Teoria dei Linguaggi

Indice

Introduzione

In questo corso studieremo dei **sistemi formali** che descrivono dei linguaggi: ci chiederemo cosa sono in grado di fare, ovvero cosa sono in grado di descrivere in termini di **linguaggi**.

Ci occuperemo anche delle **risorse utilizzate**, come il **numero di mosse** eseguite da una macchina che deve riconoscere un linguaggio, oppure il **numero di stati** che sono necessari per descrivere una macchina a stati finiti, oppure ancora lo **spazio utilizzato** da una macchina di Turing.

Un **linguaggio** è «uno strumento di comunicazione usato da membri di una stessa comunità», ed è composto da due elementi:

- **sintassi**: insieme di simboli (o parole) che devono essere combinati con una serie di regole;
- **semantica**: associazione frase-significato.

Per i linguaggi naturali è difficile dare delle regole sintattiche: vista questa difficoltà, nel 1956 **Noam Chomsky** introduce il concetto di **grammatiche formali**, che si servono di regole matematiche per la definizione della sintassi di un linguaggio.

Il primo utilizzo dei linguaggi formali risale agli stessi anni con il **compilatore Fortran**. Anche se ci hanno messo l'equivalente di 18 anni/uomo, questa è la prima applicazione dei linguaggi formali. Con l'avvento, negli anni successivi, dei linguaggi Algol, ovvero linguaggi con strutture di controllo, la teoria dei linguaggi formali è diventata sempre più importante.

Oggi la teoria dei linguaggi formali è usata nei compilatori di compilatori, dei tool usati per generare dei compilatori per un dato linguaggio fornendo la descrizione di quest'ultimo.

Parte I — Gerarchia di Chomsky

1. Breve ripasso

Prima di addentrarci nello studio della gerarchia di Chomsky facciamo un breve ripasso delle basi che ci serviranno durante lo studio dei linguaggi formali.

Definizione 1.1 (Alfabeto): Un **alfabeto** è un **insieme non vuoto** e **finito** di **simboli**, di solito indicato con le lettere greche maiuscole

$$\Sigma \quad | \quad \Gamma.$$

Definizione 1.2 (Stringa): Una **stringa**, o **parola**, è una **sequenza finita** di simboli appartenenti all'alfabeto Σ. Viene indicata con la lettera x e la possiamo scrivere come

$$x = a_1 ... a_n \quad | \quad a_i \in \Sigma.$$

Data una stringa x, indichiamo il **numero di caratteri** di x con la notazione

$$|x|$$

e il **numero di occorrenze di un carattere** di Σ in x con la notazione

$$|x|_a \quad | \quad a \in \Sigma.$$

Una stringa/parola molto importante è la **parola vuota**, che possiamo indicare in vari modi:

$$\varepsilon \quad | \quad \lambda \quad | \quad \Lambda.$$

Come dice il nome, questa parola non ha simboli, ovvero è l'unica parole tale che

$$|\varepsilon| = 0.$$

L'insieme di tutte le possibili parole che possiamo formare usando l'alfabeto Σ si indica con Σ^*. Questo insieme, ovviamente, è un **insieme infinito**.

Con le parole possiamo definire una serie di operazioni, ma la più importante tra tutte è la **concatenazione**, o **prodotto**. Date due stringhe

$$x, y \in \Sigma^* \quad | \quad x = x_1 ... x_n \land y = y_1 ... y_m$$

allora la concatenazione di x e y è la stringa

$$w = x \cdot y = x_1 ... x_n y_1 ... y_m.$$

L'operazione di concatenazione **non è commutativa** ma è **associativa**, quindi la struttura

$$(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$$

è un **monoide libero** generato da Σ.

Vediamo, per (quasi) finire, alcune proprietà che possiamo dare alle stringhe/parole.

Definizione 1.3 (Prefisso): La stringa $x \in \Sigma^*$ si dice **prefisso** di w se

$$\exists y \in \Sigma^* \mid w = xy.$$

In poche parole, x è prefisso di w se riusciamo a scomporre la stringa w in due parti, dove x è la prima di queste due. Abbiamo due tipi di prefisso:

- **proprio** se $y \neq \varepsilon$;
- **non banale** se $x \neq \varepsilon$.

Il **numero** di prefissi di una stringa w è $|w| + 1$.

Definizione 1.4 (Suffisso): La stringa $y \in \Sigma^*$ si dice **suffisso** di w se

$$\exists x \in \Sigma^* \mid w = xy.$$

In poche parole, vale quanto scritto prima, ma in questo caso y è la seconda delle due parti. Anche qui abbiamo tipi di suffisso:

- **proprio** se $x \neq \varepsilon$;
- **non banale** se $y \neq \varepsilon$.

Anche il **numero** di suffissi di una stringa w è $|w| + 1$.

Definizione 1.5 (Fattore): La stringa $y \in \Sigma^*$ si dice **fattore** di w se

$$\exists x, z \in \Sigma^* \mid w = xyz.$$

In poche parole, vale quanto scritto prima, ma in questo caso dividiamo la stringa w in tre parti e y è la centrale di queste.

Il **numero** di fattori di una stringa w è

$$\leq \frac{|w||w+1|}{2} + 1$$

per via dei possibili doppioni che possiamo trovare.

Definizione 1.6 (Sottosequenza): La stringa $x \in \Sigma^*$ si dice **sottosequenza** di w se x è ottenuta eliminando 0 o più caratteri da w. L'eliminazione può avvenire in maniera non contigua: posso eliminare qualsiasi carattere, ma la stringa risultante che leggiamo deve contenere i caratteri nello stesso ordine di partenza.

Possiamo dire che un **fattore** è una **sottosequenza contigua**.

Per finire veramente, diamo forse la definizione più importante, quella di **linguaggio**.

Definizione 1.7 (Linguaggio): Un **linguaggio** L, definito su un alfabeto Σ, è un qualunque sottoinsieme di Σ^*, ovvero

$$L \subseteq \Sigma^*.$$

Ora che abbiamo fatto un ripasso siamo pronti per vedere la gerarchia di Chomsky, per poi addentrarci nello studio di alcune classi di questa gerarchia.

2. Gerarchia di Chomsky

Vogliamo cercare di rappresentare in maniera **finita** un oggetto potenzialmente **infinito**, come ad esempio un linguaggio. Per fare ciò, abbiamo a nostra disposizione due modelli potenti:

- il **modello generativo** fornisce delle regole che, applicate da un certo punto di partenza, generano tutte le parole di un linguaggio;
- il **modello riconoscitivo** utilizza un modello di calcolo che prende in input una parola e ci dice se appartiene o meno al linguaggio.

Esempio 2.1: Consideriamo il linguaggio sull'alfabeto $\Sigma = \{(,)\}$ delle parole ben bilanciate.

Un **modello generativo** per questo linguaggio deve applicare delle regole a partire da una **sorgente** S per derivare tutte le parole del linguaggio. Le regole potrebbero essere:

- la parola vuota ε è ben bilanciata;
- se x è ben bilanciata, allora anche (x) è ben bilanciata;
- se x e y sono ben bilanciate, allora anche xy è ben bilanciata.

Un **modello riconoscitivo** per questo linguaggio è una black-box che, presa una parola, ci dice se essa appartiene o meno al linguaggio. In realtà questa macchina non potrebbe terminare mai, ma ne parleremo più in fondo in questo capitolo. Una macchina per questo linguaggio deve verificare i seguenti fatti:

- il numero di parentesi aperte è uguale al numero di parentesi chiuse, quindi
$$\#_{(}(x) = \#_{)}(x);$$
- considerato ogni prefisso, il numero di parentesi aperte non deve superare il numero di parentesi chiuse, quindi
$$\forall y \in \Sigma^* \mid x = yz \quad \#_{(}(y) \leq \#_{)}(y).$$

2.1. Grammatiche

Le **grammatiche** sono un modello generativo molto potente: vediamo come sono definite.

Definizione 2.1.1 (Grammatica): Una **grammatica** è una quadrupla (V, Σ, P, S) definita da:

- V **insieme finito** e **non vuoto** di **variabili**. Sono anche dette **simboli non terminali** (o meta-simboli) e sono usate durante il processo di generazione delle parole del linguaggio;
- Σ **insieme finito** e **non vuoto** di **simboli terminali**. Sono chiamati così perché appaiono nelle parole generate, a differenza delle variabili che invece non possono essere presenti;
- P **insieme finito** e **non vuoto** di **regole di produzione**;
- $S \in V$ **simbolo iniziale** o **assioma**, il punto di partenza della generazione.

Soffermiamoci brevemente sulle **regole di produzione**: esse sono nella forma

$$\alpha \longrightarrow \beta \mid \alpha \in (V \cup \Sigma)^+ \wedge \beta \in (V \cup \Sigma)^*.$$

La notazione $()^+$ è praticamente l'insieme $()^*$ senza la parola vuota.

Una regola di produzione viene letta come «se ho α allora posso sostituirlo con β».

L'applicazione delle regole di produzione è alla base del **processo di derivazione**: esso è formato infatti da una serie di **passi di derivazione**, che permettono di generare una parola del linguaggio.

Definizione 2.1.2 (Derivazione in un passo): Date le stringhe $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$ diciamo che x **deriva** y **in un passo**, e si indica con

$$x \Rightarrow y$$

se e solo se

$$\exists (\alpha \longrightarrow \beta) \in P \quad \exists \eta, \delta \in (V \cup \Sigma)^* \mid x = \eta\alpha\delta \wedge y = \eta\beta\delta.$$

Possiamo estendere questa definizione ad un numero definito o arbitrario di passi.

Definizione 2.1.3 (Derivazione in k passi): Date le stringhe $x, y \in (V \cup \Sigma)^*$ diciamo che x **deriva** y **in** $k \geq 0$ **passi**, e si indica con

$$x \overset{k}{\Rightarrow} y$$

se e solo se

$$\exists x_0, ..., x_k \in (V \cup \Sigma)^* \mid x = x_0 \wedge y = x_k \wedge (\forall i \in \{1, ..., k\} \quad x_{i-1} \Rightarrow x_i).$$

Con questa definizione, se contiamo $k = 0$ andiamo a derivare x da sé stessa, ma questo caso lo usiamo solo per comodità, non ha una vera e propria applicazione pratica.

Quando **non abbiamo indicazioni** sul numero di passi possiamo:

- usare la notazione

  $$x \overset{*}{\Rightarrow} y$$

  per indicare un processo di derivazione che avviene in un **numero generico di passi**, e questo vale se e solo se

  $$\exists k \geq 0 \mid x \overset{k}{\Rightarrow} y;$$

- usare la notazione

  $$x \overset{+}{\Rightarrow} y$$

  per indicare un processo di derivazione che avviene in **almeno un passo**, e questo vale se e solo se

  $$\exists k > 0 \mid x \overset{k}{\Rightarrow} y.$$

Definizione 2.1.4 (Linguaggio generato da una grammatica): Il **linguaggio generato** dalla grammatica G è l'insieme

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \right\}.$$

In poche parole, $L(G)$ è l'insieme di tutte le stringhe w che si possono ottenere in un certo numero di passi di derivazione a partire dall'assioma S della grammatica. Notiamo che le stringhe che otteniamo sono formate dai soli **caratteri terminali**. Le stringhe intermedie che utilizziamo invece nei vari passi di derivazione sono dette **forme sentenziali**.

Definizione 2.1.5 (Grammatiche equivalenti): Due grammatiche G_1 e G_2 sono **equivalenti** se e solo se

$$L(G_1) = L(G_2).$$

Vediamo qualche grammatica come esempio.

Esempio 2.1.1: Riprendiamo il linguaggio delle parentesi tonde ben bilanciate.

Possiamo definire una grammatica che ha le seguenti regole di produzione:

$$S \longrightarrow \varepsilon \qquad S \longrightarrow (S) \qquad S \longrightarrow SS$$

Esempio 2.1.2: Sia $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ una grammatica con le seguenti regole di produzione:

$$S \longrightarrow aB \mid bA \qquad A \longrightarrow a \mid aS \mid bAA \qquad B \longrightarrow b \mid bS \mid aBB$$

Questa grammatica genera il linguaggio

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}.$$

Infatti, ogni forma sentenziale w che generiamo è tale che

$$\#_{\{a,A\}}(w) = \#_{\{b,B\}}(w)$$

e questa relazione viene poi mantenuta trasformando tutte le A e B nei relativi simboli terminali.

Esempio 2.1.3: Definiamo ora la grammatica $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ che contiene le seguenti regole di produzione:

$$S \longrightarrow ABC \qquad AB \longrightarrow \varepsilon \mid aAD \mid bAE \qquad DC \longrightarrow BaC$$

$$EC \longrightarrow BbC \qquad Da \longrightarrow aD \qquad Db \longrightarrow bD$$

$$Ea \longrightarrow aE \qquad Eb \longrightarrow bE \qquad C \longrightarrow \varepsilon$$

$$aB \longrightarrow Ba \qquad bB \longrightarrow Bb$$

Generando qualche parola ci si accorge che questa grammatica genera il **linguaggio pappagallo**, definito come

$$L(G) = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}.$$

2.2. Gerarchia di Chomsky

Negli anni ′50 **Noam Chomsky** studia la generazione dei linguaggi formali e crea una **gerarchia di grammatiche formali** che si basa sulla forma delle **regole di produzione** che definiscono la grammatica.

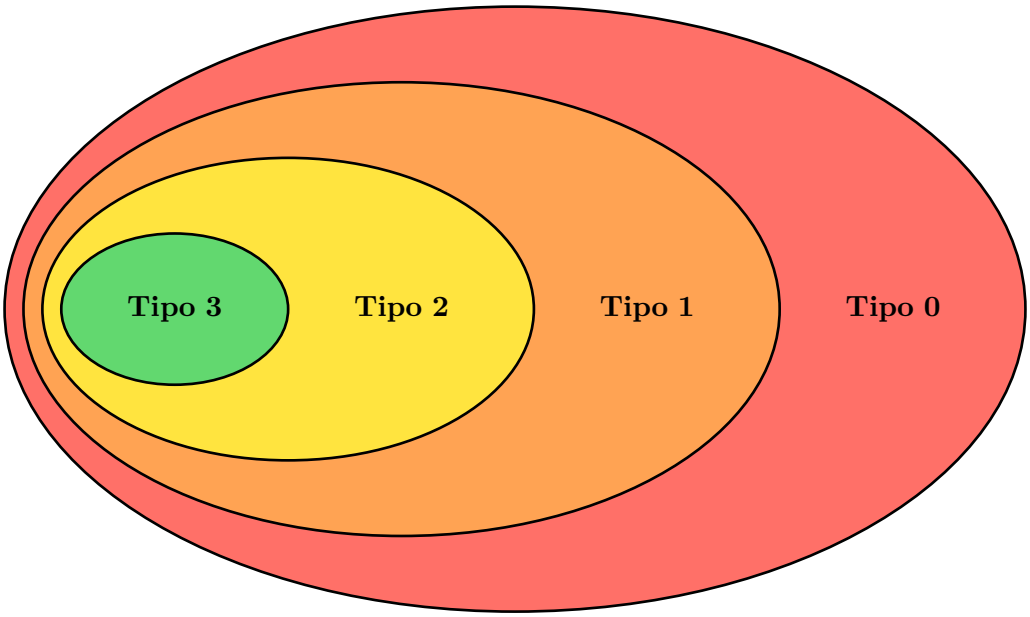
Grammatica	**Regole**	**Modello riconoscitivo**
Tipo 0	Nessuna restrizione, sono il tipo più generale	**Macchine di Turing**
Tipo 1, dette **context-sensitive** (o dipendenti dal contesto)	Se $(\alpha \longrightarrow \beta) \in P$ allora $\lvert\beta\rvert \geq \lvert\alpha\rvert$, ovvero devo generare parole che **non sono più corte** di quella di partenza Sono dette **dipendenti dal contesto** perché ogni regola $(A \longrightarrow B) \in P$ può essere riscritta come $\alpha_1 A \alpha_2 \longrightarrow \alpha_1 B \alpha_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup \Sigma)^*$ che rappresentano il **contesto**, $A \in V$ e $B \in (V \cup \Sigma)^+$	**Automi limitati linearmente**
Tipo 2, dette **context-free** (o libere dal contesto)	Le regole in P sono del tipo $\alpha \longrightarrow \beta$, con $\alpha \in V$ e $\beta \in (V \cup \Sigma)^+$	**Automi a pila**

Tipo 3, dette **grammatiche regolari**	Le regole in P sono del tipo $A \longrightarrow aB$ oppure $A \longrightarrow a$, con $A, B \in V$ e $a \in \Sigma$	**Automi a stati finiti**

La gerarchia che ha definito Chomsky è **propria**, ovvero:

$$L_3 \subset L_2 \subset L_1 \subset L_0.$$

Come vedremo a fine di questo capitolo, questa gerarchia **non esaurisce** tutti i linguaggi possibili: esistono infatti linguaggi che non sono descrivibili in maniera finita con le grammatiche.



Definizione 2.2.1 (Tipo di una grammatica): Sia $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio. Allora L è di tipo i se e solo se esiste una grammatica G di tipo i tale che

$$L = L(G).$$

La gerarchia data considera dei **modelli deterministici**, ma come cambia considerando invece dei **modelli non deterministici**? Sappiamo che:

- le grammatiche di tipo 3 hanno la stessa potenza computazionale, pagando un costo in termini di descrizione;
- le grammatiche di tipo 2 hanno il modello deterministico strettamente più potente;
- le grammatiche di tipo 1 sono abbastanza complicate, quindi non lo vedremo;
- le grammatiche di tipo 0, come quelle regolari, hanno la stessa potenza computazionale.

Il non determinismo comunque è una nozione del **riconoscitore** che sto usando:

- nel determinismo il riconoscitore può fare una scelta alla volta;
- nel non determinismo può fare più scelte contemporaneamente.

Nelle grammatiche è difficile catturare questa nozione, perché esse lo hanno **intrinsecamente**, perché le derivazioni le applico tutte assieme per ottenere le stringhe del linguaggio.

2.3. Decidibilità

Se una grammatica é di tipo 1 allora possiamo costruire una macchina che sia in grado di dire, in tempo finito, se una parola appartiene o meno al linguaggio generato da quella grammatica. Questa macchina è detta **verificatore**, e si dice che le grammatiche di tipo 1 sono **decidibili**.

Teorema 2.3.1 (Decidibilità dei linguaggi context-sensitive): I linguaggi di tipo 1 sono **ricorsivi**.

Con **ricorsività** non intendiamo le procedure ricorsive, ma si intende una procedura che è calcolabile automaticamente. Nei linguaggi, un qualcosa di ricorsivo intende una macchina che, data una stringa x in input, riesce a rispondere a $x \in L$ terminando sempre dicendo **SI** o **NO**. Si usano i termini **ricorsivo** e **decidibile** come sinonimi.

Dimostrazione 2.3.1.1: In una grammatica di tipo 1 l'unico vincolo è sulla lunghezza delle produzioni, ovvero non possono mai accorciarsi.

In input ho una stringa $w \in \Sigma^*$ la cui lunghezza è $|w| = n$. Ho una grammatica G di tipo 1 e mi chiedo se $w \in L(G)$. Per rispondere a questo, devo cercare w nelle forme sentenziali, ma possiamo limitarci a quelle che non superano la lunghezza n: infatti, visto che la lunghezza aumenta sempre (o al massimo rimane uguale) posso arrivare al massimo alle stringhe di lunghezza n e controllare solo quelle.

Definiamo quindi gli insiemi

$$T_i = \left\{ \gamma \in (V \cup \Sigma)^{\leq n} \mid S \overset{\leq i}{\Rightarrow} \gamma \right\} \quad \forall i \geq 0.$$

Calcoliamo induttivamente questi insiemi.

Se $i = 0$ non eseguo nessuna derivazione, quindi

$$T_0 = \{S\}.$$

Supponiamo di aver calcolato T_{i-1}. Ma allora

$$T_i = T_{i-1} \cup \{\gamma \in (V \cup \Sigma)^{\leq n} \mid \exists \beta \in T_{i-1} \mid \beta \Rightarrow \gamma\}.$$

Noi partendo da T_0 calcoliamo tutti i vari insiemi ottenendo una serie di T_i. Per come abbiamo definito gli insiemi, sappiamo che

$$T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \subseteq ... \subseteq (V \cup \Sigma)^{\leq n}$$

e l'ultima inclusione è vera perché ho fissato la lunghezza massima, non voglio considerare di più perché vogliamo w di lunghezza n.

La grandezza dell'insieme $(V \cup \Sigma)^{\leq n}$ è finita, quindi anche andando molto avanti con le computazioni prima o poi arrivo ad un certo punto dove non posso più aggiungere niente, ovvero vale che

$$\exists i \in \mathbb{N} \mid T_i = T_{i-1}.$$

Ora è inutile andare avanti, questo T_i è l'insieme di tutte le stringhe che riesco a generare nella grammatica. Ora mi chiedo se $w \in T_i$, che posso fare molto facilmente scorrendo l'insieme.

Ma allora G è decidibile. ■

Ci rendiamo conto che questa soluzione è **altamente inefficiente**: infatti, in tempo polinomiale non riusciamo a fare questo nelle tipo 1, ma è una soluzione che ci garantisce la decidibilità, quindi sium.

Teorema 2.3.2 (Semi-decidibilità dei linguaggi di tipo 0)**:** I linguaggi di tipo 0 sono **ricorsivamente enumerabili**.

Dimostrazione 2.3.2.1: In una grammatica di tipo 0 non abbiamo vincoli da considerare.

In input ho una stringa $w \in \Sigma^*$ la cui lunghezza è $|w| = n$. Ho una grammatica G di tipo 0 e, come prima, mi chiedo se $w \in L(G)$. Per rispondere a questo, devo cercare w nelle forme sentenziali, ma a differenza di prima non possiamo limitarci a quelle che non superano la lunghezza n: infatti, visto che le forme sentenziali si possono accorciare posso anche superare di molto la lunghezza n e poi sperare di tornare indietro in qualche modo.

Definiamo quindi gli insiemi

$$U_i = \left\{ \gamma \in (V \cup \Sigma)^* \mid S \overset{\leq i}{\Rightarrow} \gamma \right\} \quad \forall i \geq 0.$$

Calcoliamo induttivamente questi insiemi.

Se $i = 0$ non eseguo nessuna derivazione, quindi

$$U_0 = \{S\}.$$

Supponiamo di aver calcolato U_{i-1}. Vogliamo calcolare

$$U_i = U_{i-1} \cup \{\gamma \in (V \cup \Sigma)^* \mid \exists \beta \in U_{i-1} : \beta \Rightarrow \gamma\}.$$

Noi partendo da U_0 calcoliamo tutti i vari insiemi ottenendo una serie di U_i. Per come abbiamo definito gli insiemi, sappiamo che

$$U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq ... \subseteq (V \cup \Sigma)^*.$$

A differenza di prima, la grandezza dell'insieme $(V \cup \Sigma)^*$ è infinita, quindi non ho più l'obbligo di stopparmi ad un certo punto per esaurimento delle stringhe generabili.

Come rispondiamo a $w \in L(G)$? Iniziamo a costruire i vari insiemi U_i e ogni volta che termino la costruzione mi chiedo se $w \in U_i$:

- se questo è vero allora rispondo **SI**;
- in caso contrario vado avanti con la costruzione.

frac(4 pi, lambda) Vista la cardinalità infinita dell'insieme che fa da container, potrei andare avanti all'infinito (a meno di ottenere due insiemi consecutivi identici, in tale caso rispondo NO).

Ma allora G è semi-decidibile. ■

Usiamo la dicitura **ricorsivamente enumerabile** perché ogni volta che costruisco un insieme U_i posso prendere le stringe $w \in \Sigma^*$ appena generate ed elencarle, quindi enumerarle una per una.

2.4. Introduzione della parola vuota

Introduciamo il **problema della parola vuota**. Dalle grammatiche di tipo 1 a salire abbiamo il vincolo di non poter scendere di lunghezza con le derivazioni, quindi diciamo che la parola vuota ε non la vedremo mai come lato destro di una derivazione. Eppure, ogni tanto la parola vuota dovrebbe appartenere al linguaggio generato da una grammatica. Come possiamo risolvere questo problema, senza far decadere l'intera gerarchia?

Una possibile soluzione è **spezzare le regole di produzione**.

Partiamo da una grammatica $G = (V, \Sigma, P, S)$ di tipo 1 e definiamo una nuova grammatica

$$G' = (V', \Sigma, P', S')$$

tale che $L(G) = L(G')$. Vediamo le componenti di questa grammatica:

- l'**insieme delle variabili** contiene un nuovo elemento, il **nuovo assioma** S', ovvero
$$V' = V \cup \{S'\};$$
- l'**insieme delle produzioni** mantiene le regole vecchie ma aggiunge due nuove regole, ovvero
$$P' = P \cup \{S' \longrightarrow \varepsilon\} \cup \{S' \longrightarrow S\}$$
dove:
  - la prima regola permette di generare la parola vuota ε;
  - la seconda regola permette di far partire la computazione della vecchia grammatica;
- l'**assioma** S' ci permette la generazione della parola vuota ma dobbiamo garantire che non appaia mai nel lato destro delle produzioni.

Con questi accorgimenti ora riusciamo a generare anche la parola vuota: infatti, questo lo possiamo fare all'inizio partendo da S'. Se non ci interessa la parola vuota facciamo partire, sempre da S', la computazione della vecchia grammatica.

Come cambia la gerarchia considerando anche la parola vuota? Abbiamo che:

- le grammatiche di tipo 1 mantengono la clausola $|\beta| \geq |\alpha|$ ma è possibile ottenere ε da S' purché S' non appaia mai nel lato destro delle produzioni;
- le grammatiche di tipo 2 modificano la notazione $()^+$ in $()^*$ nel lato destro delle produzioni senza isolare in modo specifico ε perché questo non crea problemi;
- le grammatiche di tipo 3 seguono le precedenti.

Queste particolari produzioni che considerano la parole vuota sono dette ε-**produzioni**.

2.5. Linguaggi non esprimibili tramite grammatiche finite

Vediamo infine dei linguaggi che non possiamo esprimere tramite **grammatiche finite**. Per fare ciò useremo la famosissima **dimostrazione per diagonalizzazione** di Cantor.

Esempio 2.5.1: Sono più i numeri pari o i numeri dispari? Sono più i numeri pari o i numeri interi? Sono più le coppie di numeri naturali o i naturali stessi?

Per rispondere a queste domande si usa la definizione di **cardinalità**, e tutti questi insiemi che abbiamo ce l'hanno uguale. Anzi, diciamo di più: tutti questi insiemi sono grandi quanto i naturali, perché esistono funzioni biettive tra questi insiemi e l'insieme $\mathbb{N}$.

Esempio 2.5.2: Sono più i sottoinsiemi di naturali o i naturali stessi?

In questo caso, sono di più i sottoinsiemi, che hanno la **cardinalità del continuo**. Per dimostrare questo useremo una dimostrazione per diagonalizzazione.

Teorema 2.5.1: Vale

$$\mathbb{N} \nsim 2^{\mathbb{N}}.$$

Dimostrazione 2.5.1.1: Per assurdo sia $\mathbb{N} \sim 2^{\mathbb{N}}$, ovvero ogni elemento di $2^{\mathbb{N}}$ è **listabile**.

Creiamo una tabella booleana M indicizzata sulle righe dai sottoinsiemi di naturali S_i e indicizzata sulle colonne dai numeri naturali. Per ogni insieme S_i abbiamo sulla riga la funzione caratteristica, ovvero

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in S_i \\ 0 & \text{se } j \notin S_i \end{cases}.$$

Creiamo l'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin S_x\},$$

ovvero l'insieme che prende tutti gli elementi 0 della diagonale di M. Questo insieme non è presente negli insiemi S_i listati perché esso è diverso da ogni S_i in almeno una posizione, ovvero la diagonale.

Abbiamo ottenuto un assurdo, ma allora $\mathbb{N} \nsim 2^{\mathbb{N}}$. ■

Esempio 2.5.3: Sono più le stringhe o i numeri naturali?

Questo è facile: basta trasformare ogni stringa in un numero naturale con una qualche codifica a nostra scelta.

Ora che abbiamo a disposizione queste nozioni possiamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.5.2: Esistono linguaggi che non sono descrivibili da grammatiche finite.

Dimostrazione 2.5.2.1: Prendiamo una grammatica $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Per descriverla devo dire come sono formati i vari campi della tupla. Cosa uso per descriverla? Sto usando dei simboli come lettere, numeri, parentesi, eccetera, quindi la grammatica è una descrizione che possiamo fare sotto forma di stringa. Visto quello che abbiamo da poco dimostrato, ogni grammatica la possiamo descrivere come stringa, e quindi come un numero intero. Siano G_i tutte queste grammatiche, che sono appunto listabili.

Consideriamo ora, per ogni grammatica G_i, l'insieme $L(G_i)$ delle parole generate dalla grammatica G_i, ovvero il linguaggio generato da G_i. Mettiamo dentro L tutti questi linguaggi.

Per assurdo, siano tutti questi linguaggi listabili, ovvero $\mathbb{N} \sim 2^L$.

Come prima, creiamo una tabella M indicizzata sulle righe dai linguaggi $L(G_i)$ e indicizzata sulle colonne dalle stringhe x_i che possiamo però considerare come naturali. La matrice M ha sulla riga i-esima la funzione caratteristica di $L(G_i)$, ovvero

$$M[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j \in L(G_i) \\ 0 & \text{se } x_j \notin L(G_i) \end{cases}.$$

In poche parole, abbiamo 1 nella cella $M[i,j]$ se e solo se la stringa x_j viene generata da G_i.

Costruiamo ora l'insieme

$$\mathrm{LG} = \{x_i \in \mathbb{N} \mid x_i \notin L(G_i)\},$$

ovvero l'insieme di tutte le stringhe x_i che non sono generate dalla grammatica G_i con lo stesso indice i. Come prima, questo insieme non è presente in L perché differisce da ogni insieme presente in almeno una posizione, ovvero quello sulla diagonale.

Siamo ad un assurdo, ma allora $\mathbb{N} \nsim 2^L$. ■

Parte II — Linguaggi regolari

1. Automi a stati finiti deterministici

Nel contesto delle grammatiche di tipo 3 andiamo ad utilizzare le **macchine a stati finiti** per stabilire se, data una stringa x, essa appartiene o meno ad un dato linguaggio. Le macchine a stati finiti da ora le chiameremo anche **FSM** (Finite State Machine) o, nel caso delle macchine deterministiche, **DFA** (Deterministic Finite Automata).

1.1. Definizione

Un DFA è un dispositivo formato da un **nastro**, che contiene l'input x da esaminare disposto carattere per carattere uno per cella del nastro da sinistra verso destra. Abbiamo anche una **testina** read-only che punta alle celle del nastro e un **controllo a stati finiti**. Il numero di stati, come si capisce, sono in numero finito, e soprattutto sono **fissati**, ovvero non dipendono dalla grandezza dell'input. Infine, il modello base che usiamo per ora è quello delle FSM **one-way**, ovvero quello che usa una testina che va sinistra verso destra senza poter tornare indietro.

All'accensione della macchina il controllo si trova nello **stato iniziale** q_0 con la testina sul primo carattere dell'input. Ad ogni passo della computazione la testina legge un carattere e, in base a questo e allo stato corrente, calcola lo stato prossimo. Questo spostamento avviene grazie alla **funzione di transizione**, che vedremo dopo. Arrivati alla fine dell'input grazie alla funzione di transizione, la macchina deve rispondere **SI** o **NO**.

Definizione 1.1.1 (DFA): Un DFA è una **quintupla**

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

formata da:

- Q **insieme finito** di **stati**;
- Σ **alfabeto** di input;
- δ **funzione di transizione**;
- $q_0 \in Q$ **stato iniziale**;
- $F \subseteq Q$ insiemi degli **stati finali**.

La funzione di transizione, che non abbiamo ancora definito formalmente, è il **programma dell'automa**, il **motore** che ci manda avanti. Essa è una funzione

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$$

che, dati il simbolo letto dalla testina e lo stato corrente, mi dice in che stato muovermi.

La funzione di transizione spesso è comodo scriverla in **forma tabellare**, con le righe indicizzate dagli stati, le colonne indicizzate dai simboli e nelle celle inseriamo gli stati prossimi.

Può essere comodo anche **disegnare** l'automa. Esso è un **grafo orientato**, con i **vertici** che rappresentano gli stati e gli **archi** che rappresentano le transizioni. Gli archi sono **etichettati** dai simboli di Σ che causano una certa transizione. Lo **stato iniziale** è indicato con una freccia che arriva dal nulla, mentre gli **stati finali** sono indicati con un doppio cerchio o con una freccia che va nel nulla, ma quest'ultima convenzione è francese e noi non lo siamo, viva le lumache.

Dobbiamo modificare leggermente la funzione di transizione: a noi piacerebbe averla definita sulle stringhe e non sui caratteri. Definiamo quindi l'**estensione** di δ come la funzione

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$$

definita induttivamente come

$$\delta^*(q, \varepsilon) = q$$
$$\delta^*(q, xa) = \delta(\delta^*(q, x), a) \mid x \in \Sigma^* \wedge a \in \Sigma.$$

Per non avere in giro troppo nomi usiamo δ^* con il nome δ anche per le stringhe, è la stessa cosa.

Noi **accettiamo** se finiamo in uno stato finale. Il **linguaggio accettato** da A è l'insieme

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}.$$

1.2. Esempi

Vediamo un po' di esempi che ci permettono di introdurre anche una serie di situazioni particolari.

Diamo subito una distinzione dei problemi che abbiamo sugli automi:

- se abbiamo in mano un automa e dobbiamo descrivere il linguaggio che riconosce, siamo davanti ad un **problema di analisi**;
- se abbiamo in mano un linguaggio e dobbiamo scrivere un automa che lo riconosce, siamo davanti ad un **problema di sintesi**.

Esempio 1.2.1: Sia $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che:

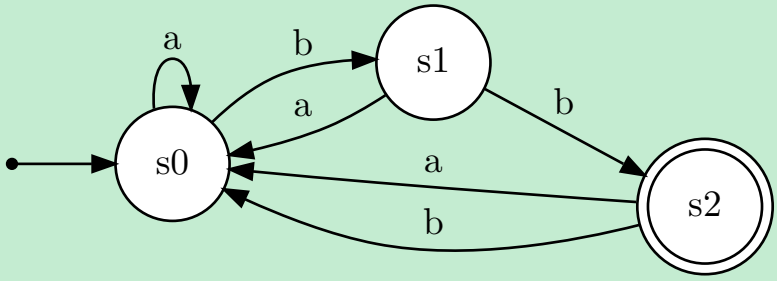
- $Q = \{s_0, s_1, s_2\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $q_0 = s_0$;
- $F = s_2$.

Diamo una **rappresentazione tabellare** della funzione di transizione δ. Essa è

	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_0	s_0

.

Disegniamo anche l'automa A avendo a disposizione la rappresentazione di δ.



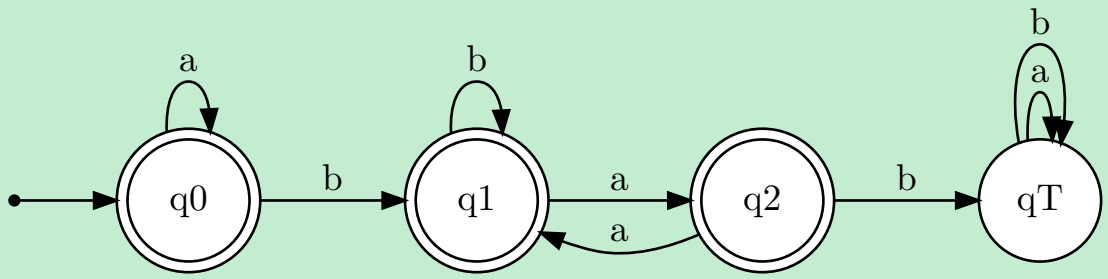
Il linguaggio che riconosce questo automa è

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid \text{il più lungo suffisso di } x \text{ formato solo da } b \text{ è lungo } 3k + 2 \mid k \geq 0\}.$$

Esempio 1.2.2: Sia $\Sigma = \{a, b\}$, vogliamo trovare un automa per il linguaggio

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid \text{tra ogni coppia di } b \text{ successive vi è un numero di } a \text{ pari}\}.$$

Costruiamo un automa **deterministico** per L.



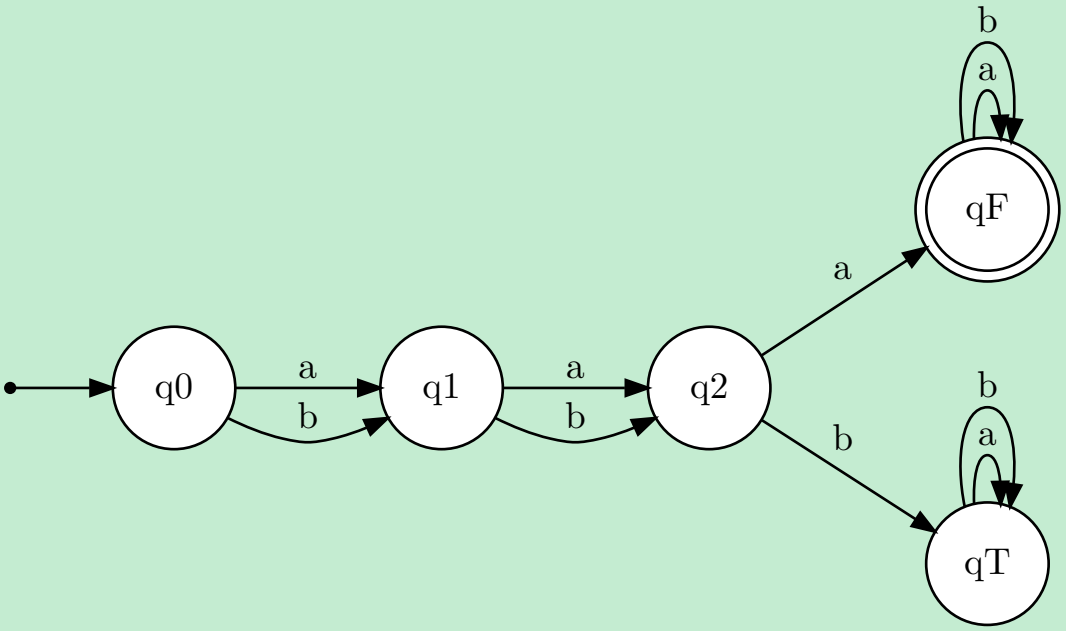
Come vediamo dall'esempio precedente, abbiamo uno stato particolare q_T che è detto **stato trappola**: esso viene utilizzato come «punto di arrivo» per esaurire la lettura dell'input e non accettare la stringa data in input. Finiamo in questo stato se, in uno stato q, leggiamo un carattere che rende la stringa non presente in L.

Lo stato trappola è opzionale: per semplicità, quando un automa **non è completo**, ovvero uno stato non ha un arco per un carattere, si assume che quell'arco vada a finire in uno stato trappola. Questa semplificazione permette di disegnare automi molto più compatti, ma io sono un precisino e devo avere tutti gli stati disegnati.

Esempio 1.2.3: Sia $\Sigma = \{a, b\}$, vogliamo trovare un automa per il linguaggio

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid \text{il terzo simbolo di } x \text{ è una } a\}.$$

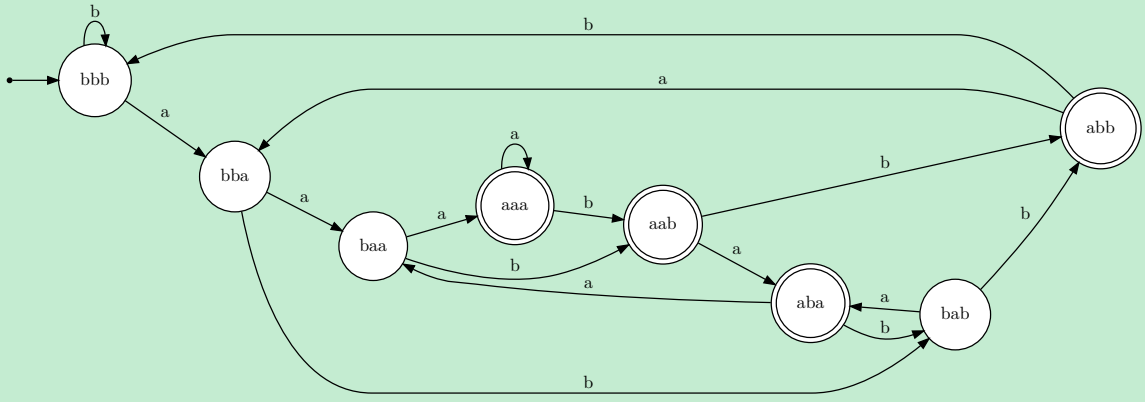
Costruiamo un automa deterministico per L.



Esempio 1.2.4: Sia $\Sigma = \{a, b\}$, vogliamo ora trovare un automa per il linguaggio

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid \text{il terzo simbolo di } x \text{ da destra è una } a\}.$$

Costruiamo un automa deterministico per L. Qua l'idea è ricordarsi una finestra di 3 simboli e grazie a questa vediamo se il primo carattere che definisce lo stato è una a.



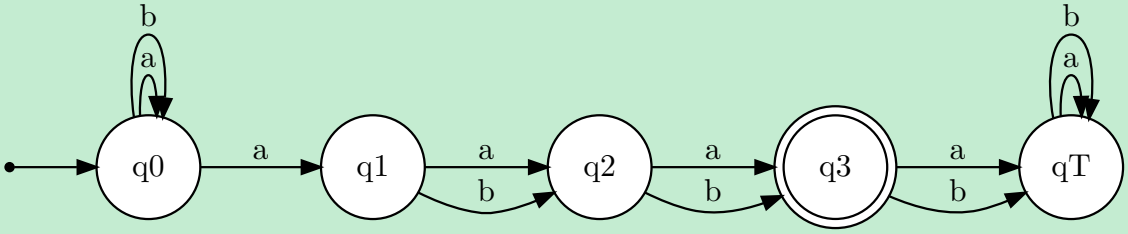
Ci servono per forza 8 stati o possiamo fare meglio? Abbiamo trovato la strada migliore?

Quando introdurremo il concetto di **distinguibilità** vedremo che questo è l'automa migliore che possiamo costruire per questo linguaggio.

2. Automi a stati finiti non deterministici

L'ultimo esempio del capitolo precedente ci ha richiesto 2^n stati. Abbiamo poi detto che con la nozione di **distinguibilità** dimostreremo che non ci sono DFA con meno stati di quello che abbiamo costruito. Ma se invece utilizzassimo degli **automi non deterministici**?

Esempio 2.1: Vediamo un automa non deterministico per il linguaggio dell'ultimo esempio del capitolo precedente.



Abbiamo usato un numero di stati uguale a $n+1$ (escluso quello trappola), dove n è la posizione da destra del carattere richiesto.

2.1. Definizione

Nello scorso esempio abbiamo generato un **automa non deterministico**. Infatti, dallo stato q_0 noi abbiamo la possibilità di scegliere se restare in q_0 o andare in q_1, ovvero abbiamo più scelte di transizioni in uno stesso stato. Che significato diamo a questo? Noi non sappiamo a che punto siamo della stringa, quindi usiamo il non determinismo come una **scommessa**: scommetto che, quando sono in q_0, io sia nel terzultimo carattere, e che quindi riuscirò a finire nello stato q_3.

Gli **automi non deterministici**, o **NFA**, sono definiti dalla quintupla

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

che differisce da quella dei DFA solo nella **funzione di transizione**. Essa è la funzione

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$$

che, dati lo stato corrente e il carattere letto dalla testina, mi manda in un insieme di stati possibili.

Prima di definire formalmente l'accettazione di una stringa da parte di un automa non deterministico, definiamo l'**estensione** di δ come la funzione

$$\delta^* : Q \times \Sigma^* \longrightarrow 2^Q$$

definita induttivamente come

$$\begin{aligned} \delta^*(q, \varepsilon) &= \{q\} \\ \delta^*(q, xa) &= \bigcup_{p \in \delta^*(q,x)} \delta(p, a) \mid x \in \Sigma^* \wedge a \in \Sigma. \end{aligned}$$

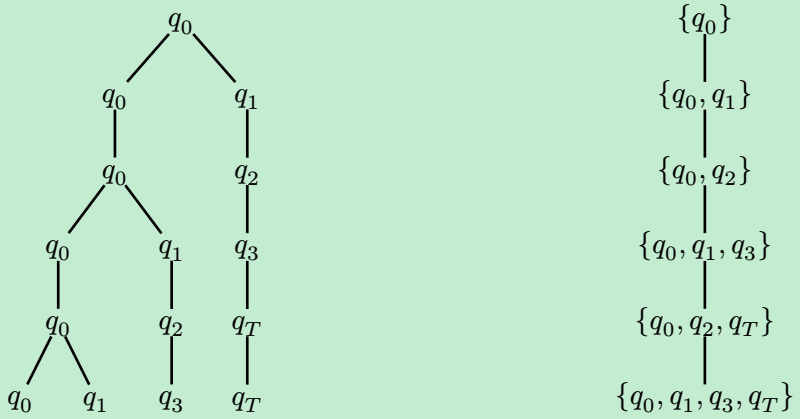
Come prima, per non avere in giro troppo nomi, usiamo δ^* con il nome δ anche per le stringhe.

Quando **accettiamo** una stringa? Avendo teoricamente la possibilità di fare **infinite computazioni parallele**, visto che ad ogni passo posso sdoppiare la mia computazione, ci basta avere almeno un percorso che finisce in uno stato finale.

Il **linguaggio riconosciuta** dall'automa A non deterministico è

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}.$$

Esempio 2.1.1: Considerando l'automa precedente, scriviamo l'albero di computazione che viene generato dall'automa mentre cerca di riconoscere la stringa $x = ababa$.



Visto che raggiungiamo, all'ultimo livello dell'albero, almeno una volta lo stato finale q_3, la stringa x viene accettata dall'automa.

2.2. Confronto tra DFA e NFA

Banalmente, ogni automa deterministico è anche un automa non deterministico nel quale abbiamo, per ogni stato, al massimo un arco uscente etichettato con lo stesso carattere. In poche parole, abbiamo sempre una sola scelta. Ma allora la classe dei linguaggi riconosciuti da DFA è inclusa nella classe dei linguaggi riconosciuti da NFA.

Ma vale anche il viceversa: ogni automa non deterministico può essere trasformato in un automa deterministico con una costruzione particolare, detta **costruzione per sottoinsiemi**.

Dato $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA, e costruisco

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', q_,0, F')$$

un DFA tale che:

- $Q' = 2^Q$, ovvero gli **stati** sono tutti i possibili sottoinsiemi;
- $\delta' : Q' \times \Sigma \longrightarrow Q'$ è la nuova **funzione di transizione** che ci permette di navigare tra i possibili sottoinsiemi, ed è tale che

$$\delta'(\alpha, a) = \bigcup_{q \in \alpha} \delta(q, a);$$

- $q_0' = \{q_0\}$ nuovo **stato iniziale**;
- $F' = \{\alpha \in Q' \mid \alpha \cap F \neq \varnothing\}$ nuovo **insieme degli stati finali**.

Come vediamo, il non determinismo è estremamente comodo, perché ci permette di rendere molto compatta la rappresentazione degli automi, ma è irrealistico pensare di fare sempre la scelta giusta nelle scommesse.

2.3. Forme di non determinismo

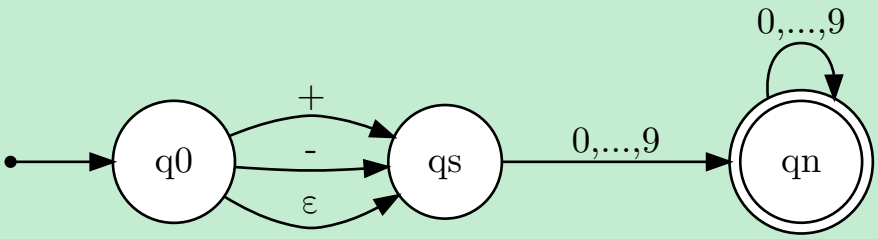
Il non determinismo sulle **transizioni**, ovvero avere più opzioni per la stessa lettera a partire da uno stato, non è l'unica forma di non determinismo che abbiamo.

Infatti, un'altra forma di non determinismo è quella di avere **stati iniziali multipli**, ovvero poter scegliere più punti di partenza. Come potenza siamo uguali agli automi deterministici: basta fare una **costruzione per sottoinsiemi** e abbiamo sistemato tutto.

L'ultima forma di non determinismo che abbiamo è quella delle ε-**produzioni**: esse sono transizioni di stato etichettate dalla ε che permettono di spostarsi da uno stato all'altro senza leggere un carattere della stringa da riconoscere.

Che applicazioni può avere una forma del genere? Nei **compilatori** questo approccio è comodissimo per riconoscere dei numeri che possono essere indicati con o senza segno.

Esempio 2.3.1: Se $\Sigma = \{0, ..., 9, +, -\}$ definiamo un numero come una sequenza non vuota di cifre, con un segno iniziale opzionale.



La epsilon mossa indica una opzionalità: potremmo leggere il prossimo carattere stando nello stato q_0 oppure nello stato q_s.

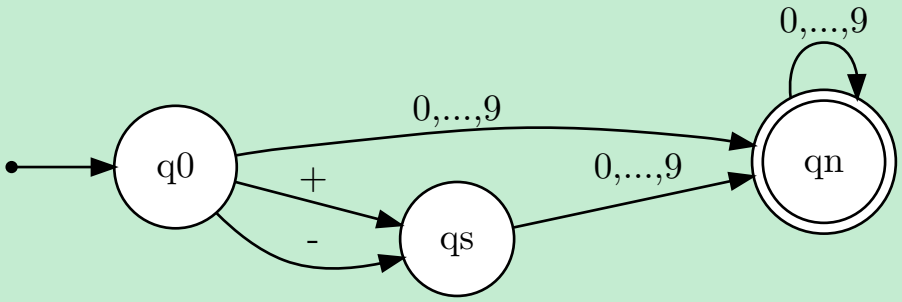
Questa soluzione aumenta la potenza dell'automa? **NO**: ogni sequenza nella forma

$$p \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} p' \overset{a}{\longrightarrow} q' \overset{\varepsilon}{\rightsquigarrow} q$$

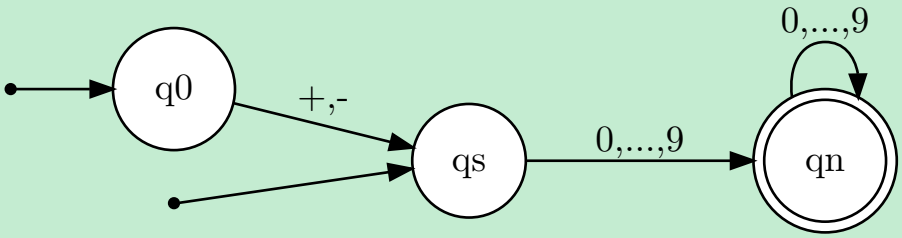
può essere tradotta nella transizione

$$p \overset{a}{\longrightarrow} q.$$

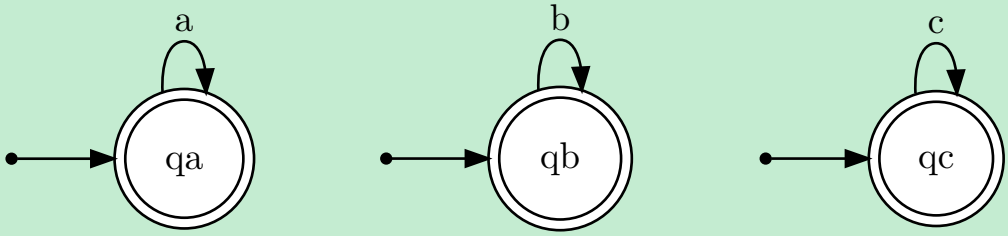
Esempio 2.3.2: Andiamo a rimuovere la ε-transizione usando le sequenze appena descritte.



Una soluzione analoga rimuove le ε-transizioni inserendo degli stati iniziali multipli, ma questo mantiene ancora la forma di non determinismo dell'automa e non migliora la potenza, visto che basta trasformare l'NFA in un DFA con la costruzione per sottoinsiemi e come stato iniziale si avranno più di due elementi.

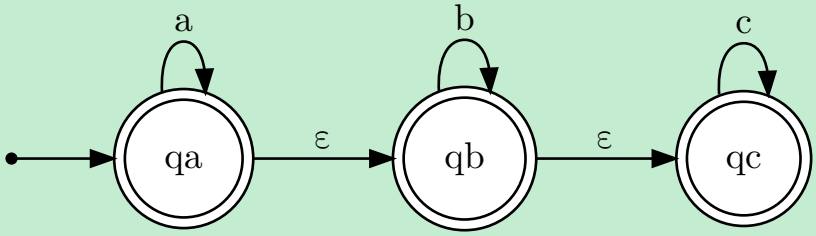


Esempio 2.3.3: Ci vengono dati tre automi, che riconoscono sequenze di a, b e c arbitrarie.

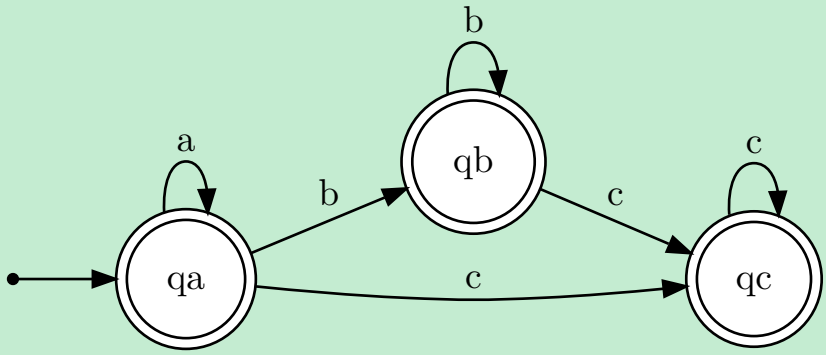


Vogliamo costruire un automa che utilizzi le ε-transizioni usando questi tre moduli per riconoscere il linguaggio

$$L = \{a^n b^m c^h \mid m, n, h \geq 0\}.$$

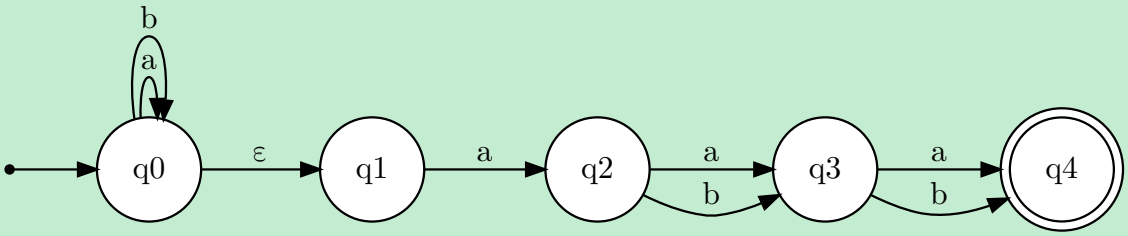


Come lo rendiamo deterministico? Sicuramente non andiamo ad utilizzare gli stati iniziali multipli, che qui ci starebbero molto bene, ma appunto vogliamo un comportamento deterministico.



Siamo nel deterministico, ma l'automa di prima è molto più leggibile di questo.

Esempio 2.3.4: Riprendiamo il linguaggio L_n delle stringhe con l'n-esimo carattere da destra uguale ad una a. Avevamo visto un NFA sulle transizioni, vediamone uno non deterministico sulle ε-transizioni fissando il valore a $n = 3$.



La scommessa qua l'abbiamo messa nel primo stato, che cerca di indovinare se sia arrivato o meno al terzultimo carattere. Il numero di stati, per L_n generico, è $n + 2$.