浙江工商大学 2015/2016 学年第 1 学期期末考试

《概率论与数理统计》试卷 A 参考答案

一、 1. $\dfrac{12}{35}$；　2. $\dfrac{1}{4}$；　3. $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\pi}$；　4. $\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+2)^2}{8}}, x\in\mathrm{R}$；

5. $\mathrm{e}-1$；　6. $\geq\dfrac{8}{9}$；　7. $F(1,n)$；　8. $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, $N(0,1)$.

二、 1. B；　2. A；　3. C；　4. C；　5. B.

三、 (1) 区域 D 的面积为 $A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$,

(X , Y) 的联合密度函数　$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq\sqrt{x},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　(4 分)

(2) 当 $0\leq x\leq 1$ 时，$f_X(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y=3(\sqrt{x}-x^2)$,

所以 X 的边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}3(\sqrt{x}-x^2), & 0\leq x\leq 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　(7 分)

当 $0\leq y\leq 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{y^2}^{\sqrt{y}}3\mathrm{d}x=3(\sqrt{y}-y^2)$,

所以 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}3(\sqrt{y}-y^2), & 0\leq y\leq 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　(10 分)

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$,所以 X , Y 不独立.　(12 分)

四、 分别用 A_1,A_2 记任取一件产品是机械甲、乙制造的, 用 B 记任取一件产品是优质品. 由贝叶斯公式,

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{2}{3}\times 0.6}{\frac{2}{3}\times 0.6+\frac{1}{3}\times 0.84}=\frac{10}{17}\approx 0.588.$$ (6 分)

五、 (1) $0.4+a+b+0.1=1$,　(1 分)

$P\{X=0\}=0.4+a$，$P\{X+Y=1\}=a+b=0.5$，$P\{X=0,X+Y=1\}=a$,

$(0.4+a)\times 0.5=a$,　(3 分)

解得　$a=0.4$, $b=0.1$.　(5 分)

(2) $E(X)=0.2$,　$E(X^2)=0.2$,　$D(X)=0.16$,　(7 分)

$E(Y)=0.5$,　$E(X^2)=0.5$,　$D(X)=0.25$,　(9 分)

$E(XY)=0.1$,

$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{0.1-0.2\times 0.5}{0.4\times 0.5}=0$.　(12 分)

六、 由中心极限定理,

$P\left\{\left|\dfrac{X_n}{n}-p\right|<0.1\right\}$ （2 分）

$=P\left\{\left|\dfrac{X_n-np}{\sqrt{npq}}\right|<\dfrac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right\}\approx 2\Phi\left(\dfrac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)-1\geq 0.9$， （6 分）

$\Rightarrow\ \Phi\left(\dfrac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right)\geq 0.95$，　$\dfrac{0.1\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\geq 1.65\ \Rightarrow\ n\geq 66$. （10 分）

七、（1）令 $E(X)=\lambda=\overline{X}$， （3 分）

$\therefore\ \hat{\lambda}=\overline{X}$. （4 分）

（2）似然函数 $L=\prod\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x_i}{\theta}})=\dfrac{1}{\theta^n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$， （6 分）

$\ln L=-n\ln\theta-\dfrac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，　$\dfrac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\overset{令}{=}0$， （10 分）

$\therefore$　θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{X}$. （12 分）

八、（1）$H_0:\sigma_1=\sigma_2$， （1 分）

检验量　$F=\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$， （3 分）

$F=\dfrac{0.025^2}{0.02^2}=1.56$， （4 分）

$F_{\alpha/2}(15,19)=2.6171,\ 1/F_{\alpha/2}(19,15)=1/2.7559=0.3629$，

$\because\ 0.3629<F<2.6171$， （6 分）

$\therefore$ 不否定 H_0，即方差无明显差异. （7 分）

（2）$H_0:\mu_1=\mu_2$， （8 分）

检验量

$T=\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_X^2+(n_2-1)S_Y^2}}\sqrt{\dfrac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$， （10 分）

$|T|=1.425$， （12 分）

$t_{\alpha/2}(34)=2.0322$，$|T|<2.0322$， （13 分）

$\therefore$ 不否定 H_0，即均值无明显差异. （14 分）

九、 $E(X)=\dfrac{\theta+2\theta}{2}=\dfrac{3}{2}\theta$， （2 分）

而　$E(\overline{X})=E(X)$， （3 分）

所以 $E(\hat{\theta})=\dfrac{2}{3}E(\overline{X})=\dfrac{2}{3}E(X)=\theta$. （4 分）