FEDFED ∠H

Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS 2019-2020
TRABAJO PRÁCTICO 4: EDOs de primer orden
(variables separadas y lineales)

variables separadas

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t} \quad \ln|t|^{-1}$$

integrando prop.

$$\ln|y| = \underbrace{-\ln|t|}_{} + C, \ C \in \mathbb{R}$$

tomando exponenciales

Resolvamos la EDO lineal de primer orden siguiente: $\frac{dy}{dt} = y' = -\frac{y}{t}$

$$y' + \frac{y}{t} = 3t. \tag{1}$$

$= 0$ (homogénea asociada)

Para ello, consideramos la solución de la ecuación homogénea asociada. Sea esta

$$y(t) = K y_H(t) = K \frac{1}{t}$$

con $K \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. Consideremos la función $y_p(t) = c(t)y_H(t)$ (con $c(t)$ función en t aún sin conocer). Sustituyendo $y = y_p$ en (1), y sabiendo que $y_H(t)$ es solución de la ecuación homogénea asociada, obtenemos que $c'(t)$ viene determinado por la fórmula

$$y_p' + \frac{y_p}{t} = (c(t)y_H(t))' + \frac{c(t)y_H(t)}{t} = c'(t)\underbrace{y_H(t)}_{1/t} + c(t)\Big(\underbrace{y_H'(t) + \frac{y_H(t)}{t}}_{0}\Big) = 3t \iff c(t) = \int_0^t 3u^2\,du$$

$y_H(t)$ es sol. de la homogénea asociada

Halla **una única** función $c(t)$ en dichas condiciones, y calcula $y_p(t)$. Deducir finalmente la solución general de (1).

$$c(t) = \int 3u^2\,du = t^3$$

$$y(t) = y_p(t) + K y_H(t), \quad K \in \mathbb{R}$$

$$y_p(t) = c(t) \cdot y_H(t) = t^3 \cdot \frac{1}{t} = t^2$$

$$y(t) = t^2 + K\frac{1}{t}; \quad K \in \mathbb{R}$$

solución general de (1)

Determinar la **única solución** de (1) tal que $y(1) = 2$.

$$y(1) = 1^2 + K\frac{1}{(1)} = 2 \iff K = 1$$

$$\hookrightarrow \quad y(t) = t^2 + \frac{1}{t}$$

única solución de (1) tal que $y(1) = 2$

$x' - x/t = -1/(1+t^2)$

Resuelve los siguientes problemas de valor inicial y contorno:

1. $tx' + \frac{t}{1+t^2} = x; x(1) = 5.$

dividimos entre t

$$x' + \frac{1}{1+t^2} = \frac{x}{t}$$

EDO lineal 1.er orden

• Homogénea asociada:

$$x' = \frac{x}{t} \rightsquigarrow \boxed{x_H(t) = t}$$

• Solución particular completa:

$$C(t) = \int \frac{-1/(1+t^2)}{t}\,dt = -\int \frac{dt}{t(1+t^2)} =$$

$$A(1+t^2) + t(Bt+C) = 1 \Leftrightarrow A = 1;\ B = -1;\ C = 0$$

$$= -\int \frac{\cancel{A}^{1}}{t}\,dt - \int \frac{\cancel{B}^{-1}t + \cancel{C}^{0}}{1+t^2}\,dt =$$

$$= -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|1+t^2| = \ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right)$$

Luego $x_p(t) = t\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right)$

$$x(t) = t\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right) + kt;\ k\in\mathbb{R}$$

$$5 = x(1) = 1\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{(1)^2+1}}{(1)}\right) + k(1)$$

$$\Leftrightarrow k = 5 - \ln|\sqrt{2}|$$

Sol.: $x(t) = t\ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right) + (5 - \ln(\sqrt{2}))t$

2. $y'x^2\operatorname{sen}(y) = 1; \lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{\pi}{2}.$

$$\operatorname{sen}(y)\,dy = \frac{dx}{x^2}$$ variables separadas

integrando

$$-\cos(y) = -\frac{1}{x} + C' \quad (C'\in\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \arccos\left(\frac{1}{x} + C'\right),\ C'\in\mathbb{R}$$

$$\underset{x\to\infty}{\lim} y(x) = \arccos\left(\cancel{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}^{0} + C'\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow C' = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Sol.: $y(x) = \arccos(1/x)$

La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt}(t) = kx(t)$$

nos dice que la variación en el tiempo de una cantidad $x(t)$ es proporcional a si misma.

- Cuando k es positiva, siendo el valor inicial de $x(t)$ también positivo, entonces dx/dt también lo es, y aumenta. En este caso, tenemos un *problema de crecimiento.*
- Por otro lado, si k es negativa, siendo el valor inicial de $x(t)$ positivo, entonces dx/dt es negativo, y por tanto $x(t)$ decrece. Tenemos un *problema de decrecimiento.*

Supongamos ahora que la cantidad de bacterias en un cierto cultivo se incrementa de manera proporcional al número de bacterias presentes en cualquier instante. Suponiendo que se tiene una cantidad inicial de 30000 bacterias, determinar el problema de valores iniciales que describe la población $x(t)$ de bacterias con respecto al tiempo t (el cual vamos a suponer en segundos). Si la cantidad inicial de bacterias aumenta un 50% tras 30 segundos, ¿en cuánto tiempo se espera tener 3 veces dicha cantidad inicial?

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = kx(t) \\ x(0) = 30000 \end{cases}$$ problema de valores iniciales

variables separadas

$$\frac{dx}{x} = k\,dt$$

$$\ln|x| = kt + C'$$

$$\Leftrightarrow x(t) = k'\cdot e^{kt};\ k, k'\in\mathbb{R}$$

$$x(30) = 45000$$

$$x(0) = k' = 30000$$

$$x(30) = k'\cdot e^{30k} = 45000$$

$$\Leftrightarrow k = \ln|3/2|/30$$

$$\rightsquigarrow x(t) = 90000 = k'e^{kt} \Leftrightarrow t = 30\cdot\frac{\ln|3|}{\ln|3/2|}$$ segundos