第一章复习题解答

1、设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},\ P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{8},\ P(ABC)=\frac{1}{16}$，则 $P(A+B+C)=$_______，$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=$_______，$P(A,B,C$ 恰好发生一个$)=$_______，$P(A,B,C$ 至多发生一个$)=$_______，$P(A\mid A+B+C)=$________。

解：$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{7}{16}$

$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A+B+C)=\frac{9}{16}$

$P(A,B,C$ 恰好发生一个$)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$=3P(A\bar{B}\bar{C})=3P(A-B\cup C)=3\left[P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\right]=\frac{3}{16}$

$P(A,B,C$ 至多发生一个$)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})+P(A,B,C$ 恰好发生一个$)=\frac{3}{4}$

$$P(A\mid A+B+C)=\frac{P(A(A+B+C))}{P(A+B+C)}=\frac{P(A)}{P(A+B+C)}\ \frac{4}{7}$$

2、已知 $P(A)=0.4, P(A+B)=0.7$，若 A,B 互不相容，则 $P(B)=$_________；若 A,B 相互独立，则 $P(B)=$_________；若 $A\subset B$，则 $P(B)=$_________。

解：若 A,B 互不相容，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.7$，所以 $P(B)=0.3$

若 A,B 相互独立，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0.7$$

所以 $P(B)=0.5$

3、已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B\mid A)=0.8$，则 $P(A+B)=$_________。

解：$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(B\mid A)P(A)=0.7$

4、已知 A,B,C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，则 A,B,C 至少发生一个的概率为______，A,B,C 恰好发生一个的概率为______，A,B,C 至多发生一个的概率为______。

解：$P(A+B+C)=1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=\dfrac{19}{27}$

$P(A,B,C\text{恰好发生一个})=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C)$

$=3P(A)P(\bar{B})P(\bar{C})=\dfrac{4}{9}$

$P(A,B,C\text{至多发生一个})=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})+P(A,B,C\text{恰好发生一个})$

$=P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})+\dfrac{4}{9}=\dfrac{20}{27}$

5、已知 $A\supset B$，且 $P(A)\neq P(B)>0$，则 $P(A|B)=$_______。

解：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

6、四个人独立破译一份密码，已知各人能破译的概率分别为 $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{6}$，则密码能被破译的概率为____________。

解：设 A_i 表示事件"第 i 人能破译密码"，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{4}\bar{A}_i)=1-P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_4)=\frac{2}{3}$$

7、一袋中有 10 只球，其中 3 只白球，7 只红球，现从中无放回取球二次，每次取一球，求（1）第二次取到白球的概率；（2）第二次才取到白球的概率。

解：设 A_i 表示事件"第 i 次取到白球"，则

（1）$P(A_2)=\dfrac{3}{10}$（根据抽签原理）

（2）$P(\bar{A}_1A_2)=\dfrac{7\times 3}{10\times 9}=\dfrac{7}{30}$

8、从 1,2, ⋯, 10 中任意取出 3 个数，分无放回和有放回二种情况计算下面概率，（1）最大号码是 5 的概率；（2）最小号码是 5 的概率。

解：设 A 表示事件"最大号码是 5"，B 表示事件"最小号码是 5"。

无放回时，$P(A)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^3}$，$P(B)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}$

有放回时，记C表示事件“最大号码不超过 5”， D表示事件“最大号码不超过 4”，则$A=C-D$，所以$P(A)=\frac{5^3}{10^3}-\frac{4^3}{10^3}$

同理 $P(B)=\frac{6^3}{10^3}-\frac{5^3}{10^3}$

9、一间宿舍有 8 位同学，求恰有 4 人的生日在同一月份的概率。

解：设A表示事件“恰有 4 人的生日在同一月份”，则

$$P(A)=\frac{C_{12}^1 C_8^4 11^4}{12^8}$$

10、在一盒中装有 15 只球，其中 9 只是新球，第一次比赛时从中任取 2 只，用后放回，第二次比赛时再次从其中取出 3 只，（1）求第二次取出的球都是新球的概率；（2）已知第二次取出的球都是新球，求第一次取出二只新球的概率。

解：设A表示事件“第二次取出的球都是新球”， B_1表示事件“第一次取出球都是旧球”， B_2表示事件“第一次取出球一新一旧”，B_3表示事件“第一次取出球都是新球”，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\times\frac{C_6^2}{C_{15}^2}+\frac{C_8^3}{C_{15}^3}\times\frac{C_6^1C_9^1}{C_{15}^2}+\frac{C_7^3}{C_{15}^3}\times\frac{C_9^2}{C_{15}^2}=\frac{36}{455}$$

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\frac{1}{3}$$

11、设同一专业有二个班，一班有 50 位同学，其中 10 位是女生；二班有 30 位同学，其中 18 位是女生，从二个班随机选一个班，然后从中先后选二位学生，（1）求选出的第一位是女生的概率；（2）已知选出的第一位是女生的条件下，求第二位也是女生的概率。

解：设A_i表示事件“选出的第i位是女生”， B表示事件“从一班选”，

则 $P(A_1)=P(A_1|B)P(B)+P(A_1|\bar{B})P(\bar{B})=\frac{C_{10}^1}{C_{50}^1}\times\frac{1}{2}+\frac{C_{18}^1}{C_{30}^1}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{P(A_1A_2|B)P(B)+P(A_1A_2|\bar{B})P(\bar{B})}{P(A_1)}$$

$$=\frac{\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}\times\frac{1}{2}+\frac{C_{18}^2}{C_{30}^2}\times\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}\approx 0.4856$$

12、设某批产品 50 件为一批，已知每批产品中有 0,1,2,3,4 件次品的概率分别为 0.35,0.25,0.2,0.18,0.02。现从某批产品中抽取 10 件，发现有一件是次品，求该批产品次品数不超过 2 件的概率。

解：设 A 表示事件“抽取 10 件有一件是次品”， B_i 表示事件“含 $i-1$ 件次品”，则

$$P(B_1+B_2+B_3|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)}{\sum_{i=1}^{5}P(A|B_i)P(B_i)}$$

$$=\frac{\frac{0}{C_{50}^{10}}\times0.35+\frac{C_{49}^9}{C_{50}^{10}}\times0.25+\frac{C_2^1C_{48}^9}{C_{50}^{10}}\times0.2}{\frac{0}{C_{50}^{10}}\times0.35+\frac{C_{49}^9}{C_{50}^{10}}\times0.25+\frac{C_2^1C_{48}^9}{C_{50}^{10}}\times0.2+\frac{C_3^1C_{47}^9}{C_{50}^{10}}\times0.18+\frac{C_4^1C_{46}^{10}}{C_{50}^{10}}\times0.02}=0.588$$

13、验收成箱包装的玻璃器皿，每箱装 24 只。已知每箱含 0,1,2 件次品的概率分别是 0.8,0.15,0.05。现随机抽一箱，从中取 4 只，若未发现次品，则通过验收，否则要逐一检查并更换。求（1）通过验收的概率；（2）通过验收的箱中确实无次品的概率。

解：设 A 表示事件“通过验收”， B_i 表示事件“含 $i-1$ 件次品”，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)=1\times0.8+\frac{C_{23}^4}{C_{24}^4}\times0.15+\frac{C_{22}^4}{C_{24}^4}\times0.05\approx0.9646$$

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}\approx 0.8294$$

14、假设目标出现在射程内的概率为 0.7，这时射击命中目标的概率为 0.6。求两次独立射击中至少命中一次目标的概率。

解：设 A 表示事件“目标出现在射程内”，B_i 表示事件“第 i 次射击命中目标”，则

$$P(B_1+B_2)=P(B_1+B_2|A)P(A)+P(B_1+B_2|\bar{A})P(\bar{A})$$

$$=\left[1-P(\bar{B}_1\bar{B}_2|A)\right]P(A)=\left[1-P(\bar{B}_1|A)P(\bar{B}_2|A)\right]P(A)=0.588$$

15、有三门高炮同时独立向某目标射击，已知各自的命中率分别为 0.2,0.3,0.5，目标被命中 1 发、2 发、3 发而击落的概率为 0.2,0.6,0.9。（1）求三门高炮在一次射击中击落目标的概率；（2）在目标被击落条件下，求只有第一门高炮击中的概率。

解：设 A_i 表示事件“第 i 门高炮命中目标”， B_i 表示事件“目标被命中 i 发”，C 表示事件“三门高炮在一次射击中击落目标”，则

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(C|B_i)P(B_i)=0\times 0.8\times 0.7\times 0.5+0.9\times 0.2\times 0.3\times 0.5$$

$$+0.2\times(0.2\times 0.7\times 0.5+0.8\times 0.3\times 0.5+0.8\times 0.7\times 0.5)$$

$$+0.6\times(0.2\times 0.3\times 0.5+0.2\times 0.7\times 0.5+0.8\times 0.3\times 0.5)=0.253$$

$$P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3|C)=\frac{P(C|A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)}{P(C)}=\frac{0.2\times 0.2\times 0.7\times 0.5}{0.253}\approx 0.0553$$