复习试卷一

一、单项选择题

1、设 4 阶矩阵 $A=[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$ ， $B=[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$ ，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且行列式 $|A|=4k,|B|=k$，则行列式 $|A+B|$ 为　（　　）

（A）　-40k　（B）　5k　（C）　40k　（D）　-5k

2、设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2+2A-3E=0$，则 $(A-2E)^{-1}=$（　　）

（A） $4(A+4E)$　（B） $\frac{1}{4}(A+4E)$　（C） $-\frac{A+4E}{5}$　（D）不能确定

3、设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,3)^T,\boldsymbol{\beta}=(1,\frac{1}{2},0)^T,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^T$,则 $|\boldsymbol{A}^{10}|=$(　　).

(A) －2　(B)　-1　(C) 0　(D)　1

4、若 A 与 B 相似，且 A 可逆，则下面说法不对的是　（　　）

(A) A 与 B 的特征值相同　(B) A 与 B 的特征向量相同

(C) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似　(D) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

5、若齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,其中 A 为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ 矩阵,则必有(　　)

(A) $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}$　(B) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{m}$　(C) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})<\boldsymbol{n}$　(D) $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{n}$

二、填空题

1、设行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，则代数余子式 $A_{11}=$ ________。

2、方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+ax_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解的充要条件是 $\boldsymbol{a}=$______。

3、已知 A 是 5×6 矩阵，且 $r(A)$=5，则 A 的列向量组必线性__________。

4、设 3 阶方阵 A 的特征值为 2，3，4，则 $|A^2+A-2E|=$________。

5、设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|4A^{-1}-A^*|=$______。

三、计算题 1、计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2、设 A、B 均为 3 阶矩阵，满足关系式 $A^{-1}BA = 6A + BA$，若

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$，求 B。

3、非齐次线性方程组 $\begin{cases} px_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + px_2 + x_3 = p \\ x_1 + x_2 + px_3 = p^2 \end{cases}$ 当 p 取何值时有解？有无穷多解时求出全部解（用导出组的基础解系表示）。

4、求下面向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

5、用正交变换把二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

化为标准形。

6、已知 $\boldsymbol{R}^3$ 的两个基 Ⅰ$: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 Ⅱ$: \beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，求基Ⅰ到基Ⅱ的过渡矩阵.

四、证明题

设 $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_s, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_s, \cdots, \beta_s = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{s-1}$，
证明：向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 有相同的秩。$(s \geq 2)$

复习试卷二

一、选择题

1. 若设行列式$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$，则 $A_{14}+2A_{24}+3A_{34}+4A_{44}=$ __________，

其中A_{i4}为行列式对应元素的代数余子式（　　）.

（A）0　　　（B)-1　　　（C)1　　　（D)$|A|$

2. 已知B为可逆阵,则$\{[(B^{-1})^T]^{-1}\}^T$=(　　).

(A)B　　　(B)B^T　　　(C)B^{-1}　　　(D)$(B^{-1})^T$

3.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是三元非齐次线性方程组 $AX=B$ 的三个解向量，

$$r(A)=2,\alpha_1+\alpha_2=(1,2,1)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2)^T,$$

则 $AX=B$ 的通解为（　　），C为任意常数.

（A）$C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$　　　（B）$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

（C）$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$　　　（D）$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4. 若齐次线性方程组$AX=0$有非零解，其中A为$m\times n$矩阵，则必有（　　）.

(A) $m<n$　(B) $r(A)<m$　(C) $r(A)<n$　(D) $r(A)=n$

5. 设n阶方阵A与B相似，则下列叙述错误的是（　）.

(A)A与B有相同的特征值　　　(B)A与B有相同的迹

(C)A与B有相等的行列式　　　(D)A与B有相同的特征向量

二、填空题

1．设A是 4 阶矩阵，A^*为A的伴随矩阵，已知$|A|=\frac{1}{3}$，则$|(3A)^{-1}-3A^*|=$____.

2. 设 A,B 为三阶方阵，且满足 $AB=2A+B$，则 $(A-E)^{-1}=$________.

3. 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_1-x_3=a_3 \end{cases}$ 有解，则参数 $a_i, i=1,2,3$ 满足________.

4. 已知向量组 $\alpha_i, i=1,2,3$ 是线性无关的，则向量组 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_3$ 必__________（填线性无关或者无关）。

5、设 A 是三阶方阵，1,2,3 是它的三个特征值，则 $\left|2A^2-3A+E\right|=$_______.

三、计算题

1、计算行列式 $\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 & -a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & -a_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2、设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$，且 $A^*X=A$，求 X.

3、已知向量组: $\alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$，试求

（1）该向量组的一个极大无关组;

（2）将其余向量用此极大无关组线性表出.

4、对于非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=a \\ x_1-ax_2+x_3+x_4=2 \\ 7x_1+2x_2-2x_3+4x_3=5 \\ 7x_1-x_2+x_3+5x_4=b \end{cases}$，如何选取合适的参数 a,b, 使得系数阵 A 的特征值之和为 4，且方程组有无穷多解，并用导出组的基础解系表示.

5、设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，设其对应的二次型矩阵为 A

1) 试求正交阵 P,使得在变换 $x=Py$ 下，二次型是标准型;

2）试判断 A 是否正定，说明理由。

6、已知 R^3 的两组基Ⅰ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基Ⅱ β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵 K 为

$$K=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

（1）已知 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求基 β_1,β_2,β_3。

（2）已知 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，求基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

四、证明题

设 A 是三阶奇异矩阵，满足且 $(A+2E)x=0$ 有两个线性无关的解，

1) A 的特征值，并证明 A 可对角化；

2) A 的可对角化性质，求幂次 $(A+E)^{2n}$。

复习试卷三

一、选择题

1. A, B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 的伴随矩阵 $(AB)^*=$ （　）

A. A^*B^*　　B. $|AB|A^{-1}B^{-1}$

C. $B^{-1}A^{-1}$　　D. B^*A^*

2. 三阶阵 A 的特征值是 2，-3，5，则 $|A-E|=$（　　）

（A） -16，　（B） 13　（C）-24　（D）-8

.3.设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是三元非齐次线性方程组 $AX=B$ 的三个解向量，

$$r(A)=2,\alpha_1+\alpha_2=(1,2,1)^T,\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2)^T,$$

则 $AX=B$ 的通解为（　　），C 为任意常数.

（A）$C\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

（C）$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+C\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4. A 是 n 阶方阵，若齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解，那么非齐次线性方程组 $Ax=b$（其中 b 是任一 n 维向量）一定（　）

（A）有无穷多解；（B）没有无穷多解；（C）有唯一解；（D）没有唯一解。

5、设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \text{ 与` } \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$$

相似, 则 $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=$（　　　）

(A)　8　　(B)　-4　　(C)　-8　　(D)　4

二、填空题

1．设 A 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，已知 $|A|=\frac{1}{2}$，则 $\left|(4A)^{-1}-4A^*\right|=$____.

2．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-2&3&-4&1\\0&3&4&-1\\4&1&2&-3\end{pmatrix}$, 则 $3A_{12}-4A_{22}+4A_{32}+2A_{42}=$__________.

3. $Ax=0$ 有非零解，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&x&1\\1&3&2\end{pmatrix}$，则 $x=$______________.

4. 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$, $|A|=4$; $B=\begin{pmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{pmatrix}$, $|B|=1$ 则行列式 $|A+B|=$_________.

5、已知 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，则 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=$__________________________.

三、　计算题

1、计算行列式 $\begin{vmatrix}1+a_1&1&\cdots&1&1\\1&1+a_2&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1&1+a_n\end{vmatrix}$.

2、设 $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，满足 $AB=2A+B$，求 $(A-E)^{-1}$.

3、已知向量组:$\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\-3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\6\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\12\\4\\-3\end{pmatrix}$，试求

（1）该向量组的一个极大无关组;

（2）将其余向量用此极大无关组线性表出.

4、对于非齐次线性方程组$\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=1\\x_1+kx_2+x_3=k\\x_1+x_2+kx_3=k^2\end{cases}$,如何选取合适的参数$k$,使得方程组有无穷多解，并用导出组的基础解系将其表示.

5、设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3$，设其对应的二次型矩阵$A$特征值之和为1，特征值之积为-12，试求

1）确定a,b值;

2）试求正交阵P,使得在变换$x=Py$下，二次型是标准型。

6、已知R^3的两组基Ⅰ$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基Ⅱ$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵$K$为

$$K=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

（1）已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$。

（2）已知$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

四、证明题

设A是三阶方阵，α_1,α_2是分别对应特征值-1和1的两个特征向量，若$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，求$|A|$。