ADADKH

Apellidos y nombre

**AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS 2019-2020**
**TRABAJO PRÁCTICO 6: La transformada de Laplace.**

Vamos a resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} 2y'' - 16y' + 32y = 4e^{2t} + t; \\ y(0) = 1, y'(0) = 2. \end{cases}$$

Para ello, hacemos **transformada de Laplace** a los dos lados, y obtenemos lo siguiente:

$-y'(0) - a \cdot y(0)$

$$P(s)\tilde{y}(s) + \underbrace{k}_{-y(0)}s + \boxed{l} = \mathcal{L}\left[2e^{2t} + \frac{t}{2}\right](s),$$

donde

$(s-4)^2$

$$P(s) = s^2 - 8s + 16 = s^2 + as + b$$

es el polinomio característico de la EDO, siendo $k, l \in \mathbb{R}$ e $\tilde{y}(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. De hecho, no resulta complicado obtener que

usando la tabla de transformadas inversas

$$k = -1, l = 6 \quad \text{y } \mathcal{L}\left[2e^{2t} + \frac{t}{2}\right](s) = \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2s^2}.$$

Despeja la función $\tilde{y}(s)$ de la ecuación que se acaba de obtener.

$$\tilde{y}(s) = \frac{2s^4 - 16s^3 + 28s^2 + s - 2}{2s^2(s-2)(s-4)^2} = \frac{s^4 - 8s^3 + 14s^2 + s/2 - 1}{s^2(s-2)(s-4)^2}$$

Descompón ahora $\tilde{y}(s)$ en fracciones simples.

$$\tilde{y}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s-4} + \frac{E}{(s-4)^2} \,//$$

fracciones simples

$$A = 1/64;\ B = 1/32;\ C = 1/2;\ D = 31/64,\ E = -31/32$$

Halla (usa la tabla dada en el reverso) la correspondiente transformada inversa de $\tilde{y}(s)$ para obtener la solución del problema de valores iniciales dado. A saber,

$$y(t) = \frac{1}{64} + \frac{t}{32} + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{31}{64}e^{4t} - \frac{31}{32}te^{4t}$$

solución de la ecuación homogénea asociada a nuestra EDO

Usa las soluciones de la ecuación homogénea asociada y la solución particular anteriores para resolver ahora el problema de valores iniciales tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

misma solución particular

Solución particular de nuestra EDO

$$y(t) = \frac{1}{64} + \frac{t}{32} + \frac{1}{2}e^{2t} + \boxed{k}e^{4t} + \boxed{l}t$$

$$\rightsquigarrow y(0) = \frac{1}{64} + \frac{1}{2} + k = 0 \iff k = \frac{-33}{64}$$

$$\rightsquigarrow y'(0) = \frac{1}{32} + 1 + 4k + l = 0 \iff l = \frac{33}{32}$$

Las soluciones de la ecuación característica asociada a una cierta EDO de segundo orden lineal con coeficientes constantes del tipo

$$y'' + ay' + by = e^{-t+2}$$

$\lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{14}\, i$

raíces del polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$

son

$$y_1^H(t) = e^t \cos\left(\sqrt{14}t\right) \text{ e } y_2^H(t) = e^t \sin\left(\sqrt{14}t\right).$$

Encuentra dicha ecuación diferencial, y resuelve **usando la transformada de Laplace** el problema de valores iniciales tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Nuestra EDO: $\begin{cases} y'' - 2y' + 15y = e^{-t+2} \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$

$$\underbrace{(\lambda - (1+\sqrt{14}i)) \cdot (\lambda - (1-\sqrt{14}i)) = \lambda^2 - 2\lambda + 15 = P(\lambda)}$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$P(s)\, \tilde{y}(s) = e^2 \mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{e^2}{s+1}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{y}(s) = \frac{e^2}{(s+1)(s^2-2s+15)} =$$

$$= e^2 \left( \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{\boxed{s^2 - 2s + 15}} \right)$$

$s^2-2s+15 = (s-1)^2 + (\sqrt{14})^2$

$\leadsto$ fracciones simples: $A = \frac{1}{18}$; $B = -\frac{1}{18}$; $C = \frac{1}{6}$

## Tabla de transformadas de Laplace

| | |
|---|---|
| $\delta(t)$ | $1$ |
| $1$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |

| | |
|---|---|
| $\operatorname{sen} \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $e^{-at} \operatorname{sen} \omega t$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| $e^{-at} \cos \omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| $t^n e^{-at}$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |

Luego, usando la tabla:

$$y(t) = \underbrace{\frac{e^2}{18} e^{-t}}_{\text{Solución particular}} + \overbrace{\frac{e^2}{9\sqrt{14}} e^t \operatorname{sen}(\sqrt{14}t) - \frac{e^2}{18} e^t \cos(\sqrt{14}t)}^{\text{Solución de la Ecuación homogénea asociada}}$$