Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
TRABAJO PRÁCTICO 4: E.D.O. de primer orden.

Resolvamos la EDO lineal de primer orden:

$$y' = 3y + 3t + 2. \tag{1}$$

Para ello consideramos la solución de la ecuación homogénea:

$$x(t) = e^{3t}$$

Ahora consideremos la función $y_0 = c(t)x(t)$ (con $c(t)$ aún sin conocer). Substituyendo $y = y_0$ en (1), y sabiendo que $x(t)$ satisface la ecuación homogénea, obtenemos:

$$c'(t)x(t) = 3t + 2$$

Halla $c(t)$ y calcula $y_0(t)$.

$$c(t) = \int \frac{t+2}{x(t)}\,dt = \int (3t+2)e^{-3t}\,dt =$$

$$u = t+2 \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^{-3t}dt \Rightarrow v = \frac{-e^{-3t}}{3}$$

$$= \frac{-(3t+2)e^{-3t}}{3} + \int e^{-3t}\,dt = \frac{-3te^{-3t}}{3} - \frac{2e^{-3t}}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} = -te^{-3t} - e^{-3t}$$

$$y_0(t) = x(t)\cdot c(t) = -t - 1$$

Cualquier solución de (1) es de forma $y(t) = y_0(t) + kx(t)$. Calcula k para que $y(0) = 2$

$$y(t) = -t - 1 + ke^{3t}$$

$$y(0) = -1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = -t - 1 + 3e^{3t}$$

Resuelve los siguientes problemas de valor inicial y contorno:

$y'(x) - 3x^2 y(x) = x^5$, $y(0) = 1$

$u(x) =$ solución de la homogénea $= e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$

$y(x) = c(x) \cdot u(x) \Rightarrow c'(x) \cdot u(x) = x^5 \Rightarrow c(x) = \int x^5 e^{-x^3} dx =$ ~~partes~~

$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$

$dv = x^2 e^{-x^3} dx \Rightarrow v = \frac{-e^{-x^3}}{3}$

$= \frac{-x^3 e^{-x^3}}{3} + \int \cancel{3} x^2 \frac{e^{-x^3}}{\cancel{3}} dx = \left(\frac{-x^3}{3} - \frac{1}{3}\right) e^{-x^3}$

$\Rightarrow y_p(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{1}{3}$

$y(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{1}{3} + k e^{x^3} \Rightarrow y(0) = \frac{-1}{3} + k = 1 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{-x^3}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} e^{x^3}}$

$y' x^3 = y^2$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{\pi}{4}$

$\Updownarrow$

$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x^3} \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{-1}{2x^2} + k \Rightarrow y = \frac{2x^2}{1 - 2kx^2}$

$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{-1}{k} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow k = \frac{-4}{\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{2x^2}{1 - \frac{4}{\pi} 2x^2} = \frac{2\pi x^2}{\pi - 8x^2}}$