Теор. Вер.

Лекция 1

17 февраля 2021 г.

1 Вступление

Почта преподавателя: oaw804mai@yandex.ru
Будут три контрольных:

1. ... (где-то после 8 марта)
2. Случайные величины
3. Случайные векторы

Вопросы, которые даются после лекции, требуется прорабатывать (письменно, с подписью листов), не оставляя до конца семестра.

2 Классическая схема теории вероятностей (КСТВ)

Мы будем иметь дело с **опытом**.

Опыт – комплекс условий, который в неизменном виде может быть воспроизведен многократно.

То есть теория вероятностей изучает явления, которые носят массовый характер. К явлениям, которые производятся, 4-5 раз, в принципе нельзя применить теорию вероятностей.

Примером многократного опыта можно назвать классическое подбрасывание монетки (орел, решка).

Результат многократного воспроизведения опыта – это **исход**

2.1 Элементарный исход

Определение. Элементарный исход – это элемент множества элементарных исходов опыта.
Само множество обозначаем "омега большое": Ω.
Элементарные исходы удовлетворяют следующим условиям:

1. Количесво элементарных исходов опыта конечно;
2. Элементарные исходы попарно несовместны (при однократном воспроизведении опыта никакие два элементарных исхода одновременно не реализуются!);
3. Элементарные исходы образуют полную группу (при воспроизведении опыта реализуется один и только один из множества элементарных исходов – никакие другие исходы невозможны);
4. Элементарные исходы равновозможны (кстати, четкой математической формулировки для равной возможности не существует).

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$
Где N – кол-во элементарных исходов опыта.

2.1.1 Пример

Бросают три монеты. Мы хотим построить множество элементарных исходов опыта с бросанием трех монет. Сами мы не будем воспроизводить опыт, но опишем то, что мы наблюдали бы при исполнении опыта.

Варианты с выпадением "орла"(шт): $0, 1, 2, 3$. Эти варианты несовместны (не может быть два сразу), так что они образуют полную группу. Однако, наш опыт говорит о том, что данные варианты будут неравновероятны (чаще мы будем видеть результаты с 1-2 орлами). Тогда, попытаемся это исправить.

Пронумеруем монеты номерами, и укажем все дополнительные сведения для каждой монетки (номер-результат).

Примем 0 – за решку, а 1 за орла. Имеем следующие монеты и элементарные исходы:

$$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3 \\ \text{---} \\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1 \\ 1\ 1\ 0 \\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

И заметим, следующее:

0 орлов – 1 исход
1 орел – 3 исхода
2 орла – 3 исхода
3 орла – 1 исход

У нас получаются разные результаты, которым соответствуют различное количество элементарных исходов. Эти результаты получаются, очевидно, неравновероятными (но не стоит забывать, что все исходы равновероятны! Важно их количество.).

2.2 Случайное событие

Определение. Случайным событием в опыте с множеством элементарных исходов Ω является любое подмножество множества Ω.

Сами события мы будем обозначать большими латинскими буквами: $A, B, ..., Z$, при этом $A \subseteq \Omega$.

A **реализуется** в опыте, если реализуется хотя бы один элементарный исход, входящий в это событие.

Само событие обычно записывают в виде текста, заключенного в фигурные скобки:

$A = \{$ выпал один орел $\} = \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}$ (см элементарные исходы выше)

Все возможные события в опыте образуют **алгеброй событий** $\mathcal{A}$ – множество всех подмножеств в множестве элементарных исходов Ω:

$$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$$

замечание: иногда случайным событием называт что-то, что происходит или не происходит. Это утверждение неверное. Случайным событием в опыте является только элемент в алгебре событий. В опыте может рассматриваться ситуация, когда в опыте что-то просиходит или не происходит, но эта ситуация в алгебру событий не входит. Такое явление не является частью теории вероятностей, поскольку с ним нельзя связать никакой числовой величины.

2.3 Вероятности

Определение. Вероятностью случайного события A в опыте называется отношение:

$$P(A) = \frac{N_A}{N},$$

где N_A – колво элементарных исходов в событии А (количество элементарных исходов, благоприятствующих событию А), N – колво элементарных исходов в опыте (всего).

То есть каждому событию мы сопостовляем число и называем это число **вероятностью** события.

Следствие: вероятность величина **ограниченная**:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Событие, не реализующее ни один элементарный исход: $\emptyset \in \mathcal{A}$ – называется невозможном событим $\Rightarrow P(\emptyset) = 0$.

Событие, реализующее все множество элементарных исходов: $\Omega \in \mathcal{A}$ – называется достоверным $\Rightarrow P(\Omega) = 1$

2.4 Комбинации событий

2.4.1 Сумма событий

Определение. Сумма событий $A + B$ – это событие, состоящее в том,что происходит одно из событий А или В $\rightarrow (A \cup B)$.

2.4.2 Произведение событий

Определение. Произведение событий AB – это событие, состоящее в том, что происходит каждое из событий А и В $\rightarrow (A \cap B)$.

2.4.3 Потивополоэное событие

Определение. Противоположное событие $\overline{A}$ – событие, состоящее в том, что событие A не происходит.

2.5 Несовместные и несовместные события

Случайные события называются несовместными, если они не происходят одновременно. То есть $AB = \emptyset$.

В остальных случаях события называются совместными.

Для несовместных событий A и B: $P(A + B) = P(A) + P(B)$
В общем случае: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
Для событий $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2.6 Геометрические вероятности

Цель: понять, от каких условий КСТВ можно отказаться.

Можно попробовать отказаться от конечности элементарных исходов опыта (условие №1). Например, можем связать исход в измеримой величиной объекта (площадь, объем), но от остальных условий в этом случае отказаться мы не получится.

Тогда мы моэжем определить вероятность события как отношение некоторых характеристик:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)};$$

где $m(\cdot)$ – длина (площадь, объем, вес...).

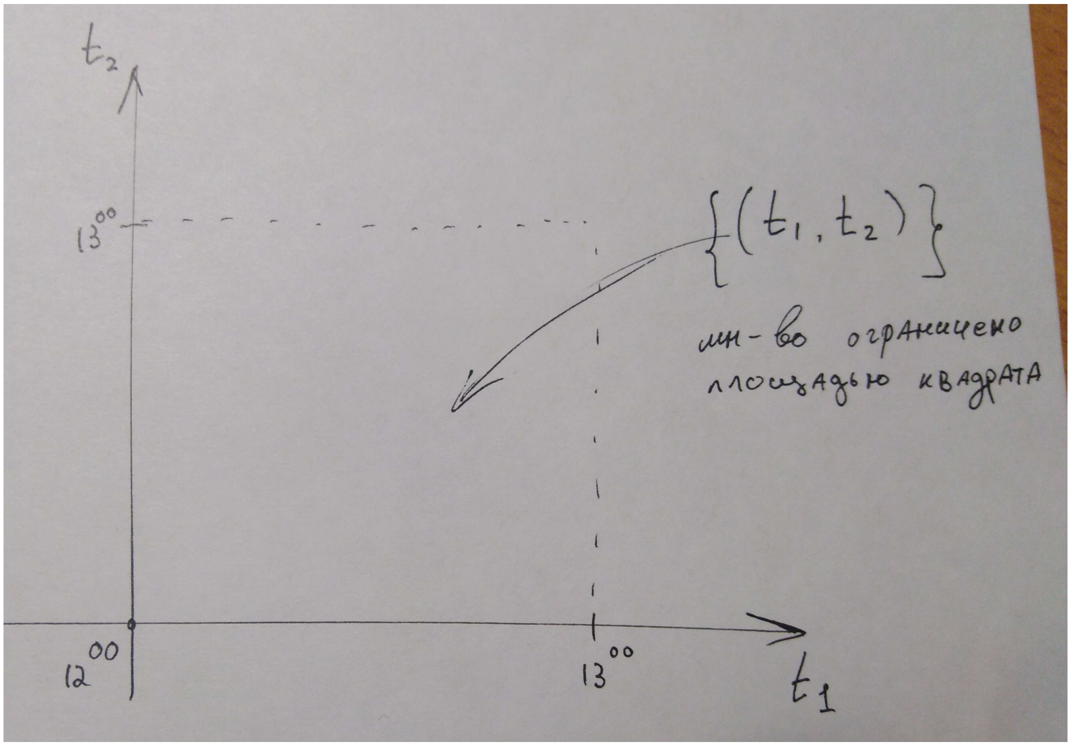
2.7 Примеры

2.7.1 Пример 1

Два студента договорились встретиться от 12 часов до 13. Любой из них, придя на эту встречу, ждет товарища 20 минут и после этого уходит. Какова вероятность встречи студентов в этих условиях?

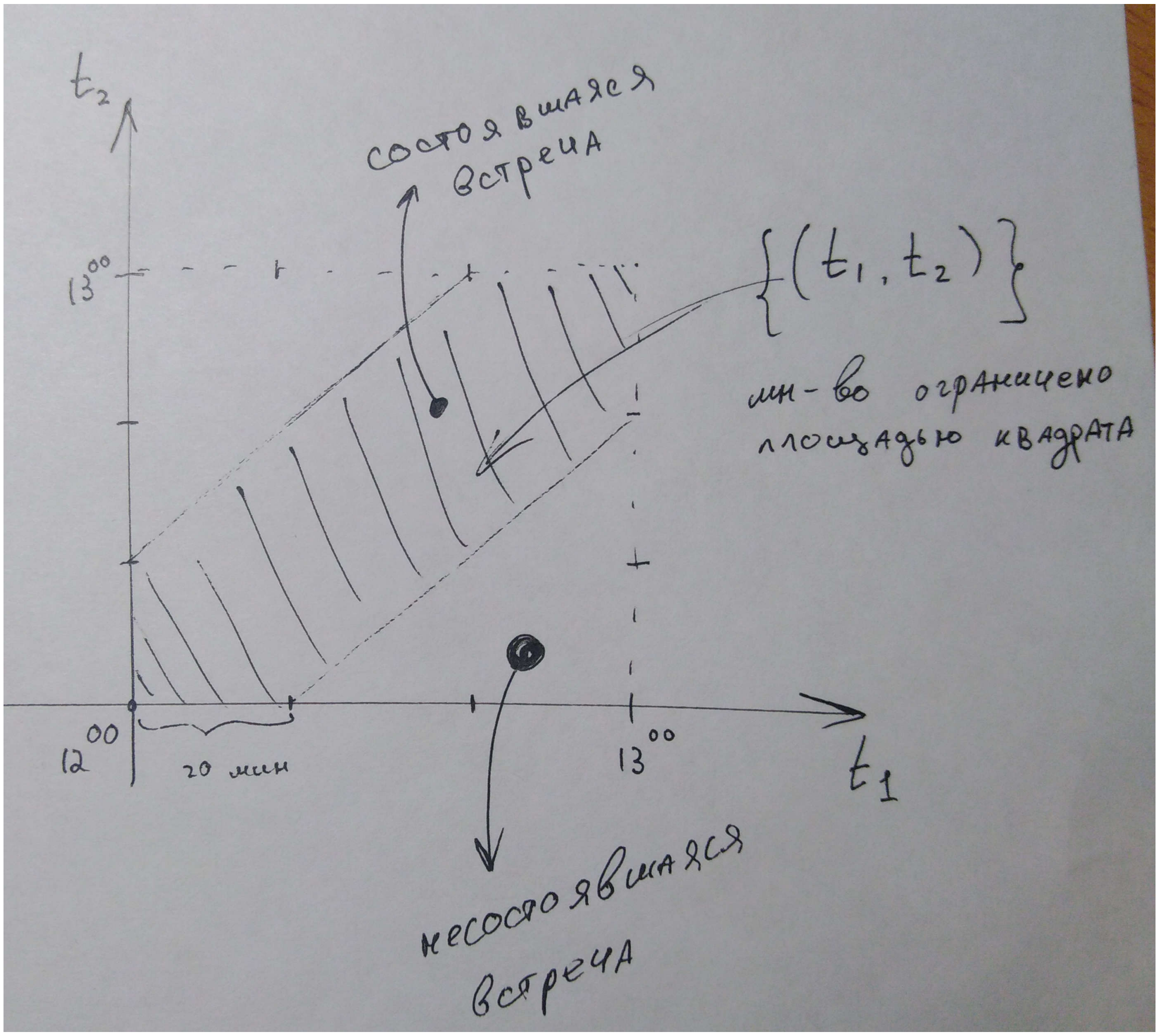
Проблема: у каждого студента есть свое время прихода t_1 И t_2. По КСТВ мы не можем это сделать, так как количество элементарных исходов не конечно (оно, в общем-то, даже не счетно).

Сделаем следующее: введем систему координат. По одной, отложим момент прихода одного студента, по другой – момент прихода второго студента.



При этом множество всевозможных точек (t_1, t_2) ограничено площадью квадрата времени от 12 до 13.

Обозначим событие $B = \{$ встреча состоялась $\} = \{(t_1, t_2) : |t_1 - t_2| \le \frac{1}{3}\}$ ($\frac{1}{3}$ так как доступное время встречи – 20 минут, треть от часа).



В итоге, мы получаем закрашенную область, в котором встреча состоится. Таким образом, вероятность выполнения события B является отношением площадей:

$$P(B) = \frac{S_B}{S_\Omega} = \frac{1 - 2 * \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3}}{1} = \frac{5}{9}$$

Можно заметить, что несмотря на странность условий, вероятность состоявшейся встречи больше половины!

2.7.2 Пример 2

Имеем: m белых шаров и n черных ($m \neq n$). Шары в урне. Наугад берут один шар. Какова вероятность того, что шар – белый?

Пронумеруем шар. Тогда общее число элементарных исходов $N = m + n$.

Событие $A = \{$ шар белый $\} \to N_A = m$

Соответственно, $P(A) = \frac{m}{m+n}$.

2.7.3 Пример 3

Те же белые и черные шары, но их наугад раскладывают в ряд. С какой вероятностью на k-ом месте ($1 \leq k \leq m + n$) в этом ряду будет белый шар?

Ответ, на самом-то деле, такой же: $\frac{m}{m+n}$. Но как мы его получили?

Шары пронумерованы. Значит, общее количество всех возможных исходов $N = (m+n)!$ (колво перестановок).

Колво благоприятных вариантов $N_A = m * (m + n - 1)!$.

$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{m}{m+n}$.

Замечание. Можно не только было пронумеровать шары, можно было опыт построить по другому. Расстановка шаров в ярду – наугад. Берем шар, ставим на первое, берем шар, ставим на второе... Шары стоят наугад. Но шары можно заполнять и в произвольном порядке по свободным местам (в начало, конец, середину). Но это означает, что мы можем начинать произвольное место, в том числе с k-ого, то есть остальные шары нам не нужны для ответа. И по сути получается предыдущая задача.

Но самое главное, что на самом-то деле от номера места ничего не зависит. Независимо от номера места, вероятность останется той же.

2.7.4 Пример 4

Та же ситуация, но поменяем состав шаров: m белых, n черных, k желтых. Шары разложены в ряд наугад. С какой вероятностью белый шар в этом ряду встретится раньше черного?

Не очень-то смешно, но ответ тот же: $\frac{m}{m+n}$.

Шары нумеровать **не** будем. Сколько будет способов расставить шары в ряд, если номеров нет?

Всего в ряду $m + n + k$ мест. Так как желтые особо никак не мешают нам, расставим сначала их:

$N = C^k_{m+n+k} * C^m_{m+n}$

Наконец подсчитаем количество благоприятных исходов:

$N_A = C^k_{m+n+k} * 1 * C^{m-1}_{m+n-1}$ (черные шары нет необходимости расставлять, они просто займут оставшиеся места)

В итоге при делении получится требуемый ответ.

2.7.5 Итог

Несмотря на одинаковость ответов, самое важное – решение. Именно оно важно, в том числе при выполнении дз.