第一章　随机事件及其概率

内容提要

一、预备知识

1. 两个基本原理

（1） 加法原理

做一件事, 完成它可以有 n 类办法, 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有 m_2 种不同的方法, ……, 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有: $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法.

（2） 乘法原理

做一件事, 完成它需要分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种不同的方法, 做第二步有 m_2 种不同的方法, ……, 做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有: $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n = \prod_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法.

2. 排列

(1) 排列和排列数

从 n 个不同元素中, 任取 m 个($m \le n$)不同元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 所有这样不同排列的种数（排列数）有 A_n^m 种, 这里 $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

(2) 可重复元素的排列

从 n 个不同元素中取出 m 个($m \le n$)元素(元素可以重复), 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个可重复元素的排列. 所有这样可重复排列的种数（可重复排列数）有 n^m .

3. 组合

(1) 组合和组合数

从 n 个不同元素中, 任取 m 个($m \le n$)不同元素, 不计顺序并成一组, 叫

做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 这样不同的组合种数（组合数）有 C_n^m 种, 这里 $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

(2) 组合数的性质

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \qquad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}.$$

二、随机现象、随机试验、随机事件

1. 随机现象

在一定条件下, 可能发生也可能不发生的现象称为随机现象.

随机现象仅就一次观察呈现不确定性, 但在大量重复试验中, 具有某种统计规律性.

2. 随机试验、随机事件

(1) 随机试验

对随机现象进行观察称为随机试验.

随机试验具有以下特征:

① 重复性　试验在相同的条件下可重复进行;

② 明确性　每次试验结果不止一个, 并事先明确所有可能的结果;

③ 随机性　每次试验前, 不能预知出现的可能结果.

(2) 随机事件

① 基本事件和样本空间　随机试验的每一个可能结果称为基本事件或称为样本点, 所有基本事件构成的集合称为样本空间, 记作 S.

② 随机事件　由样本空间中某些样本点所成的集合即样本空间的子集, 简称事件. 事件 A 发生, 当且仅当 A 所包含的一个样本点出现. 特别地, 样本空间 S 称为必然事件, 空集 ϕ 称为不可能事件.

3. 事件间的关系与运算

(1) 事件间的关系与运算（如表 1-1 所示）

(2) 完备事件组

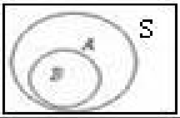
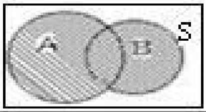
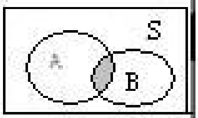
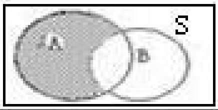
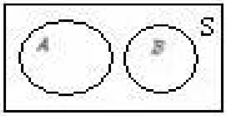
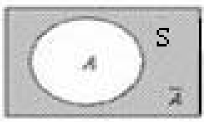
如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 满足

① 两两互不相容 (互不相容性);

② $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = S$ (完备性),

则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组.

表 8-1 事件的运算及关系图表

运算或关系名称	记号	定义	文氏图
A包含B（包含关系）	$A \supset B$ 或 $B \subset A$	事件B的发生，必然导致事件A的发生	
A、B相等（相等关系）	$A = B$	A、B相互包含	
和事件（加法运算）	$A + B$ 或 $A \cup B$	事件A与B至少有一个发生（A或B发生）	
积事件（乘法运算）	AB 或 $A \cap B$	事件A与B同时发生（A且B发生）	
差事件（减法运算）	$A - B$	事件A发生，但事件B不发生	
互不相容（互斥关系）	$AB = \Phi$	事件A和B不能同时发生	
对立事件（互逆关系）	$\overline{A}$ $A + \overline{A} = S$ 且 $A\overline{A} = \Phi$	A、$\overline{A}$两事件中必有一个发生，但不能同时发生	

(3) 运算的性质

① 交换律 $A\bigcup B=B\bigcup A$ $A\bigcap B=B\bigcap A$

② 结合律 $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$

$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$

③ 分配律 $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

④ 对偶律(德·莫根律) $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$, $\overline{A\bigcap B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$,

一般地,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\,,\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}\,.$$

三、概率的定义

1. 概率的统计定义

(1) 频率 在相同条件下进行 n 次重复试验, 事件 A 出现 m 次, 则称

$$f_m(A)=\frac{m}{n}$$

为事件 A 的频率.

(2) 概率的统计定义

在相同的条件下, 重复进行多次试验, 事件 A 的频率的稳定值 p 称为随机事件 A 的概率, 记作 $P(A)=p$.

2. 概率的古典定义

(1) 古典概型

古典概型具有以下特点:

① 所有可能的试验结果只有有限个, 即试验的基本事件个数有限;

② 试验中每个基本事件发生的可能性相等.

并称满足上述条件的事件组为等概基本事件组.

(2) 概率的古典定义

在古典概型中, 设基本事件总数为 n, 事件 A 包含的基本事件数为

m ($m \le n$), 则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

3. **概率的几何定义**

(1) 几何概型

设平面（或直线, 空间）上有一区域 S , 区域 $A \subset S$, 在区域 S 内任意投掷一点, 假设该点落在任意一点处都是等可能的, 并且落在区域 S 的任何部分 A 内的概率, 只与这部分的面积成正比例, 而与其位置与形状无关.

(2) 概率的几何定义

在几何概型中, 在区域 S 内任意投掷一点,而落在区域 A 内的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)},$$

这里, $L(A)$ 与 $L(S)$ 表示平面上相应区域的面积（或直线上区间的长度, 空间区域的体积）.

4.概率的公理化定义

设试验 E 的样本空间为 S , 每一个事件 $A \subset S$ 对应一个数 $P(A)$, 称为 A 的概率, 必须满足下面三条公理:

(1)（非负性） $P(A) \ge 0$;

(2)（规范性） $P(S)=1$;

(3)（可列可加性） 对于任意可列个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i} P(A_i).$$

四、概率的计算

1. **概率的基本运算公式**（加法公式）

(1) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$;

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(3) $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B\overline{A})$;

(4) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \le i<j \le n} P(A_i A_j)+\sum_{1 \le i<j<k \le n} P(A_i A_j A_k)-$

$$\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

2. **概率的乘法公式**

(1) 条件概率

设 A、B 为两事件, 且 $P(A)>0$, 在事件 A 已发生的条件下, 事件 B 发生的概率称为事件 B 在给定事件 A 下的条件概率, 记作 $P(B|A)$.

(2) 概率的乘法公式

若 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$;

若 $P(AB)>0$, 则 $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$;

一般地, 若 $P(\bigcap_{i=1}^{n-1}A_i)>0$, 则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_n).$$

(3) 事件的相互独立性

① 对于任意事件 A、B, 若 $P(A)>0$, 有 $P(B|A)=P(B)$成立, 则称事件 A 与事件 B 相互独立.

② 事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(AB)=P(A)P(B)$;

③ 若事件 A 与事件 B 相互独立, 则 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

3. **全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式**

(1) 全概率公式

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组, 且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对于任意事件 B, 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i).$$

(2) 贝叶斯公式(逆概公式)

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成完备事件组, 且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对于任一具有正概率的事件 B, 有

$$P(A_k \mid B)=\frac{P(A_k)\cdot P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

例题解析

例1 写出下列随机试验的样本空间及代表所述事件的子集:

(1) 袋中装有红、黑、白色球各 3 个, 同一种颜色的 3 个球分别标有号码 1, 2, 3, 从袋中任取一球.

A:“取到红球”; B:“取到的不是 3 号球”.

(2) 相继掷一枚硬币两次.

A:“第一次出正面”; B:“第二次出反面”; C:“两次出同一面”.

解 (1) 以 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的红球, 以 $\omega_4,\omega_5,\omega_6$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的黑球, 以 $\omega_7,\omega_8,\omega_9$ 依次代表标号为 1, 2, 3 的白球. 依题设即有

$S=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9\}$,

$A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$.

由于取到的不是 3 号球也就是取到的是 1 号或 2 号球, 因此

$B=\{\omega_1,\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_7,\omega_8\}$.

(2) 以 ω_1 表示第一次出正面, 第二次也出正面, 以 ω_2 表示第一次出正面, 第二次出反面, 以 ω_3 表示第一次出反面, 第二次出正面, 以 ω_4 表示第一次出反面, 第二次出反面. 依题设即有

$S=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$,

$A=\{\omega_1,\omega_2\}$, $B=\{\omega_2,\omega_4\}$, $C=\{\omega_1,\omega_4\}$.

例2 化简下列事件的表示式:

(1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$;

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)$;

(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$.

解 (1) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = A\cup AB\cup A\overline{B}\cup B\overline{B}$ (分配律)

$= A$ $(AB\cup A\overline{B}=A, B\overline{B}=\phi)$

(2) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap(\overline{A}\cup B)$ （利用(1)的结果）

$=A\overline{A}\cup AB$ （分配律）

$=AB.$ （$A\overline{A}=\phi$）

(3) $(A\cup B)\cap(B\cup C)=AB\cup B\cup AC\cup BC$ （分配律）

$=B\cup AC.$ （$AB\cup BC\subset B$）

例3 证明下列关于事件的等式：

(1) $A\cup B=A\cup(B\overline{A})$；

(2) $(A-B)\cup(B-A)=\overline{(AB)\cup(\overline{A}\cdot\overline{B})}$；

(3) $B-A=\overline{AB}-\overline{\overline{A}B}$.

证明(1) $A\cup B=(A\cup B)\cap S=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})$

$=A\cup AB\cup B\overline{A}$ （$A\overline{A}=S$）

$=A\cup B\overline{A}.$ （$AB\subset A$）

(2) $\overline{(AB)\cup(\overline{A}\cdot\overline{B})}=\overline{AB}\cap\overline{(\overline{A}\cdot\overline{B})}$ (对偶律)

$=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup B)$ (对偶律)

$=\overline{A}A\cup\overline{B}A\cup\overline{A}B\cup\overline{B}B$ (分配律)

$=A\overline{B}\cup B\overline{A}$ ($A\overline{A}=B\overline{B}=S$)

$=(A-B)\cup(B-A).$

(3) $\overline{AB}-\overline{\overline{A}B}=(\overline{AB})\cap(\overline{A}B)=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(\overline{A}B)$ (对偶律)

$=\overline{A}B.$ (分配律，$B\overline{B}=S$)

例4 设 A，B，C 表示三个随机事件，试用事件的运算表示下列随机事件.

(1) A 发生而 B，C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A，B，C 三个事件都发生；

(4) A，B，C 三个事件至少有一个发生；

(5) A，B，C 三个事件至少有两个发生；

(6) A，B，C 三个事件都不发生；

(7) A，B，C 不多于一个发生；

(8) A，B，C 不多于二个发生；

(9) A, B, C 恰有二个发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $(A-B)-C$;

(2) $AB\overline{C}$;

(3) ABC;

(4) $A\cup B\cup C$;

(5) $AB\cup BC\cup AC$;

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$;

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup \overline{A}B\overline{C}\cup \overline{A}\,\overline{B}C$;

(8) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;

(9) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

注 复合事件常用“恰有”,“只有”,“至多”,“至少”,“都发生”,“都不发生”,“不都发生”等词来描述, 为了准确地用一些简单事件的运算来表示出复合事件, 必须弄清楚这些概念的含义. 随机事件可以根据定义直接表示出来, 也可以用其逆事件的逆事件来表示. 如 (4) 和 (6) 是互逆事件, 因此 (6) 可以用 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 表示, 也可以用 $\overline{A\cup B\cup C}$ 表示. 在 (9) 中 “恰有两个发生”的含义是若有两个事件发生, 则第三个事件就不能发生, 因此与 (5) 有区别, 可以用 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 表示, 也可以用 $AB\cup BC\cup AC-ABC$ 来表示. 在一些情况下, 需要将事件表示成互不相容事件的和, 这样在计算概率时会容易些.

例5 对于同时投掷甲、乙两枚硬币的试验, 试回答下列问题:

(1) 写出题设试验下的样本空间 S;

(2) 若记 $A=\{$甲、乙硬币均正面朝上$\}$, 则其对立事件 $\overline{A}=\{$甲、乙硬币都不是正面朝上$\}$, 对吗?为什么?

解 设 $B=\{$甲币正面朝上$\}$, $C=\{$乙币正面朝上$\}$.

(1) $S=\left\{BC, B\overline{C}, \overline{B}C, \overline{B}\,\overline{C}\right\}$;

(2) 不对. 因为 $A=\{BC\}$,其对立事件应为“甲、乙硬币不都正面朝上”, 也可以说成“至少有一反面朝上”, 即 $\overline{A}=\left\{B\overline{C}, \overline{B}C, \overline{B}\,\overline{C}\right\}$.

例6 在金融系的学生中任选一名学生, 令事件 A 表示被选学生是男生, 事件 B 表示该生是二年级学生, 事件 C 表示该生是校篮球队的队员.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3) 什么时候关系式 $C\subset B$ 是正确的?

(4) 什么时候 $\overline{A}=B$ 成立?

解 (1) 该生是二年级的男生, 不是校篮球队队员.

(2) 在金融系的校篮球队员都是二年级男生的条件下 $ABC=C$.

(3) 在金融系的校篮球队员全是二年级学生时 $C\subset B$ 是正确的.

(4) 当金融系二年级学生都是女生, 而其他年级都是男生时, $\overline{A}=B$.

例7 “事件 A,B,C 两两互斥”与“$ABC=\phi$”是不是一回事?并说明它们的联系.

解 不是一回事.

“两两互斥”指 A,B,C 三事件中任意两个事件不能同时发生(图 1-1), 即 $AB=\phi$、$AC=\phi$、$BC=\phi$ 同时成立.

“$ABC=\phi$”指 A,B,C 三事件不能同时发生(图 1-2).

它们的联系是:“两两互斥”$\Rightarrow$“$ABC=\phi$”, 反之则未必成立.

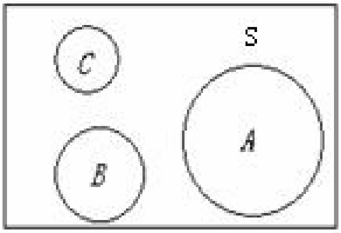


图 1-1

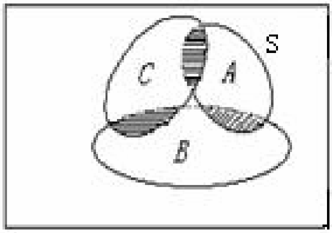


图 1-2

注 明确“两两互斥”与“$ABC=\phi$”的区别与联系, 有利于正确把握有关运算. 例如, 三个事件的加法公式

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

只有在 A, B, C 两两互斥条件下, 才能简化成

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

若仅有 $ABC=\phi$ 成立, 则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC).$$

例8 如图(1-3)所示的开关电路中, 字母 A, B, C, D 分别表示相应开关不闭合的事件. 试用 A, B, C, D 的运算表示事件{灯亮}与{灯不亮}, 并用对偶律验证其结果.

解　记 $E=\{灯亮\}$, 于是

$$E=\overline{A}\cdot\overline{B}\cup\overline{C}\cup\overline{D},$$
$$\overline{E}=(A\cup B)CD,$$

按对偶律, 有

$$\overline{E}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cup\overline{C}\cup\overline{D}}$$
$$=(\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}})\overline{\overline{C}}\cdot\overline{\overline{D}}=(A\cup B)CD.$$

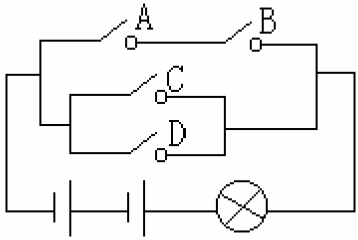


图 1-3

例9　100 件外形完全相同的产品, 其中 40 件为一等品, 60 件为二等品, 设 A:"从 100 件产品中任取一件, 连续抽取三次, 所得三件均为一等品". 试求在下列两种情况下事件 A 的概率.

(1) 每次取出一件, 经测试后放回, 再继续抽取下一件(有放回抽样);

(2) 每次取出一件, 经测试后不放回, 在余下的产品中继续抽取下一件(无放回抽样).

解　(1) 有放回抽样的每次抽取都是在相同的条件下进行, 这是一个重复排列问题, 故随机试验的基本事件总数 $n=100^3$. 事件 A 要求所抽取的三次均是一等品, 故事件 A 所包含的基本事件数 $m=40^3$. 依概率的古典定义, 有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{40^3}{100^3}=0.064.$$

(2) 无放回抽样的第一件是在 100 件中抽取的, 第二件是在余下的 99 件中抽取的, 第三件是在余下的 98 件中抽取的, 所以这是选排列问题, 基本事件总数为 $n=A_{100}^3$. 事件 A 包含的基本事件数则是在 40 件一等品中任取三件的排列数, 即 $m=A_{40}^3$. 依古典定义, 有

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_{40}^3}{A_{100}^3}=0.061.$$

注　此例是产品的随机抽样问题(即摸球问题), 它与后边例中的分球入盒问题(即分房问题)和随机取数问题是古典概型的三大典型问题. 掌握典型问题的解法有助于举一反三, 触类旁通, 提高解题的能力.

例10　设有 n 个人, 每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住($n\le N$), 求下列事件的概率:

(1) 指定的 n 间房间里各有一人住;

(2) 恰有 n 间房各有一人；

(3) 某一指定的房中恰有 m 个人($m \le n$).

解 E : 将 n 个人等可能地分配到 N 间房中去. S 含有 N^n 个基本事件(每一个人分配到 N 间房中去都有 N 种方法, 这里没有限制每间房住多少人).

设 $A=\{$指定的 n 间房里各有一人住$\}$

$B=\{$恰有 n 间房各有一人$\}$

$C=\{$某一指定的房中恰有 m 个人$\}$

(1) n 个人要分到指定的 n 间房中去, 使每间房各有一人. 第一个人有 n 种住法；第二个人有 $n-1$ 种住法；第三个人有 $n-2$ 种住法；……；最后一间第 n 个人住, 所以共有 $n!$ 种住法, 即事件 A 包含有 $n!$ 个基本事件,则

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) n 个人分配到 n 间房, 并且每间房只有一人, 有 $n\,!$ 种分法, 而 n 间房可以从 N 间中任意选取, 有 C_N^n 种方法, 则

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

(3) 首先从 n 个人中任选 m 个人分配到指定的某一房间中去, 有 C_n^m 种选法. 再把剩下的 $n-m$ 个人分配到 $N-1$ 个房间去的分法有$(N-1)^{n-m}$ 种. 则

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

注 这是分房问题. 在类这问题中, 人与房子都是有其特性的. 处理实际问题时, 要弄清什么是“人”, 什么是“房”, 一般不可颠倒. 常遇到的分房问题, 有 n 个人的生日问题, n 封信装入 n 个信封问题(配对问题), 掷 n 个骰子问题. 分房问题有时也叫球在盒中的分布问题(如果把人看成球). 这类问题在现代统计物理学中有重要的应用.

例11 在 0, 1, 2, ⋯, 9 中依次取出 4 个数排列在一起, 能组成 4 位偶数的概率为多少?

解 设样本空间 $S=\{abcd \mid 0\le a,b,c,d\le 9 \text{且} a,b,c,d \text{互不相等}\}$, 则 S 中样本点数 $n=A_{10}^4=5040$. 再来计算构成的 4 位偶数的个数为

$$A_9^3 C_5^1 - A_8^2 C_4^1 = 2520 - 224 = 2296,$$

从而所求概率 $p = \dfrac{2296}{5040} = 0.46$.

注 此问题是随机取数问题. 四位偶数的构成可以这样来考虑, 在个位上任取一个偶数, 则有 C_5^1 种取法, 而千、百、十位上由剩下的 9 个数中任取 3 个排列, 共有 A_9^3 种排法. 但当 0 排在千位上时不能构成 4 位数, 因此要去掉 0 排在千位上的偶数的数目, 共有 $A_8^2 C_4^1$ 种.

例12 从一副扑克牌 52 张中任取 5 张, 求下列事件的概率:

(1) 5 张牌同一花色;

(2) 3 张牌有同一个点数, 另 2 张牌也有相同的另一个点数;

(3) 5 张牌中有 2 个不同的对(没有 3 张牌点数相同);

(4) 5 张牌中有 4 张牌点数相同.

解 从 52 张牌中取 5 张, 基本事件总数是 C_{52}^5.

(1) 可设想为先从 4 种花色中取出一种, 再在这花色的 13 张牌中取出 5 张牌, 因此欲求之概率为

$$\frac{C_4^1 C_{13}^5}{C_{52}^5} = \frac{33}{166600} = 0.00198.$$

(2) 可设想为先从 13 种点数中取出一种, 再从有这一点数的 4 张牌中取 3 张, 然后从余下的 12 种点数中再取一种, 并从这一点数的 4 张牌中取 2 张, 因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^1 C_4^3 C_{12}^1 C_4^2}{C_{52}^5} = \frac{6}{4165} = 0.00144.$$

(3) 可设想为先从 13 种点数中取出 2 种, 再从有这 2 种点数的各 4 张牌中各取 2 张, 然后从余下的 44 张牌中取出 1 张, 因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^2 C_4^2 C_4^2 C_{44}^1}{C_{52}^5} = \frac{198}{4165} = 0.04754.$$

(4) 可设想为先从 13 种点数中取出一种, 这一点数的 4 张牌都取出, 然后从余下的 48 张牌中取出 1 张, 因此欲求之概率为

$$\frac{C_{13}^1 C_{48}^1}{C_{52}^5} = \frac{1}{4165} = 0.00024.$$

注　本题的计算是典型的用排列组合的计数方法，将一个复杂的计数问题分解成若干步，每一步只是一个简单的排列或组合的计数，然后用乘法原理得到总的结果. 如何进行分解需要按具体情况想办法. 所作的分解也不一定就是现实中进行的，可以是理论上设想的，也就是虚构的. 分解的方法也不一定是唯一的. 这些都是用排列组合计数的难点. 但是在本课程中我们不追求解复杂的排列组合计算问题，过多地讲究排列组合的技巧反而会冲淡对概率概念的理解与讨论.

例13　n只白球与n只黑球被任意地放入两个袋中，每袋装n只，然后从两袋中各取一球，求所取两球颜色相同的概率.

解　题目所述的取球方法虽然复杂，仔细想一想，实际上就是从这 $2n$ 个球中任取 2 个. 因为只考虑 2 个球的颜色是否相同，可设想先取好一个球，则第二个球有$2n-1$种取法，而使两个球颜色相同的取法只有$n-1$种. 因此欲求之概率即为$\dfrac{n-1}{2n-1}$.

注　在进行计算之前，对随机试验及随机事件作仔细的分析是十分必要的. 要抓住问题的实质，不要被表面现象所迷惑，尽可能地把问题简化，当然，学会这样做是比较困难的. 但是见多识广，开阔眼界是很有帮助的. 本题只是想起到这一点作用.

例14　掷硬币$2n$次，求出正面次数多于反面次数的概率.

解　以A记事件："出正面次数多于出反面次数"，B记事件："出反面次数多于出正面次数"，C记事件："出正面次数等于出反面次数". 因A，B，C互不相容，且$A\cup B\cup C=\Omega$(必然事件)，故

$$P(A)+P(B)+P(C)=1$$

由于"正面"与"反面"处于对称地位，故有$P(A)=P(B)$. 现在计算P(C). 将 $2n$ 次投掷的结果排成一列，每个位置上或是正或是反，故基本事件总数是2^{2n}. 在 $2n$ 个位置中挑选出n个位置作为正面的位置，余下的位置就是反面的位置，因此C的有利事件数是C_{2n}^{n}，从而$P(C)=\dfrac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}$. 最后得

$$P(A)=\frac{1}{2}(1-\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}).$$

注　本题的解法充分利用了正面与反面的对称性. 在等可能概型中利用对称性化简计算是常见的. 在处理等可能概型时，有意识地观察一下是否存在对称性，能否加以利用，往往是有好处的.

例15 一架电梯开始时有 6 位乘客并等可能地停于第二层到顶层共 10 层楼的每一层, 求下列事件的概率:

(1) 指定的某一层有两位乘客离开;

(2) 没有 2 位及 2 位以上的乘客在同一层离开;

(3) 恰有 2 位乘客在同一层离开;

(4) 至少有 2 位乘客在同一层离开. (本题假定乘客离开的所有可能排列具有相同的概率)

解 乘客离开的所有可能排列数为10^6.

(1) 某一层有 2 位乘客离开的可能排列数为$C_6^2 9^4$, 所以某一层 2 位乘客离开的概率为 $p_1=\dfrac{C_6^2 9^4}{10^6}=0.1$;

(2) 没有 2 位及 2 位以上的乘客在同一层离开的排列数为 A_{10}^6 (或$C_{10}^6 6!$), 所以没有 2 位及 2 位以上的乘客在同一层离开的概率为 $p_2=\dfrac{A_{10}^6}{10^6}=0.1512$;

(3) "恰有 2 位乘客在同一层离开" 可以详述为: 有 2 人在同一层离开, 另外 4 人没有 2 人或 2 人以上在同一层离开, 计有 $C_{10}^1 C_6^2 A_9^4$ 种; 有 2 人在同一层离开, 另外 4 人中有 3 人于某一层离开, 另 1 人单独离开, 共有 $C_{10}^1 C_6^2 C_9^1 C_4^3 C_8^1$ 种; 有 2 人在同一层离开, 另外 4 人也在某一层同时离开, 共有 $C_{10}^1 C_6^2 A_9^1$ 种. 因此, 所求事件所包含的排列数共计为

$$C_{10}^1 C_6^2 A_9^4+C_{10}^1 C_6^2 C_9^1 C_4^3 C_8^1+C_{10}^1 C_6^2 A_9^1,$$

所求概率为

$$p_3=\frac{C_{10}^1 C_6^2 A_9^4+C_{10}^1 C_6^2 C_9^1 C_4^3 C_8^1+C_{10}^1 C_6^2 A_9^1}{10^6}=\frac{8505}{100000}=0.08505;$$

(4) "至少有 2 位乘客在同一层离开" 是 "没有 2 位或 2 位以上的乘客在同一层离开" 的逆事件, 因此, 其概率为

$$p_4=1-p_2=1-\frac{A_{10}^6}{10^6}=1-0.1512=0.8488.$$

注 "恰有 2 位乘客在同一层离开" 比 "指定的某一层有 2 位乘客离开" 要复杂的多, "恰有" 的含义是有 2 人在同一层离开而余下 4 人不能再有 2 人在同一层离开.

例16 在 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的概率是多少?

解 从 10 只鞋子中任取 4 只, 有 $C_{10}^4=210$ 种不同的取法. 设 A 表示 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的事件.

解法 1 满足 A 要求的取法有两类, 一类是 4 只中恰有 2 只配对, 它可以有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种取法(5 双中任取 1 双, 再从其余 4 双中任取 2 双, 而且每双中各取 1 只). 另一类是 4 只恰好配成 2 双, 这样的取法有 C_5^2 种, 因此由加法原理, 4 只鞋子中至少有 2 只配对的取法数为

$$C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2=120+10=130,$$

因此所求概率为 $P(A)=\dfrac{130}{210}=0.6190$.

解法 2 $\overline{A}$ 为取出的 4 只鞋子均不配对的事件, 其包含的取法有 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$ 种(其中 C_5^4 表示 5 双鞋子中取出 4 双, C_2^1 表示每双中取 1 只, 一共取 4 次), 从而

$$P(\overline{A})=\frac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C}{210}=\frac{8}{21},$$

因此所求概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{13}{21}=0.6190.$$

例17 袋中有 N 个球, 分别标以号码 1, 2, ⋯, N, 有放回地摸取 n 次球, $n\le N$. 依次记下被取到的球的号码, 求这些号码按严格单调上升的次序排列的概率.

解 将依次取出的球的号码排成一列, 由于号码可重复地取, 故基本事件数为 N^n. 号码严格单调上升的排列数就是从 1, 2, 3, ⋯, N 中取 n 个的组合数, 因为 n 个不同的数按严格单调上升的次序排列只有 1 个排法, 因此有利事件数为 C_N^n. 欲求之概率为 $\dfrac{C_N^n}{N^n}$.

例18 (1)在房间里有 500 个人, 问至少有一个人的生日是 10 月 1 日的概率是多少(设一年以 365 天计算)?

(2) 在房间里有 4 个人, 问至少有 2 个人的生日在一个月的概率是多少?

解 (1) 每人的生日等可能地是 365 天中的某一天, 500 人生日的分配情况共 365^{500} 种. 设至少有一人的生日是 10 月 1 日的事件是 A, $\overline{A}$ 表示没有人

在这一天出生, 它的基本事件数是364^{500}, 则

$$P(A)=1-(\frac{364}{365})^{500}=0.746.$$

(2) 设至少有 2 人的生日在同一个月的事件为B, 则$\overline{B}$表示没有两个人或两个以上人的生日在同一个月, 所含的基本事件数为A_{12}^4, 于是

$$P(\overline{B})=A\frac{P_{12}^4}{12^4}=\frac{165}{288}=0.572,$$

所以

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.572=0.428.$$

例19 (约会问题)星期天, 甲、乙两人约定在上午 7～8 时之间到某公园会面, 先到者等 15 分钟仍不见另一人, 方可离去, 求两人能会面的概率.

解 以x, y依次代表甲、乙到达某公园的时刻, 那么

$$0\le x\le 60,\ 0\le y\le 60.$$

在xoy面上满足不等式的点的全体构成平面上的一个正方形 S 就是样本空间(如图 1-4 所示).

两人能会面的充要条件为$|x-y|\le 15$, 所以

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=0.4375.$$

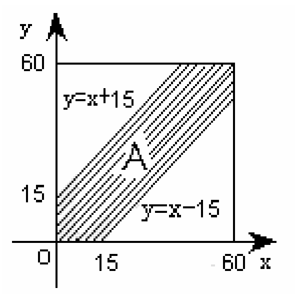


图 1-4

注 在约会问题中, 一般总希望能见到面的概率大一点, 这就要求相互等候的时间长一点. 而在轮船停靠等问题却相反, 希望不会面的概率大一点, 这就要求相互等候的时间短一点. 借助几何度量处理概率计算问题, 便是几何概型的基本特征. 相对于古典概型来讲, 它没有有限的约束, 却保留了等可能性, 因而几何概率问题可以看成古典概型的推广.

例20 在时间间隔 5 分钟内的任何时刻,两信号等可能地进入同一收音机,如果两信号进入收音机的间隔小于 30 秒,则收音机受到干扰,试求收音机不受干扰的概率.

解 设A={收音机不受干扰},记x, y为两信号进入收音机的时刻(如图 1-5 所示), 于是样本空间为

$S=\{(x,y)|0\le x\le 5,0\le y\le 5\}$,

有利于事件 A 的区域为,

$$g=\{(x,y)\|x-y|>0.5\},$$

即图中划有阴影的部分. 于是, 有

$$L(S)=5^2,\qquad L(g)=4.5^2,$$

故所求概率为

$$P(A)=\frac{L(g)}{L(S)}=\frac{4.5^2}{5^2}=0.81.$$

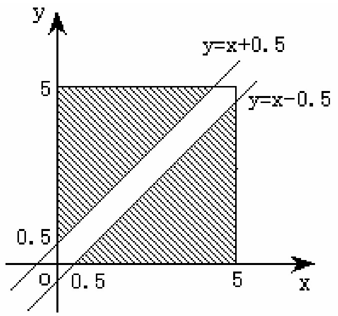


图 1-5

例21 甲、乙两船欲停靠同一码头, 它们在一昼夜内独立地到达码头的时间是等可能的, 各自在码头上停留的时间依次是 1 小时和 2 小时, 试求一船要等待空出码头的概率.

解 设 A={一船要等待空出码头}

记甲、乙两船一昼夜内到达码头的时刻分别为 x,y (如图 1-6 所示). 于是

$$S=\{(x,y)|0\le x\le 24,0\le y\le 24\},$$

其度量为 $L(S)=24^2$, 有利于 A 的区域 g 为

$$g=\{(x,y)\in S|\ y-x\le 1且x-y\le 2\},$$

其度量为

$$L(g)=24^2-\frac{22^2}{2}-\frac{23^2}{2},$$

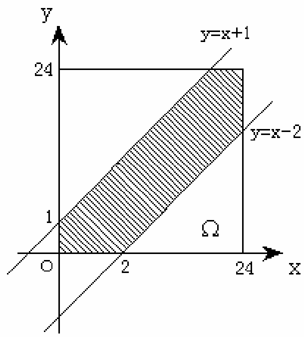


图 1-6

故所求概率为

$$P(A)=\frac{L(g)}{L(S)}=0.1207.$$

注 $y-x\le 1$表示甲先到, 乙等甲空出; $x-y\le 2$, 表示乙先到, 甲等乙空出. 本题及上题分别涉及到运输与通讯领域内的概率计算, 它们都是几何概率中著名的“会面问题”的具体应用.

例22 设 A 、 B 、 C 是三个事件, 且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,

$P(AC)=\frac{1}{8}$, $P(AB)=P(CB)=0$, 求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

解　因为 $P(AB)=P(CB)=0$, 而 $ABC\subset AB$, 所以 $P(ABC)=0$. 故

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)\\&\quad -P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}\end{aligned}$$

例23　设 $P(A)=\frac{1}{3}$,　$P(B)=\frac{1}{2}$,

(1)　若 $AB=\phi$,　求 $P(B\overline{A})$;

(2)　若 $A\subset B$,　求 $P(B\overline{A})$;

(3)　若 $P(AB)=\frac{1}{8}$,　求 $P(B\overline{A})$.

解　(1) 因为 $AB=\phi$, 所以 $B\subset\overline{A}$, 则 $B\overline{A}=B$, 故

$$P(B\overline{A})=P(B)=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为 $A\subset B$, 所以

$$P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

(3)　$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

例24　设事件 A 与 B 独立, 两个事件中只有 A 发生的概率与只有 B 发生的概率都是 $\frac{1}{4}$, 求 $P(A)$与$P(B)$.

解　已知 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=\frac{1}{4}$, 故

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB)=P(\overline{A}B)+P(AB)=P(B),$$

从而,

$$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)(1-P(B))=P(A)(1-P(A))=\frac{1}{4},$$

解得 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，从而 $P(B)=\dfrac{1}{2}$.

例25 试证下列结果:

(1) $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)$；

(2) 事件 A, B 恰有一发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

证明 (1) 运用对偶律及加法公式证之, 即

$$P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

(2) 由于 $A\cup B=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB$ 且等式右边三事件互不相容, 所以

$$P(\overline{A}B\cup A\overline{B})=P(A\cup B)-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(AB).$$

注 这类题目往往有多种解法, 属一题多解的常见类型. 如题(2)的另一证法为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}B+A\overline{B})&=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})\\&=P(B)-P(AB)+P(A)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-2P(AB).\end{aligned}$$

此外, 正确运用条件也是至关重要的. 稍有疏忽, 也许有错而不知错在那儿, 这是常有的事. 请看如下证明:

$$\begin{aligned}P\{A\text{、}B\text{ 恰有一发生}\}&=P(\overline{A}B\cup A\overline{B})=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})\\&=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})\\&=(1-P(A))P(B)+P(A)(1-P(B))\\&=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)\\&=P(A)+P(B)-2P(AB).\end{aligned}$$

上述证明, 似乎无懈可击, 但事实上两次运用了题设中根本不存在的独立性条件.

例26 设 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，求证: $P(AB)=P(\overline{A}\cdot\overline{B})$.

证明 $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]$

$$=1-[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-P(AB)]=P(AB).$$

例27 证明: (1) $P(AB)\ge P(A)+P(B)-1$；

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)\ge P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)-(n-1)$.

证明 （1）由于

$$1 \ge P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

所以,

$$P(AB) \ge P(A) + P(B) - 1.$$

（2）我们用归纳法证明. $n=2$ 时即为已证之(1). 设对 n 欲证之不等式成立, 则

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_{n+1}) &\ge P(A_1A_2\cdots A_n) + P(A_{n+1}) - 1 \\ &\ge P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1) + P(A_{n+1}) - 1 \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{n+1}) - n. \end{aligned}$$

例28 证明: $|P(AB) - P(A)P(B)| \le \dfrac{1}{4}$.

证明 $P(AB) - P(A)P(B)$

$$\begin{aligned} &= P(AB) - [P(AB) + P(A\overline{B})][P(AB) + P(\overline{A}B)] \\ &= P(AB)[1 - P(AB) - P(A\overline{B}) - P(\overline{A}B)] - P(A\overline{B})P(\overline{A}B) \\ &\ge -P(A\overline{B})P(\overline{A}B) \ge -P(A\overline{B})[1 - P(A\overline{B})] \ge -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

这里我们利用了熟知的不等式:对任意的 $a \in [0,1]$, $a(1-a) \le \dfrac{1}{4}$.

另一方面, 不妨设 $P(A) \ge P(B)$, 则

$$\begin{aligned} P(AB) - P(A)P(B) &\le P(B) - P(B)P(B) \\ &= P(B)[1 - P(B)] \le \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

由此证得

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \le \frac{1}{4}.$$

注 本题虽然只用到概率的有限可加性, 但是证明的技巧性较大, 题目的结论较有意义, 因为它的成立毋需任何条件.

例29 掷 n 颗骰子, 得最小的点数为 2 的概率是多少?

解 以 A 记事件: "最小的点数 ≥ 2", 以 B 记事件: "最小的点数 ≥ 3", 则 $A - B$ 正是事件: "最小的点数为 2", 且 $A \supset B$. 事件 A 即点数 1 不出现,

因此 $P(A)=\dfrac{5^n}{6^n}$. 事件 B 即点数 1, 2 都不出现, 因此 $P(B)=\dfrac{4^n}{6^n}$. 欲求之概率为

$$P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{5^n-4^n}{6^n}.$$

注 本题的解法是一种典型的解法, 但灵活性较大, 只能通过见多识广, 逐步扩大思路, 不能急于求成.

例30 A、B 两人进行乒乓球赛. 在比赛中, A 胜的概率为 0.4, B 胜的概率为 0.6, 比赛可采用三局两胜制和五局三胜制, 问那一种赛制下, B 胜的可能性更大?

解 (1) 如果采用三局两胜制, 则 B 在两种情况下胜:

B_1　2:0　（B 净胜两局）

B_2　2:1　（前两局各胜一局, 第三局 B 胜）

于是我们有

$$P(B_1)=0.6^2=0.36,\qquad P(B_2)=C_2^1 0.6\cdot 0.4\cdot 0.6=0.288,$$

故 B 胜的概率为

$$P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)=0.36+0.288=0.648.$$

(2) 如果采用五局三胜制, 则 B 获胜的可能结果是:

B_1　3:0　（前三局 B 都胜）

B_2　3:1　（前三局中 B 胜二负一, 第四局 B 胜）

B_3　3:2　（前四局中各胜二局, 第五局 B 胜）

于是我们有

$$P(B_1)=0.6^3=0.216,\qquad P(B_2)=C_3^2 0.6^2\cdot 0.4\cdot 0.6=0.2592,$$

$$P(B_3)=C_4^2 0.6^2\cdot 0.4^2\cdot 0.6=0.20736,$$

故 B 胜的概率为

$$P(B)=P(B_1\cup B_2\cup B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0.68256.$$

比较(1)和(2)可知, 在后一种赛制下 B 胜的可能性更大.

例31 一批零件共 12 个, 其中 2 个是次品, 10 个是正品. 从中抽取两次, 每次任取一个, 取后不放回. 试求下列事件的概率:

(1) 两次均取正品;　　(2) 第二次才取正品;

(3) 第二次取正品;　　　　　　(4) 两次内取得正品.

解 设 $A_i=\{$第 i 次取得正品$\}$, $i=1,2$.

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\dfrac{10}{12}\cdot\dfrac{9}{11}=0.6818$;

(2) $P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})=\dfrac{2}{12}\cdot\dfrac{10}{11}=0.1515$;

(3) $P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)=0.8333$;

(4) $P(A_1\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)=\dfrac{10}{12}+\dfrac{5}{33}=0.9848$.

注 抽样的无放回场合, 特别要分清"第二次才取正品"与"第二次取正品", 它们是不同的两个概念.

"两次内取得正品"即"两次中至少有一次取得正品", 也可以将它表示成"$A_1A_2+A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$"或"$A_1+A_2$".

例32 某仓库同时装有甲、乙两种警报系统, 每个系统单独使用的有效率分别为 0.92, 0.93, 在甲系统失灵的条件下乙系统也失灵的概率为 0.15. 试求下列事件的概率:

(1) 仓库发生意外时能及时发出警报;

(2) 乙系统失灵的条件下甲系统亦失灵.

解 设 $A=\{$甲系统有效$\}$, $B=\{$乙系统有效$\}$. 由题设知,

$P(A)=0.92$, 　　$P(B)=0.93$, 　　$P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.15$.

(1) 发生意外能及时发出警报, 即系统甲、乙至少有一个有效. 故

$$\begin{aligned}P(A+B)&=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})\\&=1-P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})=1-(1-0.92)\cdot0.15=0.988.\end{aligned}$$

(2) 乙系统失灵条件下甲亦失灵的概率为

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cdot\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}{1-P(B)}=\frac{0.08\times0.15}{1-0.93}=0.1714.$$

例33 设 A, B 为随机事件, 试求解下列问题:

(1) 已知 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{3}$, $P(A\mid B)=\dfrac{1}{6}$, 求 $P(\overline{A}\mid\overline{B})$;

(2) 已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$，求 $P(A\cup B)$.

解 (1)

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cdot\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(B)P(A\mid B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{7}{18}}{\frac{2}{3}}=\frac{7}{12}.$$

(2)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A\mid B)}-P(A)P(B\mid A)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

例34 在空战中, 甲机先向乙机开火, 击落乙机的概率为 0.2；若乙机未被击落, 就进行还击, 击落甲机的概率为 0.3；若甲机未被击落, 则再进行还击, 击落乙机的概率为 0.4. 求在这几个回合中, 甲机和乙机被击落的概率分别为多少？

解 记 A : 第一次进攻中, 甲击落乙；

B : 第二次进攻中, 乙击落甲；

C : 第三次进攻中, 甲击落乙.

由题意知

$$P(A)=0.2,\qquad P(B\mid\overline{A})=0.3,\qquad P(C\mid\overline{A}\cdot\overline{B})=0.4,$$

则甲机被击落的概率为

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=0.8\times 0.3=0.24,$$

乙机被击落的概率为

$$P(A\cup\overline{A}\cdot\overline{B}C)=P(A)+P(\overline{A}\cdot\overline{B}C)$$

$$=P(A)+P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})P(C\mid\overline{A}\cdot\overline{B})$$

$$= 0.2 + 0.8 \times 0.7 \times 0.4 = 0.424.$$

例35 掷三颗骰子, 已知所得三个点数都不一样, 求其中包含有 1 点的概率.

解 A 表示"所得三个点数都不一样"的事件, B 表示"所得的点数中有 1 点"的事件, 欲求的是条件概率 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

先分别求出 $P(AB), P(A)$. 将依次掷三颗骰子所得点数排成一列作为基本事件, 则基本事件总数为 6^3 =216. 有利于 A 的基本事件数为 $6 \times 5 \times 4 = 120$. 考虑有利于 AB 的基本事件时, 可设想 1 点已取好, 再从其余 5 个点数中取 2 个, 然后将 3 个点数作排列, 因此有利于 AB 的基本事件数为 $3! C_5^2$, 从而欲求的条件概率为

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3! C_5^2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

另一种做法是将基本事件空间 S 缩小为 S_A. 从 6 个点数中取 3 个, 每种取法作为 1 个基本事件, 这时基本事件总数为 $C_6^3 = 20$. 再在 S_A 中考虑有利于 B 的基本事件, 1 点已取定, 只需从其余 5 个点数中取 2 个, 因此有利于 B 的基本事件数为 $C_5^2 = 10$. 故欲求的概率为 $\dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$. 这是条件概率的直观意义.

例36 证明: 若三个事件 A, B, C 相互独立, 则 $A \cup B$ 及 $A\overline{B}$ 都与 C 独立.

证明 因为

$$\begin{aligned} P\{(A \cup B)C\} = P\{AC \cup BC\} &= P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= P(A \cup B)P(C), \end{aligned}$$

故 $A \cup B$ 与 C 独立.

因为 A, B, C 相互独立, $A, \overline{B}, C$ 也相互独立, 从而

$$P(A\overline{B}C) = P(A)P(\overline{B})P(C) = P(A\overline{B})P(C),$$

故 $A\overline{B}$ 与 C 独立.

例37 一批产品分别由甲、乙、丙三车床加工. 其中甲车床加工的占产品总数的 25%, 乙车床占 35%, 其余的是丙车床加工的. 又甲、乙、丙三车床

在加工时出现次品的概率分别为 0.05, 0.04, 0.02. 今从中任取一件, 试求下列事件的概率.

(1) 任取的一件是次品;

(2) 若已知任取的一件是次品, 则该次品由甲、乙或丙车床加工的.

解 设 A_i ={任取的一件是第 i 台车床加工的}, $i=1$(甲车床), 2(乙车床), 3(丙车床); $B=$ {任取的一件是次品}. 于是, 由题设可知:

$P(A_1)=0.25$, $P(A_2)=0.35$, $P(A_3)=0.40$,

$P(B|A_1)=0.05$, $P(B|A_2)=0.04$, $P(B|A_3)=0.02$.

(1) $$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)(B|A_i)$$

$$=0.25\times0.05+0.35\times0.04+0.40\times0.02=0.0345.$$

(2) $$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.25\times0.05}{0.0345}=0.3623;$$

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.35\times0.04}{0.0345}=0.4058;$$

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.40\times0.02}{0.0345}=0.2319.$$

注 本题是全概率公式、贝叶斯公式的综合题. 注意到全概率公式只有一个, 而贝叶斯公式有多个, 就本题而言是三个, 而这三个条件概率之和为 1, 这一点常被人们用来作为验算正确性的手段.

例38 假定用血清甲胎蛋白法诊断肝癌, 如果患者患有肝癌且被诊断为肝癌的概率为 0.95, 患者没有患肝癌而被诊断为不是肝癌的概率是 0.90. 假设在人群中肝癌患病率为 0.0004, 求在某次普查中某人被诊断为肝癌而实际患有肝癌的概率.

解 设 $A=$ "被检验者患有肝癌", $B=$ "被检验者被诊断为患有肝癌", 则

$P(A)=0.0004$, $P(B|A)=0.95$, $P(\overline{B}|\overline{A})=0.90$,

$P(\overline{A})=0.9996$, $P(B|\overline{A})=0.10$,

从而

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$
$$=\frac{0.0004\times 0.95}{0.0004\times 0.95+0.9996\times 0.10}=0.0038.$$

注　这是一个求条件概率的问题, 计算结果有些出乎意料. 虽然诊断法很准确, 但在普查中被诊断为肝癌的人真正患肝癌的可能性很小. 例如有 10000 人参加普查, 实际上患肝癌的人可能只有 4 人, 而在普查中却有可能把 1000 人诊断为肝癌, 因此实际患肝癌的比例在被诊断为患肝癌的人中是很小的.

例39　十个阄, 其中四个有彩, 三人随机抽取(取后不放回), 甲先、乙次、丙最后, 求甲、乙、丙三人各自中彩的概率?

解　设 A、B、C 分别表示甲、乙、丙三人各自中彩, 则

$$P(A)=\frac{4}{10}=0.4.$$

B 发生的概率, 显然乙中彩在甲中彩或甲不中彩的两种条件下实现, 而事件 A 与 $\overline{A}$ 构成完备事件组, 故有

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=0.4,$$

求 C 发生的概率, 丙中彩应在甲、乙均中彩, 或甲中彩, 乙不中彩, 或甲不中彩, 乙中彩, 或甲、乙均不中彩的条件下实现, 而事件 $AB,\overline{A}B,A\overline{B}$ 与 $\overline{A}\cdot\overline{B}$ 构成完备事件组, 故根据全概率公式有

$$\begin{aligned}P(C)&=P(AB)P(C|AB)+P(A\overline{B})P(C|A\overline{B})\\&\quad+P(\overline{A}B)P(C|\overline{A}B)+P(\overline{A}\cdot\overline{B})P(C|\overline{A}\cdot\overline{B})\\&=P(A)P(B|A)P(C|AB)+P(A)P(\overline{B}|A)P(C|A\overline{B})\\&\quad+P(\overline{A})P(B|\overline{A})P(C|\overline{A}B)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})P(C|\overline{A}\cdot\overline{B})\\&=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{288}{720}=0.4.\end{aligned}$$

即甲、乙、丙三人各自中彩的概率均为 0.4, 这一事实说明抓阄(或抽签)的公平性, 不论谁先谁后, 中彩的概率是相等的.

注　这里用全概率公式计算第三人中彩的概率时, 已比前面的人的计算复杂得多. 实际上, 读者可试用古典概率直接求解其一般问题（求第 k 位抓阄

者中彩得概率 $(1 \le k \le 10)$.

例40 甲、乙两人轮流射击,先击中目标者为胜. 设甲、乙击中目标的概率分别为 α, β . 甲先射,求甲(或乙)为胜者的概率.

解 以 A 记事件:"甲为胜者",以 B 记事件:"乙为胜者".

先分析第一轮(甲、乙各射一次)的结果. 以 C_1 记事件:"在第一轮中甲射中",C_2 记事件:"在第一轮中甲未射中而乙射中",C_3 记事件:"在第一轮中甲、乙均未射中". 易见 $\{C_1, C_2, C_3\}$ 是必然事件的一个分割,且

$$P(C_1) = \alpha,\ P(C_2) = (1-\alpha)\beta,\ P(C_3) = (1-\alpha)(1-\beta),$$
$$P(A \mid C_1) = 1, \quad P(B \mid C_2) = 1.$$

若事件 C_3 发生,比赛继续进行,情况与从头开始完全一样(这一点是解法的关键,富有概率论思考的特色). 因此有

$$P(A \mid C_3) = P(A), \qquad P(B \mid C_3) = P(B),$$

由全概率公式得

$$P(A) = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)P(A),$$
$$P(B) = (1-\alpha)\beta + (1-\alpha)(1-\beta)P(B),$$

由此即得

$$P(A) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta(1-\alpha)}, \qquad P(B) = \frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha + \beta(1-\alpha)}.$$

例41 甲、乙两运动员进行单打决赛,两人胜每局的概率都是 $\frac{1}{2}$. 现在的局势是甲只要赢 2 局就是冠军,但乙要赢 3 局才能得冠军. 求甲、乙两人得冠军的概率各为多少?

解 只要再比 4 局必见分晓. 在这 4 局中,若甲赢的局数大于或等于 2,则甲得冠军;若甲赢的局数小于或等于 1,则乙得冠军. 因此,乙得冠军的概率为

$$C_4^0 \frac{1}{2^4} + C_4^1 \frac{1}{2^4} = \frac{5}{16},$$

从而甲得冠军的概率为

$$1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}.$$

注 表面上看，为了决定冠军，不必一定要再比 4 局，但考虑再比 4 局，把问题化为贝努里概型，反而简化了计算，这在概率论思考中也是典型的.

练习题

1. 写出下列随机试验的样本空间及表示下列事件的样本点集合：

（1） 10 件产品中有 1 件是不合格品，从中任取 2 件得 1 件不合格品；

（2） 一个口袋中有 2 个白球，3 个黑球，4 个红球，从中任取一球：①得白球；②得红球.

2. 化简事件算式：$(AB)\cup(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)\cup(\overline{A}\,\overline{B})$.

3. 就下列情况分别说明事件 A, B, C 之间的关系：

（1） $A\cup B\cup C=A$；（2） $ABC=A$.

4. 试判断事件"A, B 至少发生一个"与"A, B 最多发生一个"是否是对立事件.

5. 下列各式说明 A 与 B 之间具有何种包含关系？

(1) $AB=A$, (2) $A\cup B=A$.

6. 掷一枚骰子的试验，观察其出现的点数，事件 A=“偶数点”，B=“奇数点”，C =“点数小于 5”，D=“小于 5 的偶数点”，讨论上述各事件间的关系.

7. 将下列事件用 A, B, C 的运算表示出来：

（1） A 发生；

（2） 只有 A 发生；

（3） 三个事件中恰好有一个发生.

8. 设某工人连续生产了 4 个零件，用 A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品 (i=1,2, 3, 4). 试用事件的运算表示下列各事件：

（1） 没有一个是次品；

（2） 至少有一个是次品；

（3） 只有一个是次品；

（4） 至少有三个不是次品；

（5） 恰好有三个是次品；

(6) 至多有一个是次品.

9. 事件 A_i 表示某个生产单位第 i 车间完成生产任务（i=1, 2, 3), B 表示至少有两个车间完成生产任务, C 表示最多只有两个车间完成生产任务. 说明事件 $\overline{B}$ 与 $B-C$ 的含义, 并且用 A_i (i=1, 2, 3)表示出来.

10. 设 A, B 为事件, 问下列各事件表示什么意思?

(1) $\overline{A}\cup\overline{B}$；　　(2) $\overline{A}B$；　　(3) $\overline{A}\ \overline{B}$.

11. 如图 1-7 所示, 事件 A, B, C 都相容, 即 $ABC\neq\phi$, 把事件 $A\cup B$, $A\cup B\cup C$, $AC\cup B$, $C-AB$ 用一些互不相容事件的和表示出来.

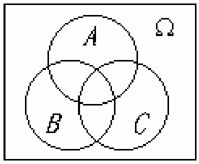


图 1-7

12. 两个事件互不相容与两个事件对立的区别何在, 举例说明.

13. 将 1 套 4 册的文集按任意顺序放到书架上去, 问各册自右向左或自左向右恰成 1, 2, 3, 4 的顺序的概率是多少?

14. 袋内装有 5 个白球, 3 个黑球, 从中一次任取两个, 求取到的两个球颜色不同的概率.

15. 10 把钥匙中有 3 把能打开一个门锁, 今任取两把, 求能打开门锁的概率.

16. 抛掷一枚硬币, 连续 3 次, 求既有正面又有反面出现的概率.

17. 有一元币、五角币、一角币、五分币、二分币、一分币各一枚, 试求由它们所组成的所有可能的不同币值中, 其币值不足一元的概率.

18. 一楼房共 14 层, 假设电梯在一楼起动时有 10 名乘客, 且乘客在各层下电梯是等可能的. 试求下列事件的概率:

A_1={10 人在同一层下}；　　A_2={10 人在不同楼层下}；

A_3={10 人都在第 14 层下}；　　A_4={10 人中恰有 4 人在第 8 层下}.

19. 将 C, C, E, E, I, N, S 等 7 个字母随意排成一行, 求恰好排成 $SCIENCE$ 的概率.

20. 一副扑克牌有 52 张, 不放回抽样, 每次一张, 连续抽取 4 张, 计算下列事件的概率:

(1) 四张花色各异；　　(2) 四张中只有两种花色.

21. 袋中有红、白、黑色球各一个, 每次任取一球, 有放回地抽取三次, 求下列事件的概率:

A=“全红”, B=“全白”, C=“全黑”, D=“无红”, E=“无白”, F=“无黑”, G=“颜色全相同”, H=“颜色全不相同”, I=“颜色不全相同”.

22. 一间宿舍内住有 6 位同学, 求他们中有 4 人的生日在同一个月份的概率.

23. 一个教室中有 100 名学生, 求其中至少有一人的生日是在元旦的概率(设一年以 365 天计算).

24. 从 4 双不同的鞋子中任取 4 只, 求下列事件的概率:

(1) 4 只恰成 2 双;
(2) 4 只中恰有一双;
(3) 4 只中没有成双的.

25. 掷三颗骰子, 得 3 个点数能排成公差为 1 的等差数列的概率为多少?

26. 将 4 个男生与 4 个女生任意地分成两组, 每组 4 人, 求每组各有 2 个男生的概率.

27. 设 O 为线段 AB 的中点, 在 AB 上任取一点 C, 求 AC、CB、AO 三条线段能构成一个三角形的概率.

28. 在 ΔABC 中任取一点 P, 证明: ΔABP 与 ΔABC 的面积之比大于 $\dfrac{n-1}{n}$ 的概率为 $\dfrac{1}{n^2}$.

29. 设 $P(A)=a, P(B)=b, P(AB)=c$, 用 a, b, c 表示下列事件的概率:

(1) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$, (2) $P(\overline{A}B)$, (3) $P(\overline{A}\cup B)$, (4) $P(\overline{A}\cdot\overline{B})$.

30. 设 $P(A)=0.4, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.6,$ 求$P(A\overline{B})$.

31. 设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$,

(1) 若 A 与 B 互斥, 求 $P(B)$; (2) 若 A 与 B 独立, 求 $P(B)$.

32. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$, $P(AB)=0$, $P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{6}$, 求 A, B, C 全不发生的概率.

33. 事件 A 与 B 互不相容, 计算 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

34. 设事件 $B\supset A$, 求证: $P(B)\ge P(A)$.

35. 设事件 A,B 的概率都大于 0, 比较概率 $P(A)$, $P(A\cup B)$, $P(A)+P(B)$, $P(AB)$ 的大小(用不等号把它们连结起来).

36. 已 知 $P(A)=a, P(B)=b, (ab\neq 0, b>0.3a), P(A-B)=0.7a$ ，求: $P(B\cup A)$， $P(B-A)$， $P(\overline{B}\cup\overline{A})$.

37. 设 A_1, A_2 为两个随机事件, 证明:

(1) $P(A_1A_2)=1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})$；

(2) $1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})\leq P(A_1A_2)\leq P(A_1\cup A_2)\leq P(A_1)+P(A_2)$.

38. 一间宿舍中有 4 位同学的眼镜都放在书架上, 去上课时, 每人任取一副眼镜, 求每个人都没有拿到自己眼镜的概率.

39. 在 1000 名技术员中调查性别、婚姻状况及学历, 得如下数据: (1) 813 个男性；(2) 875 个已婚；(3) 752 个大专毕业生；(4) 632 个男大专毕业生；(5) 572 个已婚男性；(6) 654 个已婚大专毕业生；(7) 420 个已婚男大专毕业生. 试说明这些数据中有错误.

40. 在某城市中发行 3 种报纸 A, B, C. 经调查, 在居民中按户订阅 A 报的占 45%, 订阅 B 报的占 35%, 订阅 C 报的占 30%, 同时订阅 A 报和 B 报的占 10%, 同时订阅 A 报和 C 报的占 8%, 同时订阅 B 报和 C 报的占 5%, 同时订阅这 3 种报纸的占 3%, 试求下列事件的概率:

(1) 只订 B 报的；

(2) 只订 A 报和 B 报两种的；

(3) 只订 1 种报纸的；

(4) 恰好订 2 种报纸的；

(5) 至少订阅 2 种报纸的；

(6) 至少订 1 种报纸的；

(7) 不订报纸的；

(8) 至多订阅 1 种报纸的.

41. 某单位有 92% 的职工订阅报纸, 93% 的人订阅杂志, 在不订阅报纸的人中仍有 85% 的职工订阅杂志, 从单位中任找一名职工, 求下列事件的概率:

(1) 该职工至少订阅一种报纸或杂志；

(2) 该职工不订阅杂志, 但订阅报纸.

42. 某地区气象资料表明, 邻近的甲、乙两城市中的甲市全年雨天比例为 12%, 乙市全年雨天的比例为 9%, 甲乙两市至少有一市为雨天的比例为

16.8%. 试求下列事件的概率:

（1） 甲、乙两市同为雨天;

（2） 在甲市雨天的条件下乙市亦为雨天;

（3） 在乙市无雨的条件下甲市亦无雨.

43. 分析学生们的数学与外语两科考试成绩, 抽查一名学生, 事件 A 表示数学成绩优秀, B 表示外语成绩优秀, 若 $P(A)=P(B)=0.4, P(AB)=0.28$, 求: $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(A\bigcup B)$.

44. 设 A 与 B 独立, $P(A)$=0.4, $P(A\bigcup B)$=0.7, 求概率 $P(B)$.

45. 设甲、乙两人各投篮 1 次, 其中甲投中的概率为 0.8, 乙投中的概率为 0.7, 并假定二者相互独立, 求:

（1） 2 人都投中的概率;

（2） 甲中乙不中的概率;

（3） 甲投不中乙投中的概率;

（4） 至少有一个投中的概率.

46. 甲、乙、丙三人进行投篮练习, 每人一次, 如果他们的命中率分别为 0.8, 0.7, 0.6, 计算下列事件的概率:

（1） 只有一人投中;

（2） 最多有一人投中;

（3） 最少有一人投中.

47. 甲乙两人轮流投篮, 甲先开始, 假定他们的命中率分别为 0.4 及 0.5, 问谁先投中的概率较大, 为什么?

48. 加工一产品需要 4 道工序, 其中第 1、第 2、第 3、第 4 道工序出废品的概率分别为 0.1, 0.2, 0.2, 0.3, 各道工序相互独立, 若某一道工序出废品即认为该产品为废品, 求产品的废品率.

49. 加工某种零件, 需经过三道工序, 假定第一、二、三道工序的废品率分别为 0.3, 0.2, 0.2, 并且任何一道工序是否出废品与其他各道工序无关, 求零件的合格率.

50. 求下列系统(如图 1−8 所示)的可靠度. 假设元件 i 的可靠度为 p_i, 各元件正常工作或失效相互独立.

(1)

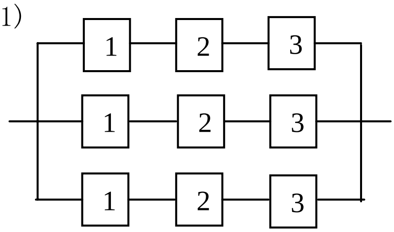


图 1-8a

(2)

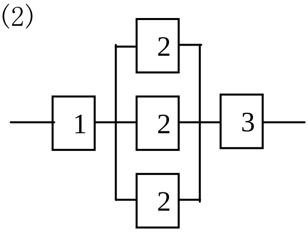


图 1-8b

(3)

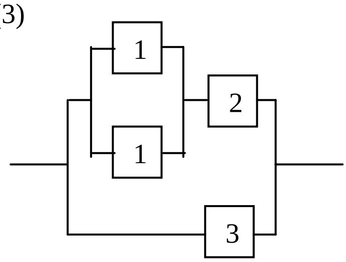


图 1-8c

51. 某单位电话总机的占线率为 0.4, 其中某车间分机的占线率为 0.3, 假定二者独立, 现在从外部打电话给该车间, 求一次能打通的概率；第二次才能打通的概率以及第 m 次才能打通的概率(m 为任何正整数).

52. 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，且 $P(A_i) = p_i \ (i = 1,2,\cdots,n)$，$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, 试求:

(1) 这些事件至少有一件不发生的概率；

(2) 这些事件均不发生的概率；

(3) 这些事件恰好发生一件的概率.

53. 设有两门高射炮, 每一门击中飞机的概率都是 0.6. 求同时发射一枚炮弹而击中飞机的概率是多少? 又若有一架敌机入侵领空, 欲以 99% 以上的概率击中它, 问至少需要多少门高射炮?

54. 甲、乙、丙三人在同一时间分别破译某一密码, 设甲译出的概率为 0.8, 乙译出的概率为 0.7, 丙译出的概率为 0.6, 求该密码能被译出的概率.

55. 上题中如改为 n 个人组成的小组, 在同一时间内分别破译某密码. 并假定每人能译出的概率均为 0.7, 若要以 99.9999% 的把握能够译出, 问至少需要几个人?

56. 对于三事件 A 、B 、C , 若 $P((A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C)$ 成立, 则称 A 与 B 关于条件 C 独立. 若已知 A 与 B 关于条件 C 、$\overline{C}$ 均独立, 且 $P(C)=0.5$, $P(A|C)=$ 0.9, $P(B|C)=$ 0.9, $P(A|\overline{C})=0.2$, $P(B|\overline{C})=0.1$. 试求 $P(A)$, $P(B)$, $P(A\cap B)$, 并证明 A 与 B 不独立.

57. 一个人的血型为 O , A , B , AB 型的概率分别为 0.46, 0.40, 0.11, 0.03, 现在任意挑选 5 人, 求下列事件的概率:

(1) 2 个人的血型为 O 型, 其他 3 人的血型分别为其他 3 种血型;

(2) 3 个人的血型为 O 型, 2 个人为 A 型;

(3) 没有一个人的血型为 AB 型.

58. 设 $0<P(B)<1$, 证明: A 与 B 独立的充分必要条件是

$$P(A|B)=P(A|\overline{B}).$$

59. 设 A, B, C 相互独立. 证明: A 与 $B\cup C$ 独立, A 与 $B-C$ 也独立.

60. 某厂有甲、乙、丙三条流水线生产同一种产品, 每条流水线的产量分别占该厂生产产品总量的 25% , 35% , 40% , 各条流水线的废品率分别是 5% , 4% , 2% , 求在总产品中任取一个产品是废品的概率.

61. 假定某工厂甲、乙、丙 3 个车间生产同一种螺钉, 产量依次占全厂的 45% , 35% , 20% . 如果各车间的次品率依次为 4% , 2% , 5% . 现在从待出厂产品中检查出 1 个次品, 试判断它是由甲车间生产的概率.

62. 某种同样规格的产品共 10 箱, 其中甲厂生产的共 7 箱, 乙厂生产的共 3 箱, 甲厂产品的次品率为 $\frac{1}{10}$, 乙厂产品的次品率为 $\frac{2}{15}$, 现从这 10 箱产品中任取 1 件产品, 问:

(1) 取出的这件产品是次品的概率;

(2) 若取出的是次品, 分别求出次品是甲、乙两厂生产的概率.

63. 设玻璃杯整箱出售, 每箱 20 只, 各箱含 0, 1, 2 只次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1, 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 由营业员任取一箱, 经顾客开箱随机察看 4 只, 若无次品, 则买此箱玻璃杯, 否则不买. 求:

(1) 顾客买下此箱玻璃杯的概率 α ;

(2) 在顾客买下的此箱玻璃杯中, 确实没有次品的概率 β .

64. 一道选择题有 4 个答案, 其中仅 1 个正确. 假设一个学生知道正确答

案及不知道而乱猜的概率都是 0.5 (乱猜就是任选一个答案). 如果已知学生答对了, 问他确实知道正确答案的概率是多少?

65. 某工厂的车床、钻床、磨床、刨床的台数之比为 9:3:2:1, 它们在一定的时间内需要修理的概率之比为 1:2:3:1. 当有一台机床需要修理时, 问这台机床是车床的概率是多少?

66. A 地为甲种疾病多发区, 该地区共有南、北、中三个行政小区, 其人口比为 9:7:4, 据统计资料, 甲种疾病在该地三个行政小区内的发病率依次为 4‰, 2‰, 5‰, 求 A 地的甲种疾病的发病率.

67. 盒子里有 12 个乒乓球, 其中有 9 个是新的, 第一次比赛时从其中任取 3 个来用, 比赛后仍放回盒子, 第二次比赛时再从盒子中任取 3 个, 求第二次取出的球都是新球的概率；若已知第二次取出的球都是新球, 求第一次取出的球都是新球的概率.

68. 已知 100 件产品中有 10 件绝对可靠的正品, 每次使用这些正品时肯定不会发生故障, 而在每次使用非正品时发生故障的可能性均为 0.1. 现从这 100 件产品中随机抽取一件, 若使用了 n 次均未发生故障, 问 n 为多大时, 才能有 70% 的把握认为所抽取的产品为正品.

69. 在 4 次独立重复试验中事件 A 至少出现 1 次的概率为 0.59, 试问在 1 次试验中 A 出现的概率是多少?

70. 按某种要求检查规则, 随机抽取 4 个梨, 如果 4 个梨全是熟的, 则所有梨都将在餐厅做饭后食用. 一批梨仅有 80% 是熟的, 问能做餐用的概率是多少?