ADADAH

Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS 2019-2020
TRABAJO PRÁCTICO 5: EDOs de segundo orden
(lineales con coeficientes constantes)

Resolvamos la EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes dada por

$$y'' + ay' + by = f(t). \qquad (1)$$

Para ello, consideramos la ecuación homogénea asociada y su polinomio característico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b.$$

$\hookrightarrow P(\lambda) = 0 \iff \lambda = \dfrac{-a \pm \sqrt{\boxed{a^2-4b}}}{2}$ $\boxed{a^2-4b} = \Delta$ discriminante — el signo de este valor nos determina el número de raíces de $P(\lambda)$

Vamos a distinguir tres casos:

(i) Si $a = 5$ y $b = 0$ entonces las raíces de $P(\lambda)$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -5$. Así pues, las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada son

$\hookrightarrow$ raíces reales distintas

$$y_1^H(t) = e^{0\cdot t} = 1 \qquad \text{e } y_2^H(t) = e^{-5t}.$$

(ii) Si $a = -4$ y $b = 4$ entonces las raíces de $P(\lambda)$ son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$. Así pues, las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada son

$\hookrightarrow$ raíces reales iguales

$$y_1^H(t) = e^{-2t} \qquad \text{e } y_2^H(t) = te^{-2t}.$$

(iii) Si $a = 0$ y $b = 4$ entonces las raíces de $P(\lambda)$ son $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_2 = -2i$. Así pues, las soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada son

$\hookrightarrow$ raíces complejas conjugadas

$$y_1^H(t) = \operatorname{sen}(2t) \qquad \text{e } y_2^H(t) = \cos 2t.$$

Vamos ahora a restringirnos al caso (iii) con $f(t) = \sin(t)$ y consideremos

$$y_p(t) = c_1(t)\underbrace{y_1^H(t)}_{\operatorname{sen}(2t)} + c_2(t)\underbrace{y_2^H(t)}_{\cos(2t)}.$$

Sustituyendo $y = y_p$ en (1), sabiendo que y_1^H y y_2^H son soluciones de la ecuación homogénea asociada, por el **método de** variación de constantes, obtenemos el sistema

A matriz del sistema

$$\begin{cases} c_1'(t)\underbrace{y_1^{H\prime}(t)}_{2\cos(2t)} + c_2'(t)\underbrace{y_2^{H\prime}(t)}_{-2\operatorname{sen}(2t)} = f(t) = \operatorname{sen}(t); \\ c_1'(t)\underbrace{y_1^H(t)}_{\operatorname{sen}(2t)} + c_2'(t)\underbrace{y_2^H(t)}_{\cos(2t)} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

$\boxed{\det A = 2}$

Resuelve el sistema e integra las soluciones para obtener c_1 y c_2.

Regla de Cramer

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} t & -2\operatorname{sen}(2t) \\ 0 & \cos(2t) \end{vmatrix}}{2} = \operatorname{sen} t \cos(2t)/2$$

(•) integrando $\hookrightarrow c_1(t) = \left(\dfrac{\cos t}{2} - \dfrac{\cos^3 t}{3}\right)$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 2\cos(2t) & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen}(2t) & 0 \end{vmatrix}}{2} = -\operatorname{sen} t \operatorname{sen}(2t)/2$$

(*) integrando $\hookrightarrow c_2(t) = -\dfrac{\operatorname{sen}^3 t}{3}$

(*) $\int \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(2t)\, dt = \int \cos t \cdot 2\operatorname{sen}^2 t\, dt = 2\int u^2\, du = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 t + C$ — $\operatorname{sen}(2t) = 2\operatorname{sen} t \cos t$ fórmulas trigonométricas; $u = \operatorname{sen} t$; $du = \cos t\, dt$ cambio de variable

(•) $\int \operatorname{sen} t \cos(2t)\, dt = -\int (1 - 2\cos^2 t)\operatorname{sen} t\, dt = -\int (2u^2 - 1)\, du = \left(\cos t - \frac{2\cos^3 t}{3}\right) + C$ — $\cos(2t) = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$; $1 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t$; $u = \cos t$, $du = -\operatorname{sen} t\, dt$

Obtén una solución particular de (1).

$$\leftarrow \quad y_p(t) = \left(\frac{\cos t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\operatorname{sen}(2t) - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\cos(2t)$$

$$y_p'(t) = \left(\cos^2 t \operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} t}{2}\right)\operatorname{sen}(2t) + 2\left(\frac{\cos t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\cos(2t) - \cos^2 t \operatorname{sen}^2(t)\cos(2t) + \frac{2\operatorname{sen}^3 t \operatorname{sen}(2t)}{3}$$

En resumen, tenemos que **cualquier solución de (1) en el caso (iii)** es de la forma

$$y(t) = y_p(t) + ky_1^H(t) + ly_2^H(t) = \left(\frac{\cos t}{2} - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\operatorname{sen}(2t) - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3}\cos(2t) + \cancel{k}^{5/6}\, \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) + \cancel{l}^{1}\cos(2t)$$

con $k, l \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Determina k y l para que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

$$\begin{cases} 1 = y(0) = 0 + k\cdot 0 + l \iff l = 1 \\ 2 = y'(0) = 1/3 + 2k + l\cdot 0 \iff k = 5/6 \end{cases}$$

Prueba que si $f(t)$ es un polinomio de grado 2 arbitrario, entonces una solución particular de (1) con $b \neq 0$ es otro polinomio de grado menor o igual que 2. **Resuelve** el **problema de Cauchy** correspondiente al **caso (ii)** para $f(t) = t^2$ con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$.

- Demostración: $A, B, C \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} b \quad & y_p(t) = (At^2 + Bt + C)\, b \\ a \quad & y_p'(t) = (2At + B)\, a \\ & y_p''(t) = 2A \quad + \\ \hline & f(t) = 2A + 2aAt + aB + bAt^2 + bBt + bC \end{aligned}$$

$$\overset{\text{hip.}}{=}\ \tilde{A}t^2 + \tilde{B}t + \tilde{C} \iff \begin{cases} A = \tilde{A}/b \\ B = (\tilde{B} - 2aA)/b \\ C = (\tilde{C} - B - 2A)/b \end{cases} \blacksquare$$

tiene sol. única pues $b \neq 0$

$$y'' - 4y' + 4y = t^2$$

Sol. particular: $y_p(t) = At^2 + Bt + C$; donde $A = 1/4$; $B = 1/2$; $C = 3/8$

$$y(t) = t^2/4 + t/2 + 3/8 + \cancel{k}^{-3/8} e^{-2t} + \cancel{l}^{5/4}\, t e^{-2t}, \quad k, l \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 0 = y(0) = 3/8 + k \iff k = -3/8 \\ 1 = y'(0) = 1/2 - 2k + l \iff l = 5/4 \end{cases}$$

Prueba que si $f(t) = Ae^{\alpha t}\sin(\beta t)$ con $A \in \mathbb{R}$ una cierta constante, donde $\alpha \pm i\beta$ **NO son raices** del polinomio característico, entonces una solución particular de (1) es del tipo $e^{\alpha t}(B\sin(\beta t) + C\cos(\beta t))$ con otras constantes $B, C \in \mathbb{R}$. **Resuelve** el **problema de contorno** correspondiente al **caso (i)** para $f(t) = 14e^{-t}\sin(2t)$ con $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. ¿Qué pasa si además se añade la condición $y(0) = 1$?

- Demostración:

$$\begin{aligned} b \quad & y_p(t) = (A e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t))\, b \\ a \quad & y_p'(t) = (\alpha A e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t) - \beta A e^{\alpha t}\cos(\beta t))\, a \\ & y_p''(t) = \begin{cases} (\alpha^2 A \operatorname{sen}(\beta t) - \alpha\beta A e^{\alpha t}\cos(\beta t)) \\ (\alpha\beta A e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta^2 A \operatorname{sen}(\beta t)) \end{cases} + \\ \hline & f(t) \rightsquigarrow \begin{cases} B = A + \alpha A + \alpha^2 A + \beta^2 A \\ C = -(A\beta + 2\alpha\beta A) \end{cases} \\ & \ \| \\ & e^{\alpha t}(B\operatorname{sen}(\beta t) + C\cos(\beta t)) \end{aligned}$$

solución única $\blacksquare$

$$y'' + 5y' = 14e^{-t}\operatorname{sen}(2t)$$

Sol. particular: $y_p(t) = e^{-t}(B\operatorname{sen}(2t) + C\cos(2t))$; donde $B = 70$ y $C = 28$

$$y_p(t) = e^{-t}(70\operatorname{sen}(2t) + 28\cos(2t)) + \cancel{k} + \cancel{l}^{-27} e^{-5t}; \quad k, l \in \mathbb{R}$$

$$0 = \lim_{t\to\infty} y(t) = k \Rightarrow k = 0$$

$$1 = y(0) = 28 + l \Rightarrow l = -27$$