# Einführung in die Numerik

Prof. Dr. Alexey Chernov

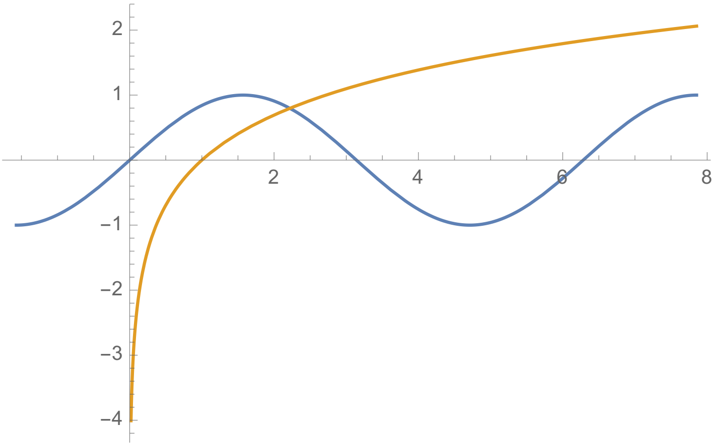
WS 2019/20

# Kapitel 0. Übersicht und Organisatorisches

**Numerik** **=** Konstruktion und Analyse von Algorithmen für mathematische Probleme

# Grundlegende mathematische Probleme

- Wie löse ich eine nichtlineare Gleichung wie $\sin(x) = \log(x)$ ?



# Grundlegende mathematische Probleme

- Wie löse ich $\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \dots & \\ a_{n1}x_1 + & \dots & + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$ mit $n \gg 1$?

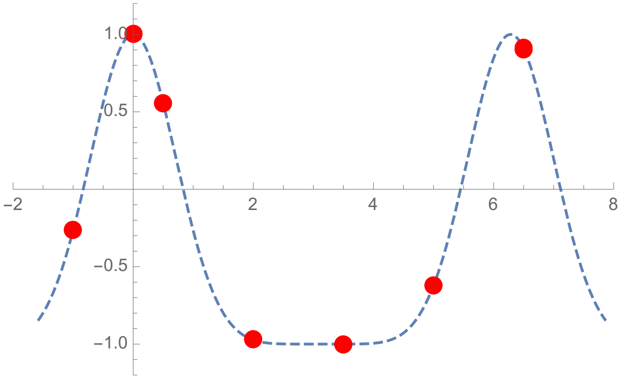
$$\Updownarrow$$

$$Ax = b$$

# Grundlegende mathematische Probleme

- Ein Signal (Funktion) wird zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$ gemessen:

$$y_1 = f(t_1), \ldots, y_n = f(t_n).$$

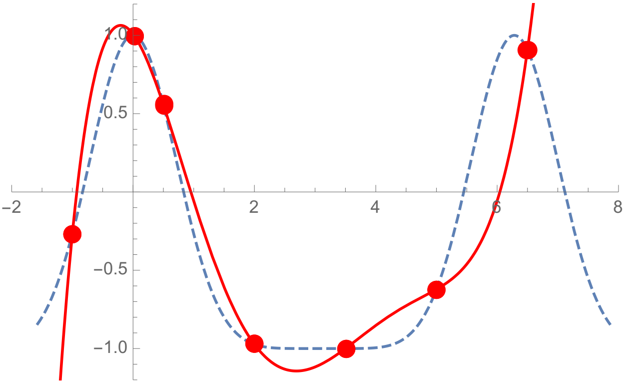



Wie rekonstruiere ich $f(t)$ für $t \neq t_i$? Wie wähle ich $t_i$ optimal?

# Grundlegende mathematische Probleme

- Ein Signal (Funktion) wird zu den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$ gemessen:

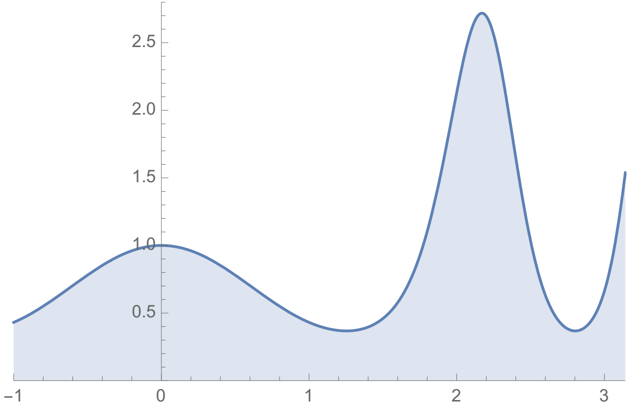
$$y_1 = f(t_1), \ldots, y_n = f(t_n).$$




Wie rekonstruiere ich $f(t)$ für $t \neq t_i$? Wie wähle ich $t_i$ optimal?

# Grundlegende mathematische Probleme

- Wie berechne ich $\int_{-1}^{\pi} \exp[-(\sin x)^2]\,dx$ zur erwünschten Genauigkeit?



# Inhalte und Ziele

**Was wir machen:**

- Grundlegende numerische Verfahren werden vorgestellt,
- ihre math. Eigenschaften werden rigoros analysiert *(bewiesen)*,
- die num. Verfahren werden implementiert.

**Was Sie danach können:**

- Für ein konkretes Problem eine passende Methode wählen,
- Qualität numerischer Approximation zu beurteilen,
- die behandelten num. Verfahren an einem Rechner umzusetzen.

# Themen (6 KP Teil)

- Num. Meth. für nichtlineare Gleichungen
  *(Fixpunkt-Iteration, Newton-Verfahren)*

- Rechnerarithmetik, Stabilität / Kondition

- Num. Meth. für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$
  *(Gauß-Verf. und LR-Zerlegung, Cholesky-Zerlegung, Stabilität)*

- Interpolation
  *(mit Polynomen - nach Lagrange und Hermite - und Splines)*

- Fehlerquadratmethode / lineare Ausgleichsrechnung

- Diskrete Fourier-Transformation
  *(Fourier-Reihen, trigonometrische Interpolation, FFT)*

- Numerische Integration

# Themen (Fortsetzung für die 9 KP-ler)

- QR-Zerlegung einer Matrix
- Eigenwertprobleme
  *(von-Mises-Vektoriteration, inverse Vektoriteration von Wielandt)*
- Num. Meth. für nichtlineare Gleichungssysteme
  *(Fixpunkt-Iteration, Newton-Verfahren)*
- Interpolation mit kubischen Splines
  *oder*
  Einführung in die Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
  *oder*
  ...

# Organisatorisches

- Vorlesungsstil: Folien + Tafel
- 6KP-Vorlesung: 8 Übungszettel, ca. bis Weihnachten
- Wiederholungstutorien nach Weihnachten *(optional)*
- 9KP-Vorlesung: 12 Übungszettel
- Hausaufgaben enthalten Programmieraufgaben *(in MATLAB)*
- Bonuspunkte $\rightarrow$ *nächste Seite*
- Ein Folienskript wird entwickelt und in Teilen hochgeladen
- Klausur:
  - 9KP: 180 min, 6KP: 120 min
  - Hilfsmittel: $2\times$DIN A4 beidseitig handbeschrieben *(eigenhändig!)*
  - Taschenrechner nicht erlaubt
- Die Tutorien starten in der 1. Semesterwoche

# Organisatorisches

**Bonuspunkte:**

- Sind wirksam nach dem Bestehen der Klausur
- Maximale Zahl der Bonuspunkte:
  - 12 für die 9KP-ler
  - 8 für die 6KP-ler
- Erwerb der Bonuspunkte:
  - Die meisten Übungsblätter enthalten 2-3 Hausaufgaben für insgesamt 15 Punkte
  - 1 Bonuspunkt wird erworben, wenn 11 aus 15 Punkte auf einem Übungsblatt erreicht sind
  - sonst 0 Bonuspunkte
  - Abweichende Regelung wird auf dem Übungsblatt explizit erwähnt
- Maximale Zahl der Bonuspunkte $\Rightarrow$ +2 Notenstufen zur Klausurnote:

  Beispiele: 1,7 $\rightarrow$ 1,0 oder 2,3 $\rightarrow$ 1,7.

# Organisatorisches

**Vorlesungstermine:**

- Di. 12:15–13:45, Raum W32 0-005
- Mi. 12:15–13:45, Raum W32 0-005
- Sprechzeiten: z.Zt. nach Vereinbarung, Raum W1 2-223

**Tutorien (6 Übungsgruppen):**

Für 9 KP-ler (wird nach Weihnachten weitergeführt):

- Do. 16:15–18:00, Raum W01 0-015, *Tutor: M. Sc. Nick Wulbusch*

Für 6 KP-ler (werden nach Weihnachten zu Wiederholungstutotien):

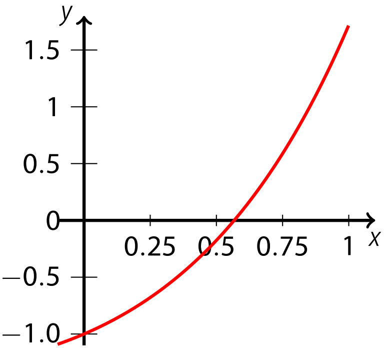
- Do. 10:15–12:00, Raum W01 0-015, *Tutorin: B. Sc. Christin Howe*
- Do. 12:15–14:00, Raum W01 1-117, *Tutor: Dipl. Math. Erik Schetzke*
- Do. 12:15–14:00, Raum W01 0-015, *Tutor: B. Sc. Kiyan Naderi*
- Do. 14:15–16:00, Raum W16A 015/016, *Tutor: B. Sc. Jens Drawer*
- Do. 14:15–16:00, Raum W01 0-011, *Tutorin: B. Sc. Gesa Wimberg*

# Organisatorisches

**Fragen?**

# Kapitel 1
# Nullstellenbestimmung für Funktionen

## 1.1. Einleitung




### Allgemeine Problemstellung

- Gegeben sei eine Funktion

$$f(x), \quad x \in D$$

- Bestimme (eine) Nullstelle von $f$:

$$x^* \in D \quad \text{mit} \quad f(x^*) = 0.$$

## Satz 1.1 (Zwischenwertsatz)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert zu jedem $u$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = u$.

**Idee 1: Bisektionsverfahren.**

- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)f(b) < 0$.
- Berechne zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, so dass

$$f(a_n)f(b_n) < 0 \qquad \text{und} \qquad |b_n - a_n| \to 0, n \to \infty.$$

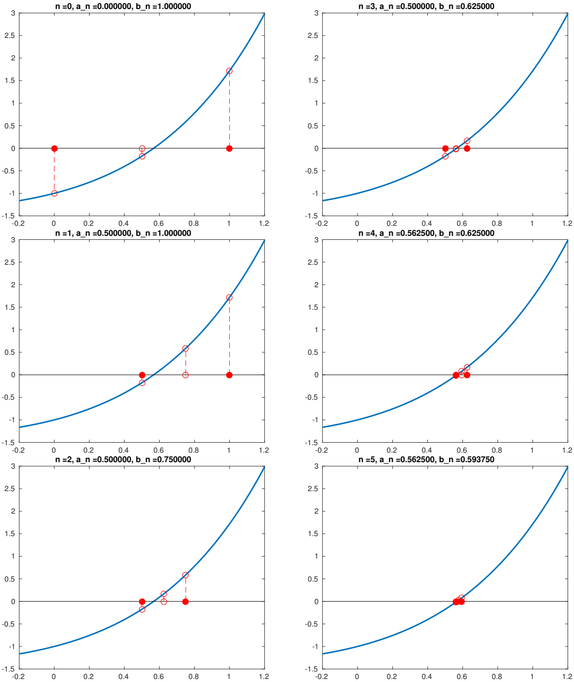
- Dann gilt $a_n \to x^*$ und $b_n \to x^*$ für $n \to \infty$.

## Pseudocode: Bisektionsverfahren

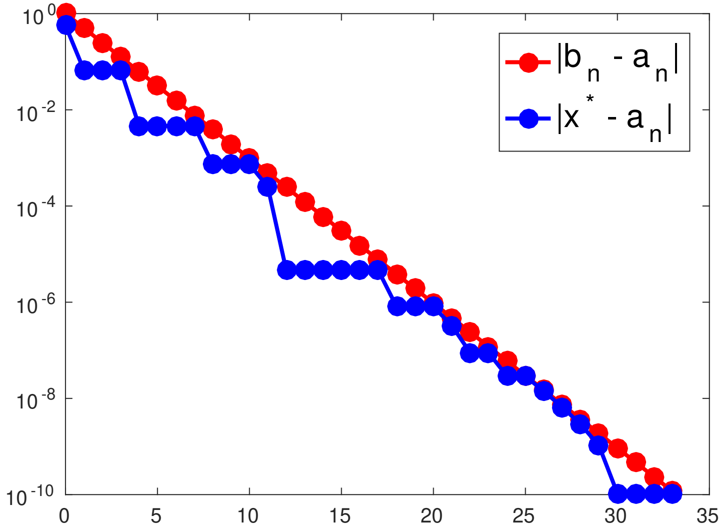
```
while |b − a| > TOL
    c = (a + b)/2

    if f(a)f(c) < 0
        b = c;
    elseif f(b)f(c) < 0
        a = c;
    end
end
```

- Ergänzung durch Behandlung der Spezialfälle nötig, z.B.:

```
elseif f(c) == 0
    return c;
```




| $n$ | $\lvert b_n - a_n \rvert$ | $\lvert x^* - a_n \rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0.56714 |
| 1 | 0.5 | 0.067143 |
| 2 | 0.25 | 0.067143 |
| 3 | 0.125 | 0.067143 |
| 4 | 0.0625 | 0.0046433 |
| 5 | 0.03125 | 0.0046433 |
| 6 | 0.015625 | 0.0046433 |
| 7 | 0.0078125 | 0.0046433 |
| 8 | 0.0039062 | 0.00073704 |
| 9 | 0.0019531 | 0.00073704 |
| 10 | 0.00097656 | 0.00073704 |
| 11 | 0.00048828 | 0.00024876 |
| 12 | 0.00024414 | 4.6185e-06 |
| 13 | 0.00012207 | 4.6185e-06 |
| 14 | 6.1035e-05 | 4.6185e-06 |
| 15 | 3.0518e-05 | 4.6185e-06 |



|b_n - a_n|
|x* - a_n|
10^0
10^-2
10^-4
10^-6
10^-8
10^-10
0
5
10
15
20
25
30
35

## Idee 2: Fixpunktiteration

- Betrachte nichtlineare Gleichungen der Form

$$\boxed{f(x) = 0}$$

mit einer nichtlinearen Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- Das Ziel ist eine oder mehrere Nullstellen $x^* \in \mathbb{R}$ von $f$ zu bestimmen.

- Bestimmung von $x^*$ ist selten möglich $\rightsquigarrow$ **Iterationsverfahren**

$$\begin{cases} \text{Gegeben} \quad x^{(0)}, \\ \text{berechne} \quad x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)}), \qquad n = 0, 1, 2 \dots \end{cases} \tag{1.1}$$

mit einer geeigneten stetigen Iterationsfunktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Die Funktion $\Phi$ soll offenbar mit $f$ zusammenhängen und zwar so, dass die Konvergenz $x^{(n)} \to x^*$ vorliegt.

## Bemerkung

Da die Funktion $\Phi$ insbesondere stetig in $x^*$ sein soll, ist $x^*$ notwendigerweise ein Fixpunkt von $\Phi$, d.h.

$$x^* = \Phi(x^*),$$

denn es gilt $$x^* = \lim_{n\to\infty} x^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \Phi(x^{(n)}) = \Phi(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}) = \Phi(x^*).$$

## Definition 1.2

Die Fixpunktgleichung $x = \Phi(x)$ bzw. Iterationsfunktion $\Phi$ heißt konsistent, wenn

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \Phi(x).$$

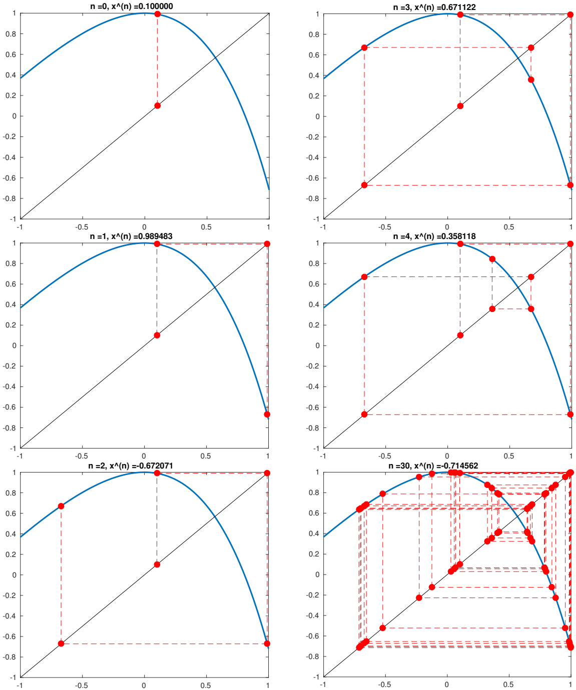
**Achtung:** die Iterationsfunktion $\Phi(x)$ zu $f(x) = 0$ ist keineswegs eindeutig bestimmt!

## Beispiel

Lösen Sie die Gleichung $xe^x = 1$, d.h. die Nullstelle von $f(x) = xe^x - 1$.
Konsistente Iterationsfunktionen sind z.B.

$$\Phi_1(x) = e^{-x}, \qquad \Phi_2(x) = x + 1 - xe^x, \qquad \Phi_3(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

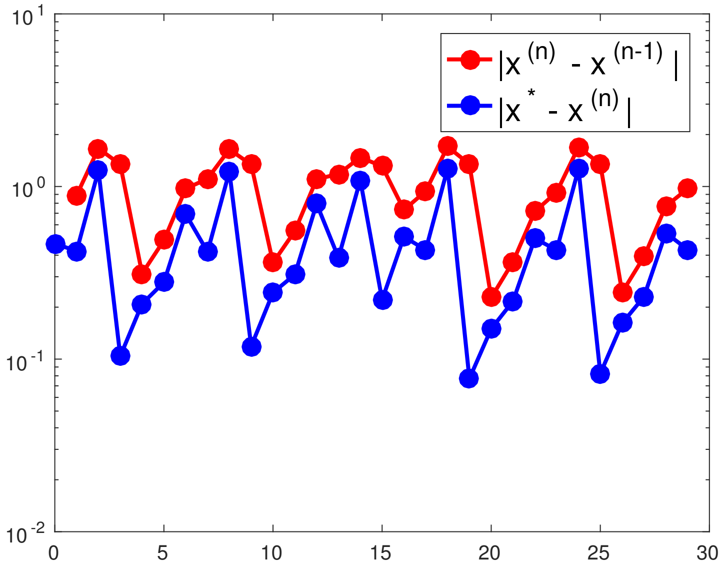
Für den Startwert $x^{(0)} := 0{,}1$ ist es leicht zu überprüfen, dass die Fixpunktiteration mit $\Phi_3(x)$ sehr schnell konvergiert, $\Phi_1(x)$ deutlich langsamer und $\Phi_2(x)$ nicht konvergiert.



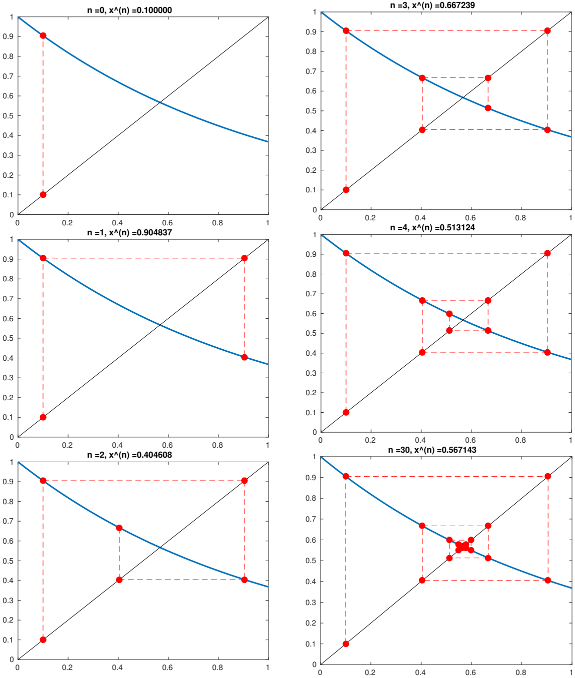

$$\Phi_2(x) = x + 1 - xe^x$$

| $n$ | $\lvert x^{(n)} - x^{(n-1)} \rvert$ | $\lvert x^* - x^{(n)} \rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | – | 0.46714 |
| 1 | 0.88948 | 0.42234 |
| 2 | 1.6616 | 1.2392 |
| 3 | 1.3432 | 0.10398 |
| 4 | 0.313 | 0.20903 |
| 5 | 0.48766 | 0.27864 |
| 6 | 0.9705 | 0.69186 |
| 7 | 1.1101 | 0.41823 |
| 8 | 1.6396 | 1.2214 |
| 9 | 1.3401 | 0.11869 |
| 10 | 0.36168 | 0.24299 |
| 11 | 0.55174 | 0.30875 |
| 12 | 1.103 | 0.79429 |
| 13 | 1.181 | 0.3867 |
| 14 | 1.4759 | 1.0892 |
| 15 | 1.3097 | 0.22056 |
| 16 | 0.73163 | 0.51107 |
| 17 | 0.94069 | 0.42962 |
| 18 | 1.7007 | 1.2711 |
| 19 | 1.3482 | 0.077077 |

(keine Konvergenz)



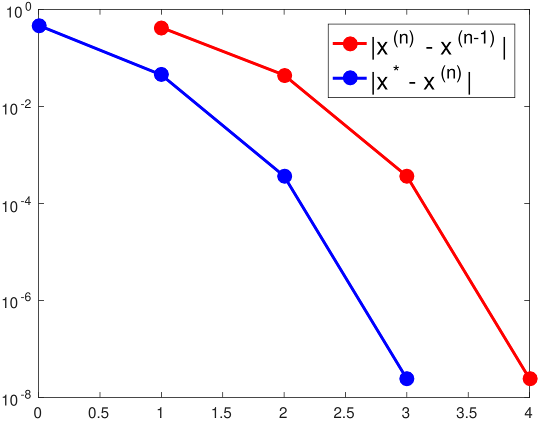
$|x^{(n)} - x^{(n-1)}|$
$|x^{*} - x^{(n)}|$
$10^{1}$
$10^{0}$
$10^{-1}$
$10^{-2}$
0
5
10
15
20
25
30




$$\Phi_1(x) = e^{-x}$$

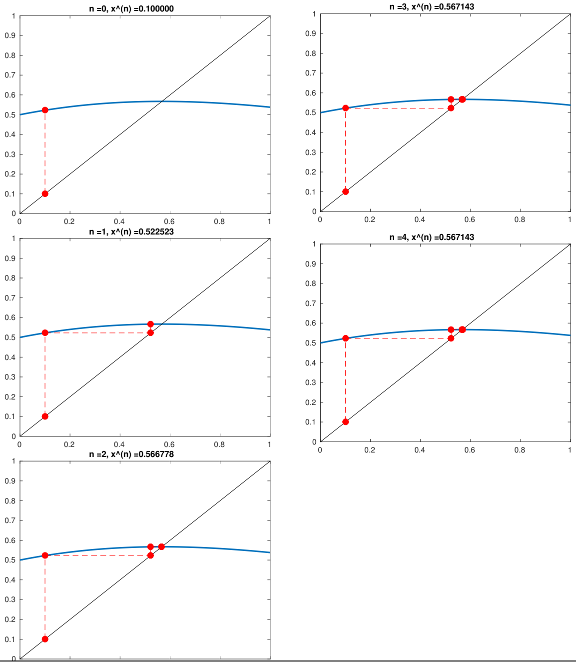
| $n$ | $\lvert x^{(n)} - x^{(n-1)} \rvert$ | $\lvert x^* - x^{(n)} \rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | – | 0.46714 |
| 1 | 0.80484 | 0.33769 |
| 2 | 0.50023 | 0.16254 |
| 3 | 0.26263 | 0.1001 |
| 4 | 0.15411 | 0.05402 |
| 5 | 0.085499 | 0.03148 |
| 6 | 0.049055 | 0.017575 |
| 7 | 0.027631 | 0.010056 |
| 8 | 0.01573 | 0.0056745 |
| 9 | 0.0089019 | 0.0032274 |
| 10 | 0.0050549 | 0.0018275 |
| 11 | 0.0028648 | 0.0010374 |
| 12 | 0.0016254 | 0.00058804 |
| 13 | 0.00092163 | 0.0003336 |
| 14 | 0.00052277 | 0.00018917 |
| 15 | 0.00029646 | 0.00010729 |
| 16 | 0.00016814 | 6.0848e-05 |
| 17 | 9.5359e-05 | 3.4511e-05 |
| 18 | 5.4083e-05 | 1.9572e-05 |
| 19 | 3.0673e-05 | 1.11e-05 |

**Beobachtung:** Für $e_n = |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$ gilt $\boxed{\frac{e_{n+1}}{e_n} \approx \frac{e_n}{e_{n-1}} \approx \cdots \approx L.}$




Konvergenz (Ordnung $p = 1$):

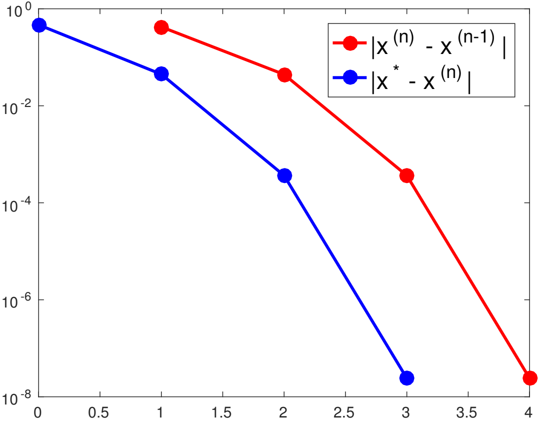
| $n$ | $\lvert x^{(n)} - x^{(n-1)} \rvert$ | $L$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.80484 | 0.89426 |
| 2 | 0.50023 | 0.62153 |
| 3 | 0.26263 | 0.52502 |
| 4 | 0.15411 | 0.58681 |
| 5 | 0.085499 | 0.55478 |
| 6 | 0.049055 | 0.57375 |
| 7 | 0.027631 | 0.56327 |
| 8 | 0.01573 | 0.5693 |
| 9 | 0.0089019 | 0.56591 |
| 10 | 0.0050549 | 0.56784 |
| 11 | 0.0028648 | 0.56675 |
| 12 | 0.0016254 | 0.56737 |
| 13 | 0.00092163 | 0.56702 |
| 14 | 0.00052277 | 0.56722 |
| 15 | 0.00029646 | 0.5671 |
| 29 | 1.056e-07 | 0.56714 |




$$\Phi_3(x) = \Phi_3(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

| $n$ | $\left\lvert x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\rvert$ | $\left\lvert x^{*} - x^{(n)}\right\rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | – | 0.46714 |
| 1 | 0.42252 | 0.04462 |
| 2 | 0.044255 | 0.00036513 |
| 3 | 0.00036511 | 2.4127e-08 |
| 4 | 2.4127e-08 | 0 |

**Beobachtung:** Es gilt $\boxed{e_{n+1} \approx C e_n^p}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{p \approx \dfrac{\log(e_{n+1}/e_n)}{\log(e_n/e_{n-1})}}$




Konvergenz (Ordnung $p = 2$):

| $n$ | $\lvert x^{(n)} - x^{(n-1)} \rvert$ | $p$ |
|---|---|---|
| 0 | – | – |
| 1 | 0.42252 | 2.9838 |
| 2 | 0.044255 | 2.1263 |
| 3 | 0.00036511 | 2.0061 |
| 4 | 2.4127e-08 | – |

# Idee 3: Newton-Verfahren

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion. Gesucht wird eine Lösung $x^*$ von

$$f(x) = 0.$$

Das **Newton-Verfahren** sei wie folgt definiert:
Zu einem gegebenen Startwert $x^{(0)}$ berechne

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{1.2}$$

Das Newton-Verfahren kann als eine Fixpunktiteration mit

$$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

interpretiert werden. Es ist nur dann durchführbar, wenn $f'$ existiert und für alle Iterierten $x^{(n)}$ die Bedingung $f'(x^{(n)}) \neq 0$ gilt.

# Geometrische Interpretation

Gilt $f'(x^{(n)}) \neq 0$, so ist die Iterierte $x^{(n+1)}$ die eindeutige Lösung von

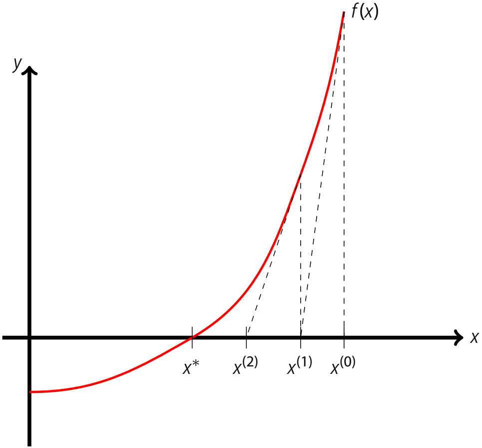
$$g(x) = 0$$

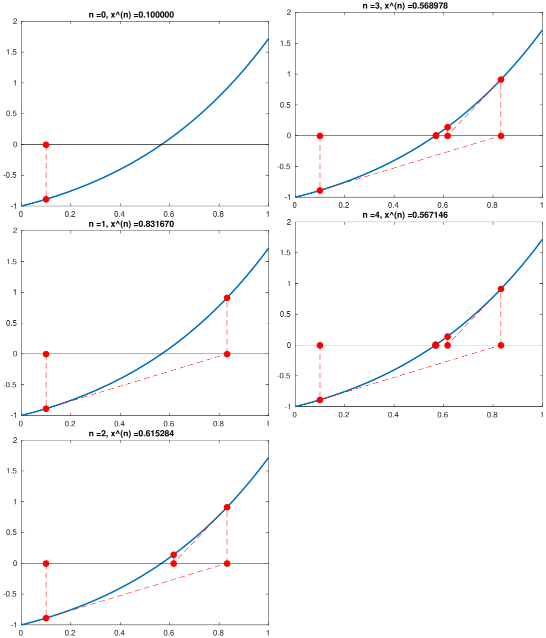
mit $g(x) = a(x - x^{(n)}) + b$, wobei

$$a = f'(x^{(n)}), \qquad b = f(x^{(n)}).$$

Daraus folgt:

- $g(x)$ ist eine gerade
- $g$ ist tangential zu $f$ an der Stelle $x^{(n)}$
- $x^{(n+1)}$ ist der einzige Schnittpunkt von $g(x)$ und der $x$-Achse.






$$f'(x) = (1 + x)e^x$$

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

| $n$ | $\lvert x^{(n)} - x^{(n-1)} \rvert$ | $\lvert x^* - x^{(n)} \rvert$ |
|---|---|---|
| 0 | – | 0.46714 |
| 1 | 0.73167 | 0.26453 |
| 2 | 0.21639 | 0.048141 |
| 3 | 0.046305 | 0.0018351 |
| 4 | 0.0018324 | 2.7548e-06 |
| 5 | 2.7547e-06 | 6.2155e-12 |

$$\Rightarrow \quad p \approx 2.$$

# 1.2. Konvergenzbegriffe

$$\begin{cases} \text{Gegeben} & x^{(0)}, \\ \text{berechne} & x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)}), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases} \tag{1.5}$$

## Definition 1.3

Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Iterationsfunktion. Das Verfahren (1.5) zur Bestimmung von $x^* \in \mathbb{R}$ heißt *lokal konvergent*, wenn $\exists \delta > 0$:

$$\forall x^{(0)} \text{ mit } |x^* - x^{(0)}| < \delta \quad \text{gilt} \quad |x^* - x^{(n)}| \to 0, n \to \infty.$$

Das Verfahren (1.5) heißt *global konvergent*, wenn die Konvergenz für alle Startwerte $x^{(0)}$ vorliegt.

## Definition 1.4

Eine konvergente Folge $x^{(n)} \to x^*$ konvergiert mindestens

- *linear* (d.h. von der Ordnung $p = 1$), wenn es $0 \leq L < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass

$$|x^* - x^{(n+1)}| \leq L|x^* - x^{(n)}|, \qquad \forall n \geq n_0;$$

- *von der Ordnung $p > 1$*, wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$|x^* - x^{(n+1)}| \leq C|x^* - x^{(n)}|^p.$$

Insbesondere entspricht der Fall $p = 2$ der *quadratischen* Konvergenz.

Außerdem,

- Die Folge $x^{(n)}$ heißt *konvergent von genau der Ordnung $p$*, wenn sie konvergent von der Ordnung $p$ ist und keine höhere Konvergenzordnung besitzt.
- Das Verfahren (1.5) heißt *(lokal) konvergent von der Ordnung $p$*, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle Startwerte $x^{(0)}$ mit $|x^* - x^{(0)}| < \delta$ die durch (1.5) erzeugte Folge $x^{(n)}$ von der Ordnung $p$ konvergiert.

## Bemerkung

a) Ist das Verfahren (1.5) linear konvergent, so gilt für alle $x^{(0)} \in B(x^*, \delta)$

$$|x^* - x^{(n)}| \leq L^{n-n_0}|x^* - x^{(n_0)}|, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Insbesondere ist das Verfahren (1.5) lokal konvergent.

b) Je höher die Konvergenzordnung eines Verfahrens ist, desto schneller werden die iterierten den Grenzwert $x^*$ approximieren, denn für $1 \leq q < p$ und $|x^* - x^{(n)}| \ll 1$ gilt

$$|x^* - x^{(n)}|^p \ll |x^* - x^{(n)}|^q.$$

c) Ein Verfahren der Konvergenzordnung $p > 1$ besitzt für jedes $q \in [1, p)$ auch die niedrigere Konvergenzordnung $q$.

# Abschnitt 1.3.
# Konvergenzsätze im Eindimensionalen

## Satz 1.5 (Satz von Taylor, Restglied von Peano)

Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n$-mal stetig differenzierbar in $a$. Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + h_n(x) \cdot (x-a)^n \tag{1.3}$$

mit einer funktion $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $\lim_{x \to a} h_n(x) = 0$.

## Satz 1.6 (Satz von Taylor, Restglied von Lagrange)

- Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $n$-mal stetig differenzierbar in $[a, x]$ bzw. $[x, a]$ $\qquad (f \in C^n)$
- $f^{(n)}$ in $(a, x)$ bzw. $(x, a)$ differenzierbar.

Dann gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{1.4}$$

für ein $\xi$ zwischen $a$ und $x$.

## Satz 1.7 (Konvergenz der Fixpunktiteration)

Sei $p \in \mathbb{N}$ und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Iterationsfunktion mit Fixpunkt $x^* \in \mathbb{R}$, die in $x^*$ insgesamt $p$-mal differenzierbar ist. Ferner, sei

$$\begin{cases} |\Phi'(x^*)| < 1, & \text{falls } p = 1 \\ \Phi^{(k)}(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p-1, & \text{falls } p \geq 2. \end{cases}$$

(a) Dann ist das Verfahren (1.5) lokal konvergent von mindestens der Ordnung $p$.

(b) Gilt weiterhin $\Phi^{(p)}(x^*) \neq 0$, so liegt die genaue Konvergenzordnung $p$ vor.

*Beweis* $\rightarrow$ *Tafel*

## Satz 1.8 (Konvergenz des Newton-Verfahrens)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze eine Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}$ und sei in einer Umgebung von $x^*$ hinreichend oft differenzierbar.

(a) Im Fall $f'(x^*) \neq 0$ konvergiert das Newton-Verfahren lokal mindestens quadratisch (d.h. von der Ordnung $p \geq 2$).

(b) Gilt hingegen $f'(x^*) = 0$, dann konvergiert das Newton-Verfahren linear und zwar genau von der Ordnung $p = 1$.

*Beweis* $\quad \to \quad$ *Tafel*

## 1.4. Ausgewählte Anwendungen

- Babylonsches Wurzelziehen (ca. 1750 v. Chr.): $\sqrt{a} = ?$

$$x^{(0)} := a, \qquad x^{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(n)} + \frac{a}{x^{(n)}}\right).$$

- Computergraphik, z.B. „Fast Inverse Square Root"zur Berechnung eines Normalenvektors zur Visualisierung von Licht und Schatten:
  - Guter Startwert
  - Eine Newton-Iteration ($\times 4$ Beschleunigung auf der 32-bit Architektur)

  https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_inverse_square_root
- Numerische Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen
- Numerische Optimierung
- ...

# 1.5. Nichtlineare Gleichungen im Mehrdimensionalen

- Betrachte nichtlineare Gleichungen/Gleichungssysteme der Form

$$\boxed{F(x) = 0}$$

  mit einer nichtlinearen Abbildung $\quad F : D \to \mathbb{R}^N \quad$ mit $\quad D \subseteq \mathbb{R}^N$.

- Das Ziel ist eine oder mehrere Nullstellen $x^* \in \mathbb{R}^N$ von $F$ zu bestimmen.

- Fixpunktiteration:

$$\begin{cases} \text{Gegeben} & x^{(0)}, \\ \text{berechne} & x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)}), \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases} \tag{1.5}$$

  mit einer geeigneten stetigen Iterationsfunktion $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

Konvergenz?

$x^{(n)} \to x^*$ $\Leftrightarrow$ Konvergenz bzgl. einer Norm $\|x^{(n)} - x^*\| \to 0$.

## Definition 1.9

Sei $V$ ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$$

heißt **Norm**, falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

(N1) $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Eine Norm auf $V = \mathbb{R}^N$ heißt auch **Vektornorm**,
eine Norm auf $V = \mathbb{R}^{N \times N}$ heißt auch **Matrixnorm**.

# Beispiele von Vektornormen

Für $x \in \mathbb{R}^N$ definieren wir

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2} \qquad \text{(euklidische Norm)}$$

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1,\dots,N} |x_k| \qquad \text{(Maximum-Norm)}$$

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{N} |x_k| \qquad \text{(Summen-Norm)}$$

Allgemein: $$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{($p$-Norm)}$$

So gilt für $z = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$:

$$\|z\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\|z\|_\infty = 4,$$

$$\|z\|_1 = 7.$$

mit $1 \leq p < \infty$.

---

*Übung*: Zeigen Sie, dass

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq N^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq p \leq q < \infty \tag{1.6}$$

d.h. diese Normen sind äquivalent, wenn $N$ endlich ist.

# Beispiele von Matrixnormen

Für $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ definieren wir

Beispiel mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ :

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{ij=1}^{N} |a_{ij}|^2} \qquad \text{(Frobeniusnorm)}$$

$\|A\|_F = 3,$

$$\|A\|_Z := \max_{i=1,\dots,N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| \qquad \text{(Zeilensummennorm)}$$

$\|A\|_Z = 4,$

$$\|A\|_S := \max_{j=1,\dots,N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \qquad \text{(Spaltensummennorm)}$$

$\|A\|_S = 3.$

## Bemerkung

Die Norm $\|x\|$ beschreibt eine Länge eines Vektors $x$ (bzw. einer Matrix) und $\|x - y\|$ den Abstand zweier Vektoren (bzw. Matrizen) $x, y$.

## Definition 1.10

Sei $\|\cdot\|:\mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ eine Vektornorm. Die induzierte Matrixnorm ist definiert durch

$$\|A\| := \max_{0\neq x\in\mathbb{R}^{N\times N}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

## Satz 1.11

Die induzierte Matrixnorm ist tatsächlich eine Matrixnorm (d.h. sie erfüllt (N1),(N2),(N3)) und es gilt

(a) $\|Ax\| \leq \|A\|\cdot\|x\| \qquad \forall x\in\mathbb{R}^N$,

(b) $\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\| \qquad \forall A,B\in\mathbb{R}^{N\times N}$,

(c) $\|\mathcal{I}\| = 1$ für die $N\times N$-Einheitsmatrix $\mathcal{I}$.

*Beweis* $\to$ *Tafel*

## Bemerkung

Es gelten die expliziten Darstellungen

(a) $\|A\|_\infty = \|A\|_Z$

(b) $\|A\|_1 = \|A\|_S$

(c) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$,

wobei $\lambda_{\max}(A^\top A)$ den betragsmäßig größter Eigenwert der Matrix $(A^\top A)$ bezeichnet.

## Bemerkung

Die Frobeniusnorm $\|A\|_F$ ist durch keine Vektornorm induziert (denn es gilt $\|\mathcal{I}\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ für eine $n \times n$ Einheitsmatrix $\mathcal{I}$ und $n \geq 2$).

## Satz 1.12 (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ eine abgeschlossene Teilmenge, und die Abbildung $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ bezüglich einer Vektornorm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Kontraktion, d.h. für ein $0 < L < 1$ gilt

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathcal{M}.$$

Dann gilt folgendes:

(a) $\Phi$ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in \mathcal{M}$;

(b) Für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathcal{M}$ liefert die Fixpunktiteration (1.5) eine gegen $x^*$ konvergierende Folge und es gilt

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leq \frac{L}{1-L}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \tag{1.7}$$

*Beweis* $\rightarrow$ *Tafel*

## Bemerkung

(a) Die erste Abschätzung in (1.7)

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leq \frac{L}{1-L}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$$

wird als *a posteriori Fehlerabschätzung* für den *exakten* Fehlerwert $\|x^* - x^{(n)}\|$ bezeichnet.

Denn der Term $\frac{L}{1-L}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$ kann nach der $n$-ten Iteration berechnet werden und stellt eine obere Schranke für den Approximationsfehler $\|x^* - x^{(n)}\|$ mit dem unbekannten(!) $x^*$ dar.

Insbesondere, garantiert das Abbruchkriterium

$$\frac{L}{1-L}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \leq \varepsilon,$$

dass die Abschätzung $\|x^* - x^{(n)}\| \leq \varepsilon$ erfüllt ist.

## Bemerkung

(b) Die zweite Abschätzung in (1.7)

$$\|x^* - x^{(n)}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

wird als *a priori Fehlerabschätzung* für den *exakten* Fehlerwert $\|x^* - x^{(n)}\|$ bezeichnet.

Denn der Term $\frac{L^n}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$ kann zu Beginn der Fixpunktiteration berechnet werden (nur ein Schritt wird benötigt).

Es ermöglicht eine Abschätzung der Anzahl $n = n(\varepsilon)$ der nötigen Iterationsschritte die das gewünschte $\|x^* - x^{(n)}\| \leq \varepsilon$ garantiert:

Für jedes $\varepsilon > 0$, kann $n(\varepsilon)$ definiert werden als die kleinste Zahl $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{L^n}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \leq \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad n(\varepsilon) \leq \lceil a \rceil, \quad a = \frac{\log\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^{(1)}-x^{(0)}\|}\right)}{\log(L)}.$$

# Ausgewählte Fixpunktiterationen

- Das Newton-Verfahren für $\boxed{F(x) = 0}$ im Mehrdimensionalen :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + h^{(n)}, \quad \text{wobei} \quad \mathcal{D}F(x^{(n)})h^{(n)} = -F(x^{(n)}).$$

(Konvergenz $\longrightarrow$ im 9-KP Teil)

- Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme $\boxed{Ax = b}$
  - Umstellung von $Ax = b$ in der Form $x = Bx + c$
  - Iteration:

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$$

  - Konvergenz kann z.B. durch den Banachschen Fixpunktsatz (Satz 1.12) gesichert werden.
  - Klassische iterative Verfahren: Jacobi, Gauß-Seidel, SOR (Konvergenz für spezielle Matrizen $A$ kann bewiesen werden).

## Klassische iterative Verfahren

(mehr dazu kommt in Kapitel 3)

Additive Zerlegung der Matrix: $A = L + D + R$

- Jacobi-Verfahren:

$$Dx^{(n+1)} + (L + R)x^{(n)} = b$$

- Gauss-Seidel-Verfahren:

$$(L + D)x^{(n+1)} + Rx^{(n)} = b$$

- SOR-Verfahren: $0 < \omega < 2$

$$(\omega L + D)x^{(n+1)} + (\omega R + (\omega - 1)D)x^{(n)} = \omega b$$