FDFFDXH

Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS 2019-2020
TRABAJO PRÁCTICO 10: Grupos Abelianos

Demostrar que un grupo G es abeliano si, y sólo si, se tiene que $Z(G) = G$. Prueba que todo subgrupo de $Z(G)$ es normal. Concluye que todos los subgrupos de un grupo abeliano son normales.

G es abeliano $\overset{\text{def. abel.}}{\iff}$ Dado $x \in G$ es $xg = gx,\ \forall g \in G$ $\overset{\text{def. centro}}{\iff}$ $x \in Z(G),\ \forall x \in G$

$G \subseteq Z(G)$

$\boxed{\supseteq}$ obvio

$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx,\ \forall x \in G\}$. Sea $H \leq Z(G)$. $\underset{\text{def. centro}}{\Rightarrow}$

$\underset{\text{def. centro}}{\Rightarrow}$ $xHx^{-1} \in H$ (def. normal) $\rightsquigarrow$ En un grupo abeliano todos los subgrupos son normales

Dado un grupo G arbitrario, el orden de un elemento $g \in G$ es el mínimo natural k tal que $g^k = 1$. Vamos a denotar este por $o(g)$. Demuestra que para todo $r \in \mathbb{N}$ es

$$r \cdot \overset{n}{o(g^r)} = \boxed{\frac{o(g)}{mcd(o(g), r)}} \overset{m}{\cdot} r = mcm(o(g), r)$$

Calcula el orden de todos los elementos en $\mathbb{Z}_n^*$ para los valores $n \in \{4, 13, 25\}$. ¿Son grupos cíclicos? $\boxed{\text{SI}}$ Indica generadores para cada uno de estos grupos en caso afirmativo. $\hookrightarrow$ orden 2: primo, todos son generadores (salvo el neutro)

$$(g^r)^m = g^{mcm(o(g), r)} = 1 \Rightarrow n \mid m$$

$$\left.\begin{array}{l} r \mid r \cdot n \\ o(g) \mid r \cdot n \end{array}\right\} \Rightarrow mcm(o(g), r) \mid r \cdot n \Rightarrow m \mid n$$

$\hookrightarrow$ pues $g^{r \cdot n} = (g^r)^n \underset{\text{def.}}{=} 1$.

Luego $n = m$

$\mathbb{Z}_{13}^* = \{1, 2, 3, \dots, 12\} \rightarrow \varphi(13) = 12 \rightsquigarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \langle 1 \rangle \text{ orden } 1 \\ \langle 12 \rangle \text{ orden } 2 \\ \langle 3 \rangle \text{ orden } 3 \end{array}\right.$ $\langle 5 \rangle$ orden 4, $\langle 4 \rangle$ orden 6, $\langle 2 \rangle$ orden 12

generadores $\rightarrow \{2, 6, 11\}$

$\mathbb{Z}_{25}^* = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, \dots, 19, 21, 22, 23, 24\} \rightarrow \varphi(5^2) = 20$

$\langle 1 \rangle$ orden 1, $\langle 24 \rangle$ orden 2, $\langle 7 \rangle$ orden 4, $\langle 6 \rangle$ orden 5, $\langle 19 \rangle$ orden 10, $\langle 17 \rangle$ orden 20

generadores $\rightarrow \{2, 3, 8, 12, 13, 17, 22, 23\}$

Demuestra que todo grupo de orden primo es cíclico a la fuerza. Prueba también que todo grupo cíclico es necesariamente abeliano.

Sea G t.q. $|G| = p$ primo.
Consideremos $g \in G$ no trivial.
Por el Teorema de Lagrange $\Rightarrow |\langle g \rangle| \mid |G| = p \Rightarrow |\langle g \rangle| = p$
$\hookrightarrow$ luego $\langle g \rangle = G$. cíclico

Dado G cíclico, $\exists g \in G$ t.q. $G = \langle g \rangle$.

Entonces $\forall x, y \in G$; $\exists n, m \in \mathbb{N}$ t.q. $x = g^n$; $y = g^m$

Luego: $x \cdot y = (g^n) \cdot (g^m) = g^{n+m} \underset{\mathbb{Z} \text{ abeliano}}{=} g^{m+n} = (g^m) \cdot (g^n) = y \cdot x$

$\hookrightarrow$ G abeliano

Indica cuáles de los siguientes conjuntos son grupos, indicando el orden en los casos tales que estos sean finitos. ¿Son abelianos? ¿Y cíclicos?

(1) $\{A \in \mathbf{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \mathbf{det}(A) = \pm 1\}$ con el producto de matrices usual. SI es grupo
↳ no abeliano

(2) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \circ)$ tal que $(a, b) \circ (c, d) := (a + c, 2cb + d)$ para $a, c \in \mathbb{Z}$ y $b, d \in \mathbb{Q}$.
No es grupo.

(3) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ con la suma definida por componentes. SI es grupo (producto directo de grupos)
↳ abeliano, pero no cíclico (obvio)

(4) El subgrupo de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por las matrices

SI es grupo, no abeliano (diédrico)

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) $G = \{a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, aba = b\}$. SI es grupo, no abeliano (cuaternios)

pues $\det Id = 1$ La asociatividad es inmediata.

(1) $Id \in \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = \pm 1\}$ (elemento neutro)

$\forall A \in$, $\exists B \in$ t.q. $A \cdot B = Id$. A saber: $B = A^{-1}$
(pues $\det A^{-1} = 1/\det A$)

No abeliano:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \#$$

$\Rightarrow$ no cíclico
(todo cíclico es abeliano)

(2) Dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ arbitrario, buscamos $(c,d) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, \circ)$ t.q.
↳ único!

$(a,b) \circ (c,d) = (a + c, 2cb + d) = (a, b)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = b \end{cases}$

⇝ Luego $\nexists$ elemento neutro $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No es grupo}}$.

(4) $\langle a, b \rangle = \{Id, a, b, a^2, a^3, ab, a^2b, a^3b\}$ grupo
no abeliano: $ab = -a^3b = -ba$.

(5) $G = \{Id, -Id, a, -a, b, -b, ab, -ab\}$ grupo
no abeliano: $a \cdot b = -b \cdot a$