Apellidos y nombre

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
TRABAJO PRÁCTICO 6: La transformada de Laplace.

Vamos a resolver El problema de valor inicial:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + 2y' + y = e^{2t} + 3 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

usando la transformada de Laplace. Para ello, hacemos la transformada de Laplace a los dos lados de la ecuación y obtenemos:

$$P(s)\tilde{y}(s) + as + b = \mathcal{L}[e^{2t} + 3](s).$$

Donde P es el polinomio característico de la EDO, $a, b \in \mathbb{R}$, y $\tilde{y}(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$. Calcula a, b y $\mathcal{L}[e^{2t} + 3](s)$.

$a = b = 1$, $\mathcal{L}[e^{2t}+3](s) = \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s}$

Despeja $\tilde{y}(s)$.

$\tilde{y} = \frac{-s^3 + s^2 + 6s - 6}{(s+1)^2(s-2)s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2} =$

Descompón $\tilde{y}(s)$ en fracciones simples.

$= \frac{(A+B+C)s^3 + (2B-C+D)s^2 + (-3A+B-2C-2D)s + 2A}{s(s-2)(s+1)^2}$

$\Rightarrow A = 3$

$B + C = -4$
$2B - C + D = 1$
$B + 2C - 2D = 15$
$\Rightarrow$ $B = \frac{1}{9}$, $C = 17/9$, $D = 8/9$ $\Rightarrow \tilde{y} = \frac{3}{s} + \frac{1/9}{s-2} + \frac{17/9}{s+1} + \frac{8/9}{(s+1)^2}$

Halla (usando la tabla del reverso de esta hoja) la transformada inversa de Laplace de $\tilde{y}(s)$ y habrás encontrado una solución del problema de valor inicial

$$y = 3 + \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{17}{9}e^{-t} + \frac{8}{9}te^{-t}$$

Usa las soluciones de la ecuación homogénea y la función y_0 para encontrar una solución tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

$y = 3 + \frac{1}{9}e^{2t} + ke^{-t} + lte^{-t}$

$0 = y(0) = 3 + \frac{1}{9} + k \Rightarrow k = -\frac{28}{9}$

$y' = \frac{2}{9}e^{2t} + \frac{28}{9}e^{-t} + le^{-t} - lte^{-t}$

$0 = y'(0) = \frac{2}{9} + \frac{28}{9} + l \Rightarrow l = \frac{-30}{9} = \frac{-10}{3}$

$$\boxed{y = 3 + \frac{1}{9}e^{2t} - \frac{28}{9}e^{-t} - \frac{10}{3}te^{-t}}$$

Resuelve usando la transformada de Laplace:

$$y'' + 2y' - 3y = 1,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$$

$$s^2\tilde{y} - 0\cdot s - 1 + 2s\tilde{y} - 0 - 3\tilde{y} = \frac{1}{s} \iff$$

$$(s-1)(s+3)\tilde{y} = \frac{s+1}{s} \iff \tilde{y} = \frac{s+1}{s(s-1)(s+3)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3} = \frac{s^2(A+B+C) + s(2A+3B-C) - 3A}{}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B+C=0 \\ 2A+3B-C=1 \\ -3A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{6} \end{array} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-3t}}$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
k cte.	$\frac{k}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ para $n \in \mathbb{Z}^+$
t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ para $a \in (-1,\infty)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ para $n \in \mathbb{Z}$
$e^{kt}t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{(s-k)^{a+1}}$ para $a \in (-1,\infty)$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{at}\sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$
$e^{at}\cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$