Теория Вероятностей и Математическая Статистика
ФИИТ, 2 курс, 4 семестр

Лекция 5

19 марта 2021 г.

1 Характеристики распределения случайной величины

На этой лекции мы продолжим рассмотрение характеристик распределения случайной величины.

1.1 Квантиль распределения

Для непрерывной случайной величины (НСВ) квантиль определяется следующим образом::

Определение. Число x_p – квантиль распределения $F(x)$ представляет собой решение уравнения:

$$F(x_p) = p,$$

и называется **квантиль уровня** p $(0 < p < 1)$.

Замечание 1. В случае ДСВ квантиль определяется в зависимости от задачи.

Замечание 2. В электронном учебнике квантиль относится к §5, 6, 7, там же стоит найти определения для ДСВ для каждой задачи.

1.1.1 Квартель

Еще одно понятие, связанное скорее с мат. статистикой. Это частный случай квантиля, рассматриваемого для величин $p = 0.25, 0.5, 0.75$.

$p = 0.25, 0.75$ – нижний, верхний квантили.

$p = 0.5$ – медиана распределения

1.1.2 Пример

В первом году средняя зарплата была меньше по сравнению с вторым годом. Инфляция при этом отсутствует. Можно ли сказать, что благосостояние/уровень жизни людей выросло?

Можно рассмотреть два случая:

1. У людей с низкой зарплатой зарплата стала еще ниже, а у людей с высокой зарплатой наоборот выросла. Разрыв в зарплатах стал наоборот больше.

2. У всех выросла зарплата, а значит и благосостояние.

В общем случае, говорить об однозначном увеличении уровня жизни не приходится.

1.1.3 Пример

Если рассматривать пример с зарплатами в той же Москве, то мы сможем отметить, что

2 Дискретная случайная величина

Напомним, что ДСВ характеризует кусочно-постоянная функция распределения, и ее можно задать рядом распределения:

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

То есть перечислить точки разрыва функции распределения и скачки в этих точках. Условие нормировки: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

$$M\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

$$D\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - M\xi)^2 dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (x - M\xi)^2 p_i$$

$$M\xi^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} x^2 dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i$$

...

2.1 Производящая функция неотрицательной целочисленной случайной величины

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$\psi(z) = Mz^{\xi} \quad \begin{cases} z - \text{ комплексная переменная} \\ |z| \leq 1 \end{cases}$$

Найдем производную по z:

$$\psi_z(z) = \frac{d}{dz}(Mz^{\xi}) = M(\frac{d}{dz}z^{\xi}) = M(\xi \cdot z^{\xi-1})$$

При этом $\psi_z(1) = M\xi$

Найдем так же вторую производную:

$$\psi_{zz}(z) = M(\xi(\xi-1)z^{\xi-2})$$

И снова посмотрим, что происходит в точке 1: $\psi_{zz}(1) = M(\xi^2 - \xi) = M\xi^2 - M\xi$
Тогда мы можем выразить $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = \psi_{zz}(1) + \psi_z(1)$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \psi_{zz}(1) + \psi_z(1) - \psi_z^2(1)$$