ADAD2H

Apellidos y Nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS 2019-2020
TRABAJO PRÁCTICO 1: Sucesiones y series de funciones

definición convergencia uniforme

Sea $f_n(x) = (n+3)^{-(x-5)}$. Prueba que para todo $a > 5$ la sucesión anterior converge uniformemente en $[a,\infty)$, pero no así en $[5,\infty)$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_\varepsilon$ es $|f_n - f| < \varepsilon$

Calculamos el límite puntual en $[5,\infty)$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{puntual}} \begin{cases} 1 & \text{si } x=5 \\ 0 & \text{si } x>5 \end{cases}$ ① $\rightsquigarrow f_n \xrightarrow[\text{pt.}]{n\to\infty} 0$ en $[a,\infty)$, $\forall a>5$

continuas $\forall n \in \mathbb{N}$ — no continua

¿uniforme? Candidato a límite uniforme: $\underline{f \equiv 0}$

(si existe el límite uniforme, este coincide con el puntual)

TR. continuidad ↳ Luego NO puede haber convergencia uniforme en $[5,\infty)$

Sea $\varepsilon > 0$, y consideremos $N_\varepsilon = \lceil 1/\varepsilon \rceil \in \mathbb{N}$.

Entonces $\forall n \geq N_\varepsilon$ es ($\leq n+3$)

$|f_n - f| = \left| \frac{1}{(n+3)^{x-5}} \right| \leq$

$\leq \left| \frac{1}{N_\varepsilon^{x-5}} \right| < \varepsilon^{x-5} < \underline{\underline{\varepsilon}}$

si $\varepsilon \geq 1$ ↳ $N_\varepsilon = 1 \Rightarrow$ obvio

$0<\varepsilon<1$ obivo

$\forall x > 5$

(Examen Febrero de 2012)

1. Estudia la convergencia para la sucesión de funciones

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

continuas

en el intervalo $[1,2]$.

2. Calcula

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n} dx.$$

Pista: Estudiar convergencia uniforme en $[a,2]$ con $2>a>1$

1. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{puntual}} f \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } x=1 \\ -1 & \text{si } x\in(1,2] \end{cases}$ no continua

TR. continuidad. ↳ Luego No puede haber convergencia unif. en $[1,2]$.

2. Veamos que $f_n(x)$ es $\underline{\underline{\text{decreciente}}}$ para cada $n\in\mathbb{N}$ en el intervalo dado.

$f_n'(x) = \frac{-nx^{n-1}(1+x^n) - (1-x^n)nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = -\frac{2nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \leq 0$

$\forall x \in [1,2], \forall n \in \mathbb{N}$

⊙ ↳ Luego $f_n(x)$ es decreciente para cada $n\in\mathbb{N}$ fijo

$\begin{cases} f_n(1) = 0 \\ f_n(2) = \frac{1-2^n}{1+2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \end{cases}$ (serie numérica que decrece en n) $\rightarrow |f_n()| \geq -1$

siguiente cara ⊛

Por tanto:

$|f_n(x) - f| = \left| \frac{1-x^n}{1+x^n} + 1 \right| \overset{⊙}{\leq} \frac{1-a^n}{1+a^n} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{\forall x\in[a,2]} 0$ $\rightsquigarrow$ Hay convergencia uniforme en $[a,2]$ con $a>1$

Escribe en forma de serie la integral $\int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t^a}dt$ para $x > 1$.

$$\frac{e^{-t^2}}{t^a} \underset{\text{serie exponencial}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(-1)^n \cdot \frac{t^{2n-a}}{n!}}_{f_n(t)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$$

$$g_n(t) = \begin{cases} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n-a+1} - 1}{n!\,(2n-a+1)} & \text{si } a \neq 2n+1 \\ (-1)^n \cdot \dfrac{\ln|x|}{n!} & \text{si } a = 2n+1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|f_n(t)| \le \frac{1}{x^a}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{!} \equiv M_n^x \rightsquigarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} M_n^x < \infty$$ serie numérica convergente

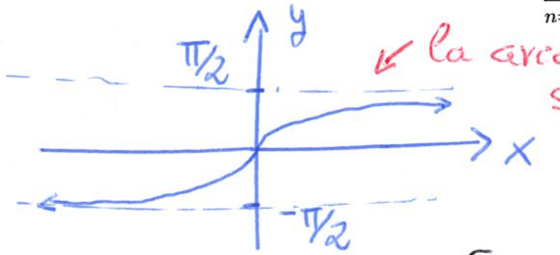
Criterio M de Weierstrass ↳ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ es convergente

T.R. integrabilidad ↳ Podemos conmutar suma e integral

$$\int_1^x \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_1^x (-1)^n \cdot \frac{t^{2n-a}}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(t)$$ siendo

Estudia la convergencia puntual y uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^2x^3 - nx + \pi)}{2^n}$. $\equiv \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$

gráfica de la función $y = \arctan(x)$



la arcotangente está acotada superiormente por $\pi/2$!!

$$|f_n(x)| \le \frac{\pi/2}{2^n} = \overbrace{\frac{\pi}{2^{n+1}}}^{a_n} \rightsquigarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \underset{\text{serie geométrica}}{=} \frac{\pi/4}{1 - 1/2} = \frac{\pi}{2} < \infty$$

↳ Por el Criterio M de Weierstrass, la serie es uniformemente convergente (en particular, puntualmente convergente).

⊛ Aplicando el Teorema de Integrabilidad:

Ejer. 2

$$-1 \underset{\text{pues } \int_1^a \frac{1-x^n}{1+x^n}dx \ge -1}{\le} \lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}dx \underset{\text{pues } 0 \ge \frac{1-x^n}{1+x^n}}{\le} \lim_{n\to\infty} \int_a^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}dx \underset{\text{conv. uniforme}}{=} \int_a^2 \lim_{n\to\infty} \overbrace{\cancel{\frac{1-x^n}{1+x^n}}}^{-1} dx = \quad \forall a > 1$$

$$= \left(-x\right|_a^2 = -2 + a \rightsquigarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{1-x^n}{1+x^n}dx = -1}$$

como esto es cierto $\forall a > 1$, tomando el límite con $a \to 1^+$ y la regla del Sandwich