多维随机变量复习题解答

一、填空

1. 已知 $P(X\ge 0,Y\ge 0)=\frac{3}{7}$，$P(X\ge 0)=P(Y\ge 0)=\frac{4}{7}$，则 $P(\max\{X,Y\}\ge 0)=$（　　　）。

解：$P(\max\{X,Y\}\ge 0)=P(X\ge 0\ or\ Y\ge 0)=P(X\ge 0)+P(Y\ge 0)-P(X\ge 0,Y\ge 0)=\frac{5}{7}$

2. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}k & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，则 $k=$_______，

X,Y 的边缘密度函数分别为：____。

解：$1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y kdx=0.5k$，$k=2$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^1 2dy=2-2x & 0<x<1\\ 0 & other\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y 2dy=2y & 0<y<1\\ 0 & other\end{cases}$$

3. 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	**0**	**1**	**2**
0	1/15	p	1/5
1	q	1/5	3/10

则当 $p=$________，$q=$________时 X,Y 相互独立。

解：$p+q+\frac{23}{30}=1$，$P(X=0,Y=2)=\frac{1}{5}=P(X=0)P(Y=2)=\left(p+\frac{4}{15}\right)\times 0.5$

$p=\frac{2}{15}$，$q=\frac{1}{10}$

4. 设随机变量 X,Y,Z 相互独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim N(0,3)$，$Z\sim N(2,1)$，则 $2X+3Y-Z$ 服从______________分布，$P(0\le 2X+3Y-Z\le 6)=$_____________。

解：$E(2X+3Y-Z)=0, D(2X+3Y-Z)=36 \Rightarrow 2X+3Y-Z\sim N(0,36)$

$$P(0\le 2X+3Y-Z\le 6)=\Phi\left(\frac{6-0}{6}\right)-\Phi\left(\frac{0-0}{6}\right)=\Phi(1)-0.5$$

5. 设 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,4)$，$Y\sim U(0,4)$，则 $D(2X+Y)=$ ____________，$D(X-3Y)=$ __________。

解：$D(2X+Y)=4DX+DY=16+16/12=\dfrac{52}{3}$

$D(X-3Y)=DX+9DY=4+9\times 16/12=16$

6. 已知 $DX=10, DY=5, \rho_{X,Y}=-0.5$，则 $D(2X+3Y)=$ __________，$D(2X-3Y)=$ __________。

解：$D(2X+3Y)=4DX+9DY+12\operatorname{cov}(X,Y)=40+45+12\times(-0.5)\times\sqrt{DXDY}=85-30\sqrt{2}$

$D(2X-3Y)=4DX+9DY-12\operatorname{cov}(X,Y)=40+45-12\times(-0.5)\times\sqrt{DXDY}=85+30\sqrt{2}$

7. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $EX=$ _______，$DX=$ _______，$\operatorname{cov}(X,Y)=$ __________，$X-Y$ 服从________________分布，当 $\mu_1=\mu_2$ 时 $E|X-Y|=$ ____________。

解：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)\Rightarrow EX=\mu_1, DX=\sigma_1^2$，$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$

$X-Y\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)$

当 $\mu_1=\mu_2$ 时 $X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)$。所以

$$E|X-Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2\right)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)}\right)dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2\right)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)}\right)dx$$

$$=-2\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=2\sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}}$$

8. 随机变量 X,Y 之间的相关系数 ρ 反映了 X,Y 之间的 线性 相关程度。如果存在常数 $a\neq 0,b$，使得 $P(Y=aX+b)=1$，则 $|\rho|=$ 1。当 $a>0$ 时 $\rho=1$，当 $a<0$ 时 $\rho=-1$。

二、计算题

1. 掷均匀骰子二次，设 X 是得偶数点数次数，Y 是得 3 点或 6 点次数，(1) 求 (X,Y) 的联合分布律和边缘分布律，(2)判别 X,Y 是否独立？(3) 求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的

分布律，（4）求$E(XY)$。

解：(1) $P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0\mid X=0)=\frac{9}{36}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$

$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1\mid X=0)=\frac{9}{36}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$

$P(X=0,Y=2)=P(X=0)P(Y=2\mid X=0)=\frac{9}{36}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$

$P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0\mid X=1)=\frac{18}{36}\times\frac{8}{18}=\frac{2}{9}$

$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1\mid X=1)=\frac{18}{36}\times\frac{(2+2)\times 2}{18}=\frac{2}{9}$

$P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2\mid X=1)=\frac{18}{36}\times\frac{2}{18}=\frac{1}{18}$

$P(X=2,Y=0)=P(X=2)P(Y=0\mid X=2)=\frac{9}{36}\times\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$

$P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1\mid X=2)=\frac{9}{36}\times\frac{2+2}{9}=\frac{1}{9}$

$P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2\mid X=2)=\frac{9}{36}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{36}$

(2) 容易验证X,Y独立

(3) $P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=\frac{1}{9}$

$P(Z=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=\frac{5}{9}$

$P(Z=2)=P(X=2,Y=0)+P(X=2,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=2)=\frac{1}{3}$

(4) 由X,Y的边缘分布律易得：$EX=1, EY=\frac{2}{3}$

而X,Y独立，所以$E(XY)=EXEY=\frac{2}{3}$

2. 设随机变量$U\sim U(-2,2)$，令

$$X=\begin{cases}-1 & U<-1\\ 1 & U\geq -1\end{cases},\quad Y=\begin{cases}-1 & U<1\\ 1 & U\geq 1\end{cases}$$

求(1)(X,Y)的联合分布律和边缘分布律，(2)X,Y是否独立，(3)求给定$X=1$下Y的条件分布律，(4)$D(X+Y)$，(5)X,Y的相关系数。

解：（1） $P(X=-1,Y=-1)=P(U<-1,U<1)=P(U<-1)=\frac{1}{4}$

$P(X=-1,Y=1)=P(U<-1,U\geq 1)=0$

$$P(X=1,Y=-1)=P(U\ge -1,U<1)=P(-1\le U<1)=\frac{1}{2}$$

$$P(X=1,Y=1)=P(U\ge -1,U\ge 1)=P(U\ge 1)=\frac{1}{4}$$

（2）$P(X=-1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=-1,Y=1)=\frac{1}{4}$

$$P(Y=-1)=P(X=-1,Y=-1)+P(X=1,Y=-1)=\frac{3}{4}$$

$$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{4}\ne P(X=-1)P(Y=-1)=\frac{3}{16}$$

所以 X,Y 不独立。

（3）$P(Y=-1|X=1)=\frac{P(X=1,Y=-1)}{P(X=1)}=\frac{2}{3}$

$$P(Y=1|X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{1}{3}$$

（4）$EX=\frac{1}{2}, EX^2=1, DX=\frac{3}{4}$

$$EY=-\frac{1}{2}, EY^2=1, DY=\frac{3}{4}$$

$$E(XY)=-\frac{1}{4}, \mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{3}{2}$$

（5）X,Y 的相关系数为 $\rho=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=0$

3. 设 X,Y 相互独立，且它们的分布律分别为：$P(X=0)=0.4$，$P(X=1)=0.6$，$P(Y=-1)=0.4$，$P(Y=1)=0.6$，求(1) (X,Y) 的联合分布律，(2) $Z=XY$ 的分布律。

解：（1）(X,Y) 的联合分布律为：

$$P(X=0,Y=-1)=P(X=0)P(Y=-1)=0.4\times 0.4=0.16$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=0.4\times 0.6=0.24$$

$$P(X=1,Y=-1)=P(X=1)P(Y=-1)=0.6\times 0.4=0.24$$

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=0.6\times 0.6=0.36$$

（2）$P(Z=0)=P(X=0,Y=-1)+P(X=0)P(Y=1)=0.4$

$$P(Z=-1)=P(X=1,Y=-1)=0.24$$

$$P(Z=1)=P(X=1,Y=1)=0.24$$

4. 设(X,Y)的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} kx & 0\le x\le 1, 0\le y\le x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，求(1)常数$k$，(2) X,Y的边缘密度函数，(3) $P(X+Y\le 1)$，(4) X,Y是否独立，(5) $Z=X-Y$的密度函数，(6) X,Y的相关系数。

解：（1）由$1=\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x kxdy=\frac{k}{3}$得：$k=3$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^x 3xdy=3x^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & other \end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2) & 0\le y\le 1 \\ 0 & other \end{cases}$$

（3）$P(X+Y\le 1)=\iint\limits_{x+y\le 1} f(x,y)dxdy=\int_0^{0.5} dy\int_y^{1-y} 3xdx=\frac{3}{8}$

（4）因为$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以X,Y不独立。

（5）$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X-Y\le z)=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)dxdy$

$$=\begin{cases} 1-\int_z^1 dx\int_0^{x-z} 3xdy=\frac{3z-z^3}{2} & 0<z<1 \\ 0 & other \end{cases}$$

所以$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} \frac{3-3z^2}{2} & 0<z<1 \\ 0 & other \end{cases}$

（6）$EX=\iint\limits_{R^2} xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 3x^2dy=\frac{3}{4}$

$EX^2=\iint\limits_{R^2} x^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 3x^3dy=\frac{3}{5}$，$DX=\frac{3}{80}$

$EY=\iint\limits_{R^2} yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 3xydy=\frac{3}{8}$

$EY^2=\iint\limits_{R^2} y^2 f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 3xy^2dy=\frac{1}{5}$，$DY=\frac{19}{320}$

$E(XY)=\iint\limits_{R^2} xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 3x^2ydy=\frac{3}{10}$，$\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{3}{160}$

$$\rho=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\frac{\sqrt{57}}{19}$$

5. 设 X,Y 独立同分布均服从 $N(0,\sigma^2)$，求 $E\sqrt{X^2+Y^2}$ 。

解：由 X,Y 独立同分布均服从 $N(0,\sigma^2)$ 得 X,Y 的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

从而 $E\sqrt{X^2+Y^2}=\iint\limits_{R^2}\sqrt{x^2+y^2}f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{+\infty}\rho^2\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho$

$$=2\pi\int_0^{+\infty}\rho^2\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho=\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}\sigma}E(X^2)=\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sigma^2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

三、证明题

1. 设 $X\sim b(1,p_1)$， $Y\sim b(1,p_2)$，证明 X,Y 相互独立的充分必要条件是不相关。

证明：若 X,Y 相互独立，则 X,Y 一定不相关。

若 X,Y 不相关，则 $E(XY)=EXEY=p_1p_2$

而 $E(XY)=P(X=1,Y=1)$，所以

$$P(X=1,Y=1)=p_1p_2=P(X=1,Y=1)$$

注意到 $P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)$，所以

$$P(X=1,Y=0)=P(X=1)-P(X=1,Y=1)=p_1-p_1p_2=P(X=1,Y=0)$$

类似地有

$$P(X=0,Y=1)=P(Y=1)-P(X=1,Y=1)=p_2-p_1p_2=P(X=0,Y=1)$$

$$P(X=0,Y=0)=P(Y=0)-P(X=1,Y=0)=1-p_2-(p_1-p_1p_2)=P(X=0,Y=0)$$

从而 X,Y 相互独立

2. 设 X,Y 独立同分布均服从 $N(0,1)$，证明 $Z=X^2+Y^2$ 服从均值为 2 的指数分布。

证明：由 X,Y 独立同分布均服从 $N(0,1)$ 得 X,Y 的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

所以 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X^2+Y^2\le z)=\begin{cases}\iint\limits_{x^2+y^2\le z} f(x,y)dxdy & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{z}}\frac{\rho}{2\pi}e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}\int_0^{\sqrt{z}}\rho e^{-\frac{\rho^2}{2}}d\rho & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

因此

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\sqrt{z}e^{-\frac{z}{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{z}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

即 $Z=X^2+Y^2$ 服从均值为 2 的指数分布。