Teoria dei linguaggi

Indice

1. Introduzione

1.1. Storia

Un **linguaggio** è *uno strumento di comunicazione usato da membri di una stessa comunità*, ed è composto da due elementi:
- **sintassi**: insieme di simboli (o *parole*) che devono essere combinati con una serie di regole;
- **semantica**: associazione frase-significato.

Per i linguaggi naturali è difficile dare delle regole sintattiche: vista questa difficoltà, nel 1956 **Noam Chomsky** introduce il concetto di **grammatiche formali**, che si servono di regole matematiche per la definizione della sintassi di un linguaggio.

Il primo utilizzo dei linguaggi risale agli stessi anni con il **compilatore Fortran**, ovvero un traduttore da un linguaggio di alto livello ad uno di basso livello, ovvero il *linguaggio macchina*.

1.2. Ripasso

Un **alfabeto** è un insieme *non vuoto* e *finito* di simboli, di solito indicato con Σ o Γ.

Una **stringa** (o **parola**) è una sequenza *finita* di simboli appartenenti a Σ.

Data una parola w, possiamo definire:
- $|w|$ *numero di caratteri* di w;
- $|w|_a$ *numero di occorrenze* della lettera $a \in \Sigma$ in w.

Una parola molto importante è la **parola vuota** ε, che, come dice il nome, ha simboli, ovvero $|\varepsilon| = 0$.

L'insieme di tutte le possibili parole su Σ è detto Σ^*.

Un'importante operazione sulle parole è la **concatenazione** (o *prodotto*), ovvero se $x, y \in \Sigma^*$ allora la concatenazione w è la parola $w = xy$.

Questo operatore di concatenazione:
- *non è commutativo*, infatti $w_1 = xy \neq yz = w_2$ in generale;
- *è associativo*, infatti $(xy)z = x(yz)$.

La struttura $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ è un **monoide** libero generato da Σ.

Vediamo ora alcune proprietà delle parole:
- **prefisso**: x si dice *prefisso* di w se esiste $y \in \Sigma^*$ tale che $xy = w$;
  - **prefisso proprio** se $y \neq \varepsilon$;
  - **prefisso non banale** se $x \neq \varepsilon$;
  - il numero di prefissi è uguale a $|w| + 1$.
- **suffisso**: y si dice *suffisso* di w se esiste $x \in \Sigma^*$ tale che $xy = w$;
  - **suffisso proprio** se $x \neq \varepsilon$;
  - **suffisso non banale** se $y \neq \varepsilon$;
  - il numero di suffissi è uguale a $|w| + 1$.
- **fattore**: y si dice *fattore* di w se esistono $x, z \in \Sigma^*$ tali che $xyz = w$;
  - il numero di fattori è al massimo $\frac{|w| \cdot |w+1|}{2} + 1$.
- **sottosequenza**: x si dice *sottosequenza* di w se x è ottenuta eliminando 0 o più caratteri da w;
  - un *fattore* è una sottosequenza ordinata.

Un **linguaggio** L definito su un alfabeto Σ è un qualunque sottoinsieme di Σ^*.

2. Gerarchia di Chomsky

2.1. Rappresentazione

Vogliamo rappresentare in maniera finita un oggetto infinito come un linguaggio.

Abbiamo a nostra disposizione due modelli molto potenti:

- **generativo**: date delle regole, si parte da *un certo punto* e si generano tutte le parole di quel linguaggio con le regole date;
- **riconoscitivo**: si usano dei *modelli di calcolo* che prendono in input una parola e dicono se appartiene o meno al linguaggio.

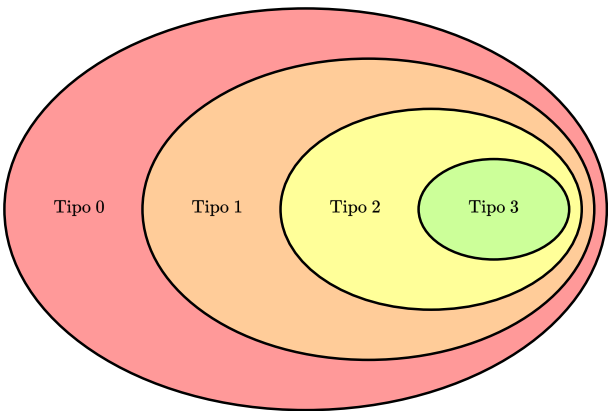
Considerando il linguaggio sull'alfabeto $\{(,)\}$ delle parole ben bilanciate, proviamo a dare due modelli:

- *generativo*: a partire da una sorgente S devo applicare delle regole per derivate tutte le parole appartenenti a questo linguaggio;
  - la parola vuota ε è ben bilanciata;
  - se x è ben bilanciata, allora anche (x) è ben bilanciata;
  - se x, y sono ben bilanciate, allora anche xy sono ben bilanciate.
- *riconoscitivo*: abbiamo una *black-box* che prende una parola e ci dice se appartiene o meno al linguaggio (in realtà potrebbe non terminare mai la sua esecuzione);
  - $\#(\ = \ \#)$;
  - per ogni prefisso, $\#(\ \geq \ \#)$.

2.2. Gerarchia

Negli anni 50 Noam Chomsky studia la generazione dei linguaggi formali e crea una **gerarchia di grammatiche formali**

- **tipo 0**: grammatiche che generano tutti i linguaggi, sono senza restrizioni e come modello equivalente hanno le **macchine di Turing**
- **tipo 1**: grammatiche *context-sensitive* (dipendenti dal contesto), come modello equivalente hanno le **Linear Bounded Automata**
- **tipo 2**: grammatiche *context-free* (libere dal contesto), hanno come modello equivalente gli **automi a pila**
- **tipo 3**: grammatiche regolari, hanno come modello equivalente gli **automi a stati finiti**



3. Grammatiche di tipo 3

3.1. Automi a stati finiti

Gli **automi a stati finiti** sono un modello riconoscitivo usato per caratterizzare i *linguaggi regolari*

3.1.1. Definizione informale

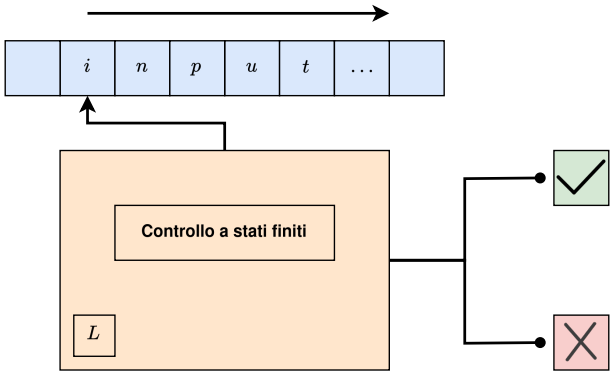
Gli automi a stati finiti sono delle macchine molto semplici: hanno un **controllo a stati finiti** che legge l'input da un **nastro**, formato da una serie di celle, ognuna delle quali contiene un carattere dell'input

Per leggere l'input si utilizza una **testina di lettura**, posizionata inizialmente sulla cella più a sinistra (ovvero sul primo carattere di input), e poi spostata iterazione dopo iterazione da sinistra verso destra

Il controllo a stati finiti, prima della lettura dell'input, è allo **stato iniziale**

Ad ogni iterazione, a partire dallo stato corrente e dal carattere letto dal nastro, ci si muove con la testina a destra sul simbolo successivo e si cambia stato

Quando si arriva alla fine del nastro, in base allo stato corrente dell'automa, quest'ultimo risponde *"si"*, ovvero la parola in input appartiene al linguaggio, oppure *"no"*, ovvero la parola in input non appartiene al linguaggio



3.1.2. Definizione formale

Un automa è una tupla $\{Q, \Sigma, \delta, q_I, F\}$, con

- Q insieme degli stati
- Σ alfabeto di input
- $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ funzione di transizione
- $q_I \in Q$ stato iniziale
- $F \subseteq Q$ insieme degli stati finali

La parte dinamica dell'automa è la **funzione di transizione** che, dati lo stato iniziale e un simbolo del linguaggio, calcola lo stato successivo

Possiamo estendere la funzione di transizione affinché utilizzi una parola del linguaggio, ovvero definiamo $\overline{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow Q$ tale che

- $\overline{\delta}(q, \varepsilon) = q \quad \forall q \in Q$
- $\overline{\delta}(q, wa) = \delta\Big(\overline{\delta}(q, w), a\Big) \quad \forall q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Per semplicità useremo δ al posto di $\overline{\delta}$ nella notazione

3.1.3. Linguaggio

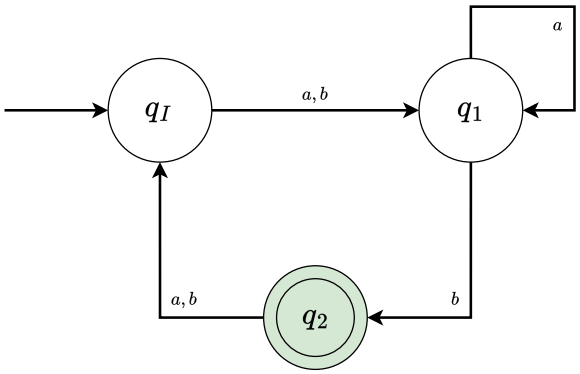
Chiamiamo $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_I, w) \in F\}$ il **linguaggio riconosciuto dall'automa**, ovvero l'insieme delle parole che applicate alla funzione di transizione, a partire dallo stato iniziale, mi mandano in uno stato finale

3.1.4. Rappresentazione grafica

Possiamo vedere un automa come un grafo, dove

- gli **stati** sono nodi etichettati con il nome dello stato
- le **transizioni** sono archi orientati ed etichettati con la lettera dell'alfabeto che causa quella transizione

Lo **stato iniziale** è indicato con una freccia entrante nello stato, mentre gli **stati finali** sono nodi doppiamente cerchiati



3.2. Automi a stati finiti non deterministici

Questi particolari automi sono utili nei linguaggi R_n (fatti come esempio a lezione) perché necessitano di molto meno stati $(n-1)$ rispetto ad un automa deterministico (2^n)

3.2.1. Definizione informale

Gli **automi a stati finiti non deterministici** (*NFA*) sono particolari automi che hanno *almeno* uno stato dal quale escono 2 o più archi con la stessa lettera

Negli automi **deterministici** (*DFA*) invece da *ogni* stato esce al più un arco con la stessa lettera

La differenza principale sta nella complessità computazionale: se negli automi deterministici devo controllare se la parola ci porta in uno stato finale, negli automi non deterministici devo controllare se tra *tutti* i possibili cammini dell'**albero di computazione** ne esiste uno che ci porta in uno stato finale

Possiamo vedere il non determinismo come *una scommessa che va sempre a buon fine*

3.2.2. Definizione formale

Un automa non deterministico differisce da un automa deterministico solo per la funzione di transizione: infatti, quest'ultima diventa $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}(Q)$, ovvero ritorna un elemento dell'**insieme delle parti** di Q, quindi un sottoinsieme di stati nei quali possiamo finire applicando un carattere di Σ allo stato corrente

Come prima, definiamo l'estensione della funzione di transizione come la funzione $\overline{\delta} : Q \times \Sigma^* \longrightarrow \mathbb{P}(Q)$ tale che

- $\overline{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\overline{\delta}(q, wa) = \bigcup_{r \in \overline{\delta}(q,w)} \delta(r, a)$

Cambia anche il linguaggio riconosciuto dall'automa: infatti, $L(A)$ diventa $\left\{w \in \Sigma^* \mid \overline{\delta}(q_I, w) \bigcap F \neq \varnothing\right\}$

3.3. Distinguibilità

Dato un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$, due parole $x, y \in \Sigma^*$ sono **distinguibili** rispetto ad L se $\exists z \in \Sigma^*$ tale che $(xz \in L \wedge yz \notin L) \vee (xz \notin L \wedge yz \in L)$

Teorema 3.3.1 Siano $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio, $X \subseteq \Sigma^*$ un insieme di parole tutte distinguibili tra loro rispetto ad L e A un automa DFA per L, allora A non può avere meno di $|X|$ stati

Dimostrazione
Per assurdo, sia $X = \{x_1, ..., x_k\}$ insieme di k parole distinguibili tra loro rispetto ad L e che A abbia meno di k stati
Partendo dallo stato corrente q_I ho due situazioni

- leggendo il carattere x_i, con $1 \leq i \leq k-2$, l'automa finisce nello stato q_i
- leggendo i caratteri x_{k-1} e x_k l'automa finisce nello stato stato q_t, visto che A ha meno di k stati

Prendiamo ora una parola z e la applichiamo allo stato q_t, che ci porta in uno stato r qualsiasi, ma questo è assurdo: infatti, abbiamo due parole distinguibili (x_{k-1} e x_k) che però sono entrambe accettate o entrambe rifiutate, in base allo stato r □