第 1 章　随机事件及其概率

1.1　内容提要

1.1.1　随机事件与样本空间

1. 两个基本原理

(1) 加法原理

做一件事, 完成它可以有 n 类办法, 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有 m_2 种不同的方法, ……, 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有: $N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

(2) 乘法原理

做一件事, 完成它需要分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种不同的方法, 做第二步有 m_2 种不同的方法, ……, 做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 那么完成这件事共有: $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ 种不同的方法.

2. 排列

从 n 个不同元素中, 任取 m 个($m \le n$)不同元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 所有这样不同排列的种数(排列数)有 A_n^m 或 P_n^m 种, 这里 $A_n^m = P_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$.

从 n 个不同元素中取出 m 个($m \le n$)元素(元素可以重复), 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个可重复元素的排列. 所有这样可重复排列的种数(可重复排列数)有 n^m.

3. 组合

从 n 个不同元素中, 任取 m 个($m \le n$)不同元素, 不计顺序并成一组, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 这样不同的组合种数(组合数)有 $\binom{n}{m}$ 或 C_n^m 种, 这里

$$\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}.$$

组合数有两个性质: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$,　　$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$.

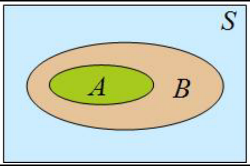
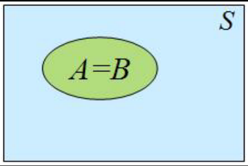
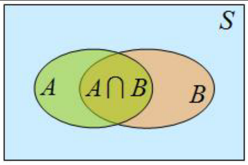
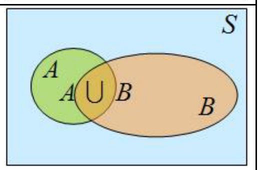
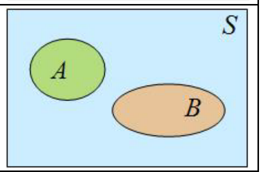
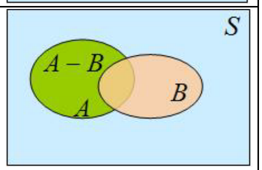
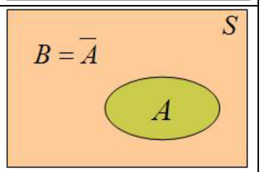
4. 随机现象、随机试验、随机事件

在一定条件下，可能发生也可能不发生的现象称为随机现象. 随机现象仅就一次观察呈现不确定性，但在大量重复试验中，具有某种统计规律性. 对随机现象进行的观察称为随机试验. 随机试验的结果称为随机事件. 随机试验的每一个可能结果称为基本事件或称为样本点，所有基本事件构成的集合称为样本空间，记作 S 或 Ω. 特别地，样本空间 S 或 Ω 称为必然事件，空集 ϕ 称为不可能事件.

5. 事件间的关系与运算

(1) 事件间的关系与运算(见表 1.1)

事件的运算及关系表表 1.1

运算或关系名称	记号	定义	文氏图
B 包含 A (包含关系)	$A \subset B$ 或 $B \supset A$	事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生	
A 与 B 相等 (相等关系)	$A = B$	A 与 B 相互包含	
积事件 (交运算)	AB 或 $A \cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	
和事件 (并运算)	$A + B$ 或 $A \cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	
互不相容 (互斥关系)	$AB = \phi$	事件 A 与事件 B 不能同时发生	
差事件 (减法运算)	$A - B$	事件 A 发生，但事件 B 不发生	
对立事件 (互逆关系)	$B = \overline{A}$	事件 A 与事件 B 中必有一个发生，但不能同时发生	

(2) 完备事件组

如果一组事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，满足

① 两两互不相容(互不相容性)；

② $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$ (完备性)，

则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组.

(3) 运算的性质

① **交换律** $A \cup B = B \cup A$， $A \cap B = B \cap A$；

② **结合律** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$， $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

③ **分配律** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$， $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$；

④ **德.摩根律** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$， $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，

一般地， $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$， $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

1.1.2 概率及古典概型

1. 概率的统计定义

在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 的频数，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，并记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

在相同的条件下，重复进行很多次试验，事件 A 的频率的稳定值 p 称为随机事件 A 的概率，记作 $P(A) = p$.

2. 概率的古典定义

古典概型具有以下特点：

(1) 所有可能的试验结果只有有限个，即试验的基本事件个数有限；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相等.

并称满足上述条件的事件组为等概基本事件组.

在古典概型中，设基本事件总数为 n，事件 A 包含的基本事件数为 m ($m \le n$)，则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{所含基本事件数}}{S\text{所含基本事件总数}} = \frac{m}{n}.$$

3. 概率的公理化定义

设随机试验 E 的样本空间为 S，对于试验 E 的随机事件 $A(\subset S)$ 赋予一个实数 $P(A)$，它满足下列三条公理：

(1) **非负性** 对于每一个事件 A， $P(A) \ge 0$；

(2) **规范性** $P(S)=1$;

(3) **可列可加性** 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ 是一组两两不相容的事件, 则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

1.1.3 概率的计算

1. 概率的加法公式

(1) 互不相容事件的加法公式

① 若事件 A, B 互不相容, 则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$;

② $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2) 减法公式

① 若 A, B 为任意两个事件, 则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(\overline{A}B)$;

② 若 $A \subset B$, 则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

(3)一般加法公式

设 A, B 为任意两个事件, 则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

一般地, 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为任意 n 个事件, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1 \le i<j \le n} P(A_i A_j)+\sum_{1 \le i<j<k \le n} P(A_i A_j A_k)-\cdots+(-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

2. 概率的乘法公式

(1) 条件概率

设 A, B 是两个事件, 且 $P(A)>0$, 在事件 A 已发生的条件下, 事件 B 发生的概率称为事件 B 在给定事件 A 下的条件概率, 记作 $P(B \mid A)$.

(2) 概率的乘法公式

若 $P(A)>0$, 则 $P(AB)=P(A)P(B \mid A)$;

一般地, 若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})>0$, 则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n)=P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) P(A_{n-1} \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-2}) \cdots P(A_2 \mid A_1) P(A_1).$$

3. 全概率公式与贝叶斯公式

(1) 划分

若事件组 $\{B_i : i \in I\}$ 满足 $\bigcup_{i \in I} B_i=S$, $B_i B_j=\phi$, $(i \neq j)$, 则称事件组 $\{B_i : i \in I\}$ 为 S 的一个划分.

(2) 全概率公式

设事件组$\{B_i : i \in I\}$为 S 的一个划分, 且$P(B_i) > 0$ ($i \in I$), 则有

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \mid B_i)P(B_i).$$

(3) 贝叶斯公式

设$\{B_i : i \in I\}$为 S 的一个划分, 且$P(A) > 0$, $P(B_i) > 0$ $(i \in I)$, 则有

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j \in I} P(A \mid B_j)P(B_j)}.$$

4. 事件的独立性

(1) 事件的独立性

① 对于任意事件A, B, 若$P(A) > 0$, 有$P(B \mid A) = P(B)$成立, 则称事件A与事件B相互独立;

② 事件A与事件B相互独立的充分必要条件是$P(AB) = P(A)P(B)$,

一般地, 若n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$满足

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),\ (1 < k \le n, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n)$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立;

③ 事件A与事件B相互独立, 则A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与B, $\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立.

(2) n重伯努利(Bernoulli)试验

① 若每次试验E只有两个结果, 即事件A发生或者不发生, 设$P(A) = p$ ($0 < p < 1$), 将E独立重复试验n次, 则称这一系列重复试验为n重伯努利试验;

②(伯努利定理) 设一次试验中事件发生的概率为p ($0 < p < 1$), 则n重伯努利试验中, 事件A发生k次的概率$p_n(k)$为

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2\cdots, n).$$

1.2 习题详解

1.1 练习题

1. 填空题

设A, B是任意的两个事件, 则$(\overline{A} \cup B)(A \cup B) =$ ________________; $(\overline{A} \cup B)(A \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})(A \cup \overline{B}) =$ ________________.

解 $(\overline{A} \cup B)(A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup B = \phi \cup B = B$;

$(\overline{A} \cup B)(A \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})(A \cup \overline{B}) = B \cap [(\overline{A} \cap A) \cup \overline{B}] = B \cap \overline{B} = \phi$.

2. 选择题

(1) 对于任意二事件 A 和 B, 与 $A\bigcup B=B$ 不等价的是(　　).

A. $A\subset B$　　B. $\overline{B}\subset\overline{A}$　　C. $A\overline{B}=\phi$　　D. $\overline{A}B=\phi$

解 本题应选 D.

(2) 设 A,B,C 是任意三个事件, 事件 D 表示 A,B,C 至少有两个事件发生, 则下列事件中与 D 不相等的是(　　).

A. $AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup\overline{A}BC$　　B. $S-(\overline{A}\overline{B}\bigcup\overline{A}\overline{C}\bigcup\overline{B}\overline{C})$

C. $AB\bigcup AC\bigcup BC$　　D. $AB\overline{C}\bigcup A\overline{B}C\bigcup\overline{A}BC\bigcup ABC$

解 本题应选 A.

1.2 练习题

1. 填空题

(1) 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{8}$, 则事件 A,B,C 全不发生的概率为________.

解 由 $P(AB)=0$, 得 $P(ABC)=0$, 故

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A\bigcup B\bigcup C})=1-P(A\bigcup B\bigcup C)$$
$$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)]$$
$$=1-(\frac{3}{4}-\frac{2}{8})=\frac{1}{2}.$$

(2) 设事件 A 发生是事件 B 发生概率的 3 倍, A 与 B 都不发生的概率是 A 与 B 同时发生概率的 2 倍, 若 $P(B)=\dfrac{2}{9}$, 则 $P(A-B)=$________.

解 由题设由 $P(A)=3P(B)=\dfrac{2}{3}$,

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\bigcup B})=1-P(A\bigcup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=2P(AB),$$

得
$$P(AB)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9},$$

所以
$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

2. 选择题

(1) 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件, 则下列结论肯定正确的是(　　).

A. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容　　B. $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

解 因为 A 与 B 互斥,所以 $P(AB)=0$,即 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$,故本题应选 D.

(2) 设随机事件 A 与 B 是对立事件, $0<P(A)<1$,则一定有(　　).

A. $0<P(A\bigcup B)<1$　　　　B. $0<P(B)<1$

C. $0<P(AB)<1$　　　　D. $0<P(\overline{A}\,\overline{B})<1$

解 由于 A 和 B 是对立事件,则 $AB=\phi, A\bigcup B=S$,故 $P(AB)=0$, $P(A\bigcup B)=1$,而 $\overline{A}\,\overline{B}=BA=AB$,故本题应选 B.

1.3 练习题

1. 填空题

(1) 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品,从中随机抽取 2 次,每次抽取 1 个,抽出后不再放回,则第二次抽取的是次品的概率为_______.

解 12 件产品按不放回方式抽两次时有 12×11 种抽取法,且每一种取法的概率相等,这是一个古典概型问题,而第二次抽出次品抽取法有 11×2 种,故所求事件概率为 $\dfrac{11\times 2}{12\times 11}=\dfrac{1}{6}$.

(2) 一条公交线路,中途设有 9 个车站,最后到达终点站. 已知在起点站上有 20 位乘客上车,则在第一站恰有 4 位乘客下车的概率 $\alpha=$_______.

解 乘客下车的所有可能排列数为 10^{20},第一站恰有 4 位乘客下车的可能排列数为 $C_{20}^{4}9^{16}$,故所求概率为 $\dfrac{C_{20}^{4}9^{16}}{10^{20}}=0.0898$.

2. 选择题

同时抛掷三枚匀称的硬币,正面与反面都出现的概率为(　　).

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

解 既有正面又有反面出现的概率为 $1-\dfrac{2}{2^3}=\dfrac{3}{4}$,故本题应选 D.

1.4 练习题

1. 填空题

某种商品每周能销售 10 件的概率为 0.8,能销售 12 件的概率为 0.56,已知该商品已销售了 10 件,则能销售 12 件的概率是_______.

解 令 $A=$ {每周能销售 10 件}, $B=$ {每周能销售 12 件},由题意知:

$$P(A)=0.8,\quad P(B)=0.56,$$

则所求概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.56}{0.8}=0.7.$$

2. 选择题

设 A 和 B 为随机变量, $0<P(A)<1$, $P(B)>0$, $P(B\mid A)+P(\overline{B}\mid\overline{A})=1$, 则一定(　　).

A. $P(A\mid B)=P(\overline{A}\mid B)$　　　　B. $P(A\mid B)\neq P(\overline{A}\mid B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　　　D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

解 $P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=\dfrac{P(AB)}{P(A)}+\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}+\dfrac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}=1$,

经化简, 得

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

故本题应选 C.

1.5 练习题

1. 填空题

(1) 已知随机事件相互独立, $P(A)=a$, $P(B)=b$, 如果事件 C 发生必然导致事件 A 和 B 同时发生, 则事件 A,B,C 都不发生的概率为______.

解　由于 $C\subset AB$, 则 $\overline{AB}\subset\overline{C}$, 而 $\overline{A}\,\overline{B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{AB}\subset\overline{C}$, 故

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-a)(1-b).$$

(2) 如果每次试验的成功率都是 p, 并且已知在三次独立重复试验中至少成功一次的概率为 $\dfrac{19}{27}$, 则 $p=$______.

解　由于 $1-(1-p)^3=\dfrac{19}{27}$, 从而 $p=\dfrac{1}{3}$.

2. 选择题

某射手的命中率为 $p(0<p<1)$, 该射手第 k 次命中目标时恰好射击了 n 次的概率为(　　).

A. $p^k(1-p)^{n-k}$　　　　B. $\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

C. $\dbinom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-k}$　　　　D. $\dbinom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$

解 射手第 k 次命中目标时恰好射击了 n 次, 表示前面的 $n-1$ 次试验中有 $n-k$ 次失败, $k-1$ 次成功, 从而所求概率为 $\dbinom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\cdot p$, 故本题应选 D.

习题一

1. 写出下列试验的样本空间:

(1) 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面出现的次数;

(2) 一射手对某目标进行射击, 直到击中目标为止, 观察其射击次数;

(3) 在单位圆内任取一点, 记录它的坐标;

(4) 在单位圆内任取两点, 观察这两点的距离;

(5) 掷一颗质地均匀的骰子两次, 观察前后两次出现的点数之和;

(6) 将一尺之棰折成三段, 观察各段的长度;

(7) 观察某医院一天内前来就诊的人数.

解 (1) $S=\{0, 1, 2, 3\}$;

(2) $S=\{1, 2, \cdots, \}$;

(3) $S=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$;

(4) $S=(0,2)$;

(5) $S=\{2,3,\cdots,12\}$;

(6) $S=\{(x,y,z): x+y+z=1\}$;

(7) $S=\{0,1,2,\cdots\}$.

2. 设 A,B,C 为三事件, 用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 发生但 B 与 C 均不发生;

(2) A 发生, 且 B 与 C 至少有一个发生;

(3) A,B,C 至少有一个发生;

(4) A,B,C 恰好有一个发生;

(5) A,B,C 至多有两个发生;

(6) A,B,C 不全发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) $A(B\cup C)$;

(3) $A\cup B\cup C$;

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(5) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;

(6) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或

$$(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\cup(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)\cup(A\overline{B}C)\cup(AB\overline{C}).$$

注 复合事件常用“恰有”, “只有”, “至多”, “至少”, “都发生”, “都不发生”,

“不都发生”等词来描述, 为了准确地用一些简单事件的运算来表示出复合事件, 必须弄清楚这些概念的含义. 随机事件可以根据定义直接表示出来, 也可以用其逆事件的逆事件来表示.

3. 设 $P(A)=x$, $P(B)=y$ 且 $P(AB)=z$, 用 x,y,z 表示下列事件的概率: $P(\overline{A}\cup\overline{B})$; $P(\overline{A}B)$; $P(\overline{A}\cup B)$; $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-z$;

$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=y-z$;

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-x+y-(y-z)=1-x+z$;

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-x-y+z$.

4. 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别为 $0.4,0.3$ 和 0.6, 求 $P(A\overline{B})$.

解 $P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$.

5. 设 A,B 为随机事件, $P(A)=0.7$, $P(A-B)=0.3$, 求 $P(\overline{AB})$.

解 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P\,[A-(A-B)]=1-[P\,(A)-P(A-B)]$

$$=1-P(A)+P(A-B)=1-0.7+0.3=0.6.$$

6. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4},\ P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{9}$, 求事件 A、B、C 全不发生的概率.

解 因为 $P(AB)=0$, 而 $ABC\subset AB$, 所以 $P(ABC)=0$. 因此事件 A、B、C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+0)=\frac{17}{36}.\end{aligned}$$

7. 设对于事件 A,B,C, 有 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$, $P(AB)=P(BC)=0$, $P(AC)=\dfrac{1}{8}$, 试求 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率.

解 因为 $P(AB)=P(BC)=0$, 而 $ABC\subset AB$, 所以 $P(ABC)=0$. 故 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

8. 设 A,B 是两个事件. (1) 已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$, 验证 $A=B$; (2) 计算 A 与 B 恰好有一个发生的概率.

解 (1) 由 $A\overline{B}=\overline{A}B$ 得 $A-AB=B-AB$, 解得 $A=B$;

(2) 由于 $A\cup B=\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup AB$ 且等式右边三事件互不相容, 所以

$$P(\overline{A}B\cup A\overline{B})=P(A\cup B)-P(AB)=P(A)+P(B)-2P(AB).$$

注 这类题目往往有多种解法,属一题多解的常见类型.如题(2)的另一解法为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}B\cup A\overline{B})&=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(B)-P(AB)+P(A)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-2P(AB).\end{aligned}$$

此外,正确运用条件也是至关重要的.稍有疏忽,也许有错而不知错在那儿,这是常有的事.请看如下解法:

$$\begin{aligned}P(\overline{A}B\cup A\overline{B})&=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(\overline{A})P(B)+P(A)P(\overline{B})\\&=(1-P(A))P(B)+P(A)(1-P(B))=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)\\&=P(A)+P(B)-2P(AB).\end{aligned}$$

上述证明,似乎无懈可击,但事实上两次运用了题设中根本不存在的独立性条件.

9. 在标有 1 号到 10 号的 10 个纪念章中任选 3 个,(1)求最小号码为 5 的概率;(2)最大号码为 5 的概率.

解 (1) 令 $A=\{3\text{ 个中最小号码为 }5\}$,则 $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$;

(2) 令 $B=\{3\text{ 个中最大号码为 }5\}$,则 $P(B)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{20}$.

10. 某大学生演讲协会共有 12 名学生,其中有 5 名一年级的学生,2 名二年级的学生,3 名三年级的学生,2 名四年级的学生,现在要随机选取几名学生出去参加演讲比赛,(1)如果参加比赛的学生名额为 4 个,问每个年级的学生各有 1 名的概率;(2)如果参加比赛的学生名额为 5 个,问每个年级的学生均包含在内的概率.

解 (1) 令 $A=\{\text{每个年级的学生各有 1 名}\}$,则 $P(A)=\dfrac{C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1}{C_{12}^4}=\dfrac{4}{33}$;

(2) 令 $B=\{\text{每个年级的学生均包含在内}\}$,则 $P(B)=\dfrac{C_5^1C_2^1C_3^1C_2^1C_8^1}{C_{12}^5}=\dfrac{10}{33}$.

11. 在 1500 个产品中有 400 个次品、1100 个正品.任取 200 个.(1) 求恰有 90 个次品的概率;(2) 求至少有 2 个次品的概率.

解 (1) 令 $A=\{\text{取到的 200 个产品中恰有 90 个是次品}\}$,则 $P(A)=\dfrac{C_{400}^{90}C_{1100}^{110}}{C_{1500}^{200}}$;

(2) 令 $B=\{\text{取到的 200 个产品中至少有 2 个是次品}\}$,则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_{1100}^{200}+C_{400}^{1}C_{1100}^{199}}{C_{1500}^{200}}.$$

注 在用排列组合公式计算古典概率时,必须注意在计算样本空间 S 和事件 A 所包含的基本事件数时,基本事件数的多少与问题是排列还是组合有关,不要重复计数,也不要遗漏.

12. 从 5 双鞋子中任取 4 只, 问这 4 只鞋子至少有两只配成一双的概率是多少?

解 从 10 只鞋子中任取 4 只, 有 $C_{10}^4 = 210$ 种不同的取法. 设 A 表示 4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双的事件.

解法 1 满足 A 要求的取法有两类, 一类是 4 只中恰有 2 只配对, 它可以有 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$ 种取法(5 双中任取 1 双, 再从其余 4 双中任取 2 双, 而且每双中各取 1 只). 另一类是 4 只恰好配成 2 双, 这样的取法有 C_5^2 种, 因此由加法原理, 4 只鞋子中至少有 2 只配对的取法数为

$$C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1 + C_5^2 = 120 + 10 = 130,$$

因此所求概率为

$$P(A) = \frac{130}{210} = 0.6190.$$

解法 2 $\overline{A}$ 为取出的 4 只鞋子均不配对的事件, 其包含的取法有 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1$ 种(其中 C_5^4 表示 5 双鞋子中取出 4 双, C_2^1 表示每双中取 1 只, 一共取 4 次), 从而

$$P(\overline{A}) = \frac{C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1}{210} = \frac{8}{21},$$

因此所求概率为

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{13}{21} = 0.6190.$$

注 本题的计算是典型的用排列组合的计数方法, 将一个复杂的计数问题分解成若干步, 每一步只是一个简单的排列或组合的计数, 然后用乘法原理得到总的结果. 如何进行分解需要按具体情况想办法. 所作的分解也不一定就是现实中进行的, 可以是理论上设想的, 也就是虚构的. 分解的方法也不一定是唯一的. 这些都是用排列组合计数的难点. 但是在本课程中我们不追求解复杂的排列组合计算问题, 过多地讲究排列组合的技巧反而会冲淡对概率概念的理解与讨论.

13. 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取两件产品中有一件是不合格品, 试求另一件也是不合格品的概率.

解 这可看成是条件概率问题.

解法 1 设 A 表示第一次取到不合格品, B 表示第二次取到不合格品, 所求概率是 $P(AB \mid A \cup B)$, 按条件概率的定义有

$$P(AB \mid A \cup B) = \frac{P[AB(A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)},$$

因 $P(AB) = \dfrac{4\times 3}{10\times 9}$, $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - \dfrac{6\times 5}{10\times 9}$, 故所求概率为

$$P(AB \mid A \cup B) = \frac{4\times 3}{10\times 9 - 6\times 5} = \frac{1}{5}.$$

解法 2 如果是同时从中任取 2 件 产品,此时有一件是不合格时共有 $C_4^2+C_4^1C_6^1=30$ 种取法,而已知有一件是不合格品时,另一件也是不合格共有 $C_4^2=6$ 种取法,故所求概率为

$$\frac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}=\frac{1}{5}.$$

注 此种方法是在缩减的样本空间中考虑条件概率的计算.

14. (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(A\overline{B})=0.5$, 求 $P(B\mid A\cup\overline{B})$; (2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B\mid A)=\frac{1}{3}$, $P(A\mid B)=\frac{1}{2}$, 试求 $P(A\cup B)$.

解 (1) $$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P[B(A\cup\overline{B})]}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(AB\cup B\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$
$$=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$
$$=\frac{0.7-0.5}{0.7+0.6-0.5}=0.25;$$

(2) 因为 $P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12}$, 所以 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$, 从而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}.$$

15. 设 M 件产品中有 m 件是不合格品,从中任取两件. (1) 在所取的产品中有一件是不合格品的条件下,求另一件也是不合格品的概率; (2) 在所取的产品中有一件是合格品的条件下,求另一件是不合格品的概率.

解 (1) 类似于本章第 13 题,这里不妨认为是同时取出两件产品,此时取出产品中有一件是不合格品有 $C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1$ 种取法,而已知两件中有一件是不合格品,另一件也是不合格品有 C_m^2 种取法,故所求概率为

$$\frac{C_m^2}{C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1}=\frac{m-1}{2M-m-1}.$$

(2) 取出产品中有一件是合格品有 $C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1$ 种取法,而已知两件中有一件是合格品,另一件是不合格品有 $C_m^1C_{M-m}^1$ 种取法,故所求概率为

$$\frac{C_m^1C_{M-m}^1}{C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1}=\frac{2m}{M+m-1}.$$

注 这里采用的是在缩减的样本空间中计算条件概率的方法,且题中"有一件"其意应在"至少有一件"而不能理解为"只有一件",这是因为对另一件是否是不合格还不知道.

16. 一批产品共 20 件,其中 5 件是次品,其余为正品. 现从这 20 件产品中不放回地任意抽

取三次,每次只取一件,求下列事件的概率:

(1) 在第一、第二次取到正品的条件下,第三次取到次品;

(2) 第三次才取到次品;

(3) 第三次取到次品.

解 (1) 这是条件概率,下面考虑在缩减的样本空间中去求,第一、第二次取到正品有$15\times14\times18$种取法,在此条件下第三次取到次品有$15\times14\times5$种取法,故所求概率为

$$\frac{15\times14\times5}{15\times14\times18}=\frac{5}{18}.$$

注 上述是将样本空间中的元素看成是三次取完后的结果,更简单的也可只考虑以第三次取的结果作为样本空间中的元素,即在第一、第二次取到正品时,第三次取时有 18 种取法,而在第一次、第二次取到正品时,第三次取次品有 5 种取法,故所求概率为$\frac{5}{18}$.

(2) 此问是要求事件“第一、第二次取到正品,且第三次取到次品”的概率(与(1)不同的在于这里没有将第一、第二次取到正品作为已知条件,而是同时发生),按题意,三次取产品共有$20\times19\times18$种取法,而第三次才取到次品共有$15\times14\times5$种取法,故所求概率为

$$\frac{15\times14\times5}{20\times19\times18}=\frac{35}{228}.$$

(3) 三次取产品共有$20\times19\times18$种取法,第三次取到次品有$5\times19\times18$种取法,故所求概率为

$$\frac{5\times19\times18}{20\times19\times18}=\frac{1}{4}.$$

注 此问也可用类似于(1)中注的方法去解决,即只考虑以第三次取得的结果作为样本空间的元素,也可很快求得答案是$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品,在其中取两次,每次任取一件,做不放回抽样,运用乘法公式计算下列事件的概率:(1)两件都是正品;(2)两件都是次品;(3)一件是次品,一件是正品;(4)第二次取出的是次品.

解 设$A_i=\{$第i次取得正品$\}$, $i=1,2$.

(1) $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$;

(2) $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$;

(3) $P(A_1\overline{A_2}\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$;

(4) $P(A_2)=P(A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)=\frac{1}{5}$.

18. 设甲袋中装有n只白球和m只红球;乙袋中装有N只白球和M只红球. 今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中,再从乙袋中任意取一只球,求取到白球的概率.

解 从甲袋中任意取一只球有$n+m$种取法,而从乙袋中任意取一只球有$N+M+1$种取法,故样本点总数为$(n+m)(N+M+1)$;若甲袋中任意取一只球为红球, 则再从乙袋中任意取一只白球的种数为mN,若甲袋中任意取一只球为白球, 则再从乙袋中任意取一只白球的种数为$n(N+1)$,故所求概率为

$$\frac{mN+n(N+1)}{(n+m)(N+M+1)}=\frac{n+N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}.$$

19. 两台车床加工同样的零件,第一台出现不合格品的概率是 0.03,第二台出现不合格品的概率是 0.06,加工出来的零件放在一起,并且已知第一台加工的零件数比第二台加工的零件数多一倍.(1)求任取一个零件是合格品的概率;(2) 如果取出的零件是不合格品,求它是由第二台车床加工的概率.

解 设$A_i=\{$第i台车床加工的零件$\}$, $i=1,2$, B表示取到的零件是不合格品,则

$$P(A_1)=\frac{2}{3},\quad P(A_2)=\frac{1}{3},\quad P(B\mid A_1)=0.03,\quad P(B\mid A_2)=0.06.$$

(1) 由全概率公式

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-[P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B|A_2)]$$

$$=1-(\frac{2}{3}\times0.03+\frac{1}{3}\times0.06)=1-0.04=0.96;$$

(2) 由贝叶斯公式

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times0.06}{0.04}=0.5.$$

20. 有朋友自远方来,他乘火车、轮船、汽车、飞机来的概率分别为 0.3, 0.2, 0.1, 0.4,如果他乘火车、轮船、汽车来的话,迟到的概率分别为$\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{12}$,而乘飞机则不会迟到,求:(1)他迟到的概率;(2)他迟到了,他乘火车来的概率为多少?

解 设A_1={朋友乘火车}, A_2={朋友乘轮船}, A_3={朋友乘汽车}, A_4={朋友乘飞机}, B={朋友迟到}. 于是,由题设可知:

$$P(A_1)=0.3,\quad P(A_2)=0.2,\quad P(A_3)=0.1,\quad P(A_4)=0.4,$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{4},\quad P(B\mid A_2)=\frac{1}{3},\quad P(B\mid A_3)=\frac{1}{12},\quad P(B\mid A_4)=0.$$

(1) 由全概率公式得他迟到的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)(B\mid A_i)=0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times0=\frac{3}{20}.$$

(2) 由贝叶斯公式得所求概率是

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.3\times\frac{1}{4}}{0.15}=\frac{1}{2}.$$

注 全概率公式和贝叶斯公式是概率计算中两个有用的公式. 当某个问题中出现若干个事件, 就需要考虑这些事件是否有关联, 用此两个公式进行计算时, 要求这种关联不是以直接的事件运算形式(比如和、积、差等运算形式)出现, 而是以原因(或条件)与结果的关系出现. 在具有因果关系(或条件与结果关系)的若干个事件中, 要计算结果发生的概率时, 用全概率公式, 当已知结果发生, 考虑某个原因(或条件)发生的条件概率时, 用贝叶斯公式. 需要注意的是, 在应用这两个公式时, 要求作为原因(或条件)的这些事件构成样本空间的划分(完备事件组).

21. 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%, 现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 试求该次品属 A 生产的概率.

解 设 $A_1=\{$工厂 A 生产的产品$\}$, $A_2=\{$工厂 B 生产的产品$\}$, $B=\{$产品是次品$\}$. 于是, 由题设可知:

$$P(A_1)=0.6,\quad P(A_2)=0.4,\ P(B|A_1)=0.01,\ P(B|A_2)=0.02.$$

由贝叶斯公式知, 所求概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(A_i)(B|A_i)}=\frac{0.6\times0.01}{0.6\times0.01+0.4\times0.02}=\frac{3}{7}.$$

22. 有两箱同种类的零件, 第一箱装有 50 只, 其中 10 只一等品; 第二箱装 30 只, 其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱, 然后从该箱中取零件两次, 每次任取一只, 取后不放回, 试求:

(1) 第一次取到的零件是一等品的概率;

(2)第一次取到的零件是一等品的条件下, 第二次取到的也是一等品的概率.

解 令 A 表示挑选出的是第一箱, $B_i\,(i=1,2)$ 表示第 i 次取到的零件是一等品, 则

(1) 由全概率公式有

$$P(B_1)=P(B_1|A)P(A)+P(B_1|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{10}{50}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=0.4;$$

(2) 由全概率公式有

$$P(B_1B_2)=P(B_1B_2|A)P(A)+P(B_1B_2|\overline{A})P(\overline{A})$$
$$=\frac{10\times9}{50\times49}\times\frac{1}{2}+\frac{18\times17}{30\times29}\times\frac{1}{2}=0.1942,$$

于是所求条件概率是

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{0.1942}{0.4}=0.4856.$$

23. 袋中装有编号为 1, 2, …, n 的 n 个球, 先从袋中任取一球, 如该球不是 1 号球就放回袋

中, 是 1 号球就不放回, 然后再取一球, 求取到 2 号球的概率.

解　用 A 表示第一次取到 1 号球, B 表示第二次取到 2 号球, 则由全概率公式有

$$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid \overline{A})P(\overline{A})=\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}=\frac{(n-1)^2+n}{n^2(n-1)}.$$

24. 随机选择的一个家庭正好有 k 个孩子的概率为 p_k , $k=0,1,2,\cdots$, 又假设各个孩子的性别独立, 且生男生女的概率各为 0.5, 试求一个家庭中所有孩子均为同一性别的概率(当孩子的个数为 0 时也认为所有孩子为同一性别).

解　以 A_k 表示有 k 个孩子, B 表示所有孩子均为同一性别, 则 $A_0, A_1, \cdots$ 构成一个划分, 由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{k=0}^{\infty}P(B\mid A_k)P(A_k)=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P(B\mid A_k)P(A_k)$$

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left((0.5)^k+(0.5)^k\right)P_k=p_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{2^{k-1}}.$$

25. 根据以往的临床记录, 知道癌症患者对某种试验呈阳性反应的概率为 0.95, 非癌症患者对这试验呈阳性反应的概率为 0.01. 已知被试验者患有癌症的概率为 0.005, 若某人对试验呈阳性反应, 求此人患有癌症的概率.

解　以 A 表示患有癌症, B 表示试验呈阳性, 则由贝叶斯公式得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.01}=0.3231\cdot$$

26. 美国总统常常从经济顾问委员会寻求各种建议. 假设有三个持有不同经济理论的顾问 A,B,C , 总统正在考虑采取一项关于工资和价格控制的新政策, 并关注这项政策对失业率的影响, 每位顾问就这种影响给总统一个个人预测, 他们所预测的失业率变化的概率由下表给出:

	下降(D)	维持原状(S)	上升(R)
顾问 A	0.1	0.1	0.8
顾问 B	0.6	0.2	0.2
顾问 C	0.2	0.6	0.2

用字母 A,B,C 分别表示顾问 A,B,C 正确的事件, 根据以往与这些顾问一起工作的经验, 总统已经形成了关于每位顾问有正确的经济理论的可能性的一个先验估计, 分别为:

$$P(A)=\frac{1}{6},\qquad P(B)=\frac{1}{3},\qquad P(C)=\frac{1}{2},$$

假设总统采纳了所提出的新政策, 一年后, 失业率上升了, 总统应如何调整它对其顾问的理论正确性的估计.

解　用 R 表示失业率上升, 此题要求 $P(A\mid R),P(B\mid R),P(C\mid R)$, 根据题意有

$$P(R\mid A)=0.8, P(R\mid B)=0.2, P(R\mid C)=0.2,$$

则由贝叶斯公式得

$$P(A|R)=\frac{0.8\times\frac{1}{6}}{0.8\times\frac{1}{6}+0.2\times\frac{1}{3}+0.2\times\frac{1}{2}}=\frac{0.8\times\frac{1}{6}}{0.3}=\frac{4}{9},$$

同理 $P(B|R)=\dfrac{0.2\times\frac{1}{3}}{0.3}=\dfrac{2}{9}$, $\qquad P(C|R)=\dfrac{0.2\times\frac{1}{2}}{0.3}=\dfrac{1}{3}$,

故总统对三个顾问的理论正确性应分别调整成 $\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{3}$.

27. 设两两相互独立的三事件 A,B,C 满足条件: $ABC=\phi$, $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$, 且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 试求 $P(A)$.

解 由条件及加法公式有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16},$$

即 $$16[P(A)]^2-16P(A)+3=0,$$

解得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $P(A)=\frac{3}{4}$（舍去）, 故 $P(A)=\frac{1}{4}$.

28. 设两个相互独立的随机事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 试求 $P(A)$.

解 由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$ 得

$$P(A-AB)=P(B-AB),$$

即 $$P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB),$$

得 $$P(A)=P(B),$$

由独立性有 $$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9},$$

从而得 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$, 故 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{2}{3}$.

29. 射手对同一目标独立地进行四次射击, 若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$, 试求该射手的命中率.

解 设射手的命中率为 p, 则由题意得 $1-(1-p)^4=\dfrac{80}{81}$, 解之得 $p=\dfrac{2}{3}$.

30. 甲、乙、丙三人独立地向同一飞机射击, 设击中的概率分别为 $0.4, 0.5, 0.7$. 如果只有一人击中, 则飞机被击落的概率为 0.2, 如果有两人击中, 则飞机被击落的概率为 0.6; 如果三人都击中, 则飞机一定被击落. 求飞机被击落的概率.

解 以 $A_i(i=1,2,3)$ 分别表示甲、乙、丙击中飞机, $B_i(i=0,1,2,3)$ 表示有 i 个人击中飞机, C 表示飞机被击落, 则

$$P(B_0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0.6\times0.5\times0.3=0.09,$$

$$\begin{aligned}P(B_1)&=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_2)&=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)\\&=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41,\end{aligned}$$

$$P(B_3)=1-P(B_0)-P(B_1)-P(B_2)=1-0.09-0.36-0.41=0.14,$$

则由全概率公式有

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(C\mid B_i)P(B_i)=0\times0.09+0.2\times0.36+0.6\times0.41+1\times0.14=0.458.$$

注 在这里 A_1,A_2,A_3 不构成样本空间的划分, 因为它们不是两两互斥, 可同时发生.

31. (1) 做一系列独立的试验, 每次试验中成功的概率为 p, 求在成功 n 次之前已经失败了 $m+1$ 次的概率;

(2) 构造适当的概率模型证明等式

$$\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}+\cdots+\binom{m+n-1}{m}=\binom{m+n}{m+1}.$$

解 (1) n 次成功之前已经失败了 $m+1$ 次, 表示进行了 $m+1+n$ 次, 第 $m+1+n$ 次试验一定成功, 而前面的 $m+n$ 次试验中有 $m+1$ 次失败, $n-1$ 次成功, 从而所求概率为

$$\binom{m+n}{m+1}(1-p)^{m+1}p^{n-1}\cdot p=\binom{m+n}{m+1}p^n(1-p)^{m+1};$$

(2) 令 A 表示 n 次成功之前已有 $m+1$ 次失败, $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示 n 次成功之前已有 $m+1$ 次失败且第 $m+1$ 次(即最后一次)失败在第 $m+i$ 次试验中发生, 则可知有

$$P(A)=\binom{m+n}{m+1}p^n(1-p)^{m+1},$$

且 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, $A_1,\cdots,A_n$ 两两互斥, 对事件 A_i, 它表示在 $m+n+1$ 次试验中, 从第 $m+i+1$ 次试验至第 $m+n+1$ 试验都成功, 第 $m+i$ 次试验是失败(最后一次失败), 而前面的 $m+i-1$ 次试验中有 m 次失败, $i-1$ 次成功, 于是

$$p(A_i)=\binom{m+i-1}{m}p^{i-1}(1-p)^m\cdot(1-p)\cdot p^{n-i+1}$$

$$=\binom{m+i-1}{m}p^n(1-p)^{m+1},\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

由于 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$，即

$$\binom{m+n}{m+1}p^n(1-p)^{m+1}=\binom{m}{m}p^n(1-p)^{m+1}+\binom{m+1}{m}p^n(1-p)^{m+1}+\cdots+\binom{m+n-1}{m}p^n(1-p)^{m+1},$$

消去 $p^n(1-p)^{m+1}$ 立得结论成立.

32. 假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.7 可以直接出厂；以概率 0.3 需进一步调试，经调试后以概率 0.8 可以出厂；以概率 0.2 定为不合格不能出厂，现该厂新生产了 $n(n\geq 2)$ 台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立）. 求：

(1) 全部能出厂的概率 α；

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β；

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ.

解 由全概率公式，每台仪器能出厂的概率为

$$p=1\times 0.7+0.8\times 0.3=0.94.$$

将每台仪器能否出厂看成是一次试验，则 n 台仪器就是 n 次试验，由于每次试验只有两个结果：出厂或不出厂，且各次试验相互独立，则这是一个 n 重伯努利概型问题，于是有

(1) $\alpha=(0.94)^n$；

(2) $\beta=C_n^2(0.94)^{n-2}(0.06)^2$；

(3) $\theta=1-C_n^1(0.94)^{n-1}(0.06)-C_n^0(0.94)^n(0.06)^0$

$$=1-n(0.94)^{n-1}(0.06)-(0.94)^n.$$