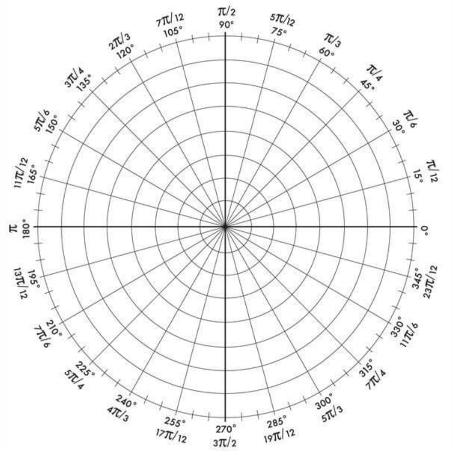
# Polares-Sucesiones-Series

## Polares

1. ¿Qué pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

- $(3, 0)$
- $(-3, 0)$
- $(2, 2\pi/3)$
- $(2, 7\pi/3)$
- $(-3, \pi)$
- $(2, \pi/3)$
- $(-3, 2\pi)$
- $(-2, -\pi/3)$
- $(-2, \pi/3)$
- $(2, -\pi/3)$
- $(r, \theta)$
- $(r, \theta + \pi)$
- $(-r, \theta)$
- $(2, -2\pi/3)$
- $(-r, \theta + \pi)$
- $(-2, 2\pi/3)$

2. Ubique en el plano los puntos cuyas coordenadas polares son:



$A(3, \dfrac{\pi}{6})$, $B(-4, \dfrac{\pi}{4})$, $C(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{2\pi}{3})$

$E(3, \dfrac{11\pi}{4})$, $F(3, -1)$

3. Exprese en coordenadas rectangulares los siguientes puntos dados en coordenadas polares.

*a)* $P(3, 3\pi/4)$
*b)* $P(-2, \pi)$
*c)* $P(4, -2\pi/3)$
*d)* $P(-2, -5\pi/12)$
*e)* $P(-1/2, -\pi/4)$
*f)* $P(3, 2)$

4. Exprese en coordenadas polares $(\pm r, \theta)$ los siguientes puntos dados en coordenadas rectangulares.

*a)* $P(3/2, -3/2)$
*b)* $P(1, -\sqrt{3})$
*c)* $P(-\sqrt{3}, 1)$
*d)* $P(\sqrt{8}, \sqrt{2})$
*e)* $P(-8, 8)$
*f)* $(4, 4\sqrt{3})$

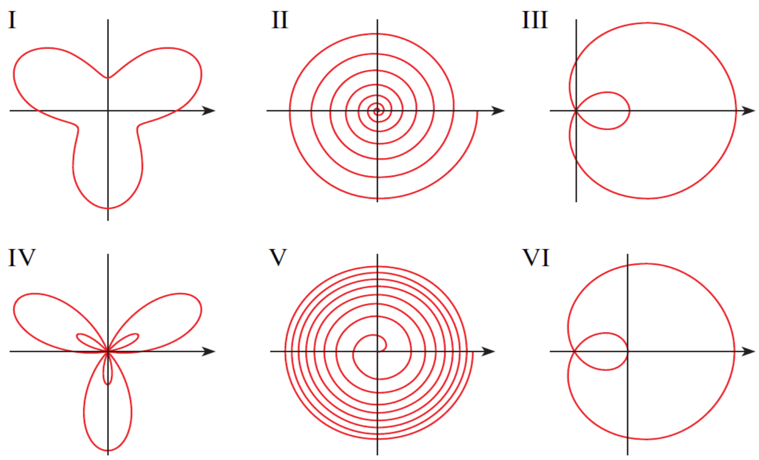
5. Identifique la curva mediante la determinación de una ecuación cartesiana para la curva.

*a)* $r = \tan\theta \sec\theta$
*b)* $r = 2\text{sen}\theta + 2\cos\theta$
*c)* $r\text{sen}\theta = \ln r + \ln\cos\theta$
*d)* $r = \dfrac{5}{\text{sen}\theta - 2\cos\theta}$
*e)* $r = 4\text{sen}\theta$ (Circ)
*f)* $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$ (Elip)

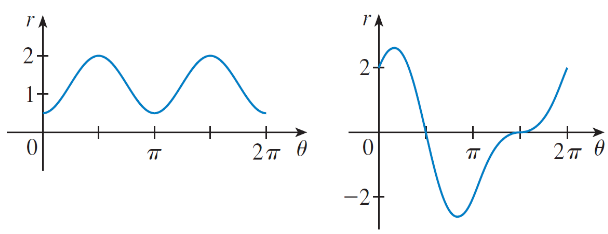
6. Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

*a)* $x + y = 9$
*b)* $6xy = 5$
*c)* $x^2 + (y-2)^2 = 4$
*d)* $x^2 + xy + y^2 = 1$
*e)* $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$R: $r^2 = a^2\cos^2(2\theta)$
*f)* $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ R: $r = 2a\tan\theta\,\text{sen}\,\theta$
*g)* $3(x-2)^2 + 4y^2 = 16$ R: $r(2 - \cos\theta) = 6$

7. Muestre que la ecuación polar $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, donde $ab \neq 0$, representa un círculo, y encuentre su centro y radio.
8. Haga un bosquejo de la región definida por las desigualdades
$$-1 \leqslant r \leqslant 2 \qquad y \qquad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$$
9. Muestre que la ecuación polar $r = a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, donde $ab \neq 0$, representa un círculo, y encuentre su centro y radio.
10. Trace la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.
    a) $r = \theta, \quad \theta \geqslant 0,$
    b) $r = \ln\theta, \quad \theta \geqslant 1$
    c) $r(1 - 2\cos\theta) = 4$
    d) $r = 4\cos(3\theta)$, rosa de 3 pétalos
    e) $r = 4\operatorname{sen}(5\theta)$, rosa de 5 pétalos
    f) $r = 3(2 + \cos\theta)$, caracol de Pascal.
11. Bosqueje el gráfico y halle los puntos de intersección de los siguientes pares de curvas
    a) $r = a(1 - \cos\theta)$ y $r = a\cos\theta$ $\quad \left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{a}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$, polo
    b) $\sqrt{2}r = 3$ y $r^2 = -9\cos(2\theta)$. $\quad \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{5\pi}{3}\right)$
    c) $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$ $\quad \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), (0, 0)$
    d) $r = 4(1 + \operatorname{sen}\theta)$ y $r(1 - \operatorname{sen}\theta) = 3$ $\quad (6, \pi/6)$, $(6, 5\pi/6)$, $(2, 7\pi/6)$ y $(2, 11\pi/6)$
12. ¿Qué simetrías tienen esas curvas?
    a) $r^2 = 4\cos 2\theta,$
    b) $r^2 = -\operatorname{sen}(2\theta)$
13. Halle las ecuaciones cartesiana y polar de la recta tangente a la curva $r^2 = 9\cos(2\theta)$ en el punto $P(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6})$.
    $y = 3\sqrt{2}/4, \quad r\operatorname{sen}\theta = 3\sqrt{2}/4$
14. Demuestre que las curvas $r = a\operatorname{sen}\theta$ y $r = a\cos\theta$ se cortan en ángulos rectos.
15. Determine los puntos sobre la curva dada donde la tangente es horizontal o vertical
    a) $r^2 = \operatorname{sen}2\theta$
    b) $r = e^{\theta}$
16. Relacione las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No use un dispositivo de graficación.)

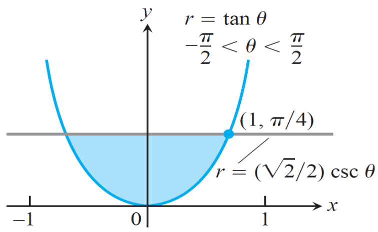



a) $r = \cos(\theta/3),$
b) $r = 1 + 2\cos\theta$
c) $r = 2 + \operatorname{sen}3\theta$
d) $r = 1 + 2\operatorname{sen}3\theta$
e) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
f) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$




17. En la figura se muestra la gráfica de $r$ como una función de $\theta$ en coordenadas cartesianas. Empléela para bosquejar la curva polar correspondiente.

18. Calcule el área de la región limitada por la curva $r = 2 + \cos\theta$ y los ejes $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. $A = \frac{9\pi+16}{8}$
19. Halle el área de la región limitada por las parábolas $r(1 + \cos\theta) = 4$ y $r(1 - \cos\theta) = 4$. $A = \frac{64}{3}$
20. Calcule el área de la región que es interior a la curva $r = 4\cos(3\theta)$ y exterior a la circunferencia $r = 2$, $A = \frac{2}{3}(2\pi+3\sqrt{3})$
21. Calcule el área de la región que es interior a las curvas $\sqrt{2}r = 3$ y $r^2 = -9\cos(2\theta)$ $A = \frac{3}{2}(6 + \pi - 3\sqrt{3})$
22. Encuentre el área de la región que está acotada por la curva dada y yace en el sector especificado.
    *a*) $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$  *b*) $r = \sqrt{\operatorname{sen}\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$
23. Encuentre el área de la región que yace dentro de la primera curva y fuera de la segunda
    *a*) $r = 2\cos\theta$, $r = 1$  *b*) $r = 3\operatorname{sen}\theta$, $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$.
24. Determine el área de la región localizada dentro de ambas curvas.
    *a*) $r = \sqrt{3}\cos\theta$ $r = \operatorname{sen}\theta$  *b*) $r = 3 + 2\cos\theta$, $r = 3 + 2\operatorname{sen}\theta$,  *c*) $r = 2\cos\theta$, $r = 2\operatorname{sen}\theta$
25. Encuentre la longitud exacta de la curva polar.
    *a*) $r = e^{2\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
    *b*) $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
    *c*) $r = \dfrac{6}{1+\cos\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$
26. Determine el área de las superficies generadas al hacer girar las curvas respecto de los ejes indicados.
    *a*) $r = \sqrt{\cos 2\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ eje $y$  *b*) $\sqrt{2}e^{\theta/2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ eje $x$
27. Usando la gráfica derecha
    *a*) Encuentre el área de la región sombreada en la figura.
    *b*) Parecería que la gráfica de $r = \tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ es asintótica a las rectas $x = 1$ y $x = -1$. ¿Lo es? Justifique su respuesta.




## SUCESIONES

28. Escribir una expresión para el término n-ésimo de la sucesión.
    *a*) $1, 4, 7, 10, \ldots$
    *b*) $-1, 2, 7, 14, 23, \ldots$
    *c*) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$
    *d*) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$
29. * Pruebe que $\lim r^n = 0$, si $0 < r < 1$ y es divergente si $r > 1$. Ayuda: Use definición, aquí $N = \frac{\ln\varepsilon}{\ln(r)}$
30. Determinar el menor valor de $N$ para el que se verifica lo siguiente:

$$|a_n - 2| < 10^{-5}, \qquad \forall n > N, \quad \text{si} \quad a_n = \sqrt{4 + \frac{1}{n}}. \qquad\qquad N = \frac{10^{10}}{1 + 4(10^5)}$$

31. Demostrar, utilizando la definición de límite, que la sucesión de término general $a_n = \dfrac{4n-3}{n+1}$ converge a 4. Aquí, $N = \dfrac{7}{\varepsilon} - 1$
32. (**Truco-MUY práctico**) Demostrar que
    *a*) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\ln(1 + a_n) \equiv a_n$, es decir, $\ln(1 + a_n)$ se comporta igual que $a_n$ en el infinito.
    *b*) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ entonces $\ln(a_n) \equiv a_n - 1$, es decir, $\ln(a_n)$ se comporta igual que $a_n - 1$ en el infinito.
33. Hallar la relación entre los parámetros $a$ y $b$ para que se verifique (puede usar el truco anterior si quiere):
    *a*) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+a}{n+1}\right)^{2n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{bn+4}$  $R : b = 2(a-1)$

*b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+b}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n+a}{n}}\right)^{\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}$ $\quad R: b = e^{a\sqrt{2}/2}$

34. Determine si la sucesión $\left\{\frac{2^n+n^4}{3^n-n^7}\right\}$ es convergente o divergente. $C = 0$

35. Demuestre que la sucesión definda por la recurrencia $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+6)$ es convergente.

36. Estudiar la convergencia de la sucesión recurrrente dada por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{4+(a_n)^2}$.

37. Los términos de la sucesión $\{a_n\}$ vienen dados por

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \quad \ldots$$

Demuestre que esta sucesión es creciente y acotada superiormente por 2. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

38. Dada la sucesión $\{a_n\}$ en donde $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \sqrt{\frac{(a_n)^2+2}{a_n+2}}$ se pide

*a)* Probar que $a_n \geqslant 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

*b)* Demostrar que $\{a_n\}$ es convergente y calcular su limite.

39. Demuestre que $\lim a_n = 1$ donde

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

**Ayuda:** Busque dos términos $a, b$ tal que $a \leqslant \frac{n}{n^2+i} \leqslant b$ para todo $i = 1, 2 \ldots n$.

40. Determine si las sucesiones son convergentes o divergentes

*a)* $\{\frac{2n}{\sqrt{2n^2+5}}\}$

*b)* $\{\frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n n!}\}$

*c)* $\{\frac{\ln(n^2)}{5^n}\}$ $c = 0$

*d)* $\{(n+e^n)^{1/n}\}$

*e)* $\{(e^n+e^{2n})^{1/n}\}$

*f)* $\{\sqrt[n]{n}\}$

*g)* $\{\frac{n^2}{2n+1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\}$

*h)* $\{\frac{3n^3}{e^{2n}}\}$

*i)* $a_n = \frac{n^2}{2n+1} - \frac{n^2}{2n-1}$

*j)* $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$

*k)* $a_n = \frac{1}{n}\int_1^n \frac{1}{x}dx$

*l)* $a_n = \int_0^n \frac{1}{4+9x^2}dx$ $R = \frac{\pi}{12}$

*m)* $a_n = \int_0^n e^{(a-s)x}dx$ $R = \frac{1}{s-a}$, $s > a$

*n)* $a_n = n^2\left(\cos(\frac{1}{n})-1\right)$ $R = -\frac{1}{2}$

*ñ)* $a_n = \sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2-n}$ $R = \frac{5}{2}$

*o)* $a_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - \sqrt{2}n$ $R = 0$

*p)* $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ $R = \frac{1}{2}$

*q)* $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$ $R = 1$

*r)* $a_n = \frac{\ln(5n^4-4n^3+6n^2+3n-2}{\ln(6n^3+4n^2-5n+7)}$ $R = 4/3$

41. Suponga que $f(x)$ es diferenciable para toda $x$ en $[0,1]$, y que $f(0) = 0$. Defina la sucesión $a_n = nf(\frac{1}{n})$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$$

Utilice este resultado para determinar los límites de las sucesiones siguientes.

$$a_n = n\tan^{-1}(\frac{1}{n}) \qquad a_n = n\ln(1+\frac{2}{n}) \qquad a_n = n(e^{1/n-1})$$

42. Considerar la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+(k/n)}$ y demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

    **Ayuda:**Sumas de Riemman.

43. Sea $a_1 = 0$, $a_n = 1 + \dfrac{a_{n-1}}{2}$, $n \geqslant 2$. Pruebe que la sucesión es creciente y acotada. Calcule su limite.

44. Demuestre por inducción que todo numero natural se cumple $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leqslant \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$. Luego estudie la convergencia de la $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

45. Determine la veracidad los siguientes limites de sucesiones

    *a)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{1+n}{3+n}} = 1$ *b)* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}} = \sqrt[4]{e^5}$ *c)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

46. Halle el límite de las siguiente sucesiones

    *a)* $a_n = \dfrac{8n^3\ln(1+\frac{1}{2n})}{(2n^2+5n)\cos(\frac{2\pi n-2}{6n+3})}$ $R=4$

    *b)* $b_n = \left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+n}\right)$

    *c)* $a_n = \dfrac{3n^4\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(n+2)\cos(\frac{\pi n}{4n+1})}$ $R=3\sqrt{2}$

    *d)* $a_n = (4n+3)^m\left(\ln(\dfrac{n+1}{n-2})\right)^m$ $R=12^m$

47. ¿Si $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(f(x)) = 2$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = e^2$?

48. ¿Si $f(x)\neq 0$ para $x\neq a$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}(1+f(x))^{1/f(x)} = e$?

49. Sean $a$ y $b$ positivos. Probar que
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}.$$

50. ** Si $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. Probar que la sucesión $y_n = \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ es una la sucesión monótona creciente, es decir $y_{n+1}\geqslant y_n$.

51. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Responder razonadamente si cada uno de los siguientes apartados es verdadero o falso.

    *a)* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces es creciente o decreciente.
    *b)* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente o decreciente, entonces converge.
    *c)* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces está acotada.
    *d)* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, entonces converge.
    *e)* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces está acotada superiormente.
    *f)* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces está acotada inferiormente.
    *g)* Si $\lim x_n = x$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |x|$.
    *h)* Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada y converge, entonces es monótona.
    *i)* Si para todo $n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$ y $b_n\neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_nb_n\neq 0$

# SERIES:

52. Sabiendo que la suma de los $n$ primeros términos de una serie es
$$S_n = \frac{5n^2-3n+2}{n^2-1}$$
    hallar el término general, $a_n$ y estudiar la convergencia de dicha serie.

53. Probar que la serie converge y que la suma es la indicada.

*a)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(n+1)^{1/2}-n^{1/2}}{(n^2+n)^{1/2}} = 1$

*b)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

*c)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$

*d)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2^n+3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$

*e)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{4}$

*f)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)} = 1$

*g)* $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{\ln\left[(1+\frac{1}{n})^n(1+n)\right]}{(\ln n^n)\left[\ln(n+1)^{n+1}\right]} = \log_2\sqrt{e}$

*h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) =$

*i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+7}{(n^2+3n+2)}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{2}$

54. Usando la propiedad telescópica determine una fórmula para las siguientes sumatorias

*a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{sen}(kx)$ Ayuda: Use telescópica de grado 2 a $f(k)=\cos(kx)$

*b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kk!$ Ayuda: Use telescópica de grado 1 $f(k)=(k+1)!$

*c)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\tanh(19kx)}{\mathrm{sech}(19kx)}$ Ayuda: Use $(a)$

55. Determine una fórmula para $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$ y para $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{3+x})^k$

56. Exprese cada decimal periódico como el cociente de dos enteros,

a) $0,012012012...R = \frac{4}{333}$ b) $0,123123123...R = \frac{41}{333}$

57. Se deja caer una pelota de una altura de $20m$. Cada vez que toca el suelo rebota hasta tres cuanos de su altura máxima anterior. Encuentre la distancia total que viaja la pelota antes de llegar a reposo. $R = 140m$

58. Si $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & n \text{ es impar} \\ \frac{1}{2^n} & n \text{ es par} \end{cases}$ Entonces $\sum a_n$ converge?

59. Probar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ donde

$$a_n = (1-1/4)(1-1/9)\ldots(1-1/n^2)$$

**Ayuda:** use la función ln

60. Decir si cada una de estas series es convergente o divergente razonando su respuesta

61. Demuestre que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}dy$ existe **ayuda:** use series

62. Demuestre que

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n(1+\frac{1}{2})(1+\frac{2}{2})\cdots(1+\frac{n}{2})} = 1$ **Ayuda:** Simplifique y reescribala, $a_n = b_n - b_{n+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \ln(2)$

*a)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$

*b)* $\displaystyle\sum_{n=1} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

*c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n-1)}\ln(4n+1)}{n(n-1)}$

*d)* $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n\cos^2(n\frac{\pi}{3})}{2^n}$ (C)

*e)* $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$

*f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

*g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

*h)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{1/n}}$

*i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ C

*j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ D

*k)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^{\ln n})}$

*l)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^{1/n}}$

*m)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}n)}{\sqrt[3]{n}}$

*n)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n)}{n^2}$

*ñ)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+\cos(3n)}{e^{4n}+n^2+3}$ C

*o)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!+2\cos(1/n)}{7^{n!}+\arctan(5n)}$

*p)* $\displaystyle\sum_{n=22}^{\infty} \frac{\tan(\frac{1}{n^3})}{\sqrt[3]{n}},$ C

*q)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{6n}+3\cos(6n)}{3^{n!}+\arctan(n!)}$ C

*r)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+2)^n}{3^n}$ D

*s)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k(\ln k)[\ln(\ln(k)]^p}$ C,$p>1$

*t)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4+1}$ C

*u)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sec n|}{\sqrt{n}}$ D

*v)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$ C

*w)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{n}$ C

*x)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2)\ln(3)\ldots\ln(n)}{n!}$ C

*y)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$
C, si $a>1$, D si $a\leqslant 1$

*z)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdot(2n+2)}$ C

63. Determine si las series son: Absolutamente convergente, condicionalmente convergente divergente.

*a)* $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[3]{n}}{n+8}$ cc

*b)* $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n(6n^2-9n+4)}{n^3}$ cc

*c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(e^n+e^{-n})}$ cc

*d)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n \ln n$

*e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$

*f)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^3}{e^{n^3}}$ C

*g)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln(n+1))^2}$ C

*h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ C

*i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3/7}}{(n+1)!}$ C

*j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n/\frac{n+1}{2}}\frac{n^{100}}{2^n}$ C

*k)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\arctan(\frac{1}{2n+1})$ C

*l)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\operatorname{sen}^2(n)\frac{(2n)!}{n^{2n}}$ C

*m)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{(3n)!+1}\cos(n\pi)$ C

*n)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{2n}}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ D

*ñ)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{(n^{14}+5)\ln(n^2+2)}{e^n(n^4+2)}$ C

64. Estudiar el carácter de las siguientes series según los diferentes valores de $a$.

*a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n\sqrt{n+1}}{2^n(n+2)}$ C, si $-2 \leqslant a < 2$

*b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^n}{ne^{na}}$ C, si $|a| \geqslant 1$, y D $|a| < 1$

*c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}\operatorname{sen}^{2n} a$ C, si $n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{4} + n\pi$

*d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+a)(2+2a)\ldots(2+na)}$ D, si $-1 < a < 1$ z

*e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 5\cdot 10\ldots(n^2+1)}{(2n-1)!\,a^{2n}}$ C, si $|a| > 1/2$, y D $|a| \leqslant 1/2$

65. Encuentre el radio y el intervalo de convergencia de la series

*a)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

*b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$

*c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$

*d)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}\frac{1}{4^n}(x+10)^n$

*e)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$

*f)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{2n}$

*g)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

*h)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n3^n}$

*i)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$

*j)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n$ $I = (-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$

*k)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$

*l)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$

*m)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$

*n)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\operatorname{sen}^n x}{n^2}$

*ñ)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$

*o)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)\frac{1}{n^4}$ I=$(-\infty, -\frac{5}{2}]$

*p)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$ I=$(e, +\infty]$

*q)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\operatorname{sen}(\frac{x}{3^n})$ I=$(-\infty, +\infty)$

66. Demuestre que si $\displaystyle\sum_{n=1} a_n$ es absolutamente convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1} (a_n)^2$ es convergente y dé un ejemplo que muestre que el recíproco es falso.

67. De la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1} a_n(x-2)^n$ se sabe que converge en $x_0 = -3$ y diverge en $x_1 = 9$

- ¿Que puede afirmar sobre la convergencia dela serie en: $x_2 = 4$ y en $x_3 = -7$
- ¿Puede garantizar que la serie converge en $x_4 = 8$?

68. Conteste las preguntas justificando sus respuestas si es falso de un contraejemplo.

*a)* Si $A$ es la suma de la serie $\sum a_n$ entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a $A$.

*b)* Si $A$ es la suma de la serie $\sum a_n$ entonces la serie $\sum |a_n|$ converge a $|A|$.

*c)* Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -2$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1} a_n$ converge

*d)* Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1} a_n$ converge

*e)* * Si $\displaystyle\sum_{n=1} a_n$ converge, entonces la sucesión $\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\}$ tiene límite. (F) porque?

*f)* En la serie divergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ¿Es válido siempre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$?

*g)* Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ es convergente, ¿qué puede decir de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

*h)* Suponga que $a_n \geqslant 0$ y $b_n \geqslant 0$, $a_n \leqslant b_n$ a partir de un cierto $n$ y que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, ¿se puede concluir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente?

*i*) Suponga que las series geómetricas $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son convergentes, ¿es siempre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{b_n}$ convergente?

*j*) Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son divergentes, entonces $\sum a_n b_n$ es divergente.

*k*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ es converge?

*l*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, ¿se puede concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ es convergente?

*m*) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y el signo de $a_n$ es alternativamente positivo y negativo, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

*n*) Si $a_n < \frac{1}{n}$ para todo $n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

*ñ*) Si $a_n < \frac{1}{n^2}$ para todo $n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

*o*) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, ¿se puede concluir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ es convergente?

*p*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente?

*q*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge ¿se puede concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{2+|a_n|}$también converge?

*r*) ¿Es cierto que si $a_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ también converge?

*s*) ¿Si $a_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ también diverge?

*t*) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es divergente en $x = 5$, ¿entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 9^n$ es divergente?

*u*) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $x = 2$, ¿qué puede afirmarse acerca de la convergencia en $x = 3$ y en $x = -1$.?

# Series de Taylor y Maclaurin

69. Efectuando diversas operaciones (integrando derivando, ect.) en la serie geométrica, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ obtener las fórmulas de:

*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$

*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}$

*d*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(\frac{1}{1-x})$

*e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

*f*) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

*g*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2!}x^n = \frac{1}{(1-x)^3}$

70. Sabiendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x$.

- Encuentre una representación en serie de potencias de $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt$. R:$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$
- Calcule la suma de la series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3n^2+1)}{(n+1)!} x^n$$

71. Encuentre una serie de potencia para $f(x) = x^2 e^{-x}$. Luego derive esta serie y pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}(n+2)}{n!} = 4$$

72. Encuentre una serie de potencia para la función $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ y halle el radio de convergencia. $R: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n 2^{n+1}) x^n$

73. Determine la serie de Maclaurin de las siguientes funciones.

*a*) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ *b*) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ *c*) $f(x) = (\tan^{-1} x)^2$

74. Hallar una serie de potencia, centrada en $0$, para $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$

75. Encontrar los polinomios de Taylor $P_0$, $P_1$ $P_2$, $P_3$ y $P_4$ para $f(x) = \ln(x)$ centrado en $c = 1$

76. Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = \cos x$, a partir de esta serie halle $h(x) = x\cos x$ y de $f(x) = \cos\sqrt{x-3}$ alrededor de $x = 3$. Identifique los polinomios de Maclaurin $P_0$, $P_2$ $P_4$, y $P_6$ para $f(x) = \cos x$. $\cos\sqrt{x-3} = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{(x-}{2n}$

77. Encuentre el desarrollo de $f(x) = \cos x$ en serie de Taylor alrededor de $x = \pi$.

78. Represente $f(x) = \text{sen}(x)$ como la suma de su serie de Taylor centrada en $c = \pi/3$ y $c = \pi/6$

79. Halle un polinomio de cuarto grado para $f(x) = \ln(1+x)$ y luego aproxime el valor de $\ln(1{,}1)$.

80. La serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

es solución de la ecuación diferencial dada por $y^{(iv)} = y$, ó por $xy'' + y' - y = 0$. Verifique