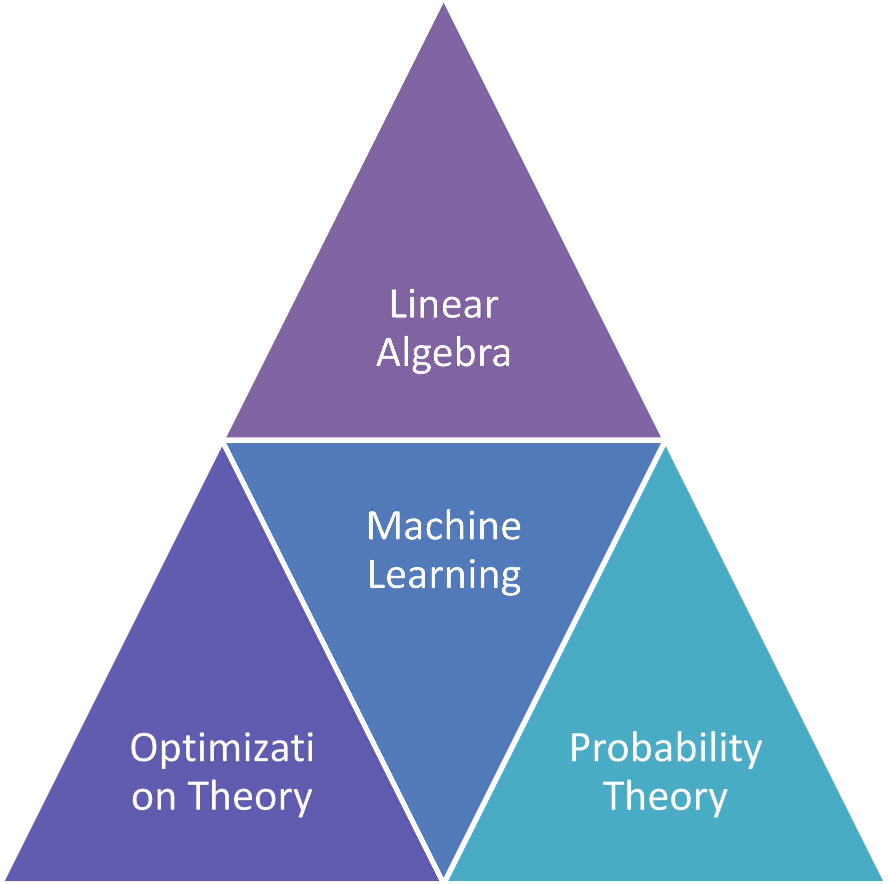
یادآوری مفاهیم پایه

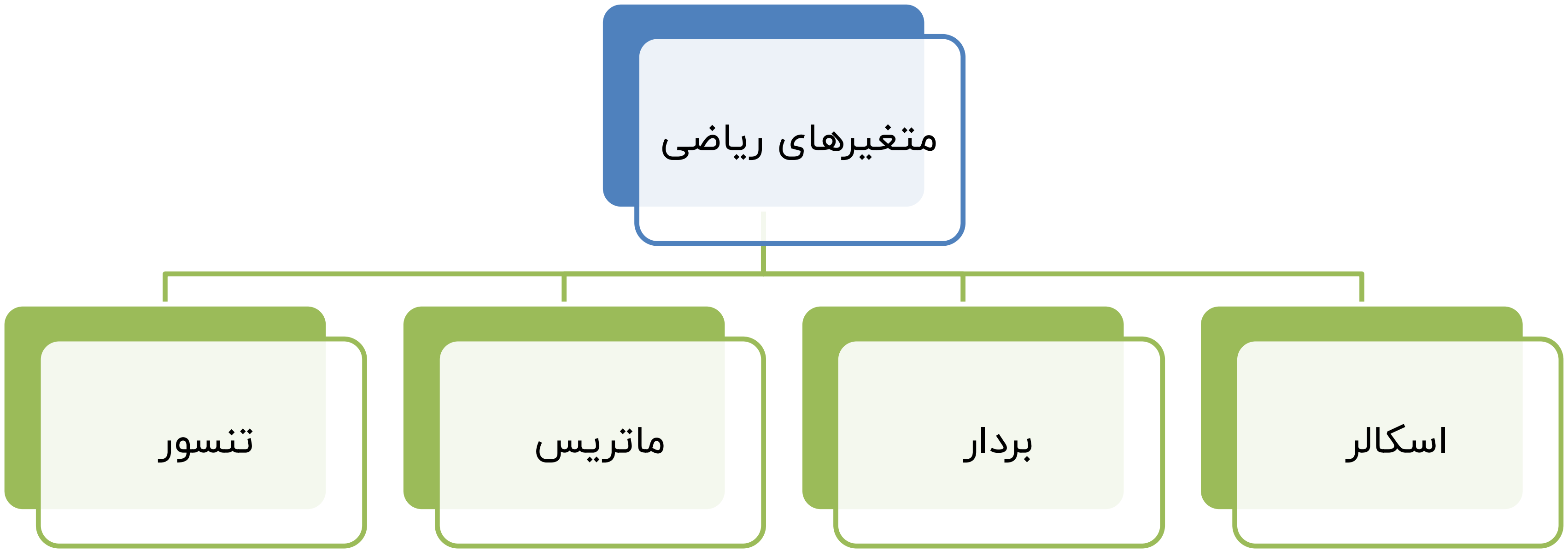
مهدی شکری زاده

مقدمه

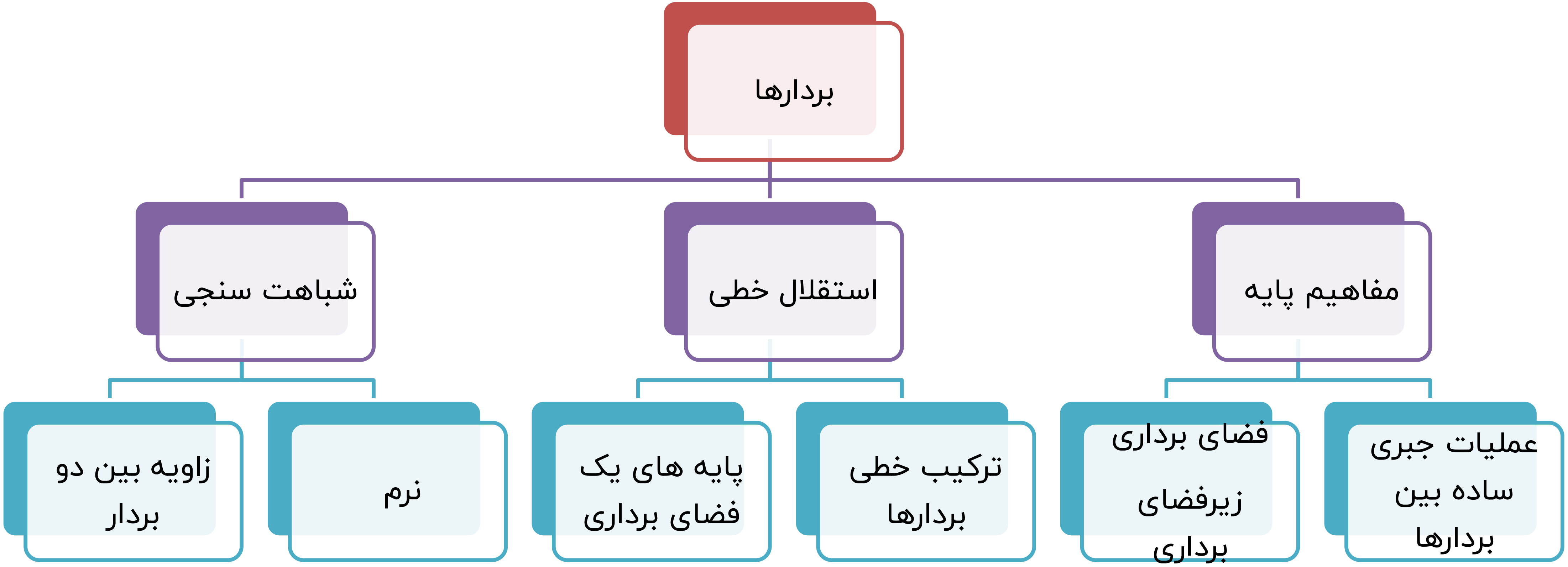
- ابزارهای مورد نیاز برای توسعه یک مدل یادگیر
  - جبرخطی
  - تئوری احتمالات و فرآیندهای تصادفی
  - تئوری بهینه‌سازی



جبرخطی

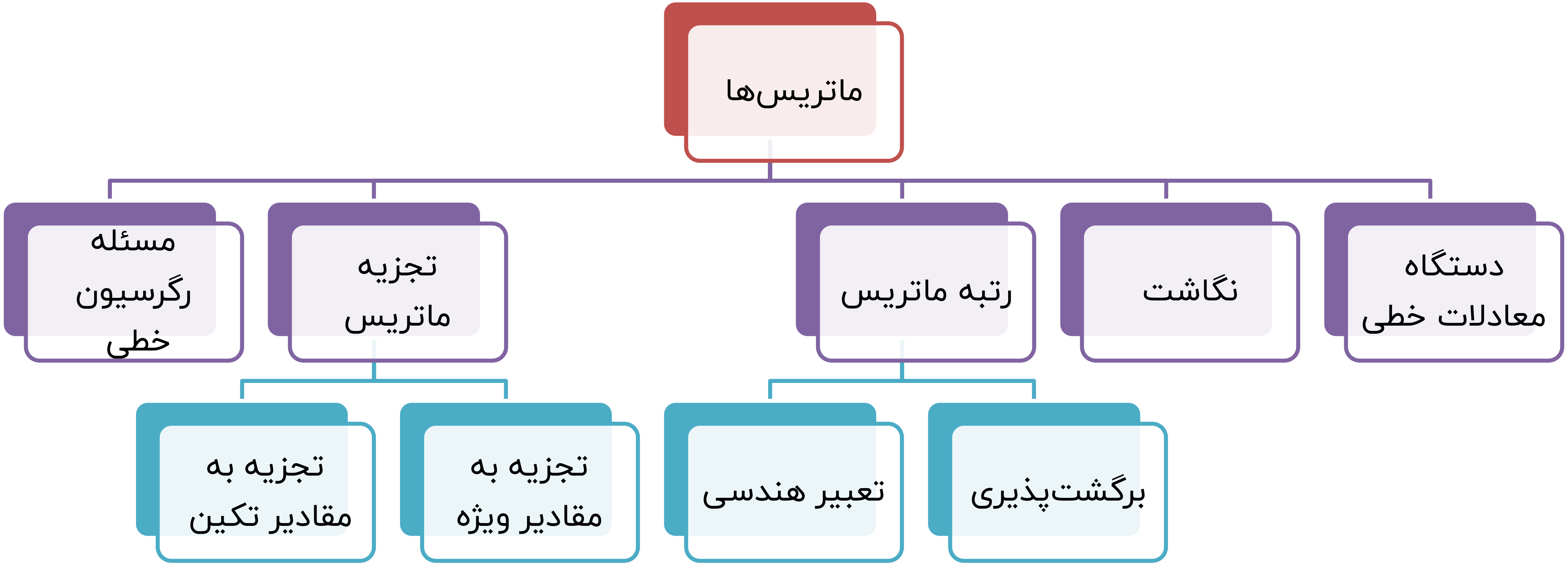


جبرخطی



بردارها
مفاهیم پایه
استقلال خطی
شباهت سنجی
عملیات جبری ساده بین بردارها
فضای برداری زیرفضای برداری
ترکیب خطی بردارها
پایه های یک فضای برداری
نرم
زاویه بین دو بردار

جبرخطی


ماتریس‌ها
دستگاه معادلات خطی
نگاشت
رتبه ماتریس
تجزیه ماتریس
مسئله رگرسیون خطی
برگشت‌پذیری
تعبیر هندسی
تجزیه به مقادیر ویژه
تجزیه به مقادیر تکین

ترکیب خطی بردارها

- ترکیب خطی بردارها
  - منظور از ترکیب خطی بردارها، جمع وزن دار بردارهاست (هر وزن یک اسکالر است)

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{bmatrix}5\\0\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}50\\0\\12\end{bmatrix}$$

- بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ فضای برداری را اسپن می کنند هرگاه هر بردار دلخواه از این فضا رابتوان بر حسب ترکیب خطی این بردارها نوشت

پایه‌های فضای برداری

- استقلال خطی
  - مجموعه بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ دارای استقلال خطی هستند هرگاه:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- پایه های یک فضای برداری

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} - 1 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

بردارهای پایه فضای دو بعدی

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + 0 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + 2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

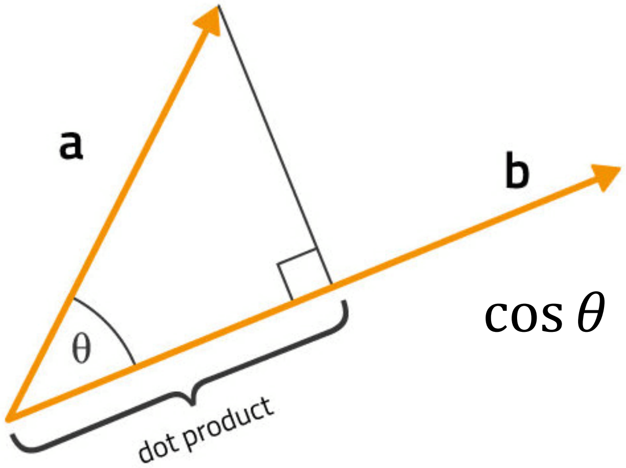
بردارهای پایه فضای سه بعدی

ضرب داخلی

- ضرب داخلی
  - شباهت دو بردار بر اساس این معیار، بر اساس زاویه بین دو بردار تعریف می شود Cosine similarity
  - از این معیار در سنجش میزان شباهت بین دو رشته متنی در زمینه پردازش زبان طبیعی استفاده می شود

$$x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$x^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$



$$\cos\theta = \frac{a.b}{|a||b|}$$

نرم

- مفهوم فاصله بین دو بردار را به شکل زیر می‌توان داد:

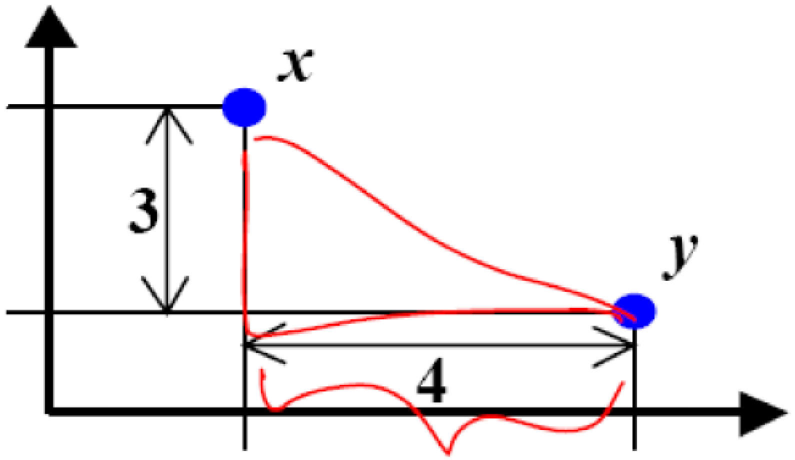
$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- مسئله اصلی خوشه بندی
- دسته بندی اشیا به نحوی که اشیا هر دسته دارای کمترین فاصله با خود و بیشترین فاصله با اشیا دیگر دسته ها باشد

نرم

- فاصله اقلیدسی $p = 2$ (نرم-2)
- فاصله منهتن $p = 1$ (نرم-1)
- ماکزیمم فاصله $p = +\infty$ (نرم-بی نهایت)
- مینیمم فاصله $p = -\infty$

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$



فاصله اقلیدسی: $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

فاصله منهتن: $4 + 3 = 7$

سوپریمم (ماکزیمم فاصله): 4

دستگاه معادلات خطی

- دستگاه معادلات خطی

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب } (M)} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ . \\ c_n \end{bmatrix}}_{\text{بردار پارامترها } X} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ y_n \end{bmatrix}}_{\text{بردار هدف } b}$$

- چه ترکیب خطی ای از ستون های ماتریس M منجر به تولید بردار هدف b خواهد شد؟
- اگر بردار پارامتر مشخص باشد – رویکرد مستقیم (نگاشت)
- اگر بردار پارامتر مشخص نباشد – رویکرد معکوس (تخمین پارامتر)

نگاشت

- ساده‌ترین مسئله نگاشت
  - ضرب ماتریس در یک بردار ستونی (قواعد ضرب ماتریسی و تصویر ستون)
  - تبدیل بردار X تحت نگاشت A برابر با بردار b است

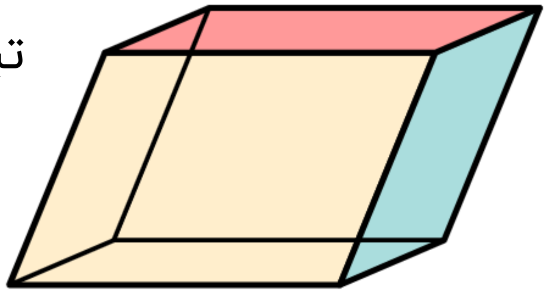
$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 5\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 8\\ 6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

معکوس‌پذیری

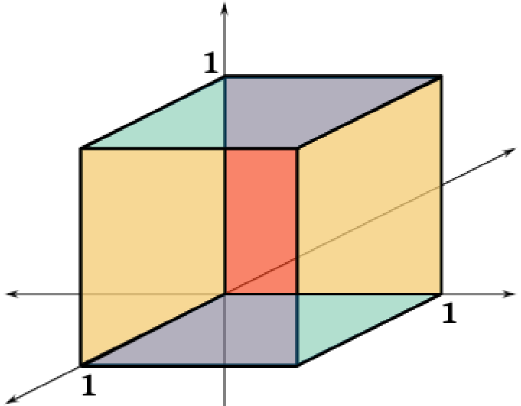
- تبدیل خطی

ماتریس A



حجم مکعب انتقالی = دترمینان ماتریس A

تبدیل ماتریس واحد تحت نگاشت A



حجم مکعب واحد = 1

  - تحت چه شرایطی این تبدیل برگشت‌پذیر است؟

رگرسیون خطی

- دستگاه معادلات خطی
  - مسئله اصلی جبر خطی

$$y = AX$$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}}_{\text{بردار هدف}}$$

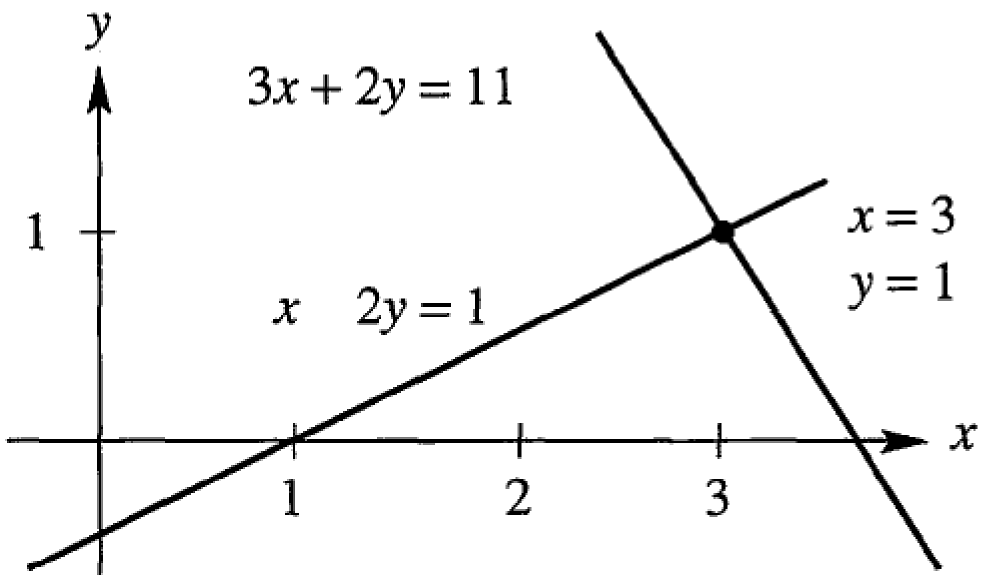
- روش اول: تصویر بردارهای ستون
  - چه ترکیب خطی از بردارهای ستونی ماتریس ضرایب منجر به تولید بردار هدف خواهد شد؟

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

رگرسیون خطی

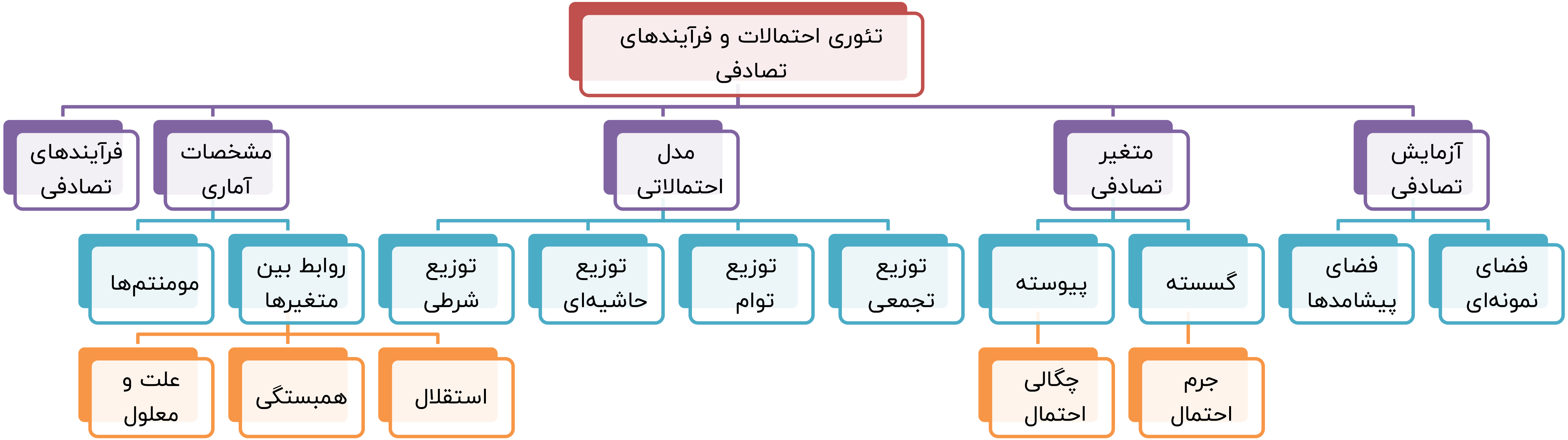
- روش دوم: تصویر بردارهای ردیف

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 11\end{bmatrix}$$



روش های ذکر شده (مصورسازی معادلات و روش حذفی) در شرایطی که تعداد متغیرها بالا باشند (ابعاد ماتریس ضرایب بیشتر از 2 باشد) قابل پیاده سازی نیستند – راه حل استفاده از روش های مبتنی بر بهینه سازی است

تئوری احتمالات و فرآیندهای تصادفی



تئوری احتمالات

مسیر حل یک پروژه داده محور

جمع‌آوری داده

- اندازه‌گیری
- برچسب‌گذاری

پیش پردازش داده

- بسته به نوع تسک، چه پردازشی نیاز است تا نمایش داده را طوری تغییر دهد تا توسعه مدل تصمیم ساده‌تر صورت بگیرد؟

انتخاب مدل

- مدل انتخاب شده تا چه اندازه به واقعیت مکانیزم تولید داده نزدیک است؟
- مدل انتخاب شده تا چه اندازه در تصمیم‌گیری‌های آتی کمک می‌کند؟

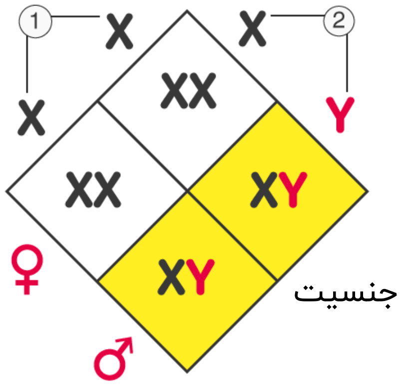
ارزیابی مدل

آزمایش تصادفی

- آزمایشی که نتیجه آن از قبل مشخص نیست.

انداختن سکه

انداختن تاس

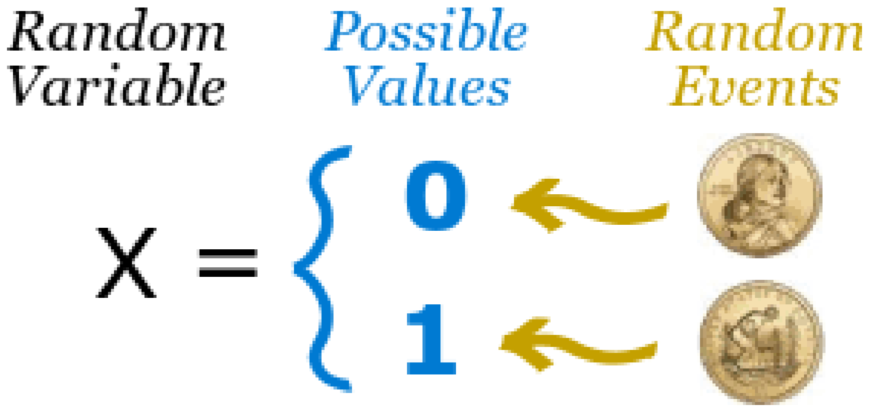


تعیین جنسیت

- فضای نمونه‌ای – مجموعه تمام نتایج ممکن از یک آزمایش تصادفی
  - برای یک تاس شش وجهی، فضای نمونه برابر است با مجموعه {۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶}
  - مجموعه اعداد حقیقی بین صفر و یک [0،1]
- فضای پیشامدها – مجموعه تمام نتایج مطلوب

متغیر تصادفی

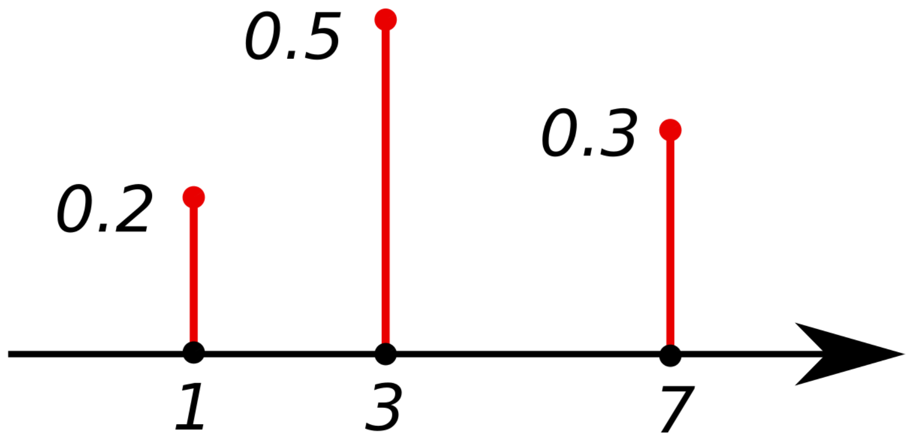
- نگاشتی از فضای نمونه‌ای به مجموعه اعداد
  - متغیری که چندین مقدار مختلف را با احتمالات مختلف اختیار می‌کند.
  - اصل اساسی در تئوری احتمالات محاسبه این احتمالات است.



- محاسبه احتمال بسته به نوع متغیر تصادفی متفاوت است
  - متغیر تصادفی گسسته
  - متغیر تصادفی پیوسته

محاسبه جرم احتمال

- منظور از احتمال، جرم احتمال است.



$$P(X=1)=0.2$$
$$P(X=3)=0.5$$
$$P(X=7)=0.3$$

$$\sum_x P(X=x)=1$$

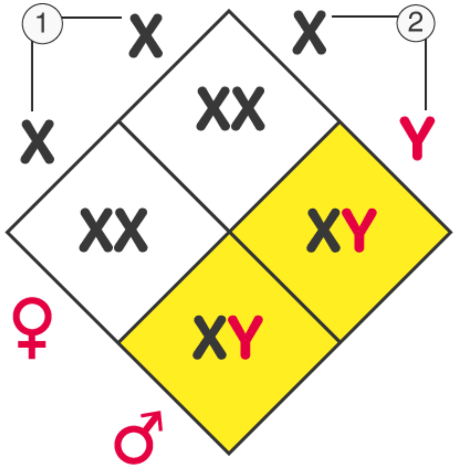
شرط نرمال بودن

- جرم احتمال چگونه محاسبه می‌شود؟
  - بسامد نسبی
  - آیا می‌توان همین دیدگاه را برای متغیرهای پیوسته تعمیم داد؟

تفسیر احتمال

- احتمال مبتنی بر تکرار

- احتمال بیزین



تابع توزیع تجمعی

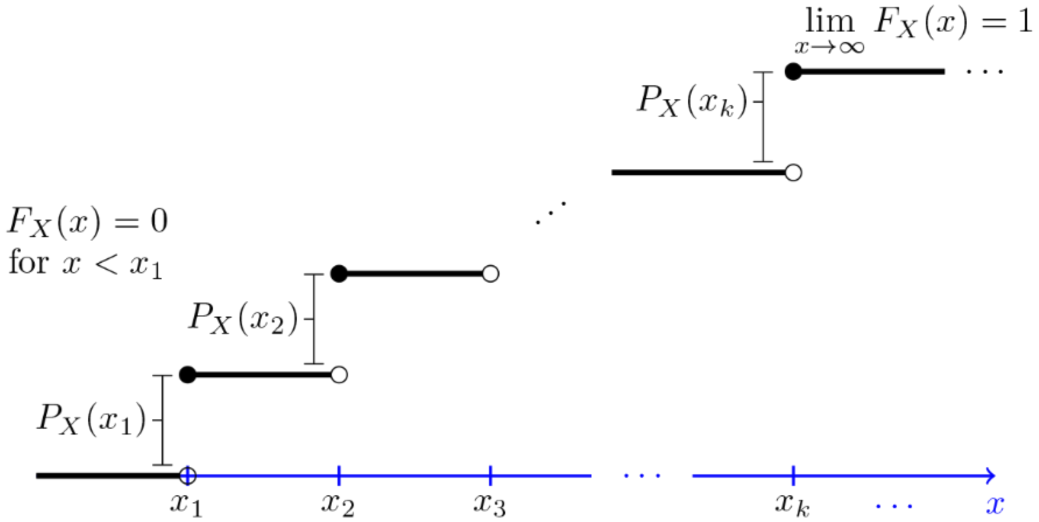
- تعریف
  - برای یک متغیر تصادفی X تابع توزیع تجمعی به صورت زیر قابل تعریف است:

$$F_x(x) = Pr\{X < x\}$$

$$F_x(-\infty) = 0, F_x(+\infty) = 1$$

$$x_2 \geq x_1 \rightarrow F_x(x_2) \geq F_x(x_1)$$

$$\boxed{P(x_1 \leq x \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)}$$



محاسبه جرم احتمال

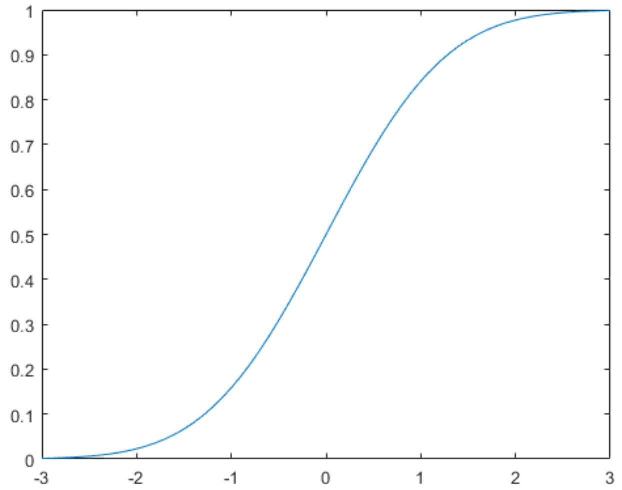
- تابع چگالی احتمال

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$$

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = F_x(x + \Delta x) - F_x(x)$$

$$f(x)\Delta \mathrm{x} = F_x(x + \Delta x) - F_x(x)$$

$$f(x) = \frac{F_x(x + \Delta x) - F_x(x)}{\Delta x} = F'(x)$$



- تعریف
  - متغیر تصادفی پیوسته –تابع توزیع تجمعی پیوسته
  - متغیر تصادفی گسسته – تابع توزیع تجمعی گسسته
  - متغیر تصادفی مخلوط – تابع توزیع تجمعی تکه‌ای پیوسته

توزیع توام

- اگر بیش از یک متغیر تصادفی در دست باشد:

$$X = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}, x_a \in R^{m_1}, x_b \in R^{m_2}$$

$$F_x(x_a, x_b) = P(X_a \leq x_a, X_b \leq x_b)$$

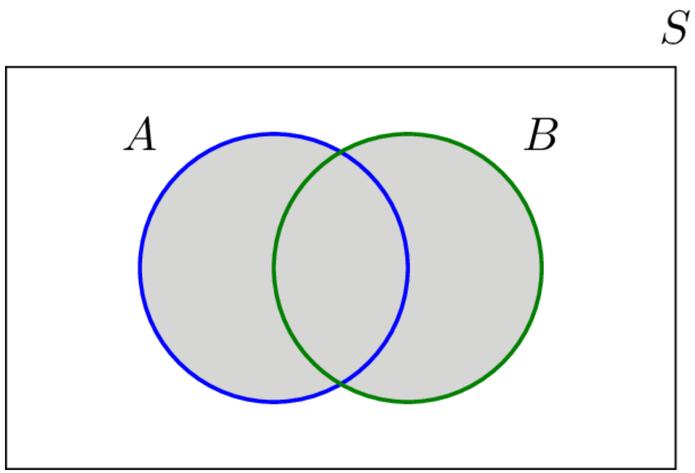
$$P(a_1 \leq x_a \leq b_1, a_2 \leq x_b \leq b_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_a, x_b) dx_a dx_b$$

- توزیع حاشیه‌ای

$$f(x_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_a, x_b) dx_b$$

توزیع شرطی

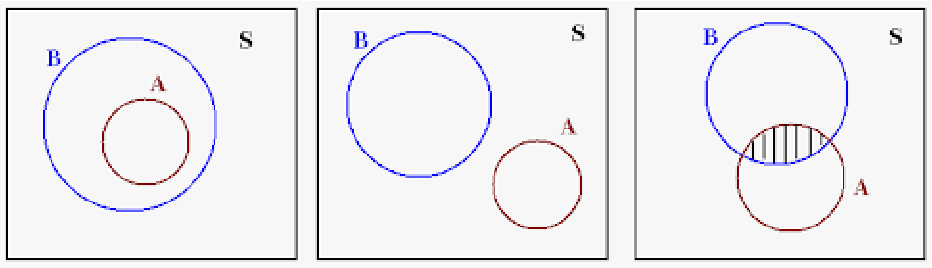
- تعریف



$$f(A|B) = \frac{f(A,B)}{f(B)}$$

$$\boxed{f(A,B) = f(A|B)f(B)}$$

$$\boxed{f(A) = \Sigma f(A|B)f(B)}$$



(1) (2) (3)

(1): $P(B|A) = 1$

(2): $P(B|A) = P(A|B) = 0$

(3): $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

توزیع شرطی

گشتاورها

- تعریف
  - در صورت تکرار یک آزمایش تصادفی به تعداد نامتناهی چه اتفاقی رخ می‌دهد؟

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$ گشتاور مرتبه اول

$$E(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$$ گشتاور مرتبه n

$$E(x^n y^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^m f(x, y) dx dy$$ گشتاور توام مرتبه mn

- اهمیت گشتاورها

گشتاورها

استقلال آماری

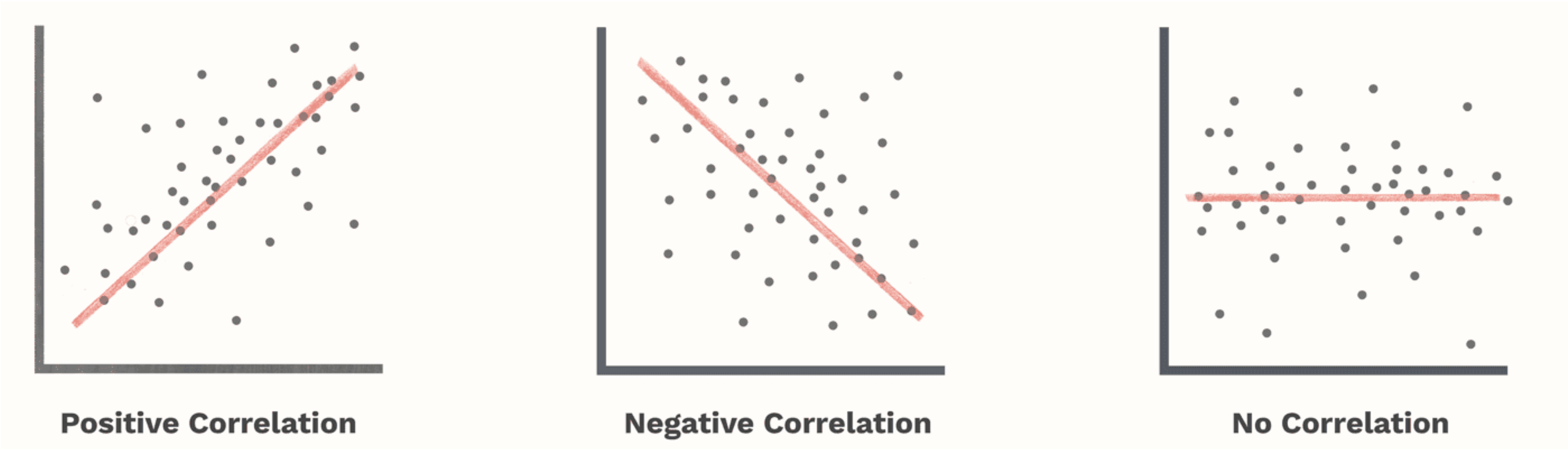
- تعریف
  - تنها تعریف استقلال آماری بین دو متغیر به صورت زیر وجود دارد:

$$f(x,y) = f(x)f(y)$$

  - تفسیر
    - داشتن اطلاعاتی درباره یک متغیر، چه اطلاعاتی از سایر متغیرها به دست می‌دهد؟
- علیت
  - استقلال یک مفهوم متقارن است.
  - ارتباط بین دو متغیر که توسط متغیرهای زبانی بیان می‌شود، استقلال آماری را عنوان نمی‌کند.

همبستگی آماری

- تعریف
  - تغییرات دو متغیر، چه ارتباطی با هم دارند؟



- همبستگی خطی

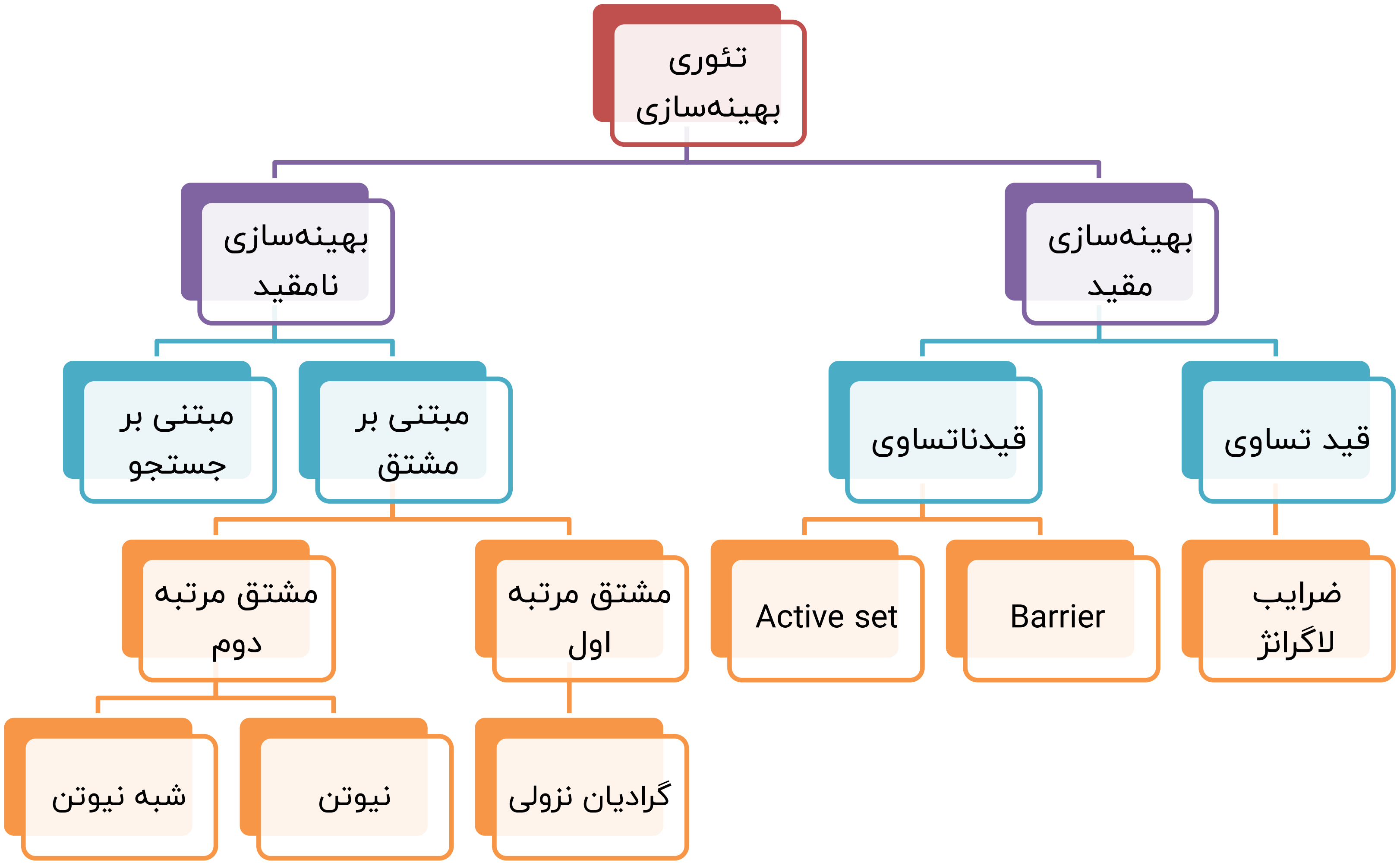
$$E(xy) = \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

همبستگی آماری

فرآیندهای تصادفی

- تعریف
  - تابعی از دو متغیر – یک متغیر تصادفی و یک متغیر معین
- ایستایی
- ارگادیسیته
- نمونه‌گیری
- تئوری تخمین

تئوری بهینه‌سازی



مسئله استاندارد بهینه‌سازی

- مسئله استاندارد بهینه‌سازی
  - یک مسئله بهینه‌سازی استاندارد همواره به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$x^* = \arg\min f(x)$$
$$h_j(x) = 0, j = 1, 2, \dots, k$$
$$g_i(x) < 0, i = 1, 2, \dots, m$$

$$x^* = \arg\max f(x) = -\arg\min f(x)$$

Linear programming

$$x^* = \arg\min C^T x$$
$$A_j x = 0, j = 1, 2, \dots, k$$
$$B_i x - b < 0, i = 1, 2, \dots, m$$

Quadratic programming

$$x^* = \arg\min x^T C x$$
$$A_j x = 0, j = 1, 2, \dots, k$$
$$B_i x - b < 0, i = 1, 2, \dots, m$$