Cálculo diferencial en una variable - 2016377

Taller 9 - II-2019

TEMA: Derivadas.

1. Determine:

   (a) Si $f+g$ es derivable en a ¿son f y g necesariamente derivables en a?

   (b) Si fg y f son derivables en a ¿qué condición para f implica que g sea derivable en a?

2. Muestre que si f es derivable en a entonces la función φ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & , \text{ si } x \neq a \\ f'(a) & , \text{ si } x = a \end{cases}$$

   es continua en a.

3. Hallar f' para $f(x) = \left[\dfrac{x}{2}\right]$.

4. En cada literal dé un ejemplo de una función f que cumpla con la condición dada.

   (a) f es derivable por izquierda en a pero no es derivable en a.

   (b) f es derivable por derecha en a pero no es derivable en a.

   (c) f es derivable por izquierda en a pero no es derivable por derecha en a.

   (d) ¿Existe una función f tal que f sea derivable por izquierda en a, derivable por derecha en a, pero no sea derivable en a?

5. Demuestre que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 1/x^2$ en $(a, 1/a^2)$, corta a f en otro punto.

6. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$:

   a) $f(x) = x^2 - 3x + 2; a = 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x}; a = -1$ c) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}; a = 0$

   d) $f(x) = x\cos x; a = \pi$ e) $f(x) = \sqrt{x}; a = 1$ f) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{(x-1)^2}; a = 0$

7. Encuentre las rectas que pasan por $(1, -3)$ y son tangentes a la gráfica de $y = x^2$.

8. Calcule $f'(x)$:

   $a)$ $f(x) = (2x+1)^{50}$ $b)$ $f(x) = e^{x^2-3x+2}$ $c)$ $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$

9. Encuentre todos los puntos en los cuales la tangente a la gráfica es horizontal:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ b) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ c) $y = \sin(2x)$

d) $y = (x-1)^{11}$ e) $y = \dfrac{x-1}{1+x^2}$ f) $y = e^{x^2}$

g) $y = ax^2 + bx + c$ h) $y = xe^x$ i) $y = e^x \sin x$

j) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ (¡Cuidado!) k) $y = \sqrt{1 - x^2}$ l) $y = \sec x$

10. Encuentre un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $p(0) = p(1) = -2$, $p'(0) = -1$ y $p''(0) = 10$.

11. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si } |x| > c \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \leq c \end{cases}$$

hallar los valores de a y b para los cuales $f'(c)$ existe.

12. Calcule y' en cada caso:

a) $y = \tan(1 - x^2)$ b) $y = \sqrt[3]{\arctan x}$ c) $y = (x^2 + 1)^x$

d) $y = \ln \dfrac{x+2}{x-1}$ e) $y = \dfrac{1}{\cos(\sqrt{x} - 4)}$ f) $y = x \arcsin(\sqrt{x})$

13. Encuentre el dominio de $f\,'$:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \ln|x|$ c) $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

d) $f(x) = (x+1)^x$ e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ f) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

14. Determine si las siguientes funciones son derivables en $x = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - \cos x & si \quad x > 0 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq 0 \\ \sin x & si \quad x > 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x^2 & si \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ d) $s(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$

15. Encuentre (si existen) las rectas que pasan por $(0,0)$ y son tangentes a la gráfica de:

a) $y = e^x$ b) $y = \sqrt{x-1}$ c) $y = \dfrac{1}{x}$

16. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto dado:

a) $e^{xy - y^3} = 1; (1,0)$ b) $y^5 - xy + 1 = 0; (2,1)$ c) $y \cos y = x; (\pi, \pi)$

d) $\tan(x+y) = 1; (0, \frac{\pi}{4})$ e) $(x+y)^3 - xy - 25 = 0; (1,2)$

17. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{sen\, t^2}{t}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}$ c) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos t - 1}{t^2}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - sen\, x}{1+\cos 2x}$ e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} -\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{sen\, x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a\,(a+x)}-a}{x}, \quad a>0$ i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,(\cos x - 1)}{sen\, x - x}$

18. De la siguiente lista de funciones escoja para cada literal una de ellas que verifique la propiedad enunciada. Demuestre que su escogencia es correcta.

$f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{-2x^2+2x+4}$ $k(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{5}$ $l(x) = \dfrac{sen\, x}{x}$

$g(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$ $m(x) = -x^2+3x+5$ $h(x) = \tan\, x$

$j(x) = |x-3| - 5$ $o(x) = x^3 - x$ $n(x) = [x]$

$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}, \text{ si } x>2 \\ x^2, \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ si } x<0 \end{cases}$ $w(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ $t(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$

Propiedades:

(a) La función tiene exactamente 2 asíntotas verticales.

(b) La función tiene una discontinuidad evitable.

(c) La función es **no** derivable en infinitos puntos.

(d) La función tiene al menos una asíntota horizontal.

(e) La función es creciente en $(3,\infty)$.

(f) La función tiene exactamente un mínimo local.

(g) La función tiene exactamente un máximo local.

(h) La función tiene mínimo absoluto y lo toma en dos puntos

(i) La función tiene una asíntota oblicua.

(j) La función tiene un mínimo local en un cierto real c; es continua en c, pero la derivada en c no es cero.

(k) Existen $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a<b$, $c \neq 0$, tales que la derivada en x es c para todo $x \in (a,b)$.

(l) La gráfica de la función es cóncava hacia abajo en todos los reales positivos.

19. Considere las funciones definidas por

$$S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$$

Halle:

a) $C^2(x) - S^2(x)$ b) $S'(x)$ c) $C'(x)$ d) $T'(x)$