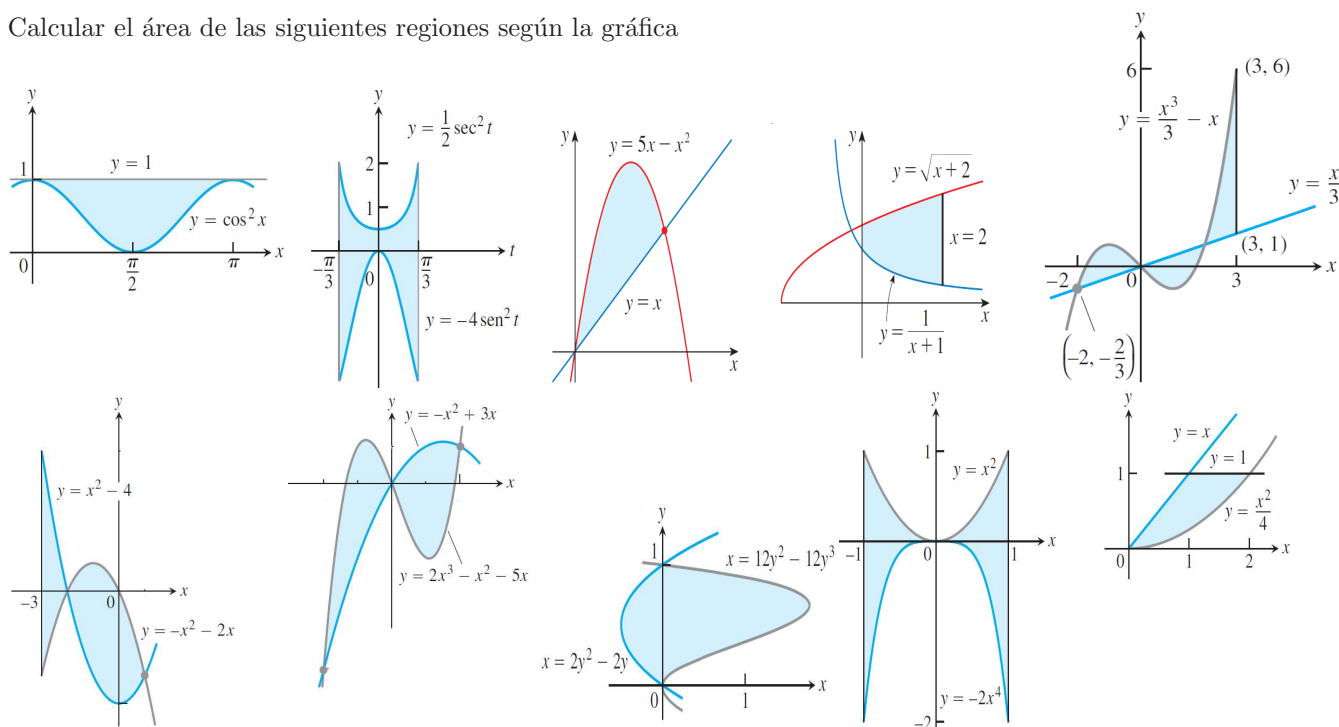


Aplicaciones de la Integral

1. Calcular el área de las siguientes regiones según la gráfica



2. Calcule el área de la región S limitada por $y = \frac{2|x|}{1+x^2}$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 1$

R: $A(S) = \ln(10)$

3. Calcule el área de la región limitada por la parábola $y = x^2 + 4x$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. R: $A = 16$

4. Halle el área de la región R limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$, $x = -1$, $x = 2$. R: $A(R) = \frac{25}{12}$

5. Halle el área de la región R limitada por las gráficas de $y = 4 - x^2$, $y = \ln(2x - 3)$, $y = 1$. R: $A(R) = \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{3} - \frac{13}{3}$

6. ((Ex)) Halle el área de la región R limitada por las gráficas de $y = |x^3 - 4x^2 + x + 6|$, $3y + x^2 = 0$, $x = 0$, $x = 4$, (Fig.1) R: $A(R) = \frac{341}{18}$

7. Halle el área de la región R que se encuentra en el primer cuadrante y está limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$, $x - xy = 1$, $x - xy = 3$. (ver Fig. 2.) R: $A(R) = \ln\left(\frac{729}{256}\right)$

8. Halle el área de la región R, ubicada en el primer cuadrante y que está limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x^2 = 4y$, $x + y = 6$. R: $A(R) = \frac{1}{3}(28\sqrt{7} - 62)$

9. ((Ex)) La región R, limitada por la curva $y = 10x - 5x^2$ y el eje x, es dividida en dos partes iguales por una recta que pasa por el origen. Halle la ecuación de dicha recta. R: $y = (10 - 5\sqrt[3]{4})x$

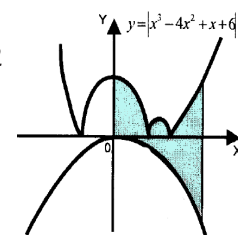


Fig.1

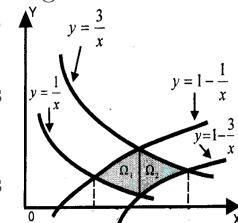


Fig.2

10. Determine m de manera que la región que está por encima de $y = mx$ y debajo de la parábola $y = 2x - x^2$ tenga área igual a 36. R: $m = -4$

11. ((Ex)) Una parábola de eje vertical corta a la curva $y = x^3 + 2$ en los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 3)$. Si se sabe que las curvas mencionadas encierran una región de área 2, halle la ecuación de la parábola. R: $2y = 3x^2 + 2x + 1$ ó $2y = 7 + 2x - 3x^2$

12. ((Ex)) Calcule el área la región R limitada por las curvas dadas.

$$y + x = 0, \quad y = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{donde } f(t) = \begin{cases} 3t^2 & t < 2 \\ -2t - 1, & t \geq 2 \end{cases} \quad \text{R: } \frac{23\sqrt{14} - 58}{3}$$

13. La hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 8$ divide en 3 regiones a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Halle el área de cada una de las regiones.

14. ((Ex g)) Dibuje y calcule el área de la región acotada por las curvas

a) $y = |x|$; $2y = x + 2$.

e) $y = 4 - x^2$; $y + x = 2$; $x = -2$; $x = 3$

b) $y^2 = x$; $y^2 = 2(x - 3)$.

f) $y = -x^2 - 2x$; $y = x^2 - 4$

c) $x = y^2 - 2$; $y = \ln(x)$; $y = 1$; $y = -1$

g) $y = |x^2 - 4|$; $2y = x^2 + 8$

d) $y^2 = x - 4y$; $2y = y^2 + x$

h) $\sqrt{x} = y - 1$; $x + y = 3$; $x^2 = 4y$ y $x = 0$

15. Encontrar c tal que la recta $y = c$ divide la región acotada por las dos funciones en dos regiones de área igual.

a) $y = 9 - x^2$, $y = 0$

c) $y = x$, $y = 4$ $x = 0$

b) $y = 9 - |x|$, $y = 0$

d) $y^2 = 4 - x$, $x = 0$

16. ((Ex)) Encontrar el área de la región en el primer cuadrante, que está acotada por arriba por $y = \sqrt{x}$, por abajo por el eje x y la recta $y = x - 2$

17. Determine el área de la región R acotada por la recta $y = \frac{1}{2}x$ y por la parábola $y^2 = 8 - x$.

18. ((Ex)) Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geq 0$ y $1 - x - |y| \geq 0$, y determine su área.

19. ¿Para qué valores m de la recta $y = mx$ y la curva $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ definen una región? Calcule el área de la región.

20. Hay una recta que pasa por el origen que divide la región definida por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x en dos regiones de área igual. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

21. ((Ex)) En la figura 1 se ilustra una horizontal $y = c$ que corta a la curva $y = 8x - 27x^3$. Encuentre el número c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.

22. ((Ex))** En la figura 2 se ilustra una curva C con la propiedad de que para todo punto P en la mitad de la curva $y = 2x^2$, las áreas A y B son iguales. Determine una ecuación de C . $C(x) = \frac{32}{9}x^2$

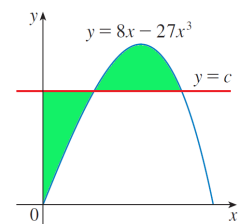


Fig 1.

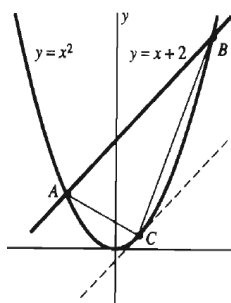
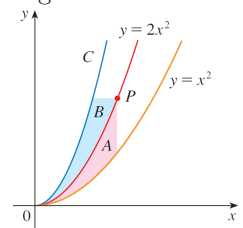


Fig 3

23. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Demostrar que el área de la región que acota es $A = \pi ab$.

24. Sean A y B los puntos de intersección de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$ y sea C el punto de la parábola donde la recta tangente es paralela a la gráfica de $y = x + 2$. Muestre que el área del la región entre la parábola y la recta es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo ABC. (Fig 3).

Volúmenes de sólidos:

25. Usando cualquier método encuentre el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de

- a) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ alrededor del eje x $V = 5\pi$
 b) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ alrededor del eje y
 c) $y = x^2 + 1$, $y = -x + 3$ alrededor de $y = -1$.
 d) $y = x^2$ y $y = 4x - x^2$, (a) alrededor del eje x ; (b) alrededor de $y = 6$
 e) $y = 6 - 2x - x^2$ y $y = x + 6$, (a) alrededor del eje x (b) alrededor de $y = 3$

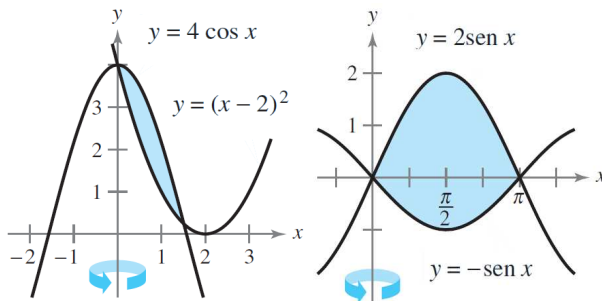
26. ((Ex)) Un fabricante taladra una esfera de metal de 5 pulgadas de radio. El orificio tiene un radio de 3 pulgadas. ¿Cuál es el volumen del objeto de metal resultante?
27. ((Ex)) Suponga que la base de un sólido es la región acotada por las rectas $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $g(x) = -1 + \frac{x}{2}$ y $x = 0$; y cuando hacemos secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros. Con esta información Calcule el Volumen de dicho sólido.
28. ((Ex)) Demostrar que el volumen de una pirámide con una base cuadrada es $V = \frac{1}{3}hB$, donde h es la altura de la pirámide y B es el área de la base.
29. Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada por $y = \frac{3}{1+x}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 3$ la cual gira alrededor de la recta $y = 4$.
30. La región limitada por la circunferencia $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ gira alrededor de la recta $x = 3$. Calcule el volumen del sólido generado (toro de revolución). $V = 10\pi^2$
31. ((Ex b,d)) Encontrar el volumen del sólido generado por la región acotada $(y-2)^2 = 4-x$, $y = 0$ al girar alrededor de las rectas dadas.

a) El eje x

b) la recta $y = 5$

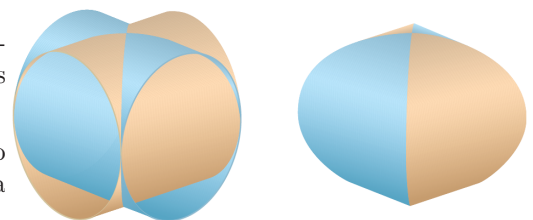
c) El eje y

d) la recta $x = 5$



32. Encontrar el volumen de los sólidos (figura izquierda) generado al girar cada región plana alrededor del eje y . (dado el caso aproxime los puntos de intersección)

33. ((Ex)) Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r , si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos (ver figura derecha).
34. ((Ex)) Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r , si el centro de cada esfera está en la superficie de la otra esfera



35. ((Ex)) Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$, $\forall x > 1$. Para todo $a > 1$, el volumen del sólido generado por la rotación de la región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, $x = 1$, $x = a$ y el eje x , alrededor del eje x es: $V = \frac{a^3}{3} + 2a^2 - \frac{7}{3}$. Determine $f(x)$. $\mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x^2 + 4x}$.

36. ((Ex)) Calcule el volumen de la región infinita R comprendida entre la curva $y = \int_0^x \frac{-4t}{(t^2 + 1)^3} dt$, ($x \in \mathbb{R}$) y su asíntota y el eje de rotación es su asíntota. $V = \frac{3\pi^2}{16}$

37. Cada una de las integrales representa el volumen de un sólido de revolución. Identificar a) la región plana que se gira y b) el eje de revolución.

a) $2\pi \int_0^2 x^3 dx$

b) $2\pi \int_0^1 y - y^{3/2} dy$

c) $2\pi \int_0^6 (y+2)\sqrt{6-y} dy$

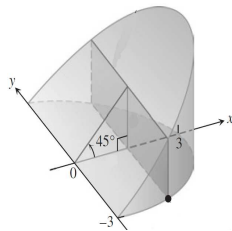
d) $2\pi \int_0^1 (4-x)e^x dx$

e) $\pi \int_1^5 (x-1) dx$

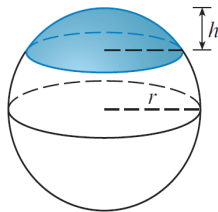
f) $2\pi \int_0^2 y[5 - (y^2 + 1)] dy$

g) $2\pi \int_0^4 x(\frac{x}{2}) dx$

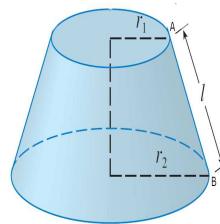
h) $\pi \int_0^2 [16 - (2y)^2] dy$



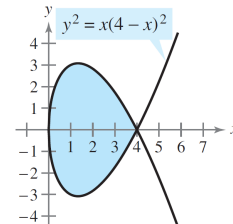
Ejercicio 38



Ejercicio 39

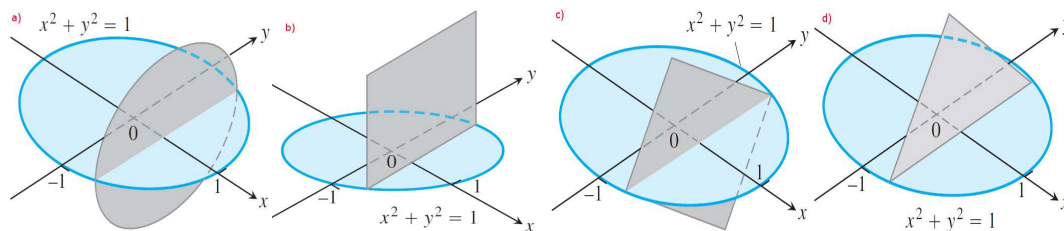


Ejercicio 40

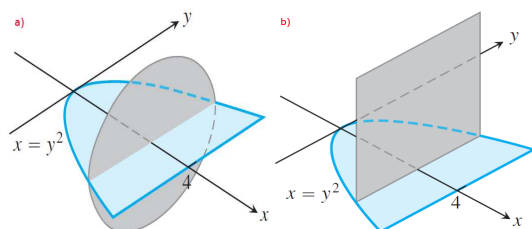


Ejercicio 41

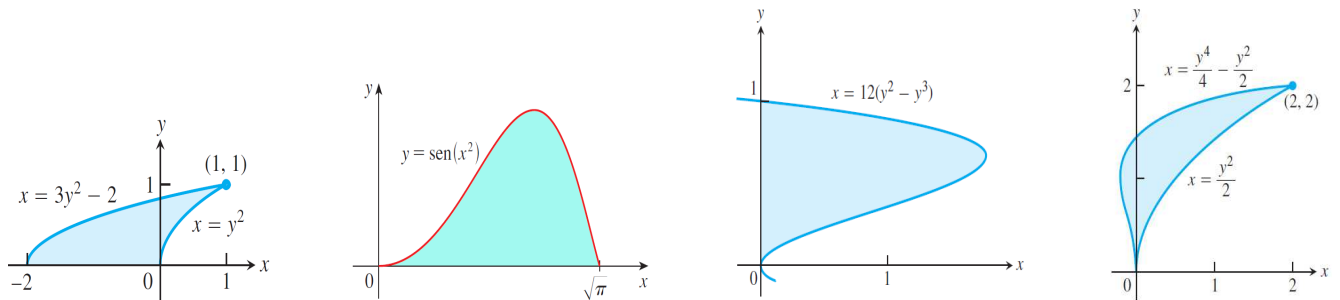
38. ((Ex)) Se corta una cuña curva de una cilindro con radio 3 en dos planos. Uno de los planos es perpendicular al eje del cilindro; el otro cruza al primero formando un ángulo de 45° en el centro del cilindro ver figura. Determinar el volumen de la cuña.
39. Sea una esfera de radio r que se corta por un plano, formando un casquete esférico de altura h . Mostrar que el volumen de este segmento es $\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.
40. Calcule el volumen de un tronco de un cono circular recto cuya altura vertical es h , base inferior de radio r_2 , y radio de la parte superior r_1 .
41. Considerar la gráfica $y^2 = x(4-x)^2$ (ver la figura 2). Encontrar los volúmenes de los sólidos que se generan cuando la espira de esta gráfica se gira alrededor a) del eje x , b) del eje y y c) la recta $x = 4$.
42. ((Ex)) Halle el volumen de los siguientes sólidos sabiendo que:



- a) Las secciones transversales al eje x son discos circulares con diámetros en el plano xy .
- b) Las secciones transversales al eje x son cuadrados con base en el plano xy .
- c) Las secciones transversales al eje x son cuadrados con diagonales en el plano xy .
- d) Las secciones transversales al eje x son triángulos equiláteros con bases en el plano xy .
43. El sólido se encuentra entre los planos $x = 0$ y $x = 4$ y las parábolas $y = -\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{x}$. Halle el volumen si:
- a) Las secciones transversales son discos circulares con diámetros en el plano xy .
- b) Las secciones transversales son cuadrados con bases en el plano xy .
- c) Las secciones transversales son cuadrados con diagonales en el plano xy .
- d) Las secciones transversales son triángulos equiláteros con bases en el plano xy .



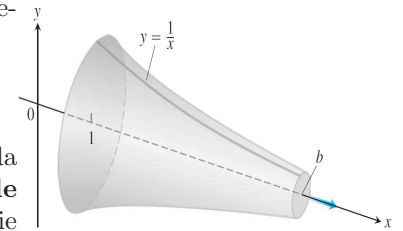
44. ((Ex)) Sean V_1 y V_2 los volúmenes de los sólidos que resultan cuando la región plana limitada por $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, y $x = c$ ($c > \frac{1}{4}$) se gira alrededor del eje x y el eje y , respectivamente. Encontrar el valor de c para el cual $V_1 = V_2$.
45. La región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $0 < b < a$ gira alrededor de su eje mayor. Calcule el volumen del sólido generado. $V = \frac{4}{3}ab^2\pi$
46. Las regiones que se muestra a continuación se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. ¿Cuál de los métodos (el de discos, el de arandelas, o el de casquillos) podría utilizarse para determinar el volumen del sólido? ¿Cuántas integrales son necesarias en cada caso? Explique.



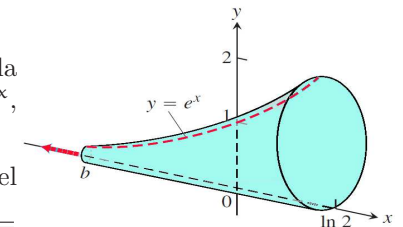
47. ((Ex)) Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 1$ la región limitada por las gráficas de

$$y = |x^2 - 2x - 3|, \quad y + 1 = 0, \quad x - 1 = 0, \quad x - 4 = 0,$$

48. El sólido formado al girar (alrededor del eje x) la región *no acotada* que queda entre la gráfica de $f(x) = 1/x$ y el eje x ($x > 1$) se llama la **trompeta de Gabriel**. Mostrar que este sólido tiene un volumen finito y un área de superficie infinita.



49. Las secciones transversales, perpendiculares al eje x , del cuerno sólido en la figura 1 son discos circulares de diámetros que van del eje x a la curva $y = e^x$, $-\infty < x < \ln 2$. Determine el volumen del cuerno.

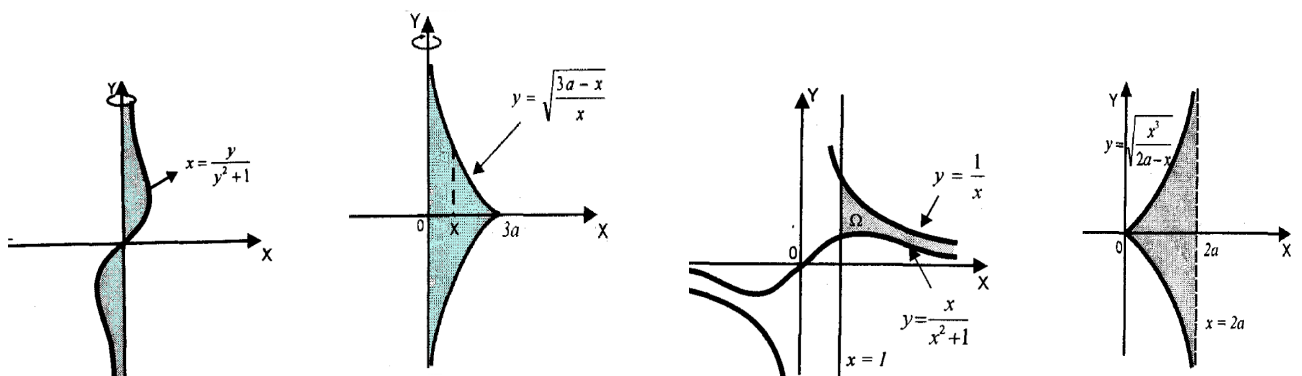


50. Determine el volumen del sólido de revolución generado al rotar alrededor del eje x la región infinita comprendida entre la recta $y = 0$ y la curva $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Fig 2

$$V = 3\pi$$

51. ((Ex)) La región infinita comprendida entre la curva $x + xy^2 - y = 0$ y su asíntota vertical gira alrededor de su asíntota vertical. Calcule, si existe, el volumen del sólido. $V = \frac{\pi^2}{2}$ (Fig. 1)

52. ((Ex)) La región infinita comprendida entre la gráfica de $xy^2 = (3a - x)$, ($a > 0$) y su asíntota vertical $x = 0$ gira alrededor del eje y . Calcule el volumen del sólido generado. (Fig. 2) $V = \frac{9a^2\pi^2}{2}$



53. ((Ex)) Dada la región infinita Ω limitada superiormente por $xy = 1$, inferiormente por $yx^2 + y - x = 0$ y a la izquierda por $x = 1$. Calcule su área si existe. $A = \ln(\sqrt{2})$ (Fig 3.)

54. ((Ex)) Calcule, si existe, el área de la región infinita comprendida entre la curva $(2a - x)y^2 = x^3$, ($a > 0$) y su asíntota vertical. (Fig. 4) **A = $3\pi a^2$**

Longitud de arco

55. Usar la fórmula de la longitud de arco para demostrar que la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = 1$ es 2π .

56. ((Ex)) Determinar la longitud de la astroide Fig 1, donde las ecuaciones paramétricas son

$$x = \cos^3 t \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

57. Un fabricante necesita hacer hojas de metal corrugado de 36 pulgadas de ancho con secciones transversales con la forma de la curva

$$y = \frac{1}{2} \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 36$$

¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas hojas corrugadas? **Ayuda:** Use Simpson $n = 6$

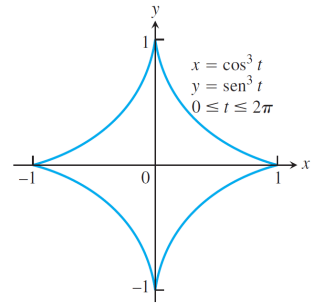
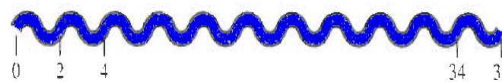


Fig 1



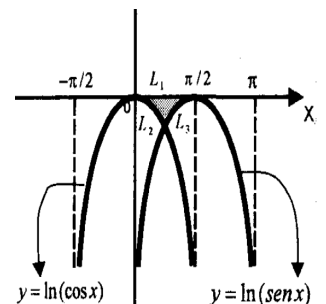
58. ((Ex)) Determine la longitud de la curva

$$y = \sqrt{\sec^2 x + 1} - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{\sec^2 x + 1}}{\sec x} \right), \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \quad \mathbf{L = \sqrt{3} - 1}$$

59. Encuentre la longitud de la curva cuya ecuación es $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{x^4}{16}$ desde $x = -2$ hasta $x = -1$. **L = $\frac{21}{16}$**

60. Halle el perímetro del triángulo curvilíneo limitado por el eje de las abscisas y por las curvas cuyas ecuaciones son:

$$y = \ln(\cos x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad y = \ln(\sin x), \quad -0 < x < \pi,$$



61. Calcule la longitud de la parábola semicúbica $2y^3 = x^2$, comprendida dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$. **L = $\frac{8}{27}(\sqrt{1000} - 1)$**

62. Calcule el perímetro de la región de menor área limitada por las gráficas $2y^3 = x^2$ y $x^2 + y^2 = 20$.

63. ((Ex)) Encuentre la longitud de la curva cuya ecuación es $x = \int_1^t \frac{\cos t}{t} dt$, $y = \int_1^t \frac{\sin t}{t} dt$ desde el origen de coordenadas hasta el punto más próximo donde la tangente es vertical. **L = $\ln(\frac{\pi}{2})$**

64. ((Ex c,e,f)) Determine las longitudes de las curvas.

a) $y = \ln(\cos x)$, de $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

f) $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1} dt$, $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

b) $y = \ln \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right)$ con $0 < a \leq x \leq b$

c) $x = 8 \cos t + 8t \sin t$, $y = 8 \sin t - 8t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

g) $x = \int_{-2}^y \sqrt{3t^4 - 1} dt$, $-2 \leq y \leq -1$

d) $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}$, $0 \leq t \leq 4$

h) $y = \int_{-\pi/2}^x \sqrt{\cos t} dt$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, **L = 4**

e) $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$ de $y = 1$ a $y = 3$

i) $x = 1 - \cos t$, $y = t - \sin t$, $0 \leq t \leq 1$

65. ((Ex)) Halle la función longitud de arco para la curva $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin(\sqrt{x})$ con punto de inicio (a, b) .

66. Halle la función longitud de arco para la curva $y = \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ con punto de inicio $(0, 1)$.
67. ((Ex)) Determine una curva que pase por el punto $(1, 1)$, cuya integral de longitud sea $L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.?
68. Determine una curva que pase por el punto $(0, 1)$, cuya integral de longitud sea $L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} dy$. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.?
69. Determine la longitud del rizo formado por $x = t^2$, $y = \frac{t^3}{3} - t$ Fig 2. El rizo inicia en $t = -\sqrt{3}$ y termina en $t = \sqrt{3}$
70. ((Ex)) Determine la longitud de la curva de
 a) $x = \frac{t}{1+t}$, $y = \ln(1+t)$, $0 \leq t \leq 2$.
 b) $x = \cos t + \ln(\tan \frac{1}{2}t)$, $y = \sin t$, $\pi/4 \leq t \leq 3\pi/4$

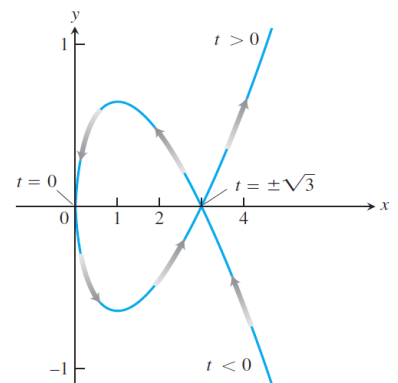


Fig 2

Área superficies de revolución

71. ((Ex a,d,i,)) Determine el área de cada superficie generada al hacer girar la curva dada alrededor del eje indicado.

a) $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$ $1 \leq y \leq 2$ eje x

b) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$ $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ eje y

c) $x = \cos t$, $y = 2 + \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eje x

d) $x = t + \sqrt{2}$, $y = \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t$, $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, eje y

e) $x = 2t$, $y = t + 1$, $0 \leq t \leq 1$, eje x .

f) $x = ht$, $y = rt$, $0 \leq t \leq 1$, eje x

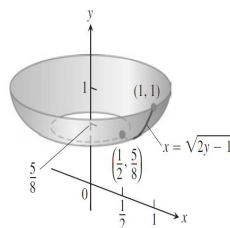
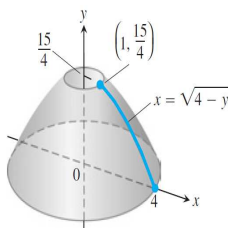
g) $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, eje x

h) $y = \sqrt{4 - x^2}$ $-1 \leq x \leq 1$, eje x

i) $2x = y\sqrt{y^2 - 1} + \ln|y - \sqrt{y^2 - 1}|$ $2 \leq x \leq 5$, eje x
 $A(S) = 78\pi$

j) $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2 \ln x)$ $1 \leq x \leq 4$, eje y **$A(S) = 24\pi$**

k) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $x \in [1, 2]$; eje $y = -1$



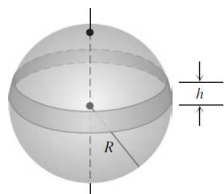
l) $y = 4 + e^x$, $x \in [0, 1]$; eje $y = 4$

m) $y = x^2$, $x \in [0, 2]$; eje $y = -1$. **$R = 12\sqrt{5}\pi$**

n) $x = 2\sqrt{4-y}$ $0 \leq y \leq \frac{15}{4}$, eje y

o) $x = \sqrt{2y-1}$ $\frac{5}{8} \leq y \leq 1$, eje y

72. ((Ex)) Calcule el área de la superficie de revolución que se obtiene al hacer girar la curva $y = 2 - e^x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, alrededor de la recta $y = 2$ **$A(S) = \pi \left(e^2 \sqrt{1 + e^4} - \sqrt{2} + \ln \left(\frac{e^2 + \sqrt{1 + e^4}}{1 + \sqrt{2}} \right) \right)$**

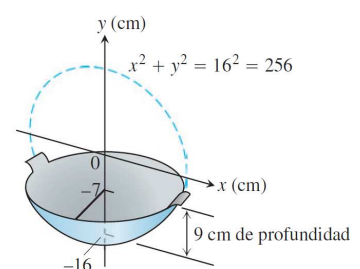


73. Por medio de planos paralelos separados una distancia h , se corta, de una esfera de radio R , la banda sombreada que se muestra en la figura 2. Demuestre que el área de la superficie de la banda es $2\pi Rh$

74. ((Ex)) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = \int_1^x \sqrt{t-1} dt$, $1 \leq x \leq 16$ eje y .

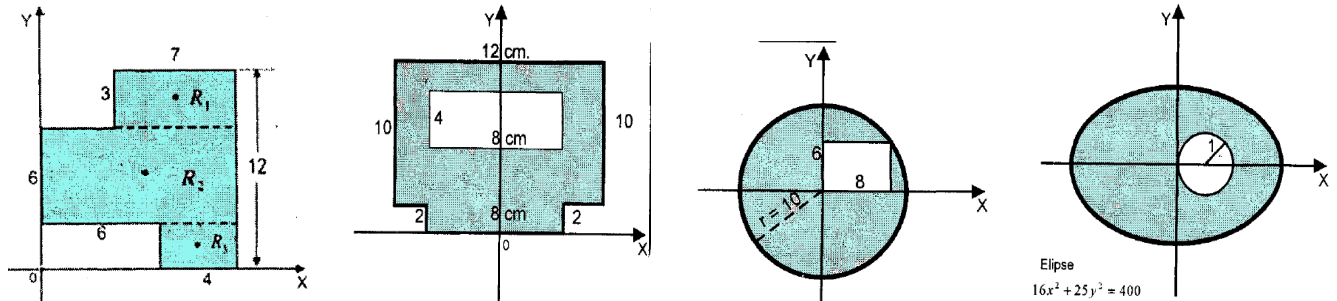
75. Considere una esfera de radio r como una superficie de revolución, y demuestre que el área de su superficie es $A = 4\pi r^2$.

76. ((Ex)) Un departamento de manufactura necesita saber cuánto esmalte azul debe tener disponible para producir 5000 sartenes (ver fig derecha). ¿Qué les diría?



Centros de masa - Centroide

77. ((Ex a,d)) En cada uno de los ejercicios, encuentre el centroide de la lámina homogénea de densidad ρ que tiene la forma mostradas en la figura $(5,20; 6,43), (0, \frac{75}{13}), (-\frac{48}{25\pi-12}, -\frac{36}{25\pi-12}), (-\frac{1}{19}, 0)$



78. Encuentre el centroide de las siguientes regiones acotadas por las curvas

- | | |
|--|---|
| a) $y = \cos x, y = 0, x = 0$ y $x = \pi/2$ | f) $y = \sqrt{x}$ y $x = \sqrt{y}$ |
| b) $y = 4x$ y $y = x^3$ | g) $y = -x^2 + 2x$ y $16x = y^2$ |
| c) $y = x^2$ y $y = x - x^2$ $C = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$ | h) $y = -x$ y $x^2 + y^2 = 1$ |
| d) $x = 2y - y^2, x = 0$ $C = (\frac{2}{5}, 1)$ | i) $y = x^2 - 2x - 3$ y $y = 6x - x^2 - 3$ $C = (2, 1)$ |
| e) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ y $y = 0, x = 0$. $C = (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ | j) $x = 4 - y^2$ y $y = x + 2$ |

79. Halle el centro de gravedad de la región limitada por las curvas $x^2 - 8y = 0, x^2 + 16y = 24$ $C = (0, \frac{4}{5})$

80. ((Ex)) Determine el centroide de la región plana limitada por las curvas $y = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$, $y = -x^2, x = -1$, $x = 2$. $C = (\frac{107}{110}, \frac{142}{275})$

81. ((Ex)) Halle el centro de gravedad de la región infinita, en el primer cuadrante, comprendido entre la curva $y = xe^{-x}$ y el eje x . $C = (2, \frac{1}{8})$

82. ((Ex)) El centro de gravedad de la región acotada por las curvas $x^2 = 4y, y = mx$ es un punto de abscisa igual a 2. Determine el valor de m $m = 1$

83. La placa triangular que se muestra en la fig 1 tiene una densidad constante de $\rho = 3g/cm^3$. Determinar

- el momento, M_y , de la placa respecto del eje y . $M_y = 2$
- la masa, m , de la placa. $m = 2$
- la coordenada \bar{x} del centro de masa de la placa. $\bar{x} = \frac{2}{3}$

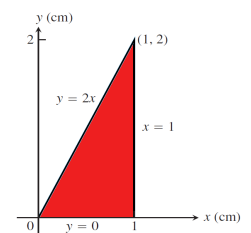


Fig 1

84. Usando el teorema de Pappus, halle los volúmenes de los sólidos que se general rotar las regiones limitada por las siguientes curvas

- $y = x^2, x = -y^2$ alrededor de la recta $x + y = 3$.
- $y = x^3, x = y^3$ alrededor de la recta $x + y = 2$.
- $y = -x^2 + 2x, y = -4\sqrt{x}$ alrededor de la recta: (a) $x = 4$, (b) $y = 2$, (c) $y = x + 2$.
- $y = -x^2, y^2 = x$ alrededor de la recta $y = -2x + 3$.
- $y = 4x - x^2, 0 \leq x \leq 4$ alrededor de la recta $x = -1$.

85. ((Ex)) Sea R una región cualquiera totalmente contenida en el tercer cuadrante de área $\frac{10}{3}$ y tal que su centroide se encuentra sobre la recta $y = x$. si el volumen del solido generado al girar R respecto a la recta $y = -x$ es $20\sqrt{2}$. Halle

- El centroide de R .

b) Momento respecto al eje x de R .

c) Volumen del sólido generado al rotar respecto a la recta $y = 1$.

86. ((Ex)) La región limitada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 5$ gira alrededor de una recta oblicua que pasa por el punto $P(1,0)$. Halle la ecuación de dicha recta, si el volumen del sólido generado es igual a $40\sqrt{5}\pi$. Sol: $3x - 4y - 3 = 0$.

Trabajo

87. Se requiere una fuerza de 10 lb para mantener estirado un resorte 4 pulg más de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta 6 pulg más de su longitud natural? Ayuda: recuerde que 4 pulg = 1/3 pies
88. Determinar el trabajo requerido para comprimir un resorte desde su longitud natural de 1 pie a una longitud de 0,75 pies, si la constante del resorte es $k = 16$ lb/pie $W = 0,5$ lb-pies
89. Si una persona saca de un pozo una cubeta de 20 kg y realiza un trabajo equivalente a 6000 J, ¿Cuál es la profundidad del pozo?
90. Un resorte tiene una longitud natural de 1 m. Una fuerza de 24N lo estira hasta una longitud de 1,8 m.

a) Determinar la constante k del resorte. $k = 30$ N/m

b) ¿Cuánto trabajo se requerirá para estirar el resorte hasta 2 m más que su longitud natural? $W = 60$ J

c) ¿Hasta qué longitud se estirará el resorte si le aplicamos una fuerza de 45 N? $x = \frac{3}{2}$ m

91. ((Ex)) El tanque de la Figura 2 tiene 8 pies de altura y 2 pies de radio en su parte superior. Si se llena de hasta una altura de 6 pies con un aceite que tiene un peso de $\gamma = 60$ lb/pies³, encuentre el trabajo requerido para bombear todo ese aceite por el borde superior del tanque. $W = 2160 \approx 6785,84$ lb.pie

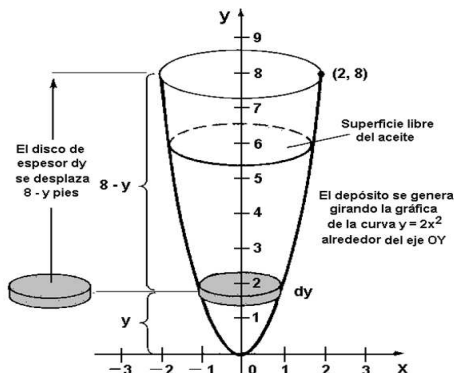
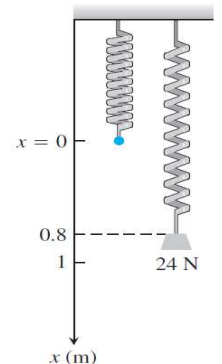
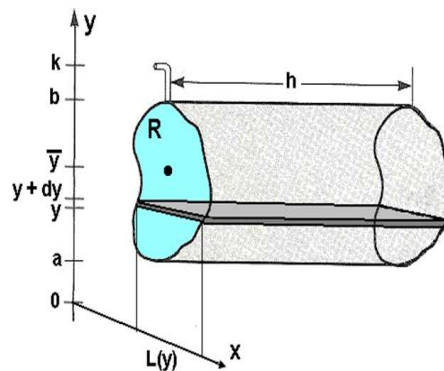


Fig 2.



92. ((Ex)) Consideremos un tanque cilíndrico acostado cuya base es una región R del plano (no necesariamente circular). La longitud del cilindro es h y se encuentra completamente lleno con un líquido de peso γ . Demuestre que el trabajo requerido para bombear todo el fluido hasta una altura por encima del nivel superior del líquido, es igual al peso del líquido en el tanque multiplicado por la distancia vertical entre el punto de descarga y el centroide de R . Es decir, demuestre que

$$W = G(k - \bar{y})$$

Donde G representa el peso total del líquido en el tanque y $(k - \bar{y})$ es la distancia vertical entre el nivel del punto de descarga y el centroide de la base R del tanque.

93. ((Ex)) Una partícula se mueve a lo largo del eje OX mediante una fuerza impulsora dada por $f(x) = ax^2 + bx$ newtons: $a = 3$, $b = -2$

(a) Determine las constantes a y b si se sabe que se precisan 900 joules de trabajo para desplazar la partícula 10m a partir del origen y que la fuerza es de 65 newtons cuando $x = 5$ m.

- b) Si la partícula se encuentra en la posición $x = 2\text{m}$, ¿hasta que posición aproximadamente puede ser desplazada si la fuerza puede realizar un trabajo de 1580 joules?

Ecuaciones Diferenciales

94. ((Ex b)) Demuestre que la función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial que se da.

a) $y = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$, Ecu: $x^2 y' + xy = e^x$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \int_1^x \sqrt{1+t^4} dt$, Ecu: $y' + \frac{2x^3}{1+x^4} y = 1$

95. ((Ex a,d)) Resuelva la ecuación diferencial

a) $(\sec x) \frac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$

c) $\frac{du}{dt} = \frac{2t + \sec^2 t}{2u}$, $u(0) = -5$

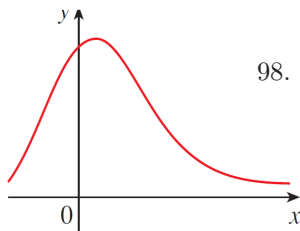
b) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

d) $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = \frac{1}{2}$

e) $y' \tan x = a + y$, $y(\pi/3) = a$, $0 < x < \pi/2$

96. ((Ex)) Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = \frac{x}{1+kx}$. Haga un bosquejo de varios miembros de cada familia

97. Determine la familia de soluciones de la ecuación diferencial $xdy - 2ydx = 0$ y la familia de trayectorias ortogonales. Haga un bosquejo de ambas familias.

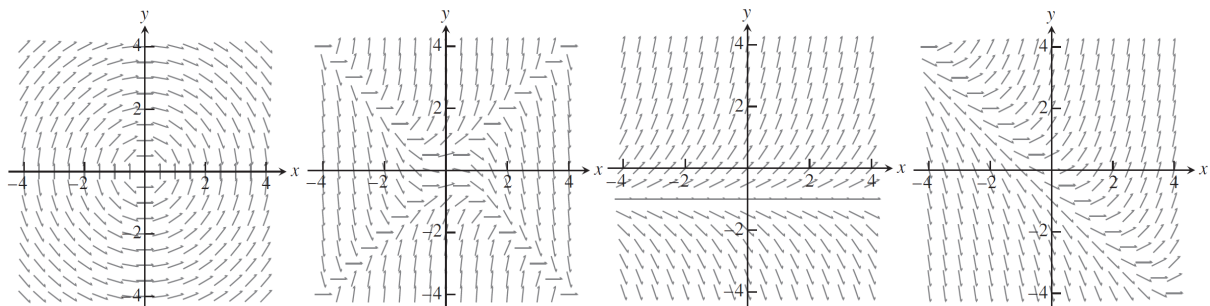


98. ((Ex)) La gráfica de la izquierda es una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Decida cuál es la ecuación correcta y justifique su respuesta.

a) $y' = 1 + xy$ b) $y' = -xy$ c) $y' = 1 - 2xy$

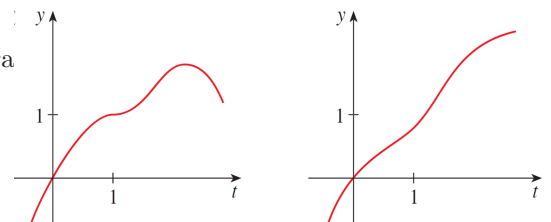
99. Haga corresponder las ecuaciones diferenciales con su campo de pendientes.

a) $y' = x + y$, b) $y' = y + 1$, c) $y' = -\frac{x}{y}$, d) $y = y^2 - x^2$



100. ((Ex)) Explique por qué las funciones con las gráficas dadas en la (figura derecha) NO pueden ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y-1)^2$$



Ecuaciones paramétricas

101. ((Ex e,f,h)) Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva y bosqueje la curva e indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva cuando crece t

a) $x = \sqrt{t}$, $y = 1 - t$

b) $x = \sec t$, $y = \csc t$, $0 < t < \pi/2$

c) $x = e^t - 1$, $y = e^{2t}$

d) $x = \ln t$, $y = \sqrt{t}$, $t \geq 1$

e) $x = \frac{20t}{4+t^2}$, $y = \frac{5(4-t^2)}{4+t^2}$.

f) $x = 3\sec t$, $y = 4 \tan t \sec t$.

g) $x = 3\sqrt{t-2}$ y $y = 2\sqrt{4-t}$

h) $x = \frac{3t^2}{1+t^3}$ y $y = \frac{3t}{1+t^3}$ (implicita)

102. ((Ex)) Encuentre la ecuación cartesiana de las rectas tangente y normal a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2 + 1$ y $y = t^3 + 2t$, en el punto donde $t = -2$. $L_T: 7x + 2y - 11 = 0$, $L_N: 2x - 7y - 94 = 0$

103. Determine dy/dx y d^2y/dx^2 . ¿Para qué valores de t la curva es cóncava hacia arriba?

a) $x = t + \ln t$, $y = t - \ln t$

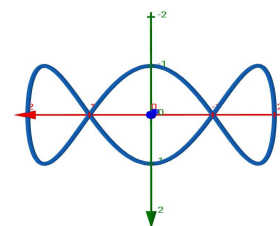
b) $x = 4 + t^2$, $y = t^2 + t^3$

104. Encuentre los puntos de las siguientes la curva donde la tangente es horizontal y vertical.

a) $x = 10 - t^2$, $y = t^3 - 12t$

b) $x = \cos 3\theta$, $y = 2 \sin \theta$

105. ((Ex))** Calcular el área de la región encerrada por la curva paramétrica $C(t) = (2 \cos(t), \sin(3t))$ (ver figura)

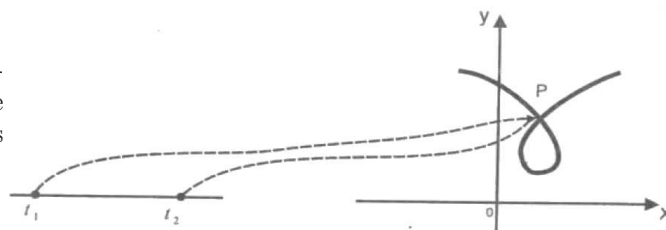


106. Encuentre el área acotada por la curva

a) $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje y .

b) $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$ y eje x

Definición: Se dice que una curva dada en ecuaciones paramétricas presenta un **lazo** (es decir, se interseca a sí misma) si a dos valores $t_1 \neq t_2$ les corresponde un mismo punto P .



107. ((Ex)) Halle las coordenadas cartesianas del punto en el cual la curva cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^3 + 2t^2$ y $y = t^3 - t$, $t \in \mathbb{R}$ presenta un lazo. Sol: $t_1 = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{13})$ y $P(\frac{9}{8}, -\frac{7+\sqrt{13}}{16})$

108. Dada la curva parametrizada $x = a \cos^3 t$ y $y = a \sin^3 t$ con $a > 0$ y $0 \leq t \leq 2\pi$.

- a) Comprobar que sus puntos críticos son $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ y $t = 2\pi$; Completar la siguiente tabla

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y = h(x)$
$\langle 0; \pi/2 \rangle$ $\langle \pi/2; \pi \rangle$ $\langle \pi; 3\pi/2 \rangle$ $\langle 3\pi/2; 2\pi \rangle$	$\langle 0; a \rangle$	$\langle 0; a \rangle$	-	decreciente

- b) Tangentes verticales y horizontales

- c) Comprobar que los puntos críticos de inflexión son: $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ y $t = 2\pi$; Complete la siguiente tabla:

Intervalo para t	Signo de $\frac{d^2x}{dx^2}$	Concavidad para $y = h(x)$
$\langle 0; \pi/2 \rangle$ $\langle \pi/2; \pi \rangle$ $\langle \pi; 3\pi/2 \rangle$ $\langle 3\pi/2; 2\pi \rangle$	+	∪

- d) Hacer un bosquejo de la gráfica con esta información encontrada.

109. ((Ex)) Dada la curva paramétricas $x = t + \frac{1}{t}$ y $y = t^3 - 3t$. Halle

a) Asintotas

b) Comprobar que sus puntos críticos son $t = 0$ y $t = \pm 1$; Completar la siguiente tabla

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y = h(x)$
$\langle -\infty; -1 \rangle$ $\langle -1; 0 \rangle$ $\langle 0; 1 \rangle$ $\langle 1; +\infty \rangle$	$\langle -\infty; -2 \rangle$	$\langle -\infty; 2 \rangle$	+	crece

c) Tangentes verticales y horizontales

d) Comprobar que los puntos críticos de inflexión son: $t = -1$, $t = 0$ y $t = 1$; Complete la siguiente tabla:

Intervalos para t	Signo de $\frac{d^2x}{dx^2}$	Concavidad para $y = h(x)$
$\langle -\infty; -1 \rangle$ $\langle -1; 0 \rangle$ $\langle 0; 1 \rangle$ $\langle 1; +\infty \rangle$	-	\cap

e) Hacer un bosquejo de la gráfica con esta información encontrada.

110. Dada la curva paramétricas $x = \frac{3t}{1+t^3}$ y $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$. Halle

a) Asintotas **Oblicua:** $y = -x - 1$

b) Comprobar que sus puntos críticos son $t = 0$, $t = \sqrt[3]{1/2}$ y $t = \sqrt[3]{2}$; Completar la siguiente tabla

Intervalo para t	Intervalo para x	Intervalo para y	Signo de $\frac{dy}{dx}$	Crecimiento de $y = h(x)$
$\langle -\infty; -1 \rangle$ $\langle -1; 0 \rangle$ $\langle 0; \sqrt[3]{1/2} \rangle$ $\langle \sqrt[3]{1/2}; \sqrt[3]{2} \rangle$ $\langle \sqrt[3]{2}; +\infty \rangle$	$\langle 0; +\infty \rangle$ $\langle -\infty; 0 \rangle$	$\langle -\infty; 0 \rangle$	-	decrece

c) Tangentes verticales y horizontales

d) Hacer un bosquejo de la gráfica con esta información encontrada.

111. ((Ex))Haga un estudio completo (similar a los punto anteriores) a la curva paramétrica dada por $x = t^2 - 2t$ y $y = t^3 - 12t$