

Cálculo diferencial en una variable - 2016377

TALLER 5 - II-2019

TEMA: Funciones exponenciales y logarítmicas.

I. En cada caso defina $f \circ g$ y $g \circ f$: y halle sus dominios:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $g(x) = e^x$ b) $f(x) = \ln x$; $g(x) = x^2 - 1$

II. Dadas las siguientes funciones halle una fórmula para definir su inversa.

a) $f(x) = \ln(x+3)$ b) $g(x) = e^{\ln x}$ c) $h(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$ d) $m(x) = 2^{10^x}$

III. Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(3-5x)$ b) $g(x) = \sqrt{1-x} + \log_3(x^2-4)$ c) $h(x) = \frac{\cos 2x}{\ln x}$

IV. Conociendo la gráfica de la función $f(x) = e^x$ y la de su inversa $f^{-1}(x) = \ln x$, haga las gráficas de las siguientes funciones y úselas para determinar sus dominios y recorridos:

a) $t(x) = -e^x$ b) $g(x) = e^{-x}$ c) $h(x) = 1 - e^x$ d) $j(x) = 1 + e^x$

e) $k(x) = \ln(x-1)$ f) $l(x) = \ln 2x$ g) $m(x) = e^{-\ln x}$ h) $n(x) = e^{|x|}$

i) $\tilde{n}(x) = e^{-|x|}$ j) $r(x) = \ln|x|$ k) $q(x) = |\ln x|$ l) $s(x) = \ln(-x)$

V. Encuentre todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3 = e^{1-4x}$ b) $1 = 2e^{-2x}$ c) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

d) $\ln(e^{2x}) = 6$ e) $1 = 2\ln 3x$ f) $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$

VI. Sea a un número real. Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique por qué.

a) Si a es positivo la función $f(x) = a^x$ es tal que si $x < y$ entonces $a^x < a^y$.

b) Las gráficas de $f(x) = a^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas de la otra con respecto al eje y .

c) La función $f(x) = a^x$ es invertible para todo a positivo (¡Cuidado!)

d) La función inversa de $f(x) = a^x$ es $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

e) Si $0 < a < 1$ se cumple que si $x < y$ entonces $\log_a x < \log_a y$.

f) Si $a > 1$ se cumple que si $x < y$ entonces $\log_a x < \log_a y$.

VII. La función *coseno hiperbólico* está definida por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

a) Trace las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en el mismo plano y con esta información, trace la gráfica de $y = \cosh(x)$.

b) Verifique, tanto por gráfica como por definición, que $y = \cosh(x)$ es una función par.

VIII. En condiciones ideales, se sabe que cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Suponga que primero hay 100 bacterias.

- a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
- b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
- c) ¿Se puede afirmar que después de 20 horas el número de bacterias está entre 6.000 y 13.000?
- d) Estime el tiempo para que la población llegue hasta 50.000 bacterias.

IX. La vida media de un isótopo de sodio es de 15 horas. Esto significa que cualquier cantidad de este isótopo se reduce a la mitad al cabo de 15 horas. Una muestra tiene una masa de 2 gramos.

- a) Encuentre la cantidad que queda después de 60 horas.
- b) Halle cuánto queda después de t horas.
- c) Estime la cantidad que queda después de 4 días.
- d) Estime el tiempo requerido para que la masa se reduzca a 0,01 gramos.

X. Unos médicos usan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de ciertas enfermedades de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 6e^{-0.087t},$$

donde la masa se mide en gramos.

- a) Encuentre la masa inicial.
- b) ¿Cuánta masa resta después de 20 días?