Cálculo diferencial en una variable

Taller 6 - II - 2019

TEMA: Límites

1. Usando la definición de límite, demuestre:

   (a) $\lim_{x\to 1} (-4x+7) = 3$

   (b) $\lim_{x\to 1} (1-x^2) = 0.$

   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$

   (d) $\lim_{x\to 1.5} [x] = 1$

   (e) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = 2$

   (f) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, donde:

   $$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } \ x \geq 0 \\ -x^2 & , \text{ si } \ x < 0 \end{cases}$$

   (g) $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, con

   $$g(x) = \begin{cases} x & , \text{ si } \ x \in \mathbb{Q} \\ -x & , \text{ si } \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   (h) $\lim_{x\to 3} (5x-3) \neq 10.$

   (i) $\lim_{x\to 1} [x] \neq 1.$

2. En cada una de los siguientes casos justifique plenamente su respuesta. Nota: Aquí, "existe" significa "existe y es finito".

   (a) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$? ¿puede existir $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$?

   (b) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$ ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$?

   (c) Si existe $\lim_{x\to a} f(x)$ y no existe $\lim_{x\to a} g(x)$ ¿puede existir $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$?

   (d) Si existen $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$ ¿se sigue de ello que exista $\lim_{x\to a} g(x)$?

   (e) Dar un ejemplo en el que exista $\lim_{x\to a} f(x^2)$ pero no exista $\lim_{x\to a} f(x)$.

   (f) Supóngase $f(x) \leq g(x)$ para todo x. Demostrar que $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$ siempre que los límites existan.
   Si $f(x) < g(x)$ para todo x. ¿Se sigue necesariamente que $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$?

3. Calcule los siguientes límites, si existen:

   (a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x-3}$

   (b) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-7x+12}{x-3}$

   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

   (d) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-1}{x-1}$

   (e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

   (f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

   (g) $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

   (h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-9}{|x+3|}$

   (i) $\lim_{t\to 1} \frac{\sqrt[3]{t}-1}{t-1}$

(j) $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{8}{2-x} + \dfrac{32}{x^2-4} \right)$

(k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ sen\, x}{2-2\cos x}$

(l) $\lim_{\theta\to 0} \theta \cot \theta$

(m) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

(n) $\lim_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

(o) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

(p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(\sin\ 3x)^2}{x^2 \cos x}$

(q) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{\sin\ x}$

(r) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}}{x}$

(s) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$

(t) $\lim_{x\to 1} \dfrac{e^x}{x}$