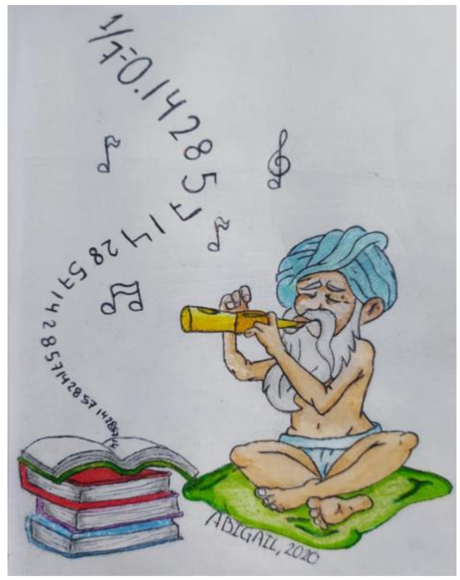
¿Hay patrones en la expansión decimal de las fracciones?

Luis Ángel Vázquez Medel[1], Eduardo Rubio Jiménez[2], Gustavo González Ramos[3], Ricardo Medel Esquivel[4]
rmedele1500@alumno.ipn.mx

Introducción

Las fracciones son números que usamos para representar porciones de una o más cantidades unitarias. Una fracción se escribe de la forma $\frac{a}{b}$, donde el entero a se llama numerador y el entero $b \neq 0$, denominador. Si a y b no tienen ningún factor común se dice que la fracción es *irreducible*; cuando $a < b$ se dice que la fracción es *propia*. En este artículo hablaremos únicamente de fracciones propias e irreducibles.



Las fracciones tienen la mala fama de ser un tema muy difícil, pero cuando analizamos con atención su representación decimal ofrecen un aspecto de verdad interesante. Si divides el numerador entre el denominador para obtener la representación o expansión decimal de una fracción puedes comprobar que ocurre uno de estos tres casos:

1) La expansión decimal termina.
   Ejemplo: $\frac{1}{8} = 0.125$.

2) La expansión decimal no termina, sino que es infinita y periódica, y el período comienza inmediatamente después del punto decimal.
   Ejemplo: En $\frac{2}{7} = 0.57142857142857\ldots$ el período es 571428.

3) La expansión decimal es infinita y periódica, pero el período no inicia inmediatamente después del punto decimal, sino detrás de algunas cifras. Ejemplo: En $\frac{3}{44} = 0.06818181\ldots$ el período es 81 y comienza tras el 06.

---

[1] Secundaria, segundo año. Secundaria Oficial No. 30.
[2] Secundaria, segundo año. Secundaria Oficial No. 978.
[3] Maestría. Profesor de la FES-Acatlán, UNAM.
[4] Doctorado, cuarto año. CICATA-Legaria, IPN / ICF, UNAM.

Surgen entonces algunas cuestiones: ¿Podemos saber el tipo de expansión decimal que tendrá una fracción en particular sin hacer la división? ¿Qué determina que la expansión decimal de una fracción resulte finita o infinita?

Más todavía. En nuestro segundo y tercer ejemplos si, curiosamente, tomamos cada uno de los períodos (571428 y 81), los separamos en dos mitades y sumamos éstas, obtenemos: 571 + 428 = 999 y 8 + 1 = 9, resultados que son cadenas de nueves. Algo similar ocurre si partimos en tres el período 571428 y sumamos las tres partes: 57 + 14 + 28 = 99. ¿Es esta una propiedad general de los períodos de las fracciones? ¿Qué otros patrones podemos descubrir en ellos?

En este artículo compartimos las respuestas que encontramos en nuestra investigación, tras analizar muchos casos particulares con la ayuda de un programa computacional y luego de buscar información sobre el tema.

Un programa para analizar la expansión decimal de las fracciones

Encontrar a mano la expansión decimal de una fracción no es difícil, pero puede ser una tarea monótona y agotadora. Hasta con una buena calculadora pueden surgir complicaciones, porque ¿cuántas cifras decimales te podría mostrar?

Afortunadamente podemos programar una computadora para que haga la división por nosotros y nos devuelva el resultado con muchísimos dígitos decimales. La siguiente imagen muestra la salida de un programa escrito en el lenguaje Python al que se le han solicitado 1,000 cifras de la expansión decimal de $\frac{1}{97}$.

```
from decimal import *
import math
```

```
a=1
b=97
getcontext().prec = 1000
fraccion = Decimal(a) / Decimal(b)
print(fraccion)
```

```
0.0103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742268041237113402061855670103092783505154
```

De este modo podemos identificar el período de una fracción. Mejor aún, podemos hacer que el programa nos diga de una vez cuál es el período de una fracción dada. Esto precisamente fue lo que hicimos, y con ayuda del programa elaborado pudimos observar varias propiedades interesantes. En la siguiente sección hacemos una lista de algunas de ellas[5].

[5] El programa implementado puede consultarse y descargarse en https://github.com/Medetl/Decimales

Si bien estas propiedades ya son conocidas por los matemáticos desde hace mucho tiempo (Gardner, 1983), son poco conocidas por el público y resultó muy interesante descubrir nosotros mismos algunas de ellas.

Patrones o propiedades de la expansión decimal de las fracciones

Nuestro resultado y referencia principal es la Tabla I.

Tabla I. *Períodos de los inversos de números primos menores que 100*.

Fracción	Período	Longitud
1/3	3	1
1/7	142857	6
1/11	09	2
1/13	076923	6
1/17	0588235294117647	16
1/19	052631578947368421	18
1/23	0434782608695652173913	22
1/29	0344827586206896551724137931	28
1/31	032258064516129	15
1/37	027	3
1/41	02439	5
1/43	023255813953488372093	21
1/47	0212765957446808510638297872340425531914893617	46
1/53	0188679245283	13
1/59	016949152542372881355932203389830508474576271186440677966 1	58
1/61	016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459	60
1/67	014925373134328358208955223880597	33
1/71	01408450704225352112676056338028169	35
1/73	01369863	8
1/79	0126582278481	13
1/83	01204819277108433734939759036144578313253	41
1/89	01123595505617977528089887640449438202247191	44
1/97	010309278350515463917525773195876288659793814432989690721649484536082474226804123711340206185567	96

Nota: Se muestra la fracción, su período decimal correspondiente y la longitud o cantidad de cifras decimales del período.
Fuente: Elaboración propia.

Centrar la atención en las fracciones cuyo denominador es un número primo resulta importante porque de este caso fundamental puede derivarse el análisis de casos en que el denominador sea un número compuesto. Ahora bien, hay dos primos que no aparecen en la Tabla I: el 2 y el 5. Estos son los factores primos de 10, el número base de nuestro sistema de numeración de uso cotidiano, razón por la cual muestran un comportamiento especial, tal y como indicamos en las propiedades 1 a 4 de la siguiente lista.

1. **Una fracción propia e irreducible cuyo denominador solamente tenga como factores a 2 o a 5 tendrá una expansión decimal finita.**

   Ejemplo: En $\frac{3}{20} = 0.15$, $20 = 2^2 \times 5$ y la expansión decimal tiene solo 2 cifras.

   Explicación: Este tipo de fracción siempre puede transformarse en una fracción decimal (una en la que el denominador sea potencia de 10) y, por ello, tendrá una expansión decimal finita. En nuestro ejemplo:

   $$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} \times 1 = \frac{3}{2^2 \times 5} \times \frac{5}{5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{15}{(2 \times 5)^2} = \frac{15}{10^2} = \frac{15}{100} = 0.15$$

   Si el denominador de una fracción propia e irreducible tiene un factor distinto a 2 y a 5, su desarrollo decimal será infinito.

2. **La expansión decimal de una fracción de la forma $\frac{1}{2^n}$ tiene *n* cifras decimales, mismas que corresponderán al valor numérico de 5^n más, posiblemente, algunos ceros escritos a la izquierda, si el número de cifras de 5^n es menor que *n*.**

   Ejemplo: En $\frac{1}{16} = 0.0625$, $16 = 2^4$ y la expansión decimal contiene 4 cifras, que corresponden al valor numérico de $5^4 = 625$ más un 0 a la izquierda.

   Explicación: Este es un caso particular de la propiedad anterior. En el ejemplo:

   $$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} \times 1 = \frac{1}{2^4} \times \frac{5^4}{5^4} = \frac{1 \times 5^4}{2^4 \times 5^4} = \frac{5^4}{(2 \times 5)^4} = \frac{5^4}{10^4} = \frac{625}{10000} = 0.0625$$

3. **La expansión decimal de una fracción de la forma $\frac{1}{5^n}$ tiene *n* cifras decimales, mismas que corresponden al valor numérico de 2^n más, posiblemente, algunos ceros escritos a la izquierda, si el número de cifras de 2^n es menor que *n*.**

   Ejemplo: En $\frac{1}{25} = 0.04$, $25 = 5^2$ y la expansión decimal contiene 2 cifras, que corresponden al valor numérico de $2^2 = 4$ más un 0 a la izquierda.

   Explicación: Este es otro caso particular de la primera propiedad de la lista. En nuestro ejemplo:

   $$\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} \times 1 = \frac{1}{5^2} \times \frac{2^2}{2^2} = \frac{1 \times 2^2}{5^2 \times 2^2} = \frac{2^2}{(2 \times 5)^2} = \frac{2^2}{10^2} = \frac{4}{100} = 0.04$$

4. **Si p es primo, el período de la expansión decimal de $\frac{1}{p}$ empieza inmediatamente después del punto decimal; si la fracción es de la forma $\frac{1}{2^n \times 5^m \times p}$ el período empieza después de una cantidad de cifras decimales igual al exponente mayor, *n* o *m*.**

Ejemplo: En $\frac{1}{60} = 0.01666\ldots$, $60 = 2^2 \times 5 \times 3$ y el período, 6, empieza 2 cifras decimales después del punto.

Explicación: Se deriva de la primera propiedad, pues este tipo de fracción puede reescribirse como producto de una fracción decimal por otra no decimal. El efecto de la primera sobre la segunda consiste en desplazar el período tantas cifras decimales a la derecha como indique el mayor de los exponentes, *m* o *n*. En nuestro ejemplo:

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{2^2 \times 5 \times 3} \times 1 = \frac{1}{2^2 \times 5 \times 3} \times \frac{5}{5} = \frac{5}{(2 \times 5)^2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{10^2} \times \frac{1}{3} = 0.01666\ldots$$

5. **El período de $\frac{1}{p}$, donde p es un número primo, tiene una longitud de, a lo más, $p - 1$ cifras decimales.**

Ejemplo: En $\frac{1}{7} = 0.14285714\ldots$ el período, 142857, tiene una longitud de 6 cifras.

Explicación: Cuando dividimos un número entero entre p hay exactamente p valores posibles para el residuo: 0, 1, 2, …, $p - 1$. Si al realizar la división para determinar la expansión decimal de $\frac{1}{p}$ encontramos un residuo parcial igual a 0 la división termina y, por tanto, la expansión decimal resultará finita. Para que la expansión decimal resulte infinita ningún residuo parcial debe ser 0; así, los residuos parciales solo pueden tomar $p - 1$ valores distintos, y en cuanto uno de ellos se repita se repetirán todos los anteriores, habremos dado con el período. En nuestro ejemplo:

Para $\frac{1}{7}$ los residuos posibles son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Al realizar la división vemos que aparecen todos, en este orden: 1, 3, 2, 6, 4, 5, y se repiten.

$$\begin{array}{r|cccccccc}
 & 0. & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \ldots \\ \cline{2-8}
7 & 1 & & & & & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & 1 & 0 & & & & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & 7 & & & & & & \\ \cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{} & & 3 & 0 & & & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & 2 & 8 & & & & & \\ \cline{3-4}
\multicolumn{1}{r}{} & & & 2 & 0 & & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & 1 & 4 & & & & \\ \cline{4-5}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & 6 & 0 & & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & 5 & 6 & & & \\ \cline{5-6}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & 4 & 0 & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & 3 & 5 & & \\ \cline{6-7}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & 5 & 0 & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & 4 & 9 & \\ \cline{7-8}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & & 1 & \ldots
\end{array}$$

6. **Cuando p es primo y $\frac{1}{p}$ tiene un período de $p-1$ cifras de longitud se obtiene un número cíclico.**
Ejemplo: Como se mostró en el ejemplo anterior, el inverso de 7 tiene un período de 6 cifras: 142857. Estas cifras forman un número cíclico en el sentido que puede apreciarse en la Tabla II.

Tabla II. *Períodos de los múltiplos propios de 1/7*.

Fracción	Período	Longitud
1/7	142857	6
2/7	285714	6
3/7	428571	6
4/7	571428	6
5/7	714285	6
6/7	857142	6

Nota: Todos estos períodos contienen las mismas cifras, empiezan con una distinta, pero siguen el mismo orden.
Fuente: Elaboración propia.

Existen diferentes tipos de números cíclicos. Una discusión más extensa sobre esta propiedad puede encontrarse en Gardner (1983).

7. **Si el período de $\frac{1}{p}$ se multiplica por p se obtiene un número entero formado por una hilera de nueves, tantos como cifras tenga la longitud del período.**
Ejemplo: En $\frac{1}{13} = 0.076923076\ldots$ el período, 076923, consta de 6 cifras y se tiene: $13 \times 076923 = 999999$, resultado que consiste en una cadena de 6 nueves.

Explicación: Supongamos que se desea hallar la fracción generatriz del decimal $x = 0.076923076\ldots$ Procederíamos identificando en primer lugar la cantidad de cifras en el período: 6. Luego, multiplicando ambos lados de la expresión anterior ($x = 0.076923076\ldots$) por 10^6 y restando del resultado los lados correspondientes de la expresión original se tendría: $(10^6 - 1) \times x = 76923$.
Si en esta última expresión sustituimos el valor conocido de $x = \frac{1}{13}$ y realizamos la multiplicación cruzada, obtenemos: $10^6 - 1 = 13 \times 76923$. Pero $10^6 - 1 = 999999$, por tanto $13 \times 76923 = 999999$. Este argumento puede generalizarse.

Esta explicación contiene implícitamente un hecho fundamental para comprender la siguiente propiedad y para construir un algoritmo que calcule el período del inverso de un número primo *p*. Ese hecho fundamental es que el período de $\frac{1}{p}$ puede determinarse al hallar el valor mínimo de *n* tal que $10^n - 1$ resulte divisible entre *p*. Con ese valor de *n* el período será $\frac{10^n - 1}{p}$.

8. **TEOREMA DE MIDY: Si $p > 5$ es primo y la fracción $\frac{1}{p}$ tiene un período de longitud par, entonces la suma de las dos mitades que conforman el período es una cadena de nueves.**

Ejemplo: En $\frac{1}{73} = 0.01369863013 \ldots$ el período es 01369863 y tiene una longitud de 8 cifras. Se tiene entonces que: $0136 + 9863 = 9999$.

Explicación: Llamemos *P* al período de $\frac{1}{p}$, sean *A* y *B* las dos mitades de *P*, cada una de longitud *k*. Entonces, según se dijo en la explicación de la propiedad anterior, *2k* es el valor mínimo del exponente de 10 tal que:

$$\frac{1}{p} = \frac{P}{10^{2k} - 1} = \frac{A \times 10^k + B}{10^{2k} - 1} = \frac{A \times 10^k + B}{(10^k - 1)(10^k + 1)}$$

Ahora bien, la equivalencia entre la primera y la última de estas fracciones implica que *p* divide a $10^k + 1$, porque *p* no puede dividir a $10^k - 1$, en vista de que el mínimo número de la forma $10^n - 1$ divisible entre *p* se obtiene con el exponente *2k*. Esto, a su vez, implica que de la siguiente expresión se obtiene un número entero:

$$\frac{10^k + 1}{p} = \frac{A \times 10^k + B}{10^k - 1} = \frac{A \times (10^k - 1) + A + B}{10^k - 1} = A + \frac{A + B}{10^k - 1}$$

Analizar los casos posibles lleva a concluir que debe ser $A + B = 10^k - 1$, necesariamente, de lo cual se obtiene el resultado deseado, pues $10^k - 1$ es número formado por una cadena de *k* nueves.

La demostración completa puede consultarse en Rademacher (1970). El matemático francés E. Midy publicó una demostración de este teorema en 1836.

9. **TEOREMA DE GINSBERG: Si $p > 5$ es primo y la fracción $\frac{1}{p}$ tiene un período de longitud múltiplo de 3, cuando se divide el período en 3 bloques y se suman el resultado es una cadena de nueves.**

Ejemplo: En $\frac{1}{31} = 0.0322580645161290322 \ldots$ el período es 032258064516129 y tiene una longitud de 15 cifras. Luego: $03225 + 80645 + 16129 = 99999$.

Explicación: Como hicimos anteriormente, llamemos *P* al período de $\frac{1}{p}$, y sean *A*, *B* y *C* las tres partes de *P*, cada una de longitud *k*. Procediendo en analogía a la explicación anterior, *3k* es el valor mínimo del exponente de 10 tal que:

$$\frac{1}{p} = \frac{A \times 10^{2k} + B \times 10^k + C}{10^{3k} - 1} = \frac{A \times 10^{2k} + B \times 10^k + C}{(10^k - 1)(10^{2k} + 10^k + 1)}$$

Y de aquí se puede concluir que *p* debe dividir a $10^{2k} + 10^k + 1$, lo cual lleva a inferir que la siguiente expresión corresponde a un número entero:

$$\frac{10^{2k} + 10^k + 1}{p} = \frac{A \times 10^{2k} + B \times 10^k + C}{10^k - 1} = A \times 10^k + A + B + \frac{A + B + C}{10^k - 1}$$

Y una vez más, analizar los casos posibles nos llevaría a concluir que, necesariamente, $A + B + C = 10^k - 1$, lo cual es una cadena de k nueves. Más detalles de la demostración pueden consultarse en la publicación original de Ginsberg (2004). Una extensa exposición de otras generalizaciones del teorema de Midy, desde un punto de vista avanzado, puede verse en Cala (2015).

Conclusión

La expansión decimal de las fracciones no es una lista caprichosa de cifras. Al contrario, estas cifras siguen patrones bastante interesantes. Este trabajo no muestra una lista exhaustiva de ellos, lo cual es una buena noticia porque, como puede entreverse en estas páginas, es posible usar una computadora para explorarlos uno mismo y, tal vez, descubrir algo nuevo e interesante.

Retomando lo dicho al principio sobre la mala fama de las fracciones, hacemos notar que conocer las propiedades aquí mostradas muchas veces es útil para simplificar el trabajo al realizar cálculos.

Por ejemplo, al realizar divisiones entre 7 es posible utilizar el hecho de que este denominador genera números cíclicos y su período cumple las condiciones del teorema de Midy.

Así, podemos calcular 13/7 = 1 + 6/7 tan solo calculando la primera cifra de la expansión decimal de 6/7 (8) y recordando que el período de 1/7 es 142857 (algo muy fácil, pues 14, 28, 57 casi es una progresión aritmética), un número cíclico, podemos determinar que 6/7 tiene el período 857142 y por tanto el resultado de la operación es 13/7 = 1.857142… El teorema de Midy puede ayudarnos a recordar el período completo de 1/7, si tan solo recordamos su primera mitad.

Ilustraciones: Abigail de la Cruz Medel

Referencias

Cala Barón, J. C. (2015). *Sobre La Propiedad De Midy*. Tesis Profesional, Universidad Industrial de Santander, Escuela De Matemáticas.

Gardner, M. (1983). *Circo matemático*. Alianza Editorial.

Ginsberg, B. D. (2004) Midy's (Nearly) Secret Theorem-An Extension After

165 Years, *The College Mathematics Journal*, **35**(1), 26-30.

Rademacher, H. A., & Toeplitz, O. (1970). *Números y figuras: matemáticas para todos*. Alianza Editorial.