第二章　　复习题参考答案

1.

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

2.

X	0	1	2	3	4
P	0.4	0.3	0.12	0.09	0.09

3. 把一个球放入盒中看作一次试验, 每个球落到第一个盒中的概率都为$\frac{1}{3}$, 4个球放入（3个）盒中可以看作4重贝努里试验, 所以落入第一个盒中的球数$X \sim B(4, \frac{1}{3})$, 即X的分布律为:

$$P(X=k)=C_4^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{4-k},\ k=0,1,2,3,4.$$

4. 按第一种方案, 每人负责20台, 设每个工人需维修的设备数为X, 则$X \sim B(20, 0.01)$. 这里设备发生故障时不能及时维修的事件, 也就是一个工人负责的20台设备中至少有两台发生了故障, 其概率为

$$\begin{aligned}P(X \ge 2) &= 1-P(X=0)-P(X=1)\\ &=1-C_{20}^0\cdot 0.01^0\cdot 0.99^{20}-C_{20}^1\cdot 0.01\cdot 0.99^{19}\\ &\approx 1-\frac{0.2^0}{0!}e^{-0.2}-\frac{0.2^1}{1!}e^{-0.2}=1-1.2e^{-0.2}=0.0175231.\end{aligned}$$

上述近似计算是用了泊松定理, 其中参数$\lambda = np = 0.2$.

按第二种方案, 3名维修工人共同维护80台设备, 设需要维修的设备数为Y, 则$Y \sim B(80, 0.01)$, 这里设备发生故障时不能及时维修的事件, 就是80台中至少有4台发生故障, 其概率为

$$\begin{aligned}P(Y \ge 4) &= 1-\sum_{k=0}^{3}\mathrm{C}_{80}^k 0.01^k 0.99^{80-k}\\ &\approx 1-\sum_{k=0}^{3}\frac{0.8^k}{k!}e^{-0.8}\approx 0.00908,\end{aligned}$$

比较计算结果, 可见第二种方案发挥团队精神, 既能节省人力, 又能把设备管理得更好.

5. (1) 0.000069,　(2) 0.986305

6. 不放回抽样, 所需抽取次数的分布律为:

X	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

放回抽样, 所需抽取次数的分布律为: $\mathrm{P}(X=k)=(\frac{1}{5})^{k-1}\cdot\frac{4}{5},\quad k=1,2,3,\cdots$

7. $P(X=k)=\frac{C_{10}^k\cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5},\quad k=0,1,2,3,4,5$

8. 0.0045

9. (1) $\frac{1}{4}$,　(2) $\frac{4}{9}$

10. 0.5

11. (4)

12.（1） $a=1$，（2） $\frac{1}{3}$，（3） $\frac{1}{16}$

13. 由分布律的性质可知：$1=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{0.6^k}{k}$，为了求级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{0.6^k}{k}$ 的和，令 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$，逐项求导，得 $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}=\frac{1}{1-x}$，从而

$$\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-\mathrm{x}}\mathrm{d}x\text{，即 }f(x)-f(0)=-\ln(1-x)\text{，}$$

又因 $f(0)=0$，从而 $f(x)=-\ln(1-x)$，令 $x=0.6$，得 $f(0.6)=\ln\frac{5}{2}$，从而 $c=(\ln 5-\ln 2)^{-1}$

14. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1,\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$ （1） $\frac{1}{3}$；（2） 0；（3） $\frac{1}{6}$

15. $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{1}{7}, & -2\le x<0,\\ \frac{4}{7}, & 0\le x<2,\\ \frac{6}{7}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$

16. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

17.（1） $P(X=k)=\frac{0.2^k}{k!}\mathrm{e}^{-0.2}$，$k=0,1,2,\cdots$；

（2） $P(X\le 1)=0.983$

18.

X	-1	1	4
P	0.2	0.3	0.5

19.（2）

20. 略

21.（1） $A=1$，$B=-1$ （2） $f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$

22.（1） $A=1$，$B=-1$；（2） 0.4712；（3） $f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

23.（1） $\frac{1}{2}$，（2） $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\lambda x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$ （3） $1-e^{-\frac{\lambda}{2}}$

24. 设油库的容量为x千加仑, 据题意,

$$P(X>x)=0.01,\text{即 } P(X\le x)=0.99,$$

$$P(X\le x)=\int_0^x 5(1-x)^4\,dx=1-(1-x)^5=0.99,$$

从而$(1-x)^5=0.01$, $1-x=0.3981$, 解得$x=0.6019$（千加仑）

25. （1） $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathbf{d}x=\int_0^1 ax\mathbf{d}x+\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathbf{d}x=\frac{ax^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{x}\Big|_1^2=1$,（3 分）

解得, $a=1$.

（2） 当$x\le 0$时, $F(x)=\int_{-\infty}^x 0\mathbf{d}x=0$,

当$0<x\le 1$时, $F(x)=\int_0^x x\mathbf{d}x=\frac{x^2}{2}$,

当$1<x\le 2$时, $F(x)=\int_0^1 xdx+\int_1^x\frac{1}{x^2}\mathbf{d}x=\frac{3}{2}-\frac{1}{x}$,

当$x>2$时, $F(x)=1$,

因此, 分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x^2}{2}, & 0<x\le 1,\\ \frac{3}{2}-\frac{1}{x}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

（3） $P(\frac{1}{2}<X<3)=F(3)-F(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

26. 13

27.（1） 0.9545，（2） 0.1304

28. 2.3%

29. 设考生的英语成绩为X, 则$X\sim N(72,\sigma^2)$, 由题意知,

$$P(X\ge 96)=P(\frac{X-72}{\sigma}\ge\frac{96-72}{\sigma})=0.023,$$

故

$$\mathrm{P}(\frac{X-72}{\sigma}<\frac{24}{\sigma})=\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977,$$

查表得, $\frac{24}{\sigma}=2$, 所以$\sigma=12$, 因此, $X\sim N(72,12^2)$, 从而所求概率为

$$P(60\le X\le 84)=P(\frac{60-72}{12}\le\frac{X-72}{12}\le\frac{84-72}{12})$$
$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=0.6824.$$

30. $P(X<1)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$，即 $P(X=0)=C_2^0p^0(1-p)^2=\frac{4}{9}$，

解得 $p=\frac{1}{3}$，从而

$$P(Y\geq 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0p^0(1-p)^3=\frac{19}{27}$$

31. $\frac{2}{3}e^{-2}$

32. (1)

Y	3	5	7	9	11
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(2)

Z	0	1	4	9
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

33. (1)

Y	0	$\frac{\pi^2}{4}$	π^2
P	0.3	0.6	0.1

(2)

Z	-1	0	1
P	0.1	0.6	0.3

34. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}\sqrt[3]{\frac{2}{9\pi}}y^{-\frac{2}{3}}, & \frac{\pi}{6}a^3\leq y\leq\frac{\pi}{6}b^3,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

35. $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$

36. X的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

由于 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 内严格单调增加，因此存在反函数 $x=\arcsin y$，其导数为：$x'_y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，$y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 1，最小值为 -1，利用随机变量的单调函数的分布密度的公式，得 Y 的密度函数为：

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(\arcsin y)\left|(\arcsin y)'\right|, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$