Teoria dei Linguaggi

Indice

1. Lezione 01 [26/02]

1.1. Cosa faremo

In questo corso studieremo dei sistemi formali che possiamo quindi descrivere a livello matematico. Questi sistemi descrivono dei linguaggi. Ci chiediamo giustamente cosa sono in grado di fare questi sistemi, ovvero cosa sono in grado di descrivere in termini di linguaggi.

Ci occuperemo anche delle risorse utilizzate dal sistema o delle risorse necessarie per descrivere il linguaggio. Per le prime citate, ci occuperemo del tempo come numero di mosse eseguite da una macchina riconoscitrice oppure del numero di stati per descrivere, ad esempio, una macchina a stati finiti oppure dello spazio utilizzato da una macchina di Turing. Queste ultime due questioni rientrano più nella complessità descrizionale di una macchina.

1.2. Storia

Un **linguaggio** è uno strumento di comunicazione usato da membri di una stessa comunità, ed è composto da due elementi:

- **sintassi**: insieme di simboli (o parole) che devono essere combinati/e con una serie di regole;
- **semantica**: associazione frase-significato.

Per i linguaggi naturali è difficile dare delle regole sintattiche: vista questa difficoltà, nel 1956 **Noam Chomsky** introduce il concetto di **grammatiche formali**, che si servono di regole matematiche per la definizione della sintassi di un linguaggio.

Il primo utilizzo dei linguaggi risale agli stessi anni con il **compilatore Fortran**. Anche se ci hanno messo l'equivalente di 18 anni/uomo, questa è la prima applicazione dei linguaggi formali. Con l'avvento, negli anni successivi, dei linguaggi Algol, quindi linguaggi con strutture di controllo, la teoria dei linguaggi formali è diventata sempre più importante.

Oggi la teoria dei linguaggi formali sono usati nei compilatori di compilatori, dei tool usati per generare dei compilatori per un dato linguaggio fornendo la descrizione di quest'ultimo.

1.3. Ripasso

Un **alfabeto** è un insieme non vuoto e finito di simboli, di solito indicato con Σ o Γ.

Una **stringa** x (o **parola**) è una sequenza finita $x = a_1...a_n$ di simboli appartenenti a Σ.

Data una parola w, possiamo definire:

- $|w|$ numero di caratteri di w;
- $|w|_a$ numero di occorrenze della lettera $a \in \Sigma$ in w.

Una parola molto importante è la **parola vuota** ε o λ, che, come dice il nome, ha simboli, ovvero $|\varepsilon| = |\lambda| = 0$ (ogni tanto è Λ).

L'insieme di tutte le possibili parole su Σ è detto Σ^*, ed è un insieme infinito.

Un'importante operazione sulle parole è la **concatenazione** (o prodotto), ovvero se $x, y \in \Sigma^*$ allora la concatenazione w è la parola $w = xy$.

Questo operatore di concatenazione:

- non è commutativo, infatti $w_1 = xy \neq yz = w_2$ in generale;
- è associativo, infatti $(xy)z = x(yz)$.

La struttura $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ è un **monoide** libero generato da Σ.

Vediamo ora alcune proprietà delle parole:

- **prefisso**: x si dice prefisso di w se esiste $y \in \Sigma^*$ tale che $xy = w$;
  - **prefisso proprio** se $y \neq \varepsilon$;
  - **prefisso non banale** se $x \neq \varepsilon$;
  - il numero di prefissi è uguale a $|w| + 1$.
- **suffisso**: y si dice suffisso di w se esiste $x \in \Sigma^*$ tale che $xy = w$;
  - **suffisso proprio** se $x \neq \varepsilon$;
  - **suffisso non banale** se $y \neq \varepsilon$;
  - il numero di suffissi è uguale a $|w| + 1$.
- **fattore**: y si dice fattore di w se esistono $x, z \in \Sigma^*$ tali che $xyz = w$;
  - il numero di fattori è al massimo $\frac{|w||w+1|}{2} + 1$, visti i doppioni.
- **sottosequenza**: x si dice sottosequenza di w se x è ottenuta eliminando 0 o più caratteri da w; in poche parole, x si ottiene da w scegliendo dei simboli IN ORDINE; non devono essere caratteri contigui, basta che una volta scelti i caratteri essi siano mantenuti nell'ordine di apparizione della stringa iniziale;
  - un fattore è una sottosequenza contigua.

Un **linguaggio** L definito su un alfabeto Σ è un qualunque sottoinsieme di Σ^*.

1.4. Gerarchia di Chomsky

Vogliamo rappresentare in maniera finita un oggetto infinito come un linguaggio.

Abbiamo a nostra disposizione due modelli molto potenti:

- **generativo**: date delle regole, si parte da un certo punto e si generano tutte le parole di quel linguaggio con le regole date; parleremo di questi modelli tramite le grammatiche;
- **riconoscitivo**: si usano dei modelli di calcolo che prendono in input una parola e dicono se appartiene o meno al linguaggio.

Considerando il linguaggio sull'alfabeto $\{(,)\}$ delle parole ben bilanciate, proviamo a dare due modelli:

- generativo: a partire da una sorgente S devo applicare delle regole per derivate tutte le parole appartenenti a questo linguaggio;
  - la parola vuota ε è ben bilanciata;
  - se x è ben bilanciata, allora anche (x) è ben bilanciata;
  - se x, y sono ben bilanciate, allora anche xy è ben bilanciata.
- riconoscitivo: abbiamo una black-box che prende una parola e ci dice se appartiene o meno al linguaggio (in realtà potrebbe non terminare mai la sua esecuzione);
  - $\#(\; = \; \#)$;
  - per ogni prefisso, $\#(\; \geq \; \#)$.

2. Lezione 02 [28/02]

2.1. Grammatiche

Una **grammatica** è una tupla (V, Σ, P, S), con:

- V insieme finito e non vuoto delle **variabili**; queste ultime sono anche dette simboli non terminali e sono usate durante il processo di generazione delle parole del linguaggio; sono anche detti meta-simboli;
- Σ insieme finito e non vuoto dei **simboli terminali**; questi ultimi appaiono nelle parole generate, a differenza delle variabili che invece non possono essere presenti;
- P insieme finito e non vuoto delle **regole di produzione**;
- $S \in V$ **simbolo iniziale** o **assioma**, è il punto di partenza della generazione.

2.1.1. Regole di produzione

Soffermiamoci sulle regole di produzione: la forma di queste ultime è $\alpha \longrightarrow \beta$, con $\alpha \in (V \cup \Sigma)^+$ e $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$. Non l'abbiamo detto la scorsa volta, ma la notazione con il $+$ è praticamente Σ^* senza la parola vuota.

Una regola di produzione viene letta come «se ho α allora posso sostituirlo con β».

L'applicazione delle regole di produzione è alla base del **processo di derivazione**: esso è formato infatti da una serie di **passi di derivazione**, che permettono di generare una parola del linguaggio.

Diciamo che x deriva y in un passo, con $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$, se e solo se $\exists(\alpha \longrightarrow \beta) \in P$ e $\exists \eta, \delta \in (V \cup \Sigma)^*$ tali che $x = \eta\alpha\delta$ e $y = \eta\beta\delta$.

Il passo di derivazione lo indichiamo con $x \Rightarrow y$.

La versione estesa afferma che x deriva y in $k \geq 0$ passi, e lo indichiamo con $x \overset{k}{\Rightarrow} y$, se e solo se $\exists x_0, ..., x_k \in (V \cup \Sigma)^*$ tali che $x = x_0$, $x_k = y$ e $x_{i-1} \Rightarrow x_i \quad \forall i \in [1, k]$.

Teniamo anche il caso $k = 0$ per dire che da x derivo x stesso, ma è solo per comodità.

Se non ho indicazioni sul numero di passi k posso scrivere:

- $x \overset{*}{\Rightarrow} y$ per indicare un numero generico di passi, e questo vale se e solo se $\exists k \geq 0$ tale che $x \overset{k}{\Rightarrow} y$;
- $x \overset{+}{\Rightarrow} y$ per indicare che serve almeno un passo, e questo vale se e solo se $\exists k > 0$ tale che $x \overset{k}{\Rightarrow} y$.

2.1.2. Linguaggio generato da una grammatica

Indichiamo con $L(G)$ il linguaggio generato dalla grammatica G, ed è l'insieme $\left\{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\right\}$. In poche parole, è l'insieme di tutte le stringhe di non terminali che si possono ottenere tramite **derivazioni** a partire dall'assioma S della grammatica.

In questo insieme abbiamo solo stringhe di non terminali che otteniamo tramite derivazioni. Le stringhe intermedie che otteniamo nei vari passi di derivazioni sono dette **forme sintattiche**.

Due grammatiche G_1, G_2 sono **equivalenti** se e solo se $L(G_1) = L(G_2)$.

Se consideriamo l'esempio delle parentesi ben bilanciate, possiamo definire una grammatica per questo linguaggio con le seguenti regole di produzione:

- $S \longrightarrow \varepsilon$;
- $S \longrightarrow (S)$;
- $S \longrightarrow SS$.

Vediamo un esempio più complesso. Siano:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $V = \{S, A, B\}$;
- $P = \{S \longrightarrow aB \mid bA, A \longrightarrow a \mid aS \mid bAA, B \longrightarrow b \mid bS \mid aBB\}$.

Questa grammatica genera il linguaggio $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$: infatti, ogni volta che inserisco una a inserisco anche una B per permettere poi di inserire una b. Il discorso vale lo stesso a lettere invertite.

Vediamo un esempio ancora più complesso. Siano:

- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $V = \{S, A, B, C, D, E\}$;
- $P = \{S \longrightarrow ABC, AB \longrightarrow \varepsilon \mid aAD \mid bAE, DC \longrightarrow BaC, EC \longrightarrow BbC, Da \longrightarrow aD, Db \longrightarrow bD, Ea \longrightarrow aE, Eb \longrightarrow bE, C \longrightarrow \varepsilon, aB \longrightarrow Ba, bB \longrightarrow Bb\}$.

Questa grammatica genera il linguaggio pappagallo $L(G) = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$: infatti, eseguendo un paio di derivazioni si nota questo pattern.

2.2. Gerarchia di Chomsky

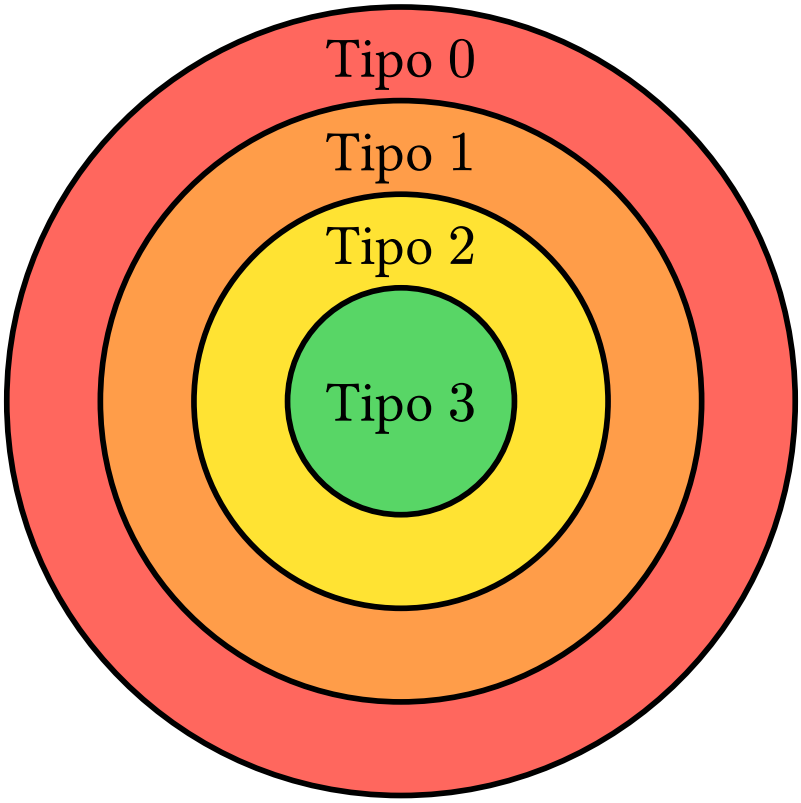
Negli anni ′50 Noam Chomsky studia la generazione dei linguaggi formali e crea una **gerarchia di grammatiche formali**. La classificazione delle grammatiche viene fatta in base alle regole di produzione che definiscono la grammatica.

Grammatica	**Regole**	**Modello riconoscitivo**
Tipo 0	Nessuna restrizione, sono il tipo più generale	**Macchine di Turing**
Tipo 1, dette **context-sensitive** o dipendenti dal contesto.	Se $(\alpha \longrightarrow \beta) \in P$ allora $\lvert\beta\rvert \geq \lvert\alpha\rvert$, ovvero devo generare parole che non siano più corte di quella di partenza. Sono dette dipendenti dal contesto perché ogni regola $(\alpha \longrightarrow \beta) \in P$ può essere riscritta come $\alpha_1 A \alpha_2 \longrightarrow \alpha_1 B \alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup \Sigma)^*$ che rappresentano il contesto, $A \in V$ e $B \in (V \cup \Sigma)^+$	**Automi limitati linearmente**
Tipo 2, dette **context-free** o libere dal contesto	Le regole in P sono del tipo $\alpha \longrightarrow \beta$, con $\alpha \in V$ e $\beta \in (V \cup \Sigma)^+$.	**Automi a pila**
Tipo 3, dette **grammatiche regolari**	Le regole in P sono del tipo $A \longrightarrow aB$ oppure $A \longrightarrow a$, con $A, B \in V$ e $a \in \Sigma$. Vale anche il simmetrico.	**Automi a stati finiti**

Nella figura successiva vediamo una rappresentazione grafica della gerarchia di Chomsky: notiamo come sia una gerarchia propria, ovvero

$$L_3 \subset L_2 \subset L_1 \subset L_0,$$

ma questa gerarchia non esaurisce comunque tutti i linguaggi possibili. Esistono infatti linguaggi che non sono descrivibili in maniera finita con le grammatiche.



Sia $L \subseteq \Sigma^*$, allora L è di tipo i, con $i \in [0, 3]$, se e solo se esiste una grammatica G di tipo i tale che $L = L(G)$, ovvero posso generare L a partire dalla grammatica di tipo i.

Se una grammatica é di tipo 1 allora possiamo costruire una macchina che sia in grado di dire, in tempo finito, se una parola appartiene o meno al linguaggio generato da quella grammatica. Questa macchina è detta **verificatore** e si dice che le grammatiche di tipo 1 sono **decidibili**.

3. Lezione 03 [05/03]

3.1. Gerarchia

Come si modifica la gerarchia di Chomsky considerando il non determinismo? Abbiamo che:

- le tipo 3 ha i modelli equivalenti, con un costo in termini della descrizione;
- le tipo 2 ha un cambiamento nei modelli, con quello non deterministico strettamente più potente;
- le tipo 1 sono complicate;
- le tipo 0 ha i modelli equivalenti.

Il non determinismo è una nozione del **riconoscitore** che uso per riconoscere: nel determinismo il riconoscitore può fare una cosa alla volta, nel non determinismo può fare più cose contemporaneamente. Nelle grammatiche è difficile catturare questa nozione, perché esse lo hanno intrinsecamente, perché le derivazioni le applico tutte per ottenere le stringhe del linguaggio.

3.2. Decidibilità

Teorema 3.2.1 (Decidibilità dei linguaggi context-sensitive): I linguaggi di tipo 1 sono ricorsivi.

Con ricorsività non intendiamo le procedure ricorsive, ma si intende una procedura che è calcolabile automaticamente. Nei linguaggi, un qualcosa di ricorsivo intende una macchina che, data una stringa x in input, riesce a rispondere a $x \in L$ terminando sempre dicendo SI o NO. Si usano i termini **ricorsivo** e **decidibile** come sinonimi.

Dimostrazione 3.2.1.1: In una grammatica di tipo 1 l'unico vincolo è sulla lunghezza delle produzioni, ovvero non possono mai accorciarsi.

In input ho una stringa $w \in \Sigma^*$ la cui lunghezza è $|w| = n$. Ho una grammatica G di tipo 1. Mi chiedo se $w \in L(G)$. Per rispondere a questo, devo cercare w nelle forme sentenziali, ma possiamo limitarci a quelle che non superano la lunghezza n.

Definiamo quindi gli insiemi

$$T_i = \left\{ \gamma \in (V \cup \Sigma)^{\leq n} \mid S \overset{\leq i}{\Rightarrow} \gamma \right\} \quad \forall i \geq 0.$$

Calcoliamo induttivamente questi insiemi.

Se $i = 0$ non eseguo nessuna derivazione, quindi

$$T_0 = \{S\}.$$

Supponiamo di aver calcolato T_{i-1}. Vogliamo calcolare

$$T_i = T_{i-1} \cup \{\gamma \in (V \cup \Sigma)^{\leq n} \mid \exists \beta \in T_{i-1} : \beta \Rightarrow \gamma\}.$$

Noi partendo da T_0 calcoliamo tutti i vari insiemi ottenendo una serie di T_i.

Per come abbiamo definito gli insiemi, sappiamo che

$$T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq ... \subseteq (V \cup \Sigma)^{\leq n}$$

e l'ultima inclusione è vera perché ho fissato la lunghezza massima, non voglio considerare di più perché io voglio w di lunghezza n.

La grandezza dell'insieme $(V \cup \Sigma)^{\leq n}$ è finita, quindi anche andando molto avanti con le computazioni prima o poi arrivo ad un certo punto dove non posso più aggiungere niente, ovvero vale che

$$\exists i \in \mathbb{N} \mid T_i = T_{i-1}.$$

Ora è inutile andare avanti, questo T_i è l'insieme di tutte le stringhe che riesco a generare nella grammatica. Ora mi chiedo se $w \in T_i$, che posso fare molto facilmente.

Ma allora G è decidibile. ■

Ci rendiamo conto che questa soluzione è mega inefficiente: infatti, in tempo polinomiale non riusciamo a fare questo nelle tipo 1, ma è una soluzione che ci garantisce la decidibilità.

Teorema 3.2.2 (Semi-decidibilità dei linguaggi di tipo 0)**:** I linguaggi di tipo 0 sono ricorsivamente enumerabili.

Dimostrazione 3.2.2.1: In una grammatica di tipo 0 non abbiamo vincoli da considerare.

In input ho una stringa $w \in \Sigma^*$ la cui lunghezza è $|w| = n$. Ho una grammatica G di tipo 0. Mi chiedo se $w \in L(G)$. Per rispondere a questo, devo cercare w nelle forme sentenziali, ma a differenza di prima non possiamo limitarci a quelle che non superano la lunghezza n: infatti, visto che le forme sentenziali si possono accorciare posso anche superare n e poi sperare di tornare indietro in qualche modo.

Definiamo quindi gli insiemi

$$U_i = \left\{ \gamma \in (V \cup \Sigma)^* \mid S \overset{\leq i}{\Rightarrow} \gamma \right\} \quad \forall i \geq 0.$$

Calcoliamo induttivamente questi insiemi.

Se $i = 0$ non eseguo nessuna derivazione, quindi

$$U_0 = \{S\}.$$

Supponiamo di aver calcolato U_{i-1}. Vogliamo calcolare

$$U_i = U_{i-1} \cup \{\gamma \in (V \cup \Sigma)^* \mid \exists \beta \in U_{i-1} : \beta \Rightarrow \gamma\}.$$

Noi partendo da U_0 calcoliamo tutti i vari insiemi ottenendo una serie di U_i.

Per come abbiamo definito gli insiemi, sappiamo che

$$U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq ... \subseteq (V \cup \Sigma)^*.$$

A differenza di prima, la grandezza dell'insieme $(V \cup \Sigma)^*$ è infinita, quindi non ho più l'obbligo di stopparmi ad un certo punto per esaurimento delle stringhe generabili.

Come facciamo a rispondere a $w \in L(G)$? Iniziamo a costruire i vari insiemi U_i e ogni volta che termino la costruzione mi chiedo se $w \in U_i$:

- se questo è vero allora rispondo SI;
- in caso contrario vado avanti con la costruzione.

Vista la cardinalità infinita dell'insieme che fa da container, potrei andare avanti all'infinito (a meno di ottenere due insiemi consecutivi identici, in tale caso rispondo NO).

Ma allora G è semi-decidibile. ■

Diciamo **ricorsivamente enumerabile** perché ogni volta che costruisco un insieme U_i posso prendere le stringe $w \in \Sigma^*$ appena generate ed elencarle, quindi enumerarle una per una.

3.3. Parola vuota

Vediamo il problema della **parola vuota**: nelle grammatiche di tipo 2 abbiamo ho messo il $+$ per evitare la parola vuota nelle derivazioni, ma ogni tanto potrebbe servirmi la parola vuota nel linguaggio di quella grammatica. La mossa di mettere $\star$ mi farebbe cadere tutta la gerarchia.

Come risolviamo questo problema?

Partiamo da una grammatica $G = (V, \Sigma, P, S)$ di tipo 1. Creiamo una nuova grammatica $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ tale che $L(G) = L(G_1)$. Vediamo come sono fatte le componenti di G_1:

- $V_1 = V \cup \{S_1\}$;
- per P_1 abbiamo due opzioni:
  - $P_1 = P \cup \{S_1 \to \alpha \mid (S \to \alpha) \in P\} \cup \{S_1 \to \varepsilon\}$;
  - $P_1 = P \cup \{S_1 \longrightarrow S\} \cup \{S_1 \longrightarrow \varepsilon\}$;
- S_1 nuovo assioma che non appare mai nel lato destro delle produzioni.

La gerarchia ora diventa:

- tipo 1 abbiamo $|\alpha| \leq |\beta|$ ed è possibile $S \longrightarrow \varepsilon$ purché S non appaia mai sul lato destro delle produzioni;
- tipo 2 permettiamo direttamente $A \longrightarrow \beta$ con $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$ senza costringere ad isolarle. Questo perché non creano problemi, comunque resta decidibile se una stringa appartiene al linguaggio, anche se posso cancellare e ridurre la lunghezza;
- tipo 3 idem delle tipo 2.

Queste produzioni particolari sono dette **ε-produzioni**.

3.4. Linguaggi non esprimibili tramite grammatiche finite

Ora vediamo linguaggi che non possiamo esprimere tramite grammatiche. Utilizzeremo la **dimostrazione per diagonalizzazione**, famosissima e utilizzatissima in tante dimostrazioni.

Sono più i numeri pari o i numeri dispari? Sono più i numeri pari o i numeri interi? Sono più le coppie di numeri naturali o i naturali stessi?

Per rispondere a queste domande si usa la definizione di **cardinalità**, e tutti questi insiemi ce l'hanno uguale. Anzi, diciamo di più: tutti questi insiemi sono grandi quanto i naturali, perché esistono funzioni biettive tra questi insiemi e l'insieme $\mathbb{N}$.

Consideriamo ora i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$. Sono più questi sottoinsiemi o i numeri interi? In questo caso, sono di più i sottoinsiemi, che hanno la **cardinalità del continuo**. Per dimostrare questo useremo una dimostrazione per diagonalizzazione.

Teorema 3.4.1: Vale

$$\mathbb{N} \nsim 2^{\mathbb{N}}.$$

Dimostrazione 3.4.1.1: Per assurdo sia $\mathbb{N} \sim 2^{\mathbb{N}}$, ovvero ogni elemento di $2^{\mathbb{N}}$ è listabile.

Creiamo una tabella booleana M indicizzata sulle righe dai sottoinsiemi di naturali S_i e indicizzata sulle colonne dai numeri naturali. Per ogni insieme S_i abbiamo sulla riga la funzione caratteristica, ovvero

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in S_i \\ 0 & \text{se } j \notin S_i \end{cases}.$$

Creiamo l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S_x\},$$

ovvero l'insieme che prende tutti gli elementi 0 della diagonale di M. Questo insieme non è presente negli insiemi S_i listati perché esso è diverso da ogni S_i in almeno una posizione, ovvero la diagonale.

Abbiamo ottenuto un assurdo, ma allora $\mathbb{N} \nsim 2^{\mathbb{N}}$. ■

Prima dell'ultima parte chiediamoci ancora una cosa: sono più le stringhe o i numeri interi? Questo è facile, basta trasformare ogni stringa in un numero intero con una qualche codifica a nostra scelta.

Teorema 3.4.2: Esistono linguaggi che non sono descrivibili da grammatiche finite.

Dimostrazione 3.4.2.1: Prendiamo una grammatica $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Per descriverla devo dire come sono formati i vari campi della tupla. Cosa uso per descriverla? Sto usando dei simboli come lettere, numeri, parentesi, eccetera, quindi la grammatica è una descrizione che possiamo fare sotto forma di stringa. Visto quello che abbiamo da poco dimostrato, ogni grammatica la possiamo descrivere come stringa, e quindi come un numero intero. Siano G_i tutte queste grammatiche, che sono appunto listabili.

Consideriamo ora, per ogni grammatica G_i, l'insieme $L(G_i)$ delle parole generate dalla grammatica G_i, ovvero il linguaggio generato da G_i. Mettiamo dentro L tutti questi linguaggi.

Per assurdo, siano tutti questi linguaggi listabili, ovvero $\mathbb{N} \sim 2^L$.

Come prima, creiamo una tabella M indicizzata sulle righe dai linguaggi $L(G_i)$ e indicizzata sulle colonne dalle stringhe x_i che possiamo però considerare come naturali. La matrice M ha sulla riga i-esima la funzione caratteristica di $L(G_i)$, ovvero

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \in L(G_i) \\ 0 & \text{se } x_j \notin L(G_i) \end{cases}.$$

In poche parole, abbiamo 1 nella cella $M[i,j]$ se e solo se la stringa x_j viene generata da G_i.

Costruiamo ora l'insieme

$$\mathrm{LG} = \{x_i \in \mathbb{N} \mid x_i \notin L(G_i)\},$$

ovvero l'insieme di tutte le stringhe x_i che non sono generate dalla grammatica G_i con lo stesso indice i. Come prima, questo insieme non è presente in L perché differisce da ogni insieme presente in almeno una posizione, ovvero quello sulla diagonale.

Siamo ad un assurdo, ma allora $\mathbb{N} \nsim 2^L$. ■