“概率论与数理统计”自测题

一、单项选择题(每小题 2 分，共 20 分)。

1. 设随机事件 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0$， $P(B)>0$，则（　　　）。

（A） $P(A)=1-P(B)$　　（B） $P(AB)=P(A)P(B)$

（C） $P(A\cup B)=1$　　（D） $P(\overline{AB})=1$

2. 设 A， B 为随机事件， $P(A)>0$， $P(A|B)=1$，则必有（　　　）。

（A） $P(A\cup B)=P(A)$　　（B） $A\subset B$

（C） $P(A)=P(B)$　　（D） $P(AB)=P(A)$

3. 将两封信随机地投入四个邮筒中，则未向前面两个邮筒投信的概率为（　　）

（A） $\dfrac{2^2}{4^2}$　　（B） $\dfrac{C_2^1}{C_4^2}$　　（C） $\dfrac{2!}{P_4^2}$　　（D） $\dfrac{2!}{4!}$

4. 某人连续向一目标射击，每次命中目标的概率为 $\dfrac{3}{4}$，他连续射击直到命中为止，则射击次数为 3 的概率是（　　　）

（A） $(\dfrac{3}{4})^3$　　（B） $(\dfrac{3}{4})^2\times\dfrac{1}{4}$　　（C） $(\dfrac{1}{4})^2\times\dfrac{3}{4}$　　（D） $C_4^2(\dfrac{1}{4})^2\dfrac{3}{4}$

5. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，则下列选项中正确的是（　　）

（A） $0\le f(x)\le 1$　　（B） $P(X=x)=F(x)$

（C） $P(X=x)=f(x)$　　（D） $P(X=x)\le F(x)$

6. 如果函数

$$f(x)=\begin{cases} x\ , & a\le x\le b \\ 0\ , & x<a\text{或}x>b \end{cases}$$

是某连续随机变量 X 的概率密度，则区间 $[a,b]$ 可以是（　　　）。

（A） $[0,1]$　　（B） $[0,2]$　　（C） $[0,\sqrt{2}]$　　（D） $[1,2]$

7. 下列各函数中（　　　）是某随机变量的分布函数。

（A） $F_1(x)=\dfrac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty$　　（B） $F_2(x)=\begin{cases} 0\ , & x\le 0; \\ \dfrac{x}{1+x}, & x>0. \end{cases}$

（C） $F_3(x)=e^{-x},-\infty<x<+\infty$　（D） $F_4(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x,-\infty<x<+\infty$

8. 设二维随机向量（X,Y）的联合分布列为（　　）

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

则 $P(X=0)=$（　　）

（A）$\frac{1}{12}$　（B）$\frac{2}{12}$　（C）$\frac{4}{12}$　（D）$\frac{5}{12}$

9. 已知随机变量 X 和 Y 相互独立，且它们分别在区间[-1，3]和[2，4]上服从均匀分布，则 $E(XY)=$（　　）

（A）3　（B）6　（C）10　（D）12

10. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，$X_i=\begin{cases}1, \text{事件}A\text{发生；}\\ 0, \text{事件}A\text{不发生，}\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,100$，且 $P(A)=0.8$，$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知 Y 的分布函数 $F(y)$ 近似于（　　）

（A）$\Phi(y)$　（B）$\Phi(\frac{y-80}{4})$　（C）$\Phi(16y+80)$　（D）$\Phi(4y+80)$

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

11. 袋中装有 3 只红球，2 只黑球，今从中任意取出 2 只球，则这 2 只球恰为一红一黑的概率是________.

12. 已知连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} e^x/3, & x<0 \\ (x+1)/3, & 0\le x<2 \\ 1\ , & x\ge 2 \end{cases}$$

设 X 的概率密度为 $f(x)$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$_______.

13. 设随机变量 X 服从参数为 2 的普阿松分布，则 $E(X^2)=$_________.

14. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $D(X)=1, D(Y)=2$，则 $D(X-Y)=$____.

15. 设随机变量 $X \sim U[0,1]$，由切比雪夫不等式可得 $P(\left|X-\frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}) \leq$______.

16. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $P(\overline{X}<\mu)=$_______.

17. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 $\chi^2(10)$ 的样本，则统计量 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从分布__________。

18. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 未知，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为其样本。若假设检验问题为 $H_0:\sigma^2=1$，则采用的检验统计量应为____________.

19. 设某个假设检验问题的拒绝域为 F，且当原假设 H_0 成立时，样本值 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 落入 F 的概率为 0.15，则犯第一类错误的概率为_______。

20. 设样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 来自正态总体 $N(\mu,1)$，假设检验问题为：$H_0:\mu=0$，则在 H_0 成立的条件下，对显著水平 α，拒绝域 F 应为____________________.

三、证明题（8 分）

21. 设 A,B 为两个随机事件，$0<P(B)<1$，且 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，证明事件 A 与 B 相互独立。

四、计算题（8 分）

22. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} cx^{\alpha}, 0<x<1 \\ 0\quad，\text{其它} \end{cases}$，且 $E(X)=0.75$，求常数 c 和 α.

五、综合题（每小题 12 分，共 24 分）

23. 设二维随机向量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, 0<x<y \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$，

（1）求(X,Y)分别关于X和Y的边缘概率密度$f_X(x)$和$f_Y(y)$，并判断X与Y是否相互独立；
（2）计算概率$P(X+Y\le 1)$。

24. 设随机变量X_1与X_2相互独立，且$X_1\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_2\sim N(\mu,\sigma^2)$，令

$X=X_1+X_2$，$Y=X_1-X_2$，

求：（1）$D(X)$，$D(Y)$；

（2）X与Y的相关系数ρ_{XY}.

六、应用题（共 20 分）

25. 某医院从 2001 年的新生儿中随机抽出 20 个，测得其平均体重为 3160 克，样本标准差为 300 克，而根据 2000 年资料，新生儿平均体重为 3140 克，问 2001 年与 2000 年新生儿体重均值有无显著差异？（设体重服从正态分布，取$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(19)=2.09$）

26. 从二种羊毛织品中分别抽取容量为$n_1=4,n_2=6$的样本，测得其强度如下，并算得其样本均值和样本方差：

第一类型：138，127，134，125，$\overline{X}=131$，$S_X^2=27.5$

第二类型：134，137，135，140，130，134，$\overline{Y}=135$，$S_Y^2=9.33$

又设羊毛织品的强度服从正分布。试问：

（1）是否可以认为这二类羊毛织品的强度方差无显著性差异$(\alpha=0.05)$

（2）是否可以认为这二类羊毛织品的强度无显著性差异？$(\alpha=0.05)$

$(t(8;0.025)=2.306;\ F(3,5;0.025)=7.7636,\ F(5,3;0.025)=14.885)$

“概率论与数理统计”自测题参考答案

一、选择题

1.D　2.A　3.A　4.C　5.D　6.C　7.B　8.D　9.A　10.B

二、填空题

11．0.6　12．$\frac{1}{3}e^{x}$　13．6　14．3　15．$\frac{1}{4}$　16．$\frac{1}{2}$　17．$\chi^{2}(10n)$

18．$(n-1)S^{2}$ 或 $\sum_{i=1}^{n}(X_{i}-\overline{X})^{2}$　19．0.15　20．$\{|U|>Z_{\alpha/2}\}$，其中 $U=\overline{X}\sqrt{n}$

三、证明题

21.证：由题设及条件概率定义得

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\quad\Rightarrow\quad P(AB)=P(A)P(B),$$

即 A,B 相互独立。

四、计算题

22.解：由 $\begin{cases}\int_{0}^{1}cx^{\alpha}dx=1,\\ \int_{0}^{1}cx^{\alpha+1}dx=0.75,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\frac{c}{\alpha+1}=1,\\ \frac{c}{\alpha+2}=0.75,\end{cases}$，解得 $\alpha=2,c=3.$

五、综合题

23．解：（1）边缘概率密度为

$$f_{X}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0\quad, & x\le 0\end{cases}$$

$$f_{Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{x}^{y}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0\quad, & y\le 0\end{cases}$$

由于 $f(x,y)\neq f_{X}(x)\cdot f_{Y}(y)$，故 X 与 Y 不独立；

（3）$P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x}^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$

24.解：$D(X)=D(X_{1}+X_{2})=D(X_{1})+D(X_{2})=2\sigma^{2}$，

$$D(Y)=D(X_1-X_2)=D(X_1)+D(X_2)=2\sigma^2,$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$=E(X_1^2)-E(X_2^2)-\left[E(X_1)+E(X_2)\right]\cdot\left[E(X_1)-E(X_2)\right]$$

$$=E(X_1^2)-\left[E(X_1\right]^2-(E(X_2^2)-\left[E(X_2\right]^2)$$

$$=D(X_1)-D(X_2)=0,$$

$$\therefore\ \rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$$

六、应用题

25. 解：$H_0:\mu=3140$

检验量 $t=\dfrac{\overline{X}-3140}{S/\sqrt{n-1}}\sim t(19)$

$|t|=0.291<t_{0.025}(19)=2.09$

$\therefore$ 不否定 H_0，即均值无显著差异。

26. 解：（1）$H_0:\sigma_1=\sigma_2$

检验量 $F=\dfrac{S_X^{*^2}}{S_Y^{*^2}}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

$$F=\frac{S_X^2}{S_Y^2}=\frac{27.5}{9.33}=2.947$$

$F(3,5;0.025)=7.7636,\ F(5,3;0.025)=14.885$，

$\because\ 1/14.885<F<7.7636$

$\therefore$ 不否定 H_0，即方差无明显差异。

（2）$H_0:\ \mu_1=\mu_2$

检验量 $T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}}\sqrt{\dfrac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$

$|T|=1.54$

$t(8;0.025)=2.306$，

$|T|<2.306$，$\therefore$ 不否定 H_0，即两者的期望差异不明显。