Concepto de la Integral

((Este material ha sido seleccionado de diferentes libros de cálculo integral))

Los puntos en (*) son los puntos recomendados, y (**) son puntos con dificultad especial.

1. Encuentre las antiderivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})^2$

   b) $m(s) = s^{5/2} - \dfrac{5}{s^4}$

   c) $i(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^3 + 5}{7x^2}$

   d) $f(x) = \text{sech}^2 x$

   e) $f(x) = \text{csch}^2 x$

   f) $d(t) = 4\text{sen}(2\pi t) - 2\text{sen}(4\pi)$

   g) $n(x) = 3e^x + 7sec^2 x$

   h) $l(u) = \text{sen}\, u + 2\,\text{senh}\, u$

   i) $v(x) = \dfrac{\text{senh}\, x}{\cosh^2 x}$

   j) $q(x) = \sqrt[3]{x}(x-4)$

   k) $r(\theta) = 2 + \tan^2\theta$

2. La antiderivada de $x\,\text{sen}\, x$ es

   a) $\dfrac{x^2}{2}\,\text{sen}\, x + C$

   b) $-x\cos x + C$

   c) $-x\cos x + \text{sen}\, x + C$

3. La antiderivada de $\tan x \sec^2 x$ es

   a) $\dfrac{\sec^3 x}{3} + C$

   b) $\dfrac{1}{2}\tan^2 x + C$

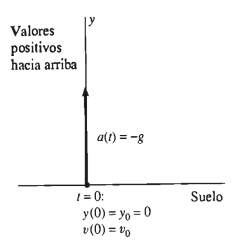
   c) $\dfrac{1}{2}\sec^2 x + C$

4. * Muestre que las funciones claramente distintas $F_1(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y $F_2 = \dfrac{x}{1-x}$ son ambas primitivas de $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. ¿Cuá1 es la relación entre $F_1(x)$ y $F_2(x)$?

5. Use las identidades $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ y $\text{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ para determinar las primitivas de $f(x) = \text{sen}^2 x$ y $f(x) = \cos^2 x$.

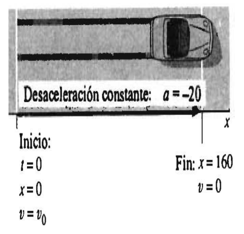
6. Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 $pies/seg$ a partir de una altura inicial de 80 $pies$.

   - Encontrar la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t.
   - ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?



7. Suponga que se dispara una flecha en sentido vertical mediante una poderosa ballesta, desde el piso, y que vuelve a tocar el suelo 48 segundos después. Si podemos despreciar la resistencia del aire, determinar la velocidad inicial de la flecha y la altura máxima que alcanza.

8. * Las narcas de derrape de unos neumáticos indican que se han aplicado los frenos durante una distancia de 160 $pies$ antes de detenerse el automóvil. Supongamos que el automóvil en cuestión tiene una desaceleración constante de 20 $pies/seg^2$ bajo las condiciones del derrape. A qué velocidad viajaba el auto cuando se comenzó a frenar?

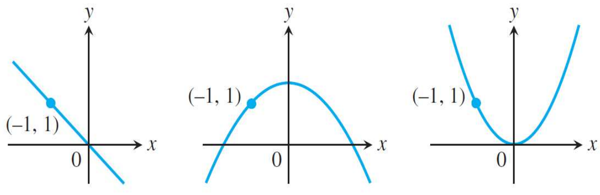


9. Resuelva los problemas con condiciones iniciales

   a) $\dfrac{dy}{dx} = (x-2); \quad y(2) = 1$

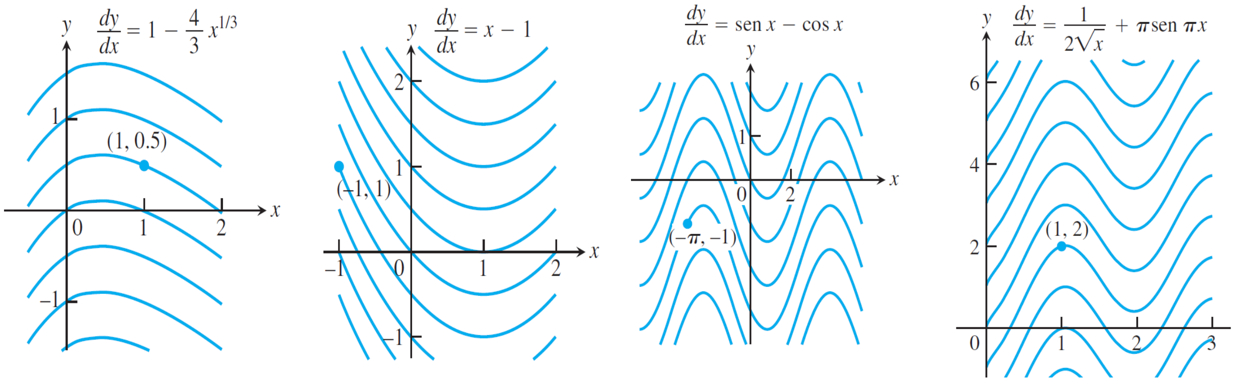
   b) $\dfrac{dy}{dx} = (2x+3)^{3/2}; \quad y(3) = 100$

10. ¿Cuál de las siguientes gráficas muestra la solución del problema de valor inicial $\dfrac{dy}{dx} = -x$, $y(-1) = 1$



(a) (b) (c)

11. Las gráficas (abajo) muestran las curvas solución de las ecuaciones diferenciales. Encuentre, en cada gráfica, una ecuación para la curva que pasa por el punto marcado.



12. *En la Figura 2 se ilustra la gráfica de la derivada f' de una función f. Determine.

   a) ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?

   b) ¿Para qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?

   c) Trace la gráfica de f''.

   d) Trace la gráfica posible de f.

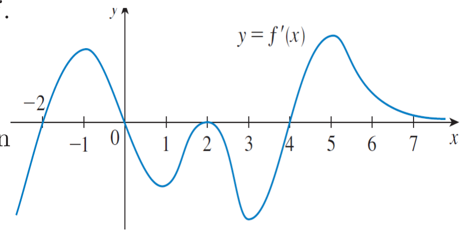
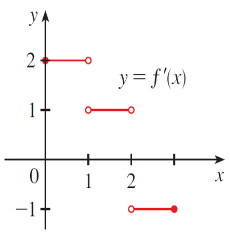
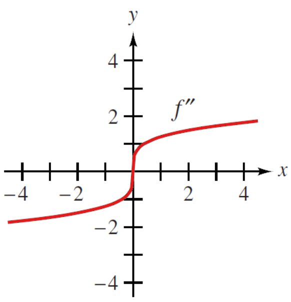


Fig. 2

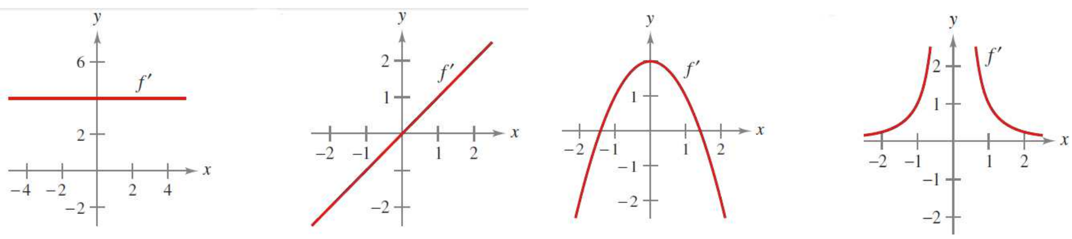




13. En la figura (izquierda) se muestra la gráfica de $f'(x)$. Dibuje la gráfica de $f(x)$ si ésta es continua y $f(0) = -1$.

14. Usar la gráfica de $f''(x)$ mostrada en la Figura (derecha) para bosquejar la gráfica de $f(x)$ y $f'(x)$ que pasan a través del origen.

15. Dibujar las gráficas de dos funciones que tengan la derivada señalada.



16. Encontrar una función g tal que la gráfica de ésta tenga una tangente horizontal en $(2, 0)$ y $g''(x) = 2x$.

17. * Halle la ecuación de la curva para el cual $y'' = \dfrac{4}{x^3}$ y que es tangente a la recta $2x + y = 5$ en el punto $(1, 3)$. SOL: $y = \frac{2}{x} + 1$

18. Si $f'(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 2 \\ 3x, & 2 \le x \le 5 \end{cases}$ f es continua y $f(1) = 3$ determinar f, ¿Es diferenciable en $x = 2$?

19. * (M-Interesante) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(0)=2, \qquad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x\in(-\infty,1) \\ e^x & x>1 \end{cases} \qquad SOL: f'(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le 0 \\ x+2, & 0<x\le 1 \\ e^x+e-3, & x>1 \end{cases}$$

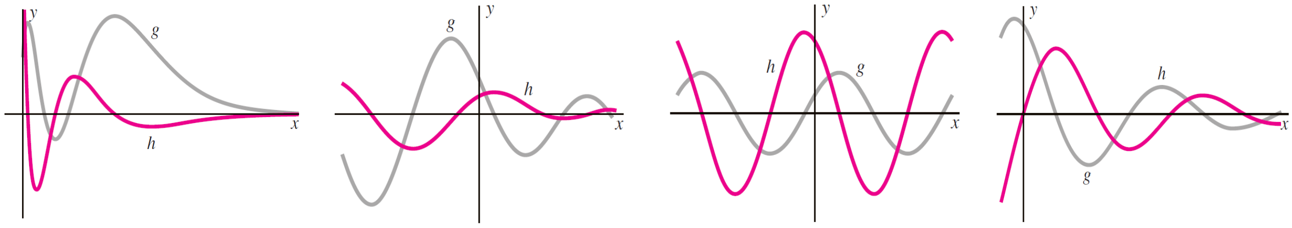
Determine $f(x)$.

20. *(M-Interesante) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(0)=-\frac{\pi}{2}, \qquad f'(x)=\frac{x+|1-x|}{x^2+1}$$

Halle $f(x)$ SOL: $f(x)=\begin{cases} \arctan x-\frac{\pi}{2}, & x\le 1 \\ \ln(x^2+1)-\arctan x-\ln 2, & x>1 \end{cases}$

21. En las siguientes gráficas determine que función quien hace el papel de función y de antiderivada.



22. Usar la gráfica de f' que se muestra en la Fig 4 para responder lo siguiente, dado que $f(0)=-4$.

    a) Aproximar la pendiente de f en $x=4$. Explicar.

    b) ¿Es posible que $f(2)=-1$? Explicar.

    c) ¿Es $f(5)-f(4)>0$? Explicar.

    d) Aproximar el valor de x donde f es máxima. Explicar.

    e) Aproximar cualquier intervalo en el que la gráfica de f es cóncava hacia arriba y cualquier intervalo en el cual es cóncava hacia abajo.

    f) Aproximar la coordenada x a cualquier punto de inflexión.

    g) Aproximar la coordenada x del mínimo de $f''(x)$.

    h) Dibujar una gráfica aproximada de f.

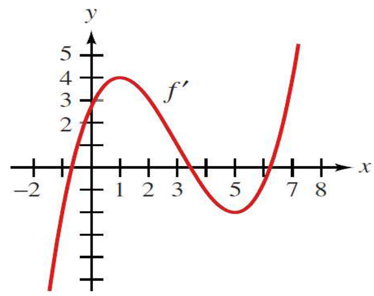


Fig 4

23. * Sean $s(x)$ y $c(x)$ dos funciones que satisfacen $s'(x)=c(x)$ y $c'(x)=-s(x)$ para todo x. Si $s(0)=0$ y $c(0)=1$. Demostrar que $[s(x)]^2+[c(x)]^2=1$ **Ayuda:** Considere la función $H(x)=c(x)^2+s^2(x)$ y demuestre que $H(x)$ es constante.

Sumas de Riemann

24. Desarrollando las siguientes sumas $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2-(i-1)^2$, $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3-(i-1)^3$ y $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^4-(i-1)^4$ demuestre respectivamente que

    a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$ * *b*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *c*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

25. Usando inducción (o usando la fórmula de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(r^k-r^{k-1})$) demuestre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

26. Determine las sumas de Riemann para la función indicada y una partición regular del intervalo dado en n subintervalos. Utilice tomando los puntos muestra c_i como los extremos derechos de cada intervalo.

a) $f(x) = 2x + 3$ en $[0, 3]$ $n = 6$.
b) $f(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ en $[2, 3]$ $n = 5$.
c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 6]$, $n = 5$
d) $f(x) = 9 - x^2$ en $[0, 3]$ $n = 10$
e) $f(x) = x^3 - 3x$ en $[1, 4]$ $n = 5$
f) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $[0, \pi]$, $n = 4$.

27. Usando sumas de Riemann calcule el área de las siguientes regiones limitados por

a) * $y = 2\sqrt{x}$, en $[0, 9]$. Res:/ 36
b) * $f(x) = e^x$ en $[0, 4]$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ en $[1, 2]$ **ayuda:** Elija puntos muestra a $c_i = \sqrt{x_{i-1}x_i}$, y use la identidad $\dfrac{1}{m(m+1)} = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m+1}$
d) $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en $[0, 1]$ **ayuda:** Elija puntos muestra a $c_i = \frac{i^3}{n^3}$

28. *Exprese los límites como una integral definida sobre un intervalo adecuado o el señalado

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\Delta x_i$ en $[2, 6]$
b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i^2}$
c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3(1 + i/n)}}$
d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+i}}$
e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4}$
f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$
g) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1} \frac{i^2}{n^3}$

29. A partir de la interpretación geométrica halle el valor $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$ y $\displaystyle\int_{0}^{5} \sqrt{25 - x^2}dx$

30. Encuentre las constantes a y b que maximizan el valor $\displaystyle\int_{a}^{b} (4 - x^2)dx$. Explique el razonamiento

31. Emplear fórmulas geométricas para calcular $\displaystyle\int_{0}^{8} f(x)dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 4 \\ x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

32. La gráfica f está compuesta por segmentos de recta y un semicírculo, como se muestra en la figura 3. Evalúe cada integral definida utilizando fórmulas geométricas

a) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx$
b) $\displaystyle\int_{2}^{6} f(x)dx$
c) $\displaystyle\int_{-4}^{6} f(x)dx$
d) $\displaystyle\int_{-4}^{2} f(x)dx$
e) $\displaystyle\int_{-4}^{6} |f(x)|dx$
f) $\displaystyle\int_{-4}^{6} [f(x) + 2]dx$

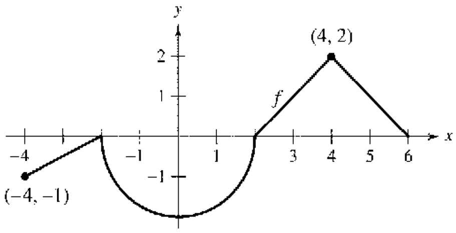


Fig 3

33. *Usando la gráfica de la Fig 5. Se define la función $g(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} f(t)dt$

a) Encuentre $g(1)$, $g(3)$ y $g(-1)$
b) Halle los $x \in (-3, 4)$ donde g tiene un máximo relativo.
c) Escriba una ecuación para la recta tangente a la gráfica de g en $x = 1$.
d) Halle los x donde g tiene un punto de inflexión.
e) Encuentre el rango de g.

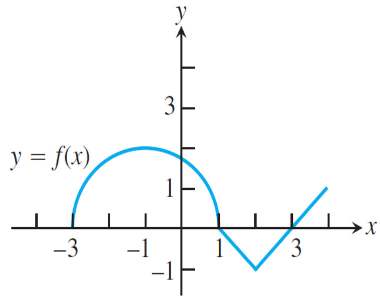
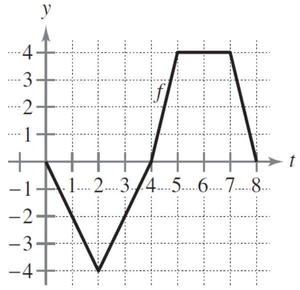


Fig 5

34. Sea $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, donde f es una función cuya gráfica se muestra en la figura.



a) Estimar $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$, $g(6)$ y $g(8)$.

b) Encontrar el intervalo abierto más grande en el cual g esté creciendo. Determinar el intervalo abierto más grande en el que g decrezca.

c) Identificar cualesquiera extremos de g.

d) Dibujar una gráfica sencilla de g.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

35. Calcular cada una de las siguientes integrales. Hacer la gráfica en cada caso

a) $\int_0^2 f(x)dx, \quad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } 0\le x\le 1\\ 2-x & \text{si } 1<x\le 2\end{cases}$ *b)* $\int_1^3 f(x)dx \quad f(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si } -1\le x<0\\ x^2 & \text{si } 0\le x<2\\ -1 & \text{si } 2\le x\le 3\end{cases}$

36. Encontrar la integral indefinida y definidas

a) $\int \frac{\cos x}{1-\cos^2 x}$

b) $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x}dx$

c) $\int \frac{x^3+x^{3/2}+10}{x^{3/4}}dx$

d) $\int_0^1 (x+1)(x^2+x)dx$

e) $\int 4\sec^2 x+5(4^x)-6\csc x\cot x dx$

f) $\int_1^2 \frac{u^2+1}{u^2}du$

g) $\int \tan^2 x dx$

37. Suponga que $f(x)=\frac{d}{dx}\big(1-\sqrt{x}\big)$ y que $g(x)=\frac{d}{dx}\big(x+2\big)$. Encuentre: $\int [f(x)-g(x)]dx$

38. Encuentre todos los valores c que hacen cumplir las siguientes igualdades

a) $\int_0^c x(1-x)dx=0$. R: 0, $\frac{3}{2}$ *b)* $\int \frac{2}{2x+1}dx=2\ln(c)$ *c)* $\int_{-\pi+c}^{\pi+c}\cos(2x)dx=\int_{-\pi+c}^{\pi+c}\operatorname{sen}(2x)dx$

39. El área A entre la gráfica de la función $g(t)=4-\frac{4}{t^2}$ y el eje t sobre el intervalo $[1,x]$ es

$$A(x)=\int_1^x \Big(4-\frac{4}{t^2}\Big)dt$$

a) Determinar la asíntota horizontal de la gráfica de g.

b) Integrar para encontrar A como una función de x. ¿La gráfica de A tiene una asíntota horizontal? Explicar.

40. * Encuentre los valores de b tales que el valor promedio de $f(x)=2+6x-3x^2$ en el intervalo $[0,b]$ sea 3:

41. Hallar un polinomio cuadrático para el cual $P(0)=P(1)=0$ y $\int_0^1 P(x)dx=1$

42. * Halle un polinomio cúbico tal que $P(0)=P(-2)=0$, $P(1)=15$ y $3\int_{-2}^0 P(x)dx=4$

43. Calcule

$$\int_0^1 |x(2x-1)|dx \qquad * \int_{-4}^4 |x^2+x-6|dx \qquad \int_{-1}^{-1}\frac{|x|}{1+x^2}dx$$

44. * Calcule $f(4)$ en cada uno de los casos

$$(a)\quad \int_0^{x^2} f(t)dt=x\cos(\pi x) \qquad\qquad (b)\quad \int_0^{f(x)} t^2dt=x\cos(\pi x)$$

45. Sea f es continua. Calcule $f(2)$ en cada uno de los casos

$$a)\quad \int_0^x f(t)dt = x^2(1+x) \qquad\qquad b)\quad \int_0^{x^2(1+x)} f(t)dt = x$$

46. Suponga que f es continua en $\mathbb{R}$, tal que $f(3x) = 5f(x)$ y si $\int_0^1 f(s)ds = 1$. Calcule $\int_0^3 f(s)ds$

47. * Encuentre una función f y una constante c que satisfagan

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$$

48. Escriba $\int_{-2}^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx - \int_{-2}^{-1} f(x)dx$ como una sola integral $\int_a^b f(x)dx$:

49. Si $\int_1^5 f(x)dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)dx = 36$ encuentre $\int_1^4 f(x)dx$

50. *Sea $f : [-6, 6] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f es impar y $\int_{-6}^{-2} f(x)dx = 3$, halle $\int_2^6 (f(x) - 2x)dx$. Sol: -35

51. Sea $f : [-6, 6] \to \mathbb{R}$ una función continua y $g : [-6, 6] \to \mathbb{R}$ una función impar continua, tal que $\int_{-6}^0 f(x)dx = 10$ y $\int_0^6 g(x)dx = -2$. Halle $\int_{-6}^0 f(x) + 5g(x)dx$.

52. * Determine si el siguiente razonamiento es correcto

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t dt = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t dt) = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2 t}(-\operatorname{sen} t dt) \overset{u=\cos u}{=} -\int_0^0 \sqrt{1-u^2}du = 0$$

53. Evaluar, si es posible, la integral $\int_0^2 (2 + \lfloor x \rfloor)dx$ donde $\lfloor x \rfloor$ es la función parte entera

54. Usar el TFC para encontrar $F'(x)$ de las siguientes funciones

$a)$ $*F(x) = \int_a^{\int_0^{x^3} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}dt} \cos^2(y^2+4)dy$

$b)$ $*\ F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du$

$c)$ $F(x) = \int_2^{x^2} \cos(t)dt$

$d)$ $*F(x) = \int_{x^2}^{e^x} x(t^2-1)dt$

$e)$ $F(x) = \int_a^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\arcsin r} dr$

$f)$ $F(x) = \int_{1/x}^x \frac{1}{t}dt$

$g)$ $F(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1-t^2}dt$

$h)$ $F(y) = \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \operatorname{sen}(t^2)dt$

$i)$ $F(x) = \int_x^{x^2+3} t(5-t)dt$

$j)$ $*F(x) = \operatorname{sen}\Big[\int_0^x \Big(\int_0^y \operatorname{sen}^3 t dt\Big)dy\Big]$

55. *Si $\int_0^{\frac{1}{3x+1}} f(t)dt = \frac{2}{ax} + ax$, calcule los valores de a de modo que $f(\frac{1}{4}) = \frac{16}{3}$

56. **Sea $F(x) = \int_{\sqrt{3}}^{\operatorname{arc\,sen}(\cos x)} f(\operatorname{sen} t)dt = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{sen} t}}$ y $G(x) = \int_{\sqrt{2}}^{\operatorname{sen} x} \sqrt{g(t)}dt = \sqrt{1-\cos x}$. Halle $H'(x)$ si $H(x) = \int_{g(x)(1-\sqrt{1-x^2})}^{f(1)} \frac{1}{t^2}dt$. $R/ -\frac{8}{x^3}$

57. * Si $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$, donde $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]dt$, encuentre $f'(\pi/2)$

58. *Encuentre $\dfrac{d^2}{dx^2}\int_0^x \Big(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}du\Big)dt$

59. * Sea L_1 una recta tangente a la curva $C : y = g(x)$ en el punto $P(2,3)$. Además, la recta L_1 pasa por el punto $Q(10,7)$ que no está en la curva C. Si $f(x) = \int_1^{g(x)} \sqrt{t^2+7}dt$, halle $f'(2)$. R/ =2

60. Sea f una función continua tal que $\int_0^x tf(t)dt = x\operatorname{sen}x - \cos x$. Calcula $f(\pi/2)$ y $f'(\pi/2)$.

61. *Una función f está definida para todo real x por la fórmula

$$f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen}(t)}{2+t^2}dt$$

Halle un polinomio cuadrático $p(x) = a + bx + cx^2$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ y $p''(0) = f''(0)$

62. *Sea g continua para todo x, tal que $g(1) = 5$ y $\int_0^1 g(t)dt = 2$. Suponga que $f(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$, demostrar que

$$f'(x) = x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt$$

y calcule $f''(1)$ y $f'''(1)$.

63. * Halle una función f y un número a tal que $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$

64. Sin integrar, explicar por qué $\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^2 dx = 0$

65. Si $f(x) \geq 0$, $b > 1$ y $\int_1^b f(x)dx = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{2}$. Halle $f(x)$.

66. Encontrar la función $f(x)$ y todos los valores de c, tal que $\int_c^x f(t)dt = x^2 + x - 2$.

67. Sea f es continua para todo t real. Considere $G(x) = \int_0^x s\Big[\int_0^s f(t)dt\Big]ds$. Halle
    - $G(0)$
    - $G'(0)$
    - $G''(x)$.

68. * Verifique que la función $y = \operatorname{sen} x + \int_x^{\pi} \cos(2t)dt + 1$ satisface las siguientes dos condiciones:

    a) $y'' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(2x)$

    b) Cuando $x = \pi$ $y = 1$ y $y' = -2$.

69. *Encuentre $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}dt$

70. Calcular el área acotada por el eje x y la parábola $y = 6 - x - x^2$

71. Determinar el valor medio de $f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1,4]$

72. * Sabiendo que $x > 9$, resuelva la ecuación:

$$\int_9^x \frac{16}{\sqrt{t}(16-t^2)}dt = \frac{2\pi}{3} + \ln\Big(\frac{2+\sqrt{x}}{5\sqrt{x}-10}\Big) - 2\arctan\frac{3}{2} \qquad \textit{sol} : x = 12$$

73. * Encuentre el área de las regiones sombreadas de la figura 6,

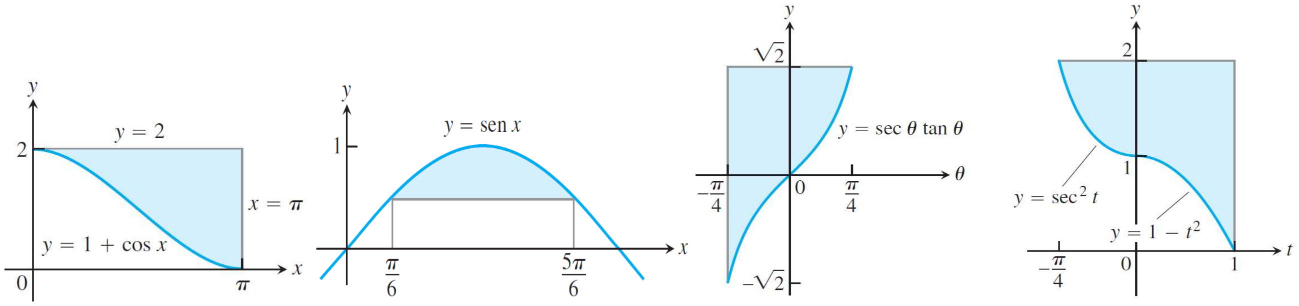


Fig 6

74. Trace la gráfica de $F(x) = \int_0^x 2te^{-t^2}dt$, $x \in \mathbb{R}$. Hallando el dominio, las intersecciones con el eje x, los intervalos de crecimiento-decrecimiento, mínimos-máximos, puntos de inflexión, concavidades, asíntota.

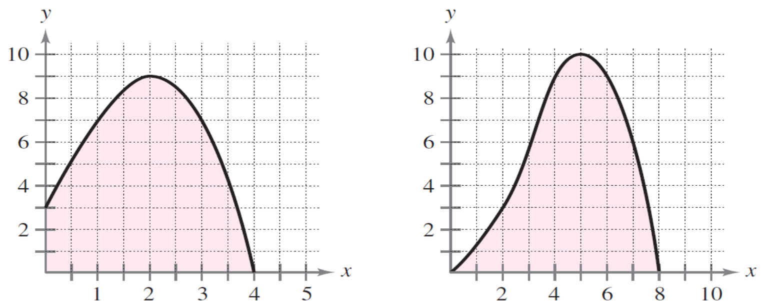
75. Reglas del Trapecio y regla de Simpson

   a) Use (a) la regla del trapecio, (b) la Regla de Simpson para aproximar la integral con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.)

   1) $\int_1^2 \frac{\ln x}{1+x}dx, \quad n = 10$ 3) $\int_1^4 (4-x^2)dx, \quad n = 6$ 5) $\int_0^3 \frac{1}{1+y^5}dy, \quad n = 6$

   2) $\int_1^5 \frac{\cos x}{x}dx, \quad n = 8$ 4) $\int_4^9 \sqrt{x}dx, \quad n = 8$

   b) *Aproximar el área de la región sombreada utilizando a) la regla de los trapecios y b) la regla de Simpson con $n = 4$.



76. En cada caso, aproxime $\int_a^b f(x)\,dx$ por las reglas del trapecio y de Simpson, con $n = 10$.

   a) $\int_0^{1/2} \cos(e^x)\,dx$

   b) $\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx$

   c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   $[a,b] = [0,1]$

77. Halle dos aproximaciones de $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$, una con la regla del trapecio y la otra con la regla de Simpson, con errores menores que 10^{-3}.

*TEST RÁPIDO (Verdadero o falso)

1. ___ Si $f(x) = 3x^2 + 2x$, entonces $f(x) = x^3 + x^2$

2. ___ $\sum_{k=2}^{6}(2k-3) = \sum_{j=0}^{4}(2j+1)$

3. ___ $\sum_{k=1}^{40} 5 = \sum_{k=1}^{20} 10$

4. ___ Si f es integrable, entonces f es continua
5. ___ $\int_0^1 (x-x^3)dx$ es el área bajo la gráfica $y = x - x^3$ de sobre el intervalo $[0,1]$
6. ___ Si $\int_a^b f(x)dx > 0$ entonces $\int_a^b f(x)dx$ es el área bajo la gráfica de f sobre $[a,b]$.
7. ___ Si P es una partición de $[a,b]$ en n subintervalos, entonces $n \to \infty$ implica $\|P\| \to 0$.
8. ___ $\int_{-1}^1 |x|dx = 2\int_0^1 xdx.$
9. ___ La función $F(x) = \int_{-5}^{2x} (t-4)e^{-t}dt$ es creciente sobre el intervalo $[-2,\infty)$
10. ___ Si f es continua en $[1,3]$ y $\int_1^3 f(x)dx = 8$ entonces f toma el valor 4, por lo menos una vez en el intervalo $[1,3]$.
11. ___ Si $\int_0^1 f(x)dx = 4$ y $f(x) \geq 0$, entonces $\int_0^1 \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{4} = 2$?
12. ___ Cada antiderivada de una función polinómica de grado n es un función polinómica de grado $n+1$
13. ___ Si $p(x)$ es un polinomio entonces p tiene exactamente una antiderivada cuya gráfica contiene el origen.
14. ___ Si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x) + C$.
15. ___ $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx.$
16. ___ $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sec^2 xdx = \tan x\Big|_{\pi/4}^{3\pi/4} = -2$
17. ___ Las primitivas son únicas.
18. ___ Si la norma de una partición tiende a cero, entonces el número de subintervalos tiende a infinito.
19. ___ El valor de $\int f(x)dx$ debe ser positivo.
20. ___ $\int_{-2}^1 \frac{2}{x^3}dx = -\frac{1}{x^2}\Big|_{-2}^1 = -\frac{3}{4}$
21. Llene los espacios

    a) Si $\int f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$ entonces $f(x) =$ ______

    b) $\int \frac{d}{dx}x^2 =$ ______ $\qquad \frac{d}{dx}\int_{5x}^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt =$ ______

    c) Si el intervalo $[1,6]$ se parte en cuatro subintervalos determinados por $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$, $x_3 = 5$ y $x_4 = 6$, la norma de la partición es ___

    d) Si P es una partición de $[0,4]$ y x_k^* es un número en el k-ésimo subintervalo, entonces $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k^*}\Delta x_k$ es la definición de la integral definida ________. Por el teorema fundamental del cálculo, el valor de esta integral definida es ________

    e) Para $t > 0$, el área neta con signo $\int_0^t (x^3 - x^2)dx = 0$ cuando $t =$ ___

    f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\text{sen}^{10}(t)}{16t^7+1}dt =$ ________

Técnicas de Integración

((CHIC@S LLEGÓ LA AHORA DE DEMOSTRAR QUE ESTÁN
A OTRO NIVEL, Y QUE SON LOS MEJORES...))

1. * Suponga que f tiene una derivada positiva para todos los valores de x, y que $f(1) = 0$ ¿Cuáles de los siguientes enunciados son VERDADEROS para la función

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Justifique sus respuestas.

   a) g es una función diferenciable de x.
   b) g es una función continua de x.
   c) g tiene un máximo local en $x = 1$
   d) g tiene un mínimo local en $x = 1$
   e) La gráfica de g tiene un punto de inflexión en $x = 1$
   f) La gráfica de g tiene una tangente horizontal en $x = 1$
   g) La gráfica $\dfrac{dg}{dx}$ de cruza el eje x en $x = 1$

2. Suponga que f es la función diferenciable Fig 1, y que la posición en el tiempo t (seg) de una partícula que se mueve a lo largo de un eje coordenado es $s(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx$ metros. Use la gráfica para contestar las siguientes preguntas. Justifique sus respuestas.

   - ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = 5$?
   - ¿La aceleración de la partícula en el tiempo $t = 5$ es positiva o negativa?
   - ¿Cuál es la posición de la partícula en el tiempo $t = 3$?
   - ¿En qué momento durante los primeros 9 segundos alcanza s su valor máximo?
   - ¿Aproximadamente en qué momento la aceleración es cero?
   - ¿Cuándo se está moviendo la partícula hacia el origen? ¿Cuándo lo hace alejándose del origen?
   - ¿En qué lado del origen está la partícula en el tiempo $t = 9$?

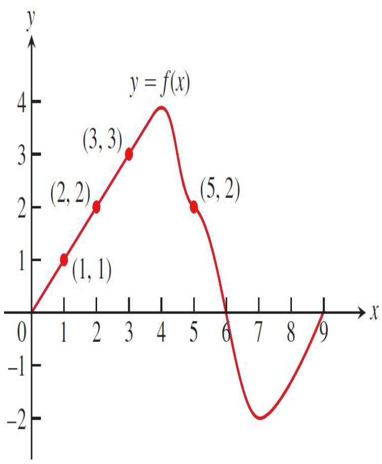


Fig. 1

3. * Demuestre que $\displaystyle\int_0^n \lfloor x \rfloor\, dx = \frac{n(n-1)}{2}$ **Ayuda:** Inducción

4. Demostrar que $\displaystyle\int_0^x |t|dt = \frac{1}{2}x|x|$ para todo real x real

5. * Pruebe que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^m \theta \operatorname{sen}^m \theta\, d\theta = 2^{-m} \int_0^{\pi/2} \cos^m \theta\, d\theta.$

6. Explique la aparente contradicción

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\cot x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cot x \cos x} \qquad (Sea\ u = \cot x \quad dv = \sec^2 x),$$
$$= \cot x \tan x - \int \tan x(-\csc^2 x)dx = 1 + \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

quiere decir esto que $1 = 0$? Explique matemáticamente.

INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN (SIMPLES)

7. *Calcule las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{senh} t \cosh t}{(1+\operatorname{senh}^2 t)^5}dt$

b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{m})}{\sqrt{m-m^2}}dm$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-2)^4}dx$

d) $\displaystyle\int x\sqrt{1+3x}\ dx$

e) $\displaystyle\int \frac{z^3}{\sqrt{1-z^2}}dz$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x^2}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x+2x^2+x^3}}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(1-4s)}ds$

j) $\displaystyle\int (\ln r+1)e^{r\ln r}dr$

k) $\displaystyle\int \frac{dw}{w\ln^2 w}$

l) $\displaystyle\int 4^w e^w dw$

m) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2x+1)^{1/5}}{1-x}dx$

n) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{w}}3^{e^{\sqrt{w}}}}{\sqrt{w}}dw$

ñ) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^m-1}}dm$

o) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-8}dx$

p) $\displaystyle\int \frac{2-x^2}{x^3-6x+1}dx$

q) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

r) $\displaystyle\int \frac{x-\arctan(2x)}{1+4x^2}dx$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$

t) $\displaystyle\int_0^2 (x^2-\lfloor x\rfloor)dx$

u) $\displaystyle\int_{-1}^2 z\operatorname{sen}(\frac{\pi z^2}{4})dz$

v) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{u^3+u}{(u^4+2u^2+1)^5}du$

8. Integrales por sustitución INTERESANTES* **((En ciertos casos, es necesario realizar algunas operaciones en el integrando para que el cambio de variable sea más fácil de realizar.))**

- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{e^x-1}\,e^{\arctan x}+\ln\left[(1+x^2)^{\sqrt{x^2e^x-x^2}}\right]+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{e^x+x^2e^x-x^2-1}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$
- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}y\ e^{\tan^2 y}}{\cos^3 y}dy$
- $\displaystyle\int \frac{x}{e^{3x}(1-x)^4}dx$
- $\displaystyle\int \frac{2^x3^{x+1}}{5^{x+2}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{1-\operatorname{sen} x}dx$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos(10x)}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{2^w+3}dw$
- $\displaystyle\int \frac{\ln(3x)}{x\ln(5x)}dx$
- $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{e^{-x}+e^x}dx$
- $\displaystyle\int \sqrt{1+\operatorname{sen}x}dx$
- $\displaystyle\int x^{2\operatorname{sen}x-1}(\operatorname{sen}x+x\cos x\ln x)dx$
- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(8x)}{9+\operatorname{sen}^4(4x)}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\cos^2 w(\tan^2 w+1)}{(\operatorname{sen}w+\cos w)^2}dw$
- $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\sec z-\tan z}{\sec z+\tan z}}dz$
- $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\ln z}{z^3(\ln z-1)^3}dz$
- $\displaystyle\int (4-3\ln x)^4 d(\ln x)$
- $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{e^x+2}}{e^x+6}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{\operatorname{sen}(2x)}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}dx$
- $\displaystyle\int \frac{4}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\cos(\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\theta+1}}{\operatorname{sen}\theta+2}d\theta$
- $\displaystyle\int \frac{5x^2+20x-24}{\sqrt{5+x}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^3}dx$
- $\displaystyle\int \frac{e^x\sqrt{e^{2x}-4}-2e^{2x}(e^x+2)}{2(e^x+2)\sqrt{e^{2x}-4}}dx$

9. (Bonita) Calcule $\int \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos(5\sqrt{x}+4)}}}\, x^{-1/2}dx$, $R_{(ad)}:\frac{32}{5}\text{sen}\Big(\frac{5\sqrt{x}+4}{8}+C\Big)$

10. A partir de sustituciones apropiadas demuestre que

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f\big(a+(b-a)x\big)dx$

b) $\displaystyle\int_a^b f(c-x)dx=\int_{c-b}^{c-a} f(x)dx$

c) $\displaystyle\int_{ka}^{bk} f(\frac{x}{k})dx=k\int_a^b f(x)dx$ con $k>0$

d) $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{1/x}\frac{dt}{1+t^2}$ para $x>0$

e) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

f) $\displaystyle\int_a^b f(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}\Big([f(b)]^2+[f(a)]^2\Big)$

g) Si f es continua y $\displaystyle\int_0^8 f(x)dx=32$. Halle $\displaystyle\int_0^4 f(2x)dx$.

h) Demostrar que si f es continua en $[0,a]$ entonces $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$. Use esto para hallar la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan\theta)d\theta$ $R=\frac{\pi}{8}\ln 2$

i) Si f es función par y continua en $[-a,a]$, entonces $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

j) *Si f es función impar y continua en $[-a,a]$, entonces $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx=0$. Use esto para calcular

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^9\cos x+\sqrt[7]{\tan x}+\operatorname{sen} x e^{\cos^2 x}+\cos^2 x dx \qquad Res_{(p+i)}=\frac{\pi+2}{4}$$

k) *Si f es continua entonces $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\text{sen}x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\text{sen}x)dx$ **Ayuda** $u=\pi-x$. Use esto y calcule

$$\int_0^{\pi}\frac{x\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx \qquad R_{(en)}=\frac{\pi^2}{4}$$

l) *Si f continua en el intervalo $[0,b]$ donde $f(x)+f(b-x)\neq 0$ en $[0,b]$ entonces

$$\int_0^b \frac{f(x)}{f(x)+f(b-x)}dx=\frac{b}{2}.$$

Utilizar este resultado para calcular las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_0^1\frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(1-x)+\text{sen}(x)}dx$ *b*) $\displaystyle\int_0^3\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{3-x}}dx$

11. * **INTEGRALES POR PARTES** (en algunos casos es conveniente hacer primero una sustitución)

a) $\displaystyle\int\frac{\ln t}{t\sqrt{t}}dt$

b) $\displaystyle\int\sec^5 z dz$

c) $\displaystyle\int x\tan^{-1}x dx$

d) $\displaystyle\int(x^2+3x+1)e^{2x}dx$

e) $\displaystyle\int\tan^{-1}(\sqrt{x+1})dx$

f) $\displaystyle\int_1^{16}\tan^{-1}(\sqrt{\sqrt{x}-1})dx$

g) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^3}dx$

h) $\displaystyle\int\cos(\ln x)dx$

i) $\displaystyle\int\frac{\ln(\ln x)}{x}dx$

j) $\displaystyle\int x\ln\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)dx$

k) $\displaystyle\int(\cos^{-1}z+\ln z)dz$

l) $\displaystyle\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$

m) $\displaystyle\int x\cos x dx$

n) $\displaystyle\int\frac{\tan^{-1}m}{m^2}dm$

ñ) $\displaystyle\int\text{sen}((x-1)^{1/4})dx$

o) $\displaystyle\int\sqrt{x}(\ln x)dx$

p) $\displaystyle\int\frac{e^{1/x}}{x^3}dx$

q) $\displaystyle\int\cos^3 x dx$

r) $\int \operatorname{sen}^2(\ln x)dx$ *s)* $\int x\sec^2 x dx$ *t)* $\int_0^1 x^5 e^{-x^2}dx$

12. Deduzca las siguientes fórmulas recurrentes

a) $\int \operatorname{sen}^n(x)dx = \dfrac{\operatorname{sen}^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)dx$

b) $\int \cos^n(x)dx = \dfrac{\cos^{n-1}(x)\operatorname{sen}(x)}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx$

13. ** **((Ejercicios por integración por partes con una dificultad "especial")).**

- $\int \dfrac{\cos x + x\operatorname{sen} x - 1}{(\operatorname{sen} x - x)^2}dx$ **Ayuda:** Id. trig.
- $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\Big(\ln(1+x)^x - \ln(1-x)^x\Big)dx$
- $\int \dfrac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x - \operatorname{sen} x\cos x + x\cos x - \operatorname{sen} x}dx$
- $\int \dfrac{e^x(1+x\ln x)}{x}dx$
- $\int \dfrac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$
- $\int \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}(x\cos^3 x - \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}dx$
- $\int \dfrac{x^2}{(x\cos x - \operatorname{sen} x)^2}dx$
- $\int \dfrac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}dx$
- $\int \dfrac{z\operatorname{sen}^{-1}(z)}{(1-z^2)^{3/2}}dz$
- $\int \ln(\sqrt{t} + \sqrt{1+t})dt$
- $\int \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x + 1}{(x+\cos x)^2}dx$
- $\int \dfrac{(x\operatorname{sen} x + \cos x)(x^2 - \cos^2 x)}{x^2\cos^2 x}dx$
- $\int \dfrac{(e^{2x} - x^2)(x-1)}{x^2 e^x}dx$

14. Si $f''(x) = -af(x)$ y $g''(x) = bg(x)$, donde a y b son constantes, hallar $\int f(x)g''(x)dx$

15. * Calcular $\int_0^1 xf''(2x)dx$ sabiendo que $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = 5$

16. * Dada la función $F(x) = \int_0^x \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}dt$. Calcule $\int F(x)dx$

17. *Suponga que para cierta función f se sabe que $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$, $\quad f(\pi/2) = a, \quad f(3\pi/2) = b$. Utilice integración por partes para evaluar $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)dx$.

18. Suponga que f tiene inversa y demuestre

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int f(y)dy$$

y a partir de esto calcule $\int \cos^{-1} x dx$

19. *Suponga que existe f es una función continua y invertible en $[0,1]$, tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{3}$. Calcule $\int_0^1 f^{-1}(x)dx$

20. Demuestre que para cualquier número $a > 1$

$$\int_1^a \ln x dx + \int_0^{\ln a} e^y dy = a\ln a$$

21. * Pruebe que si f es continua, entonces $\displaystyle\int_0^x \Big(\int_0^z f(t)dt\Big)dz = \int_0^x f(z)(x-z)dz$

22. * Calcular $f(0)$, sabiendo que $f(\pi)=2$ y que $\displaystyle\int_0^{\pi}\big[f(x)+f''(x)\big]\operatorname{sen}(x)dx = 5$

INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

23. * Calcule usando sustitución trigonométrica o en algunos casos usando sustitución directa

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+13}{\sqrt{x^2+9}}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} =$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16+19x^2}}$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^{1/2}}$

e) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}dx}{(9e^{-2x}+1)^{3/2}}$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+4x-5}}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+3}}$

h) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2-2)\sqrt{x^4-4x^2+5}}$

i) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}dx$

j) $\displaystyle\int_1^e \frac{dy}{y\sqrt{1-\ln^2 y}}$

k) $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \frac{e^y dy}{\sqrt{e^{2y}+9}}$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}dx$

24. **Ejercicios de sustitución trigonométrica con dificultad "especial"

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}$ (st)

b) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ (ct)

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}$ (ct)

d) $\displaystyle\int \frac{12dx}{(2x-1)\sqrt{(4x^2-4x-8)^3}}$ (ct)

e) $**\displaystyle\int \frac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}dx$ (rct)

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)(\sqrt{1-x^2})}$ (tst)

g) $\displaystyle\int \frac{4x+5}{(x^2-2x+2)^{3/2}}dx$ (dt)

h) $\displaystyle\int \frac{2x^2-4x+4}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx$ (c)

*INTEGRALES POR FRACCIONES PARCIALES

a) $\displaystyle\int \frac{\cos m\sqrt{\operatorname{sen} m+1}}{\operatorname{sen} m+2}dm$

b) $\displaystyle\int \frac{7x^2+16}{x^4+4x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen} t}}{\cos t}\mathrm{dt}$

d) $\displaystyle\int \frac{dm}{m(m^{69}+1)^3}$

e) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^3-3x^2+15x-8}{x^3-3x+2}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{m^5}{(m^2+4)^2}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{4x^2+6}{x^3+3x}$

h) $\displaystyle\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2}dx$

i) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^5+x^4-x-1}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^6}dx$

k) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-10x^3+9}dx$

l) $\displaystyle\int \frac{\cot\theta}{\operatorname{sen}^7\theta+1}d\theta$

m) $\displaystyle\int \frac{1+\ln t}{t(3+2\ln t)^2}dt$

n) $\displaystyle\int \frac{e^{4t}}{(e^{2t}-1)^3}dt$

ñ) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}dx$

o) $\displaystyle\int \frac{4x^4+x+1}{x^5+x^4}dx$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(5x)(1+\cos(5x))}$

q) $\displaystyle\int \frac{2dx}{\sqrt{\cos x}\operatorname{sen}(x)}$

r) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(1+x)^3}dx$

25. Integrales por fracciones parciales con dificultad "especial"

a) $**\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$ (c) *b)* $**\displaystyle\int \sqrt{\tan\theta}\,d\theta$ (s) *c)* $***\displaystyle\int \frac{x\sec^2 x}{3+4\tan x+\sec^2(x)}dx$ (ips)

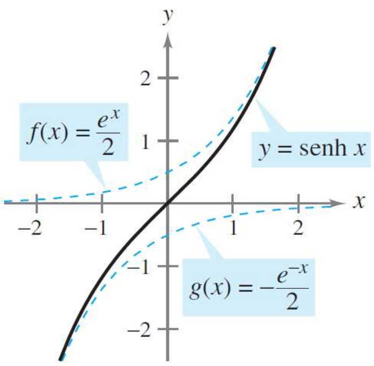
26. **Aplicación:** Suponga que la población $P(t)$ (en millones) de Ruritania satisface Ia ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k\,P(200-P) \qquad (k \quad constante).$$

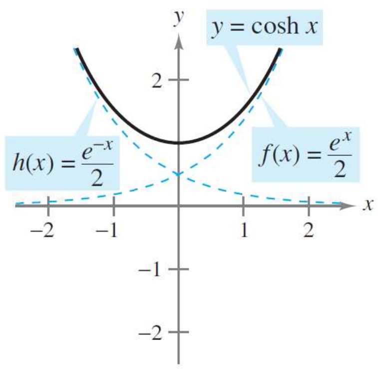
Su población en 1940 era de 100 millones y entonces aumentaba a razón de 1 millón por año. Pronostique la población de este pais para el año 2000.

27. ***Demuestre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ (Recuerde que $\tan^{-1}(m)+\tan^{-1}(n)=\pi/2$ si $mn=1$)

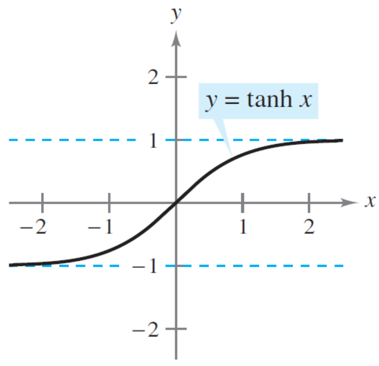
Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas: Recuerde que las funciones hiperbólicas son combinaciones de e^x y e^{-x}. Por ejemplo, $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Gráficamente,



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-\infty, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $[1, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$
Recorrido o rango: $(-1, 1)$

28. Demuestre que
   - $\operatorname{senh}(x)$ es una función impar y que $\cosh x$ es una función par
   - $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
   - * Use la definición para demostrar que $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ para todo x
   - * Use la definición para demostrar que $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ para $|x|<1$.
   - *Halle el valor de x tal que $\tanh(\ln x) = -\frac{1}{2}$ Sol: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

29. Calcule las siguientes integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas (**algunas tienen dificultad especial**)
   - $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(3x)\tan(3x)dx$
   - $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4(x)}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}dx$
   - $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^7(2x)\cos x}}dx$
   - $\displaystyle\int \cos^3(2x)\operatorname{sen}(3x)dx$
   - $\displaystyle *\int \tanh^4(2x)dx$
   - $\displaystyle *\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}dx$
   - $\displaystyle *\int \frac{\operatorname{sen}^4(3x)}{\cos^3(3x)}dx$
   - $\displaystyle *\int \tan^2 x \sec x\, dx$
   - $\displaystyle *\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^3 x\cos^5 x}}dx$
   - $\displaystyle *\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x\cos^3 x}}dx$
   - $\displaystyle *\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x}dx$
   - $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec(\frac{x}{2})dx$
   - $\displaystyle\int \tan(t)\sec^3(t)dt$
   - $\displaystyle\int \sec^6(t)dt$
   - $\displaystyle\int \frac{\cot(t)+\csc(t)}{\operatorname{sen}(t)}dt$
   - $\displaystyle *\int \frac{\operatorname{sen}(2x)+3\cos x}{\sqrt{9+4\operatorname{sen} x-\cos^2 x}}dx$
   - $\displaystyle\int \cosh^2(5x)dx$
   - $\displaystyle *\int \tan^5(x)\sqrt{cos^3 x}dx$
   - $\displaystyle *\int \frac{\sqrt{2}dx}{\cos^3 x\sqrt{\operatorname{sen}(2x)}}$
   - $\displaystyle *\int \operatorname{sen}(3x)\operatorname{sen}(5x)dx$
   - $\displaystyle *\int \cos(2x)\cos(7x)dx$
   - $\displaystyle *\int (1+\cos(4x))^{3/2}dx$
   - $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x\cos^3 x}}dx$
   - $\displaystyle **\int \frac{\operatorname{senh} x+3\cosh x}{\cosh x\left(6\operatorname{senh}^2 x+\operatorname{senh} 2x+5\right)}$
   - $\displaystyle **\int \sqrt{\tan^2 x+2}dx$

30. Calcule las siguientes integrales usando sustitución universal ($t=\tan(\frac{x}{2})$) o sustitución auxiliar ($t=\tan x$)

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(4x) + \tan^2(4x)}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + 2\operatorname{sen}^2 x}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{2 - \operatorname{sen}^2 x}$
- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(2x)dx}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}$
- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x - 2\cos^2 x}{3 - \cos^2 x}dx$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x + 3\cos x}$
- $\displaystyle\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x\cos x}$
- $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\tan x}{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}dx$

31. ***INTEGRALESs EMOCIONANTES (con una manipulación algebraica adecuada y una sustitución **((sencilla))** llegarás a la nueva integral ó posiblemente a otra integral más sencilla.)

Integral	Manipulacion algebraica y/o sustitución	Posible nueva integral
$\displaystyle\int \sqrt{\frac{x^3-3}{x^{11}}}dx$		$\displaystyle\frac{9}{2}\int w^2 dw$
$\displaystyle\int \frac{x-2}{x\sqrt{x-1}\sqrt{x^2-x+1}}dx$		$\displaystyle 2\int \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$
$\displaystyle\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$		$\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2}}$
$\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4x}}{x^3}dx$		$\displaystyle\frac{1}{2}\int w^2 dw$
$\displaystyle\int \frac{x^4}{(4-x^2)^{7/2}}dx$		$\displaystyle -\frac{1}{4}\int \frac{dm}{m^6}$
$\displaystyle\int \frac{1}{4+5\cos^2 m}dm$		$\displaystyle\int \frac{du}{4u^2+9}$
$\displaystyle\int \frac{(x^2-25)^{3/2}}{x^6}dx$		$\displaystyle\frac{1}{50}\int z^{3/2}dz$

32. ***Use artificios adicionales vistos en clase para resolver las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^{3/4}+2}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+x^{4/5}}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+5)\sqrt{2x-3}+8x-12}$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^{3/4}-(x+1)^{5/4}}$

f) $\displaystyle\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{15/14}}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-9}{x+9}}dx$

h) $\displaystyle\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$

i) ** $\displaystyle\int \sqrt{\cos^2 x - \cos x}dx$

j) ** $\displaystyle\int \frac{dx}{(\cos x - \operatorname{sen} x)\sqrt{\cos(2x)}}$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-3}}$

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$

m) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

ñ) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}dx$

o) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$

q) $\displaystyle\int \sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}dx$

r) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$

s) $\displaystyle\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx$

t) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt[3]{x^2})^{1/4}dx$

u) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^{1/3}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{1/3}}$

w) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

x) $\displaystyle\int \frac{\cos x\operatorname{sen}^7 x}{(\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^4 x+\cos^2 x)^{3/2}}dx$

y) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{8x^3+27}}$

z) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^7(x^{-3}+1)^{4/3}}$

33. * EJERCICIOS DE ENTRETENIMIENTO

- $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+5}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\text{sen}(2x)}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx$
- $\displaystyle\int 2^x 3^{2x} 5^{3x} dx$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$
- $\displaystyle\int \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{3x^2+11x+10}\sqrt{\frac{x+2}{2x+3}}dx$
- $\displaystyle\int e^x\Big(\cot x + \ln(\text{sen}x)\Big)dx$
- $\displaystyle\int \frac{6e^{4x}}{1-e^x}dx$
- $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)dx$
- $\displaystyle\int e^{\sqrt[4]{x}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}\arcsin x dx$
- $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}dx$
- $\displaystyle\int \sqrt{\frac{m+x}{x}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\cos x - \text{sen}\, x}{5+\text{sen}(2x)}dx$
- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^8}}{x^{13}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x\sqrt{\text{sen}\, 2x}}$
- $\displaystyle\int \frac{e^x(x^2-8)}{(x-2)^2}dx$
- $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+e^{2\arctan x})(1+x^2)}dx$
- $\displaystyle\int \frac{e^x(x+1)}{-1+x^2e^{2x}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{e^{3x}x^2(x+1)}{1+x^2e^{2x}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{e^x-1}}dx$
- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t}\text{sen}t dt$
- $\displaystyle\int x^x(1+\ln(x))dx$
- $\displaystyle\int \ln(x+x^2)dx$
- $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x\tan x dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2}{x^3-1}dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-5}dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^2-x-2}{x^3-2x-4}dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x-4}dx$
- $\displaystyle\int \frac{3dx}{4x^2-4x-3}$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+10}$
- $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^2+6x+18}$
- $\displaystyle\int \frac{5dx}{-x^2-8x-12}$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+1/x}{1-1/x}}dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^{1/2} x^2\sqrt{1-x^2}dx$
- $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{2+6x}{3+2x-x^2}dx$
- $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}-4e^x}{\sqrt{4e^x-e^{2x}-3}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{4-7x}{\sqrt{x^2+2x-8}}dx$
- $\displaystyle\int \frac{3dx}{\sqrt{4x^2-16x+17}}$
- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$
- $\displaystyle\int \frac{2x+3}{9x^2+6x+5}dx$
- $\displaystyle\int \frac{2+6x}{(3+2x-x^2)^2}dx$
- $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}dx$
- $\displaystyle\int (3x-2)\sqrt{9x^2+12x+8}dx$
- $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(y^2+1)^n}}\,dy$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}$
- $\displaystyle\int_0^9 \lfloor\sqrt{x}\rfloor\,dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{3}\right\rfloor\right)dx$
- $\displaystyle\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}dy$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x + 2\cos x\,\text{sen}x - \cos^2 x}$

34. Sea $f(x)$ una función continua sobre $[a,b]$. suponga que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x))^2dx = 1$ y que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = 1$. Demuestre que $f(x)=1$ para todo $x\in[a,b]$. **Ayuda:** Calcule $\int (f(x)-1)^2dx$

35. Resuelva los problemas con valor inicial para y como una función de x.

a) $x\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2-16}$ $\quad x\geq 4,\quad y(4)=0$

b) $(x^2+1)^2\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1}$ $\quad y(0)=1$

36. Determine si las siguientes expresiones son Falsas o Verdaderos, Si es falsa explicar por qué o dar un contra-ejemplo.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x\sqrt{9x^2-16}} = \frac{1}{4}\sec^{-1}(\frac{3x}{4}) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{25}\arctan(\frac{x}{25}) + C$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\arccos(\frac{x}{2}) + C$