

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

TRABAJO PRÁCTICO 13: Cuerpos finitos

Crea un ejemplo de un cuerpo de característica 5 y 25 elementos. ¿Existe uno con 50 elementos?

$$f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f(0) \equiv 3, f(1) \equiv 4, f(2) \equiv 2, f(3) \equiv 2, f(4) \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow f \text{ irreducible} \Rightarrow \mathbb{Z}_5[x]/f, \text{ cuerpo de característica } 5 \text{ y } 25 \text{ elementos}$$

$50 = 2 \cdot 5^2$ no es potencia de primo \Rightarrow no cuerpo de 50 elementos

¿Es $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 4x + 4)$ un cuerpo? ¿Y $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - x + 6)$? En los casos afirmativos indica su característica y su dimensión como espacio vectorial sobre \mathbb{Q} .

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \Rightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 4x + 4) \text{ no cuerpo}$$

$$x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6 \text{ irreducible en } \mathbb{Q}[x] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^2 - x + 6) \text{ cuerpo de característica } 0 \text{ y dimensión } 2$$

Consideramos $\alpha = [x]$ como elemento de $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + x + 2)$. Calcula el representante y, si existe, el inverso de $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha$.

$$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -x - 2$$

$$x^3 = x^2 \cdot x = (-x - 2) \cdot x = -x^2 - 2x = -(-x - 2) - 2x = x + 2 - 2x = -x + 2$$

$$x^4 = x^3 \cdot x = (-x + 2) \cdot x = -x^2 + 2x = -(-x - 2) + 2x = x + 2 + 2x = 3x + 2$$

$$\Rightarrow \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = [x^4 + x^3 + x^2 + x] =$$

$$= [3x + 2 + (-x + 2) + (-x - 2) + x] = [2x + 2] \Rightarrow [2x + 2]$$

$$\begin{array}{c|c|c} x^2+x+2 & 1 & 0 \\ 2x+2 & 0 & 1 \\ 2 & 3x & 2x \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 = (x^2+x+2) \cdot 1 + (2x+2) \cdot 2x \\ \Rightarrow 1 = (x^2+x+2) \cdot 3 + (2x+2) \cdot x \end{array} \Rightarrow [2x+2]^{-1} = [x]$$

Estudia el anillo $\mathbb{Z}_3[x]/(f)$ donde $f = x^2 + 1$. Escribe su tabla de adición y multiplicación. ¿Es un cuerpo?

+	0	1	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
0	0	1	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
1	1	2	0	x+1	x+2	x	2x+1	2x+2	2x
2	2	0	1	x+2	x	x+1	2x+2	2x	2x+1
x	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2	0	1	2
x+1	x+1	x+2	x	2x+1	2x+2	2x	1	2	0
x+2	x+2	x	x+1	2x+2	2x	2x+1	2	0	1
2x	2x	2x+1	2x+2	0	1	2	x	x+1	x+2
2x+1	2x+1	2x+2	2x	1	2	0	x+1	x+2	x
2x+2	2x+2	2x	2x+1	2	0	1	x+2	x	x+1

•	0	1	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	①	2	x	x+1	x+2	2x	2x+1	2x+2
2	0	2	①	2x	2x+2	2x+1	x	x+2	x+1
x	0	x	2x	2	x+2	2x+2	①	x+1	2x+1
x+1	0	x+1	2x+2	x+2	2x	①	2x+1	2	x
x+2	0	x+2	2x+1	2x+2	①	x	x+1	2x	2
2x	0	2x	x	①	2x+1	x+1	2	2x+2	x+2
2x+1	0	2x+1	x+2	x+1	2	2x	2x+2	x	①
2x+2	0	2x+2	x+1	2x+1	x	2	x+2	①	2x

Es cuerpo.

Calcula $[x+2]^{4850}$ en $\mathbb{Z}_7[x]/(x^2+x+2)$. \mathbb{F}

$$|\mathbb{F}| = 7^2 = 49 \Rightarrow |\mathbb{F}^*| = 48 \Rightarrow$$

$$[x+2]^{48} = [1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x+2]^{4850} = [x+2]^{48 \cdot 101 + 2} = [x+2]^2 =$$

$$= [x^2 + 4x + 4] = [3x + 2]$$