

Lab2：图的最短路

一、实验介绍

最短路问题是图论理论的一个经典问题，旨在寻找图中两顶点之间的最短路径。

最短路问题在实际生活中有非常广泛的应用，解决这类问题的经典算法有Dijkstra算法、Floyd算法等等。

在本实验中，你需要解决一个单源最短路问题的变种。

二、问题描述

鱼贩高启强从勃北市进了一批水产，要回到京海市销售。这两个城市（含）之间共有 N 个港口，它们之间有 M 条航线相连。每条航线都是单向的，并且构成了一张有向无环图。

高启强从勃北市出发，沿着一条航线到达另一个港口，并最终到达京海市。每条航线的边权，表示从一个港口到另一个港口需要花费的时间。受到潮汐影响，该时间会在 $[lower, upper]$ 内以 $step$ 为步幅波动。 $t = 0$ 时，所有航线的边权都是 $upper$ ， $t = 1$ 时刻，边权变化为 $upper - step$ ，以此类推。当某航线的边权变为 $lower$ 后，下一时刻它的边权会变为 $lower + step$ ，直至变为 $upper$ ，此为一个完整的变化周期。每条航线的航行时间在踏上该条航线时就已经被确定了，不会在于该航线的航行过程中发生变化。

高启强可以在勃北市等待出发，但是出发的时间必须是 K 的整数倍，否则会被勃北市海事局拦截。中间港口停靠需要缴纳费用，但是高启强没有钱，因此他不能在中间港口等待，只能在到达某港口后立刻踏上下一条航线。

高启强想知道，他于何时出发，最少需要花费多少时间才能到达京海市。

三、输入输出

你的程序通过 `stdin` 接受输入，并将结果输出到 `stdout`。

每个测试用例包括：

1. 第一行为3个整数 N, M, K 。
2. 接下来的 M 行描述图中的 M 条边，每行为4个整数 $u, v, lower, upper, step$ ，表示一条从 u 到 v 的边，边权在 $[lower, upper]$ 之间以 $step$ 的步幅变化。

请注意：

1. 输入只保证给出的是有向无环图，不意味着对每条边都有 $u < v$ 。
2. 在 N 个顶点中，编号为0和 $N - 1$ 的顶点分别代表勃北市和京海市，数据保证它们分别是拓扑序最小和最大的顶点。

输出为一行两个整数，用空格隔开，分别为高启强从勃北市出发的时间和到达京海市的时间。

四、数据范围

有向无环图的顶点数 N 和边数 M 满足：

$$1 < N < M \leq 1000 \quad (1)$$

出发时间步幅 K 满足：

$$1 \leq K \leq 50 \quad (2)$$

每条边的 $lower$, $upper$ 和 $step$ 满足：

$$1 \leq lower \leq upper \leq 2000 \quad (3)$$

且

$$(upper - lower) \bmod step = 0 \quad (4)$$

五、样例

输入

```
1 4 5 1
2 0 1 1 3 2
3 1 2 1 7 3
4 2 3 4 9 1
5 0 2 2 10 2
6 1 3 7 8 1
```

输出

```
1 1 9
```

解释

在这张图中，点0和点3分别表示勃北市和京海市，且最优方案是：

1. 在勃北市等待1个单位时间，出发时间为 $t = 1$ 。
2. 从勃北市出发，沿着航线 $0 \rightarrow 1$ 到达港口1。该航线在 $t = 1$ 时刻的权值为 $3 - 1 * 2 = 1$ ，因此航行消耗了1个单位时间，到达时间为 $t = 2$ 。
3. 从港口1出发，沿着航线 $1 \rightarrow 2$ 到达港口2。该航线在 $t = 2$ 时刻的权值为 $7 - 2 * 3 = 1$ ，因此航行消耗了1个单位时间，到达时间为 $t = 3$ 。
4. 从港口2出发，沿着航线 $2 \rightarrow 3$ 到达京海市。该航线在 $t = 3$ 时刻的权值为 $9 - 3 * 1 = 6$ ，因此航行消耗了6个单位时间，到达时间为 $t = 9$ 。

六、实现提示

1. 一种解法：对给定的出发时间，按照拓扑序遍历图中所有顶点，维护到达每个顶点的所有可能时间点，并将这些时间点按照拓扑序传播，直到终点。
2. 显然，高启强可以在起点等待边权降低，使需要花费的总时间减少。等待的时间存在上限，超出该上限后，边权降低带来的收益无法弥补推迟出发的惩罚。如何简单估算出这个上限？（不一定需要很紧凑）

3. 如何利用这个上限，对1中描述的解法进行剪枝？

七、探究实验

请完成一份书面报告，要求：

- 简述一下你的解题思路。
- 简单定性描述一下，输入数据满足什么要求时，在起点等待一下再出发反而会让到达终点的时间更少？

在书面报告中，你不需要使用图表或者公式，只需要用文字描述你的想法即可。

我们不鼓励在实验报告上无意义内卷，因此实验报告**不应**超过1000字，且字数多少不影响我们对实验报告的评判。

八、实验评分

我们提供了Makefile文件，在主目录下执行 `make` 指令生成可执行程序 `graph`。

提交实验请将单个C++源代码文件上传Canvas，命名使用“学号+姓名+lab2.cc”，如“521123456789+张三+lab2.cc”。

探究实验报告同样上传到Canvas平台（会有单独作业用于提交），要求PDF格式，命名无要求。

Lab2截止日期为北京时间**2023年5月7日21:59**（最终截止时间以 canvas 系统为准）。

九、注意事项

1. 切勿抄袭！若发现明显雷同现象，该实验评分将以0分计。
2. 注意实验截止日期，迟交或不交会视情况扣分。
3. 请注意按照实验要求完成，避免因自动脚本评分造成的判分失误。
4. 有问题可通过 [邮件](#) 或微信群联系助教赵逸凡。