Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
TRABAJO PRÁCTICO 5: E.D.O. de segundo orden.

Resolvamos la EDO lineal de segundo orden:

$$y'' - y' - 2y = t^2. \tag{1}$$

Para ello, consideramos la Ecuación homogénea y su polinomio característico:

$\lambda^2 - \lambda - 2$, cuyas raices son: $\lambda_1 = 2$ $\quad \lambda_2 = -1$

Las soluciones de la ecuación homogénea son:

$x_1(t) = e^{2t}$ $\quad x_2(t) = e^{-t}$

Ahora consideremos la función $y_0 = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ (con c_1 y c_2 aún sin conocer). Substituyendo $y = y_0$ en (1), sabiendo que x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación homogénea y suponiendo que obtenemos una ecuación más débil que el sistema:

$$\left.\begin{aligned} c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) &= t^2 \\ c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Resuelve el sistema por Cramer e integra las soluciones para obtener c_1 y c_2, y por tanto y_0

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} t^2 & -e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & -e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix}} = \frac{t^2 e^{-t}}{3e^{t}} = \frac{t^2}{3} e^{-2t} \Rightarrow c_1(t) = \int \frac{t^2}{3} e^{-2t} dt = ①$$

$u = \frac{t^2}{3} \Rightarrow du = \frac{2t\,dt}{3}$

$dv = e^{-2t} dt \Rightarrow v = \frac{-e^{-2t}}{2}$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & t^2 \\ e^{2t} & 0 \end{vmatrix}}{3e^{t}} = -\frac{t^2 e^{2t}}{3e^{t}} = -\frac{t^2}{3} e^{t} \Rightarrow c_2(t) = \int -\frac{t^2}{3} e^{t} dt \Rightarrow ②$$

$u = \frac{-t^2}{3} \Rightarrow du = \frac{-2t\,dt}{3}$

$dv = e^{t} dt \Rightarrow v = e^{t}$

$$① = \frac{-t^2}{6} e^{-2t} + \int \frac{t e^{-2t}}{3} dt = -\frac{t^2}{6} e^{-2t} - \frac{t}{6} e^{-2t} + \int \frac{e^{-2t}}{6} dt = e^{-2t}\left(-\frac{t^2}{6} - \frac{t}{6} - \frac{1}{12}\right)$$

$u = \frac{t}{3} \Rightarrow du = \frac{dt}{3}$

$dv = e^{-2t} dt \Rightarrow v = \frac{-e^{-2t}}{2}$

$$② = -\frac{t^2}{3} e^{t} + \int \frac{2t e^{t}}{3} dt = \left(-\frac{t^2}{3}\right) e^{t} + \frac{2t}{3} e^{t} - \int \frac{2e^{t}}{3} dt = e^{t}\left(-\frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3} - \frac{2}{3}\right)$$

$u = \frac{2t}{3} \Rightarrow du = \frac{2dt}{3}$

$dv = e^{t} dt \Rightarrow v = e^{t}$

$$\Rightarrow y_0(t) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t}{6} - \frac{1}{12} - \frac{t^2}{3} + \frac{2t}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$$

Por tanto, cualquier solución de (1) será de la forma $y(t) = y_0(t) + kx_1(t) + lx_2(t)$. Determina k y l para que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ (no tiene por qué haber una solución "bonita").

$$y(t) = \frac{-t^2}{2} + \frac{t}{2} - \frac{3}{4} + k e^{2t} + l e^{-t} \Rightarrow y(0) = \frac{-3}{4} + k + l = 1$$

$$y'(t) = -t + \frac{1}{2} + 2ke^{2t} - le^{-t} \qquad y'(0) = \frac{1}{2} + 2k - l = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{4} + 3k = 3 \Rightarrow k = \frac{13}{12} \Rightarrow l = 1 + \frac{3}{4} - \frac{13}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Resuelve:

$$2y'' + 2y = t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

$$y'' + y = \frac{t}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = i \Rightarrow \begin{array}{l} X_1(t) = \cos(t) \\ X_2(t) = \operatorname{sen}(t) \end{array}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(t)\, c_1'(t) + \operatorname{sen}(t)\, c_2'(t) = 0 \\ -\operatorname{sen}(t) c_1'(t) + \cos(t)\, c_2'(t) = t \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(t) \\ t/2 & \cos(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(t) & \operatorname{sen}(t) \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{t}{2}\operatorname{sen}(t)}{1} = -\frac{t}{2}\operatorname{sen}(t)$$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(t) & 0 \\ -\operatorname{sen}(t) & t/2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{\frac{t}{2}\cos(t)}{1} = \frac{t}{2}\cos(t)$$

$$c_1(t) = -\int \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t)\, dt = +\frac{t}{2}\cos(t) - \int \frac{\cos(t)\,dt}{2} = +\frac{t}{2}\cos(t) - \frac{\operatorname{sen}(t)}{2}$$

$u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = \operatorname{sen}(t)\, dt \Rightarrow v = -\cos(t)$

$$c_2(t) = \int \frac{t}{2}\cos(t)\, dt = \frac{t}{2}\operatorname{sen}(t) - \int \frac{\operatorname{sen}(t)\,dt}{2} = \frac{t\operatorname{sen}(t)}{2} + \frac{\cos(t)}{2}$$

$u = t \Rightarrow du = dt$

$dv = \cos(t)\,dt \Rightarrow v = \operatorname{sen}(t)$

$$\Rightarrow y_p(t) = \frac{t}{2}\cos^2(t) - \frac{\operatorname{sen}(t)\cos(t)}{2} + \frac{t}{2}\operatorname{sen}^2(t) + \frac{\cos(t)\operatorname{sen} t}{2} =$$

$$= t$$

$$y(t) = t + k\cos(t) + l\operatorname{sen}(t) \Rightarrow \begin{array}{l} y(0) = k = 0 \\ y'(0) = 1 + l = 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$y'(t) = 1 - k\operatorname{sen}(t) + l\cos(t)$$

$$\Rightarrow k = 0 = l \Rightarrow y(t) = t$$