# Теория Вероятностей и Математическая Статистика
# ФИИТ, 2 курс, 4 семестр

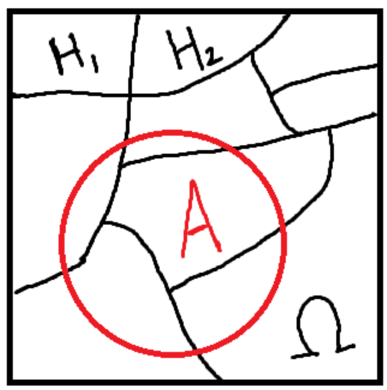
Лекция 3

28 февраля 2021 г.

## 1 Формула полной вероятности

Наша основная тема на сегодня – формула полной вероятности. Мы будем рассматривать ситуации, когда опыт производится сложным образом и содержит слишком много составляющих.

Итак, допустим мы имеем изначально множество исходов опыта $\Omega$. Это множество можно разделить на некоторые части $(H_1, H_2 \ldots)$, а мы хотим рассмотреть некоторое событие $A$, которое так же является подмножеством $\Omega$ (по определению).




Мы можем составить набор событий (которые мы будем называть **гипотезы**): $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ Этот набор удовлетворяет следующим условиям:

1. События попарно: $H_i H_j = \emptyset \quad (i \neq j)$
2. События образуют полную группу: $H_1 + H_2 + \ldots + H_n + \ldots = \Omega$

Таким образом мы получаем набор гипотез – полная группа попарно несовместных событий, которая построена до опыта – априорти. А наше некоторое событие $A$ можно представить как объединение этих групп:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots) = AH_1 + AH_2 + \ldots$$

Очевидно, то слагаемые будут, как и гипотезы, попарно несовместны. Тогда можно перейти к нахождению вероятности через сумму вероятностей:

$$P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + H_2 + \ldots)) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots)$$

А далее к каждому слагаемому применим теорему умножения:

$$= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \dots$$

Таким образом мы получили **формулу полной вероятности**:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)$$

### 1.1 Пример

Три станка изготавливают одинаковые детали. Вероятность брака составляет $0.01, 0.02, 0.03$ соответственно. На 1-м станке изготовленно 2000 деталей, на 2-м – 3000, а на 3-м 5000. ОТК берет на контроль одну из всех выпущенных деталей. Найти вероятность того, что эта деталь – годная.

Первое, что стоить отметить, что задача – многонаправленная (и производство есть, и отбор). Если не брать в рассчет годная ли деталь, можно отметить, что любая деталь будет изготовленна на одном из станков. Значит можно выделить следующие события:

$H_1 = \{$ взятая деталь изготовлена на 1-м станке $\}$
$H_2 = \{$ взятая деталь изготовлена на 2-м станке $\}$
$H_3 = \{$ взятая деталь изготовлена на 3-м станке $\}$

При этом общее количество деталей равно: $N = 10000$. А мы можем вычислить вероятности описанных событий (дроби сокращать не будем, так как одинаковые знаменатели могут в будущем упростить жизнь):

$P(H_1) = \frac{2000}{10000} = \frac{2}{10} \qquad P(H_2) = \frac{3000}{10000} = \frac{3}{10} \qquad P(H_3) = \frac{5000}{10000} = \frac{5}{10}$

На что можно обратить внимание: если мы построили события правильно, то они должны составлять полную группу, а значит и сумма вероятностей должна быть равна единице (что у нас работает).
Далее поинтересуемся, с каким качеством изготовлена деталь. Построим следующее событие:

$A = \{$ изготовленная деталь годная $\}$

Тогда можем построить условные вероятности:

$P(A|H_1) = 0,99 \qquad P(A|H_2) = 0,98 \qquad P(A|H_3) = 0,97$

По условию нам надо найти просто полную вероятность, так что воспользуемся **формулой полной вероятности**:

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \frac{2}{10} \cdot 0.99 + \frac{3}{10} \cdot 0.98 + \frac{5}{10} \cdot 0.97 = \dots$

## 2 Формула Байеса

Допустим, мы проделали следующие шаги:

1. До опыта построены гипотезы
2. Провели опыт (событие $A$ реализовалось, либо нет) // Для себя примем, что произошло событие $A$ произошло (если нет, то произошло $\overline{A}$)

Возникает вопрос: как изменятся вероятности гипотез после проведения опыта. Рассмотрим следующую вероятность некоторой гипотезы $H_k$:

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(H_i)P(A|H_i)} \qquad , k = 1, 2, \ldots$$

Эта запись и называется Формулой Байеса. Она позволяет учесть в опыте произошедшее событие $A$.

## 2.1 Пример

Из 30 экзаменационных билетов студент выучил 10. Какова вероятность, что ему попадется нужный билет?

Если он вышел первый ($A$), тогда вероятность достать билет: $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Если он вышел второй, но все выученные билеты все еще лежат на столе, то получаем условную вероятность: $P(A|B) = \frac{10}{29}$

...

## 2.2 Пример (продолжение 1.1)

Взятая ОТК деталь годная. Найти вероятность того, что эта деталь изготовленна на 3-м станке.

У нас имеются следующие события:
$H_3 = \{$ взятая деталь изготовлена на 3-м станке $\}$
$A = \{$ изготовленная деталь годная $\}$

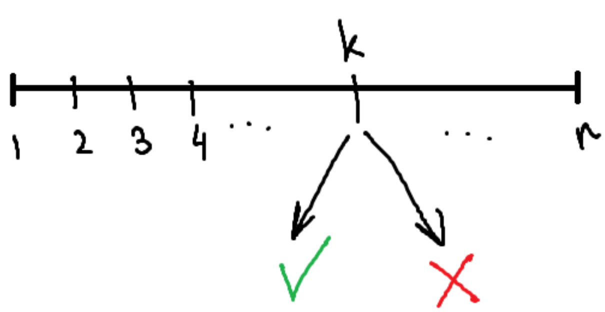
Тогда нам надо найти следующую вероятность, воспользуясь Формулой Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot 0.97}{\frac{2}{10} \cdot 0.99 + \frac{3}{10} \cdot 0.98 + \frac{5}{10} \cdot 0.97} = \frac{5 \cdot 97}{2 \cdot 99 + 3 \cdot 98 + 5 \cdot 97} = \ldots$$

# 3 Схема независимых опытов / Схема Бернулли

Одна из самых важных частей Теории Вероятностей – Схема Бернулли.

В одних и тех же условиях один и тот же опыт повторяется $n$ раз. В каждом из случаев мы имеем один из двух исходов: $A$ реализовалось, либо $\overline{A}$ реализовалось.

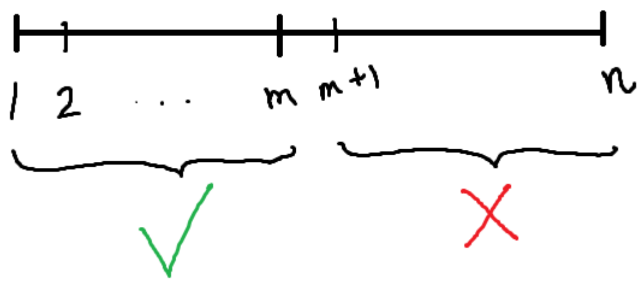


Если событие $A$ реализовалось, мы говорим, что в одном отдельно взятом опыте произошел успех. Вероятность обозначим следующим образом: $P(A) = p$.

Вероятность реализации события $\overline{A}$ (неуспех) обозначим следующим образом: $P(\overline{A}) = 1 - p = q$

Нас же будет интересовать следующее: какова вероятность того, что в последовательности из $n$ опытов "успех"будет зафиксирован $m$ раз (где $0 \leq m \leq n$).

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть у нас имеется $m$ успехов, и все они расположены в начале друг за другом: (1)




Тогда для нашей картины найти вероятность достаточно просто в силу независимости опытов:

$$P(A \cdot \overline{A} \dots \overline{A}) = p^m \cdot q^{n-m}$$

Но в нашем вопросе нас будет интересовать количество успехов, а не место их расположения. То есть требуется выбрать не первые $m$ мест, а произвольные $m$ мест. Тогда количество таких способов мы тоже знаем, как подсчитывается: $C_n^m$ (сочетания из $n$ по $m$). Таким образом, получаем следующую вероятность "$m$ успехов среди $n$ опытов":

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$$

Полученное выражение является формулой Бернулли.

## 3.1 Пример

Бросают 3 монеты. Найти вероятность выпадения одного герба.

Имеем событие:

$A = \{$ выпал 1 герб $\}$ – один "успех"в серии из 3-х опытов:

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

## 3.2 Пример

Что вероятнее: выиграть у равносильного партнера 3 партии из 4, или 5 партий из 8. (Без ничьих!).

"успех" 3 из 4 (75%)

"успех" 5 из 8 (62.5%)

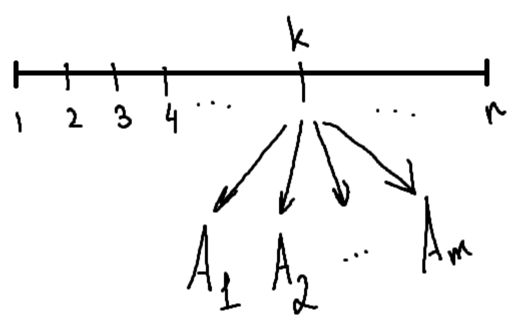
Мы же склоняемся к тому, что более "скромный"успех достижим. Тогда сравним следующие вероятности: $P_3(4)$ и $P_8(5)$. Построим отношение:

$$\frac{P_4(3)}{P_8(5)} = \frac{C_4^3 \cdot (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^{4-3}}{C_8^5 \cdot (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^{8-5}} = \frac{4 \cdot (\frac{1}{2})^4}{\frac{2\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{6} \cdot (\frac{1}{2})^8} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} > 1$$

Таким образом, мы явно показали, что "скромный"результат вероятен меньше. Однако, это вполне логично. Ту же ситуацию мы можем посмотреть в другой ситуации: легче добиться успеха в стометровке или 40 километровом марафоне? Тут уже вполне очевидно, что в стометровке просто надо выложиться один раз в короткий промежуток, в отличии от марафона, где даже в легком режиме можно просто не дойти.

# 4 Полиномиальная схема

Это расширение схемы Бернулли. Теперь у нас ситуация выглядит похожим образом: имеем последовательность независимых опытов, и в каком-то опыте $k$ у нас может произойти событие $A_1$, или событие $A_2$, или событие $A_m$. При этом эти события образуют полную группу попарно несовместных событий.




$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2, \qquad \dots \qquad P(A_m) = p_m$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$$

И для разбора таких ситуаций имеем:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \ldots P_m^{n_m}$$

Эта запись и есть та самая полиномиальная формула.

## 4.1 Пример

На интервале $(1; 5)$ наугад выбирают 5 точек. Нужно найти вероятность

1. В интервале $(1; 2)$ и $(3; 5)$ окажется 2 и 3 точки соответственно
2. В интервале $(1; 3)$ и $(2; 5)$ окажется равное количество точек

1) Можно отметить, что вероятности мы рассчитываем геометрически. То есть попасть именно в точку 1 можно с нулевой вероятностью. А попасть в интервал можно с вероятностью отношения длины интервала к всему интегвалу. Тогда получается, что вероятность попасть в интервал $(1; 2)$ равна $\frac{1}{4}$, а в интервал $(3; 5)$ равна $\frac{2}{4}$.

Однако наши вероятности не образуют полную группу (сумма вероятностей не равна 1). Можем решить эту проблему добавлением интервала $(2; 3)$, для которого вероятность будет $\frac{1}{4}$. Так мы образуем полную группу.

Нас интересует следующее распределение точек:

$$P_5(2,0,3) = \frac{5!}{2!0!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{5\cdot 4}{2}\cdot\frac{2^3}{4^5} = \ldots$$

2) Для этого пункта у нас ситуация немного другая. Интервалы получились $(1;3)$ и $(2;5)$. И длина у них разная, количество точек должно быть равное.

Однако, если учесть, что колво точек всего у нас нечетное (5), а интервалы пересекаются, то в пересечении может быть 1 точка, 3 точки или 5 точек. Таким образом, получаем следующие случаи:

$$P_5(2,1,2) \qquad P_5(1,3,1) \qquad P_5(0,5,0)$$

Таким образом, надо найти сумму вышеприведенных вероятностей:

$$P_5(2,1,2) + P_5(1,3,1) + P_5(0,5,0) =$$
$$\left[\frac{5!}{2!1!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{2}{4}\right)^2\right] + \left[\frac{5!}{1!3!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{2}{4}\right)^1\right] + \left[\frac{5!}{0!5!0!}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{2}{4}\right)^0\right] = \ldots$$

# 5 Пример (для формулы полной вероятности)

Имеется 2 урны: первая содержит 2 белых и 3 черных шара, а вторая 3 белых и 4 черных.

Ситуация следующая: наугад выбрана урна из нее наугад взят шар, оказавшийся белым. Нужно найти вероятность того, что второй шар взятый из той же урны окажется так же белым.

Самое существенное в данном условии то, что взятый шар оказался белым. Это означает, что в нашем опыте есть событие, которое произошло, поэтому вероятность, которую мы ищем, точно условная.

Посмотрим, какие события мы можем здесь рассмотреть:

$H_1 = \{$ шар взят из первой урны $\}$
$H_2 = \{$ шар взят из второй урны $\}$
$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$ (до проведения опыта)
Также имеем:

$A = \{$ первый шар белый $\}$
$B = \{$ второй шар белый $\}$

**Примечание.** Как всегда мы сначала описываем задачу. Нахождением, вычислениями и остальные размышления мы делаем на следующем этапе.

Требуемая вероятность:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

По формуле полной вероятности получим:

$$= \frac{P(H_1)P(AB|H_1) + P(H_2)P(AB|H_2)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}} = \ldots$$

Вообще говоря, можно было бы применить формулу полной вероятности напрямую, но это было бы достаточно сложно вычислять, так как полученные вероятности были бы условными, в том числе условные вероятности гипотез:

$$P(B|A) = P(H_1|A) \cdot P(B|AH_1) + P(H_2|A) \cdot P(B|AH_2)$$