Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
TRABAJO PRÁCTICO 9: Ecuaciones diofánticas lineales y anillos cociente

Una ecuación diofántica es aquella que se plantea sólo para encontrar las soluciones enteras. Considera la ecuación

$$ax + by = c,$$

donde x e y son las incógnitas y $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Es obvio que para que una ecuación así tenga solución, $d = \text{mcd}(a, b)$ debe dividir a c. De ese modo, si $d = ua + vb$ es una identidad de Bezout, es claro que $x = uc/d$, $y = vc/d$ es una solución de la ecuación. Además, si (x_0, y_0) es una solución entera, entonces las otras soluciones enteras son de forma $(x_0 - k\beta, y_0 + k\alpha)$, con $k \in \mathbb{Z}$, y donde $\alpha = a/d$ y $\beta = b/d$. Halla todas las soluciones positivas de la ecuación: $117x + 65y = 1300$.

117		1	0
65		0	1
52	1	1	-1
13	1	-1	2
0	4		

$\Rightarrow \text{mcd}(65, 117) = 13 = 2 \cdot 65 - 117$

$x_0 = -1300$, $y_0 = 2600$ $\Rightarrow$ $x = -1300 + 5k > 0$, $y = 2600 - 9k > 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $k > \frac{+1300}{5} = 260$, $k < \frac{2600}{9} = 288.8\overline{8}$ $\Leftrightarrow$ $k \in \{261, 262, \dots, 288\}$

Determina los representantes en $\mathbb{Z}_{100}$ de 983274, 97593 y 127984267.

Halla todas las raices de $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2$ y $g(x) = x^7 - x$ en $\mathbb{Z}_7$.

$f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(2)$

Halla los inversos de 2 y 4 en $\mathbb{Z}_{15}$

$1 = 2 \cdot 8 - 15 \Rightarrow [2]_{15}^{-1} = [8]_{15}$

$1 = 4 \cdot 4 - 15 \Rightarrow [4]_{15}^{-1} = [4]_{15}$

Halla todos los elementos de $\mathbb{Z}_{22}$ que tienen inverso (es decir, halla $\mathbb{Z}_{22}^*$).

$\mathbb{Z}_{22}^* = \{1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21\}$, pues $22 = 2 \cdot 11$

Lo mismo para $\mathbb{Z}_{37}$

37 es primo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_{37}^* = \mathbb{Z}_{37} - \{0\}$

Sean $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $a \equiv b (\text{mód } m)$ y $a \equiv b (\text{mód } n)$. Demuestra que $a \equiv b (\text{mód } \text{mcm}(m, n))$.

$$\boxed{\begin{array}{l} a-b = mx \\ a-b = ny \end{array}}$$

Si $d = mcd(m,n) \Rightarrow$

$\Rightarrow mcm(m,n) = \frac{m \cdot n}{d}$

$\hookrightarrow mx = ny \Rightarrow \frac{n}{d} \mid x$ y $\frac{m}{d} \mid y \Rightarrow$

$\Rightarrow mx = ny = \frac{mn}{d} \cdot \alpha \Rightarrow a-b = mcm(m,n) \cdot \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow a \equiv b \mod (mcm(m,n))$

Resuelve la ecuación $5x \equiv 6$ (mód19).

$5 \cdot 4 = 20 \equiv 1$ mód $19 \Rightarrow$

$x = 5 \cdot 4x \equiv 6 \cdot 4 = 24 \equiv 5$ mód 19

Prueba que $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ es un subanillo de $\mathbb{C}$. ¿Es un ideal? Demuestra que 2 es irreducible en A. ¿Es 2 primo en A (Indicación: Multiplica $1 + \sqrt{-3}$ por su conjugado)?

$\alpha, \beta \in A \Rightarrow \alpha = a + b\sqrt{-3}$, $\beta = c + d\sqrt{-3}$ $\Rightarrow \alpha - \beta = (a-b) + (b-d)\sqrt{-3}$

$\alpha \cdot \beta = (ac - 3bd) + (ad + cb)\sqrt{-3}$

$\alpha - \beta \in A$ $(\Rightarrow A$ subgrupo$)$

$\alpha \cdot \beta \in A$

$\Rightarrow A$ subanillo

Factoriza como producto de irreducibles el polinomio $f = 4x^2 - 4x + 8$ en los anillos $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Z}_{11}[x]$.

$4x^2 - 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 128}}{8} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-7}}{2} \notin \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f = 2^2(x^2 - x + 2)$ en $\mathbb{Z}[x]$

f irred. en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$

$f = 4(x-7)(x-5)$

unidad

Halla los polinomios irreducibles (luego primos) de grado menor o igual que 4 en $\mathbb{Z}_2[x]$.

$\boxed{x,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x^3+x^2+1}$, $\boxed{x^4+x+1,\ x^4+x^3+1,}$

Sin raíces

$\boxed{x^4+x^3+x^2+x+1}$

$\hookrightarrow$ Sin raíces y no divisibles por x^2+x+1