

逻辑与推理

主讲：王亚星、刘夏雷、郭春乐
南开大学计算机学院

<https://mmcheng.net/xliu/>

致谢：本课件主要内容来自浙江大学吴飞教授、
南开大学程明明教授

课程信息

• 教师

- 程明明 cmm@nankai.edu.cn
- 王亚星 yaxing@nankai.edu.cn
- 刘夏雷 xialei@nankai.edu.cn
- 郭春乐 guochunle@nankai.edu.cn

• 助教

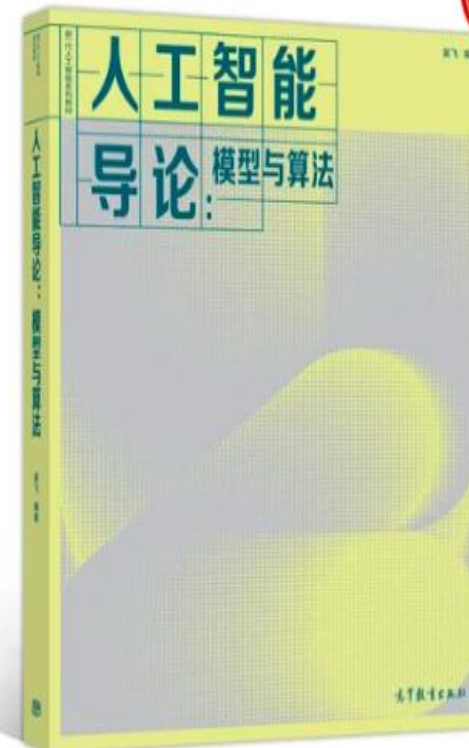
- 胡泰航
- 张鑫

• 地点：津南公教楼**B区510**，津南实验楼**A区306&308**

• 时间：1-17周讲授，3-17周实训

• 成绩：课上随堂测试考核(10%)、研讨内容(10%)、实验内容考核(40%)和期末考试(40%)

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



O'REILLY®
オライリー・ジャパン

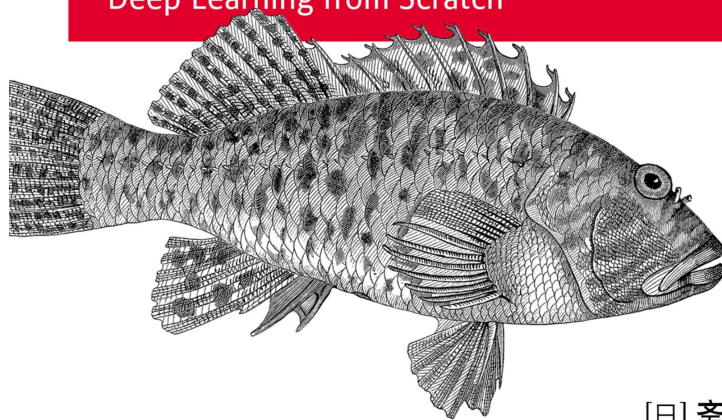


图灵程序设计丛书

深度学习入门

基于Python的理论与实现

Deep Learning from Scratch



[日] 斋藤康毅 著
陆宇杰 译



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

课程回顾

- 二十世纪初涌现的可计算思想的提出推动了原始递归函数、 λ -演算和图灵机等“计算载体”的出现，由于图灵机以机械方式进行“计算”，因此成为了现代计算机理论模型，宣示着自动计算时代的到来，也成为人工智能的“机器载体”。

人工智能概述



1.1 可计算思想起源与发展
1.2 人工智能的发展简史
1.3 人工智能研究的基本内容

提纲

- 命题逻辑
- 谓词逻辑
- 知识图谱推理
- 因果推理

逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 人类思维活动一个重要功能是逻辑推理，即通过演绎和归纳等手段对现有观测现象进行分析，得出判断。在人工智能发展初期，脱胎于逻辑推理的符号主义人工智能(**symbolic AI**)是人工智能研究的一种主流学派。



逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 符号主义人工智能方法基于如下假设：可通过逻辑方法来对符号及其关系进行计算，实现逻辑推理，辨析符号所描述内容是否正确。

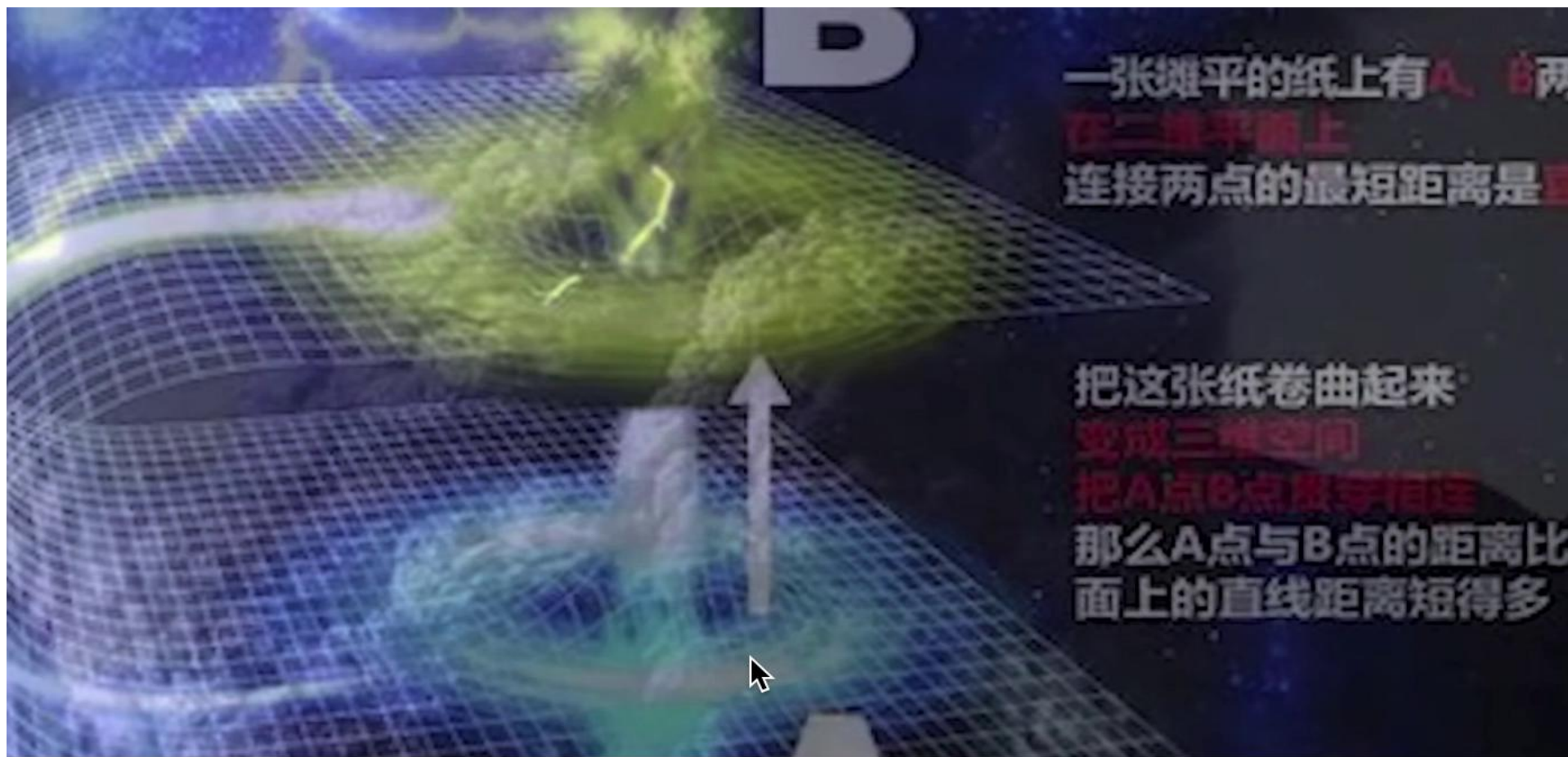


逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 在符号主义人工智能中，所有概念均可通过人类可理解的“**符号**”及符号之间的**关系**来表示。
 - 例如：如果使用符号A来表示对象概念、IsCar () 来表示某个对象是否为“汽车”，那么IsCar(A)表示“A是一辆轿车”这样的概念。
 - 注意IsCar(A)由对象A和IsCar () 两部分所构成。
 - 如果A是轿车，则IsCar(A)为正确描述、否则为错误描述。

逻辑与推理是人工智能的核心问题

- 在符号主义人工智能中，所有概念均可通过人类可理解的“符号”及符号之间的**关系**来表示。



命题逻辑

命题逻辑 (Propositional Logic)

- 命题逻辑是应用一套**形式化规则**对**以符号表示**的描述性陈述进行推理的系统。
- 在命题逻辑中，一个或真或假的描述性陈述被称为原子命题，对原子命题的内部结构不做任何解析。
 - 任何一个命题或为真、或为假
- 若干原子命题可通过逻辑运算符来构成复合命题。

下面五个陈述，那个是“假命题”

A 北京是中国的首都

B 13能被6整除

C $x < 8$

D 存在最大的素数

E $m^2 \geq 0$ 且 $m \in \mathbb{R}$

提交

命题逻辑

- 可通过**命题联结词**对已有命题进行**组合**，得到**新命题**。
 - 这些通过命题联结词(connectives)得到的命题被称为复合命题(compound proposition)。

命题逻辑

- 可通过命题联结词对已有命题进行组合，得到新命题。
 - 假设存在命题 p 和 q ，下面介绍五种主要的命题联结词：

命题连接符号	表示形式	意义
与(and)	$p \wedge q$	命题合取(conjunction), 即 “ p 且 q ”
或(or)	$p \vee q$	命题析取(disjunction), 即 “ p 或 q ”
非 (not)	$\neg p$	命题否定(negation), 即 “非 p ”
条件(conditional)	$p \rightarrow q$	命题蕴含(implication), 即 “如果 p 则 q ”
双向条件 (bi-conditional)	$p \leftrightarrow q$	命题双向蕴含(bi-implication), 即 “ p 当且仅当 q ”

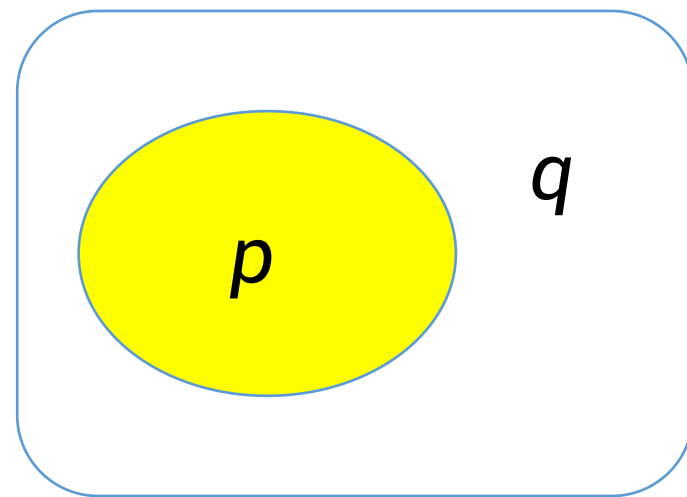
命题逻辑

- 通过真值表来计算复合命题的真假。

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
False	False	True	False	False	True	True
False	True	True	False	True	True	False
True	False	False	False	True	False	False
True	True	False	True	True	True	True

命题逻辑

- “条件” 命题联结词中前提为假时命题真假取值
 - “如果 p 那么 q , ($p \longrightarrow q$)”定义的是一种蕴涵关系(即充分条件), 也就是命题 q 包含着命题 p (p 是 q 的子集)
 - p 不成立相当于 p 是一个空集, 空集可被其他所有集合所包含, 因此当 p 不成立时, “如果 p 那么 q ”永远为真。



命题逻辑

• 逻辑等价的例子

$$a \wedge \beta \equiv \beta \wedge a \text{ (}\wedge\text{的交互律)}$$

$$a \vee \beta \equiv \beta \vee a \text{ (}\vee\text{的交互律)}$$

$$(a \wedge \beta) \wedge \gamma \equiv a \wedge (\beta \wedge \gamma) \\ \text{(}\wedge\text{的结合律)}$$

$$(a \vee \beta) \vee \gamma \equiv a \vee (\beta \vee \gamma) \\ \text{(}\vee\text{的结合律)}$$

$$\neg(\neg a) \equiv a \\ \text{(双重否定)}$$

$$(a \rightarrow \beta) \equiv \neg \beta \rightarrow \neg a \\ \text{(逆否命题)}$$

$$(a \wedge (\beta \vee \gamma)) \equiv (a \wedge \beta) \vee (a \wedge \gamma) \\ \text{(}\wedge\text{对}\vee\text{的分配律)}$$

$$(a \vee (\beta \wedge \gamma)) \equiv (a \vee \beta) \wedge (a \vee \gamma) \\ \text{(}\vee\text{对}\wedge\text{的分配律)}$$

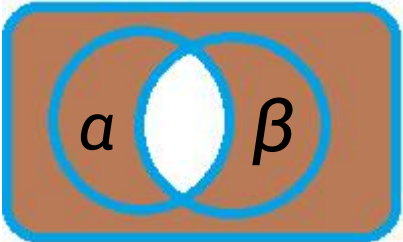
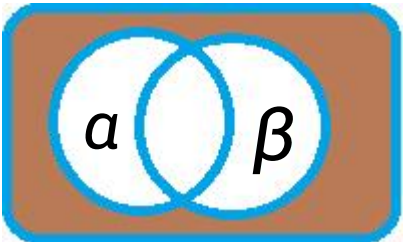
$$(a \rightarrow \beta) \equiv \neg a \vee \beta \text{ (蕴涵消除)}$$

$$(a \leftrightarrow \beta) \equiv (a \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow a) \text{ (双向消除)}$$

$$\neg(a \wedge \beta) \equiv (\neg a \vee \neg \beta) \\ \text{(De Morgan)}$$

$$\neg(a \vee \beta) \equiv (\neg a \wedge \neg \beta) \\ \text{(De Morgan)}$$

命题逻辑：若干逻辑等价命题的解释

$(a \rightarrow \beta) \equiv \neg\beta \rightarrow \neg a$ <p>(逆否命题)</p>	<p>秋天天气变凉\rightarrow大雁南飞越冬\equiv大雁没有南飞越冬\rightarrow秋天天气没有变凉</p> $x \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 0 \equiv x^2 < 0 \rightarrow x < 0$
$(a \rightarrow \beta) \equiv \neg a \vee \beta$ <p>(蕴涵消除)</p>	<p>a为假、则命题恒为真；a为真、则β须为真</p>
$\neg(a \wedge \beta) \equiv (\neg a \vee \neg\beta)$ <p>(De Morgan)</p>	
$\neg(a \vee \beta) \equiv (\neg a \wedge \neg\beta)$ <p>(De Morgan)</p>	

命题逻辑中的推理规则

假言推理 (Modus Ponens)	$\frac{\alpha \rightarrow \beta, \quad \alpha}{\beta}$
与消解 (And-Elimination)	$\frac{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n}{\alpha_i (1 \leq i \leq n)}$
与导入 (And-Introduction)	$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}{\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n}$

命题逻辑中的推理规则

双重否定 (Double-Negation Elimination)	$\frac{\neg\neg a}{a}$
单项消解或单项归结 (Unit Resolution)	$\frac{a \vee \beta, \neg\beta}{a}$
消解或归结 (Resolution)	$\frac{a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_m, \neg\beta}{a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_{k-1} \vee a_{k+1} \vee \dots \vee a_m} (a_k = \beta)$

应用归结法进行证明 (2)

1	$a \vee \beta$
2	$\neg a \vee \beta$
3	$a \vee \neg \beta$
4	$\neg a \vee \neg \beta$

证明如上命题集
是不可满足的

5	β	1和2进行归结
6	$\neg \beta$	3和4进行归结
从该命题集中同时推出命题 β 和命题 $\neg \beta$ ，因此原命题集是 不可满足的		

应用归结法进行证明 (3)

1	$a \vee \gamma$
2	$\neg\beta \vee \gamma$
3	$\neg\gamma \vee a$
4	$\neg a \vee \beta$
5	$\neg a \vee \neg\gamma$

证明如上命题集是不可满足的

6	a	1和3进行归结
7	β	4和6进行归结
8	γ	2和7进行归结
9	$\neg a$	5和8进行归结
从该命题集合中可同时推出 a 和 $\neg a$ 两个命题，因此原命题集合是不可满足的		

应用归结法进行证明 (1)

①	$a \vee \beta$
②	$a \rightarrow \gamma$
③	$\beta \rightarrow \gamma$

已知如上命题成立，
请证明命题 γ 是成立的

1	$a \vee \beta$	已知
2	$\neg a \vee \gamma$	②进行蕴涵消除
3	$\neg \beta \vee \gamma$	③进行蕴涵消除
4	$\neg \gamma$	假设命题 γ 不成立
5	$\beta \vee \gamma$	1和2进行归结
6	$\neg \beta$	3和4进行归结
7	γ	5和6进行归结
8	假设不成立，命题 γ 成立	

命题范式

- 有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式
 - 由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式
 - 析取范式与合取范式统称为范式 (normal form)
-
- ◆假设 a_i 为简单的合取式，则 $a = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k$ 为析取范式
 - 例如： $(\neg a_1 \wedge a_2) \vee a_3, \neg a_1 \vee a_3 \vee a_2$ 等
 - ◆假设 a_i 为简单的析取式，则 $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k$ 为合取范式
 - 例如： $(a_1 \vee a_2) \wedge \neg a_3, \neg a_1 \wedge a_3 \wedge (\neg a_2 \vee a_4)$ 等

命题范式

- 一个析取范式是不成立的，当且仅当它的每个简单合取式都不成立。
- 一个合取范式是成立的，当且仅当它的每个简单析取式都是成立的。
- 任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式
 - 注意：命题公式的析取范式与合取范式都不是唯一的

命题范式

- 任一命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式
 - 注意：命题公式的析取范式与合取范式都不是唯一的
- 问题：求 $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vee \neg\gamma$ 的析取范式与合取范式

$$\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vee \neg\gamma$$

$$\iff \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee \neg\gamma$$

$$\iff (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \neg\gamma \text{ (析取范式)}$$

$$\iff (\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\neg\beta \vee \neg\gamma) \text{ (合取范式)}$$

提纲

- 命题逻辑
- 谓词逻辑
- 知识图谱推理
- 因果推理

从命题逻辑到谓词逻辑

- 命题逻辑的局限性：在命题逻辑中，每个陈述句是最基本的单位(即原子命题)，**无法对原子命题进行分解**。
 - 因此在命题逻辑中，不能表达**局部与整体、一般与个别**的关系。
- 例如，对于苏格拉底论断，虽知其正确的，但无法通过命题逻辑来进行推理判断：
 - α ：所有的人总是要死的
 - β ：苏格拉底是人
 - γ ：所以苏格拉底是要死的

$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$ （不是命题逻辑的有效推理）

无法在命题逻辑基础上完成这样的推导

从命题逻辑到谓词逻辑

- : 大象是哺乳动物

个体的性质（是）、
个体和个体之间的关系（最大）

- : 大象是一种最大的哺乳动物

- 解决思路:

- 不同原子命题蕴含个体、群体和关系等内在丰富语义，命题逻辑无法表现内在丰富语义。因此，需要分析原子命题，分离其主语（个体或群体）和谓语（关系）

需要引入更加强大的逻辑表示方法，这就是谓词逻辑

谓词逻辑

- 在谓词逻辑中，将原子命题进一步细化，分解出个体、谓词和量词，来表达个体与总体的内在联系和数量关系，这就是谓词逻辑研究内容。
- 谓词逻辑中三个核心概念：
 - 个体、谓词（predicate）和量词（quantifier）

谓词逻辑：谓词与个体

- $P(x)$ 表示： $x < x^2$
- P 是谓词， x 是个体词， x 被称为变量。 x 的具体取值叫个体常项。
 - 比如， $P(0.1)$ 和 $P(0.02)$ 使得谓词为假。 个体的取值范围为个体域。
- 一般用大写字母 P, Q, R 等来表示谓词。
 - 上述 $P(x)$ 描述了是否存在一个数，这个数小于自身平方这种关系。
- 谓词中可以有若干个个体变量， 如 $father(x, y)$ 表示 x 是 y 父亲。
- $P(x)$ 是一元谓词（包含一个个体）， $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 被称为 n 元谓词（包含若干个个体）。

谓词逻辑：量词

- 全称量词(universal quantifier, \forall)

- 全称量词用符号 \forall 表示，表示一切的、凡是、所有的、每一个等。 $\forall x$ 表示定义域中的所有个体， $\forall xP(x)$ 表示定义域中的所有个体具有性质 P

- 存在量词(existential quantifier, \exists)

- 存在量词用符号 \exists 表示，表示存在、有一个、某些等。 $\exists x$ 表示定义域中存在一个或若干个个体， $\exists xP(x)$ 表示定义域中存在一个个体或若干个个体具有性质 P

- 全称量词和存在量词统称为量词。

谓词逻辑：量词

- 全称量词

- 谓词 $P(x)$ ： x 能够制造工具。 $\forall x P(x)$ 表示定义域中的 **所有个体** 能够制造工具。 $P(\text{小王})$ 表示小王能够制造工具。

- 存在量词

- 谓词 $P(x)$ ： x 能够制造工具。 $\exists x P(x)$ 表示定义域中的 **存在某个/某些个体** 能够制造工具。 $P(\text{小王})$ 表示小王能够制造工具（该命题或者为真、或者为假）。

谓词逻辑：量词

- 全称量词与存在量词之间的组合

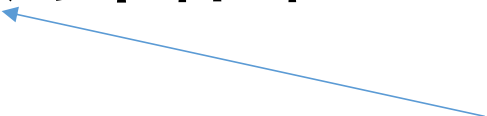
- $\forall x \neg P(x) \equiv \neg \exists x P(x)$

- $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

- $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$

- $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$

谓词逻辑：函数与谓词的区别

- 函词中个体变元用个体常量（来自定义域）代入后结果仍是个体（值域）


之前是个体变量，现在是个体变元

 - 如定义函数 $f(x)=x+10$ ，则 $f(2)=12$
- 谓词中个体变元用个体常量带入后就变成了命题
 - 如 $car(x)$ 这个谓词中 x 用吉普车代替，则 $car(\text{吉普车})$ 是命题。
- 函数是从定义域到值域的映射；
- 谓词是从定义域到 $\{True, False\}$ 的映射

谓词逻辑：谓词演算的合式公式

- 命题常项、命题变项、原子谓词（不存在任何量词与联结词）是合式公式。
- 如果 A 和 B 是合式公式，那么 $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ 都是合式公式
- 如果 A 是合式公式， x 是个体变元，则 $\exists xA(x)$ 和 $\forall xA(x)$ 也是合式公式
- 有限次地使用上述规则求得公式是合式公式

若干谓词逻辑的推理规则

- 全称量词消去: $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$
 - Universal Instantiation, UI
- 全称量词引入: $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$
 - Universal Generalization, UG
- 存在量词消去: $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$
 - Existential Instantiation, EI
- 存在量词引入: $A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$
 - Existential Generalization, EG

谓词逻辑的推理例子

已知：

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
- $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

试证明： $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

证明过程：

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
- $P(x) \rightarrow Q(x)$ (消去全称量词)
- $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$
- $Q(x) \rightarrow R(x)$ (消去全称量词)
- $P(x) \rightarrow R(x)$ (假言三段论)
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$ (引入 x)

谓词逻辑的推理例子

已知：

1. $(\forall x)(F(x) \rightarrow (G(x) \wedge H(x)))$

2. $(\exists x)(F(x) \wedge P(x))$

试证明： $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$

证明过程：

3. $F(a) \wedge P(a)$ (2的EI) (注：先消除存在)

4. $F(a) \rightarrow (G(a) \wedge H(a))$ (1的UI)

5. $F(a)$ (由3知)

6. $G(a) \wedge H(a)$ (4和5的假言推理)

7. $P(a)$ (由3知)

8. $H(a)$ (由6知)

9. $P(a) \wedge H(a)$ (7和8的合取)

自然语言的形式化

- 每一个奇数均存在一个大于它的奇数
 - $\text{odd}(x)$: x 是奇数
 - $\text{Great}(x, y)$: x 大于 y

自然语言的形式化

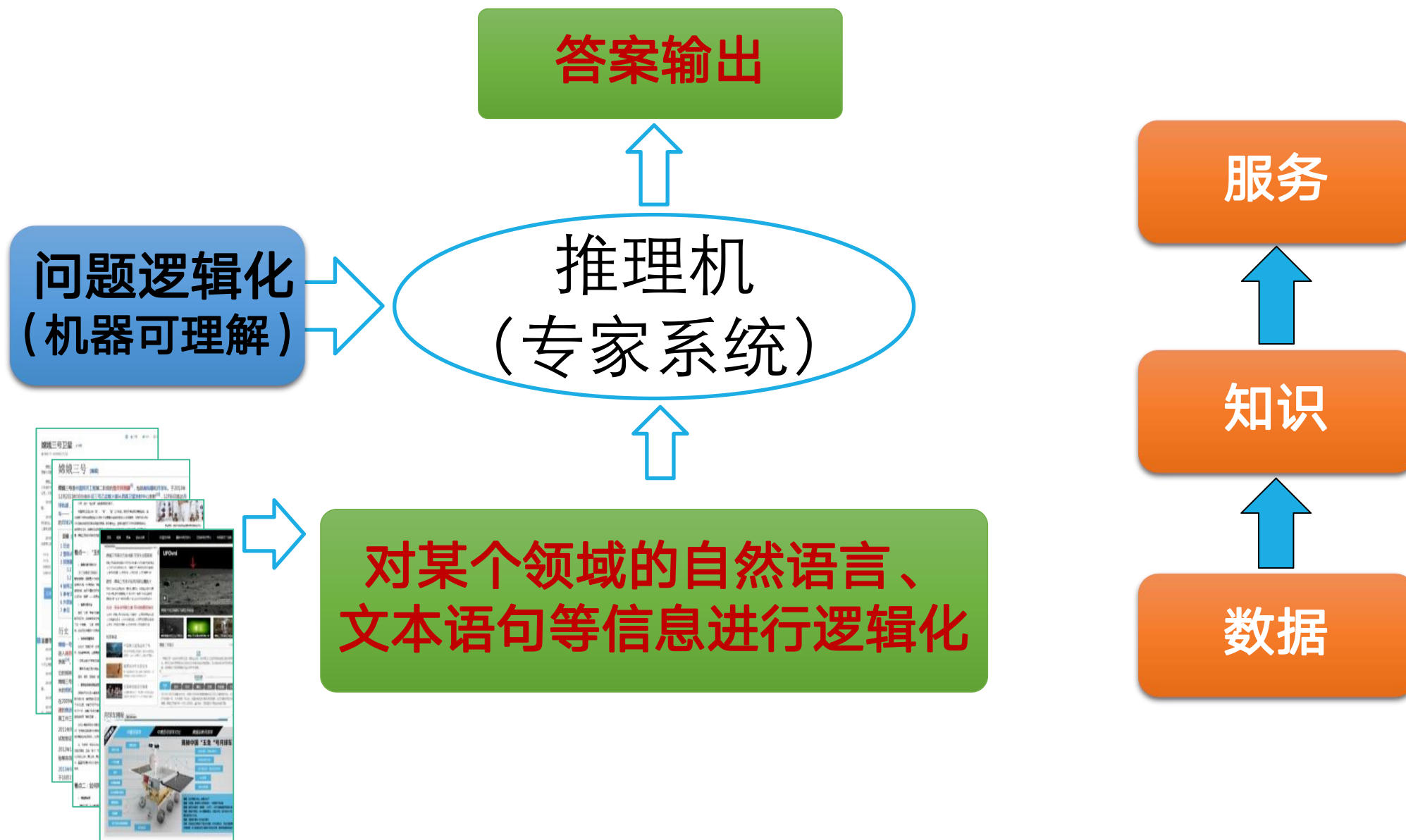
- 前提： 1) 每驾飞机或者停在地面或者飞在天空； 2) 并非每驾飞机都飞在天空
- 结论： 有些飞机停在地面
- 形式化： $plane(x)$: x 是飞机； $in_ground(x)$: x 停在地面；
 $on_fly(x)$: x 飞在天空
- 已知： $(\forall x)(plane(x) \rightarrow in_ground(x) \vee on_fly(x))$,
 $(\neg \forall x)(plane(x) \rightarrow on_fly(x))$
- 请证明： $(\exists x)(plane(x) \wedge in_ground(x))$

自然语言的形式化

1. $(\neg \forall x)(plane(x) \rightarrow on_fly(x))$
2. $(\exists x)\neg(plane(x) \rightarrow on_fly(x))$
3. $(\exists x)\neg(\neg plane(x) \vee on_fly(x))$
4. $(\exists x)(plane(x) \wedge \neg on_fly(x))$
5. $plane(a) \wedge \neg on_fly(a)$
6. $plane(a)$
7. $\neg on_fly(a)$
8. $(\forall x)(plane(x) \rightarrow in_ground(x) \vee on_fly(x))$
9. $plane(a) \rightarrow in_ground(a) \vee on_fly(a)$
10. $in_ground(a) \vee on_fly(a)$
11. $in_ground(a)$ **(7, 10消解)**
12. $plane(a) \wedge in_ground(a)$
13. $(\exists x)(plane(x) \wedge in_ground(x))$

• 已知: $(\forall x)(plane(x) \rightarrow in_ground(x) \vee on_fly(x))$,

专家系统的构成



谢谢!