Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Informática
Curso 2021 – 2022

Computación Cuántica
Markel Álvarez Martínez

Hoja de problemas 3

1.

2.
$\sigma_1^z\sigma_2^z \left|\tilde{\psi}\right\rangle =?$
$\sigma_2^z\sigma_3^z \left|\tilde{\psi}\right\rangle =?$

$$|0_L\rangle = |GHZ+\rangle^{\oplus 3} = |GHZ+\rangle_{123} \otimes |GHZ\rangle_{456} \otimes |GHZ\rangle_{789}$$

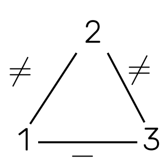
$$|1_L\rangle = |GHZ-\rangle^{\oplus 3} = |GHZ-\rangle_{123} \otimes |GHZ\rangle_{456} \otimes |GHZ\rangle_{789}$$

$$|GHZ\pm\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle \pm |111\rangle)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^z\sigma_2^z \left|\tilde{\psi}\right\rangle &= \frac{\varphi_0}{\sqrt{8}}\sigma_1^2\sigma_2^2(|010\rangle + |101\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle) \\ &+ \frac{\varphi_1}{\sqrt{8}}\sigma_1^2\sigma_2^2(|010\rangle - |101\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle) = \\ &= -\left|\tilde{\psi}\right\rangle \end{aligned}$$

De la misma manera se ve que $\begin{cases} \sigma_1^2\sigma_2^2 \left|\tilde{\psi}\right\rangle = -\left|\tilde{\psi}\right\rangle \\ \sigma_2^2\sigma_3^2 \left|\tilde{\psi}\right\rangle = \left|\tilde{\psi}\right\rangle \end{cases}$

Conclusión:



El error está en el qubit 2.

3. El código Shor promete corregir un error de un bit, puede corregir hasta tres siempre que estén en bloques diferentes. También promete corregir un error de fase o tres siempre que estén en el mismo bloque.

Sean C_1 y C_2 dos códigos (clásicos) $[n, k_1]$, $[n, k_2]$ tales que $C_2 \subset C_1$ y C_1, $C_2^\perp$ ambos tienen una distancia mínima $\geq 2t+1$, donde $C_2^\perp$ es el código dual para C_2. Posteriormente, definimos $CSS(C_1, C_2)$, el código CSS de C_1 sobre C_2 como el código $[n, k_1 - k_2, d]$ con $d \geq 2t+1$ de la siguiente manera:

- $x \in C_1 : |x + C_2\rangle := 1/\sqrt{|C_2|}\sum_{y \in C_2} |x + y\rangle$, donde $+$ es la suma bit a bit módulo 2. Por lo tanto, $CSS(C_1, C_2)$ se define como $\{|x + C_2\rangle | x \in C_1\}$.

Un ejemplo distinto al código Shor es el código Steane. El código de 9 qubits no es demasiado efectivo porque cuesta demasiado usarlo para proteger 1 solo qubit, por lo que en 1996 Andrew Steane propuso un código cuántico que hace uso de 7 qubits para codificar 1 qubit. Este código utiliza el código binario clásico [7,4,3] de Hamming para corregir los errores de *qubit flip* (errores X) y el código dual de Hamming, el código [7,3,4], para corregir los errores de cambio de fase (errores Z). El código Steane es capaz de corregir errores arbitrarios de un solo qubit.

El código Steane se forma utilizando la construcción CSS:

$$|0_L\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}(|0000000\rangle + |0001111\rangle + |0110011\rangle + |0111100\rangle + |1010101\rangle + |1011010\rangle + |1100110\rangle + |1101001\rangle)$$

$$|1_L\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}(|1111111\rangle + |1110000\rangle + |1001100\rangle + |1000011\rangle + |0101010\rangle + |0100101\rangle + |0011001\rangle + |0010110\rangle)$$

4. La computación cuántica tolerante a fallos se refiere al marco de ideas que permiten proteger los qubits de la cuántica errores introducidos por control deficiente o interacciones ambientales (Corrección de errores cuánticos, QEC) y el diseño apropiado de circuitos cuánticos para implementar tanto QEC como operaciones lógicas codificadas de manera de evitar estos errores en cascada a través de circuitos cuánticos. La introducción de redundancia es la clave para lograr la tolerancia a fallos y hay dos tipos de posibles redundancias: 1) redundancia computacional, donde el mismo cálculo se repite secuencialmente para múltiples veces; 2) redundancia de recursos, donde múltiples procesos son abstraído como un único proceso lógico y los procesos del componente se ejecutan en paralelo.

   El teorema del umbral cuántico establece que un computador cuántico con una tasa de error físico por debajo de cierto umbral puede, mediante la aplicación de esquemas de corrección de errores cuánticos, suprimir la tasa de error lógico a niveles arbitrariamente bajos. Esto muestra que los computadores cuánticos pueden hacerse tolerantes a fallos, como un análogo al teorema del umbral de von Neumann para la computación clásica.

La pregunta clave que resuelve el teorema del umbral es si los computadores cuánticos en la práctica podrían realizar cálculos largos sin sucumbir al ruido. Dado que un computador cuántico no puede realizar operaciones de puertas cuánticas a la perfección, es inevitable algún pequeño error constante; hipotéticamente, esto podría significar que los computadores cuánticos con puertas imperfectas solo pueden aplicar un número constante de puertas antes de que el ruido destruya el cálculo.

Un circuito cuántico en n qubits y que contiene $p(n)$ puertas puede simularse con una probabilidad máxima de error ε usando puertas $O(\log^c(p(n)/\varepsilon)p(n))$ (para alguna constante c) en hardware cuyos componentes fallan con una probabilidad máxima p, siempre que p esté por debajo de algún umbral constante ($p < p_{th}$) y dadas suposiciones razonables sobre el ruido en el hardware subyacente.

Las estimaciones actuales ponen el umbral para el código de superficie en el orden del 1%, aunque las estimaciones varían ampliamente y son difíciles de calcular debido a la dificultad exponencial de simular grandes sistemas cuánticos. Con una probabilidad del 0,1% de un error de despolarización, el código de superficie requeriría aproximadamente 1000-10000 qubits físicos por qubit de datos lógicos, aunque más tipos de errores patológicos podrían cambiar esta cifra drásticamente.