UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

TALLER 4 II-2019

1. Sea $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. (Justificar)

i. $\forall y(y + 4 < 11)$	ii. $\exists z(z^3 = 1)$
iii. $\forall x(x + 4 > 7)$	iv. $\exists y(y^3 = 216)$
v. $\forall x \exists y(x + y = x)$	vi. $\exists x \forall y(x - y = 0)$
vii. $\exists x[(x + 1 = 10) \vee (2x = 4)]$	viii. $\forall x \forall y[(x + y < 5) \to (x + y < 8)]$

2. Sea $U_1 := \mathbb{N}$, $U_2 := \mathbb{Z}$, $U_3 := \mathbb{Q}$ y $U_4 := \mathbb{R}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas en cada uno de los anteriores universos, justificando su respuesta.
   - i. Para todo x y todo y, existe un z tal que $x - y = z$.
   - ii. Para todo x existe un y tal que $x + y = y + x = 0$.
   - iii. Para todo x existe un y tal que $xy = yx = 1$.
   - iv. Para todo x existe un y tal que $y^2 = x$.
   - v. Para todo $x \geq 0$ existe y tal que $y^2 = x$.

3. Dé ejemplos de predicados que muestren que las siguientes equivalencias o implicaciones lógicas no son válidas:
   - i. $\exists x \forall y(p(x, y)) \iff \forall y \exists x(p(x, y))$
   - ii. $\exists x(p(x)) \wedge \exists x(q(x)) \Longrightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$
   - iii. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \Longrightarrow \forall x(p(x)) \vee \forall x(q(x))$
   - iv. $\exists x(p(x)) \Longrightarrow \forall x(p(x))$

4. (a) Encuentre cuatro expresiones equivalentes a $\neg\,(\forall x)(\exists y)\,(p(x, y) \longrightarrow (r(x) \vee \neg\, s(x)))$, justifique la equivalencia en cada caso.

   (b) ¿La negación de $(\exists x)p(x) \longrightarrow (\forall x)(\exists y)\,\neg\, q(x, y)$ es equivalente a $(\exists x)\,(p(x) \wedge (\forall y)q(x, y))$? ¿Por qué?

   (c) ¿$\neg((\forall x)(p(x) \wedge q(x))) \iff (\exists x)(p(x) \longrightarrow \neg q(x))$? Justifique.

5. (a) Simbolice, en lenguaje lógico, cada una de las siguientes proposiciones.

   (b) Simbolice su negación.

   (c) Escriba en correcto español su negación. (Evite expresiones de la forma: No es cierto que ..., donde los puntos suspensivos corresponden a la proposición original. Use equivalencias lógicas.)

i. Todo conjunto infinito tiene un subconjunto enumerable.
ii. Algún entero es divisible por 7.
iii. Para cada entero x, hay un entero y tal que $xy = 1$.
iv. Hay un par de enteros x y y tales que $xy = 1$.
v. Hay un entero x tal que para todo entero y se tiene que $xy = 1$.
vi. Todo conjunto no vacío de reales acotado superiormente tiene extremo superior.
vii. Todo par de triángulos congruentes tienen la misma área.
viii. Existe un número racional r tal que $\frac{1}{r} < \frac{\pi}{100}$.
ix. No existen números naturales m y n tales que $m + n = 100$ y su máximo común divisor es 3.
x. Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo real x, si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.
xi. Para cada número real x, existe un número real y tal que $xy = 1$.
xii. El valor absoluto de la suma de dos números reales es menor o igual que la suma de sus valores absolutos
xiii. Toda función derivable es una función continua.
xiv. Para todo entero positivo n, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.
xv. Existe un número real x tal que $xy = y$ para cada número real y.
xvi. No todos los números primos son impares.
xvii. Existe un número natural que es mayor o igual que todos los naturales.
xviii. Existe un número natural tal que su recíproco es $\frac{1}{4}$.
xix. Para todo número natural n existe un natural m tal que $m < n$.
xx. Existe un número real x tal que para todo número real y se tiene que $xy = 0$.
xxi. Todos los números racionales son enteros.
xxii. Ningún número real elevado al cuadrado es -1.
xxiii. Todo número natural es par o impar.
xxiv. Todo número natural primo y par es el número 2.

6. Considerando como universo el conjunto de los números enteros, si el predicado $p(x)$ significa "x es un número par" y el predicado $q(x)$ significa "x es un múltiplo de seis", escriba en correcto español las siguientes proposiciones y sus negaciones. ¿Cúales de ellas son ciertas?

   1) $\neg((\exists x)(p(x) \vee q(x)))$ 2) $(\exists x)(p(x) \wedge q(x))$

   3) $(\forall x)(p(x) \longrightarrow q(x))$ 4) $(\forall x)(q(x) \longrightarrow p(x))$

   5)$\neg((\forall x)(p(x) \wedge q(x)))$ 6) $(\exists x)(\neg p(x) \vee \neg q(x))$

7. Use las reglas de inferencia del cálculo de predicados para dar una deducción de los siguientes argumentos:

   (a) Todos los celulares con cámara y plan de datos consumen mucha energía. Todo iphone es un celular. Todo iphone tiene cámara. Hay iphones que no consumen mucha energía. Entonces hay celulares sin plan de datos.

   (b) Todo alumno que haga el taller correctamente entiende las nociones básicas. Juan es estudiante, pero no entiende las nociones básicas. Por lo tanto, Juan es un estudiante que no hace el taller correctamente.

   (c) Algunos jóvenes que cometen pequeños delitos son encarcelados. Cualquier joven que es encarcelado está expuesto a la influencia de criminales profesionales. Un joven que se ve expuesto a la influencia de criminales profesionales se tornará agresivo y aprenderá técnicas para cometer crímenes. Cualquiera que aprenda técnicas para cometer crímenes es una amenaza para la sociedad, si es agresivo. Por tanto, algunos jóvenes que cometen pequeños delitos constituyen una amenaza para la sociedad.

   (d) Las proposiciones matemáticas tienen contenido. Las proposiciones que tienen contenido son sintéticas. No hay proposiciones sintéticas a priori. Toda proposición es o bien a priori o bien a posteriori. De donde se sigue que las proposiciones matemáticas son sintéticas a posteriori. (J Stuart Mill).

   (e) Todo número es alef o es beth. Un número es alef si y sólo si es guímel y no es dálet. Hay un número que es dálet. Por lo tanto, hay un número que es beth.

   (f) Todo grupo tiene elemento neutro. $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ son grupos. Por lo tanto, $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Q}, +)$ tienen elemento neutro.

   (g) Todo grupo de orden menor o igual que cinco es conmutativo. El grupo $(G, \cdot)$ no es conmutativo. Todo número entero que no es menor o igual que cinco es mayor estricto que cinco. Cinco es un número entero. Por lo tanto, el orden del grupo $(G, \cdot)$ es mayor estricto que que cinco.

   (h) Todos los paralelogramos son trapezoides, pero algunos trapezoides no son paralelogramos. Los rectángulos existen. Todos los rectángulos son paralelogramos. De aquí que algunos trapezoides sean rectángulos, pero algunos trapezoides no sean rectángulos.

   (i) Ningún número impar es divisible por dos. Cinco es un número entero que no es par. Todo número entero es par o impar. Por lo tanto cinco no es divisible por dos.

   (j) Ningún triángulo congruente con el triángulo ABC es equilátero. El triángulo GHI es equilátero. Por lo tanto, el triángulo GHI no es congruente con el triángulo ABC.