模拟试题（一）参考答案

一.单项选择题（每小题 2 分,共 16 分）

1. 设 A, B 为两个随机事件, 若 $P(AB)=0$, 则下列命题中正确的是（　　）

（A） A 与 B 互不相容　　　　（B） A 与 B 独立

（C） $P(A)=0$或$P(B)=0$　　　　（D） AB 未必是不可能事件

解　若 AB 为零概率事件, 其未必为不可能事件. 本题应选 D.

2. 设每次试验失败的概率为 p, 则在 3 次独立重复试验中至少成功一次的概率为（　　）

（A） $3(1-p)$　　（B） $(1-p)^3$　　（C） $1-p^3$　　（D） $C_3^1(1-p)p^2$

解　所求事件的对立事件为“3 次都不成功”, 其概率为 p^3, 故所求概率为 $1-p^3$. 若直接从正面去求较为麻烦. 本题应选 C.

3. 若函数 $y=f(x)$ 是一随机变量 ξ 的概率密度, 则下面说法中一定成立的是（　　）

（A） $f(x)$ 非负　　　　（B） $f(x)$ 的值域为 $[0,1]$

（C） $f(x)$ 单调非降　　　　（D） $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续

解　由连续型随机变量概率密度的定义可知, $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非负函数, 且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$, 所以 A 一定成立. 而其它选项不一定成立. 例如服从 $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ 上的均匀分布的随机变量的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}6, & \frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

在 $x=\frac{1}{3}$ 与 $x=\frac{1}{2}$ 处不连续, 且在这两点的函数值大于 1. 因而本题应选 A.

4. 若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ $(-\infty<x<+\infty)$, 则 $Y=$（　　）$\sim N(0,1)$

（A） $\frac{X+3}{\sqrt{2}}$　　（B） $\frac{X+3}{2}$　　（C） $\frac{X-3}{\sqrt{2}}$　　（D） $\frac{X-3}{2}$

解 X 的数学期望 $EX=-3$, 方差 $DX=\sqrt{2}$, 令 $Y=\dfrac{X+3}{\sqrt{2}}$, 则其服从标准正态分布. 故本题应选 A.

5. 若随机变量 X,Y 不相关, 则下列等式中不成立的是（　　）

(A) $\operatorname{cov}(X,Y)=0$　　(B) $D(X+Y)=DX+DY$

(C) $DXY=DX\cdot DY$　　(D) $EXY=EX\cdot EY$

解 因为 $\rho=0$, 故

$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=0$,

$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=DX+DY$,

但无论如何, 都不成立 $DXY=DX\cdot DY$. 故本题应选 C.

6. 设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 取自标准正态分布总体 X, 又 $\overline{X},S$ 分别为样本均值及样本标准差, 则（　　）

(A) $\overline{X}\sim N(0,1)$　　(B) $n\overline{X}\sim N(0,1)$

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$　　(D) $\dfrac{\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$

解 $\overline{X}\sim N(0,\dfrac{1}{n})$, $n\overline{X}\sim N(0,n)$, $\dfrac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$, 只有 C 选项成立. 本题应选 C.

7. 样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n\ge 3)$ 取自总体 X, 则下列估计量中,（　　）不是总体期望 μ 的无偏估计量

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$　　(B) $\overline{X}$

(C) $0.1(6X_1+4X_n)$　　(D) $X_1+X_2-X_3$

解 由无偏估计量的定义计算可知, $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ 不是无偏估计量, 本题应选 A.

8. 在假设检验中, 记 H_0 为待检假设, 则犯第一类错误指的是（　　）

(A) H_0 成立, 经检验接受 H_0　　(B) H_0 成立, 经检验拒绝 H_0

(C) H_0 不成立, 经检验接受 H_0　　(D) H_0 不成立, 经检验拒绝 H_0

解 弃真错误为第一类错误, 本题应选 B.

二.填空题（每空 2 分,共 14 分）

1. 同时掷三个均匀的硬币, 出现三个正面的概率是________, 恰好出现一个正面的概率是________.

解 $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{8}$.

2. 设随机变量 X 服从一区间上的均匀分布, 且 $EX=3, DX=\frac{1}{3}$, 则 X 的概率密度为________.

解 设 $X\sim[a,b]$, 则 $EX=\frac{a+b}{2}=3, DX=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{3}$, 解得 $a=2$, $b=4$, 所以 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 2\le x\le 4,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$

3. 设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布, Y 服从参数为 4 的指数分布, 则 $E(2X^2+3Y)=$________.

解 $E(2X^2+3Y)=2EX^2+3EY=2[DX+(EX)^2]+2EY=\frac{7}{4}$.

4. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为−2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为−0.5, 则根据切比雪夫不等式, 有 $P\{|X+Y|\ge 6\}\le$________.

解 根据切比雪夫不等式,

$$P\{|X+Y|\ge 6\}\le\frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{DX+DY+2Cov(X,Y)}{36}=\frac{1}{12}.$$

5. 假设随机变量 X 服从分布 $t(n)$, 则 $\frac{1}{X^2}$ 服从分布________（并写出其参数）.

解 设 $X=\frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}\sim t(n)$, 其中 $Y\sim N(0,1)$, $Z\sim\chi^2(n)$, 且 $Y^2\sim\chi^2(1)$, 从而 $\frac{1}{X^2}=\frac{\frac{Z}{n}}{Y^2}\sim F(n,1)$.

6. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\ (n>1)$ 为来自总体 X 的一个样本, 对总体方差 DX 进行估计时, 常用的无偏估计量是________.

解　$S^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i - \overline{X})^2$.

三.(本题 6 分)

设 $P(A)=0.1$, $P(B|A)=0.9$, $P(B|\overline{A})=0.2$, 求 $P(A|B)$.

解　由全概公式可得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.1\cdot 0.9+0.9\cdot 0.2=0.27 .$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{1}{3} .$$

四.(本题 8 分)

两台车床加工同样的零件, 第一台出现废品的概率为 0. 03, 第二台出现废品的概率为 0. 02. 加工出来的零件放在一起. 又知第一台加工的零件数是第二台加工的零件数的 2 倍. 求:

(1) 任取一个零件是合格品的概率,

(2) 若任取一个零件是废品, 它为第二台车床加工的概率.

解　设 A_1, A_2 分别表示第一台, 第二台车床加工的零件的事件. B 表示产品是合格品的事件.

(1) 由全概公式可得

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{2}{3}\cdot 0.97+\frac{1}{3}\cdot 0.98\approx 0.973 .$$

(2) $$P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.02}{1-0.973}\approx 0.247 .$$

五.(本题 14 分)

袋中有 4 个球分别标有数字 1, 2, 2, 3, 从袋中任取一球后, 不放回再取一球, 分别以 X, Y 记第一次, 第二次取得球上标有的数字, 求:

(1) (X,Y) 的联合分布;　　(2) X, Y 的边缘分布;

(3) X, Y 是否独立;　　(4) $E(XY)$.

解

（1）

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

（2）$P(X=1)=\frac{1}{4}$，$P(X=2)=\frac{1}{2}$，$P(X=3)=\frac{1}{4}$.

$P(Y=1)=\frac{1}{4}$，$P(Y=2)=\frac{1}{2}$，$P(Y=3)=\frac{1}{4}$.

（3）因为 $P(X=1,Y=1)=0\neq\frac{1}{16}=P(X=1)P(Y=1)$，故 X,Y 不独立.

（4）$E(XY)=1\cdot2\cdot\frac{1}{6}+1\cdot3\cdot\frac{1}{12}+2\cdot1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot3\cdot\frac{1}{6}$

$$+3\cdot1\cdot\frac{1}{12}+3\cdot2\cdot\frac{1}{6}=\frac{23}{6}.$$

六.(本题 12 分)

设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=Ax^2\mathrm{e}^{-|x|}\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

试求:

(1) A 的值； (2) $P(-1<X\leq2)$； (3) $Y=X^2$ 的密度函数.

解 (1) 因 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2A\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=4A=1$，从而 $A=\frac{1}{4}$；

(2) $P(-1<X\leq2)=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{-1}^{0}x^2\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_0^2x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$=1-\frac{5}{2}e^{-2}-\frac{5}{4}e^{-1};$$

(3) 当 $y\leq0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\leq0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(X^2\leq y)=P(-\sqrt{y}\leq X\leq\sqrt{y})$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}),$$

所以, 两边关于 y 求导可得,

$$f_Y(y)=\frac{1}{4}y\cdot e^{-\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{1}{4}y\cdot e^{-\sqrt{y}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{4}\sqrt{y}\cdot e^{-\sqrt{y}}.$$

故 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \frac{1}{4}\sqrt{y}\cdot e^{-\sqrt{y}}, & y>0.\end{cases}$$

七.(本题 6 分)

某商店负责供应某地区 1000 人商品, 某种产品在一段时间内每人需用一件的概率为 0.6. 假定在这段时间, 各人购买与否彼此无关, 问商店应预备多少件这种商品, 才能以99.7%的概率保证不会脱销?（假定该商品在某一段时间内每人最多买一件）.

解 设 $X_i=\begin{cases}0, & 第i人不购买该种商品,\\ 1, & 第i人购买该种商品\end{cases}$（$i=1,2,\cdots,1000$）, X 表示购买该种商品的人数, 则 $X\sim B(1000,0.6)$. 又设商品预备 n 件该种商品, 依题意, 由中心极限定理可得

$$P(X\le n)=P(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\le\frac{n-EX}{\sqrt{DX}})=P(\frac{X-600}{\sqrt{240}}\le\frac{n-600}{\sqrt{240}})$$

$$\approx\Phi(\frac{n-600}{\sqrt{240}})=0.997.$$

查正态分布表得 $\frac{n-600}{\sqrt{240}}=2.75$,解得 $n=642.6\approx 643$ 件.

八.(本题 10 分)

一个罐内装有黑球和白球, 黑球数与白球数之比为 R.

(1) 从罐内任取一球, 取得黑球的个数 X 为总体, 即 $X=\begin{cases}1, & 黑球,\\ 0, & 白球,\end{cases}$ 求总体 X 的分布;

(2) 从罐内有放回的抽取一个容量为 n 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$, 其中有 m 个白球, 求比数 R 的最大似然估计值.

解

（1）

X	1	0
P	$\frac{R}{1+R}$	$\frac{1}{1+R}$

即 $P(X=x)=\left(\frac{R}{1+R}\right)^{x}\left(\frac{1}{1+R}\right)^{1-x}=\frac{R^{x}}{1+R} \quad (x=0,1)$；

（2）$L(R)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)=\frac{R^{\sum x_i}}{(1+R)^n}$，

两边取对数,

$$\ln L(R)=R\sum x_i-n\ln(1+R),$$

两边再关于 R 求导, 并令其为 0, 得

$$\sum x_i-n\frac{1}{1+R}=0,$$

从而 $\hat{R}=\frac{\sum x_i}{n-\sum x_i}$, 又由样本值知, $\sum x_i=n-m$, 故估计值为 $\hat{R}=\frac{n}{m}-1$.

九.(本题 14 分)

对两批同类电子元件的电阻进行测试, 各抽 6 件, 测得结果如下（单位: Ω）:

A 批: 0. 140, 0. 138, 0. 143, 0. 141, 0. 144, 0. 137;

B 批: 0. 135, 0. 140, 0. 142, 0. 136, 0. 138, 0. 141.

已知元件电阻服从正态分布, 设 $\alpha=0.05$, 问:

(1) 两批电子元件的电阻的方差是否相等?

(2) 两批电子元件的平均电阻是否有显著差异?

（$t_{0.025}(10)=2.2281$, $F_{0.025}(5,5)=7.15$）

解 (1) H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$, H_1: $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$.

检验统计量为

$$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(5,5) \quad （在 H_0 成立时）,$$

由 $\alpha=0.05$, 查得临界值 $F_{\alpha/2}=F_{0.025}(5,5)=7.15$, $F_{1-\alpha/2}=\frac{1}{7.15}$.

由样本值算得 $F=\frac{0.0000075}{0.0000078}=0.962$, 由于 $F_{1-\alpha/2}<F<F_{\alpha/2}$, 故不

能拒绝H_{10}, 即认为两批电子元件的电阻的方差相等.

(2) H_0: $\mu_1=\mu_2$, H_1: $\mu_1=\mu_2$.

统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2}{6}}}\sim t(10) \quad \text{（在} H_0 \text{成立时）},$$

查表得临界值$t_{\alpha/2}=t_{0.025}(10)=2.228$. 再由样本值算得

$$|T|=\frac{0.1405-0.139}{\sqrt{\frac{0.0000075+0.0000078}{6}}}=1.148,$$

因为$|T|<t_{\alpha/2}$, 故接收H_0. 即认为两批电子元件的平均电阻无显著差异.

模拟试题（二）参考答案

一.单项选择题（每小题 2 分,共 16 分）

1. 设 A, B, C 表示 3 个事件, 则 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 表示（　　）

(A) A, B, C 中有一个发生　　(B) A, B, C 中不多于一个发生

(C) A, B, C 都不发生　　(D) A, B, C 中恰有两个发生

解　本题应选 C.

2. 已知 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{6}$, 则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$（　　）.

(A) $\dfrac{7}{18}$　　(B) $\dfrac{11}{18}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{4}$

解　$P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{18}$,

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{7}{18}.$$

故本题应选 A.

3. 设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$, 则（　　）

(A) $P\{X+Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$　　(B) $P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y\le 1\}=\dfrac{1}{2}$

解　$X+Y\sim N(1,2)$, $X-Y\sim N(-1,2)$, 故本题应选 B.

4. 设 X 与 Y 为两随机变量, 且 $DX=4, DY=1, \rho_{XY}=0.6$, 则 $D(3X-2Y)=$（　　）

(A) 40　　(B) 34　　(C) 25.6　　(D) 17.6

解　$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=1.2$,

$D(3X-2Y)=9DX+4DY-12\operatorname{cov}(X,Y)=25.6$.

故本题应选 C.

5. 若随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 则 X^2 的数学期望是（　　）

(A) λ (B) $\dfrac{1}{\lambda}$ (C) λ^2 (D) $\lambda^2+\lambda$

解 $EX^2 = DX + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2$, 本题应选 D.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本方差, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad S_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \qquad S_4^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是（ ）

(A) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$ (B) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

(C) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n-1}}$ (D) $t = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n-1}}$

解 $\overline{X} \sim N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$, $\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim t(n-1)$,再由 t 分布的定义知, 本题应选 B.

7. 设总体 X 均值 μ 与方差 σ^2 都存在, 且均为未知参数, 而 $X_1, X_2, \cdots,$ X_n 是该总体的一个样本, $\overline{X}$ 为样本方差, 则总体方差 σ^2 的矩估计量是（ ）

(A) $\overline{X}$ (B) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ (D) $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

解 本题应选 D.

8. 在假设检验时, 若增大样本容量, 则犯两类错误的概率（ ）

(A) 都增大 (B) 都减小

(C) 都不变 (D) 一个增大一个减小

解 本题应选 B.

二.填空题（每空 2 分,共 14 分）

1. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取 2 件, 已知所取 2 件中有 1 件是不合格品, 则另外 1 件也是不合格品的概率为________.

解 设 A 表示两件中有一件不合格品, B 表示两件都是不合格品. 则所求的极限为 $P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}$

2. 设随机变量 X 服从 $B(1,0.8)$ 分布, 则 X 的分布函数为________.

解 X 服从 0−1 分布, 其分布函数为 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.2, & 0\le x<1,\\ 1 & x\ge 1.\end{cases}$

3. 若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{0<X<4\}=0.6$, 则 $P\{X<0\}$=________.

解 $\mu=2$, 即其密度函数关于 $x=2$ 对称. 由对称性知

$$P\{X<0\}=\frac{1-0.6}{2}=0.2.$$

4. 设总体 X 服从参数为 p 的 0—1 分布, 其中 $p(0<p<1)$ 未知. 现得一样本容量为 8 的样本值:0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 则样本均值是________, 样本方差是________.

解 由定义计算知 $\overline{X}=\dfrac{5}{8}$; $S^2=\dfrac{15}{56}$.

5. 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布, 现从 X 中随机抽取 10 个样本, 根据测得的结果计算知 $\sum\limits_{i=1}^{10}x_i=27$, 那么 λ 的矩估计值为________.

解 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}=\dfrac{10}{27}$.

6. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 且 σ^2 未知, 用样本检验假设 $H_0:\mu=\mu_0$ 时, 采用的统计量是________.

解 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ （H_0 为真时）.

三.（本题 8 分）

设有三只外形完全相同的盒子, Ⅰ号盒中装有 14 个黑球, 6 个白球；Ⅱ号盒中装有 5 个黑球, 25 个白球；Ⅲ号盒中装有 8 个黑球, 42 个白球. 现在从三个盒子中任取一盒, 再从中任取一球, 求:

（1）取到的球是黑球的概率；

（2）若取到的是黑球, 它是取自Ⅰ号盒中的概率.

解　设 A_1, A_2, A_3 分别表示从第Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ号盒中取球, B 表示取到黑球.

(1) 由全概公式可得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)=\frac{1}{3}\cdot\frac{14}{20}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{30}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{50}\approx 0.342;$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(B)}\approx 0.682.$$

四.（本题 6 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases},$$

对 X 独立地重复观察 4 次, 用 Y 表示观察值大于 $\dfrac{\pi}{3}$ 地次数, 求 Y^2 的数学期望.

解　$P(X>\dfrac{\pi}{3})=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $Y\sim B(4,\dfrac{1}{2})$, 从而

$$EY^2=DY+(EY)^2=5.$$

五.（本题 12 分）

设 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
1	0.1	0.05	0.35
2	0.3	0.1	0.1

问:(1) X,Y 是否独立;

(2) 计算 $P(X=Y)$ 的值;

(3) 在 $Y=2$ 的条件下 X 的条件分布律.

解 (1) 因为

$$P(X=1,Y=0)=0.1\neq 0.2=0.5\cdot 0.4=P(X=1)P(Y=0),$$

所以 X,Y 不独立;

(2)

$$P(X=Y)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=2)=0.05+0.1=0.15;$$

(3) $P(X=1\,|\,Y=2)=\dfrac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\dfrac{0.35}{0.45}=\dfrac{7}{9}$,

$$P(X=2\,|\,Y=2)=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}.$$

六.(本题 12 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1) X 的边缘密度函数 $f_X(x)$;

(2) $E(XY)$;

(3) $P(X+Y>1)$.

解 (1)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 12y^2\mathrm{d}y, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}4x^3 & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $E(XY)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}$;

(3) $P(X+Y>1)=\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^x 12y^2\mathrm{d}y=\dfrac{7}{8}$.

七.(本题 6 分)

一部件包括 10 部分, 每部分的长度是一个随机变量, 它们相互独立, 且服从同一均匀分布, 其数学期望为 2mm, 均方差为 0.05, 规定总长度为

(20 ± 0.1)㎜时产品合格, 试求产品合格的概率.

解 设 X_i 表示第 i 部分的长度, $i = 1,2,\cdots,10$, X 表示部件的长度. 由题意知 $EX_i = 2$, $DX_i = 0.0025$, 且 $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$, $EX = 20$, $DX = 0.025$. 由独立同分布的中心极限定理知, 产品为合格品的概率为

$$P(|X-20| \le 0.1) = P(|\frac{X-20}{\sqrt{0.025}}| \le \frac{0.1}{\sqrt{0.025}})$$

$$= 2\Phi(\frac{0.1}{\sqrt{0.025}}) - 1 = 0.4714.$$

八.(本题 7 分)

设总体 X 具有概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^k}{(k-1)!} x^{k-1} \mathrm{e}^{-\theta x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中 k 为已知正整数, 求 θ 的极大似然估计.

解 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本, 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ 时, 似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{\theta^{nk}}{[(k-1)!]^n} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{k-1} \mathrm{e}^{-\theta \sum\limits_{i=1}^{n} x_i},$$

两边取对数,

$$\ln L(\theta) = nk \ln\theta - n\ln(k-1)! + \ln\sum_{i=1}^{n} x_i{}^{k-1} - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

关于 θ 求导, 并令其为 0, 得

$$\ln L(\theta) = \frac{nk}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

从而解得 θ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta} = \frac{nk}{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} = \frac{k}{\overline{X}}.$$

九.（本题 14 分）

从某锌矿的东、西两支矿脉中, 各抽取样本容量分别为 9 与 8 的样本进行测试, 得样本含锌平均数及样本方差如下:

东支: $\overline{x}_1 = 0.230$, $s_{n_1}^2 = 0.1337$, $(n_1 = 9)$

西支: $\overline{x}_2 = 0.269$, $s_{n_2}^2 = 0.1736$, $(n_2 = 8)$

若东、西两支矿脉的含锌量都服从正态分布, 问东、西两支矿脉含锌量的平均值是否可以看作一样? $(\alpha = 0.05)$

($F_{0.025}(8,7) = 4.53$, $F_{0.025}(7,8) = 4.90$, $t_{0.0025}(15) = 2.1315$)

解 本题是在未知方差, 又没有说明方差是否相等的情况下, 要求检验两总体均值是否相等的问题, 故首先必须检验方差是否相等, 在相等的条件下, 检验总体均值是否相等.

第一步假设 $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, 统计量 $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$,

经检验, 接受 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$;

第二步假设 $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$,

$$\text{统计量} T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

经检验, 接受 H_0, 即可认为东、西两支矿脉含锌量的平均值相等.（请参见模拟试题(一)第九大题）

十.（本题 5 分）

设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{\theta^3} x^2, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 证明: $\dfrac{4}{3}\overline{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

证明 $E(\dfrac{4}{3}\overline{X}) = \dfrac{4}{3}E\overline{X} = \dfrac{4}{3}EX = \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\theta}\frac{3}{\theta^3}x^3\mathrm{d}x=\theta,$$

故$\frac{4}{3}\overline{X}$是θ的无偏估计量.

模拟试题（三）参考答案

一.填空题（每小题 2 分,共 14 分）

1. 一射手对同一目标独立地进行四次射击,若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$,则该射手的命中率为___________.

解　设 A 表示一次射击中击中目标,依题意,四次都没击中的概率为 $P(\overline{A})^4 = 1-\frac{80}{81}$,解得 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$,从而射手的命中率为 $P(A)=\frac{2}{3}$.

2. 若事件 A, B 独立,且 $P(A)=p$, $P(B)=q$ 则 $P(\overline{A}+B)=$_______.

解　$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A})P(B)=1-p+pq$.

3. 设离散型随机变量 X 服从参数为 λ（$\lambda>0$）的泊松分布,已知 $P(X=1)=P(X=2)$,则 λ=_________.

解　$P(X=1)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}=P(X=2)$,从而解得 $\lambda=2$.

4. 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为:

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为______________________.

解　Z 的可能取值为 0, 1.

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

$$P(Z=1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

5. 设随机变量 X, Y 的方差分别为 $DX=25$, $DY=36$,相关系数 $\rho_{XY}=0.4$,则 $Cov(X,Y)$=___________.

解　$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=12$.

6. 设总体 X 的期望值 μ 和方差 σ^2 都存在, 总体方差 σ^2 的无偏估计量是 $\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, 则 $k=$____________.

解　$k=\frac{n}{n-1}$.

7. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ 未知, 检验 H_0: $\sigma^2=\sigma_0^2$, 应选用的统计量是 ________.

解　$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$　（H_0 为真时）

二 .单项选择题（每小题 2 分,共 16 分）

1. 6 本中文书和 4 本外文书任意往书架上摆放, 则 4 本外文书放在一起的概率为（　　）

(A) $\frac{4!6!}{10!}$　　(B) $\frac{7}{10}$　　(C) $\frac{4!7!}{10!}$　　(D) $\frac{4}{10}$

解　本题应选 C.

2. 若事件 A,B 相互独立, 则下列正确的是（　　）

(A) $P(B|A)=P(A|B)$　　(B) $P(B|A)=P(A)$

(C) $P(A|B)=P(B)$　　(D) $P(A|B)=1-P(\overline{A})$

解　由独立性的定义知, $P(A|B)=P(A)=1-P(\overline{A})$, 故本题应选 D.

3. 设随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 且 $EX=1.6$, $DX=1.28$, 则 n, p 的值为（　　）

(A) $n=8$, $p=0.2$　　(B) $n=4$, $p=0.4$

(C) $n=5$, $p=0.32$　　(D) $n=6$, $p=0.3$

解　由 $np=1.6$, $np(1-p)=1.28$, 解得 $n=8$, $p=0.2$, 本题应选 A.

4. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,1)$, 其概率密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$, 则有（　　）

(A) $P(X\ge 0)=P(X\le 0)=0.5$

(B) $P(X \geq 2) = P(X \leq 2) = 0.5$

(C) $f(x) = f(-x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$

(D) $F(-x) = 1 - F(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$

解 $EX = 2$, 故其密度函数关于 $x = 2$ 对称, 故本题应选 B.

5. 如果随机变量 X 与 Y 满足: $D(X+Y) = D(X-Y)$, 则下列式子正确的是（ ）

(A) X 与 Y 相互独立 (B) X 与 Y 不相关

(C) $DY = 0$ (D) $DX \cdot DY = 0$

解 由 $D(X+Y) = D(X-Y)$, 可得 $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, 从而可知 X 与 Y 不相关, 故本题应选 B.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, $\overline{X}$ 为样本均值, 令 $Y = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2}$, 则 $Y \sim$（ ）

(A) $\chi^2(n-1)$ (B) $\chi^2(n)$ (C) $N(\mu, \sigma^2)$ (D) $N(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n})$

解 本题应选 A.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的样本, 可以作为 σ^2 的无偏估计量的统计量是（ ）

(A) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ (B) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ (C) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ (D) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

解 由无偏估计的定义及期望的性质知,

$E(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} EX_i^2 = EX^2 = DX + (EX)^2 = DX = \sigma^2$, 故 A 选择正确, 同理验算其他选项, B, C, D 均不正确. 故本题应选 A.

8. 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自正态总体 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 若进行假设检验, 当（ ）时, 一般采用统计量 $t = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S / \sqrt{n}}$

(A) μ 未知, 检验 $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (B) μ 已知, 检验 $\sigma^2 = \sigma_0^2$

(C) σ^2 未知, 检验 $\mu = \mu_0$ (D) σ^2 已知, 检验 $\mu = \mu_0$

解　本题应选 C.

三.（本题 8 分）

有两台车床生产同一型号螺杆, 甲车床的产量是乙车床的1.5倍, 甲车床的废品率为2%, 乙车床的废品率为1%, 现随机抽取一根螺杆检查, 发现是废品, 问该废品是由甲车床生产的概率是多少?

解　设 A_1, A_2 分别表示螺杆由甲, 乙车床生产的事件. B 表示螺杆是废品的事件. 由贝叶斯公式可得

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} \cdot 0.02}{\frac{3}{5} \cdot 0.02 + \frac{2}{5} \cdot 0.01} = 0.75.$$

四.（本题 8 分）

假设一部机器在一天内发生故障的概率为0.2, 机器发生故障时全天停止工作. 若一周五个工作日里无故障, 可获利润10万元, 发生一次故障获利润5万元, 发生两次故障获利润0万元, 发生三次或三次以上故障就要亏损2万元, 问一周内期望利润是多少?

解　设 X 表示一周中所获的利润, 其分布律为:

X	0	5	10
P	$1-5\cdot 0.2\cdot 0.8^4-0.8^5$	$5\cdot 0.2\cdot 0.8^4$	0.8^5

从而由期望的定义计算可得 $EX = 5.216$.

五.（本题 12 分）

1. 设随机向量 X, Y 的联合分布为:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

（1）求 X , Y 的边际分布；（2）判断 X , Y 是否独立.

解 （1） X 的边际分布为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y 的边际分布为：

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

（2） X 与 Y 不相互独立.

2. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求概率 $P(X+Y\le 1)$.

解 $P(X+Y\le 1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}$.

六.（本题 8 分）

设连续型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$

求:（1）系数 A 及 B ;

（2）随机变量 X 的概率密度;

（3） $P(\sqrt{\ln 4}\le X\le\sqrt{\ln 9})$.

解 （1）由分布函数的性质知

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}(A+Be^{-\frac{x^2}{2}})=A=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}(A+Be^{-\frac{x^2}{2}})=A+B=0=F(0),\text{ 从而 } B=-1;$$

（2）分布函数的导数即为其概率密度, 即

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

（3） $P(\sqrt{\ln 4}\le X\le\sqrt{\ln 9})=F(\sqrt{\ln 9})-F(\sqrt{\ln 4})=\frac{1}{6}$.

七.（本题 8 分）

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，X 的概率密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$，求未知参数 θ 的矩估计量与极大似然估计量.

解　令 $EX=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}$，从而解得 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2.$$

极大似然估计为：

$$\hat{\theta}=\frac{n+\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$（具体做法类似与模拟试卷二第八题）

八.（本题 1 0 分）

设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著水平 0.05 下，是否可认为全体考生的平均成绩为 70 分？

解　假设 $\mathrm{H}_0:\mu=70$，选取统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1),\qquad (\mathrm{H}_0\text{ 为真时})$$

在 $\alpha=0.05$ 下，查 t 分布的双侧临界值表知 $t_{0.025}=2.0301$.

另一方面，计算统计量的值

$$|T|=\left|\frac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}\right|=1.4<2.0301,$$

从而接受原假设，即可认为全体考生的平均成绩为 70 分.

九.（本题 1 2 分）

两家银行分别对 21 个储户和 16 个储户的年存款余额进行抽样调查，测得其平均年存款余额分别为 $\overline{x}=2600$ 元和 $\overline{y}=2700$ 元，样本标准差相应地为 $S_1=81$ 元和 $S_2=105$ 元，假设年存款余额服从正态分布，试比较两家银行的

储户的平均年存款余额有无显著差异？（$\alpha = 0.10$）

解　此题要求检验 $\mu_1 = \mu_2$，由于 t 检验必须在方差相等的条件下进行，因此必须先检验 σ_1^2 与 σ_2^2 是否相等.

第一步假设 $\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$，统计量 $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$，

经检验，接受 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$；

第二步假设 $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2$，

$$\text{统计量}\ T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

经检验，拒绝 H_0，即两家银行的储户的平均年存款余额有显著差异.（请参见模拟试题（一）第九大题）

十.（本题 4 分）

设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，λ 为未知参数，

$$T(X) = \begin{cases} -1, & X\text{为奇数}, \\ 1, & X\text{为偶数}, \end{cases}$$

证明：$T(X)$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的一个无偏估计量.

证明　$E[T(X)] = T\sum_{x=0}^{\infty} T(x) P(X = x)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} T(x) \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-2\lambda},$$

所以 $T(X)$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的一个无偏估计量.

模拟试题（四）参考答案

一.填空题(每小题 2 分,共 20 分)

1. 设 $P(A)$=0. 4, $P(B)$=0. 5. 若 $P(A|B)=0.7$, 则 $P(A+B)=$________.

解 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(B)P(A\mid B)=0.55$

2. 若随机变量 X 服从二项分布, 即 $X\sim B(5,0.1)$, 则 $D(1-2X)=$___.

解 $D(1-2X)=4DX=4\cdot 5\cdot 0.1\cdot 0.9=1.8$.

3. 三次独立重复射击中, 若至少有一次击中的概率为 $\dfrac{37}{64}$, 则每次击中的概率为__________.

解 $\dfrac{3}{4}$.

4. 设随机变量 X 的概率密度是: $f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 且 $P(X\ge a)=0.784$, 则 $a=$_________.

解 由 $P(X\ge a)=0.784$ 知, $0<\alpha<1$. 故

$$P(X\ge a)=\int_{\alpha}^{1}3x^2\mathrm{d}x=1-\alpha^3=0.784\text{, 从而 }\alpha=0.6.$$

5. 利用正态分布的结论, 有: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-4x+4)\mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\mathrm{d}x=$_____.

解 令 $x-2=t$, 则原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=DX+(EX)^2=1$, 这里 $X\sim N(0,1)$.

6. 设总体 X 的密度函数为:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^{\alpha-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

(其中α为参数$\alpha>0$), $x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自总体X的样本观测值, 则样本的似然函数$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha)=$______________.

解　$\alpha^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha-1}$.

7. 设X, Y是二维随机向量, DX, DY都不为零, 若有常数$a>0$与b使$P(Y=-aX+b)=1$, 这时X与Y是______________关系.

解　完全相关.

8. 若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本, $\overline{X},S^2$分别为样本均值和方差, 则$\dfrac{(\overline{X}-\mu)\sqrt{n}}{S}$服从______________分布.

解　$t(n-1)$.

9. 设$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, X与Y相互独立. 从X, Y中分别抽取容量为n_1, n_2的样本, 样本均值分别为$\overline{X},\overline{Y}$, 则$\overline{X}-\overline{Y}$服从分布_____________.

解　$N(\mu_1-\mu_2,\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2})$.

10. 设随机变量X和Y的相关系数为 0.9, 若$Z=X-0.4$, 则Y与Z的相关系数为_____________.

解　$\operatorname{cov}(Y,Z)=\operatorname{cov}(Y,X-0.4)=\operatorname{cov}(Y,X)=0.9$.

二.单项选择题(每小题 2 分,共 12 分)

1. 设随机变量X的数学期望EX与$DX=\sigma^2$均存在, 由切比雪夫不等式估计概率$P\{|X-EX|<4\sigma\}$为(　　)

(A) $\geq\dfrac{1}{16}$　　(B) $\leq\dfrac{1}{16}$　　(C) $\geq\dfrac{15}{16}$　　(D) $\leq\dfrac{15}{16}$

解　本题应选 C.

2. A,B为随机随机事件, 且$B\subset A$, 则下列式子正确的是(　　).

(A) $P(A\cup B)=P(A)$　　(B) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

(C) $P(AB)=P(A)$　　(D) $P(B|A)=P(B)$

解　本题应选 A.

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} Ax+B, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$ 且 $EX=\dfrac{7}{12}$, 则( ).

(A) $A=1, B=-0.5$ (B) $A=-0.5, B=1$

(C) $A=0.5, B=1$ (D) $A=1, B=0.5$

解 令 $\int_0^1 (Ax+B)\mathrm{d}x=1$, $\int_0^1 (Ax+B)x\mathrm{d}x=\dfrac{7}{12}$, 解得 $A=1, B=0.5$, 故本题应选 D.

4. 若随机变量 X 与 Y 不相关, 则有( ).

(A) $D(X-3Y)=D(X)-9D(Y)$

(B) $D(XY)=D(X)\times D(Y)$

(C) $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=0$

(D) $P(Y=aX+b)=1$

解 本题应选 C.

5. 已知随机变量 $F\sim F(n_1,n_2)$, 且 $P\{F>F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$, 则 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=$( ).

(A) $\dfrac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}$ (B) $\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$

(C) $\dfrac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$ (D) $\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}$

解

6. 将一枚硬币独立地掷两次, 记事件: $A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$, $A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$, $A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$, $A_4=\{$正面出现两次$\}$, 则事件( ).

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立 (B) A_2, A_3, A_4 相互独立

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立 (D) A_2, A_3, A_4 两两独立

解 $P(A_1)=\dfrac{1}{2}$, $P(A_2)=\dfrac{1}{2}$, $P(A_3)=\dfrac{1}{2}$, $P(A_4)=\dfrac{1}{4}$, 再由事件独立的充分必要条件可知 A_1, A_2, A_3 两两独立, 本题应选 C.

三.计算题(每小题 8 分,共 48 分)

1. 某厂由甲, 乙, 丙三个车间生产同一种产品, 它们的产量之比为 3:2:1, 各车间产品的不合格率依次为 8%, 9%, 12%. 现从该厂产品中任意抽取一件, 求:(1) 取到不合格产品的概率;(2) 若取到的是不合格品, 求它是由甲厂生产的概率.

解 (1) 运用全概公式, 0.09;

(2) 运用贝叶斯公式, 0.44.(具体做法参见模拟试卷(一)第四题)

2. 一实习生用一台机器接连独立地制造三个同样的零件, 第 i 个零件是不合格品的概率为 $p_i = \dfrac{1}{1+i} \quad (i=1,2,3)$, 以 X 表示三个零件中合格品的个数, 求:(1) X 的概率分布; (2) X 的方差 DX .

解 (1)

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{24}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{11}{24}$	$\dfrac{1}{4}$

(2) $EX = \dfrac{1}{4} + 2\cdot\dfrac{11}{24} + 3\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{23}{12}$,

$EX^2 = \dfrac{1}{4} + 4\cdot\dfrac{11}{24} + 9\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{2}$, 故 $DX = EX^2 - (EX)^2 = 0.521$.

3. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$, σ^2 为未知参数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 X 的一组样本值, 求 σ^2 的最大似然估计.

解 似然函数 $L(\sigma^2) = (\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})^n \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\sigma^2}} = (\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})^{\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\sigma^2}}$,

两边取对数

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{4}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\sigma^2},$$

关于 σ^2 求导, 并令其为零, 得

$$-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}}{2(\sigma^2)^2}=0,$$

从而解得极大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

4. 二维随机变量(X , Y)的联合概率密度:

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

求:(1) X 与 Y 之间是否相互独立, 判断 X 与 Y 是否线性相关;

(2) $P(Y+X\le 1)$.

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

从而

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),$$

故 X 与 Y 相互独立, 因而 X 与 Y 一定不相关.

(2) $P(Y+X\le 1)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\mathrm{d}y=(1-\mathrm{e}^{-1})^2$.

5. 某人乘车或步行上班, 他等车的时间 X (单位:分钟)服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布, 如果等车时间超过 10 分钟他就步行上班. 若此人一周上班 5 次, 以 Y 表示他一周步行上班的次数. 求 Y 的概率分布; 并求他一周内至少有一次步行上班的概率.

解 此人每天等车时间超过 10 分钟也即步行上班的概率为

$$P(X>10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{x}{s}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2}.$$

故 $Y \sim B(5, \mathrm{e}^{-2})$.

$P(Y \geq 1) = 1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5$.

6. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,\ 8],\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数. 求随机变量 $Y = F(X)$ 的概率分布.

解 $$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1,\\ x^{\frac{1}{3}}-1, & 1<x\leq 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$

(3) 当 $y<0$ 时, $F_Y(y)=P(Y\leq y)=0$;

当 $0\leq y<1$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P(Y\leq y)=P(X^{\frac{1}{3}}-1\leq y)=P(X\leq (y+1)^3)\\&=F_X((y+1)^3)=y;\end{aligned}$$

当 $y\geq 1$ 时, $F_Y(y)=P(Y\leq y)=1$.

故对 $F_Y(y)$ 求导可得 Y 的概率密度,

$$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

即 $Y \sim U[0,1]$

四.应用题(第 1 题 7 分、第 2 题 8 分,共 15 分)

1. 假设对目标独立地发射 400 发炮弹, 已知每一发炮弹的命中率等于 0. 2, 用中心极限定理计算命中 60 发到 100 发之间的概率.

解 设 $X_i=\begin{cases}0, & 第i发炮弹没有命中,\\ 1, & 第i发炮弹命中\end{cases}$ ($i=1,2,\cdots,400$), 则

$$X=\sum_{i=1}^{400}X_i \sim B(400\ ,0.2)$$

表示 400 发炮弹命中的发数, 且 $EX=80$, $DX=64$, 故由中心极限定理知,

$$P(60 < X < 100) = P(|X-80| < 20) = P(|\frac{X-80}{\sqrt{64}}| < \frac{20}{\sqrt{64}})$$

$$= 2\Phi(\frac{20}{8}) - 1 = 0.9876.$$

2. 某厂生产铜丝, 生产一向稳定. 现从该厂产品中随机抽出 10 段检查其折断力, 测后经计算: $\bar{x} = 287.5$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 160.5$. 假定铜丝折断力服从正态分布, 问是否可以相信该厂生产的铜丝的折断力方差为 16?($\alpha = 0.1$)

解　H_0: $\sigma^2 = 16$, H_1: $\sigma^2 \neq 16$.

采用统计量

$$\chi^2 = \frac{n-1}{\sigma^2}S^2, \text{在} H_0 \text{成立时}, \chi^2 \sim \chi^2(9).$$

由 $\alpha = 0.1$, 查得临界值

$$\chi^2_{1-\alpha/2} = \chi^2_{0.95}(9) = 3.325, \quad \chi^2_{\alpha/2} = \chi^2_{0.05}(9) = 16.919,$$

由样本值算得 $\chi^2 = \frac{160.5}{16} \approx 10.03$, 由于 $\chi^2_{1-\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{\alpha/2}$, 所以不拒绝 H_0, 即该厂生产的铜丝的折断力方差为 16.

五.证明题(5 分)

若随机变量 X 的密度函数 $f(x)$, 对任意的 $x \in R$, 满足: $f(x) = f(-x)$, $F(x)$ 是其分布函数. 证明: 对任意实数 a, 有

$$F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　$F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^{-a} f(x)\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t = -x)$$

$$= \frac{1}{2} - \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$