练习题答案与提示

第一章

1.（1） 记 9 件合格品分别为：正$_1$，正$_2$，…，正$_9$，不合格品为次，则

S = {（正$_1$，正$_2$），（正$_1$，正$_3$），…，（正$_1$，正$_9$），（正$_1$，次），
（正$_2$，正$_3$），…，（正$_2$，正$_9$），（正$_2$，次），
……………………………，
（正$_8$，正$_9$），（正$_8$，次），
（正$_9$，次）}，

A = {（正$_1$，次），（正$_2$，次），（正$_3$，次），……，（正$_9$，次）}

（2） 记 2 个白球分别为ω_1,ω_2，3 个黑球分别为b_1,b_2,b_3，4 个红球分别为r_1,r_2,r_3,r_4. 则 $S=\{\omega_1,\omega_2,b_1,b_2,b_3,r_1,r_2,r_3,r_4\}$，

① $A=\{\omega_1,\omega_2\}$； ② $B=\{r_1,r_2,r_3,r_4\}$

2. S

3. $A\cup B\cup C=A$表明$B\cup C\subset A$. 但B，C可以互斥、相容或包含；$ABC=A$表明$A\subset BC$. 但B，C的交必须是非不可能事件

4. 不是对立事件

5.（1） 因为“$AB=A$”与“$AB\subset A$且$A\subset AB$”是等价的，由$A\subset A\,B$可以推出$A\subset A$且$A\subset B$，因此有$A\subset B$

（2） 因为“$A\cup B=A$”与“$A\cup B\subset A$且$A\subset A\cup B$”是等价的，由$A\cup B=A$可以推出$A\subset A$且$B\subset A$，因此有$B\subset A$

6. A与B为对立事件，B与D互不相容，$A\supset D$，$C\supset D$.

7.（1） A； （2） $A\overline{B}\,\overline{C}$； （3） $\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}$.

8.（1） $A_1A_2A_3A_4$； （2） $\overline{A_1A_2A_3A_4}$；

（3） $\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$；

（4） $A_1A_2A_3A_4\cup\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$；

（5） $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\cup A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$；

（6） $A_1A_2A_3A_4\cup\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$

9. $\overline{B}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_2}\,\overline{A_3}$ 表示至少有两个车间没完成任务；$B-C=A_1A_2A_3$ 表示三个车间均完成生产任务

10.（1） $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}$ 表示 A、B 不都发生；

（2） $\overline{A}B=(S-A)B=B-AB$ 表示 B 发生而 AB 不发生；

（3） $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示 A、B 都不发生

11. $A\cup B=A\cup\overline{A}B=A\cup(B-A)=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB$；

$A\cup B\cup C=A\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

$A\,C\cup B=B\cup A\overline{B}C$；　　$C-AB=\overline{A}\cdot\overline{B}C\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

12. 对立一定互不相容（$A\overline{A}=\phi$）；互不相容不一定对立（$AB=\phi,$ 未必 $A\cup B=S$）

例如, E :掷骰子. 事件 $A=\{$ 出现点数为 1,2 $\}$, 事件 $B=\{$ 出现点数为 3,4 $\}$, $C=\{$ 出现点数为 3,4,5,6 $\}$, 则 A 与 B 互不相容, A 与 C 对立.

13. $\dfrac{1}{12}$.　　14. $\dfrac{15}{28}$.　　15. $\dfrac{8}{15}$.　　16. $\dfrac{3}{4}$.　　17. 0.4921.

18. $P(A_1)=9.43\times10^{-11}$；　　$P(A_2)=1.24\times10^{-7}$；

$P(A_3)=7.25\times10^{-12}$；　　$P(A_4)=4.55\times10^{-3}$

19. 七个字母的全排列总共有 7!=5040 种不同排法, 将七个字母编号

$$\begin{matrix} C & C & E & E & I & N & S \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

在全部的 5040 种可能排列中, 恰好排成 $SCIENCE$ 的有如下四种情形

(7154623), (7153624), (7254613), (7253614),

于是 $p=\dfrac{4}{5040}\approx 0.000794$

20.（1） $p=\dfrac{C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1C_{13}^1}{C_{52}^4}=0.105$；

（2） $p=\dfrac{C_4^2C_{13}^2C_{13}^2+P_4^2C_{13}^1C_{13}^3}{C_{52}^4}=0.30$.

21. $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{1}{27}$,

$$P(D)=P(E)=P(F)=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}，\quad P(G)=\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}=\frac{1}{9},$$

$$P(H)=\frac{3\cdot 2\cdot 1}{27}=\frac{2}{9}，\quad P(I)=1-P(G)=\frac{8}{9}.$$

22. 0. 0073

23. $1-\dfrac{364^{100}}{365^{100}}=0.24$

24. 从 4 双即 8 只鞋中任取 4 只, 故基本事件数为 C_8^4,

（1）“4 只恰成 2 双”相当于“从 4 双里选 2 双”, 故有利事件数为 C_4^2,

其概率为 $\dfrac{C_4^2}{C_8^4}=\dfrac{3}{35}$.

(2) 为使 4 只中恰有 1 双, 可设想为先从 4 双中取出 1 双, 再从余下的 3 双中取出 2 双, 然后从这 2 双中各取 1 只. 因此, 有利事件数为 $C_4^1\cdot C_3^2\cdot 2\cdot 2$,

其概率为 $\dfrac{C_4^1\cdot C_3^2\cdot 2\cdot 2}{C_8^4}=\dfrac{24}{35}$.

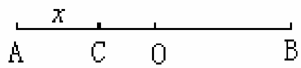
（3）“4 只中没有成双的”相当于“从 4 双中各取 1 只”. 因此, 有利事件数为 $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$, 其概率为 $\dfrac{16}{C_8^4}=\dfrac{8}{35}$

25. 每颗骰子有 6 个点, 因此基本事件总共有 $6\cdot 6\cdot 6=216$ 个, 只要掷出的三个点由 1, 2, 3 或 2, 3, 4 或 3, 4, 5 或 4, 5, 6 组成, 不论它们出现的次序怎么样, 都是有利事件. 因此欲求之概率为 $\dfrac{4\times 3!}{216}=\dfrac{1}{9}$.

26. $\dfrac{18}{35}$

27. 不妨设 $AB=1$，$AC=x$, 则 $CB=1-x$，$AO=\dfrac{1}{2}$，AC, AB, AO 能构成一个三角形必须且只需同时满足

$$\frac{1}{2}+x>1-x,\quad \frac{1}{2}+1-x>x,$$

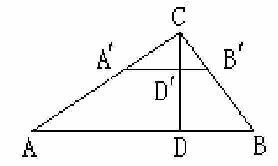


即 $\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{3}{4}$.

将 AB 等分成四小段, 第二及第三小段组成有利事件, 因此所求概率为

$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

28.(如图)截取 $CD'=\frac{1}{n}CD$，当且仅当点 P 落入△ $CA'B'$ 之内时，△ ABP 与△ ABC 的面积之比大于 $\frac{n-1}{n}$，故所求概率为



$$p=\frac{\Delta A'B'C\text{的面积}}{\Delta ABC\text{的面积}}=\frac{CD'^2}{CD^2}=\frac{\frac{1}{n^2}CD^2}{CD^2}=\frac{1}{n^2}.$$

29.(1) $1-c$；(2) $b-c$；(3) $1-a+c$；(4) $1-a-b+c$

30. 0.3.　　31. 0.3；0.5.

32. $\frac{7}{12}$.　　33. 1.　　34.略

35. $P(AB)\le P(A)\le P(A+B)\le P(A)+P(B)$

36. $b+0.7a$；$b-0.3a$；$1-0.3a$

37.(1) $P(A_1A_2)=P(\overline{\overline{A_1}\cup\overline{A_2}})=1-P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})$

$=1-[P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})]$

$=1-P(\overline{A_1})-P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})$

(2) 由(1)和 $P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})\ge 0$ 得第一个不等式,

$P(A_1A_2)\le P(A_1\cup A_2)\le P(A_1)+P(A_2)$

38.0.375

39.设从1000名技术员中任意地抽取一人.以 A 记事件:“抽取男性”, B 记事件:“抽取已婚者”, C 记事件:“抽取大专毕业生”.按所给数据应有

$P(A)=0.813$，$P(B)=0.875$，$P(C)=0.752$，

$P(AB)=0.572$，$P(BC)=0.654$，$P(AC)=0.632$，$P(ABC)=0.420$

于是

$P(A\cup B\cup C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

$=0.813+0.875+0.752-0.572-0.654-0.632+0.420=1.002>1$.

得出矛盾,因此所给数据有错误

40.(1) 0.23；(2) 0.07；(3) 0.73；(4) 0.14；

(5) 0.17； (6) 0.90； (7) 0.10； (8) 0.83

41.(1) 0.988； (2)0.058

42.(1)0.042； (2) 0.35； (3)0.9143

43.0.7； 0.7； 0.52

44. 0.5

45.(1) 0.56； (2) 0.24； (3) 0.14； (4) 0.94

46.(1) 0.188； (2) 0.212； (3) 0.976

47.甲先投中的概率大

48.0.6

49.0.448.

50.(1) 这个系统由三个相同的子系统并联而成,每个子系统又由三个元件串联而成.因此每个子系统的可靠度为 $p_1p_2p_3$，整个系统的可靠度为 $1-(1-p_1p_2p_3)^3$.

(2) 这个系统由三个子系统串联而成,第一、第三个子系统只由一个元件组成,第二个子系统由三个相同的元件并联而成.因此,三个子系统的可靠度分别为 $p_1, 1-(1-p_2)^3, p_1$，整个系统的可靠度为 $p_1{}^2[1-(1-p_2)^3]$.

(3) 这个系统由两个子系统并联而成,第一个子系统由两个二级子系统串联而成,而第一个二级子系统又由两个元件并联而成.因此,第一个子系统的可靠度为 $p_2[1-(1-p_1)^2]$,整个系统的可靠度为

$$1-[1-p_2(1-(1-p_1)^2)](1-p_3)]=1-(1-p_3)[1-p_1p_2(2-p_1)]$$
$$=p_1p_2(2-p_1)+p_3-p_1p_2p_3(2-p_1)=p_1p_2(2-p_1)(1-p_3)+p_3$$

51.0.42； 0.58×0.42； $0.58^{m-1}\times 0.42$

52.(1) $$P\{\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}\}=1-P(A_1A_2\cdots A_n)$$
$$=1-P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=1-p_1p_2\cdots p_n$$

(2) $$P\{\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}\}=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})=\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

(3) $$P\{A_1\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdots\overline{A_n}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cdots\overline{A_n}\cup\cdots\cup\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdots\overline{A_{n-1}}A_n\}$$
$$=p_1(1-p_2)(1-p_3)\cdots(1-p_n)+(1-p_1)p_2(1-p_3)\cdots(1-p_n)+$$
$$\cdots+(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_{n-1})p_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[p_i\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(1-p_j)].$$

53. 用 A_k 表示“第 k 门高射炮发射一枚炮弹击中飞机”, $k=1,2,\cdots$, B 表示“击中飞机”. 则 $P(A_k)=0.6, k=1,2,\cdots$,

(1) $P(A_1\cup A_2)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=1-0.4^2=0.84$,

(2) $P(A_1\cup A_2\cup\cdots A_n)=1-P(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k})=1-\prod_{k=1}^{n}P(\overline{A_k})=1-0.4^n>0.99$,

即 $0.4^n<1-0.99=0.01,\quad n>\dfrac{\lg 0.01}{\lg 0.4}\approx 5.026$, 取 $n=6$,

故至少需要 6 门高射炮, 同时发射一枚炮弹, 可保证 99% 的概率击中飞机

54. 0. 976

55. 12

56. $P(A)=P(C)P(A|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})=\dfrac{1}{2}(0.9+0.2)=0.55$,

$$P(B)=P(C)P(B|C)+P(\overline{C})P(B|\overline{C})=\frac{1}{2}(0.9+0.1)=0.50,$$

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(C)P(AB|C)+P(\overline{C})P(AB|\overline{C})\\&=P(C)P(A|C)P(B|C)+P(\overline{C})P(A|\overline{C})P(B|\overline{C}),\end{aligned}$$

由 A, B 条件独立得 $P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}(0.9^2+0.2\times 0.1)=0.415$,

由于 $P(A\cap B)=0.415\neq 0.55\times 0.5=P(A)P(B)$, 所以 A, B 不独立

57. (1) 从 5 个人任选 2 人为 O 型, 共有 C_5^2 种可能, 在其余的 3 人中任选一人为 A 型, 共有 3 种可能, 在余下的 2 人中任选 1 人为 B 型, 共有 2 种可能, 另 1 人为 $A\ B$ 型, 因此所要求的概率为

$$p=C_5^2\cdot 3\cdot 2\cdot 0.46^2\cdot 0.40\cdot 0.11\cdot 0.13\approx 0.0168;$$

(2) $p=C_5^3\cdot 0.46^3\cdot 0.40^2\approx 0.1557$;

(3) $p=(1-0.03)^5\approx 0.8587$

58. 必要性　因为 A 与 B 独立, 则 $P(A|B)=P(A)=P(A|\overline{B})$.

充分性　　因为 $\dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$,

$$P(AB)[1 - P(B)] = [P(A) - P(AB)]P(B),$$

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

所以 A 与 B 独立.

59. $P(A(B \cup C)) = P(AB) + P(A\overline{B}C)$

$$= P(A)P(B) + P(A)P(\overline{B})P(C)$$

$$= P(A)[P(B) + P(\overline{B}C)] = P(A)P(B \cup C)$$

即 A 与 $B \cup C$ 独立, 同理可证 A 与 $B - C$ 也独立.

$$P(A(B - C)) = P(AB) - P(ABC) = P(A)P(B) - P(A)P(BC)$$

$$= P(A)P(B - BC) = P(A)P(B - C).$$

60. 0. 0345

61. 0. 514

62. (1) 0. 11;　(2) 0. 6364;　0. 3636

63. 记 A : 顾客买下所察看的一箱玻璃杯, B_i : 箱中有 i 件次品 ($i = 0,1,2$), 由题设知, $P(B_0) = 0.8$, $P(B_1) = P(B_2) = 0.1$, 所以

$$P(A \mid B_0) = 1, \; P(A \mid B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}, \; P(A \mid B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19},$$

(1) 由全概率公式知

$$\alpha = P(A) = \sum_{i=0}^{2} P(B_i)P(A \mid B_i) = 0.8 + (\frac{4}{5} + \frac{12}{19}) = 0.94,$$

(2) 由贝叶斯公式知

$$\beta = P(B_0 \mid A) = \frac{P(B_0)P(A / B_0)}{P(A)} = \frac{0.8}{0.94} = 0.85.$$

64. 以 A 记事件: "学生知道正确答案", 则 $\overline{A}$ 表示事件: "学生在乱猜" 以 B 记事件: "学生答对了". 易见 $A \subset B$. 因此有

$$P(AB) = P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B \mid A) = 1,$$

此外, 按题意有 $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{4}$, 由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{8},$$

故所求的条件概率为 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{4}{5}$

65. 以 A_1 表示“任取一台机床是车床”； A_2 表示“任取一台机床是钻床”；A_3 表示“任取一台机床是磨床”；A_4 表示“任取一台机床是刨床”；B 表示“任取一台机床, 它需要修理”. 由题设知

$$P(A_1)=\frac{9}{9+3+2+1}=\frac{9}{15},\ P(A_2)=\frac{3}{15},\ P(A_3)=\frac{2}{15},\ P(A_4)=\frac{1}{15},$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{k}{1+2+3+1}=\frac{1}{7}k,\ P(B\mid A_2)=\frac{2}{7}k,\ P(B\mid A_3)=\frac{3}{7}k,$$

$P(B\mid A_4)=\dfrac{1}{7}k$, 其中 k 为比例常数. 由 Bayes 公式得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B\mid A_i)}=$$

$$\frac{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}k}{\frac{9}{15}\times\frac{1}{7}k+\frac{3}{15}\times\frac{2}{7}k+\frac{2}{15}\times\frac{3}{7}k+\frac{1}{15}\times\frac{1}{7}k}=\frac{9}{22}$$

66. 3.5‰

67. 设 $A_i=\{$第一次取出的 3 个球中有 i 个新球$\}$ $(i=0,1,2,3)$, $B=\{$第二次取出的球全是新球$\}$, 则

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_9^iC_3^{3-i}C_{9-i}^3}{(C_{12}^3)^2}=0.146,$$

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(A_3)P(B\mid A_3)}{P(B)}=\frac{\frac{C_9^3C_3^0C_6^3}{(C_{12}^3)^2}}{0.146}=0.24$$

68. 设 $A=\{$取出正品$\}$, $B=\{$使用 n 次均无故障$\}$, 已知 $P(A)=\dfrac{10}{100}$, 按题目要求应有 $P(A\mid B)\ge 0.70$, 而

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.1\times 1}{0.1\times 1+0.9\times(0.9)^{n}},$$

所以应是 $\frac{0.1}{0.1+(0.9)^{n+1}}\geq 0.7$, $\quad 0.043\geq(0.9)^{n+1}$, 由此得 $n\geq 29$.

69. 设在 1 次试验中 A 出现的概率为 p, 则在 4 次独立试验中 A 不出现的概率为 $(1-p)^4$, 从而 A 至少出现一次的概率为

$$P(A\text{至少出现一次})=1-(1-p)^4=0.59$$

即 $(1-p)^4=0.41$, 所以 $p=0.2$

70. 设 A=“随机抽取一个梨是熟的”. 则取出 4 个梨相当于做了 4 次贝努里试验, 且 $P(A)=0.8=\frac{4}{5}$, 设 B=“4 个梨都是熟的”, 则

$$P(B)=C_4^4(0.8)^4=\frac{256}{625}=0.4096,$$

即此批梨能作餐用的概率为 0.4096.

第二章

1.

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

2.

X	0	1	2	3	4
P	0.4	0.3	0.12	0.09	0.09

3. 把一个球放入盒中看作一次试验, 每个球落到第一个盒中的概率都为 $\frac{1}{3}$, 4 个球放入（3 个）盒中可以看作 4 重贝努里试验, 所以落入第一个盒中的球数 $X\sim B(4,\frac{1}{3})$, 即 X 的分布律为:

$$P(X=k)=C_4^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{4-k},\ k=0,1,2,3,4.$$

4. 按第一种方案, 每人负责 20 台, 设每个工人需维修的设备数为 X, 则 $X\sim B(20,0.01)$. 这里设备发生故障时不能及时维修的事件, 也就是一个工人负责的 20 台设备中至少有两台发生了故障, 其概率为

$$\begin{aligned}P(X\geq 2)&=1-P(X=0)-P(X=1)\\&=1-C_{20}^0\cdot 0.01^0\cdot 0.99^{20}-C_{20}^1\cdot 0.01\cdot 0.99^{19}\end{aligned}$$

$$\approx 1-\frac{0.2^0}{0!}e^{-0.2}-\frac{0.2^1}{1!}e^{-0.2}=1-1.2e^{-0.2}=0.0175231.$$

上述近似计算是用了泊松定理, 其中参数 $\lambda=np=0.2$.

按第二种方案, 3 名维修工人共同维护 80 台设备, 设需要维修的设备数为 Y, 则 $Y\sim B(80,0.01)$, 这里设备发生故障时不能及时维修的事件, 就是 80 台中至少有 4 台发生故障, 其概率为

$$P(Y\geq 4)=1-\sum_{k=0}^{3}\mathrm{C}_{80}^{k}0.01^k 0.99^{80-k}$$

$$\approx 1-\sum_{k=0}^{3}\frac{0.8^k}{k!}e^{-0.8}\approx 0.00908,$$

比较计算结果, 可见第二种方案发挥团队精神, 既能节省人力, 又能把设备管理得更好.

5.（1） 0.000069，（2） 0.986305

6. 不放回抽样, 所需抽取次数的分布律为:

X	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

放回抽样, 所需抽取次数的分布律为: $\mathrm{P}(X=k)=(\frac{1}{5})^{k-1}\cdot\frac{4}{5}$, $k=1,2,3,\cdots$

7. $P(X=k)=\dfrac{C_{10}^{k}\cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}$, $k=0,1,2,3,4,5$

8. 0.0045

9.（1） $\frac{1}{4}$,（2） $\frac{4}{9}$

10. 0.5

11.（4）

12.（1） $a=1$,（2） $\frac{1}{3}$,（3） $\frac{1}{16}$

13. 由分布律的性质可知: $1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(X=k)=c\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{0.6^k}{k}$, 为了求级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{0.6^k}{k}$ 的和, 令 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$, 逐项求导, 得 $f'(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x^{k-1}=\frac{1}{1-x}$, 从而

$$\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1-\mathrm{x}}\mathrm{d}x$$，即 $f(x) - f(0) = -\ln(1-x)$，

又因 $f(0)=0$，从而 $f(x) = -\ln(1-x)$，令 $x=0.6$，得 $f(0.6)=\ln\frac{5}{2}$，从而

$c = (\ln 5 - \ln 2)^{-1}$

14. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1, \\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2, \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$　（1）$\frac{1}{3}$；　（2）0；　（3）$\frac{1}{6}$

15. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-2, \\ \frac{1}{7}, & -2\le x<0, \\ \frac{4}{7}, & 0\le x<2, \\ \frac{6}{7}, & 2\le x<3, \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x<2, \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$

17. （1）$P(X=k)=\frac{0.2^k}{k!}\mathrm{e}^{-0.2}$，$k=0,1,2,\cdots$；

（2）$P(X\le 1)=0.983$

18.

X	-1	1	4
P	0.2	0.3	0.5

19. (2)

20. 略

21. （1）$A=1$，$B=-1$　（2）$f(x)=\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0 \end{cases}$

22.（1） $A=1, B=-1$；（2） 0.4712；（3） $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

23.（1） $\frac{1}{2}$，（2） $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda x}, & x<0, \\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0, \end{cases}$ （3） $1-\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}$

24. 设油库的容量为 x 千加仑, 据题意,

$$P(X>x)=0.01, \text{即} P(X\le x)=0.99,$$

$$P(X\le x)=\int_0^x 5(1-\mathrm{x})^4 dx =1-(1-x)^5=0.99,$$

从而 $(1-x)^5=0.01$, $1-x=0.3981$, 解得 $x=0.6019$（千加仑）

25.（1） 1，（2） $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x<1, \\ \frac{3}{2}-\frac{1}{x}, & 1\le x<2, \\ 1, & x\ge 2, \end{cases}$ （3） 0.875

26. 13

27.（1） 0.9545，（2） 0.1304

28. 2.3%

29. 设考生的英语成绩为 X, 则 $X\sim N(72,\sigma^2)$, 由题意知,

$$P(X\ge 96)=P(\frac{X-72}{\sigma}\ge\frac{96-72}{\sigma})=0.023,$$

故

$$\mathrm{P}(\frac{X-72}{\sigma}<\frac{24}{\sigma})=\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977,$$

查表得, $\frac{24}{\sigma}=2$, 所以 $\sigma=12$, 因此, $X\sim N(72,12^2)$, 从而所求概率为

$$\begin{aligned} P(60\le X\le 84) &= P(\frac{60-72}{12}\le\frac{X-72}{12}\le\frac{84-72}{12}) \\ &=\Phi(1)-\Phi(-1)=0.6824. \end{aligned}$$

30. $P(X<1)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$, 即 $P(X=0)=\mathrm{C}_2^0 p^0(1-p)^2=\frac{4}{9}$,

解得 $p=\frac{1}{3}$, 从而

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0 p^0(1-p)^3=\frac{19}{27}$$

31. $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2}$

32. (1)

Y	3	5	7	9	11
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)

Z	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

33. (1)

Y	0	$\frac{\pi^2}{4}$	π^2
P	0.3	0.6	0.1

(2)

Z	-1	0	1
P	0.1	0.6	0.3

34. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}}y^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^3\leq y\leq\frac{\pi}{6}b^3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

35. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$

36. X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

由于 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内严格单调增加, 因此存在反函数 $x=\arcsin y$, 其导数为: $x'_y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为1, 最小值为 -1, 利用随机变量的单调函数的分布密度的公式, 得 Y 的密度函数为:

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\arcsin y)\left|(\arcsin y)'\right|, & -1<y<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

第三章

1. $N(0,5)$

2. 由 $P(A\cup B)=\dfrac{7}{9}$ 及 X,Y 相互独立得, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{2}{9}$, 由此得

$$\frac{3-a}{2}\cdot\frac{a-1}{2}=\frac{2}{9},$$

解得: $a=\dfrac{5}{3}$ 或 $\dfrac{7}{3}$

3.

X	0	1
P	0.25	0.75

4. $P(\max\{X,Y\}\geq 0)=P(X\geq 0\text{或}Y\geq 0)$

$$=P(X\geq 0)+P(Y\geq 0)-P(X\geq 0,Y\geq 0)=\frac{5}{7}$$

5. 由 $P(X=x_1,Y=y_1)+P(X=x_2,Y=y_1)=P(Y=y_1)$, 可得

$$P(X=x_1,Y=y_1)=\frac{1}{24},$$

因为 X,Y 相互独立, 所以

$$P(X=x_1,Y=y_1)=P(X=x_1)P(Y=y_1),$$

由此得 $P(X=x_1)=\dfrac{1}{4}$, 由

$$P(X=x_1)+P(X=x_2)=1,$$

可得 $P(X=x_2)=\dfrac{3}{4}$, 由

$$P(X=x_1,Y=y_1)+P(X=x_1,Y=y_2)+P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)$$

得 $P(X=x_1,Y=y_3)=\dfrac{1}{12}$, 因为 X,Y 相互独立, 所以

$$P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)P(Y=y_3),$$

由此得 $P(Y=y_3)=\dfrac{1}{3}$，由

$$P(Y=y_3)=P(X=x_1,Y=y_3)+P(X=x_2,Y=y_3),$$

可得 $P(\xi=x_2,\eta=y_3)=\dfrac{1}{4}$，由

$$P(\eta=y_1)+P(\eta=y_2)+P(\eta=y_3)=1$$

可得 $P(Y=y_2)=\dfrac{1}{2}$，由联合分布律性质可得 $P(X=x_2,Y=y_2)=\dfrac{3}{8}$，

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{12}$			
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

6. 设 (X_1,X_2) 的联合分布律为：

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}

由 $P(X_1X_2=0)=1$ 得：$p_{11}=0$，$p_{13}=0$，$p_{31}=0$，$p_{33}=0$

由 $P(X_1=-1)=p_{11}+p_{12}+p_{13}$ 得：$p_{12}=0.25$，

由 $P(X_2=-1)=p_{11}+p_{21}+p_{31}$ 得：$p_{21}=0.25$，

由 $P(X_2=1)=p_{13}+p_{23}+p_{33}$ 得：$p_{23}=0.25$，

由 $P(X_1=1)=p_{31}+p_{32}+p_{33}$ 得：$p_{32}=0.25$，

由联合分布律性质可得：$p_{22}=0$（也可用 $P(\xi_1=0)=0.5$ 得到）
所以

$$P(X_1=X_2)=P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=0,X_2=0)$$
$$+P(X_1=1,X_2=1)=0$$

7．$p+q=7/30$，$p=1/10$，$q=2/15$

8．

X \ Y	0	1	2	3
0	0	0	3/35	2/35
1	0	6/35	12/35	2/35
2	1/35	6/35	3/35	0

9．

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	1	2	3	4	5	6
P	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

10．$P(Y_1=0,Y_2=0)=P(X\le 1,X\le 2)=P(X\le 1)=1-e^{-1}$，

$P(Y_1=0,Y_2=1)=P(X\le 1,X>2)=0$，

$P(Y_1=1,Y_2=0)=P(X>1,X\le 2)=P(1<X\le 2)=e^{-1}-e^{-2}$，

$P(Y_1=1,Y_2=1)=P(X>1,X>2)=P(X>2)=e^{-2}$

11.（1） 由联合分布律性质得：$k=\dfrac{1}{36}$

（2） $P(1\le X\le 2, Y\ge 2)=P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)$

$$+P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)=\frac{15}{36}$$

（3） $P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\dfrac{30}{36}$

（4） $P(Y<2)=P(Y=1)=\dfrac{6}{36}$

（5） 在 $X=1$ 条件下 Y 的条件分布律为

$$P(Y=1|X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{1/36}{6/36}=\frac{1}{6}$$

$$P(Y=2|X=1)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=3|X=1)=\frac{P(X=1,Y=3)}{P(X=1)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

在 $Y=2$ 条件下 X 的条件分布律为

$$P(X=1|Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{2/36}{12/36}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2|Y=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{4/36}{12/36}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=3|Y=2)=\frac{P(X=3,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{6/36}{12/36}=\frac{1}{2}$$

（6） 因为 $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$，故 X 与 Y 独立

12.（1） 因为随机变量 X,Y 相互独立，所以

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j),$$

由此得 (X,Y) 的联合分布律为：

X \ Y	1	2	3
－3	0.1	0.05	0.1
－2	0.1	0.05	0.1
－1	0.2	0.1	0.2

(2)

$2X+Y$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
P	0.1	0.05	0.2	0.05	0.3	0.1	0.2

13. $P(X=0,Z=0)=P(X=0,Y=0)=(1-p)^2$,

$P(X=0,Z=1)=P(X=0,Y=1)=p(1-p)$,

$P(X=1,Z=0)=P(X=1,Y=1)=p^2$,

$P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=0)=p(1-p)$,

因为 X 和 Z 相互独立, 所以

$$P(X=0,Z=1)=P(X=0)\,P(Z=1),$$

由此得

$$p(1-p)=(1-p)\cdot 2p(1-p),$$

从而 $p=0.5$

14. 因为 (X,Y) 服从均匀分布, 所以易得

$P(X\le Y)=0.25$, $P(X>2Y)=0.5$, $P(Y<X\le 2Y)=0.25$

而 (X,Y) 的可能取值为 $(0,0),(1,0),(1,1)$, 且

$$P(U=0,V=0)=P(X\le Y,\ X\le 2Y)=P(X\le Y)=0.25$$
$$P(U=1,V=0)=P(X>Y,\ X\le 2Y)=P(Y<X\le 2Y)=0.5$$
$$P(U=1,V=1)=P(X>Y,\ X>2Y)=P(X>2Y)=0.25$$

所以随机变量 (U,V) 的联合分布律为

U \ V	0	1
0	0.25	0
1	0.5	0.25

15. (1) 因 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=1$, 即 $\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=1$,

解得 $k=\dfrac{1}{8}$.

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_2^4 \dfrac{1}{8}(6-x-y)dy, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}(3-x), & 0\le x\le 2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

同理得

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{1}{4}(5-y), & 2\le y\le 4,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3) $P(X+Y\le 4)=\iint\limits_{x+y\le 4}f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{2}{3}$

(4) $P(X<1,Y<3)=\int_0^1 dx\int_2^3\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{3}{8}$

(5) $P(X<1.5)=P(X<1.5,2\le Y\le 4)=\int_0^{1.5}dx\int_2^4\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{27}{32}$

(6) 由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$, 故 X 与 Y 不独立

(7) 当 $2\le y\le 4$ 时，$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{6-x-y}{10-2y}, & 0\le x\le 2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$

当 $0\le x\le 2$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{6-x-y}{6-2x}, & 2\le y\le 4,\\ 0, & 其他\end{cases}$

16. (1) 由 $\iint\limits_{R^2}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 kx^2ydy=1$, 得 $k=\frac{21}{4}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^1\frac{21}{4}x^2ydy, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$$

同理得

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\le y\le 1,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(3) $P(X<Y)=\iint\limits_{x<y} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{y}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{17}{20}$

(4) 由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立

17. 因为 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)$

$$=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy=\begin{cases}\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-x-2y}dy, & z>0,\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

第四章

1. 每个生日在第一季度的概率是 $p=\frac{1}{4}$. 设 X 表示三个人中生日在第一季度的人数, 则 X 服从二项分布 $\mathrm{B}\left(3,\frac{1}{4}\right)$, 从而 X 的平均为 $EX=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

2. $EX=0.5$, $DX=\frac{45}{110}$

3. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ 为偶函数, $x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ 为奇函数, 所以, 由积分性质知

$EX=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0$（奇函数在对称区间上的积分值为零）

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2P_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}(-x^2)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=(-x^2\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\,.$$

4. $EX = 2,\quad DX = \dfrac{4}{3}$

5. 设圆的直径为随机变量 X，圆的面积为随机变量 Y，则

$$Y = f(X) = \frac{\pi}{4} X^2,$$

随机变量 X 的概率密度为

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases},$$

于是

$$EY = E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\pi}{4} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{b-a} \cdot x^3 \Big|_a^b = \frac{\pi}{12}(a^2 + ab + b^2)$$

6. $DY = 20 - 2\pi^2$

7. $EX = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot \dfrac{a^k}{(1+a)^{k+1}} = \dfrac{1}{1+a}\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^k\right],$

令 $\dfrac{a}{(1+a)} = p$，则 $0 < p < 1$，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp^k = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} p^k\right)' = p\left(\frac{p}{1-p}\right)' = \frac{p}{(1-p)^2},$$

故 $EX = \dfrac{1}{1+a} \cdot \dfrac{\dfrac{a}{1+a}}{\left(1 - \dfrac{a}{1+a}\right)^2} = a$.

采用同样的方法并利用 $EX = a$ 得

$$EX^2 = \frac{1}{1+a}\left[\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{a}{1+a}\right)^k\right] = \frac{1}{1+a} \sum_{k=1}^{\infty} k\left[(k-1)+1\right] p^k$$

$$= \frac{1}{1+a} \sum_{k=1}^{\infty} kp^k + \frac{1}{1+a} \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p^k$$

$$= a + \frac{p^2}{1+a}\left(\sum_{k=1}^{\infty} p^k\right)'' = a + \frac{p^2}{1+a}\left[\frac{p}{(1-p)}\right]''$$

$$=a+\frac{p^2}{1+a}\cdot\frac{2}{(1-p)^3}=a+2a^2,$$

故

$$DX=\mathrm{E}X^2-(\mathrm{E}X)^2=(a+2a^2)-a^2=a(1+a)$$

8. $EX=\frac{1}{p},\ \ DX=\frac{q}{p^2}$

9. 设 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$, 其中

$$X_i=\begin{cases}1, & 若第i次试验A出现\\ 0, & 若第i次试验\overline{A}出现\end{cases},$$

则 $EX=\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$, 由试验独立得诸 X_i 相互独立, 从而知

$$DX=\sum_{i=1}^{n}DX_i=\sum_{i=1}^{n}p_i(1-p_i)$$

10. $E\overline{X}=\mu,\quad D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$

11. 事件 A 出现奇数次的概率记为 b, 出现偶数次的概率记为 a, 则

$$a=C_n^0p^0q^n+C_n^2p^2q^{n-2}+\cdots,$$
$$b=C_n^1pq^{n-1}+C_n^3p^3q^{n-3}+\cdots.$$

利用 $a+b=(p+q)^n=1,\ \ a-b=(q-p)^n$, 可解得事件 A 出现奇数次的概率为

$$b=\frac{1}{2}[1-(q-p)^n]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n,$$

顺便得到, 事件 A 出现偶数次的概率为 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n$.

Y 服从两点分布, 由此得,

$$P\{Y=1\}=P\{事件A出现奇数次\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n,$$

$$P\{Y=0\}=P\{事件A出现偶数次\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n,$$

所以,

$$EY=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n,$$

$$DY=[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2p)^n][\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(1-2p)^{2n}.$$

12.（1）117；　（2）$\frac{65}{4}$

13. $EX^n=\int_{-\infty}^{\infty}x^n f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\cdot x\mathrm{d}x+\int_1^2 x^n\cdot(2-x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^{n+2}}{n+2}\bigg|_0^1+(2\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2})\bigg|_1^2$$

$$=\frac{1}{n+2}+(\frac{2^{n+2}}{n+1}-\frac{2^{n+2}}{n+2}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2})=\frac{2^{n+2}-2}{(n+1)(n+2)}$$

14. $EY=(q+p\mathrm{e}^a)^n$，$DY=(q+p\mathrm{e}^{2a})^n-(q+p\mathrm{e}^a)^{2n}$

15.（1）0.0014；（2）9.6

16.（1）3.007；（2）$5\sqrt{2}\pi$

17. 设 $f(x)$ 是 X 的密度函数, 则 $f(-x)=f(x)$, 由 $xf(x)$ 是奇函数可得 $EX=0,$ 从而 $EX\,E|X|=0$. 又由于 $x|x|f(x)$ 是奇函数及 $EX^2<\infty,$ 得

$$EX|X|=\int_{-\infty}^{\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x=0=EX\ E|X|,$$

故 $|X|$ 与 X 不相关.

由于 X 的密度函数是偶函数, 故可选 $c>0$ 使得当 $0<\mathrm{P}\{|X|<c\}<1$ 时, 也有 $0<\mathrm{P}\{X<c\}<1$, 从而可得

$$P\{X<c\}P\{|X|<c\}\neq P\{|X|<c\}=P\{X<c,|X|<c\},$$

其中等式成立是由于 $\{|X<c|\}\subset\{X<c\}$, 由此得 $|X|$与X不独立.

18. 设 $\xi:\begin{pmatrix}a, & b\\ p_1, & q_1\end{pmatrix}$, $\eta:\begin{pmatrix}c, & d\\ p_{2,} & q_2\end{pmatrix}$. 作两个随机变量

$$\xi^*=\xi-b:\begin{pmatrix}a-b, & 0\\ p_1, & q_1\end{pmatrix},\quad \eta^*=\eta-d:\begin{pmatrix}c-d, & 0\\ p_2, & q_2\end{pmatrix},$$

由 X 与 Y 不相关即 $EXY=EX\cdot EY$ 得

$$EX^*Y^*=E(XY-bY-dX+bd)=EX\ EY-bEY-dEX+bd$$

$$=(EX-b)(EY-d)=EX^*EY^*,$$

而

$$EX^*Y^*=(a-b)(c-d)P\{X^*=a-b,Y^*=c-d\},$$
$$EX^*EY^*=(a-b)P\{X^*=a-b\}\cdot(c-d)P\{Y^*=c-d\},$$
由上两式值相等,再由$(a-b)(c-d)\neq 0$得
$$P\{X^*=a-b,\ Y^*=c-d\}=P\{X^*=a-b\}P\{Y^*=c-d\},$$
即$P\{X=a,\ Y=c\}=P\{X=a\}\cdot P\{Y=c\}$.
同理可证
$$P\{X=a,\ Y=d\}=P\{X=a\}\cdot P\{Y=d\},$$
$$P\{X=b,\ Y=c\}=P\{X=b\}\cdot P\{Y=c\},$$
$$P\{X=b,\ Y=d\}=P\{X=b\}\cdot P\{Y=d\},$$
从而X与Y独立.

第五章

1. 0.25

2. (1) 0.709; (2) 0.875

3. 0.9842

4. 0.99995

5. 0.8759

6. 14

第六章

1. B

(A)中含总体期望EX是未知参数,(C)中$EX_i=EX$也是未知参数,都不是统计量,而(D)不是样本的函数,当然不是统计量.

2. B,C

3. 样本容量$n=9$,利用计算器的统计功能键,算出
$$\overline{x}=12.92,\ s^2=(3.107)^2=9.65,$$
观察$x_1,x_2,\cdots,x_9$,可得最小值$x_1^*=8.15$,最大值$x_n^*=17.23$.

注 上面得到的$\overline{x}$,s^2,x_1^*,x_n^*依次是统计量$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ X_1^*=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n),$$

$$X_n^*=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

的观察值. 注意统计量与统计量的观察值的区别, 前者是随机变量, 后者是具体的数值

4. $\overline{x}=3.258$, $s^2=0.00017$

(1) $u=1.118$；(2) $\chi_1^2=2.656$；(3) $\chi_2^2=3.906$.

提示 为了计算 χ_2^2 的值, 先将其展开为

$$\chi_2^2=\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{5}X_i^2-2\mu\sum_{i=1}^{5}X_i+5\mu^2),$$

其中, $\sum_{i=1}^{5}X_i^2$, $\sum_{i=1}^{5}X_i$ 均可由计算器的统计功能键求出来

5. "电容器的使用寿命"是总体 X, 其服从参数为 λ 的指数分布, 即 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0\quad, & x\le 0.\end{cases}$

"抽查的 n 只电容的使用寿命" 是容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且每个 X_i 与总体 X 具有相同的分布, 所以, 样本的联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}, & x_i>0, i=1,\cdots,n,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

6. 总体 X 为该市市民户的人均月收入, 容量为 100 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为抽查的 100 户市民的人均月收入

7. 总体 X 为该校学生的数学考试成绩, 容量为 50 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{50}$ 为抽取的 50 人的数学成绩

总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 即其概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{50}$ 的概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{50})=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{50}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{50}(x_i-\mu)^2}$$

8. D

因为 $X\sim N(2,\sigma^2)$，根据正态总体的抽样分布 $\overline{X}\sim N(2,\frac{\sigma^2}{n})$，

$$U=\frac{\overline{X}-2}{\sqrt{\sigma^2/n}}=\frac{\overline{X}-2}{\sqrt{\sigma^2/16}}=\frac{4(\overline{X}-2)}{\sigma}\sim N(0,1)$$

9. (A) 因 $X\sim N(0,\sigma^2)$，由正态总体的抽样分布，有 $\overline{X}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n})$，所以 $U=\frac{\overline{X}}{\sqrt{\sigma^2/n}}=\frac{\overline{X}\sqrt{n}}{\sigma}\sim N(0,1)$.

(B) 因 $X_i\sim N(0,\sigma^2)$，得 $\frac{X_i}{\sigma}\sim N(0,1)$，$i=1,\cdots,n$，且这 n 个标准正态变量相互独立，所以由 χ^2 分布的定义知，$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$.

(C) $nS_n^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=(n-1)S^2$，由正态总体的抽样分布知

$$\frac{nS^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

(D) $\frac{S_n^2}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{S^2}{n}$，由正态分布的抽样分布知

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}}{S_n/\sqrt{n-1}}=\frac{\overline{X}\sqrt{n-1}}{S_n}\sim t(n-1),$$

或者，由(A)，(C)的结果，根据 t 分布的定义有

$$T=\frac{\overline{X}\sqrt{n}/\sigma}{\sqrt{nS_n^2/\sigma^2(n-1)}}=\frac{\overline{X}\sqrt{n-1}}{S_n}\sim t(n-1).$$

综上可知, 应选 B.

10. C

11. B

12. (1) $\chi^2(2n-2)$; (2) $t(2n-2)$; (3) $F(1,2n-2)$

13. B

14. $a=\frac{1}{18}$, $b=\frac{1}{9}$ 时, $\chi^2\sim\chi^2(2)$

15. (1) 由正态总体的抽样分布得

$$\frac{1}{2^2}\sum_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(8),$$

因此,

$$P\{\alpha_1<\sum_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2<\alpha_2\}=P\{\frac{\alpha_1}{4}<\frac{\sum_{i=1}^{9}(X_i-\overline{X})^2}{4}<\frac{\alpha_2}{4}\}$$

$$=P\{\chi^2(8)>\frac{\alpha_1}{4}\}-P\{\chi^2(8)>\frac{\alpha_2}{4}\}=0.9,$$

令 $P\{\chi^2(8)>\frac{\alpha_1}{4}\}=0.95$, $P\{\chi^2(8)>\frac{\alpha_2}{4}\}=0.05$, 根据 χ^2 分布得上侧临界值的定义, 查表可得,

$$\frac{\alpha_1}{4}=\chi^2_{0.95}(8)=2.733,\ \frac{\alpha_2}{4}=\chi^2_{0.05}(8)=21.955,$$

即

$$\alpha_1=2.733\times4=10.932,\ \alpha_2=21.955\times4=87.82$$

注 一般来说, 满足条件

$$P\left\{A<\chi^2<B\right\}=1-\alpha$$

的数（临界值）A, B 有很多对, 这里我们采用的取法是使 A, B 满足

$$P\left\{\chi^2\le A\right\}=P\left\{\chi^2\ge B\right\}=\frac{\alpha}{2}.$$

通常认为这样的取法比较好, 对于 F 分布也类似

（2） 由正态总体的抽样分布 $\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{\sigma/\sqrt{9}} \sim N(0,1)$, 即 $\dfrac{\overline{X}-\mu_1}{2/3} \sim N(0,1)$,

得 $P\{|\overline{X}-\mu_1|<\alpha_3\}=P\{\dfrac{3}{2}|\overline{X}-\mu_1|<\dfrac{3}{2}\alpha_3\}=0.9$,

根据 $N(0,1)$ 分布得双侧临界值的定义, 查表得 $\dfrac{3}{2}\alpha_3=u_{0.10/2}=1.645$, 所以

$$\alpha_3=1.645\times\frac{2}{3}=1.097.$$

（3） 由正态总体的抽样分布

$$\frac{\overline{Y}-\mu_2}{S_2/\sqrt{16}} \sim t(15),\text{ 即 }\frac{4(\overline{Y}-\mu_2)}{S_2} \sim t(15),$$

得

$$P\left\{|\overline{Y}-\mu_2|\Big/\sqrt{\sum_{i=1}^{16}(Y_i-\overline{Y})^2}<\alpha_4\right\}=P\left\{\frac{|\overline{Y}-\mu_2|}{\sqrt{15S_2^2}}<\alpha_4\right\}$$

$$=P\left\{\left|\frac{4(\overline{Y}-\mu_2)}{S_2}\right|<4\sqrt{15}\alpha_4\right\}=0.9.$$

根据 t 分布的双侧临界值的定义, 并查表得 $4\sqrt{15}\alpha_4=t_{0.10/2}(15)=1.75$, 于是,

$$\alpha_4=1.75\big/4\sqrt{15}=0.113.$$

（4） 由正态总体得抽样分布 $\dfrac{S_2^2}{S_1^2}=\dfrac{S_2^2/2^2}{S_1^2/2^2} \sim F(15,8)$, 得

$$P\left\{\alpha_5<\frac{15S_2^2}{8S_1^2}<\alpha_6\right\}=P\left\{\frac{8}{15}\alpha_5<\frac{S_2^2}{S_1^2}<\frac{8}{15}\alpha_6\right\}=0.95-0.05=0.90,$$

查 F 分布上侧临界值表, 得

$$\frac{8}{15}\alpha_5=F_{0.95}(15,8)=\frac{1}{F_{0.05}(8,15)}=\frac{1}{2.645},$$

$$\frac{8}{15}\alpha_6=F_{0.05}(15,8)=3.22,$$

所以，$\alpha_5 = \dfrac{15}{2.645\times 8} = 0.709$，$\alpha_6 = 3.22\times\dfrac{15}{8} = 0.709 = 6.038$

16. $n \ge 16$，即至少应进行 16 次称量

提示　对该物品进行独立重复称量的所有可能结果，看成总体 X，则 n 次称量结果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 就是 X 的一容量为 n 的样本，$\overline{X}_n$ 即样本均值. 由题意知，$X \sim N(a, 0.2^2)$，根据正态总体的抽样分布，$\overline{X}_n \sim N(a, \dfrac{0.2^2}{n})$，按条件 $P\{|\overline{X}_n - a| < 0.1\} \ge 0.95$ 来求出 n

17. 至少要 42 个学生参加抽考

18. 0. 1336

提 示　该总体并非正态总体，然而 $n = 100$ 为大样本，所以 $\overline{X} \sim N(80, \dfrac{400}{100})$

19. 0. 8904

20. 约等于 0. 3446

21. $Y \sim F(10, 5)$；　$a = \dfrac{3}{2}$

22. (1)　因为 $X_i \sim N(0, 4)$，$(i = 1, \cdots, 10)$ 且 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 相互独立，所以 $\sum\limits_{i=1}^{10} \dfrac{X_i^2}{4} \sim \chi^2(10)$，

$$P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \le 13\} = P\{\sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{4} \le \frac{13}{4}\}$$

$$= 1 - P\{\chi^2(10) > 3.25\} = 1 - \alpha,$$

由于 $\chi_\alpha^2(10) = 3.25$，反查 χ^2 分布表，得，$\alpha = 0.975$，故

$$P\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 \le 13\} = 1 - 0.975 = 0.025.$$

(2)　因为 $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \dfrac{9S^2}{4} \sim \chi^2(9)$，所以，

$$P\{13.3 \le \sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 \le 76\} = P\{3.32 \le \frac{9}{4}S^2 \le 19\}$$

$$= P\{\chi^2(9) > 3.32\} - P\{\chi^2(9) > 19\} = \alpha_1 - \alpha_2,$$

由 $\chi^2_{\alpha_1}(9) = 3.32$ 及 $\chi^2_{\alpha_2}(9) = 19$，反查 χ^2 分布表，得 $\alpha_1 = 0.95$ 及 $\alpha_2 = 0.025$，所以，$P\{13.3 \le \sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 \le 76\} = 0.95 - 0.025 = 0.925$

23. 0.99

24. 0.05

第七章

1. C　　2. B

3. 31.06

4. D　　5. C　　6. D　　7. A　　8. B

9. 对

10.（1）矩估计

因为 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \sqrt{\theta}\, x^{\sqrt{\theta}} dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，所以 $\theta = \left(\frac{EX}{1-EX}\right)^2$，

而 $\hat{EX} = \overline{X}$，由此得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta} = \left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$

（2）最大似然估计

似然函数为：$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \left(\sqrt{\theta}\right)^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}$，

两边取对数，　$\ln L(\theta) = \frac{n}{2}\ln\theta + \left(\sqrt{\theta}-1\right)\ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$，

令　$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\sqrt{\theta}}\ln(x_1 x_2 \cdots x_n) = 0$，

得参数 θ 的最大似然估计为：$\hat{\theta} = \frac{n^2}{\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}$

11.（1）矩估计

因为 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\theta,$$

所以 $\theta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}EX$，而 $\hat{EX}=\overline{X}$，由此得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\overline{X}$ 。

（2）最大似然估计

似然函数为：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}}$，

两边取对数，　$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}$，

令　$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^3}=0$，

解得参数 θ 的最大似然估计为：$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}}$

12. $\hat{p}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}$

13. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

14. 解法一：直接用似然函数求.（过程略）

解法二：记 $\alpha=\tan\mu+7$，则参数 α,σ^2 的最大似然估计是：

$$\hat{\alpha}=\overline{X}\,,\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\,,$$

由最大似然估计的不变性得参数μ的最大似然估计是: $\hat{\mu}=\arctan\left(\overline{X}-7\right)$

15. 因为$P\left(X\le t\right)=\Phi\left(\dfrac{t-\mu}{\sigma}\right)$, 而参数参数$\mu,\sigma^2$的最大似然估计是:

$$\hat{\mu}=\overline{X}\,,\ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\,,$$

所以$P\left(X\le t\right)$的最大似然估计是: $P\left(\hat{X}\le t\right)=\Phi\left(\dfrac{t-\overline{X}}{\hat{\sigma}}\right)$

16. 罐中黑球所占的比例是p, 令$X=\begin{cases}1, & 若取出球是黑球,\\ 0, & 若取出球是白球,\end{cases}$

则X服从二点分布$b(1,p)$, 似然函数为:

$$L(p)=p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}(1-p)^{n-\sum\limits_{i=1}^{n}X_i}\,,$$

由此得参数p的最大似然估计为: $\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\dfrac{k}{n}$, 而$R=\dfrac{p}{1-p}$, 所以参数

R的最大似然估计为: $\hat{R}=\dfrac{\frac{k}{n}}{1-\frac{k}{n}}=\dfrac{k}{n-k}$

17.(1) 矩估计

因为$EX=-1\times2\theta+0\times\theta+2\times(1-3\theta)=2-8\theta$, 所以$\theta=\dfrac{2-EX}{8}$,

而$\hat{E}X=\overline{X}$, 从而参数θ矩估计量是: $\hat{\theta}=\dfrac{2-\overline{X}}{8}$.

(2) 最大似然估计

设n_1是样本中-1发生的次数, n_2是样本中0发生的次数

则似然函数是:

$$L(\theta)=P(X_1=x_1)\cdots P(X_n=x_n)=(2\theta)^{n_1}\theta^{n_2}(1-3\theta)^{n-n_1-n_2},$$

从而 $\ln L(\theta)=(n_1+n_2)\ln\theta+n_1\ln 2+(n-n_1-n_2)\ln(1-3\theta)$,

令 $\dfrac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\dfrac{n_1+n_2}{\theta}-\dfrac{3n-3n_1-3n_2}{1-3\theta}=0$,

得参数θ的最大似然估计是: $\hat{\theta}=\dfrac{n_1+n_2}{3n}$

18. $\hat{p}=1-\dfrac{S^2}{\overline{X}}$, $\hat{N}=\dfrac{\hat{X}}{\hat{p}}$

19. 注意到$E(X_i-\mu)^2=DX_i=DX$, 即得所要证的结果

20. 证明: 因为$EX=\dfrac{3}{2}\theta$, 所以$E\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}E\overline{X}=\dfrac{2}{3}EX=\theta$,

即$\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}\overline{X}$是$\theta$的无偏估计

21. 证明方法同上题.

22. 证明: 因为$E\overline{X}=EX=\lambda$, $ES_n^2=DX=\lambda$, 所以

$$E\left[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S_n^2\right]=\alpha E\overline{X}+(1-\alpha)ES_n^2=\alpha\lambda+(1-\alpha)\lambda=\lambda$$

23. 不是无偏估计, 它是例 4 的特殊情况.

24. $\hat{\mu}_2$更有效.

25. 容易求得参数μ_1,μ_2的最大似然估计分别为: $\hat{\mu}_1=\overline{X},\hat{\mu}_2=\overline{Y}$,

由此得参数α的最大似然估计为: $\hat{\alpha}=\overline{X}-\overline{Y}$

因为 $D\hat{\alpha}=D(\overline{X}-\overline{Y})=\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{4}{n_2}=\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{4}{n-n_1}$,

容易求得: 当$n_1=\dfrac{n}{3}$时$D\hat{\alpha}$最小, 当$\dfrac{n}{3}$不是整数时, 可以比较$n_1=\left[\dfrac{n}{3}\right]$和

$n_1=\left[\dfrac{n}{3}\right]+1$时$D\hat{\alpha}$的大小得结论

26. 因为当样本容量n很大时，$\frac{\overline{X}-\mu}{S}\sqrt{n}$近似服从标准正态分布，所以椭圆度$\mu$的置信水平为 0.95 的置信区间是

$$\left(\overline{X}-Z_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+Z_{0.025}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

而$Z_{0.025}=1.96$，代入得所求置信区间是$(0.0761, 0.0859)$

27.（1）$(21.302, 21.498)$；　（2）$(21.261, 21.539)$；

（3）$(0.117, 0.310)$；　（4）$(0.122, 0.345)$

28. 因为方差已知时均值μ的置信水平为 0.9 的置信区间是

$$\left(\overline{X}-Z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+Z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

所以区间长度是$L=Z_{0.05}\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$，而$L=Z_{0.05}\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\le 2$

由此得 $n\ge 24.35$，即n至少 25

29. $(-0.401,\ 2.601)$

30. $(0.222,\ 3.601)$

31. $(0.043,\ 0.137)$

第八章

1、2、3 略

4. 此题是单总体、方差已知的均值双侧检验. 机器包装的平均重量仍为 15 克

5. 单总体、方差已知的均值双侧检验. 检验结果与原设计的标准均值 14 有显著差异

6. 单总体、方差未知的均值双侧检验. 可以认为其矩形的宽与长之比为 6.18

7. 单总体、方差未知的均值双侧检验. 可以认为此项计划达到了该企业经理的预计效果

8. 单总体的方差检验. 可以相信这批铜丝的折断力方差也是 64

9. 单总体的方差检验以及均值检验. 其结果是:

(1) 标准差无显著变化(2) 平均重量不符合规定标准

10. 双总体的方差检验. 检验结果在两种水平下均认为精度无显著差异

11. 双总体的方差及均值检验. 检验结果方差一致, 两者的均值也一致

12. 双总体方差已知且相等的均值检验. 认为两地居民的人均生活费收入有显著差异

第九章

1. 略

2. (1) 线性回归方程 $\hat{y} = 42.1012 + 0.3659x$;

(2) 回归效果显著;

(3) $\hat{y}_0 = 67.35$, 预测区间为: (63.08 , 71.62)

3. (1) 样本线性回归方程 $\hat{y} = 1.22 + 0.8081x$;

(2) $F = 974.4 > 5.99$, 回归效果显著;

(3) 预测区间(17.6, 18.8).

4. $\hat{y} = 1.79e^{-0.15/x}$