数值方法

----方程求根之开放法

秦 品 乐

中北大学大数据学院

什么是开法法及与划界法的区别

划界法的收敛性分析

划界法是收敛的，原因是在给定区间内已知必存在根，而根据二分及试位算法的特点，区间又在不断收缩，所以计算越来越靠近根的真实值。

什么是开放法

顾名思义，开放法并不一定界定根所在的区间，而是基于一个公式，该公式仅需要x的一个初始值或两个并不一定定根的初始值。正因如此，**开放法有时会发散，或者说计算过程中越来越离开真实根**。但当开放法是收敛的时候，它一般会比划界法收敛速度快。

简单定点迭代法

所谓迭代，就是通过当前值计算下一步的值。即有下式

$$x_{i+1}=g(x_i)$$

从上式可以看到，如果想要用到迭代，需要将函数化为上式，例如

$$x^2\text{-}2x=0 \Rightarrow x=\sqrt{2x}$$

此方程可以看作求 $y1=x,y2=\sqrt{2x}$ 两个方程的交点，改成迭代形式

$$x_{i+1}=\sqrt{2x_i}$$

简单定点迭代原理

定点迭代的几何意义就是求两个方程的的交点

定点迭代实例1

定点迭代实例2(1例从不同初始点)

定点迭代实例3

定点迭代实例4(不成功的)

定点迭代实例5(不成功的)

定点迭代实例6(不成功的)

迭代的收敛性分析

观察以上几个图是否发现问题的所在？

对于定点迭代法，如果在某个区间有 $|g'(x)|<1$ 成立，则定点迭代法收敛。

证明：

迭代的收敛性分析

因$x_{i+1}=g(x_i)$, 设真实解为x_r=g(x_r), 将两式相减得

x_r-x_{i+1}=g(x_r)-$g(x_i)$　　　　　　（1）

利用拉格朗日中值定理: $g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$　　(2)

令$a=x_i, b=x_r$则2式可写成

$$\frac{g(x_r)-g(x_i)}{(x_r-x_i)}=g'(\xi)$$

代入1式可得：x_r-x_{i+1}=$g'(\xi)(x_r$-$x_i)$

如果第i次迭代真误差写为

$E_{t,i}=x_r-x_i$，则有$E_{t,i+1}=g'(\xi)E_{t,i}$

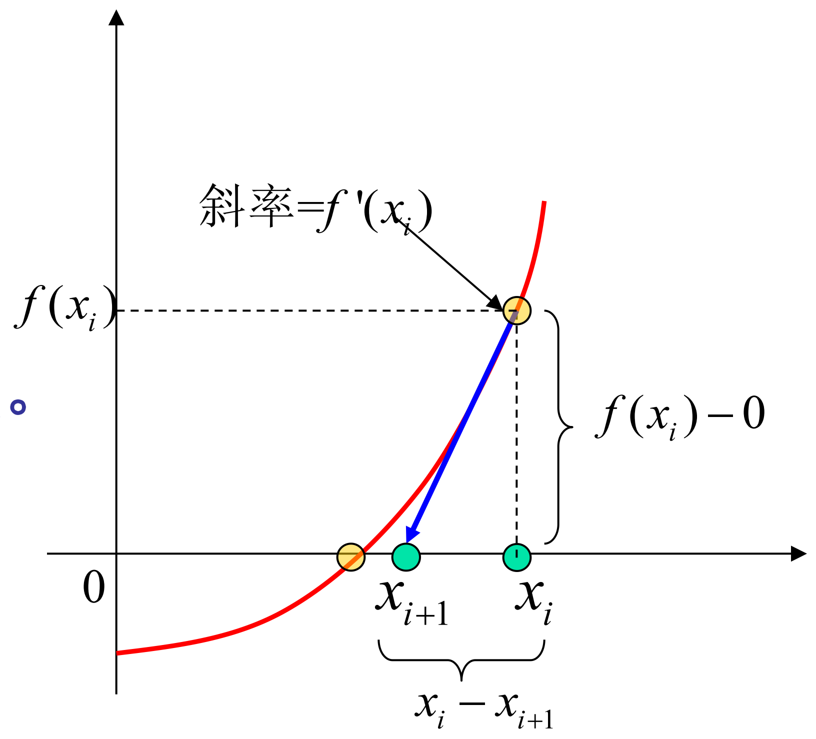
迭代的收敛性分析结论

如果在某个区间有**|g’(x)|<1**成立，则定点迭代法收敛，即每次误差会降低，且导数为正时误差为正，迭代的解是单调的，如果导数为负误差会振荡。

牛顿切线法

牛顿切线法又称牛顿-瑞普逊法，是所有求根公式中，用的最为广泛的一种方法。基本原理：

如果根的初始估计值是**xi**，则可以在点**[xi,f(xi)]**处绘制一条与函数相切的切线，该切线与**x**轴的交点通常表示根的新估计值。



$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-0}{x_i-x_{i+1}}\Rightarrow x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

牛顿切线法原理动画

牛顿切线法动画

牛顿法的终止条件和误差估计

牛顿法的终止条件：

当真实误差低于一个给定值时算法终止。

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

牛顿法的误差估计

由泰勒定理得

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2$$

将级数中一阶导数后面项省略，得一近似表达式

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

上式与x轴交点处，$f(x_{i+1})$应为0，则有：

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

牛顿法的误差估计

如果函数的真实值为x_r，可令$x_{i+1}=x_r$，且$f(x_r)=0$

$$0=f(x_i)+f'(x_i)(x_r-x_i)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_r-x_i)^2$$

和牛顿切线方法公式相减得

$$0=f'(x_i)(x_r-x_{i+1})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x_r-x_i)^2$$

由误差理论得 $E_{t,i+1}=(x_r-x_{i+1})$和$E_{t,i}=(x_r-x_i)$得

$$0=f'(x_i)E_{t,i+1}+\frac{f''(\xi)}{2!}E_{t,i}^2 \Rightarrow E_{t,i+1}=\frac{-f''(\xi)}{2f'(x_i)}E_{t,i}^2$$

牛顿法的误差估计

结论： 牛顿切线法的误差大致与前一迭代的误差平方成正比，这表示每次迭代后，正确的小数位数约翻了一倍

牛顿法的缺陷

牛顿法不成功的实例

正割法

正割法可以认为是牛顿切线法的一个近似实现。回忆牛顿法的迭代公式

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

因导数可以用弦长近似表示 $f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$ 上式表示成

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

正割法演示动画

正割法实现动画