Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
TRABAJO PRÁCTICO 7 Algoritmo de Euclides.

Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de 1020 y 1596 y una identidad de Bezout.

$12 = 36 \cdot 1020$ [illegible] $23 \cdot 1596$

1596		1	0
1020		0	1
576	1	1	-1
444	1	-1	2
132	1	2	-3
48	3	-7	11

$\rightsquigarrow$

36	2	16	-25
12	1	-23	36
0			

Sean a, b y c tres elementos de un anillo conmutativo con unidad. Demuestra que si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(mb + nc)$ para todos m y n en el anillo.

$a|b \Leftrightarrow \exists\, x \,/\, ax = b$
$a|c \Leftrightarrow \exists\, y \,/\, ay = c$ $\Rightarrow mb + nc = max + nay = (mx + ny)a$

$\Rightarrow a | (mb + nc)$

El perverso Gárgamel tiene una pócima casi preparada que le permitirá capturar a todos los pitufos. Sólo le falta agregar exactamente 150ml de esencia de pitufresas. Su problema es que el regalito sorpresa que pitufo bromista le dejó antes de escapar la última vez explotó y ahora sólo tiene dos calderos (en uno de los cuales está preparando la pócima), el frasco de 2 litros de esencia de pitufresas y dos tubos de ensayo, uno de 39ml y otro de 117ml. ¿Conseguirá Gárgamel, a base de meter y quitar tubos de ensayo llenos de esencia de pitufresas al caldero vacío, los 120ml exactos que necesita? ¿Cómo? Justifica tu respuesta

$mcd\,(117, 39) = 39 \nmid 120, 150, 2000-120, 2000-150$

$\Leftrightarrow$ No hay manera de que

$a \cdot 117 + b\,39 \in \{120, 150, 2000-120, 2000-150\}$

$\Rightarrow$ No puede hacer la pócima

Calcula un máximo común divisor y una identidad de Bezout para los polinomios $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ y $g(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x$ en $\mathbb{Z}_2[x]$.

$x^5+x^3+x^2+x$		1	0
$x^4+x^3+x^2+1$		0	1
x^3+1	$x+1$	1	$x+1$
x^2+x	$x+1$	$x+1$	x^2
$x+1$	$x+1$	$\boxed{x^2}$	$\boxed{x^3+x^2+x+1}$
0			

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^3+x^2+x & x^4+x^3+x^2+1 \\ -(x^5+x^4+x^3+x) & x+1 \\ \hline x^4+x^2 & \\ -(x^4+x^3+x^2+1) & \\ \hline x^3+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+x^2+1 & x^3+1 \\ -(x^4+x) & x+1 \\ \hline x^3+x^2+x+1 & \\ -(x^3+1) & \\ \hline x^2+x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+1 & x^2+x \\ -(x^3+x^2) & x+1 \\ \hline x^2+1 & \\ -(x^2+x) & \\ \hline x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+x & x+1 \\ -(x^2+x) & x \end{array}$$

Calcula el máximo común divisor y una identidad de Bezout de $f = x^5 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ y $g = x^4 + 2$ en $\mathbb{Z}_3[x]$.

$x^5+x^3+2x^2+x+1$		1	0
x^4+2		0	1
x^3+2x^2+2x+1	$\cancel{x}$	1	$2x$
$2x^2+1$	$x+1$	$\boxed{2x+2}$	$\boxed{x^2+x+1}$
0	$2x+1$		

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^3+2x^2+x+1 & x^4+2 \\ -(x^5+2x) & x \\ \hline x^3+2x^2+2x+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+2 & x^3+2x^2+2x+1 \\ -(x^4+2x^3+2x^2+x) & x+1 \\ \hline x^3+x^2+2x+2 & \\ -(x^3+2x^2+2x+1) & \\ \hline 2x^2+1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+2x+1 & 2x^2+1 \\ -(x^3+2x) & 2x+1 \\ \hline 2x^2+1 & \end{array}$$