数值方法

----多项式求根的方法

秦　品　乐

中北大学大数据学院

多项式方程的根

考虑一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ 的根的情况

$$x1,x2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

当$\Delta\geq 0$时，方程有实数根$x1,x2$；当$\Delta < 0$时，若令$\sqrt{-1}=i$

则求根公式求出的结果是对应一元二次方程的虚数根。

即在高阶方程求根时，应该考虑存在复根的情况！

多项式方程的根

本讲讨论如下一般形式的多项式

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

其中n表示多项式的阶数，a_i表示常系数

多项式的根满足下面的规律：

1)N阶方程有n个实数或复数根；

2)如果n是奇数，则至少存在一个实数根；

3)如果存在复数根，则存在一对共轭根.

多项式求根在工程中的意义

多项式在工程中有很多应用，如曲线拟合等，其中最令人感兴趣的应用是在于刻画动态系统(机械设备，电子电路等)。考虑如下线性常微分式

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = F(t)$$

其中y和t分别是因变量和自变量,$F(t)$是强制函数

当外部对于系统的没有影响时，表示F(t)=0，此时的方程解称为通解，即通解体现的是系统仿真中的一些非常基本的东西，也就是系统在缺少外力时的反应。

多项式求根在工程中的意义

无外力线性系统的通解形式为$y=e^{rt}$，如果函数可微，则有

$$a_2 r^2 e^{rt} + a_1 r e^{rt} + a_0 e^{rt} = 0$$

消除指数项，得

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \qquad (1)$$

式1是一个多项式，称为特征方程，多项式的根是满足上式的r值。这些r值是系统的本征值，又称特征值！！

多项式求根在工程中的意义

当1式的两个根都是实数时，通解可表示为下式

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$ 称为强衰减情况

当1式的两个根是重根时，通解可表示为下式

$$y = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$ 称为临界衰减情况

当1式的两个根是复根时，通解可表示为下式

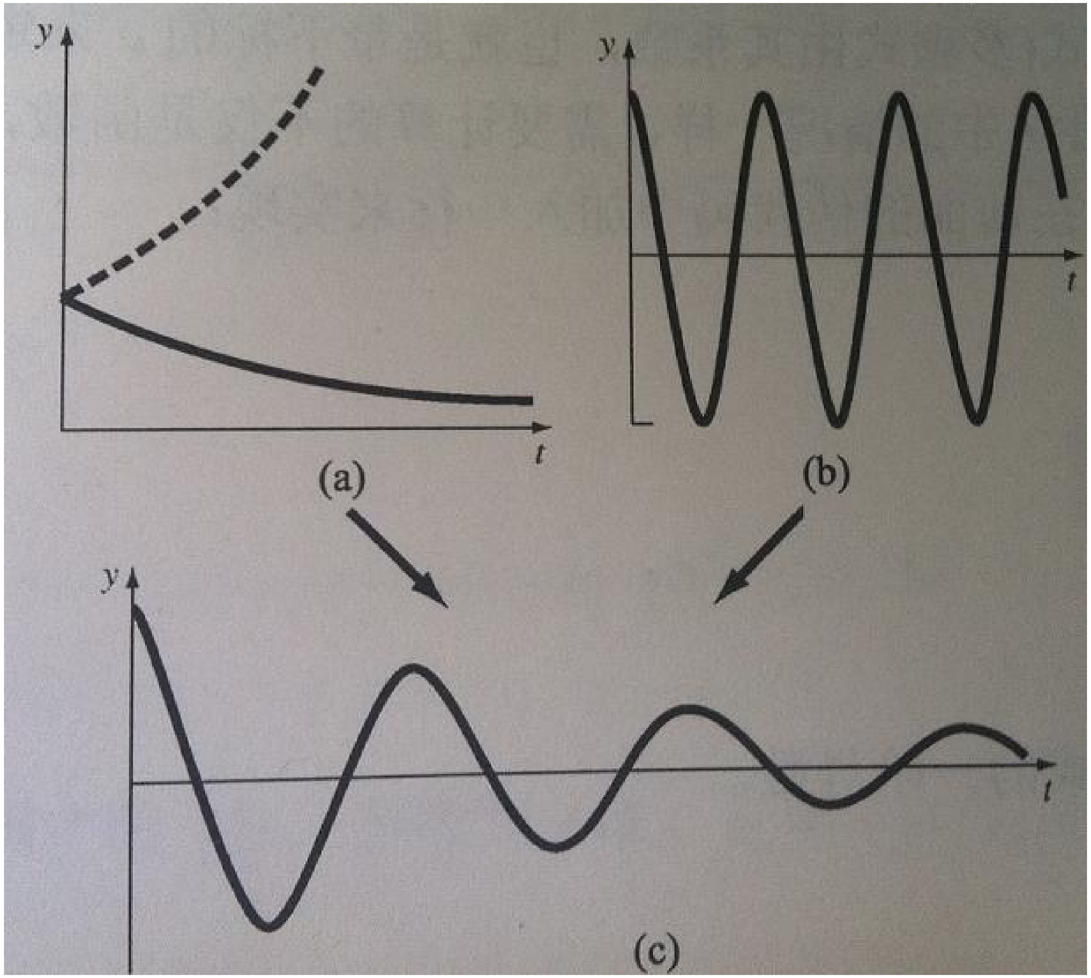
$$y = c_1 e^{(\lambda + \mu i)t} + c_2 e^{(\lambda - \mu i)t}$$

由欧拉公式$e^{\mu i t} = \cos \mu t + i \sin \mu t$得

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t$$ 称为不完全衰减情况

多项式求根在工程中的意义

对应的图形分别为



多项式方程的根

函数表现的是一种映射关系，如实数方程反映的就是一种自变量到因变量的映射。

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

复数方程反映的一种复数域到复数域的映射关系，要用几何图形反映这种关系需要构造自变量和函数值的两组复平面。

多项式方程的根

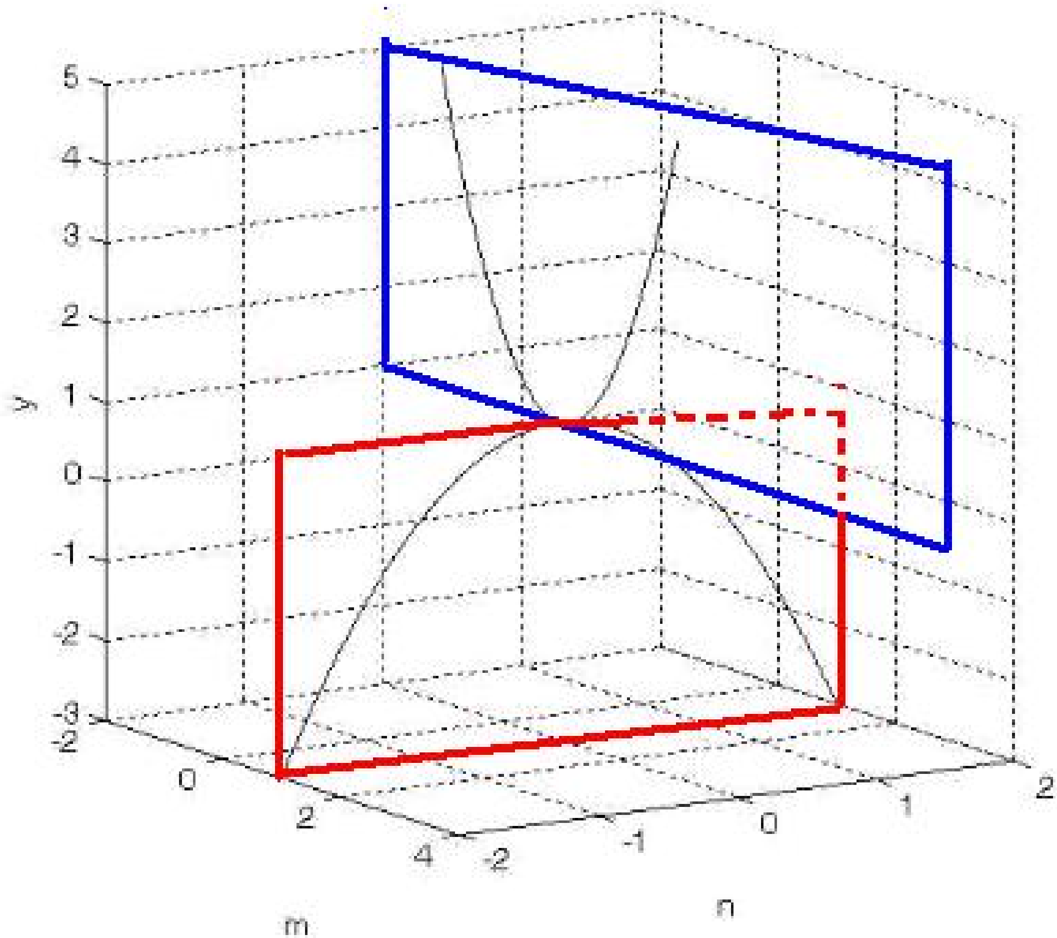
具体方法是：

1) 构造一个复变函数$f(x)=ax^2+bx+c$,x是复数。

2) 构造一个复系数的二元实值函数g(m,n)，对于定义域内任意一个实数对(m_0,n_0)都存在$x_0=m_0+n_0i$，且有$g(m_0,n_0)=f(x_0)$

根据m,n,y建立三维坐标系，可得如下图形

方程的根



采用牛顿法求多项式的根

回忆牛顿法求根的迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

由上式可以看出用牛顿法求根就要求出$f(x_k)$和$f'(x_k)$

多项式的除法

中学学过一种方法称为“综合除法”，可得下式

$$f(x)=Q(x)d(x)+r(x)$$

其中$Q(x)$称为商式,$r(x)$称为余项

以$x-x_k$除多项式 $f_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

$$Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1}$$

$$f(x)=(x-x_k)Q(x)+b_n$$

牛顿法求多项式的根

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = (x - x_k)Q(x) + b_n$$

根据中学知识

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 + x_k b_0 \\ \vdots \\ b_n = a_n + x_k b_{n-1} \end{cases}$$

即 $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_i = a_i + b_{i-1}x_k \end{cases}$

一个n阶多项式除以一个单因子x-t的伪代码：

```
r=a(n);
a(n)=0;
DOFOR i=n-1,0,-1
    s=a(i);
    a(i)=r;
    r=r*t+s;
END DO
```

牛顿法求多项式的根

例：求二阶多项式

$$f(x)=(x-4)(x+6)=x^2+2x-24$$

除以因子$(x-4)$

解：使用上述伪代码，参数$n=2, a_2=1, a_1=2, a_0=-24, t=4$

$r=a2=1 \qquad a2=0$

第一次循环： $s=a_1=2 \quad a_1=r=1 \quad r=s+rt=2+1(4)=6$

第二次循环： $s=a_0=\text{-}24 \quad a0=r=6 \quad r=-24+6(4)=0$

结果商是$a_0+a_1x=6+x$，余式为0

牛顿法求多项式根

因$f(x)=(x-x_k)Q(x)+b_n$ 可得当$x=x_k$时，$f(x_k)=b_n$

而b_n又可用前式递推得到。

$f'(x)=(x-x_k)Q'(x)+Q(x)$,要求$f'(x_k)$就要求$Q(x_k)$

因此用$(x-x_k)$除$Q(x)$得

$H(x)=c_0x^{n\text{-}2}+c_1x^{n\text{-}3}+\cdots+c_{n-2}$,余式为$c_{n-1}$,则有

$Q(x)=(x-x_k)H(x)+c_{n-1}$

$$\begin{cases} c_0=b_0 \\ c_i=b_i+c_{i-1}x_k \end{cases}$$

所以,$f'(x_k)=Q(x_k)=c_{n-1}$

牛顿法求多项式根

所以牛顿法公式可改成

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{b_n}{c_{n-1}}$$

终止条件可用$\left|\frac{b_n}{c_{n-1}}\right| < \xi$

贝尔斯托法求根

贝尔斯托法是与牛顿法有松散关系的一种迭代方法，多项式因子形式如下：

$$f_5(x) = (x+1)(x-4)(x-5)(x+3)(x-2)$$

如果除因子不是根，则商是一个四阶多项式且有余项。在此基础上多项式求根可描述为：1猜一个根的估计x=t；2 多项式除以因式x-t；3 确定是否有余项，如果没有则正好是根，如果有调整猜测值重复上面过程，直至余式消失。

贝尔斯托法就在以上基础上完成，为了得到复根，采用二次因式 X^2-rx-s

贝尔斯托法求根

$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$除以$x^2 - rx - s$得

$f_{n-2}(x) = b_2 + b_3 x + \cdots + b_n x^{n-2}$,余式为$R = b_1(x - r) + b_0$

和标准综合除法一样,可以循环实现除以二次因子情况

$$\begin{cases} b_n = a_n \\ b_{n-1} = a_{n-1} + rb_n \\ b_i = a_i + rb_{i+1} + sb_{i+2}, \; for \quad i = n-2, 0 \end{cases}$$

引入二次因式是为了求解复根，依据是：如果原多项式的系数都是实数，则复数根是共扼成对的。因此，方法归为确定r和s的值，使二次因式整除，即找到r,s的值，使余式为0！

贝尔斯托法求根

要使余式$R=b_1(x-r)+b_0$的结果为零,则b_0,b_1为零,初始估计r和s值好像一般很难直接导致这个结果,所以必须有一个系统方法来修改估计值,使b_0,b_1接近0,为此贝尔斯托采用与牛顿法相似的策略.因b_0,b_1都是r和s的函数所以采用泰勒公式展开为:

$$b_1(r+\Delta r,s+\Delta s)=b_1+\frac{\partial b_1}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial b_1}{\partial s}\Delta s$$

$$b_0(r+\Delta r,s+\Delta s)=b_0+\frac{\partial b_0}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial b_0}{\partial s}\Delta s$$

贝尔斯托法求根

令上式为零

$$b_1 = \frac{\partial b_1}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_1}{\partial s}\Delta s$$

$$b_0 = \frac{\partial b_0}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial b_0}{\partial s}\Delta s$$

确定偏导,就可确定Δr和Δs,即可修改r和s

采用类似牛顿法确定导数值的方法,可以得到偏导值

$$\begin{cases} c_n = b_n \\ c_{n-1} = b_{n-1} + rc_n \\ c_i = b_i + rc_{i+1} + sc_{i+2} \qquad i = n-2 \cdots 1 \end{cases}$$

贝尔斯托法求根

其中$\dfrac{\partial b_0}{\partial r}=\mathrm{c}_1,\dfrac{\partial b_0}{\partial s}=\dfrac{\partial b_1}{\partial r}=\mathrm{c}_2,\dfrac{\partial b_1}{\partial s}=\mathrm{c}_3$,所以有下式成立

$$c_2\Delta r+c_3\Delta s=-b_1$$

$$c_1\Delta r+c_2\Delta s=-b_0$$

解上式即可得到Δr和Δs,并以此来改进r和s的估计

每步计算误差$\left|\xi_{a,r}\right|=\left|\dfrac{\Delta r}{r}\right|100\%$和$\left|\xi_{a,\mathrm{s}}\right|=\left|\dfrac{\Delta s}{s}\right|100\%$

当两个误差都低于给定的终止条件时,可以得到根

$$x=\frac{r\pm\sqrt{r^2+4s}}{2}$$

贝尔斯托法求根

此时,存在三种可能:

1.商式是一个三阶或高阶数多项式,这种情况下,应用新式求r和s值,前面的r和s可做为这个应用的初始值

2.商式是二次的,可利用求根公式得到值;

3.商式是一次多项式,对于这种情况,余下的单根由式

$x = -\frac{s}{r}$ 可求得

贝尔斯托法求根

例:使用贝尔斯托法求下面多项式的根:

$$f_5(x)=x^5-3.5x^4+2.75x^3+2.125x^2-3.875x+1.25$$

使用初始估计为$r=s=-1$,并迭代满足条件$\xi=1\%$

主要利用以下三组式子进行计算

$$\begin{cases} b_n=a_n \\ b_{n-1}=a_{n-1}+rb_n \\ b_i=a_i+rb_{i+1}+sb_{i+2},\ for \quad i=n-2,0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n=b_n \\ c_{n-1}=b_{n-1}+rc_n \\ c_i=b_i+rc_{i+1}+sc_{i+2} \quad i=n-2\cdots1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2\Delta r+c_3\Delta s=-b_1 \\ c_1\Delta r+c_2\Delta s=-b_0 \end{cases}$$

贝尔斯托法求根

解:使用上面提供的公式计算并得到

$b_5=1 \quad b_4=-4.5 \quad b_3=6.25 \quad b_2=0.375 \quad b_1=10.5$

$b_0=11.375$

$c_5=1 \quad c_4=-5.5 \quad c_3=10.75 \quad c_2=-4.875 \quad c_1=-16.375$

因此,求解Δr和Δs的联立方程组为

$$\begin{cases} -4.875\Delta r+10.75\Delta s=10.5 \\ -16.375\Delta r-4.875\Delta s=-11.375 \end{cases}$$

得到$r=-0.6442, s=0.1381$

近似误差为$\left|\xi_{a,r}\right|=\left|\dfrac{0.3558}{-0.6442}\right|=55.23\%, \left|\xi_{a,s}\right|=\left|\dfrac{1.1381}{0.1381}\right|=824.1\%$

贝尔斯托法求根

下一步,使用修正的r, s重复计算

$b_5=1 \quad b_4=-4.1442 \quad b_3=5.5578 \quad b_2=-2.0276 \quad b_1=-1.8013$

$b_0=2.1304$

$c_5=1 \quad c_4=-4.7884 \quad c_3=8.7806 \quad c_2=-8.3454 \quad c_1=4.7874$

因此,求解Δr和Δs的联立方程组为

$$\begin{cases} -8.3454\Delta r+8.7806\Delta s=1.8013 \\ 4.7874\Delta r-8.3454\Delta s=-2.1304 \end{cases}$$

得到$r=-0.5111, s=0.4697$

近似误差为$\left|\xi_{a,r}\right|=26\%, \left|\xi_{a,s}\right|=\left|\dfrac{1.1381}{0.1381}\right|=70.6\%$

贝尔斯托法求根

四次迭代之后,$r=-0.5(\left|\xi_{a,r}\right|=0.063\%)$,s=0.5($\left|\xi_{a,s}\right|=0.04\%$)

$$x=\frac{-0.5\pm\sqrt{(-0.5)^2+4(0.5)}}{2}=0.5,-1.0$$

商是三阶方程

$$f(x)=x^3-4x^2+5.25x-2.5$$

将上面的估计结果$r=-0.5$,s=0.5作为初始值,再应用贝尔斯托公式得到估计为$r=2$,s=-1.249,计算根为

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2+4(-1.249)}}{2}=1\pm0.499i$$

还剩一阶$x=-\frac{s}{r}=2$