Теория Вероятностей и Математическая Статистика
ФИИТ, 2 курс, 4 семестр

Практика 5

12 марта 2021 г.

1 Задача 3.38 (ДЗ)

Бросок монеты до серии ГГГ подряд. Какова вероятность того, что придется бросать ровно: а) 6 раз; б) 7 раз.

а) 6 бросков. Распишем вариант подобного:

$$\begin{array}{cccccc} * & * & \text{Р} & \text{Г} & \text{Г} & \text{Г} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\to 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{16}$$

б) 7 бросков. Так же распишем:

$$\begin{array}{ccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{* \; * \; *}} & \text{Р} & \text{Г} & \text{Г} & \text{Г} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Первые три монеты – любая последовательность, кроме ГГГ:

$$\to \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{128}$$

2 Задача 3.78

Какова вероятность того, что при пяти бросаниях монеты герб выпадает по меньшей мере три раза подряд.

Попробуем пронумероавть места и расставить последовательности ГГГ.

	1	2	3	4	5
1)	Г	Г	Г	*	*
2)	*	Г	Г	Г	*
3)	*	*	Г	Г	Г

Можно заметить, что наши варианты пересекаются. Допустим, для второго варианта на первом месте поставим Г, и получим снова первый вариант. Поэтому добавим некоторые ограничения на наши варианты:

	1	2	3	4	5
1)	Г	Г	Г	*	*
2)	Р	Г	Г	Г	*
3)	*	Р	Г	Г	Г

Тогда получим следующие вероятности:
1) $\to \frac{1}{8} \cdot 1^2$
2) $\to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 1$
3) $\to 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$
Больше вариантов вроде как нет, так что итоговая вероятность будет суммой $\sum = \frac{1}{4}$

3 Задача A

Бросают 7 монет. Найдите вероятность того, что при этом выпадет 3 герба.

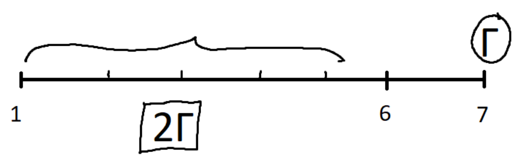
В данном случае имеет место **схема Бернулли**. У нас в каждом испытании реализуется либо Герб, либо Решка. Каждый вариант достигается с вероятностью $\frac{1}{2}$. Тогда:

$$P_7(3) = C_7^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot \frac{1}{2^7}$$

4 Задача B

Монету бросают до тех пор, пока герб будет зафиксирован в третий раз. Найдите в-ть того, что монету потребуется бросать 7 раз.

Можно зафиксировать Герб на седьмой позиции (так как бросам до 7 раз). Оставшиеся 6 мест заполняем двумя Гербами и остальными Решками. Таким образом, мы делим наши исходы на две части – первые 6 бросков (где должно быть 2 Герба) и последний бросок с выпадением Герба:



$$P = \left(C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \dots$$

5 Задача C

Монету бросают до тех пор, пока герб будет зафиксирован в третий раз. Найдите в-ть того, что для этого хватит 7 бросков.

Казалось бы, та же задача, но вместо фиксированного количества бросков мы имеем переменное количество от 3 до 7.

Таким образом, наши варианты – с 3, 4, 5, 6 и 7 бросками:

$$
\begin{array}{cc|l}
\underbrace{123}_{3г} & & P_3 = \frac{1}{2}^3 \\
\underbrace{1-3}_{2г} & \underset{г}{4} & P_4 = C_3^2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \\
\underbrace{1-4}_{2г} & \underset{г}{5} & P_5 = C_4^2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \\
\underbrace{1-5}_{2г} & \underset{г}{6} & P_6 = C_5^2 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} \\
\underbrace{1-6}_{2г} & \underset{г}{7} & P_7 = C_6^2 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Так как вероятности несовместны, мы их можем просто просуммировать и получить ответ.

6 Задача D

Бросают 7 монет. Найдите вероятность того, что при этом выпадет 3 герба, ЕСЛИ герб выпал не на всех монетах.

Ключевое слово в этой задаче – "если". Тогда мы получаем задачу два события A и B и условную вероятность $\to P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$. Распишем эти события:

$A = \{$ выпало 3 Герба из 7 $\}$

$B = \{$ Герб выпал не на всех монетах $\}$

Кстати, $AB = A$. Событие A входит в событие B. Так что фактически (после сокращений) нам нужно найти отношение двух вероятностей:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{C_7^3 \cdot \frac{1}{128}}{1 - \frac{1}{128}} = \dots$$

7 Задача 5.40

Подбрасывают три игральные кости. Какова вероятность того, что проиведение всех выпавших цифр будет равно: а) 20; б) 24?

а) Чтобы получилось такое произведение (20), у нас должны выпать следующе значения: $(1, 4, 5)$, $(2, 2, 5)$.

Пронумеруем наши возможные выпадения $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ и распишем вероянтности выбранных произведений по полиномиальной формуле (n опытов == 3):

$$(1, 4, 5) \to P_3(1, 0, 0, 1, 1, 0) = \frac{3!}{(1!)^3 \cdot (0!)^3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$(2, 2, 5) \to P_3(0, 2, 0, 0, 1, 0) = \frac{3!}{2! \cdot 1! \cdot (0!)^4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

Так как события несовместны, достаточно найти сумму вероятностей.

б) Для произведения 24 достаточно проделать те же операции, то есть расписать возможные произведения (их 3 шт.) и найти вероятности.

8 Задача 5.10

Каждый выпущенный по цели снаряд попадает в нее, независимо от других снарядов, с вероятностью 0.4.

Если в цель попал один снаряд, она поражается с вероятностью 0.3; если два снаряда, – с вероятностью 0.7; если три или более снарядов, то цель поражается наверняка.

Найдите вероятность поражения цели при условии, что по ней выпущено: а) 3 снаряда; б) 4 снаряда.

Попробуем расписать два действия:

1) попадание 2) поражение $\Rightarrow$ формула полной вероятности.

Распишем гипотезы:

$H_0 = \{$ 0 попаданий $\}$
$H_1 = \{$ 1 попаданий $\}$
$H_2 = \{$ 2 попаданий $\}$
$H_3 = \{$ 3 попаданий $\}$
$H_4 = \{$ 4 попаданий $\}$

И условные вероятности:

$P(A|H_0) = 0 \qquad P(A|H_1) = 0.3 \qquad P(A|H_2) = 0.7 \qquad P(A|H_3) = P(A|H_4) = 1$

Таким образом, вероятность поражения цели можно найти по формуле полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{k=0}^{4} P(H_k) \cdot P(A|H_k) = \dots$$

9 Контрольная

На следующей лекции (19.03.21) будет мини-контрольная по разделу "Случайные события"со следующими критериями оценивания:

После этого проходит проверка представленных РЕШЕНИЙ и выставление оценок:

$+$	задача решена полностью (почти полностью)	3 балла
$\pm$	задача решена в целом (решена частично, основная часть решения есть)	2 балла
$\mp$	решение задачи начато (решение частичное, основной части решения нет)	1 балл
$-$	решения задачи нет (практически нет)	0 баллов

Сумма **6, 7, 8, 9** баллов — **зачёт**

Сумма с **0** по **5** баллов — **незачёт**.

Задачи распределяются по этим темам:

1. классическая схема
2. сложение, умн. вероятностей или формула полн. вер-ти
3. бернулли, полиномиальная

Также стоит выполнить задачи электронного учебника в параграфах 1 и 3. Это поможет повысить оценку контрольной (ненулевую) в случае чего.