Esercizi sulle catene di Markov

1 Il prigioniero e la sentinella

Un prigioniero è riuscito a rubare la chiave della sua cella ed è pronto per tentare la fuga. Tuttavia egli sa che una sentinella pattuglia notte e giorno il perimetro del carcere. Il carcere è quadrato con quattro porte orientate verso i quattro punti cardinali, ciascuna nel punto medio di un lato. In ogni momento, a seconda del lato su cui si trova, la sentinella controlla una delle quattro porte. Se il prigioniero fosse così sfortunato da uscire proprio da quella porta, verrebbe sicuramente scoperto. La sentinella passeggia casualmente lungo il perimetro e ogni tanto inverte la direzione, in modo da rendere imprevedibile la propria presenza. Nel dilemma su quale porta scegliere per fuggire, il prigioniero ha raccolto le memorie di un vecchio compagno di prigionia che per lunghi anni ha potuto osservare i movimenti della sentinella. Egli gli ha confidato di aver osservato che la sentinella trascorre sempre lo stesso tempo su ogni lato del quadrato prima di cambiare lato. Inoltre il vecchio prigioniero ha osservato la frequenza con cui la sentinella si muove da ciascun lato a ciascun altro, e ha trascritto questa preziosa informazione nella tabella riportata qui sotto.

da/a	Nord	Est	Sud	Ovest
Nord	-	40%	-	60%
Est	20%	-	80%	-
Sud	-	50%	-	50%
Ovest	75%	-	25%	-

Per esempio, quando la sentinella si trova a Nord, con probabilità 40% va a Est e con probabilità 60% a Ovest.

1. Da quale delle quattro porte conviene scappare per minimizzare la probabilità di essere scoperto?
2. Qual è la probabilità di essere scoperto?

Soluzione.

Il problema richiede di calcolare le probabilità associate ai 4 possibili stati di una catena di Markov, conoscendo la frequenza delle transizioni tra di essi. Occorre quindi impostare un sistema di 4 equazioni (ne bastano 3, perché la quarta è linearmente dipendente dalle altre), che sono le equazioni di bilanciamento di ciascuno degli stati. Ad esempio per lo stato "Nord" si ha

$$P_{Nord} = P_{Est} * P_{Est-Nord} + P_{Ovest} * P_{Ovest-Nord}$$

dove $P_{Est-Nord} = 0.20$ e $P_{Ovest-Nord} = 0.75$ sono dati del problema, mentre P_{Nord}, P_{Est} e P_{Ovest} sono variabili.

Il problema ha quindi 4 variabili e 4 vincoli di uguaglianza (uno dei quali ridondante).

Bisogna infine imporre che la somma delle 4 probabilità sia pari a 1 (condizione di normalizzazione).

Il risultante sistema di 4 equazioni lineari in 4 incognite si può risolvere facilmente anche a mano o con un solutore.

Domanda 1. Le probabilità dei 4 stati risultano essere le seguenti:

- $P_{Nord} = 0.2513$
- $P_{Est} = 0.2249$
- $P_{Sud} = 0.2487$
- $P_{Ovest} = 0.2751$.

Quindi al prigioniero conviene scappare da Est.

Domanda 2. La probabilità di essere scoperto è del 22.49%.

2 Il pronto soccorso

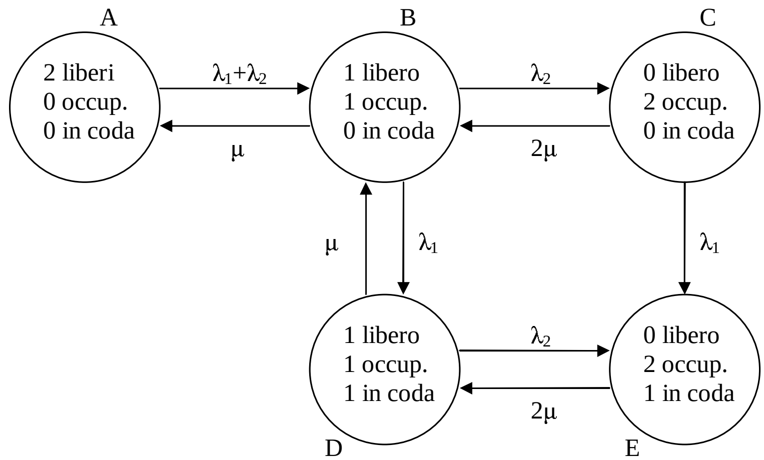
Nel pronto soccorso di un piccolo ospedale sono di turno due medici per volta. Le richieste dei pazienti vengono classificate in “urgenti” e “non urgenti”. Si vuole che non capiti mai che entrambi i medici siano impegnati simultaneamente con due pazienti non urgenti e che quindi non ci sia nessuno disponibile per trattare un eventuale paziente urgente. Infatti, una volta che il trattamento di un paziente ha avuto inizio, non può essere interrotto. Quindi il pronto soccorso funziona così: quando entrambi i medici sono liberi, qualunque tipo di paziente viene subito preso in carico; quando uno dei due medici è già impegnato, il successivo paziente in arrivo viene preso in carico immediatamente solo se è urgente, altrimenti viene fatto aspettare in sala d’attesa. Per evitare che la coda di pazienti si allunghi, il pronto soccorso avverte in tempo reale il sistema 118 in modo da dirottare altrove i nuovi pazienti in arrivo. In particolare non vengono più accettati altri pazienti urgenti se i due medici sono entrambi occupati e nemmeno altri pazienti non urgenti se ce n’è già uno in attesa. Quando gli arrivi non sono dirottati altrove, i pazienti non-urgenti arrivano con una frequenza media pari ad un paziente ogni quarto d’ora; i pazienti urgenti invece arrivano mediamente con una frequenza pari a uno ogni tre quarti d’ora. Tutti i trattamenti durano mediamente venti minuti, sia per i pazienti urgenti che non. Il direttore sanitario vuole sapere:

1. Per quale frazione di tempo il pronto soccorso risulta saturo per i pazienti urgenti?
2. Per quale frazione di tempo il pronto soccorso risulta saturo per i pazienti non urgenti?
3. Qual è la percentuale di utilizzo della forza-lavoro dei medici di turno?
4. Qual è la probabilità che un paziente non urgente venga messo in coda?
5. Come cambierebbero gli indicatori suddetti se i medici servissero sempre subito tutti i pazienti in arrivo?
6. Come cambierebbero gli indicatori suddetti se i medici fossero tre, mantenendo la politica attuale di non occupare l’ultimo medico disponibile se l’ultimo paziente arrivato non è urgente?

Soluzione.

Il problema richiede anzitutto di rappresentare il funzionamento del sistema tramite un grafo, in cui ogni nodo corrisponde ad un possibile *stato* del sistema ed ogni arco corrisponde ad una possibile *transizione di stato*. E’ poi possibile calcolare le probabilità associate ai possibili stati (indichiamo con P_i la probabilità dello stato i), conoscendo la frequenza delle transizioni tra di essi (indichiamo con $f_{i \to j}$ la frequenza di transizione dallo stato i allo stato j).

Nel nostro caso il sistema è rappresentato dal grafo in figura.



In figura le frequenze di transizione sono indicate da:

- Arrivo pazienti urgenti: $\lambda_1 = \frac{4}{3}$ pazienti/ora
- Arrivo pazienti non urgenti: $\lambda_2 = 4$ pazienti/ora
- Completamento servizio: $\mu = 3$ pazienti/ora.

La frequenza delle transizioni può essere riportata anche in una matrice con tante righe e colonne quanti gli stati, cioè 5.

f	A	B	C	D	E
A	-	$\frac{16}{3}$	0	0	0
B	3	-	$\frac{4}{3}$	4	0
C	0	6	-	0	4
D	0	3	0	-	$\frac{4}{3}$
E	0	0	0	6	-

Tabella 1: Frequenze di transizione tra gli stati.

Per ricavare le probabilità associate ad ogni stato, occorre impostare un sistema di 5 equazioni di bilanciamento tra la frequenza media di ingresso e la frequenza media di uscita da ciascuno stato (bastano quattro equazioni, perché la quinta è linearmente dipendente dalle altre). Ad esempio per lo stato B si ha:

$$P_B * (f_{B\to A} + f_{B\to C} + f_{B\to D}) = P_A * f_{A\to B} + P_C * f_{C\to B} + P_D * f_{D\to B}$$

dove i valori di f sono riportati nella tabella delle frequenze di transizione e i valori di P sono le incognite del problema.

Il problema ha quindi 5 incognite e 5 vincoli di uguaglianza (uno dei quali ridondante). Bisogna infine imporre che la somma delle 5 probabilità sia pari a 1 (condizione di normalizzazione).

Il risultante sistema di 5 equazioni lineari in 5 incognite si può risolvere facilmente anche a mano o con un solutore software.

Le probabilità dei 5 stati risultano essere le seguenti:

- $P_A \cong 0,15$
- $P_B \cong 0,28$
- $P_C \cong 0,04$
- $P_D \cong 0,42$
- $P_E \cong 0,12$.

Domanda 1. Il sistema è saturo per i pazienti urgenti (cioè non accetta ulteriori pazienti urgenti) quando si trova negli stati C ed E, il che avviene con probabilità $P_C + P_E \cong 0,15$. La frazione di tempo è quindi pari al 15% circa.

Domanda 2. Il sistema è saturo per i pazienti non urgenti (cioè non accetta ulteriori pazienti non urgenti) quando si trova negli stati D ed E, il che avviene con probabilità $P_D + P_E \cong 0,53$. La frazione di tempo è quindi pari al 53% circa.

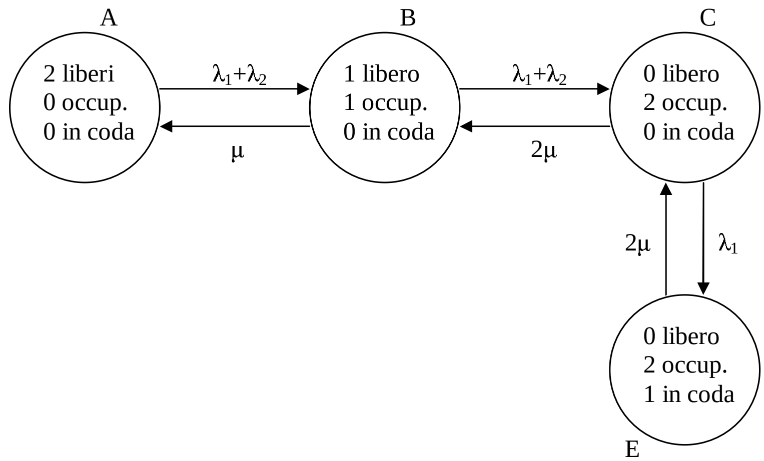
Domanda 3. La forza-lavoro disponibile non è impiegata quando il sistema si trova nello stato A, è impiegata al 50% (un medico su due) quando il sistema si trova negli stati B e D ed è impiegata al 100% quando il sistema si trova negli stati C ed E. Quindi il fattore di utilizzo dei medici è dato da

$$\rho = 0 * P_A + 0,5 * (P_B + P_D) + 1 * (P_C + P_E) \cong 0,50.$$

Domanda 4. Un paziente non urgente viene messo in coda quando al suo arrivo il sistema si trova negli stati B o C, il che accade con probabilità $P_B + P_C \cong 0,31$.

Domanda 5. Per rispondere a questa domanda occorre modificare leggermente la descrizione del sistema e ripetere poi lo stesso procedimento seguito per rispondere alle domande 1-4. Se i medici servono sempre i pazienti in arrivo, lo stato D non viene più raggiunto: all'arrivo di un paziente non urgente, se il sistema è nello stato B, passa allo stato C. Inoltre se il sistema si trova nello stato E, al completamento del trattamento di un paziente il sistema passa nello stato C, cioè il medico che si è liberato prende subito in carico il paziente che si trovava in coda.

Pertanto il grafo degli stati si modifica come segue.



La matrice delle frequenze di transizione diventa la seguente.

f	A	B	C	E
A	-	$\frac{16}{3}$	0	0
B	3	-	$\frac{16}{3}$	0
C	0	6	-	4
E	0	0	6	-

Tabella 2: Domanda 5: Frequenze di transizione tra gli stati.

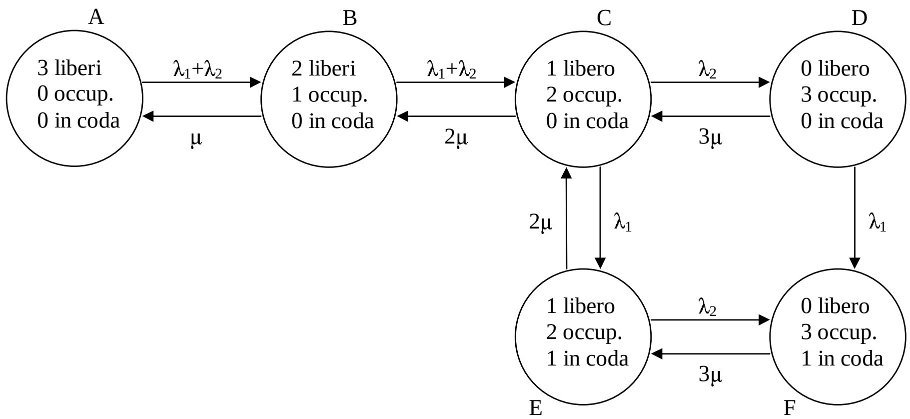
le probabilità degli stati risultano essere le seguenti:

- $P_A \cong 0,18$
- $P_B \cong 0,33$
- $P_C \cong 0,29$
- $P_E \cong 0,19$.

Pertanto le quattro risposte alle quattro domande precedenti sono in questo caso:

- Domanda 1: $P_C + P_E = 48,7\%$ circa
- Domanda 2: $P_D + P_E = 19,5\%$ circa
- Domanda 3: $\rho \cong 65,1\%$
- Domanda 4: $P_C = 0,29$ circa.

Domanda 6. Se i medici fossero tre, il grafo degli stati verrebbe modificato come segue.



La matrice delle frequenza di transizione diventerebbe la seguente.

f	A	B	C	D	E	F
A	-	$\frac{16}{3}$	0	0	0	0
B	3	-	$\frac{16}{3}$	0	0	0
C	0	6	-	$\frac{4}{3}$	4	0
D	0	0	9	-	0	4
E	0	0	6	0	-	$\frac{4}{3}$
F	0	0	0	0	9	-

Tabella 3: Domanda 6: Frequenze di transizione tra gli stati.

Le probabilità degli stati risultano essere le seguenti:

- $P_A \cong 0,17$
- $P_B \cong 0,30$
- $P_C \cong 0,27$
- $P_D \cong 0,03$
- $P_E \cong 0,20$
- $P_F \cong 0,04$.

Pertanto le quattro risposte alle quattro domande precedenti sono in questo caso:

- Domanda 1: $P_D + P_F = 7\%$ circa
- Domanda 2: $P_E + P_F = 23,7\%$ circa

- Domanda 3: $\rho \cong 47,7\%$
- Domanda 4: $P_C + P_D = 0,29$ circa.

3 Il cavallo pazzo

Su una scacchiera di 4x4 caselle, c'è un cavallo pazzo. Ad ogni mossa salta secondo le regole degli scacchi con una probabilità uguale per ciascuna mossa possibile: se ha due mosse possibili, ciascuna ha probabilità 1/2; se ne ha tre, ognuna ha probabilità 1/3 e così via.

1. Dopo un grande numero di mosse (quando l'effetto della posizione iniziale non conta più), qual è la probabilità di trovare il Cavallo nella casella in basso a sinistra?
2. Qual è la probabilità di trovarlo in una qualsiasi delle quattro caselle centrali?

Soluzione.

L'esercizio richiede di trovare le probabilità che un sistema a tempo discreto che evolve come una catena di Markov si trovi in certi stati. A questo fine è necessario associare ad ogni stato del sistema la corrispondente probabilità.

A prima vista sembra di dover esaminare un sistema con 16 possibili stati (tanti quante le caselle della scacchiera 4x4) e quindi 256 possibili transizioni. Ma sfruttando la simmetria, è chiaro che gli stati si possono ridurre a tre soli: casella d'angolo, casella centrale, casella laterale.

Quando il Cavallo è in una casella d'angolo può saltare in due modi ed in entrambi i casi termina in una casella centrale. Quando il Cavallo è in una casella laterale può saltare in tre modi: in due casi termina ancora in una casella laterale, mentre nel terzo caso termina in una casella centrale. Quando il Cavallo è in una casella centrale può saltare in quattro modi: in due casi termina in una casella d'angolo, mentre negli altri due casi termina in una casella laterale.

Dati. La matrice delle frequenza di transizione risulta quindi la seguente.

	Angolo	**Laterale**	**Centrale**
Angolo	0,00	0,00	1,00
Laterale	0,00	0,67	0,33
Centrale	0,50	0,50	0,00

Tabella 4: Matrice delle frequenze di transizione della catena di Markov.

Variabili. Le variabili del problema sono le probabilità associate ai tre possibili stati: P_A, P_L e P_C.

Vincoli. Una volta definite le frequenze di transizione, è possibile calcolare le frazioni di tempo durante le quali il sistema si trova in ciascuno degli stati possibili, risovendo il sistema delle equazioni di bilanciamento. Esse impongono che la frequenza media di ingresso e la frequenza media di uscita da ciascuno stato siano uguali. Nel nostro caso il sistema risulta dato da:

$$0,00P_A + 0,00P_L + 0,50P_C = P_A$$

$$0,00P_A + 0,67P_L + 0,50P_C = P_L$$

$$1,00P_A + 0,33P_L + 0,00P_C = P_C$$

Una delle equazioni risulta linearmente dipendente dalle altre.

A queste equazioni va aggiunta la condizione di normalizzazione delle probabilità:

$$P_A + P_L + P_C = 1.$$

Obiettivo. Il modello non ha funzione obiettivo.

Domanda 1. Risolvendo il sistema si ottengono i valori:

- $P_A = \frac{1}{6}$
- $P_L = \frac{1}{2}$
- $P_C = \frac{1}{3}$

Sempre sfruttando la simmetria, la probabilità di trovare il cavallo in una particolare casella d'angolo è pari a P_A diviso per il numero di caselle d'angolo, cioè $\frac{1}{24}$.

Domanda 2. La risposta è data direttamente da $P_C = \frac{1}{3}$.

4 Il distributore di benzina

Ad un distributore di benzina arriva mediamente un'automobile ogni minuto. Tuttavia gli automobilisti osservano la coda e decidono se restare o andarsene in cerca di un altro distributore. Si è osservato che quando c'è già un automobilista nella stazione, in media due volte su tre chi arriva decide di restare in coda; se ci sono già due automobilisti, in media una volta su tre chi arriva si mette in coda; se ci sono già tre automobilisti, nessuno più si aggiunge alla coda. Il rifornimento dura mediamente cinque minuti.

1. Quanti automobilisti ci sono mediamente nella stazione?
2. A che valore dovrebbe scendere il tempo medio di rifornimento per garantire una presenza media di non più di due automobilisti nella stazione?

Soluzione.

Il sistema descritto si può trovare in 4 possibili stati, corrispondenti al numero di veicoli presenti nella stazione: da 0 a 3. Si può quindi rappresentare il sistema come una catena di Markov con 4 stati e le transizioni tra stati corrispondenti a numeri consecutivi. Le frequenze di transizione da uno stato all'altro (espresse in veicoli/minuto) si ricavano facilmente dalla descrizione del problema: $f_{01} = 1$, $f_{12} = 2/3$, $f_{23} = 1/3$, per quanto riguarda le transizioni dovute all'arrivo di nuovi veicoli; $f_{32} = f_{21} = f_{10} = 1/5$ per quanto riguarda le transizioni dovute al completamento del servizio.

Per ricavare le quattro probabilità P associate ad ognuno dei quattro stati, occorre risolvere il sistema dato dalle equazioni di bilanciamento:

$$\begin{aligned}
&\textit{Stato } 0: P_1 f_{10} && = P_0 f_{01} \\
&\textit{Stato } 1: P_0 f_{01} + P_2 f_{21} && = P_1 (f_{10} + f_{12}) \\
&\textit{Stato } 2: P_1 f_{12} + P_3 f_{32} && = P_2 (f_{21} + f_{23}) \\
&\textit{Stato } 3: P_2 f_{23} && = P_3\ f_{32}.
\end{aligned}$$

Non c'è funzione obiettivo.

Domanda 1. Le probabilità risultano (approssimativamente): $P_0 = 0,02$, $P_1 = 0,09$, $P_2 = 0,33$, $P_3 = 0,55$. Il numero di veicoli mediamente presenti è quindi $\sum_{n=0}^{3} nP_n = 2,412$.

Domanda 2. Per rispondere a questa domanda occorre definire il tempo medio di rifornimento come variabile, anziché come dato, ed imporre un limite al numero medio di veicoli: $\sum_{n=0}^{3} nP_n \leq 2$. L'obiettivo richiede di massimizzare il tempo medio di rifornimento. Il risultato è 2,78 minuti.