

# Image Enhancement nel Dominio delle Frequenze



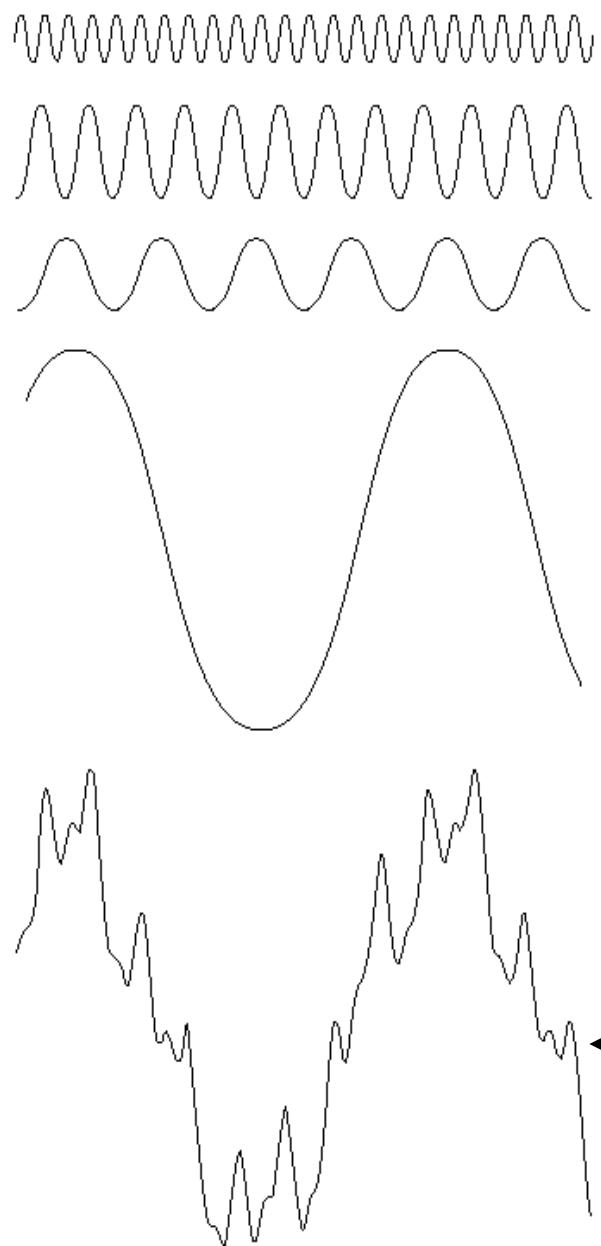
# Introduzione

Una funzione **periodica** può essere espressa come somma di seni e/o coseni di differenti frequenze e ampiezze (*Serie di Fourier*).

Anche una funzione **non periodica**, (*sotto certe condizioni*) può essere espressa come integrale di seni e/o coseni, moltiplicati per opportune funzioni-peso (*Trasformata di Fourier*).



Jean Baptiste Joseph Fourier  
(Auxerre, 1768 – Paris, 1830)



Questa funzione è la somma delle 4 funzioni periodiche di cui sopra.



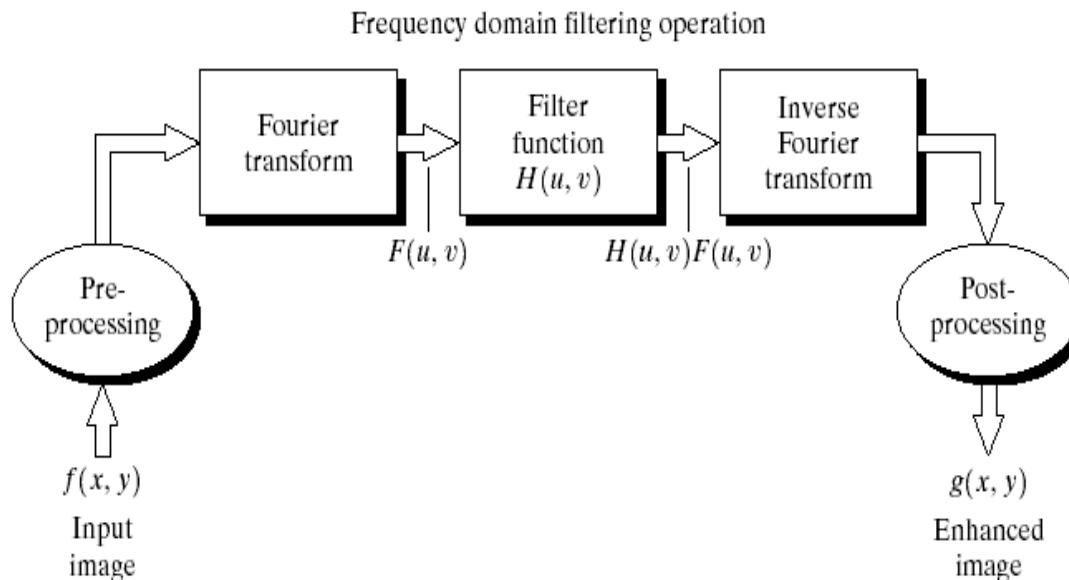
## Introduzione

- Sia la serie di Fourier che la Trasformata di Fourier condividono il fatto che una funzione possa essere “ricostruita” (**recovered**) con un semplice processo di inversione senza perdita di informazione. E’ cioè possibile lavorare nel cosiddetto **dominio di Fourier** e tornare nel dominio originale della funzione in maniera del tutto naturale.
- Inizialmente l’analisi di Fourier trovò applicazione nel campo della diffusione del calore dove permise la formulazione e la risoluzione di equazioni differenziali di alcuni fenomeni fisici in maniera del tutto originale.



## Introduzione

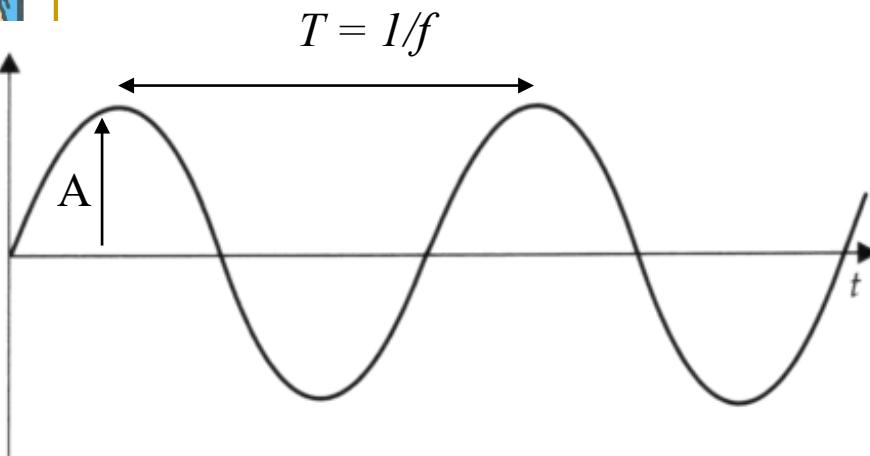
- Con l'avvento negli anni 60 della **FFT (Fast Fourier Transform)** il settore dell'elaborazione digitale dei segnali (**DSP – Digital Signal Processing**) ha subito una vera e propria rivoluzione, ed oggi questi concetti trovano applicazione nei più svariati campi industriali, dalla medicina, alle telecomunicazioni, ecc..



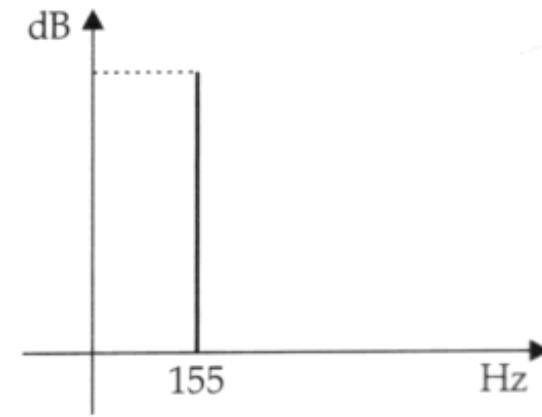


## Immagini e Segnali

- Un'immagine può essere vista come una funzione discreta in due dimensioni i cui valori rappresentano il livello di grigio di un determinato pixel.
- La funzione “immagine” può essere vista come un segnale, cioè una funzione variabile in un dominio con una propria frequenza (costante o variabile).

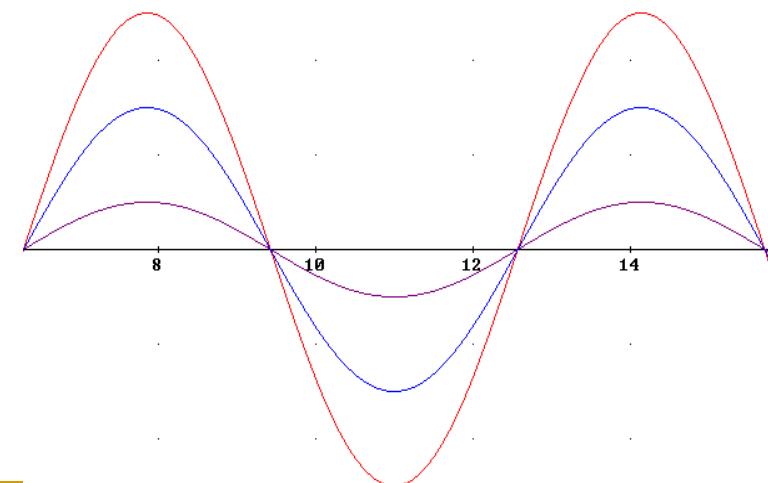


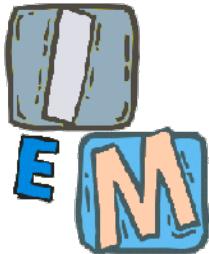
*Dominio del tempo*



*Dominio della frequenza*

- Ampiezza (A) espressa in decibel dB;
- Periodo (T) espresso in secondi;
- Frequenza ( $f$ ) numero di cicli (onde) al secondo; si misura in Hertz Hz





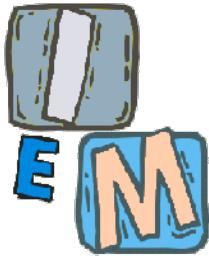
# Discrete Fourier Transform

Nel caso 2-D la coppia trasformata antitrasformata della sequenza bidimensionale  $f(x,y)$  assume la seguente forma:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad \text{per } u = 0, 1, \dots, M-1 \ v = 0, 1, \dots, N-1$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{i2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad \text{per } x = 0, 1, \dots, M-1 \ y = 0, 1, \dots, N-1$$

$u$  e  $v$  sono gli indici relativi agli assi frequenze discretizzati, mentre  $M$  e  $N$  sono le dimensioni (in pixel) dell'immagine.



# Formula di Eulero

- Per ogni numero reale  $x$  si ha:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- E quindi:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$



# Trasformata di Fourier

Dato che la trasformata F ha valori complessi, può essere espressa in termini della sua parte reale e della sua parte immaginaria.

Spettro della Trasformata  $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

Angolo di Fase

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

Potenza Spettrale

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$



## Esempio 1-D

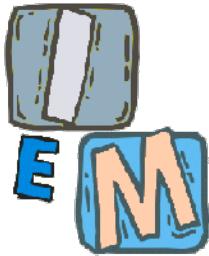
$$\begin{aligned}F(0) &= \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] \\&= 1 + 2 + 4 + 4 = 11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(1) &= \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi(1)x/4} \\&= 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j\end{aligned}$$

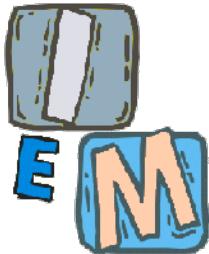
$$F(2) = -(1 + 0j) \text{ ed } F(3) = -(3 + 2j).$$

Se invece prendiamo  $F(u)$  e vogliamo calcolarne la sua inversa, dobbiamo procedere alla stessa maniera, stavolta utilizzando l'antitrasformata. Per esempio,

$$\begin{aligned}f(0) &= \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{j2\pi u(0)} \\&= \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) \\&= \frac{1}{4} [11 - 3 + 2j - 1 - 3 - 2j] = \frac{1}{4} [4] = 1\end{aligned}$$



Tutti i valori della  $f(x)$  contribuiscono alla costruzione di ciascuno dei campioni della  $F(u)$ . Analogamente, tutti i campioni della trasformata contribuiscono, durante la antitrasformata, a ciascuno dei valori della  $f(x)$ . I campioni della  $F(u)$  sono in genere complessi, per cui ciascuno di essi ha un modulo e una fase.



# Range dinamico

Quando si visualizza lo spettro di Fourier come immagine di intensità, esso manifesta in genere una dinamica molto più grande di quella riproducibile su un tipico display, per cui solo le parti più luminose dello spettro risultano visibili.

Per esempio, lo spettro dell'immagine di *Lena* varia tra 0 (circa) e  $6.47 \times 10^6$ . Effettuando la normalizzazione necessaria per visualizzarlo con  $L=256$  livelli di grigio, solo pochissime parti molto luminose sono visibili.

A ciò si può ovviare, come è noto, mediante una *compressione* di tipo logaritmico, visualizzando, invece che lo spettro, una funzione del tipo:

$$D(u,v) = c \log(1 + F(u,v))$$

c è una costante di scala, che va scelta opportunamente per far ricadere i valori trasformati nel range voluto, cioè in  $[0, L-1]$



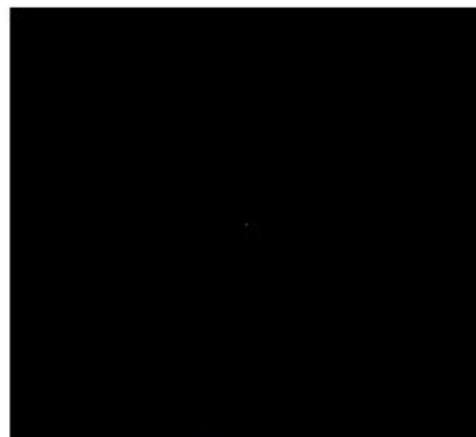
# Range dinamico

Poiché  $0 < |F(u,v)| < R = 6.47 \times 10^6$ , si ha  $0 < D(u,v) < c \log(1+R)$ . Dato che  $R \gg 1$ , come peraltro avviene normalmente per lo spettro di Fourier di una immagine, si può porre  $c \log R = L-1$ , da cui  $c = (L-1)/\log R = 255/\log(6.47 \times 10^6) = 16.26$

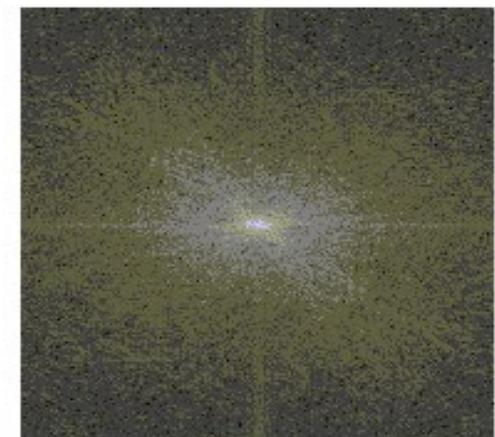
Pertanto  $D(u,v)$  ha tutti i valori nell'intervallo  $[0, 255]$ , e ciò consente la visualizzazione di molti più dettagli.



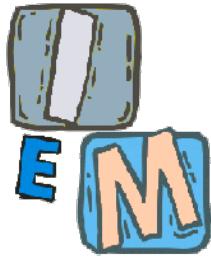
$f(x,y)$



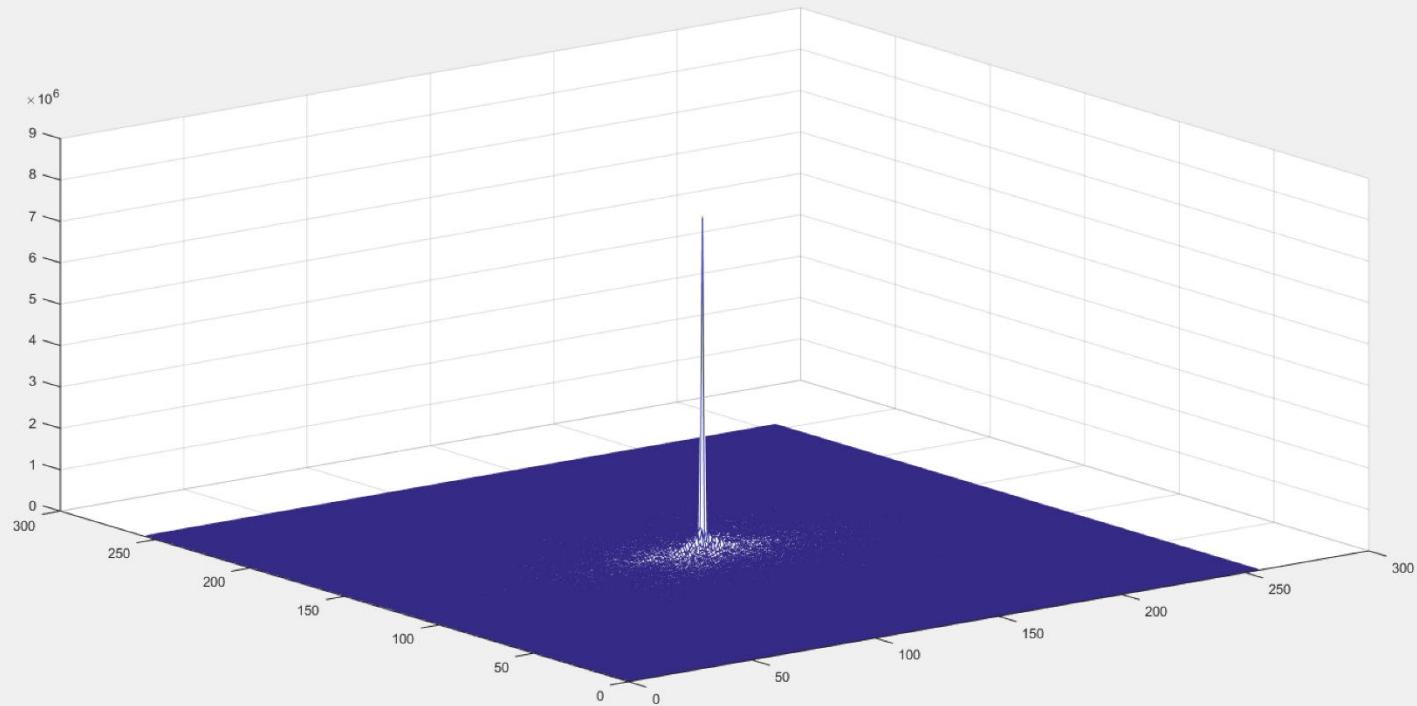
$|F(u,v)|$

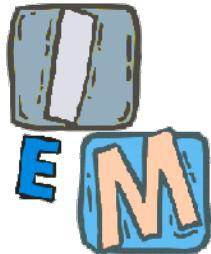


$D(u,v)$

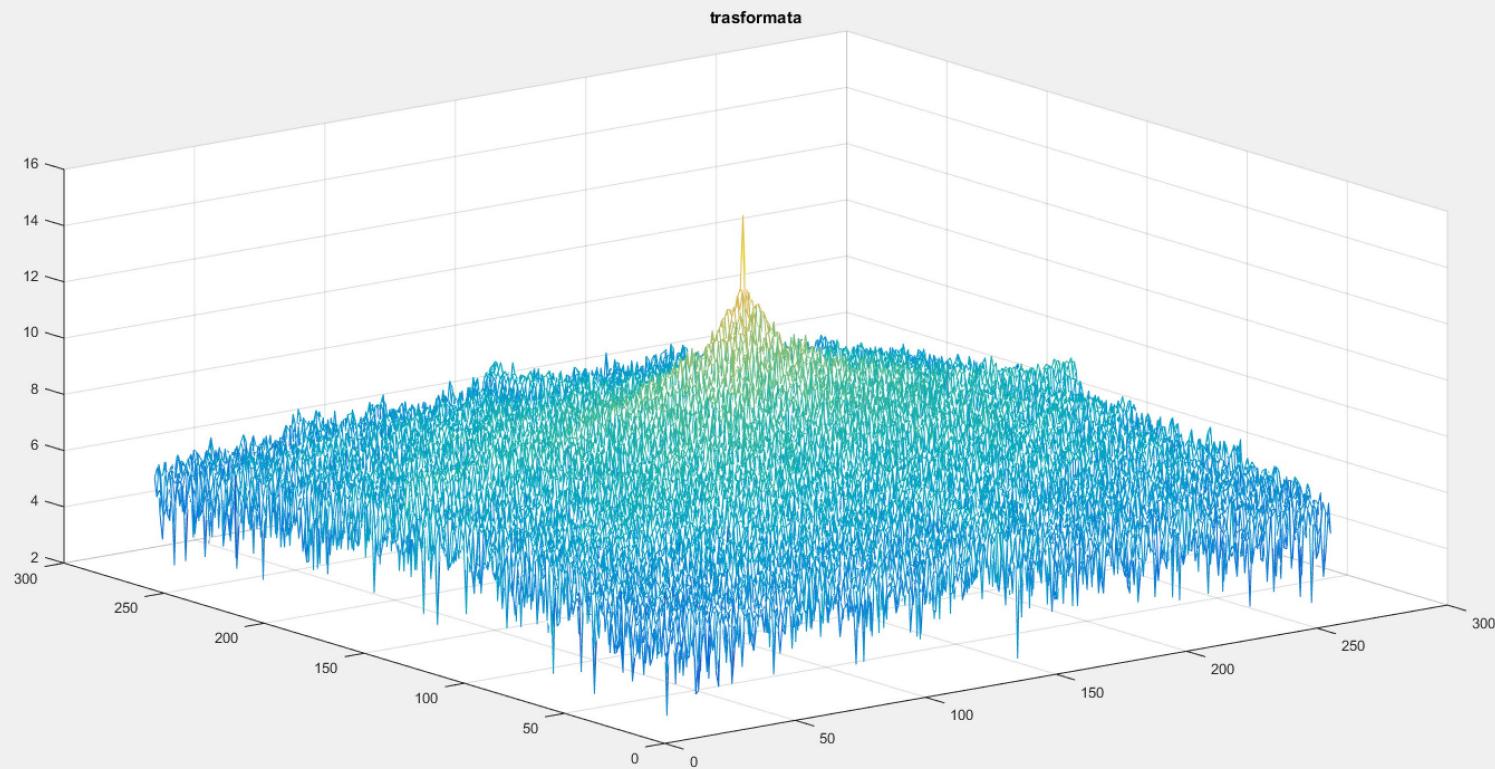


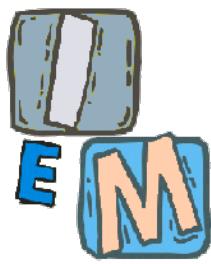
# Modulo di Lena



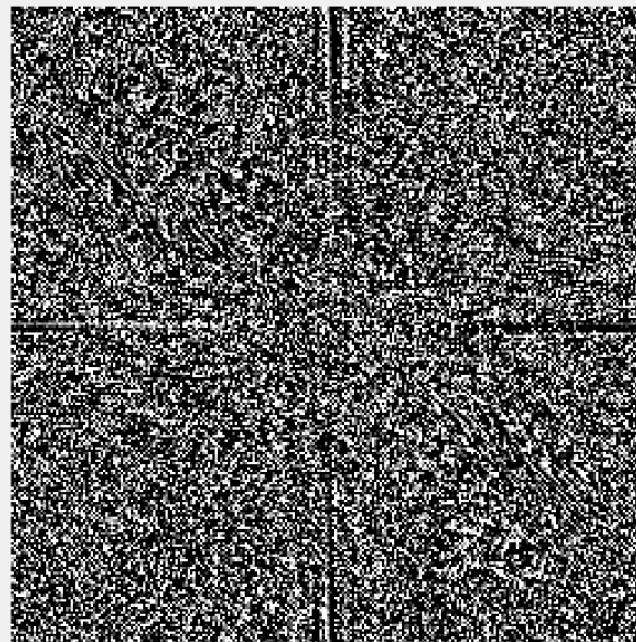


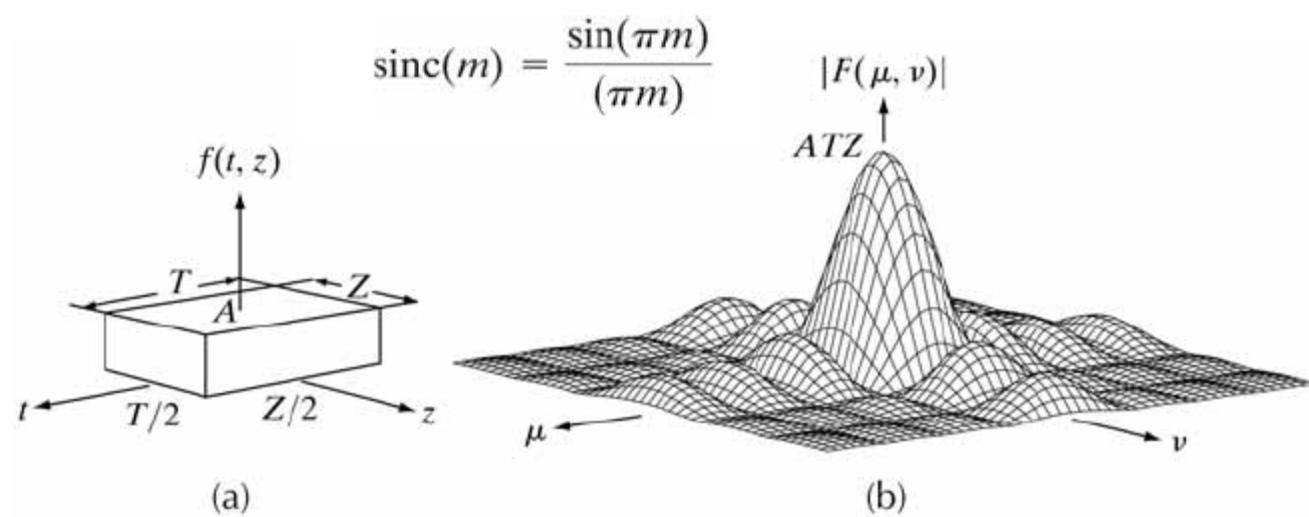
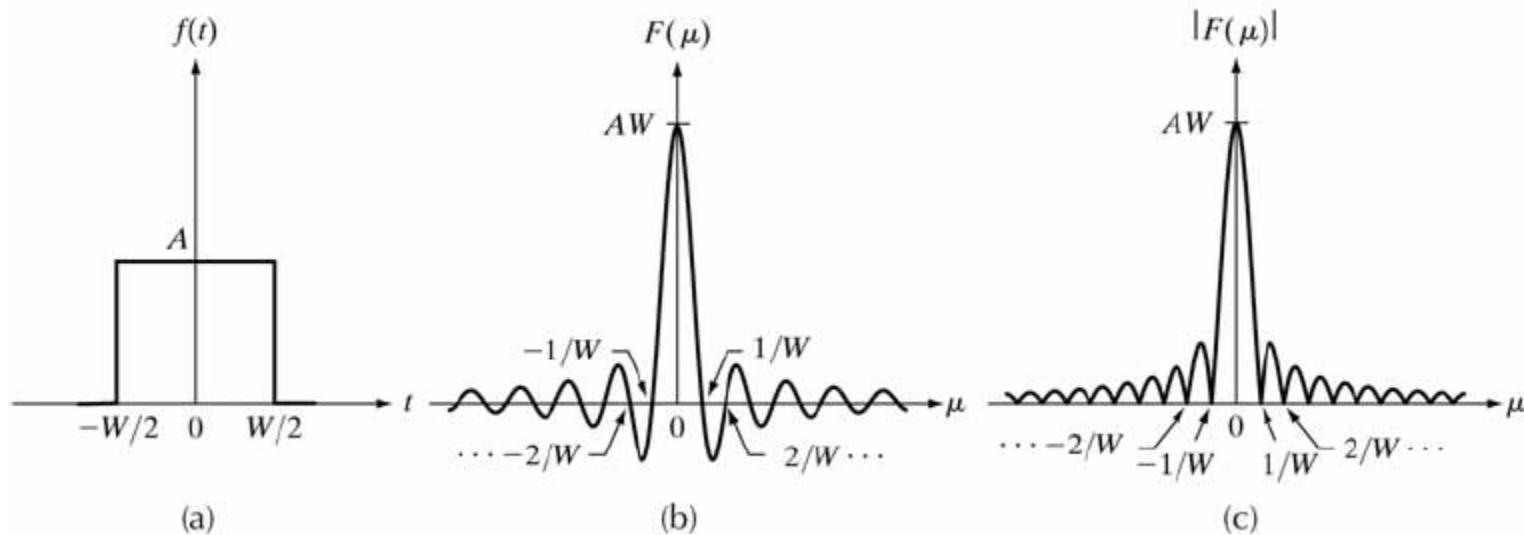
# Logaritmo del modulo di Lena





# Fase di Lena

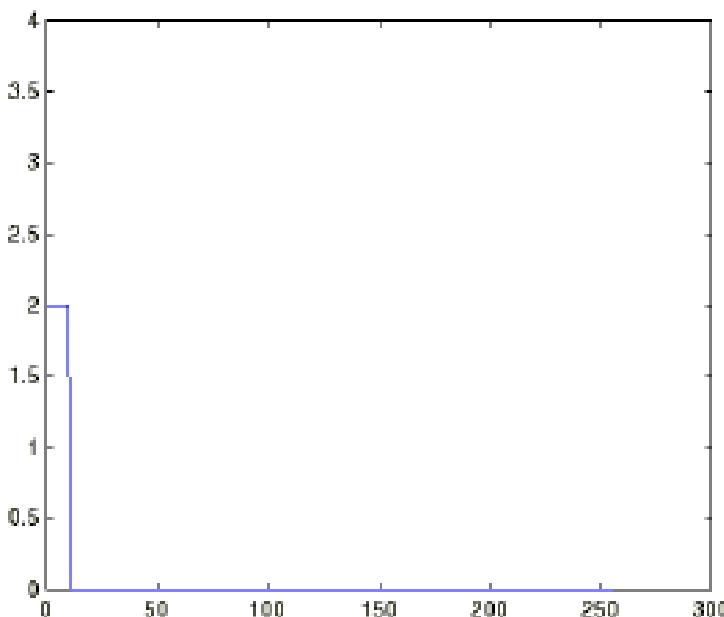




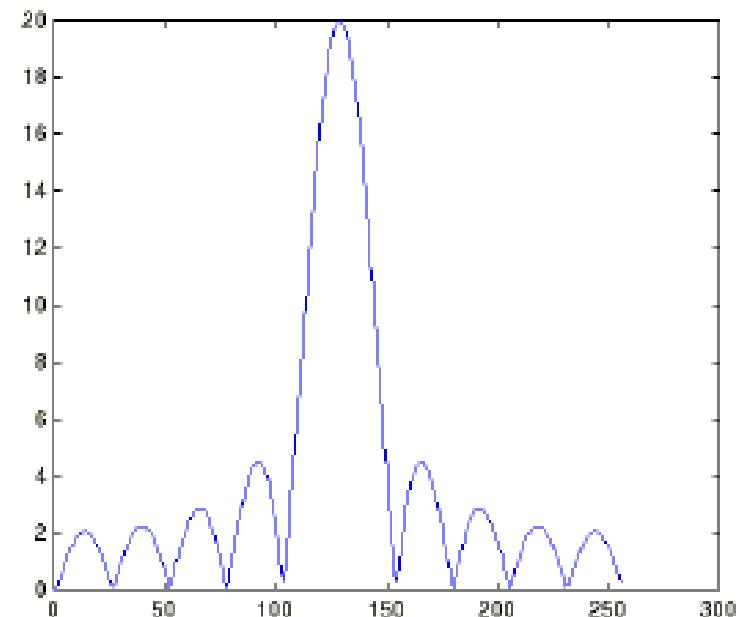


## Esempi

Un esempio di trasformata discreta nel caso 1-D: un **impulso** approssimato da un rettangolo di lato 10 e altezza 2, su una finestra complessiva di 256 valori di  $x$ :



$f(x), x = 0, \dots, 255$

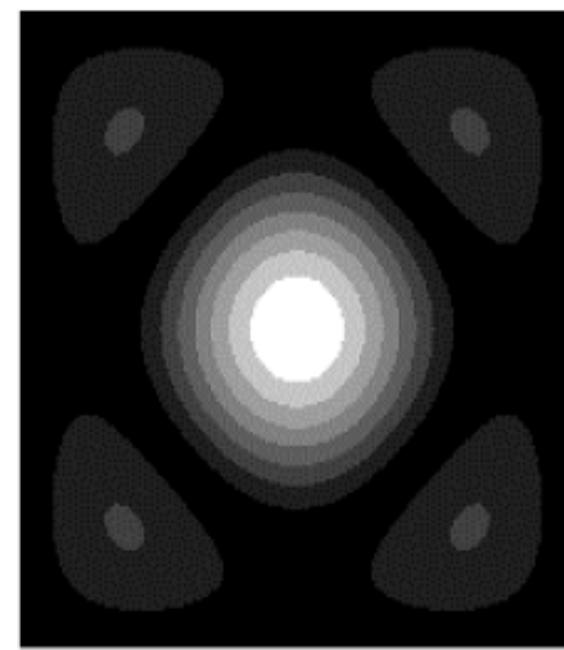
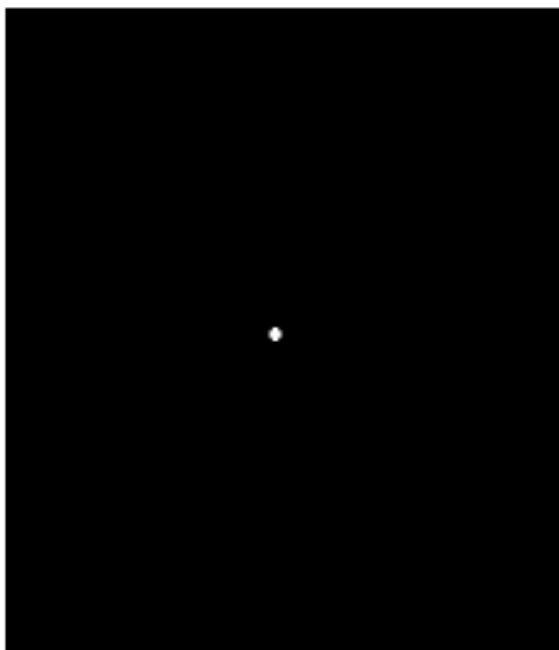


$|F(u)|, x = 0, \dots, 255$



## Esempi

Un esempio di trasformata discreta nel caso 2-D: un **impulso** approssimato da un piccolo cerchio bianco su fondo nero, in un'immagine di circa  $200 \times 200$  pixels. I differenti livelli di grigio nell'immagine di intensità dello spettro evidenziano le ampiezze decrescenti dei diversi lobi.



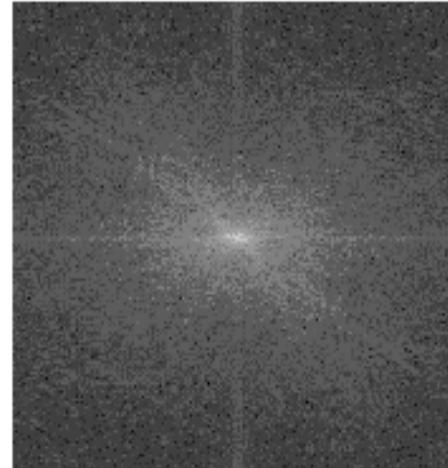
$$|F(u,v)|$$



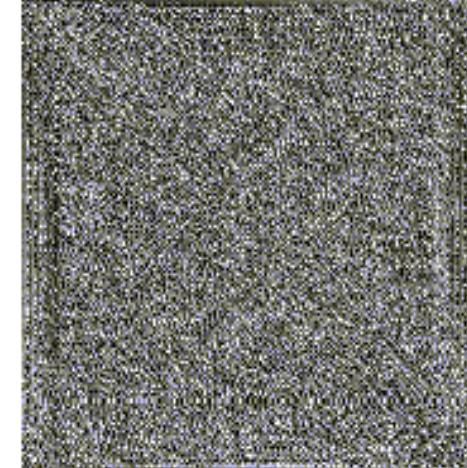
# Esempio



$f(x,y)$



$|F(u,v)|$

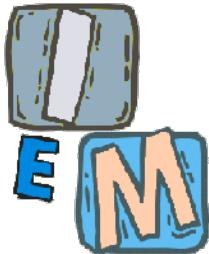


$\Phi(u,v)$

La visualizzazione dello spettro riguarda in realtà non  $|F(u,v)|$  ma una sua versione compressa logaritmicamente. Altrimenti si vedrebbe solo un puntino al centro.

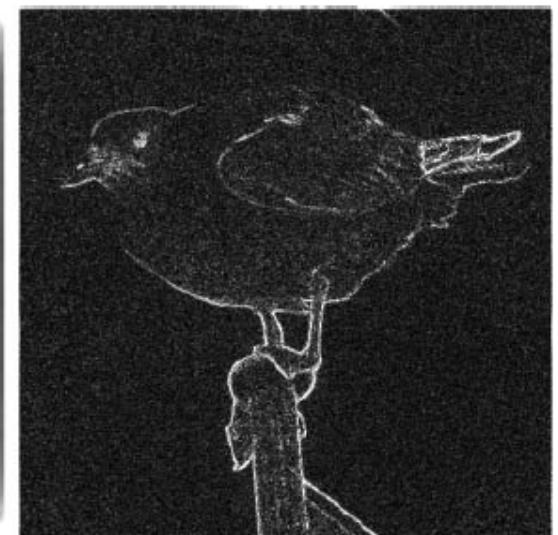
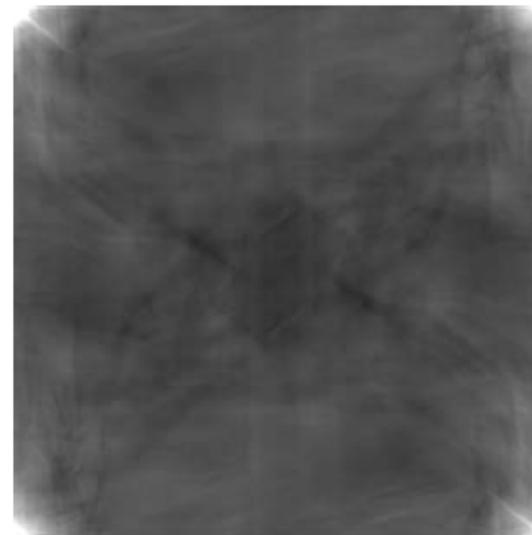
L'ampiezza contiene l'informazione relativa al fatto che una certa struttura periodica è presente nell'immagine.

La fase contiene l'informazione relativa al dove le strutture periodiche evidenziate nella DFT sono collocate. Quindi è molto più significativa di quello che possa sembrare nell'immagine.

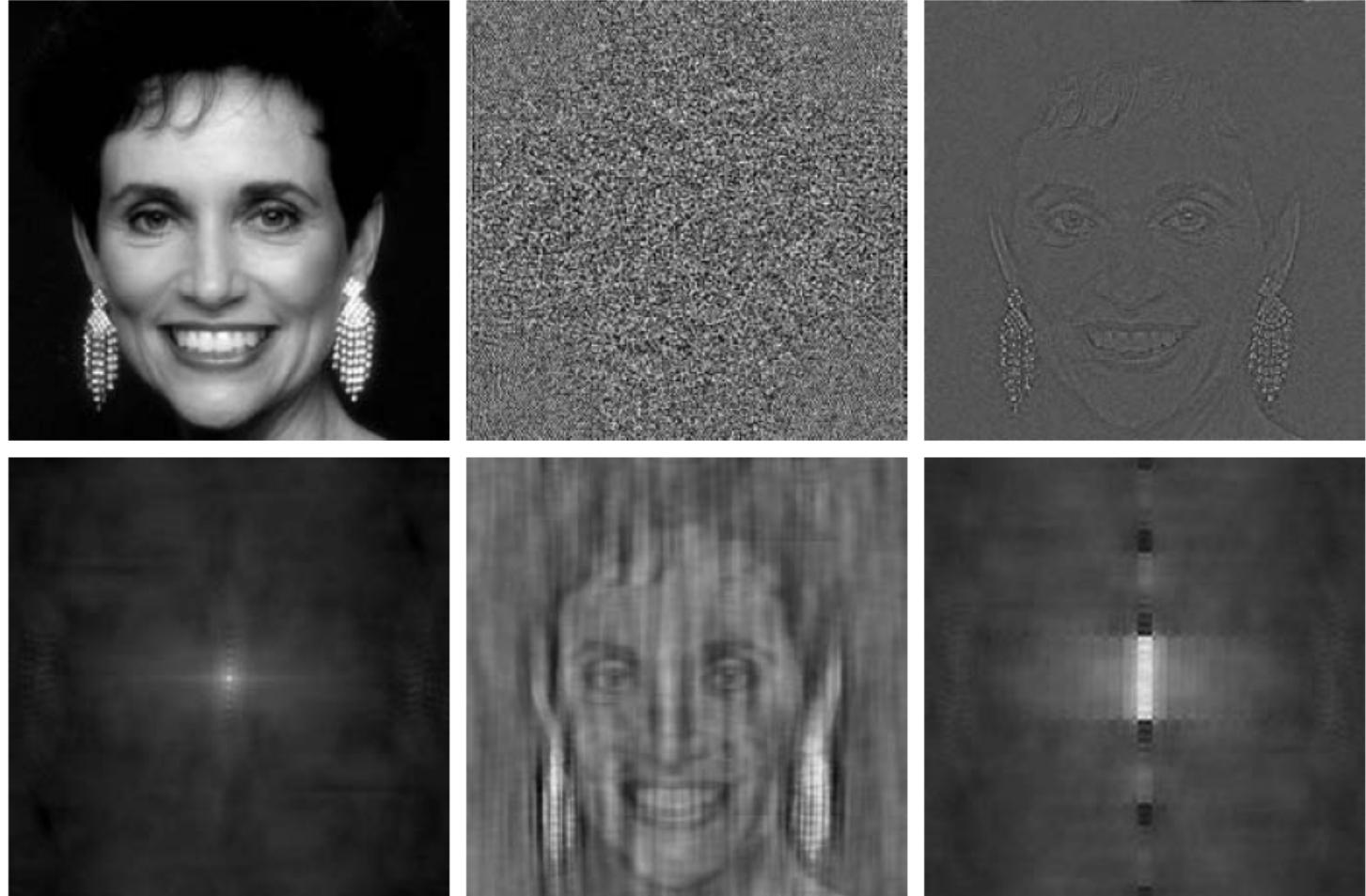


# Aampiezza vs fase

Ricostruzione da solo modulo



Ricostruzione da sola fase

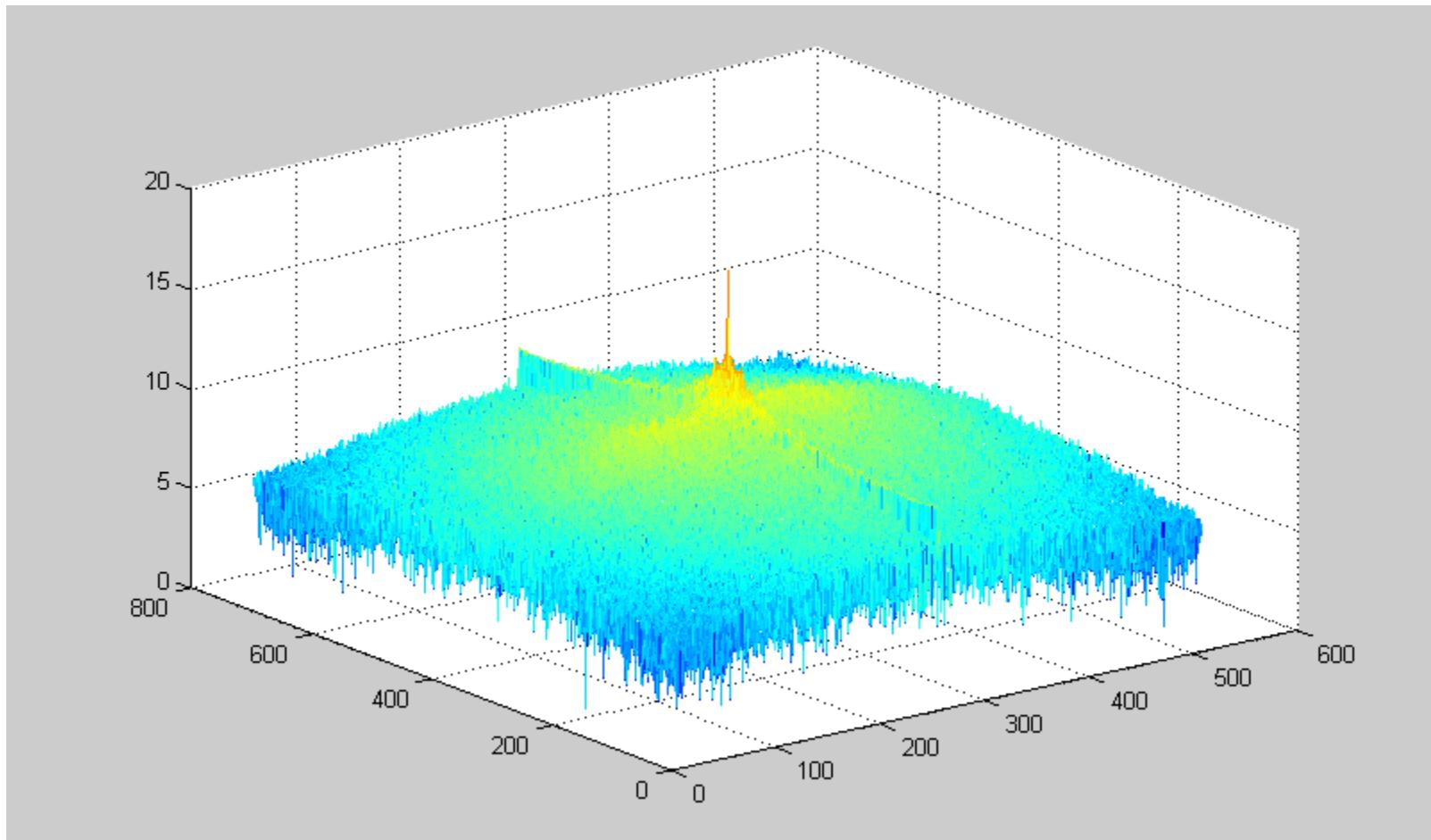


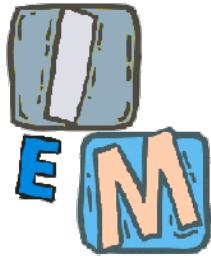
a	b	c
d	e	f

**FIGURE 4.27** (a) Woman. (b) Phase angle. (c) Woman reconstructed using only the phase angle. (d) Woman reconstructed using only the spectrum. (e) Reconstruction using the phase angle corresponding to the woman and the spectrum corresponding to the rectangle in Fig. 4.24(a). (f) Reconstruction using the phase of the rectangle and the spectrum of the woman.

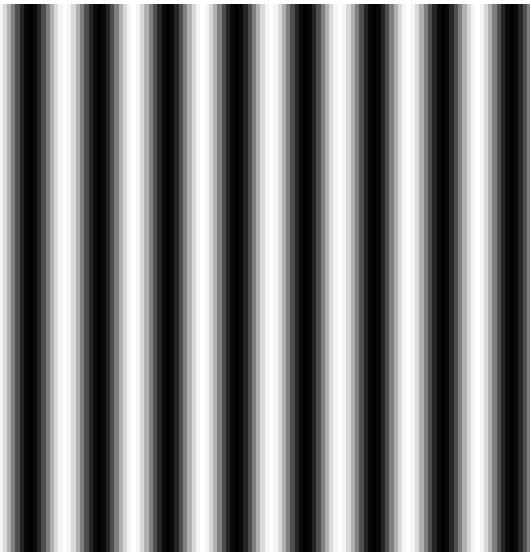


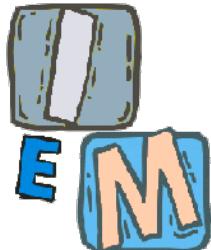
# Modulo in 3D



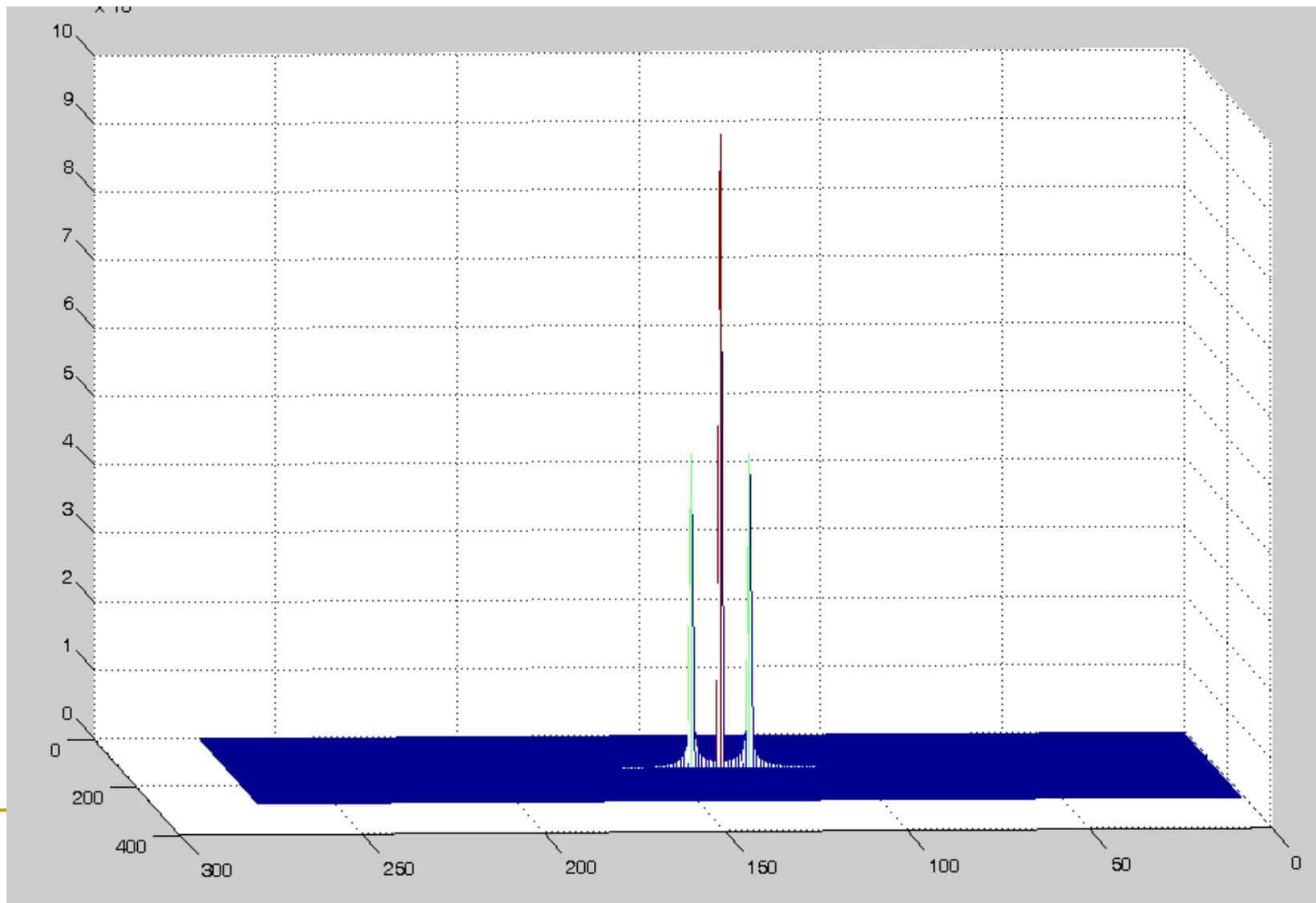


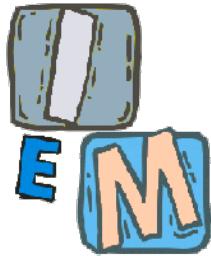
# Qualche esempio



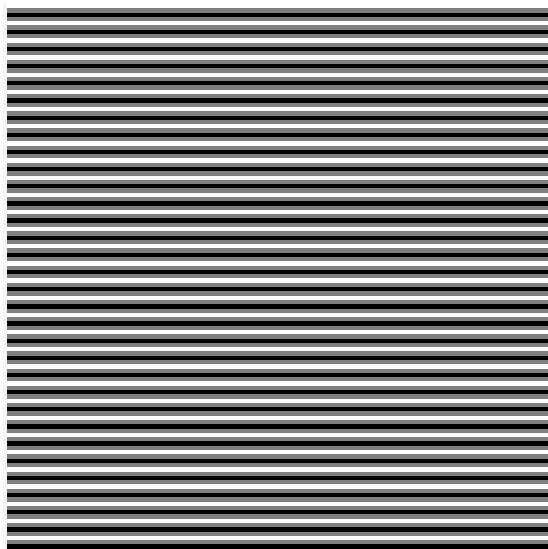


# Lo spettro in 3D

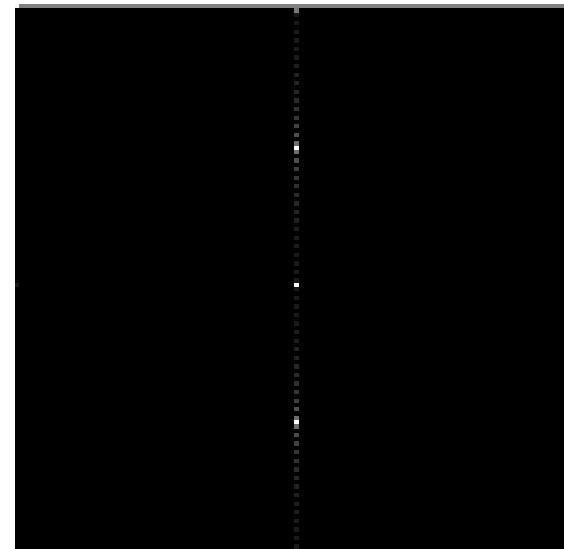


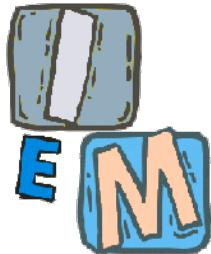


# Altro esempio

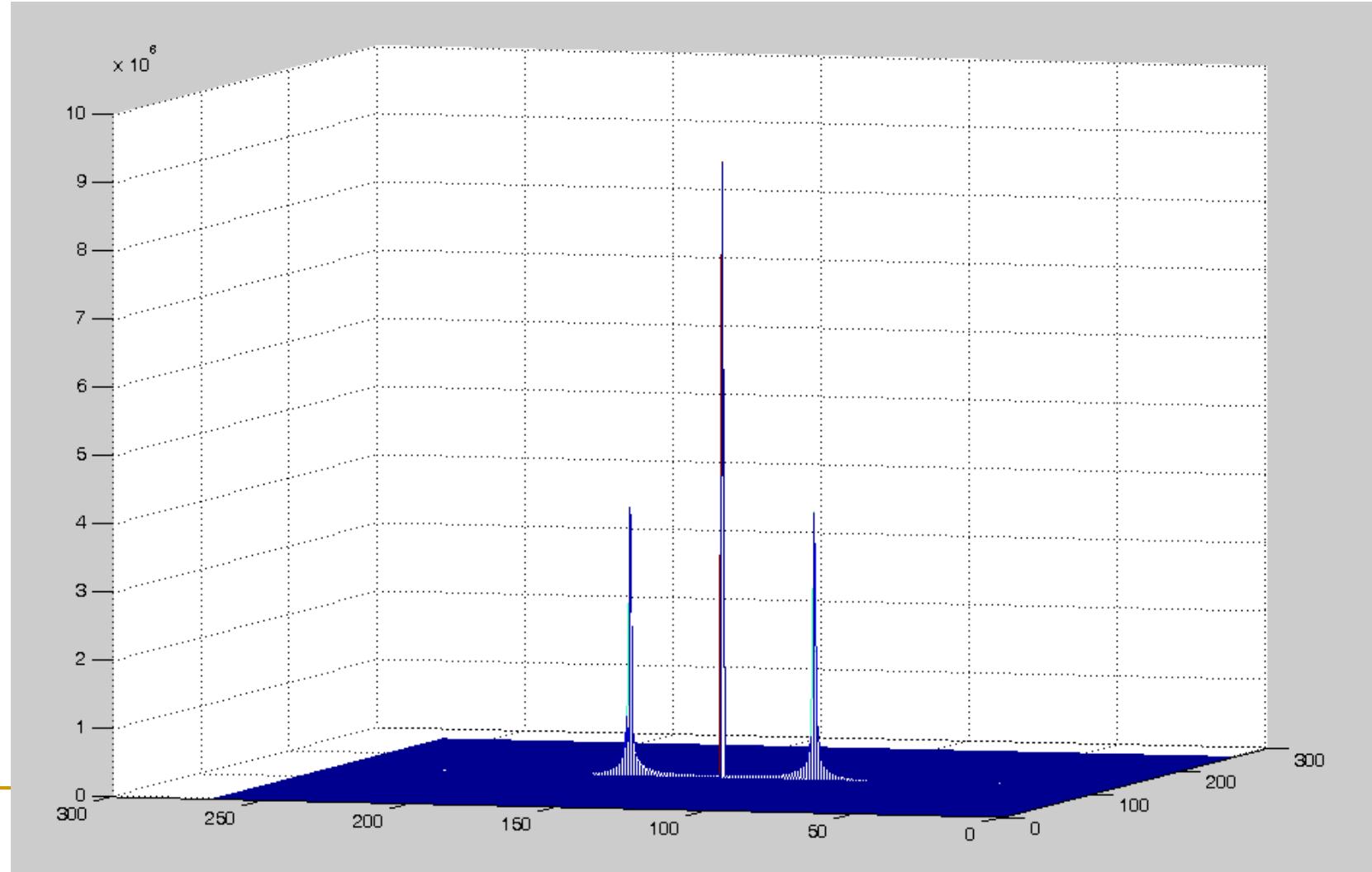


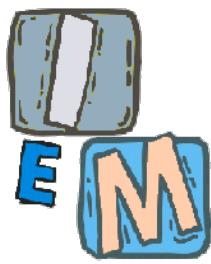
trasformata



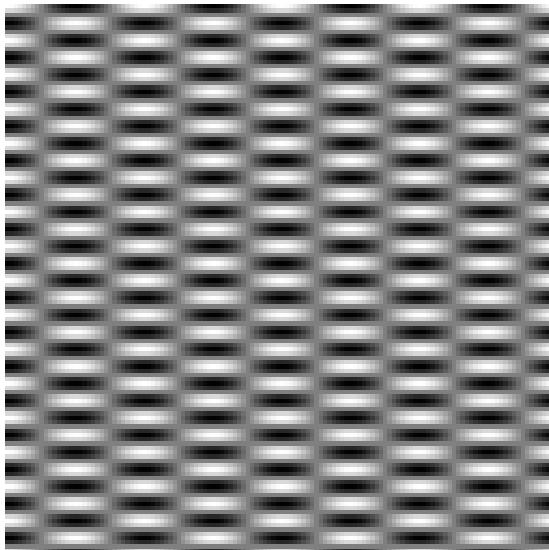


# Lo spettro in 3D

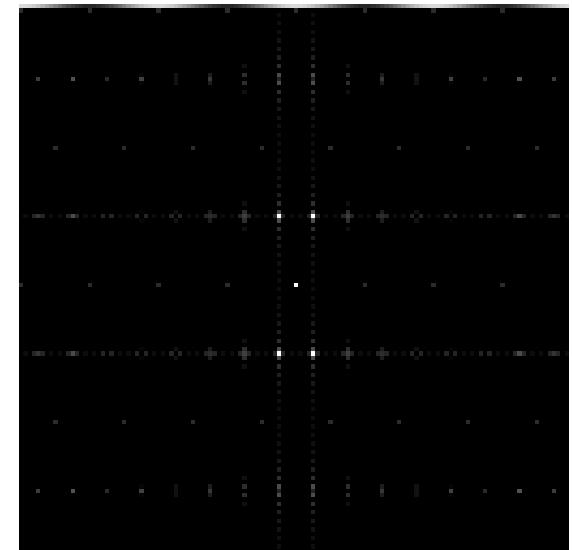


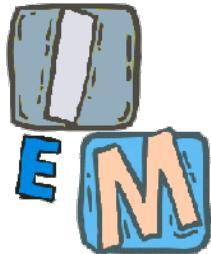


# Esempio

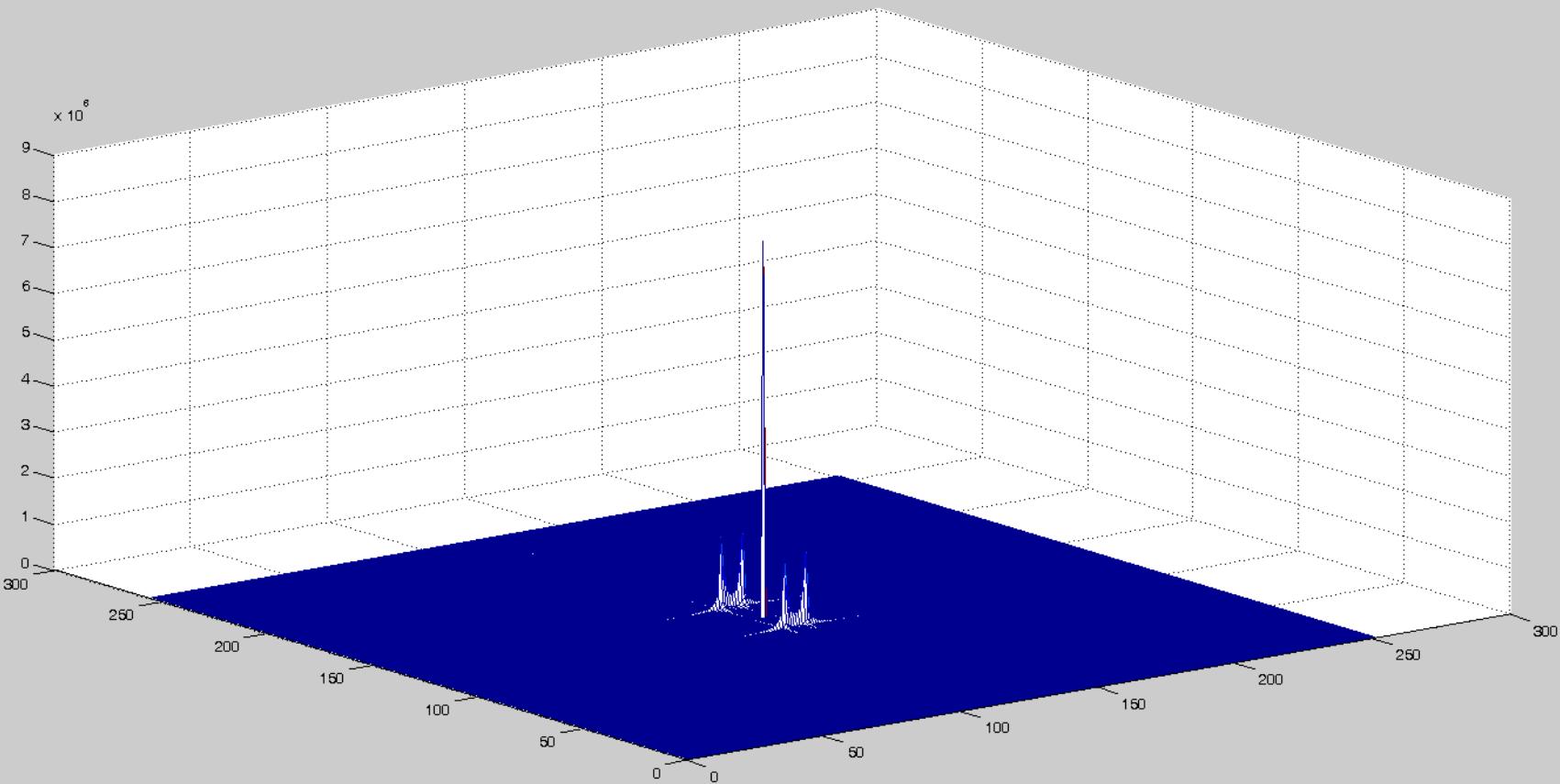


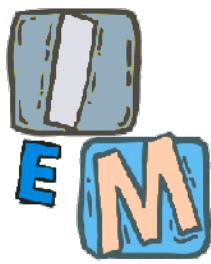
trasformata



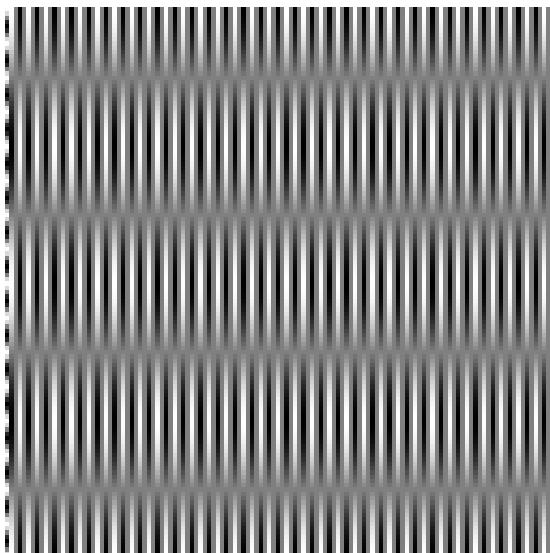


# Lo spettro in 3D

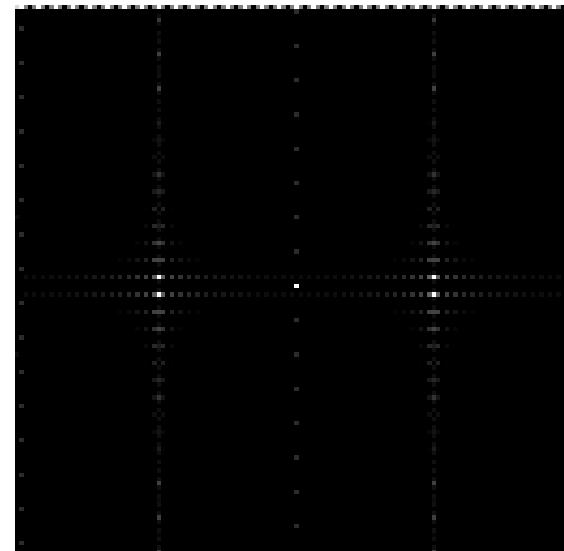


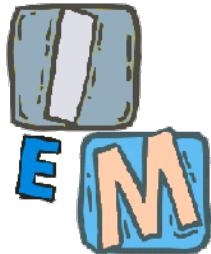


# Esempio

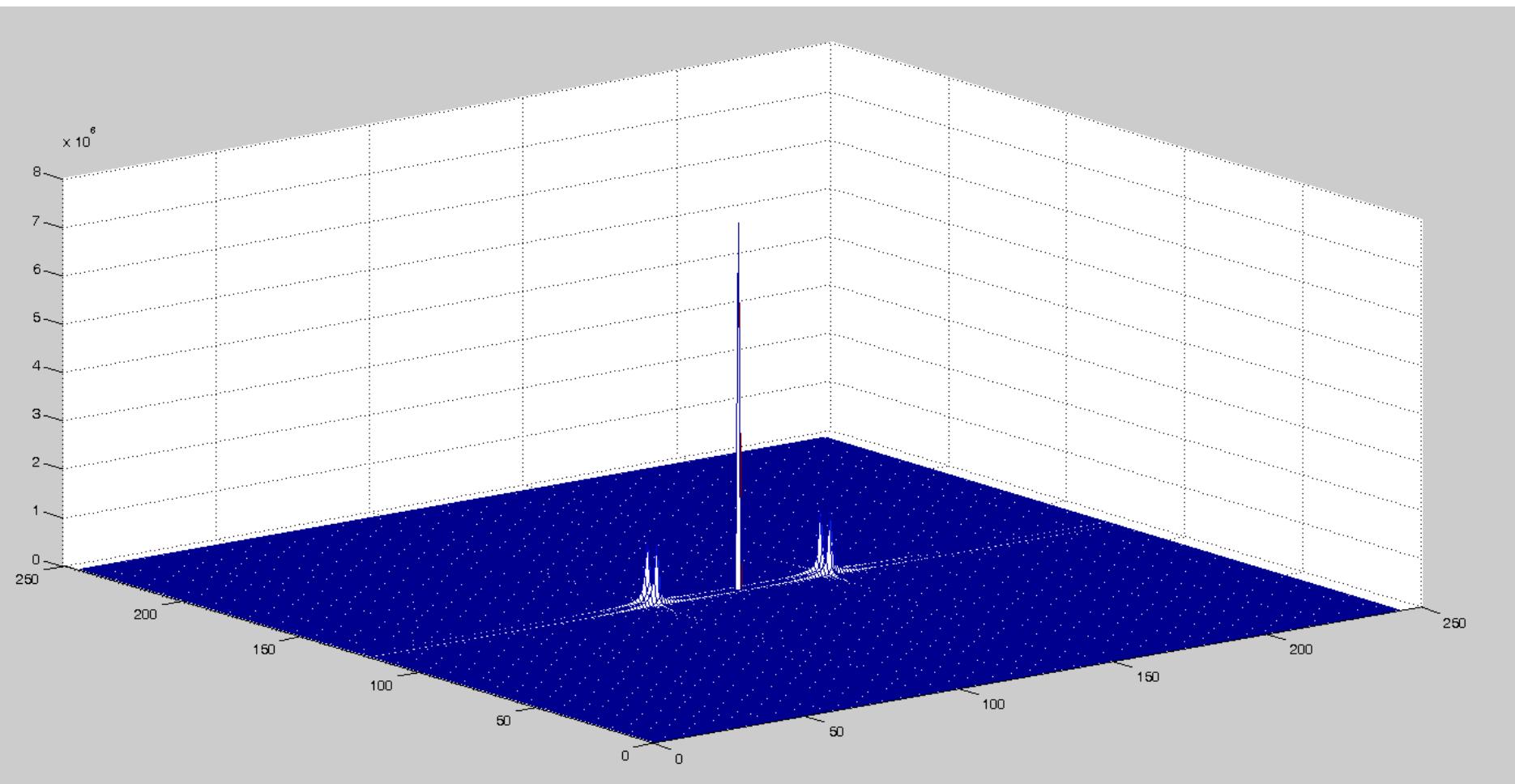


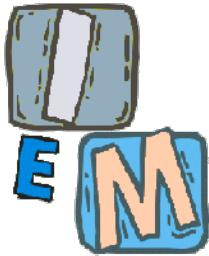
trasformata





# Lo spettro in 3D





# Trasformate di Fourier: vantaggi

- Che vantaggio si può ottenere dalla trasformata di Fourier?
- Nello spazio delle frequenze è possibile:
  - sopprimere frequenze indesiderate
  - ridurre lo spazio occupato dai dati pur limitando la degenerazione del segnale (JPEG, MPEG, DivX, MP3)
  - rigenerare segnali degradati

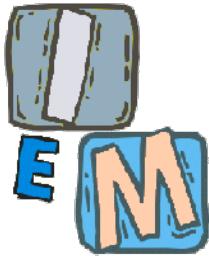


## Discussioni

La trasformazione diretta può essere vista come un processo di **analisi**: il segnale  $f(x)$  viene scomposto nelle sue componenti elementari, che sono nella forma dei **vettori di base**. I coefficienti della trasformata specificano quanto di ogni componente di base è presente nel segnale.

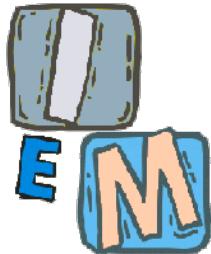
Nella trasformazione inversa, mediante un processo di **sintesi**, il segnale viene ricostruito, come somma pesata delle componenti di base: il peso di ogni vettore di base nella ricostruzione del segnale è rappresentato dal corrispondente coefficiente della trasformata.

Il coefficiente della trasformata è una misura della correlazione tra il segnale ed il corrispondente vettore di base. La trasformazione non comporta perdita di informazione: essa fornisce solo una rappresentazione alternativa del segnale originale.



# Trasformate

- Oltre a quella di Fourier, diverse trasformate utilizzate nell'image processing, con largo impiego nel restauro e, soprattutto, nella compressione, appartengono alla classe delle trasformate unitarie. Fra queste ricordiamo:
  - La trasformata discreta di Walsh (DWT)
  - La trasformata discreta di Hadamard (DHT)
  - La trasformata discreta del Coseno (DCT)
  - La trasformata discreta di Karhunen Loeve (KLT)



# Alcune proprietà della DFT 2-D

Separabilità

Traslazione

Valor Medio



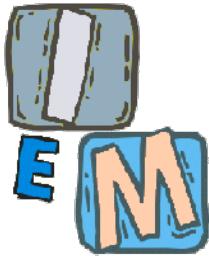
# Separabilità

La trasformata di Fourier discreta può essere espressa in forma separabile. In particolare vale la seguente espressione:

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} g(x, v) e^{\frac{-i\pi ux}{M}}$$

Dove: 
$$g(x, v) = \left[ \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{\frac{-i2\pi vy}{N}} \right]$$

Il principale vantaggio delle proprietà di separabilità è che la  $F(u, v)$  può essere ottenuta applicando in due passi successivi la trasformata 1-D.



# Traslazione

Nel caso bidimensionale è utile prima di operare sulla trasformata applicare uno *shift* (*traslazione*) dell'origine nel punto  $(M/2, N/2)$  cioè nel centro della matrice dei coefficienti delle *frequenze*.

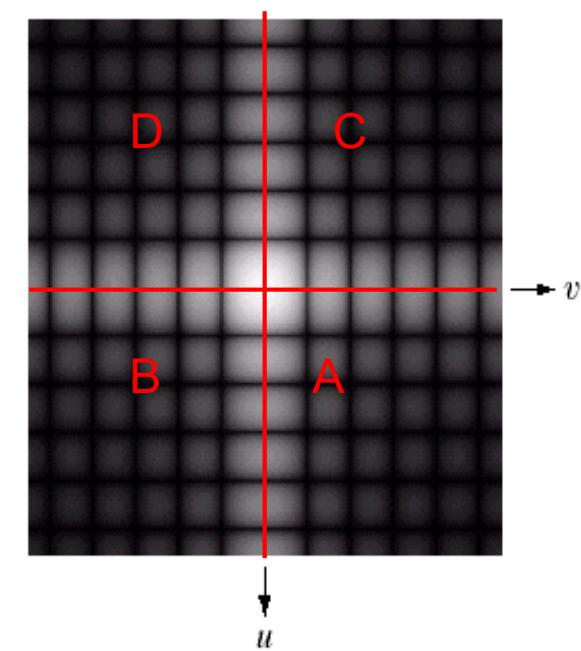
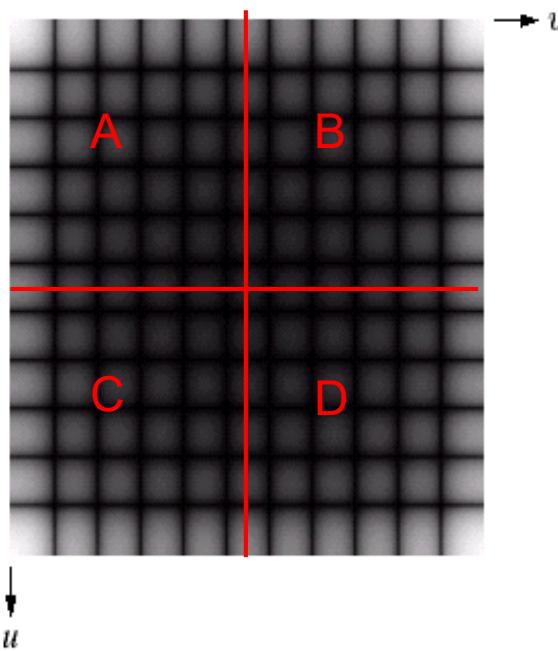
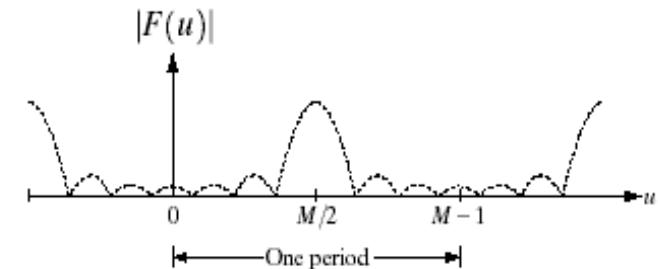
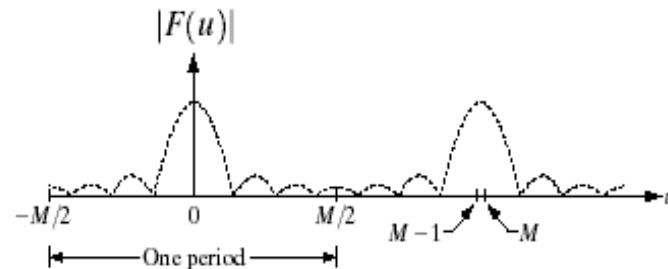
In questo modo i dati vengono traslati in maniera tale che  $F(0,0)$  risulti il centro del rettangolo delle frequenze definito tra  $[0,M-1]$  e  $[0,N-1]$ .

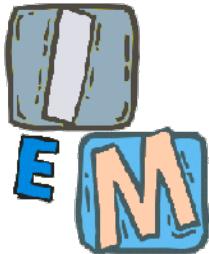
Si dimostra inoltre che uno *shift* nella  $f(x,y)$  non modifica la magnitudo della trasformata.

Queste proprietà vengono utilizzate per una migliore visualizzazione dello spettro.



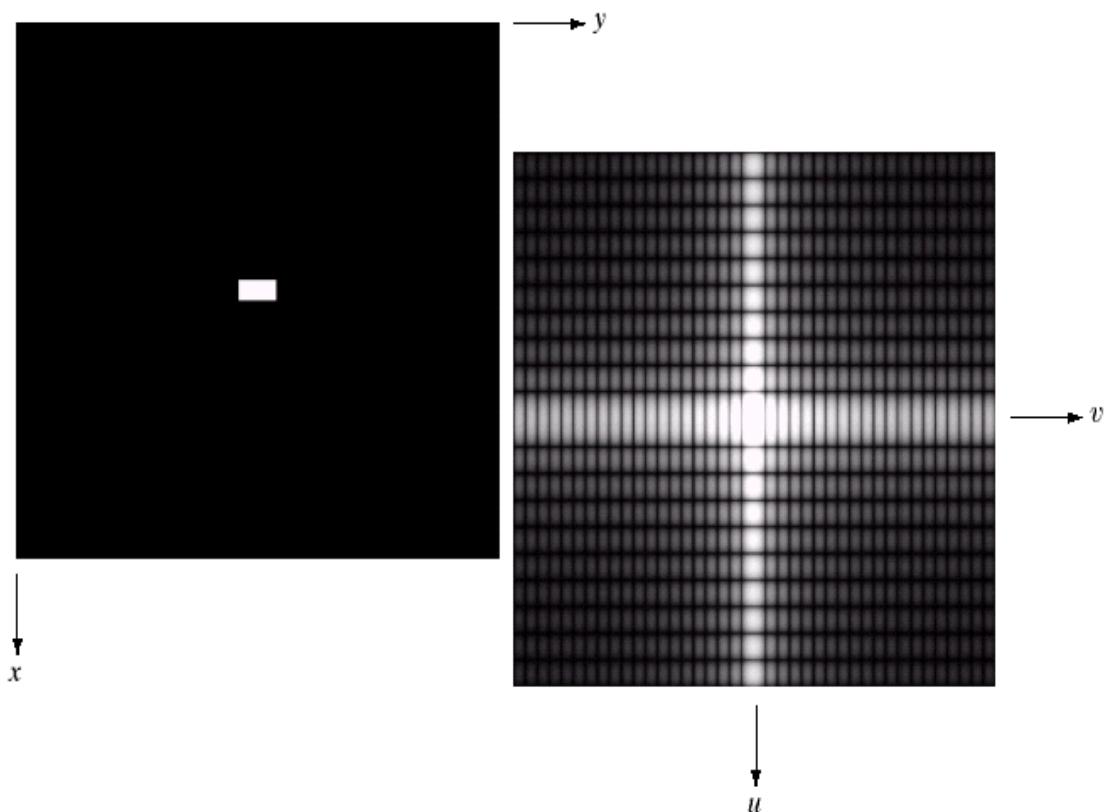
# Traslazione

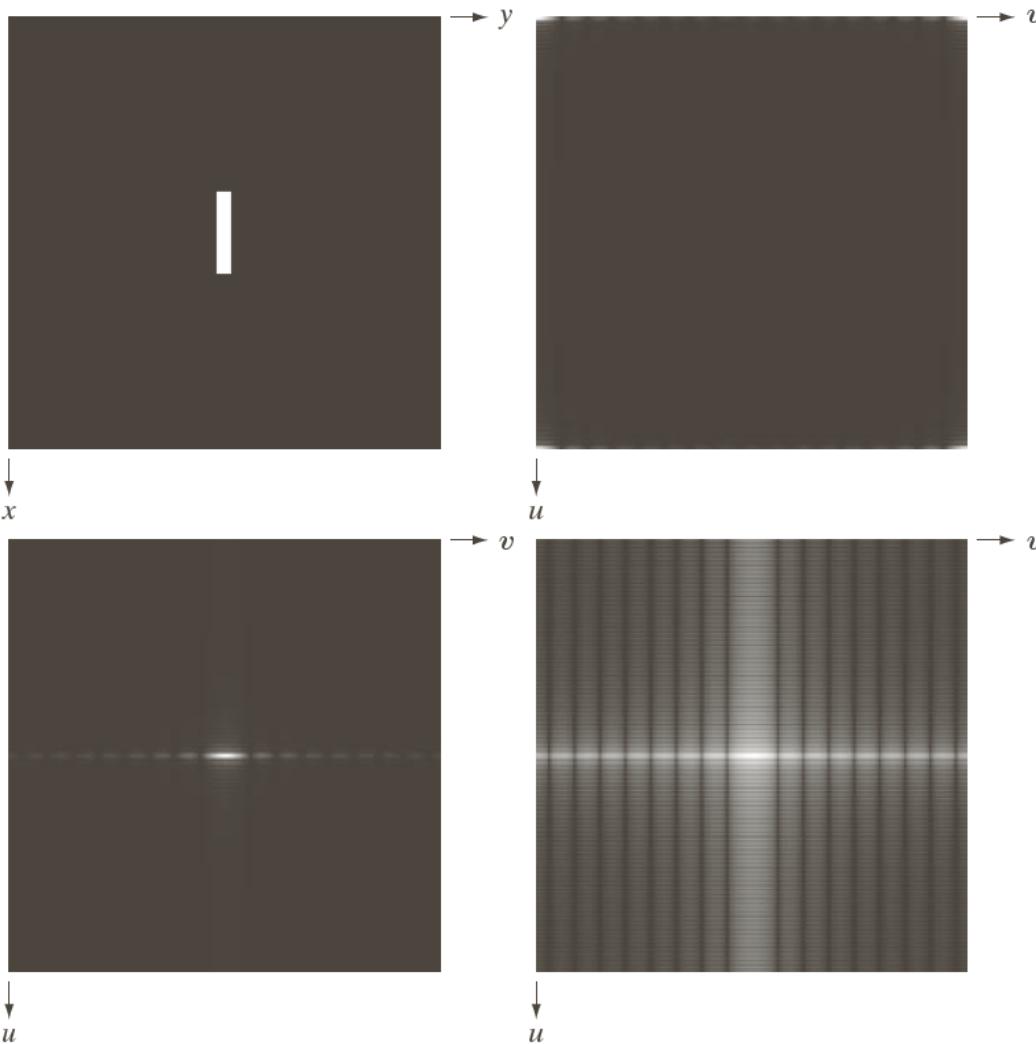




# Traslazione

- La trasformata di un piccolo rettangolo bianco su uno sfondo nero sarà dunque (dopo lo shift)

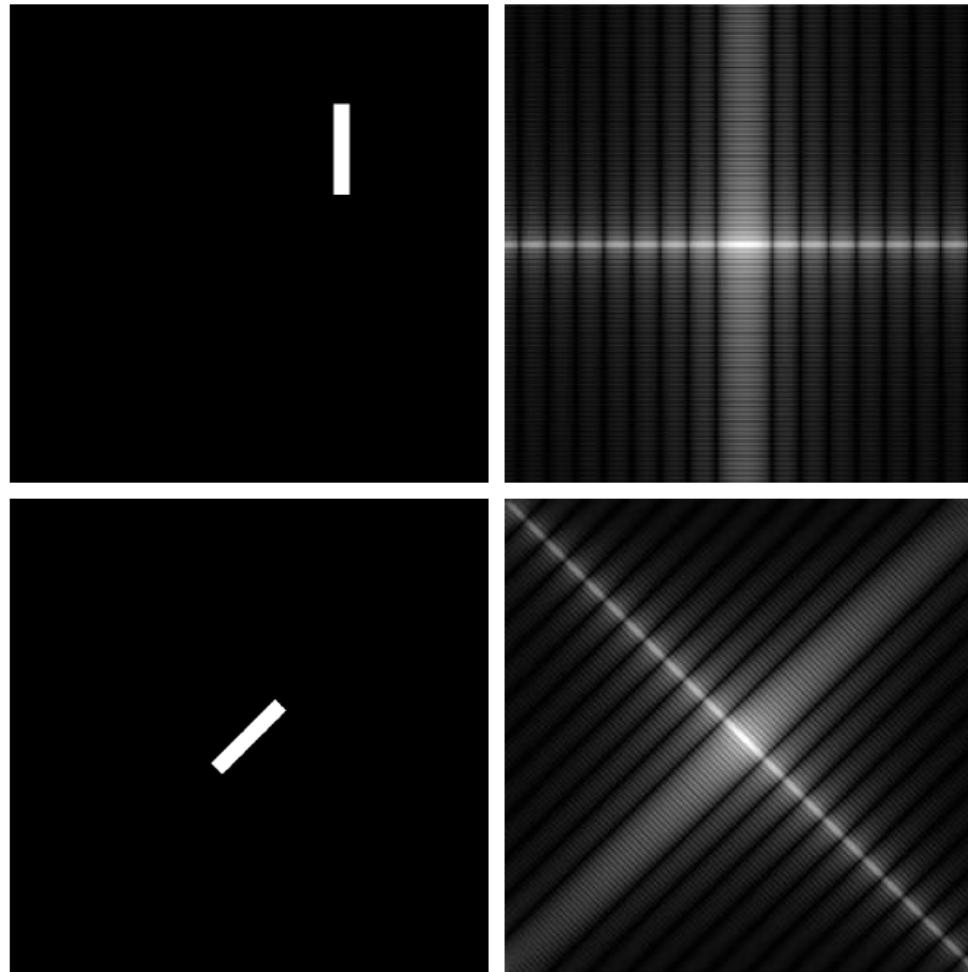
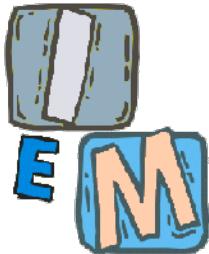




a b  
c d

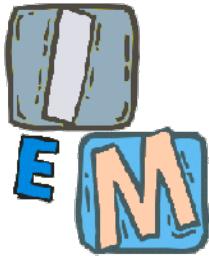
**FIGURE 4.24**

(a) Image.  
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.  
(c) Centered spectrum.  
(d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

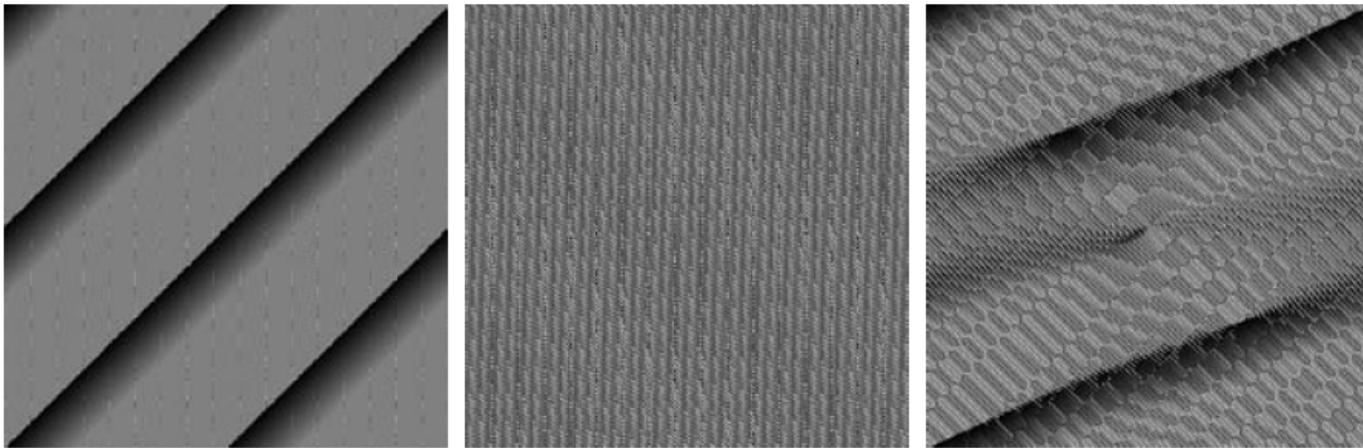


a	b
c	d

**FIGURE 4.25**  
(a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum.  
(c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).



- La trasformata non è sensibile alla traslazione ma alla rotazione. Ciò si evince guardando il modulo.
- Se si guarda la fase, la differenza si nota anche nella traslazione.



a b c

**FIGURE 4.26** Phase angle array corresponding (a) to the image of the centered rectangle in Fig. 4.24(a), (b) to the translated image in Fig. 4.25(a), and (c) to the rotated image in Fig. 4.25(c).



# Valor Medio

Il valore della trasformata nell'origine, cioè nel punto  $(u,v)=(0,0)$  è dato da:

$$F(0,0) = \frac{1}{NxN} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad \bar{f}(x, y) = \frac{1}{NxN} F(0,0)$$

Come si può vedere non è altro che la media di  $f(x,y)$ . Il valore della trasformata di Fourier di un'immagine  $f(x)$  nell'origine è uguale alla media dei valori di grigio contenuti nell'immagine.

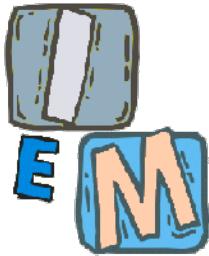
$F(0,0)$  prende anche il nome di *componente continua* o componente DC.



# Fast Fourier Transform

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-i2\pi ux / N]$$

- Nella sua forma classica implementare la trasformata di Fourier richiederebbe un numero di operazioni proporzionale a  $N^2$  ( $N$  moltiplicazioni complesse e  $N-1$  addizioni per ciascuno degli  $N$  valori di  $u$ ).
- Utilizzando opportune tecniche di decomposizione è possibile abbassare la complessità a  $N \log_2 N$ , implementando la cosiddetta Fast Fourier Trasform (FFT).



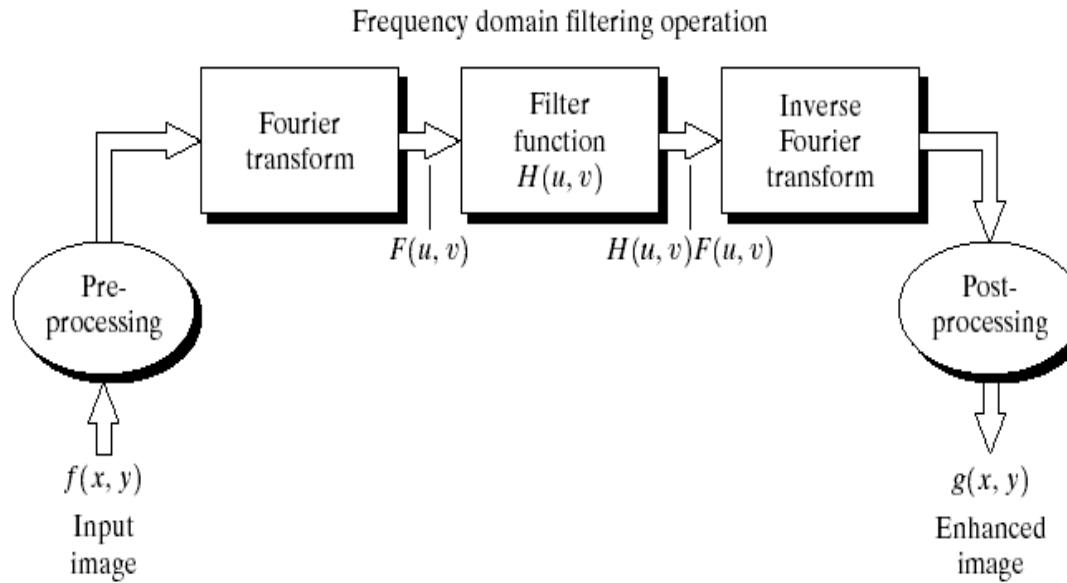
## Frequenze: Low and High

Esclusi i casi banali è normalmente impossibile fare associazioni dirette fra specifiche parti dell'immagine e la sua trasformata (perdita di localizzazione spaziale).

Ricordando che la frequenza è legata alla velocità di variazione è però possibile associare le **basse** frequenze alle zone **uniformi** dell'immagine, quelle **alte** alle variazioni più o meno brusche e quindi ai **bordi** o al **rumore**.



# Filtraggio nel Dominio della Frequenza



La funzione  $H(u,v)$  prende il nome di filtro poiché agisce su alcune frequenze della trasformata lasciando le altre immutate. Molto spesso la funzione  $H$  è una funzione reale e ciascuna sua componente moltiplica sia la corrispondente componente reale che quella immaginaria della  $F$ . Questo tipo di filtri viene detto *zerophaseshift* perché non introduce sfasamento.



# Teorema della Convoluzione

Per quale motivo si usa il dominio delle frequenze e non quello spaziale per usare gli operatori globali?

Perché vale il seguente teorema:

*La convoluzione di due segnali nel dominio spaziale equivale all'antitrasformata del prodotto delle frequenze.*



## Teorema della Convoluzione

Il fondamento teorico delle tecniche di elaborazione nel dominio della frequenza, basate sulla manipolazione della DFT dell'immagine, è rappresentata dal **teorema della convoluzione** che fa corrispondere, alla operazione così definita nel dominio spaziale:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

l'operazione, nel dominio delle frequenze:

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$



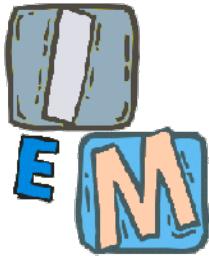
# Teorema della Convoluzione

Quindi se l'operazione di convoluzione nel dominio spaziale è così definita:

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x-m, y-n)$$

La stessa operazione nel dominio delle frequenze diventa:

$$g(x, y) = F^{-1}\{F(u, v)H(u, v)\}$$



# Teorema della Convoluzione

- Complessità per un segnale 1D:

Nel dominio delle frequenze  $O(n \log n)$

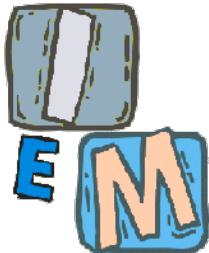
Nel dominio spaziale  $O(n^2)$

*Effettivamente vale la pena passare al dominio delle frequenze!*



## Filtraggio nel Dominio della Frequenza

- Se il filtro ha dimensioni confrontabili con quelle dell'immagine è più efficiente computazionalmente effettuare il filtraggio nel dominio delle frequenze.
- Con maschere più piccole diviene più efficiente il calcolo nel dominio spaziale.
- La definizione di un filtro nel dominio delle frequenze è più intuitiva.



# Come ottenere un filtro a partire da una maschera spaziale

1. Il filtro  $H$  ha la stessa dimensione dell'immagine  $I$ ;
2.  $H$  deve avere in alto a sinistra i valori della maschera spaziale, nel resto sempre il valore 0;
3. Si fa lo shift di  $H$
4. Si calcola da  $H$  la trasformata di fourier.

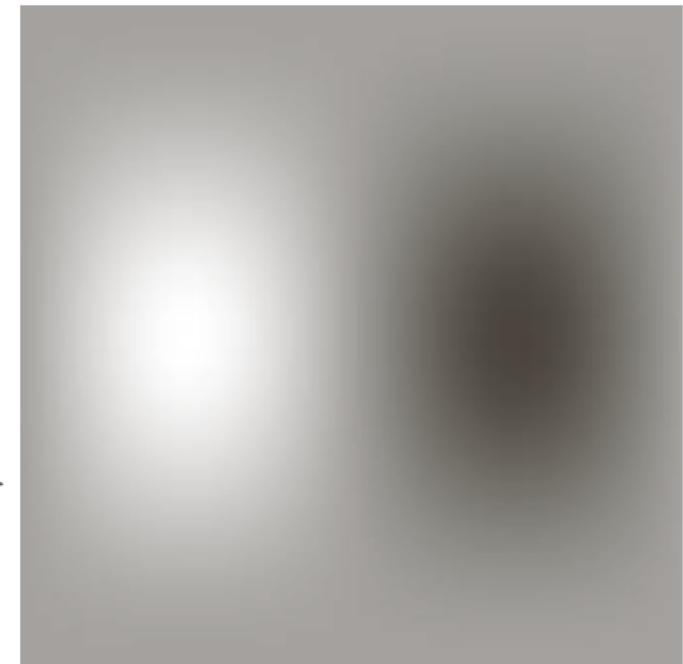
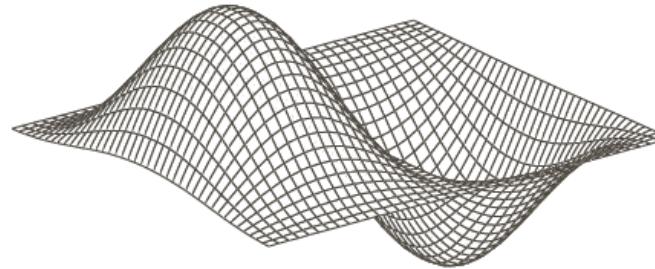


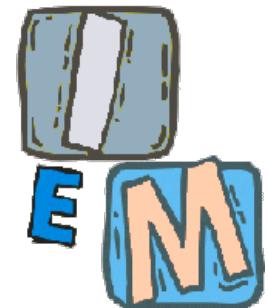
-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

a	b
c	d

**FIGURE 4.39**

(a) A spatial mask and perspective plot of its corresponding frequency domain filter. (b) Filter shown as an image. (c) Result of filtering Fig. 4.38(a) in the frequency domain with the filter in (b). (d) Result of filtering the same image with the spatial filter in (a). The results are identical.





# Filtri low pass nel dominio della frequenza

Lowpass filters.  $D_0$  is the cutoff frequency and  $n$  is the order of the Butterworth filter.

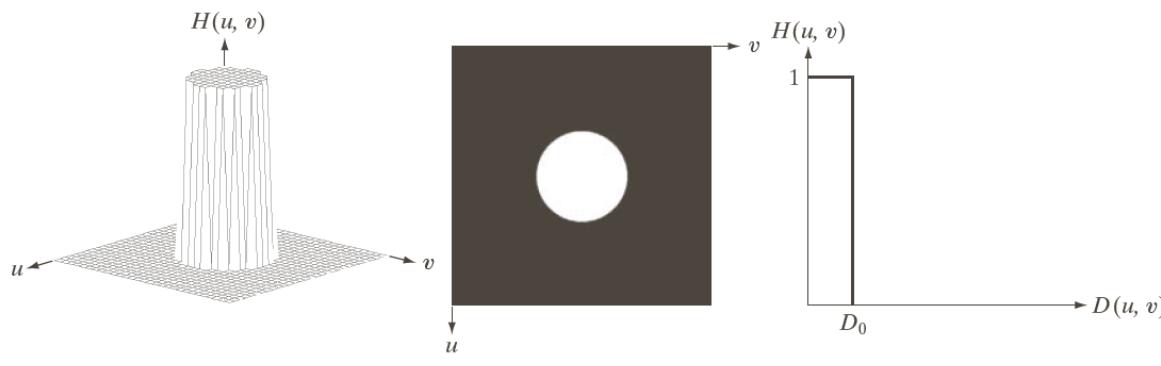
Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$	$H(u, v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$



# Low pass ideale

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u, v) = [(u - P/2)^2 + (v - Q/2)^2]^{1/2}$$



a b c

**FIGURE 4.40** (a) Perspective plot of an ideal lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.



# Low pass ideale

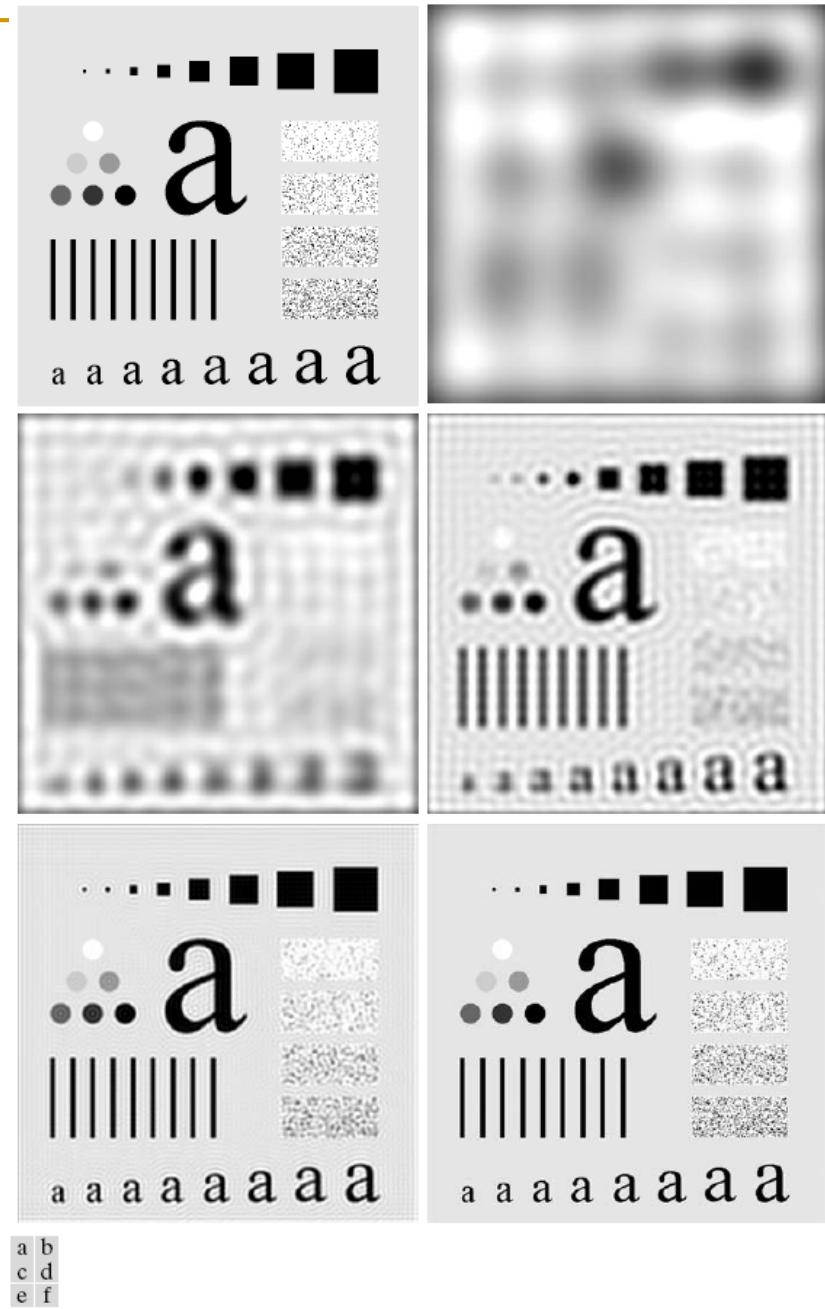
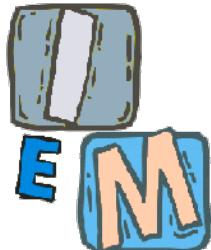
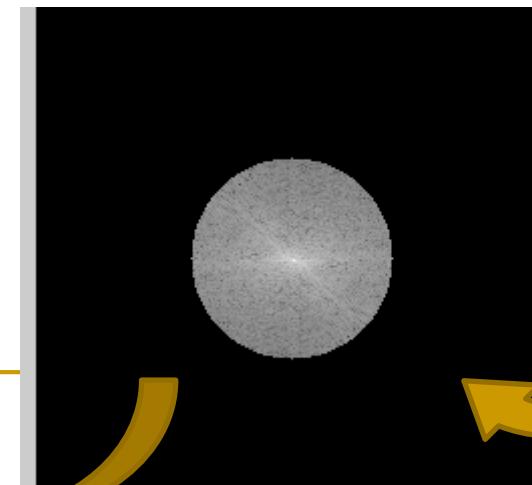
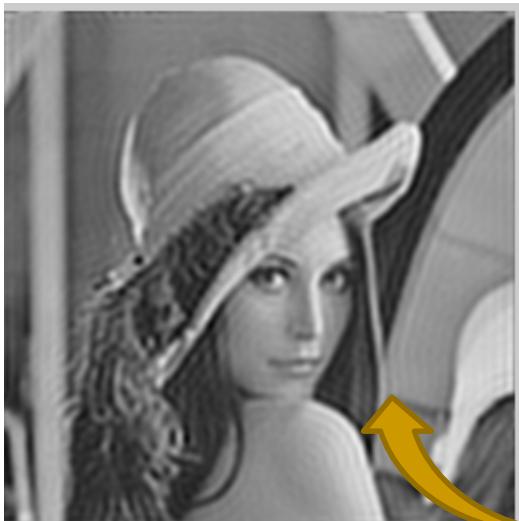
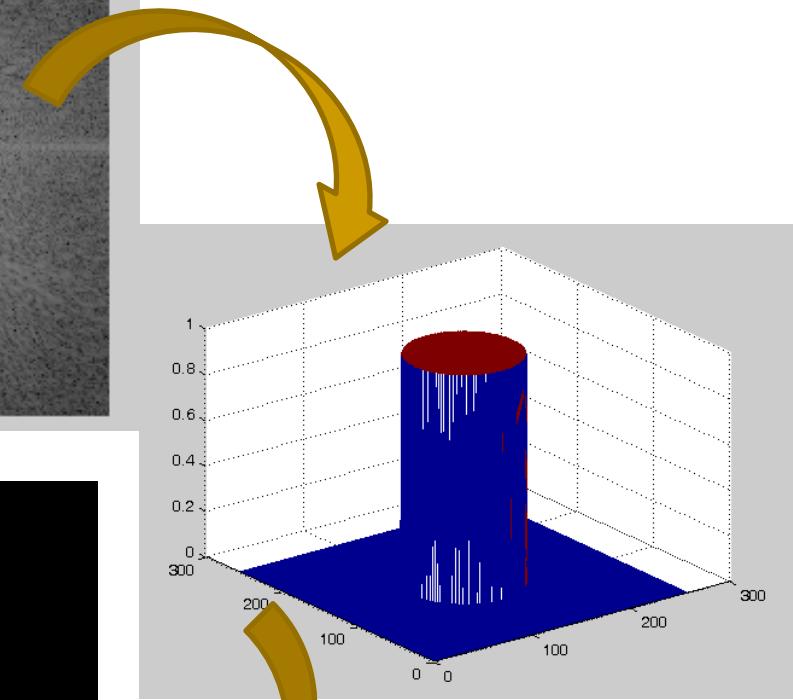
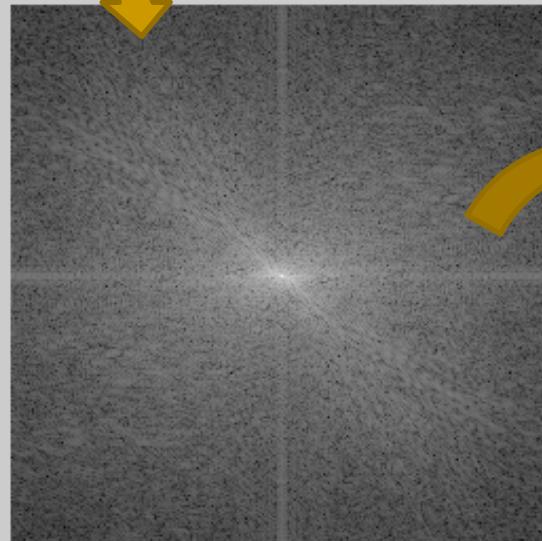
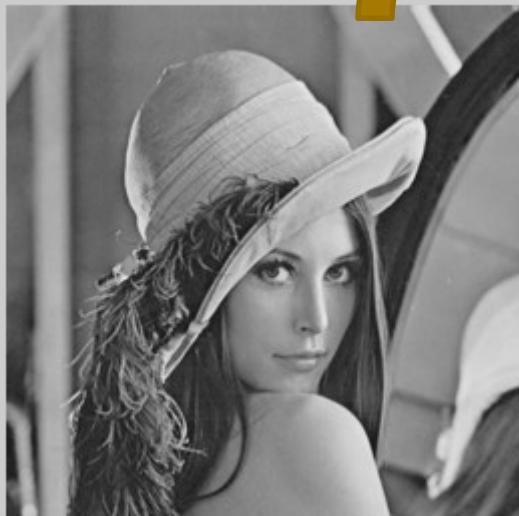


FIGURE 4.42 (a) Original image. (b)-(f) Results of filtering using ILPFs with cutoff frequencies set at radii values 10, 30, 60, 160, and 460, as shown in Fig. 4.41(b). The power removed by these filters was 13, 6.9, 4.3, 2.2, and 0.8% of the total, respectively.

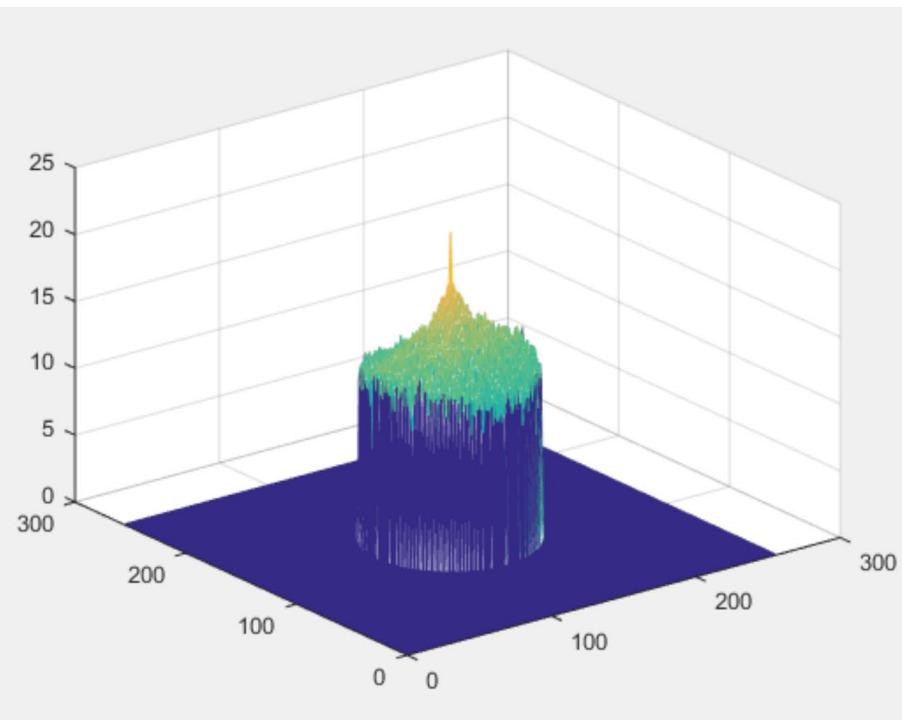
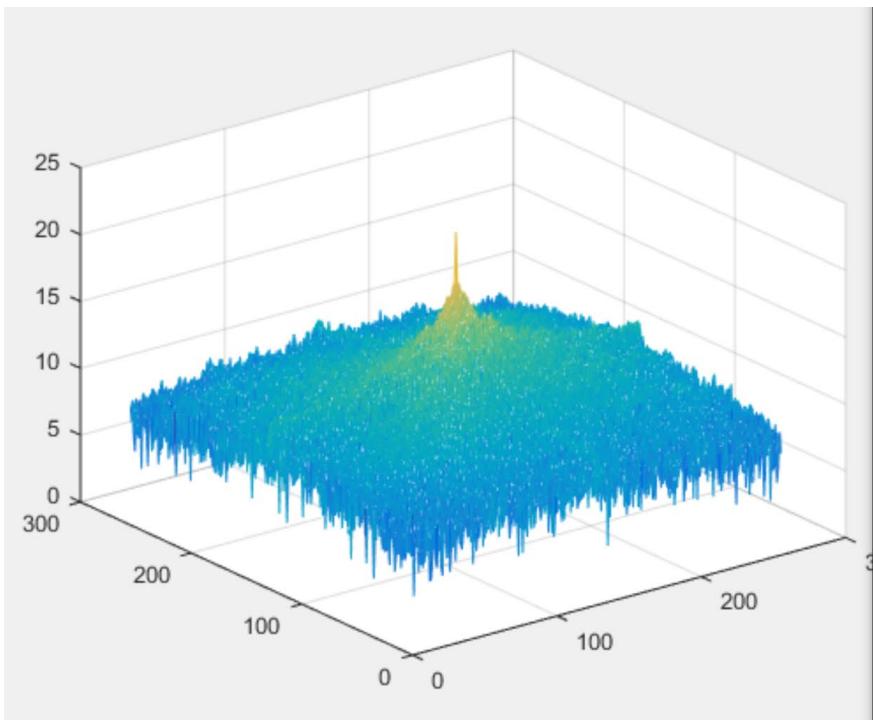


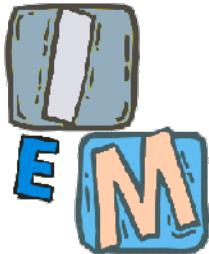
# Filtro low-pass ideale





# Filtro low-pass ideale con $D_0=50$

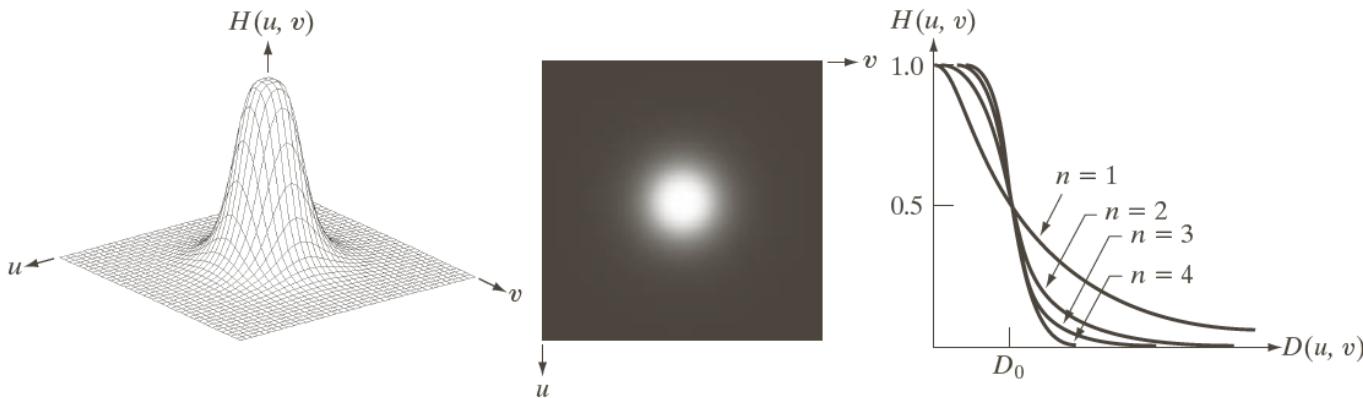




# Filtri low pass di Butterworth

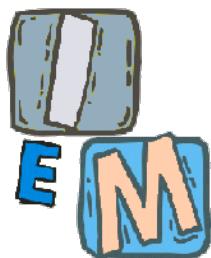
La funzione di trasferimento del filtro **passa-basso di Butterworth** di ordine  $n$  e frequenza di taglio  $D_0$  è:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}}$$

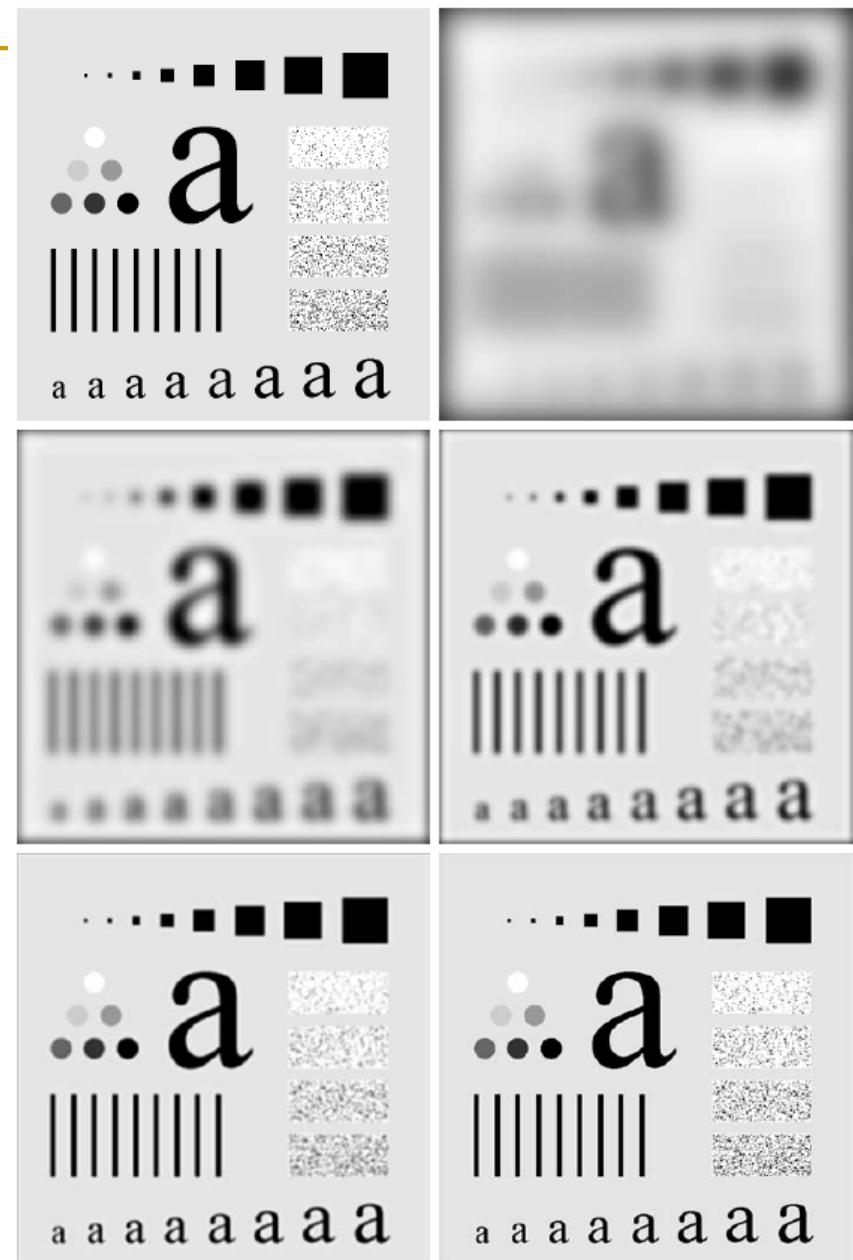


a b c

**FIGURE 4.44** (a) Perspective plot of a Butterworth lowpass-filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections of orders 1 through 4.



# Filtro di Butterworth

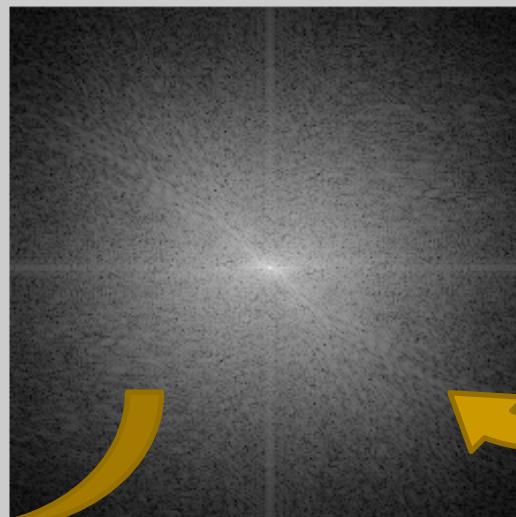
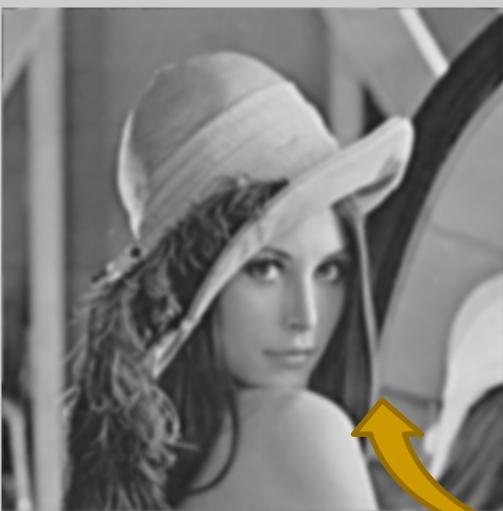
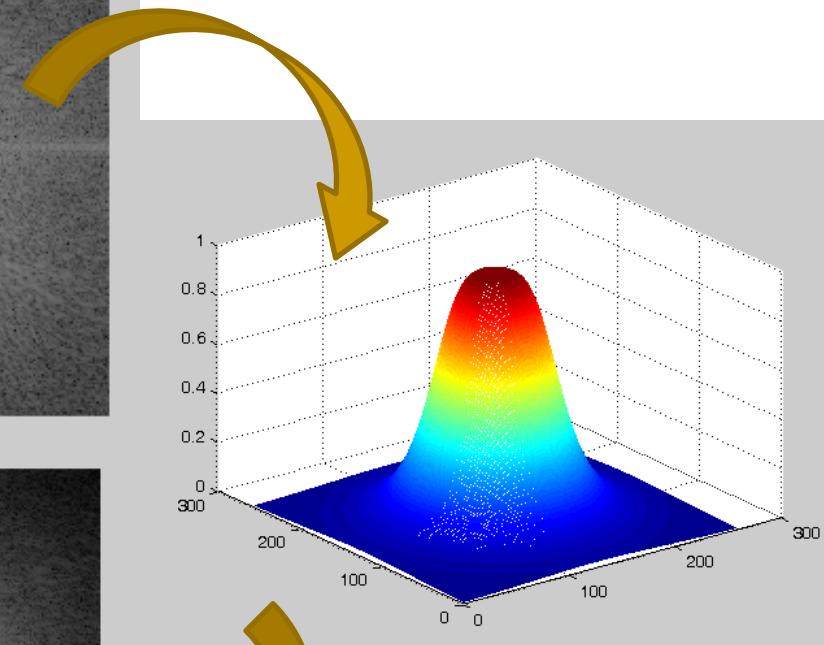
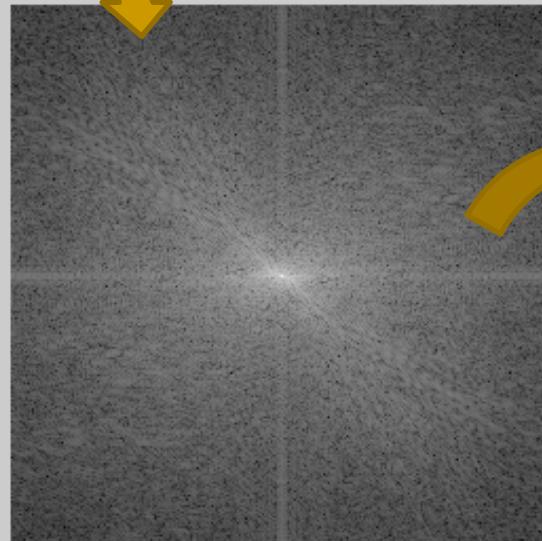
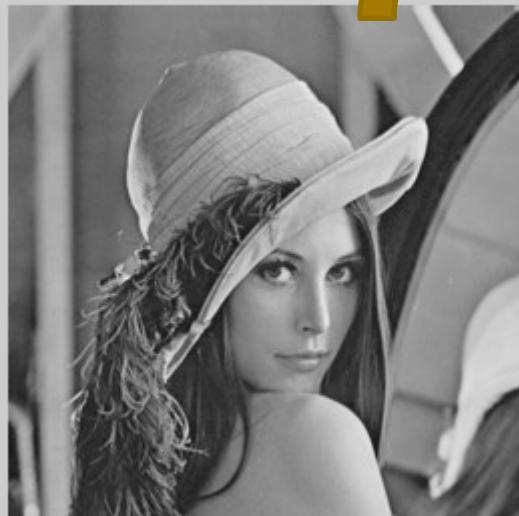


a b  
c d  
e f

FIGURE 4.45 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Fig. 4.42.

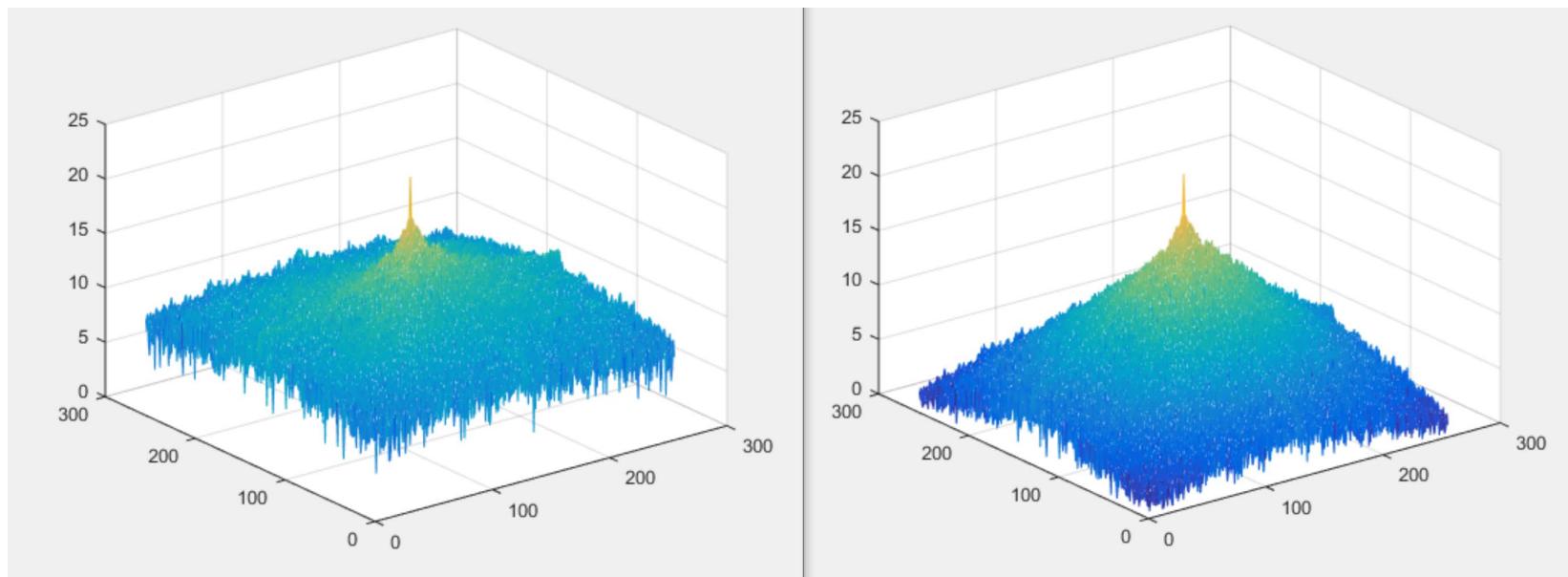


# Filtro low-pass di Butterworth





# Filtro low-pass Butterworth con $D_0=50$



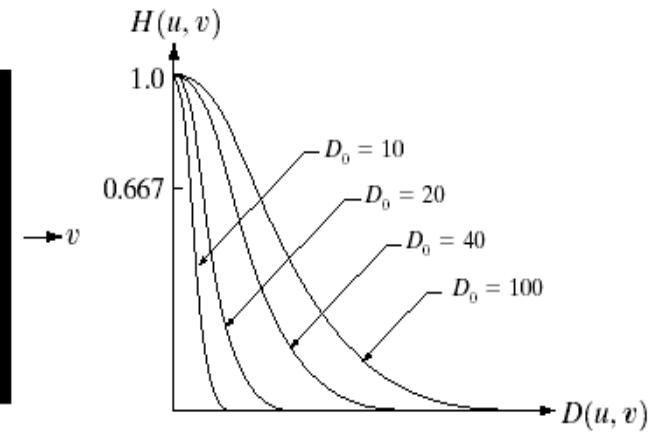
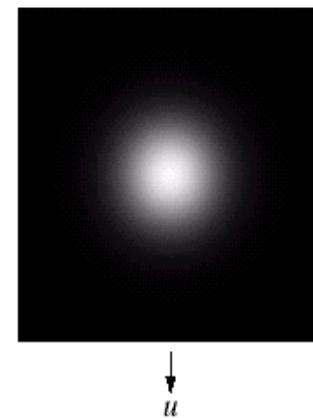
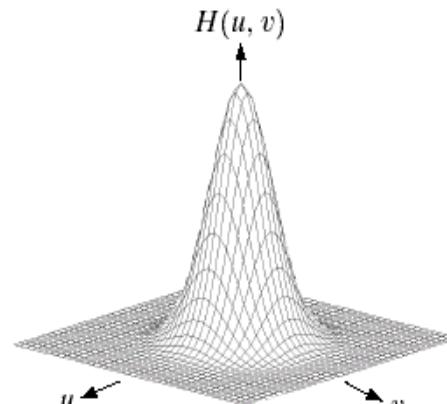


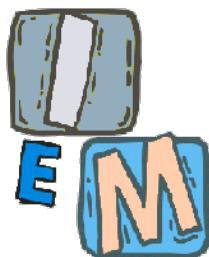
# Filtro gaussiano

- I filtri Gaussiani sono definiti da:

$$H(u, v) = e^{\frac{-D^2(u,v)}{2D_0^2}}$$

I filtri gaussiani hanno il grande vantaggio di avere come trasformata di Fourier ancora una gaussiana.





# Filtro gaussiano

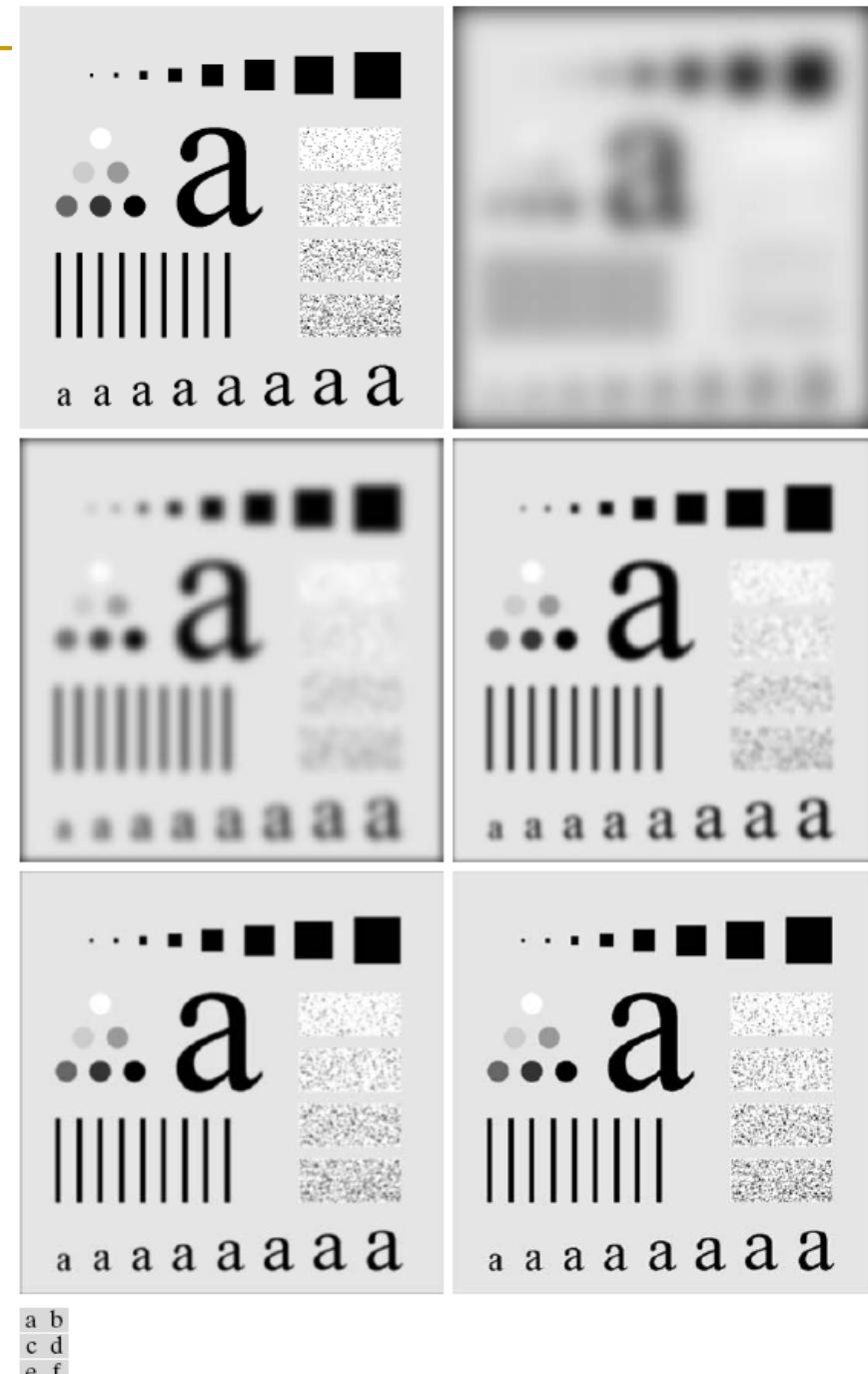
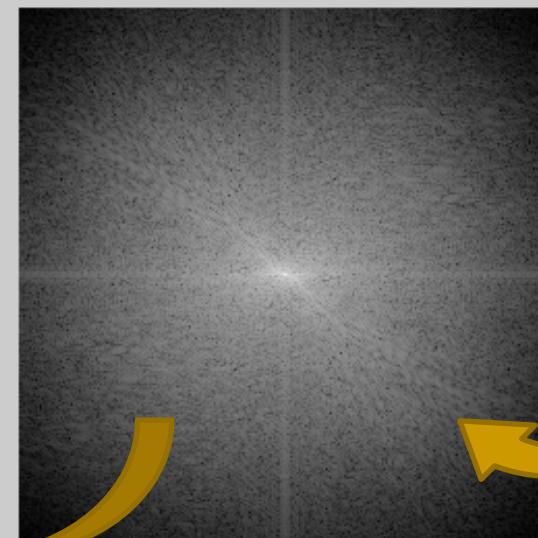
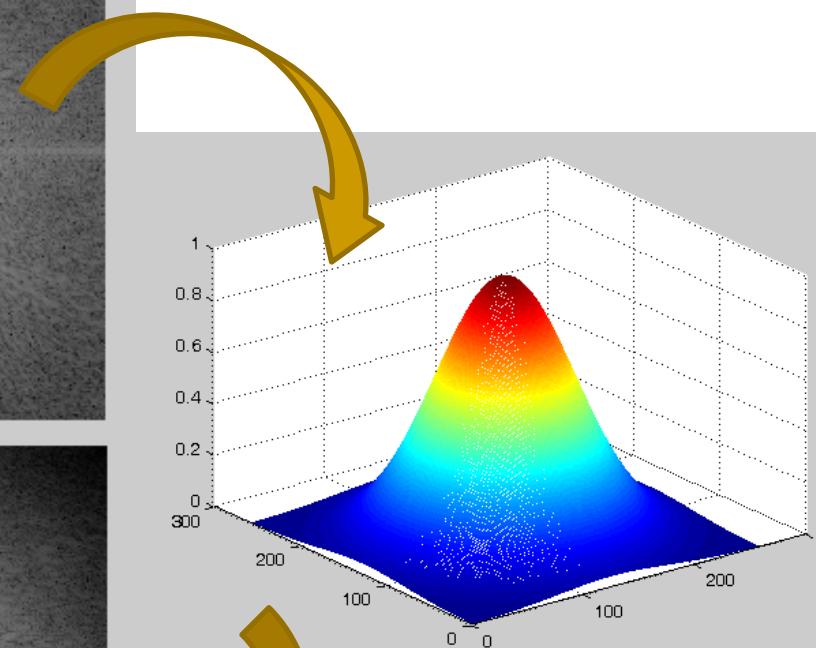
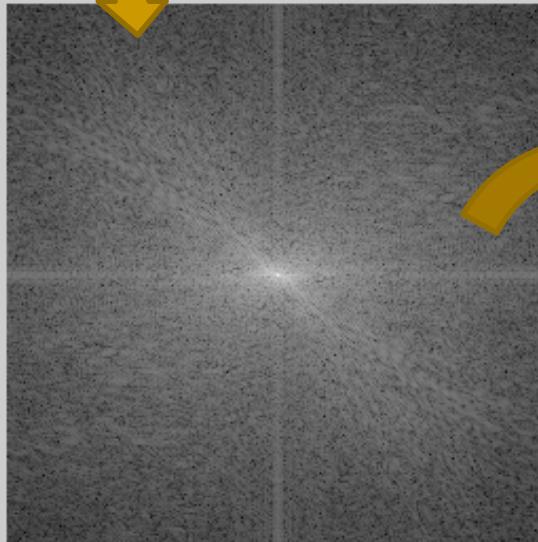
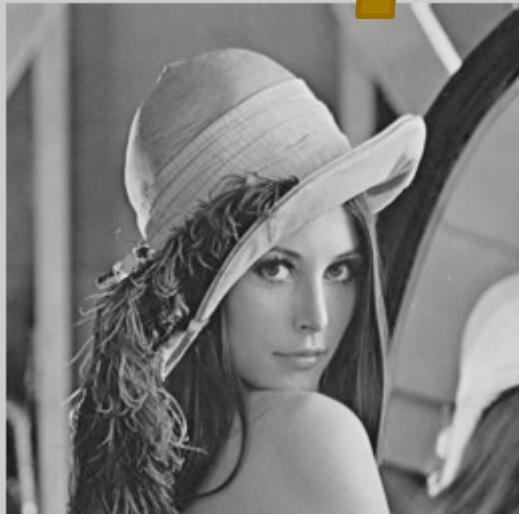


FIGURE 4.48 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering using GLPFs with cutoff frequencies at the radii shown in Fig. 4.41. Compare with Figs. 4.42 and 4.45.

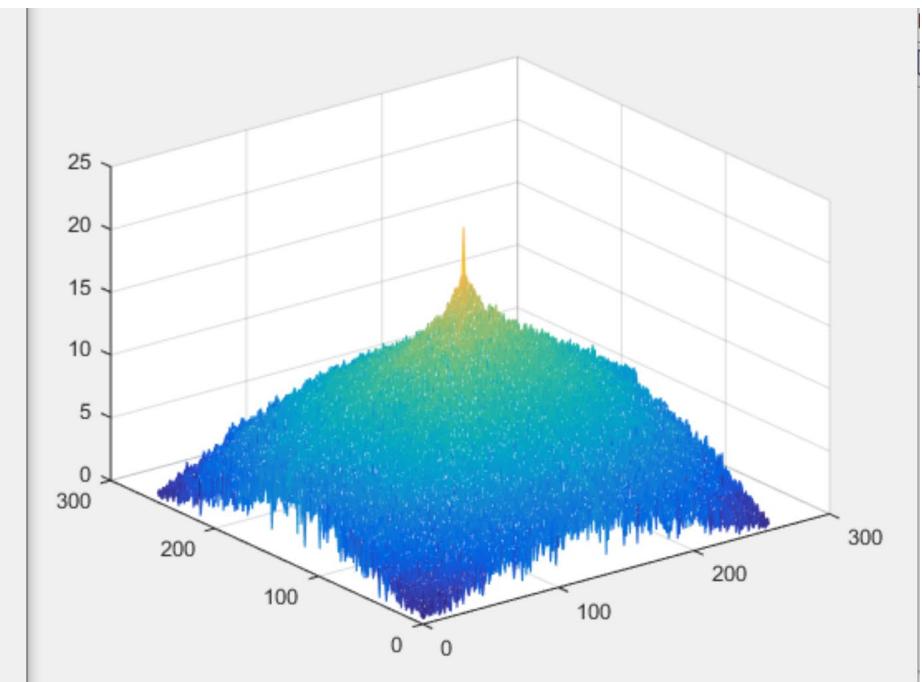
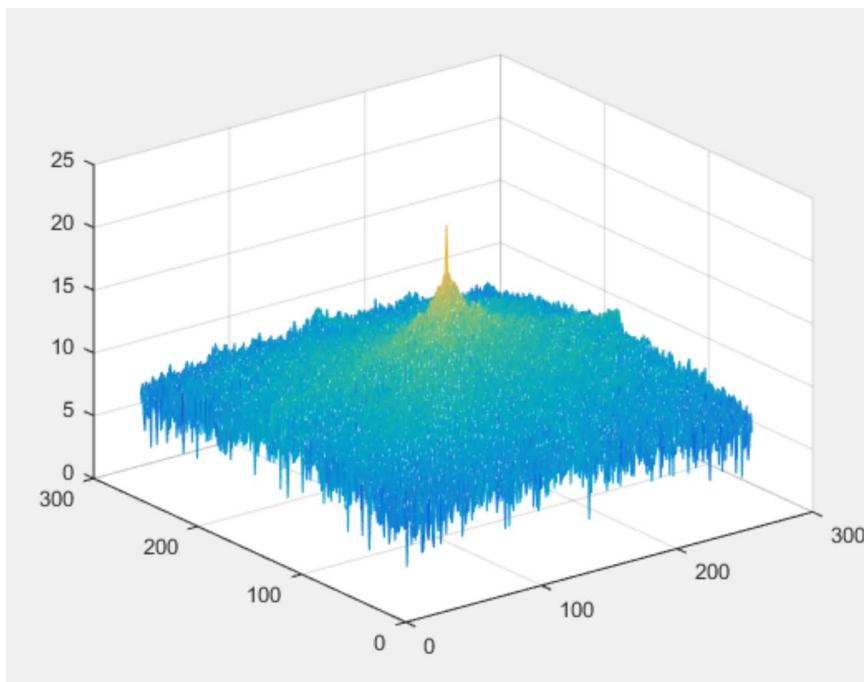


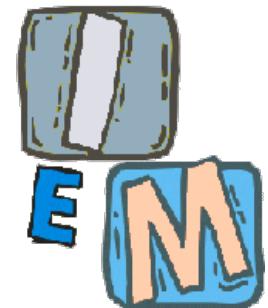
# Filtro low-pass gaussiano





# Filtro low-pass gaussiano con $D_0=50$





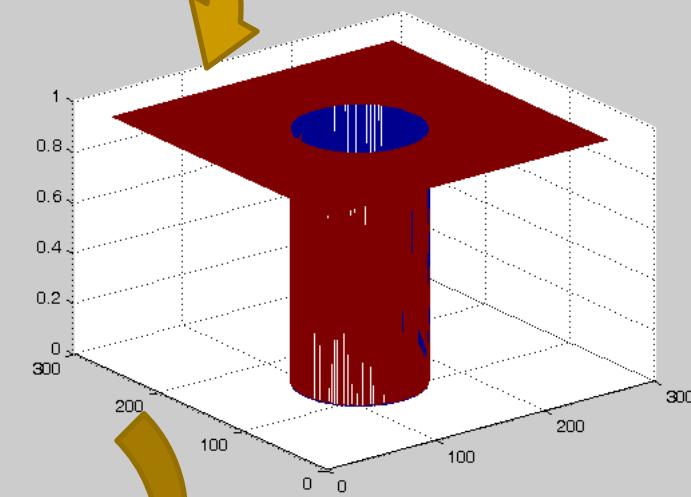
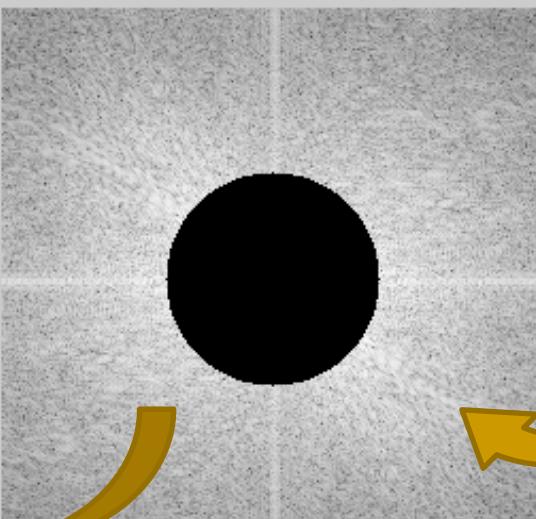
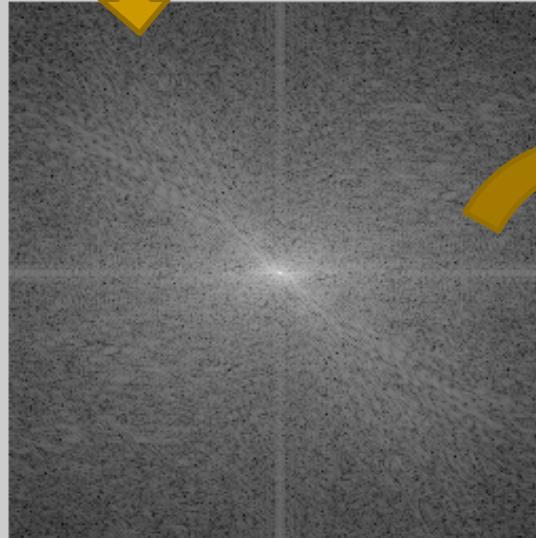
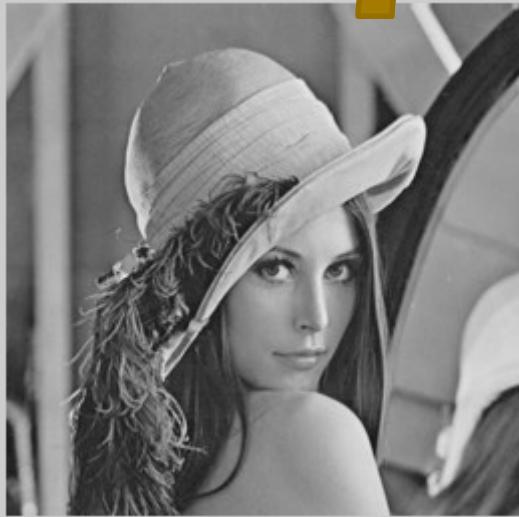
# Filtri high pass nel dominio della frequenza

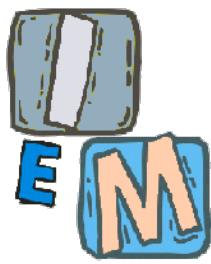
Highpass filters.  $D_0$  is the cutoff frequency and  $n$  is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$

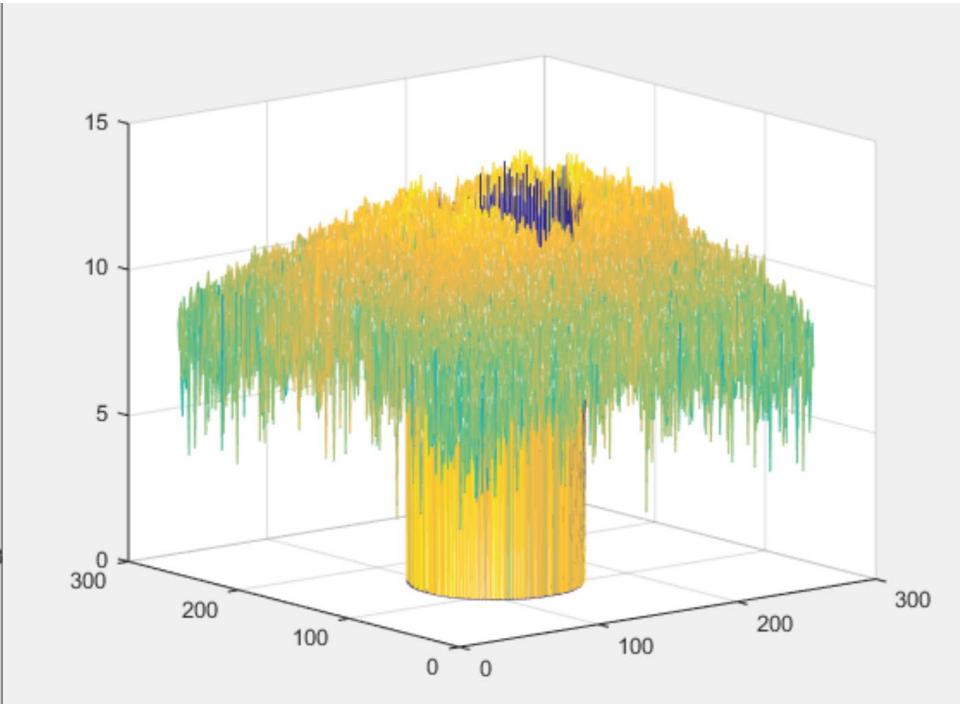
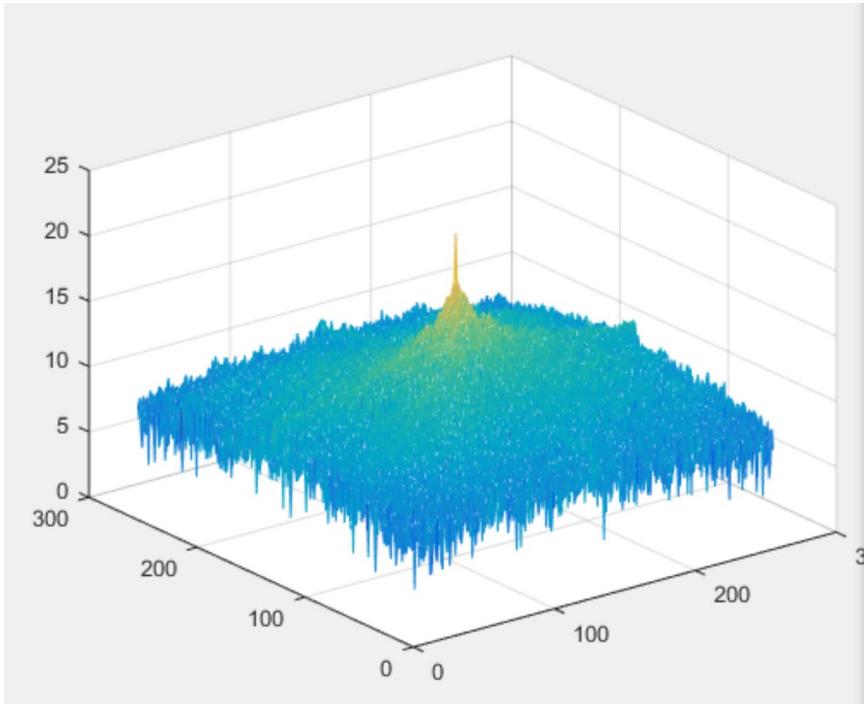


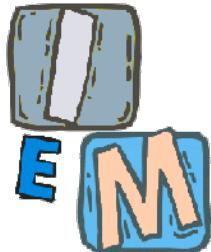
# Filtro high-pass ideale



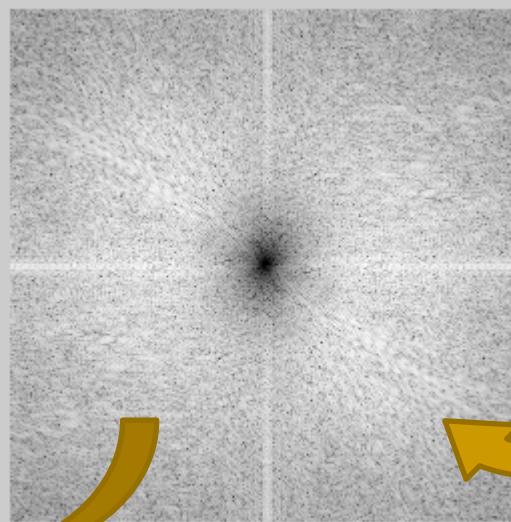
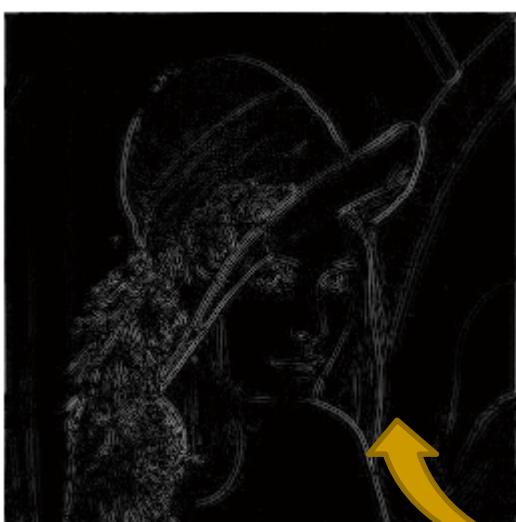
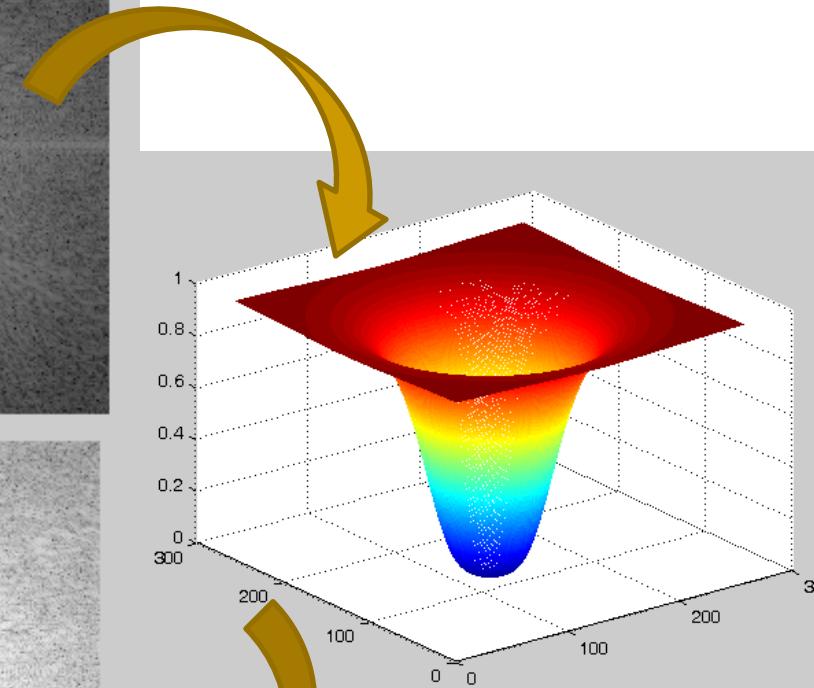
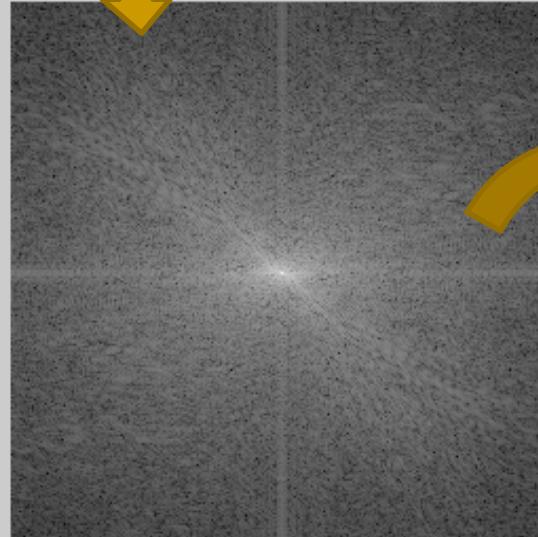
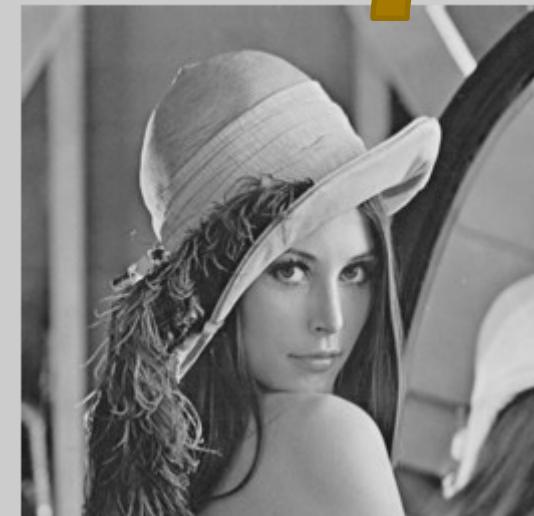


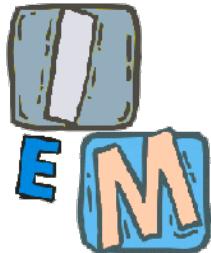
# Filtro high-pass ideale con $D_0=50$



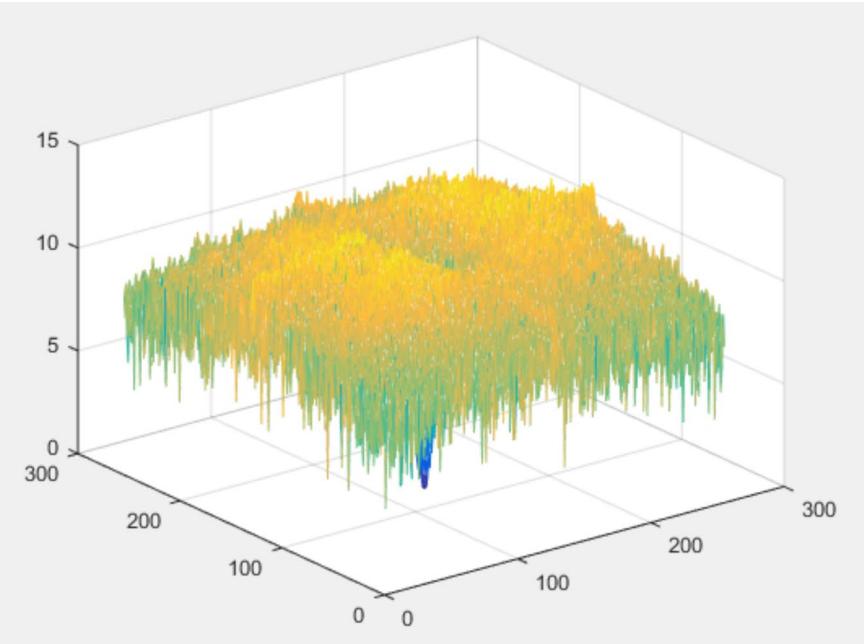
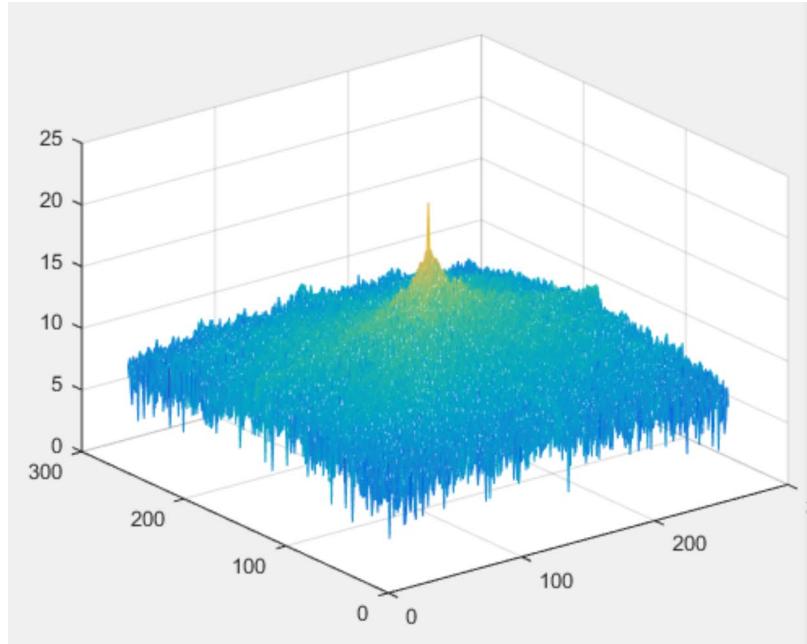


# Filtro high-pass di Butterworth



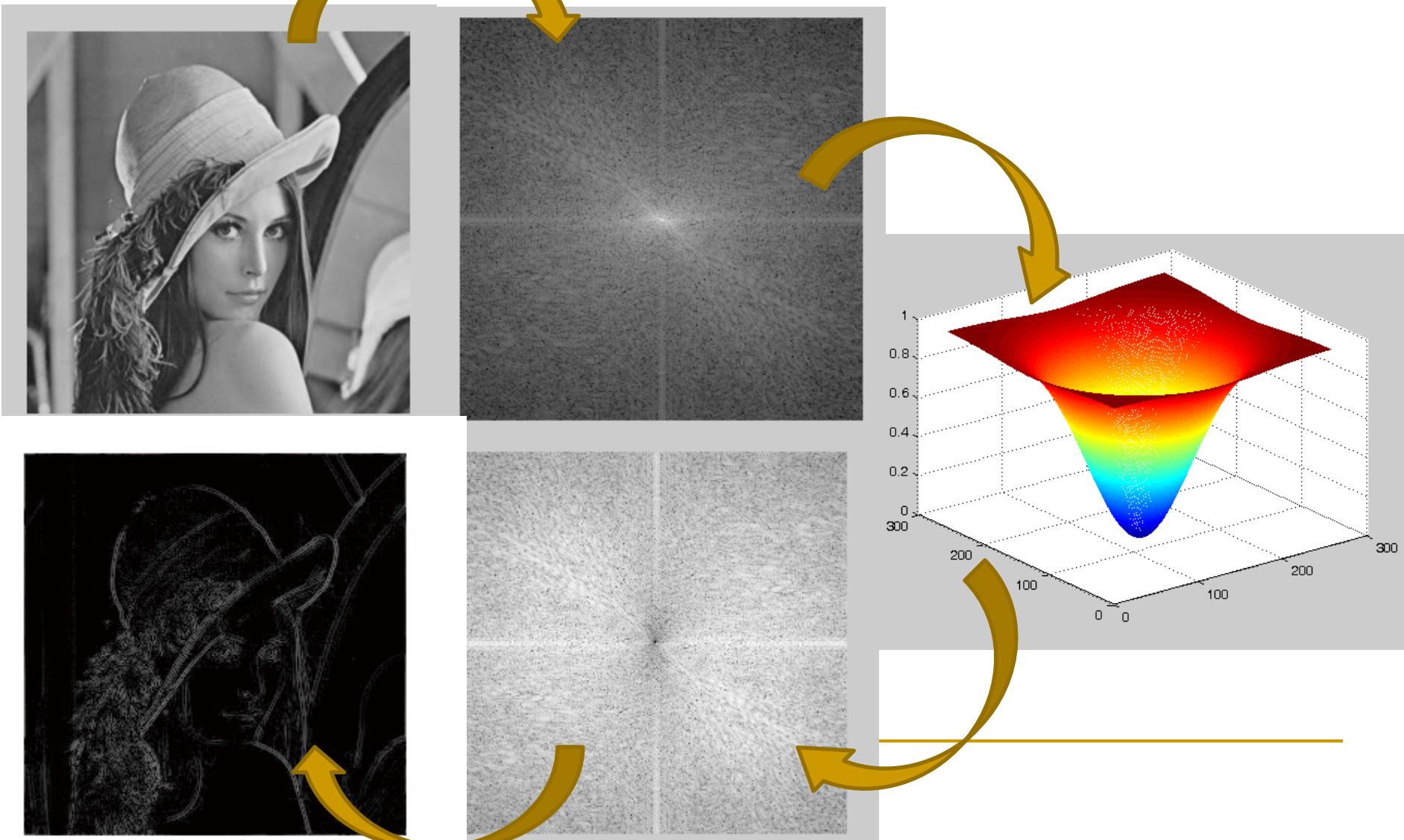


# Filtro high-pass Butterworth con $D_0=50$



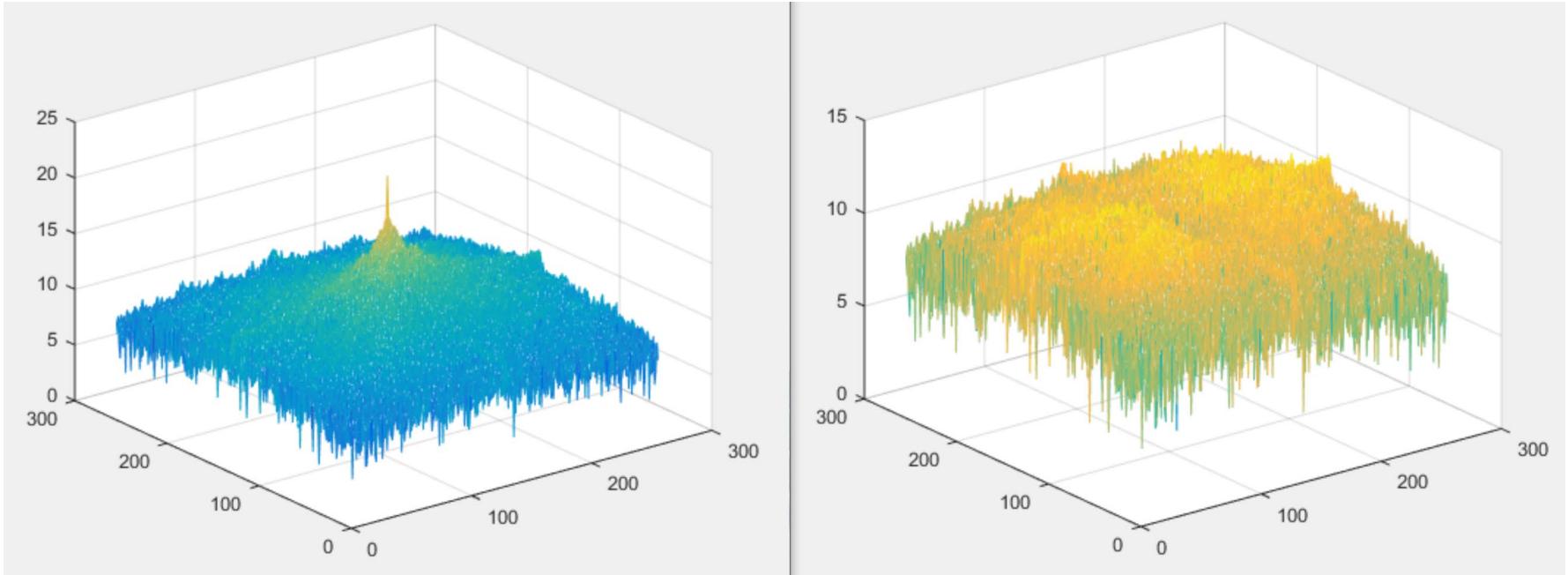


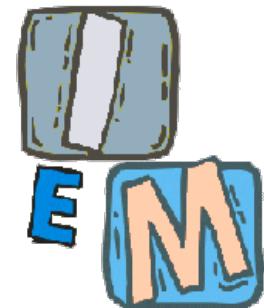
# Filtro high-pass gaussiano





# Filtro high-pass gaussiano con $D_0=50$





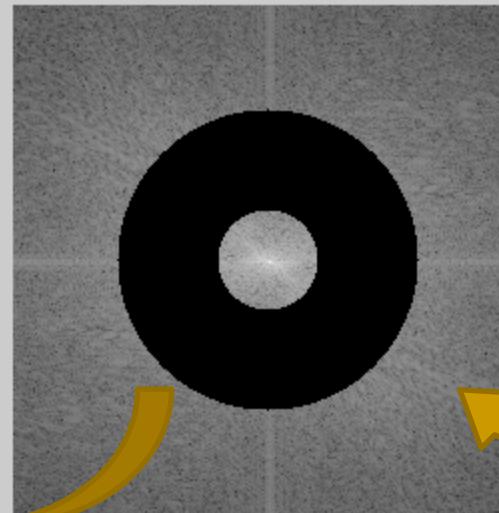
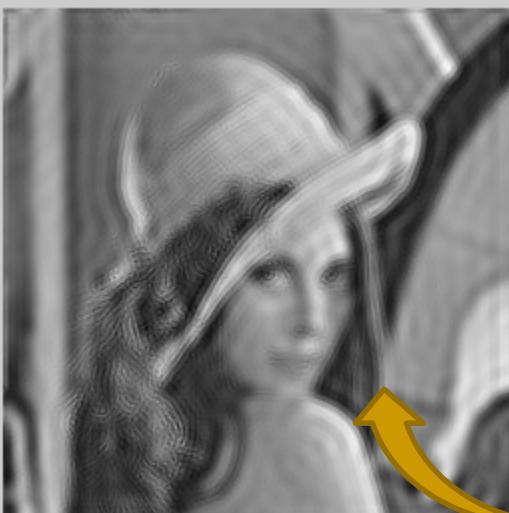
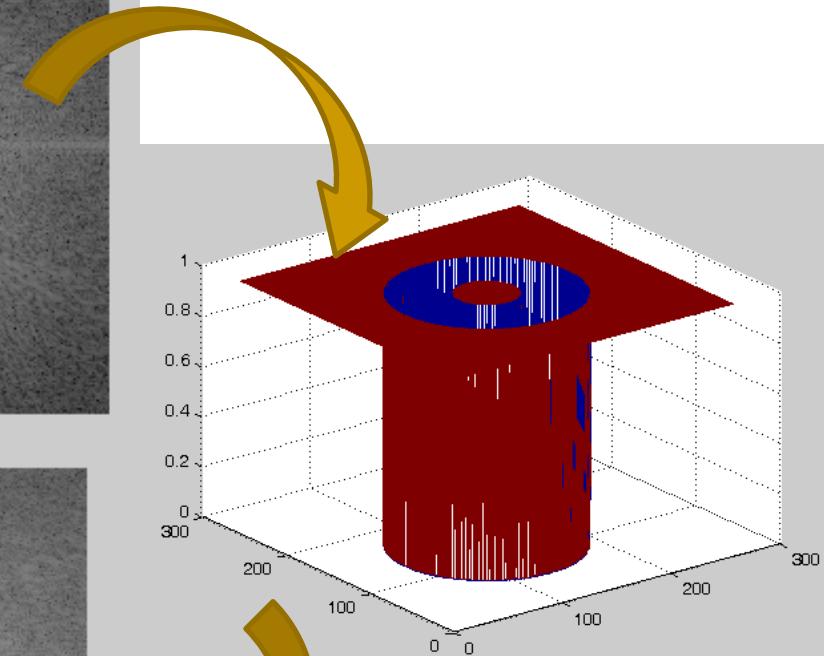
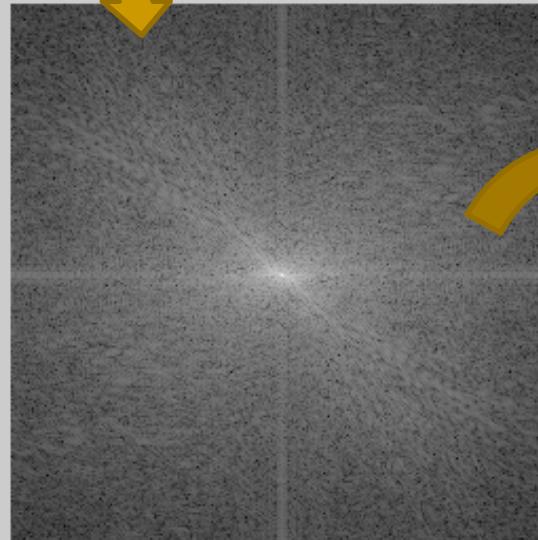
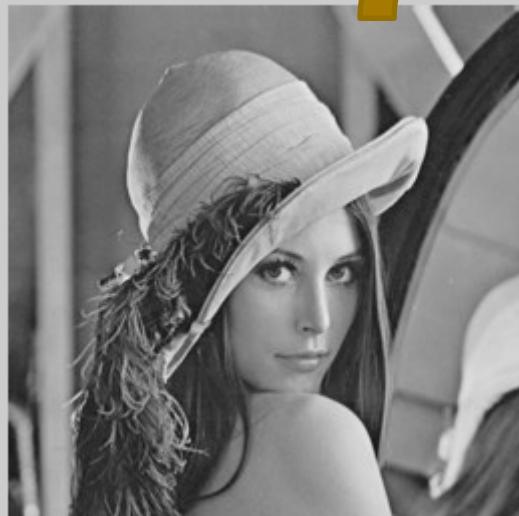
# Filtri band reject nel dominio della frequenza

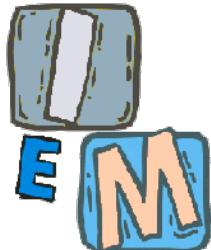
Bandreject filters.  $W$  is the width of the band,  $D$  is the distance  $D(u, v)$  from the center of the filter,  $D_0$  is the cutoff frequency, and  $n$  is the order of the Butterworth filter. We show  $D$  instead of  $D(u, v)$  to simplify the notation in the table.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[ \frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$

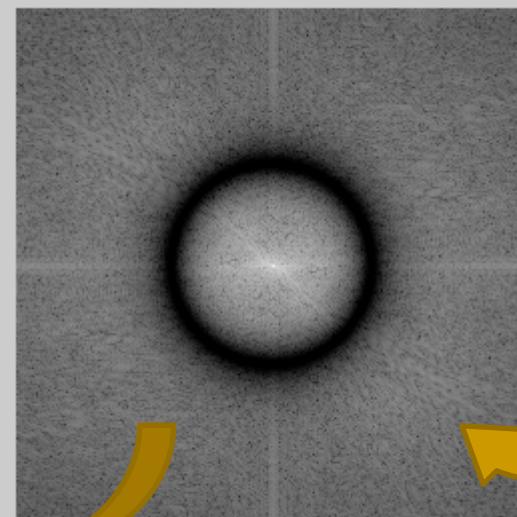
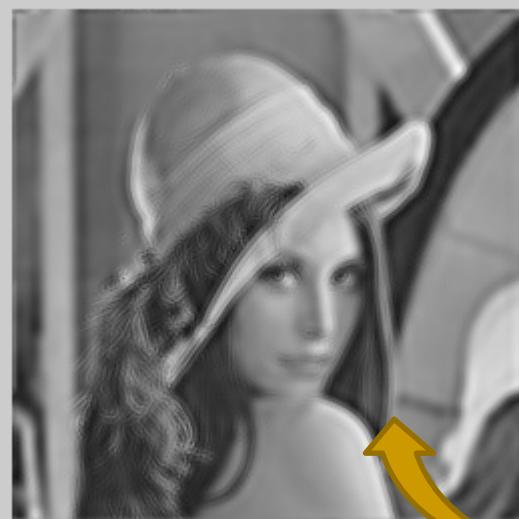
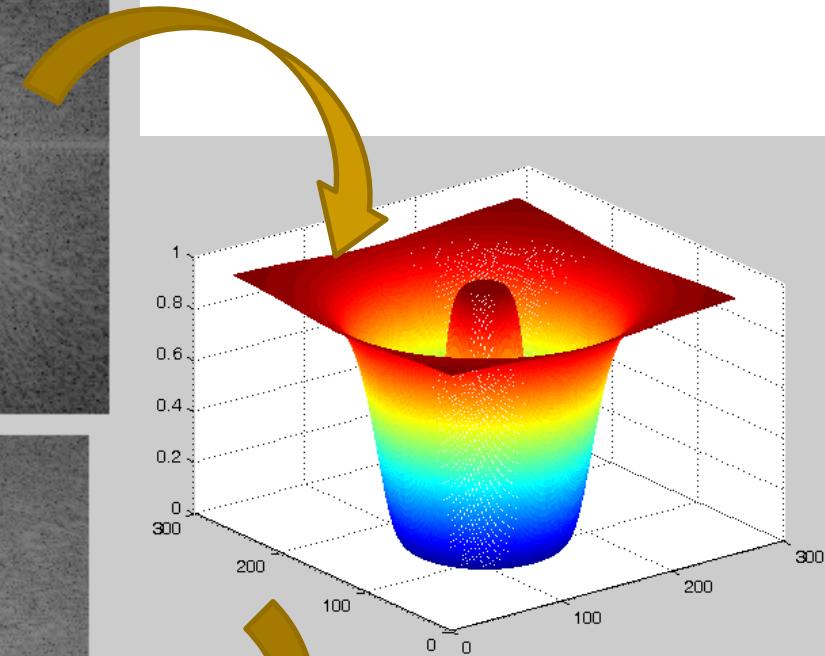
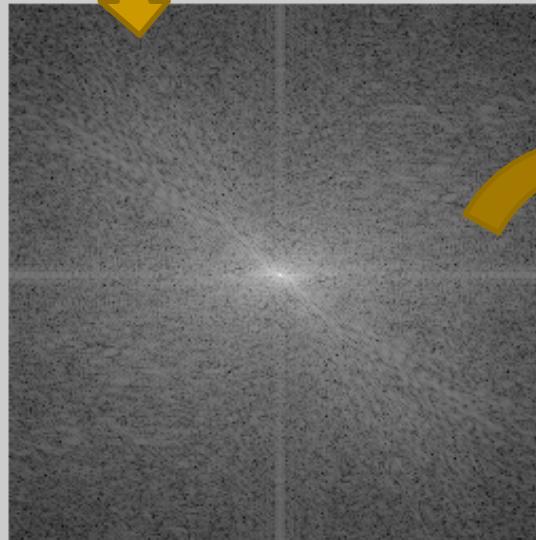
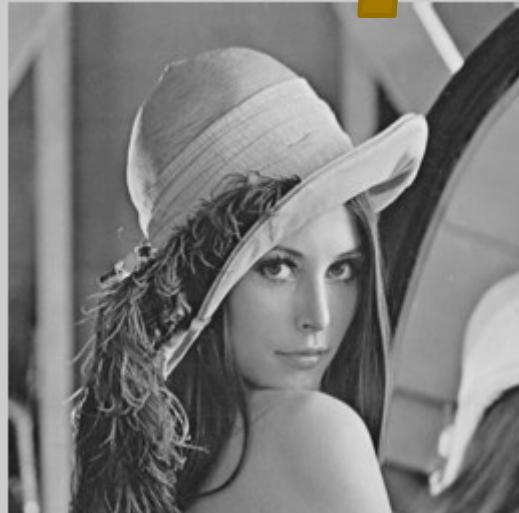


# Filtro band-reject ideale



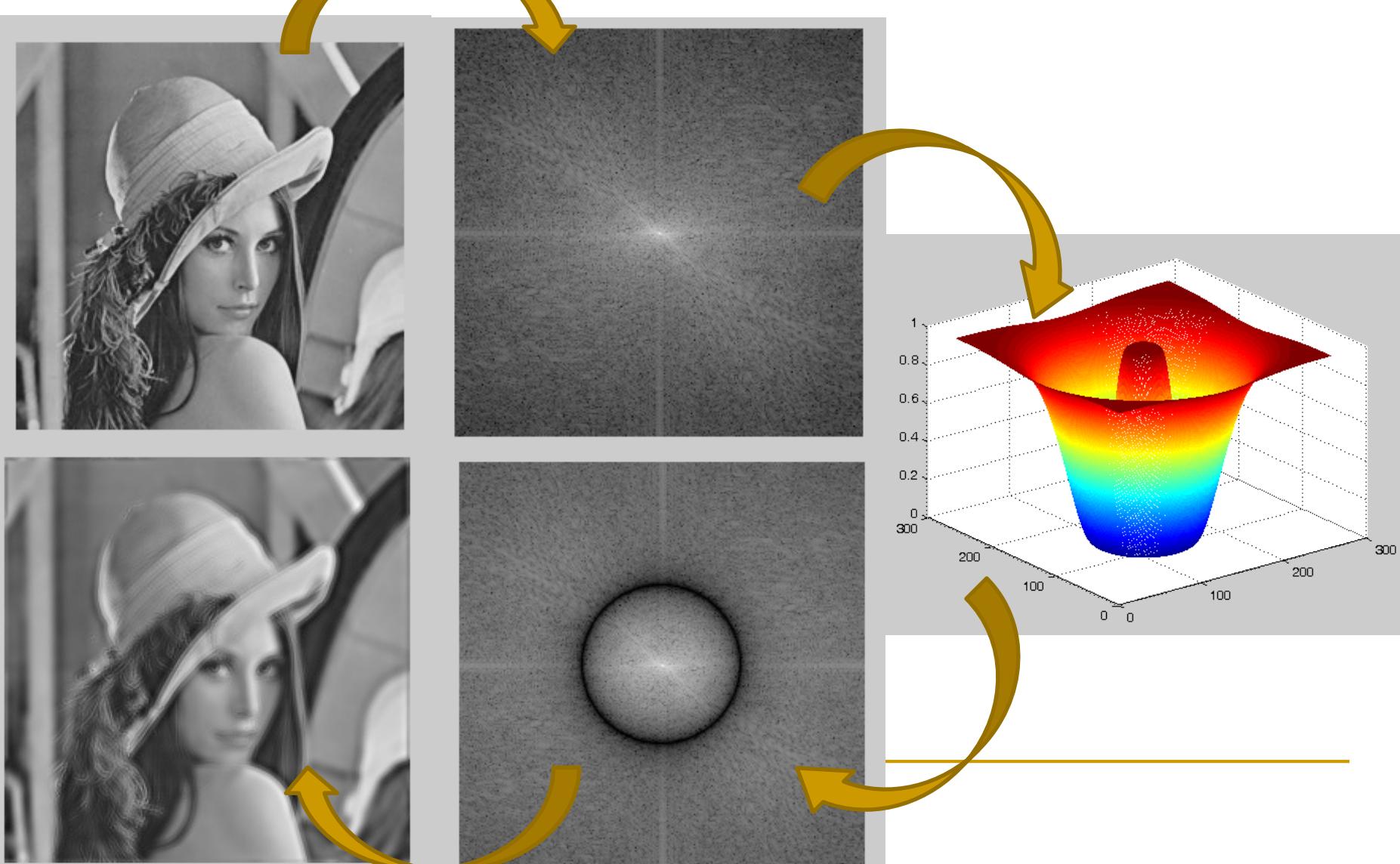


# Filtro band-reject di Butterworth





# Filtro band-reject gaussiano




**TABLE 4.4**

Lowpass filters.  $D_0$  is the cutoff frequency and  $n$  is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$	$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$

**TABLE 4.5**

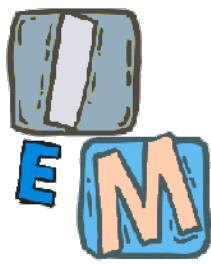
Highpass filters.  $D_0$  is the cutoff frequency and  $n$  is the order of the Butterworth filter.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{if } D(u, v) > D_0 \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$

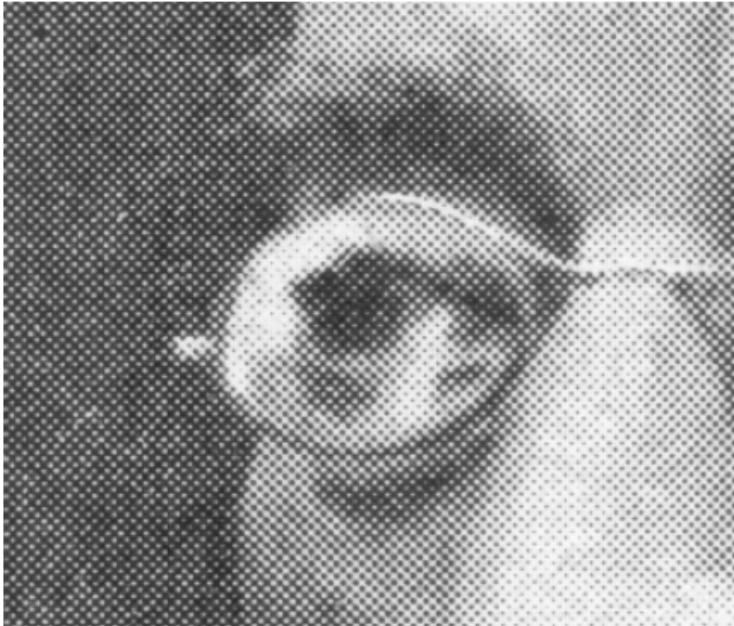
**TABLE 4.6**

Bandreject filters.  $W$  is the width of the band,  $D$  is the distance  $D(u, v)$  from the center of the filter,  $D_0$  is the cutoff frequency, and  $n$  is the order of the Butterworth filter. We show  $D$  instead of  $D(u, v)$  to simplify the notation in the table.

Ideal	Butterworth	Gaussian
$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } D_0 - \frac{W}{2} \leq D \leq D_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[ \frac{DW}{D^2 - D_0^2} \right]^{2n}}$	$H(u, v) = 1 - e^{-\left[ \frac{D^2 - D_0^2}{DW} \right]^2}$



# Applicazione



**E**  
**N**

