Теор. Вер.

Практическое занятие 1

17 февраля 2021 г.

1 Сочетание

Сочетание – подмножество, содержащее k элементов, выбранном в множестве, содержащее n элементов (k < n) Таким образом, сочетания различаются по составу, но не по порядку элементов.

Допустим, имеем подмножество:
$\{a, b, c\}$
Тогда мы можем взять следующие сочетания размеров k:
для $k = 0$: $\emptyset$
для $k = 1$: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
для $k = 2$: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
для $k = 3$: $\{a, b, c\}$
С использованием обозначений количества сочетаний, имеем:
$C_3^0 = 0 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$

2 Перестановка

Перестановка – упорядоченный набор элементов множества. То есть перестановки одного множества не отличаются по составу, но отличаются по порядку.

Допустим, имеем то же подмножество:
$\{a, b, c\}$
Тогда можем построить следующие перестановки:
$< a, b, c >$
$< a, c, b >$
$< b, a, c >$
$< b, c, a >$
$< c, a, b >$
$< c, b, a >$
И с использованием обозначений можем вычислить количество:

$$P_3 = 3 * 2 * 1 = 3! = 6$$

3 Размещение

Размещение – это подмножество из k элементов, взятое в множестве из n элементов в определенном порядке. Таким образом, размещения различаются либо порядком элементов, либо составом элементов, либо и порядком, и составом

Возьмем вновь $\{a, b, c\}$.
Тогда для $k = 0$: $\emptyset$
для $k = 1$: $< a >, < b >, < c >$

для $k = 2$: $< ab >, < ba >$
$< ac >< ca >$
$< bc >< cb >$
для $k = 3$: $< abc >< acb >$
$< bac >< bca >$
$< cab >< cba >$
И, вводя обозначения, получаем:
$A_3^0 = 1, \quad A_3^1 = 3, \quad A_3^2 = 6, \quad A_3^3 = 6$

4 Формулы для сочетания, перестановок и размещения

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, 0 <= k <= n$$

$$P_n = n!$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 <= k <= n$$

Также можно отметить, что количество способов упорядочивания пустого множества равно $0! = 1$.

5 Бином Ньютона

Сама формула Бинома Ньютона: $(a+b)^n = \sum C_n^k a^k b^{n-k}$
И так же с ней можно связать так называемый "Треугольник Паскаля"($n = 1...5$):

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

При этом, можно отметить, что биномиальные коэффициенты являются семмитричными, то есть: $C_n^k = C_n^{n-k}$
Также мы можем организовать формулу разложения суммы:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k * 1^k * 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

6 Примеры

6.1 Пример 1

Имеем множество цифр: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
Вопрос: какое колво пятизначный чисел можно записать этими числами без повторений?
Можно отметить, что в качестве первой цифры нельзя использовать 0. То есть в итоге получаем: $4 * 4 * 3 * 2 * 1 = 96$

6.2 Пример 2

Имеем те же цифры $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

Вопрос: сколько четных (!) пятизначных чисел можно записать из этих цифр?

Потребуется рассмотреть два варианта: отдельно числа с 0 на конце, отдельно числа с $2, 4$ на конце. Отдельно рассматривать ноль на последнем месте приходится, так как ноль не должен стоять на первом месте в вариантах с $2, 4$ на конце.

Для чисел с 0 на конце получим следующее количество:

$$4 * 3 * 2 * 1 * 1$$

Для чисел с 2 или 4:

$$3 * 3 * 2 * 1 * 2$$

Полученное количество достаточно просуммировать, и получим ответ.

6.3 Пример 3

Задача: 7 девушек водят хоровод, сколькими способами они могут встать в круг?

Решение: подсчитать перестановки? Однако, важно не учитывать сдвиги, так как мы хоровод подразумевает круг!

В круге нет первого места, значит мы его можем построить относительно кого-то. Выберем одного участника, и расположем относительно него всех остальных, то есть 6 человек. Итого получаем перестановку из 6 "элементов":

$$P_6 = 6! = 720$$

6.4 Пример 4

Задача: имеем 7 различных бусинок, сколькими способами можно собрать ожерелье из всех бусинок?

так же задача? Нет. В отличии от хоровода, мы можем перевернуть "с ног на голову"ожерелье, и само ожерелье будет с тем же порядком бусинок (симметрия). То есть количество будет меньше в два раза:

$$\frac{P_6}{2} = 360$$

6.5 Пример 5

! (решение под вопросом, записал что было) !

Имеем: в коробке 6 белых шаров и 4 черных.

Задача: берем из коробки 4 шара. Сколькими способами можно достать 3 белых и 1 черный?

$C_6^3 * C_4^1 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{3*2*1*3*2*1} = \frac{6*5*4}{6} * 4 = 80$

Так как:

$C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

$C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$C_n^3 = C_n^{n-3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$

6.6 Пример 6

Имеем: колода карт, 36 листов. Вопрос: сколькими способами мы можем вытащить четыре карты, среди которых две дамы, причем одна из них дама пик.

Решение. В колоде 36 часть, разделим ее на части: "дама пик "3 других дамы "остальные 32". Из нее мы хотим взять набор: "дама пик "1 дама "2 других карты".

дама пик $\rightarrow$ дама пик
3 других дамы $\rightarrow$ 1 дама
остальные 32 карты $\rightarrow$ 2 карты

Тогда, получаем выбор:

$$C_1^1 * C_3^1 * C_{32}^2 = 1 * 3 * \frac{32 * 31}{2} = 1488$$

6.7 Пример 7

Имеем: в буфете 4 сорта пироженных. Требуется: выбрать 7 штук пироженных, сколькими способами это можно сделать?

По сути, это сочетание с повторениями.

Обозначим пироженные, например, буквами {a,b,c,d}. Попробуем взять такой набор: $\{a, b, c, d * 4\}$

Или такой: $\{a * 2, b * 0, c * 2, d * 3\}$

И много других вариантов. Но надо понять, что определяет этот выбор. По сути, мы можем так же сделать следующие интерпретации наших вариантов:

[* | * | * | ****]
[** | | ** | ***]

Границы с квадратными скобками мы передвигать не можем. Так же имеем 3 внутренних стенки, которые можем передвигать как угодно (в пределах внешних границ). Получается, колво всего элементов – 10 (7 пироженных и 3 стены). То есть в итоге, у нас получается следующее сочетание:

$$C_{10}^3 = C_{10}^7$$

$$C_{10}^3 = \frac{10 * 9 * 8}{6} = 120$$

Ответ: 120

6.8 Пример 8 (самостоятельно)

Сколькими способами можно разместить 7 белых шаров в 4 урнах?

По сути формулировка предыдущей задачи, если будет интересно порешать (не обязательно).

6.9 Пример 9 (самостоятельно)

Сколько неотрицательных целочисленных решений имеет уравнение:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Так же доп. формулировка задачи с пирожеными, если хочется попрактиковаться.

6.10 Отступление про проверки

Возможные проверки при заданиях:
$+$ – правильное решение
$+_{.}$ – правильное решение с помарками
$\pm$ – решение с некритическими ошибками
$\mp$ – решение с ошибками
$-_{.}$ – серьезные ошибки
$-$ – неправильное решение
0 – полный ноль

7 Возведение в степень суммы k слогаемых

Помимо бинома Ньютона, нам очень может понадобиться такое действие, как возведение в степень k слогаемых:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^n =$$
$$= \sum_{n_1+...+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} * a_1^{n_1} * a_2^{n_2} * ... * a_k^{n_k}$$

Так называемая полиномиальная формула.

7.1 Пример

Имеем отрезовк $[0, 10]$.

Задача: поставить 5 точек так, чтобы 2 точки $\in (0, 1)$ и 3 точки $\in (8, 10)$. При этом пусть у каждой точки будет свой номер.

Иная формулировка: 5 шаров, 3 корзины. Сколькими способами можно распределить мячи так, чтобы 2 шара было в первой корзине, 3 в третьей, а центральная – пустая?

Ответ:

$$\frac{5!}{2! * 0! * 3!} = \frac{4 * 5}{2} = 10$$