Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
TRABAJO PRÁCTICO 11: Grupos Abelianos

Dea G un grupo. El **centro** $Z(G)$ de G es el subconjunto de todos los elementos de G que conmutan con los demás (todo elemento conmuta trivialmente consigo mismo). Demuestra que $Z(G)$ es un subgrupo de G.

normal.

$$a, b \in Z(G),\ c \in G,\quad ab^{-1}c = ab^{-1}cbb^{-1} \underset{b\in Z(G)}{=} ab^{-1}bcb^{-1} \underset{a\in Z(G)}{=} cab^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in Z(G) \Rightarrow Z(G) < G$$

$$c \in G:\ \forall a \in Z(G),\ ac = ca \Rightarrow c\cdot Z(G) = Z(G)\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(G) \triangleleft G$$

Dado un grupo G, el orden de un elemento $a \in G$, $\operatorname{ord}(a)$, es el mínimo natural k tal que $a^k = e$, donde e es el neutro de G. Calcula el orden de los elementos de $\mathbb{Z}_n^*$ para $n = 8, 11, 17$. Indica generadores para cada uno de estos grupos.

$\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad \operatorname{ord}(1)=1,\ 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \text{ mód } 8 \Rightarrow \operatorname{ord}(3)=\operatorname{ord}(5)=\operatorname{ord}(7)=1$

Sistemas minimales de generadores: $\{3,5\}, \{5,7\}, \{3,7\}$

$\mathbb{Z}_{11}^* = \{1, \dots, 10\}$ (Potencias de 2)

$\mathbb{Z}_{11}^*$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
$(\mathbb{Z}_{10},+)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
ord:	10	5	10	5	2	5	10	5	10	1
gen:	✓	×	✓	×	×	×	✓	×	✓	×

$\mathbb{Z}_{17}^* = \{1, \dots, 17\}$

$\mathbb{Z}_{17}^*$	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1
$(\mathbb{Z}_{16},+)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	0
ord :	16	8	16	4	16	8	16	2	16	8	16	4	16	8	16	1
gen :	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×	✓	×

Demuestra que el orden de un grupo finito G es un número primo si y sólo si G no tiene subgrupos propios (es decir, sus únicos subgrupos son $\{e\}$ y G).

$\boxed{\Rightarrow}$ $S < G \Rightarrow |S| \mid |G| = p$ primo $\Rightarrow$

$\Rightarrow |S| \in \{1, p\} \Rightarrow$ $S = \{e\}$ ó $S = G$

$\boxed{\Leftarrow}$ $a \in G - \{e\} \Rightarrow \langle a \rangle \neq \{e\} \Rightarrow \langle a \rangle = G \Rightarrow G$ cíclico

$\Rightarrow G = \mathbb{Z}_n$, sin subgrupos propios sii n primo

Indica cuáles son grupos, justificando tu respuesta.

1. $G = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ con el producto.

2. $G = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(R) \mid MM^t = I\}$ con el producto.

3. $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$ con la composición.

4. $G = \mathbb{R}$ con la operación $x * y = x + y - \frac{2}{5}$.

5. $G = \{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{x-1}, \frac{x-1}{x}\}$ con la composición de funciones.

(1) $4 \in G$, pero $\nexists\, 4^{-1} \in G \Rightarrow$ no grupo

(2) Vale con ver que es subgrupo de $Gl(2) = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid \exists M^{-1}\}$

$$A, B \in G \Rightarrow A^{-1} = A^t,\ B^{-1} = B^t$$

$$(AB^{-1})(AB^{-1})^t = (AB^t)(AB^t)^t = AB^t(B^t)^t A^t = AB^t B A^t = A I A^t =$$

$$= AA^t = I \Rightarrow \text{Sí},\ G < Gl(2)$$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / $f(x) = 0\ \forall x$ no tiene inversa $\Rightarrow$ no grupo.

(4) Asociativa: $(x*y)*z = \left(x+y-\frac{2}{5}\right)*z = x+y-\frac{2}{5}+z-\frac{2}{5} = x*\left(y+z-\frac{2}{5}\right) =$

$$= x*(y*z)$$

Neutro: $x * \frac{2}{5} = x + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = x \Rightarrow \frac{2}{5}$ es neutro

Simétrico: $x*y = x+y-\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \boxed{y = x - \frac{4}{5}}$

Sí es grupo

(5) La asociativa se cumple para la composición de funciones. Hay que ver que la operación es cerrada. Para ello hacemos la tabla de la operación:

$g \backslash f$	x	$1-x$	$1/x$	$1/(1-x)$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
x	x	$1-x$	$1/x$	$1/(1-x)$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x-1}{x}$
$1-x$	$1-x$	x	$1/(1-x)$	$1/x$	$\frac{x-1}{x}$	$\frac{x}{x-1}$
$1/x$	$1/x$	$\frac{x-1}{x}$	x	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{1}{1-x}$	$1-x$
$1/(1-x)$	$1/(1-x)$	$\frac{x}{x-1}$	$1-x$	$\frac{x-1}{x}$	$1/x$	x
$x/(x-1)$	$x/(x-1)$	$\frac{1}{1-x}$	$\frac{x-1}{x}$	$1-x$	x	$1/x$
$(x-1)/x$	$\frac{x-1}{x}$	$1/x$	$\frac{x}{x-1}$	x	$1-x$	$\frac{1}{1-x}$

$f(g(x))$

El neutro es claramente x.

Como x aparece en todas las filas, todo elemento tiene recíproco