Cálculo diferencial en una variable - 2016377

TALLER 10 - II-2019

TEMA: Derivadas (2).

1. Encuentre en cada caso la abcisa de todos los puntos de la gráfica en los que la tangente es (a) horizontal, (b) paralela la recta $2x + 2y - 5 = 0$.

   a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ b) $g(x) = \cos x$ c) $h(x) = e^x$ d) $t(x) = \ln x$

2. Encuentre los puntos sobre la curva $y = \dfrac{\cos x}{1 + sen\, x}$ en los cuales la tangente es horizontal.

3. Use derivación logarítmica para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)^5}{(x-4)^4}$ b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{\sqrt[5]{x^7 + 1}}$ c) $j(x) = x^{\ln x}$

   d) $k(x) = (3x-2)^{-7} x^{1/8} e^{x^2+x}$ e) $l(x) = (sen\, x)^x$ f) $m(x) = x^{sen\, x}$

4. En cada caso y es una función de x. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

   a) $y = \dfrac{\log x}{x}$ b) $y = \sec e^{2x} + e^{\sec 2x}$ c) $y = \ln(x^2 - 2x + 1)^{4/3}$

   d) $y = sen^{-1}\sqrt{1 - x^2}$ e) $y = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ f) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$

   g) $y = 4^{sen\left(x^2 - 2x\right)}$ h) $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ i) $y = \sec^{-1} 5x + \csc^{-1} 4x$

5. En cada caso calcule $\dfrac{dy}{dx}$ usando derivación implícita:

   a) $\cos(x - y) = xe^x$ b) $\sqrt{x + y} + \sqrt{xy} = 6$

   c) $x^2 - xy + y^3 = 8$ d) $x \tan y + y \tan x = 1$

6. Halle (si existen) los valores de a, b, c y d para los cuales f es derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x + c & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + bx + 3 & \text{si } -2 < x < 2 \\ ax - d & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

7. Calcule $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

   a) $y = 3x^4 - 7x + 2$ b) $y = (5x-4)^{-2}$ c) $y = 2^x$

   d) $y = \tan x$ e) $y = \ln|x|$ f) $y = \sqrt{1 - x^2}$

   g) $y = \arctan x$ h) $y = \cos x$

8. Halle en cada caso los intervalos en los que la función dada es creciente y en los que es decreciente:

a) $y = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x - 10$ b) $y = \dfrac{1 - x^2}{3 + x}$ c) $y = \frac{1}{2}x + \cos x$

d) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ e) $y = \dfrac{x}{e^x}$ f) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

g) $y = |(x - 1)(x - 2)|$ h) $y = \ln |x|$ i) $y = \arctan\left(1 - x^2\right)$

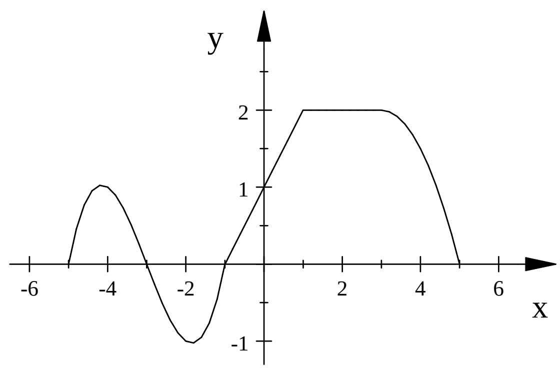
9. Halle en cada caso los intervalos en los que la función dada es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo:

a) $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$ b) $y = \frac{1}{2}x + \cos x$ c) $y = \ln |x|$

d) $y = 1 + 9x - 3x^2 - x^3$ e) $y = \dfrac{e^x}{x}$ f) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

g) $y = 1 - x^3 - x^4$ h) $y = \dfrac{1 - x^2}{3 + x}$ i) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

10. Dada la gráfica de f', determine dónde f es decreciente, creciente, encuentre los puntos máximo, mínimo, de inflexión, estudie la concavidad. Luego trace un bosquejo de la gráfica de f.



11. Un globo se eleva verticalmente de manera que su altura $s(t)$ sobre el suelo durante los primeros 10 segundos de su ascenso está dada por $s(t) = 6 + 2t + t^2$ donde la altura $s(t)$ se mide en pies y el tiempo t en segundos. Calcule la velocidad del globo para 1, 4 y 8 segundos. Determine la velocidad del globo cuando se encuentra a 69 pies del suelo.

12. Dos atletas se disponen a correr 100 metros planos. Las distancias $s_1(t)$ y $s_2(t)$ que cada uno de ellos recorre a los t segundos, están dadas por $s_1(t) = \dfrac{1}{5}t^2 + 8t$ y $s_2(t) = \dfrac{1100t}{t + 100}$ para $t > 0$. Determine cuál de los dos corredores es el más rápido en la salida, cuál es el más rápido en la llegada y cuál es el ganador de la carrera.

13. Encuentre los puntos en los que la recta tangente tiene pendiente mínima:

a) $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$ b) $y = \cos x$

14. Halle dos números positivos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea el máximo posible.

15. Halle dos números positivos cuyo producto sea 10 y cuya suma sea la mínima posible.

16. De una lámina de cartón cuadrada de lado a se recortan cuadrados en las esquinas para construír una caja. ¿Cuál es el tamaño del corte que produce el volumen máximo?

17. Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio a, ¿cuál es el de mayor área?

18. Un alambre de 100 cm de longitud se parte en dos pedazos. Con el primer pedazo se construye un triángulo equilátero y con el segundo pedazo se construye una circunferencia. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total de las dos figuras sea la máxima posible?

19. Halle la distancia más corta del punto $(4, -2)$ a la recta $y = \dfrac{x}{2} + 4$.

20. Un veterinario dispone de 300 metros de tela de alambre y quiere construir 5 jaulas rectangulares para perros, haciendo un rectángulo exterior y luego dividiéndolo con cercas paralelas a uno de los lados. Encuentre las dimensiones del rectángulo para que área de las jaulas sea la mayor posible.

21. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de 10 m^3. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado. El material para los costados cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Encuentre las dimensiones del recipiente para que el costo sea el mínimo posible.

22. Dos lados de un triángulo tienen 4 y 5 m de longitud y el ángulo entre ellos crece a razón de 0.06 rad/s. Encuentre la razón con que aumenta el área del triángulo cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de $\pi/3$.

23. Una bola de nieve se funde de modo que su área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, encuentre la razón a la cual disminuye el diámetro cuando es de 10 cm.

24. Dos automóviles empiezan a moverse a partir del mismo punto. Uno viaja hacia el sur a 60 mi/h y el otro hacia el oeste a 25 mi/h. ¿Con qué razón aumenta la distancia entre los dos automóviles dos horas más tarde?

25. El agua se fuga de un tanque cónico invertido a razón de 10.000 cm^3/min, al mismo tiempo que se bombea agua hacia el tanque con una razón constante. El tanque tiene 6 m de altura y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua sube a razón de 20 cm/min cuando la altura de ese nivel es de 2m, encuentre la razón a la que se bombea el agua al tanque.

26. La altura de un triángulo crece 1 cm/min y su área 2 cm^2/min. ¿Con qué razón cambia la base del triángulo cuando la altura es de 10 cm y el área de 100 cm^2?

27. Calcule, si es posible:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{6^x - 2^x}{sen\ x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\ln x}{\sqrt{x}}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln x$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\tfrac{1}{x} - \csc x\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(xe^{1/x} - x\right)$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (-\ln x)^x$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (senx)^{\tan x}$ i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$