UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE BOGOTÁ

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS

TALLER 5 - II-2019.

Los ejercicios del taller corresponden a una selección de ejercicios de los textos guía del curso.

1. Haga una demostración directa de las siguientes afirmaciones:

   (a) El producto de dos números enteros impares es impar.

   (b) Si n es un entero impar entonces $3n$ es impar.

   (c) Para todo a, b, y c enteros se tiene que si a divide a b y b divide a c entonces a divide a c.

   (d) Un entero es impar, si y sólo si, es la suma de dos enteros consecutivos.

   (e) Si a y b son enteros tales que a divide a b entonces a^n divide a b^n para todo entero positivo n.

   (f) Ejercicios 3., 5., 6., 7., 8., 11., 18., 26. pg. 100-101 libro de Hammack segunda edición.

2. Encuentre para cada una de las siguientes afirmaciones un contraejemplo que la refute.

   (a) Si a,b y c son enteros positivos entonces $a^{(b^c)} = \left(a^b\right)^c$

   (b) Si n es un entero positivo, entonces $n^2 + n + 41$ es primo.

   (c) Dos triángulos rectángulos tienen la misma área, si y sólo si, las longitudes de sus hipotenusas son iguales.

   (d) Ejercicios 1., 2., 3., 4., 25., 28., 30. pg. 152-153 libro de Hammack segunda edición.

3. Tomando como universo el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números reales, en cada uno de ellos considere cada una de las siguientes afirmaciones, y demuéstrelas o refútelas según sea el caso:

   (a) Para cada número no negativo s, existe un número no negativo t tal que $s \geq t$.

   (b) Existe un número no negativo t tal que para todo número no negativo s se tiene que $s \geq t$.

   (c) Para cada número no negativo t, existe un número no negativo s tal que $s \geq t$.

   (d) Existe un número no negativo s tal que para todo número no negativo t, se tiene $s \geq t$.

4. Demueste por contradicción (para aquellos enunciados sobre números reales, pueden usar los axiomas de cuerpo y de orden de los números reales estudiados en cálculo diferencial):
   (a) Dos enteros consecutivos no pueden ser pares.
   (b) Si la suma de dos primos es primo entonces uno de los primos es dos.
   (c) $\sqrt{3}$ es un número irracional.
   (d) $\sqrt{6}$ es un número irracional.
   (e) El producto de un racional no nulo y un irracional es un irracional.
   (f) Si c un entero positivo no primo, entonces existe un entero positivo b tal que b divide a c y $b \leq \sqrt{c}$.
   (g) Ejercicios 6., 9., 10., 15. (OJO: para Hammack $0 \notin \mathbb{N}$), 17., 18. pg. 118 libro de Hammack segunda edición.

5. Utilice la contrarrecíproca para demostrar:
   (a) Para a,b, y c naturales, si a no divide al producto de b y c entonces a no divide a b
   (b) Para a y b naturales, si la suma de a y b no es par entonces no es cierto que a y b son ambos pares o ambos impares.
   (c) Ejercicios 1., 2., 3., 4., 5., 7., 9., 10., 12., 16. pg. 110 libro de Hammack segunda edición.

6. Use casos para demostrar (considerando como universo los números reales):
   (a) $|xy| = |x|\,|y|$
   (b) $|x - y| = |y - x|$.
   (c) Existen a y b irracionales tales que a^b es racional. (indicación: considere $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y argumente por casos dependiendo del resultado de esa exponenciación).

7. Utilizando cualquiera de los métodos de demostración estudiados en clase, hacer los ejercicios 1., 5., 9., 16., 20., 22., 23. pg. 129-130 libro de Hammack segunda edición.

8. Definición: Dados a y b reales, decimos que a es menor que b (lo que se nota $a < b$) si $b - a$ es un real positivo (revise los axiomas de cuerpo y de orden en los reales estudiados en el curso de cálculo diferencial). Si $a < b$ se dice también que b es mayor que a y se nota $b > a$.

   Sean a, b y c números reales. Demuestre las siguientes afirmaciones:
   (a) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
   (b) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

(c) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.

(d) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

(e) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

(f) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.