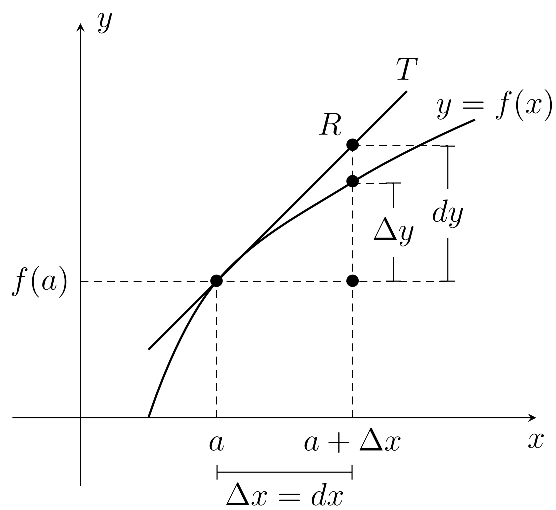
Cálculo diferencial en una variable



Herbert A. Dueñas Ruíz

I. Marcela Rubio Perilla

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Sede Bogotá

Contenido

Introducción

Después de dictar Cálculo I en las carreras de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, durante varios semestres, consideramos necesario que los estudiantes tuvieran unas notas de clase para este curso. Usualmente, esta asignatura se dictaba siguiendo como texto guía el *Cálculo de Spivak* [5], el cual se complementaba con otros libros menos formales, pero con más aplicaciones y talleres de ejercicios.

Para los estudiantes de primer semestre es un inconveniente logístico y económico tener que utilizar diferentes textos de cálculo durante el curso, puesto que es necesario complementar la buena formación conceptual ofrecida en el libro de Spivak, con el desarrollo de la capacidad para comprender y hacer demostraciones matemáticas, así como ejercitarse en las aplicaciones que presentan la mayoría de libros de cálculo. Por esto, queremos facilitar el acceso a un material un poco más sencillo de leer, con un lenguaje más informal que el empleado en el Cálculo de Spivak, pero sin perder el rigor matemático en el que queremos iniciar a los estudiantes, y que contenga las aplicaciones que ofrecen otros libros. No queremos tampoco ser el único material de trabajo del curso y por ello, en un par de ocasiones, invitamos a los usuarios de estas notas a consultar directamente algún libro.

Con este material, como apoyo en el curso, nuestros estudiantes pueden ir adquiriendo poco a poco el hábito de la lectura de textos en matemáticas y la disciplina de estudio personal, aspectos muy importantes en su formación matemática. Estas notas de clase son, pues, el resultado de nuestra experiencia y contienen todos los temas con la profundidad requerida. Creemos que la manera de aprender, no sólo en matemáticas sino en los demás campos del conocimiento, es haciendo las cosas uno mismo; aprender es una responsabilidad y un placer personal, y con ese sentido diseñamos las notas, de manera que los estudiantes puedan abordar los temas ellos mismos, para luego complementar y aclarar dudas en la clase, con el profesor y con sus compañeros. Tratamos de utilizar un lenguaje acorde con nuestro medio y adaptando la información de los problemas a éste.

No se pretende que estas notas sean un texto de cálculo. De hecho, cada profesor en su curso debe complementar el uso de estas notas con sus propias explicaciones y con talleres de ejercicios que enriquezcan los planteados acá, los cuales no son suficientes.

Agradecemos los comentarios y sugerencias de los profesores Leonardo Rendón, Omar Duque y Ana Luz Vivas, quienes aplicaron en sus cursos estas notas mientras se completaban. Agradecemos también a los estudiantes con los cuales utilizamos estas notas, quienes nos hicieron algunas sugerencias y nos ayudaron a encontrar algunos errores.

Febrero de 2006

Introducción a la segunda edición

La primera edición de este libro fue concebida debido a la necesidad de apoyar el curso de Cálculo I para las carrreras de estadística y matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Se ha usado durante todo este tiempo no sólo en este curso, sino como apoyo en los cursos de cálculo diferencial en el resto de carreras de la Nacional, así como en los cursos libres juveniles de la Facultad Ciencias.

Con la reforma realizada en todas las carreras de la Universidad en el año 2009, este curso es llamado ahora *Cálculo diferencial en una variable,* pasó de 8 a 4 horas semanales, se hicieron algunos cambios en el programa y en la forma de realizar el curso. Adicionalmente, con el empleo de este libro durante todo este tiempo, se encontraron diferentes elementos suceptibles de ser mejorados. Hemos corregido los errores encontrados y tenido en cuenta las sugerencias de nuestros colegas y estudiantes, a quienes agradecemos su lectura cuidadosa. En particular, queremos agradecer a los profesores Margarita Ospina, Lorenzo Acosta, Jeanneth Galeano y Leonardo Rendón, quienes nos hicieron grandes aportes. Es por esto que después de varios años de aplazar este trabajo, decidimos ponernos en la tarea de actualizarlo.

Los cambios más importantes tienen que ver con la reubicación del tema de secciones cónicas como un apéndice, asumiendo que los estudiantes ya han tomado el curso de matemáticas básicas donde se trabaja este tema, o según el exámen de admisión, ya están preparados para abordar el curso de *Cálculo diferencial en una variable.* Se incluyó el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas, las cuales desde el punto de vista histórico aparecen con el concepto de integral, pero que, debido a la necesidad de su uso y aplicación fueron incluidas en el nuevo programa; sin embargo, hemos dejado algunas de las demostraciones rigurosas para el curso de cálculo integral en una variable. Se mejoraron algunos ejercicios y se incluyeron otros para fortalecer la formación en ciertos temas. Se mejoraron algunas gráficas y se realizaron cambios en la presentación de algunos temas, como la compuesta de funciones, asíntotas, etc.

Esperamos que este libro siga siendo útil, no sólo para la comunidad de la Universidad Nacional de Colombia, sino en otros espacios académicos.

Herbert A. Dueñas Ruíz
I. Marcela Rubio Perilla

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá
haduenasr@unal.edu.co
imrubiop@unal.edu.co
Agosto de 2014

CAPÍTULO 1

Sistemas numéricos

1.1. Introducción

A lo largo de los estudios realizados nos encontramos con diferentes tipos de números, los cuales se clasifican en conjuntos.
El primero de éstos es el conjunto de los números naturales, que nos sirven para contar: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$. En algunos libros no se considera el 0 como número natural y esto se ha dejado a juicio del autor; para nosotros, 0 será considerado un número natural.
El siguiente conjunto es el de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$, puesto que además de contar lo que tenemos, hay que contar lo que debemos. Por otra parte, se observa que todo número natural es entero pero no al contrario; es decir, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, pero $\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$.
Otro conjunto numérico es el de los números racionales, construido con la ayuda de los números enteros: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$, es decir, el conjunto de los fraccionarios. Observamos que todo número entero es racional; por ejemplo: $-2 = \frac{-2}{1}, ó, -2 = \frac{8}{-4}$ (o muchas otras posibilidades de representación de -2 nos lo dejan ver). Así, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, pero $\mathbb{Q} \nsubseteq \mathbb{Z}$. (¿Por qué?)

Al hacer una división entre dos números enteros nos resultan dos posibilidades de números decimales: con un número finito de cifras decimales (decimal finito) o con un número infinito de cifras decimales pero que se repiten periódicamente (decimal periódico). Por ejemplo:

$$\tfrac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \tfrac{-16}{3} = -5{,}333... = -5.\overline{3}.$$

Tenemos, entonces, que $\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ es número decimal finito o periódico}\}$.
¿Cómo hacer el proceso contrario? Es decir, a partir de la expresión de un número racional como decimal finito o decimal infinito periódico, obtenerlo en **una** forma $\frac{a}{b}$ con a, b enteros y $b \neq 0$.
En primer lugar, notemos que es necesario decir "**una**" en la frase anterior porque como ya anotamos, la representación de un número racional en la forma de fracción no es única. $\left(\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{-4}{-10} = ...\right)$

Caso 1. Si x es decimal finito.
Ejemplo: $x = 5{,}21 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{521}{100}$ (Explicar el proceso. ¿Se puede simplificar la fracción obtenida?)

Caso 2. Si x es decimal periódico.
Ejemplo 1.

$$\begin{array}{lcrcl} x = 41.\overline{28} & \Rightarrow & 100x & = & 4128.\overline{28} \\ & - & x & = & 41.\overline{28} \\ \hline & & 99x & = & 4087 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4087}{99}$$

(Justificar el proceso y simplificar, si es posible.)

Ejemplo 2.

$$\begin{array}{lcrcl} x = 2{,}53\overline{8} & \Rightarrow & 1000x & = & 2538.\overline{8} \\ & - & 100x & = & 253.\overline{8} \\ \hline & & 900x & = & 2285 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2285}{900}$$

(Justificar el proceso y simplificar, si es posible.)

El conjunto de los números reales, $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ es un número decimal}\}$, contiene a todos los números racionales, es decir, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, pero existen números reales que no son racionales, los números decimales que tienen un número infinito de cifras decimales que no se repiten periódicamente (decimales infinitos no periódicos), los cuales han sido llamados números irracionales. Por ejemplo: 5,4244244442..., $\sqrt{2}, \pi$ son algunos de ellos.
$\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ es decimal infinito no periódico}\}$ es el conjunto de los números irracionales. Por lo anterior, cada número real es racional o es irracional, pero no puede ser ambos a la vez. Así, si se quiere probar que el número real $\sqrt{2}$ es irracional, basta verificar que no es racional, es decir, que no puede expresarse como $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros y b no es cero.

Veamos entonces que $\sqrt{2}$ es irracional. Para ello, supongamos que $\sqrt{2}$ es un número real que no es irracional, es decir, es un número racional y, por tanto:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b};\ \text{donde } a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0.$$

Elegimos a y b de modo que no tengan factores comunes. Esto es posible simplificando la fracción al mínimo. Entonces, $2 = \frac{a^2}{b^2}$ y $2b^2 = a^2$, de lo cual tenemos que a^2 es un número par.
Un número natural se llama par si es múltiplo de 2, es decir, si puede expresarse en la forma $2k$ para algún entero k. Observemos que por las propiedades de la división de un entero m entre 2 sólo son posibles dos residuos: 0 ó 1, de modo que m es de una de las formas $2k = 2k + 0$ ó $2k + 1$, para algún entero k.
Tenemos que a^2 es un número par. Veamos cómo debe ser a según esta condición.
Si a es par, entonces $a = 2k$ para algún entero k, de modo que
$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ es par.
Si a no es par, entonces $a = 2k + 1$ para algún entero k, de modo que
$a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ tampoco es par.
Por tanto, como sabemos que a^2 es par, a también es par y $a = 2k$ para algún entero k. Así,

$$\begin{array}{rcl} 2b^2 &=& a^2 \\ 2b^2 &=& (2k)^2 \\ 2b^2 &=& 4k^2 \\ b^2 &=& 2k^2 \end{array}$$

luego b^2 es par y razonando de manera similar a la anterior, tenemos que b es par. Entonces, a y b son pares, pero esto contradice nuestra elección de a y b sin factores comunes. Por tanto, $\sqrt{2}$ es irracional.

Para números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}, \ldots$ pueden hacerse pruebas similares (¡realícelas!); pero para probar por ejemplo que π es irracional falta un poco más de esfuerzo y algunos otros conceptos. Por tanto, lo estudiará más adelante.

1.2. Axiomas de cuerpo

Nuestro objetivo es estudiar el conjunto de los números reales con la suma y la multiplicación, pero no de la manera como lo trabajamos previamente como la unión de racionales e irracionales. Vamos a hacerlo partiendo de un conjunto cualquiera R con dos operaciones que cumplen ciertos axiomas y a partir de estos axiomas vamos a probar algunas de las propiedades que conocemos de los números reales. Es necesario insistir que a partir de este momento no podemos asumir nada que no haya sido demostrado o que no sea un axioma.

Sea R un conjunto. Supongamos que en R definimos dos operaciones $+$ y $\cdot$ que cumplen los siguientes axiomas:

- Para cada x, y que pertenecen a R, se tiene que $x+y$, $x \cdot y$ son elementos de R. Consideremos éste como un Axioma 0, el cual garantiza que las operaciones estén bien definidas en R.

1. Para todo x, y que pertenecen a R, se tiene: $x+y = y+x$ y $x \cdot y = y \cdot x$. ($+$ y $\cdot$ son conmutativas).

2. Para todo x, y, z en R, $(x+y)+z = x+(y+z)$ y $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. ($+$ y $\cdot$ son asociativas).

3. Para todo x, y, z en R, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$. ($\cdot$ es distributiva respecto a $+$).

4. Existen elementos 0 y 1 en R, $0 \neq 1$, tales que para todo x en R se tiene: $x + 0 = 0 + x = x$ y $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

   0 y 1 son llamados identidades, módulos o elementos neutros de la suma y el producto respectivamente ($+$ y $\cdot$ son modulativas).

5. Para cada x en R existe y en R, tal que $x + y = 0$, donde 0 es el mismo de la propiedad anterior.

6. Para cada x en R, con $x \neq 0$, existe z en R tal que $x \cdot z = 1$.

Cuando un conjunto R con dos operaciones $+$ y $\cdot$ satisface los siete axiomas anteriores, se dice que $(R, +, \cdot)$ es un *cuerpo* y estos axiomas se llaman *axiomas de cuerpo*. Según estos axiomas, observamos que ni $\mathbb{N}$, ni $\mathbb{Z}$, con las operaciones usuales de suma y producto, son cuerpos. Revise qué axiomas no se cumplen en cada conjunto. Sin embargo, tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales de suma y producto, satisfacen todos estos axiomas. (No se quede sin verificarlo.) Por tanto, ya tenemos dos ejemplos de cuerpos. Veamos otros ejemplos de cuerpos.

Ejemplo 1.1. *Considerar* $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ *con las operaciones de suma* $\oplus$ *y multiplicación* $\circ$ *definidas de la siguiente manera:*

Si $a, b \in \mathbb{Z}_3$, *entonces* $a \oplus b$ *es el residuo de* $a + b$ *al ser dividido por* 3 *y* $a \circ b$ *es el residuo de* ab *al ser dividido por* 3. *Por ejemplo,* $1 \oplus 2 = 0$ *y* $1 \circ 2 = 2$. *Completar las tablas de las operaciones:*

$\oplus$	0	1	2
0			
1			0
2			

$\circ$	0	1	2
0			
1			2
2			

Usted puede verificar que estas operaciones están bien definidas en $\mathbb{Z}_3$, *es decir, que los resultados de las operaciones son nuevamente elementos del conjunto. También debe verificar que las operaciónes* $\oplus$ *y* $\circ$ *ya definidas, son conmutativas, asociativas, modulativas. Además, que esta multiplicación es distributiva respecto a la suma y que existen módulos en* $\mathbb{Z}_3$ *tanto para* $\oplus$ *como para* $\circ$. *¿Cuáles son?*

Ejemplo 1.2. *Considerar* $\mathbb{C}$ *el conjunto de las parejas ordenadas* (x, y) *con* x *y* y *números reales. Definamos en* $\mathbb{C}$ *las operaciones* $+$ *y* $\times$ *de la siguiente manera: Sean* $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, *entonces:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2).$$

Claramente, $+$ *y* $\times$ *están bien definidas; además, la suma es conmutativa, asociativa y modulativa. Estudiemos estas mismas propiedades en la multiplicación.*

La multiplicación es conmutativa ya que si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, *entonces:*

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, y_1x_2 + x_1y_2) \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1, y_2x_1 + x_2y_1) \\ &= (x_2, y_2) \times (x_1, y_1)\end{aligned}$$

De manera similar usted debe mostrar que es asociativa y también puede verificar que $(1,0)$ *es el módulo de la multiplicación.*

Según los ejemplos anteriores, en un conjunto podemos definir dos operaciones con las cuales este conjunto cumpla ciertos axiomas o, en algunos casos, que los cumpla todos.
Considere $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ y $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$, cada uno con las operaciones definidas de manera similar al Ejemplo 1.1: residuos por 2 para $\mathbb{Z}_2$ y residuos por 4 para $\mathbb{Z}_4$. Observe que $\mathbb{Z}_2$ con dichas operaciones es un cuerpo, mientras $\mathbb{Z}_4$ no lo es. Justifique por qué.

Ahora, vamos a demostrar algunas propiedades muy familiares, que se cumplen como consecuencia de estos axiomas. Partiremos utilizando únicamente estos siete axiomas y luego, en la medida que demostremos otros resultados, podremos utilizarlos para nuevas demostraciones.

Teorema 1.3. *Si* a, b, c *están en* R *y* $a+b=a+c$, *entonces* $b=c$.

Prueba. Por el Axioma 5 existe y en R, tal que $a+y=0$ y por el Axioma 1 se tiene que $y+a=0$; ahora, utilizando la hipótesis tenemos:

$$y+(a+b)=y+(a+c)\,.$$

Utilizando el Axioma 2 :

$$(y+a)+b=(y+a)+c.$$

Por el Axioma 5 podemos decir:

$$0+b=0+c.$$

Y gracias al Axioma 4 podemos concluir que $b=c$. □

Como puede verse, hemos sido muy meticulosos al escribir la demostración, preocupándonos por justificar cada paso que realizamos. Antes de leer la prueba del siguiente teorema sería interesante que usted tratara de realizarla, en pro de obtener la habilidad de escribir adecuadamente demostraciones.

Teorema 1.4. *Dados* a, b *en* R, *existe un único* x *en* R, *tal que* $a+x=b$.

Prueba. La prueba consta de dos partes. En la primera debemos mostrar que existe un x que satisfaga la ecuación y en la segunda, debemos ver que este x es único.

Por el Axioma 5 sabemos que existe y en R tal que $a+y=0$. Sea $x=y+b$, veamos que este x satisface la ecuación:

$$\begin{aligned} a+x &= a+(y+b) \\ &= (a+y)+b \quad \text{por el Axioma 2.} \\ &= 0+b \quad \text{por el Axioma 5.} \\ &= b \quad \text{por el Axioma 4.} \end{aligned}$$

Luego, existe $x=y+b$ en R que satisface la ecuación $a+x=b$.

Probemos ahora la unicidad. Supongamos que existen x_1 y x_2 en R, tales que $a+x_1=b$ y $a+x_2=b$ y veamos que $x_1=x_2$. Como $a+x_1=b=a+x_2$, entonces:

$$a+x_1=a+x_2.$$

Por el Axioma 5 existe y en R, tal que $a+y=0$; por el Axioma 1 $y+a=0$ y así:

$$y+(a+x_1)=y+(a+x_2).$$

Y si utilizamos el Axioma 2 tenemos:

$$(y+a)+x_1=(y+a)+x_2;$$

luego:

$$0+x_1=0+x_2$$

gracias al Axioma 5 y así:

$$x_1=x_2$$

por el Axioma 4. Es decir, la existencia es única. □

Observemos que a partir de $a+x_1=a+x_2$ se repite la demostración del teorema anterior; en lo sucesivo, cuando se presente una situación como ésta, podemos decir directamente que si $a+x_1=a+x_2$, entonces $x_1=x_2$ por el Teorema 1.3, sin necesidad de repetir cada uno de los pasos. Demostrarlo una vez es suficiente.

Definición 1.5. *Al número x solución de la ecuación $a+x=b$ lo notaremos por $b-a$. En particular, si $b=0$ (ver el Axioma 5), entonces $a+x=0$ y así $x=0-a=-a$, al cual llamaremos el inverso aditivo de a, o el opuesto de a.*

Nota. Es importante mencionar que como consecuencia del Teorema 1.4, $-a$ es la única solución de la ecuación $a+y=0$. Luego $y=-a$, el opuesto de a, es único.

Antes de ver las demostraciones de los teoremas 1.6, 1.7, 1.8, intente hacerlas usted mismo.

Teorema 1.6. *Para todo a y b en R, $a-b=a+(-b)$.*

Teorema 1.7. *Para todo a en $R, -(-a)=a$.*

Teorema 1.8. *Para todo a en R, $a \cdot 0 = 0$.*

Prueba. [Prueba Teorema 1.6] Veremos que $a+(-b)$ es solución de la ecuación $b+x=a$. Como la solución de esa ecuación es $a-b$ y esta solución es única, entonces tendríamos lo que se quiere.

Sea $x=a+(-b)$, entonces:

$$\begin{aligned} b+x &= b+(a+(-b)) \\ &= b+((-b)+a)\,, \text{ por el Axioma 1;} \\ &= (b+(-b))+a, \text{ por el Axioma 2;} \\ &= 0+a, \text{ por el Axioma 5;} \\ &= a, \text{ por el Axioma 4;} \end{aligned}$$

es decir, $a+(-b)$ es solución de $b+x=a$, de donde $a-b=a+(-b)$. □

Prueba. [Prueba Teorema 1.7] Con base en que $-(-a)$ es la solución de la ecuación $(-a)+x=0$, podemos escribir:

$a=a+0$ por el Axioma 4; así, por lo mencionado al inicio de la prueba:

$$a=a+((-a)+(-(-a)))\,,$$

luego:

$$a=(a+(-a))+(-(-a))=0+(-(-a))=-(-a)$$

por los axiomas 2, 5 y 4. Así concluimos lo que se quería. □

Prueba. [Prueba Teorema 1.8]

$$\begin{aligned} a \cdot 0 &= a \cdot (0+0) \text{ por el Axioma 4;} \\ &= a \cdot 0 + a \cdot 0 \text{ gracias al Axioma 3;} \end{aligned}$$

es decir, $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$ ó $a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$; de donde $a \cdot 0 = 0$ por el Teorema 1.3. □

Las siguientes propiedades, al igual que las demostradas anteriormente, son muy familiares para nosotros. Vamos a hacer las demostraciones sin escribir las justificaciones. Su misión, inicialmente, es intentar hacer las demostraciones antes de leerlas, luego escribir las justificaciones de cada uno de los pasos dados en las demostraciones aquí escritas.

Teorema 1.9. *Para todo* $a, b \in R$, $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$.

Prueba. Como $-(a \cdot b)$ es el inverso aditivo de $a \cdot b$, y el inverso aditivo es único, basta demostrar que $(-a) \cdot b$ es el inverso aditivo de $a \cdot b$. Verifiquemos esto.

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b + a \cdot b &= b \cdot (-a) + b \cdot a \\ &= b \cdot ((-a) + a) \\ &= b \cdot (a + (-a)) \\ &= b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con lo cual probamos que

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b.$$

□

Teorema 1.10. *Para todo* $a, b, c \in R$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Prueba. Bonito ejercicio. □

Teorema 1.11. *Para todo* $a, b, c \in R$, $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Prueba.

$$\begin{aligned} a \cdot (b - c) &= a \cdot (b + (-c)) \\ &= a \cdot b + a \cdot (-c) \\ &= a \cdot b + (-c) \cdot a \\ &= a \cdot b - (c \cdot a) \\ &= a \cdot b - a \cdot c. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.12. *Si* $a, b, c \in R, a \neq 0$ *y* $a \cdot b = a \cdot c$, *entonces* $b = c$.

Prueba. Como $a \neq 0$, existe z en R tal que $a \cdot z = 1 = z \cdot a$. Por tanto:

$a \cdot b = a \cdot c$ implica que:

$$z \cdot (a \cdot b) = z \cdot (a \cdot c)$$

luego:

$$(z \cdot a) \cdot b = (z \cdot a) \cdot c;$$

es decir,

$$1 \cdot b = 1 \cdot c.$$

Concluimos entonces que $b = c$. □

El Teorema 1.4 nos mostró la manera de solucionar una ecuación de la forma $a + x = b$ y, ayudados de este resultado, definimos el concepto de inverso aditivo. Ahora pretendemos solucionar una ecuación de la forma $a \cdot x = b$, $a \neq 0$ y definir inverso multiplicativo. Luego probaremos algunas propiedades que involucran estas ideas.

Teorema 1.13. *Dados* $a, b \in R$, $a \neq 0$, *existe un único* $x \in R$, *tal que* $a \cdot x = b$.

Prueba. Al igual que en el Teorema 1.4, la demostración consta de dos partes. Primero debemos probar que existe x que satisface la ecuación y segundo que este x es único.

Como $a \neq 0$, existe $y \in R$ tal que $a \cdot y = 1 = y \cdot a$. Sea $x = b \cdot y$, entonces:

$$\begin{aligned} a \cdot x &= a \cdot (b \cdot y) \\ &= a \cdot (y \cdot b) \\ &= (a \cdot y) \cdot b \\ &= 1 \cdot b = b. \end{aligned}$$

Felizmente, esto nos permite concluir que existe $x = b \cdot y$ en R, tal que $a \cdot x = b$.

Para demostrar la unicidad, supongamos que existen x_1 y x_2 en R, tales que $a \cdot x_1 = b$ y $a \cdot x_2 = b$; por tanto, $a \cdot x_1 = a \cdot x_2$. Así, gracias al Teorema 1.12, puesto que $a \neq 0$, se tiene que $x_1 = x_2$. Probamos así, que la existencia es única. $\square$

Definición 1.14. *Al número x solución de la ecuación $a \cdot x = b$, $a \neq 0$, lo notaremos por $\dfrac{b}{a}$. En particular, si $b = 1$ (ver el Axioma 6), entonces $a \cdot x = 1$, y así $x = \dfrac{1}{a}$ que notaremos por a^{-1}y lo llamaremos el inverso multiplicativo de a, o el recíproco de a.*

Nota. Por el Teorema 1.13, el recíproco de $a : a^{-1}$, es único.

Teorema 1.15. *Si $a, b \in R$ y $a \neq 0$, entonces $\dfrac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$.*

Prueba. Como $\dfrac{b}{a}$ es la solución de la ecuación $a \cdot x = b$ y esta solución es única, basta demostrar que $b \cdot a^{-1}$ es también solución de esta ecuación. En efecto, si $x = b \cdot a^{-1}$, entonces:

$$a \cdot x = a \cdot \left(b \cdot a^{-1}\right) = a \cdot \left(a^{-1} \cdot b\right) = \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot b = 1 \cdot b = b.$$

Con lo cual probamos que $\dfrac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$. $\square$

Teorema 1.16. *Si $a \neq 0$, entonces a^{-1} es invertible y $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$.*

Prueba. Como $a \neq 0$, existe a^{-1} y si en el Axioma 6 tomamos $z = a^{-1}$ se tiene: $a \cdot a^{-1} = 1$ y $a^{-1} \cdot a = 1$. Es decir, a es el inverso multiplicativo de a^{-1}, de donde $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$. $\square$

Teorema 1.17. *Sean* a, b *en* R. *Si* $a \cdot b = 0$, *entonces* $a = 0$ *ó* $b = 0$.

Prueba. Supongamos que $a \neq 0$, entonces existe a^{-1} el inverso multiplicativo de a. Como $a \cdot b = 0$ se tiene:

$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$; luego $1 \cdot b = a^{-1} \cdot 0$, de donde $b = 0$.

Por otra parte, si suponemos que $b \neq 0$, razonando de manera similar, concluiremos que $a = 0$. Por tanto, $a = 0$ ó $b = 0$. □

Teorema 1.18. *Dados* a, b *en* R, $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Prueba. Justifique cada uno de los pasos, en las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a \cdot b &= -\left(-\left(a \cdot b\right)\right) \\ &= -\left(\left(-a\right) \cdot b\right) \\ &= -\left(b \cdot \left(-a\right)\right) \\ &= \left(-b\right) \cdot \left(-a\right) \\ &= \left(-a\right) \cdot \left(-b\right). \end{aligned}$$

□

Teorema 1.19. *Si* $a, b \in R$ *y* $a \cdot b \neq 0$, *entonces* $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$.

Prueba. Como $(a \cdot b)^{-1}$ es el inverso multiplicativo de $a \cdot b$, basta demostrar que $(a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b) = 1$. Esta última igualdad es verdadera ya que:

$$\left(a^{-1} \cdot b^{-1}\right) \cdot (a \cdot b) = \left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot \left(b^{-1} \cdot b\right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Dado que el inverso multiplicativo es único, entonces $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. □

Los teoremas 1.20, 1.21 y el Ejercicio 1.22 nos mostrarán la forma de realizar operaciones entre fracciones, es decir, suma, multiplicación y división de números de la forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, las cuales son muy familiares para nosotros.

Teorema 1.20. *Si* $a, b, c, d \in R$, *con* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$, *entonces*
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

Prueba. Como $b, d \neq 0$, entonces $b \cdot d \neq 0$ y, por tanto, existe $(b \cdot d)^{-1}$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \left[\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right] \cdot 1 \quad \text{(Axioma 4)} \\
&= \left[\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right] \left[(b \cdot d) \cdot (b \cdot d)^{-1}\right] \quad \text{(Axioma 6)} \\
&= \left[\left(a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1}\right) \cdot (b \cdot d)\right] \cdot (b \cdot d)^{-1} \quad \text{(Axioma 2 y Teorema 1.15)} \\
&= \left[\left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot (b \cdot d) + \left(c \cdot d^{-1}\right) \cdot (b \cdot d)\right] \cdot (b \cdot d)^{-1} \quad \text{(Axioma 3)} \\
&= [a \cdot d + c \cdot b] \cdot (b \cdot d)^{-1} \quad \text{(axiomas 2, 1, 6 y 4)} \\
&= \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} \quad \text{(Teorema 1.15).}
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.21. *Si $a, b, c, d \in R$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces* $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Prueba. Esperamos que usted nos colabore en la justificación de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right) \\
&= (a \cdot c) \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right) \\
&= (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} \\
&= \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.
\end{aligned}$$

□

Nota. De ahora en adelante, escribiremos ab en lugar de $a \cdot b$.

Ejercicio 1.22. *Si $a, b, c \in R$, demostrar las siguientes propiedades:*

1. *a)* $-0 = 0$. *b)* $1^{-1} = 1$.
2. 0 *no tiene inverso multiplicativo.*
3. *a)* $-(a + b) = -a - b$. *b)* $-(a - b) = -a + b$.
4. *Si* $b \neq 0$, $-\left(\dfrac{a}{b}\right) = \left(\dfrac{-a}{b}\right) = \left(\dfrac{a}{-b}\right)$.

5. *Si* $b, d \neq 0,\ \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot d - b \cdot c}{bd}$.

6. *Si* $ax = a$ *para* $a \neq 0$, *entonces* $x = 1$.

7. *Si* $a^2 = aa$, *entonces* $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

8. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

9. 0 *del Axioma 4 es único.*

10. 1 *del Axioma 4 es único.*

1.3. Axiomas de orden

Ahora pretendemos estudiar los conceptos de desigualdad y de orden, y demostrar algunas propiedades que se derivan de éstos. Para ello utilizaremos un subconjunto de R que llamaremos P, a sus elementos los llamaremos positivos, y tres nuevos axiomas conocidos como *axiomas de orden.*

Sea $P \subset R$ (el conjunto de los positivos) tal que cumple los siguientes axiomas:

7. Si a y b están en P, entonces $a + b$ y ab también están en P.

8. Si a está en R y a es diferente de 0, entonces se tiene una y sólo una de las siguientes posibilidades: a está en P ó $-a$ está en P.

9. 0 no está en P.

Definición 1.23. *Dados* $a, b \in R$, *escribiremos* $a < b$ *(a menor que b) ó* $b > a$ *(b mayor que a), si* $(b - a) \in P$. *Además,* $a \leq b$ *significa que* $a < b$ *ó* $a = b$. *De manera similar definiremos* $a \geq b$.

Esta definición nos permite comparar dos números que no son iguales mediante los simbolos $<$ o $>$. Una expresión que compara dos cantidades por medio de alguno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$ se llama *desigualdad.*

Vamos a demostrar ahora algunas de las propiedades de las desigualdades. Es importante, al igual que antes, ser muy minuciosos al escribir las demostraciones y justificar cada uno de los pasos dados. En las demostraciones sólo podemos utilizar los axiomas dados hasta aquí, incluidos los axiomas de cuerpo, y los teoremas demostrados.

Teorema 1.24. *(Propiedad de tricotomía). Supongamos que $a, b \in R$. Entonces se tiene una y sólo una de las siguientes tres posibilidades:*
(1) $a < b$. (2) $b < a$. (3) $a = b$.

Prueba. Supongamos primero que $a - b \neq 0$. Si esto es así, por el Axioma 8 tenemos que $(a - b) \in P$ ó $-(a - b) \in P$, pero no se tendrán los dos resultados simultáneamente. Como $-(a-b) = b-a$, y utilizando la Definición 1.23 tenemos, $b < a$ ó $a < b$, donde nuevamente se tiene sólo una de estas desigualdades.

Por otra parte, si $a - b = 0$, entonces $a = b$. Además, según este supuesto, no puede darse que $a < b$ ó $b < a$, ya que $0 \notin P$ (Axioma 9). □

Teorema 1.25. *Sean $a, b, c \in R$. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.*

Prueba. Con base en que $a < b$ y $b < c$, podemos afirmar que $(b - a)$ y $(c - b)$ están en P. Por tanto, utilizando el Axioma 7, tenemos: $((b - a) + (c - b))$ está en P, y de esta manera concluimos que $(c - a)$ está en P, lo cual significa que $a < c$. □

Nota. Cuando tenemos $a < b$ y $b < c$, podemos abreviar como $a < b < c$.

Teorema 1.26. *Si $a, b, c \in R$, y $a < b$, entonces $a + c < b + c$.*

Prueba. Como $a < b$, entonces tenemos que $(b - a) \in P$ y, por tanto, $[(b - a) + (c + (-c))] \in P$; es decir, $[(b + c) - (a + c)] \in P$, lo que nos lleva a concluir que $a + c < b + c$. □

Teorema 1.27. *Si $a, b, c \in R, c > 0$ y $a < b$, entonces $ac < bc$.*

Prueba. Como $c > 0$ y $a < b$, tenemos que $c \in P$ y $(b - a) \in P$. Según el Axioma 7, podemos afirmar que $(b - a)\, c \in P$, es decir: $(bc - ac) \in P$, de donde $ac < bc$. □

Teorema 1.28. *Si $a, b, c \in R, c < 0$ y $a < b$, entonces $ac > bc$.*

Prueba. La demostración es similar al caso anterior, salvo que en este caso $-c \in P$. □

Teorema 1.29. *Si $a \in R$ y $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.*

Prueba. Sabemos que $a \neq 0$; por tanto, apoyados en el Axioma 8, $a \in P$ o $-a \in P$. Si $a \in P$, entonces, según el Axioma 7, $aa = a^2 \in P$, es decir: $(a^2 - 0) \in P$. Por tanto, $a^2 > 0$. Si $-a \in P$, entonces, nuevamente según el Axioma 7, $(-a)(-a) \in P$; es decir: $a^2 = (a^2 - 0) \in P$.

Por consiguiente si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$. $\square$

Teorema 1.30. *Sean $a, b, c, d \in R$. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.*

Prueba. Como $a < b$ y $c < d$, entonces $(b - a) \in P$ y $(d - c) \in P$. Con base en el Axioma 7, tenemos que $((b - a) + (d - c)) \in P$.
Así $((b + d) - (a + c)) \in P$ y por la Definición 1.23 tenemos que $a + c < b + d$. $\square$

Teorema 1.31. *Si $a, b \in R$ y $a < b$, entonces $-b < -a$.*

Prueba. Es claro que $(b - a) \in P$, ya que $a < b$ y como
$b - a = (-a) - (-b)$, entonces $((-a) - (-b)) \in P$; de donde $-b < -a$. $\square$

Teorema 1.32. $1 > 0$.

Prueba. Por la propiedad de tricotomía se tiene una y sólo una de las siguientes posibilidades: $1 > 0$ ó $1 < 0$, ya que $1 \neq 0$. Demostremos que $1 < 0$ es falso, y por tanto debe tenerse que $1 > 0$.

Si suponemos que $1 < 0$, entonces $-1 \in P$. Sea $a \in P$, y con base en el Axioma 7, podemos concluir que $(-1)\,a \in P$; es decir $-a \in P$, lo que contradice el Axioma 8.

Dado que $1 < 0$ conduce a una contradicción y como $1 \neq 0$, entonces podemos afirmar que $1 > 0$. $\square$

La demostración del teorema anterior puede hacerse en un renglón utilizando el Teorema 1.29.

Teorema 1.33. *Si $a, b \in R$ y $ab > 0$, entonces a y b pertenecen a P, ó, $-a$ y $-b$ pertenecen a P.*

Prueba. Si a ó b son cero, entonces $ab = 0$, lo cual no es cierto ya que $ab > 0$; por consiguiente, tanto a como b son diferentes de cero. Revisemos entonces las opciones que nos quedan; son cuatro:

1. $a \in P$ y $b \in P$.

2. $-a \in P$ y $b \in P$.

3. $a \in P$ y $-b \in P$.

4. $-a \in P$ y $-b \in P$.

   Si se da la opción 1, $ab \in P$ y, por tanto, $ab > 0$. Si se da la opción 2, entonces $(-a)\, b \in P$, es decir, $-ab \in P$, lo que nos lleva a concluir que $ab < 0$; por tanto, esta opción no puede darse según nuestra hipótesis. De manera similar concluimos que la opción 3 tampoco cumple la hipótesis. Por último, si se tiene la opción 4 entonces $(-a)\,(-b) \in P$, y así $ab \in P$, de donde $ab > 0$.

   En conclusión, si $ab > 0$, entonces verificamos la opción 1 ó la opción 4 que era lo que queríamos probar.

□

Teorema 1.34. *Si $a, b \in R$ y $ab < 0$, entonces a y $-b$ pertenecen a P, ó, $-a$ y b pertenecen a P.*

Prueba. Bonito ejercicio. □

Los siguientes ejercicios son demostraciones de propiedades de desigualdades que usted ya puede realizar y que podremos utilizar en las siguientes secciones, así como todo lo realizado hasta ahora.

Ejercicio 1.35. *1. $a > 0$ si y sólo si $a \in P$.*

2. Si $a > 0$, entonces $-a < 0$.

3. Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$.

4. Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$, entonces $ac < bd$.

5. Si $a < 0$ y $b < 0$, entonces $ab > 0$.

6. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $ab < 0$.

7. $2 \neq 0$.

8. Si $a - b = b - a$, entonces $a = b$.

De nuestros conjuntos iniciales $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales de suma y producto, vamos a elegir el mejor de ellos, según sea el comportamiento de sus elementos, en el sentido de satisfacer todos los axiomas propuestos. Sabemos que con $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no obtenemos cuerpos, mientras que con $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ sí. Es un sencillo ejercicio revisar que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ con las operaciones y el orden usuales, satisfacen los axiomas 7, 8 y 9; así obtenemos que tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ son cuerpos ordenados.

Sin embargo, hay otro axioma, el *axioma de completez*, el cual distingue a $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, puesto que $\mathbb{R}$ lo satisface mientras que $\mathbb{Q}$ no. Por ello nos quedaremos con $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ para nuestro estudio posterior. Para comprender el axioma de completez recordemos la representación geométrica de los números reales en una recta, la recta real. Consideremos una recta y vamos a relacionar los puntos de la recta con los números reales, de modo que a cada punto le corresponda un único número real y a cada número real le corresponda un único punto de la recta. Así, punto y número real van a convertirse en sinónimos. Escogemos un punto como número 0 y otro punto como número 1, de este modo tenemos la unidad y con ella vamos ubicando los demás enteros $2, 3, ...$ como $-1, -2, ...$, de manera que esta representación preserve el orden. De esta forma quedan ubicados todos los números reales.

Figura 1.1: Recta real.

En la recta horizontal tendremos $a < b$, si y sólo si a está a la izquierda de b; los positivos se ubican a la derecha de 0 y los negativos a la izquierda. De esta manera, a cada número real le ha sido asignado un punto de la recta. Ahora, informalmente podemos afirmar que el conjunto de los números reales llena completamente la recta real sin que sobren ni falten puntos; mientras que si observamos solamente los números racionales no se *completa* la recta, quedan “huecos” que se llenan con los números irracionales. Por ahora, podemos entender así por qué $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado que no es completo, mientras que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado completo, con el cual vamos a trabajar. Al final de este capítulo retomaremos el estudio del axioma de completez.

1.4. Desigualdades y valor absoluto

1.4.1. Intervalos

En la sección anterior vimos que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ podemos identificarlo gráficamente con una recta. Esta representación nos ayudará a visualizar algunos hechos acerca de los números reales, pero no será suficiente, como demostración de las propiedades. En el transcurso de estas notas se utilizarán otros subconjuntos de $\mathbb{R}$ que conviene identificar, así como asignarles una notación específica que nos ayude a simplificar la escritura.

Definición 1.36. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$. Al subconjunto de los números reales $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ lo llamaremos intervalo abierto de extremos a y b y lo notaremos (a, b).*

Dado que el conjunto de números reales lo estamos identificando gráficamente con una recta, podemos identificar gráficamente el intervalo abierto (a, b) como subconjunto de la recta. Lo haremos de la siguiente manera:

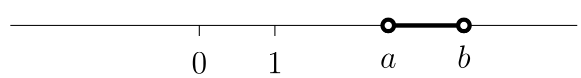


Figura 1.2: Intervalo abierto (a, b).

Note que ubicamos los números a y b en la recta, y el subconjunto (a, b) consta de todos los números reales que están entre a y b. Observe que en los extremos del intervalo hemos colocado el símbolo $\circ$ que significa que ni a ni b pertenecen a (a, b).

Ejemplo 1.37. $(-1, 3)$ *es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que se puede representar gráficamente por:*

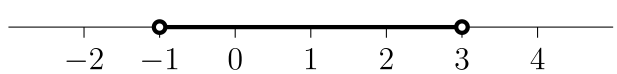


Figura 1.3: Intervalo abierto $(-1, 3)$.

De este intevalo abierto podemos afirmar que 2, $2{,}9$, ó, $-0{,}999$ son números que pertenecen a $(-1, 3)$, pero los números -1, 3 y $7{,}2$ no pertenecen a $(-1, 3)$.

Definición 1.38. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$. Al subconjunto de los números reales $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ lo llamaremos intervalo cerrado de extremos a y b, y lo notaremos $[a, b]$.*

$[a, b]$ lo representamos gráficamente por:

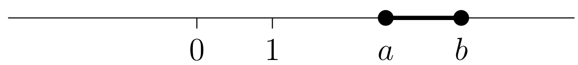


Figura 1.4: Intervalo cerrado $[a, b]$.

La diferencia entre el intervalo abierto y el cerrado es que los extremos a y b pertenecen a $[a, b]$, mientras que no pertenecen a (a, b). Dé algunos ejemplos de intervalo cerrado.

Antes de continuar con la lectura, defina los conjuntos que debemos identificar con las notaciones $[a, b)$ y $(a, b]$, y haga sus correspondientes representaciones gráficas. Algunos ejemplos no estarían de más. ¿Qué puede decir de $[a, b]$, (a, b) y $(a, b]$, cuando $a = b$?

Definición 1.39. *Dado $a \in \mathbb{R}$.*
Notaremos por (a, ∞) al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ y por $(-\infty, a)$ al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

Es importante aclarar que el símbolo ∞ (infinito) no corresponde a un número real, sino que expresa la idea de crecer infinitamente. Por tanto, no es correcto pensar que, por ejemplo, ∞ es mayor que todos los elementos de (a, ∞) o que ∞ no pertenece a (a, ∞). Este símbolo se utiliza, en este caso, para mencionar que en este conjunto están todos los números reales mayores que a. Este es un tema muy delicado porque, con alguna frecuencia, se piensa erróneamente en ∞ como un número real y esto puede llevar a conclusiones falsas. De manera similar, puede hacerse la observación del sentido que tiene $-\infty$ en el intervalo $(-\infty, a)$.

Definir los conjuntos que tienen por notación $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ y $(-\infty, \infty)$ no será una tarea que lo desvele demasiado.

1.4.2. Inecuaciones

Llamaremos *inecuación* a una desigualdad en la que aparece una incógnita; por ejemplo, $2x - 3 < 5$, y diremos que vamos a resolver una inecuación cuando queremos encontrar todos los números reales que satisfacen la desigualdad. Nuestro objetivo ahora es solucionar inecuaciones; para ello podemos usar las propiedades demostradas en la sección 1.3, sobre desigualdades. La solución de una inecuación es un conjunto: conjunto solución, el cual se expresa generalmente en términos de intervalos o con operaciones entre intervalos. En primera instancia, resolveremos un ejemplo mostrando las propiedades que se están aplicando. Esperamos que por lo menos en principio usted haga lo mismo, justificando cada paso, para tener claridad en los conceptos. Luego, con un poco más de experiencia y ya interiorizadas las propiedades aplicadas, no será necesario explicar cada paso.

Ejemplo 1.40. *Encontrar el conjunto de todos los x tales que $3x+5<11$.*

$$3x+5<11 \quad \textit{(inecuación dada).}$$

$$(3x+5)+(-5)<11+(-5) \quad \textit{(Teorema 1.26).}$$

$$3x+(5+(-5))<11+(-5) \quad \textit{(Axioma 2).}$$

$$3x+0<11+(-5) \quad \textit{(Axioma 5).}$$

$$3x<6 \quad \textit{(Axioma 4).}$$

$$\frac{1}{3}(3x)<\frac{1}{3}6 \quad \textit{(Teorema 1.27).}$$

$$\left(\frac{1}{3}3\right)x<\frac{1}{3}6 \quad \textit{(Axioma 2).}$$

$$1x<2 \quad \textit{(Axioma 6).}$$

$$x<2 \quad \textit{(Axioma 4).}$$

Luego la solución es $(-\infty,2)$.

Ejercicio 1.41. *Encontrar las soluciones de las siguientes inecuaciones:*

1. $3(x+1)<6-4x$.
2. $\dfrac{10}{3}(x-2)+4\left(x-\dfrac{4}{7}\right)\geq 3$
3. $\dfrac{-3x+5}{4}-\dfrac{3+2x}{3}<4\left(\dfrac{x}{4}-\dfrac{5}{2}\right)$

4. $\frac{4}{3}\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{5}x\right)-7\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)\leq 2.$

5. *Las temperaturas en las escalas Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula*
$$C=\frac{5}{9}\left(F-32\right).$$
Las temperaturas en Villeta, según la época del año, varÃan entre 20 *y* 30 *grados centÃgrados. ¿Cómo varÃan las temperaturas de Villeta en grados Fahrenheit?*

6. *Una camioneta de carga pesa* 1125 *kilos, si no lleva carga. Al realizar el reparto de mercancÃa debe llevar al menos* 250 *kilos de carga y debe pesar, con todo y carga, máximo* 1700 *kilos. Si debe llevar cajas de* 12 *kilos, ¿Cuál es el número de cajas que puede llevar?*

Observe que en los anteriores ejercicios no se incluyen inecuaciones de la forma $(ax-b)(cx-d)<e$ o $\dfrac{ax-b}{cx-d}<e$, donde a, b, c, d y e son constantes; es decir, inecuaciones donde intervienen productos o cocientes de términos que involucren la variable. Los siguientes ejemplos muestran una manera de solucionar este tipo de ejercicios.

Ejemplo 1.42. *Encontrar el conjunto solución de la inecuación* $(x-5)(x+3)>-12$.

El objetivo es llevar esta inecuación a una de las formas $(ax-b)(cx-d)<0$ *ó* $(ax-b)(cx-d)>0$, *para luego aplicar el teorema 1.33 ó 1.34. Por esto, primero transformaremos la inecuación para llevarla a uno de estos casos.*

$$(x-5)(x+3)>-12 \quad \textit{(inecuación dada).}$$

$$(x-5)(x+3)+12>(-12)+12 \quad \textit{(Teorema 1.26).}$$
$$x^2-2x-15+12>0 \quad \textit{(axiomas 3 y 5).}$$
$$x^2-2x-3>0 \quad \textit{(operaciones).}$$
$$(x-3)(x+1)>0 \quad \textit{(Axioma 3).}$$

Como $(x-3)$ *y* $(x+1)$ *son números reales, podemos aplicar el Teorema 1.33. Por tanto, tenemos dos opciones:*

1. $(x-3)>0$ *y* $(x+1)>0$.

2. $(x-3)<0$ *y* $(x+1)<0$.

Si se cumple la opción 1, *tenemos que* $x>3$ *y* $x>-1$.

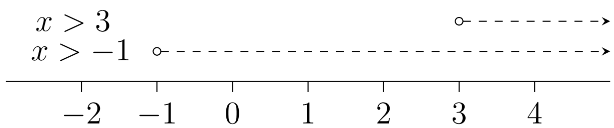


Figura 1.5: Opción 1.

Luego, la solución en estas circunstancias es el conjunto de números reales que son mayores que 3 *y mayores que* -1; *es decir,* $(3,\infty)$.

Por otra parte, si se cumple la opción 2, *entonces* $x<3$ *y* $x<-1$.

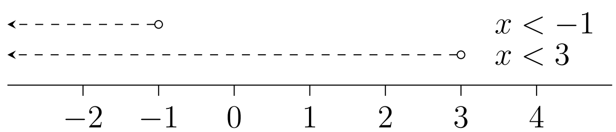


Figura 1.6: Opción 2.

Lo que nos lleva a concluir que $x<-1$ *y la solución en esta opción es* $(-\infty,-1)$. *Así, el conjunto solución de* $(x-5)(x+3)>-12$ *es* $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$.

Con este ejemplo ya sabemos cómo resolver inecuaciones cuadráticas: $ax^2+bx+c>0$ (ó con $<$, $\leq$, $\geq$, en lugar de $>$), donde a, b y c son constantes y $a\neq 0$; basta factorizar la expresión cuadrática y proceder como en el Ejemplo 1.42 ... pero, ¿qué ocurre si esta expresión no se deja factorizar? Veamos.

Ejemplo 1.43. *Resolver la inecuación* $x^2+x+1>0$.

Sabemos que la expresión x^2+x+1 *no puede factorizarse en* $\mathbb{R}$. *En este caso, primero completamos el cuadrado.*

$$x^2+x+1>0 \quad \textit{(inecuación dada).}$$

$$\left(x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+1>\frac{1}{4} \quad \textit{(completando el cuadrado).}$$

$$\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]+(-1)>\frac{1}{4}+(-1) \quad \textit{(factorizando y Axioma 5).}$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>-\frac{3}{4} \quad \textit{(axiomas 2, 5 y 4).}$$

Observamos que cualquier número real en el lugar de x satisface la última expresión; así, la solución de la inecuación $x^2+x+1>0$ es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.44. *Solucionar la inecuación $\dfrac{2-x}{x+1}\geq\dfrac{3}{2}$.*

Como $x+1$ no puede ser cero (¿por qué?), entonces de partida sabemos que $x\neq -1$. El objetivo es nuevamente llevar esta inecuación a una de la forma $(ax-b)(cx-d)\leq 0$ ó de la forma $(ax-b)(cx-d)\geq 0$. Para lograr esto nos gustaría poder multiplicar a ambos lados de la desigualdad por $(x+1)$. El problema es que no sabemos si $x+1$ es positivo o no, entonces no sabemos si la desigualdad se mantiene o cambia de sentido (aplicamos el Teorema 1.27 ó 1.28). Para resolver este inconveniente vamos a multiplicar por $(x+1)^2$, el cual es positivo con toda certeza. Luego:

$$(x+1)^2\,\frac{2-x}{x+1}\geq(x+1)^2\,\frac{3}{2} \quad \textit{(inecuación dada, Teorema 1.27).}$$

$$(x+1)(2-x)\geq\frac{3}{2}(x+1)^2 \quad \textit{(axiomas 6 y 4).}$$

$$-x^2+x+2\geq\frac{3}{2}\left(x^2+2x+1\right) \quad \textit{(axiomas 3 y 2).}$$

$$-2x^2+2x+4\geq 3x^2+6x+3 \quad \textit{(Axioma 3).}$$

$$0\geq 5x^2+4x-1 \quad \textit{(axiomas 5, 2 y 4).}$$

$$(x+1)(5x-1)\leq 0 \quad \textit{(factorizando).}$$

Tenemos, entonces, dos opciones:

1. $(x+1)\geq 0$ *y* $(5x-1)\leq 0$.

2. $(x+1)\leq 0$ *y* $(5x-1)\geq 0$.

Si $(x+1)\geq 0$ y $(5x-1)\leq 0$, entonces $x\geq -1$ y $x\leq\frac{1}{5}$. Es decir, $x\in\left[-1,\frac{1}{5}\right]$, pero dado que $x\neq -1$, entonces la solución de la opción 1 es $\left(-1,\frac{1}{5}\right]$.

Si $(x+1) \leq 0$ *y* $(5x-1) \geq 0$, *entonces* $x \leq -1$ *y* $x \geq \frac{1}{5}$, *pero estas dos condiciones no pueden darse simultáneamente; por tanto, en este caso la solución es* ϕ.

Como puede darse cualquiera de las dos opciones, entonces la solución de $\dfrac{2-x}{x+1} \geq \dfrac{3}{2}$ *es* $\left(-1, \frac{1}{5}\right]$

Otra forma de proceder en este ejemplo es:

$$\frac{2-x}{x+1} \geq \frac{3}{2}$$
$$\frac{2-x}{x+1} - \frac{3}{2} \geq 0$$
$$\frac{4-2x-3x-3}{2(x+1)} \geq 0$$
$$\frac{1-5x}{2(x+1)} \geq 0$$

Para la cual se tienen dos opciones:

1. $(1-5x) \geq 0$ *y* $(x+1) > 0$
2. $(1-5x) \leq 0$ *y* $(x+1) < 0$*...¿Por qué?*

En la primera se obtiene $x \leq \frac{1}{5}$ *y* $x > -1$; *es decir,* $x \in \left(-1, \frac{1}{5}\right]$; *en la segunda se obtiene* $x \geq \frac{1}{5}$ *y* $x < -1$ *que no es posible, de modo que la solución de* $\dfrac{2-x}{x+1} \geq \dfrac{3}{2}$ *es* $\left(-1, \frac{1}{5}\right]$, *como ya sabíamos.*

Ejemplo 1.45. *Solucionar la inecuación* $\dfrac{6-5x}{x+4} \leq \dfrac{3}{5}$.

En primer lugar debemos tener presente que x *no puede ser* -4 *(¿por qué?). Ahora pasamos todos los términos a un mismo lado de la desigualdad para poder comparar la expresión con cero.*

$$\begin{aligned} \frac{6-5x}{x+4} - \frac{3}{5} &\leq 0 \\ \frac{5\,(6-5x) - 3\,(x+4)}{5\,(x+4)} &\leq 0 \\ \frac{30-25x-3x-12}{5\,(x+4)} &\leq 0 \\ \frac{18-28x}{5\,(x+4)} &\leq 0 \end{aligned}$$

Vamos a estudiar el signo de $\frac{18-28x}{5(x+4)}$ *mirando el signo de cada factor.* $18-28x$ *se anula cuando* x *es* $\frac{9}{14}$*, es positivo cuando* $x<\frac{9}{14}$ *y negativo cuando* $x>\frac{9}{14}$. *De manera similar analizamos el factor* $x+4$*; se anula cuando* x *es* -4, *es positivo para* $x>-4$ *y negativo para* $x<-4$. *Teniendo en cuenta los intervalos determinados por* $\frac{9}{14}$ *y* -4 *resumimos esta información en la tabla de signos que se presenta a continuación*

	$(-\infty,-4)$	$\left(-4,\frac{9}{14}\right)$	$\left(\frac{9}{14},+\infty\right)$
$18-28x$	$+$	$+$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$\frac{18-28x}{5(x+4)}$	$-$	$+$	$-$

El último renglón de la tabla se completa teniendo en cuenta las reglas de los signos tanto en producto como en cociente. En la tabla no se tuvo en cuenta el factor 5, ¿era necesario?, ¿por qué?

Como consecuencia del trabajo anterior se obtiene que la solución de la inecuación planteada es $(-\infty,-4)\cup\left[\frac{9}{14},+\infty\right)$.

Ejercicio 1.46. *Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:*

1. $2x^2-5x-12>0.$

2. $3x^2+9x+7\leq 0.$

3. $\dfrac{1}{x+3}<\dfrac{2}{x}.$

4. $\dfrac{6-\frac{11}{2}x}{x-3}\geq -\dfrac{1}{2}(x+12).$

5. $(x-3)(x+2)(2x-5)\geq 0.$

6. $\dfrac{x-3}{7-x}\geq\dfrac{1}{x}.$

7. $9-x^2<\dfrac{16-x^2}{1+x}\leq 2+x.$

8. *Los polinomios de Legendre son un caso particular de los polinomios ortogonales de Jacobi. Los polinomios de Legendre de grados* $1, 2$ *y* 3 *son, respectivamente:* $L_1(x) = x$, $L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ *y* $L_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$. *Determine el conjunto donde el producto de estos tres polinomios es positivo.*

1.4.3. Valor absoluto

El valor absoluto de un número real es un concepto muy importante en el desarrollo del cálculo, pues utilizándolo pueden definirse formalmente nociones muy relevantes como los límites y la continuidad. Existen varias maneras de presentar la definición de este concepto. Una manera natural es la geométrica, en la cual el valor absoluto de un número real a, notado $|a|$, es la distancia de éste a cero. Por ejemplo, la distancia de 5 a 0 es 5, es decir: $|5| = 5$; la distancia de -5 a 0 es 5; por tanto: $|-5| = 5$.

Sin embargo, esta definición no es muy cómoda y es demasiado intuitiva si se quiere trabajar con ella en algunas demostraciones; por tanto, presentaremos esta definición de otra manera.

Definición 1.47. *Sea* a *un número real. Definimos el valor absoluto de* a : $|a|$, *por:*

$$|a| = \begin{cases} a & , si \quad a \geq 0 \\ -a & , si \quad a < 0 \end{cases} .$$

Esta definición equivale a la dada inicialmente y será más amigable en las demostraciones de las propiedades del valor absoluto. Veamos algunas.

Teorema 1.48. $|a| \geq 0$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Prueba. Debido a que la definición del valor absoluto de un número real está divida en dos casos, si a es mayor o igual a cero, o si a es menor que cero, entonces vamos a realizar la demostración en dos partes.

Supongamos que $a \geq 0$, entonces:

$$|a| = a \geq 0.$$

Luego, $|a| \geq 0$.

Si suponemos que $a < 0$, entonces $-a > 0$ y:

$$|a| = -a > 0.$$

Por tanto, para cada número real a, $|a| \geq 0$. □

Teorema 1.49. $|a| = |-a|$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Prueba. Al igual que en el teorema anterior, deben considerarse dos casos: si $a \geq 0$ ó si $a < 0$. Escriba la demostración. $\square$

Teorema 1.50. *Para todo* $a, b \in \mathbb{R}$, $|a - b| = |b - a|$.

Prueba. Si suponemos que $a - b > 0$, entonces $b - a < 0$.
Luego, $|a - b| = a - b$ y $|b - a| = -(b - a)$. Por consiguiente:

$$|a - b| = a - b = -(b - a) = |b - a|.$$

Supongamos ahora que $a - b < 0$, entonces $b - a > 0$; por tanto:

$$|a - b| = -(a - b) = b - a = |b - a|.$$

Por último, si $a - b = 0$, entonces $b - a = 0$ y así, $|a - b| = 0 = |b - a|$. Con lo que concluimos la demostración. $\square$

$|a - b|$ es la distancia entre a y b. Muestre varios ejemplos, dando diferentes valores para a y b. Por otra parte, observe que la demostración del Teorema 1.50 puede hacerse en un renglón, usando el Teorema 1.49; pero claro, primero debe haberlo demostrado para poder usarlo.

Con la experiencia obtenida, puede demostrar los siguientes tres teoremas.

Teorema 1.51. $|a| = 0$, *si y sólo si* $a = 0$.

Definimos $\sqrt{x}$ como el real no negativo y tal que $y^2 = x$.

Teorema 1.52. $\sqrt{a^2} = |a|$, *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.53. *Sea* $a \in \mathbb{R}, a > 0$. $|x| = a$, *si y sólo si* $x = a$ *ó* $x = -a$.

¿Qué ocurre con $|x| = a$, si $a < 0$?

Teorema 1.54. *Sea* $a \in \mathbb{R}, a > 0$. $|x| < a$, *si y sólo si* $-a < x < a$.

Prueba. Supongamos primero que $-a < x < a$, es decir $0 \leq x < a$, ó $-a < x < 0$. Si $0 \leq x < a$, entonces $|x| = x < a$, lo que queriamos. Si, por otra parte, $-a < x < 0$, entonces $|x| = -x$; pero $-a < x$, luego $a > -x = |x|$ y con esto hemos terminado de demostrar la primera implicación.

Para la segunda implicación, debemos suponer que $|x| < a$ y demostrar que $-a < x < a$. Pero si $x \geq a$, se tiene que $|x| = x \geq a$ y, por tanto, esta posibilidad no puede darse. Por otro lado, si $x \leq -a$, entonces $|x| = -x \geq a$, lo que también contradice la hipótesis. Luego $-a < x < a$. $\square$

¿Qué ocurre con $|x| < a$, si $a < 0$?

Teorema 1.55. *Sea $a \in \mathbb{R}, a > 0$. $|x| > a$, si y sólo si $x > a$ ó $x < -a$.*

Prueba. La demostración es muy similar a la del Teorema 1.54, sólo tiene que cambiar algunas desigualdades. $\square$

¿Qué ocurre con $|x| > a$, si $a < 0$?

Verifique que los teoremas 1.54 y 1.55 son también válidos si cambiamos las desigualdades estrictas por $\leq$ ó $\geq$, según corresponda. Estos teoremas nos ayudarán a resolver algunos ejercicios y problemas de aplicación. Veremos ahora una propiedad muy importante que debemos tener presente, puesto que será una fuerte herramienta, especialmente en las demostraciones del Capítulo 3 (Límites).

Teorema 1.56. *Dados a y b en $\mathbb{R}$, se tiene que $|a + b| \leq |a|+|b|$ (desigualdad triangular).*

Prueba. Por la propiedad de tricotomía, tanto a como b tienen dos posibilidades: ser mayores o iguales que cero o ser menores que cero. Por tanto, se nos presentan cuatro casos. Veamos que en cada uno de estos casos la desigualadad triangular es válida.

1. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

   En este caso, $a + b \geq 0$ y por tanto $|a + b| = a + b = |a| + |b|$, por ser a y b mayores o iguales a cero, con lo que se tiene la desigualdad triangular.

2. Si $a < 0$ y $b < 0$.

   Ahora se tiene que $a+b < 0$; de esta manera $|a+b| = -(a+b)$ y como $|a| + |b| = (-a) + (-b) = -(a+b) = |a+b|$, nuevamente se tiene la desigualdad triangular.

3. Si $a \geq 0$ y $b < 0$.

   En este caso pueden darse dos posibilidades:

   a) $a + b \geq 0$.
   b) $a + b < 0$.

   Si se tiene que $a + b \geq 0$, entonces $|a+b| = a + b$, pero como sabemos que $a \geq 0$ y $b < 0 < -b$, entonces $|a| + |b| = a + (-b)$, de donde
   $|a+b| = a + b \leq a + (-b) = |a| + |b|$. Esto nos afirma que se cumple la desigualdad triangular.

   Con no mucho esfuerzo, puede ver que si $a + b < 0$, también se tiene que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

4. Si $a < 0$ y $b \geq 0$.

   Se demuestra como en el caso anterior, intercambiando los papeles de a y b.

$\square$

Observemos que en la desigualdad triangular no se puede cambiar el $\leq$ por la desigualdad estricta, puesto que, como se vio en la demostración, si a y b son del mismo signo se tiene la igualdad, y si son de signos contrarios se tiene la desigualdad estricta.Por ejemplo, si $a = 3$ y $b = 5$ tenemos:
$|a+b| = |3+5| = |8| \not< 8 = |3| + |5| = |a| + |b|$. Si $a = 3$ y $b = -5$, entonces $|a+b| = |3-5| = 2 < 8 = |3| + |-5| = |a| + |b|$.

Ejercicio 1.57.

1. *Si $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar:*

   a*)* $|ab| = |a|\,|b|$.
   b*) Si* $b \neq 0$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

c) $|a-b| \geq |a| - |b|$.

d) $-|a| \leq a \leq |a|$.

2. En cada uno de los siguientes ejercicios, encontrar el conjunto solución:

a) $|2x-4| = 3$.

b) $\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\right| = 5$.

c) $|x-3| > 8$.

d) $|5x-1| \leq 4$.

e) $\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x\right| < 5$.

f) $|x+3| + |x-2| < 2$.

g) $|3x-2| + |2x-1| \geq 3$.

h) $|2x+4| \geq |3x-1|$.

i) $\left|\frac{3x-1}{2x+3}\right| < \frac{1}{4}$.

j) $|x+8| = |2-7x|$.

3. Resolver los siguientes problemas, usando desigualdades:

a) *El número de diagonales d de un polígono de n lados, está dado por $d = \frac{(n-1)\,n}{2} - n$. ¿Para qué polígonos pasará de 27 el número de diagonales?*

b) *Una pelota es lanzada hacia arriba con una velocidad de 48 pies/seg desde la azotea de un edificio de 90 pies de altura. Su altura S en pies sobre el nivel del suelo, despúes de t segundos, está dada por la fórmula $S = -16t^2 + 48t + 90$. ¿Durante cuánto tiempo estará la pelota arriba de los 122 pies? ¿En qué tiempo tocará el suelo, suponiendo que no toca el edificio al caer?*

1.5. Axioma de completez

El axioma de completez es el décimo axioma de la lista, después de los axiomas de cuerpo y los de orden. Este axioma distingue el conjunto de los números reales del conjunto de los números racionales, puesto que el primero cumple este axioma y el segundo no. Vamos a mencionar algunos conceptos preliminares con los que seguramente usted ya está familizarizado.

Definición 1.58. *Sea A un subconjunto de los números reales. Decimos que el número real b es una cota superior (inferior) de A si:*

$$b \geq x \quad (b \leq x), \quad \textit{para todo } x \textit{ que pertenece a } A.$$

Cuando A posee cotas superiores (inferiores) se dice que A es acotado superiormente (inferiormente).

Ejemplo 1.59.

1. *Sea $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$. 5 es una cota superior de A y -3 es una cota inferior de A.*

2. *$-8{,}4, -\pi$ son cotas inferiores de $\mathbb{N}$, pero $\mathbb{N}$ no tiene cotas superiores. (Esto se probará más adelante).*

Definición 1.60. *Sea A un subconjunto de los números reales. Decimos que el número real b es el supremo (ínfimo) de A si:*

$$\begin{gathered} b \textit{ es la menor de las cotas superiores de } A. \\ (b \textit{ es la mayor de las cotas inferiores de } A). \end{gathered}$$

En este caso se escribe: $b = SupA \;\; (b = InfA)$.

Note que decir "b es la menor de las cotas superiores de A", implica dos condiciones:

i) *b es cota superior de A.*

ii) *Si y es cota superior de A, entonces $b \leq y$.*

Ejemplo 1.61.

1. *Para $A = (0, 1] \subset \mathbb{R}$ se tiene que $0 = InfA$ y $1 = SupA$.*

2. *$0 = Inf\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ no tiene supremo puesto que carece de cotas superiores.*

Ejercicio 1.62. *Probar las siguientes propiedades:*

1. *El supremo de un conjunto A, no vacío, de números reales, es único.*
2. *Si $b = SupA$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe x un elemento de A, tal que $b - \varepsilon < x \leq b$, es decir, $b - x < \varepsilon$.*

Definición 1.63. *Sea A un conjunto de números reales. Decimos que el número real b es el máximo (mínimo) de A si:*

$$\begin{aligned} b &= SupA \ \text{ y } b \in A. \\ (b &= InfA \ \text{ y } \ b \in A). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.64.

1. *1 es el máximo de $(0, 1] \subset \mathbb{R}$, pero A no tiene mínimo.*
2. *0 es el mínimo de $\mathbb{N}$, y $\mathbb{N}$ no tiene máximo.*

Como se anotó antes, el siguiente axioma completa la lista de los nueve axiomas ya presentados en este capítulo y diferencia el conjunto de los números reales de los otros conjuntos numéricos que hemos mencionado.

Axioma 1.65. *Axioma de completez o de la mínima cota superior.*
Si A es un conjunto de números reales, no vacío y A está acotado superiormente, entonces A tiene mínima cota superior: $SupA$.

Gracias a este axioma, para garantizar que un subconjunto A de números reales tiene supremo, basta mostrar que no es vacío y que tiene una cota superior.

Ejemplo 1.66. $A = [-1, 3)$
A no es vacío puesto que $2 \in A$ y 4 es una cota superior de A, entonces, por el axioma de completez, A tiene supremo. ¿Cuál es?

Ejercicio 1.67. *Considerar el número irracional $\pi = 3{,}141592...$ y el conjunto de números racionales*

$$A = \{3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}141,\ 3{,}1415,\ 3{,}14159, ...\}\,.$$

Utilizar el conjunto A para mostrar que $\mathbb{Q}$ no satisface el axioma de completez.

Las siguientes son dos consecuencias del axioma de completez.

Proposición 1.68. $\mathbb{N}$ *no está acotado superiormente.*

Prueba. Supongamos que $\mathbb{N}$ está acotado superiormente.

Puesto que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{N} \neq \emptyset$, entonces por el axioma de completez, sea $\alpha = Sup\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha &\geq n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\ \alpha &\geq n+1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n+1 \in \mathbb{N}$. Luego $\alpha - 1 \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pero como $\alpha - 1 < \alpha$, tenemos que $\alpha - 1$ es una cota superior de $\mathbb{N}$ que es menor que el $Sup\mathbb{N}$. Esto contradice que α sea la mínima cota superior de $\mathbb{N}$. □

Proposición 1.69. *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$, *tal que* $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Prueba. Tomemos $\varepsilon > 0$ y supongamos que $\dfrac{1}{n} \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $n \leq \dfrac{1}{\varepsilon}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\dfrac{1}{\varepsilon}$ es cota superior de $\mathbb{N}$, pero esto es una contradicción. □

Ejercicio 1.70. *Para cada uno de los siguientes conjuntos determine si posee cotas superiores, supremo, máximo, cotas inferiores, ínfimo, minimo y justifique cada una de sus respuestas.*

1. $\mathbb{N}$	*5.* $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}$
2. $\mathbb{Z}$	*6.* $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$
3. $\mathbb{Q}$	*7.* $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 7\}$
4. $\mathbb{R}$	*8.* $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$

CAPÍTULO 2

Funciones reales

2.1. Introducción

Las funciones nos permiten describir matemáticamente algunas situaciones del mundo real. En cálculo estudiamos los diferentes tipos de funciones y en este curso nos dedicaremos a funciones de una variable real.

Por ejemplo, si se tiene un tanque de agua en forma de cilindro circular recto, se conoce el radio de su base y se quiere saber el volumen de agua que hay en él, basta medir la altura de agua en el tanque, pues para cada altura de este tanque se tiene un volumen diferente de agua. En este caso decimos que el volumen del tanque es una función de su altura.

Son muchos los ejemplos de funciones que podemos descubrir en cada situación de nuestra vida cotidiana. Piense en otro ejemplo y discútalo con sus compañeros y compañeras.

En el Capítulo 1 identificamos el conjunto de los números reales con una recta. Haremos algo similar para el plano, para obtener el lugar en el cual representaremos gráficamente las funciones que queremos estudiar.

El producto cartesiano de $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de parejas ordenadas (a, b), donde a y b son números reales, es decir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Vamos a identificar a $\mathbb{R}^2$ con el plano, de modo que a cada pareja ordenada de $\mathbb{R}^2$ le corresponda un único punto del plano y viceversa; así, punto del plano y pareja ordenada de $\mathbb{R}^2$ serán sinónimos. Para ello, representemos en el plano dos rectas perpendiculares entre sí, una horizontal, usualmente llamada el eje x y otra vertical, el eje y, de modo que se intersequen en sus puntos cero y los reales positivos se encuentren a la derecha, en la recta horizontal y hacia arriba en la vertical. El punto de intersección se llama el origen.

Cada pareja (a,b) de $\mathbb{R}^2$ nos describe las coordenadas de un punto del plano así; se ubica a, la primera componente de la pareja en la recta horizontal (eje x) y b, la segunda componente, en la recta vertical (eje y); por estos puntos se trazan rectas perpendiculares a sus respectivos ejes, su punto de intersección en el plano lo identificaremos con la pareja ordenada (a,b). (Ver Figura 2.1).

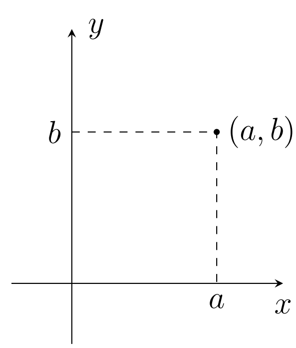


Figura 2.1: Plano cartesiano.

De esta manera representamos $\mathbb{R}^2$ como un plano: plano cartesiano o sistema coordenado. En el punto (a,b) llamamos *abscisa* a la primera componente a y *ordenada* a la segunda componente b. Por otra parte, los ejes x, y dividen el plano en cuatro cuadrantes: I, II, III y IV, como se ilustra en la Figura 2.2.

¿Qué propiedad tienen los puntos del segundo cuadrante?

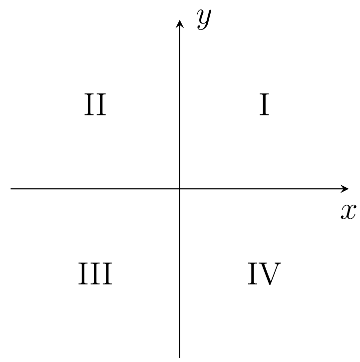


Figura 2.2: Cuadrantes.

2.2. Distancia entre dos puntos

Queremos determinar la distancia entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), en el plano. Si observamos la Figura 2.3, podemos construir un triángulo rectángulo.

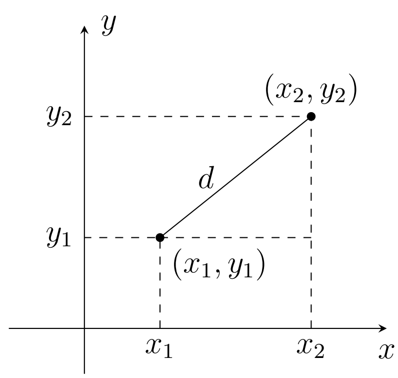


Figura 2.3: Distancia entre A y B.

Con base en el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

Por tanto, la distancia entre dos puntos del plano podemos calcularla utilizando la siguiente expresión:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.1. *Calcular la distancia entre los puntos* $(-1, 2)$ *y* $(3, 5)$.

Sea $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ *y* $(x_2, y_2) = (3, 5)$. *Utilizando la fórmula (2.1) tenemos:*

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(3 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} = 5. \end{aligned}$$

Luego, la distancia entre los puntos $(-1, 2)$ *y* $(3, 5)$ *es 5 unidades.*

Hay que hacer notar que arbitrariamente llamamos a $(-1, 2)$ como (x_1, y_1) y a $(3, 5)$ como (x_2, y_2). Sin embargo, verifique que si intercambiamos la manera de nombrarlos, el resultado será el mismo.

Ejercicio 2.2.

1. *Determinar la distancia entre los puntos* $(2, -5)$ *y* $(-1, -1)$.
2. *Dibujar el triángulo con vértices* $\left(\frac{1}{3}, -1\right)$, $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ *y hallar su perímetro.*
3. *Demostrar que los puntos* $(-2, -1)$, $(2, 2)$ *y* $(5, -2)$ *son los vértices de un triángulo isósceles.*
4. *Mostrar que el triángulo con vértices* $(3, 2)$, $(1, 1)$ *y* $(-1, 5)$ *es rectángulo.*

2.3. Ecuación de la recta

Uno de los axiomas en los cuales se fundamenta la geometría euclidiana afirma que por dos puntos distintos del plano pasa una única recta. Utilizaremos este hecho para caracterizar los puntos de una recta en el plano cartesiano, de modo que podamos determinar si un punto está o no en una recta dada. Para esto definiremos el concepto de pendiente y la ecuación de una recta.

Definición 2.3. *Sean* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *dos puntos distintos del plano, con* $x_1 \neq x_2$. *La pendiente de una recta determinada por estos puntos es el número real* m *dado por:*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.2}$$

Observemos que la pendiente de una recta no está definida cuando $x_1 = x_2$, es decir, cuando la recta es vertical. Este número es característico de cada recta no vertical, puesto que el valor de m es independiente de los puntos que se tomen en la recta. Esto podemos observarlo en la Figura 2.4.

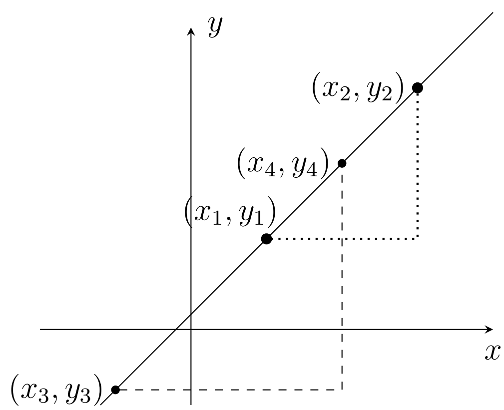


Figura 2.4: Pendiente.

Con base en la semejanza entre los triángulos tenemos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4}.$$

Para la recta de la Figura 2.4, tenemos que la pendiente m es positiva, puesto que $y_2 - y_1$ y $x_2 - x_1$ también lo son. Básicamente tenemos cuatro opciones para la pendiente de una recta: $m > 0$ como en el caso anterior, $m < 0$ (¿cuándo?); $m = 0$, si $y_2 = y_1$; es decir, la recta es horizontal y pendiente indefinida cuando la recta es vertical. La pendiente de una recta caracteriza su dirección respecto a los ejes coordenados.

Conocidos la dirección de una recta no vertical (su pendiente m), y un punto (x_1, y_1) de ella, queremos saber ahora cuáles son los puntos (x, y) que están en esa recta. Si el punto (x, y) está en esta recta, entonces (x_1, y_1) y (x, y) deben satisfacer la ecuación de la pendiente de la recta; por tanto:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1},\ x \neq x_1.$$

Es decir, todo punto (x, y) que está sobre la recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1) debe satisfacer la ecuación anterior. Daremos entonces la siguiente definición.

Definición 2.4. *La ecuación de la recta que pasa por un punto* (x_1, y_1) *y tiene pendiente* m *es:*

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.5. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(2,2)$ *y* $(-3,1)$.

La representación gráfica de esta recta es:

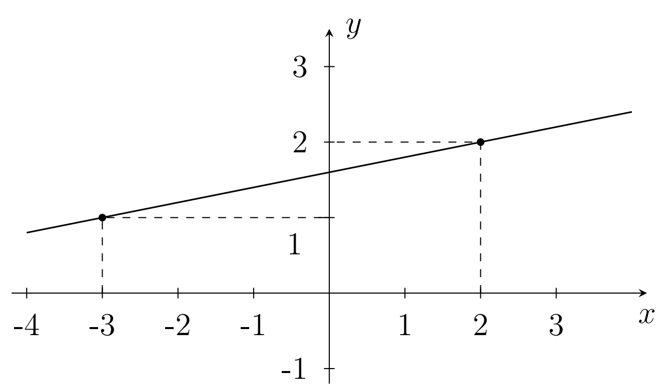


Figura 2.5

Por la ecuación (2.2) tenemos:

$$m = \frac{1-2}{-3-2} = \frac{1}{5}.$$

Por (2.3), la ecuación de la recta estará dada por:

$$y - 2 = \frac{1}{5}\,(x - 2)\,.$$

Otra manera de escribir esta ecuación es: $y = \frac{1}{5}x + \frac{8}{5}$. *Verificar que se obtiene la misma ecuación si se usa el punto* $(-3,1)$, *en lugar de* $(2,2)$.

Existen otras maneras de presentar la ecuación de una recta; por ejemplo, si en la ecuación (2.3) realizamos algunas operaciones se obtiene:

$$y = mx + (-mx_1 + y_1)\,.$$

Definiendo $b = -mx_1 + y_1$, encontramos una ecuación de la recta que seguramente nos es muy familiar:

$$y = mx + b. \tag{2.4}$$

Note que b nos da el corte de la recta con el eje y, puesto que el punto $(0, b)$ está en la recta. Por otra parte, verifique que (2.4) se puede transformar en:

$$Ax + By + D = 0, \tag{2.5}$$

siendo $B \neq 0$ y tomando $A = -Bm$, $D = -Bb$.

Puede utilizar (2.3) ó (2.4) ó (2.5) para presentar la ecuación de una recta, ya que, como se vio, son ecuaciones equivalentes.

Nos imaginamos que ya se preguntó cómo será la ecuación de una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2), con $x_1 = x_2$. Vamos a satisfacer su curiosidad. El gráfico de la recta en estas circunstancias es la Figura 2.6.

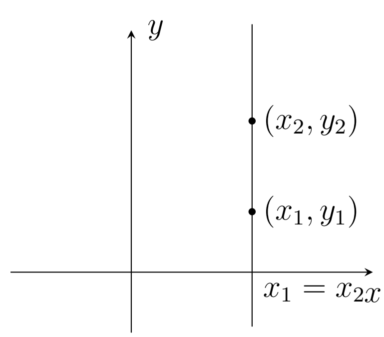


Figura 2.6: Recta vertical.

Como puede observar, esta recta es una recta vertical, que no tiene pendiente definida. Cada punto de la recta es de la forma (x_1, y), donde y es un número real. Esto nos muestra que la única condición para que un punto esté en esta recta es que x sea igual a x_1. Entonces se define la ecuación de una recta vertical que pasa por (x_1, y_1) de la siguiente manera:

$$x = x_1. \tag{2.6}$$

Veamos que la ecuación (2.5) incluye las rectas verticales, cuando $A \neq 0$ y $B = 0$ y las rectas horizontales, cuando $A = 0$ y $B \neq 0$. Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$, se trata de una recta ni vertical ni horizontal, es decir, oblicua.

Estamos listos para aplicar lo aprendido.

Ejercicio 2.6.

1. *Dibujar y hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(4, 0)$ *y* $(-3, -2)$.
2. *Determinar el punto por donde la recta del ejercicio anterior corta al eje x y el punto por donde corta al eje y.*
3. *Hallar la ecuación de la recta y los puntos de corte con los ejes, de la recta que pasa por* $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ *y* $\left(3, \frac{-5}{4}\right)$.
4. *Demostrar que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente. (Dos rectas son paralelas si no se intersectan o coinciden.)*
5. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por* $(-3, 1)$ *y es paralela a la recta* $-3x + 2y + 5 = -2$.
6. *Demostrar que dos rectas con pendientes m_1 y m_2, son perpendiculares si y sólo si $m_1.m_2 = -1$. (Dos rectas son perpendiculares si se cruzan formando ángulos rectos.)*
7. *Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto*$\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ *y es perpendicular a la recta con ecuación* $-2x + 3y - 1 = 0$.
8. *Mostrar que el punto medio de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tiene coordenadas*
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$
9. *Los puntos* $(-1, 2)$,$(-3, -1)$ *y* $(2, 4)$ *son los vértices de un triángulo. Hallar las ecuaciones de sus medianas y mediatrices.*

10. *Mostrar que el triángulo con vértices* $(0,2)$, $(3,0)$ *y* $(4,8)$ *es rectángulo.*

11. *Para hallar la fórmula de la distancia del punto* $P=(x_1,y_1)$ *a la recta* l *cuya ecuación es* $ax+by+c=0$*, con* $a\neq 0\neq b$*; dada por*

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

realizar los siguientes pasos:

a) *Graficar la recta* l *y el punto* P *fuera de ella.*

b) *Hallar la ecuación de la recta* t *que es perpendicular a* l *y contiene a* P*.*

c) *Encontrar el punto* H *de intersección de las rectas* l *y* t*.*

d) *Hallar la distancia de* P *a* H *y verificar que es la fórmula dada.*

2.4. Relaciones y sus gráficas

Una relación en $\mathbb{R}$ es un subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$; por tanto, una relación en $\mathbb{R}$ puede representarse gráficamente en el plano cartesiano.

Ejemplo 2.7. *Son relaciones en* $\mathbb{R}$:

1. $A=\{(2,3);(-2,3);(0,-2)\}$, *la cual se representa gráficamente en la Figura 2.7.*

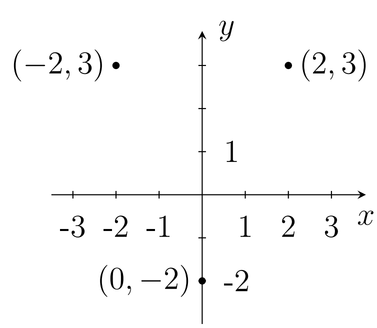


Figura 2.7

2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3\}$. *Para que* (a, b) *sea un elemento de* B, *se tiene que* a *debe cumplir* $|a| < 3$, *es decir,* $-3 < a < 3$, *pero para* b *no se impone condición, por tanto la representación gráfica de* B *es la Figura 2.8.*

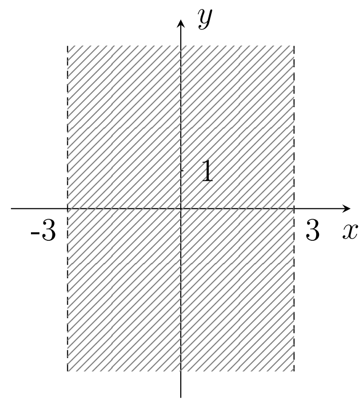


Figura 2.8: Franja vertical.

3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x\}$ *(Ver Figura 2.9).*

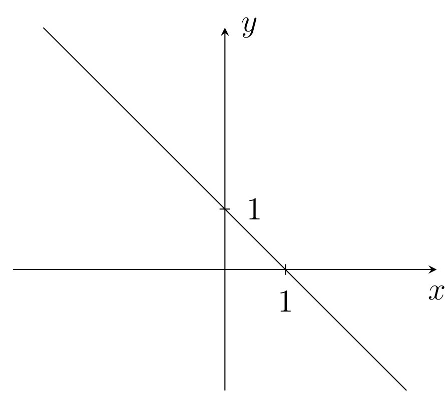


Figura 2.9: Recta.

Como observamos, la representación gráfica de la relación C *es la recta con ecuación* $y = 1 - x$.

4. *Las rectas son ejemplos de relaciones en* $\mathbb{R}$. *También las circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas repasadas en el Apéndice, son ejemplos de relaciones en* $\mathbb{R}$. *En lo que sigue de este libro asumiremos que*

se ha estudiado lo correspondiente a estas secciones cónicas, sus ecuaciones y su representación gráfica.

2.4.1. Dominio e imagen de una relación

Para cada relación en $\mathbb{R}$ podemos destacar dos conjuntos importantes.

Definición 2.8. *Sea A una relación en $\mathbb{R}$, es decir, $A \subseteq \mathbb{R}^2$.*

1. *Se llama dominio de la relación A, al conjunto formado por las primeras componentes de los elementos de A.*

$$DomA = \{x : (x, y) \in A\}.$$

2. *Se llama imagen de la relación A, al conjunto formado por las segundas componentes de los elementos de A.*

$$ImA = \{y : (x, y) \in A\}.$$

Notas.

1. A la imagen de una relación también se le conoce como rango o recorrido de la relación.

2. Es importante observar que $DomA$ e ImA son subconjuntos de $\mathbb{R}$, no de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.9. *Hallar el dominio y la imagen de las relaciones del Ejemplo 2.7.*

1. $DomA = \{2, -2, 0\}$.
   $ImA = \{3, -2\}$.

2. $DomB = (-3, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 3\}$.
   $ImB = \mathbb{R}$.

3. $DomC = \mathbb{R} = ImC$.

Observe que el dominio de la relación se aprecia en el eje x y la imagen en el eje y.

Ejercicio 2.10. *En cada caso, representar gráficamente la relación dada, ha-llar su dominio y su imagen.*

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.
2. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3\}$.
3. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$.
4. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 3, \ y, \ |y| < 2\}$.

2.4.2. Simetrías

Puesto que la representación gráfica de una relación en $\mathbb{R}$ es un dibujo en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, podemos preguntarnos si ese dibujo presenta algún tipo de simetría; por ejemplo, si es simétrico respecto al eje x. Podemos pensar en ello doblando "mentalmente" el plano (una hoja de papel) a través del eje x.

Definición 2.11. *Simetría respecto al eje x.*

Una relación A en $\mathbb{R}$ es simétrica respecto al eje x, si para cada pareja (x, y) en A, se tiene que la pareja $(x, -y)$ también está en A, como puede observarse en la Figura 2.10.

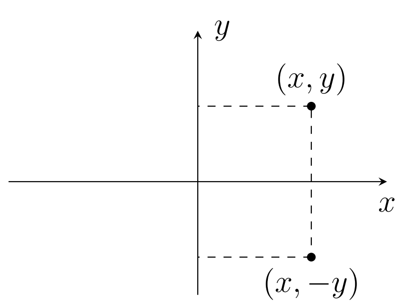


Figura 2.10: Respecto al eje x.

Ejemplo 2.12.

1. *La relación B, del Ejemplo 2.7 es simétrica respecto al eje x. No olvide revisar la veracidad de esta afirmación.*

2. *Las relaciones A y C del Ejemplo 2.7 no son simétricas respecto al eje x. $(2,3)$ está en A, pero $(2,-3)$ no está en A; $(-3,4)$ está en C, pero $(-3,-4)$ no está en C.*

Definición 2.13. *Simetría respecto al eje y.*

Una relación A en $\mathbb{R}$ es simétrica respecto al eje y, si para cada pareja (x,y) en A, se tiene que la pareja $(-x,y)$ también está en A, como puede observarse en la Figura 2.11.

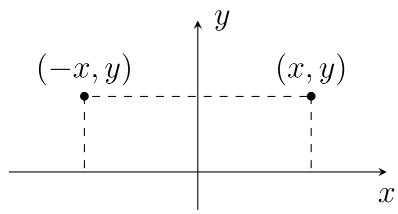


Figura 2.11: Respecto al eje y.

Ejemplo 2.14.

1. *Las relaciones A y B del Ejemplo 2.7 son simétricas respecto al eje y. No olvide revisarlo.*

2. *La relación C del Ejemplo 2.7 no es simétrica respecto al eje y; $(-3,4)$ está en C, pero $(3,4)$ no está en C.*

Definición 2.15. *Simetría respecto al origen.*

Una relación A en $\mathbb{R}$ es simétrica respecto al origen, si para cada pareja (x,y) en A, se tiene que la pareja $(-x,-y)$ también está en A, como puede observarse en la Figura 2.12.

Ejemplo 2.16.

1. *La relación B del Ejemplo 2.7 es simétrica respecto al origen. Observe su representación gráfica y revise esta afirmación.*

2. *Las relaciones A y C del Ejemplo 2.7 no son simétricas respecto al origen. Justifique cada una.*

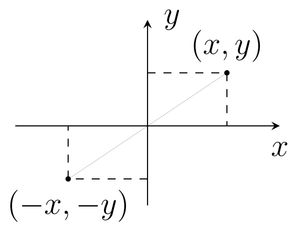


Figura 2.12: Respecto al origen.

2.4.3. Relaciones definidas por sistemas de inecuaciones

En el Ejercicio 2.10, numeral 4, que esperamos usted ya haya realizado, consideramos la relación

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 3, \text{ y, } |y| < 2\right\}.$$

Este es un ejemplo de una relación definida por un sistema de dos inecuaciones: $|x| \geq 3$, y, $|y| < 2$. Usualmente para estos ejercicios no se acostumbra presentar la relación en forma de conjunto, sino que se hace la lista de inecuaciones que la determinan, con el fin de simplificar un poco la notación.

Ejemplo 2.17.

La relación $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 9\}$ *puede presentarse simplemente por*

$$x^2 + 4y^2 < 9$$

y se asume tácitamente que estamos buscando todas las parejas (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$ *que la satisfacen.*

Para representarla gráficamente es útil trabajar primero con $x^2 + 4y^2 = 9$*, la cual es la ecuación de una elipse con centro en el origen. Por tricotomía se sabe que sólo son posibles* $x^2 + 4y^2 < 9$*, ó* $x^2 + 4y^2 = 9$*, ó* $x^2 + 4y^2 > 9$*, de modo que gráficamente el plano queda dividido en tres regiones disyuntas entre sí, una para cada una de las expresiones anteriores.*

Como $x^2 + 4y^2 = 9$ *se representa con la elipse, basta determinar cuál de las dos regiones que quedan en el plano (interior o exterior a la elipse) corresponde a la inecuación* $x^2 + 4y^2 < 9$*. Si revisamos algunos puntos del interior o del exterior de la elipse tenemos que solamente los del interior satisfacen la desigualdad dada, entonces obtenemos que* $x^2 + 4y^2 < 9$ *se representa gráficamente por la Figura 2.13.*

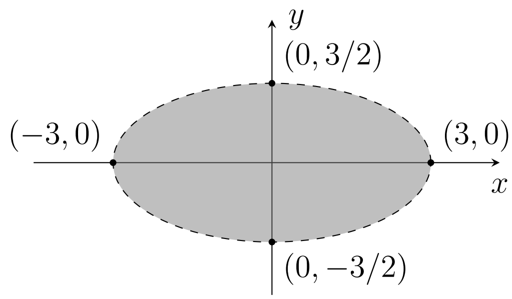


Figura 2.13: Interior de la elipse.

Ejercicio 2.18. *Con base en el Ejemplo 2.17, representar gráficamente la solución de cada uno de los siguientes sistemas de inecuaciones:*

1. $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 4y^2 < 9 \\ |x| \geq 1 \end{array}\right.$ *2.* $\left\{\begin{array}{l} x^2 + 4y^2 \geq 9 \\ |y-1| < 2 \end{array}\right.$

Ejemplo 2.19. *Representar gráficamente el siguiente sistema de inecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{l} y > |2x-3| \\ |x-2| \leq 1 \end{array}\right.$$

Como en el ejemplo de la elipse, es útil representar primero el caso en que $y = |2x-3|$ *y determinar las regiones que quedan, para decidir cuál corresponde a* $y > |2x-3|$*. Por otra parte, sabemos que si* $|x-2| \leq 1$*, entonces* $x \in [1,3]$*; los puntos del plano que satisfacen esta condición se ubican en una franja vertical. Así, la representación gráfica de la solución de este sistema es la Figura 2.14.*

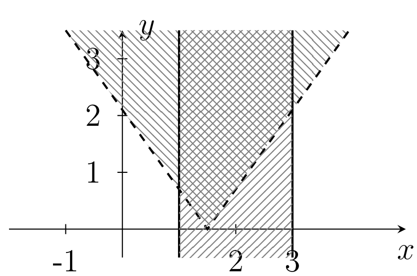


Figura 2.14: Intersección.

Ejercicio 2.20.

1. *Representar gráficamente, en cada caso:*

   a) $\begin{cases} 2x + y - 3 > 0 \\ y - 3 \leq 0 \\ x - 2y + 1 \leq 0 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 < 9 \\ x^2 + y^2 < 4x \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 4x^2 + 8x > 4y - y^2 - 7 \\ |y - 2| \leq 1 \\ -3 > x - y \end{cases}$

2. *Justificar por qué la representación gráfica del sistema*

$$-8y < 5x - 22$$
$$2\,(x-1)^2 \leq -3\,(y-4)$$

es la Figura 2.15.

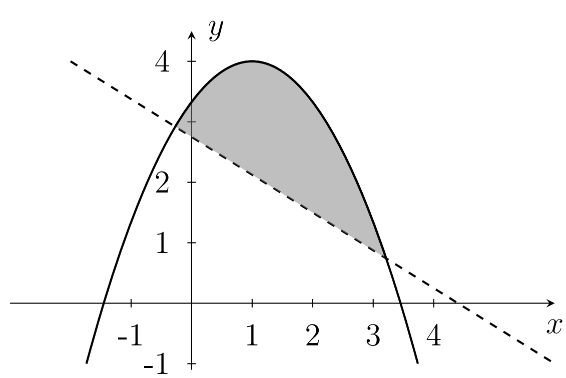


Figura 2.15

2.5. Funciones

En la sección anterior estudiamos el concepto de relación en los números reales como subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ahora trabajaremos con algunas de estas relaciones, las cuales llamaremos funciones.

Definición 2.21. *Sea R una relación en $\mathbb{R}$. Diremos que R es una función real, si para cada (x, y) y (x, z) en R se tiene que $y = z$.*

Como todas las funciones que trataremos son funciones reales diremos simplemente función.

De la definición anterior tenemos que, para cada x en el dominio de R existe un único real y que hace que $(x, y) \in R$. En estas condiciones diremos que y es la imagen de x por la función.

Ejemplo 2.22. *Considerar la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\}$.*

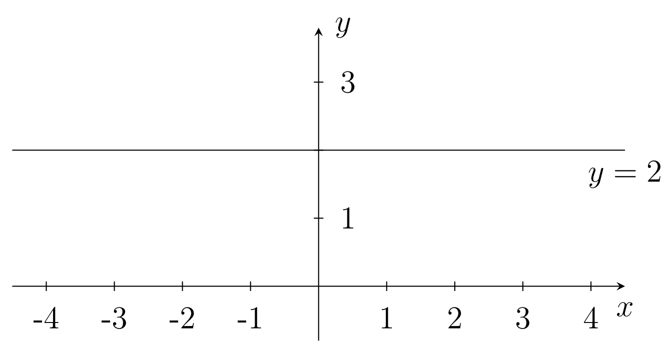


Figura 2.16: R.

R es una función pues para cada x en $\mathbb{R}$ existe una única pareja $(x, 2)$ que pertenece a R, como se vé en la Figura 2.16.

Ejemplo 2.23. *Sea $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 1\}$.*

Para ver si R_1 es una función, sean $(x, y), (x, z) \in R_1$, entonces se cumple $y = 2x + 1 = z$. Luego R_1 es una función representada en la Figura 2.17.

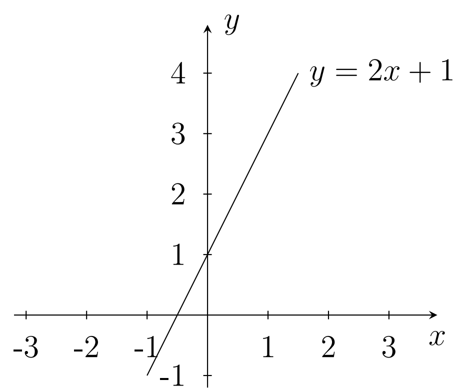


Figura 2.17: R_1.

Ejemplo 2.24. *Considerar* $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

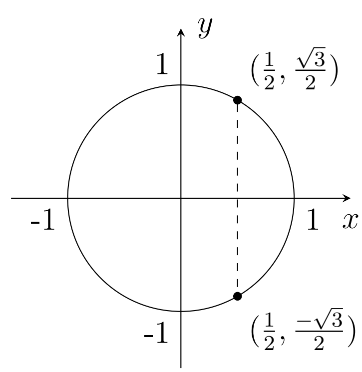


Figura 2.18

Si $(x, y) \in R_2$ *entonces* $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. *Por tanto,* $\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right)$ *y* $\left(x, -\sqrt{1 - x^2}\right)$ *son parejas que pertenecen a* R_2. *En particular, si* $x = \frac{1}{2}$, *entonces* $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *están en* R_2, *lo que contradice la definición de función. Por consiguiente,* R_2 *no es función.*

Gráficamente sabemos si una relación es una función, porque cada recta vertical interseca la gráfica de la relación a lo sumo en un punto. Por otra parte, observe que si R es una función, para cada x del dominio de R hay solamente una pareja (x, y) en R; por ello decimos que y es la imagen de x en esa función.

Para distinguir las funciones de las relaciones, se acostumbra nombrar las funciones con letras minúsculas como f, g, h, j; así, si llamamos f a una función y (x, y) es un elemento de f, escribiremos que y es la imagen de x por la función f simplemente como $y = f(x)$.

Las funciones que estudiaremos en estas notas son, en su mayoría, funciones cuyo dominio y recorrido están contenidos en los números reales. Por tanto, para simplificar la notación de la función

$$R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 1\right\}$$

escribiremos simplemente $y = 2x+1$, o si llamamos f a esta función, entonces $f(x) = 2x + 1$. Dése cuenta de que la notación $f(x) = 2x + 1$ nos dice cómo hallar la imagen de cada x en el dominio de f. Como no se ha especificado cuál es el dominio de f, se asume que su dominio es el mayor subconjunto de los números reales para el cual la expresión $2x + 1$ tiene sentido. Así, en el caso anterior el dominio de f es el conjunto de los números reales.

La relación $R_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x-3}{(x+1)(x-2)}, x \neq 2, x \neq -1\right\}$ es otro ejemplo de función; llamémosla g y podemos describirla por

$$y = \frac{x-3}{(x+1)(x-2)}, \quad \text{ó} \quad g(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-2)};$$

si no se agrega información adicional, se entiende que el dominio de g es el conjunto de los números reales distintos de 2 y -1.

Otra forma de presentar esta función es:

$$\begin{aligned} g:\ & \mathbb{R} - \{-1, 2\} \to \mathbb{R} \\ & g(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

En general, una función $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ la escribiremos como $y = f(x)$ y su dominio será el subconjunto más grande de $\mathbb{R}$, donde la expresión $y = f(x)$ tenga sentido, a menos que se diga explícitamente otra cosa.

Usted no debería continuar la lectura, sin antes considerar cada una de las clases de curvas consideradas en el Apéndice y determinar cuáles son funciones y cuáles no.

Ahora, bautizaremos algunas funciones que por su importancia merecen tener un nombre propio.

2.6. Algunas clases de funciones

1. *Función constante*. Es una función de la forma $y = f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$. La función del Ejemplo 2.22 es constante.

2. *Función lineal* . Es una función de la forma $y = mx + b$, con $m, b \in \mathbb{R}$. La recta del Ejemplo 2.23 es una función lineal. La función $y = x$ es una función lineal, a la cual llamaremos *Función lineal* .

   Note que todas las funciones lineales se representan por rectas. ¿Estaremos mintiendo si afirmamos que todas las relaciones que se representan con rectas son funciones lineales?

3. *Función polinómica*. Es una función de la forma
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n,$$
   donde $a_0, a_1..., a_n$ son números reales y n es un entero no negativo. Usted debe probar que efectivamente esta expresión determina una función.

   Son ejemplos de funciones polinómicas las funciones constantes, las lineales, las ecuaciones de segundo grado: $y = ax^2 + bx + c$, que representan parábolas que abren hacia arriba o hacia abajo. Las parábolas que abren hacia la derecha o hacia la izquierda no son ejemplos de funciones. Justifique esta afirmación.

   Determinar el dominio de las funciones constantes, de las funciones lineales y, en general, de las funciones polinómicas es un sencillo ejercicio.

4. *Función racional*. Con base en las funciones polinómicas podemos formar las que se llaman funciones racionales y son de la siguiente forma:
$$y = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m},$$

con $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m$ números reales y m, n enteros no negativos; es decir, las obtenidas como cociente de dos funciones polinómicas. Su dominio es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$, donde esta expresión tiene sentido, es decir, $\{x \in \mathbb{R} : b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m \neq 0\}$.

Un ejemplo de una función racional es $y = \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 5x - 1}{x^2 + 5x + 6}$, cuyo dominio es el conjunto formado por todos los reales, excepto -3 y -2.

5. *Función valor absoluto* definida por $y = |x|$, es una función cuyo dominio son todos los números reales y su recorrido los números reales no negativos. No será difícil ver que ésta es una función, ni elaborar su gráfico.

   Antes de definir la siguiente función, respondamos la siguiente pregunta: ¿cuál es el mayor número entero que es menor o igual a 3,5? Si pensamos en todos los enteros que son menores o iguales que 3,5 tenemos a $3, 2, 1, 0, -1, -2, ...$ y el mayor de ellos es 3. Por ello se dice que la parte entera de 3,5 es 3 y se resume con la notación $[3{,}5] = 3$.

6. *Función parte entera* Si x es un número real, llamamos la parte entera de $x : [x]$, al mayor entero que es menor o igual que x; por ejemplo:

   $[4{,}001] = 4; \quad [3{,}99] = 3; \quad [2] = 2; \quad [-1{,}5] = -2.$

   Consideramos la relación $y = [x]$, que se representa gráficamente por:

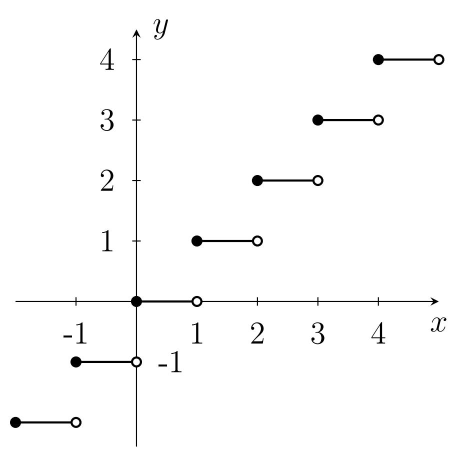


Figura 2.19: Parte entera.

Es fácil comprobar que ésta es una función real, con dominio todos los números reales y el recorrido los números enteros.

La anterior función es un ejemplo de un tipo de funciones llamadas *escalonadas*.

7. Utilizando la definición de $\sqrt{x}$, podemos observar que sólo está definida para valores de x reales no negativos. Además, aunque se sabe que $(-2)^2 = 4 = 2^2$, de acuerdo con la definición se tiene que $\sqrt{4} = 2$. $f(x) = \sqrt{x}$ es una función real, la *función raíz cuadrada*. No olvide hacer la gráfica de esta función, ni determinar su dominio e imagen.

8. *Función definida a trozos* . Algunas funciones se componen de trozos o pedazos de otras ya conocidas. Por tanto, en ocasiones no es posible presentarlas con una única expresión, así como para las anteriores funciones. Veamos como ejemplo la función f que para los x menores de -1 la imagen es $x+3$, para los x mayores o iguales a -1 y menores o iguales a 1, es x^2 y para los mayores de 1 la imagen es $\frac{1}{2}(x+1)$. Como puede apreciarse, escribir todo lo anterior para conocer la función sería muy extenso, por tanto, adoptaremos la siguiente notación para presentar a f :

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

La representación gráfica de f es la Figura 2.20.

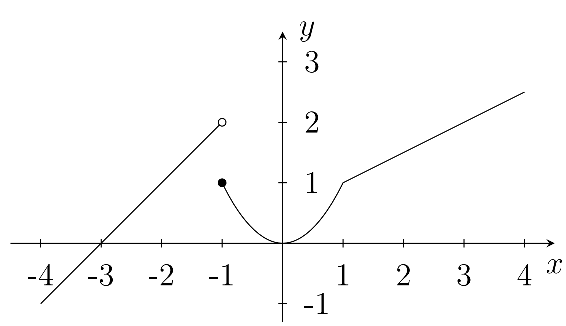


Figura 2.20: Función definida a trozos.

Observe que el punto $(-1, 2)$ aunque pertenece a la recta $y = x + 3$ no pertenece a f, debido a que esta función está definida como $x + 3$ únicamente para los x estrictamente menores que -1.

Note que $y = |x|$ es una función que puede definirse a trozos.

Ejercicio 2.25.

1. *Graficar cada una de las siguientes funciones escalonadas y comparar su gráfica con la de la función parte entera.*

$$y = [x-3], \qquad y = [3-x], \qquad y = [2(x-3)],$$
$$y = [2x-3], \qquad y = [3-2x].$$

2. *Graficar las siguientes funciones definidas a trozos:*

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & si \quad x > 2 \\ -x+1 & si \quad x \leq 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} [x]+1 & si \quad x > 0 \\ |x+3| & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3+1 & si \quad -1 < x \leq 2 \\ 2 & si \quad x > 2 \\ 4(x+1)^2+1 & si \quad x < -1 \end{cases}$$

2.7. Igualdad de funciones

Diremos que dos funciones f y g son iguales si satisfacen simultánemente las dos condiciones siguientes:

1. *Dom* f = *Dom* g.
2. $f(x) = g(x)$, para todo $x \in$ *Dom* f.

Ejemplo 2.26. *Sean* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = x^2$, $x > 0$.

Se tiene que $f \neq g$*, pues aunque las imágenes se obtienen de igual manera en ambas funciones, sus dominios son distintos, Dom* $f = \mathbb{R}$ *mientras que Dom* $g = (0, +\infty)$*. Los gráficos de* f *y* g *nos confirman la diferencia de estas dos funciones, no olvide realizarlos.*

Ejercicio 2.27. *Verifique la igualdad de las funciones* f *y* g *definidas por* $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ *y*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \ si \ x > 0 \\ -1 & , \ si \ x < 0 \end{cases}.$$

2.8. Operaciones entre funciones

En el conjunto de las funciones cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$, podemos definir varias operaciones. La primera que vamos a definir es la suma entre funciones. Si f y g son funciones reales con dominio A y B, respectivamente, entonces definimos la función $f+g$ como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Naturalmente, para que podamos calcular $f(x)$, $g(x)$ y luego sumar estos dos valores, x debe estar en el dominio tanto de f como de g; por tanto, $x \in A \cap B$, es decir, el dominio de $f+g$ es la intersección de los dominios de f y g.

De manera similar se definen $f-g$ y fg.

Para definir $\dfrac{f}{g}$ se hace algo similar, sólo que debemos evitar que $g(x)=0$ para algún x; por tanto:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

siempre que $x \in A \cap (B - \{x \in \mathbb{R} : g(x) = 0\})$.
Así, $Dom\frac{f}{g} = \{x \in A \cap B : g(x) \neq 0\}$.

Otra operación, muy importante, es la composición de funciones. Para entenderla, veamos primero el siguiente ejemplo.
Sean $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Vamos a calcular $g(f(2))$. Es decir, primero debemos calcular $f(2)$ y luego debemos calcular g de este valor. Entonces:

$$g(f(2)) = g\left(2^3+1\right) = g(9) = \sqrt{9} = 3.$$

Otra forma de expresar $g(f(2))$ es $(g \circ f)(2)$ y se lee g compuesto f de 2. Claramente, $(g \circ f)(2) \neq (f \circ g)(2)$.

Con base en lo anterior podemos formar una nueva función, la función $g \circ f$ definida de la siguiente manera:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

cuyo dominio es el conjunto más grande donde esta expresión tenga sentido; es decir, $Dom(g \circ f) = \{x \in Domf : f(x) \in Domg\}$.

Ejemplo 2.28. *Para las funciones $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, halle $f + g$, $g - f$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ g$ y $g \circ f$, con sus respectivos dominios.*

Puesto que $Domf = \mathbb{R}$ y $Domg = [0, +\infty)$ se obtiene que:
$(f + g)(x) = x^3 + 1 + \sqrt{x}$ *y su dominio es* $Domf \cap Domg = [0, +\infty)$.
$(g - f)(x) = \sqrt{x} - x^3 - 1$ *y su dominio es* $[0, +\infty)$.
$(fg)(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x} = x^{7/2} + x^{1/2}$ *y su dominio es* $[0, +\infty)$.
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^3 + 1}{\sqrt{x}}$ *y su dominio es*
$(Domf \cap Domg) - \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} = 0\} = (0, +\infty)$.
$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 + 1 = x^{3/2} + 1$ *y*
$Dom(f \circ g) = \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, +\infty)$.
$(g \circ f)(x) = g(x^3 + 1) = \sqrt{x^3 + 1}$ *y*
$Dom(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty)$.

Observe que, en general $g \circ f \neq f \circ g$; la composición de funciones NO es conmutativa. Sin embargo, verifique que sí es asociativa.

Ejemplo 2.29. *Considere las funciones f y g dadas por:*

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & si \quad x < -2 \\ 2 & si \quad -2 \leq x < 1 \\ x^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x - 1 & si \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x} & si \quad x > 0 \end{cases}.$$

Halle $f \circ g$ y $g \circ f$, con sus respectivos dominios.

Como las funciones f y g están definidas a trozos, para hacer la composición es de gran utilidad graficar primero ambas funciones y ver cómo son las imágenes de cada trozo.

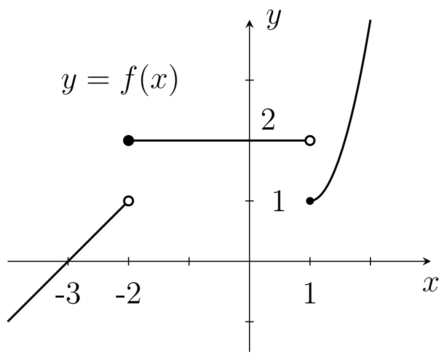


Figura 2.21

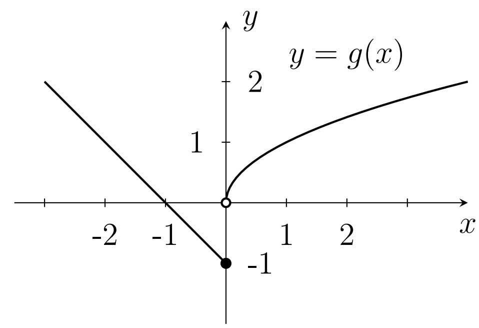


Figura 2.22

Recordemos que para calcular $f \circ g$, *la primera función que se aplica es* g, *como se observa en la primera parte del procedimiento descrito a continuación. Sin embargo, al aplicar* f *debemos tener en cuenta que ella está actuando sobre las imágenes que ha producido* g *y debemos revisar en cuál de los trozos definidos para* f *se encuentra cada una de estas imágenes. Por ejemplo,* $-x-1$ *tiene imágenes mayores o iguales que* -1, *cuando* $x \leq 0$. *De acuerdo a los trozos definidos para* f *tenemos que,* $-x-1$ *se ubica en el trozo* $-2 \leq x < 1$ *(de* f*), cuando* $-2 < x \leq 0$ *y* $-x-1$ *se ubica en el trozo* $x \geq 1$ *(de* f*) para* $x \leq -2$.

Por otra parte, $\sqrt{x}$ *tiene sus imágenes mayores que* 0, *pero para aplicar* f, *unas de estas imágenes quedan en el trozo* $-2 \leq x < 1$ *y otras en el trozo* $x \geq 1$.

Así, $f(\sqrt{x})$ *debe separarse en dos partes, si* $0 < x < 1$ *y si* $x \geq 1$. *Para la primera parte se tiene que* $0 < \sqrt{x} < 1$ *y por tanto* f *actúa por el segundo trozo; para la segunda parte se tiene que* $\sqrt{x} \geq 1$ *y* f *actúa por el tercer trozo. De esta manera se obtiene:*

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= \begin{cases} f(-x-1) & si \quad x \leq 0 \\ f(\sqrt{x}) & si \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-x-1)^2 & si \quad x \leq -2 \\ 2 & si \quad -2 < x \leq 0 \\ 2 & si \quad 0 < x < 1 \\ (\sqrt{x})^2 & si \quad x \geq 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Al organizar los resultados obtenidos tenemos:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} (-x-1)^2 & si \quad x \leq -2 \\ 2 & si \quad -2 < x < 1 \\ x & si \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Para calcular $g \circ f$ *se procede de manera similar y obtenemos:*

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= \begin{cases} g(x+3) & si \quad x < -2 \\ g(2) & si \quad -2 \leq x < 1 \\ g(x^2) & si \quad x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(x+3)-1 & si \quad x \leq -3 \\ \sqrt{x+3} & si \quad -3 < x < -2 \\ \sqrt{2} & si \quad -2 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2} & si \quad x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

y como $\sqrt{x^2} = |x|$ *, al organizar los resultados obtenidos se tiene:*

$$g \circ f(x) = \begin{cases} -x-4 & si \quad x \leq -3 \\ \sqrt{x+3} & si \quad -3 < x < -2 \\ \sqrt{2} & si \quad -2 \leq x < 1 \\ x & si \quad x \geq 1 \end{cases} .$$

Finalmente, se observa que $\mathbb{R}$ *es el dominio de* $f \circ g$ *y de* $g \circ f$.

Ejercicio 2.30.

1. *Si* $f(x) = \dfrac{1+x}{4-x^2}$ *y* $g(x) = \sqrt{9-4x^2}$*, hallar* $f+g$*,* $f.g$*,* $\dfrac{f}{g}$*,* $\dfrac{g}{f}$*,* $f \circ g$*,* $g \circ f$ *y sus respectivos dominios.*

2. *Si* $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ *y* $g(x) = \sqrt{1-x}$ *halle* $f \circ g$ *y su dominio. (Recuerde cómo se definió el dominio de la función compuesta.)*

3. *Considere las funciones definidas por:*

$$j(x) = \begin{cases} -2x-2 & si \quad x \leq -1 \\ x^2-2 & si \quad -1 < x < 1 \\ 2x-2 & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad k(x) = \begin{cases} -5 & si \quad x < -5 \\ x & si \quad -5 \leq x \leq 5 \\ 5 & si \quad x > 5 \end{cases}$$

Determine las funciones $j \circ k$*,* $k \circ j$ *y sus respectivos dominios.*

Con base en las operaciones definidas entre funciones, encontramos otro tipo de funciones, las *funciones algebraicas*. Una función algebraica es aquella cuya expresión se obtiene por adición, sustracción, producto, cociente o raíces de funciones polinómicas.

Son ejemplos de funciones algebraicas:

$$y = 5x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad y = \frac{2x+\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}, \qquad f(x) = \sqrt{x+4}.$$

Note que $f(x) = g \circ h(x)$, donde $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x+4$.

2.9. Propiedades de las funciones

Definición 2.31. *Diremos que una función* f *es par, si para todo* x *en el dominio de* f *se tiene que* $f(-x) = f(x)$.

Un ejemplo de una función par es $f(x) = x^2$, ya que
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ para todo x en $\mathbb{R}$. Grafique f y observe que la condición $f(-x) = f(x)$, para cada x del dominio de f, hace que la gráfica de f sea simétrica respecto al eje y.

Definición 2.32. *Una función f se llama impar, si para todo x en el dominio de f se tiene que $f(-x) = -f(x)$.*

La función $f(x) = x^3$ es impar ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Gráficamente, una función impar es simétrica respecto al origen.

No se equivoque al pensar que dada una función, ésta necesariamente debe ser par o impar.
Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + x^3$ no es par, ya que
$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 \neq f(x)$ y tampoco es impar porque $f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2 \neq -f(x)$.

Usted se preguntará: ¿qué pasa con las funciones cuya gráfica es simétrica respecto al eje x? No se quede sin pensar un poco en este aspecto.

Definición 2.33. *Sea f una función definida en un intervalo I.*

1. *Decimos que f es creciente en I, si para cada $a, b \in I$, con $a < b$, entonces $f(a) < f(b)$.*

2. *Decimos que f es decreciente en I, si para cada $a, b \in I$, con $a < b$, entonces $f(a) > f(b)$.*

Ejemplo 2.34. *Las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x - 3$ son crecientes en todo su dominio, mientras que las funciones $h(x) = 5 - 8x$ y $k(x) = -x^3$ son decrecientes en todo su dominio. Por otra parte, cualquier función constante no es creciente ni decreciente en cualquier intervalo de los números reales. No olvide complementar este ejemplo con las correspondientes gráficas de las funciones mencionadas.*

Definición 2.35. *Una función f es periódica, si existe $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, tal que para todo $x \in Dom f$ se tiene:*

$$f(x + a) = f(x).$$

En este caso, se llama período de f al menor número no negativo a, con la propiedad anterior.

Ejemplo 2.36. *La función constante $h(x) = c$, es una función periódica, de período* 0*. En efecto, se tiene $h(x + a) = h(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Además,* 0 *es el menor número no negativo a que satisface $h(x + a) = h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.37. *Sea f la función definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [2n, 2n+1) \\ 2 & si \quad x \in [2n+1, 2n+2) \end{cases} ,$$

con n entero, cuya gráfica es la Figura 2.23.

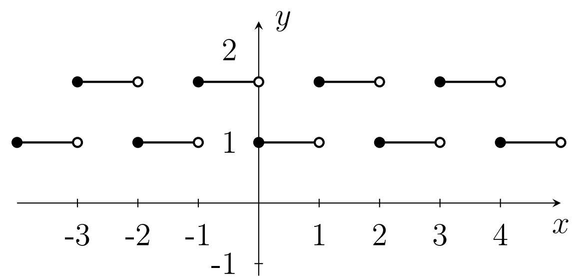


Figura 2.23: Función periódica.

Se tiene que $f(x + 4) = f(x)$, para cada real x, de modo que f es una función periódica; sin embargo el período de f no es 4 *sino* 2*.*

Ejercicio 2.38.

Dar un ejemplo de una función periódica, con período 3*.*

Definición 2.39. *Una función f es inyectiva, si para cada a y b en el dominio de f, con $a \neq b$ se tiene que $f(a) \neq f(b)$. Es decir, puntos distintos del dominio de f, no pueden tener la misma imagen.*

De manera equivalente podemos afirmar que f es *inyectiva*, si $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$.

Ejemplo 2.40.

1. *La función $f(x) = 3x - 1$ es inyectiva. En efecto, si $3a - 1 = 3b - 1$, se tiene $3a = 3b$ y, por tanto, $a = b$.*

2. *La función $g(x) = x^2$ no es inyectiva, puesto que $g(1) = 1 = g(-1)$.*

¿Cómo puede identificarse gráficamente una función inyectiva?

2.10. Inversa de una función

Dada una función real f y la función identidad $I(x) = x$,

$$f(I(x)) = f(x) = I(f(x)), \text{ para cada } x \in Dom f.$$

Es decir, $f \circ I = I \circ f = f$. La función identidad I se comporta como el módulo de la operación de composición entre funciones reales. Surge entonces la pregunta acerca de la existencia de una función g tal que $f \circ g = I = g \circ f$.

Por ejemplo, para la función $f(x) = 3x - 1$, veamos que existe g con esta propiedad.

Sea $g(x) = \frac{1}{3}(x+1)$, observe que es la función que hace las operaciones contrarias a f. Además:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{3}(x+1)\right) = 3\left(\frac{1}{3}(x+1)\right) - 1 = x,$$

y fácilmente puede comprobarse que $g \circ f(x) = x$. En este caso podemos afirmar que f tiene función inversa, y es g.

En general, diremos que una función real f tiene *inversa* si existe una función g tal que $f \circ g = I = g \circ f$.

Pruebe que si la inversa de f existe, ésta es única. A la función inversa de f la notaremos f^{-1}.

Supongamos que g es la inversa de f, es decir, $g \circ f = I = f \circ g$. Tomemos un elemento a en el dominio de f, entonces $g \circ f(a) = g(f(a)) = a$. Si llamamos $f(a) = b$, se tiene $g(f(a)) = g(b) = a$. Así, $(a, b) \in f$ y $(b, a) \in g$; por cada pareja (a, b) en f, se tiene la pareja (b, a) en g. De manera similar, analizando $f \circ g = I$, por cada pareja (m, n) en g, se tiene (n, m) en f. Luego, para buscar la función inversa de f, si ésta existe, debemos intercambiar x con y en las parejas ordenadas de f. Note que esta es la demostración de la equivalencia

$$(a, b) \in f, \quad \text{si y sólo si} \quad (b, a) \in f^{-1}.$$

Ejemplo 2.41. *Hallar la función inversa de* $f(x) = x^2$, *si existe.*

Como $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(2, 4)$ *son algunas parejas de* f, *se tiene que* $(1, -1)$, $(0, 0)$, $(4, 2)$ *son algunas parejas de* f^{-1}, *si ésta existe. Representar gráficamente* f *y ubicar algunos puntos que estarían en* f^{-1}.

Note que $(-1,1)$ *y* $(1,1)$ *están en* f, *de modo que* $(1,-1)$ *y* $(1,1)$ *deberían estar en* f^{-1}, *pero esto no es posible porque en estas condiciones,* 1 *tendría dos imágenes distintas por* f^{-1}, *y* f^{-1} *no sería una función. Luego,* $f(x)=x^2$ *no tiene función inversa.*

Sabemos que $g(x)=\sqrt{x}$ *hace la operación contraria de* f *y*

$$\begin{aligned} f\circ g(x) &= f(g(x))=f\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x=I(x), \ \textit{pero} \\ g\circ f(x) &= g(f(x))=g\left(x^2\right)=\sqrt{x^2}=|x|, \end{aligned}$$

de modo que $g\circ f=I$ *sólo para* $x\geq 0$, *en el dominio de* f.

De lo anotado anteriormente, tenemos que $g(x)=\sqrt{x}$ es la función inversa de $h(x)=x^2$, para $x\geq 0$. Note que h se obtiene a partir de f, pero restringiendo su dominio.

Ejercicio 2.42.

1. *Representar gráficamente la función* $g(x)=\sqrt{x}$ *y su inversa* $h(x)=x^2$, *para* $x\geq 0$, *en un mismo plano. ¿Qué relación observa entre las gráficas de estas dos funciones?*

2. *Representar gráficamente en un mismo plano las funciones* $f(x)=3x-1$ *y su inversa* $g(x)=\frac{1}{3}(x+1)$. *¿Qué relación observa entre las gráficas de estas dos funciones?*

3. *¿Qué relación existe, en general, entre las gráficas de* f *y* f^{-1}*?*

4. *Considerar la función* $t(x)=x^2$, *para* $x\leq 0$, *es decir,* $f(x)=x^2$ *con otra restricción de dominio. Hallar* t^{-1} *y representar* t *y* t^{-1} *gráficamente.*

5. *La función* $k(x)=\frac{1}{3}x+1$ *también involucra las operaciones contrarias de* $f(x)=3x-1$, *así como* $g(x)=\frac{1}{3}(x+1)$, *pero en otro orden. ¿Es* k *una función inversa de* f*? Justificar.*

6. *Demostrar que si* f *no es inyectiva, entonces* f *no tiene función inversa. (Sugerencia: suponer que* f^{-1} *existe y trabajar con las parejas ordenadas).*

Nota. Si usted realizó cuidadosamente los ejercicios anteriores observó que:

1. La función $f(x) = x^2$ no tiene función inversa, porque no es inyectiva.

2. Los gráficos de f y f^{-1} son el reflejo uno del otro, a través de la recta $y = x$.

Entonces, si f es una función real inyectiva, la función que se obtiene intercambiando las componentes en las parejas ordenadas de f es la función inversa de $f : f^{-1}$, para la cual tenemos:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f(x) &= x, \text{ para cada } x \in Domf \text{ y } Domf = Imf^{-1}. \\ f \circ f^{-1}(x) &= x, \text{ para cada } x \in Domf^{-1} \text{ y } Domf^{-1} = Imf. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$f(x) = y, \text{ si y sólo si } x = f^{-1}(y).$$

Ejemplo 2.43. *La función inversa de $f(x) = x^3 + 1$ es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, puesto que*

$$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x) &= f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x, \textit{ para cada real } x \textit{ y} \\ f^{-1} \circ f(x) &= f^{-1}(x^3+1) = (\sqrt[3]{(x^3+1)-1}) = \sqrt[3]{x^3} = x, \textit{ para cada real } x. \end{aligned}$$

En el siguiente gráfico representamos a f y a f^{-1} en el mismo plano, para apreciar la relación que hay entre ellas, con respecto a la recta $y = x$.

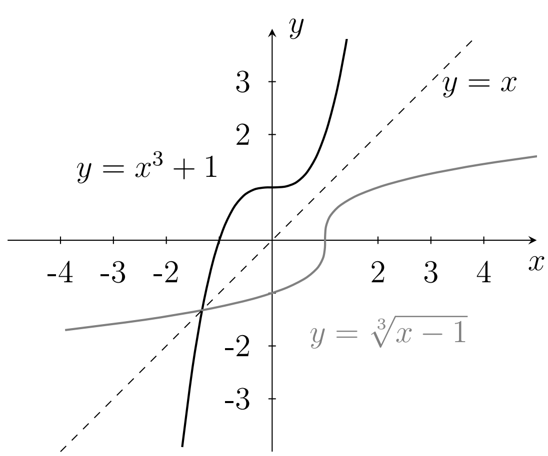


Figura 2.24: Relación entre f y f^{-1}.

Ejemplo 2.44. *Encontrar f^{-1} a partir de $f(x) = x^3 + 1$.*

1. *Debemos verificar que f es inyectiva. En efecto:*

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ a^3 + 1 &= b^3 + 1 \\ a^3 &= b^3 \\ a &= b. \end{aligned}$$

2. *En la ecuación $y = x^3 + 1$ sabemos que $y = f(x)$, entonces $x = f^{-1}(y)$, por ello despejamos a x en términos de y, si es posible:*

$$\begin{aligned} y &= x^3 + 1 \\ y - 1 &= x^3 \\ \sqrt[3]{y-1} &= x. \end{aligned}$$

3. *Finalmente tenemos que $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$, lo que usualmente se presenta como $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, es decir, debemos intercambiar x y y al haber despejado x.*

Ejercicio 2.45. *En cada caso, hallar f^{-1} si existe, así como los dominios de f y f^{-1}.*

1. $f(x) = \sqrt{-1-x}$.
2. $f(x) = \dfrac{1+3x}{5-2x}$.
3. $f(x) = |x|$.
4. $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$, $x > 0$.

2.11. Funciones trigonométricas

2.11.1. Definiciones

Antes de definir las funciones trigonométricas, vamos a aprender a medir ángulos en el sistema de radianes. Para hacer esto, recordemos que el perímetro de una circunferencia es $p = 2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia. En particular, si $r = 1$, el perímetro es 2π. Si tomamos solamente un cuarto de la circunferencia, la que se encuentra en el primer cuadrante, la longitud del arco de esta parte de circunferencia será $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$; al ángulo correspondiente a este arco lo llamaremos $\frac{\pi}{2}$. Si tomamos la circunferencia y la dividimos en 6 partes iguales, la longitud de arco será de $\frac{\pi}{3}$ y por tanto el ángulo correspondiente es $\frac{\pi}{3}$.

En general, el ángulo $\theta \geq 0$ medido desde el eje x en sentido contrario de las manecillas del reloj, es el ángulo que corresponde a la longitud de arco θ, en una circunferencia de radio 1. Si $\theta < 0$, el ángulo se mide desde el eje x en el sentido de las manecillas del reloj y es el ángulo que corresponde a la longitud de arco $|\theta|$, en la circunferencia de radio 1.

Por ejemplo, $\theta = \frac{\pi}{6}$ radianes corresponde a 30^o en el sistema sexagesimal.

Supongamos ahora que trazamos el segmento que va desde el origen hasta la circunferencia de radio 1 formando un ángulo de θ radianes y hallamos las coordenadas del punto de intersección entre la circunferencia y el segmento, como se muestra en la Figura 2.25.

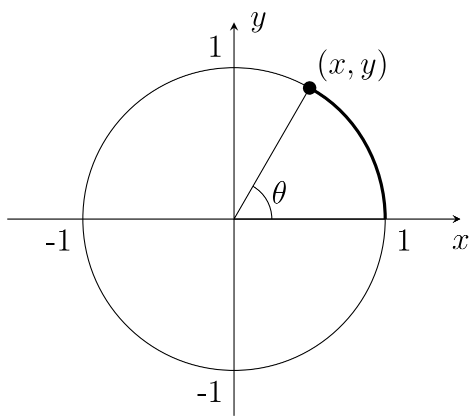


Figura 2.25: Circunferencia unitaria.

Definimos las siguientes funciones, las cuales llamaremos funciones trigonométricas como sigue:

$$sen\ \theta = y \quad \cos\theta = x \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad \sec\theta = \frac{1}{x} \quad \csc\theta = \frac{1}{y}; \quad (2.7)$$

siempre que estas expresiones tengan sentido. Conociendo $sen\ \theta$ y $\cos\theta$ para cada ángulo θ, es posible determinar las demás funciones trigonométricas, ya que se tiene:

$$\tan\theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{sen\ \theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{sen\ \theta}\ . \tag{2.8}$$

Note que $x^2 + y^2 = 1$, puesto que (x, y) es un punto de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. De esta manera obtenemos que:

$$sen^2\ \theta + \cos^2\theta = 1, \tag{2.9}$$

para cualquier ángulo θ; esta igualdad se conoce como la *identidad trigonométrica fundamental*.

Otra manera de definir las funciones trigonométricas para un ángulo agudo θ es con base en las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, el cual tiene a θ como uno de sus ángulos. Para estudiar esta defición alternativa, veamos la Figura 2.26.

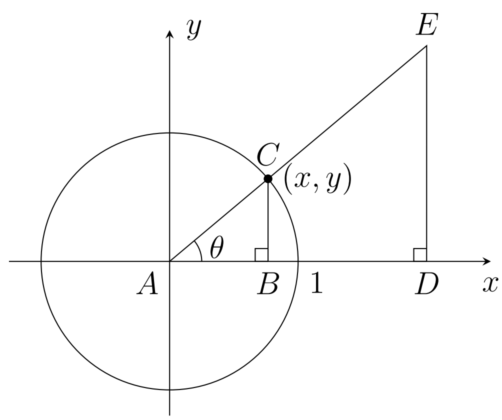


Figura 2.26

Por (2.7), $sen\ \theta = y$, y $\cos\theta = x$. Como $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$ son semejantes, entonces tenemos:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{y}{1} = y = sen\ \theta;$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{x}{1} = x = \cos\theta.$$

Por tanto, observando a θ como ángulo del $\triangle ADE$, podemos dar la siguiente definición:

$$\begin{aligned} sen\ \theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \\ \cos\theta &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}. \end{aligned}$$

Estas definiciones equivalen a las dadas en (2.7), en el caso particular de ángulos agudos. De manera similar, justifique que las siguientes definiciones también equivalen a las dadas en (2.7):

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \\ \cot\theta &= \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \\ \sec\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \\ \csc\theta &= \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}. \end{aligned}$$

Ahora queremos encontrar los valores de las funciones trigonométricas para algunos ángulos particulares; para ello, construiremos un triángulo con lados conocidos y que tenga un ángulo específico.

Consideremos un triángulo equilatero de lado 1 (todos los ángulos interiores miden 60^o ó $\dfrac{\pi}{3}$ radianes). Hallamos la longitud de la altura utilizando el teorema de Pitágoras, y observamos la Figura 2.27.
Con base en la construcción podemos determinar que:

$$sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\cot\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2, \qquad \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

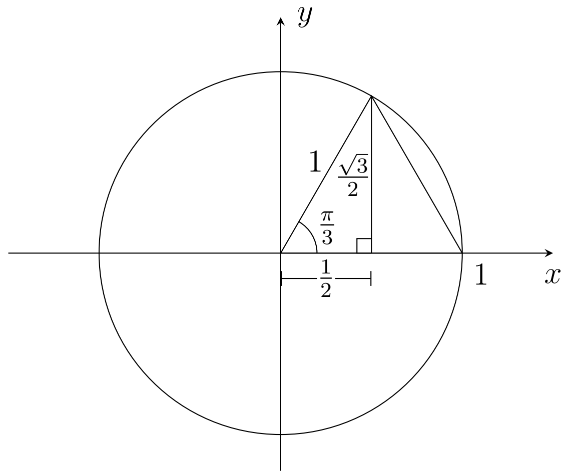


Figura 2.27: Caso $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Utilizando los anteriores resultados, calcule los valores de las funciones trigonométricas para $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$. Es cuestión de observar el cuadrante en el que se encuentra cada ángulo.

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos como $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y sus múltiplos, observe las figuras 2.28 y 2.29. Recuerde que $\frac{\pi}{4}$ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo isósceles; como la hipotenusa es 1, se obtiene que cada cateto mide $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

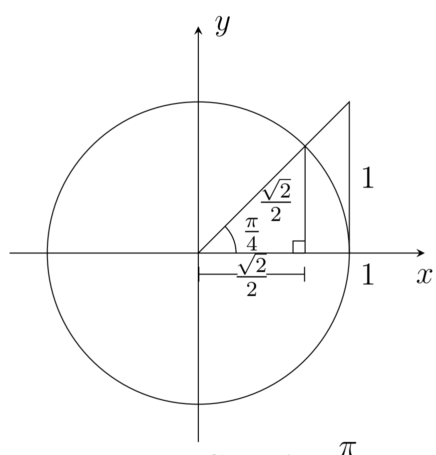


Figura 2.28: Caso $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Puesto que $\frac{\pi}{6}$ es la mitad de $\frac{\pi}{3}$, en este caso consideramos la mitad del triángulo equilátero que se mostró para $\frac{\pi}{3}$; este triángulo tiene hipotenusa 1 y catetos de longitud $\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

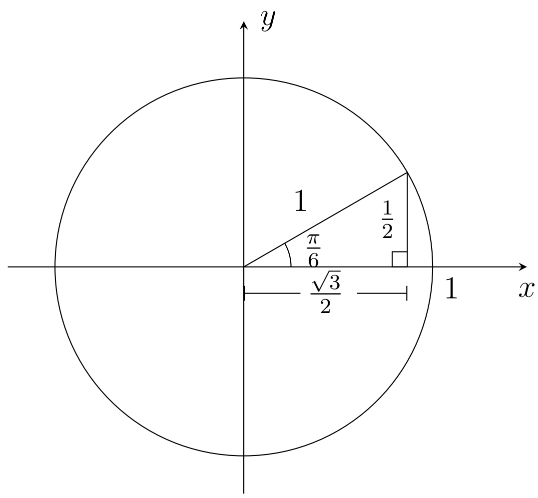


Figura 2.29: Caso $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Los resultados obtenidos para estos ángulos se pueden resumir en el Cuadro 2.1.

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$sen\ \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Cuadro 2.1

Recuerde que sólo con esta información es suficiente para conocer las seis funciones trigonométricas de estos ángulos y de sus múltiplos.

Al hallar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos como $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π, basta observar la ubicación del punto de corte entre el segmento y la circunferencia. Por ejemplo, para $\frac{\pi}{2}$ el punto de corte entre el segmento y la circunferencia es $(0,1)$, de modo que $sen\frac{\pi}{2} = 1$ y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

De acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas y utilizando los cálculos anteriores de los valores de estas funciones para algunos ángulos, podemos representar, en el plano cartesiano, las gráficas de las funciones trigonométricas. A continuación presentamos las gráficas de algunas funciones trigonométricas (ver figuras 2.30, 2.31, 2.32 y 2.33).

$f(x) = senx$, $Domf = \mathbb{R}$, $Imf = [-1, 1]$.

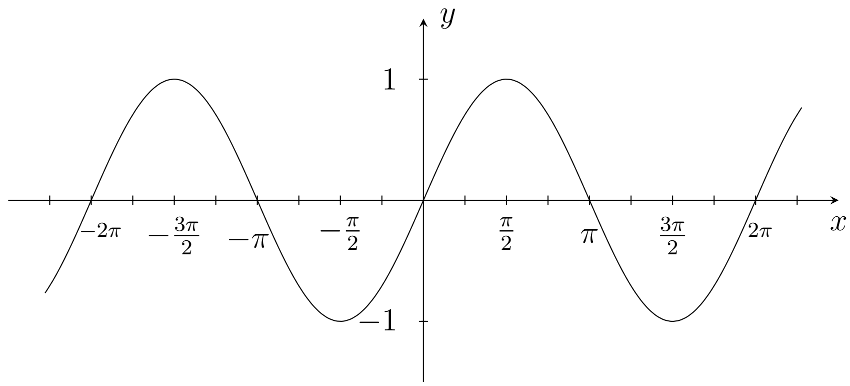


Figura 2.30: $f(x) = \operatorname{sen} x$.

$g(x) = \cos x$, $Domg = \mathbb{R}$, $Img = [-1, 1]$.

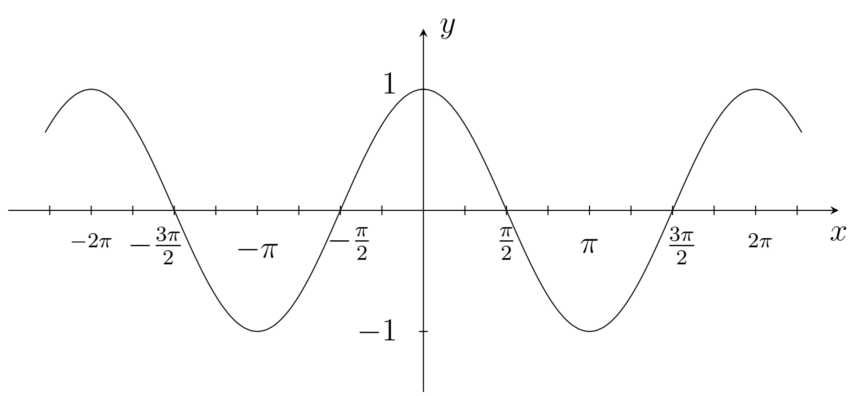


Figura 2.31: $g(x) = \cos x$.

$$h(x) = \tan x,\ Domh = \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\},\ Imh = \mathbb{R}.$$

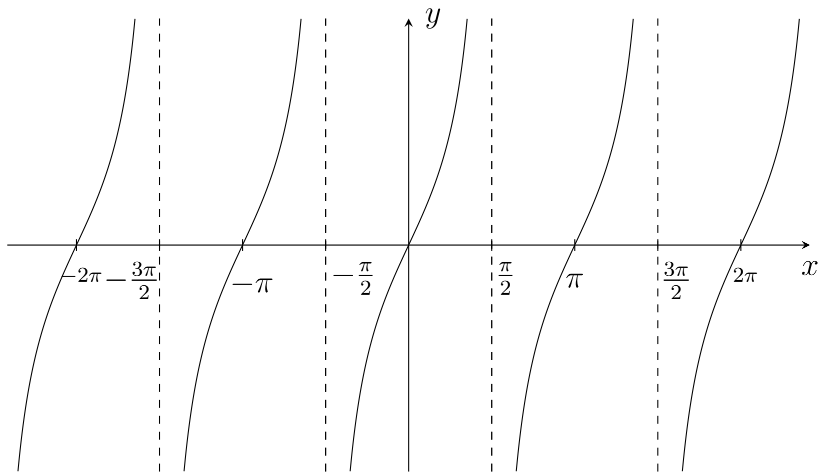


Figura 2.32: $h(x) = \tan x$.

$$j(x) = \sec(x),\ Domj = \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\},\ Imj = \mathbb{R} - (-1, 1).$$

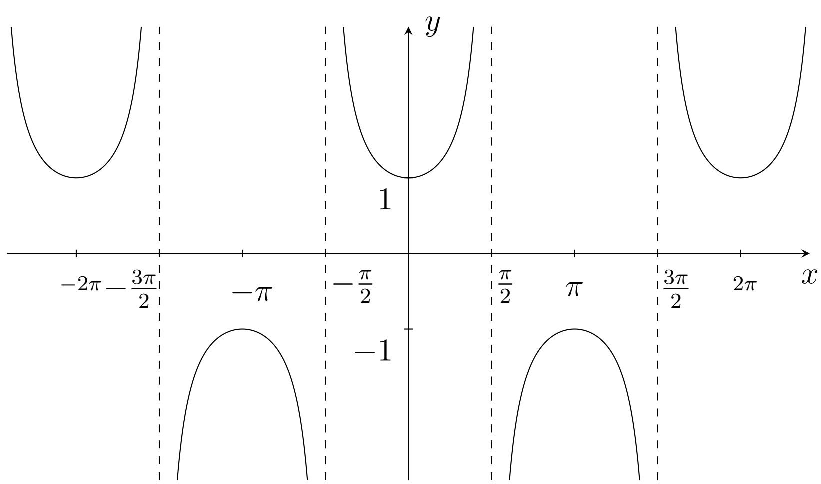


Figura 2.33: $j(x) = \sec x$.

Ejercicio 2.46.

1. *Graficar las funciones* $y = \cot x$, *y* $y = \csc x$. *Determinar su dominio, imagen, dónde son positivas, dónde son negativas. (Considerar los ángulos en radianes.)*

   No es difícil ver que cada una de las funciones trigonométricas es periódica: seno, coseno, secante y cosecante son de período 2π, *mientras que tangente y cotangente son de período* π.

2. *Ubicar un ángulo* θ *en el círculo de radio* 1, *así como* $-\theta$, *su opuesto*; *determinar seno y coseno para cada uno de estos ángulos y establecer una relación entre ellos.*

   Notar que seno es una función impar y coseno es una función par. A partir de esto, determinar si cada una de las demás funciones trigonométricas es par o impar.

3. *Graficar cada una de las siguientes funciones, hallar su dominio, imagen, período y determinar si es par o impar.*

$$
\begin{array}{lll}
y = \cos(2x), & y = \cos(\tfrac{1}{2}x), & y = 2\cos(x), \\
y = \tfrac{1}{2}\cos(x), & y = -sen(x+\pi), & y = 1 + sen(x), \\
y = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right), & y = \left|3\cos\left(2x+\pi\right)\right|. &
\end{array}
$$

2.11.2. Identidades

Una *identidad trigonométrica* es una igualdad que involucra funciones trigono-métricas y que es válida para todos los ángulos donde estén definidas esas funciones. En la sección anterior se mostró la identidad trigonométrica fundamental:

$$\boxed{sen^2\,\theta + \cos^2\theta = 1.}$$

Con base en esta identidad podemos obtener:

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta,}$$

dividiendo ambos lados de la expresión por $\cos^2\theta$, siempre que esto tenga sentido. De manera similar obtenemos

$$\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta,}$$

al dividir por $sen^2\ \theta$. Estas tres identidades se conocen como *identidades pitagóricas*.

En el estudio de las funciones trigonométricas se vio que estas pueden obtenerse a partir de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. El *teorema del coseno*, que veremos a continuación, permite establecer una relación entre el coseno de un ángulo y las longitudes de los tres lados de un triángulo arbitrario.

Teorema 2.47. *(Teorema del coseno)*

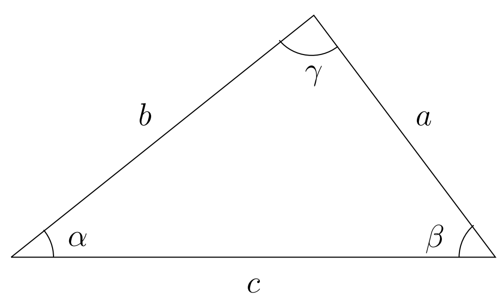


Figura 2.34

Para un triángulo arbitrario de lados a, b, c y ángulos α, β, γ, dispuestos como se muestra en la Figura 2.32, tenemos:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

O de manera similar para los otros ángulos:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Prueba. Para la demostración usaremos la Figura 2.35.

Por $\triangle ADC$, se tiene: $\cos\alpha = \dfrac{n}{b}$, entonces $n = b\cos\alpha$.

$$sen\alpha = \frac{h}{b}, \text{ entonces } h = bsen\alpha.$$

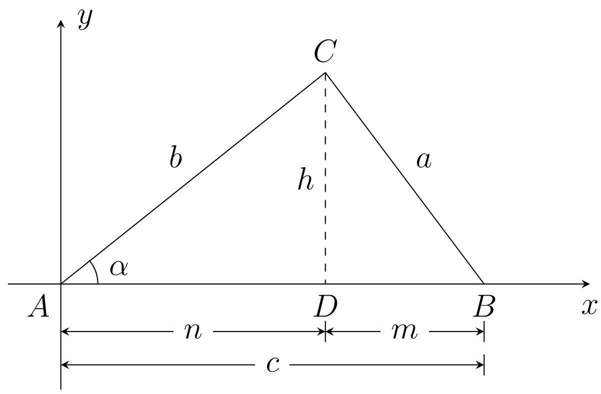


Figura 2.35

Por $\triangle DBC$:

$$\begin{aligned}
a^2 &= h^2 + m^2 \\
&= (bsen\alpha)^2 + (c-n)^2 \\
&= b^2sen^2\alpha + (c - b\cos\alpha)^2 \\
&= b^2sen^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha \\
&= b^2\left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.
\end{aligned}$$

□

Veamos ahora otras identidades.

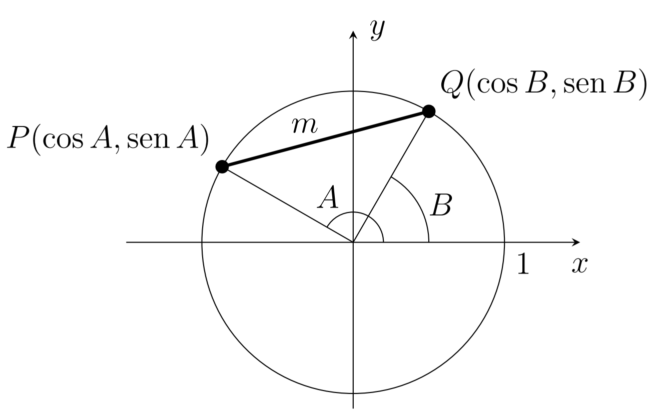


Figura 2.36

Llamemos $\theta = A - B$, de modo que $\cos\theta = \cos(A-B)$.
Por el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} m^2 &= 1^2 + 1^2 - 2\cos\theta \\ &= 2 - 2\cos\theta. \qquad\qquad (\text{ I }) \end{aligned}$$

Hallando la distancia entre los puntos P y Q:

$$\begin{aligned} m^2 &= (\cos A - \cos B)^2 + (senA - senB)^2 \\ &= \left(\cos^2 A + sen^2 A\right) - 2\cos A\cos B + \left(\cos^2 B + sen^2 B\right) - 2\ sen\ A\ sen\ B \\ &= 2 - 2\left(\cos A\cos B + sen\ A\ sen\ B\right). \qquad\qquad (\text{ II }) \end{aligned}$$

Así, de (I) y (II) obtenemos:

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos A\cos B + sen\ A\ sen\ B.} \tag{2.10}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos(A-(-B)) \\ &= \cos A\cos(-B) + sen\ A\ sen\,(-B) \\ &= \cos A\cos B - sen\ A\ sen\ B. \qquad (\text{¿Por qué?}) \end{aligned}$$

Y obtenemos:

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos A\cos B - sen\ A\ sen\ B.} \tag{2.11}$$

Si consideramos que $A = \dfrac{\pi}{2}$ en (2.10) obtenemos que:

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = sen\ B.} \tag{2.12}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned} sen(A-B) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (A-B)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + B\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cos B - sen\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\ sen\ B \\ &= sen\ A\ \cos B - \cos A\ sen\ B, \end{aligned}$$

puesto que

$$\begin{aligned} sen\left(\frac{\pi}{2}-A\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\right) \quad \text{por (2.12)} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+A\right) \\ &= \cos A. \end{aligned}$$

Así, para seno obtenemos:

$$\boxed{sen\ (A-B) = sen\ A\cos B - \cos A\ senB.}$$

De manera similar,

$$\boxed{sen\ (A+B) = sen\ A\cos B + \cos A\ senB.} \tag{2.13}$$

De esta última identidad, haciendo $A = B$, obtenemos el seno de un ángulo doble:

$$\boxed{sen\ 2A = 2\ sen\ A\cos A,}$$

y de la identidad (2.11) obtenemos el coseno del ángulo doble:

$$\boxed{\cos 2A = \cos^2 A - sen^2 A.} \tag{2.14}$$

Si en la identidad anterior remplazamos $sen^2 A$, usando la identidad fundamental, tenemos:

$$\begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \left(1-\cos^2 A\right) \\ \cos 2A &= 2\cos^2 A - 1 \\ 1+\cos 2A &= 2\cos^2 A \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}} \tag{2.15}$$

y remplazando $\cos^2 A$ en la identidad (2.14), tenemos:

$$\begin{aligned} \cos 2A &= \left(1-sen^2 A\right) - sen^2 A \\ \cos 2A &= 1-2sen^2 A \\ 2sen^2 A &= 1-\cos 2A \end{aligned}$$

$$\boxed{sen^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}} \tag{2.16}$$

De las identidades (2.15) y (2.16) obtenemos las identidades para el ángulo medio:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1+\cos\theta}{2} \\ \hline sen^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\cos\theta}{2} \end{array}}\,.$$

Ahora, usando las identidades (2.11) y (2.13) encontramos una expresión para $\tan(A+B)$. Justifique cómo se hizo.

$$\boxed{\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B}}\,.$$

Teorema 2.48. *(Teorema del seno)*

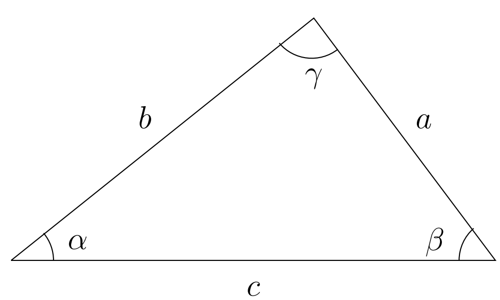


Figura 2.37

Para un triángulo arbitrario de lados a, b, c y ángulos α, β, γ, dispuestos como se muestra en la Figura 2.37, tenemos:

$$\boxed{\frac{sen\ \alpha}{a} = \frac{sen\ \beta}{b} = \frac{sen\ \gamma}{c}.}$$

Prueba. Usando el mismo gráfico empleado en la demostración del teorema del coseno, intente escribir esta prueba. $\square$

2.11.3. Inversas de las funciones trigonométricas

Ninguna de las funciones trigonométricas es inyectiva, puesto que, por ejemplo, a θ y a $\theta + 2\pi$ vistos en el círculo de radio 1, les corresponden los mismos valores por cada una de las funciones trigonométricas, ya que se ubican en el mismo punto. Sin embargo, a cada una de las funciones puede restringírseles el dominio, de modo que la función restringida resulte inyectiva y se obtenga toda la imagen de la función original; a cada una de estas restricciones le corresponde una función inversa.

Por ejemplo, a la función $y = senx$, con dominio $\mathbb{R}$ e imagen $[-1, 1]$ se le restringe su dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, en el cual es inyectiva y su imagen sigue siendo $[-1, 1]$. Así, la función $y = sen^{-1}x$ ó $y = arcsen\ x$ tiene dominio $[-1, 1]$, imagen $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y se representa gráficamente como la Figura 2.38.

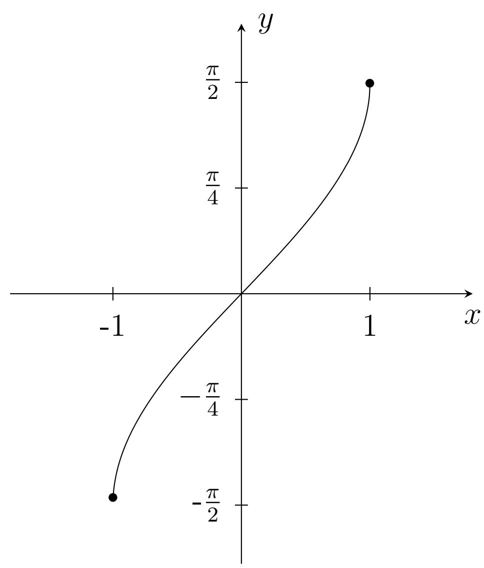


Figura 2.38: $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$.

En el Cuadro 2.2 damos las restricciones de dominio que consideraremos en este libro para las demás funciones trigonométricas. Algunos libros hacen una restricción diferente para secante y cosecante, de modo que es necesario prestar atención a la restricción establecida en el texto que se esté usando.

Función	**Restricción**
$\cos x$	$[0, \pi]$
$tan\ x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$cot\ x$	$(0, \pi)$
$sec\ x$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\csc x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Cuadro 2.2

A continuación encontramos las gráficas de $y = \cos^{-1} x$ y $y = \tan^{-1} x$. Usted debe graficar cada una de las funciones restringidas que faltan y su correspondiente inversa.

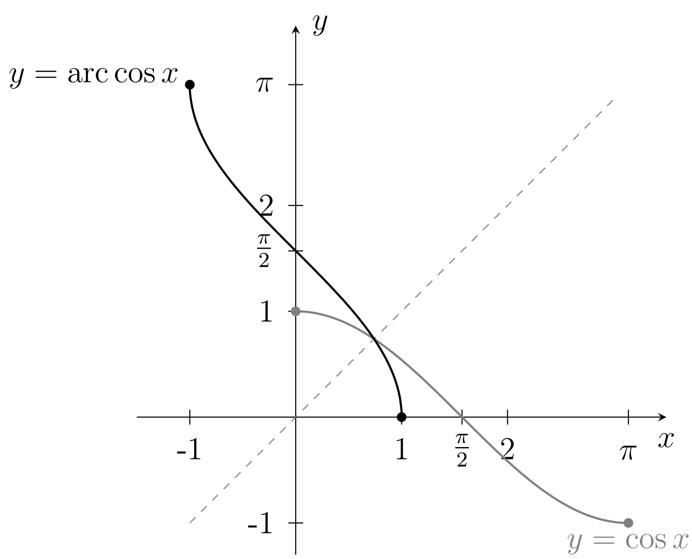


Figura 2.39: $y = \cos^{-1} x$.

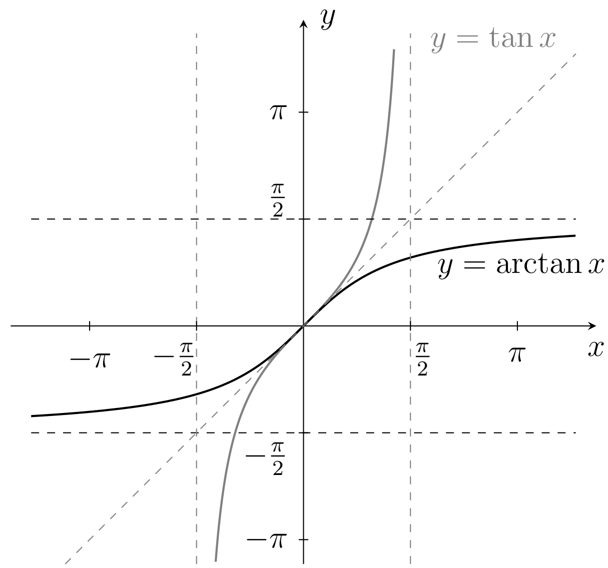


Figura 2.40: $y = \tan^{-1} x$.

2.12. Funciones exponencial y logarítmica

Las funciones exponenciales y logarítmicas son de gran importancia porque con ellas es posible modelar matemáticamente algunos problemas de la naturaleza y de la sociedad, como por ejemplo crecimiento de poblaciones, interés compuesto y decaimiento radiactivo, entre otros.

2.12.1. Función exponencial

En la expresión $y = a^x$ intervienen tres números reales, a al que llamamos base, x el exponente y y la potencia. En primer lugar vamos a recordar algunas propiedades de la potenciación.

Consideremos a, b, m, n números reales, con a y b no nulos.

1. $a^0 = 1$.
2. $a^1 = a$.
3. $a^m a^n = a^{m+n}$.
4. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, en particular $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$.
5. $(a^m)^n = a^{mn}$.
6. $(ab)^m = a^m b^m$.
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

Vamos a graficar la función $m(x) = 2^x$.

$m(0) = 2^0 = 1$. Por la primera propiedad de la potenciación.
$m(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $m(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.
$m(1) = 2^1 = 2$, $m(2) = 2^2 = 4$.
$m\left(\frac{-1}{2}\right) = 2^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
$m\left(\frac{2}{3}\right) = 2^{2/3} = \left(2^2\right)^{1/3} = \sqrt[3]{2^2}$.
En una tabla de valores podemos resumir los resultados encontrados.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	1	2
$m(x)$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	1	$\sqrt[3]{4} \approx 1{,}58$	2	4

Para considerar los valores irracionales de x, podemos pensar que simplemente se "rellenan"los huecos que quedan en la gráfica al considerar los valores racionales de x. Una justificación formal de este hecho requiere conceptos que en este momento están fuera del alcance del curso.

La gráfica de $y = 2^x$ se presenta a continuación.

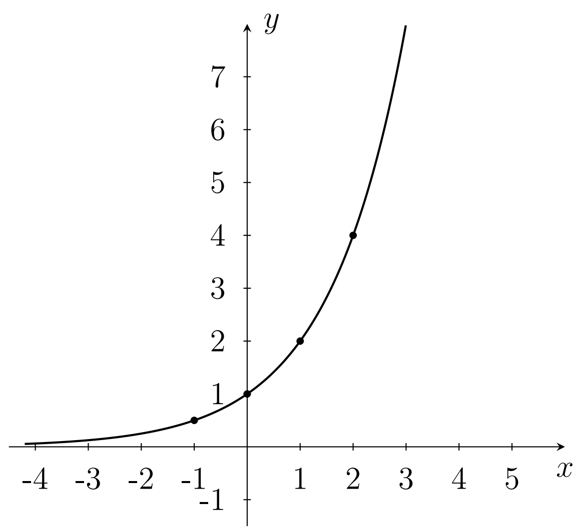


Figura 2.41

Ejercicio 2.49. *Realice la gráfica de la función* $p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, *halle su dominio e imagen y mencione sus principales características. ¿Qué relación,* *semejanzas y diferencias, encuentra entre esta función y la función m anterior?*

Definición 2.50. *Se llama función exponencial a una función de la forma* $f(x) = a^x$, *donde la constante a es un número real positivo y diferente de* 1.

No se quede sin analizar ¿por qué en la definición de función exponencial no se considera que a pueda ser 1 ó un número negativo?

En general, todas las funciones exponenciales $y = a^x$ tienen dominio $\mathbb{R}$ e imagen $(0, +\infty)$, son inyectivas y contienen al punto $(0, 1)$; sin embargo, si $0 < a < 1$ la función es decreciente y si $a > 1$ la función es creciente, como se puede apreciar en las siguientes gráficas.

$$y = a^x$$

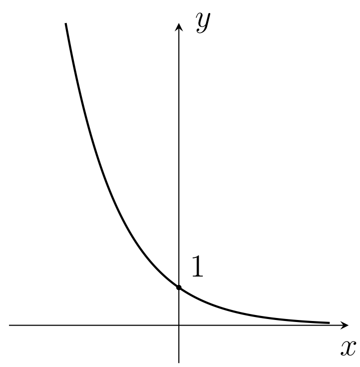


Figura 2.42: Si $0 < a < 1$

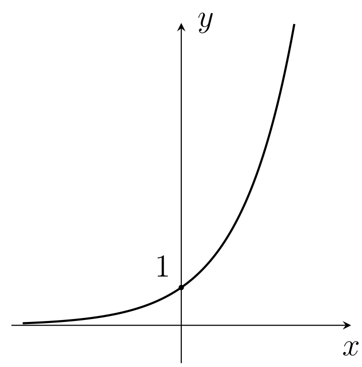


Figura 2.43: Si $a > 1$

La función exponencial con base el número irracional $e \approx 2,71$ es una función destacada dentro de las funciones exponenciales, como se verá más adelante, al estudiar la derivada de una función.

Ejercicio 2.51. *Para cada una de las siguientes funciones realizar su gráfica y determinar su dominio e imagen.*

1. $f(x) = 2^{-x}$	*2.* $g(x) = 2^{\|x\|}$
3. $h(x) = -2^x$	*4.* $j(x) = 3 - 2^x$
5. $k(x) = 2^x - 3$	*6.* $l(x) = 2^{x-3}$
7. $n(x) = \|2^x - 3\|$	*8.* $q(x) = 4 + 2^{x+1}$

2.12.2. Función logarítmica

Puesto que cada función exponencial es inyectiva, tiene inversa y su inversa se llama *función logarítmica,*es decir, para cada $a > 0$, $a \neq 1$ se tiene que

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Así, cada función logarítmica $y = \log_a x$ tiene dominio $(0, +\infty)$, imagen $\mathbb{R}$, es inyectiva, contiene al punto $(1, 0)$ y su gráfica se obtiene reflejando la gráfica de $y = a^x$ con respecto a la recta $y = x$.

Si $0 < a < 1$ la función logarítmica es decreciente y si $a > 1$ la función logarítmica $y = \log_a x$ es creciente, como se puede apreciar en las siguientes gráficas.

$$y = \log_a x$$

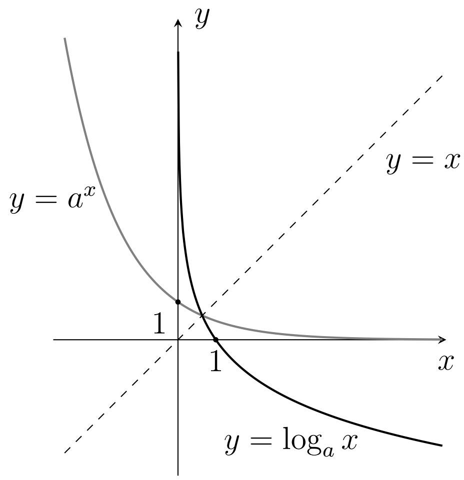


Figura 2.44: $0 < a < 1$

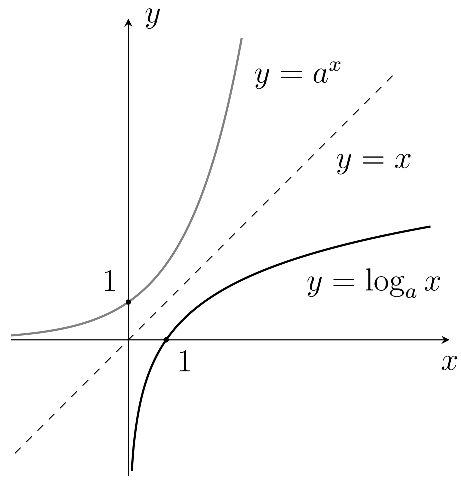


Figura 2.45: $a > 1$

Ya que $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas entre sí, se obtienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \log_a (a^x) &= x, \text{ para toda } x \in \mathbb{R} \\ a^{\log_a x} &= x, \text{ para toda } x > 0. \end{aligned}$$

En el caso del logaritmo en base 10 es usual notar el logaritmo sin mencionar la base, $\log_{10} x = \log x$ y en el caso del logaritmo de base e, llamado *logaritmo natural* se emplea la siguiente notación: $\log_e x = \ln x$.

Como consecuencia de las propiedades que se cumplen en el caso de los exponentes, obtenemos propiedades correspondientes para los logaritmos. Consideremos $a, b, c, x > 0$, $z \in \mathbb{R}$.

1. $\log_a 1 = 0$.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$.
4. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.
5. $\log_a (x^z) = z \log_a x$.
6. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. (Útil para cambiar de base los logaritmos).

Veamos por ejemplo como se demuestra la tercera propiedad.

Prueba. Llamemos $x = \log_a b$, $y = \log_a c$ y $z = \log_a (bc)$, de modo que $a^x = b$, $a^y = c$ y $a^z = bc$. Así,

$$\begin{aligned} a^z &= bc \\ &= a^x a^y \\ &= a^{x+y} \end{aligned}$$

y como la función exponencial es inyectiva se obtiene que $z = x + y$, es decir, $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$. $\square$

Es muy importante que usted haga las justificaciones de las demás propiedades.

Ejercicio 2.52.

1. *En cada caso exprese como un solo logaritmo.*

   a) $6 \ln x + \frac{1}{2} \ln y$ *b)* $3 \log_2 (x-1) - \log_2 (3x-2)$
   c) $\log_2 x - 5 \log_2 z$ *d)* $\ln (6x-1) + 2 \ln x - \ln (x+1)$

2. *Resolver las siguientes ecuaciones.*

   a) $e^{2x-3} = 10$ *b)* $\log_5(6x-7) = 2$

   c) $2^{(\log_2 3+\log_2 5)} = 5x$ *d)* $\ln e^{\sqrt{2}} = x - 3$

   d) $\ln x + \ln(x-1) = 1$

3. *Represente gráficamente cada función y halle su dominio e imagen.*

   a) $f(x) = \log_3 x$ *b)* $g(x) = -\log_3 x$

   c) $h(x) = \log_3(-x)$ *d)* $j(x) = \log_3 |x|$

   e) $k(x) = |\log_3 x|$ *f)* $l(x) = 2 + \log_3 x$

   g) $m(x) = \log_3(x+2)$ *h)* $n(x) = \log_3(x-4)$

4. *Halle la inversa de la función* $f(x) = 2 - \log_3(x+1)$. *Para* f *y* f^{-1} *halle dominio, imagen y represéntelas gráficamente.*

2.12.3. Algunas aplicaciones

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen aplicación en química, física, biología e ingeniería ya que permiten modelar muchas situaciones en que crecen o decrecen las magnitudes en la naturaleza. Por ejemplo, crecimiento de poblaciones, desintegración radiactiva, leyes de enfriamiento, interés compuesto, etc.

1. Una población de bacterias se triplica cada hora. Si inicialmente hay 10 bacterias, ¿cuántas bacterias hay al cabo de 6 horas?, ¿cómo se expresa el número de bacterias existentes a las t horas? y ¿en cuántas horas se tendrán 50,000 bacterias?

   Vamos a notar $b(t)$ a la cantidad de bacterias al cabo de t horas, de modo que se tiene:

   $b(0) = 10$

   $b(1) = 30 = 10{,}3$

   $b(2) = 90 = 3(30) = 3{,}3{,}10$

   $b(3) = 270 = 3(90) = 3{,}3{,}3{,}10$

   $b(4) = 810 = 3(270) = 3{,}3{,}3{,}3{,}10$

   Si continuamos este procedimiento se observa que $b(t) = 10{,}3^t$ y por lo tanto, al cabo de 6 horas habrá $b(6) = 10{,}3^6 = 7{,}290$ bacterias.

Para responder a la última pregunta debemos resolver la ecuación $10{,}3^t = 50{,}000$, es decir, $3^t = 5{,}000$ de donde se obtiene que $t = \log_3 5{,}000 = \dfrac{\ln 5000}{\ln 3} \approx 7,75$. Así, después de $7,76$ horas se tendrán 50,000 bacterias.

2. Suponga que usted deposita en un banco \$500,000 y éste le pagará un interés del $1,5\,\%$ mensual por el dinero en su cuenta. Al cabo de un mes, el dinero que usted tendrá está dado por:

$$500000 + 500000 * \frac{1{,}5}{100} = 500000\left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right),$$

al cabo de dos meses, tendrá:

$$\begin{aligned} & 500000\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right) + 500000\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right) * \frac{1{,}5}{100} \\ = {} & 500000\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right) \\ = {} & 500000\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^2. \end{aligned}$$

Si continuamos con este procedimiento, al cabo de t meses, el capital en nuestra cuenta estará dado por:

$$C = 500000\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^t.$$

A este tipo de interés se le llama *interés compuesto*. En general, si se deposita en un banco un capital inicial P a un interés compuesto i por un tiempo t, el capital final C estará dado por:

$$C = P(1+i)^t.$$

3. Tengo para invertir 10,000 dólares en una entidad bancaria extranjera a un interés compuesto del $1\,\%$. Si al final quiero obtener al menos 15,000 dólares, ¿cuál es el mínimo tiempo que debo mantener el dinero en el banco para obtener este capital final?

Usando la fórmula de interés compuesto tenemos:

$$15000 = 10000\left(1+\frac{1}{100}\right)^t,$$

por tanto,

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^t = \frac{3}{2},$$

despejando t,

$$\begin{aligned} t\log\left(1+\frac{1}{100}\right) &= \log\frac{3}{2} \\ t &= \frac{\log\frac{3}{2}}{\log\left(1+\frac{1}{100}\right)} \\ t &\approx 40{,}749. \end{aligned}$$

En conclusión, debo mantener el dinero en el banco por al menos 41 meses.

Ejercicio 2.53. *Resolver los siguientes problemas:*

1. En la fiesta de celebración de sus 15 años, María Camila recibió por lluvia de sobres 2 millones de pesos, con la condición de todos los aportantes que los debía invertir en un C.D.T que le pagaría el 2 % interés compuesto y que solo podría retirar el dinero al cumplir 18 años. ¿Cuánto dinero recibió María Camila al cumplir 18 años?¿Cuál debería haber sido el interés para recibir 5 millones al cumplir los 18 años? Si el interés sigue siendo al 2 % mensual, ¿cuánto tiempo debería dejar el C.D.T. para recibir los 5 millones?

2. Se administran 100 miligramos de cierto medicamento a un paciente. La cantidad de miligramos restantes en el torrente sanguíneo del paciente disminuye a la tercera parte cada 5 horas. ¿Cuántos miligramos de medicamento quedan en el torrente sanguíneo del paciente al cabo de 3 horas? ¿Después de cuánto tiempo quedará 1 miligramo de medicamento en el torrente sanguíneo del paciente?

CAPÍTULO 3

Límites

3.1. Introducción

Consideremos las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$.
Grafiquemos las anteriores funciones y hallemos las imágenes de algunos valores de x cercanos a 2, para completar el cuadro 3.1.

x	1,7	1,9	1,95	2,01	2,1	2,2
$f(x)$						
$g(x)$						

Cuadro 3.1

¿Qué ocurre con las imágenes de x por f, a medida que x se acerca a 2?
¿Qué ocurre con las imágenes de x por g, a medida que x se acerca a 2?

El objetivo de este capítulo es responder preguntas como las anteriores, por medio del concepto de límite de una función real. Primero debemos adoptar una notación más sencilla para expresar estas preguntas. Lo haremos de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to 2} f(x), \quad \lim_{x\to 2} g(x).$$

Analicemos ahora los resultados que usted obtuvo al hallar las imágenes de x por las anteriores funciones. Si sus conclusiones son correctas, debió ver que a medida que nos acercamos a 2, las imágenes, mediante la función f, se acercan a 4, mientras que las imágenes mediante la función g se acercan a 1 para valores de x menores que 2, y las imágenes se acercan a 8 para valores de x mayores que 2. En una situación como la anterior, es usual decir que $g(x)$ se acerca a 1 por la izquierda de 2, y se acerca a 8, por la derecha de 2. (Observe su gráfica de g).

Naturalmente, estas conclusiones se obtuvieron con base en la gráfica y la tabulación de las funciones. Ahora, nuestro objetivo es formalizar estas ideas y este comportamiento de las funciones a través de la definición de límite. Además, probaremos algunas propiedades acerca de los límites.

Antes de comenzar la siguiente sección, es conveniente que, con la ayuda de una calculadora, elabore tablas de valores para cada una de las siguientes funciones, con el fin de contestar: ¿qué ocurre con $h(x)$ cuando x se acerca a a?

1. $h(x) = x + 1;\ \ a = 1.$
2. $h(x) = x^2 - 8;\ \ a = 4.$
3. $h(x) = [x]\,;\ \ a = 1,\ \ a = -\frac{1}{2}.$
4. $h(x) = \frac{x^2-1}{x-1};\ \ a = 1,\ \ a = 2.$
5. $h(x) = \frac{1}{x};\ \ a = 0.$
6. $h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x};\ \ a = 0.$
7. $h(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x};\ \ a = 0.$

Note que para poder tabular, h debe estar definida alrededor de a; sin embargo, no nos interesa lo que ocurra en a. Por ejemplo, h no está definida en $a = 0$ para las funciones dadas en 5, 6 y 7.

3.2. Definición de límite

En el ejemplo de la sección anterior, con la función f observamos que los valores de $f(x)$ se aproximan a 4, a medida que x se aproxima a 2. Esta idea se resume en la notación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Queremos definir de manera más precisa, el significado de la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

que se lee: "El límite cuando x tiende a a de la función f es b". Cuando escribimos esto, se entiende que a y b son números reales y que f es una función definida para valores de x alrededor del punto a.

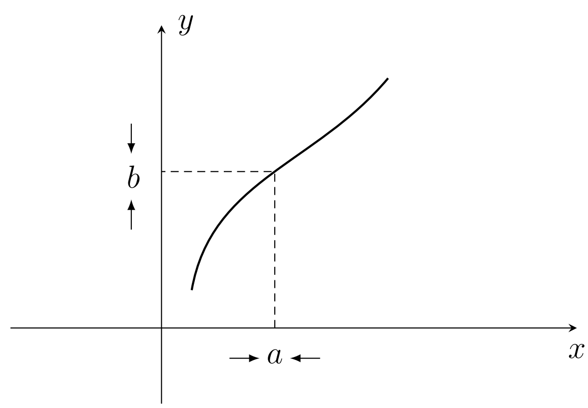


Figura 3.1

Buscamos una definición que exprese lo siguiente: a medida que x se acerca al punto a, las imágenes de f se acercan a b. Observe que los valores de x cercanos a a se encuentran en un intervalo A que contenga a a; de manera similar, en un intervalo B que contenga a b, se encuentran los valores cercanos a b, y cuanto más pequeño sea ese intervalo B, más cerca se estará de b.

Así, podemos afirmar que para cualquier intervalo B, alrededor de b, queremos encontrar un intervalo A, alrededor de a, tal que si x está en A, $x \neq a$ (es decir, x está cerca de a), entonces $f(x)$ está en B (es decir, $f(x)$ está cerca de b).

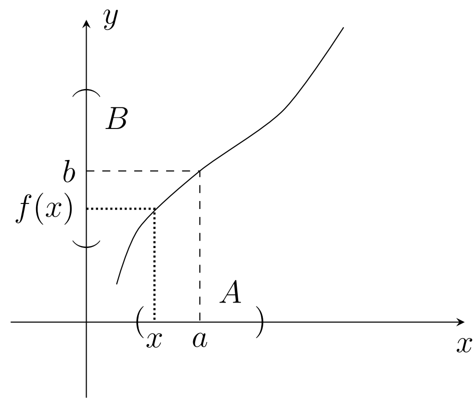


Figura 3.2

Si encontramos el intervalo A que satisface las condiciones anteriores, el reto está en encontrar un intervalo A correspondiente a un intervalo B, cada vez más pequeño; es decir, acercándonos cada vez más a b. Por otra parte, una vez que hemos encontrado el intervalo A que satisface las condiciones, un intervalo "más pequeño" que A, que contiene a a, también las satisface. Nos interesa que las imágenes de puntos cercanos a a se acerquen a b; sin embargo, no nos interesa qué pasa con la imagen de a; por esto no exigimos que $f(a)$ esté en B, ni siquiera necesitamos que f esté definida en a.

La idea ahora es transformar la definición anterior, dada en términos de los intervalos A y B, para hacerla más práctica a la hora de mostrar límites y sus propiedades. Los intervalos A y B podemos pedirlos centrados en a y b respectivamente; para ello necesitamos dos radios positivos. Se acostumbra llamar ε al radio del intervalo alrededor de b, esto en el eje y, y δ al radio del intervalo alrededor de a, en el eje x, de modo que $A = (a-\delta, a+\delta)$ y $B = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

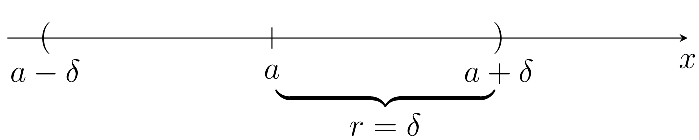


Figura 3.3

De este modo, la anterior definición también puede escribirse así: "Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, entonces $f(x) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$".

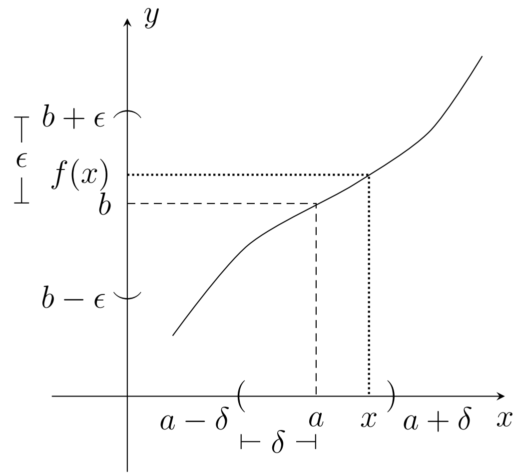


Figura 3.4

Por otra parte, la expresión $x \in (a - \delta, a + \delta)$ equivale a decir que la distancia entre x y a es menor que δ.

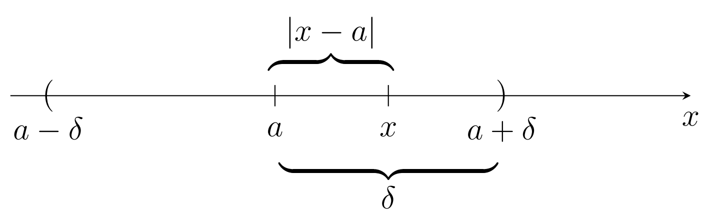


Figura 3.5

Con base en lo comentado hasta ahora, vamos a dar la definición formal del límite de una función real.

Definición 3.1. *Si f es una función real, definida alrededor de a, no necesariamente en a, diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ (el límite cuando x tiende a a de $f(x)$ es b), si:*

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Escribimos $0 < |x - a|$ para garantizar que no consideramos $x = a$, caso en el que $|x - a| = 0$.

Ejemplo 3.2. *Probar que* $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$.

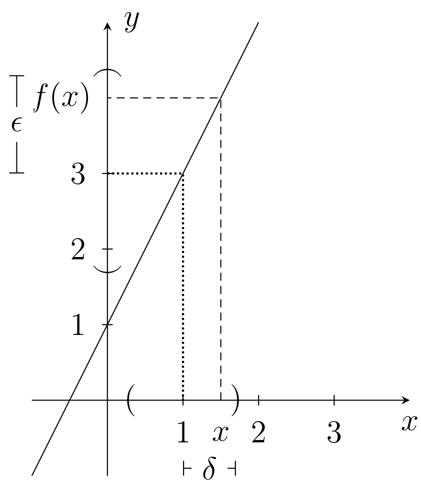


Figura 3.6

Gráficamente se observa que cuando x se acerca a 1, su imagen se acerca a 3. Debemos probar esto usando la definición formal de límite, es decir, debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe (podemos encontrar) un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$.

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, tal que si $0 < |x - 1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, entonces $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$, puesto que:

$$\begin{aligned} |(2x+1) - 3| &= |2x - 2| \\ &= |2(x-1)| \\ &= |2|\,|x - 1| \\ &< 2.\frac{\varepsilon}{2} \qquad (\text{Pues } |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por consiguiente: $\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$. $\square$

Observe que $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ es la elección adecuada para obtener $|(2x+1)-3| < \varepsilon$, pero ¿cómo se encontró que este δ era el indicado? Puesto que debemos encontrar un δ que depende de ε, en la práctica, este δ se busca utilizando la expresión a la que debemos llegar: $|(2x+1)-3| < \varepsilon$, para luego escribir la demostración.

Queremos:

$$\begin{aligned} |(2x+1)-3| &< \varepsilon \\ |2x-2| &< \varepsilon \\ |2|\,|x-1| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora, por hipótesis $|x-1| < \delta$, para un δ que ignoramos; entonces $2\,|x-1| < 2\delta$, de modo que si $2\delta = \varepsilon$, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y se tendrá $|(2x+1)-3| < \varepsilon$, lo que necesitamos. Tenga en cuenta que esta deducción de δ no es la demostración, sino simplemente el trabajo previo, necesario para hallar el δ adecuado, para escribir una demostración como la que se dió desde el principio.

Ejercicio 3.3. *Demostrar los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to -1} (1-5x) = 6.$

2. $\lim\limits_{x\to 2} 3 = 3.$

3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} [x] = 0.$

4. Si $f(x) = \begin{cases} 7x+3 & \text{si} \quad x \neq -1 \\ 5 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -4.$

5. $\lim\limits_{x\to a} (mx+b) = ma+b.$

En los límites del ejemplo 3.2 y del ejercicio 3.3, las funciones involucradas son básicamente funciones lineales. En el ejercicio 3 la función no es lineal; sin embargo, en un intervalo pequeño, alrededor de $x = \frac{1}{2}$, esta función es lineal, lo que hace que este límite se demuestre de una manera similar a la forma como se hace para las funciones lineales. Por otra parte, en el ejercicio 4, el hecho de que $f(-1) = 5$ no interfiere con la demostración del límite, puesto que allí se ignora por completo el punto $x = -1$.

Ahora vamos a ver que no existe una manera sistemática de hacer demostraciones acerca de límites de funciones, sino que, por el contrario, en cada tipo de función debemos buscar algún "truco" diferente para lograr encontrar el δ apropiado y así, escribir la demostración. Incluso para una función tan sencilla como $f(x) = x^2$, la demostración ya no se parece al caso lineal.

Ejemplo 3.4. *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$.
Antes de hacer la demostración, veamos a dónde tenemos que llegar. Debemos demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$, *tal que si* $0 < |x-1| < \delta$, *entonces* $|x^2-1| < \varepsilon$. *En principio, partiremos de* $|x^2-1| < \varepsilon$ *para tratar de encontrar el* δ *adecuado.*

$$\begin{aligned} \left|x^2-1\right| &< \varepsilon \quad \textit{implica} \\ |x-1|\,|x+1| &< \varepsilon \end{aligned}$$

El inconveniente es que no podemos decir que $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+1|}$, *pues para cada* ε *debe existir un* δ *que cumpla la condición del límite para todos los* x *del intervalo. Sin embargo,* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|x+1|}$ *depende no sólo de* ε, *sino también de* x, *lo cual hace que* δ *cambie en la medida que se cambie a* x. *Para solucionar el inconveniente, vamos a tratar de acotar la expresión* $|x+1|$.

Supongamos que $0 < \delta \leq 1$. *(Recordemos que es suficiente encontrar un* δ, *y, por tanto, si lo encontramos en estas condiciones no se generará ninguna contradicción. Si el* δ *"adecuado" fuese mayor que* 1, *un* δ *menor también sirve). Entonces:*

$$\begin{aligned} |x-1| &< 1 \\ -1 &< x-1<1 \\ 0 &< x<2 \\ -3 &< 1<x+1<3 \\ -3 &< x+1<3. \end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos afirmar que $|x+1| < 3$ *y de esta manera:*

$$|x-1|\,|x+1| < |x-1|\,3.$$

Como queremos que $|x-1|\,3 < \varepsilon$, *obtenemos* $\dfrac{\varepsilon}{3}$ *para* δ, *pero recordemos que tenemos una condición adicional:* $\delta < 1$; *así, vamos a tomar* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$, *si* $\dfrac{\varepsilon}{3}$

es menor que 1; *ó* $\delta = 1$, *si* $\dfrac{\varepsilon}{3}$ *es mayor o igual de* 1, *es decir,* $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$. *Por otra parte, si* $0 < |x-1| < \delta$ *se tiene que, si* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ *entonces* $0 < |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3} \leq 1$ *y si* $\delta = 1$ *entonces* $0 < |x-1| < 1 \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$, *porque estamos tomando el mínimo; así, en ambos casos se tiene* $0 < |x-1| < 1$ *y* $0 < |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. *Veamos ahora cómo queda la demostración.*

Prueba. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{\varepsilon}{3}, 1\right\}$. Si $0 < |x-1| < \delta$ se tiene que $0 < |x-1| < 1$ y $0 < |x-1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 1\right| &= |x-1|\,|x+1| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}|x+1| \qquad\qquad \left(\text{Porque } |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \end{aligned}$$

Como $|x-1| < 1$ entonces $|x+1| < 3$. (Por lo realizado anteriormente). Así,

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 1\right| &< \frac{\varepsilon}{3}|x+1| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}3 = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

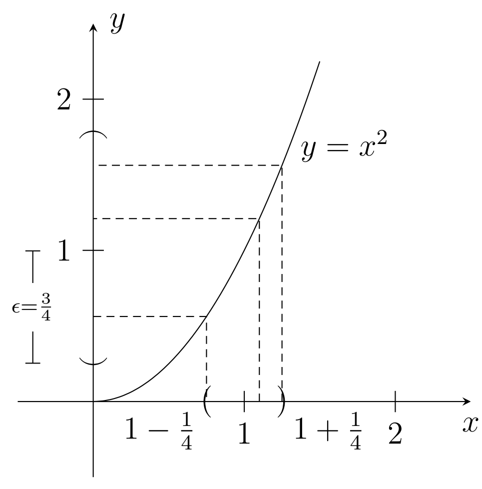


Figura 3.7

Respecto a la demostración anterior, veamos por ejemplo que si $\varepsilon = \frac{3}{4}$, entonces $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{1}{4}, 1\right\} = \dfrac{1}{4}$, mientras que para $\varepsilon \geq 3$ se tiene

$\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{\varepsilon}{3}, 1\right\} = 1$. Cuando el intervalo en el eje y, alrededor de 1, es suficientemente grande, entonces con seguridad para x en $(0,2)$, $x \neq 1$, la imagen se encuentra en $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.

Como puede observarse, la demostración no es tan inmediata pues tuvimos que utilizar un "truco" para acotar $|x+1|$. Si la función es diferente, seguramente tendremos que utilizar un "truco" diferente cada vez.

Note que demostrar que $\lim\limits_{x\to 2}(2-3x^2) = -10$ no es muy diferente al ejemplo anterior; sin embargo, demostrar que $\lim\limits_{x\to 1}x^3 = 1$ requiere un poco más de habilidad. Intente hacer esta demostración; si no lo logra no se desanime. Si lo logra, lo felicitamos. Por otra parte, demuestre que $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{2}$ y $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-3} = -1$.

Ahora vamos a mostrar qué sucede cuando un límite no es el valor dado. Para ello, antes de seguir la lectura, tome la definición de límite y niéguela.

Ejemplo 3.5. *Si*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq 0 \\ x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}f(x) \neq 1$.

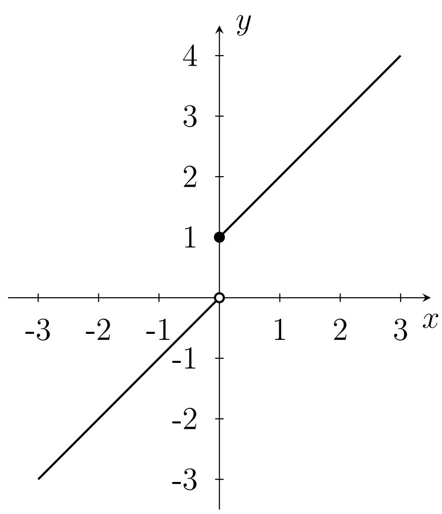


Figura 3.8

Para demostrar que este límite no es 1*, tomamos la definición de límite y la negamos; es decir, debemos demostrar que existe un* $\varepsilon > 0$*, tal que para todo* $\delta > 0$ *existe un* x *tal que* $0 < |x| < \delta$ *y* $|f(x) - 1| \geq \varepsilon$*.*

Observe que para $\varepsilon < 1$ *alrededor de* 1*, en cualquier intervalo alrededor de* 0 *hay valores de* x *tales que su imagen no queda en* $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$*; por ejemplo, los que están a la izquierda de* 0*. Esto se presenta en la siguiente demostración:*

Dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$*, se tiene que para todo* $\delta > 0$ *existe* $x = \frac{-\delta}{2}$ *tal que* $0 < |x| < \delta$ *y*

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{-\delta}{2} - 1\right| = \left|\frac{\delta}{2} + 1\right| \geq \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq 1$*.*

Es de gran ayuda hacer el gráfico de la función, pues a partir de éste podemos deducir cuáles son el ε y el x adecuados.

Ejercicio 3.6. *La función* f *es la misma del ejemplo anterior. Demostrar:*

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq 0$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq a$*, si* $a > 1$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq a$*, si* $0 < a < 1$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq a$*, si* $a < 0$.

   Nota. *Hemos demostrado que para todo* $a \in \mathbb{R}$*,* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq a$*. En este caso diremos que* ***el límite no existe****.*

5. *Demostrar que* $\lim\limits_{x \to 2} [x]$ *no existe. En general, demostrar que* $\lim\limits_{x \to n} [x]$ *no existe si* $n \in \mathbb{Z}$*.*
6. *Demostrar que si* $g(x) = \begin{cases} x^3 & si \;\; x \geq 1 \\ x - 1 & si \;\; x < 1 \end{cases}$*, entonces* $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ *no existe.*
7. *Demostrar que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ *no existe.*

8. *Si* $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *, demostrar que:*

   a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

   b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ *no existe.*

3.3. Propiedades de los límites

No podemos dedicar toda la vida a hacer demostraciones de límites para cada función y en cada punto. Ahora vamos a demostrar algunas propiedades que nos facilitarán el camino, en el cálculo de los límites.

Teorema 3.7. *Para todo* $a, c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Prueba.] Con la experiencia adquirida, no es difícil que usted haga la demostración. □

Teorema 3.8. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, *entonces:*

1. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

2. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x)) = L - M$.

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$.

Prueba.

1. Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon$.

   Sea $\varepsilon > 0$, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces sabemos que:

   existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, y

   existe $\delta_2 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|g(x) - M| < \varepsilon$.

   Conviene aclarar que debemos tomar δ_1 y δ_2, ya que en cada límite existe un δ, que no necesariamente es el mismo para f y g.

Como vamos a considerar los valores de x que cumplan ambas condiciones a la vez, entonces tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$; por tanto:

$$(a-\delta, a+\delta) \subseteq (a-\delta_1, a+\delta_1) \text{ y } (a-\delta, a+\delta) \subseteq (a-\delta_2, a+\delta_2).$$

De modo que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ y

$|g(x) - M| < \varepsilon$.

Por consiguiente:

$$\begin{aligned} |(f(x)+g(x)) - (L+M)| &= |(f(x)-L) + (g(x)-M)| \\ &\leq |f(x)-L| + |g(x)-M| \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto,

$$|(f(x)+g(x)) - (L+M)| < 2\varepsilon \tag{3.1}$$

Así, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tal que si

$0 < |x-a| < \delta$, entonces $|(f(x)+g(x)) - (L+M)| < 2\varepsilon$. Lo que concluye la demostración.

¿Le sorprende que digamos que concluimos la demostración? Ya que 2ε, así como ε, son números reales positivos cualquiera, se cumple la definición de límite; sin embargo, si queremos escribir una demostración un poco más elegante, donde no aparezca 2ε sino ε, podemos reescribir nuestras hipótesis así:

Dado $\varepsilon > 0$, (se tiene $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$)

existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, y

existe $\delta_2 > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

las cuales equivalen a las dadas inicialmente. De esta manera se tendría ε en lugar de 2ε, en (3,1).

2. La demostración es una consecuencia de la anterior, haciendo un manejo adecuado de los signos.

3. Debemos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)g(x) - LM| < \varepsilon$.

Primero vamos a buscar un δ adecuado, para luego si escribir la demostración. Es claro que

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\ &= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\ &\leq |f(x)|\,|g(x) - M| + |M|\,|f(x) - L| \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$|f(x)g(x) - LM| \leq |f(x)|\,|g(x) - M| + |M|\,|f(x) - L| \tag{3.2}$$

Sabemos que $|g(x) - M|$ y $|f(x) - L|$ están acotadas por el real que necesitemos, gracias a los límites, y puesto que $|M|$ es constante, debemos tratar de acotar $|f(x)|$. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. En particular, si $\varepsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < 1$; luego:

$$|f(x)| - |L| \leq |f(x) - L| < 1.$$

De lo cual se tiene:

$$|f(x)| < 1 + |L|\,. \tag{3.3}$$

De (3.2), la idea es hacer que $|f(x)|\,|g(x) - M|$ y $|f(x) - L|\,|M|$ sea, cada uno, menor que $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Para lograrlo, necesitamos que:

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2\,(1 + |L|)} \text{ y } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2\,|M|}, \tag{3.4}$$

sin embargo, tenemos un inconveniente puesto que M podría ser cero. Como $|M| < |M| + 1$, vamos a considerar $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2\,(|M| + 1)}$.

Ahora sí escribamos la demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

a) Dado $1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x)| < 1 + |L|\,$, por (3.3).

b) Como $\varepsilon > 0$, entonces $\dfrac{\varepsilon}{2\left(|M|+1\right)} > 0$ y existe $\delta_2 > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(|M|+1\right)}$.

c) Como $\varepsilon > 0$, entonces $\dfrac{\varepsilon}{2\left(1+|L|\right)} > 0$ y existe $\delta_3 > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta_3$, entonces $|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(1+|L|\right)}$.

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, de modo que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)| < 1 + |L|$, $|f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(|M|+1\right)}$ y
$|g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2\left(1+|L|\right)}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \\
&= |f(x)(g(x) - M) + M(f(x) - L)| \\
&\leq |f(x)|\,|g(x) - M| + |M|\,|f(x) - L| \\
&< |f(x)|\,\frac{\varepsilon}{2\left(1+|L|\right)} + \left(|M|+1\right)\frac{\varepsilon}{2\left(|M|+1\right)} \\
&< \left(1+|L|\right)\frac{\varepsilon}{2\left(1+|L|\right)} + \frac{\varepsilon}{2\left(|M|+1\right)}\left(|M|+1\right) \\
&= \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema 3.9. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{L}{M}$.

Debemos probar lo siguiente:
Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $\left|\dfrac{f}{g}(x) - \dfrac{L}{M}\right| < \varepsilon$.

Vamos a buscar un δ que cumpla lo anterior. Como

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f}{g}(x) - \frac{L}{M}\right| &= \left|\frac{Mf(x) - Lg(x)}{Mg(x)}\right| \\
&= \frac{|Mf(x) - ML + ML - Lg(x)|}{|Mg(x)|} \\
&= \frac{|M(f(x) - L) + L(M - g(x))|}{|Mg(x)|} \\
&\leq \frac{|M|\,|f(x) - L| + |L|\,|g(x) - M|}{|M|\,|g(x)|}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\left|\frac{f}{g}(x) - \frac{L}{M}\right| \leq \frac{|f(x) - L|}{|g(x)|} + \frac{|L|\,|g(x) - M|}{|M|\,|g(x)|}.$$

Luego, si trabajamos de manera similar que en la demostración del producto, el único escollo pendiente es acotar la expresión $\dfrac{1}{|g(x)|}$.

Como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - M| < \varepsilon$.

En particular, si $\varepsilon = \dfrac{|M|}{2} > 0$, pues $M \neq 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|g(x) - M| < \dfrac{|M|}{2}$; luego

$$|M| - |g(x)| \leq |M - g(x)| = |g(x) - M| < \frac{|M|}{2}.$$

Por consiguiente:

$$\begin{aligned}
|M| - |g(x)| &< \frac{|M|}{2} \\
\frac{|M|}{2} &< |g(x)|, \quad \text{y} \\
\frac{1}{|g(x)|} &< \frac{2}{|M|}.
\end{aligned}$$

Prueba. Utilizando la pequeña introducción anterior y trabajando de manera similar a la prueba de la parte 3 del último teorema demostrado, será un muy agradable ejercicio. □

Teorema 3.10. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, *entonces* $L = M$.

Es decir, una función no puede tender hacia dos límites distintos en un punto $x = a$.

Prueba. Supongamos que $L \neq M$, entonces $|L - M| > 0$.

Como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, entonces si tomamos $\varepsilon = \dfrac{|L-M|}{2}$ tenemos que:
existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, y
existe $\delta_2 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|f(x) - M| < \varepsilon$.
Así, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, tenemos que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ y $|f(x) - M| < \varepsilon$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
|L - M| &= |L - f(x) + f(x) - M| \\
&\leq |L - f(x)| + |f(x) - M| \\
&= |f(x) - L| + |f(x) - M| \\
&< \frac{|L-M|}{2} + \frac{|L-M|}{2} \\
&= |L - M|.
\end{aligned}$$

Hemos obtenido que $|L - M| < |L - M|$, pero, por la propiedad de tricotomía, esto no es posible. Luego, $L = M$. $\square$

Nota. En este momento demostrar, por ejemplo, que $\lim\limits_{x\to 2}(5x-3) \neq -1$ puede ser algo muy sencillo.
Por el punto 5 del ejercicio 3.3 sabemos que $\lim\limits_{x\to a}(mx + b) = ma + b$, de modo que $\lim\limits_{x\to 2}(5x-3) = 7$ y, como consecuencia del teorema anterior, se tiene que $\lim\limits_{x\to 2}(5x-3)$ no puede ser -1.

Puesto que usted ya demostró que $\lim\limits_{x\to a}(mx + b) = ma + b$, en particular se tiene que $\lim\limits_{x\to a} x = a$ y como consecuencia de los teoremas anteriores, calcular límites de funciones polinómicas es muy sencillo.

En primer lugar, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ cuando n es entero positivo, puesto que este resultado se obtiene como consecuencia de la propiedad del producto de límites, aplicada $n-1$ veces. (¿Por qué $n-1$?)

Por otra parte, $\lim\limits_{x\to a} bx^n = ba^n$, donde n es entero positivo y b un número real, basta observar que bx^n es el producto de la función constante b y la función potencia x^n y aplicar el teorema 3.7 y la tercera parte del teorema 3.8.

Por tanto:

$$\lim_{x\to a}(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1}a^{n-1} + ... + b_1 a + b_0, \quad (3.5)$$

como consecuencia de lo discutido anteriormente y la primera parte del teorema 3.8.

Para funciones racionales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, tenemos que

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a}P(x)}{\lim\limits_{x\to a}Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \text{ siempre que } Q(a) \neq 0, \quad (3.6)$$

como consecuencia del teorema 3.9.

Ejemplo 3.11. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^4 + 3x^2 - x - 2) = 2^4 + 3{,}2^2 - 2 - 2 = 24.$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x-1)} = \dfrac{0}{-2} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$. *Como* $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-4) = 0$ *no podemos utilizar el teorema 3.9; sin embargo, notemos que el polinomio del numerador $x+2$ también se anula en $x = -2$, es decir, -2 es una raíz del numerador y del denominador, y podemos factorizar los polinomios.*

   $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)}$

   Recordemos que en el cálculo de este límite estamos trabajando con valores de x cercanos a -2, nunca con -2, de modo que al calcular el límite $x+2$ no se anula y, por tanto, puede simplificarse. Así:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4} &= \lim_{x\to -2}\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to -2}\frac{1}{x-2}\\ &= -\frac{1}{4}. \text{ \textit{Ahora sí, por el teorema 3.9.}}\end{aligned}$$

Antes de continuar con los ejemplos, es necesario que usted realice el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.12.

Con base en la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$, *si* $a>0$.

Ejemplo 3.13.

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{1}{6}$. *Como consecuencia del ejercicio anterior y los teoremas para el límite de una suma, un cociente y la función constante.*

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}$. *Observar que en este caso no podemos utilizar el teorema 3.9 y, a diferencia de un ejemplo anterior, no podemos factorizar. Lo que vamos a hacer es multiplicar la función por* 1, *"disfrazado" convenientemente.*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h}\,\frac{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)-3}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{3+h}+\sqrt{3}\right)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}} \qquad h \textit{ es cercano a } 0,\ \textit{ y } h\neq 0\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ . \quad \textit{Ahora sí, por el teorema 3.9.}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.14. *Calcular los siguientes límites:*

1) $\lim\limits_{h\to 5}(2h^2-3h+4)$ 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-2x^2-6}{5-3x}$ 3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(5+h)^2-25}{h}$

4) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+16}-4}{t^2}$ 5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10}$ 6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

3.4. Límites unilaterales

Cuando consideramos la función parte entera, $f(x) = [x]$ y queremos estudiar qué ocurre con $f(x)$ cuando x se acerca a a, tenemos dos tipos de comportamiento. Si a no es un entero, $f(x)$ tiende a $[a]$, mientras que si a es un entero, el límite no existe.

Sin embargo, cuando a es entero se observa que para los valores de x, mayores y cercanos a a, las imágenes tienden a $[a] = a$ y para los valores de x, menores y cercanos a a, las imágenes tienden a $[a] - 1 = a - 1$. Se dice que f tiende a $[a]$ por "la derecha" de $x = a$ y f tiende a $[a] - 1$, por "la izquierda" del punto a. Estas ideas se resumen, respectivamente, por medio de la notación:

$$\lim_{x \to a^+} [x] = [a] \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} [x] = [a] - 1.$$

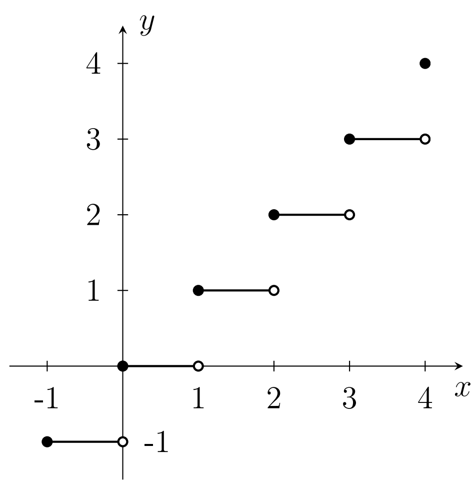


Figura 3.9

En este caso tenemos que, aunque el límite no existe cuando x se acerca a a, siendo a entero, podemos ser menos exigentes y no acercarnos a a por ambos lados, sino solamente desde valores mayores que a, por derecha; o desde valores menores que a, por izquierda.

Definición 3.15.

1. *Si f es una función definida a la derecha de a, no necesariamente en a, diremos que el límite de f, cuando x tiende a a por la derecha, es el real L :*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$
si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $a < x < a + \delta$ (ó $0 < x - a < \delta$), entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

2. *Si f es una función definida a la izquierda de a, no necesariamente en a, diremos que el límite de f, cuando x tiende a a por la izquierda, es el real L :*
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L,$$
si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $a - \delta < x < a$ (es decir, $-\delta < x - a < 0$), entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En los límites laterales necesitamos que las imágenes $f(x)$ se encuentren cada vez más cerca de L, para valores de x cercanos a a, pero sólo nos acercamos por uno de los lados de a.

Consideremos la función $h(x) = \dfrac{x}{|x|}$, que se representa gráficamente en la figura 3.10.

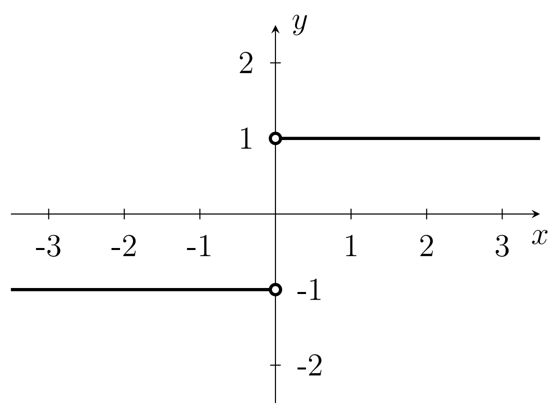


Figura 3.10

Se tiene que $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$. Hacer las demostraciones de estos límites es ahora un sencillo ejercicio, gracias a la experiencia ya adquirida en este capítulo.

Retomemos ahora la función g que se estudió al principio de este capítulo,

$$g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x-1 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

Para esta función se obtuvo que las imágenes se acercan a 1 para valores de x menores que 2 y las imágenes se acercan a 8 para valores de x mayores que 2. En decir, $g(x)$ se acerca a 1 por la izquierda de 2, y se acerca a 8, por la derecha de 2.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} g(x) = 8.$$

Podemos observar, además, que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -1$; en este caso estamos acercándonos a 0 por ambos lados. Si lo hacemos sólo por un lado tendremos $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -1$, como lo demuestra, en general, el siguiente teorema.

Teorema 3.16. *$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe y es el real L, si y sólo si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.*

Prueba. Recordemos que esta demostración consta de dos partes. Supongamos primero que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Como $0 < |x-a| < \delta$, entonces $-\delta < x - a < 0$, ó $0 < x - a < \delta$, pero en ambos casos $|f(x) - L| < \varepsilon$. Luego, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

Supongamos ahora que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces:
existe $\delta_1 > 0$, tal que si $a - \delta_1 < x < a$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$ y
existe $\delta_2 > 0$, tal que si $a < x < a + \delta_2$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Tomemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, si $0 < |x-a| < \delta$ se tiene que
$a - \delta_1 \leq a - \delta < x < a$ ó $a < x < a + \delta \leq a + \delta_2$, de modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Luego, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. $\square$

Notemos que gracias al teorema 3.16, para demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} [x]$ no existe, basta mostrar que $\lim\limits_{x\to 2^-} [x] \neq \lim\limits_{x\to 2^+} [x]$. Esto puede resultar más sencillo, que lo realizado en el quinto punto del ejercicio 3.6 de este capítulo.

Para el cálculo de los límites unilaterales también pueden aplicarse las propiedades, siempre y cuando los límites involucrados sean por el mismo lado.

Ejercicio 3.17.

1. *Sea* $f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ *no existe, siendo a cualquier número real. (Observar que esto es suficiente para demostrar que* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *no existe).*

2. *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$*. (Notar que no tiene sentido pensar en* $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$*).*

3. *Calcular los siguientes límites:*

   a) $\lim\limits_{x\to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

   c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{|x-1|}$

3.5. Límites trigonométricos

En esta sección vamos a estudiar los límites que involucran funciones trigonométricas. En la sección 4.1 se introdujo de manera informal el concepto de límite; uno de los ejercicios planteados allí fue analizar el comportamiento de la función $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, cuando x se acerca a 0. Allí se debió observar que las imágenes de valores de x cercanos a cero, no se aproximan a ningún valor particular.

Ejercicio 3.18. *Demostrar que* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ *no existe. (Tener en cuenta el comportamiento oscilante de la función seno).*

En la sección 4.1 también se analizó el comportamiento de la función $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, cuando x tiende a 0. La conclusión a la que debió llegar fue que las imágenes $g(x)$ se acercan a 1 cuando x se acerca a 0. Lo anterior, utilizando la notación de límites se escribe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{3.7}$$

Uno de los objetivos en esta sección es demostrar el límite (3.7), y a partir de este resultado calcular otros límites que involucran funciones trigonométricas. Para lograrlo, necesitamos primero demostrar un teorema conocido como el *Teorema del emparedado.*

Teorema 3.19. *(Teorema del emparedado). Sea A un intervalo abierto tal que $a \in A$. Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo $x \in A$, excepto posiblemente en a y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$.*

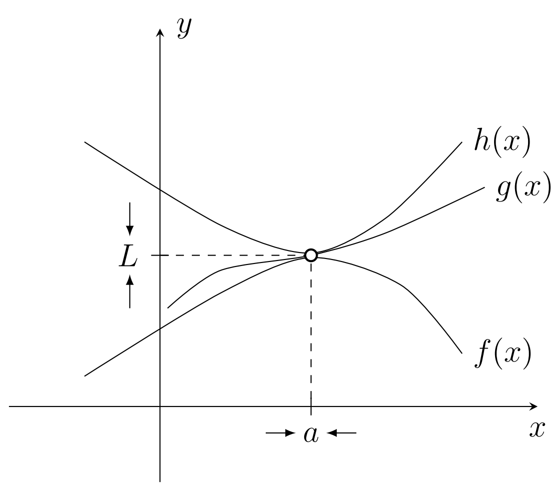


Figura 3.11

Prueba. Debemos probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$; por hipótesis sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$; por tanto:

existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, y

existe $\delta_2 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|h(x) - L| < \varepsilon$.

Por otra parte, $f(x) \le g(x) \le h(x)$ para todo $x \in A$, excepto posiblemente en a; así consideremos $\delta_3 > 0$, tal que $(a - \delta_3, a + \delta_3) \subset A$, de modo que si $0 < |x - a| < \delta_3$, entonces $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

Tomemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$. Si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$, $|h(x) - L| < \varepsilon$ y $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Esto implica que

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \quad \text{y} \quad -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon;$$

es decir:

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{y} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

Por tanto:

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon\ ,$$

de modo que

$$\begin{gathered} L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \\ -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \\ |g(x) - L| < \varepsilon. \end{gathered}$$

Luego, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. $\square$

Nota. Al revisar la demostración anterior se aprecia que el teorema del emparedado es aplicable lateralmente.

Ejemplo 3.20. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Puesto que usted ya demostró que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ *no existe, en este ejercicio no podemos aplicar la propiedad del producto de límites. Vamos entonces a usar el teorema del emparedado.*

La imagen de la función seno es $[-1, 1]$; *por tanto, para* $x \neq 0$:

$$-1 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq 1,$$

y puesto que $x^2 > 0$ *para* $x \neq 0$, *entonces:*

$$-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0} -x^2 = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ *y* $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \leq x^2$ *para* $x \neq 0$, *entonces, por el teorema del emparedado,* $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

Como puede verse, la dificultad con la que podemos encontrarnos para aplicar el teorema del emparedado radica en identificar las funciones adecuadas que cumplan las condiciones. En el ejemplo 3.20 fue relativamente fácil identificarlas; sin embargo, en otros límites donde es necesario aplicar el teorema del emparedado, encontrar las funciones no es tan evidente.

Veremos que para demostrar el límite (3.7) se requiere el teorema del emparedado, pero que no es evidente encontrar las funciones adecuadas para hacerlo. Antes de demostrar el límite (3.7) veremos dos límites trigonométricos no menos importantes.

Nota. Recordemos cómo se obtienen las fórmulas de la longitud de un arco de circunferencia y del área de un sector circular (ver figura 3.12).

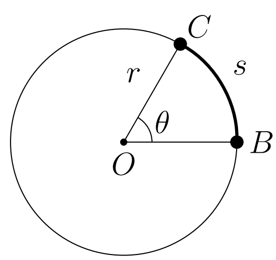


Figura 3.12

1. Llamemos s a la longitud del arco BC; por las relaciones en el círculo se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi},$$

entonces:

$$\boxed{s = r\theta.} \tag{3.8}$$

2. Llamemos A al área del sector circular OBC; se tiene:

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi},$$

de modo que:

$$\boxed{A = \tfrac{1}{2}r^2\theta.} \tag{3.9}$$

Teorema 3.21. $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$.

Prueba. Vamos a demostrar que $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x$.

Supongamos que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, es decir, x está cerca de 0 por derecha.

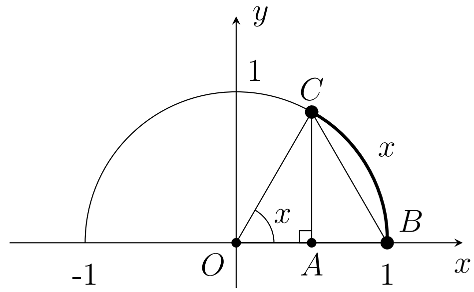


Figura 3.13

Observando la figura 3.13 se tiene que para el ángulo x, el arco correspondiente BC tiene longitud x (por 3.8) y el segmento AC tiene longitud $\operatorname{sen} x$, ya que estamos en un círculo de radio 1. Además, como $\overline{BC} < x$ y $\overline{AC}$ es un cateto del triángulo ABC y $\overline{BC}$ es su hipotenusa, entonces:

$$0 \leq \operatorname{sen} x \leq x,$$

y puesto que $\lim\limits_{x \to 0^+} 0 = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} x$, por el teorema del emparedado se tiene que $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$.

Supongamos ahora que $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, es decir, $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\begin{gathered} 0 \leq \operatorname{sen}(-x) \leq -x \\ 0 \leq -\operatorname{sen} x \leq -x \\ x \leq \operatorname{sen} x \leq 0. \end{gathered}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} x$, entonces $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = 0$. $\square$

Teorema 3.22. $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

Prueba. Como x tiende a 0, consideremos x tal que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

En la figura 4.14 se tiene que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, de modo que el arco BC tiene longitud x, $\overline{AC} = \operatorname{sen} x$ y $\overline{AB} = 1 - \cos x$. Además, la longitud del segmento BC es menor que la longitud del arco BC, de modo que por el teorema de Pitágoras para el triángulo ABC se tiene:

$$\operatorname{sen}^2 x + (1 - \cos x)^2 = \overline{BC}^2 \leq x^2. \tag{3.10}$$

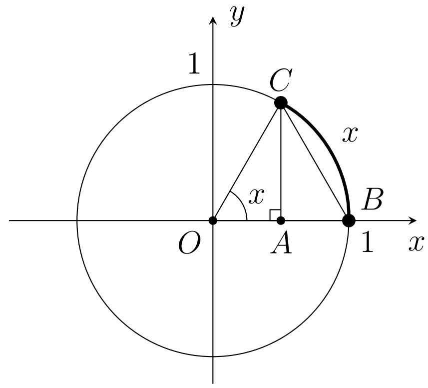


Figura 3.14

Note que (3.10) también es válida si se considera x tal que $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$. Entonces

$$\begin{gathered}(1 - \cos x)^2 \leq x^2 \\ |1 - \cos x| = |\cos x - 1| \leq |x| \\ -|x| \leq \cos x - 1 \leq |x|.\end{gathered}$$

Puesto que $\lim\limits_{x\to 0} -|x| = 0 = \lim\limits_{x\to 0} |x|$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - 1) = 0$. Así:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \cos x &= \lim_{x\to 0} [(\cos x - 1) + 1] \\ &= \lim_{x\to 0} (\cos x - 1) + \lim_{x\to 0} 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1. \quad \square\end{aligned}$$

Teorema 3.23. *(Límite trigonométrico básico).*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Prueba. Para aplicar el teorema del emparedado, debemos encontrar dos funciones f y h tales que

$$f(x) \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq h(x)$$

en algún intervalo alrededor de 0, excepto quizá en cero.
De hecho, no es posible que se cumplan las desigualdades en 0, ya que nuestra función $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida allí. Además, necesitamos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$.
Supongamos que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ y observemos la figura 3.15.

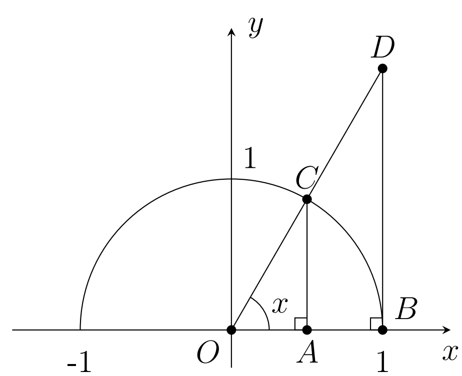


Figura 3.15

Se tiene que $\overline{DB}$ y $\overline{CA}$ son paralelos al eje y. Por la construcción, $\triangle OBD$ y $\triangle OAC$ son semejantes, lo que implica que:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}.$$

Como $\overline{OA} = \cos x$, $\overline{AC} = \operatorname{sen} x$ y $\overline{OB} = 1$, entonces

$$\overline{BD} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x.$$

Por otra parte, el área de $\triangle OAC$ es menor al área del sector circular OBC y ésta, a su vez, es menor al área de $\triangle OBD$. Como:

$$\begin{aligned}
\text{área}\,(\triangle OAC) &= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\cos x\ \operatorname{sen} x \\
\text{área}\ \ (\text{sector } OBC) &= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}1x \qquad\qquad (\text{por } 3.9) \\
\text{área}\,(\triangle OBD) &= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}1\tan x.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\cos x\ \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x,$$

luego:

$$\cos x\ \operatorname{sen} x \leq x \leq \tan x.$$

Si dividimos las desigualdades anteriores por $\operatorname{sen} x$ y con base en que $\operatorname{sen} x$ es mayor que cero cuando $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenemos:

$$\cos x \leq \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Ahora, como x y $\cos x$ también son mayores que cero, entonces

$$\cos x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}. \tag{3.11}$$

Esta desigualdad que es válida para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, también es válida para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Esto puede demostrarse con un análisis similar, pero teniendo cuidado al realizar las operaciones que hicimos antes, ya que algunos términos serán negativos.

Por tanto, tomaremos $f(x) = \cos x$, $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ y ya que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$, al utilizar el teorema del emparedado se obtiene $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. $\square$

Ejemplo 3.24. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.
Como x *tiende a cero, entonces en algún intervalo alrededor de* 0, $\cos x \neq -1$, *es decir,* $\cos x + 1 \neq 0$; *por tanto:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\frac{\operatorname{sen}\ x}{1+\cos x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)} = 1.\frac{0}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x} = 0.$

Ejemplo 3.25.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\ \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}$$

Si x *tiende* 0, *entonces* $3x$ *tiende a cero; por tanto:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{3x\to 0} 3\ \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}.$$

Si hacemos $\theta = 3x$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x} &= \lim_{3x\to 0} 3\ \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\\
&= \lim_{\theta\to 0} 3\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\\
&= 3\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\\
&= 3{,}1 = 3.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.26.

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{5x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}\,\frac{1}{5x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\left(3\,\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\,\frac{1}{5\cos 3x}\right)\\
&= \frac{3}{5}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\right)\\
&= \frac{3}{5}\left(\lim_{3x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\right)\\
&= \frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.27.

1. *Utilizar el teorema del emparedado para calcular los siguientes límites:*

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$

2. *Calcular los siguientes límites:*

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen} 5x}$ *d)* $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\operatorname{sen} x}{|x|}$

3.6. Límites de exponenciales y logarítmicas

Cuando $a>0$ y $a\neq 1$, con ayuda de las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas, no es difícil observar que

$$\lim_{x\to b} a^x = a^b,$$

para cada $b\in\mathbb{R}$; así como para cada $c>0$ se tiene que

$$\lim_{x\to c}\log_a x=\log_a c.$$

Realizar las demostraciones de estos límites con los elementos que tenemos hasta el momento, no es muy natural. La mejor manera de hacerlo es siguiendo el procedimiento como surgieron estas funciones históricamente. Para realizarlo, es necesario utilizar el concepto de integral de una función, el cual se trabajará con mucho detalle en el siguiente curso de cálculo, donde se dedica suficiente tiempo a estas funciones. Por ahora, asumiremos estos límites sin su demostración formal.

Sin embargo, para no quedarnos con el sabor amargo de no presentar los detalles de estas demostraciones, a continuación vamos a presentar la demostración de uno de estos límites en particular. Para comprender esta demostración solo es necesario recordar las propiedades de estas funciones como las características básicas de sus gráficas. Como de costumbre, no se quede sin revisar todos los detalles que no se hayan justificado.

Ejemplo 3.28.

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Prueba. Sea $0 < \varepsilon < 1$. Tomemos $\delta = \ln(1+\varepsilon)$, que es positivo puesto que $1+\varepsilon > 1$.
Si $0 < |x| < \delta$ entonces $-\ln(1+\varepsilon) < x < \ln(1+\varepsilon)$ y $x \neq 0$.
Como $0 < 1-\varepsilon^2 < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \ln\left(1-\varepsilon^2\right) &< 0 \\ \ln(1-\varepsilon) + \ln(1+\varepsilon) &< 0 \\ \ln(1-\varepsilon) &< -\ln(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \ln(1-\varepsilon) &< x < \ln(1+\varepsilon) \\ 1-\varepsilon &< e^x < 1+\varepsilon \\ -\varepsilon &< e^x - 1 < \varepsilon \\ |e^x - 1| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Para terminar, observemos que al considerar $\varepsilon \geq 1$, basta tomar por ejemplo $\delta = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (éste fue el δ obtenido en el caso anterior al considerar $\varepsilon = 1/2$, de modo que dicho δ también "funcionará bien" al tomar un $\varepsilon \geq 1$). $\square$

Ejercicio 3.29. *Calcular los siguientes límites:*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3e^x}{\cos x}$ *2)* $\lim\limits_{x\to 4} (1-2^{-x})$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x - 1}{5x-3}$ *4)* $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^2-1}{\log_3 (x-1)}$

3.7. Límites infinitos

3.7.1. Límites en el infinito

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Queremos analizar el comportamiento de f cuando x se hace cada vez más grande. Para esto, podemos calcular imágenes de valores como $10, 100, 1000, ..., 50000$, etcétera, y observar qué comportamiento tienen estas imágenes por la función f.

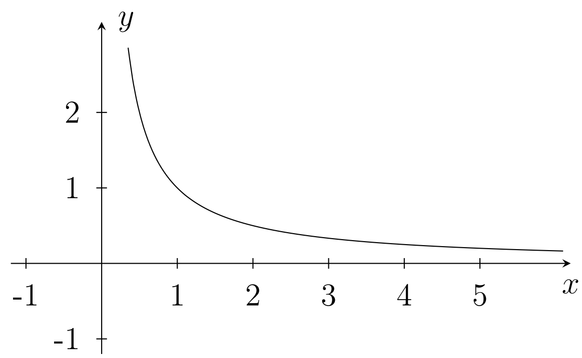


Figura 3.16

Concluimos que las imágenes de f, en estas circunstancias, se hacen cada vez más pequeñas pero siempre son positivas; de hecho, es evidente que las imágenes se acercan a cero por valores positivos. Queremos expresar este comportamiento en términos de límites. En este caso escribiremos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

El objetivo ahora es encontrar una definición similar a la definición 3.1, que exprese lo siguiente

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b,$$

donde b es un número real. Es decir, a medida que x es cada vez más grande, las imágenes se acercan a b.

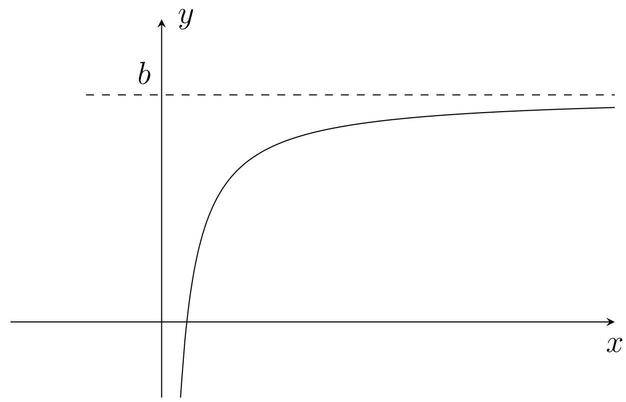


Figura 3.17

Este concepto se expresa de la siguiente manera:

Para todo intervalo de la forma $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, existe un $N>0$, tal que si $x>N$, entonces $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

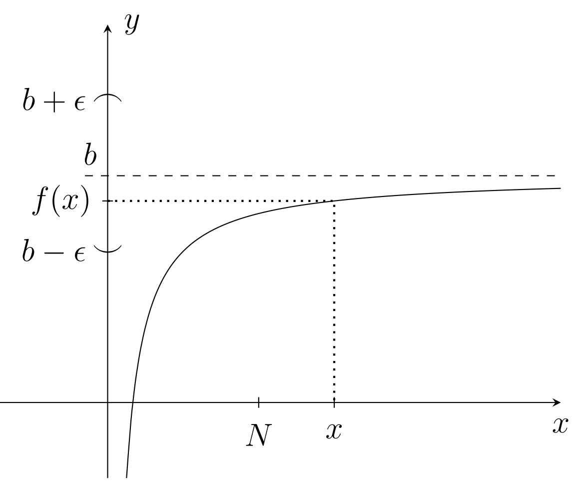


Figura 3.18

Observemos que, al igual que cuando estudiamos la definición 3.1, dar un intervalo cualquiera $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ expresa cercanía a b, y decir que existe un $N>0$, tal que $x>N$, expresa que x puede ser tan grande como se quiera.

No es muy difícil ver que la definición dada anteriormente equivalga a la siguiente, la cual será la definición formal de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Definición 3.30. *Si f es una función real, diremos que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ (el límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$ es b) si:*

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que si $x > N$, entonces $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Nota. Es necesario recordar que ∞ ó $-\infty$ no son números reales, sino símbolos que resumen la idea de crecer indefinidamente o decrecer indefinidamente, respectivamente.

Ejemplo 3.31. *Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.*
Antes de hacer la demostración, debemos encontrar un N adecuado. Para lograrlo, tomemos $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$ que es lo que debemos probar.

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

Luego:

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\varepsilon} < |x|$$

Como x tiende a infinito, podemos suponer que $x > 0$, es decir:

$$\frac{1}{\varepsilon} < x$$

Tomamos entonces $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Procedamos ahora a la demostración.

Prueba. Dado $\varepsilon > 0$, sea $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$, tal que si $x > \dfrac{1}{\varepsilon}$, entonces:

$$x > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \tag{3.12}$$

Como $x > 0$ implica que $|x| = x$, utilizando (3.12) tenemos que $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, de donde:

$$\varepsilon > \frac{1}{|x|}$$

Es decir:

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon.$$

Así concluimos la demostración. $\square$

Ejercicio 3.32.

1. *Demostrar:*

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0.$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^a} = 0,$ *si* $a > 0.$

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} k = k.$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} = 0.$

2. *Escribir una definición para la siguiente expresión y hacer un bosquejo de un gráfico:*

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b,$ *con* $b \in \mathbb{R}.$

3. *Utilizar la definición anterior para demostrar:*

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0.$ *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0.$

Propiedades

Las siguientes son propiedades de los límites en el infinito, que también son válidas para los límites en menos infinito. Las demostraciones no son complejas y seguramente aprovechará y disfrutará realizarlas.

Teorema 3.33. *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = M$, *entonces:*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = L + M.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = L - M.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x) = LM.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{L}{M}$, *siempre que* $M \neq 0$.

Teorema 3.34. *Si* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para todo* $x \in (a, +\infty) \subset \mathbb{R}$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = L$, *entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L$.

Ejemplo 3.35. *Calcular* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 - 1}{4x^3 + 5x - 3}$

Utilizaremos el hecho de que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^a} = 0$, *si* $a > 0$. *Como* x *tiende a infinito, entonces* $x \neq 0$ *y, por tanto,* $\dfrac{1}{x^3}$ *está definido. Luego:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{4x^3 + 5x - 3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3}(3x^3 - 2x^2 - 1)}{\frac{1}{x^3}(4x^3 + 5x - 3)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{3}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}{4 + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3}}
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to\infty} 3$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to\infty} 4$ *y* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$ *existen, entonces:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{4x^3 + 5x - 3} &= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^3}} \\
&= \frac{3 - 0 - 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Observe que x^3 *es la mayor potencia de* x *en el denominador de la función dada.*

Ejercicio 3.36. *Calcular los siguientes límites:*

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-5x + 7}{3x - 1}$ *2)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x + 1}{2x^2 - 1}$ *3)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - x\right)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x + 2\cos x}{3x - \operatorname{sen} x}$ *5)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2 - x^2}{3 + x^2}$

3.7.2. Límites al infinito

Vamos a analizar el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, cuando x se acerca a 0. Si tomamos valores de x cercanos a cero y hallamos sus imágenes, puede verse que éstas se hacen cada vez más grandes. Podemos expresar este comportamiento diciendo que las imágenes tienden a infinito, cuando x tiende a 0. Con base en la notación de límites, podemos escribir:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty.$$

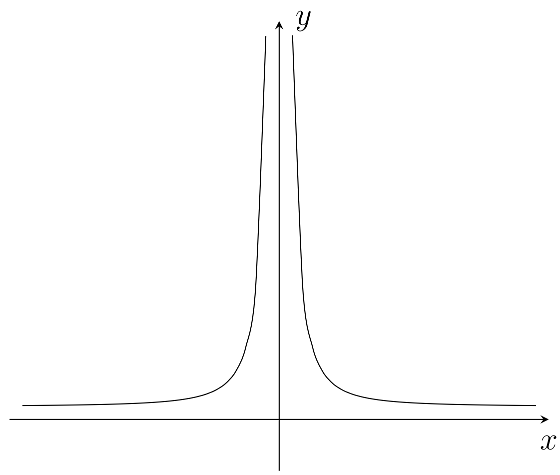


Figura 3.19

Si pensamos en la función $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y analizamos el comportamiento de las imágenes de x, cuando x se acerca a 0, veremos que por la derecha de cero las imágenes son cada vez más grandes (se van hacia infinito), y por la izquierda son cada vez más pequeñas (se van hacia menos infinito). En resumen:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty.$$

Nuestro objetivo ahora es dar las definiciones que describen los anteriores comportamientos. Empezaremos dando una definición para el siguiente límite.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

A medida que nos acercamos al punto a, las imágenes se hacen cada vez más grandes. Podemos describir el anterior comportamiento diciendo:

Para todo $M > 0$ existe un intervalo de la forma $(a-\delta, a+\delta)$, tal que si $x \in (a-\delta, a+\delta)$, con $x \neq a$, entonces $f(x) > M$.

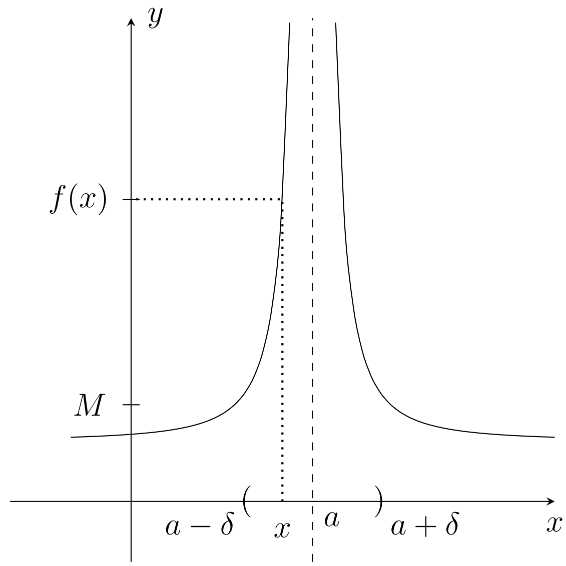


Figura 3.20

Formalmente, la definición está dada de la siguiente manera:

Definición 3.37. *Si f es una función real, diremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (el límite cuando x tiende a a de $f(x)$ es infinito) si:*

Para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

Nota. En este tipo de límites no pueden aplicarse las propiedades, puesto que ∞ y $-\infty$ no son números y por tanto no se pueden sumar, restar, multiplicar o dividir.

Ejemplo 3.38. *Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.*

Debemos probar que para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $\dfrac{1}{x^2} > M$. Nuevamente, debemos empezar buscando un δ adecuado.

Como $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$ *y:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} &> M \\ \frac{1}{M} &> x^2 \\ \sqrt{\frac{1}{M}} &> \sqrt{x^2} = |x|\,. \end{aligned}$$

Por tanto, dado $M > 0$, *sea* $\delta = \sqrt{\frac{1}{M}}$. *Si* $0 < |x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$, *entonces*

$$x^2 < \frac{1}{M}$$

y como $x^2 > 0$*:*

$$\frac{1}{x^2} > M,$$

y concluimos así la demostración.

Teorema 3.39. *Sea* $a \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$ *y* $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, *donde* $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, *entonces*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{si } c > 0 \text{ y } g(x) \to 0 \text{ por valores positivos, ó,} \\ & \phantom{\text{si }} c < 0 \text{ y } g(x) \to 0 \text{ por valores negativos.} \\ -\infty, & \text{si } c > 0 \text{ y } g(x) \to 0 \text{ por valores negativos, ó,} \\ & \phantom{\text{si }} c < 0 \text{ y } g(x) \to 0 \text{ por valores positivos.} \end{cases}$$

Este teorema es válido si en lugar de $x \to a^+$ se tiene $x \to a^-$, ó, $x \to a$ en todos los límites involucrados.

Prueba. El lector puede escribirla para alguno de los cuatro casos; es claro que los casos restantes son similares. □

Nota. Como $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, cuando decimos $g(x) \to 0$ por valores positivos, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, a+\delta)$ entonces $g(x) > 0$.

Ejemplo 3.40. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+3}{x-2}$.
Tenemos que $\lim\limits_{x\to 2^-} x + 3 = 5$ *y* $\lim\limits_{x\to 2^-} x - 2 = 0$, *donde* $x - 2 < 0$ *para* $x < 2$, *es decir,* $x - 2$ *tiende a cero por valores negativos. Entonces, por el teorema 3.39 concluimos que* $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+3}{x-2} = -\infty$.

Ejercicio 3.41.

1. *Demostrar:*

   a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty.$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} = \infty.$

2. *Para cada una de las siguientes expresiones, escribir una definición y hacer el bosquejo del gráfico correspondiente:*

   a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty.$

   b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty.$

   c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$

3. *Demostrar:*

   a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty.$

   b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty.$

   c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{3-x} = -\infty.$

4. *Calcular los siguientes límites:*

   a) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+4}{x-2}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{[x]}{x-1}$

   c) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-5}{\sqrt{4-x^2}}, \ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-5}{\sqrt{4-x^2}}$

   d) $\lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x-5}{3-x}$

3.7.3. Límites en infinito y al infinito

En esta parte estamos pensando en límites como

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

Ejercicio 3.42. *Elaborar un gráfico que ilustre la situación anterior y escribir la definición correspondiente a este límite.*

Vamos a mostrar algunos ejemplos de cómo resolver este tipo de límites para funciones polinómicas y racionales.

Ejemplo 3.43. *Calcular* $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^3 - 6x^2 - 1)$.

Recordemos que no podemos aplicar la propiedad para la suma de límites, puesto que ∞ *y* $-\infty$ *no pueden sumarse. Entonces procedemos de la siguiente manera:*

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-3x^3 - 6x^2 - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3 \left(-3 - \frac{6}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x} = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$, *entonces* $\left(-3 - \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ *tiende a* -3 *cuando* x *decrece indefinidamente. Por otra parte,* x^3 *tiende a* $-\infty$ *cuando* x *tiende a* $-\infty$; *por tanto, el producto* $x^3\left(-3 - \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ *es positivo y cada vez mayor a medida que* x *tiende a* $-\infty$. *Así,*

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-3x^3 - 6x^2 - 1\right) = +\infty.$$

Ejemplo 3.44. *Calcular* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - 5x + 8}{-x^2 + 1}$.

Como x *es arbitrariamente grande, podemos dividir numerador y denominador de esta fracción por* x^2 : *la mayor potencia de* x *en el denominador.*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 5x + 8}{-x^2 + 1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{8}{x^2}}{-\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2}}{-1 + \frac{1}{x^2}} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Puesto que al tener que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x^2}$ *y* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}$ *son cero, los cocientes* $\dfrac{2x-\frac{5}{x}+\frac{8}{x^2}}{-1+\frac{1}{x^2}}$ *son negativos y como* x *se hace arbitrariamente grande, estos cocientes tienden a* $-\infty$.

Ejercicio 3.45. *Calcular los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^4-7x^3+12x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty}(-8x^5+x^2+x+1)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x^3+2x^2+5}{2x^2+x-2}$ *d)* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^4+x-1}{x-3}$

No olvidemos que cuando decimos que un límite nos dio ∞ ó $-\infty$, ese límite no existe, simplemente nos describe el comportamiento de la función.

3.8. Asíntotas

Intuitivamente decimos que una recta es asíntota de una curva en el plano cartesiano, si al alejarnos del origen la recta y la curva se acercan.

3.8.1. Asíntota vertical

La recta $x=a$ es una asíntota vertical de $y=f(x)$, si $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$, ó $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$, ó $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$.

Ejemplo 3.46. *Puesto que* $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3}=-\infty$, *entonces la recta* $x=3$ *es una asíntota vertical de* $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$. *Representarla gráficamente.*

3.8.2. Asíntota horizontal

La recta $y=b$ es una asíntota horizontal de $y=f(x)$, si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$, ó $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$.

Ejemplo 3.47. *Comprobar, a través de la definición, que la recta* $y=-2$ *es una asíntota horizontal de* $g(x)=\dfrac{9-4x^2}{2x^2+5}$. *Con la ayuda de una graficadora, revisar la gráfica de esta función.*

3.8.3. Asíntota oblicua

La recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $y = f(x)$, si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, ó $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$.

Supongamos que

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0. \tag{3.13}$$

Vamos a encontrar una forma de hallar las constantes m y b que determinan dicha asíntota oblicua.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, al multiplicar este límite con el límite en (3.13) se obtiene

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0. \tag{3.14}$$

Por otra parte, para todo número real b, ya sea cero o diferente de cero, se tiene que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{b}{x} = 0$; de modo que al sumar este límite con el límite en (3.14) se tiene que

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m \right] = 0. \tag{3.15}$$

Puesto que $\lim\limits_{x \to +\infty} m = m$, al sumar este límite con el límite en (3.15), encontramos una fórmula para encontrar la constante m, dada por

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m.} \tag{3.16}$$

Finalmente, ya conocida m por la fórmula anterior y como $\lim\limits_{x \to +\infty} b = b$, al sumar este límite con el límite en (3.13), se obtiene una fórmula para hallar la constante b:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = b.} \tag{3.17}$$

Por lo tanto, si los límites en (3.16) y (3.17) existen, tenemos que $y = mx + b$ es asíntota oblicua de $y = f(x)$.

Ejemplo 3.48. *Hallar las asíntotas oblicuas de* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Vamos a calcular los límites determinados en (3.16) y (3.17), si existen.
$m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{(x-2)\,x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} = 1.$
$b = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{x^2+1}{x-2} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2x}{x-2} = 2.$

Nótese que al calcular estos límites cuando $x \to -\infty$ *se obtiene el mismo resultado.*

Por lo tanto, la asíntota oblicua de esta función es $y = x+2$.

Caso particular: Cuando se tiene una función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde grado$(P(x))$ = grado$(Q(x)) + 1$, la función f tiene asíntota oblicua que se puede identificar al hacer la división del polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento en este caso particular.

Ejemplo 3.49. *Consideremos* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$, *una función racional que cumple la condición ya mencionada de los grados de los polinomios. Tenemos que* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2} = x+2+\dfrac{5}{x-2}$. *Esto se obtiene al hacer la división del polinomio* x^2+1 *entre* $x-2$:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^2 & & + & 1 & x - 2 \\ \cline{5-5}
-x^2 & + \ 2x & & & x + 2 \\ \cline{1-2}
 & 2x & + & 1 & \\
- & 2x & + & 4 & \\ \cline{2-4}
 & & & 5 &
\end{array}
$$

Puesto que

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x-2} = 0,$$

entonces la recta $y = x+2$ *es una asíntota oblicua de* f. *Note que este resultado coincide con lo obtenido en el Ejemplo 3.48.*

Ejercicio 3.50.

1. *Determinar las asíntotas para cada una de las siguientes funciones:*

   a) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-3x-4}$ b) $g(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2-4}$

   c) $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x-1}$ d) $j(x) = e^{-x} senx + x$

2. *Considerar la función* $f(x) = \dfrac{2+\sqrt{x^2-4x}}{2}$.

   a) *Verificar que* $y = \frac{1}{2}x$ *es asíntota de* f *cuando* $x \to \infty$ *y que* $y = -\frac{1}{2}x + 2$ *es asíntota de* f *cuando* $x \to -\infty$.

   b) *Transformar la ecuación* $y = f(x)$ *para apreciar que la función* f *corresponde a "la mitad de una hipérbola". Determinar la ecuación de dicha hipérbola.*

   c) *Graficar la hipérbola obtenida en el numeral anterior, sus asíntotas y confirmar los resultados obtenidos en la parte a) de este ejercicio.*

CAPÍTULO 4

Continuidad

4.1. Introducción

Observemos los gráficos de las siguientes funciones en las figuras 4.1, 4.2 y 4.3.

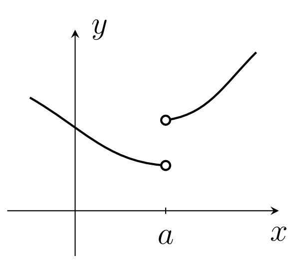


Figura 4.1

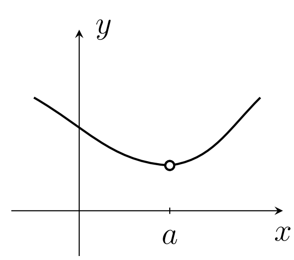


Figura 4.2

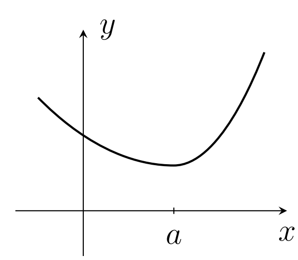


Figura 4.3

Queremos pensar en el concepto de continuidad en un punto. Intuitivamente hablando, ¿cuáles de las anteriores funciones son continuas en $x = a$?

Si nuestra intuición nos dice lo mismo que la suya, podemos afirmar que la figura 4.1 está lejos de representar una función continua en $x = a$. En la figura 4.2, es posible que muchos de ustedes tiendan a aceptar que representa una función continua en $x = a$, pero otros no pensarán lo mismo. Pero, definitivamente, de la figura 4.3 nadie dudaría en afirmar que es una función continua en $x = a$.

Ahora pretendemos construir una definición que sea coherente con lo que esperamos que sea la definición de función continua en un punto de su dominio. Pretendemos que a medida que nos acercamos a $x = a$, las imágenes se acerquen a un valor específico, esto es lo que ocurre en las figuras 4.2 y 4.3, y podemos resumirlo en términos matemáticos diciendo que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, para algún $L \in \mathbb{R}$. Por otra parte, la situación ideal de continuidad en $x = a$ la encontramos en la figura 4.3, en la cual existe $f(a)$ y además, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por tanto, apoyados en los comentarios anteriores, damos la definición de función continua en un punto de su dominio.

4.2. Definición de continuidad

Definición 4.1. *Sea f una función real. Diremos que f es continua en a si:*

1. *$f(a)$ existe.*
2. *$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.*
3. *$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Nota. Es importante destacar que en esta definición están implícitos dos hechos: el punto a pertenece al dominio de la función (por 1) y la función debe estar definida en un intervalo alrededor de a (por 2).

Esta definición equivale a la siguiente.

Definición 4.2. *f es continua en a, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.*

Observe que comparando con la definición de límite, escribimos $|x - a| < \delta$, en lugar de $0 < |x - a| < \delta$.

¿Qué implica este cambio?

Como siempre, daremos respuesta a esta pregunta esperando que usted haya llegado a la misma conclusión. Al considerar todos los puntos tales que $|x - a| < \delta$ exigimos que, entre otros, $x = a$ satisfaga la definición. Esta situación no ocurría en la definición de límite ya que como se insistió, en esa definición no nos importaba lo que ocurriera con $x = a$, y precisamente esta es la gran diferencia entre la definición de límite y la de función continua en $x = a$.

Ejemplo 4.3. *Probar que la función* $f(x) = x^3$ *es continua en* $x = 2$.

1. $f(2)$ *existe, ya que* $f(2) = 8$.
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3$ *existe, ya que* $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$.
3. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = f(2)$.

Con base en la Definición 4.1, podemos concluir que f *es continua en* $x = 2$.

De hecho, escribiendo una justificación similar, puede probarse que esta función es continua en todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.4. *Probar que la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x > 2 \\ 2x & si \quad x \leq 2 \end{cases}$ *es continua en* $x = 2$.

1. $f(2)$ *existe y es igual a* 4.
2. *Como* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2 = 4$ *y* $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 2x = 4$, *entonces* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ *existe y es igual a* 4.
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Por tanto, f *es continua en* $x = 2$.

Aunque la intuición nos ayudó para aproximarnos a la definición de continuidad en un punto, existen funciones que con esta definición son continuas en un punto del dominio, en contra de lo que podría sugerirnos nuestra intuición.

Ejemplo 4.5. *Demostrar que* $g(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *es continua en* $x = 1$.

Apoyados en el excelente trabajo que usted realizó en la sección anterior, podemos afirmar que $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 1$; *y como* $g(1) = 1$, *entonces* g *es continua en* $x = 1$. *Realizar el gráfico de* g.

Ejemplo 4.6. *Probar que* $h(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad x \geq 0 \\ x & si \quad x < 0 \end{cases}$ *no es continua en* $x = 0$.

Afortunadamente, nuestros lectores son muy responsables y podemos afirmar que $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ *no existe. ¿Por qué? Por tanto,* h *no es continua en* $x = 0$. *En este caso, decimos que* h *es discontinua en* $x = 0$.

Sin embargo, pruebe que h *es continua en todo* $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Definición 4.7. *Diremos que* f *tiene una discontinuidad removible en* $x = a$, *si* f *no es continua en* a *y* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *existe.*

Por otra parte, diremos que f *tiene una discontinuidad no removible en* $x = a$, *si* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *no existe.*

Ejemplo 4.8. *La función* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ *tiene una discontinuidad removible en* $x = 3$, *puesto que* $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$, *pero* f *no está definida en* $x = 3$. *Observemos su gráfica en la figura 4.4.*

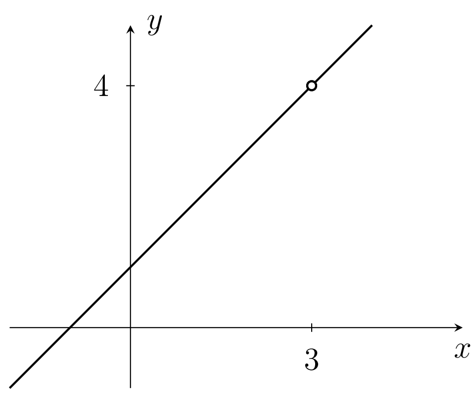


Figura 4.4

Esta función es discontinua en $x = 3$ *y esta discontinuidad se llama removible porque la función "casi" es continua en* 3. *Puesto que existe el límite de esta función en* $x = 3$, *el problema no es tan grave. Podemos construir una función* $\widetilde{f}$ *que difiera con* f *únicamente en un punto y de manera que* $\widetilde{f}$ *sea continua en* 3. *Si* $\widetilde{f}$ *la definimos como*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & si \quad x \neq 3 \\ 4 & si \quad x = 3 \end{cases}$$

encontramos que $\widetilde{f}$ *es continua en* 3 *y difiere únicamente en un punto con* f.

Así, siempre que tengamos una función f con una discontinuidad removible, esta discontinuidad podemos "arreglarla" con una función distinta de f únicamente en un punto y que sí es continua en ese punto, en el cual encontramos la discontinuidad removible.

Ejemplo 4.9. *La función* $i(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ *no es continua en* $x = 0$*, ya que* $i(0)$ *no existe. Sin embargo,* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$*. Por tanto,* $i(x)$ *tiene una discontinuidad removible en* $x = 0$.

En este caso, $\widetilde{i}$ *se define por*

$$\widetilde{i}(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases},$$

donde $\widetilde{i}$ *es continua en* 0 *y difiere únicamente en un punto con* i.

Ejemplo 4.10. *La función* g *del Ejemplo 4.5 no es continua en* a*, para* $a \neq 1$*, ya que en este caso* $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ *no existe. De esto puede concluirse que* g *tiene una discontinuidad no removible en* a*, para cada* $a \neq 1$.

Ejercicio 4.11. *Determinar si las siguientes funciones son continuas en el punto dado; si no lo son, determinar el tipo de discontinuidad:*

1. $f(x) = tan\ x;\ a = \frac{\pi}{4}$.
2. $g(x) = [x]\,;\ a = 4,\ a = 3{,}99$.
3. $h(x) = \dfrac{sen\ x}{x};\ a = 0$.
4. $i(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\ x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases};\ a = 0$.
5. $j(x) = \dfrac{1}{x};\ a = 0$.
6. $k(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & si \quad x > 2 \\ sen^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right) & si \quad -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 & si \quad x < -2 \end{cases};\ a = 2,\ a = -2$.

7. *Tomar las funciones anteriores con discontinuidad no removible en a. Observar que algunas de estas discontinuidades ocurren porque el límite no existe aunque los límites unilaterales existen. Podría clasificarse este tipo de discontinuidad como discontinuidad no removible de salto.*

   También se encuentra que la función es discontinua a, con discontinuidad no removible, pero el límite tiende a infinito o menos infinito; en este caso se habla de una discontinuidad no removible infinita.

   Existen funciones con discontinuidad no removible de otros tipos, por ejemplo el que podría llamarse oscilante. ¿Puede encontrar un ejemplo de este caso?

4.3. Propiedades de las funciones continuas

Al igual que con el concepto de límite, existen algunas propiedades para las funciones continuas que nos ayudan a determinar si una función es continua en un punto, a partir de otras funciones para las cuales previamente se ha estudiado su continuidad en este punto.

Teorema 4.12. *Sean f y g funciones continuas en a, entonces:*

1. *$f \pm g$ es continua en a.*
2. *$f.g$ es continua en a.*
3. *$\dfrac{f}{g}$ es continua en a, siempre que $g(a) \neq 0$.*

Prueba.

1. Como f y g son continuas en a, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f \pm g)(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \\ &= f(a) \pm g(a) = (f \pm g)(a). \end{aligned}$$

   Luego, $f \pm g$ es continua en a.

2. Muy fácil.

3. Más fácil. □

Utilizando este teorema es muy sencillo justificar que las funciones constantes, las funciones lineales y, en general, las funciones polinómicas son continuas en todo a, con $a \in \mathbb{R}$. Además, las funciones racionales $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (donde $f(x)$, $g(x)$ son polinomios) son continuas en a, si $g(a) \neq 0$.

Definición 4.13. *Diremos que una función real f es continua en un intervalo abierto $I \subseteq Dom f$, si f es continua en a, para todo $a \in I$.*

Así, podemos afirmar que las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$ y las funciones racionales son continuas en todo su dominio.

Definición 4.14. *Sean $a < b$ y f definida en $[a, b]$. Diremos que f es continua en $[a, b]$ si:*

1. *f es continua en (a, b).*
2. *f es continua en a por derecha, es decir, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.*
3. *f es continua en b por izquierda, es decir, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.*

De manera similar puede definirse cuándo una función f es continua en $[a, b)$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ y $(a, b]$. Escriba estas definiciones.

Una función como $y = \sqrt{2x^2 + 1}$ es continua en todos los reales. Demostrar esto puede ser un poco dispendioso utilizando la definición, pero con la ayuda del siguiente teorema que habla de la continuidad de una función compuesta, es algo muy sencillo.

Teorema 4.15. *Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en a.*

La demostración de este teorema puede hacerse en cuatro renglones. Sin embargo, vamos a ilustrar la situación para que esos cuatro renglones sean muy productivos.

Observemos los gráficos 4.5 y 4.6.

Notemos que en la gráfica de f nombramos los ejes y y z, en lugar de x y y, respectivamente, pero este cambio no debe causarnos confusión.

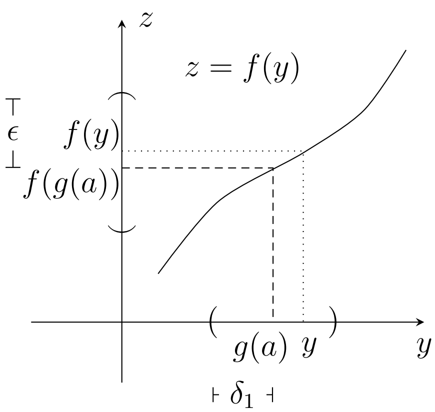


Figura 4.5

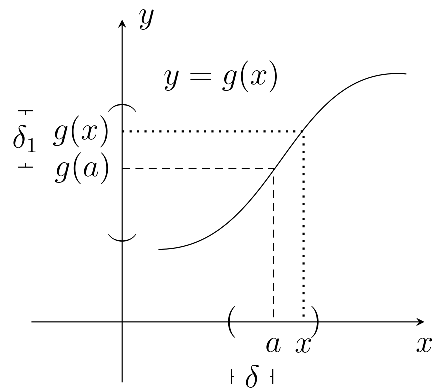


Figura 4.6

1. Por la continuidad de f en $g(a)$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que si $|y - g(a)| < \delta_1$, entonces $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$.

2. Por la continuidad de g en a, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$.

En particular, si en (2) hacemos $\varepsilon = \delta_1$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - g(a)| < \delta_1$; haciendo $y = g(x)$, tenemos que $|y - g(a)| < \delta_1$, de modo que utilizando (1) podemos concluir que $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$.

Prueba. Por la continuidad de f, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que si $|y - g(a)| < \delta_1$, entonces $|f(y) - f(g(a))| < \varepsilon$. Por la continuidad de g, tomando $\varepsilon = \delta_1$ y $y = g(x)$, existe $\delta > 0$, tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|y - g(a)| < \delta_1$, de donde $|f(g(x)) - f(g(a))| < \varepsilon$. $\square$

Ejemplo 4.16. *Probar que* $h(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$ *es continua en* $x = 2$.

Si $g(x) = 2x^2 + 1$ *y* $f(x) = \sqrt{x}$, *entonces* $h(x) = (f \circ g)(x)$. *Como* g *es continua en* $x = 2$ *y* f *es continua en* $g(2) = y = 9$, *entonces, por el teorema anterior,* $f \circ g$ *es continua en* $x = 2$.

De hecho, usted puede justificar fácilmente que h es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.17.

1. *Mostrar que si* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ *y* f *es continua en* L, *entonces* $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$.

2. *Determinar el conjunto más grande donde la función es continua. Justificar.*

   a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$. *b)* $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

   c) $l(x) = \dfrac{3 - x}{\sqrt{x^2 - 9}}$. *d)* $k(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

   e) $h(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

   f) $j(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

3. *Hallar los valores que puede tomar c para que f sea continua en todos los números reales, si*

$$f(x) = \begin{cases} x + c^2 & , \; si \; x \leq 2 \\ x^2 + 2cx & , \; si \; x > 2. \end{cases}$$

4. *Hallar los valores de λ para los cuales la función $b(x) = \dfrac{1}{\lambda x^2 - 2\lambda x + 1}$ sea continua en:*

   a) $[0, 1]$. *b)* $\mathbb{R}$.

En la sección anterior se demostraron los límites $\lim\limits_{x \to 0} sen\, x = 0 = sen\, 0$ y $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$. Como consecuencia de esto, las funciones $sen\, x$ y $\cos x$ son continuas en $x = 0$. Ahora pretendemos mostrar que estas funciones no sólo son continuas en $x = 0$, sino que lo son en todo a que pertenece a $\mathbb{R}$.

Para lograrlo, vamos a encontrar una expresión que equivale a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, con la cual nuestro objetivo será más fácil de lograr.
Por definición, este límite equivale a decir que: "Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$".

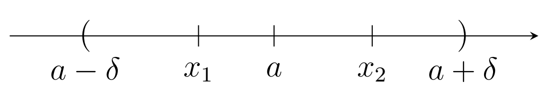


Figura 4.7

Recordemos que x puede estar a la derecha de a o a la izquierda de a. Si hacemos $h = x - a$, tenemos la Figura 4.8.

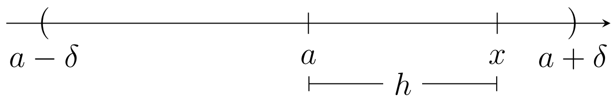


Figura 4.8

Como $h = x - a$, entonces $x = a + h$. Remplazando esto en la definición de límite, tenemos:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < |(a+h) - a| = |h| < \delta$ entonces $|f(a+h) - L| < \varepsilon$.

La cual es la definición del siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = L$$

Por tanto, las expresiones $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{h \to 0} f(a+h) = L$ son equivalentes.

Probemos ahora que $f(x) = \cos x$ es continua en todo a, con $a \in \mathbb{R}$.

Para probar esto, debemos probar que $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$, equivale a probar que $\lim_{h \to 0} \cos(a+h) = \cos a$.

Lo cual es cierto ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \cos(a+h) &= \lim_{h \to 0} (\cos a \cos h - \mathit{sen}\ a\ \mathit{sen}\ h) \\ &= \lim_{h \to 0} \cos a \cos h - \lim_{h \to 0}\ \mathit{sen}\ a\ \mathit{sen}\ h \\ &= \cos a - 0 = \cos a \end{aligned}$$

Esto nos muestra que la función $\cos x$ es continua en todos los reales. Sería muy descortés de nuestra parte no permitir que usted demuestre lo mismo en el caso de la función $\mathit{sen}\ x$. Como consecuencia de las propiedades de continuidad, $\tan x, \cot x, \sec x$ y $\csc x$ son continuas en sus respectivos dominios.

Por otra parte, en la sección anterior también se mostró que $\lim_{x \to 0} e^x = 1 = e^0$, es decir, la función e^x es continua en 0. Sea $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} e^{a+h} &= \lim_{h \to 0} e^a e^h \\ &= \left(\lim_{h \to 0} e^a\right)\left(\lim_{h \to 0} e^h\right) \\ &= e^a \cdot 1 = e^a. \end{aligned}$$

Así, hemos probado que la función e^x es continua en $\mathbb{R}$, es decir, $\lim\limits_{x\to a} e^x = e^a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Consideremos ahora $b > 0$, $b \neq 1$ y la función exponencial $y = b^x$. Tenemos que

$$x = \log_b y = \frac{\ln y}{\ln b}$$

de modo que $x \ln b = \ln y$ y por lo tanto

$$e^{x \ln b} = y = b^x.$$

Como $g(x) = x \ln b$ y $f(x) = e^x$ son funciones continuas en todos los números reales entonces, como consecuencia del Teorema 4.15, se tiene que $(f \circ g)(x) = f(x \ln b) = e^{x \ln b} = b^x$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4.18. *Utilizar los resultados anteriores y las propiedades de continuidad para encontrar el conjunto más grande donde cada función dada es continua.*

1. $f(x) = \dfrac{\tan x}{senx + 1}$.
2. $g(x) = \cos(\sqrt{x^3})$.
3. $h(x) = \dfrac{x}{1 + \sec x}$.
4. $j(x) = x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + sen^2 x}$.
5. $k(x) = \dfrac{\cos x}{e^x - 1}$
6. $l(x) = \sqrt{8 - 2^x}$

4.4. Consecuencias de la continuidad de una función

En esta sección demostraremos algunas propiedades que adquiere una función como consecuencia de su continuidad. Trabajaremos como se presenta este tema en [5], pero nos hemos interesado en completar algunos detalles de las demostraciones.

4.4.1. Teoremas del valor intermedio y de valores extremos

Los tres teoremas de esta parte se presentan inicialmente sin demostración para que sea más sencillo precisar las ideas que ellos encierran. Sus demostraciones se dejarán para la siguiente parte.

Teorema 4.19. *Teorema del valor intermedio.*
Si f es una función continua en $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x en (a,b), tal que $f(x) = 0$.

Gráficamente estamos en casos como los siguientes (ver figuras 4.9 y 4.10).

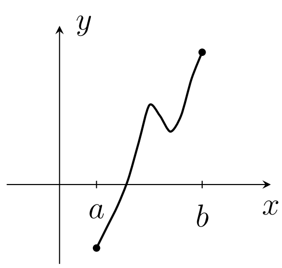


Figura 4.9

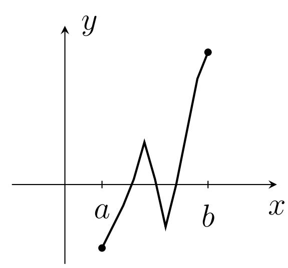


Figura 4.10

Notemos que la continuidad de la función en el intervalo cerrado $[a,b]$ es fundamental; sin ésta no puede garantizarse la existencia de tal x, como lo ilustran los gráficos de funciones (ver figuras 4.11, 4.12 y 4.13) que satisfacen las otras hipótesis del teorema, pero que no son continuas en todo el intervalo $[a,b]$.

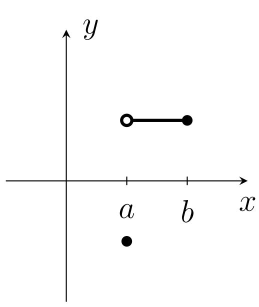


Figura 4.11

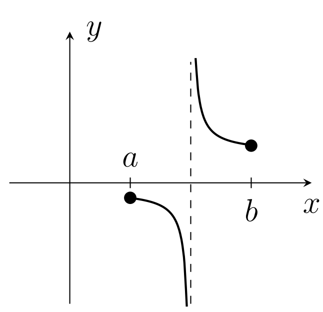


Figura 4.12

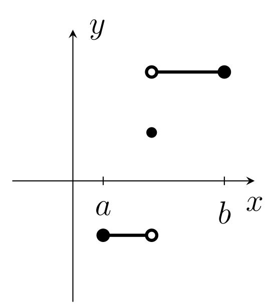


Figura 4.13

Por otra parte, podemos encontrar funciones que no cumplan las hipótesis y sin embargo satisfagan la tesis del teorema. No estaría mal que usted encontrara un ejemplo.

Teorema 4.20. *f es acotada superiormente.*
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, existe algún número N, tal que $f(x) \leq N$, para todo x en $[a, b]$.

Gráficamente podemos obtener las figuras 4.14 y 4.15.

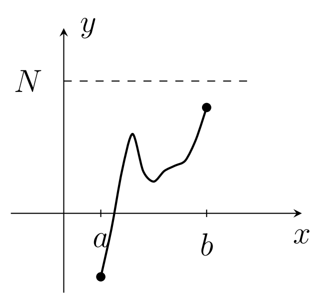


Figura 4.14

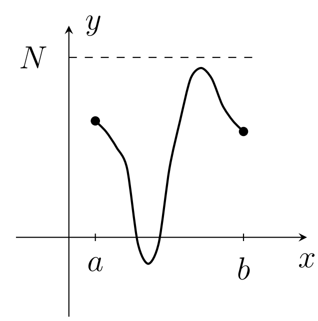


Figura 4.15

Nuevamente la continuidad es esencial, esto lo ilustra la figura 4.12 de la anotación hecha al teorema anterior.

Teorema 4.21. *f alcanza su valor máximo.*
Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existe algún z en $[a, b]$, tal que $f(z) \geq f(x)$, para todo x en $[a, b]$.

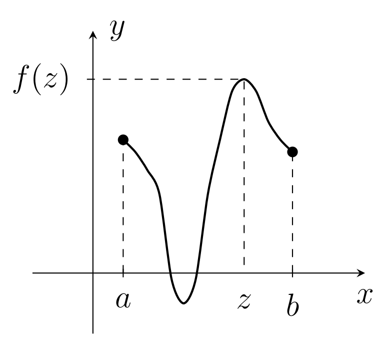


Figura 4.16

De nuevo, es necesario que la función sea continua en $[a, b]$ para garantizar la existencia de z; sin ésta podrían tenerse las situaciones de las figuras 4.17, 4.18 y 4.19.

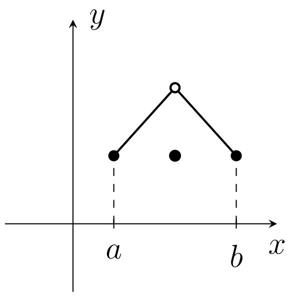


Figura 4.17

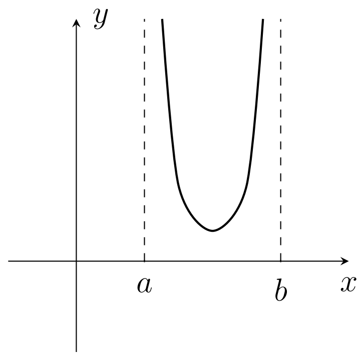


Figura 4.18

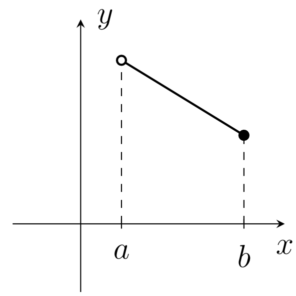


Figura 4.19

El Teorema del valor intermedio (Teorema 4.19), se usa principalmente para garantizar existencia de soluciones de algunas ecuaciones y para hacer aproximaciones de esas soluciones, como lo muestra el Ejemplo 4.22.

Ejemplo 4.22. *Mostrar que la ecuación* $x^3 + x - 1 = 0$ *tiene una solución en* $[0, 1]$.

Consideremos la función $f(x) = x^3 + x - 1$. *Esta función es continua en* $\mathbb{R}$ *y en particular en* $[0, 1]$, *ya que es una función polinómica.*

Como $f(0) = -1 < 0 < f(1) = 1$, *entonces por el teorema del valor intermedio existe un número* c *en* $[0, 1]$, *tal que* $f(c) = 0$; *además, sabemos que* $c \in (0, 1)$ *y dicho* c *es una solución de* $x^3 + x - 1 = 0$.

Hay que anotar que el teorema nos garantiza la existencia de la solución, pero no nos dice cuál es.

Ahora vamos a mostrar un procedimiento para encontrar una aproximación de c, *usando el teorema del valor intermedio.*

Puesto que $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0 < f(1) = 1$, *entonces* $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0 < f(\frac{3}{4}) = \frac{11}{64}$, *entonces* $c \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = (0{,}5, 0{,}75)$.

$f(\frac{5}{8}) = -\frac{67}{512} < 0 < f(\frac{3}{4}) = \frac{11}{64}$, *entonces* $c \in \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right) = (0{,}625, 0{,}75)$.

Continuando este proceso, podemos conseguir una aproximación de c *tan buena como se quiera.*

Ejercicio 4.23.

1. *Demostrar que* $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2x - 1$ *tiene por lo menos una raíz real.*
2. *Mostrar que* $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ *tiene una solución en* $[1, 2]$.
3. *Utilizar la función* $g(x) = x^2 - 7$ *para hallar una aproximación de* $\sqrt{7}$.

4.4.2. Demostraciones

En esta sección se presentan las demostraciones de los teoremas 4.19, 4.20 y 4.21. Tómese su tiempo para leer y releer con mucha antención cada frase de las demostraciones.

Para la primera demostración necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.24. *Sea* f *una función continua en* a.

1. *Si* $f(a) > 0$, *entonces existe un* $\delta > 0$, *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* x, *con* $|x - a| < \delta$.
2. *Si* $f(a) < 0$, *entonces existe un* $\delta > 0$, *tal que* $f(x) < 0$ *para todo* x, *con* $|x - a| < \delta$.

Prueba. Basta con tomar $\varepsilon = f(a)$ en la primera parte y $\varepsilon = -f(a)$ en la segunda parte. No olvide escribir los detalles en cada caso. □

Prueba. Teorema 4.19.

Debemos probar: si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$ tal que $f(x) = 0$.

La idea es elegir el menor x de $[a, b]$, tal que $f(x) = 0$. Como lo sugiere el gráfico de la figura 4.20, consideremos el conjunto

$$A = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ es negativa en } [a, x]\}$$

- A no es vacío puesto que $a \in A$. Además, como f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0$, entonces por el lema anterior existe $\delta_1 > 0$, tal que si $a \leq x < a + \delta_1$ se tiene $f(x) < 0$ y así, estos x están en A.

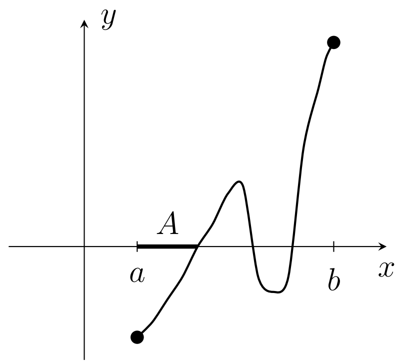


Figura 4.20

- A está acotado superiormente por b. Además, como f es continua en $[a, b]$ y $f(b) > 0$, entonces existe $\delta_2 > 0$, tal que si $b - \delta_2 < x \leq b$ se tiene $f(x) > 0$, de modo que estos x son también cotas superiores de A.

Por el axioma de completez se tiene que A tiene mínima cota superior, llamémosla $\alpha = SupA$. Por lo anotado anteriormente se tiene que $a < \alpha < b$.

Queremos ver que $f(\alpha) = 0$. Trabajemos por contradicción:

1. Si $f(\alpha) < 0$, por continuidad existe $\delta_3 > 0$, tal que si $\alpha - \delta_3 < x < \alpha + \delta_3$, entonces $f(x) < 0$.

   Ahora, como $\alpha = SupA$, existe un x_0 en A, tal que $\alpha - \delta_3 < x_0 < \alpha$; es decir, f es negativa en $[a, x_0]$.

   Por otra parte, existe un x_1 tal que $\alpha < x_1 < \alpha + \delta_3$ y se tiene que f es negativa en $[x_0, x_1]$ y, por tanto, en $[a, x_1]$. Tendríamos que $x_1 \in A$, pero $x_1 > \alpha$, lo cual contradice que $\alpha = SupA$. Luego no puede ser que $f(\alpha) < 0$.

2. Si $f(\alpha) > 0$, existe un $\delta_4 > 0$, tal que si $\alpha - \delta_4 < x < \alpha + \delta_4$, entonces $f(x) > 0$. Como $\alpha = SupA$, existe un x_2 en A, tal que $\alpha - \delta_4 < x_2 < \alpha$, pero f es negativa en $[a, x_2]$ y $f(x_2) > 0$ se contradicen.

Por tanto, $f(\alpha) = 0$. $\square$

Lema 4.25. *Si f es continua en a, entonces existe un $\delta > 0$, tal que f es acotada en $(a - \delta, a + \delta)$.*

Prueba. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = 1$ existe un $\delta > 0$, tal que si $a - \delta < x < a + \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < 1$; es decir, si $a - \delta < x < a + \delta$, entonces $f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$; de lo cual podemos concluir que f es acotada en $(a - \delta, a + \delta)$. □

Realizando demostraciones similares a la anterior podemos afirmar que si f es continua en a por derecha (o por izquierda), entonces existe un $\delta > 0$, tal que f es acotada en $[a, a + \delta)$ (o en $(a - \delta, a]$).

Prueba. Teorema 4.20.

Debemos probar que si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f está acotada superiormente en $[a, b]$. Consideremos

$$A = \{x \mid a \leq x \leq b \text{ y } f \text{ está acotada superiormente en } [a, x]\}.$$

- A no es vacío, puesto que $a \in A$. Además, como f es continua en a por derecha, existe un $\delta_1 > 0$, tal que f está acotada superiormente en $[a, a + \delta_1)$ y se tiene que $[a, a + \delta_1) \subseteq A$.
- Por la definición de A, b es una cota superior de A.

Entonces, por el axioma de completez, A tiene mínima cota superior; llamémosla $\alpha = SupA$.

De lo ya mencionado se tiene que $a < \alpha \leq b$. Queremos ver que $\alpha = b$.

Si $\alpha < b$, por la continuidad de f en α, existe $\delta_2 > 0$, tal que f es acotada en $(\alpha - \delta_2, \alpha + \delta_2)$. Como $\alpha = SupA$, entonces existe $x_0 \in A$, tal que $\alpha - \delta_2 < x_0 < \alpha$; es decir, f es acotada superiomente en $[a, x_0]$. Por otra parte, si $\alpha < x_1 < \alpha + \delta_2$, entonces f es acotada superiormente en $[x_0, x_1]$ y, por tanto, también en $[a, x_1]$, de modo que x_1 sería un elemento de A, pero $x_1 > \alpha = SupA$.

Esta contradicción nos conduce a $\alpha = b$.

Tenemos que f está acotada superiormente en $[a, x]$, para todo $x < b$ (con $x \in [a, b]$) y b es la mínima cota superior de dichos x; todavía no tenemos que f es acotada superiormente en $[a, b]$.

Como f es continua en b por izquierda, entonces existe un $\delta_3 > 0$, tal que f está acotada superiormente en $(b - \delta_3, b]$. Puesto que $b = SupA$, existe $x_3 \in A$, tal que $b - \delta_3 < x_3 < b$, de modo que f está acotada superiormente en $[a, x_3]$ y, por tanto, en $[x_3, b]$. Luego, f está acotada superiormente en $[a, b]$. □

Prueba. Teorema 4.21.

Debemos probar: si f es una función continua en $[a, b]$, entonces existe algún z en $[a, b]$, tal que $f(z) \geq f(x)$, para todo x en $[a, b]$.

Por el Teorema 4.20, f está acotada superiormente en $[a, b]$, es decir, el conjunto

$$B = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

está acotado superiormente y puesto que no es vacío, entonces B tiene una mínima cota superior; llamémosla $\alpha = SupB$.

Como $\alpha \geq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, basta demostrar que $\alpha = f(z)$ para algún z en $[a, b]$.

Supongamos que $\alpha \neq f(z)$ para todo z en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \frac{1}{\alpha - f(x)}, \; x \in [a, b]$$

es continua en $[a, b]$, ya que $\alpha - f(x)$ nunca es cero.

Por otra parte, como $\alpha = SupB$, entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un x en $[a, b]$, tal que $0 < \alpha - f(x) < \varepsilon$; es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe un x en $[a, b]$, tal que $g(x) > 1/\varepsilon$, pero esto significa que g no está acotada superiormente en $[a, b]$, lo cual contradice el Teorema 4.20.

Por tanto, $\alpha = f(z)$ para algún z en $[a, b]$. □

4.4.3. Generalizaciones

Los siguientes teoremas nos proporcionan versiones más generales de los tres teoremas ya enunciados.

Teorema 4.26. *Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) < c < f(b)$, entonces existe algún x en $[a, b]$, tal que $f(x) = c$.*

Prueba. Sea $g(x) = f(x) - c$.

Se tiene que $g(a) = f(a) - c < 0 < g(b) = f(b) - c$ y g es continua en $[a, b]$, puesto que es la diferencia de dos funciones continuas en $[a, b]$. Entonces, por el teorema del valor intermedio, existe x en $[a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ f(x) - c &= 0 \\ f(x) &= c. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.27. *Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) > c > f(b)$, entonces existe algún x en $[a,b]$, tal que $f(x) = c$.*

Prueba. Sea $g(x) = -f(x)$.

g es continua en $[a,b]$ y $-f(a) = g(a) < -c < g(b) = -f(b)$, entonces, por el teorema anterior, existe x en $[a,b]$ tal que

$$\begin{aligned} g(x) &= -c \\ -f(x) &= -c \\ f(x) &= c. \end{aligned}$$

□

Los dos teoremas anteriores nos proporcionan una versión más general del Teorema del valor intermedio (Teorema 4.19), el cual enunciaremos a continuación:

Teorema 4.28. *Si f es continua en $[a,b]$ y c es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe x en $[a,b]$, tal que $f(x) = c$.*

El siguiente teorema complementa lo visto en el Teorema 4.20 y junto a él, producen una versión general en el Teorema 4.30.

Teorema 4.29. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada inferiormente en $[a,b]$; es decir, existe algún número N, tal que $f(x) \geq N$ para todo x en $[a,b]$.*

Prueba. Consideremos $g(x) = -f(x)$; g es continua en $[a,b]$ de modo que por el Teorema 4.20, g está acotada superiormente en $[a,b]$, es decir, existe un número M tal que

$$\begin{aligned} g(x) &\leq M \quad \text{para todo } x \text{ en } [a,b] \\ -f(x) &\leq M \quad \text{para todo } x \text{ en } [a,b] \\ f(x) &\geq -M = N, \quad \text{para todo } x \text{ en } [a,b]. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.30. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$, es decir, existe un número N, tal que $|f(x)| \leq N$ para todo x en $[a,b]$.*

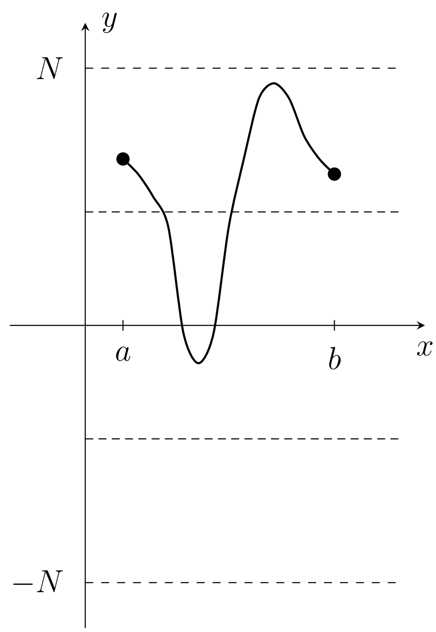


Figura 4.21

El siguiente teorema complementa el Teorema 4.21 y juntos, conforman el Teorema 4.32.

Teorema 4.31. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe algún z en $[a,b]$, tal que $f(z) \leq f(x)$, para todo x en $[a,b]$.*

Prueba. Sea $g(x) = -f(x)$; g es continua en $[a,b]$, entonces, por el Teorema 4.21, existe algún z en $[a,b]$ tal que

$$\begin{aligned} g(z) &\geq g(x), \text{ para todo } x \text{ en } [a,b] \\ -f(z) &\geq -f(x), \text{ para todo } x \text{ en } [a,b] \\ f(z) &\leq f(x), \text{ para todo } x \text{ en } [a,b]. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 4.32. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces f alcanza máximo y mínimo en $[a,b]$.*

4.4.4. Consecuencias interesantes

A continuación presentaremos otros resultados que son consecuencia de esos tres teoremas.

Teorema 4.33. *Todo número positivo posee una raíz cuadrada, es decir, si* $\alpha > 0$*, entonces existe algún número* x *tal que* $x^2 = \alpha$*.*

Prueba. Sea $f(x) = x^2$ una función continua en $\mathbb{R}$.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, entonces existe $b > 0$, tal que $f(b) > \alpha$.

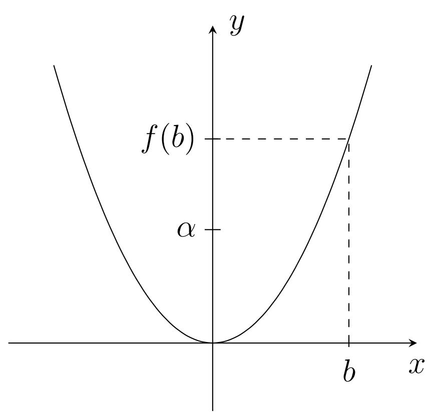


Figura 4.22

Tenemos que f es continua en $[0, b]$ y $0 = f(0) < \alpha < f(b)$, entonces, por el Teorema 4.28, existe un x en $[0, b]$, tal que $f(x) = x^2 = \alpha$. □

Ejercicio 4.34. *De manera similar que en el teorema anterior probar:*

1. *Todo número positivo tiene una raíz* $n-$*ésima, para cualquier* n *natural.*

2. *Todo número tiene raíz* $n-$*ésima, si* n *es impar.*

Teorema 4.35. *Si* n *es impar, entonces la ecuación*
$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ *tiene una raíz.*

Prueba. Sea $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$, continua en $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0) = +\infty$ y

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^n \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right) = -\infty$, por ser n impar.

Entonces, existen números a, b con $a < b$, tales que $f(a) < 0 < f(b)$ y puesto que f es continua en $[a, b]$, entonces, por el Teorema 4.28, existe c en $[a, b]$, tal que $f(c) = 0$. Luego, c es una raíz de $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$. □

Note que el teorema anterior no es generalizable para n par; la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.

Teorema 4.36. *Si n es par y $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, entonces existe un número z, tal que $f(z) \leq f(x)$ para todo x.*

Prueba. Como
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = +\infty$ y
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, por ser n par, entonces existen

$$\begin{aligned} N &> 0, \text{ tal que si } x > N, \text{ entonces } f(x) \geq f(0), \text{ y} \\ M &< 0, \text{ tal que si } x < M, \text{ entonces } f(x) \geq f(0). \end{aligned}$$

Puesto que f es continua en $[M, N]$, entonces, por el Teorema 4.32, existe z en $[M, N]$, tal que

$$f(z) \leq f(x), \text{ para todo } x \text{ en } [M, N].$$

En particular, $f(z) \leq f(0)$, pues $0 \in [M, N]$ y además,
$f(z) \leq f(0) \leq f(x)$ para $x > N$ ó $x < M$; por tanto, $f(z) \leq f(x)$ para todo x. □

Teorema 4.37. *Consideremos la ecuación $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = c$. Si n es par, entonces existe un número m tal que la ecuación posee al menos una solución para $c \geq m$ y no posee ninguna para $c < m$.*

Prueba. Llamemos $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, la cual es una función continua en $\mathbb{R}$.

Por el Teorema 4.36 existe un número z, tal que $f(z) \leq f(x)$ para todo x. Sea $m = f(z)$.

- Si $c < m$, entonces la ecuación $f(x) = c$ no tiene solución, puesto que $f(x) \geq m$ para todo x.

- Si $c = m$, entonces z es una solución de $f(x) = c$.

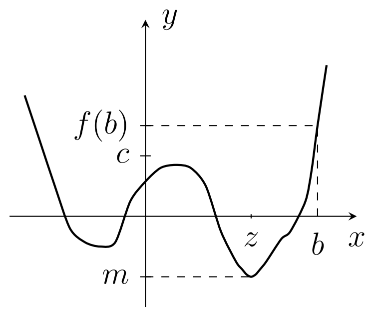


Figura 4.23

- Si $c > m$, sea $b > z$, tal que $f(b) > c$. (Existe por el límite ya mencionado en la demostración del Teorema 4.36). Como f es continua en $[z, b]$ y $m = f(z) < c < f(b)$, entonces existe x en $[z, b]$, tal que $f(x) = c$, y así x es solución de la ecuación.

$\square$

CAPÍTULO 5

Derivadas

5.1. Introducción

Sabemos que una recta es tangente a una circunferencia si la interseca en un único punto, como lo ilustra la Figura 5.1.

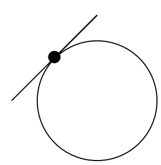


Figura 5.1

Pero, ¿puede afirmarse que, en general, una recta es tangente a una curva si la interseca en un único punto?

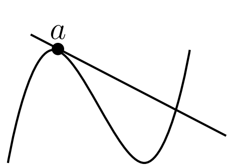


Figura 5.2

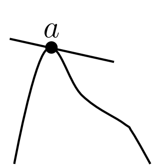


Figura 5.3

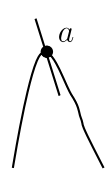


Figura 5.4

En las figuras 5.2 y 5.3, la recta es tangente a la curva en el punto a, pero en la figura 5.2 observamos que esta recta corta a la curva en otro punto. En la figura 5.4, la recta corta a la curva en un único punto a, pero la recta no es tangente a la curva en a.

Para que una recta sea tangente a una curva en un punto a, se necesita que la recta y la curva se intersequen en ese punto y que allí, cerca del punto a, ambas sean muy parecidas, es decir, que la recta tangente vaya en la dirección de la curva en $x = a$.

El concepto de derivada surge en el momento en que se plantea el problema de cómo hallar la pendiente de la recta tangente a la curva f en uno de sus puntos. El procedimiento utilizado consiste en aproximarnos a la recta tangente a f en $(a, f(a))$ a través de rectas secantes a la curva por el punto $(a, f(a))$ y otro punto cercano a él: $(a+h, f(a+h))$. Entonces, ahora se busca la pendiente de esta recta secante.

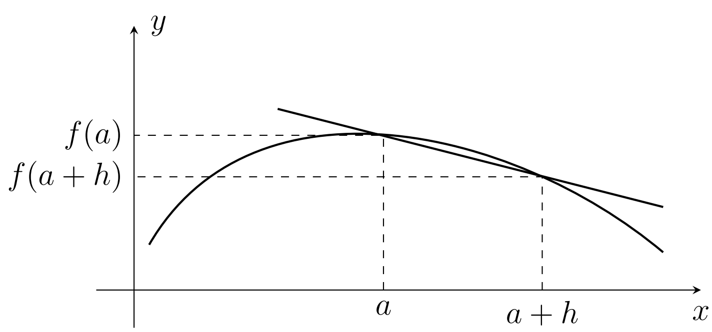


Figura 5.5

La pendiente de esta recta secante está dada por

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Naturalmente, ésta no es la pendiente que se quiere; sin embargo, si $a+h$ está suficientemente cerca de a, esta pendiente es aproximadamente igual a la pendiente de la recta tangente a f en a. Ahora, si se quiere que esta aproximación mejore, podemos tomar un punto cada vez más cercano de a, es decir, obligar a h que tienda a cero. Por tanto, en la medida que $a + h$ se acerca a a, la pendiente que obtenemos para la secante se acerca a la pendiente requerida. Luego, la situación ideal la obtendremos cuando $h \to 0$.

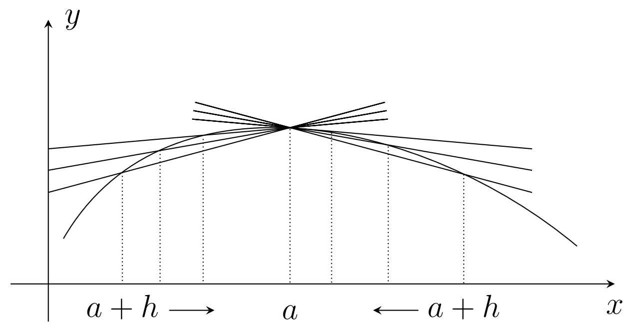


Figura 5.6

Por lo anterior, la pendiente de la recta tangente a f en $(a, f(a))$ está dada por:

$$m_{\text{tang}} = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

siempre que este límite exista. Si este límite existe, diremos que es la derivada de f en a, notada $f'(a)$ ó $\dfrac{df}{dx}(a)$.

5.2. Definición de derivada

Definición 5.1. *Sea f una función real. La derivada de f en $x = a$ está dada por:*

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5.1}$$

siempre que este límite exista.

Ejemplo 5.2. *Calcular la derivada de $f(x) = x^2$, en $a = 2$.*

Según (5,1) *tenemos:*

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4+h}{1} = 4. \end{aligned}$$

Con base en $f'(2)$, podemos calcular la ecuación de la recta tangente a f en el punto $(2, f(2))$, ya que conocemos su pendiente $f'(2)$ y tenemos un punto de esta recta, el punto $(2, 4)$. La ecuación está dada por

$$y = 4x - 4.$$

Observemos las gráficas de $f(x) = x^2$ y de $y = 4x - 4$ en el mismo plano (ver Figura 5.7).

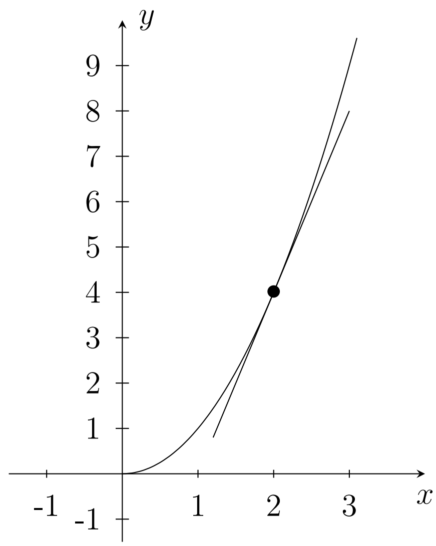


Figura 5.7

Ejercicio 5.3.

1. *Demostrar que*
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

2. *Determinar la ecuación de la recta tangente a* $f(x) = 2 - x^2$, *en el punto* $(\sqrt{2}, 0)$.

3. *Se dice que la recta* L_1 *es normal a* $y = f(x)$ *en* $(a, f(a))$, *si* L_1 *es perpendicular a la recta tangente a* $y = f(x)$ *en* $(a, f(a))$. *Hallar la ecuación de la recta normal a* $g(x) = 1 - x^3$, *en* $a = 1$.

4. *Encontrar el punto de intersección de las rectas tangentes a la función* $h(x) = 1 + x^2$*, en los puntos* $x = 2$ *y* $x = -1$.

5. *Hallar la ecuación de la recta tangente a* $f(x) = 2x - 1$*, en* $a = 3$.

En el último ejercicio, usted pudo observar que la recta tangente a una recta coincide con la misma recta. Aunque podría pensarse que la recta no es tangente a sí misma, ya que estas dos rectas se intersecan en todos los puntos, la recta $y = mx + b$ es la única que cerca de un punto $x = a$ es muy parecida a $y = mx + b$; de hecho, son iguales.

En general, puede determinarse la derivada de la función $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, para todo real a. Observemos:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{((a+h) - a)\left((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + ... + a^{n-1}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left((a+h)^{n-1} + (a+h)^{n-2}a + ... + a^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Debido a que cada uno de los sumandos $(a+h)^{n-1}, (a+h)^{n-2}a, ..., a^{n-1}$tiende a a^{n-1}, cuando $h \to 0$ y hay n sumandos, entonces tenemos:

$$f'(a) = na^{n-1},$$

con lo que se justifica el siguiente teorema.

Teorema 5.4. *Si* $f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $a \in \mathbb{R}$*, entonces* $f'(a) = na^{n-1}$.

Una función no siempre es derivable en cada punto de su dominio, como lo ilustra el Ejemplo 5.5.

Ejemplo 5.5. *Mostrar que* $f(x) = |x|$ *no es derivable en* 0.
$f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|0+h| - |0|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|}{h}$ *pero este límite no existe, puesto que* $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = 1$*, y* $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = -1$*. Luego,* $f(x) = |x|$ *no es derivable en* $x = 0$.

Observe que esta función no tiene recta tangente en el punto $(0, 0)$*. Ninguna recta que contenga al origen es muy parecida a esta función alrededor de* $x = 0$.

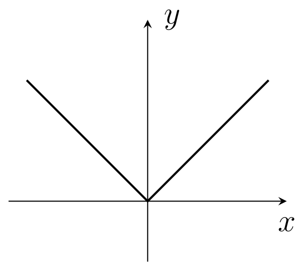


Figura 5.8

Ejemplo 5.6. *Si* $f(x) = |x|$, *hallar* $f'(a)$ *para* $a > 0$ *y* $a < 0$.

1. *Si* $a > 0$:
   $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|a+h| - |a|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|a+h| - a}{h}$.
   Como a *es positivo y* h *toma valores muy cercanos a* 0, *entonces* $a + h$ *es positivo y* $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a+h-a}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h} = 1$.

2. *Si* $a < 0$:
   $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|a+h| - |a|}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|a+h| + a}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-(a+h) + a}{h}$
   $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$, *ya que* $a + h$ *es negativo, puesto que* a *es negativo y* h *es muy pequeño.*

De los ejemplos 5.5 y 5.6 podemos concluir que la función $f(x) = |x|$ es derivable en todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y podemos definir una nueva función $y = f'(x)$: *la función derivada de* f, con dominio $\mathbb{R} - \{0\}$, por:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Notemos que la ecuación de la recta tangente a $f(x) = |x|$ en el punto $(x, f(x))$ es $y = x$, de pendiente 1, cuando $x > 0$ y, para $x < 0$, la ecuación de la recta tangente a $f(x) = |x|$ en el punto $(x, f(x))$ es $y = -x$, de pendiente -1.

Definición 5.7. *Dada una función real* $y = f(x)$ *se define la función derivada de* f, *o simplemente la derivada de* f *por* $y = f'(x)$, *donde:*

$$Dom\ f' = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable en } x\}.$$

Ejemplo 5.8. *Hallar la derivada de $g(x) = mx + b$, donde m y b son constantes.*

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h},$$

de modo que $g'(x) = m$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

No se quede sin interpretar este resultado en términos de la pendiente de la recta tangente a la curva. Cuando $m = 0$, la función g es constante y se representa por una recta horizontal; su derivada en cada punto es cero.

Ejercicio 5.9. *Para cada función hallar la derivada, con su respectivo dominio:*

1. $f(x) = x^2$.
2. $g(x) = x^3$.
3. $h(x) = \sqrt{x}$.

Existe otra situación en la cual el concepto de derivada aparece de manera natural. Supongamos que $s\,(t)$ nos da la posición de objeto que se mueve en línea recta, transcurrido un tiempo t. En un tiempo t_0, el objeto está en la posición $s(t_0)$ y en un tiempo $t_0 + h$ se encuentra en la posición $s(\ t_0 + h)$. Queremos encontrar la velocidad promedio del objeto en el intervalo transcurrido entre estos dos tiempos. Sabemos que la velocidad se determina por

$$v = \frac{x}{t},$$

donde x es el espacio recorrido en el intervalo de tiempo t. Por tanto, la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ podemos determinarla por

$$v_{prom.} = \frac{s\,(t_0 + h) - s\,(t_0)}{(t_0 + h) - t_0} = \frac{s\,(t_0 + h) - s\,(t_0)}{h}$$

Pero, si somos más exigentes y no queremos la velocidad promedio en $[t_0, t_0 + h]$, sino que queremos la velocidad en el instante $t = t_0$, ¿qué opciones tenemos? La idea es hacer que los tiempos t_0 y $t_0 + h$ sean cada vez más cercanos para que la velocidad promedio entre estos tiempos se aproxime

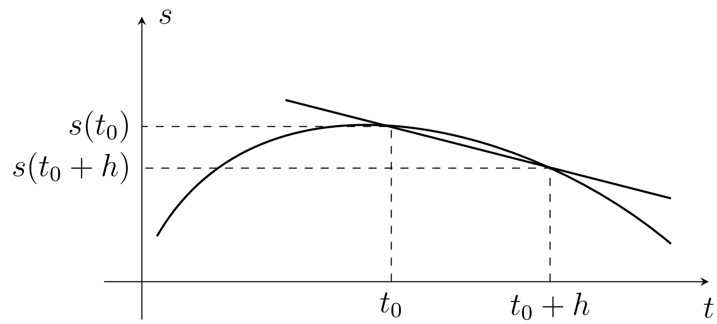


Figura 5.9

cada vez más a la velocidad en el instante $t = t_0$, es decir, debemos hacer que h tienda a 0. Por tanto:

Si $s(t)$ representa la posición de un objeto que se mueve en línea recta, en un tiempo t, definimos la velocidad instantánea en $t = t_0$ por

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} v_{prom.} = \lim_{h\to 0} \frac{s\,(t_0 + h) - s\,(t_0)}{h}, \tag{5.2}$$

siempre que este límite exista.

¿Le parece familiar este límite? Por supuesto que sí, habrá contestado. Si comparamos (5,1) y (5,2) , observamos que $v(t_0) = s'(t_0)$, es decir, la derivada de la función posición contra tiempo, en $t = t_0$, es la velocidad en el instante $t = t_0$.

También puede mostrarse, de manera similar, que la derivada de la velocidad es la aceleración, puesto que si a es la aceleración de un objeto, entonces

$$a = \frac{v}{t},$$

donde v es la velocidad y t es el tiempo. Por tanto, $a(t_0) = v'(t_0)$.

Ejercicio 5.10. *La función $f\,(t) = 5t^2 + 8t - 4$ describe la posición (en metros) de un objeto que se mueve en línea recta, con respecto al tiempo (en segundos). Halle:*

1. *La velocidad en el instante t.*
2. *La aceleración en el instante t.*

3. La velocidad y la aceleración en el instante $t = 4$ segundos.

4. ¿En qué instante la velocidad es cero?

Al igual que cuando se dio el concepto de límite, no podemos seguir calculando derivadas únicamente utilizando la definición, pues de esta mane-ra sería muy engorroso el trabajo. Ahora pretendemos presentar algunas propiedades de la derivada que nos facilitarán nuestro andar.

5.3. Propiedades de la derivada

Teorema 5.11. *Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.*

Prueba. Como f es derivable en a, sabemos que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h \\
&= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}h\right) \\
&= f'(a)0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to a}f(x) = \lim\limits_{h\to 0}f(a+h) = \lim\limits_{h\to 0}([f(a+h)-f(a)]+f(a)) = f(a)$; es decir, f es continua en a. □

El Ejemplo 5.5 nos ilustra que el recíproco del teorema anterior es falso, puesto que $y = |x|$ es una función continua en 0, que no es derivable en 0.

Teorema 5.12. *Si f y g son funciones derivables en a, entonces $f+g$ es derivable en a, y*

$$\boxed{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).}$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\
&= f'(a)+g'(a).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.13. *Si f y g son funciones derivables en a, entonces $f-g$ es derivable en a, y*

$$\boxed{(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a).}$$

Prueba. Es similar a la del teorema anterior, teniendo cuidado con los signos. □

Teorema 5.14. *Si f y g son funciones derivables en a, entonces fg es derivable en a, y*

$$\boxed{(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).}$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(a+h)-(fg)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a+h)g(a)+f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)(g(a+h)-g(a))+g(a)(f(a+h)-f(a))}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(f(a+h)\,\frac{g(a+h)-g(a)}{h}+g(a)\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)\\
&= \left(\lim_{h\to 0}f(a+h)\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right)+g(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\
&= f(a)g'(a)+g(a)f'(a)\\
&= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

Observe que el paso del renglón 5 al 6 de esta demostración es válido, puesto que f es derivable en a; entonces f es continua en a, por el Teorema 5.11 y, por tanto, $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ existe y es $f(a)$. $\square$

Teorema 5.15. *Si c es una constante y f es una función derivable en a, entonces cf es derivable en a, y*

$$\boxed{(cf)'(a) = c.f'(a).}$$

Prueba. No será una tarea muy difícil si considera la función $g(x) = c$. $\square$

Teorema 5.16. *Si f es una función derivable en a y $f(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{1}{f}$ es derivable en a, y*

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{[f(a)]^2}.}$$

Prueba.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-[f(a+h) - f(a)]}{hf(a+h)f(a)}\\
&= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{-1}{f(a+h)f(a)}\right)\\
&= f'(a)\left(\frac{-1}{[f(a)]^2}\right)\\
&= \frac{-f'(a)}{[f(a)]^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

No se quede sin justificar cada uno de los pasos de esta demostración. ¿En cuál paso se usó el Teorema 5.11?

Teorema 5.17. *Si f y g son funciones derivables en a, con $g(a) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en a, y*

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}.}$$

Prueba. Aplicando los teoremas 5.14 y 5.16 es un bonito ejercicio. □

Ejercicio 5.18. *En los ejercicios 1 a 3, usar las propiedades para mostrar que la función dada es derivable en todo su dominio.*

1. $p(x) = 3 + 2x^2 + 5x^3$.
2. $m(x) = (3641 + 8021x - 5420x^2 + 4865x^3)(1601x - 3459x^3 + 332x^4)$.
3. $q(x) = \dfrac{3 + x - x^4}{1 + 2x + x^2}$.
4. *Demostrar que cada polinomio es derivable en todos los reales.*
5. *Demostrar que toda función racional es derivable en todo su dominio.*
6. *Use las propiedades para hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:*
   a) $f(x) = 4x^7 - 8x + 1$. *b)* $g(x) = -2x^3 + 5x^2$.
   c) $h(x) = \dfrac{2x^4 - 3}{x}$. *d)* $j(x) = \dfrac{x}{2x^4 - 3}$.
   e) $k(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *f)* $l(x) = \dfrac{1}{x^3}$.
7. *Demostrar, usando propiedades, que:*

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \text{ para } n \in \mathbb{Z}^-.$$

5.4. Derivadas laterales

Ejemplo 5.19. *Hallar la derivada de $f(x) = [x]$.*

Para resolver este ejercicio, vamos a considerar dos casos:

1. *Si* $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}: \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{[x+h]-[x]}{h}$

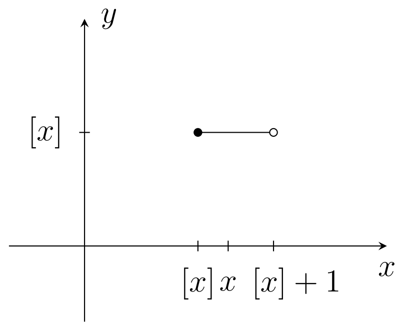


Figura 5.10

Como h *es pequeño, se tiene que* $[x] < x+h < [x]+1$*, de modo que* $[x+h] = [x]$*, y,* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{[x]-[x]}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$

2. *Si* $x \in \mathbb{Z}: \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{[x+h]-[x]}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{[x+h]-x}{h}$

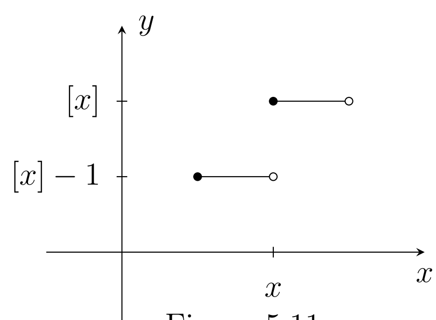


Figura 5.11

En este caso, el comportamiento de $[x+h]$ *depende de si* h *tiende a cero por valores positivos o negativos; en el primer caso tendríamos que* $[x+h] = x$*, mientras que en el segundo caso* $[x+h] = x-1$*. Revisemos los límites laterales:*

$\lim_{h\to 0^+} \dfrac{[x+h]-[x]}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{x-x}{h} = 0,$ *y,*

$\lim_{h\to 0^-} \dfrac{[x+h]-[x]}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{(x-1)-x}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{-1}{h} = +\infty.$

Luego, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[x+h]-[x]}{h}$ *no existe y, por tanto,* f *no es derivable en* x*, si* $x\in\mathbb{Z}$*.*

Definición 5.20. *Sea* f *una función real. Definimos las derivadas laterales de* f *en* $x=a$ *por:*

1. $f'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *es la derivada de* f *en* a*, por derecha, si dicho límite existe.*

2. $f'_-(a)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *es la derivada de* f *en* a*, por izquierda, si dicho límite existe.*

Por las propiedades que se estudiaron de los límites se tiene que:

$$f \text{ es derivable en } a, \text{ si y sólo si } f'_+(a)=f'_-(a).$$

Del trabajo realizado en el Ejemplo 5.19 se tiene que para a entero, la derivada de $f(x)=[x]$ por derecha es cero, y no es derivable por izquierda.

Ejercicio 5.21.

1. *En cada caso, realizar un gráfico de la función y utilizar derivadas laterales para mostrar que la función dada no es derivable en* $x=0$*.*

   a) $f(x)=\sqrt{|x|}$.

   b) $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

2. *Hallar los valores de* a *y* b *para los cuales* f *es derivable en* c*, si*

$$f(x)=\begin{cases} a+x & , \text{ si } x\leq c \\ bx^2+1 & , \text{ si } x>c. \end{cases}$$

5.5. Derivada de las funciones trigonométricas

Vamos a utilizar la definición de la derivada de una función para hallar la derivada de las funciones seno y coseno. Para las demás funciones podemos utilizar estos resultados y las propiedades ya vistas de la derivada.

$$\begin{aligned}
(senx)' &= \lim_{h\to 0}\frac{sen\,(x+h)-senx}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{sen\ x\cos h+\cos x\ sen\ h - sen\ x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\ sen\ h - sen\ x\ (1-\cos h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x \lim_{h\to 0}\frac{sen\ h}{h} - \lim_{h\to 0} sen\ x \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}\\
&= \cos x{,}1 - sen\ x{,}0\\
&= \cos x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\,(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h - sen\ x\ sen\ h - \cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-sen\ x\ sen\ h - \cos x(1-\cos h)}{h}\\
&= -sen\ x{,}1 - \cos x{,}0\\
&= -sen\ x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{sen\ x}{\cos x}\right)'\\
&= \frac{(sen\ x)'\cos x - sen\ x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\\
&= \sec^2 x.
\end{aligned}$$

Aplicando las propiedades de derivadas, verifique que:

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= -\csc^2 x.\\ (\sec x)' &= \sec x \tan x.\\ (\csc x)' &= -\csc x \cot x.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.22. *Hallar la derivada de $h(x) = sen\ 2x$.*

Para utilizar las derivadas halladas, recordemos la identidad: $sen\ 2x = 2\ sen\ x \cos x$.

$$\begin{aligned}h'(x) &= ((2\ sen\ x) . \cos x)' = 2\cos x . \cos x + 2\ sen\ x . (-sen\ x)\\ &= 2\cos^2 x - 2\ sen^2 x = 2\left(\cos^2 x - sen^2 x\right)\\ &= 2\cos 2x.\end{aligned}$$

Ejercicio 5.23.

1. *Hallar la derivada de:*

   a) $f(x) = 5x^3 + \sec x \tan x$.

   b) $g(x) = \sqrt{x} \cot x$.

   c) $h(x) = \dfrac{x + \cos x}{sen\ x}$.

2. *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2\ sen\ x + x^2$, en el punto $(0, 0)$.*

5.6. Derivada de $y = e^x$

Sabemos que cada una de las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$ contiene al punto $(0, 1)$. Revisando la gráfica de las funciones exponenciales observamos que la recta tangente a cada función exponencial en dicho punto, tendrá pendiente negativa cuando $0 < a < 1$ y pendiente positiva para $a > 1$. La pendiente de la recta tangente a $f(x) = a^x$ en el punto $(0, 1)$ está dada por

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}.$$

El número e es precisamente el único valor de a para el cual el límite anterior es 1, es decir, la función $y = e^x$ es la única función exponencial para la cual la pendiente de su tangente en el punto $(0,1)$ es 1. Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

y la ecuación de la recta tangente a $f(x) = e^x$ en $(0,1)$ es $y = x + 1$. Al final de este capítulo, como consecuencia de la regla de L'Hopital, se podrá justificar que este límite efectivamente es 1. No olvide hacerlo.

Ejercicio 5.24.

1. *En papel milimetrado realice la gráfica de $y = e^x$ y trace su recta tangente en $(0,1)$.*

2. *Complete una tabla de valores*

x		
$\dfrac{e^x - 1}{x}$		

para valores de x que tiendan a 0, para verificar el valor del límite.

Vamos ahora a hallar la derivada de la función $y = e^x$.

$$\begin{aligned}
(e^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \left(e^h - 1\right)}{h} \\
&= \left(\lim_{h\to 0} e^x\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) \\
&= e^x,1 = e^x.
\end{aligned}$$

La función $y = e^x$ es su propia derivada. ¿Es la única función con esta propiedad?

5.7. Derivadas de orden superior

La derivada de la función $y = f(x)$ es una nueva función $y = f'(x)$, cuyo dominio es un subconjunto del dominio de f. Al considerar a f' como función, podemos pensar en su derivada: $y = (f'(x))'$; esta función se obtiene a partir de f derivándola dos veces y, por ello, se llama la *segunda derivada de f*. De manera similar puede pensarse en la derivada de la segunda derivada de f, es decir, la *tercera derivada de f* y así sucesivamente. Estas derivadas se llaman de orden superior y se acostumbra notarlas de las siguientes formas:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Primera derivada} & f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} \\[2ex]
\text{Segunda derivada} & f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \\[2ex]
\text{Tercera derivada} & f'''(x) = \dfrac{d^3 f(x)}{dx^3} \\[2ex]
\text{Cuarta derivada} & f^{(4)}(x) = \dfrac{d^4 f(x)}{dx^4} \\[2ex]
n-\text{ésima derivada} & f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n},\ n \text{ entero positivo.}
\end{array}
$$

Ejemplo 5.25. *Para la función $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 7x + 21$, hallar sus primeras seis derivadas, con los respectivos dominios.*

$$
\begin{array}{lr}
f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 7 & Domf' = \mathbb{R}. \\
f''(x) = 36x^2 - 12x + 2 & Domf'' = \mathbb{R}. \\
f'''(x) = 72x - 12 & Domf''' = \mathbb{R}. \\
f^{(4)}(x) = 72 & Domf^{(4)} = \mathbb{R}. \\
f^{(5)}(x) = 0 & Domf^{(5)} = \mathbb{R}. \\
f^{(6)}(x) = 0 & Domf^{(6)} = \mathbb{R}.
\end{array}
$$

En esta función se tiene que $f^{(n)}(x) = 0$, para $n > 4$.

Ejemplo 5.26. *Hallar las tres primeras derivadas, con sus respectivos dominios, para la función:*

$$
g(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x \geq 0 \\ x^2 & si\ x < 0 \end{cases}.
$$

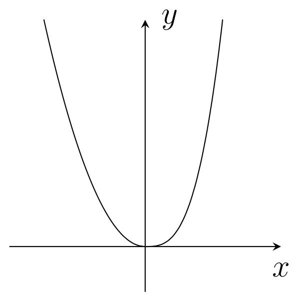


Figura 5.12

1. *Para la primera derivada:*

   Si $x > 0 : g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2,$ *puesto que* $x + h > 0$ *para* h *pequeño.*

   Si $x < 0 : g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x,$ *puesto que* $x + h < 0$ *para* h *pequeño.*

   $g'(0) = 0$ *porque:* $g'_+(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^3}{h} = 0,$ *y,*

   $g'_-(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{h^2}{h} = 0.$

   Luego, $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 & si\ x \geq 0 \\ 2x & si\ x < 0 \end{cases}$ *, y su dominio es* $\mathbb{R}$.

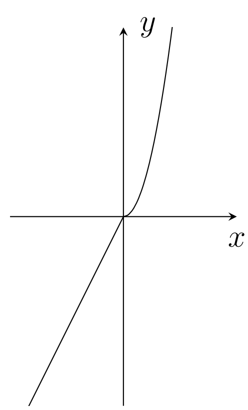


Figura 5.13

2. *Para la segunda derivada:*

   Si $x > 0: g''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g'(x+h) - g'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = 6x.$

   Si $x < 0: g''(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g'(x+h) - g'(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(x+h) - 2x}{h} = 2.$

   $g''(0)$ *no existe, porque:*

   $g''_+(0) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{g'(0+h) - g'(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{3h^2}{h} = 0,$ *y,*

   $g''_-(0) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{g'(0+h) - g'(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{2h}{h} = 2.$

   Luego, $g''(x) = \begin{cases} 6x & si\ x > 0 \\ 2 & si\ x < 0 \end{cases}$ *, y su dominio es* $\mathbb{R} - \{0\}$.

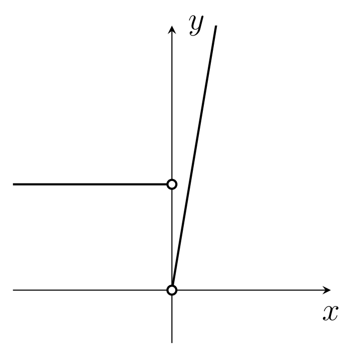


Figura 5.14

3. *Usted puede verificar que* $g'''(x) = \begin{cases} 6 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$ *y su dominio es* $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ejercicio 5.27. *Hallar las primeras ocho derivadas de cada función.*

1. $f(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 14x - 11.$

2. $g(x) = \cos x.$ *Calcular* $g^{(22)}(x)$, *sin hacer las 22 derivadas.*

3. $h(x) = \dfrac{1}{x}.$

4. $j(x) = e^x.$

5. $k(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0 \\ -x^2 & si\ x < 0 \end{cases}$.

5.8. Regla de la cadena

La regla de la cadena nos enseña a derivar funciones compuestas sin necesidad de tener que recurrir a la definición. Por ejemplo, en este momento, para hallar la derivada de la función $j(x) = \sqrt{2x+1}$, tenemos que trabajar con la definición. Veamos.

$$\begin{aligned} j'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x+2h+1-(2x+1)}{h\left(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h\left(\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}\right)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+1} + \sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}. \end{aligned}$$

Con el siguiente teorema, el resultado anterior puede obtenerse en un solo paso.

Teorema 5.28. *Regla de la cadena.*

Si g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a, y

$$\boxed{(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\,.g'(a).}$$

Si en $f \circ g$ decimos que f es la función exterior y g es la función interior, entonces $(f \circ g)'(a)$ es el producto de la derivada de la función exterior, evaluada en $g(a)$, y la derivada de la función interior, evaluada en a.

Ejemplo 5.29. *Hallar la derivada de* $j(x) = \sqrt{2x+1}$.

Tenemos $j(x) = (f \circ g)(x)$*, donde* $f(x) = \sqrt{x}$*, la función exterior, y* $g(x) = 2x+1$*, la función interior. Además,* $g'(x) = 2$ *y en el Ejercicio 5.9 usted debió obtener que* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Así, por la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} j'(x) &= f'(g(x)).g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2x+1}},2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.30. *Hallar la derivada de* $h(x) = sen\ 2x$.

$h(x) = f(g(x))$*, donde* $f(x) = sen\ x$ *y* $g(x) = 2x$*. Luego,*

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x)).g'(x) \\ &= \cos 2x,2 \\ &= 2\cos 2x. \end{aligned}$$

Este resultado coincide con el que obtuvimos en el Ejemplo 5.22.

Ejemplo 5.31.

$$\begin{aligned} \left(\tan(3x^4 - 2x^3)\right)' &= \sec^2(3x^4 - 2x^3).\left(12x^3 - 6x^2\right) \\ &= \left(12x^3 - 6x^2\right)\sec^2(3x^4 - 2x^3), \end{aligned}$$

este último paso se da para evitar posibles confusiones.

Prueba. De la regla de la cadena (Teorema 5.28).

Por hipótesis, g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$, es decir, $g'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}$ y $f'(g(a)) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(g(a)+h) - f(g(a))}{h}$.

Por tanto:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(a+h) - (f \circ g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a) + [g(a+h) - g(a)]) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \end{aligned}$$

Llamemos $k = g(a+h) - g(a)$. Por la continuidad de g en a, sabemos que $\lim\limits_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$, de modo que $k \to 0$ si $h \to 0$. Luego,

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(g(a)+k) - f(g(a))}{k}\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(g(a)).g'(a).\end{aligned}$$

$\square$

¿Justificó usted cada uno de los pasos de la anterior demostración? Vuelva a leer la demostración, antes de continuar.

Resulta que la "demostración" anterior tiene un error, es decir, aún no hemos demostrado la regla de la cadena. ¿Lo encontró? El error se encuentra en el paso del renglón 2 al 3, cuando dividimos por $g(a+h) - g(a)$, puesto que esta diferencia puede ser cero para algunas funciones g, aun cuando h sea pequeño y diferente de cero; por ejemplo, si g es una función constante. Además, existen muchas otras funciones g con este problema; otro ejemplo es:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

tomando $a = 0$.

Para no quedarnos sin la demostración de la regla de la cadena los invitamos a consultar la demostración del Teorema 5.28, por ejemplo en [1], [3] ó [5].

Como consecuencia de la regla de la cadena podemos encontrar la derivada de todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Como se mencionó en el capítulo anterior, $a^x = e^{x\ln a}$, de modo que:

$$\begin{aligned}(a^x)' &= \left(e^{x\ln a}\right)' \\ &= e^{x\ln a}(x\ln a)' \\ &= a^x \ln a.\end{aligned}$$

Ejercicio 5.32.

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = sen^2 x$.

2. $g(x) = senx^2$.

3. $h(x) = sen^2x^2$.

4. $j(x) = (x^4 - 3x)^{57}$.

5. $k(x) = \sec\left(\frac{1}{x}\right)$.

6. $l(x) = \cot(x \cos 2x)$.

7. $m(x) = 2^{\cos x}$

8. $n(x) = \tan^2(5^x)$

5.9. Derivación implícita

Hasta el momento, todas las funciones que hemos derivado son de la forma $y = f(x)$, donde la variable y se define explícitamente en términos de la variable independiente x. Sin embargo, también podemos derivar funciones que se encuentren definidas implícitamente.

Por ejemplo, la ecuación $y^2 - x = 0$ define implícitamente, de manera natural, dos funciones en términos de la variable independiente x: $y = \pm\sqrt{x}$.

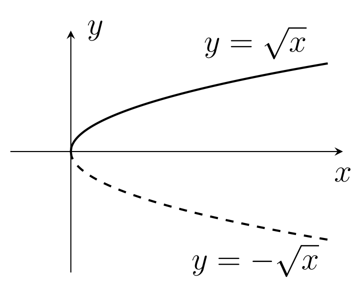


Figura 5.15

Tenemos, pues, que la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ es $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y la derivada de $y = -\sqrt{x}$ es $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2(-\sqrt{x})}$. Estos dos resultados pueden expresarse en una sola idea diciendo que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

Esta derivada puede obtenerse directamente de la ecuación $y^2 - x = 0$ al derivarla implícitamente; es decir, sin despejar a y en términos de x. La derivada implícita es una gran herramienta porque dada una ecuación, no siempre es fácil despejar a y en términos de x, en ocasiones imposible.

Para derivar implícitamente debemos tener en cuenta que:

- x es la variable independiente.
- y es una variable que depende de x.
- La ecuación dada se deriva respecto a x.
- Se despeja la derivada de y respecto a x.

Derivemos implícitamente la ecuación $y^2 - x = 0$.

$$\begin{aligned} 2y\frac{dy}{dx} - 1 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y}. \end{aligned}$$

Note que para derivar la variable y, ésta puede considerarse una función compuesta.

Ejemplo 5.33. *Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = x$, en el punto $(4, 2)$.*

La ecuación de la parábola puede escribirse como $y^2 - x = 0$, de modo que, por lo discutido anteriormente, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$. En el punto $(4, 2)$ tenemos que $y = 2$, la pendiente de la recta tangente es $\frac{1}{4}$ y su ecuación es $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Teorema 5.34. $(x^n)' = nx^{n-1}$, *para* $n \in \mathbb{Q} - \{0\}$.

Prueba. Como $n \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces $n = \dfrac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Tenemos que $y = x^{p/q}$, es decir, $y^q = x^p$ y derivando implícitamente esta última ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned}
qy^{q-1}\frac{dy}{dx} &= px^{p-1} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{q\left(x^{p/q}\right)^{q-1}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qx^{p-p/q}} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{p}{q}x^{-1+p/q} \\
\frac{dy}{dx} &= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

En general, la regla de la derivada de la potencia

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

es válida para todo $n \in \mathbb{R}$. En el caso $n = 0$, se define x^0 como la función constante 1 y el caso en que n es irracional, podemos emplearlo sin demostración, puesto que está fuera del alcance de este curso.

Ejercicio 5.35. *En los ejercicios 1 y 2 derivar implícitamente:*

1. $2x^2y + \cos y = 5.$
2. $x^3 + y^3 = 3xy.$
3. *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva* $x^2 + y^2 = 1$, *en el punto* $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.
4. *Hallar la ecuación de la recta normal a la curva* $4x^2 + 9y^2 = 36$, *en el punto* $\left(1, \dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

5.10. Derivada de las funciones inversas

En esta sección supondremos que las funciones trigonométricas inversas y las funciones logarítmicas son derivables, como consecuencia de los teoremas que mencionaremos a continuación y cuyas demostraciones pueden ser consultadas en el capítulo *Funciones inversas* de [5].

1. Si f es continua y uno a uno sobre un intervalo, entonces f^{-1} también es continua.

2. Sea f una función uno a uno y continua sobre un intervalo. Si f es derivable en $f^{-1}(b)$, donde $f\,'(f^{-1}(b)) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en b, y
$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f\,'(f^{-1}(b))}.$$

Para encontrar la derivada de las funciones trigonométricas inversas se utilizan básicamente dos hechos: ser función inversa y la derivación implícita.

$$\boxed{(sen^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Prueba. Sabemos que $y = sen^{-1}x$, si y sólo si $sen\ y = x$, cuando $-1 \leq x \leq 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Derivando implícitamente la ecuación $sen\ y = x$, se obtiene $\cos y.\dfrac{dy}{dx} = 1$, de modo que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 y}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

En el paso del primero al segundo renglón, utilizamos que $\cos y > 0$, puesto que $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$. □

Se tiene que $y = sen^{-1}x$ no es derivable (lateralmente) en 1 ni en -1.

$$\boxed{(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Prueba. Como $y = \cos^{-1} x$, si y sólo si $\cos y = x$, cuando $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$.
Al derivar implícitamente la ecuación $\cos y = x$, se obtiene
$(-sen\ y)\,.\dfrac{dy}{dx} = 1$, de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{sen\ y} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Usamos que $sen\ y > 0$, porque $0 \leq y \leq \pi$. $\square$

Por otra parte, $Dom\,(\cos^{-1} x)' = (-1, 1)\,.$
Observe que $\cos^{-1} x$ y $sen^{-1}x$ se derivan igual, salvo el signo.

$$\boxed{(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Prueba. Tenemos que $y = \tan^{-1} x$, si y sólo si $\tan y = x$, con $x \in \mathbb{R}$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.
Al derivar implícitamente $\tan y = x$, se obtiene $\sec^2 y.\dfrac{dy}{dx} = 1$, de modo que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$\square$

$y = \tan^{-1} x$ es derivable en todos los números reales.

$$\boxed{(\cot^{-1} x)' = \frac{-1}{1+x^2}}$$

Prueba. Es un ejercicio similar a la demostración anterior. $\square$

Dom $(\cot^{-1} x)' = \mathbb{R}$.
Note que $\cot^{-1} x$ y $\tan^{-1} x$ se derivan de la misma forma, salvo el signo.

$$\boxed{(\sec^{-1} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}}$$

Prueba. Puesto que $y = \sec^{-1} x$, si y sólo si $\sec y = x$, cuando $|x| \geq 1$, $y \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Al derivar implícitamente $\sec y = x$, se obtiene $\sec y \tan y.\dfrac{dy}{dx} = 1$, de modo que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

Cuando $x \geq 1$, entonces $0 \leq y < \dfrac{\pi}{2}$, de modo que $\tan y > 0$, y $\sec y \tan y > 0$.
Cuando $x \leq -1$, entonces $\dfrac{\pi}{2} < y \leq \pi$, de modo que $\tan y < 0$, pero $\sec y \tan y > 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec y \tan y} \\
&= \frac{1}{\sec y \left(\pm\sqrt{\sec^2 y - 1}\right)} \\
&= \frac{1}{\pm x.\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.
\end{aligned}$$

Donde $|x|$ nos garantiza que $\sec y \tan y = \pm x.\sqrt{x^2-1}$ tendrá siempre valores positivos. $\square$

$y = \sec^{-1} x$ es derivable en su dominio, con excepción de 1 y -1.

$$\boxed{\left(\csc^{-1} x\right)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}}$$

Prueba. Es un ejercicio similar a la demostración anterior. □

$Dom\left(\csc^{-1} x\right)' = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
Nuevamente, $\csc^{-1} x$ y $\sec^{-1} x$ se derivan igual, salvo el signo.

Trabajamos de manera similar para encontrar la derivada de las funciones logarítmicas. Consideramos $a > 0$ y $a \neq 1$.

$$\boxed{\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Prueba. Se tiene que $y = \log_a x$, donde $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$ es equivalente a que $a^y = x$. Al derivar implícitamente esta última ecuación se obtiene $(a^y \ln a)\,\dfrac{dy}{dx} = 1$, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a^y \ln a} \\ &= \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

□

Notemos que las funciones logarítmicas son derivables en todo su dominio.

Ejercicio 5.36. *Hallar la derivada de:*

1. $y = \tan^{-1}(5x+1)$.
2. $f(x) = \sec^{-1}(5x^3)$.
3. $g(x) = \cos(sen^{-1}(3x^2 - 7x))$.
4. $h(x) = \log_7\left(x^2 - 2x + 1\right)$.
5. $j(x) = \csc^{-1}\left(\log_3 x\right)$.
6. $k(x) = e^x \ln x$.

5.11. Derivación logarítmica

En esta sección ilustramos la forma en que la función logaritmo y sus propiedades son empleadas para simplificar la derivación de ciertas funciones.

Ejemplo 5.37. *Hallar la función derivada de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.*

Observemos que ninguna de las propiedades que hemos trabajado hasta ahora nos permite calcular la derivada de esta función. El problema básicamente es tener una función de la forma: $f(x) = h(x)^{g(x)}$. Esta función no es una potencia, ni tampoco una función exponencial, ¿por qué?

Lo que vamos a hacer es transformar la expresión para $f(x)$ de modo que no aparezca $g(x)$ como exponente y que nos permita calcular la derivada con las herramientas que hemos aprendido.

Dado que $f(x)$ es positiva en todo su dominio y que la función $\ln x$ es inyectiva, si hacemos $y = x^{\sqrt{x}}$ y tomamos logaritmo natural en ambos lados de esta última expresión, tenemos:

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x.$$

Usando derivación implícita:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x},$$

es decir,

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\frac{1}{x}\right)y,$$

por tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)x^{\sqrt{x}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}\ln x + 2\sqrt{x}}{2x}\right)x^{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

El procedimiento usado en el ejemplo anterior es conocido como *derivación logarítmica.* Este procedimiento también se puede usar cuando se tienen productos y cocientes de funciones, como el caso que aparece a continuación.

Ejemplo 5.38. *Encontrar la función derivada de* $h(x) = \frac{(x^2+1)^{10}(e^x+1)^5\sqrt{2+x^4}}{(4x^2+1)^2}$.

Como se puede ver, esta derivada se puede calcular usando las reglas de la derivada de productos y cocientes. Lo que sucede, es que usando esas propiedades, este cálculo será un poco tedioso. Si,

$$y = \frac{(x^2+1)^{10}(e^x+1)^5\sqrt{2+x^4}}{(4x^2+1)^2},$$

y dado que cada uno de los factores es positivo, podemos usar derivación logarítmica, por lo que:

$$\ln y = 10\ln(x^2+1) + 5\ln(e^x+1) + \frac{1}{2}\ln\left(2+x^4\right) - 2\ln(4x^2+1)$$

Por tanto, derivando implícitamente

$$\frac{y'}{y} = \frac{20x}{x^2+1} + \frac{5e^x}{e^x+1} + \frac{2x^3}{2+x^4} - \frac{16x}{4x^2+1},$$

luego,

$$h'(x) = \left(\frac{20x}{x^2+1} + \frac{5e^x}{e^x+1} + \frac{2x^3}{2+x^4} - \frac{16x}{4x^2+1}\right)\frac{(x^2+1)^{10}(e^x+1)^5\sqrt{2+x^4}}{(4x^2+1)^2}.$$

Es claro que resulta más práctico usar derivación logarítmica para calcular este tipo de derivadas. Sin embargo, hay que tener cuidado en considerar que no aparezcan logaritmos de expresiones menores o iguales a cero.

Ejercicio 5.39.

1. *Determinar todos los puntos de la función* f *en los cuales la pendiente de la recta tangente es* 0, *si:*

$$f(x) = \left(\frac{x}{e^{1+e}}\right)^x.$$

2. *Calcular la derivada de las siguientes funciones.*

   a) $y = x^{e^x}$. *b)* $y = \left(e^{x^2}+1\right)^x$.

   c) $y = \sqrt[3]{\frac{e^x}{\cos x}}$. *d)* $y = x^{2/5}\left(x^2+8\right)^4 e^{x^2+x}$.

5.12. Teorema del valor medio

En esta sección vamos a estudiar un teorema muy importante, no tanto por su resultado sino por las consecuencias que se derivan de éste: el *Teorema de valor medio.*

Teorema 5.40. *Sea f definida en un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, con $\delta > 0$. Si f es derivable en a y $f(a) \geq f(x)$, para todo x en $(a-\delta, a+\delta)$, entonces $f'(a) = 0$.*

Prueba. Sea $x = a + h$, en $(a-\delta, a+\delta)$. Como $f(a) \geq f(x)$ para todo x en $(a-\delta, a+\delta)$, entonces:

$$f(a) \geq f(a+h)$$

Por tanto:

$$f(a+h) - f(a) \leq 0 \tag{5.3}$$

Si $h < 0$, entonces:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

De donde:

$$f'_{-}(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0. \tag{5.4}$$

Por otra parte, si suponemos que $h > 0$ y utilizando $(5{,}3)$, tenemos:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

De donde:

$$f'_{+}(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0. \tag{5.5}$$

Con base en (5,4), (5,5) y el hecho de que f es derivable en a, podemos concluir lo siguiente:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0.$$

□

De manera similar, puede probarse el siguiente teorema:

Teorema 5.41. *Sea f definida en un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, con $\delta > 0$. Si f es derivable en a y $f(a) \leq f(x)$, para todo x en $(a-\delta, a+\delta)$, entonces $f'(a) = 0$.*

Definición 5.42. *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a. Decimos que f tiene un máximo (mínimo) local en $x = a$, si existe $\delta > 0$, tal que $f(a) \geq f(x)$ $(f(a) \leq f(x))$, para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.*

Ejemplo 5.43. *Considerar la función $f(x) = x^2$ en $[-1, 2]$.*

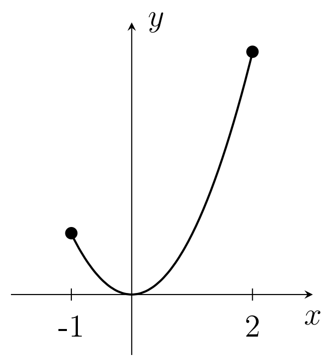


Figura 5.16

f tiene un mínimo local en $x = 0$ y un máximo en $x = 2$, pero éste no es un máximo local.

Con lo definido anteriormente y como consecuencia de los teoremas 5.40 y 5.41, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 5.44. *Si f es derivable en a, y tiene un máximo o mínimo local en $x = a$, entonces $f'(a) = 0$.*

Respecto a este teorema es conveniente hacer las siguientes observaciones:

1. Si f es continua en $[a, b]$ y alcanza su máximo, por ejemplo en $x = a$, siendo f derivable (por derecha) en a, no se tiene necesariamente que $f'_+(a) = 0$. Podría darse una situación como la que se representa en la Figura 5.17.

2. El recíproco de este teorema es falso. Para la función $f(x) = x^3$ en $[-1, 1]$, se tiene que $f'(0) = 0$, y f no tiene máximo ni mínimo local en $x = 0$. Tener $f'(c) = 0$ no implica que f tenga un máximo o mínimo local en $x = c \in (a, b)$.

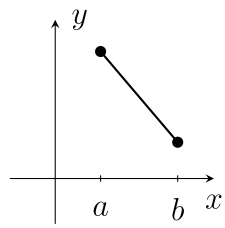


Figura 5.17

Utilizando los anteriores teoremas vamos a probar el siguiente, llamado *Teorema de Rolle.*

Teorema 5.45. *Teorema de Rolle.*
Supongamos $a < b$. *Si* f *es una función continua en* $[a, b]$, *derivable en* (a, b) *y* $f(a) = f(b)$, *entonces existe* $c \in (a, b)$, *tal que* $f'(c) = 0$.

Prueba. Como f es continua en $[a, b]$ entonces, por el Teorema 5.44, existen e, d en $[a, b]$, tales que f alcanza máximo en e y mínimo en d; es decir:

$$m = f(d) \leq f(x) \leq f(e) = M, \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Se tienen las siguientes posibilidades:

1. Si $m < M$:

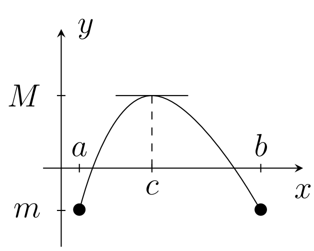


Figura 5.18

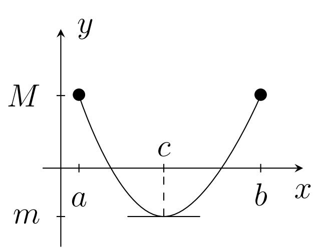


Figura 5.19

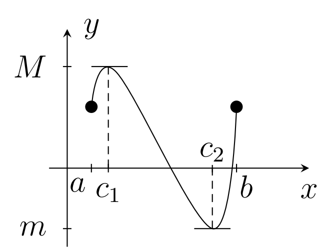


Figura 5.20

   En cualquiera de estos tres casos, existe $c \in (a, b)$, tal que f tiene máximo o mínimo local en $x = c$. Puesto que f es derivable en (a, b), lo es en c, y entonces $f'(c) = 0$, por el Teorema 5.44.

2. Si $m = M$ entonces f es una función constante en $[a, b]$ y claramente existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ ya que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.

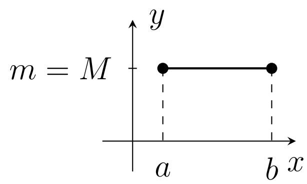


Figura 5.21

Luego, existe $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$. $\square$

Notemos que el recíproco del Teorema de Rolle es falso; por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^3$, en $[-1, 1]$. Explique por qué.

Por otra parte, todas las hipótesis de este teorema son indispensables; ignore cada una de éstas y busque, en cada caso, un ejemplo para el cual no se tenga la tesis.

Veamos ahora el *Teorema del valor medio*, el cual es una consecuencia directa del Teorema de Rolle y, a su vez, una versión más general.

Teorema 5.46. *Teorema del valor medio.*
Supongamos $a < b$. Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$, tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \tag{5.6}$$

Es decir:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.7}$$

Observe que de (5.7) vemos que se busca un punto c en (a, b), en el cual la recta tangente a f sea paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, puesto que $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente y $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Este teorema garantiza la existencia de al menos un c con estas características, pero podría haber más de uno, y, por otra parte, no nos dice cómo hallar ese valor.

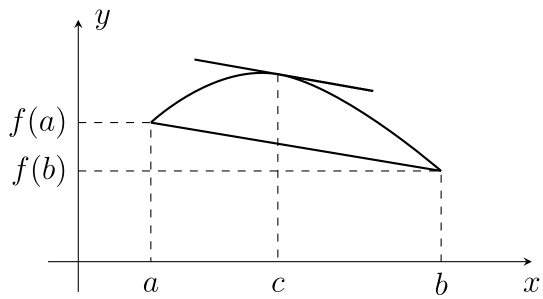


Figura 5.22

Si en este teorema suponemos que f es la función que describe la posición de un objeto que se mueve en línea recta, existe un instante c, en el intervalo de tiempo (a, b), en el cual la velocidad instantánea coincide con la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[a, b]$.

Prueba. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ está dada por:

$$g(x) = y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Definimos la función h como la diferencia entre f y g; es decir:

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right)$$

Dado que f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), y que g es continua y derivable en $\mathbb{R}$, podemos concluir que h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Por otra parte, tenemos:

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a) \right) = 0 \\ h(b) &= f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, utilizando el Teorema de Rolle para h, existe $c \in (a, b)$, tal que $h'(c) = 0$. Como $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, entonces tenemos:

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Es decir, existe $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

Ejercicio 5.47.

1. *En cada caso, revisar por qué no se satisface el Teorema del valor medio.*

   a) $f(x) = x^{2/3}$, *en* $[-2, 2]$.

   b) $g(x) = \dfrac{2x - 1}{3x - 4}$, *en* $[1, 2]$.

   c) $h(x) = |x|$, *en* $[-1, 2]$.

2. *Para las siguientes funciones, verificar las hipótesis del Teorema del valor medio y encontrar el valor de c, si es posible.*

   a) $f(x) = x^{2/3}$, *en* $[0, 1]$.

   b) $j(x) = \sqrt{x + 3}$, *en* $[1, 6]$.

   c) $k(x) = 2x^3 - 8x + 1$, *en* $[1, 3]$.

Vamos a presentar algunas consecuencias del Teorema del valor medio en los siguientes tres corolarios.

Sabemos que la derivada de la función constante es cero, este primer corolario nos garantiza su recíproco.

Corolario 5.48. *Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x) = c$ para todo $x \in (a, b)$, donde c es una constante.*

Prueba. Sean x_1, $x_2 \in (a, b)$, con $x_1 < x_2$. Como f es derivable en (a, b), entonces es continua en (a, b), de modo que f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). Por el Teorema del valor medio, existe $d \in (x_1, x_2)$, tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(d)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(d) = 0$, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$. Puesto que x_1, x_2 son puntos arbitrarios de (a, b), tenemos que $f(x_1) = f(x_2)$, para cada x_1, $x_2 \in (a, b)$ y, por tanto, f es constante en (a, b). $\square$

Corolario 5.49. *Si* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces* $f(x) = g(x) + c$, *para todo* $x \in (a, b)$, *donde* c *es una constante.*

Prueba. Definimos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, para $x \in (a, b)$. Como $h'(x) = f'(x) - g'(x)$, entonces $h'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$, por la hipótesis. Por tanto, por el Corolario 5.48, tenemos:

$$\begin{aligned} h(x) &= c, \text{ para todo } x \in (a, b). \\ f(x) - g(x) &= c, \text{ para todo } x \in (a, b). \\ f(x) &= g(x) + c, \text{ para todo } x \in (a, b). \end{aligned}$$

□

La hipótesis de este corolario nos dice que las rectas tangentes a las funciones f y g en cada punto x de (a, b) son paralelas, es decir, podemos pensar que ambas funciones van en la misma dirección, para cada $x \in (a, b)$.

Corolario 5.50. *Sea* f *una función definida en* (a, b).

1. *Si* $f'(x) > 0$, *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces* f *es creciente en* (a, b).
2. *Si* $f'(x) < 0$, *para todo* $x \in (a, b)$, *entonces* f *es decreciente en* (a, b).

Prueba.

1. Sean $x_1, x_2 \in (a, b)$, con $x_1 < x_2$. Tenemos que f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2). ¿Por qué? Luego, por el Teorema del valor medio, existe $c \in (x_1, x_2)$, tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Puesto que $f'(c) > 0$, y, $x_2 - x_1 > 0$, entonces $f(x_2) - f(x_1) > 0$, es decir, $f(x_1) < f(x_2)$. Así, para $x_1, x_2 \in (a, b)$, con $x_1 < x_2$, tenemos que $f(x_1) < f(x_2)$, de modo que f es creciente en (a, b).

2. Este caso es similar al anterior. Revíselo.

□

5.13. Formas indeterminadas

En el Capítulo 4 se demostró que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{x} = 1$; donde la función $f(x) = \dfrac{sen\ x}{x}$ se obtiene a partir del cociente entre las funciones $g(x) = sen\ x$ y $h(x) = x$. En este caso no pudimos calcular el límite de f como el cociente de los límites, ya que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, situación que definimos a continuación como un límite de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.

También, si tenemos buena memoria, podemos recordar que la demostración fue un tanto laboriosa, pues requirió recursos geométricos para aplicar el teorema del emparedado y utilizar ciertas funciones no muy evidentes de encontrar. En esta sección vamos a definir otras formas indeterminadas y demostrar la regla de L'Hopital, la cual será una herramienta muy útil para calcular este tipo de límites de una manera un poco más eficiente.

1. Forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.

   Si a es un número real, ó $a = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, entonces diremos que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.

2. Forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   Si a es un número real, ó $a = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces diremos que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es de la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3. Forma indeterminada $0.\infty$.

   Si a es un número real, ó $a = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces diremos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ es de la forma indeterminada $0.\infty$.

4. Forma indeterminada $\infty - \infty$.

   Si a es un número real, ó $a = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces diremos que $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ es de la forma indeterminada $\infty - \infty$.

5. Potencias indeterminadas 0^0, ∞^0, 1^∞.

   Si a es un número real, ó $a = \pm\infty$, entonces diremos que $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ es de la forma indeterminada 0^0, ∞^0, ó 1^∞ si respectivamente:

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, ó

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, ó

   $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

Se llaman formas indeterminadas porque dos límites que sean de la misma forma pueden dar resultados distintos.

Antes de demostrar la regla de L'Hopital, necesitamos demostrar el Teorema del valor medio de Cauchy. El nombre de este teorema se debe a que es una generalización del Teorema del valor medio que estudiamos en la sección anterior.

Teorema 5.51. *Teorema del valor medio de Cauchy.*
Sean $a < b$. Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$, tal que:

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Observe que en el caso particular en que $g(x) = x$, se obtiene el teorema del valor medio; por tanto, el Teorema del valor medio de Cauchy es una generalización de Teorema del valor medio.

También es conveniente mencionar que si aplicamos el Teorema del valor medio a f y a g, independientemente, tendremos que existen c y d en (a, b), tales que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ y } g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

En el caso en que $f'(c) \neq 0$ y $g'(d) \neq 0$, podemos despejar $b - a$, en cada una de estas ecuaciones e igualarlas para obtener:

$$[f(b) - f(a)]\, g'(d) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Como usted puede observar, esto no es lo que se quiere, ya que no necesariamente c es igual a d. Para solucionar este problema, se busca una función que relacione las funciones f y g, para luego aplicar el Teorema de Rolle a esta función, así como se hizo en la demostración del Teorema del valor medio.

Prueba. Teorema del valor medio de Cauchy.

Definamos h como sigue:

$$h(x) = [g(b) - g(a)]\, f(x) - [f(b) - f(a)]\, g(x).$$

Como f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), entonces h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

Por otra parte,

$$h(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a) = h(b)$$

Así, según el Teorema de Rolle, para h existe $c \in (a, b)$, tal que $h'(c) = 0$. Como:

$$h'(x) = [g(b) - g(a)]\, f'(x) - [f(b) - f(a)]\, g'(x),$$

por consiguiente:

$$h'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c) - [f(b) - f(a)]\, g'(c) = 0.$$

Es decir, existe $c \in (a, b)$, tal que:

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

$\square$

Teorema 5.52. *Regla de L'Hopital. Caso* $\frac{0}{0}$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *y existe* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe, y*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Prueba. Resaltamos algunos hechos que utilizaremos más adelante.

1. Debido a que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces se debe tener que f' y g' existen en algún intervalo alrededor de a, excepto posiblemente en a. Por tanto, existe $\delta > 0$, tal que f y g son derivables en $(a - \delta, a + \delta)$, excepto posiblemente en a.

2. $g'(x) \neq 0$, para todo x en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, excepto quizás en a.

3. No sabemos si f y g son continuas en a, ya que $f(a)$ y $g(a)$ podrían no existir, o sus imágenes no ser cero. Vamos a redefinir $f(a) = g(a) = 0$, para hacer que f y g sean continuas en a. Note que no se genera ninguna contradicción, pues los resultados que obtengamos en los límites no se afectarán por las imágenes de a.

4. $g(x) \neq 0$, para todo x en $(a-\delta, a+\delta) - \{a\}$, ya que si suponemos que $g(x) = 0$, para algún $x \in (a, a+\delta)$ (de manera similar en $(a-\delta, a)$), entonces por el Teorema del valor medio aplicado a g en (a, x), existe $x_1 \in (a, x)$, tal que

$$g'\left(x_1\right) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = 0,$$

lo cual contradice el punto 2.

Si x es tal que $a < x < a + \delta$, entonces f y g son continuas en $[a, x]$ y derivables (a, x), de modo que podemos aplicar el Teorema del valor medio de Cauchy; es decir, existe c_x en (a, x), tal que:

$$[g(x) - g(a)]\, f'(c_x) = [f(x) - f(a)]\, g'(c_x). \tag{5.8}$$

Dado que $f(a) = g(a) = 0$, entonces:

$$g(x) f'(c_x) = f(x) g'(c_x).$$

Como $g(x) \neq 0$ y $g'(c_x) \neq 0$, entonces podemos escribir:

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{5.9}$$

Como $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, sea $L = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Con base en la definición de límite, tenemos:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $\left| \dfrac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$.

Sea $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$, entonces si $0 < |x - a| < \delta_2$, se tiene que

$\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$, y dado que

$$a < c_x < x < a + \delta_2 \leq a + \delta_1,$$

tenemos $0 < c_x - a < \delta_2$. Lo cual implica:

$$\left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Es decir, $\lim\limits_{c_x \to a^+} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$. Observe que c_x no es constante, depende de cada intervalo (a, x); así, si llamamos $y = c_x$, tenemos que $\lim\limits_{y \to a^+} \dfrac{f'(y)}{g'(y)} = L$, lo cual equivale a escribir $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, puesto que $x \to a$ implica $c_x \to a$:

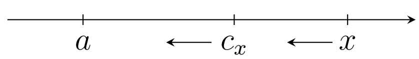


Figura 5.23

Por tanto, utilizando (5.9), tenemos:

$$L = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De manera similar, puede probarse que $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$, y con esto obtenemos lo que queremos. □

Este teorema es válido si en el enunciado se consideran los límites sólo por derecha, o sólo por izquierda.

Ejemplo 5.53. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x}$ *utilizando la regla de L'Hopital.*

Este límite satisface las hipótesis de la regla de L'Hopital.

$\lim\limits_{x \to 0} sen\ x = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ *y* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(sen\ x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$*; por tanto:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(sen\ x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Ejemplo 5.54. *Calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 4x}{sen\ 5x}$ *utilizando la regla de L'Hopital.*

Como $\lim\limits_{x\to 0} sen\ 4x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} sen\ 5x = 0$, $(sen\ 4x)' = 4\cos 4x$, *así como* $(sen\ 5x)' = 5\cos 5x$, *y dado que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\cos 4x}{5\cos 5x} = \dfrac{4}{5}$, *entonces:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 4x}{sen\ 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cos 4x}{5\cos 5x} = \frac{4}{5}.$$

Ejemplo 5.55. *Calcular* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{sen\,(\pi/x)}$.

Sea $x = \dfrac{1}{t}$. *Si* $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{sen\,(\pi t)}$ *existe, entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{sen\,(\pi/x)}$ *existe, y son iguales; pero no es difícil justificar que*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{sen\,(\pi t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\pi\cos(\pi t)} = \frac{1}{\pi}.$$

Por tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{sen\,(\pi/x)} = \frac{1}{\pi}.$$

Los siguientes teoremas son variaciones de la regla de L'Hopital, los cuales, al igual que la anterior, nos ayudarán a calcular límites con alguna forma indeterminada. Omitimos sus demostraciones, pues éstas son similares a la dada en el caso del Teorema 5.52.

Teorema 5.56. *Si* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ *y existe* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, *entonces* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *existe, y*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

El teorema es válido si en lugar de ∞ *se consideran todos los límites en* $-\infty$.

Teorema 5.57. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, *entonces:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty.$$

Este teorema es válido si se consideran los límites laterales, o a $+\infty$, *o a* $-\infty$.

Teorema 5.58. *Regla de L'Hopital. Caso* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Sean a, $L \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Este teorema también es válido si en todos los límites cambiamos $x \to a$ *por:* $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, *ó* $x \to -\infty$.

Teorema 5.59. *Sea* $a \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, *y* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$, *entonces* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

Este teorema también es válido si en todos los límites cambiamos $x \to a$ *por:* $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, *ó* $x \to -\infty$.

Ejemplo 5.60. *Calcular* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+6x}{3x+1}$.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} (1+6x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+1) = \infty$, *y*
$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+6x)'}{(3x+1)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6}{3} = 2$, *entonces:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+6x}{3x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+6x)'}{(3x+1)'} = 2.$$

Para calcular límites de la forma indeterminada $0.\infty$, recordemos que

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ para } g(x) \neq 0,$$

de modo que la forma indeterminada $0.\infty$ se transforma en la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$, o en la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Utilice esta idea para verificar que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \csc^2 2x = \dfrac{1}{4}$.

Con la forma $\infty-\infty$, también convertimos la expresión a una de las formas $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$, bien sea por factorización o por algún otro recurso algebraico.
Para $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$ primero verifique que es de la forma indeterminada $\infty - \infty$ y luego que es 0.

Para calcular los límites de las formas indeterminadas 0^0, ∞^0 y 1^∞ procedemos de la siguiente manera:
Llamamos $y = [f(x)]^{g(x)}$ de modo que $\ln y = g(x) \ln f(x)$. Observemos que $g(x) \ln f(x)$ es un producto de la forma $0.\infty$, para cualquiera de las tres potencias indeterminadas. Finalmente, debemos recordar que

$$[f(x)]^{g(x)} = y = e^{\ln y} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

así que, por la continuidad de la función exponencial se tiene que

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x) \ln f(x)}.$$

Ejemplo 5.61. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0^+} (-\ln x)^x$.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} (-\ln x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ *estamos en la forma indeterminada* ∞^0.

Llamamos $y = (-\ln x)^x$ *de modo que* $\ln y = x \ln(-\ln x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \ln y &= \lim_{x \to 0^+} x \ln(-\ln x) \qquad (\textit{forma } 0.\infty) \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(-\ln x)}{\frac{1}{x}} \qquad \left(\textit{forma } \frac{\infty}{\infty}\right) \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{-\ln x}\left(\frac{-1}{x}\right)}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{-x}{\ln x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} x \left(\frac{-1}{\ln x}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Hasta el momento tenemos que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln y = 0$; *así, para terminar necesitamos un paso más:*

$$\lim_{x \to 0^+} (-\ln x)^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1.$$

Ejemplo 5.62. *Calcular* $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{senx}$.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ *y* $\lim\limits_{x \to 0^+} senx = 0$ *estamos en la forma indeterminada* 0^0.

Si $y = x^{senx}$ *entonces* $\ln y = senx \ln x$*, así*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} senx \ln x &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{senx}{x} (-\tan x) = 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$\lim_{x \to 0^+} x^{senx} = e^0 = 1.$$

Ejercicio 5.63. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x + sen\ x}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^{-1} x}{x}$.
3. $\lim\limits_{x \to \pi^+} (\pi - x) \cot x$.
4. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec 2x \cos 3x$.
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec x \cos 3x$.
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\ sen\ x}{\sec x - 1}$.
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + sen\ x}{2x + \cos x}$.
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 3x}\right)$. *Sugerencia: Factorizar* x^2 *ó hacer el cambio de variable* $x = \frac{1}{t}$*. Este límite es de la forma indeterminada* $\infty - \infty$.
9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{sen\ x}\right)$.
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x - x}{x^3}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+sen4x)^{\cot x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

13. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

14. $\lim\limits_{x\to \infty}(e^x+x)^{1/x}$

15. *Se sabe que* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\ x}{x+x^2}=1$. *Encontrar el error que se cometió en el siguiente procedimiento:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-sen\ x}{2}=0.$$

CAPÍTULO 6

Aplicaciones

En este capítulo vamos a apreciar la utilidad que tiene todo lo que hemos estudiado en este curso, en particular lo relacionado con la derivada de una función. En primer lugar, sabemos que por simple tabulación es muy difícil realizar una gráfica que revele realmente el comportamiento de una función. Veremos que las dos primeras derivadas de una función nos proporcionan información suficiente para elaborar un buen gráfico de ésta.

6.1. Trazado de curvas

Vamos a retomar algunas ideas que ya se mencionaron en el capítulo 5. Sabemos que si una función f es continua en $[a, b]$, alcanza máximo y mínimo en $[a, b]$. De acuerdo con la Figura 6.1, f alcanza máximo en $x = b$ y mínimo en $x = d$. Decimos que $f(b)$ es el valor máximo de f en $[a, b]$, y $f(d)$ es el valor mínimo de f en $[a, b]$.

Puesto que también se definieron los extremos locales, es decir, máximos y mínimos locales de f en un intervalo, vamos a diferenciar estos dos tipos de extremos. Para los primeros hablaremos de extremos absolutos o globales y para los segundos, de extremos locales.

Por ejemplo, la función f de la Figura 6.1 tiene máximo absoluto en $x = b$, que no es máximo local; en $x = c$ tiene un máximo local; en $x = d$ tiene un

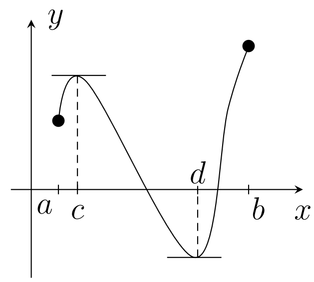


Figura 6.1

mínimo local y absoluto, y en $x = a$ no tiene máximo ni mínimo, local ni absoluto.

También se demostraron los siguientes resultados:

Teorema 6.1. *Si f es derivable en a y tiene un máximo o mínimo local en $x = a$, entonces $f'(a) = 0$.*

Corolario 6.2. *Sea f una función definida en (a, b).*

1. *Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).*

2. *Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).*

Se observó que el recíproco del Teorema 6.1 es falso, es decir, tener que $f'(a) = 0$ no implica que en $x = a$ se tenga un extremo local.

Definición 6.3. *Se llama punto crítico de una función f a todo número c del dominio de f, tal que $f'(c) = 0$, ó $f'(c)$ no existe.*

Ejemplo 6.4. *Son ejemplos de puntos críticos:*

1. *$x = 2$ para $f(x) = (x-2)^3$, puesto que $f'(2) = 0$. En $x = 2$, la función f no tiene extremo local.*

2. *$x = 0$ para $j(x) = -x^2$, puesto que $j'(0) = 0$. En $x = 0$, la función j tiene un máximo local.*

3. *$x = -4$ para $g(x) = |x+4|$, puesto que $g'(-4)$ no existe. En $x = -4$, la función g tiene un mínimo local.*

4. $x = 0$ *para* $h(x) = \sqrt[3]{x}$, *puesto que* $h'(0)$ *no existe. En* $x = 0$, *la función* h *no tiene extremo local.*

Si f es continua en $[a, b]$, alcanza máximo y mínimo en ese intervalo. Para buscar estos puntos tenemos dos opciones:

- Los extremos a, b.
- Los puntos críticos de f en $[a, b]$.

Ejemplo 6.5. *Considerar la función* $f(x) = x^3 - 3x$, *en* $\left[-\frac{3}{2}, \frac{11}{5}\right]$.

Como f *es una función polinómica, es derivable en todos los números reales.*

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) = 3\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)$, *de modo que* f *tiene dos puntos críticos: en* 1 *y* -1.

Se tiene: $f(1) = -2 < f(-3/2) = 9/8 < f(-1) = 2 < f\left(\frac{11}{5}\right) = \frac{506}{125}$; *así,* f *alcanza su máximo en el extremo derecho* $x = \frac{11}{5}$ *y su mínimo en el punto crítico* $x = 1$.

Con base en el Corolario 6.2, f *es creciente en* $[-3/2, -1)$ *y en* $\left(1, \frac{11}{5}\right]$, *puesto que allí la derivada es positiva, y es decreciente en* $(-1, 1)$, *intervalo en el cual la derivada es negativa.*

El gráfico de esta función es la Figura 6.2.

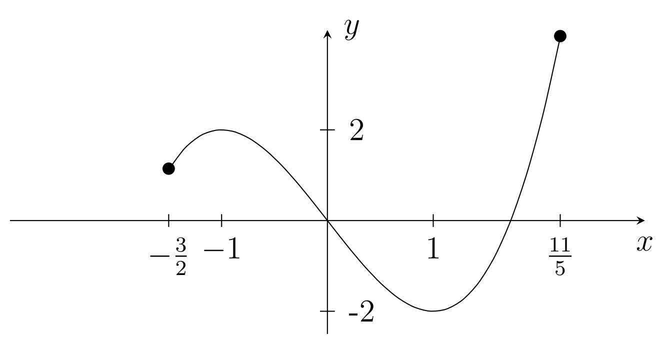


Figura 6.2

Como una consecuencia del Corolario 6.2 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 6.6. *Criterio de la primera derivada para extremos locales.*

Sea f *una función continua en un intervalo abierto* I *que contiene a* c, *y derivable en* I, *excepto quizá en* $x = c$.

1. *Si $f'(x) < 0$, para $x < c$, y $f'(x) > 0$, para $x > c$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.*

2. *Si $f'(x) > 0$, para $x < c$, y $f'(x) < 0$, para $x > c$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.*

3. *Si f' no cambia de signo en c, entonces f no tiene máximo ni mínimo local en $x = c$.*

Si hacemos una traducción de las hipótesis de este teorema, con la ayuda del Corolario 6,2 ya mencionado, se tiene: Si f cambia de decreciente a creciente en $x = c$, entonces f tiene un mínimo local en c; y si f cambia de creciente a decreciente en $x = c$, entonces f tiene un máximo local en c, como lo ilustran las figuras 6.3, 6.4 y 6.5.

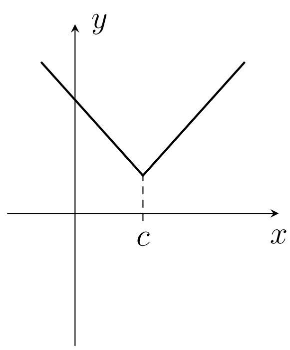


Figura 6.3

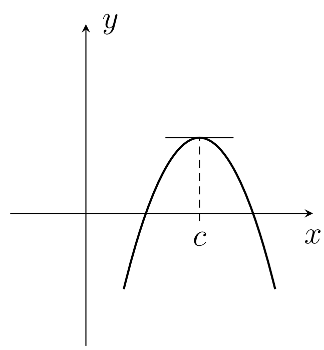


Figura 6.4

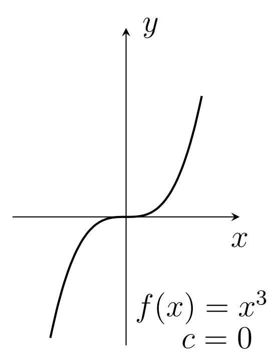


Figura 6.5

La Figura 6.5 permite apreciar que el recíproco del Corolario 6.2 es falso; la función $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$ y se tiene que $f'(x) \geq 0$, para todo x real, no es estrictamente positiva.

Tenemos: Sea f derivable en un intervalo I, si f es creciente en I, entonces $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, y si f es decreciente en I, entonces $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Definición 6.7. *Sea f una función definida en un intervalo (a, b).*

1. *Decimos que f es cóncava hacia arriba en (a, b), si f' es una función creciente en (a, b); es decir, las pendientes de las rectas tangentes a la curva $y = f(x)$ van aumentando a medida que x recorre el intervalo (a, b).*

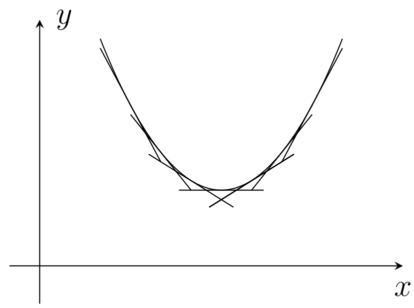


Figura 6.6

2. *Decimos que* f *es cóncava hacia abajo en* (a, b), *si* f' *es una función decreciente en* (a, b); *es decir, las pendientes de las rectas tangentes a la curva* $y = f(x)$ *van disminuyendo a medida que* x *recorre el intervalo* (a, b).

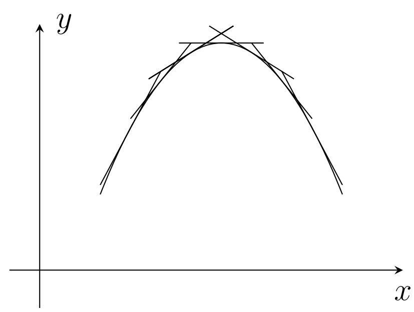


Figura 6.7

Teorema 6.8. *Sea* f *una función dos veces derivable en* (a, b).

1. *Si* $f''(x) > 0$, *para todo* x *en* (a, b), *entonces* f *es cóncava hacia arriba en* (a, b).

2. *Si* $f''(x) < 0$, *para todo* x *en* (a, b), *entonces* f *es cóncava hacia abajo en* (a, b).

Prueba. Es una consecuencia inmediata del Corolario 6.2.

Si $f''(x) > 0$, para todo x en (a, b), entonces f' es creciente en (a, b); luego, por definición, f es cóncava hacia arriba en (a, b). De manera similar, si $f''(x) < 0$, para todo x en (a, b), entonces f' es decreciente en (a, b); luego, por definición, f es cóncava hacia abajo en (a, b). $\square$

Ejemplo 6.9. *El ejemplo más sencillo y que a su vez nos permite recordar el Teorema 6.8, se tiene con las funciones* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = -x^2$.

$f'(x) = 2x$ *es una función creciente en* $\mathbb{R}$ *y* $f''(x) = 2 > 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$; *así que* f *es una función cóncava hacia arriba en* $\mathbb{R}$.

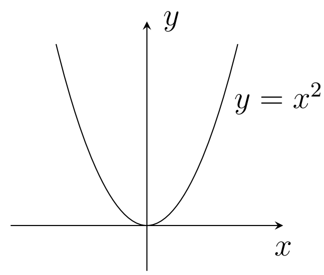


Figura 6.8

$g'(x) = -2x$ *es una función decreciente en* $\mathbb{R}$ *y* $g''(x) = -2 < 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$; *así que* g *es una función cóncava hacia abajo en* $\mathbb{R}$.

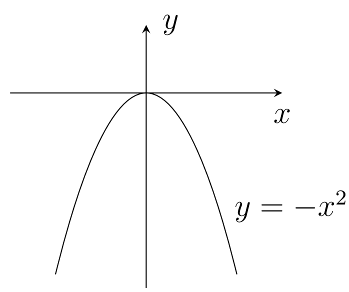


Figura 6.9

Definición 6.10. *Sean* f *una función continua en* (a, b) *y* $c \in (a, b)$.

Decimos que f *tiene un punto de inflexión en* $x = c$, *si la concavidad de la gráfica de* f *cambia en este punto; es decir,* f *es cóncava hacia arriba en* (a, c) *y cóncava hacia abajo en* (c, b), *o al contrario.*

Como consecuencia del Teorema 6.8 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 6.11. *Si* f *es dos veces derivable en* (a, b) *y* f'' *cambia de signo en* $c \in (a, b)$, *entonces* f *tiene un punto de inflexión en* $x = c$.

Teorema 6.12. *Si f tiene un punto de inflexión en $x = c$ y $f''(c)$ existe, entonces $f''(c) = 0$.*

Prueba. Bonito ejercicio. (Debe usar varios de los teoremas vistos en este capítulo). □

El recíproco de este teorema es falso; por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ satisface que $f''(0) = 0$, pero f no tiene punto de inflexión en $x = 0$. Por otra parte, el punto de inflexión de f puede tenerse donde la segunda derivada no exista; por ejemplo, para $f(x) = x^{1/3}$ se tiene punto de inflexión en $x = 0$, la concavidad de la función cambia, así como el signo de f'', pero f no es derivable en $x = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$, $f''(x) = \dfrac{-2}{9x^{5/3}}$.

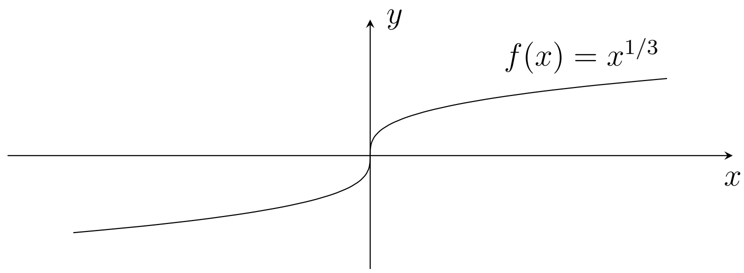


Figura 6.10

Teorema 6.13. *Criterio de la segunda derivada para extremos locales.*

Sea f una función dos veces derivable en un intervalo que contiene a $x = a$ y supongamos que $f'(a) = 0$.

1. *Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a.*
2. *Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a.*

Prueba. Como $f'(a) = 0$, tenemos que

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{h}.$$

1. Como $f''(a) > 0$, es decir, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{h} > 0$, entonces existe $\delta > 0$, tal que $\dfrac{f'(a+h)}{h} > 0$, si $0 < |h| < \delta$. Así, si $h > 0$, entonces $f'(a+h) > 0$;

es decir, f es creciente en $(a, a+\delta)$. Y si $h < 0$, entonces $f'(a+h) < 0$; es decir, f es decreciente en $(a-\delta, a)$. Luego, por el criterio de la primera derivada, f tiene un mínimo local en $x = a$.

2. Es un ejercicio similar al anterior. $\square$

Una forma sencilla de recordar este criterio es usando el hecho de que el signo de la segunda derivada nos habla de la concavidad. Así, si $f''(a) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en un intervalo alrededor de $x = a$, y, por tanto, en $x = a$ debe haber un mínimo local. (De manera análoga para $f''(a) < 0$).

Ejemplo 6.14. *Vamos a continuar analizando la función $f(x) = x^3 - 3x$ del Ejemplo 6.5, pero ahora considerémosla en todo $\mathbb{R}$.*

1. *Tenemos que $x = -1$, $x = 1$ son sus dos puntos críticos (posibles máximos o mínimos, pero no necesariamente). Según el criterio de la primera derivada, concluimos que la función f tiene un máximo local en $x = -1$, y un mínimo local en $x = 1$, puesto que f' es positiva en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $(-1, 1)$.*

2. *Por el criterio de la segunda derivada debemos llegar a la misma conclusión de la parte anterior. Veamos: sabemos que $f'(-1) = 0 = f'(1)$ y $f''(x) = 6x$; así, como $f''(-1) = -6 < 0$, f tiene un máximo local en $x = -1$ y como $f''(1) = 6 > 0$, f tiene un mínimo local en $x = 1$.*

3. *Ahora, como $f''(x) < 0$ para $x < 0$, y $f''(x) > 0$ para $x > 0$, tenemos que f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$, cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$ y tiene su único punto de inflexión en $x = 0$.*

   Su gráfico es la Figura 6.11.

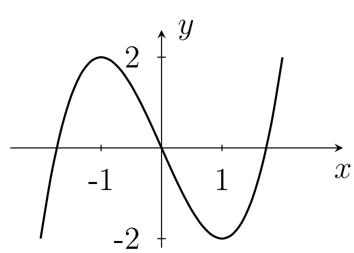


Figura 6.11

Nota. El criterio de la segunda derivada no decide en el caso en que se tenga $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, puesto que en esta situación, en $x = a$, puede tenerse máximo local, mínimo local o ninguno de los dos, como lo muestran los siguientes ejemplos.

1. $f(x) = -x^4$ tiene máximo local en $x = 0$.

   $f'(x) = -4x^3$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -12x^2$, $f''(0) = 0$.

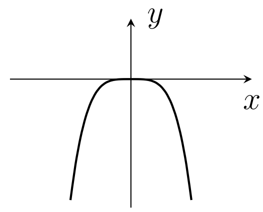


Figura 6.12

2. $g(x) = x^4$ tiene mínimo local en $x = 0$.

   $g'(x) = 4x^3$, $g'(0) = 0$, $g''(x) = 12x^3$, $g''(0) = 0$.

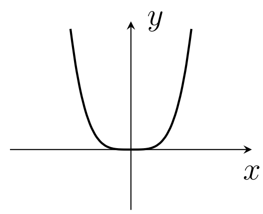


Figura 6.13

3. Como ya se mencionó, $h(x) = x^3$ no tiene máximo ni mínimo local en $x = 0$.

   $h'(x) = 3x^2$, $h'(0) = 0$, $h''(x) = 6x$, $h''(0) = 0$.

Teorema 6.15. *Sea f una función tal que $f''(a)$ existe.*

1. *Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$.*
2. *Si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.*

Note que este teorema no es precisamente el recíproco del criterio de la segunda derivada.

Prueba.

1. Supongamos que f tiene un mínimo local en a y $f''(a) < 0$.

   Como $f''(a)$ existe, entonces f es derivable en a, y puesto que f tiene un mínimo local en a, se tiene que $f'(a) = 0$, por el Teorema 6.1. Tenemos que $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, de modo que, por el criterio de la segunda derivada, f tiene un máximo local en a. En estas condiciones, f debe ser constante en un intervalo alrededor de a, pero esto nos conduce a una contradicción, puesto que se tendría $f''(a) = 0$ y $f''(a) < 0$. Por tanto, si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$.

2. Se obtiene de manera similar a la anterior. $\square$

Ejemplo 6.16. *Dada $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 12x$, determinar: puntos máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo y puntos de inflexión. Graficar.*

1. *Determinemos los puntos críticos.*

   $$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 12$$

   Dado que f es polinómica, los puntos críticos los obtenemos cuando $f'(x) = 0$, entonces

   $$\frac{3}{4}x^2 - 12 = 0.$$

   Es decir:

   $$x = \pm\, 4.$$

2. *Para saber si los puntos críticos son máximos o mínimos, hallemos f''.*

   $$f''(x) = \frac{3}{2}x$$

   Evaluamos la segunda derivada en cada uno de los puntos críticos:

   $$\begin{aligned} f''(4) &= 6 \\ f''(-4) &= -6 \end{aligned}$$

Por tanto, en $x = 4$ hay un mínimo relativo y en $x = -4$ hay un máximo relativo.

3. *Veamos ahora dónde f es creciente y dónde es decreciente.*

   f es creciente cuando $f'(x) > 0$, es decir:

$$\frac{3}{4}x^2 - 12 > 0$$

   Por tanto, $f'(x) > 0$, si $x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$. De donde se concluye que f es creciente en $(-\infty, -4)$ y en $(4, \infty)$. De manera similar, puede mostrarse que f es decreciente en $(-4, 4)$.

4. *Concavidad.*

   f es cóncava hacia arriba cuando $f''(x) > 0$, es decir, cuando $\frac{3}{2}x > 0$, lo que ocurre en $(0, \infty)$. De manera similar encontramos que $f''(x) < 0$, en $(-\infty, 0)$. Por tanto, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$.

5. *El punto de inflexión lo encontramos en $x = 0$, ya que en este punto hay un cambio de concavidad.*

6. *La gráfica corresponde a la Figura 6.14.*

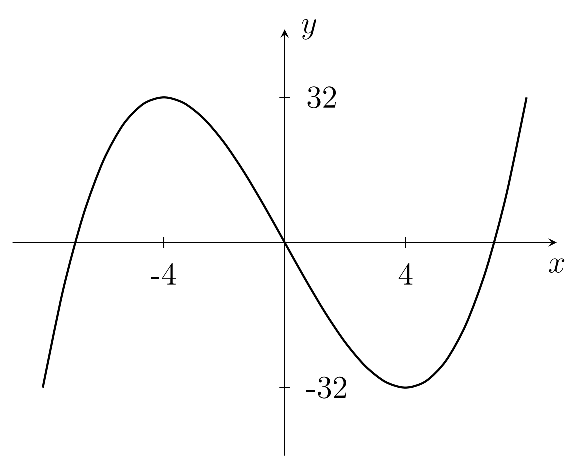


Figura 6.14

Nota. Recuerde que a la hora de graficar una función es de gran utilidad el estudio que se hizo anteriormente sobre asíntotas y discontinuidades.

Ejercicio 6.17. *Para cada función determinar: puntos máximos y mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos donde es cóncava hacia arriba o hacia abajo y puntos de inflexión. Graficar.*

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
2. $g(x) = x^4 - 2x^3$.
3. $h(x) = 4x^{1/3} + x^{4/3}$.
4. $j(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$.
5. $k(x) = x^{2/3}$.
6. $l(x) = \dfrac{3x^2 + x - 4}{(x+1)^2}$.
7. $m(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \ si\ x \geq 0 \\ -x^2 & , \ si\ x < 0 \end{cases}$
8. *¿Los puntos críticos de una función deben ser máximos, ó mínimos, ó puntos de inflexión? Justifique.*

6.2. Problemas de máximos y mínimos

En casi cualquier campo, ya sea en la industria, el comercio, la ciencia, siempre se requiere optimizar recursos, obtener la mayor cantidad de ganancias o invertir lo menos posible sin detrimento del producto final. Existen ejemplos específicos, como encontrar el envase más económico para comercializar un producto, encontrar el precio de venta de un producto para vender la máxima cantidad de él o determinar el ángulo en el que debe viajar un rayo de luz para minimizar el tiempo de llegada hasta un punto determinado.

Se busca, entonces, modelar estas situaciones mediante funciones que representen las variables del problema, para luego hallar máximos o mínimos de estas funciones, según la exigencia de éste. Para lograrlo, muchas veces necesitaremos hacer uso de nuestros conocimientos geométricos, físicos, etcétera, pero sobre todo de un minucioso cuidado en la lectura e interpretación del problema. Veamos un ejemplo, que aunque sencillo, nos ilustrará la mecánica para la solución de un problema de máximos y mínimos.

Ejemplo 6.18. *Encontrar dos números positivos cuya suma sea* 36 *y su producto sea máximo.*

Si designamos por x y y los números buscados, tenemos que $x + y = 36$.

Como queremos que el producto sea máximo, buscamos que $P = xy$ sea máximo.

Existen muchas parejas de números positivos cuya suma es 36*. Observemos algunos posibles valores de x y y, con sus respectivos productos en el Cuadro 6.1.*

x	y	xy
3	33	99
12	24	288
21	15	315
27	9	243

Cuadro 6.1

Podemos concluir que las posibilidades de resutados en los productos son varias, sin embargo buscamos los que tengan mayor producto. En los ejemplos anteriores, los valores de x y y que producen el mayor producto son 21 *y* 15*. ¿Pero estos valores producen el máximo producto? Afortunadamente hemos aprendido las herramientas necesarias en la sección anterior, las cuales podemos utilizar reorganizando la información de nuestro problema.*

La función para maximizar es el producto, pero está en términos de dos variables: x, y. Como $x + y = 36$, entonces $y = 36 - x$, de donde puede concluirse que $P = x\,(36 - x)$ y todo se reduce a encontrar el valor máximo de la función $P(x) = x\,(36 - x)$, en $(0, \infty)$. Por tanto, hallamos P' para encontrar los puntos críticos:

$$P'(x) = 36 - 2x$$

Luego, el único punto crítico de $P(x)$ es $x = 18$. Para determinar si en este *punto hay un máximo, hallamos* $P''(x) = -2$. *Como* $P''(18) < 0$, *entonces en* $x = 18$ *hay un máximo de* P.

Por consiguiente, cuando $x = 18$ *y* $y = 18$, *el producto es máximo y este producto es* 324.

En el Ejemplo 6.18 no se requirió un esfuerzo sobrehumano para entender el objetivo del problema. Sin embargo, para empezar, es un ejemplo muy claro en la forma como se resuelve un problema de optimización.

Veamos ahora un ejemplo de aplicación, que aunque hipotético, es una situación que podría presentársenos y también requiere un poco de cuidado en el planteamiento.

Ejemplo 6.19. *La Facultad de Veterinaria de la Universidad Nacional de Colombia quiere ubicar un ganado para estudio en una zona verde rectangular con un área de* 10000 *metros cuadrados, zona necesaria para la cantidad de ganado que va a ubicarse. Se encontró una zona adyacente a la malla que delimita la universidad con la calle por el occidente. Si se quiere utilizar la mínima cantidad de cerca para encerrar esta zona, con el objeto de bajar los costos, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la zona?*

Si x *es el largo y* y *es el ancho de la zona, podemos representar la situación en la Figura 6.15.*

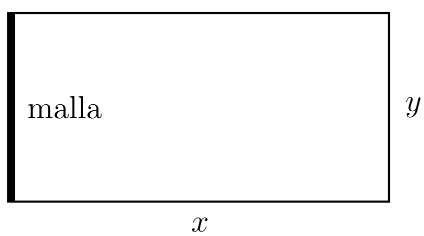


Figura 6.15

Como el área debe ser de 10000 *metros cuadrados, entonces* $xy = 10000$. *Si designamos por* L *la longitud de la cerca necesaria y tenemos en cuenta que no es necesario colocar cerca donde se encuentra la malla, entonces* $L = 2x + y$, *la función para minimizar. Para expresarla en términos de una sola variable, usemos la información del área.*

Dado que $x > 0$, *entonces* $y = \dfrac{10000}{x}$, *de esta manera* $L = 2x + \dfrac{10000}{x}$, *y nuevamente el problema se reduce a encontrar el mínimo de la función* $L(x) = 2x + \dfrac{10000}{x}$ *en* $(0, \infty)$.

Por tanto:

$$L'(x) = 2 - \frac{10000}{x^2}$$

Como $2 - \dfrac{10000}{x^2} = 0$, *si* $x = \pm\sqrt{5000} = \pm 50\sqrt{2}$, *y dado que nuestra función tiene dominio* $(0, \infty)$, *entonces el único punto crítico de* $L(x)$ *en este intervalo es* $50\sqrt{2}$.

Utilizando el hecho de que $L''(x) = \dfrac{20000}{x^3}$, *nos lleva a*

$L''(50\sqrt{2}) = \dfrac{20000}{\left(50\sqrt{2}\right)^3} > 0$. *Concluimos que en* $x = 50\sqrt{2}$ *hay un mínimo relativo de* $L(x)$.

Por consiguiente, dado que $L(x)$ *tiende a* ∞, *si* x *tiende a* 0 *y tiende a* ∞ *cuando* x *tiende a* ∞, *entonces el mínimo de* L *lo encontramos en* $x = 50\sqrt{2}$.

De donde la mínima cantidad de cerca la encontramos si $x = 50\sqrt{2}$ *y* $y = \dfrac{10000}{50\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}$. *Por tanto, la cerca debe tener dimensiones de* $50\sqrt{2}$ *y* $100\sqrt{2}$, *que aproximadamente son de* 70.711 *metros y* 141.42 *metros.*

Algunos conocimientos de geometría y una lectura cuidadosa nos ayudará a solucionar el siguiente problema.

Ejemplo 6.20. *Dos estudiantes de último semestre de Ingeniería Química de la Universidad Nacional de Colombia desean construir un envase cilíndrico para comercializar jugo de uchuva, conservado, utilizando estudios que hicieron en su tesis de grado. El envase debe tener una capacidad de* 1000 *centímetros cúbicos y su costo debe ser mínimo. Ayudémosles a encontrar las dimensiones del envase.*

Llamemos r *el radio de la base y* h *la altura. Dado que el volumen de un cilindro es* $\pi r^2 h$ *y que la capacidad debe ser de* $1000\ cm^3$, *entonces* $1000 = \pi r^2 h$. *Por otra parte, se quiere que el costo del envase sea mínimo. Si suponemos que el costo del material es constante, entonces debemos minimizar la cantidad de material para utilizar; es decir, debemos minimizar el área total del cilindro, la cual consta del área lateral, el área de la base y la tapa.*

Por tanto:

$$A_t = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$1000 = \pi r^2 h$$

Usaremos esta información para expresar A_t en términos de una sola variable. Para minimizar A_t, despejamos h en la segunda ecuación y remplazamos en A_t, buscando que ésta sea una función que únicamente dependa de r.

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \tag{6.1}$$

Por tanto:

$$A_t = 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

Es decir:

$$A_t(r) = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2$$

Nuevamente, seguimos el procedimiento aprendido para hallar los máximos y mínimos de una función $A_t(r)$ en $(0, \infty)$.

$$A_t'(r) = -\frac{2000}{r^2} + 4\pi r$$

$$-\frac{2000}{r^2} + 4\pi r = 0$$

Es decir, $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$. Veamos ahora si en este punto crítico encontramos un mínimo.

$$A_t''(r) = \frac{4000}{r^3} + 4\pi$$

$$A_t''\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = \frac{4000}{\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^3} + 4\pi > 0$$

Luego en $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ hay un mínimo relativo. De hecho, usted puede probar que es un mínimo absoluto. Remplazando en $(6{,}1)$ tenemos:

$$h = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} = \frac{1000}{\sqrt[3]{\pi 500^2}}.$$

En conclusión, los valores de r y h son $\sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ y $\dfrac{1000}{\sqrt[3]{\pi 500^2}}$ respectivamente; es decir, 5.4193 cm y 10.839 cm, aproximadamente.

Ejemplo 6.21. *Se quiere construir un cuadrado y un círculo con un alambre de 1 metro de longitud, cortándolo en dos partes y doblándolas para formar las figuras. De qué manera debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas sea:*

1. *Máxima.*
2. *Mínima.*

Supongamos que el círculo tiene un radio x y el cuadrado es de lado y. Dado que el alambre es de 100 cm, entonces la suma del perímetro del cuadrado y el del círculo es de 100 cm. Es decir:

$$2\pi x + 4y = 100. \tag{6.2}$$

Como, en primer lugar, queremos maximizar la suma de las áreas, entonces:

$$A = \pi x^2 + y^2; \tag{6.3}$$

despejamos y en (6,2):

$$y = \frac{50 - \pi x}{2}; \tag{6.4}$$

remplazando en (6,3), tenemos:

$$A(x) = \left(\frac{50 - \pi x}{2}\right)^2 + \pi x^2.$$

Donde $x \in \left[0, \frac{50}{\pi}\right]$. ¿Por qué? Derivando:

$$A'(x) = -\frac{\pi}{2}(50 - \pi x) + 2\pi x,$$

igualando a cero y despejando x, tenemos su único punto crítico:

$$x = \frac{50}{\pi + 4}.$$

Hallamos la segunda derivada y remplazamos el punto crítico obtenido:

$$A''(x) = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi,$$

$$A''\left(\frac{50}{\pi+4}\right) = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi > 0.$$

Por tanto, en $x = \dfrac{50}{\pi+4}$ *hay un mínimo local. Como estamos en el intervalo cerrado* $\left[0, \dfrac{50}{\pi}\right]$, *tenemos que comparar* $A(0)$, $A\left(\dfrac{50}{\pi+4}\right)$ *y* $A\left(\dfrac{50}{\pi}\right)$.

$$\begin{aligned} A(0) &= \left(\frac{50}{2}\right)^2 = 625. \\ A\left(\frac{50}{\pi+4}\right) &= \left(\frac{50-\pi\frac{50}{\pi+4}}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{50}{\pi+4}\right)^2 = \frac{2500}{\pi+4}. \end{aligned}$$

$$A\left(\frac{50}{\pi}\right) = \left(\frac{50-\pi\frac{50}{\pi}}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{50}{\pi}\right)^2 = \frac{2500}{\pi}.$$

Como $A\left(\dfrac{50}{\pi+4}\right) < A(0) < A\left(\dfrac{50}{\pi}\right)$, *entonces el área mínima se tiene cuando* $x = \dfrac{50}{\pi+4}$*cm y* $y = \dfrac{100}{\pi+4}$*cm, obtenido al remplazar x en (6.4). Luego, para obtener la menor área total, se necesita que el radio de la circunferencia sea aproximadamente de 7 cm y el lado del cuadrado debe ser aproximadamente de 14 cm. El área máxima se tiene cuando la circunferencia tiene un radio de* $\dfrac{50}{\pi}$ *cm y no hay cuadrado.*

Resumimos ahora algunos pasos que pueden ayudar en el planteamiento y solución de un problema de optimización. Hay que aclarar que no es estrictamente necesario seguir al pie de la letra estas indicaciones, pero sí pueden ayudar a lograr nuestro objetivo.

1. Leer varias veces de manera comprensiva y cuidadosa el enunciado del problema. Éste es el paso que usualmente causa más fracaso en la solución de problemas de optimización, pues si no se entiende claramente el problema, el planteaminto será errado y, por tanto, también la solución. Por consiguiente, lea y relea hasta que comprenda lo que se quiere.

2. Si es posible, haga un gráfico que represente la situación, tratando de hacerlo de la manera más general posible, es decir, no asumir que, por ejemplo, un cuadrilátero es necesariamente un rectángulo.

3. Una vez que ha comprendido cuáles magnitudes son constantes y cuáles son variables, escriba ecuaciones que representen la información dada y ecuaciones que representen la magnitud que va a optimizarse.

4. Identifique la función que se desea optimizar. Usualmente, esta función depende de más de una varible, por lo que es necesario utilizar la información del problema para remplazar una o más de estas variables en la función para optimizar y de esta manera lograr que dependa de una única variable.

5. Aplique los conocimientos de la sección anterior.

Ejercicio 6.22. *Resolver los siguientes problemas:*

1. *Probar que un rectángulo de área máxima, con perímetro dado, es un cuadrado.*

2. *Una empresa productora de jabón en polvo desea construir una caja de base cuadrada, con capacidad de* $1000\ cm^3$ *para empacar su producto. Si el costo del material para la base y la tapa es de* 5000 *pesos el metro cuadrado, y* 3500 *pesos el metro cuadrado para las caras laterales, ¿cuáles son las dimensiones de la caja más económica?*

3. *Determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo equilátero.*

4. *En una esfera de radio* a *se inscribe un cilindro. Determinar las dimensiones del cilindro de mayor volumen.*

5. *En un cono circular recto se inscribe un cilindro. ¿Cuáles son las dimensiones del cilindro de mayor volumen?*

6. *Encontrar los puntos sobre la curva* $y^2 = 2x$ *más cercanos al punto* $(1, 4)$.

7. *Las velocidad de una onda en la superficie de un líquido depende de la longitud de onda* λ, *y está dada por :*

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\delta\lambda}}$$

Donde g la aceleración de la gravedad, σ la tensión superficial del líquido y δ la densidad del líquido son constantes. Hallar la velocidad mínima de una onda y su longitud de onda.

8. *Carolina quiere llegar hasta el portal de buses lo más rápido posible y tiene que atravesar una zona verde. El portal se encuentra 200 metros al occidente y 300 metros al norte de donde ella está. Carolina puede llegar al portal caminando a lo largo de la acera que bordea la zona verde hacia el occidente a una velocidad de 1,5 metros por segundo y luego atravesar la zona verde a una velocidad de 1 metro por segundo. ¿Cuál es la trayectoria que debe seguir Carolina para llegar al portal lo antes posible?*

9. *La fuerza de una viga cuya sección transversal es un rectángulo, es proporcional al ancho y al cubo del alto de este rectángulo. Hallar las dimensiones de la viga más fuerte que puede obtenerse de un tronco cilíndrico de 20 centímetros de diámetro.*

6.3. Razones de cambio

Si $y = f(x)$ es una función que depende de x, la razón de cambio promedio de f en $[x_1, x_2]$ está dada por:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 6.23. *Hallar la razón de cambio promedio del área de un círculo respecto a su radio, cuando éste cambia de 2 cm a 3 cm; de 2 cm a 2,5 cm.*

El área de un círculo en términos del radio está dada por: $A = \pi r^2$. Por tanto, la razón de cambio promedio en $[2, 3]$ es:

$$\frac{\triangle A}{\triangle r} = \frac{\pi 3^2 - \pi 2^2}{3 - 2} = 5\pi \ cm^2/cm.$$

La razón de cambio promedio en $[2, 2{,}5]$ es:

$$\frac{\triangle A}{\triangle r} = \frac{\pi 2{,}5^2 - \pi 2^2}{2{,}5 - 2} = 4{,}5\pi \ cm^2/cm.$$

En el ejemplo anterior, podríamos hallar la razón de cambio promedio en los intervalos $[2, 2{,}4]$, $[2, 2{,}3]$, $[2, 2{,}2]$, $[2, 2{,}1]$ y hacerlo en un intervalo donde $\triangle x$ sea cada vez más pequeño, o simplemente hacerlo cuando $\triangle x \to 0$.

Con base en la idea anterior, podemos definir la razón de cambio instantánea de y en x por:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

Ejemplo 6.24. *Determinar la razón de cambio instantánea del área de un círculo respecto a su radio, cuando $r = 2$ cm.*

El área de un círculo en términos del radio es $A(r) = \pi r^2$. La derivada del área respecto a r es:

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

De donde:

$$A'(2) = 4\pi \ cm^2/cm.$$

Si calcula las razones de cambio promedio en los intervalos $[2, 2{,}4]$, $[2, 2{,}3]$, $[2, 2{,}2]$, $[2, 2{,}1]$ observará que estas tienden a 4π cm^2/cm.

Ejercicio 6.25.

1. *Se está inflando un globo esférico. Encontrar la razón de cambio del área superficial del globo respecto al radio, cuando éste es de* 20 *cm, y de* 30 *cm.*

2. *Una escalera de* 10 *metros de largo está apoyada en una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de aquélla se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x respecto a θ?*

3. *La ecuación de movimiento de una partícula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Hallar:*

   a) *Velocidad y aceleración como funciones de t.*
   b) *Aceleración después de* 2 *segundos.*
   c) *Aceleración cuando la velocidad es* 0.

4. *Una roca que está cayendo recorre* $10t^2$ *metros en los primeros* t *segundos. Hallar:*

   a) *La coordenada de la roca en* t *segundos.*

   b) *La ecuación de la velocidad y la aceleración.*

   c) *Aceleración, velocidad y rapidez.*

5. *Si en la Luna se dispara una flecha hacia arriba con una velocidad inicial de* 58 m/seg, *su altura (en metros) después de* t *segundos se expresa por* $h = 58t - 0{,}83t^2$.

   a) *Encontrar la velocidad de la flecha después de* 5 *segundos.*

   b) *¿Cuándo chocará la flecha contra la Luna?*

   c) *¿Con que velocidad chocará contra la Luna?*

   d) *¿Cuántos metros recorre la flecha?*

6.4. Razones relacionadas

En esta sección trataremos razones de cambio de diferentes variables, en las que todas ellas cambian respecto del tiempo y tienen alguna relación entre sí.

Ejemplo 6.26. *Un globo esférico se infla a razón de* 5 cm^3 *por segundo. Determinar la velocidad con la que aumenta el diámetro de globo, cuando éste tiene un radio de* 25 cm.

Como el globo está inflándose, a medida que pasa el tiempo tanto el volumen como el diámetro aumentan. Si decimos que V *es el volumen del globo en un tiempo dado* t *y* l *es el diámetro, entonces tenemos que*
$\dfrac{dV}{dt} = 5$ cm^3/seg *y nuestro problema se reduce a hallar* $\dfrac{dl}{dt}$ *en el instante en el cual* $l = 50$ cm.

Para lograrlo, debemos encontrar una relación entre V *y* l. *Dado que el volumen de una esfera es* $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ *y* $r = \dfrac{l}{2}$, *entonces*:

$$V = \frac{1}{6}\pi l^3$$

Si derivamos esta ecuación respecto al tiempo t tenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\pi l^2 \frac{dl}{dt}$$

Despejando $\dfrac{dl}{dt}$, obtenemos:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2\frac{dv}{dt}}{\pi l^2}.$$

Remplazando $\dfrac{dV}{dt}$ y l, encontraremos lo que queremos:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2\,(5\ cm^3/seg)}{\pi\,(50\ cm)^2} = \frac{1}{250\pi}\ cm/seg.$$

Luego, la velocidad con la que aumenta el diámetro es de $\dfrac{1}{250\pi}$ cm/seg que es aproximadamente $0{,}0012$ cm/seg.

Ejemplo 6.27. *Un avión vuela horizontalmente a una altura de 1 km con una velocidad de 500 km/h y pasa sobre un observador. ¿Con qué velocidad se aleja el avión del observador después de 1 minuto de haber pasado sobre él?*

La Figura 6.16 ilustra la situación.

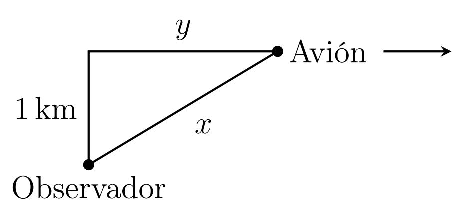


Figura 6.16

De la Figura 6.16 podemos tomar que $\dfrac{dy}{dt} = 500$ km/h y debemos hallar $\dfrac{dx}{dt}$. No es difícil encontrar una relación entre x y y, ya que tenemos un triángulo rectángulo con catetos 1 y y, e hipotenusa x.

$$1 + y^2 = x^2. \tag{6.5}$$

Nos falta derivar respecto a t y despejar $\dfrac{dx}{dt}$:

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}.$$

Es decir:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x}\frac{dy}{dt}. \tag{6.6}$$

Para determinar $\dfrac{dx}{dt}$ después de 1 minuto, primero tenemos que hallar los valores de x y y en este tiempo.

Como el avión vuela a una velocidad de 500 km/h, es decir a $\dfrac{25}{3}$ $km/$ mín, entonces después de un minuto $y = \dfrac{25}{3}$ km. Remplazando este valor de y en (6,5) tenemos:

$$1 + \left(\frac{25}{3}\right)^2 = x^2;$$

por tanto, $x = \dfrac{\sqrt{634}}{3}$ km. Remplazando en (6,6) obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{25}{3}\ km}{\frac{\sqrt{634}}{3}\ km}\ 500\ km/h = \frac{6250}{317}\sqrt{634}\ km/h.$$

Luego, la velocidad con la que se aleja el avión del observador es $\dfrac{6250}{317}\sqrt{634}$ km/h que aproximadamente es 496.44 km/h.

Cuando resolvimos problemas de máximos y mínimos, escribimos algunos pasos que podrían seguirse para plantearlos y solucionarlos. En los problemas de razones relacionadas podemos seguir casi los mismos consejos, con algunas variaciones. Veamos.

1. Lea varias veces de manera comprensiva y cuidadosa el enunciado del problema.

2. Si es posible, elabore un gráfico que represente la situación, tratando de hacerlo de la manera más general posible. Identifique las magnitudes constantes y las que varían.

3. Exprese la información dada y las preguntas como tasa de cambio, en términos de derivadas.

4. Encuentre una ecuación que relacione las variables teniendo cuidado de no remplazarlas por valores específicos, en tiempos específicos.

5. Utilice la derivada implícita para derivar respecto al tiempo.

6. Despeje la incógnita y sustituya los datos proporcionados por el enunciado del problema.

Ejercicio 6.28.

1. *Dos automóviles parten de la misma ciudad. Uno viaja hacia el sur a* 60 km/h *y el otro hacia el oriente a* 80 km/h.

   a) *¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre los dos automóviles?*

   b) *¿Con qué velocidad aumenta la distancia entre los dos automóviles, cuando han transcurrido dos horas?*

2. *Una lámpara situada sobre el piso ilumina un muro que se encuentra a* 20 *metros de distancia. Un hombre de* 1,7 *metros de alto camina desde la lámpara hacia el muro a una velocidad de* 1,5 *metros por segundo. Determinar la velocidad con la que decrece la sombra proyectada sobre el muro, cuando se encuentra a* 8 *metros de éste.*

3. *La base de un rectángulo aumenta a razón de* 2 cm/min *mientras que su altura decrece a razón de* 1 cm/min. *En el instante en que la base mide* 3 cm *y la altura* 5 cm, *hallar la razón de cambio de:*

   a) *El área.*

   b) *El perímetro.*

   c) *La diagonal.*

4. *Se deja caer arena a razón de* 45 $cm^3/\,\text{mín}$ *formando un cono cuyo diámetro siempre es igual a su altura. Determinar la velocidad con la que aumenta el diámetro, cuando la arena tiene una altura de* 9 cm.

5. *La ley de Boyle dice que al comprimir un gas a temperatura constante, la presión P y el volumen V satisfacen la ecuación*

$$PV = C.$$

Donde C es una constante. En cierto instante, el volumen de un gas es de 400 cm^3*, la presión es de* 200 kPa*, la cual aumenta a razón de* 20 $kPa/\text{mín}$*. ¿Con qué razón disminuye el volumen en ese momento?*

6. *Un tanque de agua tiene* 2 *metros de largo y una sección transversal en forma de triángulo equilátero de* 1 *metro de lado. El tanque está llenándose a razón de* 10 *centímetros cúbicos por segundo. ¿Con qué velocidad está cambiando la altura, cuando el agua tiene* 80 *cm de profundidad?*

6.5. Método de Newton

El método de Newton es una técnica numérica, ideada por sir Isaac Newton en el siglo XVII, que emplea la derivada para generar una sucesión de números x_1, x_2, $x_3, ...$ de aproximaciones a una de las raíces o soluciones r, de una ecuación de la forma $f(x) = 0$, o de otra forma, a uno de los ceros de la función f.

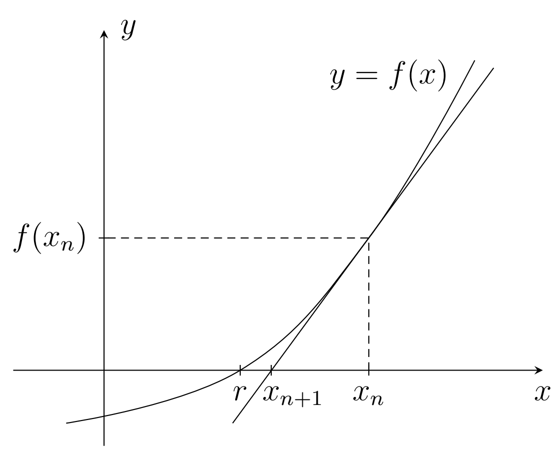


Figura 6.17

En primer lugar, debe hacerse un estimativo inicial x_0 que se aproxime a r. Esto puede hacerse por inspección de la gráfica de f, o por el teorema del valor intermedio, y encontrar un intervalo en el cual $f(x)$ cambie de signo.

Luego se halla x_1 a partir de x_0, x_2 a partir de x_1, y así sucesivamente. La idea central es que x_{n+1} es el punto de corte, sobre el eje x, de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $(x_n, f(x_n))$. El procedimiento para hallar x_{n+1} es el siguiente:

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $(x_n, f(x_n))$ es:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Como suponemos que esta recta corta al eje x en x_{n+1}, entonces el punto $(x_{n+1}, 0)$ debe satisfacer la ecuación de la recta; es decir:

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Ahora, la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$ debe intersecar el eje x, de modo que no puede ser una recta horizontal; por tanto, $f'(x_n) \neq 0$ y así:

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n.$$

Para obtener finalmente la *fórmula iterativa del método de Newton:*

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}.$$

Con esta fórmula se va obteniendo la sucesión de números x_0, x_1, $x_2, ...$ que converge a r, es decir, x_n y r están tan cercanos como queramos, eligiendo a n suficientemente grande. Decimos que tenemos una aproximación de r con k cifras decimales de precisión cuando x_n y x_{n+1} coinciden en por lo menos k cifras decimales. Note que si x_n y x_{n+1} son casi iguales, entonces el cociente $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ es casi nulo, de modo que $f(x_n)$ es casi cero.

Ejemplo 6.29. *Hallar una aproximación de $\sqrt{2}$ con una precisión de cinco cifras decimales.*

Sabemos que $\sqrt{2}$ es una solución de la ecuación $x^2 = 2$, o $x^2 - 2 = 0$; entonces consideremos la función $f(x) = x^2 - 2$, donde $f'(x) = 2x$. En este caso, la fórmula de Newton se transforma en:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2 - 2}{2x_n} = \frac{(x_n)^2 + 2}{2x_n}.$$

Ahora, como sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$, *podemos tomar* $x_0 = 2$ *para obtener:*

$$x_1 = \frac{(2)^2 + 2}{2{,}2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$x_2 = \frac{(1{,}5)^2 + 2}{2.(1{,}5)} = 1.\,416\,667$$

$$x_3 = \frac{(1.\,416\,667)^2 + 2}{2.(1.\,416\,667)} = 1.\,414\,2157$$

$$x_4 = \frac{(1.\,414\,2157)^2 + 2}{2.(1.\,414\,2157)} = 1.\,414\,2135$$

Como observamos que x_3 *y* x_4 *coinciden en cinco cifras decimales, tenemos que* $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$ *es la aproximación pedida. Con la ayuda de una calculadora revise esta aproximación para* $\sqrt{2}$. *Note que podríamos haber tomado* $x_0 = 1$. *Usted puede continuar el trabajo en este caso y compararlo con el resultado ya obtenido.*

De manera similar, puede procederse como en el ejemplo anterior, para hallar una aproximación de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, entre otras.

Ejemplo 6.30. *Con un rectángulo de dimensiones* 7 *centímetros de ancho y* 11 *centímetros de largo, se hace una caja sin tapa cortando un cuadrado de longitud* x *en cada esquina.*

a) Expresar el volumen de la caja.

b) Hallar los valores de x *para los cuales la caja tiene volumen* 40 *centímetros cúbicos.*

a) $v(x) = x(7 - 2x)(11 - 2x) = 4x^3 - 36x^2 + 77x$

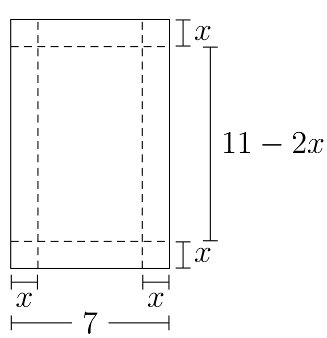


Figura 6.18

b) Queremos hallar los valores de x para los cuales $v(x) = 40$, es decir, $4x^3 - 36x^2 + 77x = 40$. Llamemos $f(x) = 4x^3 - 36x^2 + 77x - 40$. Verifique, por el teorema del valor intermedio, que f tiene tres raíces $r_1 \in [0, 1]$, $r_2 \in [2, 3]$ y $r_3 \in [6, 7]$. Ahora, utilice la fórmula de Newton para hallar que con $x_0 = 1$ se obtiene $r_1 \approx 0{,}7780$, con $x_0 = 2$ se obtiene $r_2 \approx 2{,}0992$, y con $x_0 = 6$ se obtiene $r_3 \approx 6{,}1227$.

Luego, los valores de x para los cuales la caja tiene volumen 40 centímetros cúbicos son 0,7780 cm y 2,0992 cm, aproximadamente. ¿Por qué?

Ejercicio 6.31.

1. *Usar el método de Newton para aproximar $\sqrt[4]{6}$ con cuatro cifras decimales de precisión.*

2. *Verificar que cada una de las funciones dadas tiene una raíz en el intervalo y hallar una aproximación de esa raíz con tres cifras decimales de precisión:*

   a) $f(x) = x^3 + 4x - 1$, *en* $[0, 1]$.
   b) $f(x) = x^2 - \operatorname{sen} x$, *en* $[0{,}5, 1]$.

3. *La ecuación $x = \frac{1}{2}\cos x$ tiene una solución r cerca de 0,5. Hallar una aproximación de r.*

4. *Considerar las curvas $y = \tan x$, y $y = 2x$.*

   a) *Observar gráficamente que estas curvas se intersecan infinitas veces.*
   b) *Usar el método de Newton para estimar el punto de intersección de estas gráficas en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, con una precisión de tres cifras decimales.*

5. *Explicar por qué fracasa el método de Newton al intentar hallar una aproximación de la única raíz de la función $f(x) = x^{1/3}$. (Intentar cambiando el valor inicial x_0. Trazar con cuidado la gráfica de f y observar su comportamiento cerca de la raíz).*

6. *En el proceso para encontrar los puntos sobre la curva $y = x^2$ más cercanos al punto $(2, 0)$ puede ser útil el método de Newton, explique por qué y resuelva el ejercicio.*

6.6. Aproximación lineal

Sabemos que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la recta que interseca a la curva en dicho punto y es la recta que más se parece a la función f, para valores de x cercanos a $x = a$.

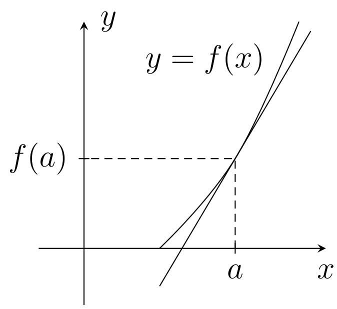


Figura 6.19

Por este motivo, podemos aproximar valores de $f(x)$ para x cercanos a $x = a$, con las imágenes de esos x por la recta tangente. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $(a, f(a))$, es:

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x-a), \\ y &= f(a) + f'(a)(x-a). \end{aligned}$$

Entonces, se llama *linealización o aproximación lineal* de f en $x = a$ (o con centro $x = a$) a la función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Así, si f es diferenciable en a, se tiene que $f(x) \approx L(x)$ para valores de x cercanos a a.

Ejemplo 6.32. *Hallar la aproximación lineal de* $f(x) = \sqrt{1+x}$, *en* $a = 0$, *y utilizarla para hallar una aproximación de* $f(0{,}2)$.

$f(x) = \sqrt{1+x}, \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$L(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x$ *es la aproximación lineal de* f, *en* $a = 0$, *así:*

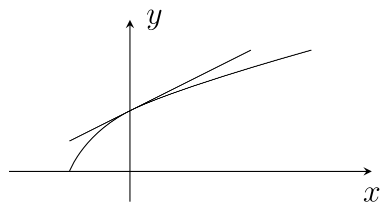


Figura 6.20

$$\begin{array}{lcl} f(0{,}2) & \approx & L(0{,}2) \\ \sqrt{1+0{,}2} & \approx & 1+\frac{1}{2}(0{,}2) = 1+\frac{1}{2}\frac{2}{10} \\ \sqrt{1{,}2} & \approx & 1{,}1 \end{array}$$

Además, podemos afirmar que esta aproximación de $\sqrt{1{,}2}$ *es una aproximación por exceso, puesto que la recta tangente a* f *en* $a = 0$ *queda por encima de la función, para valores de* x *cercanos a cero.*

Ejemplo 6.33. *Hallar una aproximación de* $\operatorname{sen}(0{,}1)$ *usando aproximaciones lineales.*

Vamos a hallar la aproximación lineal de $f(x) = \operatorname{sen} x$*, en* $a = 0$.

$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad f'(0) = 1$

$L(x) = x$*, de modo que* $\operatorname{sen}(0{,}1) \approx 0{,}1$. *(Puede usar una calculadora para verificarlo). ¿Es ésta una aproximación por exceso o por defecto?*

Observe que la aproximación lineal $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ de f, en $x = a$, tiene las siguientes propiedades:

1. $f(a) = L(a)$.
2. $f'(a) = L'(a)$.

Ejercicio 6.34.

1. *Hallar la linealización de* $f(x) = \sqrt{x}$*, en* $a = 1$*, y usarla para dar una aproximación de* $\sqrt{0{,}99}$*, de* $\sqrt{1{,}01}$.
2. *Hallar la linealización de* $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$*, en* $a = 0$.
3. *Hallar la linealización de* $h(x) = (1+5x^4)^{1/3}$*, en* $a = 0$.

4. *Mostrar que la aproximación lineal de* $f(x) = (1+x)^k$, *en* $a = 0$, *es* $L(x) = 1 + kx$, *para todo* k.

5. *Usar aproximaciones lineales para dar una aproximación de* $\tan(-0{,}1)$.

6.7. Polinomios de Taylor

La aproximación lineal de la curva $y = f(x)$, en $x = a$, es la recta más parecida a la curva f, para valores de x cercanos a a; pero al ser f una curva, ¿podemos conseguir una "curva" que sea muy parecida a f cerca de a? La respuesta es sí, aproximando a f por un polinomio de grado mayor que uno.

Sabemos que $f(x)$ y $L(x)$ coinciden en a, y tienen la misma razón de cambio en a. Vamos a buscar un polinomio $P(x)$ de grado 2, "alrededor de a", de modo que:

1. $P(a) = f(a)$: P y f coinciden en a.

2. $P'(a) = f'(a)$: P y f tienen la misma razón de cambio en a.

3. $P''(a) = f''(a)$: las pendientes de P y f tienen la misma razón de cambio en a.

Llamemos $P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$. Vamos a buscar las constantes A, B, C de modo que se tengan las tres propiedades ya mencionadas.

$P(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2$,	$P(a) = A$,	entonces $A = f(a)$.
$P'(x) = B + 2C(x-a)$,	$P'(a) = B$,	entonces $B = f'(a)$.
$P''(x) = 2C$,	$P''(a) = 2C$,	entonces $C = \frac{1}{2}f''(a)$.

Cuadro 6.2

Así, $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$ es el polinomio de segundo grado que más se parece a f para valores de x cercanos a a.

Ahora, podemos repetir el proceso anterior para buscar un polinomio de tercer grado, aumentando la condición $P'''(a) = f'''(a)$, o podemos continuar hasta el grado que queramos. Verifique que para un polinomio de grado cuatro, $P(x) = A + B\,(x-a) + C\,(x-a)^2 + D\,(x-a)^3 + E\,(x-a)^4$, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
&P(a) = A, && \text{entonces } A = f(a).\\
&P'(a) = B, && \text{entonces } B = f'(a).\\
&P''(a) = 2C, && \text{entonces } C = \frac{1}{2}f''(a).\\
&P^{(3)}(a) = 2{,}3.D = (3!)D, && \text{entonces } D = \frac{1}{3!}f^{(3)}(a).\\
&P^{(4)}(a) = 2{,}3{,}4.E = (4!)E, && \text{entonces } E = \frac{1}{4!}f^{(4)}(a).
\end{aligned}
$$

En general, notemos P_n al polinomio de grado n tal que P_n y f, así como sus primeras n derivadas tienen igual valor en $x = a$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Si f es una función n veces derivable en un intervalo alrededor de $x = a$, entonces P_n es el *polinomio de Taylor* de grado n de f, con centro en $x = a$, y es de la forma:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Este polinomio nos sirve para encontrar aproximaciones de $f(x)$ para valores de x cercanos a $x = a$.

Ejemplo 6.35. *Hallar el polinomio de Taylor de grado* 4 *de* $f(x) = \cos x$, *con centro en* $a = 0$.

$$
\begin{array}{rl}
f(x) = \cos x, & f(0) = 1\\
f'(x) = -\operatorname{sen} x, & f'(0) = 0\\
f''(x) = -\cos x, & f''(0) = -1\\
f^{(3)}(x) = \operatorname{sen} x, & f^{(3)}(0) = 0\\
f^{(4)}(x) = \cos x, & f^{(4)}(0) = 1
\end{array}
$$

Entonces, de acuerdo con estos resultados,
$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$

Ejemplo 6.36. *Hallar el polinomio de Taylor de tercer grado en* $a = 0$, *para*

$f(x) = \sqrt{1+x}$, *y utilizarlo para hallar una aproximación de* $f(0{,}2)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+x}, & f(0) &= 1.\\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, & f'(0) &= \frac{1}{2}.\\
f''(x) &= \frac{-1}{4\sqrt{(1+x)^3}}, & f''(0) &= \frac{-1}{4}.\\
f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8\sqrt{(1+x)^5}}, & f^{(3)}(0) &= \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4{,}2!}x^2 + \frac{3}{8{,}3!}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3.$$

Ahora, como este polinomio es alrededor de cero y $0{,}2$ *es cercano a cero, entonces:*

$$f(0{,}2) \approx P_3(0{,}2) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\right)^3 = 1{,}0955.$$

Compare y observe que esta aproximación de $\sqrt{1{,}2} = f(0{,}2)$ *es mejor que la realizada por aproximaciones lineales, en el Ejemplo 6.32.*

Ejercicio 6.37.

1. *Hallar el polinomio de Taylor de grado cinco para la función* $f(x) = \operatorname{sen} x$, *alrededor de* $a = 0$ *y a través de él encontrar una aproximación de* $\operatorname{sen}(0{,}1)$. *Comparar este resultado con el obtenido en el Ejemplo 6.33.*

2. *En cada caso, hallar el polinomio de Taylor de grado* n *de la función* f, *con centro en* a.

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $n = 4$.

   b) $f(x) = \tan^{-1} x$, $a = 0$, $n = 3$.

3. *Calcular el cuarto coeficiente del polinomio de Taylor de grado* 5, *de la función* $f(x) = \sqrt{x}$, *en* $a = 4$.

4. *Encontrar el polinomio de Taylor de grado* 3, *en* $a = 1$, *para la función* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ *y observar que es una representación exacta de* $f(x)$.

6.8. Incrementos y diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo alrededor de $a \in \mathbb{R}$ y llamemos T a la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $(a, f(a))$. Se llaman *incrementos* a los números reales $\triangle x$, $\triangle y$, donde $\triangle x$ representa un cambio en el eje x, como se observa en la Figura 6.21, y
$\triangle y = f(a+\triangle x) - f(a)$ es el cambio que se produce en el eje y por la función f, cuando x cambia de a a $a + \triangle x$.

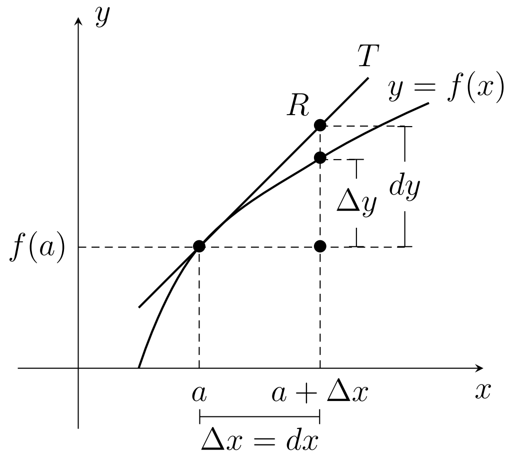


Figura 6.21

Se llaman *diferenciales* a los números reales dx, dy, donde $dx = \triangle x$, puesto que corresponde al cambio en el eje x y dy es el cambio producido en el eje y a través de la recta tangente T, cuando x varía de a a $a+\triangle x$. Puesto que la recta tangente T aproxima los valores de $f(x)$, cuando x está cerca de a, entonces tenemos que para valores pequeños de $\triangle x = dx$, el diferencial dy nos da una aproximación del incremento $\triangle y$.

Como dx y dy toman valores reales, tenemos que $f'(a) = \dfrac{dy}{dx}$, al observar el triángulo de vértices $(a, f(a))$, $(a + \triangle x, f(a))$ y R, de modo que el diferencial en y se calcula así:

$$\boxed{dy = f'(a)dx.}$$

Además, podemos hallar la aproximación lineal de $f(a+dx)$, en términos de diferenciales por

$$\boxed{f(a + dx) \approx f(a) + dy.}$$

Ejemplo 6.38. *Para* $f(x) = \sqrt{x+8}$, *cuando* $a = 1$ *y* $dx = \triangle x = 0{,}05$, *calcular el diferencial* dy *y usarlo para dar una aproximación de* $\sqrt{9{,}05}$.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+8}}$, *entonces* $dy = f'(1)dx = \dfrac{0{,}05}{2\sqrt{1+8}} = \dfrac{0{,}05}{6} = 0{,}0083$.

Luego, $\sqrt{9{,}05} = f(1{,}05) = f(1+dx) \approx f(1) + dy = 3{,}0083$. *Podría usar una calculadora para revisar esta aproximación, calculando directamente la raíz.*

Los diferenciales se emplean para estimar o aproximar los errores que ocurren debido a mediciones aproximadas, es decir, el cambio en f cuando x varía de a a $a + dx$. (Ver Cuadro 6.3)

Error	Real	Aproximado
Absoluto	$\triangle f$	df
Relativo	$\dfrac{\triangle f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Porcentual	$\dfrac{\triangle f}{f(a)},100\,\%$	$\dfrac{df}{f(a)},100\,\%$

Cuadro 6.3

Ejemplo 6.39. *Se midió la arista de un cubo y resultó de* 20 *cm, con un error posible en la medición de* 0,1 *cm. Usar diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular:*

a) *Volumen del cubo.*

b) *Área superficial del cubo.*

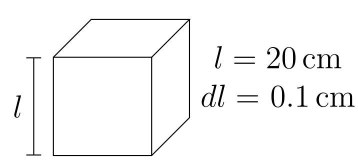


Figura 6.22

a) *El volumen del cubo está dado por* $V = l^3$.

$dV = 3l^2dl = 3(20)^2(0{,}1) = 120\ cm^3$: *aproximación del error real.*

El error relativo aproximado es:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{V} &= \frac{3l^2dl}{l^3} = 3\frac{dl}{l} \quad \text{(el triple del error relativo en la arista)}\\ &= 3\frac{0{,}1}{20} = 0{,}015. \quad \text{Note que este error no tiene unidades.}\end{aligned}$$

El error porcentual en el volumen es aproximadamente del $1{,}5\,\%$.

b) *El área superficial del cubo está dada por* $A = 6l^2$.

$dA = 12ldl = 12(20)(0{,}1) = 24\ cm^2$: *aproximación del error real.*

El error relativo aproximado es:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{A} &= \frac{12ldl}{6l^2} = 2\frac{dl}{l} \quad \text{(el doble del error relativo en la arista)}\\ &= 2\frac{0{,}1}{20} = 0{,}01.\end{aligned}$$

El error porcentual en el área superficial es aproximadamente del $1\,\%$.

Ejemplo 6.40. *El radio de un domo semiesférico se mide en* $100\ m$, *con un error máximo de* $1\ cm$. *¿Cuál es el máximo error que resulta en el área de su superficie?*

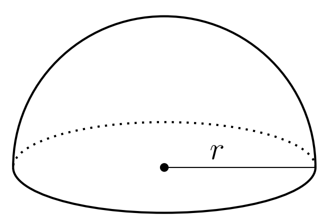


Figura 6.23

$A = 2\pi r^2$.

$dA = 4\pi r dr$, $dr = 0{,}01\ m$.

$dA = 4\pi(100\ m)(0{,}01\ m) = 4\pi\ m^2 \approx 12,57\ m^2$.

El error relativo: $\dfrac{dA}{A} = \dfrac{4\pi r dr}{2\pi r^2} = 2\dfrac{dr}{r} = 2\dfrac{0{,}01}{100} = 0{,}000\,2 = 2 \times 10^{-4}$.

El máximo error que resulta en el área de su superficie es aproximadamente $12,57\ m^2$.

Ejercicio 6.41.

1. *Para* $y = \operatorname{sen} x$:

   a) *Encontrar el diferencial* dy.

   b) *Evaluar y comparar* dy *y* $\triangle y$, *si* $x = \dfrac{\pi}{3}$ *y* $dx = 0{,}05$.

2. *Se mide el radio de una esfera en* 21 *cm, con un error posible en la medición de* 0,05 *cm. ¿Cuál es el máximo error obtenido al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera? Calcular el error relativo y el error porcentual.*

3. *Usar diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de* 0,05 *cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de* 50 *m.*

4. *Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide en un ancho de* 60 *cm, con un error de* 0,1 *cm. Usar diferenciales para estimar el máximo error posible al calcular el área de la ventana.*

5. *Estimar el porcentaje de error permisible al medir el lado de un cuadrado, si el área se calcula correctamente dentro de un* 2 % *de su valor real.*

6. *El diámetro de un árbol era de* 10 *cm. Durante el siguiente año, la circunferencia creció* 2 *cm. ¿Cuánto se incrementaron el diámetro del árbol y el área de su corte transversal?*

APÉNDICE A

Geometría analítica

En esta sección estudiaremos las secciones cónicas: circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas como casos particulares de relaciones en el plano cartesiano.

A.1. Ecuación de la circunferencia

En esta sección encontraremos el lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia fija de otro. Es decir, dado un punto (h, k), debemos encontrar todos los puntos (x, y) del plano, tales que la distancia entre (h, k) y (x, y) es igual a r, un número real mayor o igual que cero. Luego, para los puntos (x, y) que cumplen la condición, tenemos:

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, obtenemos lo que se conoce como la ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 \tag{A.1}$$

La representación gráfica de esta situación es la Figura A.1.

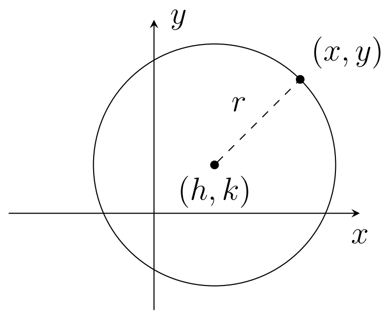


Figura A.1: Circunferencia de centro (h, k) y radio r.

Ejemplo A.1. *Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en* $(-2, 3)$ *y radio* 4. *Graficar.*

La representación gráfica de esta circunferencia es la Figura A.2.

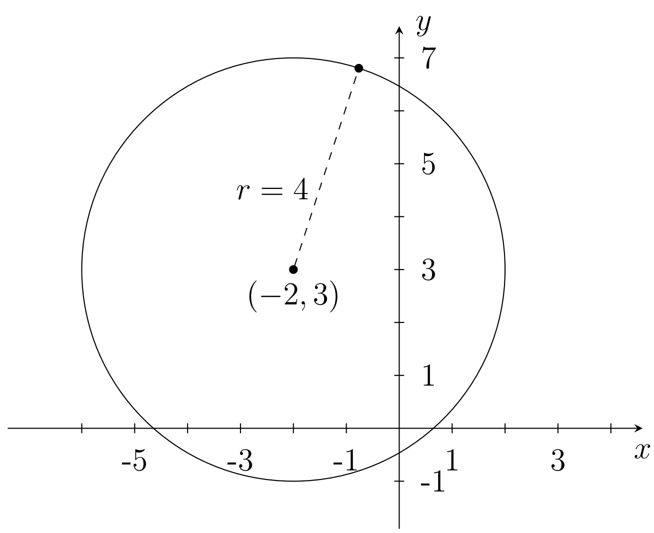


Figura A.2

Como el centro es $(-2, 3)$, *entonces* $(h, k) = (-2, 3)$ *y* $r = 4$. *Por tanto, la ecuación está dada por:*

$$4^2 = (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 \, ;$$

es decir:

$$16 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \, .$$

En el ejemplo anterior expresamos la ecuación de la circunferencia utilizando la ecuación (A.1); sin embargo, en esta ecuación podemos hacer algunas operaciones, entre ellas, desarrollar los cuadrados y obtendremos una ecuación equivalente. Por tanto, la siguiente expresión también representa la ecuación de la circunferencia con centro en $(-2, 3)$ y radio 4.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

Si realizamos las mismas operaciones en la ecuación (A.1), multiplicamos por un real $A \neq 0$ y nombramos adecuadamente a D, E y F, obtenemos la ecuación de la circunferencia de la siguiente forma más general:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{A.2}$$

Usted pensará que la anterior ecuación no es muy útil, pues en ésta no está explícito el centro y el radio de la circunferencia. De hecho, esto es cierto, sin embargo, debemos aprender a lidiar con ella ya que en la mayoría de los casos la ecuación de la circunferencia se presenta de esta manera. Lo que debemos hacer en estas circunstancias es tratar de llevar la ecuación de la forma (A.2) a la forma (A.1). Observemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.2. *Representar gráficamente, hallar el centro y el radio de la circunferencia con ecuación*

$$9x^2 + 9y^2 + 6x - 18y + 6 = 0.$$

Para hallar el centro y el radio de la circunferencia llevaremos la ecuación anterior a la forma (A.1). Lo haremos completando dos trinomios cuadrados perfectos, uno con la variable x y el otro con la y. Pero antes vamos a factorizar 9 como factor común:

$$9\left(x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - 2y + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) + \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + 1$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{4}{9}.$$

Tenemos entonces la circunferencia con centro en $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ y radio $\frac{2}{3}$. Gráficamente la representamos en la Figura A.3.

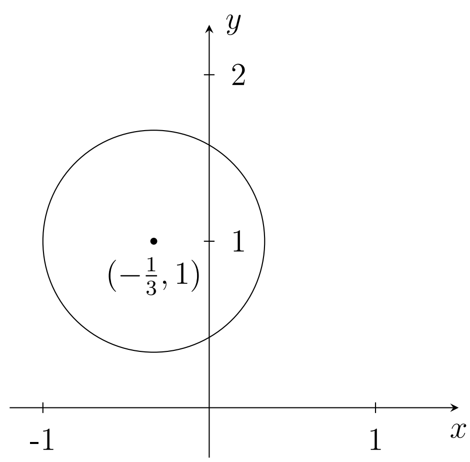


Figura A.3

Ejercicio A.3. *En los ejercicios* 1 *a* 3, *hallar el centro y el radio de la circunferencia y representarla gráficamente.*

1. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$.

2. $36x^2 + 36y^2 - 24x + 36y - 23 = 0$

3. $2x^2 + 2y^2 + x + y = 0$.

   En los ejercicios 4 *y* 5, *representar gráficamente:*

4. $9x^2 + 9y^2 - 12x + 6y + 1 = 0$.

5. $5x^2 + 5y^2 + 40x - 4y + 85 = 0$.

6. *Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos* $(-1, 2)$ *y* $(1, 0)$, *con centro en la recta* $-2x + y - 1 = 0$.

7. *Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene por extremos de un diámetro los puntos* $(3, 4)$ *y* $(-1, 0)$.

8. *Escribir la ecuación de la circunferencia que es tangente a los ejes* x *y* y, *que tiene radio* 3 *y su centro en el cuarto cuadrante. (Una recta es tangente a una circunferencia si la recta y la circunferencia se intersecan en un único punto).*

9. *Toda ecuación de una circunferencia, dada en la forma (A.1), puede llevarse a la forma (A.2), pero no toda ecuación, dada en esta última forma representa una circunferencia. ¿Por qué?*

A.2. Ecuación de la parábola

Una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F, llamado foco y de una recta fija l, llamada directriz, donde l no contiene a F. Queremos describir el conjunto de los puntos $P = (x, y)$ en el plano, tales que su distancia a la recta l y su distancia al punto F sean iguales.

Para simplificar las operaciones vamos a suponer que $F = (0, p)$ y que la recta l tiene como ecuación $y = -p$. Más adelante ubicaremos el punto F y la recta l en otras circunstancias, para generalizar un poco los resultados obtenidos aquí.

Observemos la Figura A.4.

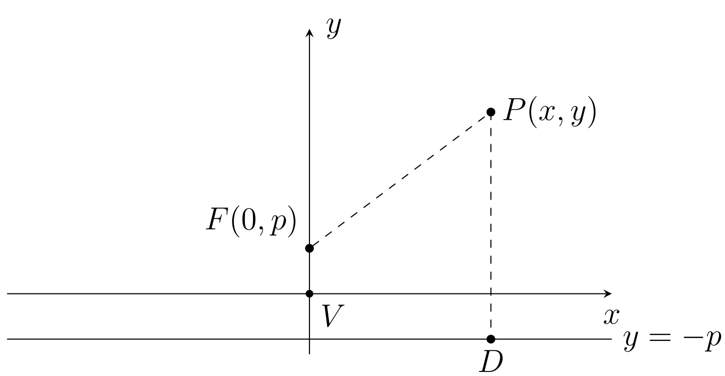


Figura A.4

Notemos que en este caso el punto $(0, 0)$ satisface las condiciones de la definición y es el punto de la parábola más fácil de ubicar, éste punto se llama el *vértice* V de la parábola y es el punto medio del segmento perpendicular a la directriz, que la une con el foco.

Si D es el punto sobre la recta l tal que $\overline{FP} = \overline{PD}$, entonces $D = (x, -p)$. Por tanto, con base en la fórmula para la distancia entre dos puntos, tenemos:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}.$$

Elevando al cuadrado y realizando algunas operaciones, tenemos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py \tag{A.3}$$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice V en $(0,0)$, foco F en $(0,p)$ y directriz $y=-p$. En el caso en que p es mayor que cero, la gráfica es la Figura A.5.

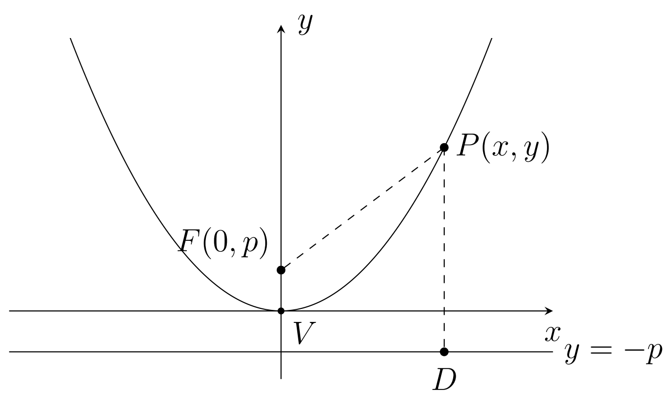


Figura A.5

Ejemplo A.4. *Hallar las coordenadas del foco y la ecuación de la recta directriz de la parábola* $x^2 = 5y$.

Observando (A.3) podemos concluir que $p = \frac{5}{4}$*; por consiguiente, las coordenadas del foco son* $\left(0, \frac{5}{4}\right)$ *y la ecuación de la directriz es* $y = -\frac{5}{4}$*. Gráficamente es la Figura A.6.*

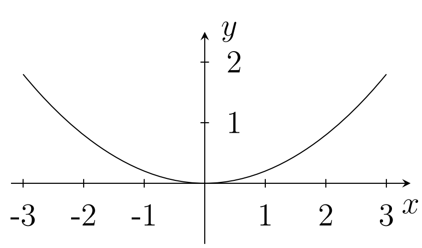


Figura A.6

Si en (A.3) suponemos que p es menor que cero, tendremos una parábola que abre hacia abajo, ya que los valores de p hacen que la curva se invierta. Gráficamente tendríamos la Figura A.7.

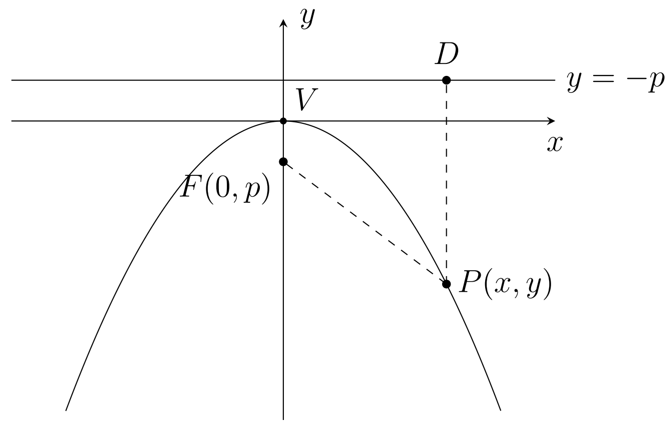


Figura A.7

Supongamos ahora que el foco está en $F(p, 0)$ y la directriz está dada por $x = -p$. Fácilmente puede concluir que la ecuación de esta parábola es $y^2 = 4px$. Dependiendo si p es positivo o negativo, la parábola abre hacia la derecha o hacia la izquierda. Realice el gráfico correspondiente.

Naturalmente, usted ya estará preguntándose qué pasa si el vértice no está en el origen. Para visualizar esta situación observemos la Figura A.8.

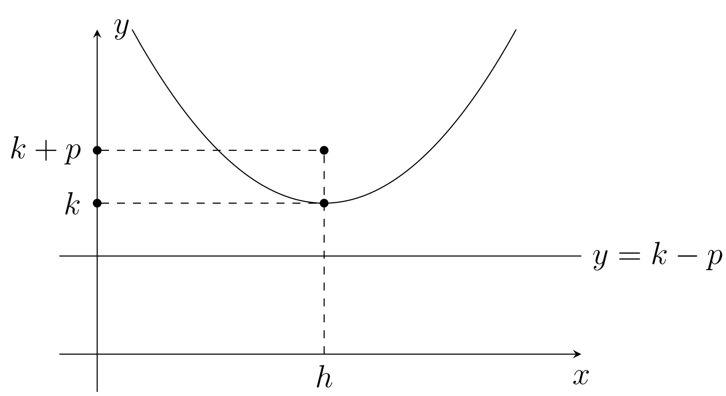


Figura A.8

La Figura A.8 nos muestra lo que pasa si el vértice es (h, k) y la directriz es $y = k - p$, particularmente en el caso en que p es positivo. Usted puede realizar cálculos similares a los efectuados para hallar (A.3) y obtendrá que la ecuación de esta parábola es:

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \tag{A.4}$$

Esta ecuación también representa a la parábola con vértice en (h, k) y directriz $y = k - p$, con p menor que cero; la diferencia es que esta parábola abre hacia abajo.

Verifique que la ecuación

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h) \tag{A.5}$$

representa una parábola con vértice en (h, k) y directriz $x = h - p$, que abre hacia la derecha o hacia la izquierda, según si p es positivo o negativo, respectivamente.

Observe que, de manera similar al caso de la circunferencia, las ecuaciones (A.4) y (A.5) pueden llevarse a una forma más general:
$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ y $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, respectivamente; donde ni A ni C son cero.
Por otra parte, una ecuación de la forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, donde A ó C es nulo, pero no ambos a la vez, puede representar una parábola, o un par de rectas paralelas, o una sola recta, o el conjunto vacío, según se tomen los coeficientes A, C, D, E, F. Estudie la afirmación anterior y dé ejemplos en cada caso.

Ejemplo A.5. *Hallar las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz de la parábola con ecuación $y^2 - 6y - 8x + 1 = 0$. Graficar.*

Al igual que en el ejemplo de la circunferencia, en este caso debemos completar un trinomio cuadrado perfecto en y, para llevar la ecuación a una de la forma (A.5). Por consiguiente:

$$\begin{aligned}\left(y^2 - 6y + 9\right) - 8x + 1 &= 0 + 9\\ (y-3)^2 &= 8x + 8\\ (y-3)^2 &= 8\,(x+1)\,.\end{aligned}$$

Esta ecuación corresponde a una parábola que abre hacia la derecha, con vértice en $(-1, 3)$, foco en $(1, 3)$ y directriz $x = -3$. Su representación gráfica es la Figura A.9.

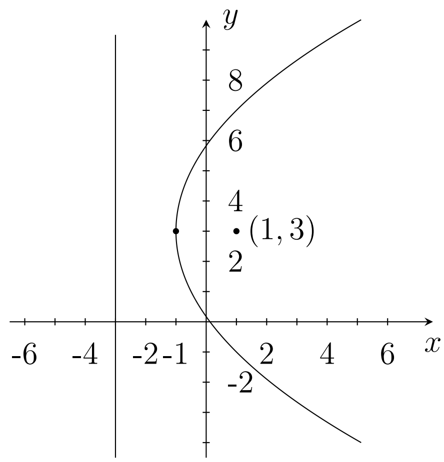


Figura A.9

Ejercicio A.6. *En los ejercicios 1 a 3, hallar las coordenadas del vértice, del foco y la ecuación de la directriz. Graficar.*

1. $x^2 - 2x + 5y + 16 = 0$.

2. $18y^2 - 24y + 36x - 1 = 0$.

3. $12x^2 + 3x - 10y - 1 = 0$.

4. *Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos* $\left(\frac{-7}{3}, 2\right)$,$(1, -2)$ *y* $\left(-\frac{10}{3}, 3\right)$.

   a) *Si la directriz es vertical.*
   b) *Si la directriz es horizontal.*

5. *Hallar la ecuación de la parábola con foco en* $(4, -4)$ *y directriz* $y = 2$. *Graficar.*

6. *Hallar la ecuación de la parábola con foco en* $(4, -4)$ *y directriz* $x = 2$. *Graficar.*

A.3. Ecuación de la elipse

Sean F_1 y F_2 dos puntos fijos del plano, llamados focos y a un número positivo. Queremos encontrar el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tales que la suma de sus distancias a F_1 y a F_2 sea constante. Como la suma debe ser constante, podríamos decir que sea igual a a; sin embargo, igualaremos esta suma a $2a$, con el fin de obtener una ecuación más fácil de recordar. No se perderá generalidad, pues tanto a como $2a$ son números reales positivos cualesquiera.

Vamos a suponer en principio que F_1 y F_2 están ubicados en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, con $0 < c < a$, y sea P un punto cualquiera (x, y) de este lugar geométrico.

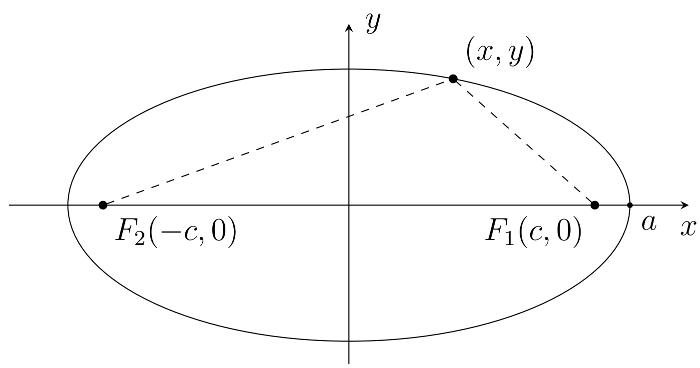


Figura A.10

Dado que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, entonces:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Es decir:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2.$$

Simplificando tenemos:

$$\begin{aligned}
(x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \left((x+c)^2 + y^2\right) \\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\
a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 + cx.
\end{aligned}$$

Elevando nuevamente al cuadrado y simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned} a^2\left((x+c)^2+y^2\right) &= \left(a^2+cx\right)^2 \\ a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4+2a^2cx+c^2x^2 \\ \left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 &= a^2\left(a^2-c^2\right). \end{aligned}$$

Si llamamos b al real positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$, la última expresión podemos escribirla de la siguiente manera:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2;$$

como a y b son diferentes de cero, podemos dividir ambos lados de la igualdad por a^2b^2; por tanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{A.6}$$

Ésta es la ecuación de la elipse con focos $F_1\,(c,0)$, $F_2\,(-c,0)$ y centro en $(0,0)$. Se llama *eje mayor* al segmento de vértices $(a,0)$ y $(-a,0)$, de longitud $2a$ y *eje menor* al segmento de vértices $(0,b)$ y $(0,-b)$, de longitud $2b$. La relación entre a, b y c está dada por $a^2 = b^2 + c^2$. Notemos que los puntos $(0,0)$, $(c,0)$ y $(0,b)$ son los vértices de un triángulo rectángulo de catetos c y b, y puesto que $a^2 = b^2 + c^2$, la hipotenusa de este triángulo mide a. (Esto nos sirve para recordar la relación que hay entre a, b y c.) El gráfico de esta elipse es la Figura A.11.

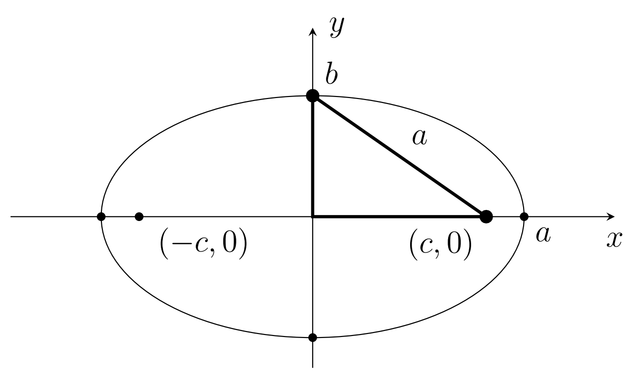


Figura A.11: Elipse con centro $(0,0)$.

En la Figura A.11 puede observarse que los puntos $(a,0), (-a,0), (0,b)$ y $(0,-b)$ pertenecen a la elipse. Naturalmente esto debe justificarse.

Nuevamente, su curiosidad ya estará indagándose acerca de elipses con centro y focos en diferentes ubicaciones. Vamos a resolver estas inquietudes por partes.
Supongamos que queremos la ecuación de la elipse con focos F_1 y F_2, ubicados en $(0, c)$ y $(0, -c)$, de manera que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, con $0 < c < a$. El gráfico es la Figura A.12.

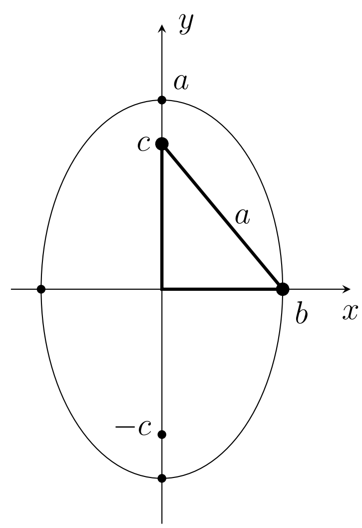


Figura A.12: Elipse con eje mayor vertical.

Realizando un proceso similar al que se siguió para obtener (A.6), usted puede ver que la ecuación está dada por $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ y la relación entre a, b y c sigue siendo $a^2 = b^2 + c^2$; así $a > b > 0$ y $a > c > 0$. Observe que en (A.6) el eje mayor de la elipse, de longitud $2a$, está en el eje x y ahora se encuentra en el eje y. Note que las ecuaciones nos recuerdan esto, pues además sabemos que $a > b$.

Veamos ahora qué ocurre cuando el centro de la elipse no está en el origen. Supongamos que el centro está en (h, k), los focos en $(h + c, k)$ y $(h - c, k)$ y cumple la relación $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$. Se representa esta situación en la Figura A.13.

Verifique que la ecuación de esta elipse es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{A.7}$$

No es difícil para usted deducir cuál es la relación entre a, b y c; tampoco

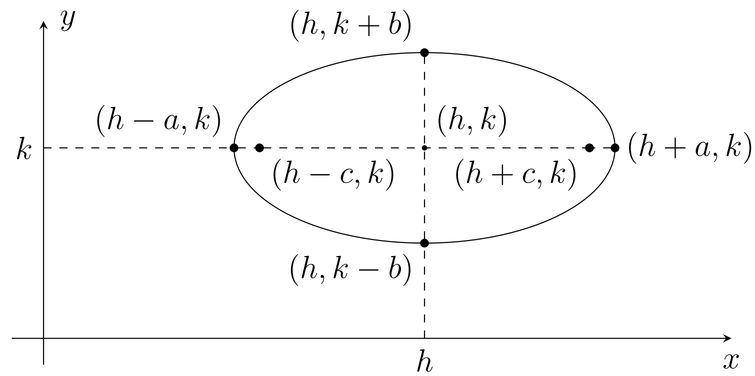


Figura A.13: Elipse con centro (h, k).

lo será encontrar la ecuación de la elipse con centro en (h, k) y focos en $(h, k + c)$ y $(h, k - c)$ y dibujarla.

Ejemplo A.7. *Identificar el centro, los focos, los vértices del eje mayor y del eje menor de la elipse con ecuación*

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{4} = 1. \tag{A.8}$$

Elaborar un gráfico.

Como $16 > 4$, *observamos que* $a = 4$ *y* $b = 2$, *de modo que esta elipse tiene eje mayor paralelo al eje x y su ecuación es de la forma (A.7). El centro de la elipse es* $(h, k) = (2, -5)$ *y puesto que* $a^2 = b^2 + c^2$, *obtenemos que* $c = \sqrt{12}$. *Con esta información podemos representar la elipse y obtener las coordenadas de focos y vértices (ver Figura A.14).*

Focos: $\left(2 + \sqrt{12}, -5\right), \left(2 - \sqrt{12}, -5\right)$.

Vértices del eje mayor: $(-2, -5)\,(6, -5)$.

Vértices del eje menor: $(2, -3)\,(2, -7)$.

Observe que en el ejemplo A.7 podemos transformar la ecuación (A.8) en una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, realizando algunas

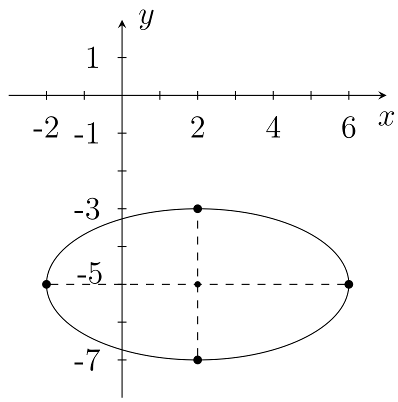


Figura A.14

operaciones. Justifique cada paso:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+5)^2}{4} &= 1\\
(x-2)^2+4(y+5)^2 &= 16\\
x^2-4x+4+4\left(y^2+10y+25\right) &= 16\\
x^2-4x+4+4y^2+40y+100 &= 16\\
x^2+4y^2-4x+40y+88 &= 0.
\end{aligned}$$

En general, la ecuación de una elipse dada en la forma (A.7) o en la forma

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1, \tag{A.9}$$

según como se encuentre el eje mayor, puede escribirse en la forma:
$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, donde A, C, D, E, F son constantes, con A y C no nulas y distintas, pero de igual signo. ¿Por qué?

Ejemplo A.8. *Hallar las coordenadas del centro, las longitudes del eje mayor y menor, las coordenadas de los focos y el gráfico de la elipse*

$$9x^2+4y^2+18x-24y+9=0.$$

Tenemos que llevar esta ecuación a una de la forma (A.7) ó (A.9); para lograrlo, vamos a completar dos trinomios cuadrados perfectos como sigue:

$$\left(9x^2+18x\right)+\left(4y^2-24y\right)+9=0$$

$$9\left(x^2+2x\right)+4\left(y^2-6y\right)+9=0$$
$$9\left(x^2+2x+1\right)+4\left(y^2-6y+9\right)+9=9+36$$
$$9\left(x+1\right)^2+4\left(y-3\right)^2=36$$

Dividiendo por 36, tenemos:

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1.$$

Ésta es la ecuación de la elipse con centro en $(-1,3)$*, longitud del eje mayor* 6*, longitud del eje menor* 4*. Para obtener las coordenadas de los focos debemos hallar el valor de c. Para esto, tenemos que* $a^2=b^2+c^2$*, donde* $a=3$ *y* $b=2$*; por tanto,* $c=\sqrt{5}$*. Luego, las coordenadas de los focos son:* $\left(-1,3+\sqrt{5}\right),\left(-1,3-\sqrt{5}\right)$.

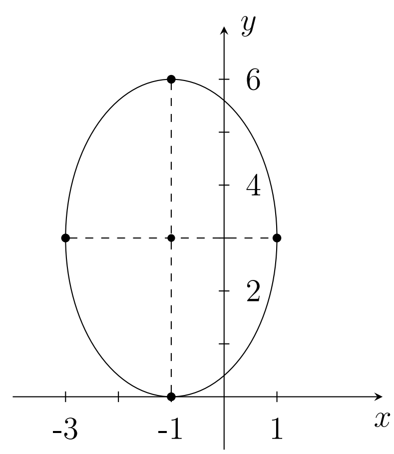


Figura A.15

Ejercicio A.9. *En los ejercicios 1 a 3, hallar las coordenadas del centro, longitudes de los ejes, coordenadas de los focos y elaborar el gráfico de la elipse.*

1. $3x^2+2y^2+12x-8y-16=0.$
2. $144x^2+36y^2-96x+12y-127=0.$
3. $9x^2+4y^2-18x+8y+4=0.$

4. *Representar y hallar la ecuación de la elipse con focos* $(1, 4)$ *y* $(1, -2)$, *y extremos del eje mayor en* $(1, 5)$ *y* $(1, -3)$.

5. *Representar y hallar la ecuación de la elipse con focos* $(3, 8)$ *y* $(3, 2)$, *y longitud del eje mayor* 8.

6. *Representar gráficamente:* $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 11 = 0$.

7. *Una ecuación de la forma* $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, *donde* A *y* C *son no nulos y distintos, pero de igual signo, representa una elipse, o un punto, o el conjunto vacío. Justificar.*

8. *En la definición de la elipse debe tenerse que* $0 < c < a$. *¿Qué pasaría con este lugar geométrico, si* $c \geq a$ *ó* $c = 0$*?*

A.4. Ecuación de la hipérbola

De la misma manera como iniciamos en la elipse, sean F_1 y F_2 dos puntos fijos del plano, llamados focos y a un número positivo. Nuestro objetivo ahora es encontrar el lugar geométrico de todos los puntos P del plano, tales que la diferencia entre sus distancias a F_1 y a F_2 sea constante. Lo mismo que antes, vamos a suponer que esta constante es $2a$.

Supongamos que F_1 y F_2 están ubicados en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, respectivamente, con $0 < a < c$ y que P es un punto cualquiera (x, y).

Puesto que la diferencia de las distancias de P a F_1 y a F_2 puede hacerse $\overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ o $\overline{PF_2} - \overline{PF_1}$, tenemos $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$. Primero podemos suponer que $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} \geq 0$ y luego que $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} < 0$; en cualquier caso, haciendo operaciones similares a las realizadas para obtener la ecuación de la elipse, tendremos:

$$\left(c^2 - a^2\right) x^2 - a^2 y^2 = a^2 \left(c^2 - a^2\right).$$

Llamamos b al real positivo tal que $b^2 = c^2 - a^2$, y puesto que a y b son diferentes de cero entonces, la ecuación de esta hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{A.10}$$

y tiene el siguiente gráfico:

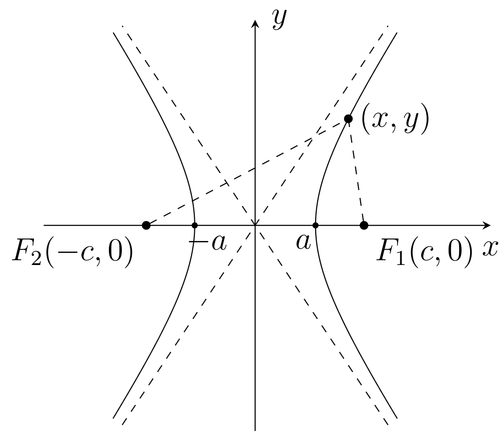


Figura A.16: Hipérbola.

Ésta es la ecuación de una hipérbola con centro en $(0, 0)$, focos en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, vértices en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, y que cumple la relación $c^2 = a^2 + b^2$. Por esta relación entre a, b y c, podemos observar que b puede representarse en el eje y de modo que los puntos $(0, 0)$, $(a, 0)$ y $(0, b)$ sean los vértices de un triángulo rectángulo de catetos a, b con hipotenusa c. (Nuevamente esto nos permite recordar con facilidad la relación entre a, b y c en el caso de una hipérbola.) Observemos.

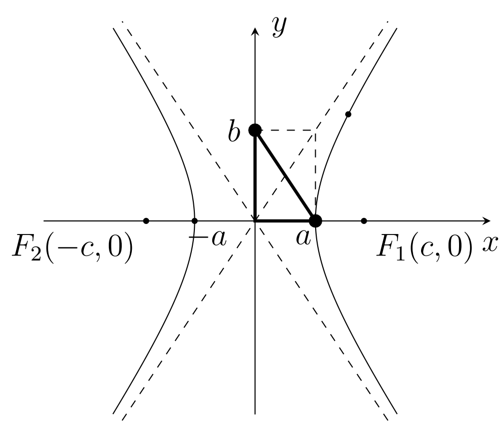


Figura A.17: Hipérbola de centro $(0, 0)$ y vértices en el eje x.

No sobra que justifique, mediante la definición de la hipérbola, por qué los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ pertenecen a ella.

Para hacer un bosquejo del gráfico de una hipérbola, es importante conocer las rectas punteadas que aparecen en la figura 2.23, ya que éstas nos proporcionan información acerca de la abertura de la curva. Observe que en la parte derecha, a medida que x es mayor, la curva se acerca a estas rectas sin tocarlas. Lo mismo ocurre en la parte izquierda, cuando x es menor. Por esto es importante darles un nombre a estas rectas, las cuales se llaman *asíntotas* de la hipérbola.

Los puntos (a, b), $(-a, b)$, $(-a, -b)$, $(a, -b)$ son los vértices de un rectángulo y nos sirven para encontrar las ecuaciones de las asíntotas. Observe que $(0, 0)$, el centro de la hipérbola, es el centro de este rectángulo y pertenece a ambas asíntotas. Revise que las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ son asíntotas de la hipérbola con ecuación (A.10). En el capítulo 3 daremos el concepto de asíntota y podrá justificarse, utilizando el concepto de límite, por qué estas rectas son las asíntotas de la hipérbola (A.10). Por otra parte, el segmento de vértices $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llama *eje transverso* y el segmento de vértices $(0, b)$ y $(0, -b)$ se llama *eje conjugado*.

Presentamos ahora las ecuaciones de la hipérbola, obtenidas al colocar los focos F_1 y F_2 en diferentes situaciones, con sus gráficas correspondientes. En todos los casos, la relación entre a, b y c es $c^2 = a^2 + b^2$. Justifique en cada caso.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Su gráfico correspondiente es la Figura A.18.

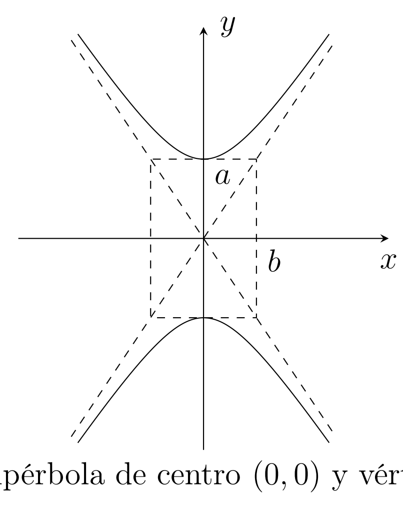


Figura A.18: Hipérbola de centro $(0, 0)$ y vértices en el eje y.

Al considerar el centro (h, k) , tenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \tag{A.11}$$

cuando el eje transverso es paralelo al eje x, con gráfico como la Figura A.19.

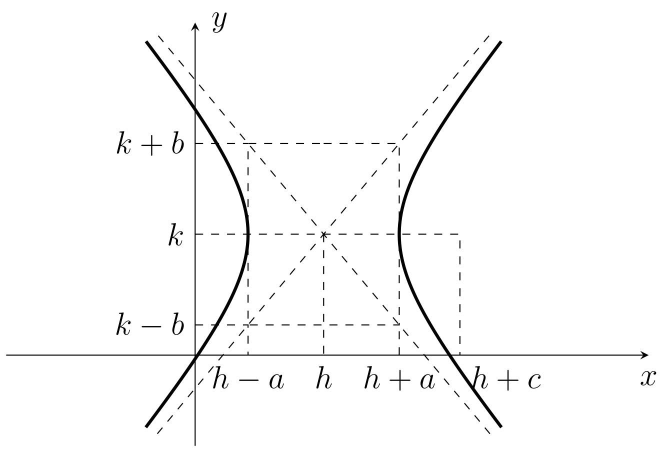


Figura A.19: Hipérbola con centro (h, k).

Y la hipérbola con centro (h, k) y eje transverso paralelo al eje y,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, \tag{A.12}$$

con gráfico como la Figura A.20.

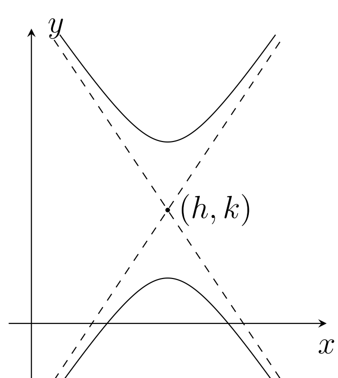


Figura A.20

Ejemplo A.10. *Identificar el centro, los focos y los vértices de los ejes transverso y conjugado de la hipérbola con ecuación*

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1. \tag{A.13}$$

Hallar las ecuaciones de sus asíntotas y elaborar el gráfico respectivo.

Observando la ecuación de la hipérbola, ésta es de la forma (A.12); se tiene que $a^2 = 4$ *y* $b^2 = 5$, *de modo que* $a = 2$, $b = \sqrt{5}$ *y* $c = \sqrt{4+5} = 3$. *La hipérbola tiene centro* $(h,k) = (-1,2)$ *y el eje transverso es paralelo al eje* y. *Con esta información procedemos a representar la hipérbola y a buscar las ecuaciones de las asíntotas (ver Figura A.21).*

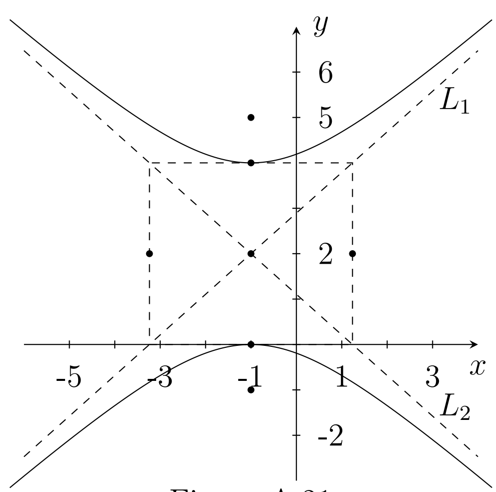


Figura A.21

Vértices del eje transverso: $(-1,4)\,,\ (-1,0)\,.$

Vértices del eje conjugado: $\left(-1-\sqrt{5},2\right),\ \left(-1+\sqrt{5},2\right).$

Focos: $(-1,5)\,,\ (-1,-1)\,.$

Para hallar la ecuación de la asíntota L_1, *notamos que esta recta contiene a los puntos* $(-1,2)$ *y* $\left(-1+\sqrt{5},4\right)$, *y,* L_2 *contiene a los puntos* $(-1,2)$ *y* $\left(-1-\sqrt{5},4\right)$, *de modo que las ecuaciones son:*

$$L_1 \quad : \qquad y-2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,(x+1)\,.$$

$$L_2 \quad : \qquad y-2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\,(x+1)\,.$$

Como en el caso de la elipse, podemos transformar la ecuación (A.13) en una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, así:

$$\begin{aligned}
\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{5} &= 1 \\
5(y^2 - 4y + 4) - 4(x^2 + 2x + 1) &= 20 \\
5y^2 - 20y + 20 - 4x^2 - 8x - 4 &= 20 \\
-4x^2 + 5y^2 - 8x - 20y - 4 &= 0.
\end{aligned}$$

En general, la ecuación de una hipérbola dada en la forma (A.11) o en la forma (A.12), según se ubique el eje transverso, puede escribirse en la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, C, D, E, F son constantes, con A y C no nulos y de signos distintos. ¿Por qué?

Ejercicio A.11. *En los ejercicios 1 a 3, hallar el centro, las coordenadas de los focos, de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y elaborar el gráfico correspondiente.*

1. $4y^2 - x^2 - 4x - 8y - 4 = 0.$

2. $18y^2 - 50x^2 + 25x + 24y + 33 = 0.$

3. $12x^2 - 6y^2 + 36x + 3y + 219 = 0.$

4. *Representar y hallar la ecuación de la hipérbola con* $a = 2$ *y focos en* $(-2, 4)$ *y* $(-2, -2)$.

5. *Representar y hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos* $(3, -2)$ *y* $(7, 6)$; *su eje focal es el eje* x *y tiene centro en el origen.*

6. *Representar gráficamente* $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 5 = 0.$

7. *Una ecuación de la forma* $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, *donde* A *y* C *son no nulos, de signos contrarios, representa una hipérbola, o dos rectas que se cruzan. Justificar.*

8. *En la definición de la hipérbola se tiene* $c > a$; *¿qué pasaría con este lugar geométrico si* $c \leq a$*?*

A.5. Excentricidad

La ecuación $(x-h)^2 = 4p\,(y-k)$ representa la parábola con vértice en (h,k), directriz $y = k-p$ y foco en $(h, k+p)$. Si $P = (x,y)$ es un punto sobre la parábola y $D = (x, k-p)$ es un punto sobre la directriz, en la sección 2.5 se estudió que se cumple la relación

$$\overline{FP} = \overline{PD} \tag{A.14}$$

En la ecuación de la elipse y de la hipérbola no se obtuvieron resultados como el anterior ya que en estos casos no se definió el concepto de directriz. Ahora definiremos el concepto de excentricidad, para luego usarlo al definir directriz de una elipse y una hipérbola.

La excentricidad de una elipse y de una hipérbola se define por:

$$e = \frac{c}{a}, \tag{A.15}$$

donde c es la longitud del centro a cada uno de los focos y a es la longitud del centro a cada uno de los vértices del eje mayor en el caso de la elipse y del centro a cada uno de los vértices del eje transverso en el caso de la hipérbola.

Como en la elipse $0 < c < a$, se tiene que $0 < e < 1$, y en el caso de la hipérbola se tiene $e > 1$ puesto que $0 < a < c$.

Para definir las directrices de una elipse y de una hipérbola consideramos dos casos:

- Cuando la ecuación de la elipse o de la hipérbola es de la forma $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, ó $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, respectivamente, las directrices son las rectas verticales que se definen por

  $$x = h \pm \frac{a}{e}. \tag{A.16}$$

  Note que en este caso el eje mayor de la elipse y el eje transverso de la hipérbola son de longitud $2a$ y son paralelos al eje x. Como ejercicio usted puede ver que en el caso de la elipse, la recta $x = h + \frac{a}{e}$ queda a la derecha del vértice $(h+a, k)$ y la recta $x = h - \frac{a}{e}$ queda a la izquierda del vértice $(h-a, k)$; en el caso de la hipérbola, la recta $x = h + \frac{a}{e}$ está entre el centro y el vértice $(h+a, k)$ y la recta $x = h - \frac{a}{e}$ está entre el vértice $(h-a, k)$ y el centro. Podemos afirmar que cada directriz $x = h + \frac{a}{e}$ y $x = h - \frac{a}{e}$ corresponde a un foco $(h+c, k)$ y $(h-c, k)$, respectivamente.

- Cuando la ecuación de la elipse o de la hipérbola es de la forma $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$, ó $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$, respectivamente, las directrices son las rectas horizontales que se definen por

$$y = k \pm \frac{a}{e}. \tag{A.17}$$

En este caso, el eje mayor de la elipse y el eje transverso de la hipérbola son de longitud $2a$ y son paralelos al eje y. Como se hizo en el caso anterior, usted puede estudiar cómo se grafican las directrices respecto a los vértices y focos de la elipse y la hipérbola.

Ejemplo A.12. *Hallar la excentricidad y las ecuaciones de las directrices para la hipérbola* $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Como $a=5$ *y* $b=4$, *entonces* $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$, *luego:*

$$e = \frac{\sqrt{41}}{5}.$$

Por tanto, las ecuaciones de las directrices son:

$$x = \frac{5}{\frac{\sqrt{41}}{5}} = \frac{25}{\sqrt{41}} = \frac{25\sqrt{41}}{41}, \quad x = -\frac{5}{\frac{\sqrt{41}}{5}} = -\frac{25}{\sqrt{41}} = -\frac{25\sqrt{41}}{41}$$

y su representación gráfica es la Figura A.22.

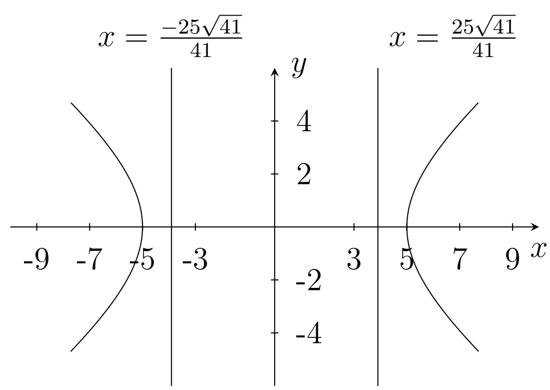


Figura A.22

Ejemplo A.13. *Hallar la excentricidad y las directrices de la elipse del ejemplo A.8. Representarlas gráficamente.*

En este ejemplo consideramos la elipse con ecuación

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1,$$

donde $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{5}$, *de modo que* $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}<1$.
Como esta ecuación corresponde al caso 2, las directrices tienen ecuaciones $y=3+\dfrac{9}{\sqrt{5}}=3+\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$, $y=3-\dfrac{9}{\sqrt{5}}=3-\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ *y su representación gráfica es la Figura A.23.*

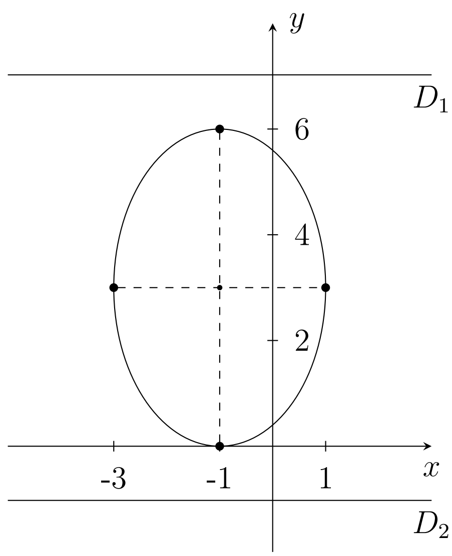


Figura A.23

Notemos que los focos $F_1=\left(-1,3+\sqrt{5}\right)$ *y* $F_2=\left(-1,3-\sqrt{5}\right)$ *corresponden a las directrices* $D_1: y=3+\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$, *y,* $D_2:\ y=3-\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$, *respectivamente. Por otra parte, siendo* $(1,3)$ *un punto* P *de la elipse, observe que se tiene* $\overline{PF_1}=e\overline{PD_1}$, *pues* $\overline{PF_1}=\sqrt{(1-(-1))^2+\left(3-\left(3+\sqrt{5}\right)\right)^2}=\sqrt{4+5}=3$ *y* $\overline{PD_1}=3+\dfrac{9\sqrt{5}}{5}-3=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$; *donde* $3=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$. *Tome otros puntos arbitrarios de la elipse en el lugar de* P *y verifique que se satisface esa relación.*

En general, para cada punto P de una elipse o de una hipérbola, F uno de los focos y D la directriz correspondiente a dicho foco, se puede demostrar que:

$$\overline{PF} = e\overline{PD}.$$

Esta última ecuación es similar a (A.14), si pensamos que allí $e = 1$; por tanto, tenemos que la excentricidad de una parábola es siempre 1.

Ejercicio A.14.

1. *En cada caso, hallar las ecuaciones de las directrices y representarlas gráficamente.*

   a) $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$

   b) $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0.$

2. *Los vértices de una hipérbola son* $(0, 2)$ *y* $(0, -2)$ *. Si su excentricidad es* 2*, hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de los focos y las ecuaciones de las directrices.*

3. *Los focos de una elipse son los puntos* $(2, 4)$,$(2, 6)$ *y la longitud del eje menor es* 6*. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas de los vértices, la excentricidad y las ecuaciones de las directrices.*

A.6. Ecuación general de segundo grado

Se llama ecuación general de segundo grado a una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{A.18}$$

donde A, B, C, D, E, F son constantes y por lo menos una de las constantes A, B ó C no es nula. Observe que en lo estudiado en este capítulo hemos obtenido este tipo de ecuación (A.18) pero cuando $B = 0$, las cuales corresponden a circunferencias, parábolas, elipses o hipérbolas en diferentes situaciones.

En general, una ecuación de la forma (A.18) corresponde a una de estas curvas (o a una de ellas "degenerada": un punto, un par de rectas que se cruzan). Cuando $B \neq 0$, la curva (parábola, elipse o hipérbola) se ha rotado de modo que su(s) eje(s) ya no es(son) paralelo(s) a los ejes x, y. Con base en lo estudiado podemos hacer un pequeño cuadro resumen para el caso de la ecuación (A.18) cuando $B = 0$.

La ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa:

Una ...	**cuando ...**
Parábola	$A = 0$, ó $C = 0$ pero no ambos a la vez.
Circunferencia	A y C no son nulos y $A = C$.
Elipse	A y C son no nulos, distintos y tienen el mismo signo.
Hipérbola	A y C son no nulos y tienen signos distintos.

Cuadro 2.1

O representa alguno de los "casos degenerados" de estas curvas: una recta, dos rectas paralelas, un punto, el conjunto vacío, un par de rectas que se cruzan.

Las curvas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) se conocen como secciones cónicas puesto que cada una de ellas puede obtenerse por la intersección de un cono y un plano. Con ayuda de los siguientes gráficos, determine la posición del plano con respecto al cono, para obtener cada una de las secciones cónicas.

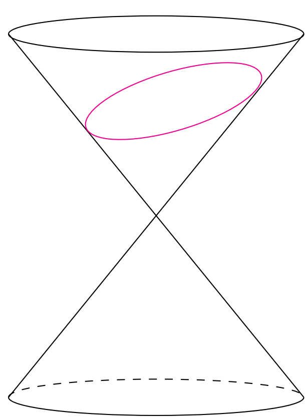


Figura A.24: Elipse.

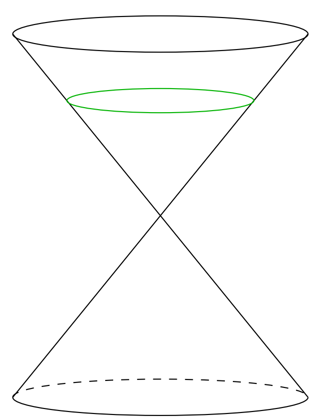


Figura A.25: Círculo.

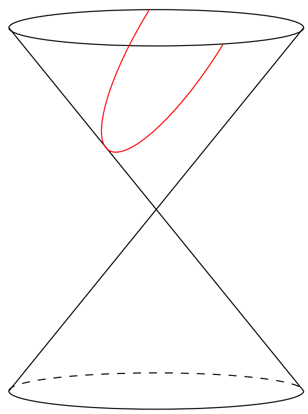


Figura A.26: Parábola.

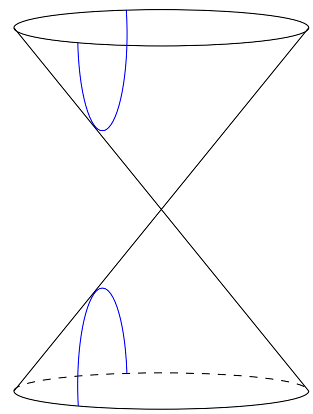


Figura A.27: Hipérbola.

Bibliografía

[1] APOSTOL, T. *Calculus*. Vol. 1. Ed. Reverté, 1995.

[2] EDWARDS, C. y PENNEY, D. *Cálculo con geometría analítica*. 4^a ed. Prentice Hall Hispanoamericana, 1996.

[3] LEITHOLD, L. *El cálculo*. 7^a ed. Oxford University Press, 1998.

[4] PISKUNOV, N. *Cálculo diferencial e integral I. 6^a* ed. Ed. Mir-Moscú, 1977.

[5] SPIVAK, M. *Cálculo infinitesimal*. Ed. Reverté, 1998.

[6] STEWART, J. *Cálculo conceptos y contextos*. International Thomson Editores, 1998.

[7] THOMAS, G. y FINNEY, R. *Cálculo una variable*. 9^a ed. Pearson Educación, 1998.

Índice alfabético