浙江工商大学概率论与数理统计考试（B 卷）参考答案

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. $\frac{5}{7}$；2. 0.3；3. e^{-2}；4. 18.4；5.37；6.N(2,43)；7. $F(b,c)-F(a,c)$；8. $\geq\frac{3}{4}$；

9. $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$；10. $\frac{1}{8}$

二、选择题（每题 2 分，共 10 分）

1.D；2.C；3.B；4.B；5.B

三（10 分）

解：设 B 表示黑球，A_i 表示从第 i 个盒子取球（i=1,2,3）则--------------1 分

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{3},P(B|A_1)=\frac{7}{10},P(B|A_2)=\frac{1}{6},P(B|A_3)=\frac{4}{25}$$

显然，A_1,A_2,A_3 构成样本空间的一个划分，-----------------2 分

（1）
$$\begin{aligned}&P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_1)P(B|A_2)\\&=\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{25}=0.3422\end{aligned}$$
----------------7 分

（2）$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=0.1623$---------------10 分

四、（10 分）

解：（1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^A\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}xdx=\sin\frac{1}{2}x|_0^A=\sin\frac{1}{2}A$---------1 分

$\Rightarrow A=\pi$ --------------2 分

(2) $P(|\xi|<\frac{\pi}{2})=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\sin\frac{x}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ------------4 分

(3) $F(x)=\begin{cases}0 & ,x\leq 0\\ \sin\frac{x}{2},0<x<\pi\\ 1 & ,x\geq\pi\end{cases}$ ----------------6 分

（4）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\pi-2$ -------------8 分

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\pi^2-2\pi+4$ --------------9 分

$DX=EX^2-(EX)^2=2\pi$ --------------10 分

五、（10 分）

解：（1） $P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=3\}$--------1 分

$\frac{1}{18}=(\alpha+\frac{1}{9}+\frac{1}{18})(\frac{1}{18}+\frac{1}{9})$；$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{6}$ -------------------2 分

$\alpha+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{3}+\beta+\frac{1}{9}=1$；$\Rightarrow \beta=\frac{2}{9}$--------------------3 分

（2） $P\left\{1<X<3,0<Y<2\right\}=\frac{1}{3}$ -------------4 分

（3）

X	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

---------------6 分

（4）

X+Y	2	3	4	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$

------------------------8 分

(5) $P(Y=1|X=2)=\frac{1}{2};P(Y=2|X=2)=\frac{1}{3};P(Y=3|X=2)=\frac{1}{6}$---------------10 分

六、（6 分）

解：设ξ表示用电的用户数，需要至少有 k 千瓦发电量，则$\xi\sim \boldsymbol{b}(10000,0.9)$，

$\boldsymbol{E}\xi=10000\times 0.9=9000,\boldsymbol{D}\xi=10000\times 0.9\times 0.1=900$， -------------2 分

由中心极限定理得：$\boldsymbol{P}\left\{\xi\le\frac{\boldsymbol{k}}{0.2}\right\}\ge 0.95$，-----------4 分

即 $\boldsymbol{P}\left\{\frac{\xi-9000}{\sqrt{900}}\le\frac{5\boldsymbol{k}-9000}{\sqrt{900}}\right\}\ge 0.95$ ---------5 分

$$\Phi(\frac{5\boldsymbol{k}-9000}{\sqrt{900}})\ge 0.95 \qquad \Rightarrow \frac{5\boldsymbol{k}-9000}{\sqrt{900}}\ge 1.65 \quad \Rightarrow \boldsymbol{k}\ge 1809.9$$

即需要供应 1809.9（或 1810）千瓦的电才能保证供应。---------------6 分

七、（8 分）

解：（1） $1=\iint f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}cx^2ydy=\frac{4c}{21}$--------------------2 分

$\Rightarrow c=\frac{21}{4}$ -------------------3 分

（2） $f_X(x)=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy=\frac{21}{8}x^2(1-x^4),-1<x<1\\ 0,else\end{cases}$,----------------5 分

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2ydx=\frac{7}{2}y^{5/2},0<y<1\\ 0,else\end{cases}$$ ------------------7 分

（3） $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\Rightarrow$ 不独立 ------------------8 分

八、（10 分）

解：（1）矩估计：$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1\beta x^\beta dx=\frac{\beta}{\beta+1}$ -----------------1 分

令 $EX=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，即 $\frac{\beta}{\beta+1}=\overline{X}$，得： ------------2 分

$\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ -------------3 分

(2) 似然估计：

似然函数为：$L(\lambda)=\lambda^n\alpha^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\alpha-1}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}$ ---------------------------5 分

取对数：$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda+\ln\left(\alpha^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\alpha-1}\right)-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha$ ----------------------6 分

求导：$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha=0$ ------------------------8 分

得到估计量为：$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^\alpha}$ -----------------------10 分

九、（12 分）解： 在 $\alpha=0.05$ 下检验：

设两种产量分别为 x,y，且设 $x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

(1)先在 $\alpha=0.05$ 下检验：

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_1^2$， $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$； ------------------1 分

取检验统计量为：$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$， -----------------2 分

则拒绝域为：$C=\left\{F\le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F\ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}$ -------------------3 分

已知 $n_1 = n_2 = 8, \alpha = 0.05$，经计算得：

$\overline{x} = 81.625, \overline{y} = 75.875, s_1^2 = 145.6964, s_2^2 = 102.125, F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = \dfrac{145.6964}{102.125} = 1.4266$ ---4 分

$F_{0.025}(7,7) = 4.99,\ F_{0.975}(7,7) = 1/F_{0.025}(7,7) = 0.002$，-----------------5 分

由于检验统计量的观察值 1.4266 没有落在拒绝域中,故接受原假设 H_0,即可以认为两个总体的方差没有显著差异；---------------------6 分

(1)再在 $\alpha = 0.05$ 下检验：

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ -----------------7 分

取检验统计量为：$t = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{s_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$，其中 $s_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$；-----------------8 分

则拒绝域为：$C = \left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \right\}$；$t_{0.025}(14) = 2.1448$ -----------------9 分

经计算得：$s_w = 11.1315$，$|t| = 1.0331 < 2.1448 = t_{0.025}(14)$ -----------------11 分

故接受 H_0,即认为两个总体的均值没有显著差异-----------------12 分

十、（4 分）证明：设 X 表示试验成功的次数，则 $X \sim B(n,p)$；------------------1 分

$DX = np(1-p) \leq \dfrac{n}{4}$，当且仅当 $p = 1 - p$ 时等号成立。------------------2 分

所以当 $p = \dfrac{1}{2}$ 时，------------------3 分

成功次数的标准差达到最大且 $\left(\sqrt{DX}\right)_{\max} = \sqrt{\dfrac{100}{4}} = 5$ ------------------4 分