پاسخ‌نامه تمرین دو

۱- (۶ نمره) تابع F را با استفاده از اتحادها و اصول مهم در جبر بول ساده کنید.

الف- $F(a,b,c,d) = \left(a.b.\left(c+\overline{b.d}\right)+\overline{a.b}\right).\left(\overline{c+d}\right)$

ب- $F(a,b,c) = ab + bc + \bar{a}c$

ج- $F(a,b,c,d) = \overline{(ab(c \oplus d) + \overline{ab}(c \odot d))}$

پاسخ:

الف.

$$
\begin{aligned}
&F(a,b,c,d) \\
&= \left(a.b.\left(c+\overline{b.d}\right)+\overline{a.b}\right).\left(\overline{c+d}\right) && \textbf{\textit{Start}} \\
&= \left(a.b.\left(c+\overline{b.d}\right)+\overline{a.b}\right).\left(\bar{c}.\bar{d}\right) && \textbf{\textit{Demorgan}} \\
&= \left(a.b.\left(c+\overline{b.d}\right)+\bar{a}+\bar{b}\right).\left(\bar{c}.\bar{d}\right) && \textbf{\textit{Demorgan}} \\
&= \left(a.b.\left(c+\bar{b}+\bar{d}\right)+\bar{a}+\bar{b}\right).\left(\bar{c}.\bar{d}\right) && \textbf{\textit{Demorgan}} \\
&= \bar{c}.\bar{d}.a.b.\left(c+\bar{b}+\bar{d}\right)+\bar{c}.\bar{d}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{d}.\bar{b} && \textbf{\textit{Distribution}} \\
&= \bar{c}.\bar{d}.a.b.c+\bar{c}.\bar{d}.a.b.\bar{b}+\bar{c}.\bar{d}.a.b.\bar{d}+\bar{c}.\bar{d}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{d}.\bar{b} && \textbf{\textit{Distribution}} \\
&= \bar{c}.\bar{d}.a.b+\bar{c}.\bar{d}.\bar{a}+\bar{c}.\bar{d}.\bar{b} && (\mathbf{A\bar{A}=0, AA=A}) \\
&= \bar{c}.\bar{d}.(a.b+\bar{a})+\bar{c}.\bar{d}.\bar{b} && \textbf{\textit{Distributive Law}} \\
&= \bar{c}.\bar{d}.(b+\bar{a})+\bar{c}.\bar{d}.\bar{b} && \textbf{\textit{Absorption Law}} \\
&= \bar{c}.\bar{d}.\left(b+\bar{a}+\bar{b}\right) && \textbf{\textit{Distributive Law}} \\
&= \bar{c}.\bar{d} && (\mathbf{A+\bar{A}) = 1}
\end{aligned}
$$

ب.

$$
\begin{aligned}
&F(a,b,c) \\
&= ab+bc+\bar{a}c \\
&= ab+bc.(a+\bar{a})+\bar{a}c \\
&= ab+abc+\bar{a}bc+\bar{a}c && \textbf{\textit{Distribution}} \\
&= ab.(1+c)+\bar{a}c.(1+b) && \textbf{\textit{Distributive Law}} \\
&= ab+\bar{a}c
\end{aligned}
$$

ج.

$$
\begin{aligned}
&F(a,b,c,d) \\
&= \overline{\left(ab.(c\oplus d)+\overline{ab}.(c\odot d)\right)} \\
&= \overline{\left(ab.(c\oplus d)+\overline{ab}.\overline{(c\oplus d)}\right)} \\
&= \overline{\left((ab)\odot(c\oplus d)\right)} \\
&= (ab)\oplus(c\oplus d)
\end{aligned}
$$

۲- (۴ نمره) درستی یا نادرستی عبارت‌های جبری زیر را اثبات کنید.

الف- $\bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z} = x\bar{y} + yz + \bar{x}z$

ب- $y + \bar{x}z + x\bar{y} = x + y + z$

پاسخ:

الف. نادرست. از مثال نقض استفاده می‌کنیم. معادله را در حالت $z = 0$، $y = 1$ و $x = 0$ بررسی می‌کنیم:

$$LHS: \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z} = 1.1 \;+\; 0.0 \;+\; 0.1 \;=\; 1 + 0 + 0 = 1$$
$$RHS: x\bar{y} + yz + \bar{x}z \;= 0.0 \;+\; 1.0 \;+\; 1.0 \;=\; 0 \;+\; 0 + 0 = 0$$

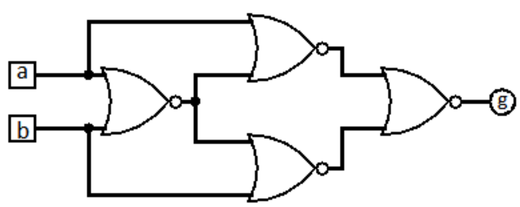
دو طرف مساوی با هم برابر نیستند، بنابراین این معادله در حالت کلی صحیح نیست.

ب. درست.

$$\begin{aligned}
&LHS: y + \bar{x}z + x\bar{y} = y.(1 + x) + \bar{x}z + x\bar{y} \\
&= y + yx + \bar{x}z + x\bar{y} \\
&= y + x.(y + \bar{y}) + \bar{x}z \\
&= y + x + \bar{x}z \\
&= y + x.(1 + z) + \bar{x}z \\
&= y + x + xz + \bar{x}z \\
&= y + x + z.(x + \bar{x}) \\
&= y + x + z \\
&RHS: x + y + z
\end{aligned}$$

دو طرف معادله با یکدیگر برابر شدند، بنابراین این معادله صحیح است.

۳- (۳ نمره) تابع g را بر حسب ورودی‌های a و b بنویسید و سپس آن را با استفاده از قوانین جبر بول ساده کنید.



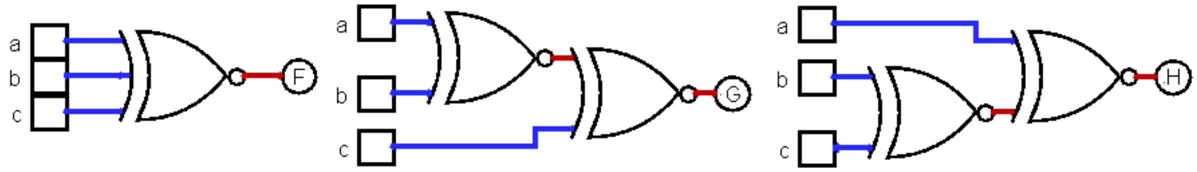
پاسخ:

در اینجا ابتدا با توجه به شکل تابع g را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&g(a, b) \\
&= \overline{\overline{(\overline{(a + \mathrm{b})} + a)} + \overline{(\overline{(a + \mathrm{b})} + \mathrm{b})}} && \textbf{\textit{Start}} \\
&= \overline{\overline{(\bar{a}\bar{b} + a)} + \overline{(\bar{a}\bar{b} + \mathrm{b})}} && \textbf{\textit{Demorgan}} \\
&= \overline{\overline{(\bar{b} + a)} + \overline{(\bar{a} + b)}} && \textbf{\textit{Absorption Law}} \\
&= \overline{\bar{a}b + a\bar{b}} && \textbf{\textit{Demorgan}} \\
&= \left(a + \bar{b}\right).(b + \bar{a}) && \textbf{\textit{Demorgan}} \\
&= ab + a\bar{a} + b\bar{b} + \bar{a}\bar{b} && \textbf{\textit{Distribution}} \\
&= ab + \bar{a}\bar{b} && \mathbf{A\bar{A} = 0}
\end{aligned}$$

پس طبق قوانین جبر بول و ساده‌سازی‌های انجام شده می‌توان نتیجه گرفت که g حاصل xnor دو ورودی a و b است.

۴- (۴ نمره) با رسم جدول درستی (truth table) نشان دهید آیا توابع F و G و H در شکل‌های زیر با هم معادل هستند یا خیر. گیت‌های XNOR را با گیت‌های XOR جایگزین کنید و یک بار دیگر به سوال قبل پاسخ دهید.



پاسخ:

می‌دانیم جدول درستی گیت‌های xor و xnor به صورت زیر است:

a	**b**	$a \oplus b$	$a \odot b$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

حال کافی است با استفاده از این جدول‌ها، جدول درستی توابع را بنویسیم و داریم:

جدول ۱، جدول درستی توابع با گیت‌های xnor

a	b	c	F	G	H
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1

جدول ۲، جدول درستی توابع با گیت‌های xor

a	b	c	F	G	H
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

پس در حالت اصلی که گیت‌ها xnor می‌باشند، توابع G و H با یکدیگر برابرند ولی با F معادل نیستند و در حالت xor هر سه تابع با یکدیگر معادل هستند.

۵- (۳ نمره) کدام یک از توابع زیر می‌تواند به عنوان یک مجموعه منطقی کامل عمل کند. علت پاسخ خود را به طور مختصر شرح دهید.

الف- $f(x, y, z) = xyz$

ب- $f(x, y, z) = xy + xz + y$

ج- دو تابع $f(x, y) = x + \bar{y}$ و $g(x, y) = \bar{x}.y$

پاسخ:

برای اثبات منطق کامل بودن یک مجموعه کافی است نشان دهیم یک منطق کامل دیگر از روی آن قابل ساخت است و اگر برای ساخت آن منطق کامل به ۰ یا ۱ هم نیاز داشتیم، باید نشان دهیم ۰ یا ۱ را هم می‌توانیم بسازیم.

الف)

$f(x, y, z) = xyz$
$AND: f(x, y, x) = xyx = x.y$
$NOT: !!$

تابع not را نمی‌توان با استفاده از تابع f ایجاد کرد، بنابراین این تابع نمی‌تواند به عنوان یک مجموعه منطقی کامل عمل کند.

ب)

$f(x, y, z) = xy + xz + y$
$OR: f(x, y, x) = x.y + x.x + y = x + y + x.y = x + y$
$NOT: !!$

تابع not را نمی‌توان با استفاده از تابع f ایجاد کرد، بنابراین این تابع نمی‌تواند به عنوان یک مجموعه منطقی کامل عمل کند.

ج)

$f(x, y) = x + \bar{y} \, , g(x, y) = \bar{x}.y$
$0: g(x, x) = \bar{x}.x = 0$
$NOT: f(g(x, x), x) = f(0, x) = \bar{x}$
$AND: g(f(g(x, x), x), y) = g(\bar{x}, y) = x.y$

می‌دانیم که مجموعه {AND, NOT} یک منطق کامل را تشکیل می‌دهد، بنابراین تابع f می‌تواند به عنوان یک مجموعه منطقی کامل عمل کند.

همچنین می‌بینیم که مجموعه {OR, NOT} هم قابل ساخت است:

$0: g(x, x) = \bar{x}.x = 0$
$NOT: f(g(x, x), x) = f(0, x) = \bar{x}$
$OR: f\big(x, f(g(x, x), y)\big) = f(x, f(0, y)) = f(x, \bar{y}) = x + y$

هر کدام از این دو پاسخ قابل قبول است.