第 5 章 极限定理

5.1 内容提要

5.1.1 大数定律

大数定律是指在一定条件下,足够多的随机变量的算术平均值具有稳定性的一系列定理.

1. 切比雪夫大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一相互独立的随机变量序列,均存在有限的数学期望 $E(X_i)$ 与方差 $D(X_i)=\sigma^2$ （$i=1,2,\cdots$）,并且存在常数 $C>0$,使得对于所有的 $i=1,2,\cdots$,均有 $D(X_i)\le C$ 成立,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)|<\varepsilon\}=1.$$

2. 伯努利大数定律

设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p（$0<p<1$）是事件 A 在每次试验中发生的概率,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{n_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1.$$

3. 辛钦大数定律

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是一独立同分布的随机变量序列,且具有数学期望 $E(X_i)=\mu$（$i=1,2,\cdots$）,则对于任意给定 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu|<\varepsilon\}=1.$$

5.1.2 中心极限定理

中心极限定理是指在一定条件下,足够多的随机变量（不论它们服从何种分布,也不论它们的分布是否已知）的和总是近似服从正态分布.

1. 同分布的中心极限定理(林德伯格-列维中心极限定理)

设随机变量 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 相互独立,服从同一分布,且有 $E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2\neq 0$,则对于任意实数 x,一致地有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

2. 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

Y_n 是 n 次独立试验中事件 A 出现的次数，在每次试验中事件 A 出现的概率为 p（$0 < p < 1$），则当 $n \to \infty$ 时，对任意实数 x，一致地有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

3. 李雅普诺夫中心极限定理

设 X_1，X_2，…，X_n 是 n 个相互独立的随机变量，且 $E(X_i) = \mu_i$， $D(X_i) = \sigma_i^2 < +\infty$（$i = 1, 2, \cdots, n$）. 令 $S_n = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$，若存 $\delta > 0$，使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E|X_i - \mu_i|^{2+\delta} = 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i)}{S_n} < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t = \Phi(x).$$

5.2 习题详解

5.1 练习题

1. 填空题

如果设 $\left\{X_n^k : n = 1, 2, \cdots\right\}$ 是一列独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n^k) = \mu_k$ 存在，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P}$ ______________.

解 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} E(X_n^k) = \mu_k$.

2. 选择题

(1) 假设随机变量 $\left\{X_n : n = 1, 2, \cdots\right\}$ 相互独立且服从参数为 λ 的泊松分布，则下面随机变量序列中不满足切比雪夫大数定律条件的是（　　）.

A. $\{X_n : n = 1,2,\cdots\}$　　B. $\{X_n + n : n = 1,2,\cdots\}$

C. $\{nX_n : n = 1,2,\cdots\}$　　D. $\{\frac{X_n}{n} : n = 1,2,\cdots\}$

解 切比雪夫大数定理条件有两条：其一是随机变量序列要相互独立，其二是各个随机变

量的方差均存在且有界. 四个选项中, 独立性条件均满足, 但惟独 C 中, $D(nX_n)=n^2\lambda$ 不满足有界性要求. 故本题应选 C.

(2) 设 $\{X_n:n=1,2,\cdots\}$ 是一相互独立的随机变量序列, 根据辛钦大数定律, 当 $n\to\infty$ 时, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 以概率收敛于 $E(X_1)$, 即对任何 $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-E(X_1)\right|\ge\varepsilon\right)=0$, 只要 $\{X_n:n=1,2,\cdots\}$ (　　).

A. 有相同的数学期望　　　　B. 服从同一离散型分布

C. 服从同一泊松分布　　　　D. 服从同一连续型分布

解　辛钦大数定理要求序列独立同分布, 且数学期望存在, 只有 C 选项符合要求, 故本题应选 C.

5.2 练习题

1. 填空题

设 $X_1,X_2,\ldots,X_{100}$ 相互独立且均服从参数为 4 的泊松分布, $\overline{X}$ 是其算术平均值, 则 $P\{\overline{X}\le 4.392\}\approx$ __________.

解　由于 $E(\overline{X})=E(X_1)=4$, $D(\overline{X})=\frac{1}{n}D(X_1)=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$, 故由独立同分布的中心极限定理知,

$$P\{\overline{X}\le 4.392\}=P\{\frac{\overline{X}-4}{\sqrt{1/25}}\le\frac{4.392-4}{\sqrt{1/25}}\}\approx\Phi(1.96)=0.9750.$$

2. 选择题

用 X_n 表示将一枚硬币随意投掷 n 次“正面”出现的次数, 则(　　).

A. $\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$　　B. $\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-2n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$

C. $\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$　　D. $\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-2n}{\sqrt{n}}\le x\right\}=\Phi(x)$

解　由于 $X_n\sim B(n,\frac{1}{2})$, 故 $E(X_n)=\frac{1}{2}n$, $D(X_n)=\frac{1}{4}n$, 由棣莫弗−拉普拉斯中心极限定理, 得

$$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{X_n-\frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}}\le x\}=\lim_{n\to\infty}P\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\le x\}=\Phi(x),$$

故本题应选 C.

习题五

1. 某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔户中被盗户占 20%, 设 X 表示在随机抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数, 求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率.

解 X 可看作 100 次重复独立试验中, 被盗户出现的次数, 而在每次试验中被盗户出现的概率是 0.2, 因此, $X \sim B(100,0.2)$, 由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理, 得

$$P\{14 \le X \le 30\} = P\{\frac{14-20}{\sqrt{16}} \le \frac{X-20}{\sqrt{16}} \le \frac{30-20}{\sqrt{16}}\}$$

$$\approx \Phi(\frac{30-20}{\sqrt{16}}) - \Phi(\frac{14-20}{\sqrt{16}}) = \Phi(2.5) - [1-\Phi(1.5)]$$

$$= 0.9938 - (1-0.9332) = 0.9270.$$

2. 某微机系统有 120 个终端, 每个终端有 5%时间在使用. 若各终端使用与否是相互独立的, 试求有不少于 10 个终端在使用的概率.

解 设 X 表示同时使用的终端数, 则 $X \sim B(120,0.05)$, 由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理知

$$P\{X \ge 10\} = 1 - P\{X < 10\} \approx 1 - \Phi(\frac{10-120\times 0.05}{\sqrt{120\times 0.05\times 0.95}})$$

$$= 1 - \Phi(\frac{4}{\sqrt{5.7}}) = 1 - \Phi(1.68) = 0.046.$$

3. 某药厂生产的某种药品, 据说对某疾病的治愈率为 80%. 现为了检验其治愈率, 任意抽取 100 个此种病患者进行临床试验, 如果有多于 75 人治愈, 则此药通过检验. 试在以下两种情况下, 分别计算此药通过检验的可能性. (1) 此药的实际治愈率为 80%; (2) 此药的实际治愈率为 70%.

解 设 X 为 100 人中治愈的人数, 则 $X \sim B(n,p)$, 其中 $n = 100$.

(1) $p = 0.8$, 由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理知

$$P(X > 75) = 1 - P(X \le 75) = 1 - P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}}) = 1 - \Phi(-1.25) = \Phi(1.25) = 0.8944.$$

(2) $p = 0.7$, 由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理知

$$P(X > 75) = 1 - P(X \le 75) = 1 - P\left\{\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{75-np}{\sqrt{npq}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{75-np}{\sqrt{npq}})=1-\Phi(1.09)=1-0.8621=0.1379.$$

4. 设某厂有 100 台车床, 它们的工作是相互独立的, 假设每台车床的电动机都是 2 千瓦, 由于检修等原因, 每台车床平均只有 70%的时间在工作, (1) 求任一时刻有 70 台至 80 台车床在工作的概率; (2) 要供应该厂多少千瓦电才能以99%概率保证该厂生产用电?

解　设 X 表示任一时刻车床在工作的台数, 则 $X\sim B(100,0.7)$,

$$E(X)=np=70,\qquad D(X)=np(1-p)=21.$$

(1) $P\{70\le X\le 80\}=P\{\frac{70-70}{\sqrt{21}}\le\frac{X-70}{\sqrt{21}}\le\frac{80-70}{\sqrt{21}}\}$

$$\approx\Phi(2.18)-\Phi(0)=0.9854-0.5=0.4854.$$

(2) 设需要 K 千瓦的电才能以99%概率保证该厂生产用电, 则所求问题为

$$P\{2X\le K\}=P\{X\le\frac{K}{2}\}=P\{\frac{X-700}{\sqrt{21}}\le\frac{K-140}{2\sqrt{21}}\}\approx\Phi(\frac{K-140}{2\sqrt{21}})=0.99,$$

反查正态分布表, 得 $\frac{K-140}{2\sqrt{21}}=2.31$, 从而解得 $K=161.1715$, 取 $K=162$, 即供应该厂 162 千瓦电才能以99%概率保证该厂生产用电.

5. 一食品店有三种蛋糕出售, 由于售出哪一种蛋糕是随机的, 因而售出一只蛋糕的价格是一个随机变量, 它取 1 元, 1.2 元, 1.5 元各个值的概率分别为 0.3, 0.2, 0.5. 若售出 300 只蛋糕. (1) 求收入至少 400 元的概率; (2) 求售出价格为 1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率.

解　设第 i 个蛋糕的价格为 X_i, $i=1,2,\cdots,300$, 依题意, 其分布律为

X_i	1	1.2	1.5
P	0.3	0.2	0.5

从而

$$E(X_i)=1.29,\qquad D(X_i)=0.0489,\qquad i=1,2,\cdots,300.$$

(1) 记 $X=\sum_{i=1}^{300}X_i$, 由独立同分布中心极限定理知

$$P\{X\ge 400\}=1-P\{X<400\}=1-P\left\{\frac{X-300\times1.29}{\sqrt{300}\sqrt{0.0489}}<\frac{400-300\times1.29}{\sqrt{300}\sqrt{0.0489}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(3.39)]=1-0.9997=0.0003.$$

(2) 设 Y 为售出的 300 只蛋糕中价格为 1.2 元的蛋糕数量, 则 $Y=B(300,0.2)$, 由棣莫弗−拉普拉斯中心极限定理知

$$P\{Y>60\}=1-P\{Y\le 60\}=1-P\left\{\frac{Y-300\times0.2}{\sqrt{300\times0.2\times0.8}}\le\frac{60-300\times0.2}{\sqrt{300\times0.2\times0.8}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(0)=0.5.$$

6. 计算机在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数. 设所有舍入误差是独立的，且都服从(−0.5, 0.5)上均匀分布. (1) 若将 1500 个数相加，问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少？(2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.9？

解 设第 i 个加数的舍入误差为 X_i，$i=1,2,\cdots,1500$，依题意，$X_i \sim U(-0.5,0.5)$ 且它们之间相互独立，于是

$$E(X_i)=\frac{-0.5+0.5}{2}=0,\quad D(X_i)=\frac{[0.5-(0.5)]^2}{12}=\frac{1}{12}.$$

(1) 设 $X=\sum_{i=1}^{1500}X_i$ 表示 1500 个加数的误差总和，则

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{1500}X_i)=1500E(X_i)=0,\quad D(X)=D(\sum_{i=1}^{1500}X_i)=1500D(X_i)=125,$$

由独立同分布中心极限定理知

$$P\{|X|>15\}=P\left\{\left|\frac{X}{\sqrt{125}}\right|\geq\frac{15}{\sqrt{125}}\right\}\approx 2[1-\Phi(\frac{15}{\sqrt{125}})]$$

$$=2[1-\Phi(1.34)]=2\times[1-0.9099]=0.1802.$$

(2) 设 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 表示 n 个加数的误差总和，同(1)，有 $E(Y)=0$，$D(Y)=\frac{n}{12}$，由中心极限定理知

$$P\{|Y|<10\}=P\left\{\left|\frac{Y}{\sqrt{n/12}}\right|<\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right\}\approx 2\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})-1\geq 0.9,$$

即 $\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})\geq 0.95=\Phi(1.645)$，

从而由 $\frac{10}{\sqrt{n/12}}\geq 1.645$，解得 $n\approx 443.4$，所以 n 最多为 443 个数相加.

7. 用自动包装机包装的食品，每袋净重是一随机变量. 假定要求每袋的平均重量为 100 克，标准差为 2 克. 如果每箱装 100 袋，试求随机抽查的一箱净重超过 10050 克的概率.

解 设一箱中第 i 袋食品的净重为 X_i，则 X_i 独立同分布，且

$$E(X_i)=100,\quad D(X_i)=4,\quad i=1,2,\cdots,100.$$

由中心极限定理得，所求概率为

$$P\{\sum_{i=1}^{100}X_i\geq 10050\}=1-P\{\sum_{i=1}^{100}X_i<10050\}$$

$$=1-P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-100\times 100}{\sqrt{100\times 4}}<\frac{10050-100\times 100}{\sqrt{100\times 4}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(2.5)]=1-0.9938=0.0062.$$

8. 设某产品由 100 个部件组成, 每个部件的长度是一随机变量, 它们相互独立, 且服从同一分布, 其数学期望为 2 毫米, 标准差 0.05 毫米. 规定总长度为 200 ± 1 毫米时产品为合格, 试求该产品合格的概率.

解 设每个部分的长度为随机变量 X_i, $i=1,2,\cdots,100$, 且 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立, 设 X 表示总长度, 则 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$, 于是

$$E(X_i)=2,\quad D(X_i)=0.05^2=0.0025.$$

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{100}X_i)=100E(X_i)=200,\quad D(X)=D(\sum_{i=1}^{100}X_i)=100D(X_i)=0.25,$$

由独立同分布中心极限定理知, 产品合格的概率为

$$P\{|X-200|<1\}=P\left\{\left|\frac{X-200}{\sqrt{0.25}}\right|<\frac{1}{\sqrt{0.25}}\right\}$$

$$\approx 2\Phi(2)-1=2\times 0.9772-1=0.9544.$$

9. 某大城市一天内, 由于交通事故而伤亡的人数平均有 120 人, 标准差为 32 人, 今随机抽查 64 天的伤亡人数的记录, 求这 64 天的交通伤亡人数的平均数不超过 111 人的概率.

解 设 X_i 表示第 i 天的交通伤亡人数, $i=1,2,\cdots,64$, 且 $X_1,X_2,\cdots,X_{64}$ 相互独立, 设 X 表示 64 天的交通伤亡人数的平均数, 则 $X=\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64}X_i$, 于是

$$E(X)=E(\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64}X_i)=E(X_1)=120,$$

$$D(X)=D(\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64}X_i)=\frac{1}{64}D(X_1)=\frac{1}{64}\times 32^2=16,$$

由独立同分布中心极限定理知, 产品合格的概率为

$$P\{X\le 111\}=P\left\{\frac{X-120}{\sqrt{16}}\le\frac{111-120}{\sqrt{16}}\right\}$$

$$\approx\Phi(-2.25)=1-\Phi(2.25)=1-0.9878=0.0122.$$

10. 某生产线生产的产品成箱包装, 每箱的重量是随机的, 假设每箱的平均重 50 千克, 标准差 5 千克. 若用最大载重量为 5 吨的汽车承运, 试用中心极限定理说明每辆车最多可以装多

少箱,才能保障不超载的概率大于 0.997.

解 设 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是装运 i 箱的重量(单位:千克),n 为所求的箱数,由条件知,可把 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 视为独立同分布的随机变量,而 n 想的总重量 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是独立同分布随机变量之和,由条件知

$$E(X_i)=50, \qquad \sqrt{D(X_i)}=5,$$
$$E(X)=50n, \qquad \sqrt{D(X)}=5\sqrt{n},$$

由独立同分布中心极限定理,箱数 n 取决于条件

$$P\{X\le 5000\}=P\{\frac{X-50n}{5\sqrt{n}}\le\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\}$$
$$\approx\Phi(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}})>0.997=\Phi(2)$$

因此可从 $\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$,解出 $n<98.0199$,即最多可以装 98 箱.

11. 抽样检查时,如果发现次品数多于 10 个,则认为这批产品不能接受.应检查多少个产品,才能使次品率为 10%的一批产品不被接受的概率达到 0.9?

解 设 X 表示抽取的 n 个产品中发现的次品个数,则 $X\sim B(n,0.1)$,由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理知

$$P\{X>10\}=1-P\{X\le 10\}\approx 1-\Phi\left(\frac{10-0.1n}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}\right)=0.9,$$

即 $$\Phi\left(\frac{10-0.1n}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}\right)=0.1=\Phi(-1.28)$$

因此可从 $\dfrac{10-0.1n}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}=-1.28$,解出 $n=146.474$,从而应该检查的产品数为 147 个.

12. 火炮向一目标不断独立射击,若每次击中目标的概率是 0.1.(1) 求在 400 次射击中,击中目标的次数介于 30 次与 50 次的概率;(2) 最少射击多少次才能使得击中目标的次数超过 10 次的概率不小于 0.9?

解 显然火炮射击可看作是伯努利试验.设 X_n 表示在 n 次射击中击中目标的次数,则 $X_n\sim(n,p)$,其中 $p=0.1$.由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理得

(1) $$P\{30\le X_n\le 50\}=P\left\{\frac{30-400\times 0.1}{\sqrt{400\times 0.1\times 0.9}}\le\frac{X_n-400\times 0.1}{\sqrt{400\times 0.1\times 0.9}}\le\frac{50-400\times 0.1}{\sqrt{400\times 0.1\times 0.9}}\right\}$$
$$\approx\Phi(1.67)-\Phi(-1.67)]=2\Phi(1.67)-1=0.904.$$

(2) $$P\{X_n>10\}=P\left\{\frac{X_n-0.1\times n}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}>\frac{10-0.1\times n}{\sqrt{n\times 0.1\times 0.9}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{100-n}{3\sqrt{n}}) \geq 0.9,$$

由标准正态分布的性质知道使得$1-\Phi(x) \geq 0.9$的x值是负的, 即$\frac{100-n}{3\sqrt{n}}$必为负值, 因此上述不等式等价于

$$\Phi(\frac{n-100}{3\sqrt{n}}) \geq 0.9 = \Phi(1.28),$$

故满足不等式

$$\frac{n-100}{3\sqrt{n}} \geq 1.28$$

的最小整数$n=147$就是所求的最小射击次数.

13. 某汽车制造厂每月生产 10000 辆汽车, 该厂的汽车发动机气缸车间的正品率是 80%. 为了能以 0. 997 概率保证有正品气缸装配自产的 10000 辆汽车, 问气缸车间每月至少要生产多少个气缸?

解 设气缸车间每月至少生产的气缸数为n, X表示n个气缸中正品的个数, 则$X \sim B(n,0.8)$, 由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理得

$$P\{X>10000\} = P\left\{\frac{X-0.8\times n}{\sqrt{n\times 0.8\times 0.2}} > \frac{10000-0.8\times n}{\sqrt{n\times 0.8\times 0.2}}\right\}$$

$$\approx 1-\Phi(\frac{10000-0.8n}{0.4\sqrt{n}}) = 0.997,$$

由标准正态分布的性质知, 上式等价于

$$\Phi(\frac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}}) = 0.997 = \Phi(2.75),$$

即 $\frac{0.8n-10000}{0.4\sqrt{n}} = 2.75$, 从中解得$n=12654.7$, 取$n=12655$, 即气缸车间每月至少要生产 12655 个气缸.