第 3 章　多维随机变量及其分布

3.1 内容提要

3.1.1　二维随机变量

1. 二维随机变量

设 X,Y 是定义在同一样本空间 S 上的随机变量, 称向量 (X,Y) 是二维随机变量.

2. 联合分布函数

设 (X,Y) 是二维随机变量, 对任意实数 x,y, 称二元函数

$$F(x,y)=P\{\{X\le x\}\bigcap\{Y\le y\}\}=P\{X\le x,Y\le y\},$$

为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数.

3. 边缘分布函数

二维随机变量 (X,Y) 的每一个分量的分布函数 $F_X(x)=P\{X\le x\}$ 和 $F_Y(x)=P\{Y\le y\}$, 称为联合分布函数 $F(x,y)$ 的边缘分布函数. 其计算公式为:

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)\quad 和\quad F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y).$$

4. 联合分布函数的性质

(1) $F(x,y)$ 是变量 x 或 y 的单调不减函数, 即对任意固定的 y, 当 $x_2>x_1$ 时, 有 $F(x_2,y)\ge F(x_1,y)$; 对任意固定的 x, 当 $y_2>y_1$ 时, 有 $F(x,y_2)\ge F(x,y_1)$.

(2) $0\le F(x,y)\le 1$, 且

$$\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\ \lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,\ \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

(3) $F(x,y)$ 关于变量 x 或 y 都是右连续的.

(4) 对于任意 $x_1<x_2$, $y_1<y_2$ 有

$$P\{x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

成立.

5. 联合分布函数与边缘分布函数的关系

由联合分布函数可以惟一确定边缘分布函数, 但是一般来说, 由边缘分布函数不能唯一确定联合分布函数.

3.1.2 二维离散型随机变量

1. 二维离散型随机变量

若 X,Y 都是离散型随机变量, 则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量.

2. 联合分布律

假设二维随机变量 (X,Y) 的所有可能取值为 $\{(x_i,y_j),i,j=1,2,\cdots\}$, 则概率

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

的全体称为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律.

3. 边缘分布律

称随机变量 X 的分布律 $P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$（$i=1,2,\cdots$）为二维离散型随机变量 (X,Y) 关于随机变量 X 的边缘分布律;称随机变量 Y 的分布律 $P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$（$j=1,2,\cdots$）为二维离散型随机变量 (X,Y) 关于随机变量 Y 的边缘分布律, 其计算公式为:

$$P\{X=x_i\}=\sum_j P(X=x_i,Y=y_j),$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_i P(X=x_i,Y=y_j).$$

4. 联合分布律的性质

(1) $0\le p_{ij}\le 1, \quad i,j=1,2,\cdots$; (2) $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$.

5. 联合分布律与边缘分布律的关系

由联合分布律可以唯一确定边缘分布律, 但是一般来说, 由边缘分布律不能唯一确定联合分布律.

3.1.3 二维连续型随机变量

1. 二维连续型随机变量和联合密度函数

设 $F(x,y)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数, 如果存在一个非负可积函数 $f(x,y)$, 使得对任意的实数 x,y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称 (X,Y) 是二维连续型随机变量, 称 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数或联合概率密度.

2. 边缘密度函数

称随机变量 X,Y 的密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别为二维连续型随机变量 (X,Y) 关于随机变量 X 和 Y 的边缘密度函数. 其计算公式为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \quad 和 \quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x .$$

3. 联合密度函数的性质

(1) $f(x,y)\ge 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$;

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(4) 若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续, 则 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$.

4. 联合密度函数与边缘密度函数的关系

由联合密度函数可以唯一确定边缘密度函数, 但是一般来说, 由边缘密度函数不能唯一确定联合密度函数.

3.1.4　条件分布

1. 离散型随机变量的条件分布律

设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$ 为二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律, 在给定 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad (i=1,2,\cdots);$$

在给定 $X=x_i$ 下随机变量 Y 的条件分布律为

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},\quad (j=1,2,\cdots).$$

2. 连续型随机变量的条件密度函数

设 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数, $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 为边缘密度函数, 在给定 $Y=y$ 下随机变量 X 的条件密度函数为

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)};$$

在给定 $X=x$ 下随机变量 Y 的条件密度函数为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

3.1.5　随机变量的独立性

1. 随机变量的独立性

设 $F(x,y)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数，$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 是边缘分布函数，如果对任意的实数 x 和 y 有 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，则称随机变量 X 和 Y 相互独立.

2. 离散型随机变量独立性的判别方法

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件是对任何 $i,j=1,2,\cdots$，有 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\,P\{Y=y_j\}$ 成立.

3. 连续型随机变量独立性的判别方法

设 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数，$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 是边缘密度函数，随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件是对任何 x 和 y，有 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 成立.

3.1.6　随机变量函数的分布

1. 离散型随机变量函数的分布

设 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$ 为二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律，则随机变量 $Z=h(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_{h(x_i,y_j)=z_k}P\{X=x_i,Y=y_j\}.$$

2. 连续型随机变量函数的分布

设 $f(x,y)$ 为二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数，为求 $Z=h(X,Y)$ 的密度函数可以先求出 Z 的分布函数，再利用分布函数与密度函数之间关系得到 Z 的密度函数，具体步骤为

(1)　$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{h(X,Y)\le z\}=\displaystyle\iint_{h(x,y)\le z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(2)　$f_Z(z)=\dfrac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}$.

3.1.7　常见的多维分布

1. 二维正态分布

若 (X,Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2]\},$$

其中 $-\infty<\mu_1,\mu_2<+\infty$，$\sigma_1,\sigma_2>0$，$|\rho|<1$，则称 (X,Y) 服从参数为 μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ 的二维正态分布，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

2. 二维均匀分布

设D为平面上的有界区域, $S(D)$为区域D的面积, 若(X,Y)的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域D上的均匀分布.

3. 多项分布

设每次试验可能有r个结果: $A_1,A_2,\cdots,A_r$, 第i结果A_i发生的概率为p_i, 且$\sum_{i=1}^{r}p_i=1$, 重复试验n次, X_i表示这n次试验中A_i发生的次数, 则

$$P\{X_1=n_1,\cdots,X_r=n_r\}=\frac{n!}{n_1!\cdots n_r!}p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r},$$

称这分布为多项分布, 它是二项分布的推广.

3.2 习题详解

3.1 练习题

1. 填空题

(1) 设(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right)$$

则$A=$________, $B=$________, $C=$________.

分析 确定联合分布函数中常数一般利用联合分布函数的性质(2); 当只有一个常数时也可以利用联合分布律或联合密度函数的规范性,即联合分布律的和等于1或联合密度函数在整个平面上积分等于1.

解 因为

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1,\quad \lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,\quad \lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$$

所以

$$A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1,$$

$$A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan y)=0,$$

$$A(B+\arctan x)(C-\frac{\pi}{2})=0,$$

从而解得 $B=\frac{\pi}{2}$, $C=\frac{\pi}{2}$, $A=\frac{1}{\pi^2}$.

(2) 设二维随机变量(X,Y)的分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & \min(x,y)<0\\ \min(x,y), & 0\le\min(x,y)<1\\ 1, & \min(x,y)\ge 1\end{cases}$$

则随机变量X的分布函数$F_X(x)=$________.

解 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

2. 思考题

若二维随机变量(X,Y)的两个边缘分布函数$F_X(x)$和$F_Y(y)$均已知, 问由此是否可以确定它们的联合分布函数?

解 否. 由联合分布函数可以惟一确定边缘分布函数, 但是一般来说, 由边缘分布函数不能唯一确定联合分布函数.

3.2 练习题

1. 填空题

设X和Y服从同一分布, 且X的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

若已知$P\{XY=0\}=1$, 则$P\{X=Y\}=$__________.

解 因为

$$P\{XY=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=1,$$

故

$$P\{X=1,Y=1\}=1-P\{XY=0\}=0,$$

再由X, Y的边缘分布律知,

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=1\}=0,$$

从而

$$P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=0.$$

2. 选择题

设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$，其联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
−1	0.2	0	0.1
0	0	0.4	0
1	0.1	0	0.2

则$F(0,1)=$(　　).

A. 0.2　　　　B. 0.4　　　　C. 0.6　　　　D. 0.8

解　$F(0,1)=P\{X\le 0,Y\le 1\}=0.2+0.4=0.6$.

3.3 练习题

1. 填空题

设二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，其联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)},$$

则$\mu_1=$_____，$\mu_2=$_____，$\sigma_1^2=$_______，$\sigma_2^2=$______，$\rho=$______.

解　$\mu_1=\mu_2=0$，$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$，$\rho=\frac{1}{2}$.

2. 选择题

设(X,Y)为二维连续型随机变量，则关于未知数t的一元二次方程$Xt^2+2Yt+5=0$有重根的概率为(　　).

A. 0　　　　B. 0.25　　　　C. 0.5　　　　D. 1

解　二次方程判别式$\Delta=4Y^2-20X=0$，即$X=Y^2$，依题意，$P\{X=Y^2\}=0$，故本题应选 A.

3.4 练习题

1. 填空题

(1) 设相互独立的两个随机变量X，Y具有同一分布律，且X的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量$Z=\max(X,Y)$的分布律为 _____________.

解　Z的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

(2) 设甲、乙两个元件的寿命相互独立且均服从参数为 1 的指数分布, 如果两个元件同时使用, 求甲比乙先坏的概率________.

解 设 X , Y 分别表示甲, 乙两个元件的使用寿命, 则 $X \sim E(1)$, $Y \sim E(1)$, 根据独立性, (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

故所求的概率为

$$P\{X<Y\}=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{-x}e^{-x-y}dy=\frac{1}{2}.$$

2. 选择题

已知 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=g(x)h(y)$, 其中 $g(x)\geq 0, h(y)\geq 0$, 并且 $\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx=a>0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}h(y)dy=b>0$, 则 X 和 Y 相互独立, 并且(　　).

A. $f_X(x)=g(x), f_Y(y)=h(y)$　　B. $f_X(x)=ag(x), f_Y(y)=bh(y)$

C. $f_X(x)=bg(x), f_Y(y)=ah(y)$　　D. $f_X(x)=g(x), f_Y(y)=abh(y)$

解 依题意有, $f_X(x)f_Y(y)=g(x)h(y)$, 故

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(y)dy=bg(x),\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)h(y)dx=ah(y),$$

故本题应选 C.

3.5 练习题

填空题

(1) 设 X 和 Y 相互独立且均服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布, 则条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)=$__________ .

解 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

所以当 $0<y<1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率

为 $p(0<p<1)$，且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，则在起点站发车时有 n 位乘客的条件下，中途有 k 位乘客下车的概率 $P\{Y=k\mid X=n\}=$________ .

解　$P\{Y=k\mid X=n\}==C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n,\quad n=0,1,2,\cdots$.

3.7 练习题

1. 填空题

(1) 设 X 和 Y 相互独立且均服从标准正态分布，则 $2X-3Y\sim$________.

解　由正态分布的可加性知，$2X-3Y\sim N(-1,13)$.

(2) 设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数 $F_Z(z)=$________.

解　$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=F(z,z)$.

2. 选择题

(1) 设随机变量 X 服从指数分布，则随机变量 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数（　　）.

A. 是连续函数　　　　B. 至少有两个间断点

C. 是阶梯函数　　　　D. 恰好有一个间断点

解　Y 取多少个数的概率不等于 0，就有多少个间断点. 因为 $P\{Y=2\}=P\{X\ge 2\}\ne 0$，因此在 2 处有一个间断点，其他地方没有间断点. 本题应选 D.

(2) 设 X 和 Y 相互独立且均服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，则下列服从相应区间或区域上均匀分布的是（　　）.

A. X^2　　B. $X-Y$　　C. $X+Y$　　D. (X,Y)

解　本题应选 D.

习题三

1. 10 件产品中有 7 件是一等品，3 件是二等品. 从中抽取 4 件，用 X 表示取到的一等品的件数，用 Y 表示取到二等品的件数，分别对有放回和无放回抽取二种情况下求 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律.

解 (1) 有放回抽取. X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=C_4^i(0.7)^i(0.3)^j,\quad i+j=4.$$

X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=i\}=C_4^i(0.7)^i(0.3)^{4-i},\quad i=0,1,\cdots,4,$$

$$P\{Y=j\}=C_4^j(0.7)^{4-j}(0.3)^j,\quad j=0,1,\cdots,4.$$

(2) 无放回抽取. X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_7^iC_3^j}{C_{10}^4},\quad i+j=4.$$

X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=i\}=\frac{C_7^i C_3^{4-i}}{C_{10}^4},\quad i=0,1,\cdots,4,$$

$$P\{Y=j\}=\frac{C_7^{4-j} C_3^j}{C_{10}^4},\quad j=0,1,\cdots,3.$$

2. 盒子中装有 3 只黑球、2 只白球和 2 只红球，从中无放回抽取 4 只，以 X 表示取到的黑球的只数，用 Y 表示取到的白球的只数，求(1) X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律；(2) $P\{X=Y\}$.

解 (1) X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_3^i C_2^j C_2^{4-i-j}}{C_7^4},\quad 2\le i+j\le 4.$$

X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=i\}=\frac{C_3^i C_4^{4-i}}{C_7^4},\quad 0\le i\le 3,\qquad P\{Y=j\}=\frac{C_2^j C_5^{4-j}}{C_7^4},\quad 0\le j\le 2.$$

(2) $P\{X=Y\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}=\dfrac{9}{35}$.

3. 甲乙两人独立地各进行二次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的命中率为 0.4， X,Y 分别表示甲乙的命中次数，求(1) X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律；(2) $P\{X\le Y\}$.

解 由题设，X 和 Y 各自可能的取值为 0, 1, 2. 由事件的独立性得

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}$$
$$=[C_2^0\cdot(0.2)^0\cdot(0.8)^2][C_2^0\cdot(0.4)^0\cdot(0.6)^2]=0.2304,$$

同理，依次算得 (X,Y) 取其他可能值的概率，并将 (X,Y) 的联合分布律和边缘分布律列表如下：

X \ Y	0	1	2	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
0	0.2304	0.3072	0.1024	0.64
1	0.1152	0.1536	0.0512	0.32
2	0.0144	0.0192	0.0064	0.04
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	0.36	0.48	0.16	1

(2) $P\{X\le Y\}=1-P\{X>Y\}$

$$=1-P\{X=1,Y=0\}-P\{X=2,Y=0\}-P\{X=2,Y=1\}$$
$$=0.8512.$$

4. 两封信随机投入编号为 1, 2 的两个信箱中，用 X 表示第一封信投入信箱的号码，用 Y 表

示第二封信投入信箱的号码, 求 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律.

解 由题设, X 和 Y 各自可能的取值为 1, 2. 再由古典概率计算得

$P\{X=1,Y=1\}=0.25$, $P\{X=1,Y=2\}=0.25$,

$P\{X=2,Y=1\}=0.25$, $P\{X=2,Y=2\}=0.25$,

从而 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律列表如下:

X \ Y	1	2	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
1	0.25	0.25	0.5
2	0.25	0.25	0.5
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	0.5	0.5	1

5. 假设随机变量 $Y\sim U(-2,2)$, 随机变量

$$X_1=\begin{cases}-1, & Y\le -1,\\ 1, & Y>-1,\end{cases}\qquad X_2=\begin{cases}-1, & Y\le 1,\\ 1, & Y>1,\end{cases}$$

求 X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律.

解 (X,Y) 的所有可能取值为: $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, 相应地概率依次为:

$P\{X_1=-1,X_2=-1\}=P\{Y\le -1,Y\le 1\}=P\{Y\le -1\}=0.25$,

$P\{X_1=1,X_2=-1\}=P\{Y>-1,Y\le 1\}=P\{-1<Y\le 1\}=0.5$,

$P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{Y\le -1,Y>1\}=0$,

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>-1,Y>1\}=P\{Y>1\}=0.25$,

所以 X_1 和 X_2 的联合分布律为

X_1 \ X_2	−1	1
−1	0.25	0
1	0.5	0.25

X_1 和 X_2 的边缘分布律分别为

X_1	-1	1
P	0.25	0.75

X_2	-1	1
P	0.75	0.25

6. 掷骰子二次, X 表示得偶数点的次数, Y 表示得 3 或 6 点的次数, X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律.

解 X 和 Y 各自可能的取值为 0, 1, 2. 由古典概率知, 事件 $\{X=0,Y=0\}$ 表示两次投掷中, 点数都为奇数点且点数均无 3 或 6 点, 其概率为

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9},$$

事件$\{X=0,Y=1\}$表示两次投掷中均为奇数点,且两次中有一次点数是 3 或 6. 其概率为

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot C_2^1\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9},$$

同理,依次算得其他可能取值的概率,并将X和Y的联合分布律及边缘分布律列表如下:

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

7. 假设某地区15% 的家庭没有儿童, 20% 的家庭有一个儿童, 35% 的家庭有二个儿童, 30% 的家庭有三个儿童. 现从这地区随机抽取一户家庭, 随机变量X表示这户的男孩数, Y表示这户的女孩数, 求X和Y的联合分布律和边缘分布律.

解 (X,Y)的所有可能取值为: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(3,0)$, 相应地概率为:

$$P\{X=0,Y=0\}=0.15,$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0.2\times0.5=0.1,$$

$$P\{X=0,Y=2\}=P\{X=2,Y=0\}=0.35\times(0.5\times0.5)=0.0875,$$

$$P\{X=0,Y=3\}=P\{X=3,Y=0\}=0.3\times(0.5\times0.5\times0.5)=0.0375,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=0.35\times(0.5\times0.5\times2)=0.175,$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=2,Y=1\}=0.3\times(0.5\times0.5\times0.5\times3)=0.1125,$$

所以X和Y的联合分布律与边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
0	0.15	0.1	0.0875	0.0375	0.375
1	0.1	0.175	0.1125	0	0.3875
2	0.0875	0.1125	0	0	0.2
3	0.0375	0	0	0	0.0375
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	0.375	0.3875	0.2	0.0375	1

8. 已知随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-x-2y}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

求(1)常数k；(2) X 和 Y 的边缘密度函数；(3) $P\{X>1,Y<1\}$；(4) $P\{X>1,Y<1\}$；(5) X 和 Y 的联合分布函数$F(x,y)$.

解 (1) 由$\iint\limits_{R^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}k=1$, 解得 $k=2$.

(2) X 和 Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2y}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-2y}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

(3) $P\{X+Y<1\}=2\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{2x-1})\mathrm{d}x=1-2\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}$.

(4) $P\{X>1,Y<1\}=2\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-3}$.

(5) $$F(x,y)=\begin{cases} 2\int_0^x\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\int_0^y\mathrm{e}^{-2v}\mathrm{d}v, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他 \end{cases}=\begin{cases} (1-\mathrm{e}^{-x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x>0, y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

9. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} k, & x^2<y<x, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

求(1)常数k；(2) X 和 Y 的边缘密度函数；(3) $P\{X>0.5\}$；(4) $P\{X>0.5\,|\,Y<0.5\}$.

解 (1) 由$\iint\limits_{R^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}k=1$, 解得 $k=6$.

(2) X 和 Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases} 6\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=6(x-x^2), & 0<x<1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases} 6\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$$

(3) $P\{X>0.5\}=6\int_{0.5}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{d}y=0.5$.

(4) $P\{X>0.5\mid Y<0.5\}=\dfrac{P\{X>0.5,Y<0.5\}}{P\{Y<0.5\}}=\dfrac{6\int_{0.5}^{\sqrt{0.5}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{0.5}\mathrm{d}y}{6\int_0^{0.5}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y}=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{4\sqrt{2}-3}$.

10. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}k\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求：(1) 常数k；(2) X和Y的边缘密度函数；(3) $P\{X+Y\le 1\}$.

解 (1) 由$\iint\limits_{R^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1$, 解得 $k=1$.

(2) X和Y的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^{y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

(3) $P\{X+Y\le 1\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-0.5}$.

11. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求：(1) X和Y的边缘概率密度；(2) X和Y至少有一个小于$\dfrac{1}{2}$的概率.

解 (1) X和Y的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}4.8(2-x)\int_0^x y\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}2.4(2-x)x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}4.8y\int_y^1(2-x)\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}2.4y(y^2-4y+3), & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) $P(\{X<\frac{1}{2}\}\cup\{Y<\frac{1}{2}\})=1-P\{X\ge\frac{1}{2},Y\ge\frac{1}{2}\}$

$$=1-4.8\int_{\frac{1}{2}}^1(2-x)\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}}^x y\mathrm{d}y=1-\frac{37}{80}=\frac{43}{80}.$$

12. 设随机变量(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$上均匀分布. 令

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$$

(1) 求(U,V)的联合分布律; (2) U和V是否独立?

解 (1) 因为

$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=0.25$,

$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0$,

$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=0.25$,

$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}=0.5$,

所以(U,V)的联合分布律为

$U \backslash V$	0	1
0	0.25	0
1	0.25	0.5

(2) 因为$P\{U=0,V=1\}=0\ne P\{U=0\}P\{V=1\}=0.125$, 所以$U$和$V$不独立.

13. 试判断题 1 中X,Y是否相互独立.

解 由题 1 的联合分布律及边缘分布律可以看出, 对于有放回和无放回两种情况, 均不满足$P\{X=i,Y=j\}=0\ne P\{X=i\}P\{Y=j\}$, 故$X,Y$均不相互独立.

14. 设随机变量X与Y相互独立, 下表给出了随机变量(X,Y)联合分布律和边缘分布律中的部分数值, 试将其余数值填入表中的空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$			1

解 $P\{X=x_1,Y=y_1\}=\dfrac{1}{6}-P\{X=x_2,Y=y_1\}=\dfrac{1}{24}$,

$P\{X=x_1\}=\dfrac{P\{X=x_1,Y=y_1\}}{P\{Y=y_1\}}=\dfrac{1}{4}$, $P\{X=x_2\}=1-P\{X=x_1\}=\dfrac{3}{4}$,

$P\{Y=y_2\}=\dfrac{P\{X=x_1,Y=y_2\}}{P\{X=x_1\}}=\dfrac{1}{2}$,

$$P\{X=x_2,Y=y_2\}=\frac{1}{2}-P\{X=x_1,Y=y_2\}=\frac{3}{8},$$

$$P\{Y=y_3\}=1-P\{Y=y_1\}-P\{Y=y_2\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=x_1,Y=y_3\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12},\qquad P\{X=x_2,Y=y_3\}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

15. 设随机变量 X,Y 独立同分布, 且 X 的分布律为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3},i=1,2,3$. 令 $U=\max(X,Y)$, $V=\min(X,Y)$. 求随机变量 (U,V) 的分布律.

解　(U,V) 的可能取值为 $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, 相应地概率为

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{9},$$

$$P\{U=2,V=1\}=P\{X=2,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=\frac{2}{9},$$

$$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{9},$$

$$P\{U=3,V=1\}=P\{X=3,Y=1\}+P\{X=1,Y=3\}=\frac{2}{9},$$

$$P\{U=3,V=2\}=P\{X=3,Y=2\}+P\{X=2,Y=3\}=\frac{2}{9},$$

$$P\{U=3,V=3\}=P\{X=3,Y=3\}=\frac{1}{9}.$$

16. 设 A,B 是二个随机事件, 定义

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & \overline{A}\text{发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & \overline{B}\text{发生},\end{cases}$$

证明: 随机变量 X,Y 相互独立的充要条件是事件 A,B 相互独立.

证明　随机变量 X,Y 的联合分布律为

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB),$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB),$$
$$P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

随机变量 X,Y 的边缘分布律分别为

$$P\{X=1\}=P(A),\qquad P\{X=0\}=1-P(A),$$
$$P\{Y=1\}=P(B),\qquad P\{Y=0\}=1-P(B),$$

(1) 当 X,Y 相互独立时, 则有

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

从而 $P(AB)=P(A)P(B)$, 即事件 A,B 相互独立.

(2) 当事件 A,B 相互独立时, 则有

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)P(B)=P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

类似可以验证独立性要求的余下三个式子也成立, 从而 X,Y 相互独立.

17. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从参数为 $p(0<p<1)$ 的 0-1 分布, 定义

$$Z=\begin{cases}1, & X+Y\text{为偶数},\\ 0, & X+Y\text{为奇数},\end{cases}$$

问 p 取什么值时, X 与 Z 独立?

解 X 与 Z 的联合分布律为

$P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=p^2$,

$P\{X=1,Z=0\}=P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=p(1-p)$,

$P\{X=0,Z=1\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=(1-p)^2$,

$P\{X=0,Z=0\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=p(1-p)$.

且 X 与 Z 的边缘分布律分别为: $X\sim B(1,p)$, $Z\sim B(1,2p^2-2p+1)$.

又因为 X 与 Z 相互独立, 所以

$$P\{X=1,Z=1\}=P\{X=1\}P\{Z=1\},\quad \text{即}\quad p^2=p(2p^2-2p+1),$$

由此解得 $p=\dfrac{1}{2}$ ($p=1$ 舍去), 容易验证, 当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, 独立性要求的其余三个式子也成立, 所以 $p=\dfrac{1}{2}$ 即为所求.

18. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<y<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

问 X 和 Y 是否独立?

解 X 和 Y 的边缘分布律分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 3x\mathrm{d}y=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^1 3x\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因为$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,所以$X$和$Y$不独立.

19. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

问X和Y是否独立?

解 X和Y的边缘分布律分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^1 6x^2y\mathrm{d}y=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 6x^2y\mathrm{d}x=2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因为$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$,所以$X$和$Y$不独立.

20. 设随机变量X与Y相互独立, 且$X\sim U(0,1)$, $Y\sim N(0,1)$, 求:(1) X和Y的联合密度函数;(2) $P\{X+Y\le 1\}$.

解 (1) 由题设, X, Y的密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

再由X与Y的独立性知,

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & 0<x<1,-\infty<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $$P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 y\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\Phi(1)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

21. 题 2 中$Y=1$下X的条件分布律.

解 由第 2 题的结果及条件分布的定义知,

$$P\{X=i\mid Y=1\}=\frac{P\{X=i,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{C_3^iC_2^{3-i}}{C_5^3},\quad i=1,2,3.$$

22. 题 7 中$X=1$下Y的条件分布律.

解 由第 7 题的结果及条件分布的定义知, $X=1$下Y的条件分布律为

Y	0	1	2
$P\{Y \mid X=1\}$	$\dfrac{8}{31}$	$\dfrac{14}{31}$	$\dfrac{9}{31}$

23. 设 (X,Y) 是二维随机变量, 已知 $X \sim b(1,0.3)$, 在 $X=0$ 下 Y 的条件分布律为

Y	0	1	2
$P\{Y \mid X=0\}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4}$

在 $X=1$ 下 Y 的条件分布律为

Y	0	1	2
$P(Y \vert X=1)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

求(1) (X,Y) 的联合分布律; (2) $Y=1$ 下 X 的条件分布律.

解 (1) (X,Y) 的联合分布律

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{Y=0 \mid X=0\}P\{X=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{20},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1 \mid X=0\}P\{X=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{40},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=P\{Y=2 \mid X=0\}P\{X=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{40},$$

同理,

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{3}{20}, \qquad P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{10}, \qquad P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{20}.$$

(2) $Y=1$ 下 X 的条件分布律为

$$P\{X=0 \mid Y=1\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{7}{11},\ P\{X=1 \mid Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{4}{11}.$$

24. 设 X 为某商店一年内出售的电视机的数量, Y 为电视机在保修期内出故障的数量, 设 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}, \quad m=0,1,\cdots,n,\ n=0,1,2,\cdots,$$

(1) 求边缘分布律; (2) 求条件分布律.

解 (1) X 边缘分布律为

$$P\{X=n\}=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}=\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n} C_n^m \lambda_1^m \lambda_2^{n-m} \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)},\ n = 0,1,2,\cdots.$$

Y 边缘分布律为

$$P\{Y=m\} = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = \frac{\lambda_1^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{\lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2}$$

$$\overset{k=n-m}{=} \frac{\lambda_1^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda_1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda_2^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_2} = \frac{\lambda_1^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda_1},\quad m = 0,1,\cdots,n.$$

(2) 当 $m = 0,1,2,\cdots$ 时,

$$P\{X=n \mid Y=m\} = \frac{P\{X=n, Y=m\}}{P\{Y=m\}} = \frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}\mathrm{e}^{-\lambda_2},\quad n = m, m+1, m+2, \cdots.$$

当 $n = 0,1,2,\cdots$ 时,

$$P\{Y=m \mid X=n\} = \frac{P\{X=n, Y=m\}}{P\{X=n\}} = C_n^m\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m},\ m = 0,1,\cdots,n.$$

25. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2 y}, & 1 < x < +\infty, \dfrac{1}{x} < y < x, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $f_{X|Y}(x \mid y)$ 和 $f_{Y|X}(y \mid x)$.

解 X 和 Y 的边缘密度函数分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{2x^2 y}\,\mathrm{d}y = \frac{\ln x}{x^2}, & x > 1, \\ 0, & x \le 1, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \frac{1}{2x^2 y}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, & 0 < y < 1, \\ \displaystyle\int_{y}^{+\infty} \frac{1}{2x^2 y}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2y^2}, & y \ge 1, \\ 0, & y \le 0, \end{cases}$$

当 $0 < y < 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 y}, & x > \dfrac{1}{y}, \\ 0, & x \le \dfrac{1}{y}, \end{cases}$$

当 $y \ge 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2}, & x > y, \\ 0, & x \le y, \end{cases}$$

当$x>1$时,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2y\ln x}, & \dfrac{1}{x}<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

26. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$.

解　X和Y的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2\int_{x^2}^{1}y\mathrm{d}y, & -1<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}x^2\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

所以当$0<y<1$时,

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & -1<|x|<y,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

当$-1<x<1$时,

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

27. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求$P(X>1|Y=y)$.

解　Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}-y}\mathrm{d}x, & -1<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

所以当$y>0$时,

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

当 $y>0$ 时, 有

$$P(X>1\mid Y=y)=\int_1^{+\infty}f_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{y}}.$$

28. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 均服从 $U(0,1)$. 令

$$Z=\begin{cases}1, & X\le Y,\\ 0, & X>Y,\end{cases}$$

求: (1) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$; (2) Z 的分布律和分布函数.

解 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以当 $0<y<1$ 时,

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) Z 的分布律为

$$P\{Z=1\}=P\{X\le Y\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=\frac{1}{2},\qquad P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\frac{1}{2}.$$

从而 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$$

29. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从参数为 0.5 的 0-1 分布, 即 $b(1,0.5)$, 试求: (1) 随机变量 $Z_1=\max\{X,Y\}$ 的分布律; (2) $Z_2=X-Y$ 的分布律.

解 (1) Z_1 的可能取值为 0, 1, 其分布律为

$$P\{Z_1=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z_1=1\}=1-P\{Z_1=0\}=\frac{3}{4}.$$

(2) Z_2 的可能取值为-1, 0, 1, 其分布律为

$$P\{Z_2=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z_2=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Z_2=1\}=1-P\{Z_2=-1\}-P\{Z_2=0\}=\frac{1}{4}.$$

30. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的密度函数.

解 $$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\}=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=z^2, & 0<z\le 1,\\ 1, & z>1\end{cases}$$

所以随机变量Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}2z, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

31. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1) $Z=X+Y$的密度函数;(2) $U=X/Y$的密度函数.

解 (1) 随机变量Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{e}^{-x-y}\mathrm{d}y, & z>0\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ -\mathrm{e}^{-z}(z+1)+1, & z>0,\end{cases}$$

所以随机变量Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ z\mathrm{e}^{-z}, & z>0.\end{cases}$$

(2) 随机变量Z的分布函数为

$$F_U(u)=P\{U\le u\}=P\{X\le uY\}$$

$$=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_{uy}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x-y}\mathrm{d}x, & u>0\end{cases}=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ -\frac{1}{u+1}, & u>0,\end{cases}$$

所以随机变量Z的密度函数为

$$f_U(u)=\frac{\mathrm{d}F_U(u)}{\mathrm{d}u}=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ \dfrac{1}{(u+1)^2}, & u>0.\end{cases}$$

32. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的密度函数.

解 随机变量Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{z-x}(x+y)\mathrm{d}y, & 0<z\le 1,\\ \int_0^{z-1}\mathrm{d}x\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y+\int_{z-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}(x+y)\mathrm{d}y, & 1<z\le 2,\\ 1, & 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{1}{3}z^3, & 0<z\le 1,\\ -\dfrac{1}{3}z^3+z^2-\dfrac{1}{3}, & 1<z\le 2,\\ 1, & 0,\end{cases}$$

所以随机变量Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}z^2, & 0<z\le 1,\\ z(2-z), & 1<z\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

33. 设随机变量X,Y相互独立，X服从参数为 1 的指数分布，$Y\sim U(0,1)$，求随机变量$Z=X+2Y$的密度函数.

解 由X,Y的分布及独立性知，(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

而随机变量Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}$$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^z \mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, & 0<z\le 2,\\ \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{z-2y} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, & z>2\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{1}{2}(z+\mathrm{e}^{-z}-1), & 0<z\le 2,\\ 1-\dfrac{\mathrm{e}^2-1}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z>2,\end{cases}$$

所以随机变量Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z}), & 0<z<2,\\ \dfrac{1-\mathrm{e}^2}{2}\mathrm{e}^{-z}, & z\ge 2.\end{cases}$$

34. 设随机变量(X,Y)服从区域$G=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 3, 1\le y\le 3\}$上的均匀分布, 试求随机变量$U=|X-Y|$的密度函数.

解　依题意, (X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 1<x<3, 1<y<3,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

而随机变量U的分布函数为

$$F_U(u)=P\{U\le u\}=P\{|X-Y|\le u\}=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ 1-\dfrac{1}{4}(2-u)^2, & 0<u\le 2,\\ 1, & u>2,\end{cases}$$

所以随机变量U的密度函数为

$$f_U(u)=\frac{\mathrm{d}F_U(u)}{\mathrm{d}u}=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}u, & 0<u<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

35. 设n个随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且均服从区间$[0,\theta]$上的均匀分布, 试求$M=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$和$N=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$的密度函数.

解　由题意知, $X_1,X_2,\cdots,X_n$有相同的分布函数与密度函数, 其形式分别设为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{\theta} & 0\le x\le\theta,\\ 1 & x>\theta,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立同分布, 故M与N的分布函数分别为

$$F_M(y)=[F(y)]^n,\qquad F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n,$$

从而相应地密度函数分别为

$$f_M(y)=nF(y)^{n-1}\cdot f(y)=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$f_N(z)=n[1-F(z)]^{n-1}\cdot f(z)=\begin{cases}\dfrac{n(\theta-z)^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

36. 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2x\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求:(1)边缘密度函数;(2) $Z=X+Y$的密度函数;(3) $P\{Y\le\dfrac{1}{2}\mid X\le\dfrac{1}{2}\}$.

解 (1) X和Y的边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y=2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\dfrac{y}{2}, & 0\le y\le 2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) 随机变量Z的分布函数为

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$

$$=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^{\frac{2}{3}z}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{z-y}\mathrm{d}x, & 0<z\le 1,\\ \int_0^{z-1}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x+\int_{z-1}^{\frac{2}{3}z}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{z-y}\mathrm{d}x, & 1<z\le 3,\\ 1, & z>3\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \dfrac{1}{3}z^2, & 0<z\le 1,\\ -\dfrac{1}{6}z^2+z-\dfrac{1}{2}, & 1<z\le 3,\\ 1, & z>3,\end{cases}$$

所以随机变量Z的密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}z, & 0<z\le 1,\\ 1-\dfrac{1}{3}z, & 1<z\le 3,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3) $$P\{Y\le\frac{1}{2}\mid X\le\frac{1}{2}\}=\frac{P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{2}\}}{P\{X\le\frac{1}{2}\}}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x}=\frac{3}{4}.$$

37. 设随机变量 X,Y 相互独立, $X \sim b(1,p)$, $Y \sim U(0,1)$, 求随机变量 $Z = X + Y$ 的密度函数.

解 随机变量 Z 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\} \\
&= P\{X + Y \le z \mid X = 0\}P\{X = 0\} + P\{X + Y \le z \mid X = 1\}P\{X = 1\} \\
&= P\{Y \le z \mid X = 0\}P\{X = 0\} + P\{Y \le z - 1 \mid X = 1\}P\{X = 1\} \\
&= P\{Y \le z\}P\{X = 0\} + P\{Y \le z - 1\}P\{X = 1\} \\
&= \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ (1-p)z, & 0 < z \le 1, \\ 1 - p + p(z-1), & 1 < z \le 2, \\ 1, & z > 2, \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以随机变量 Z 的密度函数为

$$
f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z} = \begin{cases} 1-p, & 0 < z \le 1, \\ p, & 1 < z \le 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$