Prof. Dr. Alexey Chernov
Nick Wulbusch, M.Sc.

WS19/20

Einführung in die Numerik

Präsenzübung 1

Präsenzaufgabe 1:

(a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Iteration

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{1}{x^{(k)}}\right)$$

für $x^{(0)} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ beliebig.

(b) Welche Konvergenzordnung hat diese Fixpunktiteration?

(c) Implementieren Sie die Fixpunktiteration aus Teil a) in `MATLAB`.

(d) Lässt sich diese Fixpunktiteration als Newton-Verfahren interpretieren? Wenn ja, geben Sie an wie.

Prof. Dr. Alexey Chernov
Nick Wulbusch, M.Sc.

WS19/20

Einführung in die Numerik

1. Übungsblatt

Hausaufgabe 1:*(1+2+1+4=8 Punkte)*

Betrachten Sie folgende Funktion

$$f(x) = 1 - x\tan(\tfrac{\pi}{2}x).$$

(a) Wieviele Nullstellen hat $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$? Zeigen Sie, dass die kleinste positive Nullstelle von f im Intervall $[0,1]$ liegt.

(b) Dazu seien nun die folgenden Fixpunktgleichungen gegeben:

$$\text{(i) } x = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \quad \text{und} \quad \text{(ii) } x = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Auf welche der beiden Fixpunktgleichungen lässt sich der Banachsche Fixpunktsatz anwenden?

(c) Stellen Sie das Newton-Verfahren für f auf.

(d) (**Programmieraufgabe**) Implementieren Sie die Fixpunktiteration aus (b) und das Newton-Verfahren aus (c) in `MATLAB` so, dass sie dem folgenden Schema entsprechen

$$Z = \texttt{NewtonMethod}(x^{(0)}, tol),$$
$$Z = \texttt{FixpointIter}(x^{(0)}, tol),$$

wobei $x^{(0)}$ der Startwert und tol eine vorgegebene Genauigkeit ist sowie in Z die letzte Iterierte ausgegeben wird. Testen Sie Ihre Funktionen für die Startwerte

$$x^{(0)} = 0.1 \quad \text{und} \quad x^{(0)} = 0.5$$

sowie für $tol = 10^{-14}$. Ferner, implementieren Sie das Bisektionsverfahren

$$Z = \texttt{Bisektion}(a, b, tol),$$

für passende a, b und $tol = 10^{-14}$. Vergleichen und erklären Sie die Ergebnisse.

Bitte kennzeichnen Sie die m-Files mit der Nummer des Übungsblattes und Ihrer Nachnamen im Dateinamen, z.B. im Falle der Funktion `NewtonMethod` **U1_Nachname1_Nachname2_NewtonMethod.m !**

Hausaufgabe 2: *(1+1+4+1=7 Punkte)*

(a) Stellen Sie das Newton-Verfahren zur numerischen Berechnung der Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = (x-2) \cdot (x^2 - 4)$$

auf.

(b) Bestimmen Sie die lokale Konvergenzordnung des Newton-Verfahren in der Umgebung der Nullstelle $x^* = 2$.

(c) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ und zeigen Sie mithilfe Ihrer Skizze, dass

(i) das Newton-Verfahren für alle Startwerte $x^{(0)} > -\frac{2}{3}$ gegen $x^* = 2$ konvergiert.

Erklären Sie das Konvergenzverhalten für

(ii) $x^{(0)} = -\frac{2}{3}$ und

(iii) $x^{(0)} < -\frac{2}{3}$.

(d) Für den Startwert $x^{(0)} = -1$ führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens durch und geben Sie die Iterierten $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ explizit an.

Ein Bonuspunkt wird bei Erreichen von 11/15 Punkten dieses Übungsblattes erworben.

Abgabe: Mi. 23.10.2019, 12:00 Uhr in das Postfach Ihres Tutors