

# Teoria dei Linguaggi

# Indice

<b>1. Lezione 08 [21/03]</b>	<b>4</b>
1.1. Operazioni sui linguaggi	4
1.1.1. Operazioni insiemistiche	4
1.1.2. Operazioni tipiche	4
1.1.3. Teorema di Kleene e espressioni regolari	6
<b>2. Lezione 09 [26/03]</b>	<b>10</b>
2.1. Fine dimostrazione	10
2.2. State complexity	10
2.3. Operazioni	11
2.3.1. Complemento	12
2.3.1.1. DFA	12
2.3.1.2. NFA	12
2.3.1.3. Costruzione per sottoinsiemi	13
2.3.2. Unione	14
2.3.2.1. DFA	15
2.3.2.2. Automa prodotto	15
2.3.2.3. NFA	17
2.3.3. Intersezione	17
2.3.4. Prodotto	17
2.3.4.1. DFA	18
2.3.4.2. Costruzione senza nome	18
2.3.4.3. NFA	19
<b>3. Lezione 10 [28/03]</b>	<b>20</b>
3.1. Prodotto (richiamo)	20
3.2. Chiusura di Kleene	20
3.2.1. DFA	21
3.2.2. NFA	21
3.2.3. Esempi utili per dopo	21
3.2.4. Codici	22
3.2.5. Star height	23
3.3. Espressioni regolari estese	24
3.4. Operazioni esotiche	27
3.4.1. Reversal	27
3.4.1.1. DFA	28
3.4.1.2. NFA	29
3.4.2. Shuffle	29
3.4.2.1. Alfabeti disgiunti	29
3.4.2.2. Stesso alfabeto	30
3.4.2.3. Alfabeto unario	30
<b>4. Lezione 11 [02/04]</b>	<b>31</b>
4.1. Reversal	31
4.2. Algoritmo per automa minimo	32
4.3. Pumping Lemma	36
<b>5. Lezione 12 [04/04]</b>	<b>40</b>
5.1. Problemi di decisione per i linguaggi regolari	40

5.1.1.	Linguaggio vuoto e infinito .....	40
5.1.2.	Appartenenza .....	41
5.1.3.	Universalità .....	41
5.1.4.	Inclusione e uguaglianza .....	41
5.2.	Altre operazioni .....	41
5.2.1.	Raddoppio .....	41
5.2.2.	Metà .....	42
5.3.	Automi come matrici .....	43
5.3.1.	Prima applicazione: raddoppio .....	44
5.3.2.	Seconda applicazione: metà .....	45
5.3.3.	Matrici su NFA .....	45
5.4.	Varianti di automi .....	46
5.4.1.	Automi pesati .....	46
5.4.2.	Automi probabilistici .....	46
<b>6.</b>	<b>Lezione 13 [09/04] .....</b>	<b>48</b>
6.1.	Varianti di automi .....	48
6.1.1.	One-way VS two-way .....	48
6.1.2.	Read-only VS read-write .....	48
6.1.3.	Memoria esterna .....	49
6.2.	Automi two-way .....	50
6.2.1.	Esempi vari .....	50
6.2.2.	Definizione formale .....	52
6.2.3.	Potenza computazionale .....	53
<b>7.</b>	<b>Lezione 14 [11/04] .....</b>	<b>58</b>
7.1.	Simulazione .....	58
7.1.1.	Problema di Sakoda & Sipser .....	58
7.2.	Automi a pila .....	60
7.2.1.	Versione non deterministica .....	60
7.2.2.	Accettazione .....	63
7.2.3.	Determinismo VS non determinismo .....	65
7.2.4.	Trasformazioni .....	66

# 1. Lezione 08 [21/03]

## 1.1. Operazioni sui linguaggi

Supponiamo di avere in mano una serie di linguaggi. Vediamo una serie di operazioni che possiamo fare su essi per combinarli assieme e ottenere altri linguaggi.

### 1.1.1. Operazioni insiemistiche

I linguaggi sono insiemi di stringhe, quindi perché non iniziare dalle **operazioni insiemistiche**?

Fissiamo un alfabeto  $\Sigma$ , siano  $L', L'' \subseteq \Sigma^*$  due linguaggi definiti sullo stesso alfabeto  $\Sigma$ . Se i due alfabeti sono differenti allora si considera come alfabeto l'unione dei due alfabeti.

Partiamo con l'operazione di **unione**:

$$L' \cup L'' = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L' \vee x \in L''\}.$$

Continuiamo con l'operazione di **intersezione**:

$$L' \cap L'' = \{x \in \Sigma^* \mid x \in L' \wedge x \in L''\}.$$

Terminiamo con l'operazione di **complemento**:

$$L'^C = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin L'\}.$$

### 1.1.2. Operazioni tipiche

Passiamo alle **operazioni tipiche** dei linguaggi, definite comunque molto semplicemente.

Partiamo con l'operazione di **prodotto** (o concatenazione):

$$L' \cdot L'' = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x \in L' \wedge \exists y \in L'' \mid w = xy\}.$$

In poche parole, concateniamo in tutti i modi possibili le stringhe del primo linguaggio con le stringhe del secondo linguaggio. Questa operazione, in generale, è **non commutativa**, e lo è se  $\Sigma$  è formato da una sola lettera.

**Esempio 1.1.2.1:** Vediamo due casi particolari e importanti di prodotto

$$\begin{aligned} L' \cdot \emptyset &= \emptyset \cdot L' = \emptyset \\ L' \cdot \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon\} \cdot L' = L'. \end{aligned}$$

Andiamo avanti con l'operazione di **potenza**:

$$L^k = \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_{k \text{ volte}}$$

In poche parole, stiamo prendendo  $k$  stringhe da  $L'$  e le stiamo concatenando in ogni modo possibile. Possiamo dare anche una definizione induttiva di questa operazione, ovvero

$$L^k = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{se } k = 0 \\ L^{k-1} \cdot L & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

Infine, terminiamo con l'operazione di **chiusura di Kleene**, detta anche **STAR**. Questa operazione è estremamente simile alla potenza, ma in questo caso il numero  $k$  non è fissato e

quindi questa operazione di potenza viene ripetuta all'infinito. Vengono quindi concatenate un numero arbitrario di stringhe di  $L$ , e teniamo tutte le computazioni intermedie, ovvero

$$L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k.$$

Ecco perché scriviamo  $\Sigma^*$ : partendo dall'alfabeto  $\Sigma$  andiamo ad ottenere ogni stringa possibile.

Esiste anche la **chiusura positiva**, definita come

$$L^+ = \bigcup_{k \geq 1} L^k.$$

Che relazione abbiamo tra le due chiusure? Questo dipende da  $\varepsilon$ , ovvero:

- se  $\varepsilon \in L$  allora  $L^* = L^+$  perché  $L^1 \subseteq L^+$  e visto che  $\varepsilon \in L^1$  abbiamo gli stessi insiemi;
- se  $\varepsilon \notin L$  allora  $L^+ = L^*/\{\varepsilon\}$  perché l'unico modo di ottenere  $\varepsilon$  sarebbe con  $L^0$ .

**Esempio 1.1.2.2:** Vediamo una cosa simpatica:

$$\mathbb{Q}^* = \{\varepsilon\}.$$

Abbiamo appena generato qualcosa dal nulla, fuori di testa. La generazione si blocca con la chiusura positiva, ovvero

$$\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}.$$

Infine, vediamo una cosa abbastanza banale sull'insieme formato dalla sola  $\varepsilon$ , ovvero

$$\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}^+ = \{\varepsilon\}.$$

Con la chiusura di Kleene, partendo da un **linguaggio finito**  $L$ , otteniamo una chiusura  $L^*$  di cardinalità infinita, perché ogni volta andiamo a creare delle nuove stringhe.

Partendo invece da un **linguaggio infinito**  $L$ , otteniamo ancora una chiusura  $L^*$  di cardinalità infinita ma ci sono alcune situazioni particolari.

**Esempio 1.1.2.3:** Vediamo tre linguaggi infiniti che hanno comportamenti diversi.

Consideriamo il linguaggio

$$L_1 = \{a^n \mid n \geq 0\}.$$

Calcolando la chiusura  $L_1^*$  otteniamo lo stesso linguaggio  $L_1$  perché stiamo concatenando stringhe che contengono solo  $a$ , che erano già presenti in  $L_1$ .

Consideriamo ora il linguaggio

$$L_2 = \{a^{2k+1} \mid k \geq 0\}.$$

Calcolando la chiusura  $L_2^*$  otteniamo il linguaggio  $L_1$  perché:

- in  $L_2^1$  ho tutte le stringhe formate da  $a$  di lunghezza dispari;
- in  $L_2^2$  ho tutte le stringhe formate da  $a$  di lunghezza pari (dispari + dispari).

Già solo con  $L_2^0 \cup L_2^1 \cup L_2^2$  generiamo tutto il linguaggio  $L_1$

Consideriamo infine

$$L_3 = \{a^n b \mid n \geq 0\}.$$

Proviamo a calcolare prima la potenza  $L_3^k$  di questo linguaggio, ovvero

$$L_3^k = \{a^{n_1} b \dots a^{n_k} b \mid n_1, \dots, n_k \geq 0\}.$$

La chiusura  $L_3^*$  conterrà stringhe in questa forma con  $k$  ogni volta variabili.

Abbiamo quindi visto diverse situazioni: nel primo linguaggio non abbiamo dovuto calcolare nessuna chiusura, nel secondo linguaggio abbiamo calcolato un paio di linguaggi, nel terzo linguaggio non ci siamo mai fermati.

### 1.1.3. Teorema di Kleene e espressioni regolari

Con le operazioni che abbiamo visto noi possiamo creare dei nuovi linguaggi. Tra queste operazioni, possiamo raggruppare **unione**, **prodotto** e **chiusura di Kleene** sotto il cappello delle **operazioni regolari**. Come mai questo nome? Perché esse sono usate per definire i **linguaggi regolari**.

Vediamo tre versioni del seguente teorema, ma ci interesseremo solo della prima e della terza.

**Teorema 1.1.3.1** (Teorema di Kleene): La classe dei linguaggi accettati da automi a stati finiti coincide con la più piccola classe contenente i linguaggi

$$\emptyset \quad | \quad \{\varepsilon\} \quad | \quad \{a\}$$

e chiusa rispetto alle operazioni di unione, prodotto e chiusura di Kleene.

Questa prima versione ci dice che possiamo costruire la classe dei linguaggi regolari partendo da tre linguaggi base e applicando in tutti i modi possibili le tre operazioni regolari.

**Teorema 1.1.3.2** (Teorema di Kleene): La classe dei linguaggi accettati da automi a stati finiti coincide con la più piccola classe che contiene i linguaggi finiti.

Seconda versione carina, ma che non commentiamo.

**Teorema 1.1.3.3** (Teorema di Kleene): La classe dei linguaggi accettati da automi a stati finiti coincide con la classe dei linguaggi espressi con le espressioni regolari.

Tutto bello, ma cosa sono le **espressioni regolari**?

Simbolo/espressione	Linguaggio associato
$\emptyset$	$\emptyset$

$\varepsilon$	$\{\varepsilon\}$
$a$	$\{a\}$
$E_1 + E_2$	$L(E_1) \cup L(E_2)$
$E_1 \cdot E_2$	$L(E_1) \cdot L(E_2)$
$E^*$	$(L(E))^*$

Le espressioni regolari sono una **forma dichiarativa**, ovvero grazie ad esse dichiariamo come sono fatte le stringhe di un certo linguaggio. Fin'ora avevamo usato gli automi (**forma riconoscitiva**) e le grammatiche (**forma generativa**).

**Esempio 1.1.3.1:** Vediamo un po' di espressioni regolari per alcuni linguaggi.

Linguaggio	Espressione regolare
$L = \{a^n \mid n \geq 0\}$	$a^*$
$L = \{a^{2k+1} \mid k \geq 0\}$	$(aa)^*a$
$L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$	$a^*b$
$L = \{(a^n b)^k \mid n \geq 0 \wedge k > 0\}$	$(a^*b)^k$
$L_3$ terzultimo simbolo da destra è una $a$	$(a + b)^*a(a + b)(a + b)$

Il penultimo linguaggio ha una espressione regolare che non abbiamo visto: si tratta di una piccola estensione algebrica che ci permette di unire assieme una serie di fattori identici.

Andiamo ora a dimostrare il teorema di Kleene.

**Dimostrazione 1.1.3.3.1:** Dobbiamo mostrare una doppia implicazione.

[Automa  $\rightarrow$  RegExp]

Vedi esempio successivo su come fare questa operazione.

[RegExp  $\rightarrow$  Automa]

Non l'ha ancora spiegato. ■

Vediamo un esempio di come passare da un automa ad una espressione regolare.

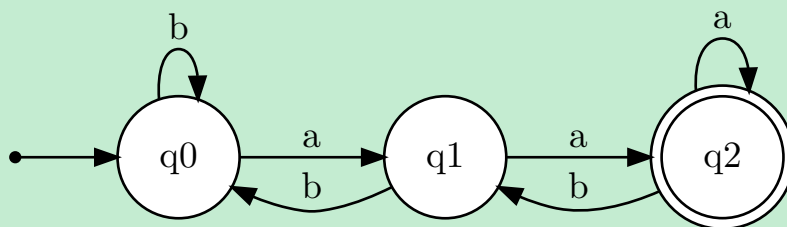
**Esempio 1.1.3.2:** Per ricavare una espressione regolare da un automa si usa un algoritmo di **programmazione dinamica** molto simile all'algoritmo Floyd-Warshall sui grafi, che cerca i cammini minimi imponendo una serie di vincoli.

Un altro approccio invece cerca di risolvere un **sistema di equazioni** associato all'automa.

Dato un automa, costruiamo un sistema di  $n$  equazioni, dove  $n$  è il numero di stati dell'automa. Supponendo di numerare gli stati da 1 a  $n$ , la  $i$ -esima equazione descrive i cambiamenti di stato che possono avvenire partendo dallo stato  $i$ .

Ogni **cambiamento di stato** è nella forma  $aB$ , dove  $a$  è il carattere che causa una transizione e  $B$  è lo stato di arrivo. Tutti i cambiamenti di stato a partire da  $i$  vanno sommati tra loro. Inoltre, se lo stato  $i$ -esimo è uno stato finale si aggiunge anche  $\varepsilon$  all'equazione.

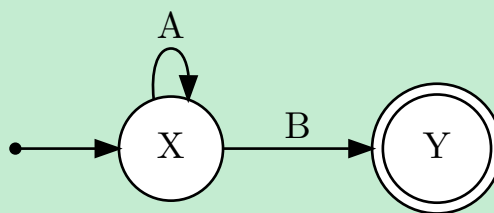
Questa somma di cambiamenti di stati va posta uguale allo stato  $i$ -esimo.



Associamo all'automa precedente un sistema di 3 equazioni, nel quale indichiamo gli stati con le variabili  $X_i$  e i caratteri sono quelli dell'alfabeto  $\{a, b\}$ . Il sistema è il seguente:

$$\begin{cases} X_0 = aX_1 + bX_0 \\ X_1 = aX_2 + bX_0 \\ X_2 = aX_2 + bX_1 + \varepsilon \end{cases}.$$

Ora dobbiamo risolvere questo sistema di equazioni. Per fare ciò, dobbiamo introdurre una **regola fondamentale** che ci permetterà di risolvere tutti i sistemi che vedremo.



Il sistema di equazioni per questo automa è

$$\begin{cases} X = AX + BY \\ Y = \varepsilon \end{cases}.$$

Sostituendo  $Y = \varepsilon$  nella prima equazione otteniamo

$$X = AX + B.$$

L'espressione regolare per questo automa è



$$A^*B.$$

Visto che le due cose che abbiamo scritto devono essere identiche, ogni volta che abbiamo una equazione nella forma

$$X = AX + B$$

la possiamo sostituire con l'equazione

$$X = A^*B.$$

Riprendiamo il sistema dell'automa dell'esempio e andiamo a risolvere le nostre equazioni:

$$\begin{cases} X_0 = a(aX_2 + bX_0) + bX_0 \\ X_2 = aX_2 + b(aX_2 + bX_0) + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = aaX_2 + abX_0 + bX_0 \\ X_2 = aX_2 + baX_2 + bbX_0 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = (ab + b)X_0 + aaX_2 \\ X_2 = (a + ba)X_2 + bbX_0 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = (ab + b)X_0 + aaX_2 \\ X_2 = (a + ba)^*(bbX_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

$$X_0 = (ab + b)X_0 + aa((a + ba)^*(bbX_0 + \varepsilon))$$

$$X_0 = (ab + b)X_0 + aa(a + ba)^*bbX_0 + aa(a + ba)^*$$

$$X_0 = (ab + b + aa(a + ba)^*bb)X_0 + aa(a + ba)^*.$$

Applicando un'ultima volta la regola fondamentale otteniamo l'espressione regolare

$$(ab + b + aa(a + ba)^*bb)^*aa(a + ba)^*.$$

E pensare che l'algoritmo basato su Floyd-Warshall è anche più difficile...

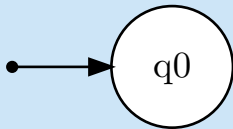
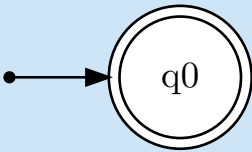
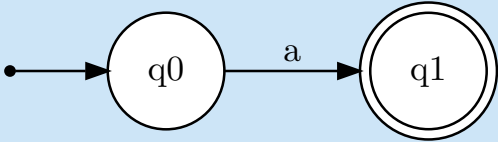
## 2. Lezione 09 [26/03]

### 2.1. Fine dimostrazione

Per finire la dimostrazione del **teorema di Kleene** dobbiamo essere in grado di passare dalle espressioni regolari ai linguaggi di tipo 3.

**Teorema 2.1.1** (Teorema di Kleene): Vedi lezione scorsa.

**Dimostrazione 2.1.1.1:** Costruiamo degli automi per le espressioni regolari di base e poi costruiamo gli automi per le operazioni che usiamo per chiudere questa classe di linguaggi.

Espressione regolare	Automa
$\emptyset$	
$\varepsilon$	
$a$	

Per essere precisi, dovremmo utilizzare dei DFA che sono completi, quindi dobbiamo considerare anche lo stato trappola. In realtà, se vogliamo fare un conto asintotico non ci interessa molto, ma se vogliamo il numero preciso di stati allora quello stato è necessario.

Per vedere la composizione di questi stati usando le operazioni lineari, penso vada bene il prossimo capitolo sulle operazioni. ■

### 2.2. State complexity

Vogliamo studiare il numero di stati che sono necessari per definire un automa. Vediamo due quantità che sono chiave in questo studio.

**Definizione 2.2.1** (State complexity deterministica): Sia  $L \subseteq \Sigma^*$ . Indichiamo con

$$sc(L)$$

il minimo numero di stati di un DFA completo per  $L$ .

Abbiamo poi visto che l'automa con questo numero di stati è anche **unico**.

**Definizione 2.2.2** (State complexity non deterministica): Sia  $L \subseteq \Sigma^*$ . Indichiamo con

$$\text{nsc}(L)$$

il minimo numero di stati di un NFA per  $L$ .

In questo caso abbiamo visto che l'NFA minimo **non è unico**. Inoltre, non abbiamo la nozione di **completo** perché la funzione di transizione associa ad ogni passo di computazione una serie di scelte, che può essere anche la scelta vuota.

**Lemma 2.2.1:** Se  $L$  non è un linguaggio regolare allora

$$\text{sc}(L) = \text{nsc}(L) = \infty.$$

**Lemma 2.2.2:** Se  $L$  è un linguaggio regolare allora

$$\text{sc}(L) < \infty \wedge \text{nsc}(L) < \infty.$$

Avevamo inoltre il bound per passare da NFA a DFA, che nel caso peggiore trasformava  $n$  stati di un NFA in  $2^n$  stati di un DFA con l'automa di **Meyer-Fischer**.

**Esempio 2.2.1:** Sia  $L_n$  il solito linguaggio dell' $n$ -esimo simbolo da destra uguale ad  $a$ .

Avevamo visto un NFA che utilizzava  $n + 1$  stati, quindi

$$\text{nsc}(L_n) \leq n + 1.$$

Si dimostra poi l'uguaglianza dei due valori utilizzando un fooling set.

Avevamo poi visto un DFA che utilizzava  $2^n$  stati, quindi

$$\text{sc}(L_n) = 2^n.$$

Con un insieme di stringhe distinguibili avevamo mostrato che servivano almeno  $2^n$  stati, ma con la realizzazione effettiva abbiamo uguagliato il bound.

## 2.3. Operazioni

Estendiamo la nozione di state complexity alle operazioni sui linguaggi. Data un'operazione che preservi la **regolarità** su  $n$  linguaggi, ognuno con la propria state complexity, ci chiediamo quale sia la state complexity dell'operazione considerata sui linguaggi dati.

### 2.3.1. Complemento

Dato il linguaggio  $L$  con  $\text{sc}(L) = n$ , vogliamo valutare la quantità  $\text{sc}(L^C)$  del **complemento** di  $L$ .

#### 2.3.1.1. DFA

Se abbiamo un DFA per  $L$ , passare a  $L^C$  è molto facile: tutte le stringhe che prima accettavo ora le devo rifiutare e viceversa. Parlando in termini di dell'automa, invertiamo ogni stato finale in non finale e viceversa, mantenendo intatte le transizioni.

Dato  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA per  $L$ , costruisco l'automa  $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F')$  un DFA per  $L^C$  tale che

$$F' = Q/F.$$

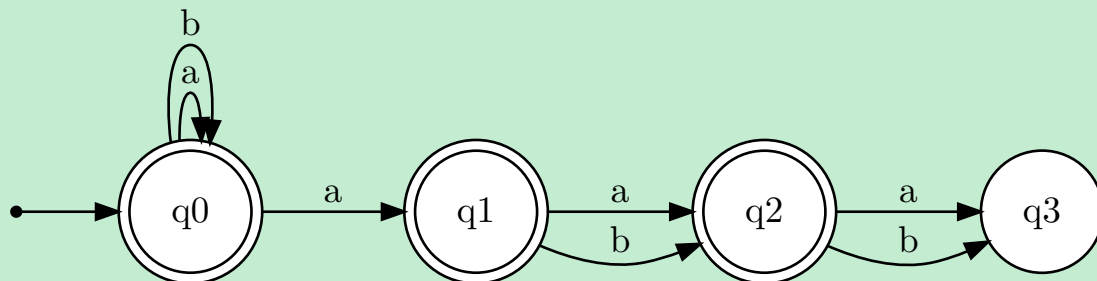
Dobbiamo imporre che  $A$  sia **completo** perché ciò che andava nello stato trappola ora deve essere accettato. Ma allora

$$\text{sc}(L^C) = \text{sc}(L).$$

#### 2.3.1.2. NFA

Come ci comportiamo sugli NFA?

**Esempio 2.3.1.2.1:** Sia  $L_3$  l'istanza del linguaggio  $L_n$  classico con  $n = 3$ . Andiamo a vedere un automa che cerca di calcolare  $L_3^C$  con la tecnica che abbiamo appena visto nei DFA.

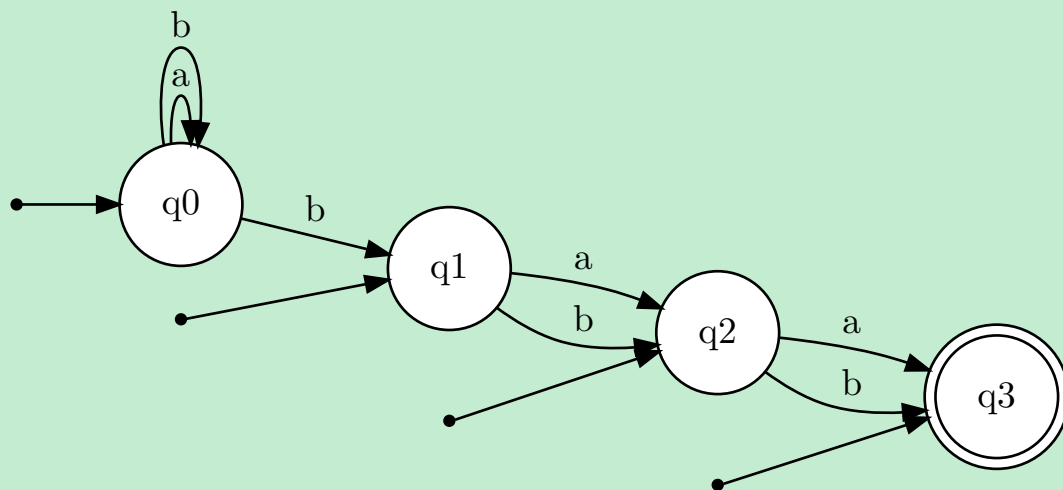


Abbiamo un problema: questo automa **accetta tutto**. Ma perché succede questo? Negli NFA accettiamo se esiste almeno un cammino accettante e rifiutiamo se ogni cammino è rifiutante. Quando accettiamo è molto probabile che ci sia, oltre al cammino accettante, anche qualche cammino rifiutante. Facendo il complemento, accettiamo ancora quando abbiamo almeno un cammino accettante, ma questo deriva da uno dei cammini rifiutanti precedenti.

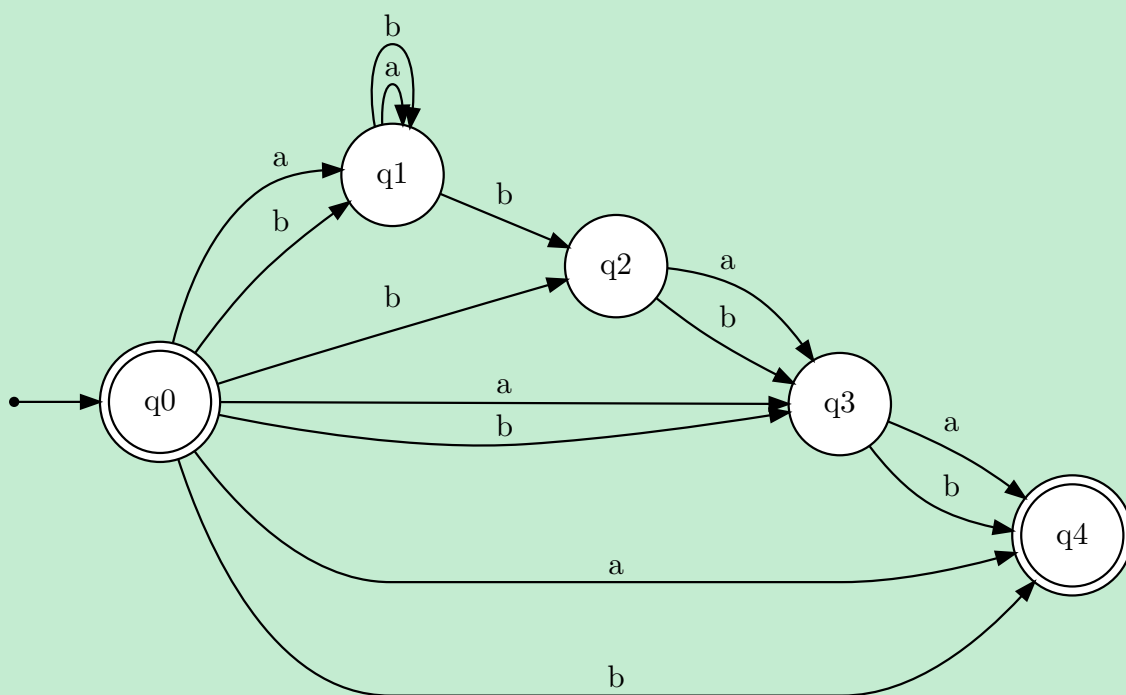
È importantissimo avere il DFA, per via di questa asimmetria tra accettazione e non accettazione.

Ma se volessimo per forza un NFA per il complemento? Questo va molto a caso, dipende da linguaggio a linguaggio, potrebbe essere molto facile da trovare come molto difficile.

**Esempio 2.3.1.2.2:** Sempre per il linguaggio  $L_3$ , diamo due NFA per riconoscere  $L_3^C$ .  
Una prima soluzione utilizza una serie di stati iniziali multipli.



Una seconda soluzione utilizza invece il non determinismo puro.



Questo approccio di cercare a tutti i costi un NFA può essere difficoltoso. Vediamo un algoritmo che ci permette di avere un automa per  $L^C$ , per ci darà un automa deterministico.

### 2.3.1.3. Costruzione per sottoinsiemi

Sia  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un NFA per  $L$ , voglio un automa per il linguaggio  $L^C$ . Un modo sistematico e ottimo per avere un automa sotto mano è passare al DFA di  $A$  e poi eseguire la costruzione del complemento che abbiamo visto prima.

Quanti stati abbiamo? Sappiamo che abbiamo un salto esponenziale passando dall'NFA al DFA, e poi uno stesso numero di stati, quindi

$$\text{nsc}(L^C) \leq 2^{\text{nsc}(L)}.$$

Possiamo fare di meglio? Sicuramente esistono esempi di salti che non sono esattamente esponenziali, come i linguaggi delle coppie di elementi uguali/diversi a distanza  $n$ , che avevano un salto del tipo

$$2n + 2 \rightarrow 2^n,$$

ma si può costruire un esempio che faccia un salto esponenziale perfetto.

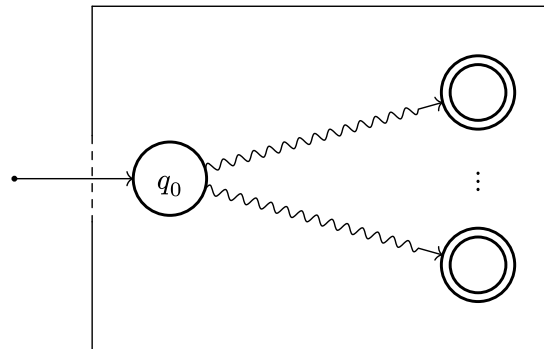
Abbiamo quindi visto che del complemento negli NFA non ce ne facciamo niente, questo proprio per la natura del non determinismo.

### 2.3.2. Unione

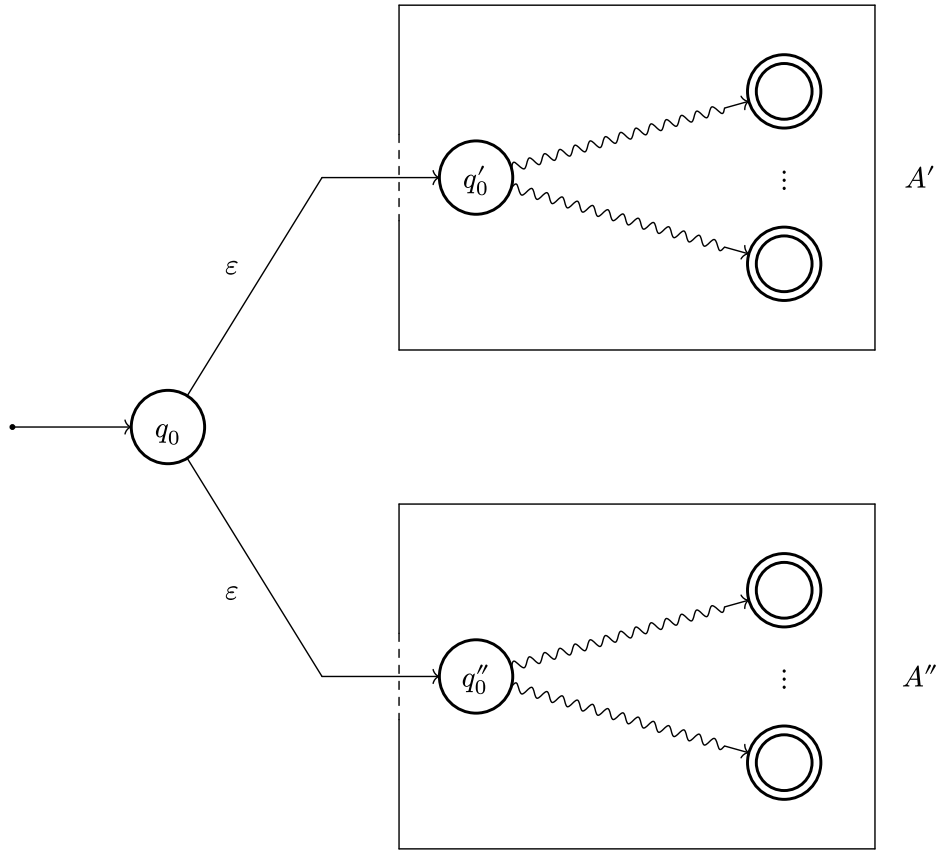
Dati due linguaggi  $L', L'' \subseteq \Sigma^*$  rispettivamente riconosciuti dagli automi  $A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$  e  $A'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q''_0, F'')$ , vogliamo costruire un automa per l'**unione**

$$L' \cup L''.$$

Per risolvere questo problema pensiamo agli automi come se fossero delle scatole, che prendono l'input nello stato iniziale e poi arrivano alla fine nell'insieme degli stati finali.



L'idea per costruire l'automa l'unione è combinare i due automi  $A'$  e  $A''$  usando il non determinismo per scegliere in quale automa finire con una  $\varepsilon$ -mossa.



Visto che il linguaggio dell'unione deve stare in almeno uno dei due, metto una scommessa all'inizio per vedere se andare nel primo o nel secondo automa. Bella soluzione, funziona, ma non ci piace tanto, come mai?

### 2.3.2.1. DFA

Non ci piace tanto questa soluzione perché se partiamo da due DFA andiamo a finire in un NFA. Infatti, la componente, non deterministica viene inserita con le due  $\varepsilon$ -mosse iniziali. La stessa componente non deterministica l'avremmo inserita con gli stati iniziali multipli, che sarebbero stati in corrispondenza dei due stati iniziali  $q'_0$  e  $q''_0$  senza lo stato  $q_0$ .

Se vogliamo rimanere nel mondo DFA dobbiamo unire i due automi con questa costruzione e poi passare al DFA con la costruzione per sottoinsiemi. Il numero di stati dell'NFA è

$$\text{nsc}(L' \cup L'') \leq 1 + \text{nsc}(L') + \text{nsc}(L''),$$

quindi con la costruzione per sottoinsiemi arriveremmo ad avere un numero di stati pari a

$$\text{sc}(L' \cup L'') \leq 2^{\text{nsc}(L' \cup L'')}.$$

Questa costruzione è altamente **inefficiente**. Si può fare molto meglio.

### 2.3.2.2. Automa prodotto

Utilizzando una costruzione particolare, la **costruzione dell'automa prodotto**, siamo in grado di abbassare di brutto la complessità in stati dei DFA per l'unione di linguaggi.

L'**automa prodotto** fa partire in parallelo i due automi, e alla fine controlla che almeno uno dei due abbia dato un cammino accettante. Definiamo quindi  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  tale che:

- gli **stati** rappresentano i due automi che viaggiano in parallelo, come se avessi due pc davanti, ognuno che lavora da solo. Gli stati sono quindi l'insieme

$$Q = Q' \times Q'';$$

- lo **stato iniziale** è la coppia di stati iniziali, ovvero

$$q_0 = (q'_0, q''_0);$$

- la **funzione di transizione** lavora ora sulle coppie di stati, che deve portare avanti in parallelo, quindi

$$\delta((q, p), a) = (\delta'(q, a), \delta''(p, a));$$

- gli **stati finali** sono tutte le coppie dove riesco a finire in almeno uno stato finale, ovvero

$$F = \{(q, p) \mid q \in F' \vee p \in F''\}.$$

Come cambia la complessità dell'automa rispetto alla costruzione per sottoinsiemi? Qua il numero di stati è

$$\text{sc}(L' \cup L'') \leq \text{sc}(L') \cdot \text{sc}(L''),$$

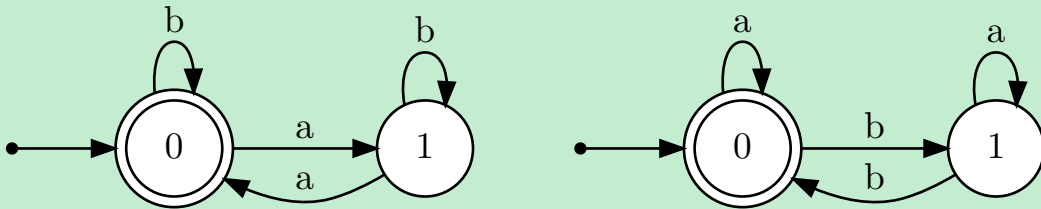
quindi abbiamo una soluzione notevolmente migliore. Inoltre, non si può fare meglio di così.

**Esempio 2.3.2.2.1:** Fissati due valori  $m, n$  positivi, definiamo i linguaggi

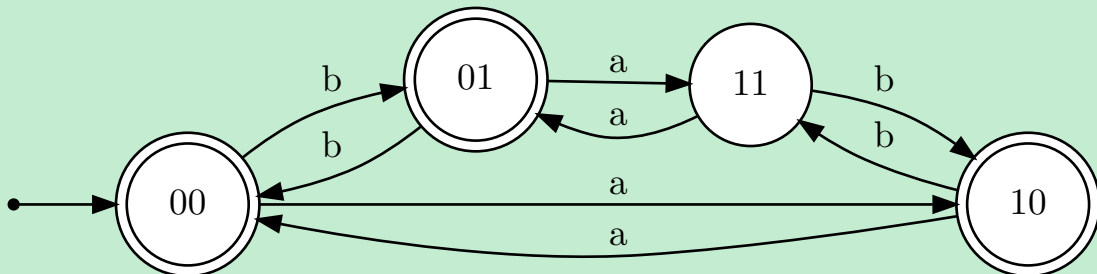
$$L' = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) \text{ è multiplo di } m\}$$

$$L'' = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_b(x) \text{ è multiplo di } n\}.$$

I due automi  $A'$  e  $A''$  per  $L'$  e  $L''$  sono molto semplici, devono solo contare il numero di  $a$  e  $b$ . Vediamo un esempio con  $m = n = 2$ .



Costruiamo l'automa prodotto per il linguaggio  $L = L' \cup L''$ .





### 2.3.2.3. NFA

Negli NFA non abbiamo nessun problema: partiamo da NFA e vogliamo restare in NFA, quindi non servono ulteriori costruzioni per avere un automa di questa classe. Il numero di stati è

$$\text{nsc}(L' \cup L'') \leq 1 + \text{nsc}(L') + \text{nsc}(L'').$$

Perdiamo il termine noto di questa quantità se non usiamo  $\varepsilon$ -mosse ma stati iniziali multipli.

### 2.3.3. Intersezione

Per l'**intersezione** di linguaggi non dobbiamo definire molto di nuovo.

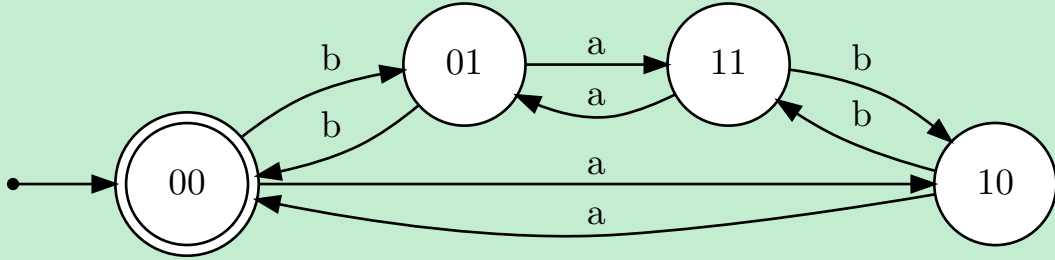
Per i DFA, possiamo utilizzare la costruzione dell'automa prodotto appena definita modificando l'insieme degli stati finali  $F$  rendendolo l'insieme

$$F = \{(q, p) \mid q \in F' \wedge p \in F''\}.$$

Ma allora la state complexity vale

$$\text{sc}(L' \cap L'') \leq \text{sc}(L') \cdot \text{sc}(L'').$$

**Esempio 2.3.3.1:** Riprendendo i due linguaggi di prima, l'automa prodotto viene costruito nello stesso modo, ma cambia l'insieme degli stati finali, che si riduce al singleton  $\{00\}$ .



Per gli NFA, possiamo riutilizzare la costruzione dell'automa prodotto per permetterci di navigare tutte le possibili coppie di cammini, e scommettendo bene su entrambi i cammini possiamo accettare la stringa. Va sistemata un pelo la definizione della funzione di transizione, ma la costruzione rimane uguale. Vale quindi

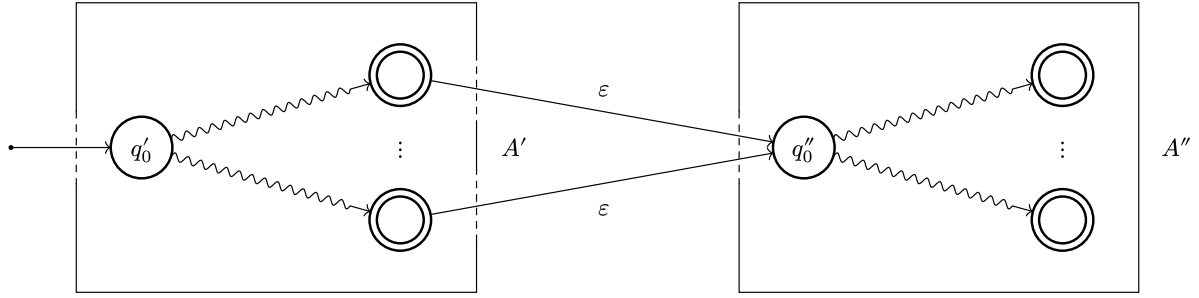
$$\text{nsc}(L' \cap L'') \leq \text{nsc}(L') \cdot \text{nsc}(L'').$$

### 2.3.4. Prodotto

Riprendiamo velocemente la definizione di **prodotto** di linguaggi. Dati due linguaggi  $L'$  e  $L''$ , allora

$$L' \cdot L'' = \{w \mid \exists x \in L' \wedge \exists y \in L'' \mid w = xy\}.$$

Sfruttiamo la rappresentazione black box degli automi: mettendoli in serie utilizzando le  $\varepsilon$ -mosse.



In poche parole, ogni volta che arriviamo in uno stato finale di  $A'$  facciamo partire la computazione su  $A''$ , ma in  $A'$  andiamo avanti a scandire la stringa. Stiamo scommettendo di essere arrivati alla fine della stringa  $x$  e di dover iniziare a leggere la stringa  $y$ .

Bella costruzione, ma ci va veramente bene una roba del genere?

#### 2.3.4.1. DFA

La risposta, come prima, è **NO**: se partiamo da due DFA andiamo a finire in un NFA, che non ci va bene perché per poi tornare in un DFA ci costa un salto esponenziale. Visto che

$$\text{nsc}(L' \cdot L'') = \text{nsc}(L') + \text{nsc}(L''),$$

possiamo dire che

$$\text{sc}(L' \cdot L'') \leq 2^{\text{nsc}(L' \cdot L'')}.$$

Come prima, possiamo ottimizzare questa costruzione, anche se non di molto stavolta.

#### 2.3.4.2. Costruzione senza nome

Il problema dell'esplosione del doppio esponenziale deriva dal fatto che, quando arrivo in uno stato finale del primo automa, devo far partire il secondo automa, ma il primo continua ancora a scandagliare la stringa perché deve scommettere.

La soluzione inefficiente di prima prendeva i due automi  $A'$  e  $A''$ , li univa in un NFA ed effettuava la costruzione per sottoinsiemi. La soluzione che facciamo adesso **incorpora** i sottoinsiemi nei passi del DFA, così da evitare l'esecuzione non deterministica.

Costruisco l'automa  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  che, ogni volta che  $A'$  finisce in uno stato finale, avvia anche  $A''$  dal punto nel quale si trova. Esso è definito da:

- gli **stati** sono tutte le coppie di stati di  $A'$  con i sottoinsiemi di  $A''$ , così da incorporare i sottoinsiemi nel DFA direttamente, ovvero

$$Q = Q' \times 2^{Q''};$$

- lo **stato iniziale** dipende se siamo già in una configurazione che permette lo start di  $A''$ , ovvero

$$q_0 = \begin{cases} (q'_0, \emptyset) & \text{se } q'_0 \notin F' \\ (q'_0, \{q''_0\}) & \text{se } q'_0 \in F' \end{cases}$$

- la **funzione di transizione** deve lavorare sulla prima componente ma anche su tutte quelle presenti nella seconda componente, quindi essa è definita come

$$\delta((q, \alpha), a) = \begin{cases} (\delta'(q, a), \{\delta''(p, a) \mid p \in \alpha\}) & \text{se } \delta'(q, a) \notin F' \\ (\delta'(q, a), \{\delta''(p, a) \mid p \in \alpha\} \cup \{q''_0\}) & \text{se } \delta'(q, a) \in F' \end{cases}$$

- gli **stati finali** sono quelli nei quali riusciamo ad arrivare con il secondo automa, ovvero

$$F = \{(q, \alpha) \mid \alpha \cap F'' \neq \emptyset\}.$$

La prima componente la mandiamo avanti deterministicamente, ma la manteniamo sempre accesa per far partire la seconda computazione. Quest'ultima è anch'essa deterministica, ma simula un po' il comportamento non deterministico.

Il numero di stati massimo che abbiamo è

$$\text{sc}(L' \cdot L'') = \text{sc}(L') 2^{\text{sc}(L'')},$$

che rappresenta comunque un gap esponenziale ma abbiamo abbassato di un po' la complessità.

#### **2.3.4.3. NFA**

Come per l'unione, qua siamo molto tranquilli: partiamo da NFA e arriviamo in NFA, quindi a noi va tutto bene. La state complexity, come visto prima, è

$$\text{nsc}(L' \cdot L'') \leq \text{nsc}(L') + \text{nsc}(L'').$$

### 3. Lezione 10 [28/03]

#### 3.1. Prodotto (richiamo)

Piccole osservazioni da aggiungere alla lezione precedente:

- abbiamo un suffisso e un prefisso, ma non sapendo quando finisce il primo e inizia il secondo devo scommettere quando arrivo in uno stato finale del primo automa; ci possono essere tante suddivisioni, devo indovinare quella giusta;
- l'automa  $A$  che abbiamo costruito ha una prima parte deterministica, mentre la seconda è sì deterministica ma emula la costruzione per sottoinsiemi;
- non possiamo evitare il salto esponenziale: se concateniamo  $(a+b)^*$  con  $a(a+b)^{n-1}$  otteniamo il solito  $L_n$ , che ha bisogno di  $2^n$  stati partendo da  $n+1$ .

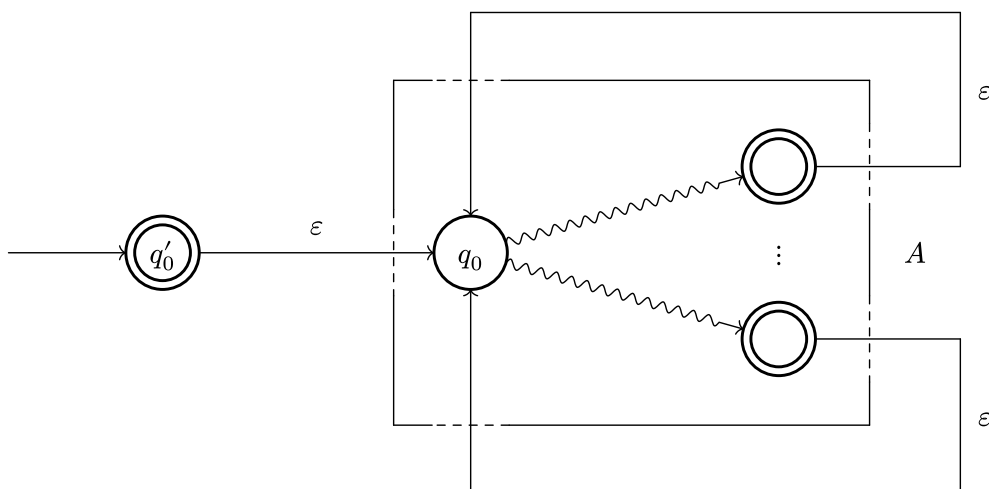
#### 3.2. Chiusura di Kleene

Con questa ultima operazione chiudiamo la dimostrazione del teorema di Kleene.

Questa operazione è definita come

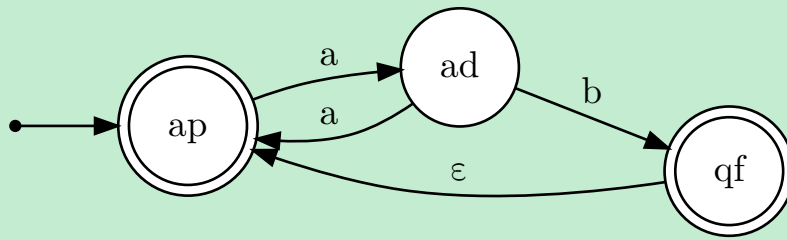
$$L^* = \bigcup_{k \geq 0} L^k = \{w \in \Sigma^* \mid \exists x_1, \dots, x_k \in L \mid k \geq 0 \mid w = x_1 \dots x_k\}.$$

Un automa per la star deve cercare di scomporre la stringa in ingresso in più stringhe di  $L$ . Possiamo prendere spunto dall'automa per la concatenazione: facciamo partire l'automa per  $L$ , ogni volta che arriviamo in uno stato finale lo facciamo ripartire dallo stato iniziale. Devo accettare anche la parola vuota, quindi aggiungiamo uno stato iniziale finale.



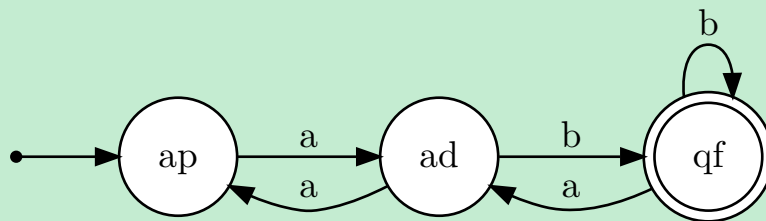
Abbiamo bisogno dello stato iniziale  $q'_0$  perché dentro l'automa ci possono essere delle transizioni che mi fanno ritornare indietro e mi fanno accettare di più di quello che dovrei.

**Esempio 3.2.1:** Consideriamo il seguente automa **sbagliato** per la chiusura di Kleene del linguaggio delle sequenze dispari di  $a$  seguite da una  $b$ . Se vogliamo l'espressione regolare per questo linguaggio, essa è  $(aa)^*ab$ .



Non abbiamo inserito uno stato iniziale aggiuntivo. Che succede? La stringa  $aa$  adesso viene accettata, anche se palesemente non appartiene al linguaggio, così come la stringa  $abaa$ .

Un automa per la star di questo linguaggio, inoltre, è molto facile da trovare perché la lettera  $b$  fa da marcatore, e il numero di stati rimane quello dell'automa di partenza.



### 3.2.1. DFA

Ci piace questa soluzione, perché stiamo aumentando solo di uno il numero di stati dell'automa, ma siamo caduti nel non determinismo, e partire da DFA e finire in NFA non ci piace molto.

Purtroppo, come spesso ci succede, per tornare nei DFA dobbiamo, nel caso peggiore, applicare la costruzione per sottoinsiemi e fare un salto esponenziale nel numero degli stati. In poche parole

$$\text{sc}(L^*) \leq 2^{\text{nsc}(L^*)}.$$

### 3.2.2. NFA

L'abbiamo formulato nella scorsa sezione: se partiamo da NFA otteniamo ancora degli NFA, quindi ci piace, e lo facciamo in modo semplice aggiungendo solo uno stato, ovvero

$$\text{nsc}(L^*) \leq \text{nsc}(L) + 1.$$

### 3.2.3. Esempi utili per dopo

Per ora abbiamo visto l'esempio del linguaggio  $L = (aa)^*b$ , che era estremamente comodo da scomporre per via della presenza di una sola  $b$  nella stringa in input. Vediamo ora qualche altro esempio notevole per la prossima sezione.

**Esempio 3.2.3.1:** Definito il linguaggio  $L = aaaba^*$ , dobbiamo calcolare  $L^*$ .

Questo linguaggio è «facilmente» scomponibile: ogni volta che troviamo una  $b$  torniamo indietro di 3 caratteri e dividiamo la stringa in quel punto.

Ad esempio, la stringa

$$aaabaaaaaaabaabaaaab$$

viene suddivisa nel seguente modo:

$$aaabaaaa \mid aaab \mid aaaba \mid aaab.$$

L'automa comunque esegue un sacco di test non deterministici ogni volta che legge delle  $a$  dopo una  $b$ , perché rimaniamo sempre in uno stato finale.

**Esempio 3.2.3.2:** Definito invece il linguaggio  $L = a(b + baab)a^*$ , dobbiamo calcolare  $L^*$ .

Questo linguaggio invece è più difficile da scomporre. Ad esempio, data la stringa

$$abaabaaaaabaaba$$

essa la possiamo dividere in

$$aba \mid abaaaa \mid abaaba$$

oppure la possiamo dividere in

$$abaabaaaa \mid abaaba.$$

Per questa stringa abbiamo già due modi di scomposizione possibili.

Cambiamo la stringa: data la stringa

$$abaabaabaabaaaba$$

essa la possiamo dividere in

$$aba \mid aba \mid aba \mid abaa \mid aba$$

oppure la possiamo dividere in

$$abaaba \mid abaabaa \mid aba.$$

In generale, si possono creare delle stringhe che hanno un numero di suddivisioni enorme.

### 3.2.4. Codici

A cosa servono i tre esempi che abbiamo introdotto nella sezione precedente?

**Definizione 3.2.4.1** (Codice): Dato  $X \subseteq \Sigma^*$ , diciamo che  $X$  è un **codice** se e solo se

$$\forall w \in X^* \quad \exists! \text{ decomposizione di } w \text{ come } x_1 \dots x_k \mid x_i \in L \wedge k \geq 0.$$

Dei tre esempi che abbiamo visto, solo i primi due sono dei codici: è facile dimostrare che lo sono, soprattutto il primo per via della  $b$  che fa da delimitatore. L'ultimo esempio, invece, abbiamo visto che ha delle stringhe scomponibili in più modi, quindi non è un codice.

Tra tutti i codici a noi interessano quelli che possono essere **decomposti in tempo reale**: essi sono chiamati **codici prefissi**, e sono dei codici tali che

$$\forall i \neq j \quad x_i \text{ non è prefisso di } x_j.$$

In poche parole, il codice contiene parole che **non** sono prefisse di altre. Essi sono i più **efficienti**.

Dei due codici che abbiamo a disposizione, il primo è un codice prefisso: ogni volta che troviamo una  $b$  sappiamo che dobbiamo dividere. Il secondo, invece, deve aspettare una  $b$  e poi tornare indietro di 3 posizioni per avere la decomposizione.

### 3.2.5. Star height

Per definire le espressioni regolari abbiamo a disposizione le tre operazioni

$$+ \quad | \quad \cdot \quad | \quad ()^*$$

Concentriamoci un secondo sulla chiusura di Kleene e vediamo un esempio.

**Esempio 3.2.5.1:** Date le espressioni regolari

$$(a^*b^*)^*$$

$$(a + b)^*$$

$$(ab^*)^*$$

ci chiediamo che linguaggio stanno denotando. Questo è facile:  $\{a, b\}^*$ . Ognuna lo fa a modo proprio, in base a come ha risolto il sistema delle equazioni dell'automa associato.

Nell'esempio abbiamo visto diverse espressioni per lo stesso linguaggio, ma quante star mi servono per definire completamente un linguaggio?

**Definizione 3.2.5.1** (Star height): La **star height** è il massimo numero di star innestate in una espressione regolare. Possiamo definire la quantità induttivamente, ovvero

$$\begin{aligned} h(\emptyset) &= h(\varepsilon) = h(a) = 0 \\ h(E' + E'') &= h(E' \cdot E'') = \max\{h(E'), h(E'')\} \\ h(E^*) &= 1 + h(E). \end{aligned}$$

Nell'esempio precedente, le espressioni regolari hanno star height rispettivamente 2, 1 e 2. A noi piacerebbe scrivere un'espressione regolare con la minima star height.

Sia  $L$  un linguaggio regolare. Definiamo con  $h(L)$  la **minima altezza** delle espressioni regolari che definiscono  $L$ , ovvero

$$h(L) = \min\{h(E) \mid L = L(E)\}.$$

Questa quantità, nei linguaggi infiniti, è almeno 1, non posso usare meno star.

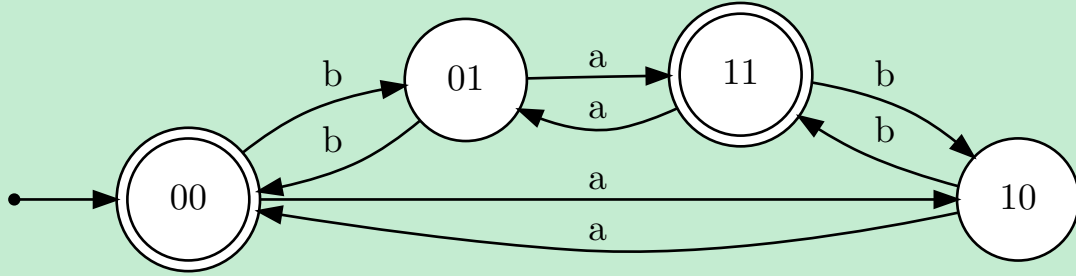
**Teorema 3.2.5.1** (Un bro nel 1966): Vale

$$\forall q > 0 \quad \exists W_q \in \{a, b\}^* \mid h(W_q) = q.$$

Il linguaggio  $W_q$  è definito come

$$W_q = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \equiv \#_b(w) \pmod{2^q}\}.$$

**Esempio 3.2.5.2:** Proviamo a disegnare  $W_q$  per  $q = 1$ .



La sua espressione regolare, dopo un po' di conti, è la seguente:

$$L = (a(bb)^*a + a(bb)^*ba(aa + ab(bb)^*ba)^*ab(bb)^*a)^*(a(bb)^*ba(aa + ab(bb)^*ba)^*ab(bb)^*b).$$

A quanto pare ho sbagliato a risolvere il sistema, sono scarso scusate.

Abbiamo quindi fatto vedere che se fissiamo il numero  $q > 0$  di star che vogliamo usare in una espressione regolare, riusciamo a trovare un linguaggio  $W_q$  che usa quel numero di star.

**Teorema 3.2.5.2:** Se  $|\Sigma| = 1$  è sufficiente una star innestata per definire completamente  $L$ , ovvero vale che

$$\forall L \subseteq \{a\}^* \text{ regolare} \quad h(L) \leq 1.$$

### 3.3. Espressioni regolari estese

Cosa succede se nelle espressioni regolari, oltre alle operazioni regolari di unione, concatenazione e chiusura, utilizziamo anche le operazioni di **intersezione** e **negazione**?

Esse sono definite **espressioni regolari estese**, e sono molto potenti ma devono essere usate con cautela. Vediamo il perché con qualche esempio.

**Esempio 3.3.1:** Sia

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ pari} \wedge \#_b(w) \text{ pari}\}.$$

Se mi chiedono l'espressione regolare di questo linguaggio mi mandano a quel paese, ma usando le espressioni regolari estese questo è molto facile.



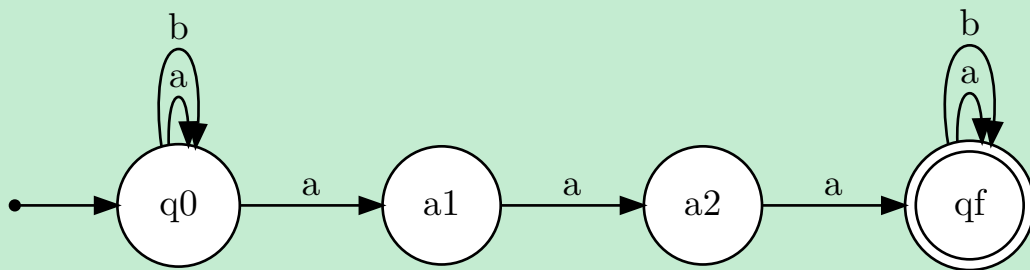
Per il linguaggio  $L_a = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \text{ pari}\}$  possiamo scrivere l'espressione regolare  $(b + ab^*a)^*$ , mentre per il linguaggio  $L_b = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_b(w) \text{ pari}\}$  possiamo scrivere l'espressione regolare  $(a + ba^*b)^*$ .

Utilizzando l'intersezione possiamo banalmente concatenare le due espressioni, ovvero

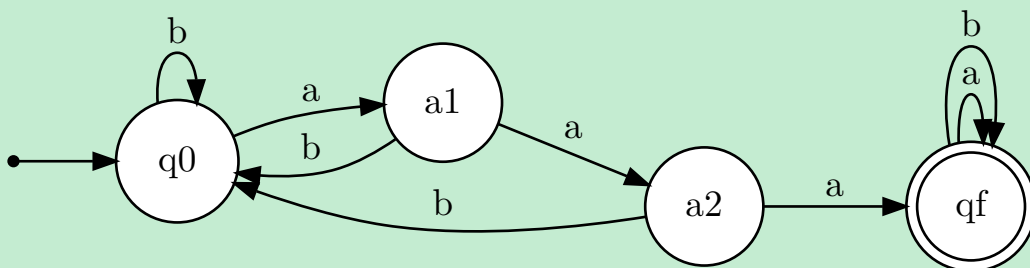
$$(b + ab^*a)^* \cap (a + ba^*b)^*.$$

**Esempio 3.3.2:** Vogliamo un'espressione regolare per le stringhe che **non** contengono tre  $a$  consecutive. Per fare ciò, costruiamo un automa e poi ricaviamo l'espressione regolare.

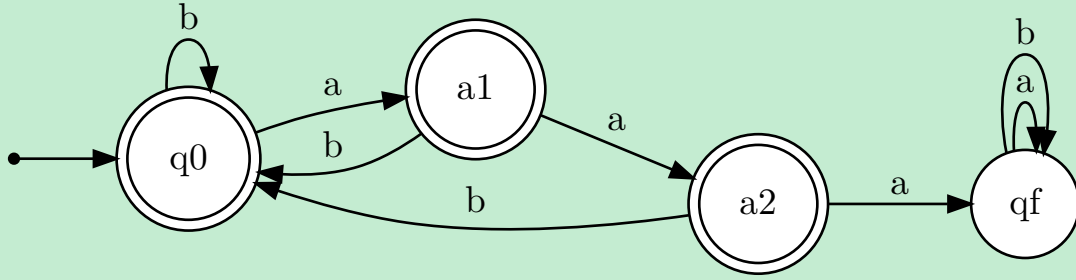
Partiamo da automi che accettano stringhe con tre  $a$  consecutive e poi complementiamo. In ordine, vediamo un NFA e un DFA per questo linguaggio di transizione.



Avevamo visto che il complemento non si comportava bene con gli NFA, quindi diamo un DFA, che invece funzionava bene con il complemento.



Siamo rimasti in un numero di stati accettabile. Andiamo a complementare questo DFA, che manterrà lo stesso numero di stati, fortunatamente.



Ora di questo dovrei farci l'espressione regolare. Sicuramente esce una bestiata enorme, con un po' di star qua e là visto che il linguaggio è infinito.

Con le espressioni regolari estese possiamo evitare l'uso delle star. Prima prendiamo tutte le stringhe che hanno tre  $a$  consecutive: esse sono nella forma

$$(a + b)^*aaa(a + b)^*.$$

Dobbiamo applicare il complemento a questa espressione per ottenere  $L$ , quindi

$$\overline{(a + b)^*aaa(a + b)^*}.$$

L'insieme di tutte le stringhe su un alfabeto lo possiamo vedere come il complemento dell'insieme vuoto rispetto all'insieme delle stringhe su quell'alfabeto, ovvero

$$(a + b)^* = \overline{\emptyset}.$$

Ma allora l'espressione regolare diventa

$$\overline{\overline{\emptyset}aaa\overline{\emptyset}},$$

che come vediamo è un'espressione che non utilizza alcuna star.

Siamo stati in grado di non usare le star per un linguaggio infinito, cosa che nelle espressioni regolari classiche non è possibile. Bisogna stare attenti però: il complemento è molto comodo ma è anche molto insidioso perché fa saltare il numero di stati esponenzialmente se usiamo degli NFA.

Come nelle espressioni regolari, possiamo chiederci il **minimo numero di star** che sono necessarie per descrivere completamente un linguaggio.

**Definizione 3.3.1** (Star height generalizzata): L'**altezza generalizzata**, o star height generalizzata, è il massimo numero di star innestate di una espressione regolare estesa. Possiamo definire la quantità induttivamente, ovvero

$$\begin{aligned} \text{gh}(\emptyset) &= \text{gh}(\varepsilon) = \text{gh}(a) = 0 \\ \text{gh}(E' + E'') &= \text{gh}(E' \cdot E'') = \text{gh}(E' \cap E'') = \max\{\text{gh}(E'), \text{gh}(E'')\} \\ \text{gh}(E^C) &= \text{gh}(E) \\ \text{gh}(E^*) &= 1 + \text{gh}(E). \end{aligned}$$

Come prima, dato un linguaggio  $L$ , possiamo definire la quantità

$$\text{gh}(L) = \min\{g(E) \mid L = L(E)\}$$

come la minima star height generalizzata di tutte le espressioni regolari estese che generano  $L$ .

Le espressioni regolari estese sono molto comode, ma di queste non si sa quasi niente:

- si sa che esistono linguaggi di altezza 0 (pefforza);
- si sa che esistono linguaggi di altezza 1;
- non si sa niente sui linguaggi di altezza almeno 2.

Quale è il cambio di marcia tra le espressioni regolari estese e quelle classiche? L'operazione di **not**: questa ci permette di dichiarare cosa non ci interessa, mentre nelle espressioni regolari classiche noi possiamo solo dire cosa vogliamo, avendo un modello dichiarativo.

### 3.4. Operazioni esotiche

#### 3.4.1. Reversal

Sia  $L \subseteq \Sigma^*$  un linguaggio. Chiamiamo

$$L^R = \{w^R \mid w \in L\}$$

il linguaggio delle stringhe ottenute ribaltando tutte le stringhe di  $L$ , ovvero

$$w = a_1 \dots a_n \implies w^R = a_n \dots a_1.$$

Questa operazione sul linguaggio  $L$  viene detta **reversal**.

**Lemma 3.4.1.1:** L'operazione di reversal preserva la regolarità.

**Dimostrazione 3.4.1.1.1** (Espressioni regolari): Le espressioni regolari di base possono essere definite nel seguente modo:

$$(\emptyset)^R = \emptyset$$

$$(\varepsilon)^R = \varepsilon$$

$$(a)^R = a.$$

Ora vediamo come definiamo le espressioni regolari induttive:

$$(E_1 + E_2)^R = E_1^R + E_2^R$$

$$(E_1 \cdot E_2)^R = E_2^R \cdot E_1^R$$

$$(E^*)^R = (E^R)^*.$$

Queste espressioni sono ancora regolari, quindi reversal preserva la regolarità. ■

Possiamo dimostrare questo lemma anche usando gli **automi**. Supponiamo di avere  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  DFA che riconosce  $L$ . Vogliamo trovare un automa  $A'$  per  $L^R$ : questo è facile, basta mantenere la struttura dell'automato invertendo il senso delle transizioni, rendendo finale lo stato iniziale e rendendo iniziali tutti gli stati finali.

In poche parole, definiamo l'automa

$$A' = (Q, \Sigma, \delta', F, \{q_0\})$$

definito dalla funzione di transizione  $\delta'$  tale che

$$\delta'(q, a) = \{p \mid \delta(p, a) = q\}.$$

In poche parole, visto che ho reversato le transizioni, devo vedere tutti gli stati  $p$  che finivano in  $q$  con  $a$  per poter fare il cammino inverso.

### 3.4.1.1. DFA

Ci piace questa soluzione? **NO**: siamo partiti da un DFA e abbiamo ottenuto un NFA per via degli stati iniziali multipli  $F$  e per il fatto che la funzione di transizione può mappare in più stati con la stessa lettera letta.

Se voglio ottenere un DFA devo fare il classicissimo salto esponenziale con la costruzione per sottoinsiemi. Con il reversal dell'automa non abbiamo cambiato il numero degli stati, quindi

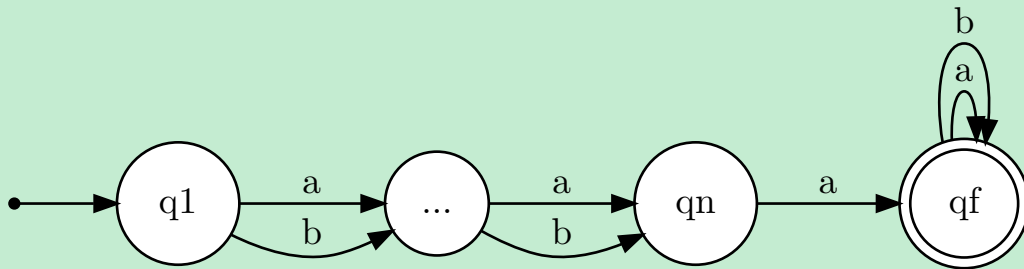
$$\text{sc}(L^R) \leq 2^{\text{nsc}(L^R)}.$$

Possiamo fare di meglio o nel caso peggiore abbiamo questo salto esponenziale?

**Esempio 3.4.1.1.1:** Prendiamo

$$L = (a + b)^{n-1}a(a + b)^*$$

il linguaggio che ha l' $n$ -esimo simbolo da sinistra uguale ad una  $a$ , che riconosco con il seguente automa deterministico.



In questo caso, il numero di stati è esattamente  $n$ , visto che ne abbiamo  $n - 1$  all'inizio per eliminare gli  $n - 1$  caratteri iniziali e poi uno stato per verificare di avere una  $a$ .

Il suo reversal è  $L^R = L_n$ , il solito linguaggio dell' $n$ -esimo simbolo da destra uguale ad una  $a$ . Abbiamo visto che un NFA per  $L_n$  ha  $n + 1$  stati mentre il DFA ha  $2^n$  stati, visto che deve osservare finestre di  $n$  caratteri consecutivi.

Il gap esponenziale non riusciamo purtroppo ad evitarlo.

**Esempio 3.4.1.1.2:** Molto curiosa la situazione inversa: se partiamo da  $L_n$  riconosciuto da un DFA di  $2^n$  stati noi otteniamo un reversal  $L_n^R = L$  che, minimizzato, ha  $n$  stati (escluso lo stato trappola).

### 3.4.1.2. NFA

Se partiamo invece da un NFA, con la costruzione precedente manteniamo lo status di NFA, mantenendo inoltre il numero degli stati, quindi siamo contenti, ottenendo

$$\text{nsc}(L^R) = \text{nsc}(L).$$

### 3.4.2. Shuffle

L'operazione di **shuffle**, applicata a due stringhe, le prende e le mescola, mantenendo l'ordine dei caratteri mentre le mischiamo. In poche parole, possiamo pensare di avere due **mazzieri**, ognuno dei quali tiene una stringa come lista ordinata (non lessicograficamente, ma proprio come è stata scritta) dei suoi caratteri. Ad ogni iterazione scegliamo a quale mazziere chiedere un carattere, e lo aggiungiamo alla stringa finale.

Come vediamo, l'inserimento che facciamo **non è atomico**: posso chiedere al mazziere che voglio ad ogni iterazione, l'unica cosa che mi viene chiesta è di mantenere l'ordine.

**Esempio 3.4.2.1:** Date le stringhe  $aabb$  e  $b$ , possiamo ottenere le stringhe

$baabb$

$ababb$

$aabbb$

$aabbb$

$aabbb$

Ovviamente, le ultime tre stringhe sono tutte uguali e vanno considerate come stringa unica.

**Esempio 3.4.2.2:** Date le stringhe  $aabb$  e  $ab$ , possiamo ottenere molte stringhe con lo shuffle. Ne vediamo un paio per vedere la non atomicità dell'operazione.

$aababb$

$aaabbb$

L'operazione di shuffle, se la applichiamo ai **linguaggi**  $L'$  e  $L''$ , è il linguaggio di tutte le stringhe ottenute tramite shuffle di una stringa di  $L'$  con una stringa di  $L''$ . Ovviamente prendiamo tutte le possibili coppie di stringhe per ottenere il linguaggio completo.

#### 3.4.2.1. Alfabeti disgiunti

Consideriamo due DFA  $A'$  e  $A''$  per i due linguaggi appena definiti. Il caso più semplice di automa per lo shuffle parte con gli alfabeti per i due linguaggi **disgiunti**, ovvero  $L'$  definito sull'alfabeto  $\Sigma' = \{a, b\}$  e  $L''$  definito sull'alfabeto  $\Sigma'' = \{c, d\}$ .

Prendiamo spunto dall'**automa prodotto**: uniamo i due automi e ne mandiamo avanti uno alla volta in base al carattere che leggiamo. Definiamo quindi

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

tale che:

- gli **stati** sono tutte le possibili coppie di stati dei due automi, ovvero

$$Q = Q' \times Q'';$$

- lo **stato iniziale** è formato dai due stati iniziali base, ovvero

$$q_0 = (q'_0, q''_0);$$

- l'**alfabeto** è l'unione dei due alfabeti di base, ovvero

$$\Sigma = \Sigma' \cup \Sigma'';$$

- la **funzione di transizione**, in base al carattere che legge, deve mandare avanti uno dei due automi e mantenere l'altro nello stesso stato, ovvero

$$\delta((q, p), x) = \begin{cases} (\delta'(q, x), p) & \text{se } x \in \Sigma' \\ (q, \delta''(p, x)) & \text{se } x \in \Sigma'' \end{cases};$$

- gli **stati finali** sono tutte le coppie formate da stati finali, perché devo riconoscere sia la prima che la seconda stringa, ovvero

$$F = \{(q, p) \mid q \in F' \wedge p \in F''\}.$$

Il numero di stati di questo automa è il prodotto del numero di stati dei due automi, ovvero

$$\text{sc}(\text{shuffle}(L', L'')) = \text{sc}(L') \cdot \text{sc}(L'').$$

Abbiamo considerato solo il caso in cui  $A'$  e  $A''$  sono DFA. Per il caso non deterministico, basta modificare leggermente la funzione di transizione ma il numero di stati rimane invariato.

### 3.4.2.2. Stesso alfabeto

Se invece i due linguaggi sono definiti sullo stesso alfabeto  $\Sigma$  come ci comportiamo? Dobbiamo fare affidamento sul **non determinismo**: dobbiamo scommettere se il carattere che abbiamo letto deve mandare avanti il primo automa o il secondo automa. Tra tutte le possibili computazioni ce ne deve essere una che termina in una coppia di stati entrambi finali. Se nessuna computazione termina in uno stato accettabile allora rifiutiamo la stringa data.

Se partiamo da due DFA otteniamo un NFA con un numero di stati uguale al prodotto degli stati dei due automi iniziali. Questa situazione non ci piace, quindi torniamo in un DFA facendo un salto esponenziale con la costruzione per sottoinsiemi, quindi

$$\text{sc}(\text{shuffle}(L', L'')) \leq 2^{\text{nsc}(\text{shuffle}(L', L''))}.$$

Invece, se partiamo da due NFA otteniamo ancora un NFA, quindi la situazione ci piace. Il numero di stati l'abbiamo già definito ed è uguale a

$$\text{nsc}(\text{shuffle}(L', L'')) = \text{nsc}(L') \cdot \text{nsc}(L'').$$

### 3.4.2.3. Alfabeto unario

Infine, se i due linguaggi sono definiti sull'**alfabeto unario**, ovvero

$$L', L'' \subseteq \{a\}^*$$

l'operazione di shuffle collassa banalmente l'operazione di **prodotto**, perché alla fine stiamo facendo shuffle su stringhe che sono formate sempre da una e una sola lettera, quindi non conta come le mischiamo ma conta la lunghezza finale della stringa che ci esce.

## 4. Lezione 11 [02/04]

### 4.1. Reversal

Abbiamo già visto l'operazione di reversal applicato ad un linguaggio, ovvero dato  $L$  regolare definiamo

$$L^R = \{w^R \mid w \in L\}$$

anch'esso regolare formato da tutte le stringhe di  $L$  lette in senso opposto. In poche parole, se  $w = a_1 \dots a_n$  allora  $w^R = a_n \dots a_1$ . Ovviamente, il reversal è **idempotente**, ovvero

$$(L^R)^R = L.$$

Cosa succede se applichiamo il reversal ad una **grammatica**?

Data una grammatica  $G$  di tipo 2 per  $L$ , come otteniamo una grammatica per  $L^R$ ? Abbiamo scelto una grammatica di tipo 2 perché le regole sono «standard» nella forma  $A \rightarrow \alpha$  con  $\alpha \in (V \cup \Sigma)^+$ . Questa costruzione è facile: invertiamo ogni parte destra delle regole di derivazione, ovvero definiamo

$$\forall (A \rightarrow \alpha) \quad \text{definiamo } A \rightarrow \alpha^R.$$

**Esempio 4.1.1:** Data una grammatica per  $L$  con regola di produzione

$$A \rightarrow aaAbBb,$$

una grammatica per  $L^R$  ha come regola di produzione

$$A \rightarrow bBbAaa.$$

Prendiamo ora una grammatica di tipo 3, che sappiamo essere capace di generare i linguaggi regolari, a meno della parola vuota. Le regole di produzione sono nella forma

$$A \rightarrow aB \mid a.$$

Avevamo visto due estensioni delle grammatiche regolari: una di queste è rappresentata dalle **grammatiche lineari a destra**, ovvero quelle grammatiche con regole di produzione

$$A \rightarrow wB \mid w \quad \text{tale che } w \in \Sigma^*.$$

Avevamo anche dimostrato che queste grammatiche sono equivalenti alle grammatiche di tipo 3 trasformando la stringa  $w$  in una serie di derivazioni che rispettino le grammatiche regolari.

L'altra estensione sono le grammatiche **lineari a sinistra**, con regole di produzione

$$A \rightarrow Bw \mid w \quad \text{tale che } w \in \Sigma^*.$$

Cosa possiamo dire di queste?

**Lemma 4.1.1:** Le grammatiche lineari a sinistra generano i linguaggi regolari.

**Dimostrazione 4.1.1.1:** Partiamo da una  $G$  lineare a sinistra e applichiamo il **reversal**: otteniamo una grammatica  $G'$  lineare a destra, visto che applichiamo la trasformazione

$$A \rightarrow Bw \mid w \implies A \rightarrow wB \mid w.$$

Possiamo quindi dire che

$$L(G') = (L(G))^R.$$

Sappiamo che i linguaggi regolari sono chiusi rispetto all'operazione di reversal, quindi essendo  $L(G')$  regolare allora anche  $L(G)$  lo deve essere. Quindi anche le grammatiche lineari a sinistra generano i linguaggi regolari. ■

Se prendiamo un linguaggio che è sia lineare a destra e a sinistra otteniamo le **grammatiche lineari**, che però generano di più rispetto alle grammatiche regolari.

## 4.2. Algoritmo per automa minimo

Dato  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA senza stati irraggiungibili, costruiamo l'automa per il reversal del linguaggio accettato da  $M$ . Definiamo quindi l'automa  $M^R = (Q, \Sigma, \delta^R, F, \{q_0\})$  definito dalla **funzione di transizione**

$$\delta^R(p, a) = \{q \mid \delta(q, a) = p\}.$$

Questo automa, ovviamente, è NFA per via del non determinismo sulle transizioni e del non determinismo sugli stati iniziali multipli. A noi non piace, vogliamo ancora un DFA, quindi applichiamo la **costruzione per sottoinsiemi**.

Definiamo allora l'automa  $N = \text{sub}(M^R)$  DFA ottenuto dalla **subset construction**, definito dalla tupla  $(Q'', \Sigma, \delta'', q_0'', F'')$  tale che:

- $Q'' \leq 2^Q$  **insieme degli stati raggiungibili**, ovvero andiamo a rimuovere dall'automa tutti gli stati che sono irraggiungibili; con stati, ovviamente, ci stiamo riferendo ai vari sottoinsiemi;
- $\delta''$  **funzione di transizione** tale che

$$\delta''(\alpha, a) = \bigcup_{p \in \alpha} \delta^R(p, a);$$

- $q_0'' = F$  **stato iniziale** preso da  $M^R$ , che aveva già un insieme come stato iniziale;
- $F''$  **insieme degli stati finali** tale che

$$F'' = \{\alpha \in Q'' \mid q_0 \in \alpha\}$$

perché per il reversal lo stato iniziale diventava finale.

Vediamo adesso un risultato abbastanza strano di questa costruzione.

**Lemma 4.2.1:**  $N$  è il DFA minimo per il reversal del linguaggio riconosciuto da  $M$ .



**Dimostrazione 4.2.1.1:** Per prima cosa, dimostriamo che  $N$  **riconosce** il reversal del linguaggio riconosciuto da  $M$ . Ma questo è banale: l'abbiamo fatto per costruzione, usando prima il reversal e poi la costruzione per sottoinsiemi.

Dimostriamo quindi che  $N$  è **minimo**. In un automa minimo, tutti gli stati sono distinguibili tra loro. Analogamente, al posto di dimostrare questo, possiamo fare vedere che

$$\forall A, B \in Q'' \quad A, B \text{ non distinguibili} \implies A = B.$$

Assumiamo quindi che  $A, B \in Q''$  siano due stati non distinguibili e che allora vale  $A = B$ . Questi due stati sono sottoinsiemi derivanti dalla costruzione per sottoinsiemi, quindi per dimostrare l'uguaglianza di insiemi devo dimostrare che

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Partiamo con  $A \subseteq B$ . Sia  $p \in A$ , allora, visto che tutti gli stati sono raggiungibili, esiste una stringa  $w \in \Sigma^*$  tale che, nell'automa  $M$ , vale

$$\delta(q_0, w) = p.$$

Per come abbiamo definito l'NFA per il reversal, allora

$$q_0 \in \delta^R(p, w^R).$$

Usando invece il DFA, abbiamo che

$$q_0 \in \delta''(A, w^R)$$

perché abbiamo assunto che  $p \in A$ . Ma allora  $w^R$  è accettata da  $N$  partendo da  $A$ .

Ora, visto che  $A$  e  $B$  non sono distinguibili per ipotesi, la stringa  $w^R$  è accettata da  $N$  partendo anche da  $B$ , cioè

$$q_0 \in \delta''(B, w^R)$$

quindi esiste un elemento  $p' \in B$  tale che

$$q_0 \in \delta^R(p', w^R)$$

e quindi che

$$\delta(q_0, w) = p'.$$

L'automa è deterministico, quindi  $p = p'$ , e quindi che  $p \in B$ , e quindi

$$A \subseteq B.$$

La dimostrazione è analoga per la seconda inclusione. ■

Questa costruzione è un po' strana e contro quello che abbiamo sempre fatto: la costruzione per sottoinsiemi di solito fa esplodere il numero degli stati, mentre stavolta ci dà l'automa minimo per il reversal. Cosa possiamo fare con questo risultato?

---

### Algoritmo di Brzozowski

---

Sia  $K$  un DFA per il linguaggio  $L$  senza stati irraggiungibili

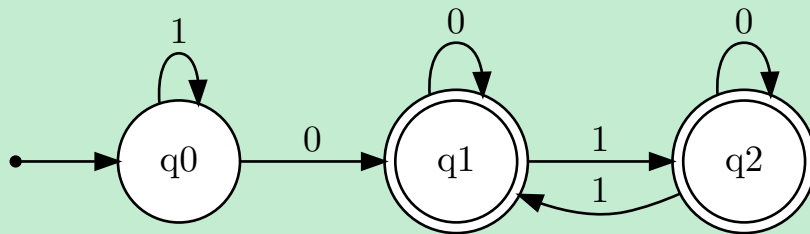
- 1: Costruiamo  $K^R$  NFA per  $L^R$
  - 2: Costruiamo  $M = \text{sub}(K^R)$  DFA per  $L^R$
  - 3: Costruiamo  $M^R$  NFA per  $(L^R)^R = L$
  - 4: Costruiamo  $N = \text{sub}(M^R)$  DFA per  $L$
- 

**Teorema 4.2.1:**  $N$  è l'automa minimo per  $L$ .

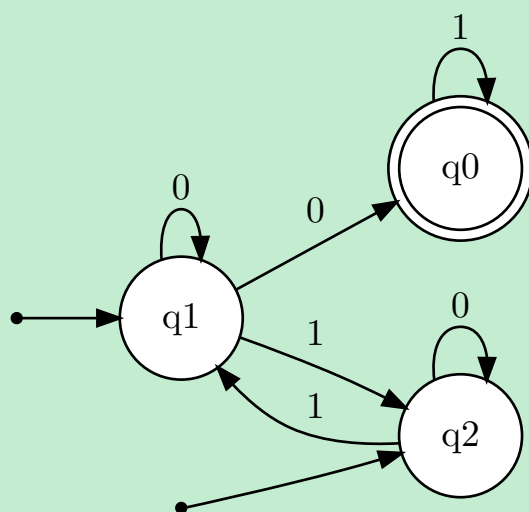
**Dimostrazione 4.2.1.2:** La dimostrazione è una conseguenza del lemma precedente: la prima coppia reversal+subset costruisce l'automa minimo per  $L^R$ , mentre la seconda coppia reversal+subset costruisce l'automa minimo per  $(L^R)^R = L$ . ■

Grazie all'**algoritmo di Brzozowski** noi abbiamo a disposizione un algoritmo di minimizzazione un po' strano dal punto di vista pratico che però ottiene l'automa minimo, anche se non è il più efficiente, ce ne sono di migliori.

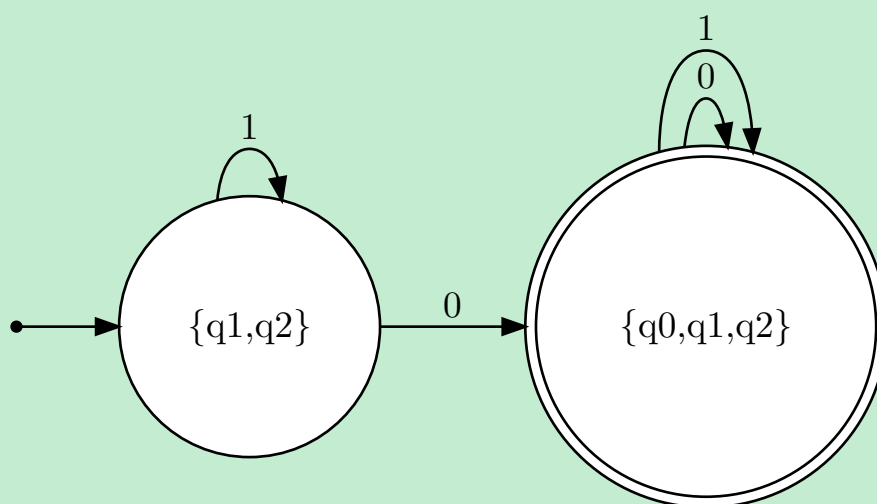
**Esempio 4.2.1:** Ci viene dato il DFA  $K$  della seguente figura.



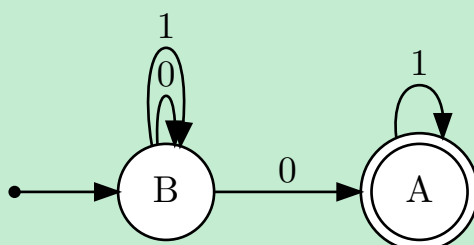
Notiamo subito che lo stato  $q_2$  è ridondante. Andiamo a costruire  $K^R$ .



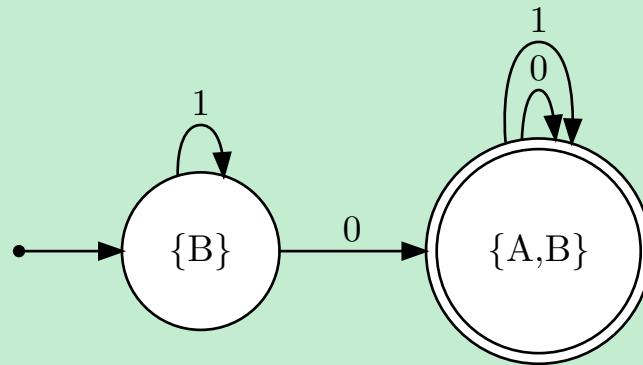
Rendiamo DFA questo automa, e chiamiamolo  $M$ .



Facciamo il renaming, chiamando  $A$  l'insieme iniziale e  $B$  l'insieme finale. Rifacciamo ora la costruzione del reversal, ottenendo  $M^R$ .



Infine, facciamo la costruzione per sottoinsiemi su  $M^R$  ottenendo  $N$ .



### 4.3. Pumping Lemma

Come facciamo a dimostrare che un linguaggio non è regolare? Che tecniche abbiamo?

Prima di tutto abbiamo il **criterio di distinguibilità**: se troviamo un insieme  $X$  di parole distinguibili tra loro per un linguaggio  $L$ , allora ogni DFA per  $L$  ha almeno  $|X|$  stati. Come lo utilizziamo? Se  $|X| = \infty$  allora servono un numero infinito di stati, cosa che negli automi a **stati finiti** non è possibile.

**Esempio 4.3.1:** Definiamo il linguaggio

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

Gli automi a stati finiti **non sanno contare**, quindi non posso contare quante  $a$  ci sono nella stringa e poi verificare lo stesso numero di  $b$ .

Definiamo l'insieme  $X = \{a^n \mid n \geq 0\}$ . Esso è formato da stringhe distinguibili tra loro: infatti, dati  $a^i$  e  $a^j$  per distinguere utilizzo  $z = b^i$ .

Un altro modo per dimostrare la non regolarità è far vedere che il linguaggio dato fa saltare qualche proprietà di chiusura.

**Esempio 4.3.2:** Definiamo il linguaggio

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$$

che palesemente non è regolare perché non posso contare, ma come lo dimostro?

Con la **distinguibilità** posso usare lo stesso insieme  $X$  di prima, ma facciamo finta di non saperlo fare.

Sappiamo che i linguaggi regolari sono chiusi rispetto all'operazione di intersezione. Prendiamo quindi un linguaggio regolare e facciamo l'intersezione con  $L$ , ad esempio facciamo

$$L \cap a^* b^*.$$

Visto che  $a^*b^*$  è un linguaggio regolare e l'intersezione chiude i linguaggi regolari, anche il linguaggio risultante deve essere regolare, ma questa intersezione genera il linguaggio dell'esempio precedente, perché date tutte le stringhe con  $a$  e  $b$  uguali filtriamo tenendo solo quelle che hanno tutte le  $a$  all'inizio e poi tutte le  $b$ .

Visto che il linguaggio risultante non è regolare, non lo è nemmeno  $L$ .

L'ultimo metodo che abbiamo a disposizione è il **pumping lemma per i linguaggi regolari**.

**Lemma 4.3.1** (Pumping lemma per i linguaggi regolari): Sia  $L$  un linguaggio regolare. Allora esiste una costante  $N$  tale che  $\forall z \in L$ , con  $|z| \geq N$ , possiamo scrivere  $z$  come

$$z = uvw$$

con:

1.  $|uv| \leq N$ ;
2.  $v \neq \varepsilon$ ;
3.  $\forall k \geq 0 \quad uv^k w \in L$ .

Un po' strano: il succo di questo lemma è che se prendiamo delle stringhe lunghe prima o poi qualcosa si deve ripetere. Infatti, i tre punti ci dicono questo:

1. il primo punto ci dice che la parte che contiene la parte ripetuta è all'inizio e non è troppo lontana;
2. il secondo punto ci dice che effettivamente viene ripetuto qualcosa;
3. il terzo punto ci dice che possiamo ripetere all'infinito la parte centrale senza uscire dal linguaggio, appunto pumping, pompare.

In poche parole, la scomposizione di  $z$  avviene nei punti di ripetizione:  $u$  è la parte prima della ripetizione,  $v$  è la parte che viene ripetuta e  $w$  è la parte dopo la ripetizione.

Questa è una **condizione necessaria**: se faccio vedere se un linguaggio viola questo lemma allora non è regolare, ma potrebbe non bastare questo per far vedere che un linguaggio non è regolare.

**Dimostrazione 4.3.1.1:** Sia  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  un DFA per  $L$ . Sia  $N = |Q|$ .

Prendiamo una stringa  $z = a_1 \dots a_m \in L$  con  $|z| \geq N$ . Un qualsiasi cammino accettante per  $z$  è nella forma

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_m} p_m \in F$$

che attraversa  $N + 1$  stati, ma noi avendone  $N$  vuol dire che almeno uno stato lo stiamo visitando 2+ volte.

Ma allora esistono  $i, j \mid i < j$  tali che  $p_i = p_j$ . Andiamo a scomporre la nostra stringa  $z$  come  $z = uvw$  tali che

$$\begin{aligned}u &= a_1 \dots a_i \\v &= a_{i+1} \dots a_j \\w &= a_{j+1} \dots a_m.\end{aligned}$$

Visto che  $i < j$  allora la parte centrale ha almeno un elemento, quindi  $v \neq \varepsilon$ .

Inoltre, visto che  $p_i = p_j$  vuol dire che partendo da  $p_i$ , leggendo la parte di stringa  $v$ , finiamo in  $p_j$ . Ma allora è possibile ripetere un numero questo cammino un numero arbitrario di volte.

Infine, per assunzione la lunghezza della stringa è  $|z| = m \geq N$ . Quando arriviamo all' $N$ -esimo carattere abbiamo visto  $N + 1$  stati, ovvero sono già passato in uno stato ripetuto, quindi  $|uv| \leq N$  perché la ripetizione deve avvenire prima dell'inizio dell'ultima parte della stringa. ■

Vediamo come utilizzare il pumping lemma per dimostrare la non regolarità. Generalmente, faremo delle dimostrazioni per assurdo: assumendo la regolarità faremo vedere che esiste una stringa tale che ogni sua scomposizione possibile fa cadere almeno uno dei punti del pumping lemma.

**Esempio 4.3.3:** Definiamo il linguaggio  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .

Per assurdo sia  $L$  un linguaggio regolare. Sia  $N$  la costante del pumping lemma. Definiamo la stringa  $z = a^N b^N$  che rispetta la minima lunghezza delle stringhe. Infatti,  $|z| = 2N \geq N$ .

Scriviamo ora  $z$  come  $z = uvw$ . Deve valere il punto 1, ovvero  $|uv| \leq N$ , ma questo implica che  $u$  e  $v$  sono formate da solo  $a$ , quindi

$$u = a^i \wedge v = a^j \wedge w = a^{N-i-j} b^N \quad | \quad j \neq 0$$

perché deve valere  $v \neq \varepsilon$ .

Sappiamo inoltre che la ripetizione arbitraria di  $v$  mi mantiene nel linguaggio, ovvero che  $\forall k \geq 0$  allora  $uv^k w \in L$  ma questo non è vero: se scegliamo  $k = 0$  la stringa  $uw$  non è più accettata perché essa è nella forma

$$uw = a^i a^{N-i-j} b^N = a^{N-j} b^N$$

e ovviamente  $N - j \neq N$ , quindi  $L$  non è regolare.

Facciamo un ultimo esempio dell'applicazione del pumping lemma.

**Esempio 4.3.4:** Definiamo il linguaggio

$$L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\} = \{a^{2^0}, a^{2^1}, \dots\} = \{a, aa, aaaa, \dots\}$$

insieme delle potenze di due scritte in unario.

Questo ovviamente non è regolare. Come lo dimostriamo con il pumping lemma?

Sia  $N$  la costante del PL per  $L$ . Prendiamo una stringa di  $L$  lunga almeno  $N$ , ovvero la stringa  $z = a^{2^N}$  la cui lunghezza è  $|z| \geq N$ . Scomponiamo ora  $z$  come  $z = uvw$ , cosa possiamo dire?

Sappiamo che  $v \neq \varepsilon$ , quindi  $|v| \geq 1$ .

Inoltre, sappiamo della ripetizione arbitraria di  $v$ , quindi le stringhe  $uv^k w$  devono stare in  $L$ . Cosa possiamo dire della lunghezza di questa stringa? Sappiamo che

$$|uv^k w| = 2^N + |v|(k-1) = 2^N + j(k-1) \stackrel{k=2}{=} 2^N + j < 2^{N+1}.$$

Che valore assume  $j$ ? La potenza successiva è  $2^{N+1}$  ma  $j$  essendo un pezzo di  $z$  è al massimo  $2^N$  quindi  $j < 2^N$  e quindi  $2^N + j < 2^{N+1}$ .

Ma allora  $L$  non è regolare.

## 5. Lezione 12 [04/04]

### 5.1. Problemi di decisione per i linguaggi regolari

I **problemi di decisione** sono dei problemi che hanno come unica risposta **SI** oppure **NO**. Sui linguaggi regolari abbiamo una serie di problemi di decisione interessanti che possono essere risolti in maniera automatica. Questa lista di problemi diventerà ancora più briosa quando andremo nei linguaggi context-free.

#### 5.1.1. Linguaggio vuoto e infinito

Dato un linguaggio  $L$  possiamo chiederci se  $L \neq \emptyset$ , ovvero se  $L$  **non è vuoto**, o se  $L$  è **infinito**.

**Lemma 5.1.1.1:** Sia  $L$  un linguaggio regolare e sia  $N$  la costante del pumping lemma per  $L$ . Allora:

1.  $L \neq \emptyset \iff L$  contiene almeno una stringa di lunghezza  $< N$ ;
2.  $L$  è infinito  $\iff L$  contiene almeno una stringa  $z$  con  $N \leq |z| < 2N$ .

**Dimostrazione 5.1.1.1.1:** Partiamo con la dimostrazione del punto 1.

[ $\Leftarrow$ ] Se  $L$  contiene una stringa di lunghezza  $< N$  allora banalmente  $L \neq \emptyset$ .

[ $\Rightarrow$ ] Se  $L \neq \emptyset$  sia  $z \in L$  la stringa di lunghezza minima in  $L$ . Per assurdo sia  $|z| \geq N$ , ma allora per il pumping lemma possiamo dividere  $z$  come  $z = uvw$ . Sappiamo dal terzo punto che possiamo ripetere un numero arbitrario di volte la stringa  $v$  e stare comunque in  $L$ . Ripetiamo  $v$  un numero di volte pari a 0: otteniamo la stringa  $z' = uw$  che appartiene a  $L$  per il pumping lemma. Avevamo detto che  $z$  era la stringa più corta di  $L$ , ma abbiamo appena mostrato che  $|z'| < |z|$ : questo è assurdo e quindi  $|z| < N$ .

Dimostriamo ora il punto 2.

[ $\Leftarrow$ ] Se  $L$  contiene una stringa  $z$  di lunghezza  $N \leq |z| \leq 2N$ , visto che  $|z| \geq N$  applichiamo il pumping lemma per scomporre  $z$  in  $z = uvw$ . Per il terzo punto possiamo ripetere un numero arbitrario di volte il fattore  $v$  e rimanere comunque in  $L$ . Ma allora  $L$  è infinito.

[ $\Rightarrow$ ] Se  $L$  è infinito, sicuramente esiste una stringa  $z$  che è lunga almeno  $N$ . Tra tutte queste stringhe, scegliamo la più corta di tutte. Per assurdo sia  $|z| \geq 2N$ , ma allora possiamo scomporre  $z$  come  $z = uvw$  con  $|uv| \leq N$  e  $v \neq \epsilon$ . Adesso andiamo a ripetere un numero di volte pari a 0 il fattore  $v$ , ottenendo  $z' = uw \in L$ . Quale è la sua lunghezza? Possiamo dire che  $|z'| = |z| - |v|$  ma  $|v|$  è al massimo  $N$  per il primo punto analizzato, quindi  $|z'|$  è almeno  $N$  e al massimo  $2N$ , ma questo è assurdo perché  $z$  era la più corta tra tutte le stringhe e, per assurdo, l'avevamo posta di lunghezza  $\geq 2N$ . ■

Questo lemma ci dice che se vogliamo sapere se un linguaggio non è vuoto basta generare tutte le stringhe di lunghezza fino a  $N$  escluso e vedere se ne abbiamo una nel linguaggio, mentre se vogliamo sapere se un linguaggio è infinito basta generare tutte le stringhe di lunghezza compresa tra  $N$  incluso e  $2N$  escluso e vedere se ne abbiamo una nel linguaggio.

Quale è il problema? Sicuramente è un approccio **inefficiente**, visto che dobbiamo generare un numero esponenziale di casi da analizzare. Possiamo fare di meglio? **SI**: per vedere se un



linguaggio non è vuoto devo cercare un **cammino** dallo stato iniziale ad uno stato finale, mentre per vedere se un linguaggio è infinito potrei cercare i **cicli** sui cammini del punto precedente. Ci siamo quindi ricondotti a dei **problemi su grafi**, che sappiamo risolvere efficientemente.

### 5.1.2. Appartenenza

Dato  $L$  un linguaggio regolare e  $x \in \Sigma^*$  una stringa, il problema di **appartenenza** si chiede se  $x \in L$ . Questo lo sappiamo fare tranquillamente in tempo lineare: basta eseguire il DFA (se ce l'abbiamo) e vedere se finiamo in uno stato finale.

### 5.1.3. Universalità

Dato  $L$  un linguaggio regolare, il problema di **universalità** si chiede se  $L = \Sigma^*$ , ovvero  $L$  contiene tutte le stringhe della chiusura di Kleene dell'alfabeto  $\Sigma$ . Questo sembra difficile, ma possiamo sfruttare le operazioni che rendono chiusi i linguaggi regolari: infatti, possiamo chiederci invece se

$$L = \Sigma^* \iff L^C = \emptyset$$

e questo lo sappiamo fare grazie al lemma precedente.

### 5.1.4. Inclusione e uguaglianza

Infine, l'ultimo problema che vediamo prende due linguaggi  $L_1$  e  $L_2$  regolari e si chiede se  $L_1 \subseteq L_2$ . Questo problema si chiama problema dell'**inclusione** e lo possiamo risolvere manipolando quello che ci viene chiesto: infatti, al posto dell'inclusione, possiamo chiederci se

$$L_1 \subseteq L_2 \iff L_1 \cap L_2^C = \emptyset,$$

che sappiamo fare tranquillamente grazie al lemma.

Se non volessimo utilizzare le proprietà di chiusura, possiamo costruire un **automa prodotto** che ha come stati finali tutte le coppie di stati dove il primo accetta  $L_1$  e il secondo rifiuta  $L_2$ .

E se invece volessimo risolvere il problema di **uguaglianza**, ovvero quello che si chiede se  $L_1 = L_2$ ? Basta dimostrare la doppia inclusione  $L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_1$  e siamo a cavallo. Un algoritmo diverso utilizza le classi di equivalenza, ma non lo vedremo.

## 5.2. Altre operazioni

Vediamo qualche **operazione** un pelo più complicata.

### 5.2.1. Raddoppio

Sia  $L$  regolare, definiamo l'operazione  $\alpha$  tale che

$$\alpha(L) = \{x \in \Sigma^* \mid xx \in L\}.$$

**Esempio 5.2.1.1:** Dato il linguaggio  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  allora

$$\alpha(L) = \{\varepsilon\}.$$

Dato invece il linguaggio  $L = a^*$  allora

$$\alpha(L) = a^*.$$

Infine, dato il linguaggio  $L = \{a^n \mid n \text{ pari}\}$  allora

$$\alpha(L) = a^*.$$

Se  $L$  è regolare, riesco a dimostrare che anche  $\alpha(L)$  è regolare? Abbiamo a disposizione un automa  $A$  per  $L$ , vogliamo sapere se il mio input, raddoppiato, viene accettato da  $L$ .

Come possiamo ragionare? Vogliamo cercare un cammino che fa da  $q_0$  a  $q_f \in F$  leggendo la stringa  $xx$ . Nell'automata  $A$ , leggendo  $x$ , finiamo in uno stato  $p$ : dobbiamo cercare di indovinare questo  $p$  per far partire la computazione una seconda volta e arrivare in  $q_f \in F$ .

L'idea è quindi di scommettere lo stato che raggiungiamo con  $A$  leggendo  $x$ , e poi mandare in parallelo due copie di  $A$ , uno dall'inizio e uno dallo stato indovinato.

Formalizziamo questo automa. Dato  $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  DFA per  $L$ , costruiamo l'automata

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', I', F')$$

tale che:

- l'insieme degli stati  $Q = Q^3$  è formato da triple

$$[p, q', q'']$$

dove:

- ▶  $p$  è lo stato che abbiamo scommesso di raggiungere con  $x$  in  $A$ ;
- ▶  $q'$  è lo stato che portiamo avanti in  $A$  a partire da  $q_0$ ;
- ▶  $q''$  è lo stato che portiamo avanti in  $A$  a partire da  $p$ ;
- l'insieme degli stati iniziali (multipli)

$$I' = \{[p, q_0, p] \mid p \in Q\}$$

dove scommettiamo un qualunque stato  $p$  come stato intermedio;

- l'insieme degli stati finali

$$F' = \{[p, p, q] \mid q \in F\}$$

formato da tutti gli stati dove l'automata  $A$  finisce in  $p$  nella computazione iniziale e finisce in uno stato finale nella computazione da  $p$

- la funzione di transizione  $\delta'$  è tale che

$$\delta'([p, q', q''], a) = [p, \delta(q', a), \delta(q'', a)]$$

che manda avanti i due automi in parallelo.

Purtroppo, quello che otteniamo è un **NFA** per via di tutti gli stati iniziali multipli.

### 5.2.2. Metà

Un'altra operazione strana che vediamo prende un linguaggio regolare  $L$  e calcola

$$\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \mid |y| = |x| \wedge xy \in L\}.$$

In poche parole, prendo le stringhe di  $L$  di lunghezza pari e prendo la prima metà di queste.

**Esempio 5.2.2.1:** Dato il linguaggio  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$  allora

$$\frac{1}{2}L = a^*.$$

Si può dimostrare che questa operazione **mantiene la regolarità**, ma come facciamo? Possiamo ricondurre questo problema a quello precedente, variando un po' la seconda computazione.

In questo caso facciamo molte più scommesse: al posto di mandare avanti in parallelo i due automi, con la scommessa sullo stato intermedio  $p$ , qua mandiamo avanti il primo automa normalmente e il secondo lo mandiamo avanti non deterministicamente prendendo ogni simbolo possibile di  $\Sigma$ . Infatti, la stringa  $y$  è randomica, la dobbiamo inventare noi.

Cambia quindi la **funzione di transizione**  $\delta'$ , che prende ancora la tripla dello stato ma ora:

- mantiene invariato lo stato scommessa;
- manda avanti deterministicamente il primo automa;
- per ogni carattere di  $\Sigma$  fa partire una computazione con quel carattere.

Quello che otteniamo è un **turbo NFA**, se non volessimo utilizzarlo? Abbiamo rappresentazioni alternative che ci bypassano il non determinismo?

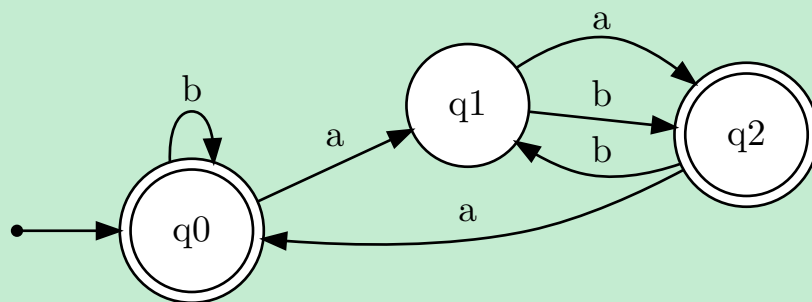
### 5.3. Automi come matrici

Possiamo rappresentare gli automi come **matrici di adiacenza**: esse sono matrici indicizzate, su righe e colonne, dagli stati dell'automa, e ogni cella è un valore booleano che viene posto a 1 se e solo se abbiamo una transizione dallo stato riga allo stato colonna.

Queste matrici sono dette **matrici di transizione**, e rappresentano le transizioni che possiamo fare all'interno dell'automa. Queste matrici possono essere anche **associate ad una lettera** di  $\Sigma$ , e queste rappresentano le transizioni che possono essere fatte nell'automa con quella lettera. Se invece le matrici sono **associate ad una stringa** rappresentano le transizioni che possono essere fatte nell'automa leggendo quella stringa, ma queste le vedremo meglio dopo.

Il **numero di possibili matrici** che possiamo costruire è finito: esso è  $2^{n \times n}$ , con  $n = |Q|$ . Questa informazione ci servirà dopo per costruire degli automi.

**Esempio 5.3.1:** Costruiamo le matrici di transizione del seguente automa.



Andiamo a calcolare le due matrici di transizione delle lettere  $a$  e  $b$ .

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ovviamente, se l'automa è un **DFA** abbiamo un solo 1 per ogni riga.

Se calcoliamo  $M_a M_b$  otteniamo la matrice che ci dice in che stato finiamo leggendo  $ab$  in base allo stato di partenza che scegliamo. Infatti:

$$M_{ab} = M_a M_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che indica esattamente gli stati che raggiungiamo leggendo la stringa  $ab$ .

Possiamo banalmente estendere questa moltiplicazione ad una stringa generica  $w = a_1 \dots a_n$ , calcolando la matrice  $M_w$  come

$$M_w = M_{a_1} \dots M_{a_n}.$$

Queste matrici ci danno informazioni molto interessanti: ogni riga ci dice in che stato possiamo arrivare partendo dallo stato della riga leggendo una certa sequenza di caratteri. Come possiamo utilizzare questa matrice a nostro vantaggio?

### 5.3.1. Prima applicazione: raddoppio

Riprendiamo l'operazione  $\alpha$ : possiamo utilizzare le matrici per risolvere questo problema evitando il non determinismo. Se noi avessimo  $M_x$  sarebbe molto facile rispondere a  $xx \in L$ :

- prendiamo la riga dello stato iniziale  $q_0$  e vediamo la colonna  $p$  che contiene l'1 della riga;
- prendiamo la riga  $p$  e vediamo la colonna  $q_f$  che contiene l'1 della riga;
- verifichiamo se  $q_f \in F$ .

Con queste tabelle è molto facile risolvere  $\alpha$ : ce le teniamo nello stato e mano a mano costruiamo l'automa con le tabelle nuove, e poi alla fine verifichiamo quello scritto sopra.

Definiamo quindi l'automa

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$$

tale che:

- l'**insieme degli stati** tiene tutte le possibili matrici booleane con indici in  $Q$ , ovvero

$$Q' = \{0, 1\}^{|Q| \times |Q|};$$

- lo **stato iniziale** è la matrice identità  $I_{|Q|}$  perché all'inizio non viene letto niente (viene letta  $\varepsilon$ ) e quindi non ci spostiamo dallo stato nel quale siamo;
- la **funzione di transizione**  $\delta'$  è tale che

$$\delta'(M, a) = MM_a;$$

- l'**insieme degli stati finali** contiene tutti gli stati che hanno delle matrici con le proprietà descritte all'inizio della sezione, ovvero

$$F' = \{M \mid \exists p \in Q \mid M[q_0, p] = 1 \wedge \exists q \in F \mid M[p, q] = 1\}.$$

Sicuramente questo è un automa a stati finiti: il numero di matrici, anche se esponenziale, è comunque un numero finito. Inoltre, questo automa che otteniamo è DFA, a differenza del precedente.

### 5.3.2. Seconda applicazione: metà

Torniamo ora sull'operazione  $\frac{1}{2}L$ : come possiamo fare questo con le matrici definite poco fa? Se prima le matrici per entrambi gli automi erano le stesse, qua la seconda parte, visto che viene inventata, si riduce ad un problema di **raggiungibilità del grafo**.

Quello che faremo è mandare avanti il primo automa deterministicamente e il secondo invece verrà rappresentato dalle potenze della **matrice dell'automata** per vedere la raggiungibilità. Qua con matrice dell'automata intendiamo la prima versione che abbiamo definito della matrice.

La matrice dell'automata la otteniamo come somma booleana di tutte le matrici  $M_x$  associate al carattere  $x \in \Sigma$ . Facendo poi la potenza  $k$ -esima di questa matrice riusciamo a vedere la raggiungibilità dopo aver letto  $k$  simboli.

Definiamo quindi l'automata

$$A' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$$

tale che:

- l'**insieme degli stati** è formato da tutte le coppie

$$Q' = Q \times \{0, 1\}^{|Q| \times |Q|}$$

dove la prima componente rappresenta lo stato dell'automata che viene mandato avanti deterministicamente e il secondo rappresenta tutte le potenze della matrice dell'automata;

- lo **stato iniziale** parte dallo stato iniziale e dalla matrice identità, ovvero

$$q'_0 = (q_0, I_{|Q|});$$

- la **funzione di transizione**  $\delta'$  è tale che

$$\delta'([q, K], a) = (\delta(q, a), KM);$$

- l'**insieme degli stati finali** contiene tutte le coppie dove la matrice, osservata nella riga definita dalla prima componente, contiene un 1 in una colonna di uno stato finale, ovvero

$$F' = \{[p, K] \mid \exists q \in F \mid K[p, q] = 1\}.$$

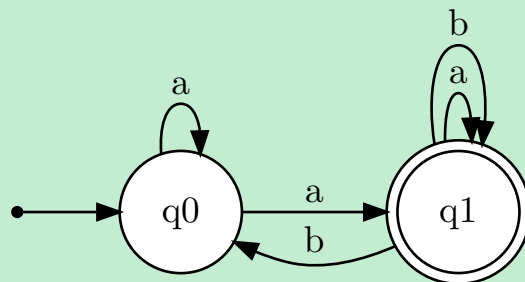
Il numero di stati è considerevole, considerando anche il prodotto cartesiano, ma abbiamo ottenuto un DFA, che invece prima non avevamo.

### 5.3.3. Matrici su NFA

Per ora abbiamo calcolato la matrice delle transizioni dei DFA, che succede se abbiamo un NFA? Ovviamente, in un NFA, avendo la possibilità di fare delle computazioni parallele, nella riga di una matrice associata ad una lettera possiamo avere più valori a 1.

Calcolando però le potenze della matrice dell'automata cosa otteniamo?

**Esempio 5.3.3.1:** Dato il seguente automa divertiamoci con qualche matrice.



Le matrici di transizione associate alle lettere  $a$  e  $b$  sono:

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proviamo a calcolare la matrice  $M_{aa}$  calcolandola con la somma intera:

$$M_{aa} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice non rappresenta più la raggiungibilità con una matrice booleana, ma **conta il numero di cammini** che abbiamo nell'automato per raggiungere quello stato. Usando la somma booleana invece avremmo ancora la matrice che definisce la raggiungibilità.

I numeri che vediamo scritti nella tabella sono i **gradi di ambiguità** delle varie stringhe (se ci limitiamo a quelle accettate): questo rappresenta appunto il numero di modi in cui possiamo arrivare a quella stringa partendo dallo stato che indicizza la riga. Il **grado di ambiguità del grafo** è il massimo grado di ambiguità delle stringhe accettate.

## 5.4. Varianti di automi

Per finire questa lezione infinita, vediamo qualche **variante** di automi.

### 5.4.1. Automi pesati

La prima variante che vediamo sono gli **automi pesati**. Essi associano ad ogni transizione un peso. Il **peso di una stringa** viene calcolato come la somma dei pesi delle transizioni che la stringa attraversa per essere accettata. Questo peso poi può essere usato in problemi di ottimizzazione, come trovare il cammino di peso minimo, ma questo ha senso solo su NFA.

### 5.4.2. Automi probabilistici

Un tipo particolare di automi pesati sono gli **automi probabilistici**, che come pesi sulle transizioni hanno la probabilità di effettuare quella transizione. Visto che parliamo di **probabilità**, i pesi sono nel range  $[0, 1]$  e, dato uno stato, tutte le transizioni uscenti sommano a 1. In realtà, potremmo sommare a meno di 1 se nascondiamo lo stato trappola. Con questi automi possiamo chiederci con che probabilità accettiamo una stringa.

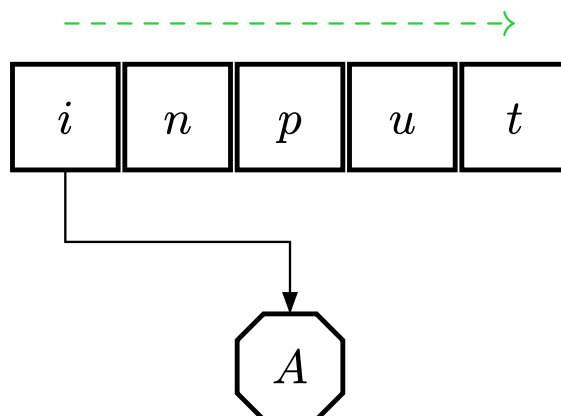
Questi automi li possiamo usare come **riconoscitori a soglia**: tutte le parole oltre una certa soglia le accettiamo, altrimenti le rifiutiamo.

Questi automi comunque non sono più potenti dei DFA: si può dimostrare che se la soglia  $\lambda$  è **isolata**, ovvero nel suo intorno non cade nessuna parola, allora possiamo trasformare questi automi probabilistici in DFA. Se la soglia non è isolata riusciamo a riconoscere una strana classe di linguaggi, che però ora non ci interessa.

## 6. Lezione 13 [09/04]

### 6.1. Varianti di automi

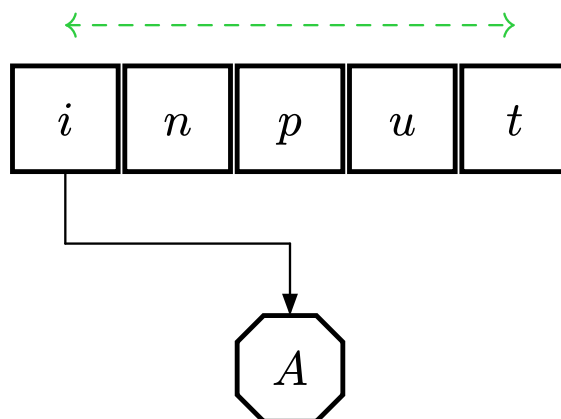
Come possiamo **rappresentare** un automa a stati finiti? Questa macchina è molto semplice: abbiamo un **nastro** che contiene l'input, esaminato da una **testina in sola lettura** che, spostandosi **one-way** da sinistra verso destra, permette ad un **controllo a stati finiti** di capire se la stringa in input deve essere accettata o meno.



La classe di linguaggi che riconosce un automa a stati finiti è la classe dei **linguaggi regolari**. Ma possiamo fare delle modifiche a questo modello? Se sì, che cosa possiamo cambiare?

#### 6.1.1. One-way VS two-way

Se permettiamo all'automa di spostarsi da sinistra verso destra ma anche viceversa, andiamo ad ottenere gli **automi two-way**, che in base alla possibilità di leggere e basta o leggere e scrivere e in base alla lunghezza del nastro saranno in grado di riconoscere diverse classi di linguaggi.



#### 6.1.2. Read-only VS read-write

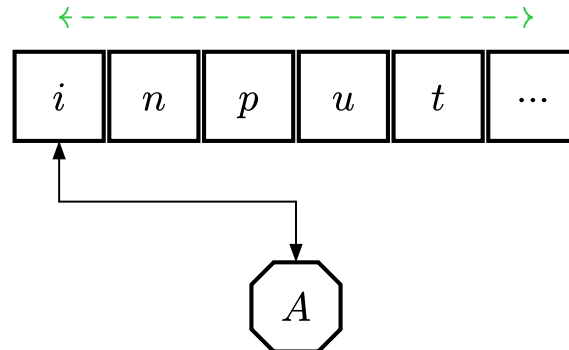
Se manteniamo l'automa one-way, rendere il nastro anche in lettura non modifica per niente il comportamento dell'automa: infatti, anche se scriviamo, visto che siamo one-way non riusciremo mai a leggere quello che abbiamo scritto.

Consideriamo quindi un automa two-way che però mantiene la read-only del nastro: la classe che otteniamo è ancora una volta quella dei **linguaggi regolari**, e questo lo vedremo oggi.

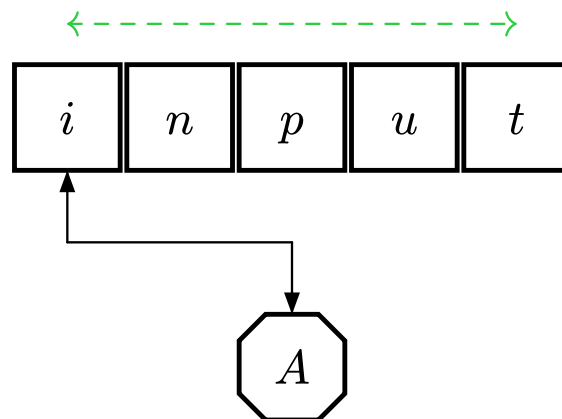


Rendiamo ora la testina capace di poter scrivere sul nastro che abbiamo a disposizione. Ora, in base a come è fatto il nastro abbiamo due situazioni:

- se rendiamo il nastro illimitato oltre la porzione occupata dall'input, andiamo ad riconoscere i linguaggi di tipo 0, ovvero otteniamo una **macchina di Turing**:



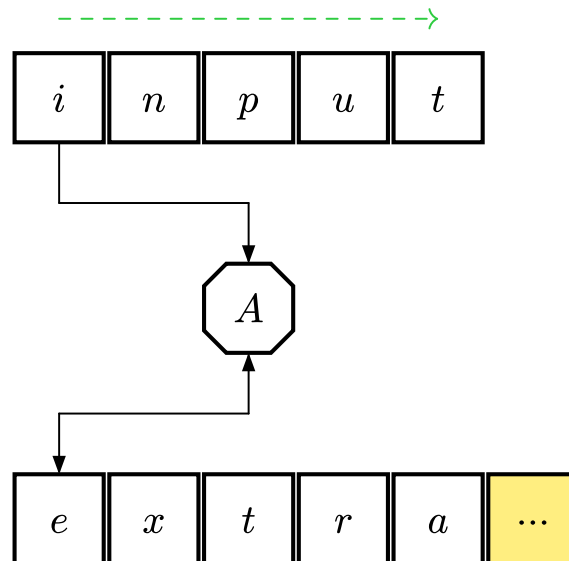
- se invece lasciamo il nastro grande quando l'input andiamo a riconoscere i linguaggi di tipo 1, ovvero otteniamo un **automa limitato linearmente**. Quest'ultima cosa vale perché nelle grammatiche di tipo 1 le regole di produzione non decrescono mai, e un automa limitato linearmente per capire se deve accettare cerca di costruire una derivazione al contrario, accorciando mano a mano la stringa arrivando all'assioma  $S$ :



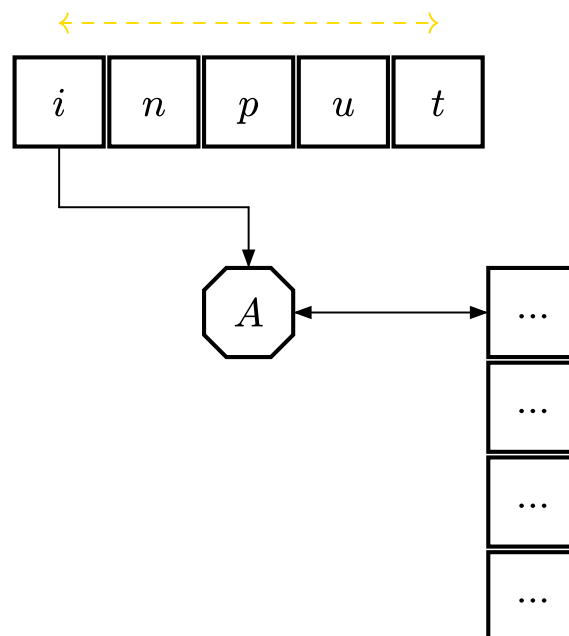
### 6.1.3. Memoria esterna

L'ultima modifica che possiamo pensare per queste macchine è l'aggiunta di una **memoria esterna**.

Dato un automa one-way con nastro read-only, se aggiungiamo un secondo nastro in read-write che funga da memoria esterna, otteniamo le due situazioni che abbiamo visto per gli automi two-way con possibilità di scrivere sul nastro di input.



Un caso particolare è se la memoria esterna è codificata come una **pila** illimitata, ovvero riesco a leggere solo quello che c'è in cima, allora andiamo a riconoscere i linguaggi di tipo 2, ottenendo quindi un **automa a pila**. Se passiamo infine ad un two-way con una pila diventiamo più potenti ma non sappiamo di quanto.



## 6.2. Automi two-way

Tra tutte queste varianti, fissiamoci sugli **automi two-way**, ovvero quelli che hanno il nastro in sola lettura e hanno la possibilità di andare avanti e indietro nell'input. Vediamo prima di tutto qualche linguaggio per il quale possiamo usare un automa two-way.

### 6.2.1. Esempi vari

**Esempio 6.2.1.1:** Riprendiamo l'operazione  $\alpha$ . Dato  $L$  regolare,  $\alpha$  era tale che

$$\alpha(L) = \{x \in \Sigma^* \mid xx \in L\}.$$

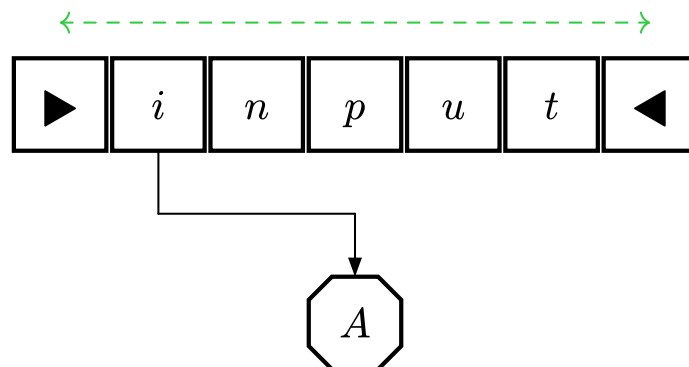
Abbiamo  $A$  un DFA che accetta  $L$ , come posso costruire un two-way per  $\alpha(L)$ ? Potremmo leggere  $x$  la prima volta, ricordarci in che stato siamo arrivati, tornare indietro e poi ripartire a leggere  $x$  dallo stato nel quale eravamo arrivati e vedere se finiamo in uno stato finale.

Per fare ciò, ci serve sapere dove finisce il nastro: vedremo come fare tra poco.

Il numero di stati nel two-way è  $3n$ :

- $n$  stati di  $A$  che usiamo per leggere  $x$ ;
- $n$  stati che tengono traccia dello stato nel quale siamo arrivati con  $x$  e che ci permettono di ritornare all'inizio della stringa;
- $n$  stati che fanno ripartire la computazione dallo stato nel quale siamo arrivati con  $x$  e controllano se finiamo in uno stato finale.

Abbiamo sollevato poco fa il problema: come facciamo a capire dove finisce il nastro? Andiamo a inserire dei **marcatori**, uno a sinistra e uno a destra, che delimitano la stringa. Se per caso arriviamo su un marcatore non possiamo andare oltre: possiamo solo rientrare sul nastro. In realtà, vedremo che in un particolare caso usciremo dai bordi.



Vediamo ancora un po' di esempi.

**Esempio 6.2.1.2:** Definiamo

$$L_n = (a + b)^* a (a + b)^{n-1}$$

il solito linguaggio dell' $n$ -esimo simbolo da destra uguale ad una  $a$ .

Avevamo visto che con un NFA avevamo  $n + 1$  stati, mentre con un DFA avevamo  $2^n$  stati perché ci ricordavamo una finestra di  $n$  simboli. Ora diventa tutto più facile: ci spostiamo, ignorando completamente la stringa, sul marcatore di destra, poi contiamo  $n$  simboli e vediamo se accettare o rifiutare.

Come numero di stati siamo circa sui livelli dell'NFA, visto che dobbiamo solo scorrere la stringa per intero e poi tornare indietro di  $n$ .

**Esempio 6.2.1.3:** Definiamo infine

$$K_n = (a + b)^* a (a + b)^{n-1} a (a + b)^*$$

il linguaggio delle parole che hanno due  $a$  distanti  $n$ . Come lo scriviamo un two-way per  $K_n$ ?

Potremmo partire dall'inizio e scandire la stringa  $x$ . Ogni volta che troviamo una  $a$  andiamo a controllare  $n$  simboli dopo e vediamo se troviamo una seconda  $a$ :

- se sì, accettiamo;
- se no, torniamo indietro di  $n - 1$  simboli per andare avanti con la ricerca.

Il numero di stati è:

- 1 che ricerca le  $a$ ;
- $n$  stati per andare in avanti;
- 1 stato di accettazione;
- $n - 1$  stati per tornare indietro.

Ma allora il numero di stati è  $2n + 1$ .

Abbiamo trovato una buonissima soluzione per l'esempio precedente, ma se volessimo una soluzione alternativa che utilizza un automa sweeping? Ma cosa sono ste cose?

Un **automa sweeping** è un automa che non cambia direzione mentre si trova nel nastro, ma è un automa che rimbalza avanti e indietro sugli end marker. La soluzione che abbiamo trovato non usa automi sweeping perché se il simbolo a distanza  $n$  è una  $b$  noi invertiamo la direzione e torniamo indietro.

**Esempio 6.2.1.4:** Cerchiamo una soluzione che utilizzi un automa sweeping per  $K_n$ .

Supponiamo di numerare le celle del nastro da 1 a  $k$ . Partendo nello stato 1, andiamo a guardare tutte le celle a distanza  $n$ : se troviamo una  $a$  e poi subito dopo ancora una  $a$  accettiamo, altrimenti andiamo avanti fino a quando rimbalziamo sul marker, tornando indietro e andando sulla cella 2. Da qui facciamo ripartire la computazione, andando ogni volta avanti di una cella.

In generale, dalla cella  $p \in \{1, \dots, n\}$  noi visitiamo tutte le celle  $tn + p$ .

Con questo approccio, il numero di stati è  $O(n^2)$  perché dobbiamo muoverci di  $n$  simboli un numero  $n$  di passate. Possiamo farlo con un numero lineare di stati se facciamo la ricerca modulo  $n$  anche al ritorno, ma è questo è negli esercizi.

### 6.2.2. Definizione formale

Abbiamo visto come è costruito un automa two-way, ora vediamo la definizione formale. Definiamo

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, q_f)$$

un **2NFA** tale che:

- $Q$  rappresenta l'insieme degli stati;

- $\Sigma$  rappresenta l'**alfabeto** di input;
- $q_0$  rappresenta lo **stato iniziale**;
- $\delta$  rappresenta la **funzione di transizione**, ed è tale che

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\blacktriangleright, \blacktriangleleft\}) \longrightarrow 2^{Q \times \{+1, -1\}},$$

ovvero prende uno stato e un simbolo dell'alfabeto compresi gli end marker e ci restituisce i nuovi stati e che movimento dobbiamo fare con la testina. Ho dei **divieti**: se sono sull'end marker sinistro non ho mosse che mi portano a sinistra, idem ma specchiato su quello di destra con una piccola eccezione, che vediamo tra poco;

- $q_f$  è lo **stato finale** e si raggiunge «passando» oltre l'end marker destro, unico caso in cui si può superare un end marker.

Con questo modello possiamo incappare in **loop infiniti**, che:

- nei DFA non ci fanno accettare;
- negli NFA magari indicano che abbiamo fatto una scelta sbagliata e c'era una via migliore.

Ci sono poi diverse modifiche che possiamo fare a questo modello, ad esempio:

- possiamo estendere le mosse con la **mossa stazionaria**, ovvero quella codificata con 0 che ci mantiene nella posizione nella quale siamo, ma possono essere eliminate con una coppia di mosse sinistra+destra o viceversa;
- possiamo utilizzare un **insieme di stati finali**;
- possiamo **non** usare gli end marker, rendendo molto difficile la scrittura di automi perché non sappiamo dove finisce la stringa.

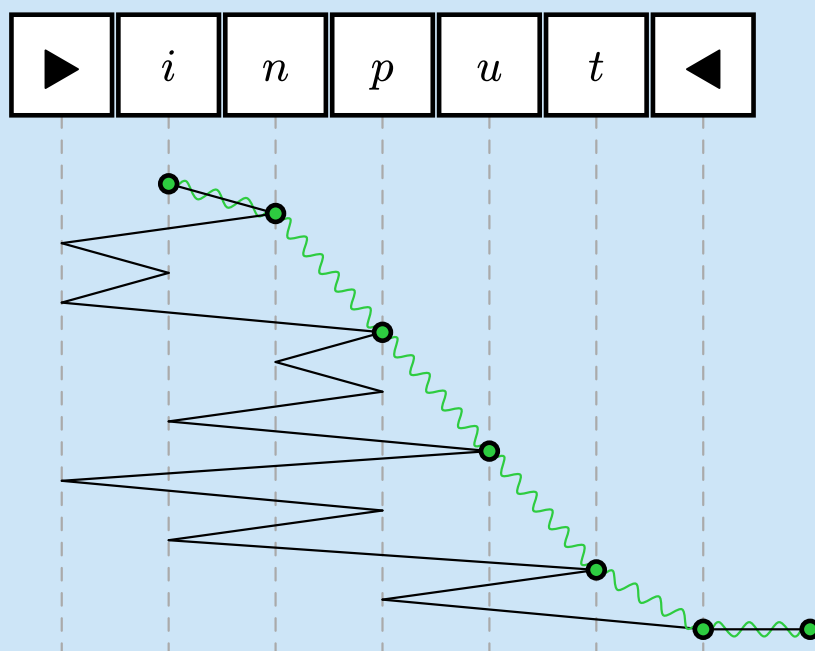
### 6.2.3. Potenza computazionale

Avere a disposizione un two-way sembra darci molta potenza, ma in realtà non è così: infatti, questi modelli sono equivalenti agli automi a stati finiti one-way, detti anche **1DFA**.

**Teorema 6.2.3.1:** Vale

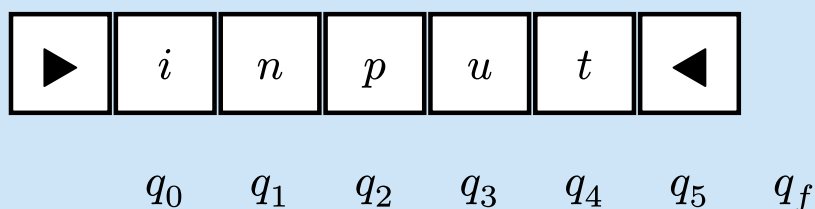
$$L(2DFA) = L(1DFA).$$

**Dimostrazione 6.2.3.1.1:** Abbiamo a disposizione un 2DFA nel quale abbiamo inserito un input che viene accettato. Vogliamo cambiare la computazione del 2DFA in una computazione di un 1DFA. Vediamo che stati vengono visitati nel tempo.



Prima di tutto, dobbiamo ricordarci che nei DFA non abbiamo end marker, quindi abbiamo solo l'input. Nell'automa two-way ci sono momenti dove entro nelle celle per la prima volta: nel grafico sopra sono segnati in verde. Chiamiamo questi stati  $q_{i \geq 0}$ .

Usiamo delle **scorciatoie**: visto che nel 1DFA non possiamo andare avanti a indietro, dobbiamo tagliare via le computazioni che tornano indietro e vedere solo in che stato esco.



Come vediamo, a me interessa sapere in che stato devo spostarmi a partire dalla mia posizione, evitando quello che viene fatto tornando all'indietro. Per tagliare le parti che tornano indietro usiamo delle **matrici**, molto simili a quelle della lezione precedente. Quelle matrici erano nella forma  $M_w[p, q]$  che conteneva un 1 se e solo se partendo da  $q$  finivo in  $p$  leggendo  $w$ .

Le matrici che costruiamo ora sono nella forma

$$\tau_w : Q \times Q \longrightarrow [0, 1]$$

che mi vanno a definire il primo stato che incontriamo quando leggiamo un nuovo carattere della stringa.

Nella matrice abbiamo  $\tau_w[p, q] = 1$  se e solo se esiste una sequenza di mosse che:

- inizia sul simbolo più a destra della porzione di nastro che contiene  $(\blacktriangleright w)$  nello stato  $p$ ;

- termina quando la testina esce a destra dalla porzione di nastro considerata nello stato  $q$ .

Ad esempio, considerando l'esempio sopra, vale

$$\tau_{\text{inp}}[q_2, q_3] = 1.$$

Vediamo come ottenere induttivamente queste tabelle. Partiamo con  $w = \varepsilon$ : la porzione di nastro che stiamo considerando è formata solo da  $\blacktriangleright$ , ma non potendo andare a sinistra l'unica mossa che possiamo fare è andare a destra, quindi andare in un nuovo stato, ovvero

$$\tau_\varepsilon[p, q] = 1 \iff \delta(p, \blacktriangleright) = (q, +1).$$

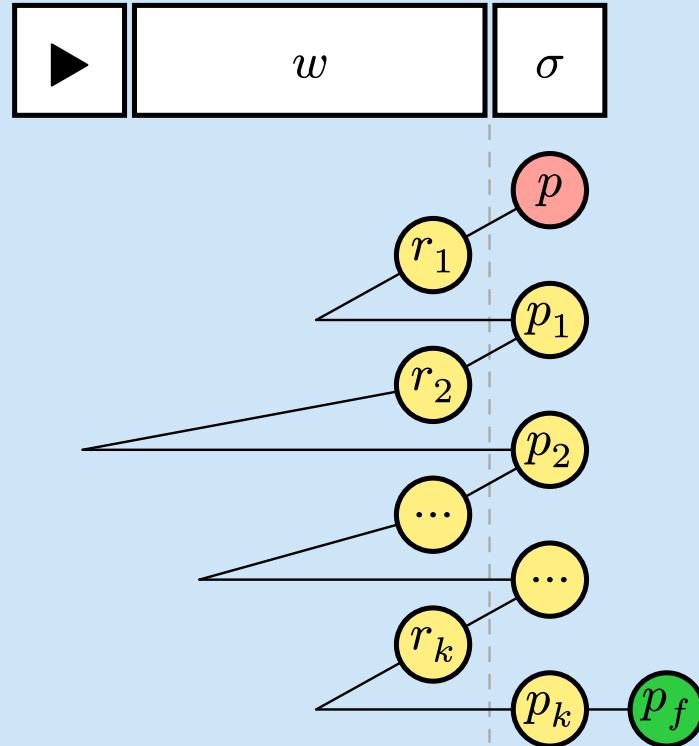
Supponiamo di aver calcolato la tabella di  $w$ , vediamo come costruire induttivamente la tabella di  $w\sigma$ , con  $w \in \Sigma^*$  e  $\sigma \in \Sigma$ . Se vale

$$\delta(p, \sigma) = (q, +1)$$

la tabella è molto facile, perché sto subito uscendo dallo stato  $p$ , ovvero

$$\tau_{w\sigma}[p, q] = 1.$$

Se invece andiamo indietro dobbiamo capire cosa fare.



Ogni volta che da  $p_i$  torniamo indietro finiamo in uno stato  $r_{i+1}$ , che poi dopo un po' di giri finisce per forza in  $p_{i+1}$ . Andiamo avanti così, fino ad un certo  $p_k$ , dal quale usciamo e andiamo in  $q$ . In poche parole

$$\tau_{w\sigma}[p, q] = 1$$

se e solo se esiste una sequenza di stati

$$p_0, p_1, \dots, p_k, r_1, \dots, r_k \mid k \geq 0$$

tale che:

- $p_0 = p$ , ovvero parto dallo stato  $p$ , per definizione;
- $\delta(p_{i-1}, \sigma) = (r_i, -1) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$ , ovvero in tutti i  $p$  tranne l'ultimo io torno indietro;
- $\tau_w[r_i, p_i] = 1$ , ovvero da  $r_i$  giro in  $w$  e poi torno in  $p_i$ ;
- $\delta(p_k, \sigma) = (q, +1)$ , ovvero esco fuori dal  $w\sigma$ .

Notiamo che se prendiamo  $k = 0$  abbiamo la situazione precedente in cui uscivo direttamente. Inoltre,  $k$  è il numero massimo di stati del DFA perché se faccio ancora un giro in  $w$  dopo  $p_k$  vado in uno stato già visto ed entro in un loop infinito.

Notiamo una cosa **importantissima**: se due stringhe hanno la stessa tabella, ovvero  $\tau_w = \tau_{w'}$ , allora l'aggiunta di un qualsiasi carattere  $\sigma$  genera tabelle risultanti uguali, ovvero  $\tau_{w\sigma} = \tau_{w'\sigma}$ . Ma allora esiste una funzione

$$f_\sigma : [Q \times Q \rightarrow [0, 1]] \rightarrow [Q \times Q \rightarrow [0, 1]]$$

che genera una tabella a partire da una data, ed è tale che

$$\forall w \in \Sigma^* \quad \tau_{w\sigma} = f_\sigma(\tau_w).$$

In poche parole, la nuova tabella dipende solo da  $\sigma$  e non da  $w$ , e questa tabella è esattamente quella calcolata con i 4 punti messi sopra. Le tabelle, inoltre, sono tantissime ma sono un numero finito.

Siamo pronti per costruire il 1DFA che tanto stiamo bramando. Noi avevamo  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  che è un 2DFA, vogliamo costruire

$$M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$$

1DFA che sia equivalente a  $M$ . Esso è tale che:

- $Q$  è l'**insieme degli stati** e lo usiamo tenere traccia dello stato nel quale siamo e della tabella che usiamo per calcolare lo stato successivo, ovvero

$$Q' = Q \times [Q \times Q \rightarrow [0, 1]];$$

- $q'_0$  è lo **stato iniziale** ed è la coppia

$$q'_0 = (q_0, \tau_\epsilon);$$

- $\delta'$  è la **funzione di transizione** che manda avanti l'automa, ovvero

$$\delta'((p, T), \sigma) = (q, T')$$

con:

- $T'$  che mi dà indicazioni sullo stato nel quale arrivo con  $\sigma$ , che ho però appena letto, quindi  $T' = f_\sigma(T)$ ;
- vale  $T'[p, q] = 1$  perché io devo uscire in  $q$  partendo da  $p$ ;



- $F'$  è l'**insieme degli stati finali**, ostico perché nel two-way abbiamo gli end marker, nel one-way non li abbiamo. Per accettare dovevo sfiorare l'end marker di destra e finire in  $q_f$ , ma questa informazione la ricavo dalla tabella del right marker, ovvero

$$F' = \{(q, T) \mid (f_{\blacktriangleleft}(T))[q, q_f] = 1\}.$$

Ma allora stiamo simulando un 2DFA con un 1DFA, ma gli 1DFA riconoscono la classe dei linguaggi regolari, quindi anche la classe degli automi a stati finiti two-way riconosce la classe dei linguaggi regolari. ■

Che considerazioni possiamo fare sul numero di stati? Sappiamo che:

- il numero di stati è  $|Q| = n$ ;
- il numero di tabelle è  $|[Q \times Q] \rightarrow [0, 1]| = 2^{n^2}$ .

Ma allora il numero di stati è

$$|Q'| \leq n2^{n^2}.$$

Come vediamo, la simulazione è **poli-esponenziale**.

## 7. Lezione 14 [11/04]

### 7.1. Simulazione

La scorsa lezione abbiamo visto gli automi two-way e abbiamo dimostrato che hanno la stessa potenza computazionale degli automi a stati finiti. Avevamo visto la trasformazione da 2DFA a 1DFA, ma la stessa trasformazione può essere fatta per il passaggio da 2NFA a 1NFA.

Ma quanto costano queste trasformazioni?

Nel caso partissimo da un 2DFA e volessimo arrivare in un 1DFA, il costo in termini di stati è

$$\leq \dots,$$

mentre cambiando il punto di partenza con un 2NFA il salto diventa ancora peggiore:

$$\leq 2^n 2^{n^2} = 2^{n^2+n}.$$

Ma questo ce lo potevamo aspettare: abbiamo già un salto esponenziale da NFA a DFA, quindi ciao.

Ci sono due simulazioni che sono però molto particolari e importanti.

#### 7.1.1. Problema di Sakoda & Sipser

La prima trasformazione che vediamo è quella da 2NFA a 2DFA: qua non possiamo usare la costruzione per sottoinsiemi perché ad un certo punto potresti avere il non determinismo su una mossa che però mi sposta la testina su due caratteri diversi della stringa, e questo non è possibile. Ci serve quindi una trasformazione alternativa, ma ci arriviamo dopo.

La seconda trasformazione è quella da 1NFA a 2DFA: questa trasformazione cerca di capire se, dando il two-way ad un automa deterministico, esso è capace di simulare il non determinismo.

Vediamo un paio di esempi.

**Esempio 7.1.1.1:** Definiamo

$$L_n = (a + b)^* a (a + b)^{n-1}$$

il classicissimo linguaggio dell' $n$ -esimo carattere da destra pari ad una  $a$ .

Sappiamo che:

- esiste un 1NFA di  $n + 1$  stati;
- esiste un 1DFA di  $2^n$  stati.

Abbiamo visto un automa two-way per questo linguaggio, che usa poco più di  $n$  stati, quindi in questo caso riusciamo a togliere il non determinismo a basso costo.

**Esempio 7.1.1.2:** Definiamo

$$K_n = (a + b)^* a (a + b)^{n-1} a (a + b)^*$$

il solito linguaggio con due  $a$  a distanza  $n$ .

Avevamo visto che un 1NFA per questo linguaggio usava  $n + 2$  stati, quindi una quantità lineare in  $n$ . Per un 2DFA abbiamo visto che esiste anche qui una soluzione lineare in  $n$ , quindi anche qui eliminiamo il non determinismo a basso costo.

Abbiamo visto due esempi che sembrano dare buone notizie, ma riusciamo a dimostrare che si riesce sempre a fare un 2DFA di  $n$  stati partendo da un 1NFA di  $n$  stati? Purtroppo, nessuno ci è mai riuscito.

Questi problemi sono i **problemi di Sakoda & Sipser**, ideati nel 1978 e che riguardano il costo della simulazioni di automi non deterministici one-way e two-way per mezzo di automi two-way deterministici, ovvero si chiedono se il movimento two-way aiuta nell'eliminazione del non determinismo.

Cosa sappiamo su questi problemi? Diamo qualche **upper** e **lower bound**.

Per il problema da 1NFA a 2DFA, si sfrutta la **costruzione per sottoinsiemi** per ottenere un 1DFA, che è anche un 2DFA che non torna mai indietro, ottenendo quindi un numero di stati

$$\leq 2^n.$$

Un lower bound per questo problema invece è

$$\geq n^2.$$

Per il problema da 2NFA a 2DFA, si fa un passaggio intermedio all'1NFA e poi al 1DFA, che come prima è anche 2DFA, quindi gli stati sono

$$\leq 2^{n^2+n}.$$

Il lower bound, invece, è lo stesso del problema precedente.

Ci sono casi particolari che hanno delle dimostrazioni precise:

- se utilizziamo dei 2DFA sweeping il costo per la trasformazione è **esponenziale**, ma questo non risolve il problema perché (???) ci sono automi non sweeping che per diventarlo hanno un salto esponenziale (???)
- se  $\Sigma = \{a\}$ :
  - ▶ se facciamo la trasformazione da 2NFA a 2DFA l'upper bound è

$$e^{O(\log^2(n))},$$

ovvero una funzione super polinomiale ma meno di una esponenziale. Inoltre, se si dimostra che esiste un lower bound super polinomiale, allora abbiamo dimostrato che

$$L = NL \text{ (???)};$$

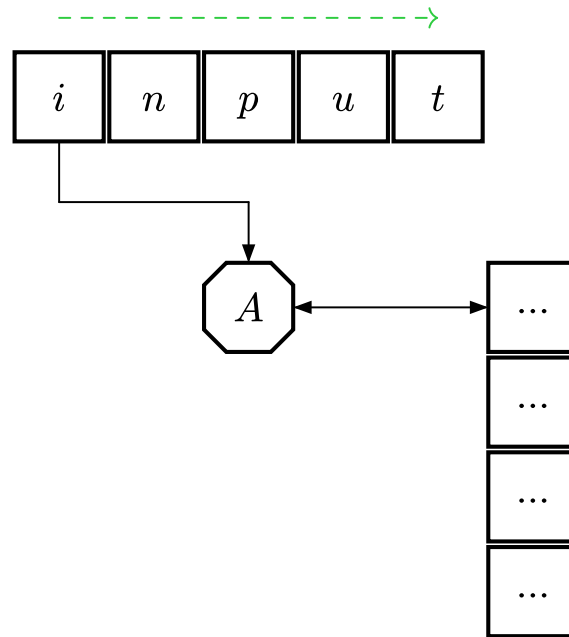
- ▶ se facciamo la trasformazione da 1NFA a 2DFA l'upper bound diventa esattamente  $n^2$ , quindi la trasformazione fatta è ottimale.

Dei ricercatori hanno trovato degli **automi completi** per questi problemi, ovvero degli automi che permettono lo studio dei problemi solo su questi pochi automi scelti per poi far «arrivare» tutte le conseguenze a tutti gli altri automi. Scritto malissimo, sono tipo gli NP-completi.

Per ora, la **congettura** che circola tra la gente è che i costi siano **esponenziali nel caso peggiore**.

## 7.2. Automi a pila

Lasciamo finalmente stare gli automi a stati finiti per passare ad una nuova classe di riconoscitori: gli **automi a pila**. Essi sono praticamente degli automi a stati finiti con testina di lettura one-way ai quali viene aggiunta una **memoria infinita con restrizioni di accesso**, ovvero l'accesso avviene solo sulla cima della memoria, con politica LIFO.



Come vediamo, la parte degli automi a stati finiti ce l'abbiamo ancora, ma ora abbiamo una **memoria esterna**, che nell'immagine è sulla destra, che possiamo utilizzare con una politica di accesso LIFO. Per via di questa politica, questi automi sono anche detti **automi pushdown**, o **PDA**, perché quando inserisci qualcosa lo fai a spingere giù.

### 7.2.1. Versione non deterministica

Vediamo subito la definizione formale **non deterministica** dei PDA.

Sia  $M$  un PDA definito dalla tupla

$$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

tale che:

- $Q$  è un **insieme finito non vuoto di stati**, che rappresenta il controllo a stati finiti;
- $\Sigma$  è un **alfabeto finito non vuoto di input**;
- $\Gamma$  è un **alfabeto finito non vuoto di simboli della pila**;
- $\delta$  è la **funzione di transizione**;
- $q_0 \in Q$  è lo **stato iniziale**;
- $Z_0 \in \Gamma$  è il **simbolo iniziale sulla pila**;
- $F \subseteq Q$  è un **insieme di stati finali**.

La **funzione di transizione** è definita come segue:

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}.$$

In poche parole, consideriamo lo **stato corrente**, il **simbolo sulla testina** o una  $\varepsilon$ -mossa e il **simbolo sulla cima della pila** per capire in che stato dobbiamo muoverci e che stringa andare ad inserire sulla pila. La lettura del carattere in cima alla pila lo va a **distruggere**.

Questa versione però non ci piace molto perché  $\Gamma^*$  è potenzialmente un **insieme infinito**, e non ci piace avere un insieme infinito di possibilità, quindi sostituiamo la definizione della funzione di transizione con questa analoga, ma molto migliore per noi:

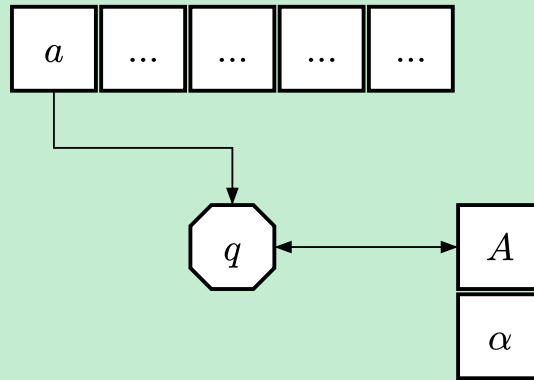
$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \longrightarrow \text{PF}(Q \times \Gamma^*).$$

Con PF intendiamo l'**insieme delle parti finite**, ovvero un insieme finito di possibilità prese dall'insieme delle parti. Ora sì che la definizione ci piace.

Facciamo qualche esempio. Come convenzione useremo le **maiuscole** per i simboli della pila.

**Esempio 7.2.1.1:** Facciamo che la funzione di transizione sia definita in questo modo:

$$\delta(q, a, A) = \{(q_1, \varepsilon), (q_2, BCC)\}.$$

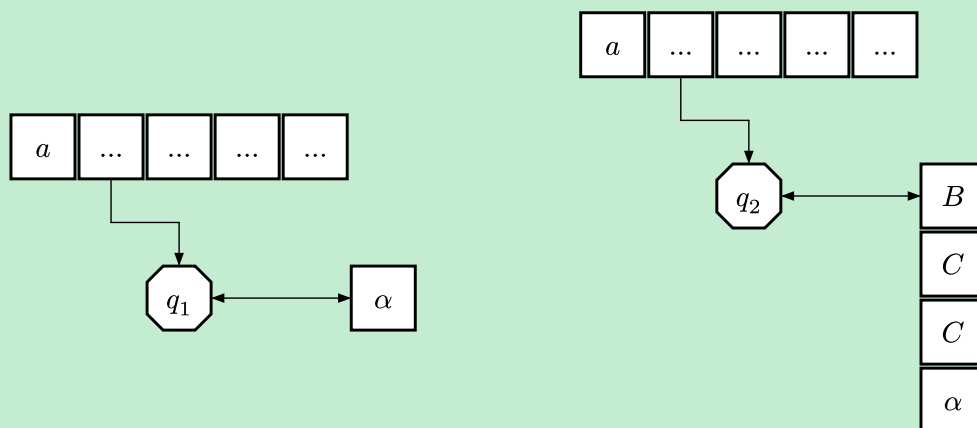


Con  $\alpha$  nel disegno si intende una stringa in  $\Gamma^*$  perché oltre ad  $A$  potremmo avere altro.

Cosa vuol dire quella regola della funzione di transizione? Ci sta dicendo che se ci troviamo nello stato  $q$ , leggiamo  $a$  sul nastro leggiamo  $A$  sulla cima della pila, possiamo:

- andare in  $q_1$  e non mettere altro sulla pila, praticamente consumando un simbolo in input;
- andare in  $q_2$  e mettere sulla pila la stringa  $BCC$ .

Vediamo la rappresentazione dei due casi nei quali possiamo finire.

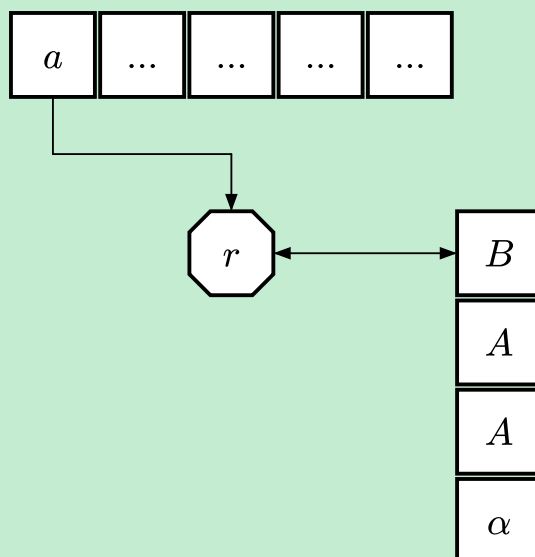


Per convenzione, quando inseriamo una stringa sulla pila, l'inserimento avviene da destra verso sinistra. In poche parole, se inseriamo la stringa  $X \in \Gamma^*$  nella pila, se la togliessimo noi leggeremmo, in ordine, esattamente  $X$ . In altre parole ancora, quando leggiamo una stringa da inserire è come se la stessimo leggendo dall'alto verso il basso.

Abbiamo la possibilità anche di fare delle  $\varepsilon$ -mosse: supponiamo di aggiungere la regola

$$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(r, BAA)\}.$$

Ora abbiamo tre scelte a disposizione. Le  $\varepsilon$ -mosse possiamo vederle come delle **mosse interne**, che avvengono senza leggere l'input, e che ci permettono di spostarci negli stati modificando eventualmente la pila.



Una **configurazione** è una fotografia dell'automa in un dato istante di tempo, e ci dice quali sono le informazioni rilevanti per il futuro per definire al meglio la macchina, ovvero:

- lo **stato corrente**;
- il **contenuto del nastro** che ci manca da leggere;
- il **contenuto della pila**.

Una configurazione è quindi una **tripla**

$$(q, ay, A\alpha)$$

che contiene lo stato corrente, il contenuto del nastro ancora da leggere indicato dal carattere corrente  $a$  unito al resto della stringa  $y$  e il contenuto della pila indicato dal carattere in testa  $A$  e dal resto della pila  $\alpha$ .

Una **mossa** è l'applicazione della funzione di transizione, ovvero un passaggio

$$(q, ay, A\alpha) \longrightarrow (p, y, \gamma\alpha) \iff (p, \gamma) \in \delta(q, a, A).$$

Analogamente, un passaggio che usa le  $\varepsilon$ -mosse è un passaggio

$$(q, ay, A\alpha) \longrightarrow (p, ay, \gamma\alpha) \longrightarrow (p, \gamma) \in \delta(q, \varepsilon, A).$$

Una **computazione** è una serie di mosse che partono da una configurazione iniziale e mi portano in una configurazione finale. Di queste ultime parleremo tra poco. Torniamo sulle computazioni.

Come con i passi di derivazione, una computazione che usa una sola mossa si indica con

$$C' \vdash C''.$$

Se invece una computazione impiega  $k$  passi, si indica con

$$C' \vdash^k C''.$$

Infine, per indicare una computazione con un numero generico di passi, maggiori o uguali a zero, si usa

$$C' \vdash^* C''.$$

### 7.2.2. Accettazione

Abbiamo parlato di arrivare in una configurazione accettante, ma quando **accettiamo**? Dobbiamo capire da dove partire e dove arrivare.

Quando partiamo abbiamo la stringa  $w$  sul nastro, ci troviamo nello stato iniziale  $q_0$  e abbiamo  $Z_0$  sulla pila: questa è detta **configurazione iniziale** ed è la tripla

$$(q_0, w, Z_0).$$

Le **configurazioni finali** dipendono dal tipo di nozione di accettazione che vogliamo utilizzare.

L'**accettazione per stati finali** ci obbliga a leggere tutto l'input e a finire in uno stato finale, con la pila che contiene quello che vuole, ovvero dobbiamo arrivare in una configurazione

$$(q, \varepsilon, \gamma)$$

dove lo stato  $q$  è finale. Il **linguaggio accettato per stati finali** è l'insieme

$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \gamma) \mid q \in F \wedge \gamma \in \Gamma^* \right\}.$$

Questa nozione è comoda perché vede i PDA come una **estensione** degli automi a stati finiti.

L'**accettazione per pila vuota** invece è una nozione più naturale: tutto ciò che metto nella pila lo devo anche buttare via. Possiamo arrivare in un qualsiasi stato, basta aver svuotato la pila. Il **linguaggio accettato per pila vuota** è l'insieme

$$N(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon) \mid q \in Q\}.$$

Se svuotiamo la pila prima di finire l'input allora quella computazione si blocca perché noi dobbiamo sempre leggere qualcosa dalla pila.

Le due accettazioni sono **equivalenti**, o meglio, possiamo passare da una accettazione all'altra ma i linguaggi che accettano sono differenti. A parità di automa  $M$ , gli insiemi  $L(M)$  e  $N(M)$  in generale sono diversi, ma possiamo passare da un modello all'altro mantenendo il linguaggio accettato con facilità. Una ulteriore nozione di accettazione unisce stati finali e pila vuota, ma rimane comunque equivalente. Avere due nozioni è comodo: se una versione ci esce estremamente comoda allora la andiamo ad utilizzare, altrimenti andremo ad utilizzare l'altra.

Vediamo ora qualche esempio.

**Esempio 7.2.2.1:** Prendiamo il nostro migliore amico, il linguaggio

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}.$$

Lo possiamo riconoscere con un PDA, visto che abbiamo visto che non è regolare? Bhe sì: con i DFA non riusciamo a ricordare il numero di  $a$  e poi confrontare questo numero con le  $b$ , mentre ora riusciamo a farlo, le pile sanno contare.

Possiamo pensare ad un automa che ogni volta che legge una  $a$  butta una  $A$  dentro la pila, e quando legge una  $b$  toglie una  $A$  dalla pila. Accettiamo se abbiamo messo  $n$  caratteri  $A$  dentro la pila e poi ne abbiamo tolti  $n$ , quindi qua viene comoda l'**accettazione per pila vuota**.

Andiamo a definire la funzione di transizione.

Iniziamo a togliere  $Z_0$  dalla pila e inseriamo la prima  $A$  in segno di aver letto la prima  $a$  della stringa, che abbiamo per forza per definizione, quindi

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_0, A)\}.$$

Utilizziamo lo stato  $q_0$  per leggere tutte le  $a$  della stringa, ovvero

$$\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\}.$$

Appena troviamo una  $b$  iniziamo a cancellare e cambiamo stato, visto che non ci aspettiamo più delle  $a$  nella stringa, quindi

$$\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}.$$

Inseriamo  $\varepsilon$  sulla stringa perché la  $A$  da cancellare per la lettura di  $b$  è già stata cancellata dalla lettura.

Andiamo a terminare la lettura delle  $b$ , quindi

$$\delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}.$$

Abbiamo detto che accettiamo per pila vuota, quindi  $L = N(M)$ .



**Esempio 7.2.2.2:** Se invece volessimo accettare il linguaggio precedente per **stati finali**?

Non dobbiamo cancellare  $Z_0$  dalla pila perché se una stringa viene accettata cancella tutta la pila, quindi ci serve un carattere fittizio dentro per poterlo leggere e spostarci in uno stato finale. Modifichiamo quindi la mossa iniziale con la mossa

$$\delta(q_0, a, Z_0) = \delta(q_0, AZ_0).$$

Se abbiamo una stringa del linguaggio alla fine delle  $b$  dobbiamo spostarci in uno stato finale, quindi aggiungiamo la regola

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, Z_0)\} \mid q_f \in F.$$

Con queste modifiche abbiamo  $L = L(M)$ .

**Esempio 7.2.2.3:** Se invece volessimo accettare anche  $\varepsilon$ ? Il linguaggio diventa

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}.$$

Con l'**accettazione per pila vuota**, nello stato iniziale possiamo aggiungere una regola che svuota subito la pila, ovvero aggiungiamo la regola

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\}.$$

Stiamo scommettendo che l'input è già finito, ovvero abbiamo solo  $\varepsilon$  sul nastro, ma questo ha appena aggiunto il **non determinismo** al nostro automa a pila.

Con l'**accettazione per stati finali** invece ci spostiamo direttamente nello stato  $q_f$  a partire da  $q_0$ , ovvero aggiungiamo la regola

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}.$$

Come prima, abbiamo aggiunto del **non determinismo** all'automa a pila, ma questo lo possiamo togliere: come facciamo a fare ciò?

Introduciamo uno stato  $q_I$  finale che diventa anche iniziale al posto di  $q_0$ , quindi ora

$$F = \{q_I, q_f\}.$$

Se inseriamo sul nastro la stringa vuota allora noi accettiamo, perché siamo in uno stato finale e non abbiamo altri simboli da leggere. Per passare poi al vecchio automa mettiamo una regola

$$\delta(q_I, a, Z_0) = \{(q_0, AZ_0)\}.$$

### 7.2.3. Determinismo VS non determinismo

Con il termine **non determinismo** non intendiamo le  $\varepsilon$ -mosse da sole, quelle le possiamo avere, ma intendiamo un mix tra mosse che leggono e mosse che non leggono.

**Definizione 7.2.3.1** (Determinismo): Sia  $M$  un PDA. Allora  $M$  è **deterministico** se:

1. ogni volta che ho una  $\varepsilon$ -mossa da un certo stato e con un certo simbolo sulla pila, non ho mosse che leggono simboli dal nastro a partire dallo stesso stato e con lo stesso simbolo sulla pila, ovvero

$$\forall q \in Q \quad \forall A \in \Gamma \quad \delta(q, \varepsilon, A) \neq \emptyset \implies \forall a \in \Sigma \quad \delta(q, a, A) = \emptyset;$$

2. come nel caso classico, considero un carattere, o anche  $\varepsilon$ , allora a parità di stato corrente e simbolo sulla pila, ho al massimo una transizione possibile, ovvero

$$\forall q \in Q \quad \forall A \in \Gamma \quad \forall \sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \quad |\delta(q, \sigma, A)| \leq 1.$$

A differenza del caso classico, il determinismo e il non determinismo non sono ugualmente potenti: un automa a pila non deterministico è **più potente** di un automa a pila deterministico, che riconosce una sottoclasse di linguaggi diversa dai linguaggi di tipo 2, che sono riconosciuti dai PDA non deterministici.

#### 7.2.4. Trasformazioni

Avevamo parlato dell'**equivalenza** dell'accettazione per stati finali e per pila vuota: infatti, esistono due trasformazioni che permettono di passare da un automa all'altro, mantenendo il linguaggio di partenza riconosciuto inalterato. L'equivalenza infatti ci diceva che, partendo da un automa  $M$  che riconosce per stati finali, abbiamo una trasformazione che ci dà  $M'$  che riconosce per pila vuota che riconosce lo stesso linguaggio di  $M$ , e viceversa.

**Stati finali  $\rightarrow$  pila vuota** Dobbiamo trasformare un automa che accetta per stati finali in un automa che accetta per pila vuota. Con quest'ultimo simuliamo il primo, e ogni volta che vado in uno stato finale mi sposto in uno **stato di svuotamento**, che se raggiunto in mezzo blocca la pila, ma se raggiunto alla fine mi fa accettare.

Abbiamo quindi  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$  un PDA con  $L = L(M)$ . Definiamo ora

$$M' = (Q \cup \{q_e, q'_0\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X\}, \delta', q'_0, X, \emptyset)$$

un PDA tale che:

- per metterci in una situazione piacevole per la fine usiamo un **truccaccio** definito dalla regola

$$\delta(q'_0, \varepsilon, X) = \{(q_0, Z_0 X)\},$$

ovvero prima di far partire la computazione dell'automa  $M$  andiamo ad inserire un carattere  $X$  in fondo alla pila, vedremo dopo perché;

- l'automa deve eseguire **tutte le mosse** di  $M$ , ovvero

$$\forall q \in Q \quad \forall \sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \quad \forall Z \in \Gamma \quad \delta(q, \sigma, Z) \subseteq \delta'(q, \sigma, Z),$$

che scritto così significa che tutte le mosse che trovavamo nell'applicazione di delta ad una certa tripla le abbiamo anche nella nuova funzione di transizione, che però conterrà anche altro, che vedremo tra poco;

- aggiungiamo uno **stato di svuotamento** per pulire la pila, definito dalle regole

$$\begin{aligned}\forall q \in F \quad \forall Z \in \Gamma \cup \{X\} \quad (q_e, \varepsilon) &\in \delta'(q, \varepsilon, Z) \\ \forall Z \in \Gamma \cup \{X\} \quad \delta'(q_e, \varepsilon, Z) &= \{(q_e, \varepsilon)\},\end{aligned}$$

ovvero con la prima regola, ogni volta che mi trovo in uno stato finale **non deterministicamente** mi posso spostare nello stato di svuotamento, mentre con la seconda regola effettivamente svuoto.

A cosa ci serve il **carattere**  $X$ ? Facciamo finta di non mettere il carattere  $X$ . Se  $M$  accetta una stringa  $x$  arrivando con la pila vuota nessun problema, non ci spostiamo nello stato di svuotamento ma abbiamo la pila vuota quindi ottimo. Se invece  $M$  non accetta una stringa  $x$  ma arriva alla fine con la pila vuota, il simbolo  $X$  messo all'inizio ci copre da una eventuale accettazione errata, perché non riusciremo ad andare nello stato di svuotamento per avere la pila vuota, anche se  $M$  ci finisce in quel modo. Diciamo che abbiamo messo  $X$  come se fosse una guardia, che ci copre questo preciso caso.

Purtroppo, con questa costruzione abbiamo buttato dentro del **non determinismo** quando facciamo i passaggi in  $q_e$  da uno stato finale.

**Pila vuota  $\rightarrow$  stati finali** Il percorso opposto invece parte da un PDA

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

tale che  $L = N(M)$ . Definiamo il PDA

$$M' = (Q \cup \{q'_0, q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X\}, \delta', q'_0, X, \{q_f\})$$

che come idea ha quella di simulare  $M$  e, ogni volta che arriva con pila vuota, ci spostiamo nello stato finale. Vediamo i vari passi:

- come prima, usiamo un **truccaccio** per infilare  $X$  sotto la pila, quindi abbiamo la regola

$$\delta'(q'_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, Z_0 X)\}$$

che usiamo per inserire  $X$  come trigger per andare in uno stato finale;

- simuliamo l'automa  $M$  senza aggiungere niente, quindi

$$\forall q \in Q \quad \forall \sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \quad \forall Z \in \Gamma \quad \delta'(q, \sigma, Z) = \delta(q, \sigma, Z);$$

- ogni volta che leggiamo  $X$  sulla cima della pila vuol dire che  $M$  ha svuotato la pila, quindi devo andare nello stato finale, ovvero

$$\forall q \in Q \quad \delta'(q, \varepsilon, X) = \{(q_f, \varepsilon)\};$$

ovviamente, se andiamo in questo stato a metà stringa ci blocchiamo, altrimenti se ci andiamo alla fine è tutto ok.

A differenza di prima, se partiamo da un automa **deterministico**, quello che otteniamo è ancora un automa **deterministico**.