{\text{lazo}} = x_0$, punto fijo.
2.
 - $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ lazos de base x_0 .
 - $H_s : \sigma \simeq \tau$ de lazos: $H_s(0) = H_s(1)$, $\forall s$.
 - $H_s = \sigma \xrightarrow{x_0} \tau$ de lazos con punto base fijo: $H_s(0) = H_s(1) = x_0$, $\forall s$. [Relativa a $\{0, 1\}$]

Definición (Grupo fundamental)

- $\pi(X, x_0) = \{\text{lazos de base } x_0\} / \xrightarrow{x_0}$. [“Lazos / homotopía”]
- $[\sigma] * [\tau] = [\sigma * \tau]$ define bien un grupo por 14.1.

Ejemplo:

1. X simplemente conexo $\Leftrightarrow \pi(X, x_0) = \{1\}$, $\forall x_0$. [\Leftarrow] ejercicio]

2. $\pi(\mathbb{S}^n, x_0) = \{1\}$, $n \geq 2$.

Demostración:

Por 1) y ser \mathbb{S}^\times , $n \geq 2$ simplemente conexa.

3. $\pi(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, x_0) = \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$.

4. $\pi(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$, $\pi(\text{banda Möbius}) = \mathbb{Z}$.

5. $\pi(\infty, x_0) = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}$ que es una lemniscata y un grupo libre no comunitativo.

El cálculo de grupos fundamentales no es una tarea trivial, pero muy útil.

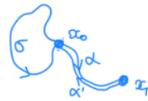
El punto base no es muy importante.

Proposición

Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de $\alpha(0) = x_0$ a $\alpha(1) = x_1$. La conjugación:

$$\begin{aligned} \pi(X, x_0) &\rightarrow \pi(X, x_1) \\ [\sigma] &\mapsto [\sigma' * \sigma * \sigma']. \end{aligned}$$

es isomorfismo de grupos.



Demostración:

Fácil con las propiedades de 14.1.

Functorialidad

Definición

Definimos h_* como:

$$\begin{aligned} h : X \rightarrow Y \text{ homeo, } h(x_0) = y_0 \Rightarrow \\ h_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0) \text{ iso.} \\ [\sigma] \mapsto [h \circ \sigma]. \end{aligned}$$

Es fácil y útil: espacios homeomorfos deben tener grupos fundamentales isomorfos.

Por ejemplo, \mathbb{S}^2 y \mathbb{RP}^2 no son homeomorfos. Pero la construcción es mucho más general.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{espacio con}\} & \xrightarrow{\pi} & \{\text{grupos}\} \\ \{\text{punto base}\} & & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{\pi(X, x_0) \text{ iso}} & \pi(Y, y_0) \\ \text{cont. } f \downarrow & \curvearrowright & \text{cont. } f \downarrow \\ (Y, y_0) & & \pi(Y, y_0) \text{ iso} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{bien definido, homeomorfismo de} \\ h_* : \sigma \cong \tau \\ f \circ \sigma \cong f \circ \tau \\ f \circ (h_* \circ \sigma) = (f \circ h)_* \circ \sigma \end{array} \right.$$

Definición (Functorialidad)

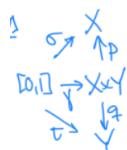
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \text{ y } (id_X)_* = id_{\pi(X, x_0)}.$$

Ejemplo:

Si $h : X \rightarrow Y$, $x_0 \mapsto y_0$ es homeomorfismo $\Rightarrow (h_*)^{-1} = (h^{-1})_*$. [Más preciso que h_* isomorfismo]

Proposición (Producto de espacios)

Tenemos que si:



entonces:

$$\begin{aligned} \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) &\xrightarrow{p_*, q_*} \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \\ [\gamma] = [(\sigma; \tau)] &\mapsto ([\sigma], [\tau]). \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración:

Sean:

$$\left. \begin{array}{l} F_s : \sigma_1 \xrightarrow{x_0} \sigma_2 \\ G_s : \tau_1 \xrightarrow{y_0} \tau_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (F_s, G_s) : (\sigma_1, \tau_1) = \gamma_1 \mapsto \gamma_2 = (\sigma_2, \tau_2) \text{ y nada más...}$$

Ejemplo:

1. $\pi(\mathbb{S} \times \mathbb{S}) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi(\mathbb{S}) = \mathbb{Z}^2$.
2. $\pi(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) = \pi(\mathbb{S}) \times \pi([0, 1])$.

Retractos

Retractos y deformaciones

Definición

Una aplicación $\rho : X \rightarrow A \subset X$ es:

1. Un retracto si $\rho|_A = id_A$ ($y A = \rho(A)$ es un retracto de X)
 2. Una deformación (fuerte) si: $\exists H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho$, homotopía relativa a A .
-

Ejemplo:

1. \forall cte : $X \rightarrow \{x_0\} \subset X$ es retracto.
2. El retracto radial $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n : x \mapsto x/\|x\|$ es una deformación. $H_s(x) = (1-s)x + s\rho(x)$.
3. $\left. \begin{array}{l} \rho : X \rightarrow A \subset X \subset \mathbb{R}^n \text{ retracto} \\ [x, \rho(x)] \subset X, \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \text{ deformación: } H_s = (1-s)id_X + s\rho \text{ (interpolación).}$
4. Cilindros:

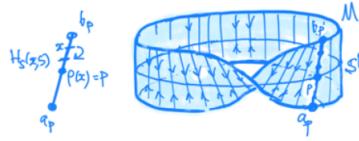
$$\begin{aligned} \rho : X \times [0, 1] &\rightarrow X \times \{0\} \\ (x, t) &\mapsto (x, 0) = \rho(x, t). \end{aligned}$$

con ρ deformación sobre X : $H_s(x, t) = \begin{pmatrix} x, & \underbrace{(1-s)t}_{(1-s)t+s \cdot 0} \\ & \end{pmatrix}$.



5. Banda de Möbius: $\mathbb{S}^1 \subset M = \bigcup_{p \in \mathbb{S}^1} [a_p, b_p]$.

Deformación sobre \mathbb{S}^1 : $\begin{cases} \rho : M \rightarrow \mathbb{S}^1 : x \mapsto \rho(x) \\ H_s(x, s) = (1-s)x + s\rho(x) \end{cases}$



Proposición

Sea $\rho : X \rightarrow A \subset X$, $a_0 \in A$; $\rho_* : \pi(X, a_0) \rightarrow \pi(A, a_0)$.

1. ρ retracto $\Rightarrow \rho_*$ suprayectivo.
2. ρ deformación $\Rightarrow \rho_*$ isomorfismo.

Demostración:

1. ρ retracto:

$$A \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_A \end{array}} X \xrightarrow{\rho} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \\ id_{\pi(A, a_0)} \end{array}} \pi(X, a_0) \xrightarrow{\rho_*} \pi(A, a_0) \xrightarrow{\begin{array}{c} j_* \text{ inyectiva} \\ \rho_* \text{ sobre} \end{array}}$$

2. ρ deformación:

$$H_s : id_X \xrightarrow{A} \rho \Rightarrow j_* \text{ sobre.} : \left\{ \begin{array}{l} [\sigma] \in \pi(X, a_0) \Rightarrow H_s \circ \sigma : \sigma \xrightarrow{A} \rho \circ \sigma = j \circ \rho \circ \sigma \\ \Rightarrow [\sigma] = [j \circ \rho \circ \sigma] = j_* [\rho \circ \sigma] \end{array} \right.$$

y por ser j_* sobre $\Rightarrow \rho_*$ inyectiva.

Ejemplo:

$$1. \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) = \pi(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \{1\}, n \geq 2 \\ \mathbb{Z}, n = 1 \end{cases}$$

$$2. \pi(\text{cilindro}) = \pi(\text{banda de Möbius}) = \pi(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Demostración:

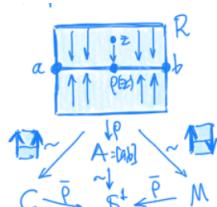
Veremos \mathbb{S}^1 ...

Cocientes

Muchos espacios son cocientes y las deformaciones se pueden hacer compatibles para facilitar las construcciones.

Ejemplo:

Cilindro $C = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ y banda de Möbius M .



Tenemos $C, M = R/$ identificaciones adecuadas de lados opuestos y, por otro lado, la deformación de R sobre $A = [a, b]$, $H_s(z) = (1 - s)z + s\rho(z) \xrightarrow{(*)}$ deformación de R/ \sim sobre $[a, b] / \sim = \mathbb{S}^1$.

Es decir, \mathbb{S}^1 es deformación de C y de M , luego todos tienen $\pi = \mathbb{Z}$.

($*$): porque p y H_s son compatibles con las relaciones: $z \sim z' \Rightarrow H_s(z) \simeq H_s(z')$, luego inducen aplicaciones continuas \bar{p} y $\bar{H}_s : R/ \sim \rightarrow A/ \sim$.

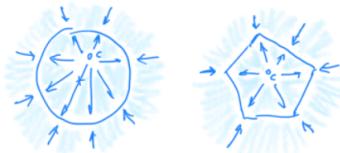
Normalmente se hacen las deformaciones pensando en que cumplan $H_s(z) \simeq H_s(z')$.

Agujeros

Conviene insistir en un ejemplo importante de deformación y sus variantes.

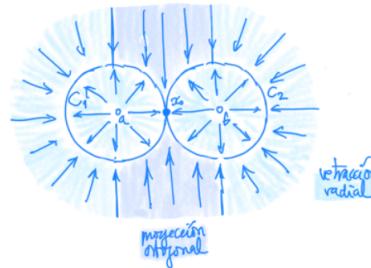
$$\begin{aligned} 1. \rho : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}_{\text{esp. con "agujero"}} &\rightarrow \mathbb{S}^n \text{ deformación} \Rightarrow \pi(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_0) = \\ &= \begin{cases} \mathbb{Z}, n = 1 (\text{se verá...}) \\ \{1\}, n \geq 2 (\mathbb{S}^n, n \geq 2 \text{ simple-conexa}) \end{cases} \end{aligned}$$

2. Dibujos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{c\}$ de retracciones sobre curvas “alrededor” del “agujero” c :



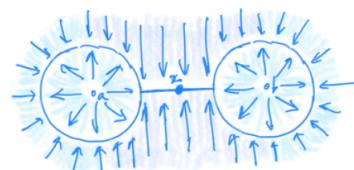
3. Dos agujeros $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}$.

Se trocea el espacio en cerrados, en cada uno de los cuáles se hace una deformación, de manera que en las fronteras coincidan. En el dibujo se sombrean diferentes las zonas en las que se usan deformaciones diferentes. Las deformaciones más cómodas son las interpolaciones de id y una retracción geométrica.



En este caso, $\rho : \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow \infty?$ es deformación y $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\infty?) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (grupo fundamental de una lemniscata).

4. Otra variante:



$\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow dibujo$ deformación dice que:

$$\pi(dibujo) = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\}, x_0) = \pi(\underbrace{\infty?}_{=\mathbb{Z} * \mathbb{Z}})$$

que es igual al grupo fundamental, pero no homeomorfismo.

5. Aún más ejemplos así (ya sin especificar el punto base):

$$\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{a, b, c\}) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \pi(dibujo) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

Demostración: (creo)

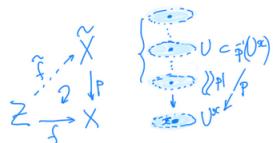
Cualesquiera tres puntos en \mathbb{R}^2 se pueden recolocar con homeomorfismos para hacer, a partir de ellos, retracciones sobre las curvas dibujadas, no homeomorfas. (?)

Ejercicio: Deformar $\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}$ sobre una circunferencia, para obtener $\pi(\mathbb{RP}^2 \setminus \{a\}) = \mathbb{Z}$.

Recubridores

El problema de elevación

Fijada p , qué f 's tienen elevación \tilde{f} . i.e: $p \circ \tilde{f} = f$



Definición

p es un recubridor si $\forall x \in X$, $\underbrace{\exists U^x}_{\text{ab. trivializante}} : p^{-1}(U^x) = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda}$ y $\forall \lambda, p| : U_{\lambda} \rightarrow U^x$ homeomorfismo.

Es un tipo especial de homeomorfismo local sobrejetivo y, por eso, identificación abierta.

Ejemplo: (Importantes!)

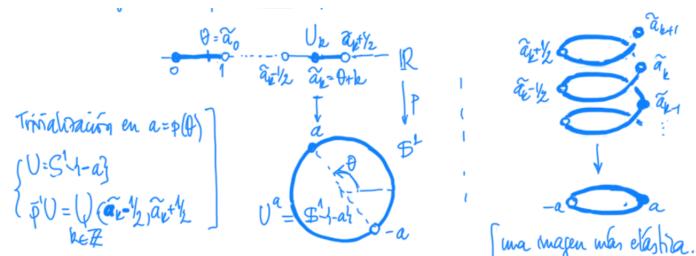
1. La identificación antipodal, $\pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{RP}^n$,

$$\forall x \in \mathbb{RP}^n \quad \underbrace{\exists U^x}_{\text{trivializante}} = \mathbb{RP}^n \setminus \underbrace{H}_{\text{hiperplano}} \quad \wedge \quad \pi^{-1}(U^x) = \mathbb{S}^n \setminus \pi^{-1}H = S_+ \sqcup S_-$$

hemisferios abiertos.

Ya se ilustró convenientemente en su lección. ¿Qué se tiene para $n = 1$?

2. La identificación exponencial, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 : \theta \mapsto e^{2\pi i \theta} = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$.



Unicidad de elevación

Proposición

Si Z es conexo, dos elevaciones que coinciden en algún puntos son iguales.

Demostración:

$$A = \{z \in Z : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)\}, p \circ \tilde{f}_1 = f.$$

$$\begin{aligned} \underbrace{x}_{f(z)} \in U^x, p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización)} \Rightarrow \tilde{f}_i(z) \in p^{-1}U^x \wedge \exists! \lambda_i : \tilde{f}_i(z) \in U_{\lambda_i} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z = \tilde{f}_1^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \tilde{f}_2^{-1}(U_{\lambda_2}) : \hat{f}_1(\eta) = \hat{f}_2(\eta) \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 (**). \end{aligned}$$

(*) debido a:

- \Rightarrow) U_{λ} 's disjuntos.
- \Leftarrow) $p\tilde{f}_1 = p\tilde{f}_2$ y $p|_{U_{\lambda}}$ 1-1.

Por tanto,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Ab.}}_A W^z \subset A \text{ si } z \in A : \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \wedge \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} = U_{\lambda_2} \xrightarrow[p|]{\text{iny.}} \underbrace{U^x}_{\text{iny.}} \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta), \tilde{f}_2(\eta) \mapsto \tau?(z) \Rightarrow \tilde{f}_1(\eta) = \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Cerr.}}_A W^z \subset Z \setminus A \text{ si } z \notin A : \tilde{f}_1(z) \neq \tilde{f}_2(z) \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \tilde{f}_1(W^z) \cap \tilde{f}_2(W^z) \subset U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} = \emptyset \\ \Rightarrow \forall \eta \in W^z : \tilde{f}_1(\eta) \neq \tilde{f}_2(\eta). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\exists \tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z) \Rightarrow \emptyset \neq A \underset{\text{cerr.}}{\subset} Z \text{ conx.} \Rightarrow A = Z \wedge \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$$

Lema de elevación

Proposición

Tenemos que:

$$\begin{cases} f = H : Y \times [0, 1] \rightarrow X \text{ (homotopía)} \\ \exists \tilde{H}_0 \text{ elevación de } H_0 : Y \rightarrow X \end{cases} \Rightarrow \exists \tilde{H} \text{ elevación, } (\tilde{H})_0 = \tilde{H}_0$$

Demostración:

1. Elevación semilocal: $\forall y \in Y, \tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ elevación de $H|_{V^y \times [0, 1]}$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \{y\} \times [0, 1] \subset \bigcup_x H^{-1}(U^x), p^{-1}U^x = \bigsqcup_{\lambda} U_{\lambda} \text{ (trivialización en } x) \Rightarrow \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \exists 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1 : \{y\} \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \xrightarrow{\text{comp.}} \forall i, \exists V_i^y \times [t_{i-1}, t_i] \subset H^{-1}(U^{x_i}) \\ & \Rightarrow \exists V^y = V_1^y \cap \dots \cap V_r^y : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \stackrel{(*)}{\subset} H^{-1}(U^{x_i}). \end{aligned}$$

b) Inducción, $i > 0 : \exists \tilde{H}_0 : V^y \times \{t_0\} \rightarrow \tilde{X}$ por hipótesis.

$$\begin{aligned}
 & \underline{i-1 \rightarrow i : \exists H_{i-1}^y \text{ en } V^y \times [t_0, t_{i-1?}] \Rightarrow \text{se puede extender a } V^y \times [t_{i-1}, t_i]} \\
 (*) \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} H(y, t_{i-1}) \in U^{x_i} \xrightarrow{\exists \lambda} \tilde{H}_{i-1}^y(y, t_{i-1}) \in U_\lambda \xrightarrow{\text{red. } V^y} \\ \hat{H}_{i-1}^y(V^y \times (t_{i-1})) \subset U_\lambda \rightarrow U^{x_i} \\ \exists (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H : V^y \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow U_\lambda \text{ elevación (de } H) \end{array} \right. \\
 \Rightarrow & p \circ \tilde{H}_{i-1}^y = p \circ [(p|_{U_\lambda}^{-1} \circ H)] : V^y \times \{t_{i-1}\} \rightarrow U^{x_i} \\
 \xrightarrow{p|_{U_\lambda} \text{ iny.}} & \tilde{H}_{i-1}^y = (p|_{U_\lambda})^{-1} \circ H \text{ en } V^y \times \{t_{i-1}\} \\
 \Rightarrow & (p|_{U_\lambda}^{-1}) \circ H \text{ extiende } \tilde{H}_{i-1}^y \text{ a } V^y \times [t_{i-1}, t_i].
 \end{aligned}$$

2. Elevación global. Las locales $\{\tilde{H}^y : V^y \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}\}_{y \in Y}$ encolan bien, pues coinciden en las intersecciones: $\forall y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$:

Observación:

1. La elevación de una aplicación $Y \rightarrow X$ sólo depende de su clase de homotopía.
2. Todo camino $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$ tiene una única elevación $\tilde{\sigma}$ con origen $\tilde{\sigma}(0) \in p^{-1}(\sigma(0))$.

$$\left. \left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}^{y_1}(y, \bullet) \\ \tilde{H}^{y_2}(y, \bullet) \end{array} \right\} \text{ elevan } H(y, \bullet) : \{y\} \times [0, 1] \\ \tilde{H}^{y_1}(y, 0) = \tilde{H}_0(y) = \tilde{H}^{y_2}(y, 0) \text{ 1er paso ind.} \right\} \xrightarrow{\text{Uni. elevación.}} \tilde{H}^{y_1}(y, t) = \tilde{H}^{y_2}(y, t), \forall z$$

Cálculos mediante recubridores

Aplicaciones en dimensión 2

Más aplicaciones por el mismo precio

Superficies

Clasificación de superficies

Grande finale
