Теория Вероятностей и Математическая Статистика
ФИИТ, 2 курс, 4 семестр

Практика 2

19 февраля 2021 г.

1 Начало, вопросы по предыдущей лекции

1.1 Бутерброд с маслом

Рассмотрим опыт с падающим бутербродом с маслом. Элементарных исходов в нем два: упало маслом или хлебом.

По жизненному опыту масло падает на поверхность чаще, чем хлебом. Однако, говорить, что данные исходы не равновозможны – нельзя. Данный эксперимент чрезмерно трудно воспроизвести, в дело вступает физика.

Так что нашу КСТВ сломать этим не получается. Вообще, тут в дело вступает Оценка вероятности редких событий, до чего мы дойдем не скоро.

1.2 Ранвовероятность != равновозможность

Ранвовероятные бывают случайные события, так как к ним применимо понятие вероятности.

У исходов вероятность как таковую мы не рассматриваем, мы говорим, что они равновозможны и ни одна из них не предпочтительней.

Так что это не одинаковые понятия, важно помнить об этом.

2 Задача 1

В чулане 10 разных пар ботинок. Из них наугад берут 4 ботинка. Найти вероятность того, что среди выбранных ботинков найдется пара.

В рамках КСТВ нам нужно знать общее колво исходов N, сам исход A и колво исходов N_A, благоприятствующих A. Отсюда находим вероятность $\frac{N_A}{N}$.

Мы вибираем ботинки, значит по сути заполняем следующую коробку:

$$[\quad|\quad|\quad|\quad]$$

Тогда всего событий будет $N = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17$.

Далее поймем, а какое событие A нам нужно. Если у нас есть 4 ботинка, тогда у нас может быть 0 пар, 1 пара, 2 пары. Значит, можем выделить следующее событие:

$$A = \{\text{ Найдется пара }\} = \{\text{ 1 пара, 2 пары}\}$$
$$\overline{A} = \{\text{ нет пар }\} = \{\text{ 0 пар}\}$$

Второе событие найти проще, так как меньше элементарных исходов. Для нахождения, пронумеруем пары ботинок:

1 : 20, 19
2 : 18, 17
...
10 : 2, 1

И теперь проведем вычисления:

$$N_{\overline{A}} = 20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14$$

$$P(\overline{A}) = \frac{N_{\overline{A}}}{N} = \frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{16 \cdot 14}{19 \cdot 17} = \dots$$

(Опять же – нахождение числа не является главной целью. Важно решение.)

3 Задача 2

В лифт девяти этажного дома вошли трое. Найдите вероятность того, что для их обслуживания лифт сделает две остановки. (И гарантированно никто не выйдет тут же из лифта на первый этаж.)

В рамках КСТВ общее число вариантов $N = 64 \cdot 8 = 8^3$, а кол-во благоприятных вариантов $N_A = 7$.

Исходы такого опыта, отделениями которой являются разделения по этажам, опять же можно изобразить в виде "коробок":

$$\begin{matrix} [& & | & & | & &] \\ & 8 & & 8 & & 8 & \end{matrix}$$

Для опреедления двух людей, которые выйдут на одном этаже, мы можем две ячейки связать вместе, принимая за одну. И, казалось бы, получим:

$$\begin{matrix} [& & | & &] \\ & 8 & & 7 & \end{matrix}$$

Получаем $7 \cdot 8$. Однако какие ячейки мы можем принять за одну? Вариантов у нас несколько. Потому это количество стоит еще домножить на C_3^2 (именно для перебора "склеек ячеек"! В обычном переборе сочетания не участвуют): $7 \cdot 8 \cdot C_3^2$.

Однако есть и другой, более простой способ. Перечислим исходы:

3 человека на этаже
2 на этаже
1 на этаже

Наше событие $A = \{$ 2 человека на этаже $\}$.
Тогда $\overline{A} = \{$ 3 на этаже, 1 на этаже $\}$.

$$N_{\overline{A}} = 8 + 8 \cdot 7 \cdot 6 = 8 \cdot 48$$

Отсюда легко найти вероятность $P(A)$.

4 Задача 3

Шары: 3 белых, 5 черных. Наугад располагаются в ряд. С какой веротностью белые шары в этом ряду будут лежать подряд?

Пронумеруем шары.

$$N = 8!$$

$$N_A = 6 \cdot 3! \cdot 5!$$

(кто может – объясните)

$$P(A) = \frac{N}{N_A} = \frac{6 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{6 \cdot 6}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{6}{8 \cdot 7}$$

Можно предложить еще один вариант решения.

Пусть шары не имеют номеров (необычно, но все же). То есть отличаются цветом и только цветом.

Общее кол-во мест для 3 белых шаров $N = C_8^3 = C_8^5$.

Благоприятных исходов: $N_A = 6$.

Итого получаем:

$$P(A) = \frac{6}{C_8^3}$$

5 Задача 4

Имеются карточки с числами $1, 2, \ldots, 100$. Наугад берут две карточки. Найти вероятность того, что:

а) одно из взятых чисел меньше 50, а второе больше 59;

б) одно из чисел меньше 40, а второе больше 60;

в) одно из чисел меньше 40, а второе меньше 60.

5.1 Пункт а)

$N = 100 \cdot 99$

$N_A = 49 \cdot 50 \cdot 2$ (умножение на 2, так как можно взять в другом порядке)

Итого $P(A) = \frac{49}{99}$

Вообще, выбор лучше делать следующим образом. Имеем:

1-49 – 49 шт.
50 – 1 шт.
51-100 – 50 шт.

Тогда нашему событию A соответствует (1, 0, 1)

$$P(A) = \frac{C_{49}^1 \cdot C_1^0 \cdot C_{50}^1}{C_{100}^1} = \frac{49 \cdot 50}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \frac{49}{99}$$

5.2 Пункт б)

Имеем следующие варианты:

$$39(< 40)$$
$$21(>= 40, <= 60)$$
$$40(> 60)$$

Из этих вариантов $\rightarrow^2 (1, 0, 1)$. (Все еще вспоминаем про 2, так как всегда можем карты взять в другом порядке.) Итого:

$$P(A) = \frac{C_{39}^1 \cdot C_2 1^0 \cdot C_{40}^1}{C_{100}^2} = \frac{21 \cdot 40}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \frac{52}{165}$$

5.3 Пункт в)

$$(39, 20, 41) \rightarrow^2 (2, 0, 0) + (1, 1, 0)$$

$$P(A) = \frac{C_{39}^2 + C_{39}^1 \cdot C_{20}^1}{C_{100}^2} = \dots$$