Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
TRABAJO PRÁCTICO 1: **Sucesiones y series de funciones**

Sea $f_n(x) = n^{-x}$. Prueba que para todo $a > 0$ la sucesión anterior converge uniformemente en $[a, \infty)$, pero no así en $[0, \infty)$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x}}_{\text{"}f(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ No hay convergencia uniforme en $[0,\infty)$, pues se rompe la continuidad

$$a > 0 \Rightarrow \forall\ x > a \quad f_n(x) = \frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^a} = f_n(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n^x}\right| < \frac{1}{n^a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists$ convergencia uniforme en $[a, \infty)$

(Examen de septiembre de 2014) Estudia la convergencia uniforme de $f_n(x) = \lg\left[\left(\frac{1}{1+(x-1)^2}\right)^n\right]$ en un intervalo $[a, b]$ con $a \in (0, 1)$ y $b \in (1, 2)$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \log\left[\left(\frac{1}{\underset{\underset{1}{\geq}}{1+(x-1)^2}}\right)^n\right] = \begin{cases} \log 1 = 0 & \text{si } x = 1 \\ \log 0 = -\infty & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists$ convergencia en $[a,b] - \{1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists$ conv. unif.

Escribe en forma de serie la integral $\int_0^x e^{-t^2}dt$

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!}$$ $\Rightarrow$ por el criterio M de Weierstrass, la convergencia de la serie es uniforme en $[0, x] \Rightarrow$ la integral de la serie es la serie de las integrales:

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-t^2)^n}{n!}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}}{n!} - \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1}}{n!} =}$$

Estudia la convergencia puntual y uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^2x^3 - nx + \pi)}{2^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\arctan(\sim)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi/4}{1-1/2} = \frac{\pi}{2} < \infty$$

Por el criterio M de Weierstrass, la serie converge uniformemente