

# Introduction à la théorie quantique des champs

Mathieu Markovitch

2020

*A Yoann*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction : pourquoi une « théorie quantique des champs » ?</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Rappels</b>	<b>5</b>
2.1	Mécanique analytique . . . . .	5
2.2	Relativité restreinte . . . . .	6
2.3	Formalisme quantique . . . . .	6
2.4	Analyse . . . . .	7
<b>3</b>	<b>La seconde quantification</b>	<b>8</b>
3.1	Nécessité d'une quantification du champ . . . . .	8
3.2	Le champ électromagnétique et le photon . . . . .	8
3.3	Espace de Fock . . . . .	9
3.4	Vide, particules et interactions . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Quantification du champ scalaire</b>	<b>11</b>
4.1	Champ scalaire . . . . .	11
4.2	Equation de Klein-Gordon . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Propagateur</b>	<b>13</b>
5.1	Résolution de l'équation de Klein-Gordon . . . . .	13
5.2	Plus sur le propagateur . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Equation de Dirac</b>	<b>15</b>
6.1	Obtention de l'équation . . . . .	15
6.2	Solutions . . . . .	16
6.3	Autres champs et résumé . . . . .	17
<b>7</b>	<b>Amplitudes et graphes de Feynman</b>	<b>18</b>
7.1	Structure des interactions . . . . .	18
7.2	Amplitudes . . . . .	18
7.3	Règles de Feynman . . . . .	19
7.4	Exemples . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Diffusion, sections efficaces et durées de vie</b>	<b>23</b>
8.1	Interactions en physique atomique . . . . .	23
8.2	Durées de vie des particules . . . . .	24
<b>9</b>	<b>Interactions fondamentales</b>	<b>26</b>
9.1	Retour sur l'électrodynamique . . . . .	26
9.2	Interaction faible . . . . .	27

9.3	Théorie de Weinberg . . . . .	28
9.4	Interaction forte . . . . .	29
<b>10</b>	<b>Et la gravitation dans tout ça ?</b>	<b>31</b>
10.1	Quelques mots (et équations) sur la relativité générale . . . . .	31
10.2	Une théorie quantique du champ gravitationnel ? . . . . .	32

# Chapitre 1

## Introduction : pourquoi une « théorie quantique des champs » ?

La *première quantification*, développée par Schrödinger et Heisenberg puis interprétée par Born, dans les années 1920, est l'achèvement spectaculaire d'une quête qui débuta avec Planck et Einstein au tout début du XXème siècle. La discontinuité des échanges d'énergie (via les photons), concept clé à l'origine du terme *quantique*, a conduit peu à peu les physicien.ne.s à élaborer une quantification de l'*atome*. Les succès explicatifs et prédictifs de cette théorie, à travers de nouveaux outils (rappelés au chapitre 2), semblent inégalés. Mais plusieurs nécessités ont conduit les scientifiques à quantifier le *champ*. Citons-en quelques unes :

- La théorie de la relativité décrit des interactions locales (l'équation de Schrödinger n'est *pas* relativiste).
- Les fonctions d'ondes doivent laisser place à la notion de champ pour préserver la causalité.
- La physique subatomique, en essor à partir des années 1930, exige un traitement en terme de création et d'annihilation de particules, ce qui n'est pas fourni par la théorie classique des champs (relativité restreinte).
- Certains résultats théoriques, comme le paradoxe de Klein, conduisent à abandonner la vision à nombre fixe de particules.

Ainsi nous comprenons la double tâche qui fut de quantifier la relativité, et de « relativiser » la physique quantique. Après quelques rappels nous aborderons les notions de base de la théorie quantique des champs, puis nous étudierons le champ scalaire (sans spin) réel ou complexe et le champ de Dirac (spin  $\frac{1}{2}$ ). Ensuite nous présenterons les règles de Feynman et nous appliquerons tous ces concepts à l'électrodynamique et aux processus atomiques et subatomiques. Enfin nous chercherons quelques liens avec la relativité générale, qui fournit également une approche en termes de champs.

Ce polycopié cherche à aborder la théorie quantique des champs de façon très accessible. Il ne traite pas de renormalisation et n'aborde pas les théories de jauge dans le détail mais cherche à mettre l'accent sur les concepts et évolutions d'idées fondamentales en physique moderne. Il s'inspire notamment des cours donnés à Orsay par Grégory Moreau et Renaud Parentani. Je tiens à remercier mon ami Denis Bénâtre pour ses conseils.

# Chapitre 2

## Rappels

### 2.1 Mécanique analytique

Le Lagrangien est défini classiquement par  $\mathcal{L} = T - V$  avec  $T$  l'énergie cinétique du système et  $V$  son énergie potentielle. Il dépend a priori des coordonnées  $q$ , des vitesses  $\dot{q}$  et du temps  $t$ . Son intégrale temporelle définit une quantité *fondamentale*, l'action :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

L'action est une fonctionnelle. La formule de dérivation fonctionnelle sera utile :

$$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)} = \delta(x - y) \quad (2.1)$$

D'après le principe de moindre action, la trajectoire suivie par un système physique extrême l'action (dérivée fonctionnelle nulle), ce qui se traduit dans les équations du mouvement (Euler-Lagrange) :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad (2.2)$$

Le Hamiltonien est défini par  $\mathcal{H} = \sum p\dot{q} - \mathcal{L}$  avec  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$  le moment conjugué. Le Hamiltonien est à la base du formalisme quantique. En relativité, une approche lagrangienne est privilégiée, avec un rôle crucial pour l'action.

Enfin, le théorème de Noether établit une correspondance entre les symétries et invariances d'un système sous des transformations continues et les lois de conservation, e. g. conservation de l'énergie et invariance par translation dans le temps, conservation de l'impulsion et invariance par translation dans l'espace (homogénéité), conservation du moment cinétique et invariance par rotation (isotropie)... Ces quantités associées sont dites *conjuguées* et leur produit forme une action, elles réapparaissent dans les relations de Heisenberg, où  $\hbar$  a bien la dimension d'une action.

## 2.2 Relativité restreinte

La relativité restreinte utilise un formalisme covariant<sup>1</sup> pour traiter des quantités à trois dimensions spatiales et une dimension temporelle. Le Lagrangien devient généralement une *densité lagrangienne* (volumique). L'intégrer selon les quatre dimensions revient donc à intégrer le Lagrangien selon le temps et on retrouve l'action :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L} d^4x \quad (2.3)$$

Si on note  $\mathcal{E}$  l'énergie d'une particule,  $p$  son impulsion et  $m$  sa masse, on a la belle relation générale :

$$\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.4)$$

qui se réécrit<sup>2</sup> avec le quadrivecteur énergie-impulsion et en prenant  $c = 1$  :  $p^\mu p_\mu + m^2 = 0$ .

## 2.3 Formalisme quantique

L'évolution d'un système quantique est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \mathcal{H} |\psi\rangle \quad (2.5)$$

On s'intéresse à la transition d'un état  $|i\rangle$  vers un état  $|f\rangle$  pour un système perturbé par un potentiel dépendant du temps  $W(t)$ . On a  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + W(t)$  où  $\mathcal{H}_0$  est le Hamiltonien du système libre (indépendant du temps). La probabilité de transition par unité de temps (taux de transition) est donnée par la règle d'or de Fermi :

$$\mathbb{P}_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | W | i \rangle|^2 \rho \quad (2.6)$$

où  $\rho$  est la densité d'états finale.

Rappelons maintenant les principaux résultats de la quantification de l'oscillateur harmonique à une dimension. Le Hamiltonien de ce système est :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{P^2}{m} + m\omega^2 X^2 \right)$$

qui peut se réécrire via les opérateurs d'annihilation et de création :

$$\mathcal{H} = \hbar\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.7)$$

L'opérateur  $a^+ a$  donne le niveau d'excitation  $n$  de l'oscillateur. L'application des opérateurs donne :

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \text{ (création)} \quad (2.8)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \text{ (annihilation)} \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup>Einstein n'était d'abord pas friand de ce formalisme, le qualifiant d'*überflüssige Gelehrsamkeit*. Il se mit plus tard à l'utiliser abondamment, les aspects géométriques prenant toute leur valeur dans la théorie de la relativité générale. Pour une bonne introduction à la relativité restreinte et à son formalisme, voir par exemple [5].

<sup>2</sup>On attire l'attention sur deux choses : d'abord cette relation énergie-impulsion n'est pas toujours vérifiée (cela pourra être compris lorsque nous étudierons les particules virtuelles et les propagateurs), ensuite il faut noter le choix de signature  $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  pour passer sous forme covariante.

Ainsi l'état  $|n\rangle$  peut s'écrire comme  $\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$  ou  $|0\rangle$  est l'état fondamental d'énergie d'excitation  $\frac{\hbar\omega}{2}$ .

On peut aisément généraliser l'étude à  $n$  oscillateurs avec :

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} (a_i^+ a_i + a_i a_i^+) \quad (2.10)$$

## 2.4 Analyse

Théorème des résidus :

Soient  $U$  un ouvert du plan complexe et  $f$  une fonction holomorphe dans  $U$  sauf éventuellement en des points isolés qui sont singuliers pour  $f$ . Soit  $\gamma$  le bord orienté d'un compact contenu dans  $U$  ne contenant aucun point singulier de  $f$ . En notant  $\text{Res}(f, z_k)$  le résidu de la fonction  $f$  au point  $z_k$ , on a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_k \text{Res}(f, z_k) \quad (2.11)$$

Transformée de Fourier (spatiale) :

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k \quad (2.12)$$

Fonctions de Green :

Soit  $D$  un opérateur différentiel quelconque, e.g. un laplacien. On appelle *fonction de Green* toute fonction  $G$  solution de :

$$DG = \delta$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Si on connaît une fonction de Green, alors la solution de l'équation générale :

$$D\varphi(x) = f(x)$$

est simplement le produit de convolution  $\varphi(x) = (G * f)(x) = \int G(x - y)f(y)dy$  par propriété de la distribution de Dirac.

L'analyse complexe et la transformée de Fourier (spatiale, temporelle, à plusieurs dimensions...) seront très utilisées. Les fonctions de Green prendront tout leur sens au chapitre 5.



## Chapitre 3

# La seconde quantification

### 3.1 Nécessité d'une quantification du champ

Avec des énergies accessibles de plus en plus élevées et une exploration de la matière à des échelles de plus en plus petites, la théorie classique des champs et la théorie quantique ne pouvaient plus être invoquées indépendamment pour décrire le monde physique. Chaque théorie doit être complétée par l'autre : d'une part l'équation de Schrödinger n'est pas Lorentz-invariante et les fonctions d'ondes n'intègrent pas le langage relativiste, d'autre part l'observation de la création et de la disparition de particules n'est pas expliquée par la relativité restreinte et la dynamique relativiste ne possède pas de description en termes d'opérateurs.

L'équation de Schrödinger, ainsi que l'équation d'Euler-Lagrange (écrite sous forme covariante) :

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \quad (3.1)$$

doivent alors laisser place à des équations quantiques associées à des champs.

### 3.2 Le champ électromagnétique et le photon

Les premières équations associées à des champs furent celles de Maxwell<sup>1</sup>. La densité lagrangienne du champ électromagnétique est :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

où  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  est le tenseur électromagnétique ( $A$  est le potentiel). Les équations de Maxwell reliant le champ à ses sources s'écrivent sous forme covariante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad (3.2)$$

avec  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide et  $J^\nu$  le quadrivecteur charge-courant. Elles décrivent le champ électromagnétique. Nous allons quantifier ce dernier en jauge de Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ). Commençons par associer à notre potentiel  $A$  son moment conjugué  $\pi$ . On a pour tous  $x \neq y$  les relations de commutation :

$$[A(x), A(y)] = 0 \quad [\pi(x), \pi(y)] = 0 \quad [A(x), \pi(y)] = i\hbar \delta(x - y)$$

---

<sup>1</sup>Les équations de la mécanique antérieures à Maxwell n'étaient pas basées sur un champ bien défini et des interactions locales. Pour une magnifique discussion sur les spécificités de l'électrodynamique dans ce contexte, voir [3].

Nous pouvons donc développer en série de Fourier le Hamiltonien du champ :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_k (\pi_k \pi_k^+ + \omega_k^2 A_k A_k^+) \quad (3.3)$$

où  $\omega_k$  est la pulsation du mode  $k$ . On reconnaît la forme de l'équation (2.10), ce qui permet d'écrire :

$$\mathcal{H} = \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k \quad (3.4)$$

avec  $a_k = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k A_k + i\pi_k)$  et  $a_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k A_k^+ - i\pi_k^+)$ . Ces opérateurs ont les propriétés des opérateurs d'annihilation et de création rencontrés dans un contexte purement quantique. Le champ électromagnétique est alors interprété comme un ensemble infini d'oscillateurs harmoniques. Son état de plus basse énergie est appelé *vide*. C'est dans ce vide que des particules peuvent être créées : ce sont les photons, les quanta de vibration du champ électromagnétique. Une propriété des photons connue en physique statistique est que leur nombre n'est pas conservé, ils représentent l'énergie du champ électromagnétique, sous forme d'excitations d'oscillateurs.

### 3.3 Espace de Fock

L'espace de Hilbert décrivant un nombre variable de particules est appelé *espace de Fock*. Formellement, cet espace (introduit en 1932 par Vladimir Aleksandrovich Fock) est défini comme somme directe de produits tensoriels d'espaces de Hilbert à une particule. Les opérateurs de création  $a_k^+$  et d'annihilation  $a_k$  agissent dans l'espace de Fock pour en changer le contenu en particules. Les antiparticules, qui seront introduites au chapitre 6, permettent intuitivement de comprendre la conservation de quantités telles que l'énergie ou la charge dans l'espace de Fock.

### 3.4 Vide, particules et interactions

Notre étude du champ électromagnétique nous a permis d'introduire les notions fondamentales de la théorie quantique des champs<sup>2</sup>. A ces notions sont associés des phénomènes caractéristiques. D'abord, la notion de vide est formalisée : le vide correspond à un champ libre dans son niveau fondamental d'excitation. Dans ce vide on peut créer des particules (à condition de conserver certains nombres quantiques), ce qui mène à des prédictions théoriques révolutionnaires (notion de particule virtuelle, fluctuations quantiques du vide, création spontanée de paires, effet Casimir, radiation de Hawking, effet Unruh, décalage de Lamb...) dont beaucoup ont été effectivement observées. Les particules, qui venaient de perdre leur statut classique, perdent alors leur statut quantique non relativiste pour se conformer à une description plus correcte en termes de champs. Les interactions (interaction électromagnétique, interaction nucléaire forte, interaction avec le champ de Higgs...) sont décrites par des perturbations de champs. Par exemple, la diffusion d'un électron par un noyau se décrit comme l'échange d'un photon entre les deux objets, le potentiel du noyau perturbant la trajectoire libre de l'électron. On associe aux interactions des *constantes de couplage* qui mesurent leur intensité et sont liées à la probabilité d'interaction. La constante de couplage de l'interaction électromagnétique à basse énergie est la constante de structure fine  $\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ . Les constantes de couplages des interactions fondamentales

---

<sup>2</sup>Pour une discussion très (trop ?) complète sur les sujets présentés, voir [6], en particulier le chapitre 5.

dépendent de l'énergie considérée et leur hiérarchie permet de comprendre les termes *faible* et *forte* pour les interactions nucléaires.

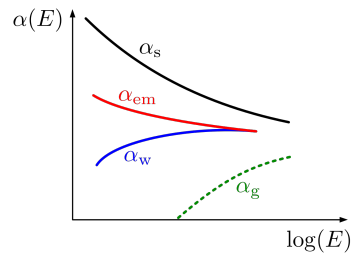


FIGURE – Intensités des interactions fondamentales (évolution de la constante de couplage).

## Chapitre 4

# Quantification du champ scalaire

### 4.1 Champ scalaire

Les champs sont associés à des particules. Certains champs sont responsables des interactions fondamentales : leurs particules, dites *médiatrices*, sont des bosons (elles ont un spin entier). Le photon, étudié au chapitre précédent, correspond à un champ vectoriel (son spin vaut 1). On peut dire que le photon est le vecteur de l'interaction électromagnétique, dans tous les sens du terme. Les champs les plus simples sont associés à des particules de spin nul. On parle de champs scalaires. On peut imaginer des champs d'ordre plus élevé, les champs *tenseurs*<sup>1</sup>, de spin 2.

Les champs scalaires sont très intéressants à étudier, d'autant plus qu'ils décrivent un champ du modèle standard : le champ de Higgs. La densité lagrangienne pour un champ scalaire réel est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - \frac{1}{2} m^2 \psi^2 = \frac{1}{2} ((\partial_t \psi)^2 - (\nabla \psi)^2 - m^2 \psi^2) \quad (4.1)$$

La quantification se fait via l'écriture du Hamiltonien à partir du Lagrangien, puis en termes des opérateurs d'annihilation et de création. On obtient :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} (a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) d^3 p \quad (4.2)$$

Comme le champ électromagnétique, les champs scalaires peuvent être représentés comme somme (continue) d'oscillateurs, avec  $p \sim \hbar k$ . Ils sont décrits par une équation d'onde : l'équation de Klein-Gordon.

### 4.2 Equation de Klein-Gordon

Démontrons l'équation de Klein-Gordon à partir de l'équation relativiste (2.4). Appliquons les quantifications suivantes<sup>2</sup> :

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad p \longrightarrow -i\hbar \nabla$$

L'équation relativiste quantifiée et appliquée à un champ  $\psi$  se réécrit alors :

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>C'est le cas de l'hypothétique graviton.

<sup>2</sup>Cela revient en fait à quantifier les quatre composantes de  $p_\mu$ .

Simplifions :

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi = 0 \quad (4.4)$$

En reconnaissant l'opérateur D'alembertien et en prenant  $\hbar = c = 1$  (pas obligatoire), on obtient l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square + m^2) \psi = 0 \quad (4.5)$$

Cette équation peut également être obtenue à partir de la formulation covariante des équations d'Euler-Lagrange et de l'expression du Lagrangien donnée plus haut. La masse qui apparaît dans l'équation est celle du quantum associé au champ considéré. En supposant que le photon (de masse nulle) soit solution de l'équation, on retrouve simplement l'équation d'onde classique. En cas d'interaction, l'équation de Klein-Gordon se réécrit avec un terme source  $S(x^\mu)$  :

$$(\square + m^2) \psi = S \quad (4.6)$$

Pour un champ scalaire complexe, il faut considérer le lagrangien (hermitien) général :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^+ \partial^\mu \psi - m^2 \psi^+ \psi \quad (4.7)$$

Le Hamiltonien associé prend alors une forme analogue à (4.2). Les champs complexes sont solutions de l'équation de Klein-Gordon.

## Chapitre 5

# Propagateur

### 5.1 Résolution de l'équation de Klein-Gordon

Soit  $G$  une fonction de Green associée à l'équation de Klein-Gordon générale (4.6). On a :

$$(\square + m^2)G(x) = -\delta^4(x) \quad (5.1)$$

Une transformée de Fourier donne (rappelons que nous traitons des quantités à 4 dimensions) :

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(p) e^{-ipx} d^4p \quad (5.2)$$

Soit en remarquant que  $\square e^{-ip_\mu x^\mu} = -p_\mu p^\mu e^{-ip_\mu x^\mu}$  :

$$\delta^4(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int G(p) (\square + m^2) e^{-ipx} d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(p) (p_\mu p^\mu - m^2) e^{-ipx} d^4p$$

On obtient le *propagateur* (nom donnée par Feynman à la fonction de Green de l'équation de Klein-Gordon) :

$$G(p^\mu) = \frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2} = \frac{1}{\mathcal{E}^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \quad (5.3)$$

où on rappelle que  $c = 1$ . Néanmoins c'est souvent le propagateur spatial qui nous intéresse, et pour calculer la transformée de Fourier inverse, il faut introduire des contours d'intégration autour de nos pôles. On prend alors la limite quand  $\epsilon \rightarrow 0$  de cette expression (le signe au dénominateur dépend du sens d'intégration et est lié à la causalité) :

$$-\frac{i}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ipx}}{\mathcal{E}^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 \pm i\epsilon} d^4p \quad (5.4)$$

Après un peu d'analyse complexe, on trouve le propagateur au temps  $t = x^0$  :

$$G(x) = -\frac{i}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Theta(t) e^{-ipx} + \Theta(-t) e^{ipx}}{\mathcal{E}} d^3p \quad (5.5)$$

où  $\Theta$  est la fonction de Heaviside. Les solutions de l'équation de Klein-Gordon générale s'écrivent alors :

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int G(x - x') S(x') d^4x' \quad (5.6)$$

avec  $\psi_0(x)$  une solution de l'équation de Klein-Gordon sans interaction.

## 5.2 Plus sur le propagateur

Le propagateur représente l'évolution spatiale d'un système (une ou plusieurs particules). Plus précisément, il donne l'amplitude de probabilité d'évolution d'un point à un autre en un temps donné. Ainsi, il est souvent exprimé comme fonction à deux variables<sup>1</sup> :

$$G(x, y) = -\frac{i}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip(x-y)}}{\mathcal{E}^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} d^4p \quad (5.7)$$

On a jusqu'ici considéré un champ sans spin. Le propagateur du photon (champ vectoriel sans masse) s'écrit quant à lui :

$$G(p^\mu) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{p_\mu p^\mu} \quad (5.8)$$

où  $p^\mu$  est l'impulsion transférée et  $g^{\mu\nu}$  le tenseur métrique ( $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  pour un espace-temps plat avec la signature utilisée). Le propagateur s'écrit également (pour le montrer on peut exprimer le champ scalaire en termes d'opérateurs de création/annihilation et appliquer la relation de fermeture pour les opérateurs) comme élément de matrice d'opérateur :

$$G(x, y) = -i \langle 0 | \psi(y) \psi(x) | 0 \rangle \quad (5.9)$$

Les propagateurs peuvent donc bien être compris comme amplitudes de probabilité pour des particules d'être créées à un instant  $t_x$ , de se *propager* dans l'espace-temps et d'être annihilées à un instant  $t_y > t_x$ . Ils nous permettront de calculer des probabilités d'interaction dans le cadre des règles de Feynman introduites au chapitre 7.

---

<sup>1</sup>Le facteur  $i$  est conventionnel. Dans la littérature on trouve des propagateurs écrits aussi bien avec que sans ce facteur.

## Chapitre 6

# Equation de Dirac

### 6.1 Obtention de l'équation

Les particules de spin non nul (les champs non scalaires) comme les électrons ne satisfont pas l'équation de Klein-Gordon car la présence d'un moment cinétique modifie le mode de transformation sous le groupe de Poincaré<sup>1</sup>. Les électrons, et plus généralement les fermions de spin  $\frac{1}{2}$ , sont représentés par des champs, ni scalaires, ni vectoriels, les *spineurs*. C'est Paul Dirac qui le premier étudia de tels champs. Son idée fut d'écrire une équation quantique et relativiste de type *Klein-Gordon* mais au premier ordre en temps, comme l'équation de Schrödinger.

Reprenons la fameuse relation (on utilise exceptionnellement l'autre signature)  $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$ . Cherchons une factorisation sous la forme suivante :

$$p^\mu p_\mu - m^2 = (\beta^\delta p_\delta + m)(\gamma^\lambda p_\lambda - m) \quad (6.1)$$

avec  $\beta^\delta$  et  $\gamma^\lambda$  ayant chacun quatre composantes. Développons :

$$p^\mu p_\mu - m^2 = \beta^\delta \gamma^\lambda p_\delta p_\lambda - m \beta^\delta p_\delta + m \gamma^\lambda p_\lambda - m^2 \quad (6.2)$$

Rappelons que les indices sont muets ( $\delta \leftrightarrow \lambda$ ) et que le terme linéaire doit disparaître ( $\beta = \gamma$ ). On obtient :

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\delta \gamma^\lambda p_\delta p_\lambda \quad (6.3)$$

L'astuce de Dirac est de considérer les composantes de  $\gamma$  comme des matrices, et non comme des nombres.  $\gamma$  est donc un quadrivecteur de matrices. Ces matrices doivent satisfaire :

$$\gamma^\delta \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\delta = 2\eta^{\delta\lambda} \quad (6.4)$$

On peut montrer que seules des matrices  $4 \times 4$  conviennent. Les plus simples sont :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & (0) \\ (0) & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} (0) & \sigma^i \\ -\sigma^i & (0) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.5)$$

où les  $\sigma^i$  sont les matrices de Pauli :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Rappelons que le groupe de Poincaré est un groupe de Lie de dimension dix. Il contient les quatre translations, les trois rotations spatiales et les trois transformations de Lorentz (changement de référentiel).



Nos  $\gamma^\mu$  étant alors déterminés, nous pouvons revenir à notre factorisation :

$$(\gamma^\delta p_\delta + m)(\gamma^\lambda p_\lambda - m) = p^\mu p_\mu - m^2 = 0 \quad (6.6)$$

Un des deux facteurs est donc nul. Par convention, on prend le deuxième et on applique la quantification  $p_\mu \longrightarrow i\partial_\mu (\hbar = 1)$ . Appliquons cela à notre spineur  $\psi$ . On obtient l'équation de Dirac :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (6.7)$$

que l'on réécrit généralement avec la notation « slash » de Feynman :

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (6.8)$$

## 6.2 Solutions

Les solutions de l'équation de Dirac sont les spineurs. Un spineur est un objet particulier qui n'est ni un scalaire, ni un (quadri)vecteur, ni un tenseur. Alors que par conjugaison hermitienne un scalaire  $X$  peut se transformer en  $X^+$  et qu'un vecteur  $\mathbf{X}$  peut se transformer en  $\mathbf{X}^*$ , on doit définir pour le spineur un adjoint :

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (6.9)$$

La quantité  $\bar{\psi}\psi$  est alors bien un scalaire de Lorentz. Nous ne rentrerons pas dans les détails de l'algèbre de Dirac. Donnons simplement un résultat important, le Lagrangien de Dirac<sup>2</sup> :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\cancel{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (6.10)$$

La densité lagrangienne de l'électromagnétisme et celle de Dirac forment le Lagrangien de l'*électrodynamique quantique* (électron + photon).

Considérons un système au repos ( $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ). L'équation de Dirac devient :

$$(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m)\psi = 0 \quad (6.11)$$

En exprimant  $\gamma^0$  sous forme matricielle, on obtient les équations différentielles :

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = -im\psi_j, \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial t} = im\psi_k \quad (j = 1, 2; k = 3, 4) \quad (6.12)$$

Dont les solutions sont :

$$\psi_j(t) = e^{-i\mathcal{E}t}\psi_j(0), \quad \psi_k(t) = e^{i\mathcal{E}t}\psi_k(0) \quad (6.13)$$

en ayant remarqué qu'au repos,  $\mathcal{E} = m$  (on a toujours  $\hbar = c = 1$ ). Dans le premier cas on retrouve bien les solutions de l'équation de Schrödinger (Dirac non relativiste), mais dans le deuxième cas on obtient des solutions d'énergie « négative ». Ces solutions sont à interpréter comme représentant des *antiparticules* d'énergie positive (e. g. des positrons). Une antiparticule possède des nombres quantiques, en particulier la charge, opposés à ceux

---

<sup>2</sup>Fait intéressant : les Lagrangiens des champs que nous étudions font tous apparaître des produits de quantités avec leurs quantités conjuguées.

d'une particule ordinaire (pour passer de l'une à l'autre on applique la symétrie  $C$ ). Ainsi l'équation de Dirac libre en l'absence de mouvement admet quatre solutions indépendantes :  $\psi_1$  décrivant un électron dans l'état de spin  $\frac{1}{2}$ ,  $\psi_2$  décrivant un électron dans l'état de spin  $-\frac{1}{2}$ ,  $\psi_3$  décrivant un positron dans l'état de spin  $\frac{1}{2}$  et  $\psi_4$  décrivant un positron dans l'état de spin  $-\frac{1}{2}$ . On généralise ces résultats en considérant des états d'énergie  $\mathcal{E} = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  où le cas  $+$  représente une particule et le cas  $-$  une antiparticule. En 1937, Ettore Majorana considéra les solutions *réelles* de l'équation de Dirac. Les particules et antiparticules, liées par conjugaison complexe, sont alors identiques. Ces particules sont nommées particules de Majorana (par opposition aux particules de Dirac, différentes de leurs antiparticules). Les bosons de jauge neutres ainsi que de nombreux mésons et certaines quasi-particules étudiées en physique de la matière condensée sont des particules de Majorana. Les seuls fermions élémentaires pouvant être des particules de Majorana sont les neutrinos. La question du statut des neutrinos est au cœur des recherches les plus fondamentales en physique des particules et cosmologie. A la manière du chapitre précédent, on peut chercher une fonction de Green de l'équation de Dirac avec source. On obtient alors le propagateur pour un champ de spin  $\frac{1}{2}$ . Celui-ci s'exprime en fonction du propagateur du champ scalaire :

$$S(p) = (i\not{p} + m)G(p) = \frac{\not{p} + m}{p_\mu p^\mu - m^2} \quad (6.14)$$

L'équation de Dirac fut un immense succès. Elle permit à la physique quantique de prendre complètement en compte la théorie des champs d'Einstein. Cette équation fournit une description de l'électron, permet de calculer les effets relativistes dans les atomes (structures fine et hyperfine, moment magnétique anomal...), fait le lien entre la description statistique du spin et sa description en terme de champ et implique l'existence de l'antimatière (découverte en 1932 soit quatre ans après l'interprétation de Dirac).

### 6.3 Autres champs et résumé

Nous avons maintenant en notre possession un formalisme *champ - particule - équation* pour un spin 0 (Klein-Gordon) et un spin  $\frac{1}{2}$  (Dirac). L'équation de Dirac peut éventuellement être généralisée à d'autres fermions, par exemple de spin  $\frac{3}{2}$  (équation de Rarita-Schwinger). Les bosons vecteurs, de spin 1, dont font partie les bosons de jauge du modèle standard, sont décrits par une équation analogue à celle de Klein-Gordon, l'*équation de Proca*. Cette dernière généralise l'étude présentée au chapitre 3 pour le photon en faisant intervenir une masse non nulle. Soit  $A^\mu$  un champ complexe de spin 1 et de masse  $m$ , l'équation de Proca en unités naturelles est :

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0 \quad (6.15)$$

Notons que dans le cas  $m = 0$  on retrouve la forme covariante des équations de Maxwell. Pour résumer, dressons un tableau récapitulatif pour les différents champs :

Spin	Particule	Champ	Densité lagrangienne	Equation	Propagateur
0	Boson	Scalaire $\varphi$	$\partial_\mu \varphi^+ \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi$	$(\square + m^2)\varphi = 0$	$\frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2}$
$\frac{1}{2}$	Fermion	Spinéur $\psi$	$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi$	$(i\not{\partial} - m)\psi = 0$	$\frac{\not{p} + m}{p_\mu p^\mu - m^2}$
1	Boson	Vecteur $A$	$-\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^* - \partial_\nu A_\mu^*)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A_\nu^* A^\nu$	$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 A^\nu = 0$	$-\frac{g^{\mu\nu}}{p_\mu p^\mu - m^2}$

TABLEAU – Résumé de la quantification des champs libres.

## Chapitre 7

# Amplitudes et graphes de Feynman

### 7.1 Structure des interactions

La dynamique générale des systèmes étudiés est la suivante :

- Soit une particule évolue librement (propagateur)
- Soit elle interagit

Les différentes combinaisons de ces comportements décrivent tous les phénomènes physiques dans notre cadre.

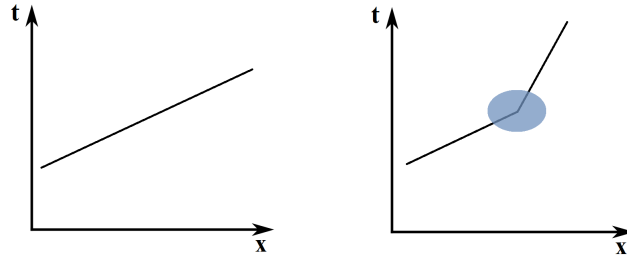


FIGURE – A gauche : évolution sans interaction (Lagrangien libre). A droite : évolution libre, puis rencontre d'un potentiel (en bleu), puis évolution libre à nouveau.

Notons qu'on ne sait pas toujours exactement ce qu'il se passe dans la zone d'interaction : on traitera les interactions de manière perturbative et on classifera les différentes contributions à celles-ci suivant leur ordre.

### 7.2 Amplitudes

L'amplitude de la transition d'un état  $i$  vers un état  $f$  est donnée par la limite quand  $t$  tend vers l'infini de la quantité  $\langle f | U(t) | i \rangle$  où  $U(t)$  est l'*opérateur d'évolution*. La probabilité du processus associé est obtenue en prenant le carré du module de l'amplitude. L'opérateur d'évolution libre est simplement  $U_0(t) = e^{-i\mathcal{H}_0 t}$  avec  $\mathcal{H}_0$  le Hamiltonien libre. On considère également des Hamiltoniens d'interaction  $\mathcal{H}_I$  que l'on traitera généralement comme perturbations. L'équation de Schrödinger<sup>1</sup> (où  $\hbar = 1$ ) donne :

$$i \frac{d}{dt} (U_0(t) U(t) | i \rangle) = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I) U_0(t) U(t) | i \rangle \quad (7.1)$$

---

<sup>1</sup>Qui n'est pas relativiste.

Ce qui permet, comme  $\frac{d}{dt}U_0(t)U(t)|i\rangle = (\dot{U}_0(t)U(t) + U_0(t)\dot{U}(t))|i\rangle = (-i\mathcal{H}_0U_0(t)U(t) + U_0(t)\dot{U}(t))|i\rangle$ , d'exprimer la variation de l'opérateur d'évolution général :

$$i\dot{U}(t) = U_0^+(t)\mathcal{H}_IU_0(t)U(t) = \mathcal{H}_I(t)U(t) \quad (7.2)$$

A l'instar de  $U_0(t)$ ,  $U(t)$  peut donc être écrit comme exponentielle d'opérateurs :

$$U(t) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t \prod_{k=1}^n \mathcal{H}_I(t_k) dt_n \quad (7.3)$$

où on se limitera généralement à de petits ordres  $n$ . Les produits d'opérateurs donnant ensuite les amplitudes peuvent être calculés grâce au théorème de Wick<sup>2</sup> mais il devient rapidement laborieux d'écrire de tels produits. Les diagrammes (ou graphes) de Feynman fournissent une représentation graphique agréable des opérateurs d'évolution et des interactions des particules, traduites numériquement par les *règles de Feynman*.

### 7.3 Règles de Feynman

On veut représenter sans calcul l'amplitude d'une transition d'un état  $i$  vers un état  $f$  comprenant un nombre arbitraire de particules. L'amplitude d'un processus est la somme des amplitudes des contributions de différents ordres à ce processus, représentées par des graphes. Evidemment, seuls les premiers ordres de la théorie des perturbations sont à prendre en compte, les ordres élevés étant associés à des contributions de probabilités tellement faibles qu'elles ne sont jamais observées. Les graphes de Feynman sont constitués de lignes dont les intersections sont nommées *vertex*. A ces lignes et vertex sont associés des nombres et l'amplitude de transition est donnée par le produit de ces nombres. Voici comment dessiner de tels graphes et obtenir les amplitudes associées :

Sauf mention contraire, on représentera le temps horizontalement et une coordonnée d'espace verticalement (c'est un choix arbitraire et on trouve beaucoup de graphes de Feynman présentant l'orientation inverse). Les trajectoires des particules sont représentées par des lignes. La règle générale est de représenter les fermions (quarks ou leptons) par des lignes droites et on pourra ajouter des flèches sur ces lignes pour distinguer particules et antiparticules. Nous avons vu au chapitre 3 que les interactions se font par échange de particules médiatrices : on représentera les photons par des lignes ondulées, les gluons par des sortes de ressorts (l'interaction forte ressemble à une force de rappel) et les bosons faibles par des tirets. A chacune de ces particules on associe un propagateur (que l'on peut multiplier par un facteur de normalisation  $\frac{i}{(2\pi)^4}$ ) dépendant de l'impulsion transférée :

- $\frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2}$  pour un boson scalaire
- $\frac{\not{p} + m}{p_\mu p^\mu - m^2}$  pour une particule de spin  $\frac{1}{2}$
- $-\frac{g^{\mu\nu}}{p_\mu p^\mu}$  pour un photon ou un gluon

Enfin, on associe à chaque vertex un facteur  $ig$  où  $g$  est la constante de couplage (probabilité d'interaction) de l'interaction considérée. Pour l'interaction électromagnétique, l'amplitude de probabilité d'émettre ou d'absorber un photon est  $\sqrt{\alpha_{em}}$  pour un électron et  $Z\sqrt{\alpha_{em}}$  pour un noyau de charge  $Ze$ . De même, l'amplitude de probabilité d'émettre ou d'absorber un gluon est  $\sqrt{\alpha_s}$  pour un quark. Le produit des amplitudes locales (vertex, particule virtuelle échangée...) donne l'amplitude de la contribution associée au graphe considéré.

---

<sup>2</sup>Voir par exemple [6] (section 6.1).

## 7.4 Exemples

Passons maintenant à quelques exemples. Observons tout d'abord le graphe suivant :

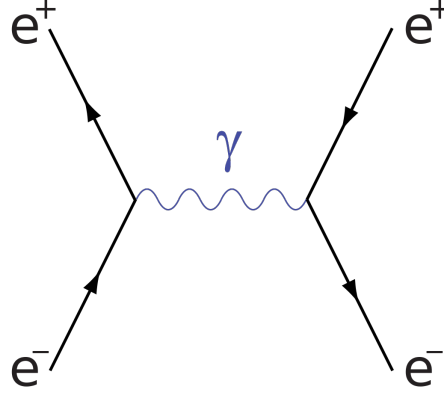


FIGURE – Un diagramme de Feynman de l'électromagnétisme.

Il possède deux lignes en entrée, deux lignes en sortie, une ligne ondulée et deux vertex. A quel processus correspond un tel graphe ? Si on représente le temps horizontalement, on a affaire à une *annihilation* électron-positron suivie de la propagation d'un photon puis d'une *création de paire* électron-positron. L'émission de photon suite à l'annihilation  $e^-e^+$  est notamment à la base de la tomographie par émission de positrons utilisée en médecine nucléaire. Mais si on représente le temps verticalement, en faisant attention au sens des flèches, on obtient une diffusion *Bhabha* entre un positron et un électron via un photon virtuel<sup>3</sup>. Calculons l'amplitude  $f$  du processus  $e^-e^+ \rightarrow \gamma \rightarrow e^-e^+$  typique de l'électrodynamique quantique : on a deux vertex et un photon soit  $f = \sqrt{\alpha_{em}} \sqrt{\alpha_{em}} \frac{g^{\mu\nu}}{p_\mu p^\mu} = \frac{\alpha_{em}}{p^2}$  avec  $\alpha_{em} \approx \frac{1}{137}$  et  $p^2 = (p'^\mu - p^\mu)^2 = 2\mathcal{E}_e - \mathcal{E}_{e+}(1 - \cos\theta)$  le carré de l'impulsion transférée où  $\theta$  est l'angle de diffusion et toujours  $c = 1$ . La probabilité d'interaction (à laquelle la section efficace différentielle du processus est proportionnelle) est donc  $\frac{\alpha_{em}^2}{p^4}$ . Nous verrons que des contributions d'ordre supérieur à ce processus vont faire apparaître des boucles, et donc de nouveaux vertex, apportant de petites corrections à l'amplitude. Notons que si l'on place des électrons sur toutes les lignes pleines, on représente une répulsion coulombienne, de même amplitude. En cas de diffusion d'un électron par un noyau l'amplitude est  $f = \sqrt{\alpha_{em}} Z \sqrt{\alpha_{em}}$  avec  $Z$  le nombre de charge du noyau. La probabilité d'interaction est alors  $\alpha_{em}^2 Z^2$ .

Regardons maintenant un processus se produisant par l'interaction nucléaire faible, la désintégration  $\beta^-$ , par laquelle un neutron se « transforme » en un proton en émettant un électron et un neutrino. Le noyau subit alors la réaction isobare  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y$ . Ce processus n'est pas une interaction à proprement parler, mais bien une désintégration nucléaire spontanée. Un neutron libre n'est pas stable, sa durée de vie étant d'environ 15 minutes. Pour être stable, il doit être lié dans un noyau, mais dans certains noyaux radioactifs, il se produit ce processus par lequel un quark de valence du neutron, le quark down, devient un quark up en émettant un boson  $W^-$ . Notons le signe de ce boson faible (conservation de la charge). Celui-ci se désintègre en particules plus stables : un électron et un antineutrino électronique.

<sup>3</sup>On parle de photon virtuel car le photon semble alors se propager instantanément (intervalle de type espace) et ne vérifie pas l'équation (2.4) : la particule n'est jamais observée.

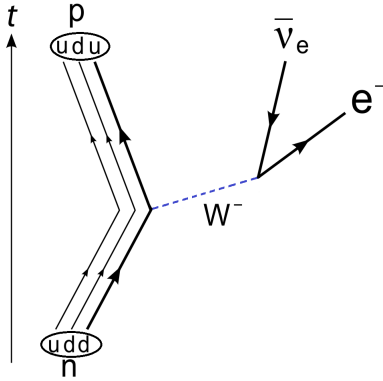


FIGURE – Graphe de la désintégration  $\beta^-$ .

Intéressons nous à présent à des phénomènes très étudiés en physique des particules. Voici le graphe d'une oscillation de mésons :

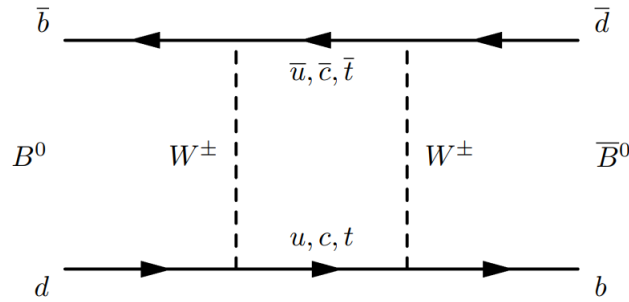


FIGURE – Oscillations de mésons B neutres.

Un méson est un boson constitué de quarks. Le méson  $B^0$  est un état lié de quarks  $d$  (down) et  $\bar{b}$  (anti-bottom). Son antiparticule, le méson  $\bar{B}^0$  est donc constitué des quarks  $\bar{d}$  et  $b$ . Notons au passage que, bien que neutre, ce n'est pas un méson de Majorana. Le diagramme à quatre vertex ci-dessus montre que les quarks constituant le méson se transforment via des états de quarks intermédiaires par échange de bosons  $W$  (On parle parfois de *mélange*). De telles oscillations, ainsi que celles des kaons neutres, des mésons  $B_s$  et des mésons charmés  $D$  permettent de mettre en évidence la violation de la symétrie  $CP$  (conjugaison de charge et de parité) par l'interaction faible<sup>4</sup>. Cette étude de la symétrie  $CP$  est une branche importante de la physique des saveurs. Les observations ne suffisent toutefois pas à expliquer l'excès de la matière sur l'antimatière ayant conduit à l'Univers actuel<sup>5</sup>.

Un deuxième processus étudié aujourd'hui en physique des particules est la production du boson de Higgs. Le boson de Higgs est une particule élémentaire dont la découverte en 2012 a permis de compléter le modèle standard. Nous en reparlerons au chapitre 9. Le mécanisme dominant de production de boson de Higgs est la « fusion de gluons ». Le graphe de Feynman associé à ce processus à la frontière du modèle standard est plus complexe que les précédents : il fait apparaître des boucles de quarks lourds virtuels (top/anti-top ou bottom/anti-bottom). Décrivons comment le boson de Higgs peut être produit en accélérateur. Les protons accélérés dans des synchrotrons tels que le LHC sont constitués de gluons. Si la collision de ces protons se produit à suffisamment haute énergie, il y a

<sup>4</sup>Pour une belle présentation, voir [4] (chapitre 12).

<sup>5</sup>Le physicien et prix nobel de la paix Andreï Sakharov a énoncé les conditions de cette *baryogénèse* : violation importante de  $CP$ , violation de la conservation du nombre baryonique (différence entre les nombres de quarks et d'antiquarks) et rupture de l'équilibre thermique.

une probabilité non nulle que deux gluons de ces nucléons se combinent pour former des quarks et antiquarks (permis par l'interaction forte), ces derniers émettant un boson de Higgs possédant la masse très importante de  $125 \text{ GeV}/c^2$ .

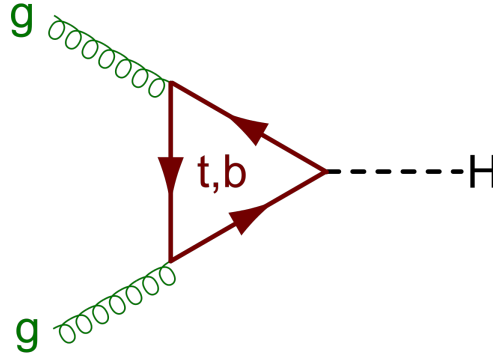


FIGURE – Production du boson de Higgs par fusion de gluons.

Le calcul de l'amplitude est assez complexe : il fait intervenir le propagateur des quarks  $\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}$  ainsi que des termes de couplage aux vertex (deux couplages quark-gluon de l'interaction forte  $\sqrt{\alpha_s}$  et un couplage quark-Higgs de type Yukawa). Parmi tous nos exemples, les lois de conservation (énergie, charge, saveur, nombres leptoniques...) de la physique subatomique sont respectées<sup>6</sup>. Les diagrammes ne respectant pas de telles lois sont interdits !

Gardons en tête que la théorie quantique des champs, bien que centrée sur la physique des hautes énergies, permet de décrire de nombreux autres phénomènes.

---

<sup>6</sup>Ces lois de conservation sont fondamentales. On renvoie à [4] pour un bon aperçu de ces dernières.

## Chapitre 8

# Diffusion, sections efficaces et durées de vie

### 8.1 Interactions en physique atomique

Les principaux processus dynamiques en physique atomique et subatomique sont les désintégrations et les diffusions (parmi lesquelles on retrouve les collisions). La diffusion joue un rôle fondamental à l'échelle de l'atome. Historiquement, c'est l'expérience de diffusion de Rutherford (bombardement de particules  $\alpha$  sur des atomes d'or) qui exhiba en premier la structure de l'atome. La probabilité d'interaction est reliée à une quantité (mesurable et calculable) purement microscopique : la *section efficace*. Cette quantité, qui est une surface, représente la « taille » de la zone de diffusion.

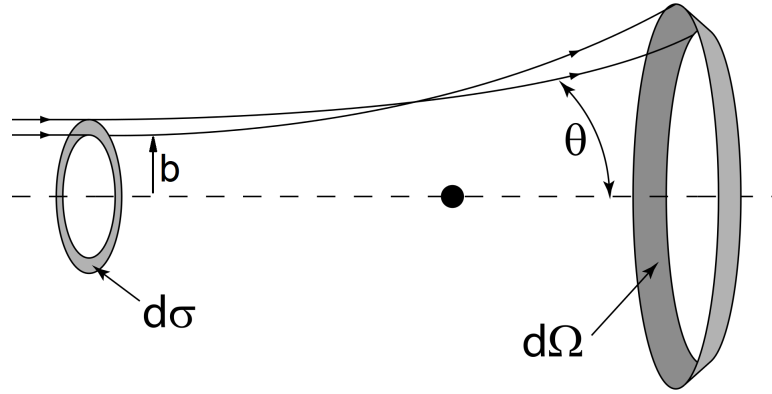


FIGURE – Diffusion Rutherford où  $b$  est le paramètre d'impact,  $\theta$  est l'angle de diffusion,  $d\Omega$  est l'angle solide différentiel de diffusion et  $d\sigma$  est la section efficace différentielle.

Dans ce premier exemple on a :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right| \quad (8.1)$$

La section efficace de diffusion est alors obtenue par une intégration sur l'angle solide :  $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ . Dans le cas de particules neutres (donc sans force de Coulomb),  $\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2}$  avec  $R$  le rayon de la cible et  $b = R \cos \frac{\theta}{2}$ . Un peu de trigonométrie donne alors  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$  et donc :

$$\sigma = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = 4\pi \frac{R^2}{4} = \pi R^2 \quad (8.2)$$



Les règles de Feynman permettent de calculer les amplitudes de diffusion et donc les sections efficaces (différentielles). La règle d'or de Fermi en unités naturelles permet d'écrire le taux de transition comme  $2\pi|f|^2\rho$ . La section efficace, proportionnelle à la probabilité et donc au carré du module de l'amplitude de diffusion, peut donc être calculée théoriquement. On peut montrer que pour un processus de diffusion  $A + B \rightarrow C + D$  (comme une diffusion atomique ou moléculaire ou encore une collision de particules), on a :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{8\pi} \frac{|f|}{\mathcal{E}_A + \mathcal{E}_B}\right)^2 \frac{|p_f|}{|p_i|} \quad (8.3)$$

avec  $\mathcal{E}_A$  et  $\mathcal{E}_B$  les énergies des particules initiales et  $|p_i|$  et  $|p_f|$  les impulsions totales initiales et finales. Considérons alors la diffusion  $A + A \rightarrow B + B$ . La contribution au premier ordre à ce processus est représentée par le graphe suivant :

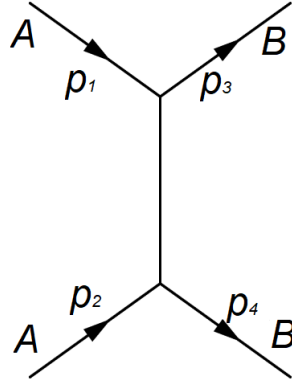


FIGURE – Diffusion  $A + A \rightarrow B + B$  à deux vertex via un boson scalaire virtuel.

La constante de couplage est  $g$  et le propagateur est  $\frac{1}{p^2 - m^2}$  avec  $p = p_4 - p_2$  l'impulsion échangée et  $m$  la masse du champ scalaire. L'amplitude est donc  $f = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m^2}$  et la section efficace est donnée par intégration de :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4}{512\pi^2 \mathcal{E}_A^2 (p^2 - m^2)^2} \quad (8.4)$$

Comme attendu, la section efficace croît avec l'intensité d'interaction et décroît avec l'énergie des particules.

## 8.2 Durées de vie des particules

Les calculs d'amplitudes via les règles de Feynman permettent également de traiter les désintégrations, la durée de vie d'une particule étant simplement l'inverse de son taux de désintégration obtenu par la règle d'or de Fermi. Pour une désintégration à deux corps, ce taux de désintégration est donné par une relation analogue à celle pour la section efficace :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{|p_f|}{8\pi} \frac{|f|^2}{m^2} \quad (8.5)$$

où  $m$  est la masse de la particule se désintégrant. Dans le cas d'une désintégration à un vertex, il n'y a pas de propagateur et la durée de vie est simplement :

$$\tau = \frac{8\pi m^2}{g^2 |p_f|} \quad (8.6)$$

On pouvait encore s'attendre à de telles dépendances : plus une particule interagit, plus sa durée de vie est faible. Il est fascinant de voir que l'on peut si simplement calculer la durée de vie d'une particule. Il peut être intéressant de noter que la durée de vie d'une particule est directement liée à sa largeur en énergie  $\Gamma$  (mesurée expérimentalement). En effet, la relation de Heisenberg pour le temps et l'énergie donne (avec  $\Delta\mathcal{E} = \Gamma$  et  $\Delta t = \tau$ ) :

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{8.7}$$

## Chapitre 9

# Interactions fondamentales

### 9.1 Retour sur l'électrodynamique

La quantification du champ électromagnétique a été discutée au chapitre 3, l'électron a été décrit au chapitre 6 et l'interaction via les photons a été présentée au chapitre 7 avec les règles de Feynman. L'électrodynamique quantique est une *théorie de jauge* abélienne regroupant ces éléments. Avant de présenter cet aspect, rappelons le Lagrangien de l'électrodynamique. Il est constitué du Lagrangien de Maxwell décrivant le champ électromagnétique (photon) et du Lagrangien de Dirac décrivant les champs spineurs (leptons et quarks) :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (9.1)$$

Ce Lagrangien, comme les équations de Maxwell avec le potentiel vecteur, est invariant de jauge, c'est à dire que son expression est invariante selon la transformation  $\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi$ . On parle d'invariance *globale* de jauge car la phase  $\theta$  ne dépend pas de l'espace. Cette invariance de jauge est associée, via le théorème de Noether, à la conservation de la charge. Dans le cas d'une transformation *locale*, le Lagrangien n'est plus invariant car une dérivation de  $\theta(x)$  apparaît alors. Pour le transformer en un Lagrangien invariant sous transformation locale, il faut retirer le terme issu de la dérivation en modifiant l'opérateur différentiel comme :  $\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + ieA_\mu \equiv D_\mu$ , avec  $e$  la charge élémentaire. On parle alors de dérivée « covariante ». Le Lagrangien covariant de l'électrodynamique quantique :

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (9.2)$$

est alors bien invariant sous les transformations de jauge locales  $\psi \longrightarrow e^{i\theta(x)}\psi$ . En théorie des groupes, on remarque que ces transformations appartiennent au groupe unitaire  $U(1)$  (nombres complexes de module 1 munis de la multiplication). L'électrodynamique quantique est ainsi associée à la symétrie  $U(1)$ . Ce groupe étant abélien, on parle de théorie de jauge abélienne. Ce caractère abélien interdit des interactions entre bosons vecteurs : il n'y a pas de vertex photon-photon (cela est également lié à la notion plus complexe d'absence de liberté asymptotique). Les règles de Feynman de l'électrodynamique quantique font donc appel à un nombre restreint d'éléments : les lignes des quarks, leptons (en particulier électrons) et photons, le propagateur du photon, le propagateur de Dirac, le couplage (vertex) photon-lepton et le couplage photon-quark. Ces éléments peuvent néanmoins décrire l'ensemble des phénomènes électromagnétiques au niveau élémentaire, en particulier ceux faisant simplement apparaître des électrons et des photons. Observons les quatre processus suivants différant simplement par rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$  :

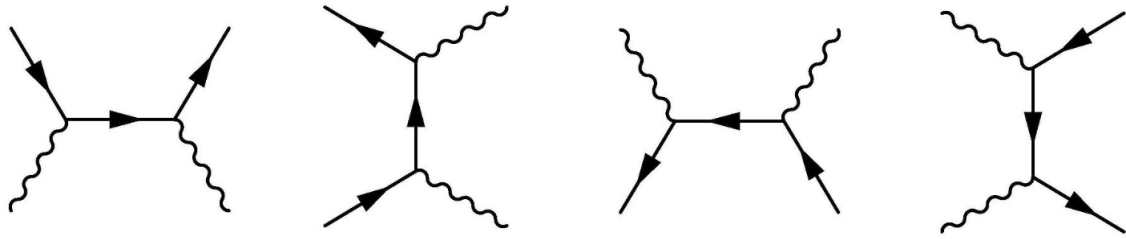


FIGURE – Quatre processus de l'électrodynamique quantique.

Que représentent-ils ? Dans le premier cas on a une diffusion d'un photon par un électron (effet Compton), dans le deuxième cas on a une annihilation entre un électron et un positron avec émission de deux photons, dans le troisième cas on a une diffusion d'un photon par un positron et dans le quatrième cas on a une création de paire électron-positron dans le vide (plus précisément dans un champ électromagnétique). Ces quatre processus font apparaître deux vertex avec la constante de couplage  $\sqrt{\alpha_{em}}$  et le propagateur  $\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2}$ . Ils auront donc les mêmes amplitudes et sections efficaces. Comme mentionné plus tôt, il est parfois utile de considérer des graphes d'ordre supérieur faisant apparaître des boucles et donc des vertex supplémentaires. Ces graphes sont de petites corrections à l'amplitude car plus on multiplie des vertex (facteurs inférieurs à 1), plus l'amplitude associée est faible, mais des recherches théoriques poussées nécessitent de prendre en compte ces corrections. On donne ici un aperçu des vertex apparaissant à l'ordre supérieur.

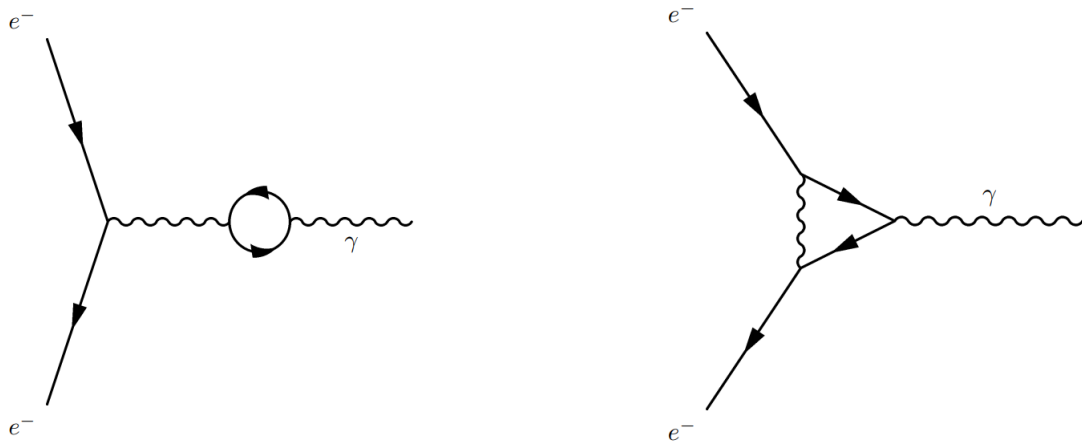


FIGURE – Exemples de corrections de graphes avec ajout de vertex.

Ce formalisme permet de calculer les propriétés physiques de l'interaction entre photons et particules chargées (sections efficaces, correction du facteur de Landé, décalage de Lamb...) avec une précision inégalée. Que ce soit d'un point de vue prédictif ou descriptif, l'électrodynamique quantique est probablement la théorie physique la plus efficace jamais produite.

## 9.2 Interaction faible

Les théories de jauge permettent de générer toutes les interactions fondamentales, auxquelles, on le rappelle, sont associées un champ, des bosons de jauge, un Lagrangien et une équation fondamentale. L'interaction faible, responsable de nombreuses désintégrations (nucléaires, mésoniques, leptoniques) fait intervenir un terme de masse (le Lagrangien de Maxwell devient celui de Proca). Elle est la seule à violer la conservation de la saveur



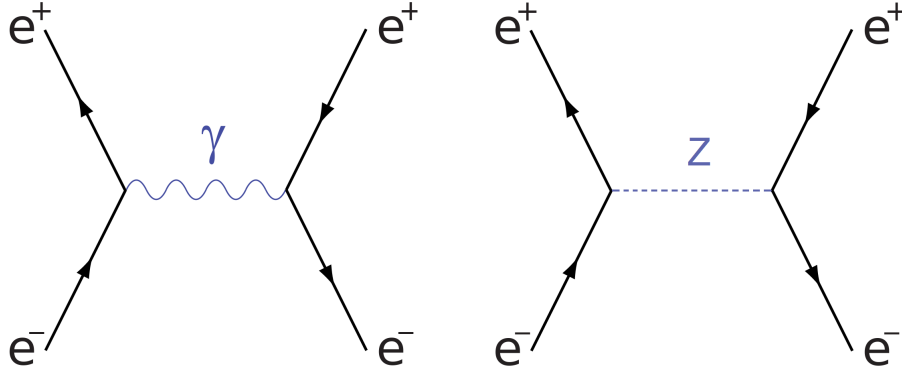


FIGURE – Graphes illustrant la similitude entre le photon et le boson faible neutre.

La théorie électrofaible combinant l'électrodynamique quantique et la théorie de l'interaction nucléaire faible a alors un statut de théorie de jauge locale non-abélienne : il existe des interactions entre les bosons faibles et entre bosons faibles et photons (mais pas entre les photons qui suivent toujours une théorie de jauge abélienne). Les vertex associés aux interactions entre ces bosons et les leptons prennent une forme analogue à celle des vertex électromagnétiques, avec des constantes de couplage  $g_W$  et  $g_Z$ . Sheldon Glashow a montré que la théorie électrofaible s'appliquait également aux quarks. Les quarks furent théorisés pour la première fois dans le cadre de l'interaction forte.

## 9.4 Interaction forte

La théorie décrivant l'interaction forte est la *chromodynamique quantique*. Là où l'électrodynamique s'applique aux charges, la chromodynamique s'applique aux « couleurs ». Les quarks sont des fermions élémentaires qui, à la différence des leptons, sont soumis à l'interaction forte. Chaque quark existe sous trois couleurs : rouge, verte, bleue. La couleur est aussi portée par les gluons, particules médiatrice de l'interaction forte. Le Lagrangien d'un quark  $q$  est alors composé d'un Lagrangien de Dirac par couleur où les  $\psi_c$  sont les spineurs associés à la couleur  $c$  :

$$\mathcal{L}_q = i\bar{\psi}_r \not{\partial} \psi_r - m_q \bar{\psi}_r \psi_r + i\bar{\psi}_g \not{\partial} \psi_g - m_q \bar{\psi}_g \psi_g + i\bar{\psi}_b \not{\partial} \psi_b - m_q \bar{\psi}_b \psi_b \quad (9.3)$$

Ce Lagrangien est invariant de jauge pour la transformation  $\psi \longrightarrow e^{i\lambda \mathbf{a}} \psi$  où cette fois-ci  $e^{i\lambda \mathbf{a}}$  est une matrice unitaire de dimension 3. En effet, la présence des trois couleurs implique que les  $\lambda$  soient des matrices  $3 \times 3$ , les *matrices de Gell-Mann* (pour Murray Gell-Mann). Ces transformations forment le groupe  $SU(3)$ , qui possède  $3^2 - 1 = 8$  générateurs, les huit gluons de l'interaction forte, permettant de combiner les couleurs. Le champ des gluons est quant à lui représenté par un terme analogue à celui du champ électromagnétique :

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F_\alpha^{\mu\nu} \quad (9.4)$$

où  $F_{\mu\nu}^\alpha$  est le *tenseur chromodynamique*. Le Lagrangien invariant local de jauge de la chromodynamique quantique est alors :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F_\alpha^{\mu\nu} \quad (9.5)$$

où  $\psi$  est un vecteur dont les trois composantes sont les  $\psi_c$ . L'interaction forte est ainsi décrite par une théorie de jauge basée sur le groupe  $SU(3)$  non abélien. Les interactions gluon-gluon sont donc de mise. L'interaction forte est régie dans le cadre de la théorie quantique des champs par des échanges de gluons. Les éléments des règles de Feynman sont donc les lignes des quarks et des gluons, les propagateurs des quarks et des gluons et les vertex quark-gluon ainsi que les vertex à trois et quatre gluons. Ces vertex sont liés au couplage  $g_s = \sqrt{\alpha_s}$  de l'interaction forte.

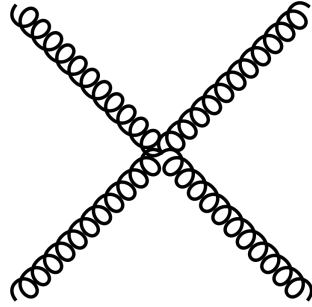


FIGURE – Un vertex de l'interaction forte.

Les particules composées de quarks (*hadrons*) effectivement observables ont toutes la couleur blanche (obtenue par synthèse soustractive des couleurs des quarks constituants). Une conséquence de cela est que les quarks ne peuvent exister que sous forme de hadrons (un quark seul n'a jamais la couleur blanche). Ce résultat est appelé *confinement* des quarks. Une autre conséquence de cette condition sur la couleur est que toutes les combinaisons de quarks n'existent pas : un méson à deux quarks aura nécessairement la forme  $q_1\bar{q}_2$  (où  $q_1$  et  $q_2$  sont éventuellement identiques), de même un baryon à trois quarks aura la forme  $q_1q_2q_3$  ou  $\bar{q}_1\bar{q}_2\bar{q}_3$ <sup>1</sup>. La chromodynamique quantique permet de traiter tous les phénomènes de l'interaction forte (interactions quark-quark, diffusions et annihilations quark-antiquark, interactions entre gluons, désintégrations causées par l'interaction forte...) et clôt ainsi notre présentation des théories fondamentales du modèle standard.

---

<sup>1</sup>Toutes ces propriétés peuvent être comprises en dehors de la chromodynamique quantique. En effet, les quarks ont individuellement une charge qui est une fraction de la charge élémentaire  $e$  et la quantification de la charge implique que les particules ont des charges multiples de  $e$ .

## Chapitre 10

# Et la gravitation dans tout ça ?

### 10.1 Quelques mots (et équations) sur la relativité générale

La théorie de la relativité générale est une théorie *géométrique* de l'espace-temps. Le champ gravitationnel y est traité de façon dynamique et locale comme le champ électromagnétique mais n'est toujours pas quantifié d'une façon pleinement satisfaisante. Cette théorie, basée sur le principe de covariance généralisée selon lequel l'invariance des lois physiques entre référentiels s'étend aux référentiels accélérés, établit :

1. Une correspondance entre la géométrie (la courbure) de l'espace-temps et la gravitation.
2. Que le contenu en matière-énergie de l'espace-temps agit sur la gravitation (et donc sur sa géométrie).
3. Que la géométrie de l'espace-temps conditionne le comportement de son contenu.
4. Enfin, qu'il est toujours et partout possible de choisir un système de coordonnées localement inertiel (*i.e.* en chute libre) tel que les équations du mouvement prennent la même forme que dans le cadre de la relativité restreinte en l'absence de gravitation (principe d'équivalence).

Le premier point implique que les effets gravitationnels sont inclus dans le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$ . L'équation du champ scalaire (Klein-Gordon) peut alors être modifiée pour faire intervenir les effets gravitationnels :

$$(-g^{\mu\nu}\square + m^2)\psi = 0 \quad (10.1)$$

Dans cette expression la définition de l'opérateur d'Alembertien a changé :  $\square \equiv \partial_\mu \partial_\nu$  devient  $\square \equiv D_\mu D_\nu$  où l'opérateur  $D_\mu$  est une dérivée covariante. Nous ne rentrerons pas dans les détails de la géométrie différentielle mais indiquons seulement que l'emploi de la dérivation covariante permet ici d'obtenir une dérivée ne dépendant pas de la courbure intrinsèque de l'espace (les bases étudiées sont mobiles). L'action d'Einstein-Hilbert décrivant la gravitation s'écrit en unités naturelles :

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (10.2)$$

Analysons un peu cette expression. Le facteur devant l'intégrale permet simplement de retrouver les équations de Newton en champ gravitationnel faible. L'intégration (de la densité



lagrangienne) se fait sur tout l'espace-temps et le Jacobien  $\sqrt{-g}$  dépend du déterminant  $g$  du tenseur métrique (négatif en signature conventionnelle). Enfin,  $R$  est le scalaire de Ricci, calculé à partir de la métrique. Le principe de moindre action appliqué à l'action totale (action de Einstein-Hilbert et action du contenu de l'Univers)  $S_{tot}$  donne l'équation d'Einstein<sup>1</sup> :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (10.3)$$

où  $G_{\mu\nu}$  est le *tenseur d'Einstein* dépendant de la métrique et  $T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{tot}}{\delta g^{\mu\nu}}$  est le *tenseur énergie-impulsion* dépendant du contenu en matière de l'espace-temps. On voit donc bien que cette équation traduit les points 2. et 3. énoncés précédemment. Si on ne prend pas  $c = 1$ , l'équation d'Einstein s'écrit :  $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ . De façon plus précise, le principe de moindre action donne l'équation à une constante près :

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (10.4)$$

où  $\Lambda$  est la *constante cosmologique*. L'étude et la résolution de l'équation d'Einstein dans divers contextes (univers vide de matière avec  $T_{\mu\nu} = 0$ , champ gravitationnel faible, métrique plate, constante cosmologique effective, etc...) permet de mettre en évidence de nombreux phénomènes physiques, comme l'expansion de l'Univers, les trous noirs ou les ondes gravitationnelles (l'équation d'Einstein peut être mise sous la forme d'une équation d'onde faisant notamment apparaître la célérité et la polarisation de ces ondes récemment découvertes). La relativité générale est donc une théorie extrêmement opérationnelle, en plus d'être conceptuellement passionnante.

## 10.2 Une théorie quantique du champ gravitationnel ?

Il est intéressant de se demander si l'approche de la théorie quantique des champs peut être appliquée à la gravitation. En effet la théorie de la relativité générale confère au champ gravitationnel les mêmes caractéristiques que les champs fondamentaux : un caractère dynamique, un lagrangien avec une invariance de jauge et des équations associées. Pourquoi chercher à quantifier le champ gravitationnel ? En plus de l'évidente révolution esthétique que serait la quantification achevée de toutes les interactions fondamentales, la quantification de la gravitation fournirait de précieuses réponses aux problèmes cosmologiques actuels, comme les questions autour des premiers instants de l'Univers, de l'inflation cosmique ou des trous noirs. Les deux voies théoriques privilégiées dans la quantification de l'interaction gravitationnelle sont :

- La relativité quantique à boucles, qui propose une quantification non perturbative du champ gravitationnel lui-même, donnant à l'espace-temps une structure discrète et dynamique.
- La théorie des cordes, beaucoup plus coûteuse car basée sur la supersymétrie et les transformations conformes, qui est une véritable théorie d'unification de la gravitation avec les autres interactions.

La première théorie vise à quantifier de la gravitation et la deuxième vise à ajouter la gravitation au sein d'une théorie initialement quantique. Toutes deux font intervenir de manières différentes un boson, non plus vecteur mais tenseur, associé au champ gravitationnel, le

---

<sup>1</sup> Il faudrait plutôt parler *des équations* d'Einstein car on a en fait une équation tensorielle et donc une équation pour chaque composante indépendante.

graviton, de spin 2 et sans masse. Malgré quelques succès, ces théories sont encore à l'état d'ébauche. Il est toutefois possible, en dehors d'une théorie quantique de la gravitation, d'étudier des effets quantiques en contexte gravitationnel : on parle de théorie quantique des champs en espace-temps courbe. Un des aspects les plus étudiés est l'évaporation des trous noirs. Dans une théorie purement gravitationnelle, rien ne peut s'échapper d'un trou noir, pas même la lumière. Il en est autrement lorsque les aspects quantiques interviennent. Stephen Hawking a montré que les fluctuations quantiques du vide, successions de créations spontanées et d'annihilations de paires particule-antiparticule, au voisinage d'un trou noir, pouvaient être cassées par l'intensité de la courbure locale. Une des deux particules de la paire est alors éjectée et l'autre absorbée par le trou noir. Un observateur extérieur observe donc un flux sortant sans contrepartie entrante. La masse du trou noir diminue alors par conservation de l'énergie et la température de son bain thermique augmente. On a donc affaire à un phénomène explosif : un trou noir rayonne, et se réchauffe en rayonnant. A cette émission thermique est associée une entropie, l'entropie de Bekenstein, dépendant de l'aire  $\mathcal{A}$  du trou noir :

$$S = \frac{\mathcal{A} k_B c^3}{4 \hbar G}$$

La présence des quatre constantes fondamentales en dit beaucoup sur le caractère unificateur d'un tel phénomène.

Au cours de ce polycopié nous avons souligné l'aspect fondamental de la théorie quantique des champs. Nous avons pu décrire les phénomènes physiques les plus divers, de l'électromagnétisme à la gravitation, et à partir d'un langage universel et de principes élémentaires, introduire l'édifice théorique le plus remarquable de l'histoire de la physique.

# Bibliographie

- [1] H. CARTAN, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann (1961).
- [2] C. COHEN-TANNOUDJI, Leçons du Collège de France : physique atomique et moléculaire. En particulier les premières années : <http://www.phys.ens.fr/~cct/college-de-france>.
- [3] R. FEYNMAN, Le cours de physique de Feynman - Electromagnétisme 2, Dunod (2013).
- [4] D. GRIFFITHS, Introduction to Elementary Particles, Wiley-Vch (2010).
- [5] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, Physique théorique - Théorie des champs, Ellipses (1994).
- [6] S. WEINBERG, The Quantum Theory of Fields (Volume I : Foundations), Cambridge University Press (1995).