

Esercizi TdL

Indice

1. Esercizi lezione 01 e 02 [28/02]	5
1.1. Esercizio 01	5
1.2. Esercizio 02	6
1.3. Esercizio 03	6
1.4. Esercizio 04	7
1.5. Esercizio 05	8
1.6. Esercizio 06	8
1.7. Esercizio 07	9
1.8. Esercizio 08	10
1.9. Esercizio 09	11
2. Esercizi lezioni 03, 04 e 05 [12/03]	12
2.1. Esercizio 01	12
2.2. Esercizio 02	12
2.3. Esercizio 03	13
2.4. Esercizio 04	15
2.5. Esercizio 05	15
2.6. Esercizio 06	17
2.7. Esercizio 07	18
3. Esercizi lezione 06 [14/03]	20
3.1. Esercizio 01	20
3.2. Esercizio 02	20
3.3. Esercizio 03	21
3.4. Esercizio 04	23
3.5. Esercizio 05	26
4. Esercizi lezione 07 [19/03]	27
4.1. Esercizio 01	27
4.2. Esercizio 02	30
5. Esercizi lezioni 08, 09 e 10 [28/03]	33
5.1. Esercizio 01	33
5.2. Esercizio 02	33
5.3. Esercizio 03	33
5.4. Esercizio 04	34
5.5. Esercizio 05	34
5.6. Esercizio 06	36
5.7. Esercizio 07	37
5.8. Esercizio 08	39
5.9. Esercizio 09	41
5.10. Esercizio 10	42
5.11. Esercizio 11	42
5.12. Esercizio 12	44
5.13. Esercizio 13	45
5.14. Esercizio 14	46
6. Esercizi lezione 11 [02/04]	47
6.1. Esercizio 01	47
6.2. Esercizio 02	47

6.3. Esercizio 03	50
6.4. Esercizio 04	51
7. Esercizi lezione 12 [04/04]	54
7.1. Esercizio 01	54
7.2. Esercizio 02	54
7.3. Esercizio 03	54
7.4. Esercizio 04	57
7.5. Esercizio 05	57
8. Esercizi lezione 13 [09/04]	59
8.1. Esercizio 01	59
8.2. Esercizio 02	60
8.3. Esercizio 03	60
8.4. Esercizio 04	60
8.5. Esercizio 05	61
8.6. Esercizio 06	61
8.7. Esercizio 07	62
9. Esercizi lezione 14 [11/04]	64
9.1. Esercizio 01	64
9.2. Esercizio 02	64
9.3. Esercizio 03	65
9.4. Esercizio 04	67
9.5. Esercizio 05	68
9.6. Esercizio 06	69
9.7. Esercizio 07	71
10. Esercizi lezione 15 [23/04]	72
10.1. Esercizio 01	72
10.2. Esercizio 02	73
11. Esercizi lezione 16 [30/04]	74
12. Esercizi lezione 17 [07/05]	75
12.1. Esercizio 01	75
12.2. Esercizio 02	79
12.3. Esercizio 03	80
12.4. Esercizio 04	80
12.5. Esercizio 05	81
12.6. Esercizio 06	84
13. Esercizi lezione 18 [09/05]	86
13.1. Esercizio 01	86
13.2. Esercizio 02	86
13.3. Esercizio 03	88
14. Esercizi lezioni 19 e 20 [16/05]	89
14.1. Esercizio 01	89
14.2. Esercizio 02	89
14.3. Esercizio 03	89
14.4. Esercizio 04	89
14.5. Esercizio 05	90

14.6. Esercizio 06	91
14.7. Esercizio 07	91
14.8. Esercizio 08	91
14.9. Esercizio 09	92
14.10. Esercizio 10	92
14.11. Esercizio 11	92
14.12. Esercizio 12	93
14.13. Esercizio 13	93
14.14. Esercizio 14	93
14.15. Esercizio 15	93
14.16. Esercizio 16	94
14.17. Esercizio 17	94
15. Esercizi lezione 21 e 22 [23/05]	95
15.1. Esercizio 01	95
15.2. Esercizio 02	95
15.3. Esercizio 03	96
15.4. Esercizio 04	99
15.5. Esercizio 05	99
15.6. Esercizio 06	100
16. Esercizi lezione 23 e 24 [30/05]	101

1. Esercizi lezione 01 e 02 [28/02]

1.1. Esercizio 01

Esercizio 1.1.1: Considerate l'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Richiesta 1.1.1.1: Fornite una grammatica CF per il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su Σ , cioè per l'insieme $\text{PAL}_{\text{pari}} = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$.

Soluzione 1.1.1.1: Definisco G tale che $V = \{S\}$ e

$$P = \{S \rightarrow \varepsilon \mid aSa \mid bSb\}.$$

Richiesta 1.1.1.2: Modificate la grammatica precedente per generare l'insieme PAL di tutte le stringhe palindrome su Σ .

Soluzione 1.1.1.2: Definisco G tale che $V = \{S\}$ e

$$P = \{S \rightarrow \varepsilon \mid aSa \mid bSb \mid a \mid b\}.$$

Richiesta 1.1.1.3: Per ogni $k \in \{0, \dots, 3\}$, rispondete alla domanda «Il linguaggio PAL è di tipo k ?» giustificando la risposta.

Soluzione 1.1.1.3: Non è di tipo 3 per le produzioni $S \rightarrow aSa \mid bSb$ ma è di tipo 2 visto che rispetta le restrizioni sulle produzioni. Di conseguenza, è anche di tipo 1 e di tipo 0.

Richiesta 1.1.1.4: Se sostituiamo l'alfabeto con $\Sigma = \{a, b, c\}$, le risposte al punto precedente cambiano? E se sostituiamo con $\Sigma = \{a\}$?

Soluzione 1.1.1.4: Se $\Sigma = \{a, b, c\}$ vanno aggiunte due produzioni che però sono nella forma di quelle precedenti, quindi le risposte non cambiano.

Se $\Sigma = \{a\}$ le uniche produzioni che abbiamo sono

$$S \rightarrow \varepsilon \mid aS \mid a$$

e quindi la grammatica è di tipo 3. Di conseguenza, è anche di tipo 2, tipo 1 e tipo 0.

1.2. Esercizio 02

Esercizio 1.2.1: Considerate l'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

Richiesta 1.2.1.1: Scrivete una grammatica per generare il complemento di PAL.

Soluzione 1.2.1.1: Sia G tale che $V = \{S, D, B\}$ e P formato da

$$S \rightarrow aSa \mid bSb \mid D$$

$$D \rightarrow aDb \mid bDa \mid B$$

$$B \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid S.$$

1.3. Esercizio 03

Esercizio 1.3.1: Sia $\Sigma = \{(\,,\,)\}$ un alfabeto i cui simboli sono la parentesi aperta e la parentesi chiusa.

Richiesta 1.3.1.1: Scrivete una grammatica CF che generi il linguaggio formato da tutte le sequenze di parentesi correttamente bilanciate, come ad esempio $((()(()))())$.

Soluzione 1.3.1.1: Sia G una grammatica con $V = \{S\}$ e P formato da

$$S \rightarrow \varepsilon \mid (S) \mid SS.$$

Richiesta 1.3.1.2: Risolvete il punto precedente per un alfabeto con due tipi di parentesi, come $\Sigma = \{ (,), [,] \}$, nel caso non vi siano vincoli tra i tipi di parentesi (le tonde possono essere contenute tra quadre e viceversa). Esempio $[(())(())]$ ma non $[[[(())()]]$.

Soluzione 1.3.1.2: Sia G una grammatica con $V = \{S\}$ e P formato da

$$S \rightarrow \varepsilon \mid (S) \mid [S] \mid SS.$$

Richiesta 1.3.1.3: Risolvete il punto precedente con $\Sigma = \{ (,), [,] \}$, con il vincolo che le parentesi quadre non possano apparire all'interno di parentesi tonde. Esempio $[(())(())]$, ma non $[(())(())]$.

Soluzione 1.3.1.3: Sia G una grammatica con $V = \{S, T\}$ e P formato da

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \varepsilon \mid [S] \mid SS \mid T \\ T &\rightarrow \varepsilon \mid (T) \mid TT. \end{aligned}$$

1.4. Esercizio 04

Esercizio 1.4.1: Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \mid aBC \\ CB &\rightarrow BC \\ aB &\rightarrow ab \\ bB &\rightarrow bb \\ bC &\rightarrow bc \\ cC &\rightarrow cc. \end{aligned}$$

Richiesta 1.4.1.1: Dopo aver stabilito di che tipo è G , provate a derivare alcune stringhe. Riuscite a dire da quali stringhe è formato il linguaggio generato da G ?

Soluzione 1.4.1.1: La grammatica G è di tipo 1.

Prima derivazione:

$$S \rightarrow aBC \rightarrow abC \rightarrow abc.$$

Seconda derivazione:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \rightarrow aaBCBC \rightarrow aabCBC \\ &\rightarrow aabBCC \rightarrow aabbCC \rightarrow aabbcC \rightarrow aabbcc. \end{aligned}$$

Possiamo dire che $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

1.5. Esercizio 05

Esercizio 1.5.1: Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, B, C\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aBSc \mid abc \\ Ba &\rightarrow aB \\ Bb &\rightarrow bb. \end{aligned}$$

Richiesta 1.5.1.1: Dopo aver stabilito di che tipo è G , provate a derivare alcune stringhe. Riuscite a dire da quali stringhe è formato il linguaggio generato da G ?

Soluzione 1.5.1.1: La grammatica G è di tipo 1.

Prima derivazione:

$$S \rightarrow abc.$$

Seconda derivazione:

$$S \rightarrow aBSc \rightarrow aBabcc \rightarrow aaBbcc \rightarrow aabbcc.$$

Come prima, possiamo dire che $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

1.6. Esercizio 06

Esercizio 1.6.1: Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, A, B, C, D, E\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow ABC \\
AB &\rightarrow aAD \mid bAE \mid \varepsilon \\
DC &\rightarrow BaC \\
EC &\rightarrow BbC \\
Da &\rightarrow aD \\
Db &\rightarrow bD \\
Ea &\rightarrow aE \\
Eb &\rightarrow bE \\
C &\rightarrow \varepsilon \\
aB &\rightarrow Ba \\
bB &\rightarrow Bb.
\end{aligned}$$

Richiesta 1.6.1.1: Dopo aver stabilito di che tipo è G , provate a derivare alcune stringhe. Riuscite a dire da quali stringhe è formato il linguaggio generato da G ?

Suggerimento. Per ogni $w \in \{a, b\}^*$ è possibile costruire una derivazione $S \xRightarrow{*} wABwC$ (provate a procedere per induzione sulla lunghezza di w cercando di capire il ruolo di ciascuna delle variabile nel processo di derivazione).

Soluzione 1.6.1.1: La grammatica G è di tipo 1.

Prima derivazione:

$$S \rightarrow ABC \rightarrow C \rightarrow \varepsilon.$$

Seconda derivazione:

$$S \rightarrow ABC \rightarrow aADC \rightarrow aABaC \rightarrow aaC \rightarrow aa.$$

Terza derivazione:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow ABC \rightarrow aADC \rightarrow aABaC \rightarrow abAEaC \rightarrow abAaEC \\
&\rightarrow abAaBbC \rightarrow abABabC \rightarrow ababC \rightarrow abab.
\end{aligned}$$

Possiamo dire che $L(G) = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$.

1.7. Esercizio 07

Esercizio 1.7.1: Sia $G = (V, \Sigma, P, S)$ la grammatica con $V = \{S, A, B, C, X, Y, L, R\}$, $\Sigma = \{a\}$ e P contenente le seguenti produzioni:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow LXR \\
LX &\rightarrow LYA \mid aC \\
AX &\rightarrow YYA \\
AR &\rightarrow BR \\
YB &\rightarrow BX \\
LB &\rightarrow L \\
CX &\rightarrow aC \\
CR &\rightarrow \varepsilon.
\end{aligned}$$

Richiesta 1.7.1.1: Riuscite a stabilire da quali stringhe è formato il linguaggio generato da G ?

Suggerimento. Si può osservare che $LX^iR \xRightarrow{*} LY^{2i}AR \Rightarrow LX^{2i}R$ per ogni $i > 0$. Inoltre dal simbolo iniziale si ottiene la forma LXR . Le ultime tre produzioni sono utili per sostituire variabili in una forma sentenziale con occorrenze di terminali.

Soluzione 1.7.1.1: La grammatica G è di tipo 0.

Prima derivazione:

$$S \rightarrow LXR \rightarrow aCR \rightarrow a.$$

Seconda derivazione:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow LXR \rightarrow LYAR \rightarrow LYBR \rightarrow LYBXR \\
&\rightarrow LBXXR \rightarrow LXXR \rightarrow aCXR \rightarrow aaCR \rightarrow aa.
\end{aligned}$$

Terza derivazione:

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow LXR \rightarrow LYAR \rightarrow LYBR \rightarrow LYBXR \rightarrow LBXXR \rightarrow LXXR \\
&\rightarrow LYAXR \rightarrow LYYYAR \rightarrow LYYYBR \rightarrow LYYYBXR \\
&\rightarrow LYBXXR \rightarrow LYBXXXR \rightarrow LBXXXXR \rightarrow LXXXXR \\
&\rightarrow aCXXXR \rightarrow aaCXXR \rightarrow aaaCXR \rightarrow aaaaCR \rightarrow aaaa.
\end{aligned}$$

Possiamo dire che $L(G) = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

1.8. Esercizio 08

Esercizio 1.8.1:

Richiesta 1.8.1.1: Modificate la grammatica dell'esercizio 7 in modo da ottenere una grammatica di tipo 1 che generi lo stesso linguaggio.

Soluzione 1.8.1.1: La produzione che dà problemi è $LB \rightarrow L$. La facciamo diventare
$$LB \rightarrow CRL.$$

In questo modo rispettiamo tutti i vincoli delle grammatiche di tipo 1 e non modifichiamo la grammatica, visto che CR non genera problemi con la L o con la a quando facciamo le sostituzioni finali.

1.9. Esercizio 09

Esercizio 1.9.1:

Richiesta 1.9.1.1: Dimostrate che la grammatica $G = (\{A, B, S\}, \{a, b\}, P, S)$, con l'insieme delle produzioni P elencate sotto, genera il linguaggio $\{w \in \{a, b\}^* \mid \forall x \in \{a, b\}^* \ w \neq xx\}$.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \mid BA \rightarrow A \mid B \\ A &\rightarrow aAa \mid aAb \mid bAa \mid bAb \mid a \\ B &\rightarrow aBa \mid aBb \mid bBa \mid bBb \mid b \end{aligned}$$

Soluzione 1.9.1.1: Eseguendo come prima produzione $S \rightarrow A \mid B$ si ottengono delle stringhe di lunghezza dispari, che quindi non possono essere scritte come concatenazione di due stringhe uguali.

Eseguendo invece come prima produzione $S \rightarrow AB \mid BA$ e facendo un numero di sostituzioni uguali per entrambe le parti, le due stringhe risultanti di ugual lunghezza avranno almeno una posizione differente, generate dall'ultimo cambio di A e B .

Eseguendo invece come prima produzione $S \rightarrow AB \mid BA$ e facendo un numero di sostituzioni diverso per le due parti, non lo so dimostrare, secondo Martino lo dobbiamo fare ma io non lo farò, baci.

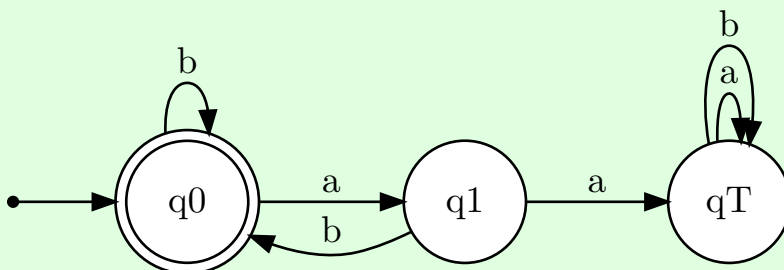
2. Esercizi lezioni 03, 04 e 05 [12/03]

2.1. Esercizio 01

Esercizio 2.1.1:

Richiesta 2.1.1.1: Costruite un automa a stati finiti che riconosca il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ nelle quali ogni a è seguita immediatamente da una b .

Soluzione 2.1.1.1:



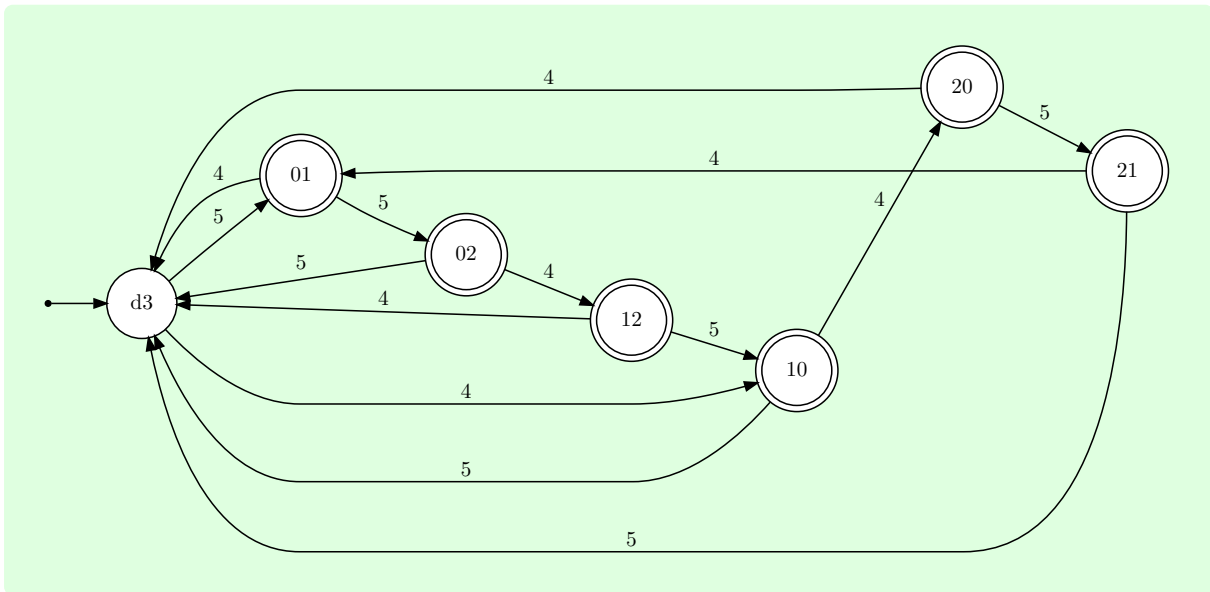
2.2. Esercizio 02

Esercizio 2.2.1:

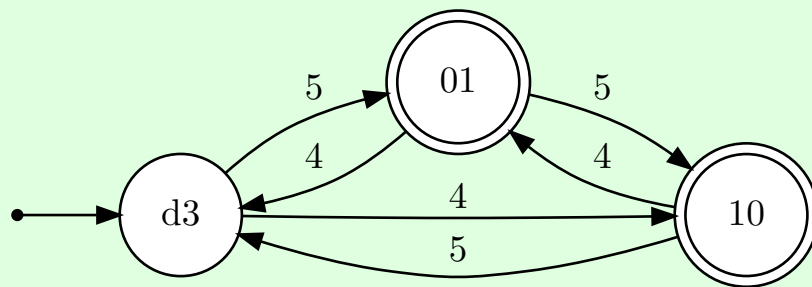
Richiesta 2.2.1.1: Costruite un automa a stati finiti che riconosca il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{4, 5\}$ che, interpretate come numeri in base 10, rappresentano interi che *non sono* divisibili per 3.

Suggerimento. Un numero intero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre in base 10 è divisibile per 3.

Soluzione 2.2.1.1: Prima versione



Soluzione 2.2.1.2: Seconda versione

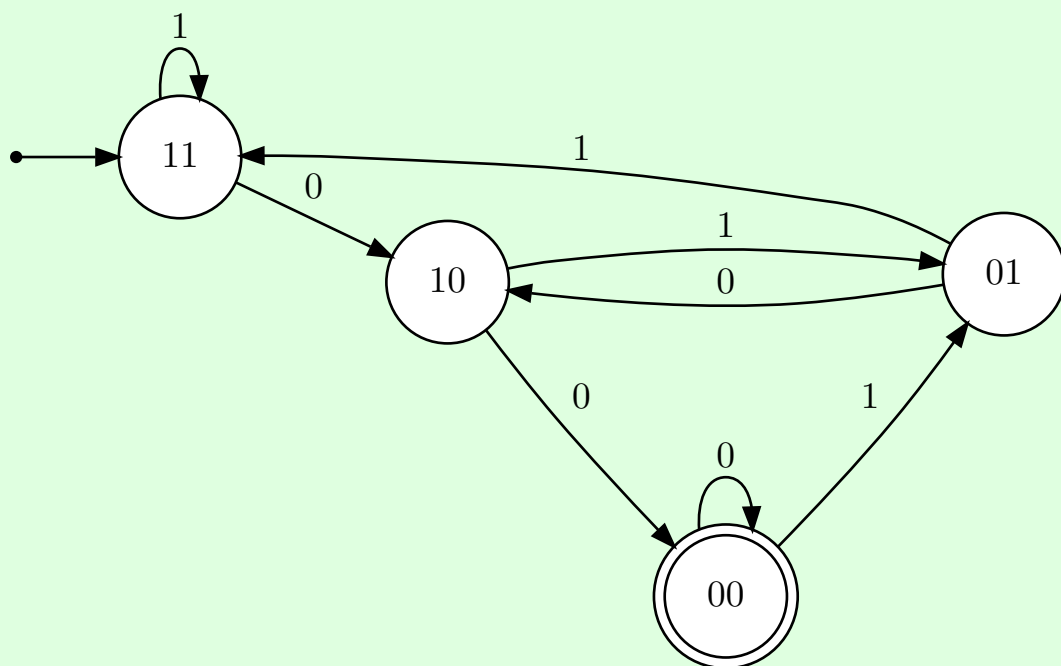


2.3. Esercizio 03

Esercizio 2.3.1:

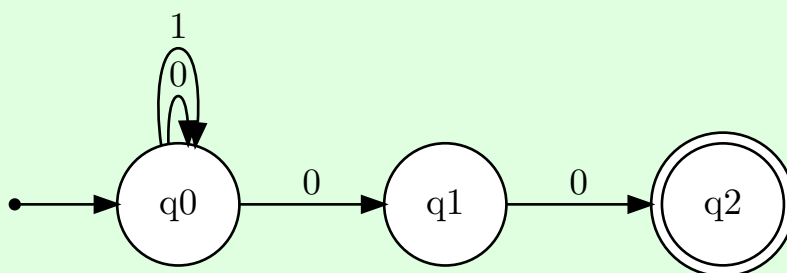
Richiesta 2.3.1.1: Costruite un automa a stati finiti deterministico che riconosca il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ che, interpretate come numeri in notazione binaria, denotano multipli di 4.

Soluzione 2.3.1.1:



Richiesta 2.3.1.2: Utilizzando il non determinismo si riesce a costruire un automa con meno stati?

Soluzione 2.3.1.2: Utilizzando il non determinismo riusciamo ad utilizzare 1 stato in meno, se non inseriamo uno stato trappola per le transizioni dagli stati q_1 e q_2 .



Richiesta 2.3.1.3: Generalizzate l'esercizio a multipli di 2^k , dove $k > 0$ è un intero fissato.

Soluzione 2.3.1.3: Per i DFA che riconoscono i multipli di 2^k dobbiamo ricordarci una finestra di k caratteri. Tutte le possibili combinazioni di queste finestre sono 2^k , quindi anche il DFA che riconosce quel linguaggio ha 2^k stati.

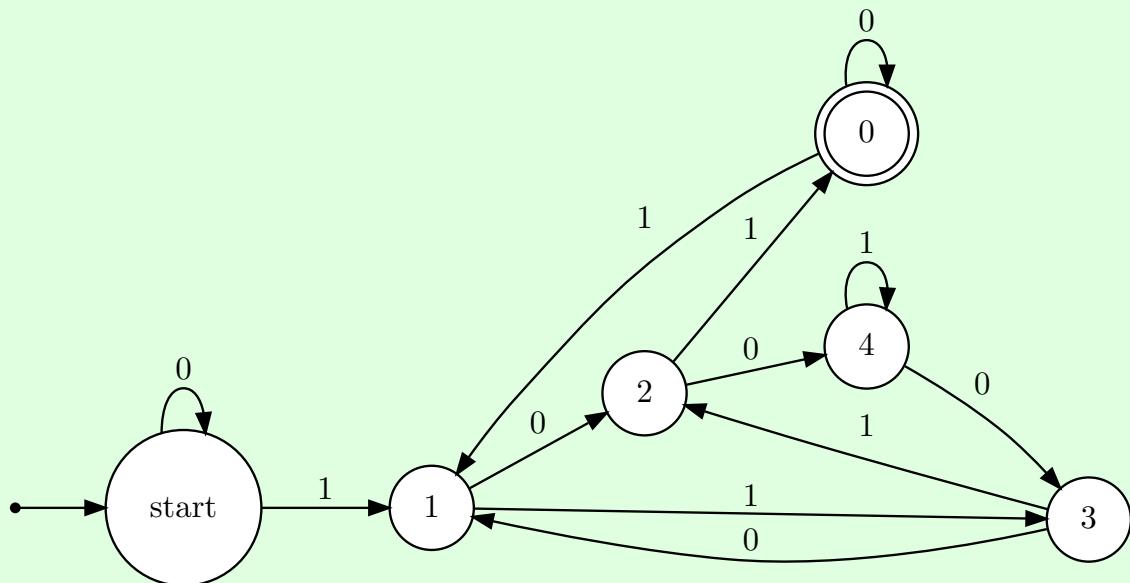
Per gli NFA che riconoscono i multipli di 2^k dobbiamo utilizzare $k + 1$ stati, di cui k leggono gli ultimi k zeri e uno che fa da «*stato scommettitore*».

2.4. Esercizio 04

Esercizio 2.4.1:

Richiesta 2.4.1.1: Costruite un automa a stati finiti che riconosca il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ che, interpretate come numeri in notazione binaria, rappresentano multipli di 5.

Soluzione 2.4.1.1:



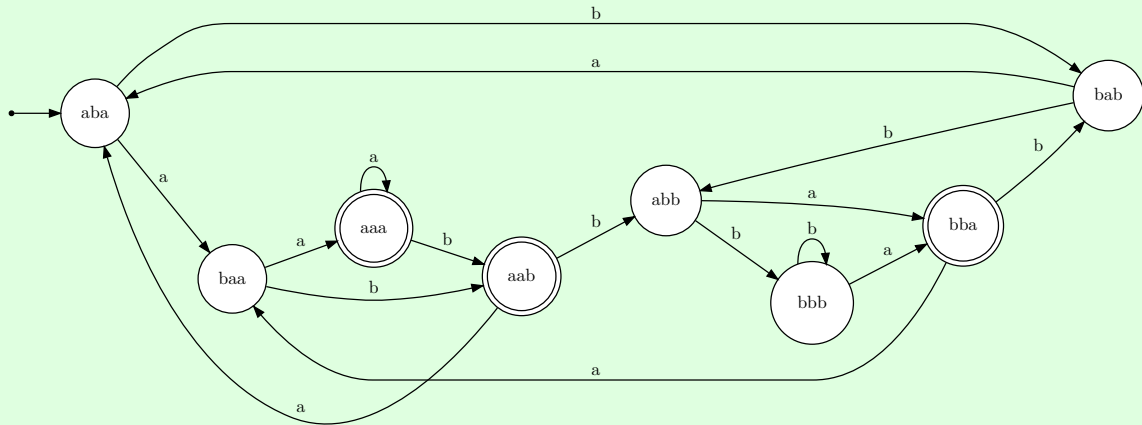
2.5. Esercizio 05

Esercizio 2.5.1: Considerate il seguente linguaggio:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{il penultimo e il terzultimo simbolo di } w \text{ sono uguali}\}.$$

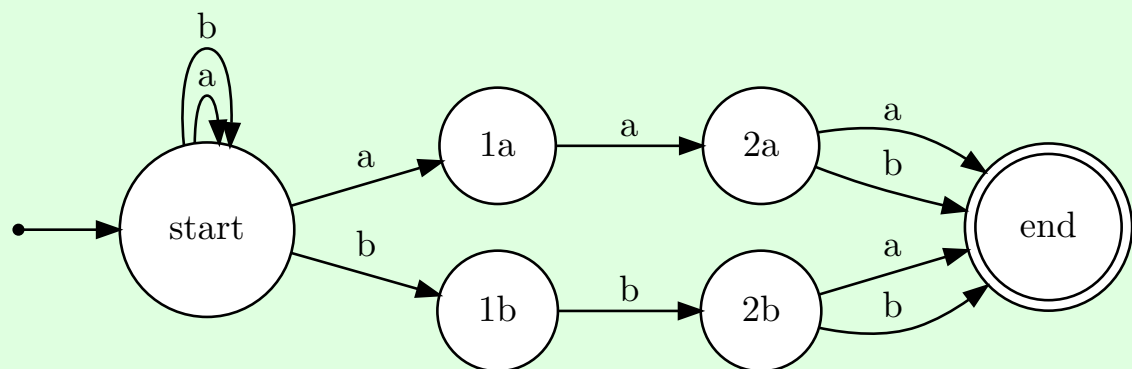
Richiesta 2.5.1.1: Costruite un automa a stati finiti deterministico che accetta L .

Soluzione 2.5.1.1: Secondo me andrebbero usati più stati per le stringhe di 1 e 2 caratteri, oppure si dovrebbe imporre il riconoscimento di stringhe lunghe almeno 3 caratteri.



Richiesta 2.5.1.2: Costruite un automa a stati finiti non deterministico che accetta L .

Soluzione 2.5.1.2:



Richiesta 2.5.1.3: Dimostrare che per il linguaggio L :

- tutte le stringhe di lunghezza 3 sono distinguibili tra loro;
- la parola vuota è distinguibile da tutte le stringhe di lunghezza 3.

Soluzione 2.5.1.3: Sia $X = \{a, b\}^3$. Date due stringhe $\sigma, \gamma \in X$ esse possono avere un carattere diverso in 3 posizioni:

- se $\sigma_1 \neq \gamma_1$:
 - se $\sigma_2 = \gamma_2$ usiamo $z = \varepsilon$;
 - se $\sigma_2 \neq \gamma_2$ usiamo $z = a^2$ oppure $z = b^2$;
- se $\sigma_2 \neq \gamma_2$:
 - se $\sigma_3 = \gamma_3$ usiamo $z \in \{a, b\}$;
 - se $\sigma_3 \neq \gamma_3$ usiamo $z = a^2$ oppure $z = b^2$;
- se $\sigma_3 \neq \gamma_3$ usiamo $z = a^2$ oppure $z = b^2$.

Non voglio dimostrare perché funziona, ma funziona, fidatevi di me.

Inoltre, la stringa vuota è distinguibile da ogni stringa di lunghezza 3 perché basta aggiungere una stringa z formata dall'ultimo carattere della stringa σ che stiamo considerando ripetuto due volte.

Richiesta 2.5.1.4: Utilizzando i risultati precedenti, ricavate un limite inferiore per il numero di stati di ogni automa deterministico che accetta L .

Soluzione 2.5.1.4: Grazie al teorema sulla distinguibilità, ogni DFA per il linguaggio L deve usare almeno 8 stati.

2.6. Esercizio 06

Esercizio 2.6.1: Costruite un insieme di stringhe distinguibili tra loro per ognuno dei seguenti linguaggi.

Richiesta 2.6.1.1: $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$.

Soluzione 2.6.1.1: $X = \{a^n \mid n \geq 0\}$.

Richiesta 2.6.1.2: $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Soluzione 2.6.1.2: $X = \{a^n \mid n \geq 0\}$.

Richiesta 2.6.1.3: $\{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$ dove, per ogni stringa w , w^R indica la stringa w scritta al contrario.

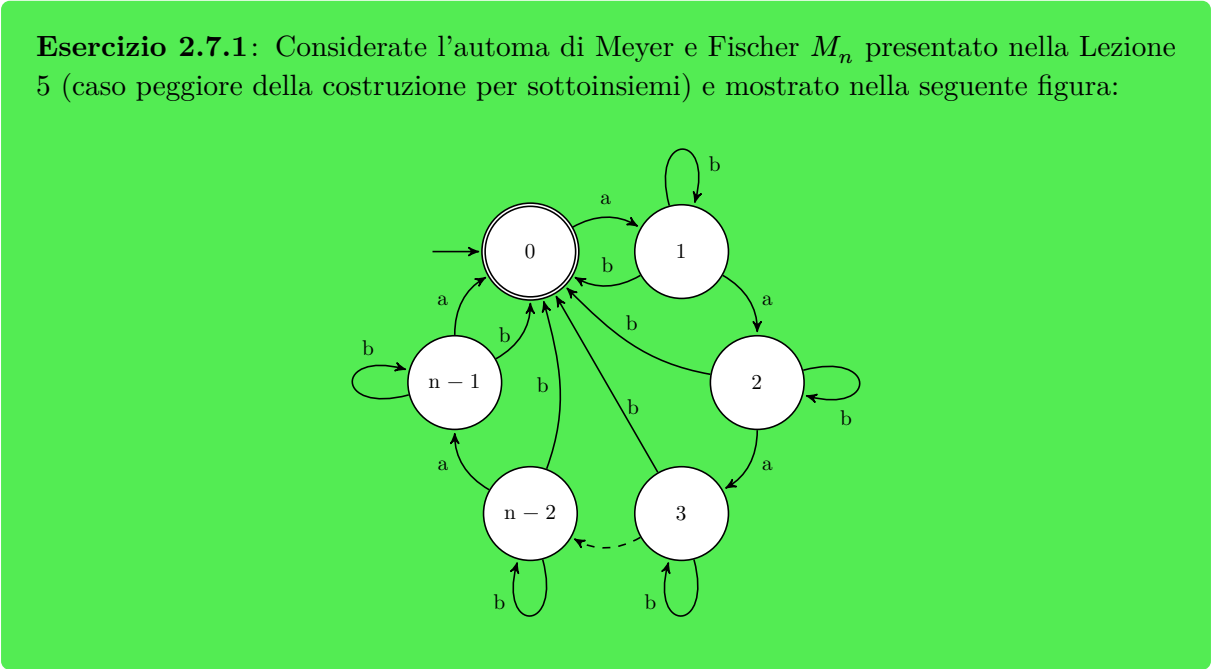
Soluzione 2.6.1.3: $X = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$.

Richiesta 2.6.1.4: Per alcuni di questi linguaggi riuscite ad ottenere insiemi di stringhe distinguibili di cardinalità infinita? Cosa significa ciò?

Soluzione 2.6.1.4: Significa che non sono dei linguaggi di tipo 3.

2.7. Esercizio 07

Esercizio 2.7.1: Considerate l'automa di Meyer e Fischer M_n presentato nella Lezione 5 (caso peggiore della costruzione per sottoinsiemi) e mostrato nella seguente figura:



Richiesta 2.7.1.1: Descrivete a parole la proprietà che deve soddisfare una stringa per essere accettata da M_n . Riuscite a costruire un automa non deterministico, diverso da

M_n , per lo stesso linguaggio, basandovi su tale proprietà? (Potete usare un numero di stati diverso da n , ma non esponenziale, e stati iniziali multipli.)

Soluzione 2.7.1.1: No non ci riesco.

3. Esercizi lezione 06 [14/03]

3.1. Esercizio 01

Esercizio 3.1.1: Considerate il linguaggio

$$\text{DOUBLE}_k = \{ww \mid w \in \{a, b\}^k\},$$

dove $k > 0$ è un intero fissato.

Richiesta 3.1.1.1: Trovare un fooling set di cardinalità 2^k per questo linguaggio. Riuscite a trovare un fooling set o un extended fooling set di cardinalità maggiore?

Soluzione 3.1.1.1: Definiamo il fooling set

$$P = \{(x, x) \mid x \in \{a, b\}^k\}.$$

Esso è un fooling set per DOUBLE_k :

- la stringa $z = xx$ appartiene al linguaggio;
- presi due elementi di lunghezza k da due coppie diverse, essi saranno diversi in almeno una posizione e quindi la stringa risultante non appartiene al linguaggio.

Non so se riusciamo a trovare un fooling set o un extended set di cardinalità maggiore, non ti bastava questo qua?

3.2. Esercizio 02

Esercizio 3.2.1: Considerate il linguaggio

$$\text{PAL}_k = \{w \in \{a, b\}^k \mid w = w^R\},$$

dove k è un intero fissato.

Richiesta 3.2.1.1: Qual è l'extended fooling set per PAL_k di cardinalità maggiore che riuscite a trovare?

Soluzione 3.2.1.1: Definiamo l'insieme

$$P = \{(w, w^R) \mid w \in \{a, b\}^{\frac{k}{2}}\}.$$

Esso è un fooling set per il linguaggio PAL_k :

- la coppia (w, w^R) appartiene al linguaggio;
- ogni altra stringa formata da elementi di due coppie diverse non appartiene al linguaggio perché esiste almeno una coppia di caratteri con la stessa distanza dagli estremi che sono diversi.

P ha cardinalità $2^{\frac{k}{2}}$, quindi ogni NFA per PAL_k ha almeno $2^{\frac{k}{2}}$ stati.

3.3. Esercizio 03

Esercizio 3.3.1: Considerate il linguaggio

$$K_k = \{w \mid w = x_1x_2\cdots x_mx \mid m > 0, x_1, \dots, x_m \in \{a, b\}^k, \exists i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i = x\},$$

dove k è un intero fissato. Si può osservare che ogni stringa w di questo linguaggio è la concatenazione di blocchi di lunghezza k , in cui l'ultimo blocco coincide con uno dei blocchi precedenti.

Richiesta 3.3.1.1: Riuscite a costruire un (extended) fooling set di cardinalità 2^k o maggiore per il linguaggio K_k ?

Suggerimento. Ispiratevi all'esercizio 1.

Soluzione 3.3.1.1: Definiamo il fooling set

$$P = \{(x, x) \mid x \in \{a, b\}^k\}.$$

Esso è un fooling set per K_k :

- la stringa $z = xx$ appartiene al linguaggio;
- presi due elementi di lunghezza k da due coppie diverse, essi rappresentano due blocchi diversi perché diversi in almeno una posizione, quindi la stringa risultante non appartiene al linguaggio.

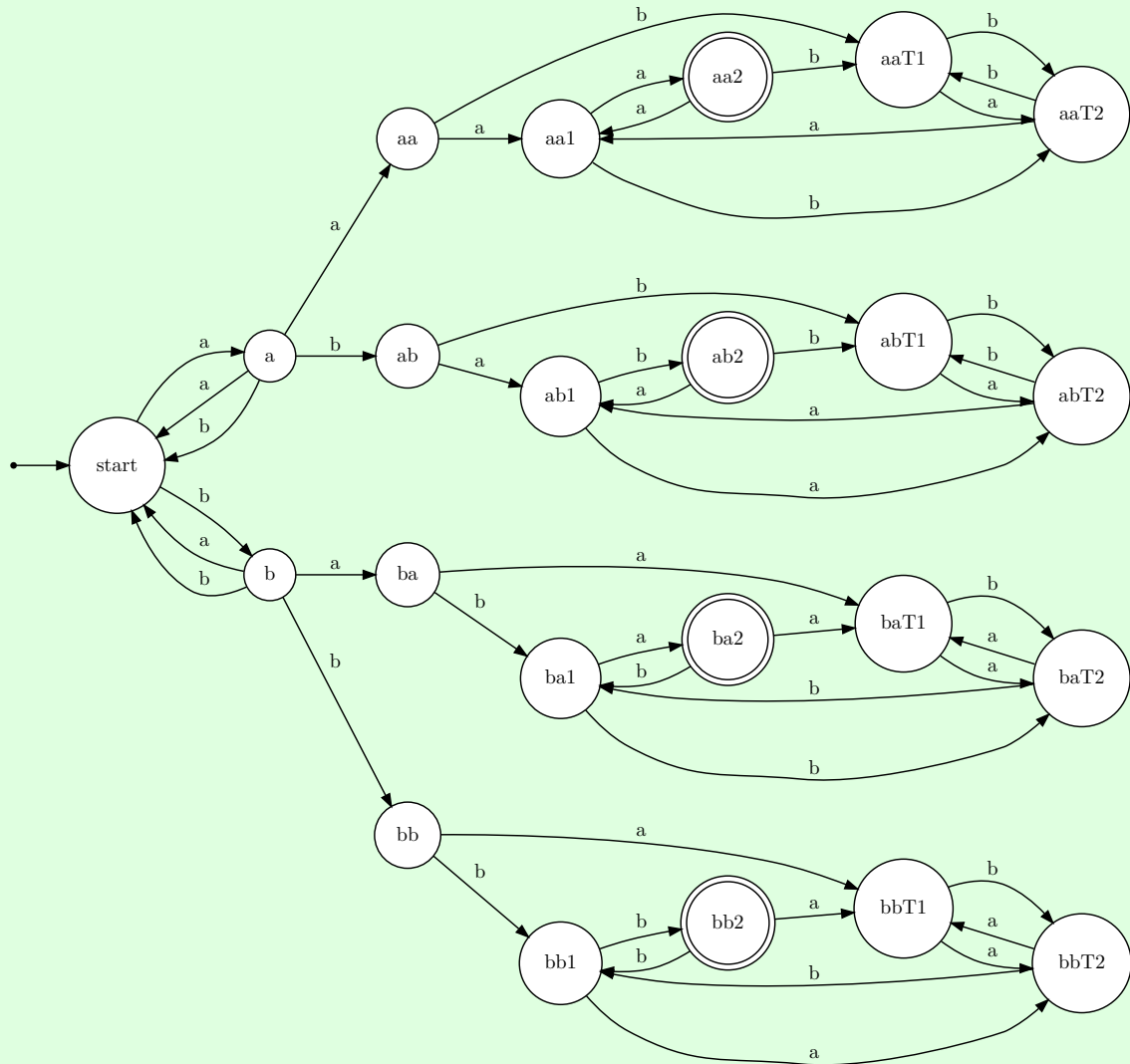
La cardinalità di P è 2^k , quindi ogni NFA per K_k ha almeno 2^k stati.

Richiesta 3.3.1.2: Quale è l'informazione principale che un automa non deterministico può scegliere di ricordare nel proprio controllo a stati finiti durante la lettura di una stringa per riuscire a riconoscere K_k ?

Suggerimento. Che «scommessa» può fare l'automa mentre legge la stringa in ingresso e come può verificare tale scommessa leggendo l'ultimo blocco?

Soluzione 3.3.1.2: Un automa non deterministico dovrebbe scommettere che ha appena finito di leggere il blocco che poi sarà ripetuto alla fine. Il controllo che fa l'automa alla fine è quello di uguaglianza con il blocco scommesso, che viene fatta in maniera deterministica ma richiede un grande numero di stati. Va creato quindi un albero che in maniera non deterministica mi manda indietro allo start prima dell'ultimo nodo.

Ad esempio, se $k = 2$ l'automa non deterministico ha questa forma.



Richiesta 3.3.1.3: Supponete di costruire un automa deterministico per riconoscere K_k . Cosa ha necessità di ricordare l'automa nel proprio controllo a stati finiti mentre legge la stringa in input?

Soluzione 3.3.1.3: Un automa deterministico si deve ricordare i blocchi di lunghezza k che ha incontrato fino a quel momento. Questo però fa esplodere il numero di stati, perché dobbiamo calcolare praticamente ogni combinazione possibile.

Richiesta 3.3.1.4: Utilizzando il concetto di distinguibilità, dimostrate che ogni automa deterministico che riconosce K_k deve avere almeno 2^{2^k} stati.

Soluzione 3.3.1.4: Sia $T = \{a, b\}^k$ insieme di tutte le stringhe di lunghezza k costruite sull'alfabeto $\{a, b\}$. Definiamo l'insieme

$$X = \mathcal{P}(T)$$

insieme di tutti i sottoinsiemi di T , ovvero l'insieme delle parti di T . Supponiamo che ogni sottoinsieme venga rappresentato come una stringa ottenuta dalla concatenazione dei suoi elementi.

Questo insieme è formato da stringhe distinguibili tra loro: infatti, prese due stringhe di X , esse hanno almeno un blocco lungo k che appartiene a una delle due ma non all'altra. Ma allora usando quell'elemento come stringa z che distingue noi otteniamo l'appartenenza per la stringa che contiene quell'elemento e la non appartenenza per l'altra.

La cardinalità di X è $2^{|T|}$, ovvero 2^{2^k} , quindi ogni DFA per K_k ha almeno 2^{2^k} stati.

3.4. Esercizio 04

Esercizio 3.4.1: Considerate il linguaggio

$$J_k = \{w \mid w = xx_1 \dots x_m \mid m > 0, x_1, \dots, x_m, x \in \{a, b\}^k, \exists i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i = x\},$$

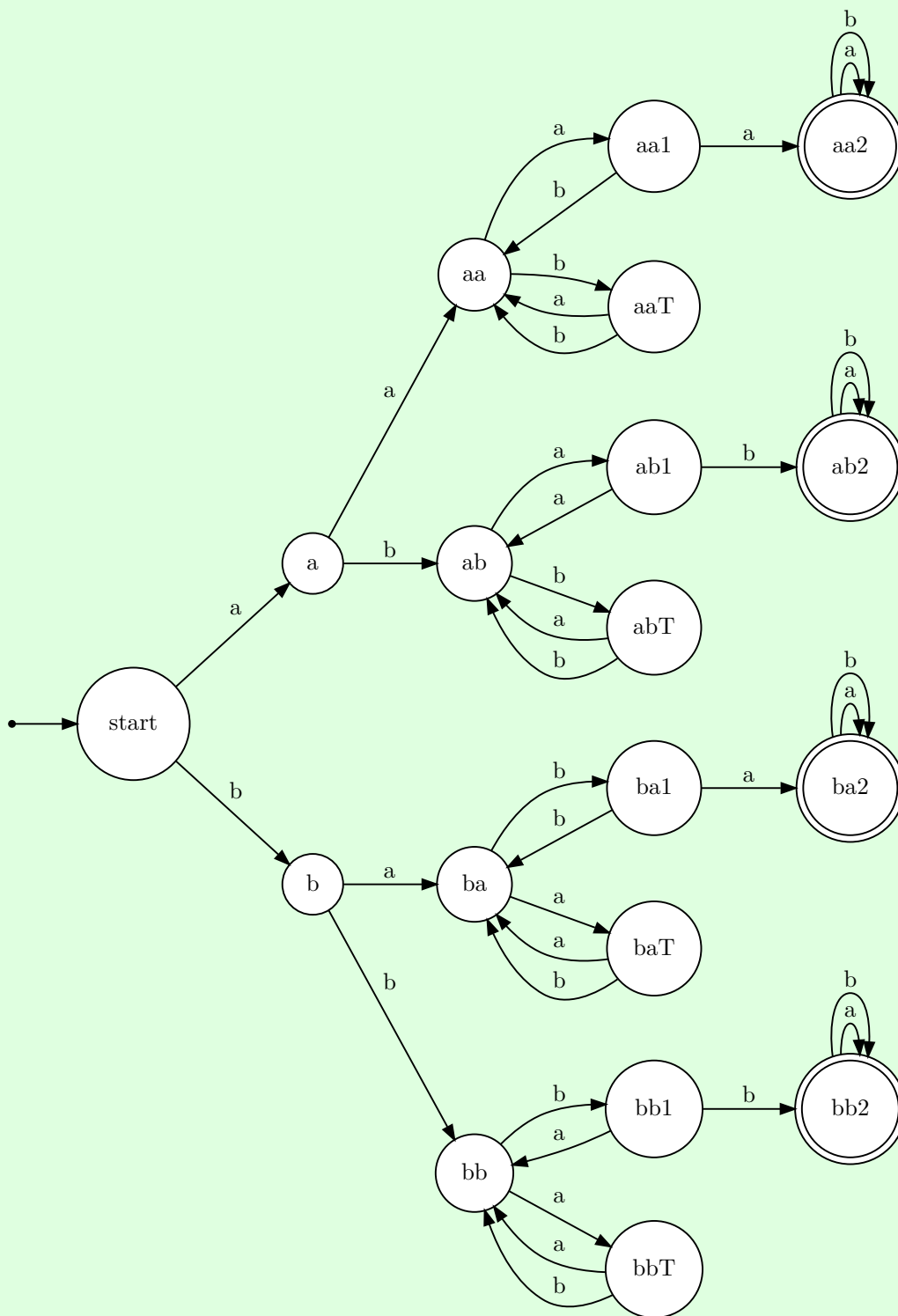
dove k è un intero fissato. Si può osservare che ogni stringa w di questo linguaggio è la concatenazione di blocchi di lunghezza k , in cui il primo blocco coincide con uno dei blocchi successivi; ogni stringa di J_k si ottiene «rovesciando» una stringa del linguaggio K_k dell'esercizio 3.

Richiesta 3.4.1.1: Supponete di costruire automi a stati finiti per J_k . Valgono ancora gli stessi limiti inferiori ottenuti per K_k o si riescono a costruire automi più piccoli? Rispondete sia nel caso di automi deterministici sia in quello di automi non deterministici.

Soluzione 3.4.1.1: Un DFA per J_k usa molti meno stati di un DFA per K_k : infatti, un DFA per J_k deve fare un albero per vedere quale stringa lunga k viene letta all'inizio e poi deve eseguire un controllo con altri $2k - 1$ stati per ogni stato foglia. Il numero di stati è quindi

$$2^{k+1} - 1 + 2^k(2k - 1) = 2^{k+1} - 1 + k2^{k+1} - 2^k = O(k2^k).$$

Vediamo un esempio con $k = 2$ per semplicità.



Per il caso non deterministico, ogni NFA deve comunque generare l'albero iniziale per vedere le possibili combinazioni. Nei nodi delle combinazioni potremmo inserire la scommessa, ma questo ci farebbe accettare più stringhe di quelle che vorremmo accettare.

Quindi non lo so RIP, ci penserò più avanti, magari c'è un fooling set da trovare.

3.5. Esercizio 05

Esercizio 3.5.1:

Richiesta 3.5.1.1: Ispirandovi all'esercizio 3, fornite limiti inferiori per il numero di stati degli automi che riconoscono il seguente linguaggio:

$$E_k = \{w \mid w = x_1 \cdots x_m \mid m > 0, x_1, \dots, x_m \in \{a, b\}^k, \exists i < j \in \{1, \dots, m\} \mid x_i = x_j\},$$

dove k è un intero fissato. Considerate sia il caso deterministico che quello non deterministico.

Soluzione 3.5.1.1: Definiamo l'insieme

$$P = \{(x, x) \mid x \in \{a, b\}^k\}.$$

Questo è un fooling set per il linguaggio E_k :

- la stringa $z = xx$ appartiene al linguaggio;
- la stringa $z = xy$ non appartiene al linguaggio.

Allora ogni NFA per E_k ha almeno $|P| = 2^k$ stati.

Per i DFA, come per K_k , essi si devono ricordare i blocchi lunghi k che hanno incontrato fino a quel momento, e questo fa esplodere il numero di stati. Infatti, definiamo l'insieme

$$X = \mathcal{P}(\{a, b\}^k).$$

Esso è un insieme di stringhe distinguibili per E_k : presi due sottoinsiemi A e B , allora prendiamo un elemento $x \in A/B$ e usiamolo per distinguere le due stringhe (generate dalla concatenazione di tutte le stringhe contenute in un sottoinsieme).

Ma allora ogni DFA per E_k ha almeno $|X| = 2^{2^k}$ stati.

4. Esercizi lezione 07 [19/03]

4.1. Esercizio 01

Esercizio 4.1.1: Per tutti i linguaggi di questo esercizio l'alfabeto è $\{a, b\}$.

Richiesta 4.1.1.1: Considerate l'insieme L formato dalle stringhe in cui sia il numero di a che il numero di b sono pari.

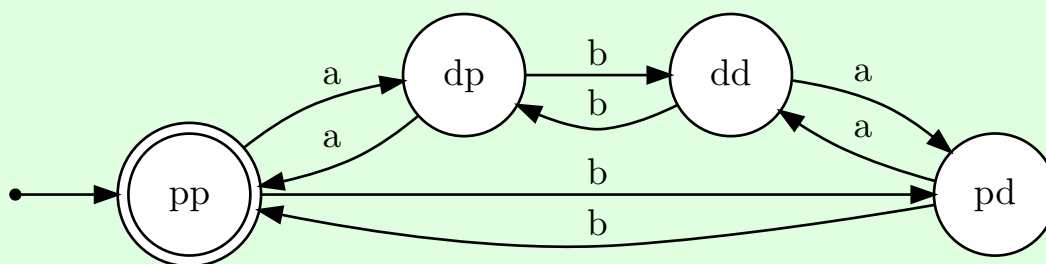
Richieste:

- Determinate le classi di equivalenza della relazione R di Myhill-Nerode associata a L .
- Costruite l'automa deterministico minimo corrispondente.
- Determinate un insieme X di cardinalità massima che contenga stringhe tutte distinguibili tra loro.
- La relazione cambia nel caso si chieda che le stringhe del linguaggio abbiano un numero di a pari, un numero di b pari ed entrambi siano positivi? E l'automa?

Soluzione 4.1.1.1: Le classi di equivalenza di R sono 4:

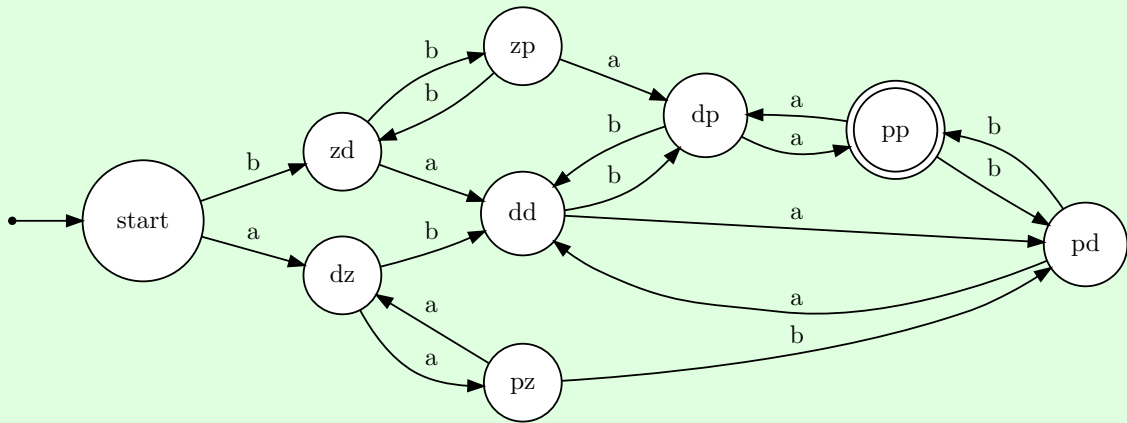
- $[pp]_R$ per a e b pari;
- $[dd]_R$ per a e b dispari;
- $[pd]_R$ per a pari e b dispari;
- $[dp]_R$ per a dispari e b pari.

L'automa minimo per L è il seguente.



L'insieme $X = \{\varepsilon, a, b, ab\}$ è un insieme di stringhe distinguibili, non voglio dimostrarlo.

Richiedendo a e b pari in numero positivo la relazione sale a 9 classi di equivalenza, e quindi anche l'automa passa ad avere 9 stati.



Richiesta 4.1.1.2: Considerate ora il linguaggio L' formato dalle stringhe in cui il numero di a sia pari e il numero di b sia dispari.

Richieste:

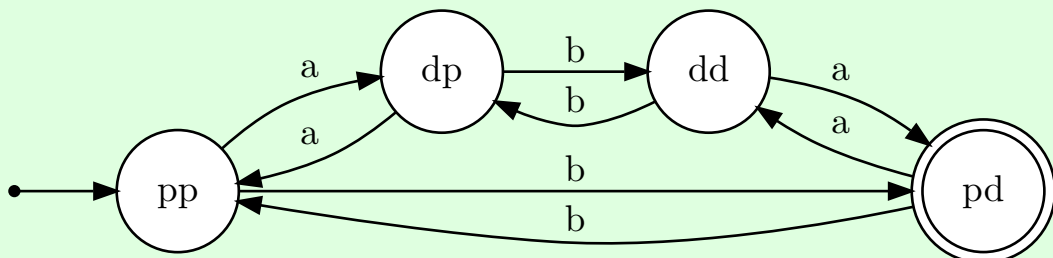
- Verificate che la relazione R' di Myhill-Nerode associata a L' coincide con la relazione R associata a L .
- Cosa hanno in comune e cosa hanno di diverso i rispettivi automi deterministici minimi.

Soluzione 4.1.1.2: Le classi di equivalenza di R' sono 4:

- $[pp]_R$ per a e b pari;
- $[dd]_R$ per a e b dispari;
- $[pd]_R$ per a pari e b dispari;
- $[dp]_R$ per a dispari e b pari.

Sono le stesse classi di equivalenza della relazione R della richiesta precedente.

L'automa minimo per L' è lo stesso identico a quello per L (la prima versione) tranne lo stato finale, che nei due automi è differente.

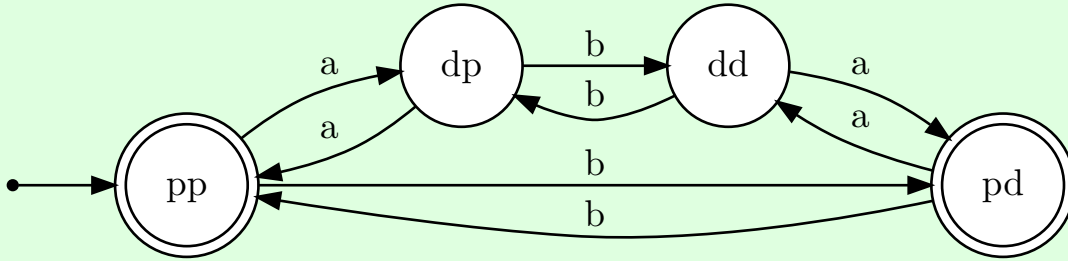


Richiesta 4.1.1.3: Considerate ora il linguaggio L'' formato dalle stringhe in cui il numero di a sia pari e il numero di b sia qualunque.

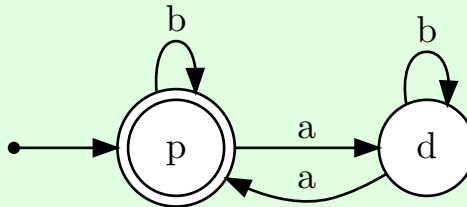
Richieste:

- Verificate che L'' è l'unione di alcune classi di equivalenza della relazione R precedente.
- Costruite un automa che accetti L'' i cui stati corrispondano alle classi di R .
- Determinate le classi di equivalenza della relazione R'' di Myhill-Nerode associata a L'' .
- Costruite l'automa deterministico minimo corrispondente.
- Che legame c'è tra R e R'' e tra i due automi ottenuti?

Soluzione 4.1.1.3: Possiamo definire L'' come l'unione delle classi di equivalenza $[pp]_R$ e $[pd]_R$, che vanno contenere tutte le stringhe che hanno un numero di a pari.



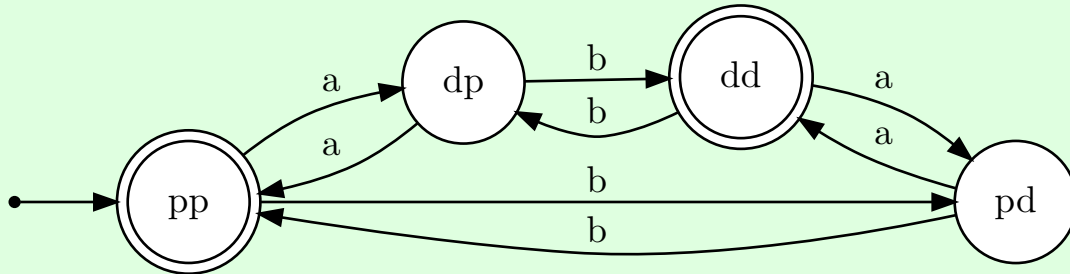
Le classi di equivalenza della relazione R'' sono $[p]_{R''}$ e $[d]_{R''}$, che contengono rispettivamente le stringhe con un numero di a pari e le stringhe con un numero di a dispari.



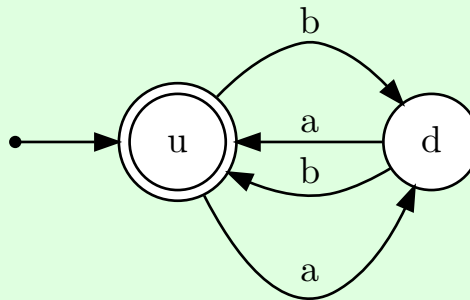
Possiamo dire che R è un raffinamento di R'' , e quindi che l'automa di R'' è più compatto e conciso di quello di R , che infatti ha il doppio degli stati.

Richiesta 4.1.1.4: Considerate ora il linguaggio L''' formato dalle stringhe in cui il numero di a e il numero di b siano entrambi pari o entrambi dispari. Rispondete alle domande del punto c precedente, considerando L''' e la rispettiva relazione R''' di Myhill-Nerode al posto di L'' e R'' .

Soluzione 4.1.1.4: Possiamo definire L''' come l'unione delle classi di equivalenza $[pp]_R$ e $[dd]_R$, che vanno contenere tutte le stringhe che hanno un numero di a e b entrambi pari o entrambi dispari.



Le classi di equivalenza della relazione R''' sono $[u]_{R''}$ e $[d]_{R''}$, che contengono rispettivamente le stringhe con un numero di a e b entrambi pari o entrambi dispari e le stringhe con un numero di a dispari/pari e di b pari/dispari.



Possiamo dire che R è un raffinamento di R''' , e quindi che l'automa di R''' è più compatto e conciso di quello di R , che infatti ha il doppio degli stati.

4.2. Esercizio 02

Esercizio 4.2.1: Calcolate le classi d'equivalenza della relazione di Myhill-Nerode associata a ciascuno dei seguenti linguaggi e, nel caso la relazione sia di indice finito, costruite l'automa deterministico minimo corrispondente.

Richiesta

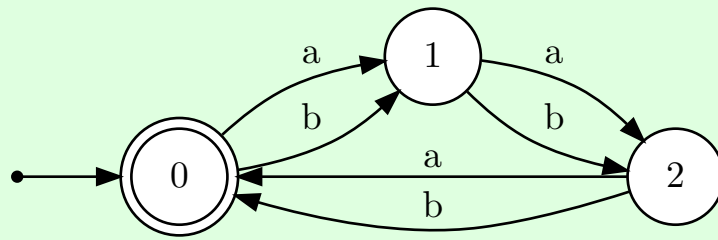
4.2.1.1:

$L =$

$\{w \in \{a, b\}^* \mid \text{la somma del numero di } a \text{ e del numero di } b \text{ è multiplo di } 3\}.$

Soluzione 4.2.1.1: Le classi di equivalenza della relazione R_L sono 3:

- $[0]_{R_L}$ per $a + b$ multiplo di 3;
- $[1]_{R_L}$ per $a + b$ multiplo di 3 + 1;
- $[2]_{R_L}$ per $a + b$ multiplo di 3 + 2.



Richiesta 4.2.1.2: $J = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

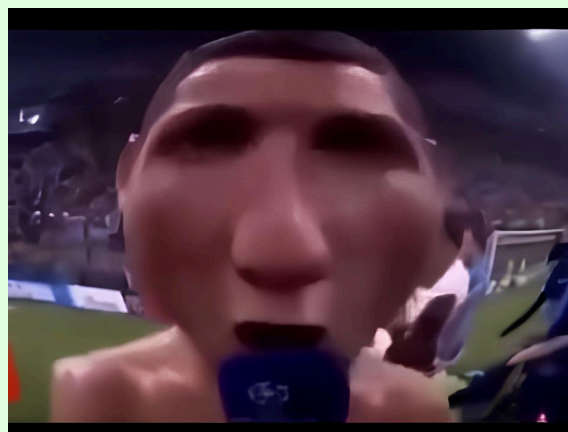
Soluzione 4.2.1.2: Il linguaggio J non è regolare, quindi non siamo sicuri che l'indice della relazione R_J sia finito. E infatti non lo è: le classi di equivalenza sono nella forma

$$[a^n]_{R_J} \mid n \geq 0$$

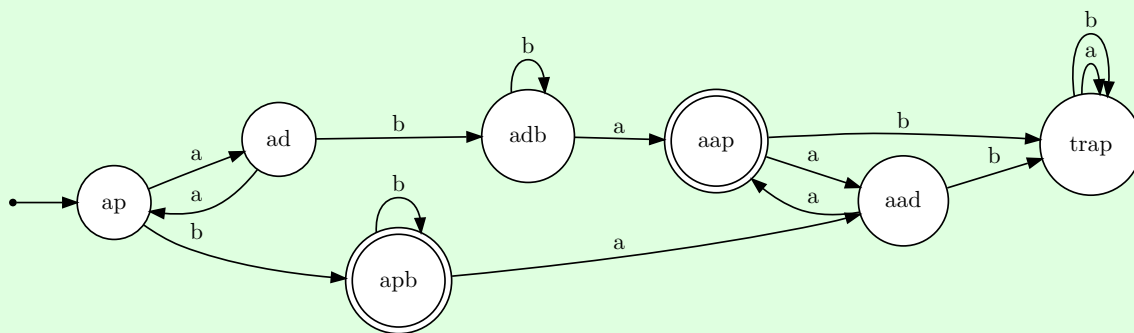
ma il numero di queste classi è infinito, quindi l'indice di R_J è infinito.

Richiesta 4.2.1.3: $K = \{a^i b^n a^j \mid n > 0 \wedge i + j \text{ è pari}\}$.

Soluzione 4.2.1.3: Visto che sono furbo, prima ho costruito l'automa minimo e ora scrivo quali sono le classi di equivalenza, urlo del sium.



Le classi di equivalenza della relazione R_L quindi sono 7, che riprendono i nomi degli stati dell'automa successivo, molto facili.



Sono sicuro che questo sia l'automa minimo, ho controllato con l'algoritmo di Hopcroft.

5. Esercizi lezioni 08, 09 e 10 [28/03]

5.1. Esercizio 01

Esercizio 5.1.1:

Richiesta 5.1.1.1: Scrivete un'espressione regolare per il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ che, interpretate come numeri in notazione binaria, rappresentano potenze di 2.

Soluzione 5.1.1.1:

$$L = 10^*.$$

5.2. Esercizio 02

Esercizio 5.2.1:

Richiesta 5.2.1.1: Scrivete un'espressione regolare per il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ che, interpretate come numeri in notazione binaria, *non* rappresentano potenze di 2.

Soluzione 5.2.1.1:

$$L = 0 + 1(0 + 1)^*1(0 + 1)^*.$$

5.3. Esercizio 03

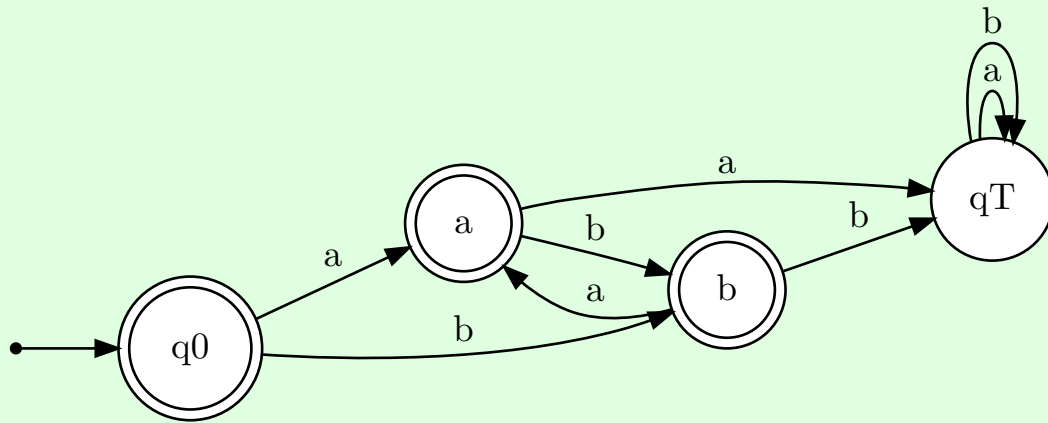
Esercizio 5.3.1:

Richiesta 5.3.1.1: Scrivete un'espressione regolare per il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ in cui le a e le b si alternano (come $abab$, bab , b , ecc.). Disegnate poi un automa per lo stesso linguaggio.

Soluzione 5.3.1.1:

$$L = \varepsilon + (ab)^+ + (ba)^+ + a(ba)^* + b(ab)^*.$$

Diamo un DFA per questo linguaggio.



5.4. Esercizio 04

Esercizio 5.4.1:

Richiesta 5.4.1.1: Scrivere un'espressione regolare per il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ nelle quali ogni a è seguita immediatamente da una b .

Soluzione 5.4.1.1:

$$L = b^*(ab^+)^*.$$

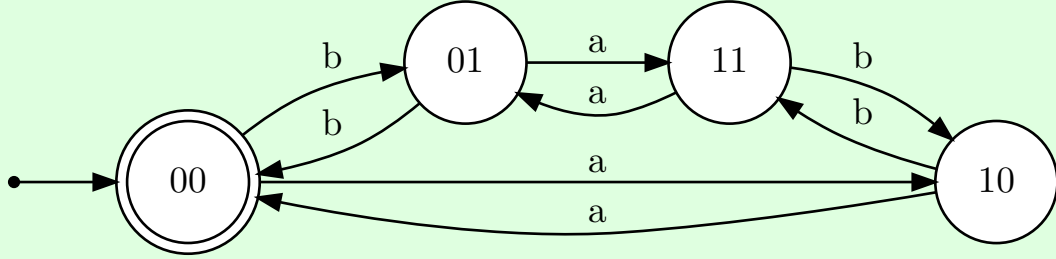
5.5. Esercizio 05

Esercizio 5.5.1:

Richiesta 5.5.1.1: Scrivete un'espressione regolare per il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ che contengono un numero di a pari e un numero di b pari.

Suggerimento. Se avete difficoltà nell'ottenere direttamente l'espressione, potete costruire prima un automa a stati finiti e, successivamente, ricavare l'espressione regolare servendovi di una delle trasformazioni da automi a espressioni presentate a lezione.

Soluzione 5.5.1.1: Visto che non mi viene subito l'espressione regolare, usiamo un DFA.



Scriviamo il sistema di equazioni associato e risolviamo. Buona fortuna.

$$\begin{cases} X_0 = aX_2 + bX_1 + \varepsilon \\ X_1 = aX_3 + bX_0 \\ X_2 = aX_0 + bX_3 \\ X_3 = aX_1 + bX_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = aX_2 + bX_1 + \varepsilon \\ X_1 = a(aX_1 + bX_2) + bX_0 \\ X_2 = aX_0 + b(aX_1 + bX_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = aX_2 + bX_1 + \varepsilon \\ X_1 = aaX_1 + abX_2 + bX_0 \\ X_2 = bbX_2 + aX_0 + baX_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = aX_2 + bX_1 + \varepsilon \\ X_1 = aaX_1 + abX_2 + bX_0 \\ X_2 = (bb)^*(aX_0 + baX_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = a(bb)^*(aX_0 + baX_1) + bX_1 + \varepsilon \\ X_1 = aaX_1 + ab(bb)^*(aX_0 + baX_1) + bX_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = a(bb)^*aX_0 + a(bb)^*baX_1 + bX_1 + \varepsilon \\ X_1 = aaX_1 + ab(bb)^*aX_0 + ab(bb)^*baX_1 + bX_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = a(bb)^*aX_0 + (a(bb)^*ba + b)X_1 + \varepsilon \\ X_1 = (aa + ab(bb)^*ba)X_1 + (ab(bb)^*a + b)X_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = a(bb)^*aX_0 + (a(bb)^*ba + b)X_1 + \varepsilon \\ X_1 = (aa + ab(bb)^*ba)^*(ab(bb)^*a + b)X_0 \end{cases}$$

$$X_0 = a(bb)^*aX_0 + (a(bb)^*ba + b)(aa + ab(bb)^*ba)^*(ab(bb)^*a + b)X_0 + \varepsilon.$$

Possiamo ora sistemare quest'ultima espressione e trovare il risultato finale

$$X_0 = (a(bb)^*a + (a(bb)^*ba + b)(aa + ab(bb)^*ba)^*(ab(bb)^*a + b))X_0 + \varepsilon$$

$$L = (a(bb)^*a + (a(bb)^*ba + b)(aa + ab(bb)^*ba)^*(ab(bb)^*a + b))^*.$$

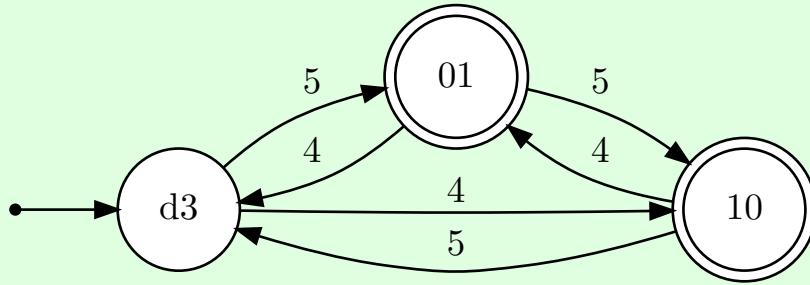
5.6. Esercizio 06

Esercizio 5.6.1:

Richiesta 5.6.1.1: Scrivete un'espressione regolare per il linguaggio formato da tutte le stringhe sull'alfabeto $\{4, 5\}$ che, interpretate come numeri in base 10, rappresentano interi che non sono divisibili per 3.

Suggerimento. Riguardate gli esercizi delle lezioni 4-5.

Soluzione 5.6.1.1: Riprendiamo l'automa per questo linguaggio.



Scriviamo il sistema di equazioni associato e risolviamolo.

$$\begin{cases} X_0 = 4X_2 + 5X_1 \\ X_1 = 4X_0 + 5X_2 + \varepsilon \\ X_2 = 4X_1 + 5X_0 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = 4(4X_1 + 5X_0 + \varepsilon) + 5X_1 \\ X_1 = 4X_0 + 5(4X_1 + 5X_0 + \varepsilon) + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = 44X_1 + 45X_0 + 4 + 5X_1 \\ X_1 = 54X_1 + 4X_0 + 55X_0 + 5 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = 45X_0 + (44 + 5)X_1 + 4 \\ X_1 = (54)^*((4 + 55)X_0 + 5 + \varepsilon) \end{cases}$$

$$X_0 = 45X_0 + (44 + 5)(54)^*((4 + 55)X_0 + 5 + \varepsilon) + 4.$$

Come prima, risolviamo quest'ultima espressione per ottenere il risultato.

$$\begin{aligned}
X_0 &= 45X_0 + (44 + 5)(54)^*(4 + 55)X_0 + (44 + 5)(54)^*5 + (44 + 5)(54)^* + 4 \\
X_0 &= (45 + (44 + 5)(54)^*(4 + 55))X_0 + (44 + 5)(54)^*5 + (44 + 5)(54)^* + 4 \\
L &= (45 + (44 + 5)(54)^*(4 + 55))^*((44 + 5)(54)^*5 + (44 + 5)(54)^* + 4).
\end{aligned}$$

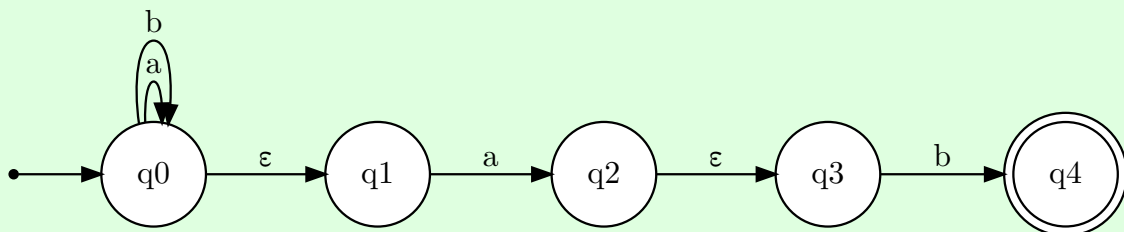
5.7. Esercizio 07

Esercizio 5.7.1: Utilizzando le costruzioni presentate a lezione, disegnare un automa a stati finiti con ε -transizioni equivalente a ciascuna delle seguenti espressioni regolari. Ricavate poi degli automi a stati finiti deterministici equivalenti.

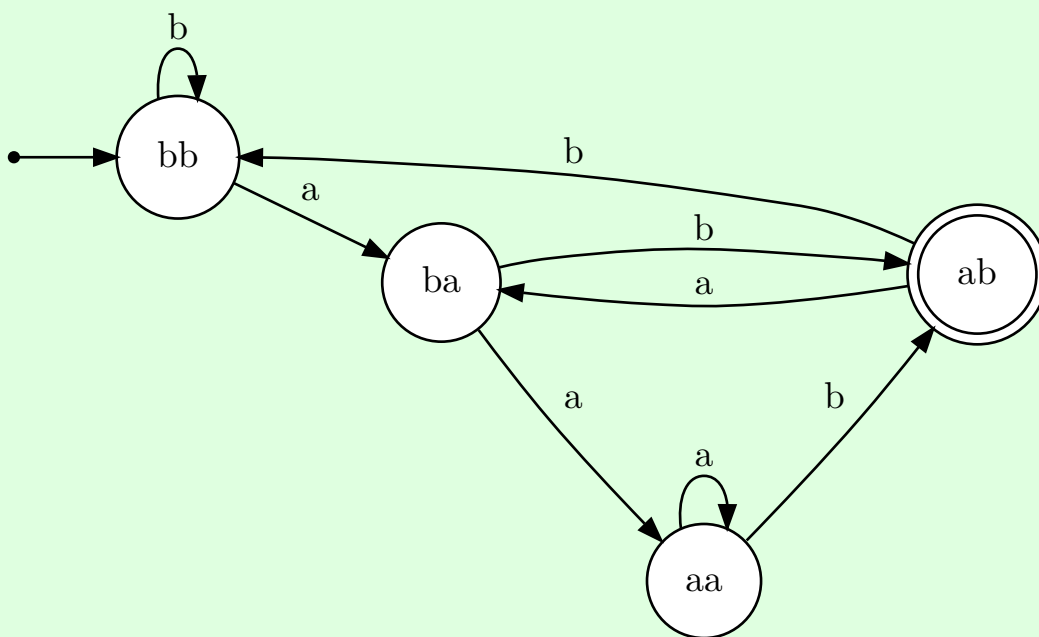
Disclaimer: non so se le costruzioni che ho usato sono corrette, anche se mi sembra di sì.

Richiesta 5.7.1.1: $(a + b)^*ab$

Soluzione 5.7.1.1: Automa ottenuto con la costruzione:

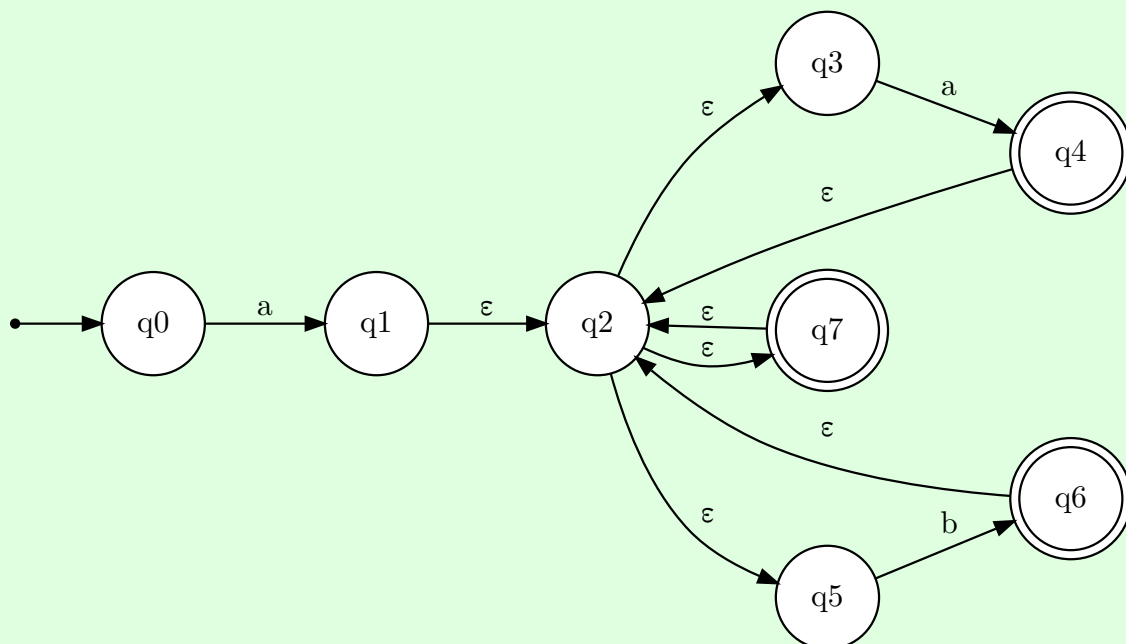


Automa deterministico equivalente:

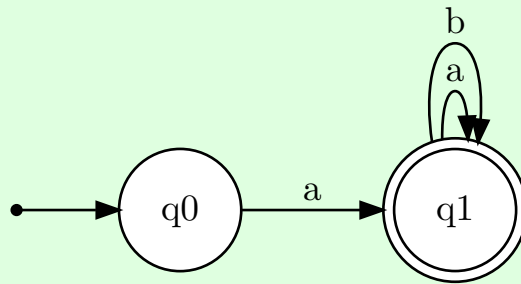


Richiesta 5.7.1.2: $a(a + b + \varepsilon)^*$

Soluzione 5.7.1.2: Automa ottenuto con la costruzione:

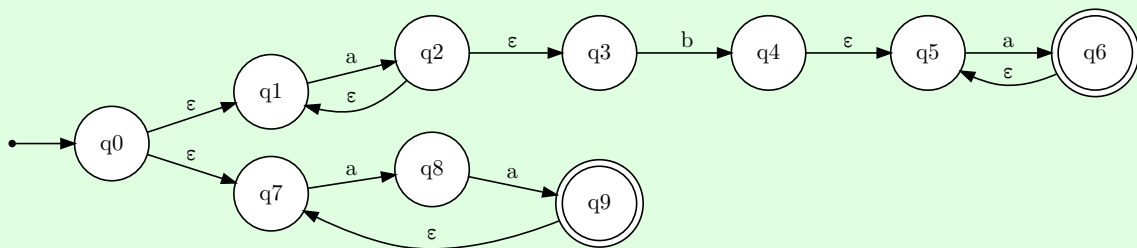


Automa deterministico equivalente:

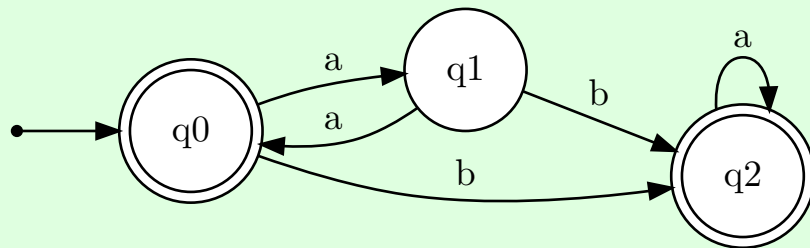


Richiesta 5.7.1.3: $a^*ba^* + (aa)^*$

Soluzione 5.7.1.3: Automa ottenuto con la costruzione:



Automa deterministico equivalente:



5.8. Esercizio 08

Esercizio 5.8.1:

Richiesta 5.8.1.1: Dimostrate che per ogni $n', n'' > 0$ esistono due linguaggi L' e L'' con $\text{sc}(L') = n'$ e $\text{sc}(L'') = n''$ tali che $\text{sc}(L' \cup L'') = \text{sc}(L' \cap L'') = n'n''$.

Suggerimento. Per $n' = n'' = 2$ potete considerare $L' = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{il numero di } a \text{ in } w \text{ è pari}\}$ e $L'' = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{il numero di } b \text{ in } w \text{ è pari}\}$, due automi deterministici A' e A'' con due stati che li riconoscono e dimostrare che ogni automa deterministico per l'unione o l'intersezione deve avere almeno $n'n'' = 4$ stati (conviene costruire l'automata prodotto di A' e A'' e da esso ricavare 4 stringhe tutte distinguibili tra loro). Potete poi generalizzare ad altri valori di n' e n'' .

Soluzione 5.8.1.1: Consideriamo i due linguaggi

$$L_{n'} = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod n' = 0\}$$

$$L_{n''} = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) \bmod n'' = 0\}$$

riconosciuti da due DFA A' e A'' rispettivamente di n' e n'' stati. L'automata prodotto per $L' \cup L''$ o per $L' \cap L''$ ha almeno (*si dimostra poi essere esattamente*) $n'n''$ stati.

L'automata prodotto per $L' \cup L''$ accetta se una stringa sta in almeno uno dei due linguaggi, mentre la versione per $L' \cap L''$ accetta se una stringa sta in entrambi i linguaggi.

Definiamo l'insieme

$$X = \{a^p b^q \mid p \in \{0, \dots, n' - 1\} \wedge q \in \{0, \dots, n'' - 1\}\}.$$

Questo insieme è formato da stringhe distinguibili tra loro per $L' \cup L''$:

- date due stringhe w' e w'' esse possono avere:
 - $p' \neq p'' \wedge q' \neq q''$:
 - se nessuna stringa è accettata, aggiungiamo un numero di a tale da rendere la prima stringa in L' ;
 - se una sola delle due stringhe è accettata grazie ad uno dei linguaggi, scegliamo $z = \varepsilon$;
 - se entrambe le stringhe sono accettate, la prima per L' e la seconda per L'' , aggiungiamo un numero di b tale da rendere la seconda fuori da L'' ;
 - $p' = p'' \vee q' = q''$:
 - se il valore nel quale sono uguali le due stringhe le fa accettare allora aggiungiamo:
 - una copia della lettera riferita a quel valore;
 - un numero k dell'altra lettera tale che k fa accettare una delle due stringhe;
 - se il valore nel quale sono uguali le due stringhe non le fa accettare allora aggiungiamo un numero di lettere riferite all'altro valore tale da rendere una delle due stringhe accettata.

X è un insieme di stringhe distinguibili e ogni automa per $L' \cup L''$ ha almeno $n'n''$ stati.

Possiamo fare la stessa cosa per $L' \cap L''$:

- date due stringhe w' e w'' esse possono avere:
 - $p' \neq p'' \wedge q' \neq q''$:

- se nessuna stringa è accettata, aggiungiamo un numero di a e di b tale da rendere la prima stringa in L' ;
- se una sola delle due stringhe è accettata, scegliamo $z = \varepsilon$;
- ▶ $p' = p'' \vee q' = q''$: aggiungiamo un numero di lettere riferite all'elemento uguale per arrivare ad accettare il linguaggio di quella lettera e un numero di altre lettere per far accettare solo una delle due stringhe.

X è un insieme di stringhe distinguibili e ogni automa per $L' \cap L''$ ha almeno $n'n''$ stati

5.9. Esercizio 09

Esercizio 5.9.1: Richieste:

- Ispirandovi alle costruzioni presentate a lezione, fornite delle costruzioni che, dati due automi deterministici A' e A'' che accettano i linguaggi L' e L'' , producano automi deterministici per i seguenti linguaggi.
- Se gli automi A' e A'' hanno rispettivamente n' e n'' stati, quanti sono gli stati degli automi risultanti? Ritenete che si possa fare di meglio (considerate l'esercizio 8)?
- Le costruzioni che avete fornito sono corrette anche nel caso uno o entrambi gli automi dati siano non deterministici? Se la risposta è negativa fornite delle costruzioni alternative e discutete cosa si ottiene rispetto al numero di stati.

Richiesta 5.9.1.1: $L = L' / L''$.

Soluzione 5.9.1.1: Possiamo costruire l'automa prodotto che abbiamo visto a lezione dove modifichiamo l'insieme degli stati finali: per avere la differenza, la stringa in input deve stare in L' e non in L'' , quindi

$$F = \{(q, p) \mid q \in F' \wedge p \in Q'' / F''\}.$$

Abbiamo detto che non si può fare meglio dell'automa prodotto in questi casi, quindi il numero di stati per questo automa è $n'n''$.

Nel caso in cui uno dei due automi sia un NFA, possiamo eseguire una costruzione simile a quella della concatenazione: la prima componente dell'automa prodotto manda avanti il DFA, la seconda componente invece simula la costruzione per sottoinsiemi. Il numero di stati di questo automa è $\leq n'2^{n''}$.

Nel caso in cui entrambi gli automi sono NFA, dobbiamo eseguire una doppia costruzione per sottoinsiemi e costruire l'automa prodotto, ottenendo un numero di stati $\leq 2^{n'}2^{n''}$.

Richiesta 5.9.1.2: $L = L' \Delta L''$ (differenza simmetrica di L' e L'').

Soluzione 5.9.1.2: Possiamo costruire l'automa prodotto che abbiamo visto a lezione dove modifichiamo l'insieme degli stati finali: per avere la differenza simmetrica, la stringa in input deve stare in L' e non in L'' o viceversa, quindi

$$F = \{(q, p) \mid q \in F' \wedge p \in Q''/F''\} \cup \{(q, p) \mid q \in Q'/F' \wedge p \in F''\}.$$

Abbiamo detto che non si può fare meglio dell'automa prodotto in questi casi, quindi il numero di stati per questo automa è $n'n''$.

Nel caso in cui uno dei due automi sia un NFA, possiamo eseguire una costruzione simile a quella della concatenazione: la prima componente dell'automa prodotto manda avanti il DFA, la seconda componente invece simula la costruzione per sottoinsiemi. Il numero di stati di questo automa è $\leq n'2^{n''}$.

Nel caso in cui entrambi gli automi sono NFA, dobbiamo eseguire una doppia costruzione per sottoinsiemi e costruire l'automa prodotto, ottenendo un numero di stati $\leq 2^{n'}2^{n''}$.

5.10. Esercizio 10

Esercizio 5.10.1:

Richiesta 5.10.1.1: Scrivete un'espressione regolare estesa (in cui cioè avete a disposizione anche operatori per intersezione e complemento) equivalente all'espressione $(aba)^*$, nella quale non si utilizzi l'operatore $*$.

Suggerimento. L'insieme Σ^* di tutte le stringhe su un alfabeto Σ che *non contengono* un certo fattore α può essere espresso come complemento di $\overline{\Sigma}\alpha\overline{\Sigma}$. L'insieme delle stringhe che iniziano con il prefisso α può essere espresso come $\alpha\overline{\Sigma}$. Quali fattori non possono comparire nelle stringhe del linguaggio che stiamo considerando? Quale prefisso e quale suffisso hanno in comune tutte le stringhe non vuote di questo linguaggio?

Soluzione 5.10.1.1: Non mi viene in mente per ora.

5.11. Esercizio 11

Esercizio 5.11.1: Dato l'alfabeto $\Sigma = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$, considerate la stringa

$$w_n = \left(\dots \left(\left((a_0^2 a_1)^2 a_2 \right)^2 a_3 \right)^2 \dots a_n \right)^2,$$

dove, per una stringa x , x^2 è un'abbreviazione di xx .

Richiesta 5.11.1.1: Provate a scrivere alcune stringhe come w_1, w_2, w_3, \dots e a esprimere w_i in funzione di w_{i-1} , per $i > 0$, scegliendo opportunamente w_0 .

Soluzione 5.11.1.1: Calcoliamo qualche stringa w_i :

$$\begin{aligned} w_0 &= a_0^2 \\ w_1 &= (a_0^2 a_1)^2 = (w_0 a_1)^2 \\ w_2 &= \left((a_0^2 a_1)^2 a_2 \right)^2 = (w_1 a_2)^2 \\ w_3 &= \left(\left((a_0^2 a_1)^2 a_2 \right)^2 a_3 \right)^2 = (w_2 a_3)^2 \\ w_4 &= \left(\left(\left((a_0^2 a_1)^2 a_2 \right)^2 a_3 \right)^2 a_4 \right)^2 = (w_3 a_4)^2. \end{aligned}$$

Notiamo una struttura ricorsiva: definiamo quindi w_i induttivamente come

$$w_i = \begin{cases} a_0^2 & \text{se } i = 0 \\ (w_{i-1} a_i)^2 & \text{se } i > 0 \end{cases}.$$

Richiesta 5.11.1.2: Quanto è lunga w_n ? (Potete scrivere un'equazione di ricorrenza e risolverla.)

Soluzione 5.11.1.2: La lunghezza di w_n è definita dall'equazione di ricorrenza

$$|w_n| = \begin{cases} 2|a_0| & \text{se } n = 0 \\ 2|w_{n-1}| + 2|a_n| & \text{se } n > 0 \end{cases}.$$

Risolvendo questa equazione di ricorrenza si ottiene

$$\sum_{i=0}^n 2^{n+1-i} |a_i|.$$

Richiesta 5.11.1.3: Osservate che ogni espressione regolare per il linguaggio $L_n = \{w_n\}$ (costituito da w_n come unica stringa) deve essere lunga almeno quanto w_n .

Soluzione 5.11.1.3: Soluzione nel commento, secondo me non è giusta.

Richiesta 5.11.1.4: Supponete di avere a disposizione anche l'operatore di intersezione. Riuscite a trovare un'espressione per L_n di lunghezza $O(n^2)$?

Suggerimento. Si potrebbe «imbottire» un'espressione come $(\dots(((a_0^* a_1)^* a_2)^* a_3)^* \dots a_n)^*$ con intersezioni con linguaggi opportuni, in modo che, per ogni occorrenza dell'operatore $*$, tutto ciò che viene ottenuto con un numero di ripetizioni diverso da 2 venga eliminato.

Soluzione 5.11.1.4: Sincero non so nemmeno da che parte sono girato.

5.12. Esercizio 12

Esercizio 5.12.1: Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora lo sono anche i seguenti linguaggi. In ognuno dei casi, fornite una costruzione per ottenere un automa che accetta il linguaggio considerato a partire da un automa che accetta L . Discutete se le costruzioni fornite preservino il determinismo o no.

Richiesta 5.12.1.1: $\text{Pref}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \mid xy \in L\}$.

Soluzione 5.12.1.1: Non lo so, forse.

Richiesta 5.12.1.2: $\text{Suff}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \mid yx \in L\}$.

Soluzione 5.12.1.2: Non lo so, forse.

Richiesta 5.12.1.3: $\text{Fact}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y, z \in \Sigma^* \mid yxz \in L\}$.

Soluzione 5.12.1.3: Questo veramente non lo so.

Richiesta 5.12.1.4: $\min(L) = \{w \in L \mid \forall x, y \in \Sigma^* \quad xy = w \wedge y \neq \varepsilon \implies x \notin L\}$.

Soluzione 5.12.1.4: Non so nemmeno questo, forse.

Richiesta 5.12.1.5: $\max(L) = \{w \in L \mid \forall x \in \Sigma^+ \quad wx \notin L\}$.

Soluzione 5.12.1.5: Oggi terribile.

5.13. Esercizio 13

Esercizio 5.13.1: Date due stringhe $x, y \in \Sigma^*$, lo *shuffle* di x e y , indicato come $\text{shuffle}(x, y)$ è il linguaggio che si ottiene «fondendo» in tutti i modi possibili le due stringhe, i.e.,

$$\text{shuffle}(x, y) = \{x_0 b_1 x_1 b_2 x_2 \dots x_k b_k \mid x_0, x_1, \dots, x_k \in \Sigma^* \wedge x_0 x_1 \dots x_k = x \wedge b_1, b_2, \dots, b_k \in \Sigma^* \wedge b_1 b_2 \dots b_k = y\}.$$

Lo shuffle di due linguaggi $L', L'' \subseteq \Sigma^*$ è il linguaggio formato da tutte le stringhe ottenibili come shuffle di stringhe di L' con stringhe di L'' , cioè:

$$\text{shuffle}(L', L'') = \bigcup_{x \in L' \wedge y \in L''} \text{shuffle}(x, y).$$

Richiesta 5.13.1.1: Fornite una costruzione che dati due automi deterministici per L' e L'' permetta di ottenere un automa per $\text{shuffle}(L', L'')$ (ispiratevi alla costruzione dell'automato prodotto utilizzata per unione e intersezione).

Soluzione 5.13.1.1: Vedi teoria.

Richiesta 5.13.1.2: L'automato ottenuto è deterministico?

Soluzione 5.13.1.2: No, l'automa ottenuto non è deterministico perché ad ogni iterazione deve scommettere qualche automa mandare avanti.

Richiesta 5.13.1.3: Cosa succede nel caso in cui L' e L'' siano definiti su alfabeti disgiunti?

Soluzione 5.13.1.3: Nel caso di linguaggi definiti su alfabeti disgiunti andiamo a finire in un automa deterministico.

5.14. Esercizio 14

Esercizio 5.14.1: Lo *shuffle perfetto* di due stringhe x e y della stessa lunghezza è la stringa che si ottiene alternando i simboli di x con quelli di y , i.e., se $x = a_1 a_2 \dots a_n$ e $y = b_1 b_2 \dots b_n$, con $a_i b_i \in \Sigma$, $i = 1, \dots, n$, allora

$$\text{perfectShuffle}(x, y) = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n.$$

Dati due linguaggi L' e L'' definiamo:

$$\text{perfectShuffle}(L', L'') = \{\text{perfectShuffle}(x, y) \mid x \in L' \wedge y \in L'' \wedge |x| = |y|\}.$$

Richiesta 5.14.1.1: Svolgete l'esercizio 13 per l'operazione di shuffle perfetto.

Soluzione 5.14.1.1: Non mi viene in mente niente.

6. Esercizi lezione 11 [02/04]

6.1. Esercizio 01

Esercizio 6.1.1: Considerate l'insieme delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ il cui simbolo centrale è una a , cioè il linguaggio

$$L = \left\{ w \in \{a, b\}^* \mid \text{il simbolo in posizione } \left\lceil \frac{|x|}{2} \right\rceil \text{ di } w \text{ è una } a \right\}.$$

Richiesta 6.1.1.1: Utilizzate il pumping lemma per dimostrare che L non è regolare.

Soluzione 6.1.1.1: Per assurdo sia L regolare, e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = b^N a b^N$$

di lunghezza $|z| = 2N + 1 \geq N$ e scomponiamola come $z = uvw$. Sappiamo che $|uv| \leq N$, quindi uv è formata da solo b , ovvero

$$u = b^i \wedge v = b^j \mid i + j \leq N \wedge j \geq 1.$$

Sappiamo anche che possiamo ripetere v un numero arbitrario di volte: se scegliamo $k \geq 2$ otteniamo una stringa z' che viene gonfiata di b all'inizio, spostando il carattere centrale mano a mano verso sinistra. Visto che i caratteri a sinistra del centro sono solo b , il nuovo elemento centrale sarà una b , ma questo è assurdo perché la ripetizione arbitraria dovrebbe mantenerci in L , quindi quest'ultimo non è regolare.

Richiesta 6.1.1.2: Cosa si può dire nel caso l'alfabeto sia formato dal solo simbolo a ?

Soluzione 6.1.1.2: Nel caso l'alfabeto sia unario, il linguaggio che stiamo riconoscendo è a^+ , quindi lo possiamo fare con un DFA e quindi il linguaggio è regolare.

6.2. Esercizio 02

Esercizio 6.2.1: Utilizzando il pumping lemma, dimostrate che i seguenti linguaggi non sono regolari.

Richiesta 6.2.1.1: $\text{PAL} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$.

Soluzione 6.2.1.1: Per assurdo sia L regolare, e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = b^N ab^N$$

di lunghezza $|z| = 2N + 1 \geq N$ e scomponiamola come $z = uvw$. Sappiamo che $|uv| \leq N$, quindi uv è formata da solo b , ovvero

$$u = b^i \wedge v = b^j \mid i + j \leq N \wedge j \geq 1.$$

Sappiamo anche che possiamo ripetere v un numero arbitrario di volte: se scegliamo $k = 0$ otteniamo una stringa z' che contiene un numero iniziale di b minore di N perché ne abbiamo cancellata almeno una, ma questo è assurdo perché la ripetizione arbitraria dovrebbe mantenerci in L , quindi quest'ultimo non è regolare.

Richiesta 6.2.1.2: $\{a^m b^n a^n \mid m \geq 1 \wedge n \geq 0\}$.

Soluzione 6.2.1.2: Per assurdo sia L regolare, e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = ab^N a^N$$

di lunghezza $|z| = 2N + 1 \geq N$ e scomponiamola come $z = uvw$. Sappiamo che $|uv| \leq N$, quindi per uv abbiamo 3 scomposizioni possibili:

- $u = \varepsilon \wedge v = a$: basta scegliere $k = 0$ nella ripetizione arbitraria per far cadere $m \geq 1$;
- $u = \varepsilon \wedge v = ab^i \mid i \in \{1, \dots, N - 1\}$: basta scegliere $k = 0$ nella ripetizione arbitraria per far cadere $m \geq 0$ e l'uguaglianza finale delle a e delle b ;
- $u = ab^i \wedge v = b^j \mid i + j \leq N - 1 \wedge j \geq 1$: basta scegliere $k = 0$ nella ripetizione arbitraria per far cadere l'uguaglianza finale delle a e delle b .

Ma questo è assurdo perché la ripetizione arbitraria dovrebbe mantenerci in L , quindi quest'ultimo non è regolare.

Richiesta 6.2.1.3: $\{a^n b^m a^n \mid m \geq 1 \wedge n \geq 0\}$.

Soluzione 6.2.1.3: Per assurdo sia L regolare, e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = a^N b a^N$$

di lunghezza $|z| = 2N + 1 \geq N$ e scomponiamola come $z = uvw$. Sappiamo che $|uv| \leq N$, quindi uv è formata da solo a , ovvero

$$u = a^i \wedge v = a^j \mid i + j \leq N \wedge j \geq 1.$$

Sappiamo anche che possiamo ripetere v un numero arbitrario di volte: se scegliamo $k = 0$ otteniamo una stringa z' che contiene un numero iniziale di a minore di N perché ne abbiamo cancellata almeno una, ma questo è assurdo perché la ripetizione arbitraria dovrebbe mantenerci in L , quindi quest'ultimo non è regolare.

Richiesta 6.2.1.4: $\{a^p \mid p \text{ è un numero primo}\}$.

Soluzione 6.2.1.4: Per assurdo sia L regolare, e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = a^{N+k} \mid k \geq 0$$

di lunghezza $|z| = N + k \geq N$ tale che $N + k$ è primo. Scomponiamo z come $z = uvw$. Ogni pezzo di z è formato da solo a , ma siamo sicuri che v ne abbia almeno una perché $v \neq \varepsilon$.

Sia quindi $v = a^i \mid i \geq 1$. Abbiamo due casi per $N + k$:

- se $N + k$ pari vuol dire che $N + k = 2$, unico primo pari, ma allora:
 - se $i = 1$ scegliamo $k = 3$ ottenendo $z' = aaaa$ che non appartiene a L ;
 - se $i = 2$ scegliamo $k = 2$ ottenendo ancora $z' = aaaa$ che non appartiene a L ;
- se $N + k$ dispari allora:
 - se i è dispari andiamo a scegliere $k = 0$ nella ripetizione arbitraria per rimuovere un numero dispari di a da $N + k$, ottenendo quindi un numero pari, che non è primo;
 - se i è pari andiamo a scegliere k che mi renda il numero di a non primo, e siamo sicuri che esista questo numero perché esistono infiniti numeri dispari che non sono primi.

Ma ogni caso visto è assurdo perché la ripetizione arbitraria dovrebbe mantenerci in L , quindi quest'ultimo non è regolare.

Richiesta 6.2.1.5: $\{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

Soluzione 6.2.1.5: Vedi teoria.

Richiesta 6.2.1.6: $\{a^{n!} \mid n \geq 0\}$.

Soluzione 6.2.1.6: Per assurdo sia L regolare, e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = a^{N!}$$

di lunghezza $|z| = N! \geq N$ e scomponiamola come $z = uvw$. Ogni pezzo di z è formato da solo a , ma siamo sicuri che v ne abbia almeno una perché $v \neq \varepsilon$. Sia quindi $v = a^i \mid i \geq 1$.

Potendo ripetere arbitrariamente v , scegliamo $k = 2$ e andiamo a scrivere

$$|uv^2w| = N! + |v| = N! + i.$$

Il fattoriale successivo a $N!$ è $(N+1)!$, ma per ottenere questo dovremmo avere

$$N! + i < (N+1)!$$

$$i < (N+1)N! - N!$$

$$i < (N+1-1)N!$$

$$i < NN!$$

TODO: DA CHIEDERE A MARTINO

6.3. Esercizio 03

Esercizio 6.3.1: Dimostrate che il linguaggio delle parentesi bilanciate non è regolare in tre modi.

Richiesta 6.3.1.1: Utilizzando il pumping lemma.

Soluzione 6.3.1.1: Per assurdo sia L regolare, e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = ({}^N)^N$$

di lunghezza $|z| = 2N \geq N$ e scomponiamola come $z = uvw$. Sappiamo che $|uv| \leq N$, quindi uv è formata da solo $($, ovvero

$$u = ({}^i \wedge v = ({}^j \mid i + j \leq N \wedge j \geq 1.$$

Sappiamo anche che possiamo ripetere v un numero arbitrario di volte: se scegliamo $k = 0$ otteniamo una stringa z' che contiene un numero iniziale di $($ minore di N perché

ne abbiamo cancellata almeno una, ma questo è assurdo perché la ripetizione arbitraria dovrebbe mantenerci in L , quindi quest'ultimo non è regolare.

Richiesta 6.3.1.2: Utilizzando il concetto di distinguibilità.

Soluzione 6.3.1.2: Definiamo l'insieme

$$X = \{(^k \mid k \geq 0\}$$

formato da stringhe distinguibili tra loro per L . Infatti, prese due stringhe x_i e x_j , con $i \neq j$, avremo

$$\#_L(x_i) = i \neq j = \#_L(x_j)$$

che possono essere distinte con la stringa $z =)^i$.

Ma allora ogni DFA per L ha almeno $|X| = \infty$ stati, ma quindi L non è regolare.

Richiesta 6.3.1.3: Sfruttando le proprietà di chiusura della classe dei linguaggi regolari per mostrare che la sua regolarità implicherebbe quella del linguaggio $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Soluzione 6.3.1.3: Per assurdo sia L regolare, allora esso è chiuso tramite l'operazione di intersezione. Andiamo a calcolare

$$L \cap (^*)^*$$

andiamo a ottenere il linguaggio

$$\{(^n)^n \mid n \geq 0\}$$

perché tra tutte le stringhe di parentesi bilanciate vado a prendere quelle che hanno tutte le parentesi aperte all'inizio seguite da tutte quelle chiuse per, appunto, chiudere quelle aperte.

Però il linguaggio $\{(^n)^n \mid n \geq 0\}$ non è regolare, ed essendo $(^*)^*$ regolare, deve essere per forza L non regolare.

6.4. Esercizio 04

Esercizio 6.4.1: Considerate il seguente linguaggio $L \subseteq \{a, b, c\}^*$:

$$L = \{a^m b^n c^n \mid m \geq 1 \wedge n \geq 0\} \cup \{b^m c^n \mid m, n \geq 0\}.$$

Richiesta 6.4.1.1: Verificate che il linguaggio L soddisfa la condizione del pumping lemma per i linguaggi regolari.

Soluzione 6.4.1.1: Non ci riesco ora.

Richiesta 6.4.1.2: Dimostrate che L non è regolare utilizzando il concetto di distinguibilità.

Soluzione 6.4.1.2: Definiamo l'insieme

$$X = \{ab^k \mid k \geq 0\}$$

formato da stringhe distinguibili tra loro per L . Infatti, prese due stringhe x_i e x_j , con $i \neq j$, avremo

$$\#_b(x_i) = i \neq j = \#_b(x_j)$$

che possono essere distinte con la stringa $z = c^i$.

Ma allora ogni DFA per L ha almeno $|X| = \infty$ stati, ma quindi L non è regolare.

Richiesta 6.4.1.3: Dimostrate che L non è regolare sfruttando le proprietà di chiusura della classe dei linguaggi regolari.

Soluzione 6.4.1.3: Per assurdo sia L regolare, allora esso è chiuso tramite l'operazione di intersezione. Andiamo a calcolare

$$L \cap ab^*c^*$$

andiamo a ottenere il linguaggio

$$\{ab^n c^n \mid n \geq 0\}$$

perché andiamo a cancellare tutte le stringhe del secondo insieme e di tutte le prime teniamo quelle che hanno solo una a , seguita da tutte le b e tutte le c , che però devono essere in numero uguale per la definizione del primo insieme.

Però il linguaggio $\{ab^n c^n \mid n \geq 0\}$ non è regolare, ed essendo ab^*c^* regolare, deve essere per forza L non regolare.

7. Esercizi lezione 12 [04/04]

7.1. Esercizio 01

Esercizio 7.1.1: Dato un linguaggio L indichiamo con $\text{cycle}(L)$ il linguaggio ottenuto ruotando ciclicamente in tutti i modi possibili le stringhe di L , i.e.,

$$\text{cycle}(L) = \{vu \in \Sigma^* \mid uv \in L\}.$$

Richiesta 7.1.1.1: Dimostrate che se L è regolare allora anche $\text{cycle}(L)$ è regolare, fornendo una costruzione per ottenere un automa che accetti $\text{cycle}(L)$ a partire da un automa che accetta L .

Soluzione 7.1.1.1: Non so da che parte sono girato.

7.2. Esercizio 02

Esercizio 7.2.1: Dato un linguaggio L indichiamo con $\frac{1}{2}L$ il linguaggio formato dalla prima metà delle stringhe di L (di lunghezza pari), i.e.,

$$\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \mid |y| = |x| \wedge xy \in L\}.$$

Richiesta 7.2.1.1: Dimostrate che se L è regolare allora anche $\frac{1}{2}L$ è regolare, fornendo una costruzione per ottenere un automa che accetti $\frac{1}{2}L$ a partire da un automa che accetta L .

Soluzione 7.2.1.1: Vedi teoria.

7.3. Esercizio 03

Esercizio 7.3.1: Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora sono regolari anche i seguenti linguaggi.

Richiesta 7.3.1.1: $\frac{1}{3}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y, z \in \Sigma^* \mid |x| = |y| = |z| \wedge xyz \in L\}.$

Soluzione 7.3.1.1: Dato l'automa A per L , costruiamo l'automa

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$$

definito da:

- l'insieme degli stati

$$Q' = Q^3 \times 2^Q \times 2^Q$$

è formato da una serie di quintuple nella forma

$$[p, s_1, s_2, q, r]$$

con:

- ▶ p stato nel quale si trova l'automa A ;
- ▶ s_1 scommessa sullo stato nel quale si trova A dopo aver letto x ;
- ▶ s_2 scommessa sullo stato nel quale si trova A dopo aver letto y partendo dallo stato q
- ▶ q stati nei quali si trova l'automa A partendo da s_1 mentre crea y ;
- ▶ r stati nei quali si trova l'automa A partendo da s_2 mentre crea z ;
- lo **stato iniziale** è un insieme di quintuple

$$q'_0 = \{[q_0, p, q, \{p\}, \{q\}] \mid \forall p, q \in Q\};$$

- la **funzione di transizione** deve mandare avanti l'automa A su x in maniera deterministica, mentre y e z le deve creare, come nel caso di $\frac{1}{2}L$, quindi

$$\delta'([p, s_1, s_2, q, r], a) = \left[\delta(p, a), s_1, s_2, \bigcup_{q_1 \in q \wedge \sigma \in \Sigma} \delta(q_1, \sigma), \bigcup_{r_1 \in r \wedge \sigma \in \Sigma} \delta(r_1, \sigma) \right];$$

- l'insieme degli stati finali deve controllare le scommesse fatte, ovvero il primo automa finisce in s_1 , il secondo automa finisce in s_2 , il terzo automa finisce in uno stato finale. Formalmente lo scriviamo come

$$F' = \{[s_1, s_1, s_2, q, r] \mid s_2 \in q \wedge r \cap F \neq \emptyset\}.$$

Richiesta 7.3.1.2: $2\frac{1}{3}L = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x, z \in \Sigma^* \mid |x| = |y| = |z| \wedge xyz \in L\}.$

Soluzione 7.3.1.2: Dato l'automa A per L , costruiamo l'automa

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$$

definito da:

- l'insieme degli stati

$$Q' = 2^Q \times Q^3 \times 2^Q$$

è formato da una serie di quintuple nella forma

$$[p, s_1, s_2, q, r]$$

con:

- p stati nei quali si trova l'automa A mentre crea x ;
- s_1 scommessa sullo stato nel quale si trova A dopo aver letto x ;
- s_2 scommessa sullo stato nel quale si trova A dopo aver letto y partendo dallo stato q
- q stato nel quale si trova l'automa A partendo da s_1 mentre riconosce y ;
- r stati nei quali si trova l'automa A partendo da s_2 mentre crea z ;
- lo **stato iniziale** è un insieme di quintuple

$$q'_0 = \{[\{q_0\}, p, q, p, \{q\}] \mid \forall p, q \in Q\};$$

- la **funzione di transizione** deve creare x e z considerando tutti i possibili cammini, mentre manda avanti l'automa per y considerando solo il carattere che viene letto, quindi

$$\delta'([p, s_1, s_2, q, r], a) = \left[\bigcup_{p_1 \in p \wedge \sigma \in \Sigma} \delta(p_1, \sigma), s_1, s_2, \delta(q, a), \bigcup_{r_1 \in r \wedge \sigma \in \Sigma} \delta(r_1, \sigma) \right];$$

- l'**insieme degli stati finali** deve controllare le scommesse fatte, ovvero il primo automa finisce in s_1 , il secondo automa finisce in s_2 , il terzo automa finisce in uno stato finale. Formalmente lo scriviamo come

$$F' = \{[p, s_1, s_2, s_2, r] \mid s_1 \in p \wedge r \cap F \neq \emptyset\}.$$

Richiesta 7.3.1.3: $3\frac{1}{3}L = \{z \in \Sigma^* \mid \exists x, y \in \Sigma^* \mid |x| = |y| = |z| \wedge xyz \in L\}.$

Soluzione 7.3.1.3: Dato l'automa A per L , costruiamo l'automa

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$$

definito da:

- l'**insieme degli stati**

$$Q' = 2^Q \times Q^2 \times 2^Q \times Q$$

è formato da una serie di quintuple nella forma

$$[p, s_1, s_2, q, r]$$

con:

- p stati nei quali si trova l'automa A mentre crea x ;
- s_1 scommessa sullo stato nel quale si trova A dopo aver letto x ;
- s_2 scommessa sullo stato nel quale si trova A dopo aver letto y partendo dallo stato q
- q stati nei quali si trova l'automa A partendo da s_1 mentre crea y ;

- r stato nel quale si trova l'automa A partendo da s_2 mentre riconosce z ;
- lo **stato iniziale** è un insieme di quintuple

$$q'_0 = \{[\{q_0\}, p, q, \{p\}, q] \mid \forall p, q \in Q\};$$

- la **funzione di transizione** deve creare x e y considerando tutti i possibili cammini, mentre manda avanti l'automa per z considerando solo il carattere che viene letto, quindi

$$\delta'([p, s_1, s_2, q, r], a) = \left[\bigcup_{p_1 \in p \wedge \sigma \in \Sigma} \delta(p_1, \sigma), s_1, s_2, \bigcup_{q_1 \in q \wedge \sigma \in \Sigma} \delta(q_1, \sigma), \delta(r, a) \right];$$

- l'**insieme degli stati finali** deve controllare le scommesse fatte, ovvero il primo automa finisce in s_1 , il secondo automa finisce in s_2 , il terzo automa finisce in uno stato finale. Formalmente lo scriviamo come

$$F' = \{[p, s_1, s_2, q, r] \mid s_1 \in p \wedge s_2 \in q \wedge r \in F\}.$$

7.4. Esercizio 04

Esercizio 7.4.1:

Richiesta 7.4.1.1: Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora è regolare anche il seguente linguaggio:

$$\log(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \mid |y| = 2^{|x|} \wedge xy \in L\}.$$

Soluzione 7.4.1.1: Non so da che parte sono girato.

7.5. Esercizio 05

Esercizio 7.5.1:

Richiesta 7.5.1.1: Dimostrate che se L è un linguaggio regolare, allora è regolare anche il seguente linguaggio:

$$\text{root}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid w^{|w|} \in L\}.$$

Soluzione 7.5.1.1: Ancora peggio.

8. Esercizi lezione 13 [09/04]

8.1. Esercizio 01

Esercizio 8.1.1: Fissato un intero $n > 0$, sia K_n il linguaggio sull'alfabeto $\{a, b\}$ denotato dall'espressione $(a + b)^* a (a + b)^{n-1} a (a + b)^*$.

Richiesta 8.1.1.1: A lezione abbiamo discusso come riconoscere il linguaggio K_n con un automa deterministico two-way con $O(n)$ stati. Scrivete formalmente la funzione di transizione di tale automa (rispetto al parametro n).

Soluzione 8.1.1.1: Usiamo lo stato r per ricercare le a :

$$\delta(r, a) = (q_0, +1)$$

$$\delta(r, b) = (r, +1).$$

Con lo stato r andiamo avanti a fare la ricerca delle a , mentre da q_0 devo leggere $n - 1$ caratteri:

$$\delta(q_i, a/b) = (q_{i+1}, +1) \quad \forall i \in \{0, \dots, n - 2\}.$$

Nello stato q_{n-1} vediamo se abbiamo una a :

$$\delta(q_{n-1}, a) = (q_f, +1).$$

In caso contrario, torniamo indietro di $n - 1$ caratteri e ripartiamo con la ricerca delle a a partire dallo stato r . Se $n = 2$ torniamo direttamente nello stato r andando indietro di 1, invece negli altri casi facciamo

$$\delta(q_{n-1}, b) = (p_1, -1)$$

$$\delta(p_i, a/b) = (p_{i+1}, -1) \quad \forall i \in \{1, \dots, n - 3\}$$

$$\delta(p_{n-2}, a/b) = (r, -1).$$

Dallo stato q_f vado avanti a leggere fino a quando non sfuro l'end marker destro.

Infine, vanno aggiunti un po' di regole per vedere se, mentre andiamo avanti di n caratteri, andiamo a sfiorare l'end marker: in questo caso andiamo in uno stato trappola e ciao a tutti.

Richiesta 8.1.1.2: Abbiamo inoltre accennato a come riconoscere K_n con un automa *sweeping* con $O(n^2)$ stati, cioè un automa two-way che può cambiare la direzione della testina di input solo sugli end-marker. (Nell' i -esima «passata» del nastro di input, l'automata ispeziona i simboli nelle posizioni k tali che $k \bmod n = i$.) Scrivete la funzione di transizione di tale automa nel caso $n = 3$ e generalizzatela poi a ogni n fissato.

Soluzione 8.1.1.2: Non mi viene in mente ora.

8.2. Esercizio 02

Esercizio 8.2.1:

Richiesta 8.2.1.1: Modificate l'automa sweeping per K_n ottenuto nell'esercizio 1 in modo da ridurre il numero degli stati a $O(n)$.

Suggerimento. In ciascuna passata si utilizza un contatore modulo n per individuare i simboli da ispezionare. Il contatore può essere inizializzato in funzione del valore finale del contatore nella passata precedente, evitando di contare le passate.

Soluzione 8.2.1.1: Non mi viene nemmeno questo.

8.3. Esercizio 03

Esercizio 8.3.1:

Richiesta 8.3.1.1: Svolgete l'esercizio 1 per il linguaggio formato da tutte le stringhe in cui esistono due simboli a distanza n tra loro che sono uguali.

Soluzione 8.3.1.1: Vedi esercizio 1 ma con gli stati di avanzamento doppi, in base alla lettera che viene letta dallo stato r .

8.4. Esercizio 04

Esercizio 8.4.1:

Richiesta 8.4.1.1: Svolgete l'esercizio 1 per il linguaggio formato da tutte le stringhe in cui tutti i simboli a distanza n tra loro sono uguali.

Soluzione 8.4.1.1: Non ho voglia di formalizzarlo, quindi lo farò scritto:

1. partiamo da uno stato r_0 , andiamo avanti di n posti e vediamo se abbiamo lo stesso carattere;
2. in caso negativo andiamo in loop in qualche stato trappola;
3. in caso positivo torniamo indietro di $n - 1$ caratteri e ripetiamo dal punto iniziale;
4. dopo aver fatto n iterazioni andiamo a sfiorare l'end marker destro.

8.5. Esercizio 05

Esercizio 8.5.1:

Richiesta 8.5.1.1: Rivedete la simulazione di automi two-way deterministici mediante automi one-way deterministici presentata a lezione e studiate come possa essere modificata nel caso l'automa di partenza sia two-way non deterministico.

Soluzione 8.5.1.1: Ho un dubbio amletico, fino a quando non lo risolvo non posso fare questo esercizio matto.

8.6. Esercizio 06

Esercizio 8.6.1: Supponete di disporre di un automa one-way deterministico A che riconosca un linguaggio L . Fornite, partendo da A , la costruzione di automa two-way deterministico per i seguenti linguaggi (cercate di ottenere automi con un numero di stati lineare o polinomiale rispetto a quelli dell'automa A).

Richiesta 8.6.1.1: $\beta(L) = \{x \mid xx^R \in L\}$.

Soluzione 8.6.1.1: Dobbiamo costruire A' un 2DFA per $\beta(L)$.

Questo automa ha in input x , che legge per intero e simula l'esecuzione di A . Quando raggiunge l'end marker destro allora si rimette sull'ultimo carattere e continua la lettura dallo stesso stato nel quale eravamo alla fine di x .

Ora leggiamo la x al contrario fino all'end marker sinistro, dove controlliamo lo stato nel quale siamo: se esso è finale allora sfondiamo l'end marker destro.

Come numero di stati abbiamo:

- lo stesso numero di stati di A per simularlo;
- lo stesso numero di stati di A per simularlo, ma al contrario, quindi servono regole che vanno indietro e non avanti;
- uno stato finale e uno stato trappola.

Quindi abbiamo lo stesso ordine di grandezza degli stati di A .

Richiesta 8.6.1.2: $\alpha(L) = \{x \mid xx \in L\}$.

Soluzione 8.6.1.2: Dobbiamo costruire A' un 2DFA per $\alpha(L)$.

Questo automa ha in input x , che legge per intero e simula l'esecuzione di A . Quando raggiunge l'end marker destro allora fa uno sweeping e si rimette sul primo carattere di x e continua la lettura dallo stesso stato nel quale eravamo alla fine di x .

Ora leggiamo la x di nuovo fino all'end marker destro, dove controlliamo lo stato nel quale siamo: se esso è finale allora sfondiamo l'end marker destro.

Come numero di stati abbiamo:

- lo stesso numero di stati di A per simularlo;
- lo stesso numero di stati di A per tornare indietro, perché dobbiamo tenere traccia dello stato nel quale eravamo;
- lo stesso numero di stati di A per simularlo di nuovo, quindi servono regole che poi si fermano all'end marker;
- uno stato finale e uno stato trappola.

Quindi abbiamo lo stesso ordine di grandezza degli stati di A .

8.7. Esercizio 07

Esercizio 8.7.1: Supponete di disporre di un automa one-way deterministico A che riconosca un linguaggio L .

Richiesta 8.7.1.1: Fornite, partendo da A , la costruzione di un automa two-way non deterministico per il seguente linguaggio:

$$\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \mid |x| = |y| \wedge xy \in L\}.$$

Cercate di ottenere un automa two-way non deterministico con un numero di stati lineare o polinomiale rispetto a quelli dell'automata A .

Soluzione 8.7.1.1: Dobbiamo costruire A' un 2NFA per $\frac{1}{2}L$.

Questo automa ha in input x , che legge per intero e simula l'esecuzione di A . Quando raggiunge l'end marker destro allora fa uno sweeping e si rimette sul primo carattere di x con lo stesso stato che abbiamo raggiunto a fine x .

Ora leggiamo la x di nuovo fino all'end marker destro, ma **non deterministicamente** generiamo tutti i possibili cammini di lunghezza $|x|$. In poche parole, leggiamo i caratteri di x ma solo per sapere quanto è lunga.

Accettiamo se sull'end marker destro abbiamo almeno uno stato finale.

Come numero di stati abbiamo:

- lo stesso numero di stati di A per simularlo;
- lo stesso numero di stati di A per tornare indietro, perché dobbiamo tenere traccia dello stato nel quale eravamo;
- non oltre $2^{|A|}$ stati per via della costruzione per sottoinsiemi;
- uno stato finale e uno stato trappola.

Richiesta 8.7.1.2: Cosa riuscite a dire rispetto al numero di stati di un automa two-way deterministico? *(Anche se non riuscite a calcolare il numero di stati necessario e sufficiente, provate a capire come si potrebbe ottenere facilmente un upper bound sul numero di stati di un automa two-way deterministico. Alla luce di quanto sarà discusso nella lezione 14, cercate di capire quali implicazioni vi sarebbero se tale numero fosse anche necessario.)*

Soluzione 8.7.1.2: Ho fatto la lezione 14 prima di questi esercizi, RIP.

9. Esercizi lezione 14 [11/04]

9.1. Esercizio 01

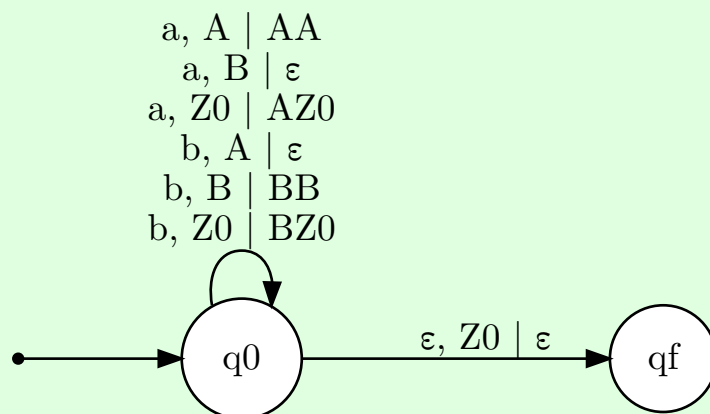
Esercizio 9.1.1:

Richiesta 9.1.1.1: Descrivete e costruite un automa a pila che accetti l'insieme delle stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ che contengono lo stesso numero di a e b , come ad esempio $aabb$, $abba$, $baba$.

Soluzione 9.1.1.1: L'idea dietro un automa a pila per questo linguaggio è quella di mettere sulla pila i caratteri A e B per contare quante ne abbiamo, e poi vedere se i due numeri sono uguali. Per contare usiamo un semplice algoritmo:

- se leggo una a e sulla pila ho una A allora ne metto un'altra, altrimenti se ho una B la andiamo a cancellare perché vuol dire che ho letto una B poco prima, quindi la a di ora e la b di prima sono in egual numero;
- stesso discorso per la b ;
- ogni volta che leggo Z_0 sulla pila, con una ε -mossa mi sposto in uno stato finale scommettendo che l'input sia finito e che quindi tutte le A e le B si sono cancellate sulla pila, avendo quindi un numero di a e di b uguale.

Andiamo ad accettare per pila vuota. Va bene anche l'accettazione per stato finale, rendendo q_f finale, ma mi piaceva di più pila vuota.



Con l'accorgimento della ε -mossa riusciamo a riconoscere anche la stringa vuota.

9.2. Esercizio 02

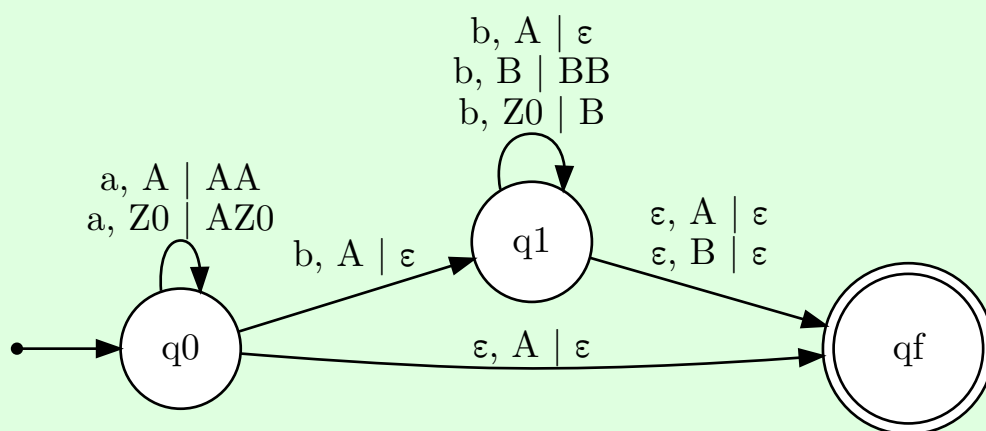
Esercizio 9.2.1:

Richiesta 9.2.1.1: Descrivete e costruite un automa a pila che accetti il linguaggio $\{a^n b^m \mid n \neq m\}$.

Soluzione 9.2.1.1: Per questo automa andiamo a riempire tutta la pila con un numero n di A , poi andiamo a togliere una A per ogni b che troviamo. Se:

- $n > m$ allora alla fine arriviamo con delle A sulla pila, e non deterministicamente andiamo in uno stato finale;
- $n < m$ vuol dire che leggendo delle b arriviamo a Z_0 , ma in questo caso andiamo a mettere delle B sulla pila e poi a fine stringa ci spostiamo nello stato finale.

Andiamo ad accettare per stati finali.



Manca da aggiungere la transizione

$$b, Z_0 \mid Z_0$$

ma non ho voglia di cambiare l'immagine ora.

9.3. Esercizio 03

Esercizio 9.3.1: Sia $\Sigma = \{ (,) \}$ un alfabeto i cui simboli sono la parentesi aperta e la parentesi chiusa.

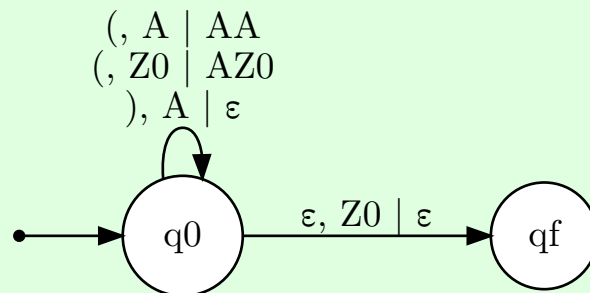
Richiesta 9.3.1.1: Descrivete e costruite un automa a pila che riconosca il linguaggio formato da tutte le sequenze di parentesi correttamente bilanciate, come ad esempio $((()()))()$.

Soluzione 9.3.1.1: Costruiamo un automa a pila che:

- ogni volta che legge una parentesi aperta mettiamo una A sulla pila;
- ogni volta che legge una parentesi chiusa toglie una A dalla pila, se può.

Se non possiamo togliere una A dalla pila l'automa si blocca. Poi, non deterministicamente, ogni volta che leggiamo Z_0 sulla pila andiamo in uno stato finale.

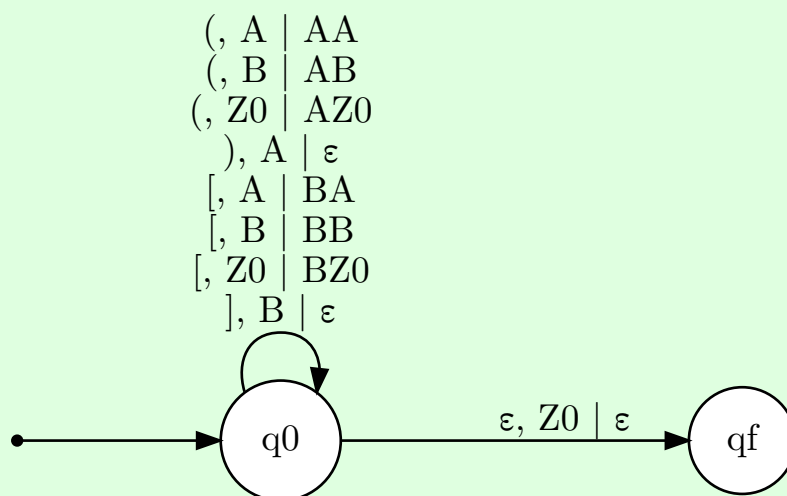
Andiamo ad accettare per pila vuota. Va bene anche l'accettazione per stato finale, rendendo q_f finale, ma mi piaceva di più pila vuota.



Richiesta 9.3.1.2: Risolvete il punto precedente per un alfabeto con due tipi di parentesi, come $\Sigma = \{ (,), [,] \}$, nel caso non vi siano vincoli tra i tipi di parentesi (le tonde possono essere contenute tra quadre e viceversa). Esempio $[()([])]$, ma non $[][(())()]$.

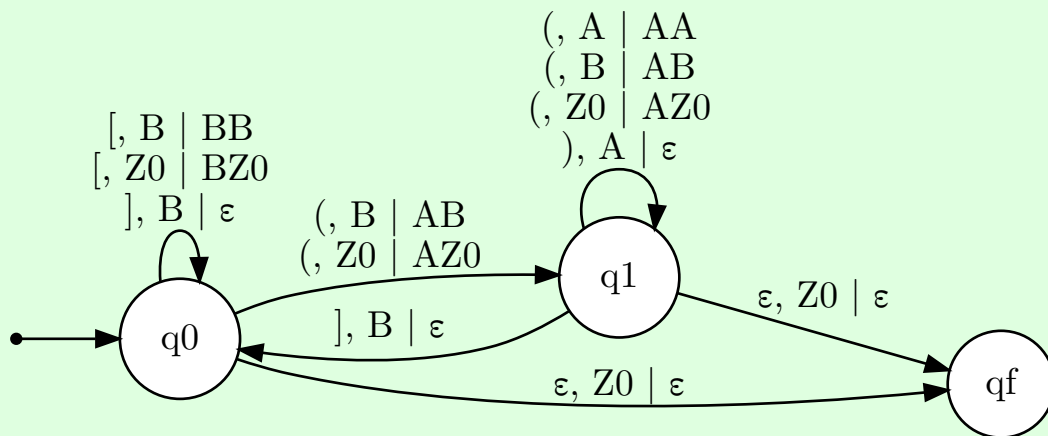
Soluzione 9.3.1.2: L'automa è uguale a quello di prima, solo con delle regole in più per le parentesi quadre, rappresentate dal carattere B nella pila.

Andiamo ad accettare per pila vuota. Va bene anche l'accettazione per stato finale, rendendo q_f finale, ma mi piaceva di più pila vuota.



Richiesta 9.3.1.3: Risolvete il punto precedente con $\Sigma = \{ (,), [,] \}$, con il vincolo che le parentesi quadre non possano mai apparire all'interno delle parentesi tonde. Esempio $[(())][()][()()]$ ma non $[(())[[]]]$.

Soluzione 9.3.1.3: Con lo stato q_0 andiamo a riconoscere tutte le parentesi quadre, mentre appena leggiamo una parentesi tonda ci spostiamo in q_1 , nel quale non possiamo leggere una quadra aperta.



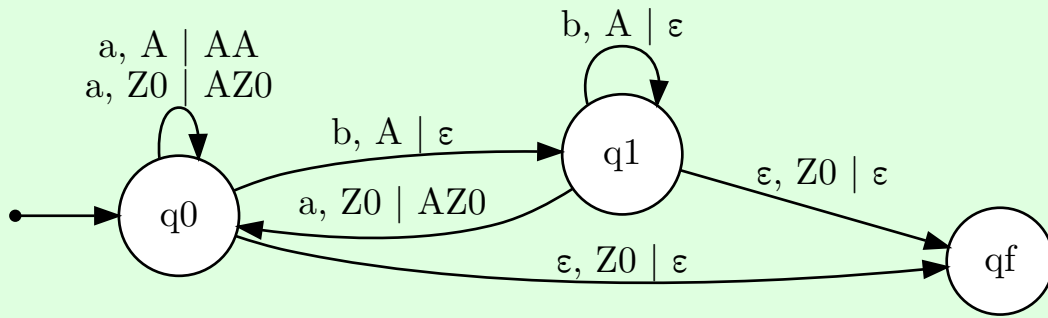
9.4. Esercizio 04

Esercizio 9.4.1:

Richiesta 9.4.1.1: Basandovi su uno degli automi a pila presentati a lezione per il linguaggio $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, costruite un automa a pila per la chiusura di Kleene di L , cioè il linguaggio $\{a^{n_1} b^{n_1} a^{n_2} b^{n_2} \dots a^{n_k} b^{n_k} \mid k \geq 0 \wedge n_1, n_2, \dots, n_k > 0\}$.

Soluzione 9.4.1.1: All'automa a pila che abbiamo visto a lezione per L aggiungiamo una transizione direttamente nello stato finale, visto che dobbiamo accettare anche ϵ . Inoltre, ogni volta che in q_1 torniamo sulla base della pila, se leggiamo una a allora torniamo in q_0 per iniziare un nuovo riconoscimento.

Andiamo ad accettare per pila vuota. Va bene anche l'accettazione per stato finale, rendendo q_f finale, ma mi piaceva di più pila vuota.

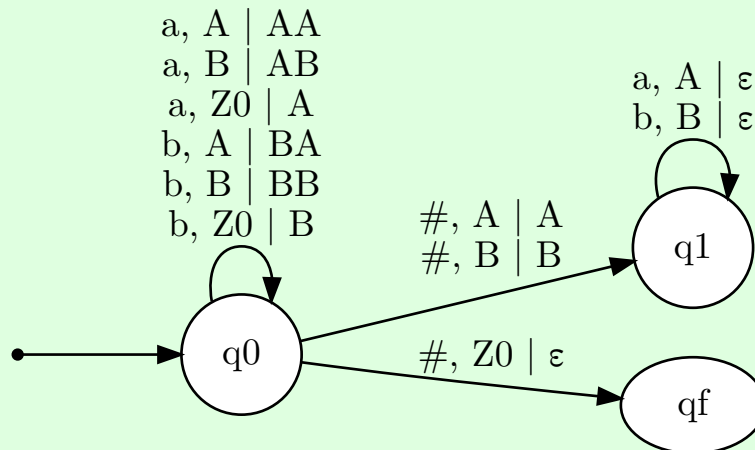


9.5. Esercizio 05

Esercizio 9.5.1: Considerate l'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.

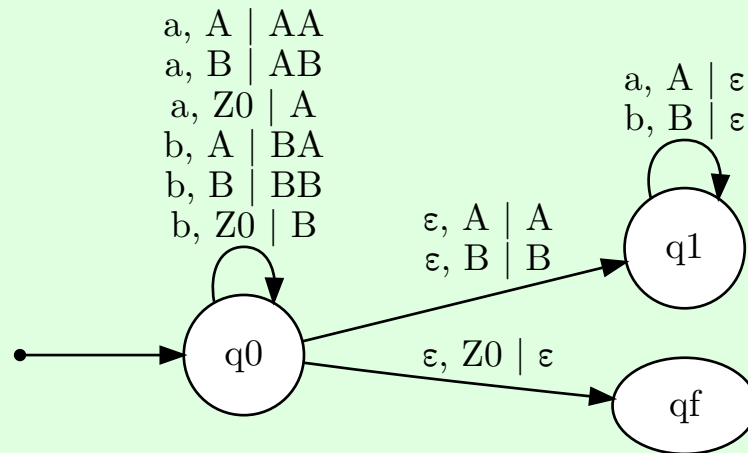
Richiesta 9.5.1.1: Descrivete e costruite un automa a pila per il linguaggio $\text{PAL}_\# = \{w\#w^R \mid w \in \Sigma^*\}$, dove $\#$ è un nuovo simbolo, cioè $\# \notin \Sigma$.

Soluzione 9.5.1.1: Un automa a pila per $\text{PAL}_\#$ legge la stringa, la mette nella pila, appena trova $\#$ controlla se tirandola fuori si ottiene la stessa stringa che si sta leggendo ora.



Richiesta 9.5.1.2: Modificate l'automa a pila ottenuto al punto precedente in modo che accetti il linguaggio delle stringhe palindrome di lunghezza pari su Σ , cioè per l'insieme $\text{PAL}_{\text{pari}} = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$.

Soluzione 9.5.1.2: Un automa a pila per PAL_{pari} in maniera non deterministica si sposta nello stato q_1 scommettendo di essere arrivato a metà stringa.



Richiesta 9.5.1.3: Riuscite a ottenere automi a pila deterministici per $PAL_{\#}$ e per PAL_{pari} ?

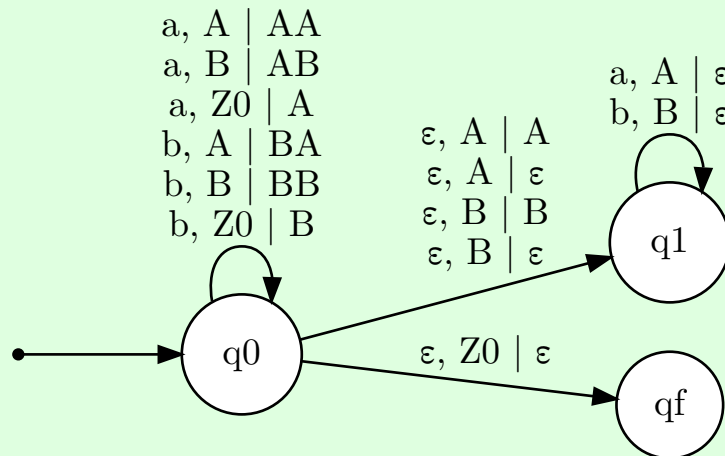
Soluzione 9.5.1.3: Per $PAL_{\#}$ abbiamo un automa deterministico, mentre per PAL_{pari} no perché dobbiamo scommettere di essere arrivati a metà stringa.

9.6. Esercizio 06

Esercizio 9.6.1: Considerate l'alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ e gli automi a pila ottenuti nell'esercizio precedente.

Richiesta 9.6.1.1: Modificate gli automi a pila ottenuti nell'esercizio precedente in modo da riconoscere il linguaggio di tutte le stringhe palindrome su Σ , cioè l'insieme $PAL = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$.

Soluzione 9.6.1.1: L'automa a pila deve iniziare a caricare la pila con alcuni caratteri, poi non deterministicamente deve spostarsi nello stato di check della stringa e vedere se ha scommesso bene. Inoltre, non deterministicamente si sposta nello stato di check rimuovendo un elemento dalla pila per indicare che l'elemento tolto è quello centrale di una stringa lunga dispari.



Richiesta 9.6.1.2: Come si possono modificare gli automi a pila per i linguaggi $PAL_{\#}$, PAL_{pari} e PAL se $\Sigma = \{a, b, c\}$? In quali casi si riescono ad ottenere dispositivi deterministici e in quali no?

Soluzione 9.6.1.2: Basta aggiungere agli automi le stesse regole che già abbiamo per le a e le b ma usando i caratteri c nell'alfabeto di input e C nell'alfabeto della pila.

Come prima, $PAL_{\#}$ è l'unico automa che è deterministico, mentre gli altri due non lo sono perché dobbiamo scommettere di essere arrivati a metà stringa (*entrambi*) o di essere arrivato nel carattere centrale della stringa (*secondo*).

Richiesta 9.6.1.3: Come si possono modificare gli automi a pila per i linguaggi $PAL_{\#}$, PAL_{pari} e PAL se $\Sigma = \{a, b, \#\}$? In quali casi si riescono ad ottenere dispositivi deterministici e in quali no?

Soluzione 9.6.1.3:

Richiesta 9.6.1.4: Considerate ora i linguaggi $PAL_{\#}$, PAL_{pari} e PAL nel caso di alfabeto $\Sigma = \{a\}$. Per ognuno di essi cercate di ottenere un dispositivo riconoscitore più semplice possibile e discutete se sia necessario l'uso del non determinismo.

Soluzione 9.6.1.4: Il secondo e il terzo linguaggio mantengono i loro automi: abbiamo cambiato il carattere c con il carattere $\#$, quindi rimaniamo non deterministici con il nostro bellissimo automa a pila.

Nel primo caso dobbiamo aggiungere del non determinismo che indovina di essere arrivato nel carattere $\#$ che divide la stringa nelle due stringhe una il rovescio dell'altra.

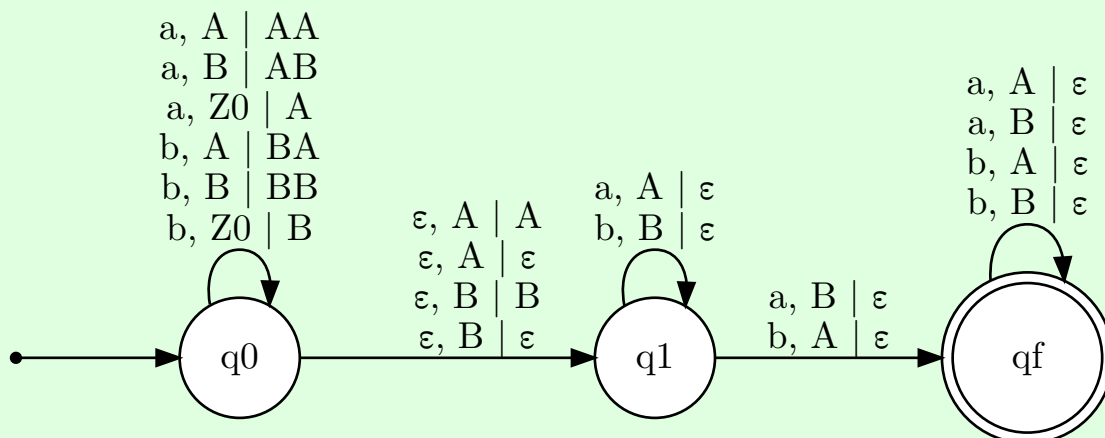
9.7. Esercizio 07

Esercizio 9.7.1:

Richiesta 9.7.1.1: Definite un automa a pila che riconosca tutte le stringhe sull'alfabeto $\{a, b\}$ che *non sono* palindromo.

Soluzione 9.7.1.1: L'automa a pila inizia a caricare la pila con A e B e poi deve scommettere di essere arrivato a metà, spostandosi nello stato di check, cancellando eventualmente un carattere perché potremmo avere stringhe di lunghezza dispari.

Nello stato di check, se troviamo una corrispondenza di caratteri diversi andiamo in uno stato finale e svuotiamo la pila. In questo caso accettiamo per stati finali.



10. Esercizi lezione 15 [23/04]

10.1. Esercizio 01

Esercizio 10.1.1: Sia $\Sigma = \{a, b\}$ e $L = \{w \in \Sigma^+ \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$, dove $\#_\sigma(w)$ indica il numero di occorrenze del simbolo σ nella stringa w , con $\sigma \in \Sigma$. Siano inoltre $L_a = \{w \in \Sigma^+ \mid \#_a(w) = \#_b(w) + 1\}$ e $L_b = \{w \in \Sigma^+ \mid \#_b(w) = \#_a(w) + 1\}$.

Richiesta 10.1.1.1: Si fornisca una definizione induttiva per le stringhe nei linguaggi L , L_a , L_b .

Suggerimento. Ispiratevi all'esempio presentato a lezione per il linguaggio delle parentesi bilanciate, utilizzando affermazioni come «Una stringa di L inizia con una b seguita da una stringa di L_a , oppure inizia con ...».

Soluzione 10.1.1.1: Vediamo le definizioni induttive dei tre linguaggi.

Per L_a possiamo dire che:

- a è stringa di L_a ;
- se X è una stringa di L_a , allora anche aXb e bXa e baX e abX e Xab e Xba lo sono.

Per L_b possiamo dire che:

- b è stringa di L_b ;
- se X è una stringa di L_b , allora anche aXb e bXa e baX e abX e Xab e Xba lo sono.

Per L possiamo dire che:

- ab e ba sono stringhe di L ;
- se X è una stringa di L , allora anche aXb e bXa e baX e abX e Xab e Xba lo sono;
- se X è una stringa di L_a , allora bX e Xb sono in L ;
- se X è una stringa di L_b , allora aX e Xa sono in L ;
- se X è una stringa di L_a e Y è una stringa di L_b allora XY e YX sono in L .

In realtà questa ultima mi sa che si può evitare, o si può evitare la prima.

Richiesta 10.1.1.2: Dalla definizione ricavate una grammatica per il linguaggio L .

Suggerimento. Per ricavare la grammatica potete considerare una variabile per ognuno dei tre linguaggi. Una delle possibili soluzioni vi permetterà di ottenere la grammatica per L presentata a lezione.

Soluzione 10.1.1.2: Definiamo la grammatica $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ con regole di produzione nella forma

$$\begin{aligned}
S &\longrightarrow aB \mid bA \mid abS \mid baS \mid Sab \mid Sba \mid aSb \mid bSa \\
A &\longrightarrow a \mid aAb \mid bAa \mid abA \mid baA \mid Aab \mid Aba \\
B &\longrightarrow b \mid aBb \mid bBa \mid abB \mid baB \mid Bab \mid Bba.
\end{aligned}$$

10.2. Esercizio 02

Esercizio 10.2.1:

Richiesta 10.2.1.1: Ripetete l'esercizio precedente, sostituendo $w \in \Sigma^*$ a $w \in \Sigma^+$ nella definizione dei linguaggi. Osservate che è sufficiente un unico caso base in tutta la definizione ricorsiva.

Soluzione 10.2.1.1: Aggiungiamo che in L abbiamo anche ε e come regola aggiuntiva mettiamo $S \longrightarrow \varepsilon$, molto molto semplice (troppo semplice per essere giusto).

11. Esercizi lezione 16 [30/04]

So fare solo l'esercizio 01, ma solo perché l'ha fatto a lezione. Gli altri non so nemmeno da che parte sono girato, quindi per ora non li vado a postare.

12. Esercizi lezione 17 [07/05]

12.1. Esercizio 01

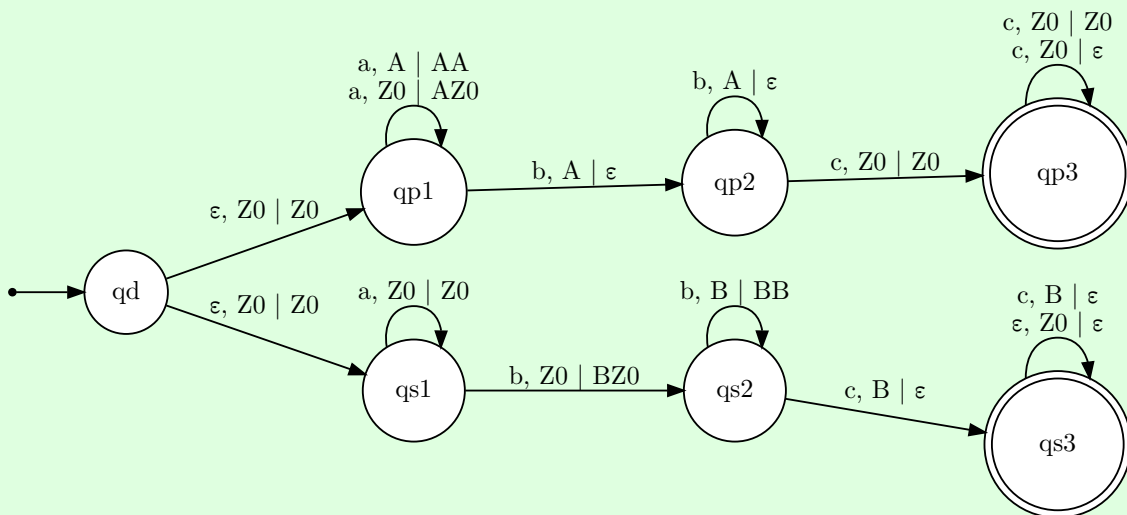
Esercizio 12.1.1: Per ognuno dei seguenti linguaggi stabilite se sia context-free (fornendo una grammatica che lo generi o un automa a pila che lo riconosca) oppure no (applicando opportunamente il pumping lemma).

Richiesta 12.1.1.1: $L = \{a^h b^j a^k \mid j = \max(h, k)\}$.

Soluzione 12.1.1.1: Questo linguaggio non è CFL. Dimostrazione fatta a lezione.

Richiesta 12.1.1.2: $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$.

Soluzione 12.1.1.2: Questo linguaggio è CF. Mostriamo un PDA che accetta per pila vuota.



Richiesta 12.1.1.3: $L = \{a^n b^k c^k d^n \mid n, k \geq 0\}$.

Soluzione 12.1.1.3: Questo linguaggio è CF. Un automa a pila non deterministico per questo linguaggio deve:

- considerare la stringa vuota, quindi mettiamo una scommessa nello stato iniziale;
- considerare stringhe nella forma $a^n d^n$, ma questo si può fare caricando le a sulla pila per poi scaricarle quando leggiamo le d ;
- considerare stringhe nella forma $b^k c^k$, ma questo si può fare caricando le b sulla pila per poi scaricarle quando leggiamo le c ;
- considerare stringhe nella forma completa, ma questo si può fare caricando le a e le b sulla pila per poi scaricarle quando leggiamo le c e le d .

Potremmo accettare per pila vuota, togliendo Z_0 in maniera non deterministica subito nello stato iniziale, oppure quando siamo nello stato di scaricamento delle c o nello stato di scaricamento delle d .

Richiesta 12.1.1.4: $L = \{a^n b^k c^n d^k \mid n, k \geq 0\}$.

Soluzione 12.1.1.4: Questo linguaggio non è CF: è molto simile al linguaggio

$$L = \{\alpha\alpha \mid \alpha \in \Sigma^*\}$$

ma la dimostrazione è diversa. Non è CF perché posso caricare n caratteri A e k caratteri B sulla pila, ma poi per controllare le c devo cancellare l'informazione sul numero k .

Per assurdo sia L un CF e sia N la costante del pumping lemma. Definiamo la stringa

$$z = a^N b^N c^N d^N \mid |z| \geq N.$$

Allora decomponiamo la stringa z come $z = uvwxy$ e, sapendo che $|vwx| \leq N$, possiamo dire che questo fattore ha poche forme possibili:

$$a^+ \mid a^+ b^+ \mid b^+ \mid b^+ c^+ \mid c^+ \mid c^+ d^+ \mid d^+.$$

Nei quattro casi in cui vwx sono formati da una sola lettera, possiamo ripetere un numero di volte $i \geq 2$ per rendere quella lettera in numero maggiore della sua lettera associata, quindi questo genera un assurdo.

Nei tre casi in cui vwx sono formati da due lettere, dobbiamo vedere in che fattore avviene il cambio di lettera. Facciamo la dimostrazione con $a^+ b^+$:

- se $v = a^+ b^+$ basta usare $i \geq 2$ per avere più a delle c e per perdere la struttura;
- se $x = a^+ b^+$ stessa cosa;
- se $w = a^+ b^+$ allora vuol dire che $v = a^l$ e $x = b^r$. Con una i generica noi possiamo generare la stringa

$$a^{N+(i-1)l} b^{N+(i-1)r} c^N d^N$$

quindi basta scegliere $i = 0$ per rendere le a e le b diverse dalle c e le d .

Ma questo è assurdo, quindi L non è CFL.

Richiesta 12.1.1.5: $L = \{a^n b^n c^k d^k \mid n, k \geq 0\}$.

Soluzione 12.1.1.5: Questo linguaggio è CFL. Un automa a pila per L deve:

- vedere se le a e le b sono uguali, ma questo è molto facile;
- vedere se le a e le b sono uguali, ma anche questo è molto facile.

Deve inoltre controllare la parola vuota, quindi otteniamo un automa non deterministico.

Richiesta 12.1.1.6: $L = \{a^n b^m c^i d^k \mid n, k, i, j \geq 0 \mid (n = m \wedge i = k) \vee (n = k \wedge m = i)\}$.

Soluzione 12.1.1.6: Questo linguaggio è CFL. Un automa a pila per L si comporta come quello della Richiesta 12.1.1.5 per la prima condizione, mentre si comporta come quello della Richiesta 12.1.1.3 per quanto riguarda la seconda condizione.

Richiesta 12.1.1.7: PAL^C , dove PAL è l'insieme delle stringhe palindrome sull'alfabeto $\{a, b\}$.

Soluzione 12.1.1.7: Questo linguaggio è CFL. Una grammatica per questo linguaggio l'abbiamo vista nei primissimi esercizi, ma la devo sistemare perché è sbagliata.

Richiesta 12.1.1.8: $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}^C$.

Soluzione 12.1.1.8: Non so come farlo.

Richiesta 12.1.1.9: $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$.

Soluzione 12.1.1.9: Questo linguaggio non è CFL.

Per assurdo sia L un CFL e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = a^{2^N} \mid |z| \geq N.$$

Decomponiamo la stringa z come $z = uvwxy$. Sappiamo che possiamo ripetere arbitrariamente i fattori v e x , ovvero che

$$\forall i \geq 0 \quad uv^iwx^iy \in L.$$

Visto che z è formata da sole a , allora anche v e x sono formate da sole a , e sia $k > 0$ il numero di a di questi due fattori. Allora possiamo dire che

$$uv^iwx^iy = a^{2^N + (i-1)k}.$$

Andiamo a scegliere $i = 2$ e otteniamo $a^{2^N + k}$. Visto che k è il numero di a del fattore vx , e sapendo che $|vx| \leq N$ possiamo dire che

$$2^N + k \leq 2^N + N < 2^{N+1}.$$

Ma questo è assurdo, quindi L non è CFL.

Richiesta 12.1.1.10: $L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$.

Soluzione 12.1.1.10: Questo linguaggio non è CFL.

Per assurdo sia L un CFL e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = a^{N^2} \mid |z| \geq N.$$

Decomponiamo la stringa z come $z = uvwxy$. Sappiamo che possiamo ripetere arbitrariamente i fattori v e x , ovvero che

$$\forall i \geq 0 \quad uv^iwx^iy \in L.$$

Visto che z è formata da sole a , allora anche v e x sono formate da sole a , e sia $k > 0$ il numero di a di questi due fattori. Allora possiamo dire che

$$uv^iwx^iy = a^{N^2 + (i-1)k}.$$

Andiamo a scegliere $i = 2$ e otteniamo $a^{N^2 + k}$. Visto che k è il numero di a del fattore vx , e sapendo che $|vx| \leq N$ possiamo dire che

$$N^2 + k \leq N^2 + N < N^2 + 2N < N^2 + 2N + 1 = (N + 1)^2.$$

Ma questo è assurdo, quindi L non è CFL.

Richiesta 12.1.1.11: $L = \{a^p \mid p \text{ primo}\}$.

Soluzione 12.1.1.11: Questo linguaggio non è CFL. La dimostrazione è stata fatta a lezione.

12.2. Esercizio 02

Esercizio 12.2.1: Dimostrate che i due linguaggi seguenti sono context-free, dove PAL indica l'insieme delle stringhe palindromo sull'alfabeto $\{a, b\}$.

Fornite le grammatiche per i due linguaggi e descrivete un automa a pila per QuasiPALSTAR.

Richiesta 12.2.1.1: $\text{PALSTAR} = \{w_1\#w_2\#\dots\#w_k \mid k \geq 0 \wedge w_i \in \text{PAL}\}$.

Soluzione 12.2.1.1: Diamo una grammatica $G = (V, \Sigma, P, S')$ definita dalle variabili $\{S, S', P\}$ e regole di produzione

$$\begin{aligned} S' &\longrightarrow S \mid \varepsilon \\ S &\longrightarrow P\#S \mid P \\ P &\longrightarrow a \mid b \mid aa \mid bb \mid aPa \mid bPb. \end{aligned}$$

Richiesta 12.2.1.2:

$$\text{QuasiPALSTAR} = \{w_1\#w_2\#\dots\#w_k \mid k \geq 0 \wedge \exists! i \in \{1, \dots, k\} \mid w_i \notin \text{PAL}\}.$$

Soluzione 12.2.1.2: Diamo una grammatica $G = (V, \Sigma, P, S')$ definita dalle variabili $\{S, S', A, P, N\}$ e regole di produzione

$$\begin{aligned} S' &\longrightarrow S \mid \varepsilon \\ S &\longrightarrow P\#S \mid N \mid N\#A \\ A &\longrightarrow P \mid P\#A \\ P &\longrightarrow a \mid b \mid aa \mid bb \mid aPa \mid bPb \\ N &\longrightarrow \text{non palindromo di prima, che va ancora sistemato.} \end{aligned}$$

Un automa a pila deve prima di tutto considerare la parola vuota, quindi in maniera non deterministica va subito a svuotare la pila per verificare la vuotezza del nastro.

Sempre all'inizio, ma anche dopo la lettura di un cancelletto, deve scommettere di essere nell'unica stringa non palindroma, andando a controllare questo e, se è vero, l'automa va in uno stato speciale che controlla solo le palindrome. Se è falso invece non succede niente perché in un'altra computazione stiamo già controllando la palindromicità di quella stringa.

12.3. Esercizio 03

Esercizio 12.3.1: Non lo so fare.

Richiesta 12.3.1.1:

Soluzione 12.3.1.1:

12.4. Esercizio 04

Esercizio 12.4.1: Individuate, tra i seguenti linguaggi, quelli che non sono context-free. Per gli altri, facendo riferimento all'esercizio precedente, stabilite se sono lineari.

Richiesta 12.4.1.1: $L = \{a^n b^m a^m b^n \mid n, m \geq 0\}$.

Soluzione 12.4.1.1: Questo linguaggio è CFL ed è anche lineare.

Richiesta 12.4.1.2: $L = \{a^n b^n a^m b^m \mid n, m \geq 0\}$.

Soluzione 12.4.1.2: Questo linguaggio è CFL ma non è lineare.

Richiesta 12.4.1.3: $L = \{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$.

Soluzione 12.4.1.3: Questo linguaggio non è CFL.

Richiesta 12.4.1.4: $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Soluzione 12.4.1.4: Questo linguaggio è CFL ed è anche lineare.

Richiesta 12.4.1.5: $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$.

Soluzione 12.4.1.5: Questo linguaggio è CFL ma non è lineare.

Richiesta 12.4.1.6: L'insieme delle parentesi bilanciate correttamente.

Soluzione 12.4.1.6: Questo linguaggio è CFL ma non è lineare.

Richiesta 12.4.1.7: L'insieme delle stringhe non palindrome su un alfabeto di almeno due lettere.

Soluzione 12.4.1.7: Questo linguaggio è CFL, non so se è lineare.

12.5. Esercizio 05

Esercizio 12.5.1: Per ognuno dei seguenti linguaggi stabilite se sia context-free (fornendo una grammatica che lo generi o un automa a pila che lo riconosca) oppure no (applicando opportunamente il pumping lemma).

Richiesta 12.5.1.1: $L = \{a^n b^n c^k \mid k < n\}$.

Soluzione 12.5.1.1: Questo linguaggio non è CFL.

Per assurdo sia L un CFL e sia N la costante del pumping lemma. Prendiamo la stringa

$$z = a^N b^N c^{N-1} \mid |z| \geq N.$$

Andiamo a scomporre la stringa z come $z = uvwxy$ e, sapendo che $|vwx| \leq N$ possiamo dire che questo blocco possa essere presente nelle forme

$$a^+ \mid a^+ b^+ \mid b^+ \mid b^+ c^+ \mid c^+.$$

Se abbiamo a^+ e b^+ andiamo a scegliere $i = 0$ per rendere falsa la condizione $k < n$.

Se abbiamo c^+ invece andiamo a scegliere $i \geq 2$ per rendere falsa ancora $k < n$.

Se siamo nelle due configurazioni miste allora dobbiamo capire dove è la divisione delle lettere. Supponiamo di essere in $a^+ b^+$, allora:

- se $v = a^+ b^+$ basta scegliere $i = 2$ per rompere la struttura;
- se $x = a^+ b^+$ stessa cosa;
- se $v = a^l \wedge x = b^r$ allora:
 - se $l \neq r$ basta scegliere $i \neq 1$ per avere $\#_a \neq \#_b$;
 - se $l = r$ basta scegliere $i = 0$ per avere meno a o meno b delle c (o al massimo uguali).

Se prendiamo invece $b^+ c^+$ i ragionamenti sono molto simili.

Ma questo è assurdo, quindi L non è CFL.

Richiesta 12.5.1.2: $L = \{a^n b^n c^k \mid k > n\}$.

Soluzione 12.5.1.2: Questo linguaggio non è CFL. La dimostrazione è molto simile a quella della richiesta precedente.

Richiesta 12.5.1.3: $L = \{ww^R w \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Soluzione 12.5.1.3: Questo linguaggio non è CFL.

Per assurdo sia L un CFL e sia N la costante del pumping lemma. Definiamo la stringa

$$a^N b^N b^N a^N a^N b^N$$

che possiamo decomporre come $z = uvwxy$.

Sapendo che $|vwx| \leq N$ allora abbiamo alcune forme possibili per questo fattore:

$$a^+ \mid b^+ \mid a^+ b^+ \mid b^+ a^+.$$

Se siamo nel caso di una sola lettera, ovunque sia questo fattore, se andiamo a rimuovere quelle lettere scegliendo $i = 0$ andiamo a rompere la palindromicità nel primo pezzo e la stessa stringa nel secondo pezzo.

Se siamo invece nel caso di due lettere dobbiamo capire dove è il limite. Facciamo la dimostrazione con il fattore $a^+ b^+$:

- se $v = a^+ b^+$ allora con $i = 2$ rompiamo la struttura e l'uguaglianza finale;
- se $x = a^+ b^+$ stessa cosa;
- se $v = a^l \wedge x = b^r$ allora con $i = 2$ rompiamo in un caso la palindromicità, in un caso l'uguaglianza finale.

Con il fattore $b^+ c^+$ la dimostrazione è molto simile.

Ma questo è assurdo, quindi L non è CFL.

Richiesta 12.5.1.4: $L = \{ww^R w \mid w \in \{a\}^*\}$.

Soluzione 12.5.1.4: Questo linguaggio è CFL e addirittura regolare, perché è il linguaggio

$$L = \{a^{3k} \mid k \geq 0\}.$$

Richiesta 12.5.1.5: $L = \{a^n b^m a^k b^h a^n b^h \mid n, m, h, k \geq 1\}$.

Soluzione 12.5.1.5: Questo linguaggio è CFL.

Un automa a pila per questo linguaggio carica le a e le b sulla pila, poi scorre le a intermedie, poi controlla le b e le a con quelle sulla pila, e infine scorre le b finali.

Richiesta 12.5.1.6: $L = \{a^n b^m a^k b^h a^k b^m \mid n, m, h, k \geq 1\}$.

Soluzione 12.5.1.6: Questo linguaggio è CFL.

Un automa a pila per questo linguaggio scorre le a iniziali, poi carica le b e le a sulla pila, poi scorre le b intermedie, e infine controlla le a e le b con quelle sulla pila.

Richiesta 12.5.1.7:

$$L = \{a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2}\dots a^{n_k}b^{m_k} \mid n_i, m_i \geq 1 \\ n_i = n_{k-i+1} \mid i \in \{1, \dots, k\} \\ m_i = m_{k-i} \mid i \in \{1, \dots, k-1\}\}.$$

Soluzione 12.5.1.7: Questo linguaggio è CFL. È praticamente il linguaggio delle stringhe palindrome con una serie di b finali, quindi facilmente riconoscibile da un NPDA.

Le scommesse che facciamo sono per capire se siamo a metà del blocco di a o di b che definisce la metà della stringa palindroma. Quando poi arriviamo in Z_0 finendo di leggere delle a , andiamo a svuotare le ultime b della stringa.

Richiesta 12.5.1.8:

$$L = \{a^{n_1}b^{m_1}a^{n_2}b^{m_2}\dots a^{n_k}b^{m_k} \mid n_i, m_i \geq 1 \\ n_i = n_{k-i+2} \mid i \in \{2, \dots, k\} \\ m_i = m_{k-i+1} \mid i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Soluzione 12.5.1.8: Questo linguaggio è CFL ed è identico a quello precedente, solo che le stringhe hanno delle a iniziali e poi sono formate da blocchi di a e b palindrome.

12.6. Esercizio 06

Esercizio 12.6.1: Non lo so fare.

Richiesta 12.6.1.1:

Soluzione 12.6.1.1:

Richiesta 12.6.1.2:

Soluzione 12.6.1.2:

Richiesta 12.6.1.3:

Soluzione 12.6.1.3:

Richiesta 12.6.1.4:

Soluzione 12.6.1.4:

13. Esercizi lezione 18 [09/05]

13.1. Esercizio 01

Esercizio 13.1.1:

Richiesta 13.1.1.1: Dimostrate che il linguaggio $L = \{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k \text{ ma non } i = j = k\}$ non è context-free.

Suggerimento: procedete in modo analogo all'esempio $\{a^n b^n c^k \mid k \neq n\}$ presentato a lezione.

Soluzione 13.1.1.1: Per assurdo sia L un CFL e sia N la costante del Lemma di Ogden. Sia

$$z = a^N b^N c^{N+N!} \in L$$

e andiamo a marcare tutte le a di z .

Andiamo a decomporre z come $z = uvwxy$ e, visto che vx deve avere almeno una posizione marcata, possiamo concludere che vw può essere nelle seguenti configurazioni:

$$a^+$$

$$a^+ b^+$$

$$a^+ b^N c^+$$

Per il primo caso basta scegliere $i = 0$ per rompere l'uguaglianza con le b .

Per il secondo caso dobbiamo vedere dove cade la divisione delle lettere:

- se $v \in a^+ b^+ \vee x \in a^+ b^+$ andiamo a rompere la struttura della stringa;
- se $v \in a^l \wedge x \in b^r$ abbiamo altri due casi:
 - se $l \neq r$ basta scegliere $i = 0$ per rompere l'uguaglianza tra a e b ;
 - se $l = r$ allora dobbiamo scegliere un valore di i che ci renda le a e le b uguali al numero di c , quindi deve succedere che

$$uv^i wx^i y = a^{N+(i-1)l} b^{N+(i-1)l} c^{N+N!} \implies (i-1)l = N! \implies i = \frac{N!}{l} + 1.$$

Per il terzo caso:

- se v o x hanno almeno due tipi di lettere rompiamo la struttura della stringa;
- se v o x hanno una sola lettera, quindi hanno solo a , rompiamo l'uguaglianza.

Ma questo è assurdo, quindi L non è CFL.

13.2. Esercizio 02

Esercizio 13.2.1:

Richiesta 13.2.1.1: Utilizzate il lemma di Ogden per dimostrare che $L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \wedge j \neq k \wedge i \neq k\}$ non è context-free.

Suggerimento: per questa prima parte considerate $z = a^N b^{N+N!} c^{N+2N!}$ e marcate tutte le a .

Soluzione 13.2.1.1: Per assurdo sia L un CFL e sia N la costante del lemma di Ogden. Sia

$$z = a^N b^{N+N!} c^{N+2N!} \in L$$

in cui andiamo a marcare tutte le a .

Decomponiamo z come $z = uvwxy$ e, sapendo che vx deve avere una posizione marcata, le uniche configurazioni possibili per vw sono:

$$a^+$$

$$a^+ b^+$$

Per il primo caso andiamo a scegliere

$$i = \frac{N!}{l} + 1$$

dove l è il numero di a in vx per avere $\#_a = \#_b$.

Per il secondo caso dobbiamo vedere dove cade la divisione delle lettere:

- se $v = a^+ b^+ \vee x = a^+ b^+$ allora basta scegliere $i \geq 2$ per rompere la struttura della stringa;
- se $v = a^l \wedge x = b^r$ abbiamo altri due casi:
 - se $l = r$ allora come prima scegliamo un valore di i che renda uguali le a con le c o le b con le c , ovvero

$$\begin{aligned} uv^i wx^i y &= a^{N+(i-1)l} b^{N+N!+(i-1)l} c^{N+2N!} \implies (i-1)l = 2N! \implies i = \frac{2N!}{l} + 1 \\ &\implies N! + (i-1)l = 2N! \implies i = \frac{N!}{l} + 1. \end{aligned}$$

Ma questo è assurdo, quindi L non è CFL.

Richiesta 13.2.1.2: Riuscite a dimostrare lo stesso risultato utilizzando direttamente il pumping lemma?

Soluzione 13.2.1.2: Proviamo con il pumping lemma.

Per assurdo sia L un CFL e sia N la costante del pumping lemma. Sia

$$z = a^N b^{2N} c^{3N} \in L.$$

Decomponiamo z come $z = uvwxy$. Sapendo che $|vwx| \leq N$ allora abbiamo le seguenti configurazioni per questo fattore:

a^+

b^+

c^+

a^+b^+

b^+c^+

Secondo me non si riesce con il pumping lemma:

- i primi tre casi richiedono casi discordanti, perché come avevamo visto a lezione questi casi richiedono che la parte da pompare sia minore delle altre due, e in questo caso possiamo ma non con tutti;
- gli ultimi due casi invece riusciamo a rompere la struttura in alcuni divisioni, ma quando la divisione avviene in w allora sarebbe meglio avere la situazione opposta di quella precedente.

L'ho scritto malissimo, ma secondo me non si può fare.

13.3. Esercizio 03

Esercizio 13.3.1: Il linguaggio $L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \vee j = k = l\}$ non è context-free.

Richiesta 13.3.1.1: Provate a dimostrare questa affermazione utilizzando il pumping lemma: sia partendo da una stringa $z \in L$ non contenente il simbolo a , cioè nella forma $b^j c^k d^l$, sia partendo da una stringa contenente a , cioè della forma $a^i b^j c^j d^j$, con $i > 0$, non si riesce ad arrivare a una contraddizione per qualunque decomposizione di z in $uvwxy$.

Soluzione 13.3.1.1: Simile a quello di prima come ragionamenti, non ho voglia di scriverlo ora.

Richiesta 13.3.1.2: Provate a utilizzare il Lemma di Ogden. A questo scopo, scegliere opportunamente una stringa $z \in L$ da cui partire e le posizione da marcare in z .

Soluzione 13.3.1.2: Basta scegliere $z = a^N b^N c^N$ e marcare tutte le a .

14. Esercizi lezioni 19 e 20 [16/05]

14.1. Esercizio 01

Esercizio 14.1.1: Non ho voglia di farlo, troppo lungo anche da scrivere.

Richiesta 14.1.1.1:

Soluzione 14.1.1.1:

14.2. Esercizio 02

Esercizio 14.2.1: Serve l'esercizio 1, che peccato.

Richiesta 14.2.1.1:

Soluzione 14.2.1.1:

14.3. Esercizio 03

Esercizio 14.3.1: Tremendamente difficile anche questo.

Richiesta 14.3.1.1:

Soluzione 14.3.1.1:

14.4. Esercizio 04

Esercizio 14.4.1: Abbiamo visto che le classi dei linguaggi context-free e dei linguaggi context-free deterministici non sono chiuse rispetto all'intersezione.

Richiesta 14.4.1.1: Dimostrate che la classe dei linguaggi context-free è invece chiusa rispetto all'intersezione con linguaggi regolari, risolvendo questo esercizio.

Sia M un automa a pila che riconosce un linguaggio context-free L e A un automa a stati finiti che riconosce un linguaggio regolare R . Fornite la costruzione di un automa a pila M' che riconosca $L \cap R$.

Suggerimento: M' può simulare in parallelo M e A incorporando nel proprio controllo finito quelli di M e di A . Prestate attenzione al fatto che M potrebbe utilizzare ε -mosse.

Soluzione 14.4.1.1: Automa prodotto, che non ho voglia di formalizzare.

Richiesta 14.4.1.2: Se M è deterministico, come si può ottenere M' deterministico?

Soluzione 14.4.1.2: Ancora automa prodotto, ma si obbliga A ad essere deterministico.

14.5. Esercizio 05

Esercizio 14.5.1:

Richiesta 14.5.1.1: Dato un linguaggio context-free L e un intero k dimostrate che l'insieme formato da tutte le stringhe di L di lunghezza maggiore di k è context-free.

Suggerimento: potete servirvi della proprietà di chiusura presentata nell'esercizio 4.

Soluzione 14.5.1.1: Prendiamo il linguaggio regolare

$$R = \{w \in \Sigma^* \mid |w| > k\}$$

che possiamo riconoscere con un automa a stati finiti che legge k simboli con $k + 1$ stati, legge il $(k + 1)$ -esimo stato e finisce in uno stato che accetta tutto quello che legge da quel momento in poi.

Le stringhe in R sono tutte le possibili combinazioni di caratteri w di lunghezza superiore a k , quindi calcolando l'intersezione con L filtriamo da L tutti quelli che hanno almeno quella lunghezza. Abbiamo visto che l'intersezione tra un CFL e un regolare è ancora CFL, quindi

$$L \cap R \in \text{CFL} .$$

Richiesta 14.5.1.2: Di che tipo è il linguaggio formato da tutte le stringhe di L di lunghezza al più k ?

Soluzione 14.5.1.2: Ancora CFL, possiamo usare lo stesso automa di prima, solo che usa $k + 2$ stati, divisi in $k + 1$ per leggere k caratteri e 1 trappola nel quale finiamo se leggiamo almeno $k + 1$ caratteri.

Come prima,

$$L \cap R \in \text{CFL} .$$

14.6. Esercizio 06

Esercizio 14.6.1: Non lo so.

Richiesta 14.6.1.1:

Soluzione 14.6.1.1:

14.7. Esercizio 07

Esercizio 14.7.1: Non lo so.

Richiesta 14.7.1.1:

Soluzione 14.7.1.1:

14.8. Esercizio 08

Esercizio 14.8.1: Fatto a lezione, non l'automa.

Richiesta 14.8.1.1:

Soluzione 14.8.1.1:

14.9. Esercizio 09

Esercizio 14.9.1: Non ho voglia.

Richiesta 14.9.1.1:

Soluzione 14.9.1.1:

14.10. Esercizio 10

Esercizio 14.10.1: Non lo so fare.

Richiesta 14.10.1.1:

Soluzione 14.10.1.1:

14.11. Esercizio 11

Esercizio 14.11.1: Serve l'esercizio 10.

Richiesta 14.11.1.1:

Soluzione 14.11.1.1:

14.12. Esercizio 12

Esercizio 14.12.1: Fatto a lezione.

Richiesta 14.12.1.1:

Soluzione 14.12.1.1:

14.13. Esercizio 13

Esercizio 14.13.1: Non userò quel teorema, mi dispiace.

Richiesta 14.13.1.1:

Soluzione 14.13.1.1:

14.14. Esercizio 14

Esercizio 14.14.1: Mmmmmh.

Richiesta 14.14.1.1:

Soluzione 14.14.1.1:

14.15. Esercizio 15

Esercizio 14.15.1: Fatto a lezione.

Richiesta 14.15.1.1:

Soluzione 14.15.1.1:

14.16. Esercizio 16

Esercizio 14.16.1: L'ha fatto a lezione ma estremamente di fretta.

Richiesta 14.16.1.1:

Soluzione 14.16.1.1:

14.17. Esercizio 17

Esercizio 14.17.1: Troppi calcoli, non ho voglia.

Richiesta 14.17.1.1:

Soluzione 14.17.1.1:

15. Esercizi lezione 21 e 22 [23/05]

15.1. Esercizio 01

Esercizio 15.1.1: Considerate il seguente linguaggio:

$$L = \{a^i b^j a^k b^h \mid (i = j \wedge k = h) \vee (i = h \wedge j = k) \wedge i, j, k, h \geq 0\}.$$

Richiesta 15.1.1.1: Il linguaggio L è context-free? Fornite una dimostrazione della risposta.

Soluzione 15.1.1.1: Un automa a pila per questo linguaggio esegue una scommessa dopo aver caricato tutte le prime a sulla pila:

- se vale la prima condizione allora deve controllare le seguenti b con le a sulla pila e poi fare lo stesso con gli ultimi due blocchi;
- se vale la seconda condizione allora carica anche le b sulla pila e poi controlla le seconda a con le b sulla pila e le ultime b con le a sulla pila.

Richiesta 15.1.1.2: Il linguaggio L è context-free deterministico? In questo caso non è richiesta una dimostrazione dettagliata, ma indicate ad alto livello quali argomenti si possono utilizzare per rispondere.

Soluzione 15.1.1.2: Abbiamo a disposizione quattro criteri:

- pumping lemma, ma non l'abbiamo visto;
- dimostrare che L è inerentemente ambiguo, e questo secondo me è vero perché se $i = j = k = h$ abbiamo due modi per riconoscere una stringa;
- proprietà di chiusura, che però ora non mi viene in mente come fare;
- usare la relazione R , ma anche qua non saprei come usarla.

Quindi no, L non è deterministico.

15.2. Esercizio 02

Esercizio 15.2.1:

Richiesta 15.2.1.1: Descrivete un automa a pila two-way che riconosca il linguaggio $\{a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$.

Soluzione 15.2.1.1: Andiamo per casi in base ai valori di n e m .

$[n, m > 0]$

Facciamo una prima passata che controlla di avere blocco di a , blocco di b , blocco di a e infine blocco di b . Dopo questo torniamo all'inizio del nastro.

Carichiamo le a e le b sulla pila, che conterrà quindi tutte le a sotto e tutte le b sopra. Appena leggiamo una a del secondo blocco andiamo in fondo, torniamo indietro controllando le b con le b nella pila e le a con le a nella pila.

$[n = 0 \wedge m > 0]$

Se leggo subito una b vuol dire che la stringa è nella forma

$$z = b^{2m}.$$

In questo caso dobbiamo solo vedere di avere un numero pari di b , che si fa facilmente.

$[n > 0 \wedge m = 0]$

Uguale al caso precedente.

$[n = 0 \wedge m = 0]$

Devo riconoscere ε , quindi vuol dire che all'inizio della computazione trovo ◀ sulla testina.

[Automa completo]

Con gli stati possiamo codificare questo comportamento, quindi:

- se leggiamo ◀ accettiamo;
- se leggiamo una a andiamo a fare la passata per il primo caso e per il terzo caso;
- se leggiamo una b andiamo a fare la passata per il secondo caso.

Richiesta 15.2.1.2: L'automa ottenuto è deterministico?

Soluzione 15.2.1.2: L'automa ottenuto è deterministico, visto non scommettiamo ma gestiamo tutto con gli stati.

15.3. Esercizio 03

Esercizio 15.3.1:

Richiesta 15.3.1.1: Descrivete un automa a pila two-way che riconosca il seguente linguaggio:

$$L = \{a^i b^j a^k b^h \mid i, j, k, h \geq 0 \wedge (i \leq j \leq k \leq h \vee i \geq j \geq k \geq h)\}.$$

Soluzione 15.3.1.1: Andiamo anche qui per casi. Analizzeremo solo la prima condizione perché la seconda si ottiene nello stesso modo ma ribaltando i controlli.

$[i, j, k, h > 0]$

Facciamo una prima passata vedendo che abbiamo la struttura a blocchi e torniamo all'inizio.

Ora carichiamo le a sulla pila e iniziamo a leggere le b : prima di leggere una nuova a devo aver raggiunto il simbolo iniziale della pila. Torniamo poi all'inizio delle b e ripetiamo lo stesso procedimento fatto poco fa.

$[i = 0 \wedge j, k, h > 0]$

Qua troviamo subito una b , quindi la passata di controllo parte da quel blocco. Il resto poi rimane uguale, visto che abbiamo solo perso una parte iniziale.

$[i = j = 0 \wedge k, h > 0]$

Qua troviamo una a come nel primo caso, ma dopo il primo blocco di b troviamo ◀. Il resto rimane uguale, abbiamo solo perso un blocco da controllare.

$[i = j = k = 0 \wedge h > 0]$

Idem di due punti fa, ma troviamo ◀ dopo le b , e direi che possiamo accettare subito.

$[i = j = k = h = 0]$

Sotto la testina abbiamo subito ◀ quindi ci fermiamo e accettiamo.

[Automa completo]

Come prima, con gli stati possiamo codificare il comportamento in base ai caratteri che leggiamo all'inizio della computazione. Per la seconda condizione facciamo lo stesso ma dal fondo.

Richiesta 15.3.1.2: L'automa che avete ottenuto è deterministico? Se non è deterministico, riuscite anche ad ottenere un automa a pila two-way deterministico?

Soluzione 15.3.1.2: L'automa non è deterministico perché all'inizio deve scommettere se stiamo verificando la prima o la seconda condizione. Inoltre, non possiamo trovare un automa deterministico perché L è inerentemente ambiguo (credo).

Richiesta 15.3.1.3: Dimostrate che L non può essere accettato da un automa a pila one-way.

Soluzione 15.3.1.3: Supponiamo di essere nella prima condizione verificata.

Se carichiamo le prime a sulla pila poi possiamo verificare che non siano di più delle prime b controllando di arrivare al simbolo iniziale della pila prima di leggere le altre a . Facendo questo controllo perdiamo però l'informazione sul numero di b .

Stesso discorso per la seconda condizione da verificare.

Richiesta 15.3.1.4: Descrivete una macchina di Turing per L . La macchina ottenuta è un automa limitato linearmente?

Soluzione 15.3.1.4: Una macchina di Turing per L fa esattamente quello che fa l'automa a pila precedente. Analizziamo solo la prima condizione, la seconda è totalmente analoga.

$[i, j, k, h > 0]$

Facciamo una prima passata vedendo che abbiamo la struttura a blocchi e torniamo all'inizio.

Ora marchiamo una a , cerchiamo una b , la marchiamo, cerchiamo una a , la marchiamo, cerchiamo una b e la marchiamo. Poi ricominciamo. Quando finiamo le lettere di un blocco dobbiamo partire dal successivo. Potrebbe essere utile sapere dove finiscono i vari blocchi di lettere, magari inserendo un carattere extra.

$[i = 0 \wedge j, k, h > 0]$

Qua troviamo subito una b , quindi la passata di controllo parte da quel blocco. Il resto poi rimane uguale, visto che abbiamo solo perso una parte iniziale.

$[i = j = 0 \wedge k, h > 0]$

Qua troviamo una a come nel primo caso, ma dopo il primo blocco di b troviamo ◀. Il resto rimane uguale, abbiamo solo perso un blocco da controllare.

$[i = j = k = 0 \wedge h > 0]$

Idem di due punti fa, ma troviamo ◀ dopo le b , e direi che possiamo accettare subito.

$[i = j = k = h = 0]$

Sotto la testina abbiamo subito ◀ quindi ci fermiamo e accettiamo.

[Automa completo]

Come prima, con gli stati possiamo codificare il comportamento in base ai caratteri che leggiamo all'inizio della computazione. Per la seconda condizione facciamo lo stesso ma dal fondo.

Se intendiamo **automa limitato linearmente** come automa nel quale possiamo scrivere solo sul nastro dove abbiamo l'input, allora si può fare ma è molto complicato. Se invece intendiamo un automa che ha un nastro esterno che è proporzionale alla lunghezza dell'input allora possiamo inserire i marker per dividere i blocchi e farlo come è stato descritto.

15.4. Esercizio 04

Esercizio 15.4.1:

Richiesta 15.4.1.1: Descrivete un automa a pila two-way deterministico e automa linear bounded in grado di riconoscere il linguaggio $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Soluzione 15.4.1.1: Visto a lezione.

15.5. Esercizio 05

Esercizio 15.5.1:

Richiesta 15.5.1.1: Descrivete un automa a pila two-way deterministico e un automa linear bounded in grado di riconoscere il linguaggio $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

Soluzione 15.5.1.1: Un automa a pila two-way deve:

- spostarsi a metà stringa con la tecnica vista a lezione;
- caricare w^R sulla pila, che quindi diventa w ;
- spostarsi all'inizio del nastro;
- controllare la parte iniziale con la pila.

Un automa linear bounded deve:

- marcare la prima cella con una X e controllare l'ultima cella, marcandola con una X se i caratteri letti sono uguali;

- marcare la penultima cella con una X e controllare la seconda cella, marcandola con una X se i caratteri letti sono uguali;
- ripartire dal punto iniziale ma dalla terza cella.

15.6. Esercizio 06

Esercizio 15.6.1:

Richiesta 15.6.1.1: Descrivete un automa linear bounded in grado di riconoscere il linguaggio $\{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$.

Suggerimento. Si può sfruttare l'uguaglianza $n^2 = \sum_{i=1}^n (2i + 1)$, per $n \geq 1$.

Soluzione 15.6.1.1: Non lo so.

16. Esercizi lezione 23 e 24 [30/05]

Non ho tempo per fare gli esercizi ora, quindi li farò quando avrò voglia.