

Esercizi di teoria dei linguaggi

Indice

1. Lezione 01	2
2. Lezione 02	3
2.1. Esercizio 01	3
2.2. Esercizio 02	3
2.3. Esercizio 03	4
2.4. Esercizio 04	4
2.5. Esercizio 05	5
2.6. Esercizio 06	5
2.7. Esercizio 07	6
2.8. Esercizio 08	6
2.9. Esercizio 09	6

1. Lezione 01

2. Lezione 02

2.1. Esercizio 01

Considerate l'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

- Fornite una grammatica context-free per il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su Σ , cioè per l'insieme $\text{PAL}_{\text{pari}} = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$.

Regole di produzione:

- $S \rightarrow \varepsilon$;
- $S \rightarrow aSa$;
- $S \rightarrow bSb$.

- Modificate la grammatica precedente per generare l'insieme PAL di tutte le stringhe palindrome su Σ .

Regole di produzione:

- $S \rightarrow \varepsilon$;
- $S \rightarrow aSa$;
- $S \rightarrow bSb$;
- $S \rightarrow L$;
- $L \rightarrow a$;
- $L \rightarrow b$.

- Per ogni $k \in [0, 3]$ rispondete alla domanda “il linguaggio PAL é di tipo k ?” giustificando la risposta.

- Tipo 0: sì, ogni linguaggio é un linguaggio di tipo 0;
- Tipo 1: sì, per ogni regola di produzione $\alpha \rightarrow \beta$ vale $|\beta| \geq |\alpha|$;
- Tipo 2: sì, ogni regola di produzione $\alpha \rightarrow \beta$ vede $\alpha \in V$ e $\beta \in (V \cup \Sigma^*)$;
- Tipo 3: no, la regola $S \rightarrow aSa$ non é nella forma $A \rightarrow aB$ oppure $A \rightarrow a$.

Se sostituiamo l'alfabeto con $\Sigma = \{a, b, c\}$, le risposte al punto precedente cambiano? E se lo sostituiamo con $\Sigma = \{a\}$?

Se $\Sigma = \{a, b, c\}$ le risposte non cambiano visto che vanno aggiunte le regole:

- $S \rightarrow cSc$;
- $L \rightarrow c$.

Se $\Sigma = \{a\}$ le regole di produzione diventano:

- $S \rightarrow \varepsilon$;
- $S \rightarrow a$;
- $S \rightarrow aSa$;

ma questo non fa cambiare le risposte.

2.2. Esercizio 02

Non ancora spiegato

2.3. Esercizio 03

Sia $\Sigma = \{ (,) \}$ un alfabeto i cui simboli sono la parentesi aperta e la parentesi chiusa.

Scrivete una grammatica context-free che generi il linguaggio formato da tutte le sequenze di parentesi correttamente bilanciate, come ad esempio $((()())())$.

Regole di produzione:

- $S \rightarrow \varepsilon$;
- $S \rightarrow (S)$;
- $S \rightarrow SS$.

Risolvete il punto precedente per un alfabeto con due tipi di parentesi, come $\Sigma = \{ (,), [,] \}$, nel caso non vi siano vincoli tra i tipi di parentesi (le tonde possono essere contenute tra quadre e viceversa). Esempio $[()([[]][[]])]$, ma non $[[][(())()]]$.

Regole di produzione:

- $S \rightarrow \varepsilon$;
- $S \rightarrow (S)$;
- $S \rightarrow [S]$;
- $S \rightarrow SS$.

Risolvete il punto precedente con $\Sigma = \{ (,), [,] \}$, con il vincolo che le parentesi quadre non possano mai apparire all'interno di parentesi tonde. Esempio $[()([()])][[]]([()])$, ma non $[()([[]])][[]]$.

Regole di produzione:

- $S \rightarrow \varepsilon$;
- $S \rightarrow [S]$;
- $S \rightarrow SS$;
- $S \rightarrow I$;
- $I \rightarrow \varepsilon$;
- $I \rightarrow (I)$;
- $I \rightarrow II$.

2.4. Esercizio 04

Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

- $S \rightarrow aSBC \mid aBC$;
- $CB \rightarrow BC$;
- $aB \rightarrow ab$;
- $bB \rightarrow bb$;
- $bC \rightarrow bc$;
- $cC \rightarrow cc$.

Dopo avere stabilito di che tipo è G , provate a derivare alcune stringhe. Riuscite a dire da quali stringhe è formato il linguaggio generato da G ?

La grammatica G é di tipo 1.

Deriviamo qualche stringa:

- $S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc$;
- $S \rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aabCBC \rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \rightarrow aabbC \rightarrow aabbcc$.

Il linguaggio $L(G)$ è l'insieme $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

2.5. Esercizio 05

Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

- $S \rightarrow aBSc \mid abc$;
- $Ba \rightarrow aB$;
- $Bb \rightarrow bb$.

Dopo avere stabilito di che tipo é G , provate a derivare alcune stringhe. Riuscite a dire da quali stringhe é formato il linguaggio generato da G ?

La grammatica G é di tipo 1.

Deriviamo qualche stringa:

- $S \rightarrow abc$;
- $S \rightarrow aBSc \rightarrow aBabcc \rightarrow aaBbcc \rightarrow aabbcc$.

Il linguaggio $L(G)$ è l'insieme $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

2.6. Esercizio 06

Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, A, B, C, D, E\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

- $S \rightarrow ABC$;
- $AB \rightarrow aAD \mid bAE \mid \varepsilon$;
- $DC \rightarrow BaC$;
- $EC \rightarrow BbC$;
- $Da \rightarrow aD$;
- $Db \rightarrow bD$;
- $Ea \rightarrow aE$;
- $Eb \rightarrow bE$;
- $C \rightarrow \varepsilon$;
- $aB \rightarrow Ba$;
- $bB \rightarrow bB$.

Dopo avere stabilito di che tipo é G , provate a derivare alcune stringhe. Riuscite a dire da quali stringhe é formato il linguaggio generato da G ?

La grammatica G é di tipo 1.

Deriviamo qualche stringa:

- $S \rightarrow ABC \xrightarrow{*} \varepsilon$;
- $S \rightarrow ABC \rightarrow aADC \rightarrow aABaC \xrightarrow{*} aa$;

- $S \xrightarrow{*} aABaC \rightarrow aaADaC \rightarrow aaAaDC \rightarrow aaAaBaC \rightarrow aaABaaC \xrightarrow{*} aaaa;$
- $S \xrightarrow{*} aABaC \rightarrow abAEaC \rightarrow abAaEC \rightarrow abAaBbC \rightarrow abABabC \xrightarrow{*} abab;$
- $S \rightarrow ABC \rightarrow bAEC \rightarrow bABbC \xrightarrow{*} bb;$
- $S \xrightarrow{*} bABbC \rightarrow bbAEbC \rightarrow bbAbEC \rightarrow bbAbBbC \rightarrow bbABbbC \xrightarrow{*} bbbb;$
- $S \xrightarrow{*} bABbC \rightarrow baADbC \rightarrow baAbDC \rightarrow baAbBaC \rightarrow baABbaC \xrightarrow{*} baba.$

Il linguaggio $L(G)$ è l'insieme $\{a^{2n} \cup b^{2n} \cup (ab)^{2n} \cup (ba)^{2n} \mid n \geq 0\}$.

2.7. Esercizio 07

Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, A, B, C, X, Y, L, R\}$, $\Sigma = \{a\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

- $S \rightarrow LXR;$
- $LX \rightarrow LYYA \mid aC;$
- $AX \rightarrow YYA;$
- $AR \rightarrow BR;$
- $YB \rightarrow BX;$
- $LB \rightarrow L;$
- $CX \rightarrow aC;$
- $CR \rightarrow \varepsilon.$

Riuscite a stabilire da quali stringhe é formato il linguaggio generato da G ?

Deriviamo qualche stringa:

- $S \rightarrow LXR \rightarrow aCR \rightarrow a;$
- $S \rightarrow LXR \rightarrow LYYAR \xrightarrow{*} LXXR \rightarrow aCXR \rightarrow aaCR \rightarrow aa;$
- $S \rightarrow LXR \xrightarrow{*} LXXR \rightarrow LYYAXR \rightarrow LYYYYYAR \xrightarrow{*} LXXXXXR \xrightarrow{*} aaaa.$
- $S \rightarrow LXR \xrightarrow{*} LXXXXXR \xrightarrow{*} LYYYYYYYYYAR \xrightarrow{*} LXXXXXXXXXR \xrightarrow{*} aaaaaaaaaa.$

Il linguaggio $L(G)$ è l'insieme $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

2.8. Esercizio 08

Modificate la grammatica dell'esercizio 07 in modo da ottenere una grammatica di tipo 1 che generi lo stesso linguaggio.

Modificando la regola $LB \rightarrow L$ in $LB \rightarrow CRL$ la grammatica diventa di tipo 1.

2.9. Esercizio 09

Dimostrate che la grammatica $G = (\{A, B, S\}, \{a, b\}, P, S)$, con l'insieme delle produzioni P elencate sotto, genera il linguaggio $\{w \in \{a, b\}^* \mid \forall x \in \{a, b\}^* w \neq xx\}$:

- $S \rightarrow AB \mid BA \mid A \mid B$
- $A \rightarrow aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid a$
- $B \rightarrow aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb \mid b$

Consideriamo in primo luogo i “casi base”:

- $S \rightarrow A \rightarrow a$ va bene perché di lunghezza dispari;
- $S \rightarrow B \rightarrow b$ va bene perché di lunghezza dispari;
- $S \rightarrow AB \xrightarrow{*} ab$ va bene perché $a \neq b$;
- $S \rightarrow BA \xrightarrow{*} ba$ va bene perché $b \neq a$.

Consideriamo poi $S \rightarrow A \mid B$:

$$\begin{aligned}
S \rightarrow A &\rightarrow aAa \xrightarrow{*} a^n Aa^n \rightarrow a^n aa^n; \\
&aAa \xrightarrow{*} ab^n Ab^n a \rightarrow ab^n ab^n a; \\
&aAa \xrightarrow{*} a\{a, b\}^n A\{a, b\}^n a \rightarrow a\{a, b\}^n a\{a, b\}^n a; \\
&aAb \xrightarrow{*} \dots \\
S \rightarrow B &\rightarrow aBa \xrightarrow{*} a^n Ba^n \rightarrow a^n ba^n; \\
&aBa \xrightarrow{*} ab^n Bb^n a \rightarrow ab^n bb^n a; \\
&aBa \xrightarrow{*} a\{a, b\}^n B\{a, b\}^n a \rightarrow a\{a, b\}^n b\{a, b\}^n a; \\
&aBb \xrightarrow{*} \dots
\end{aligned}$$

Tutte le stringhe che vengono generate vanno bene perché sono di lunghezza dispari.

Consideriamo infine $S \rightarrow AB \mid BA$ in due casi:

- se eseguiamo su A e B lo stesso numero di passi di derivazione abbiamo altri due casi:
 - usiamo regole con lo “stesso contesto”, ma alla fine avremo un carattere diverso nella posizione dove sono presenti A e B ;
 - usiamo regole con “diverso contesto”, ma la prima regola che rispecchia questa casistica ha almeno un carattere diverso (oltre ad avere il carattere in A e B diverso alla fine della derivazione);
- se eseguiamo su A e B un numero diverso di passi di derivazione, abbiamo due punti di partenza:
 - partiamo da AB e indichiamo con n la lunghezza della stringa derivata da A e con k la lunghezza della stringa derivata da B , con $k > n$. Per ottenere due stringhe della stessa lunghezza devo rimuovere da k un numero $\frac{n-k}{2}$ di caratteri e appenderli a n , ottenendo due stringhe di lunghezza t . Prima dell'ultimo passo di derivazione di A la variabile A era in posizione $\frac{n-1}{2}$, mentre ora si trova in posizione $\frac{t-1}{2} - \frac{n-k}{4}$ perché prima mi devo prima posizionare nel “nuovo centro” e poi mi devo spostare di una posizione indietro ogni due caratteri che avevo aggiunto. Facciamo lo stesso ragionamento per trovare l'indice dell'ultima B di B . Le due posizioni trovate sono le stesse, ma prima dell'ultima derivazione in A si aveva una A e in B si aveva una B , che però generano rispettivamente a e b , quindi otteniamo due stringhe che sono sempre diverse.
 - partiamo da BA e facciamo lo stesso discorso, basta invertire l'ordine delle stringhe.

Abbiamo quindi dimostrato che $L(G) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \forall x \in \{a, b\}^* w \neq xx\}$.