פרויקט אנליזה נומרית

מגישים:

מיכאל פוליאקוב – 315940791

רן שיטרית – 316112929

תקציר

מהות הבעיה: ביצוע סימולציה של תעופת רקטה. בין היתר, לצורך מילוי המשימה היה צורך להיעזר באלגוריתמים נומריים למציאת שורשים, אינטרפולציה ופתרון מערכת מד"ר. בנוסף היה צורך להיעזר בכלי מטלאב לטובת חישובים מתמטיים וגרפיקה. זאת ועוד נדרש שימוש בחוקי דינמיקה והבנת המערכת.

התוצאות שהתקבלו הן תיאור גרפי ומספרי של מעוף הרקטה מרגע השיגור ועד לרגע הנחיתה. בתוך כך: מיקום הרקטה, מהירותה וזמן התעופה.

תוכן עניינים

הבעיה הפיזיקלית

<u>סעיף א':</u> <u>תיאור:</u> רקטה משוגרת מגובה h = 240[m] במהירות 50[m/s] בזווית של 45° ביחס לקרקע ונוחתת באותו הגובה. חישבנו את המרחק האופקי שעברה הרקטה.

<u>הנחות:</u> הרקטה נקודתית וחסרת מנוע. הגרר זניח והמסה קבועה. לכן הכוח היחיד שפועל עליה בזמן תנועתה הוא כוח הכבידה.

<u>סעיף ד'1:</u> בעיה זהה לסעיף א'.

<u>סעיף ד'2:</u> <u>תיאור:</u> גם בסעיף זה הרקטה משוגרת מגובה h = 240[m] ונוחתת באותו הגובה. עם זאת, הפעם הרקטה משוגרת אנכית כלפי מעלה ומהירותה ההתחלתית היא 0[m/s]. חישבנו את מהירות הרקטה ברגע הנחיתה.

<u>הנחות:</u> הרקטה נקודתית ובעלת מנוע, הגרר זניח. בעקבות שריפת ההודף מסת הרקטה קטנה בקצב קבוע. כתוצאה מפעולת המנוע, על הרקטה פועל כוח דחף קבוע.

<u>סעיף ה':</u> <u>תיאור:</u> גם במקרה זה הרקטה משוגרת מ- h = 240[m] במהירות התחלתית 0[m/s]. בשתי השניות הראשונות הרקטה נעה אנכית כלפי מעלה בעקבות כוח הדחף שמפעיל עליה המנוע. החל מרגע t = 2[s] ועד לרגע הנחיתה תנועת הרקטה היא דו ממדית: גם בציר האנכי וגם בציר האופקי (לכיוון מערב). כעבור 20 שניות מרגע השיגור כל ההודף נשרף. מרגע זה מסת הרקטה קבועה וכוח הדחף מפסיק לפעול עליה. הרקטה נוחתת בגובה h = 0[m].

<u>הנחות:</u> הרקטה נקודתית ובעלת מנוע, קיים כוח גרר וגודלו תלוי במהירות. גודלו של כוח הדחף תלוי בהפרש בין לחץ הזורם ביציאה מהמנוע לבין לחץ הזורם בתא הבעירה.

הבעיה המתמטית

המשוואות המתמטיות שבאמצעותן נפתור את הבעיה:

<u>**סעיף א':**</u> כדי לחשב את המרחק האופקי שעברה הרקטה, נחשב תחילה את זמן התנועה שלה. נכתוב את החוק השני של ניוטון עבור הציר האנכי:

$$\sum F_z = ma_z$$

$$-mg = ma_z$$

$$a_z = -g$$

$$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

$$\ddot{z} = -g$$

$$\dot{z} = -gt + v_{0,z}$$

$$z = \frac{-gt^2}{2} + v_{0,z}t + z_0$$

$$240 = \frac{-9.81t^2}{2} + 50\sin(45)t + 240$$

$$\frac{9.81}{2}t = 50\sin(45)$$

$$9.81t = 100\sin(45)$$

$$t = \frac{100\sin(45)}{9.81} = 7.208[\boldsymbol{s}]$$

נכתוב את החוק השני של ניוטון עבור הציר האופקי ונמצא את המרחק האופקי שעברה הרקטה:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$a_x = 0$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = v_{0,x}$$

$$x = v_{0,x}t + x_0 = (50\cos(45) + 0)*7.208 = 250.84[\boldsymbol{m}]$$

בסעיפים הבאים, כדי לפתור משוואות דיפרנציאליות באמצעים נומריים, נשתמש בשיטת רונגה קוטה.
לשם כך עלינו לעבור למשתני מצב. נגדיר את משתני המצב:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

<u>סעיף ד'2:</u> בסעיף זה אין תנועה במישור האופקי. נכתוב את החוק השני של ניוטון עבור הציר האנכי:

$$\sum F_z = m(t)a_z$$

$$T - m(t)g = m(t)a = m(t)\dot{v}_z = m\ddot{z}\ddot{z} = \frac{T}{m(t)} - g$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_4 \\ \frac{T}{m(t)} - g \end{bmatrix}$$

תנאי ההתחלה:

$$\mathrm{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>סעיף ה'</u>: נכתוב את החוק השני של ניוטון עבור הציר האופקי ועבור הציר האנכי ונציב את הנתונים:

$$\begin{cases} m(t)\ddot{x} = D_x + T_x \\ m(t)\ddot{z} = D_z + T_z - m(t)g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho A C_D V(t)^2 \widehat{\boldsymbol{V}(t)} \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}}{m(t)} + \dfrac{\boldsymbol{T}(t) \cdot \widehat{\boldsymbol{x}}}{m(t)} \\ \ddot{z} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho A C_D V(t)^2 \widehat{\boldsymbol{V}(t)} \cdot \widehat{\boldsymbol{z}}}{m(t)} + \dfrac{\boldsymbol{T}(t) \cdot \widehat{\boldsymbol{z}}}{m(t)} - g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{-\frac{1}{2}\rho A\, C_D\big(M\big(\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2\big)\big)\,\big[\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2\big]\cdot\cos(\gamma(t))}{m(t)} + \dfrac{T\cos(\gamma(t))}{m(t)} \\ \ddot{z} = \dfrac{\frac{-1}{2}\rho A\, C_D\big(M\big(\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2\big)\big)\,\big[\dot{x}(t)^2 + \dot{z}(t)^2\big]\cdot\sin(\gamma(t))}{m(t)} + \dfrac{T\sin(\gamma(t))}{m(t)} - g \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{D_x(t,V^2)}{m(t)} + \dfrac{T_x}{m(t)} \\ \dfrac{D_z(t,V^2)}{m(t)} + \dfrac{T_z(t)}{m(t)} - g \end{cases}$$

בעזרת משתני המצב,

נכתוב את שתי המשוואות הדיפרנציאליות מסדר שני כארבע משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון:

$$\Rightarrow \dot{y} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \dfrac{-\frac{1}{2}\rho A\, C_D\left(\sqrt{x_2^2 + x_4^2}\right)\left[x_2^2 + x_4^2\right]\cos(\gamma(t))}{m(t)} + \dfrac{T\cos(\gamma(t))}{m(t)} \\ y_4 \\ \dfrac{-\frac{1}{2}\rho A\, C_D\left(\sqrt{x_2^2 + x_4^2}\right)\left[x_2^2 + x_4^2\right]\sin(\gamma(t))}{m(t)} + \dfrac{T\sin(\gamma(t))}{m(t)} - g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \dfrac{D_x\left(t, x_2^2 + x_4^2\right)}{m(t)} + \dfrac{T_x(t)}{m(t)} \\ y_4 \\ \dfrac{D_z\left(t, \left(x_2^2 + x_4^2\right)\right)}{m(t)} + \dfrac{T_z(t)}{m(t)} - g \end{bmatrix}$$

תנאי ההתחלה:

$$y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

השיטות הנומריות

1. אינטרפולציה ליניארית – השיטה מאפשרת להעריך ערכי פונקציה, שערכה ידוע רק בנקודות מסוימות, בכל נקודה. בשיטה זו מחברים בקו ישר כל שתי נקודות ידועות של הפונקציה. בחרנו בשיטה זו כי היא הפשוטה ביותר לחישוב מבחינת סיבוכיות זמן הריצה $O(1)$. בנוסף, יתרון השיטה הוא בפשטות ההנדסית שלה. יתרון נוסף הוא בקריאות הקוד והקלות לדיבוג. המשוואה המתמטית המתארת את השיטה: אם ידועות שתי נקודות, (x1,y1),(x2,y2), אזי הפונקציה הליניארית המחברת ביניהן היא:

$$f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 - \frac{x - x_1}{x_1 - x_2} y_2$$

שגיאת השיטה היא מסדר ראשון.

2. שיטת המשיק המשתנה (ניוטון רפסון)– השיטה מאפשרת למצוא שורשים של פונקציה. כדי לעשות זאת נפעל באופן הבא:

א. נבחר נקודה מסוימת על הפונקציה.

ב. נעביר משיק לפונקציה בנקודה (שיפועו שווה לנגזרת הפונקציה בנקודה).

ג. נמצא את נקודת החיתוך של המשיק עם הציר האופקי.

ד. נמצא את ערך הפונקציה עבור ערך ה-X שהתקבל. זו הנקודה החדשה שלנו.

ה. כעת נחזור על שלבים א – ד עם הנקודה החדשה. אם בחירת הנקודה ההתחלתית הייתה טובה, עם כל שלב הנקודה החדשה תתקרב לשורש של הפונקציה.

ו. נעצור את ההתקרבות כשהנקודה החדשה קרובה לשורש, כשערכה קטן מקריטריון ההתכנסות שהגדרנו.

המשוואה המתמטית המייצגת את השיטה: אם Xn הוא ערך ה-X בנקודה הקודמת, ו-Xn+1 הוא ערך ה-X בנקודה החדשה, אזי: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

בחרנו את השיטה הזו כי יש לה סדר התכנסות ריבועי, כלומר היא מתקרבת אל הגבול שלה מהר יחסית לשיטות אחרות (להן סדר התכנסות ליניארי). חסרון השיטה הוא קירבת המכנה לאפס שעלולה לייצר סינגולריות. בנוסף יש לדעת מראש את פונקציית הנגזרת.

חסרון נוסף שנפגשנו בו בפרויקט הנוכחי, הוא שבהינתן שורש α הדורש N איטרציות עד להתכנסות, נדרש שהפונקציה ונגזרתה יהיו מוגדרות היטב בכל הקטע. לדוגמה אצלנו היינו צריכים למצוא שורש קרוב לאפס, למשוואה הכוללת שורשים ריבועיים. לכן בתחילה נתקלנו עם בעיית ארגומנט שלילי בשורש. התגברנו על הבעיה בכך שהשורש הדרוש מקיים זהותית גם את ריבוע המשוואה המקורית.

3. שיטת רונגה קוטה מסדר 5- השיטה מאפשרת להעריך פתרונות מקורבים של משוואות דיפרנציאליות רגילות. אם ידועים תנאי התחלה של פונקציה, אזי ניתן להעריך אותה בנקודה הבאה, אחרי צעד קטן h על ידי כלל הנסיגה הבא:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5)$$

$$\begin{cases} k_1 = hf\left(x_k, y_k\right) \\ k_2 = hf\left(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{6}\left(k_1 + k_2\right)\right) \\ k_4 = hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{8}\left(k_1 + 3k_3\right)\right) \\ k_5 = hf\left(x_k + h, y_k + \frac{1}{2}\left(k_1 - 3k_3 + 4k_4\right)\right) \end{cases}$$

והשגיאה תהיה:

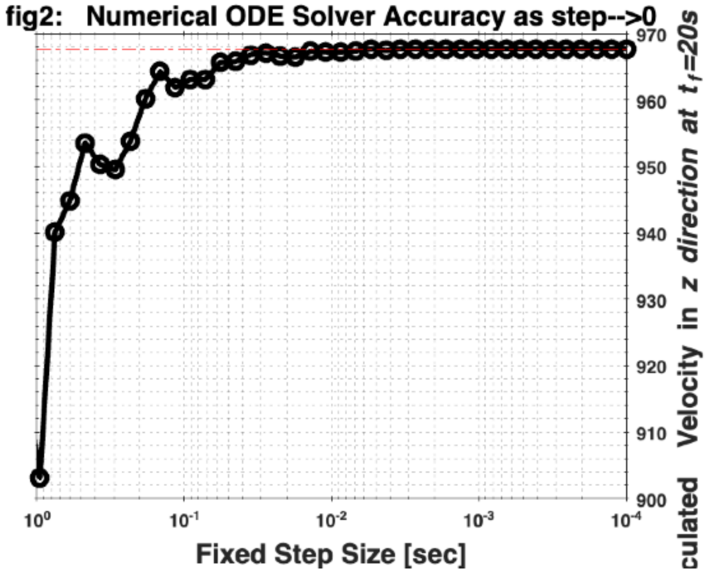
$$\varepsilon_{k+1} \approx \frac{1}{30}\left(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5\right)$$

בחרנו בשיטה מסדר 5 בגלל הדיוק הרב שלה. שגיאת השיטה היא מסדר 6.

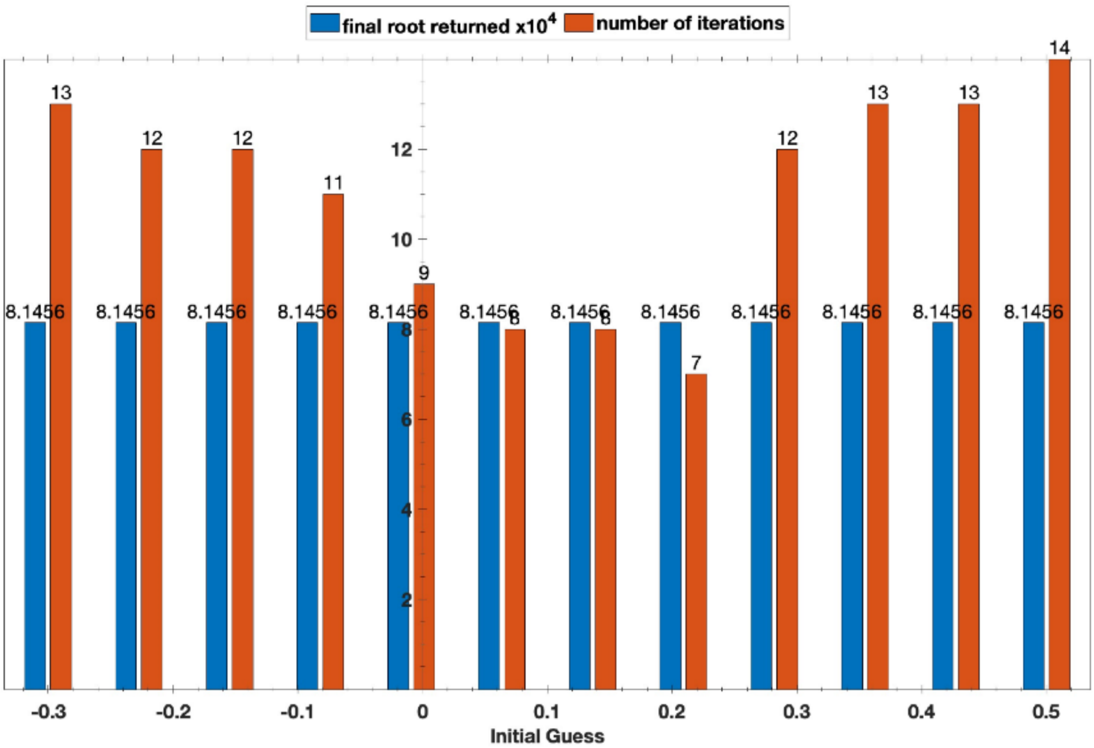
השפעת השיטות הנומריות

שיטות נומריות שסדר שגיאתן גדול הביאו לתוצאות יותר מדויקות. ככל שצעד ההתקדמות h היה קטן יותר, כך התארך זמן הריצה, והשגיאה נעשתה קטנה יותר.

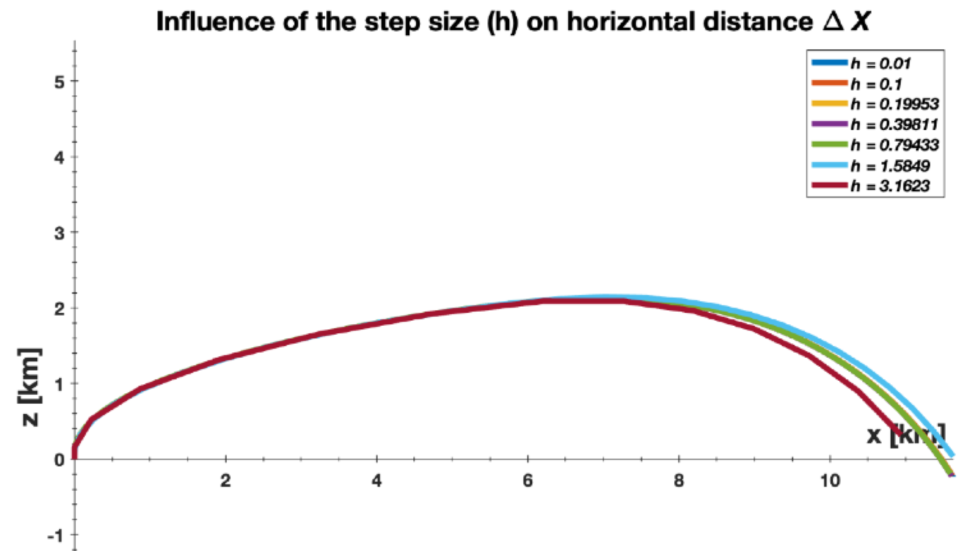
<u>סעיף ד'3:</u> השפעת גודל הצעד h על מהירות נחיתת הרקטה על הקרקע:



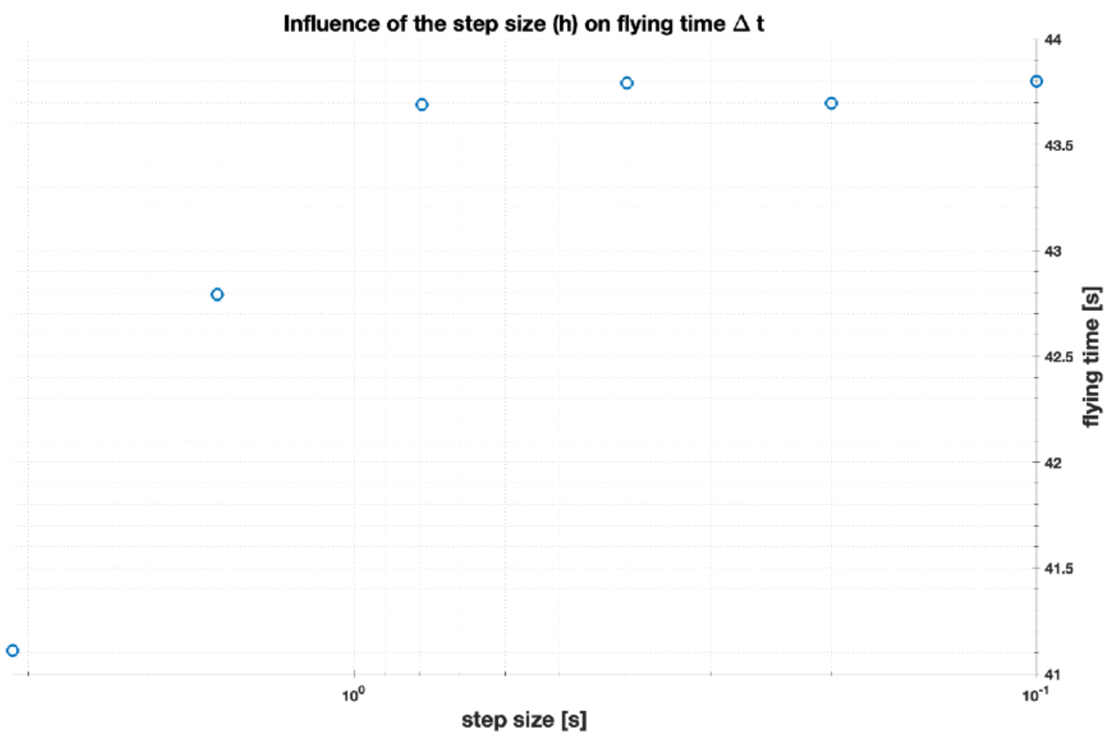
שינוי הניחוש ההתחלתי לא משפיע על ערך השורש (הכפלנו אותו פי 10,000 כדי שיתאים לסקאלת האיטרציות ויופיע על הגרף) אך כן משפיע על מספר האיטרציות (ככל שהניחוש ההתחלתי קרוב יותר לשורש, כך מספר האיטרציות קטן יותר):



סעיף ה': השפעת שינוי גודל הצעד h על המרחק האופקי שעוברת הרקטה ועל זמן הטיסה שלה:



השפעת גודל צעד חישוב על ערך זמן הטיסה הכולל:

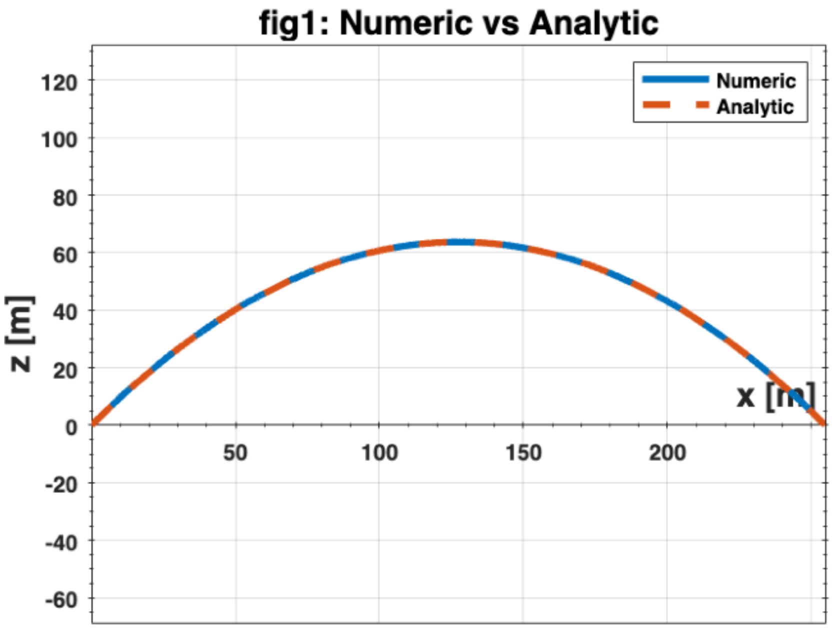


תוצאות

<u>סעיף א':</u> הטווח האופקי בפגיעה בקרקע הוא: 254.84 מטר.

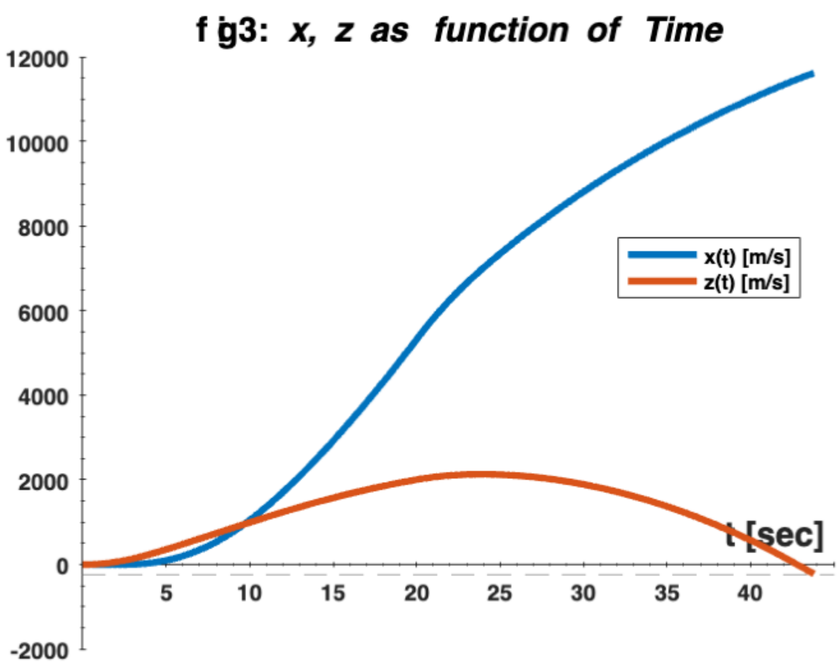
<u>סעיף ב':</u> מקדם הגרר המתקבל עבור M=0.82 הוא 0.352.

<u>סעיף ד'1:</u> ניתן לראות בגרף מספר 1 כי הפתרון האנליטי והנומרי מתלכדים:

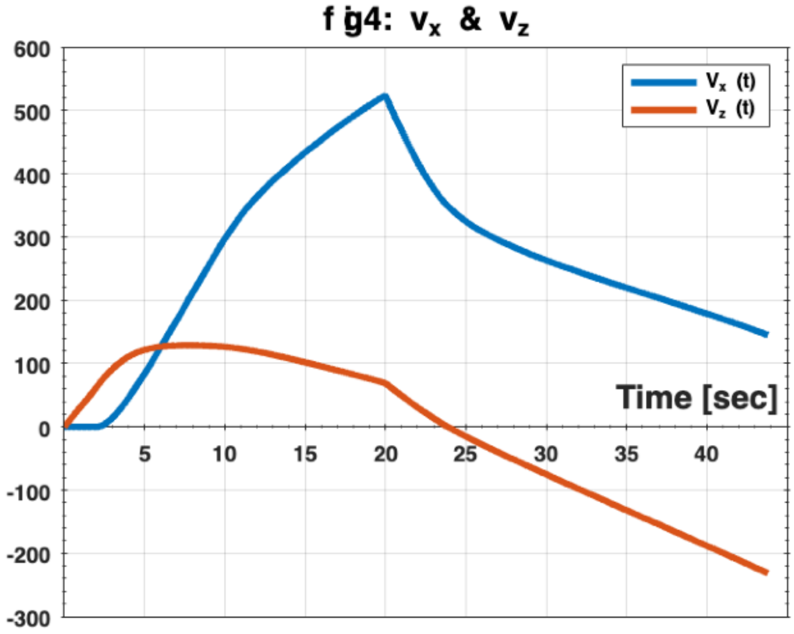


<u>סעיף ד'2:</u> המהירות הסופית המתקבלת גם בפתרון האנליטי וגם בנומרי היא 967.73 מטר לשנייה.

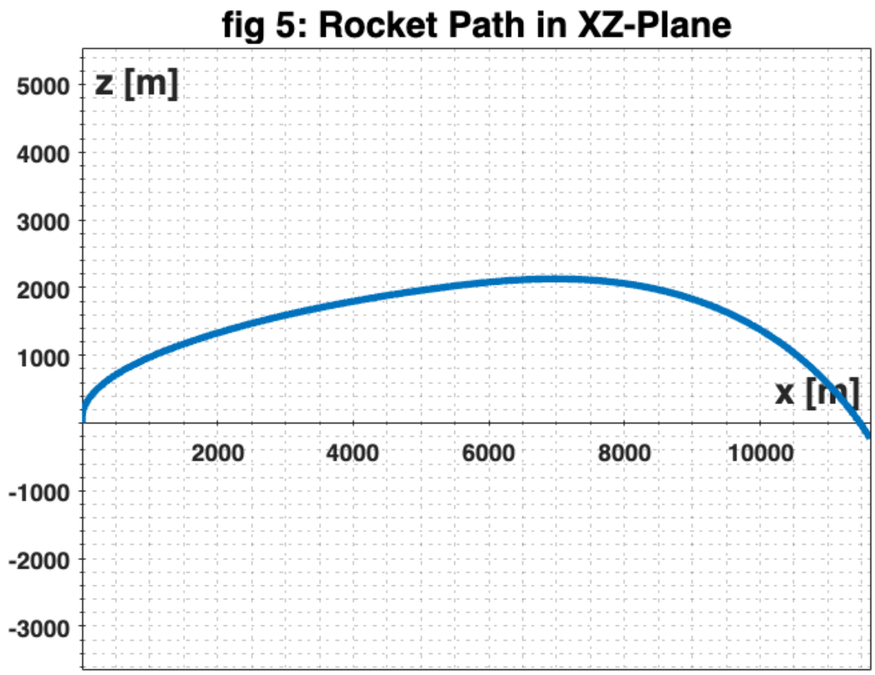
<u>סעיף ה'1:</u>



סעיף ה'2:



סעיף ה'3:



סעיף ה'4: התאוצה המקסימלית הכוללת שחווה הרקטה היא: 527.443 מטר לשנייה בריבוע.

סעיף ה'5: שיא הגובה של הרקטה הוא 7 אלף רגל.

סעיף ה'6: משך זמן המעוף של הרקטה הוא 43.8 שניות.

סעיף ה'7: הטווח הקרקעי של הרקטה הוא 11.6 ק"מ.

סיכום ומסקנות

אחרי שפתרנו תרגיל מנוון ופשוט באופן אנליטי, כתבנו פתרון נומרי וראינו שהם זהים. אחר כך פתרנו מקרה מנוון נוסף, אשר התלכד גם הוא עם הפתרון האנליטי. לבסוף, לאחר שהשתכנענו בנכונות התוכנית שכתבנו, פתרנו בעזרתה בעיה מורכבת יותר, אשר לא ניתנת לפתרון אנליטי.

התוצאות:

סעיף א': הטווח האופקי בפגיעה בקרקע הוא: 254.84 מטר.

סעיף ב': מקדם הגרר המתקבל עבור M=0.82 הוא 0.352.

סעיף ד'2: המהירות הסופית המתקבלת גם בפתרון האנליטי וגם בנומרי היא 967.73 מטר לשנייה.

סעיף ה'4: התאוצה המקסימלית הכוללת שחווה הרקטה היא: 527.443 מטר לשנייה בריבוע.

סעיף ה'5: שיא הגובה של הרקטה הוא 7 אלף רגל.

סעיף ה'6: משך זמן המעוף של הרקטה הוא 43.8 שניות.

סעיף ה'7: הטווח הקרקעי של הרקטה הוא 11.6 ק"מ.

תוכנית מחשב

רשימת כל הפונקציות ומטרתן:

Matlab_set_up – עיצוב הגרפים.

Basic_const_set_up – ריכוז קבועים בסיסיים.

Advanced_const_and_results – ריכוז קבועים שחושבו ותוצאות.

constructCD – פונקציה המייצרת פונקציה שמחשבת את מקדם הגרר מעל מספרי מאך רציפים.

Interpolation – פונקציה שמבצעת אינטרפולציה ליניארית, כלומר מוצאת ערך ביניים בפונקציה בה נתונות נקודות בדידות.

Derive_Pe – פונקציה שמחשבת את לחץ הזורם ביציאה מהמנוע בעזרת חישוב היחס הקבוע בין לחץ זה לבין הלחץ בתא הבעירה.

DragForce – פונקציה שמחשבת את כוח הגרר הפועל על הרקטה בציר האופקי ובציר האנכי.

GammaAngleWithXAxis – פונקציה שמחשבת את הזווית גאמא המתוארת באיור.

Mach – פונקציה שמחשבת מספר מאך עבור מהירות מסוימת.

Main_ode – פונקציה שמחשבת את הנגזרת בזמן של משוואות המצב שפיתחנו.

MassOfRocket – פונקציה שמחשבת את מסת הרקטה ברגע מסוים.

RK5solver – פונקציה שמוצאת את ערכי וקטור המצב שהגדרנו ואת גודל השגיאה עבור רגע כלשהו בזמן, תנאי התחלה מסוימים וגודל צעד כלשהו.

rootNewtonRaphson – פונקציה שמוצאת שורשים של פונקציה נתונה בעזרת שיטת ניוטון רפסון.

Section_d1_first_degenerated_problem – פונקציה שפותרת את הבעיה המנוונת הראשונה באופן נומרי.

Section_d1_plotting – פונקציה שמייצרת את הגרף המבוקש בסעיף ד'1: השוואת הפתרון האנליטי והנומרי בבעיה המנוונת הראשונה.

Section_d2_second_degenerated_problem – פונקציה שפותרת את הבעיה המנוונת השנייה באופן נומרי.

Section_d3_convergence_test – פונקציה שמחשבת את מהירות הרקטה בכיוון האנכי לאחר 20 שניות, כתלות בגודל הצעד h.

Section_d3_plot – פונקציה שמייצרת גרף המשווה בין מהירות הרקטה בכיוון האנכי לאחר 20 שניות עבור גדלים שונים של h, ומראה את התכנסות הפתרון ככל ש-h קטן.

Section_e1_cut_fly_at_final – פונקציה שקוטעת את הפתרון כשהגובה מגיע ל-240- מטר.

Section_e1_derive_parameters – פונקציה שמייצרת את הפרמטרים הדרושים לסעיף ה'1.

Section_e1_plot_xz_as_function_of_time – פונקציה שמייצרת גרף שמציג את התקדמות הרקטה בציר האנכי ובציר האופקי כתלות בזמן.

Section_e2_plot_vx_vz_as_function_of_time – פונקציה שמייצרת גרף שמציג את המהירות האופקית והאנכית של הרקטה כתלות בזמן.

Section_e3_plot_path_of_the_rocket – פונקציה שמייצרת גרף שמציג את התקדמות הרקטה בציר האנכי למול התקדמותה בציר האופקי.

Section_e4_accelaration_maximum – פונקציה שמחשבת את התאוצה המקסימלית של הרקטה.

Section_e5_find_maximum_height – פונקציה שמוצאת את הגובה המירבי אליו מגיעה הרקטה.

Section_e6_rocket_fly_time – פונקציה שמוצאת את זמן התעופה של הרקטה.

Section_e7_rocket_horizontal_delta_x – פונקציה שמוצאת את המרחק האופקי שעברה הרקטה.

ThrustForce – פונקציה שמחשבת את כוח הדחף של הרקטה בציר האופקי והאנכי כתלות בזמן.

Section_e1_convergence_vs_initial_guess_NewtonRaphson – פונקציה שבודקת כיצד משפיע שינוי הניחוש ההתחלתי על התכנסות שיטת ניוטון רפסון.

F- הגדרת ריבוע הפונקציה. מציאת שורש של פונקציה זהה למציאת שורש של ריבוע הפונקציה. אנחנו נמצא את השורש של ריבוע הפונקציה כדי להימנע מארגומנטים שליליים.

Section_b_print_specific_continuous_value_Mach – פונקציה שמוצאת את ערך מקדם הגרר המתאים למספר מאך נתון.

Section_e_convergence_tests – פונקציה שמוצאת את המרחק האופקי ואת זמן הטיסה של הרקטה עבור גדלים שונים של הצעד h.