# 复习试卷一答案

一、 CCCBC

二、 1. 11　　2. 2　　3. 相关　4. 720　5. 4

三、 1. 课本 P25 11(6)

2. 课本 P69 19

3. $\overline{A}=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & p & p^2 \\ 0 & p-1 & 1-p & p-p^2 \\ 0 & 0 & (1-p)(2+p) & (1-p)(1+p)^2 \end{pmatrix}$

当 p≠2 时方程有解。

**当$p\neq -2, p\neq 1$时，$r(A)=r(\overline{A})=3$, 方程有唯一解.**

**当$p=1$时，$r(A)=r(\overline{A})=1<3$, 方程有无穷组解. 此时**

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **选自由变量为$x_2, x_3$**

基础解系 $\eta_1=(-1\ 1\ 0)^T$, $\eta_2=(-1\ 0\ 1)^T$,　特解 $\xi=(1\ 0\ 0)^T$

全部解为 $\xi+k_1\eta_1+k_2\eta_2$, $k_1,k_2$ 为任意实数

四、**$(\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_s)= (\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_s)K$,**

其中 $K=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$。

因为$|K|\neq 0$，**故向量组 $\beta_1, \beta_2,\dots, \beta_s$ 与向量组 $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_s$)有等价，两者有相同的秩.**

# 复习试卷二答案

一、AA C C D

二、1．$\dfrac{16}{27}$　2．$\dfrac{B-2E}{2}$　3. $a_3+a_2-a_1=0$　4. 线性无关　5. 0．

三、1.解：从第一列开始，将前一列加到后一列上去，总共操作 n 次得到行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 2a & \cdots & na & (n+1)a \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}==(n+1)a\prod_{i=1}^{n}a_i$$

2. 解：det(A)=4，　　$AA^*=4E$

题设等式两边同乘以 A，得到 $4X=A^2$

$$X=\frac{1}{4}A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 10 & & \\ 15 & 22 & & \\ & & 67 & 78 \\ & & 91 & 106 \end{pmatrix}$$

3、　解：$(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_5)\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以向量组的一个极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$.

4、解：由 tr(A)=4 得到 a=1

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -1 & 1 & 5 & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程组有解 所以 b=8;

得到基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

特解

$$\xi_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以通解为$\xi_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2$,其中$k_1,k_2$为任意的实数

5、解： 1） $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{pmatrix}$ 特征值 $\lambda_1=2(2重);\ \lambda_2=8$

对应的特征向量为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\text{正交化}\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\ \ \beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

所以

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

2) 正定，特征值全正

6、解：$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mathrm{K}$

1） $$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\mathrm{K}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

2） $$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1/2&3/2&1\\1/2&1/2&1\\3/2&1&1/2\end{pmatrix}$$

**四**、解： 1）特征值为 0,-2 可对角化

2） $(A+E)$ 的特征值为 1，-1，也可对角化，结果为单位阵。

## 复习试卷三答案

**一**、1. $D$ 2. B 3. C 4. C 5、C

**二**、 1 $\frac{7^4}{128}$ 2．$-38$ 3. $x=\underline{3}$. 4. 20 5、$-A-2E$

**三**、 $$=\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1\\-a_1&a_2&0&\cdots&0\\-a_1&0&a_3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum\frac{1}{a_i}\right)$$

1、 $(A-E)(B-2E)=2E$

得到 $(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

3、 $\left(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_5\right)\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

所以向量组的一个极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，

$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_4$.

4、$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} k & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & k & \mathbf{1} & k \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & k & k^2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & k & k^2 \\ \mathbf{0} & k-\mathbf{1} & \mathbf{1}-k & k-k^2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & (\mathbf{1}-k)(\mathbf{2}+k) & (\mathbf{1}-k)(\mathbf{1}+k)^2 \end{pmatrix}$

当 k=1 时，r(A)=r($\overline{\mathbf{A}}$)=1, 方程有无穷多组解。

$\overline{A}\to\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 \end{pmatrix}$，自由变量 x2,x3.

故导出组的基础解系$\eta_1=(-1,1,0)^T,\eta_1=(-1,0,1)^T$，方程特解：$\xi=(0,1,0)^T$

全部的解是$\xi+k_1\eta_1+k_2\eta_2,k_1,k_2$是任意的实数

5、 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$

由 $A$ 特征值之和为 1，特征值之积为-12 得到

$$a=1,b=2$$

特征值

$$\lambda_1=2,\lambda_2=-3$$

正交特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$$

和

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\end{pmatrix}^T。$$

所以

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}，\quad \Lambda=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

6、（1）$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

（2）$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 0.5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

**四、证明题**

解 设 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$$AP=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & 1\\ & & 1\end{pmatrix}$$

$|A|$=-1