第 4 章　随机变量的数字特征

4.1　内容提要

4.1.1　数学期望

1. 数学期望的概念

数学期望是刻画随机变量取值集中位置或平均水平的最基本的数字特征. 在实际应用中, 对于产量、产值、利税等指标希望有较高的数学期望, 而成本、原材料消耗等指标当然要求有较低的期望值.

2. 数学期望的计算公式

当离散型随机变量给出分布列 $P\{X=x_i\}=p_i$, $i=1,2\cdots$, 连续型随机变量给出分布密度 $f(x)$ 之后, 数学期望的计算公式(定义)是:

$$E(X)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i p_i, & X\text{ 为离散型随机变量,}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x, & X\text{ 为连续型随机变量.}\end{cases}$$

作为定义, 上述表达式中的求和、积分在理论上都应有绝对收敛的要求, 由于实际应用中条件收敛的情况并不多见, 因而通常做题时免去了绝对收敛的考察. 必须指出, 今后凡涉及包括矩在内的数字特征给出定义时也都应有绝对收敛的要求, 到时不再一一说明.

二维随机变量的数学期望, 原则上可在求出边际分布列(密度)后按一维情形处理, 也可在令 $f(X,Y)=X$ 或 $f(X,Y)=Y$ 之后, 按随机变量函数的数学期望表出, 即:

$$E(X)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_i p_{ij}, & X,Y\text{为离散型随机变量,}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & X,Y\text{为连续型随机变量,}\end{cases}$$

$$E(Y)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}y_j p_{ij}, & X,Y\text{为离散型随机变量,}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & X,Y\text{为连续型随机变量.}\end{cases}$$

3. 随机变量函数的数学期望计算公式

贯穿数字特征讨论的全过程, 起着重要作用的是涉及随机变量函数的数学期望的四个公

式.

（1） 设 X 是一维离散型随机变量，$f(x)$ 是连续函数，X 的分布列为:

$$P\{X=x_i\}=p_i\,,\qquad i=1,2,3,\cdots,$$

则随机变量函数 $Y=f(X)$ 的数学期望为:

$$E(Y)=Ef(X)=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)p_i\,.$$

（2） 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，$f(x,y)$ 是二元连续函数, 且 (X,Y) 的联合分布列为:

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\qquad i,j=1,2,3,\cdots,$$

则随机变量函数 $Z=f(X,Y)$ 的数学期望为:

$$E(Z)=E[f(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}f(x_i,y_j)p_{ij}\,.$$

（3）设 X 是一维连续型随机变量, 其概率密度为 $f(x)$，$g(x)$ 是连续函数, 则随机变量函数 $Y=g(X)$ 的数学期望为:

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x\,.$$

（4） 设 (X,Y) 是二维连续型随机变量, 其联合概率密度为 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 是二元连续函数, 则随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的数学期望为:

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

4. 数学期望的性质

（1） 线性性质

$E(C)=C$, 其中 C 为任意常数;

$E(kX\pm C)=kE(X)\pm C$, 其中 k,C 为任意常数;

$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$；

⑵ $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)+\mathrm{cov}(X,Y)$.

特别地, 当 X,Y 相互独立时, 有 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$.

4.1.2　方差

1. 方差的概念

方差是描述随机变量取值集中(或分散)程度的基本数字特征.

较大的方差 $D(X)$ 说明 X 的取值相对于 $E(X)$ 较为分散. 以显示差异性为目的的试验希望有较大的方差. 例如, 选拔人才的考试只有在较大方差的情形下, 才能实现好中选优的目的.

较小的方差 $D(X)$ 说明 X 的取值相对于 $E(X)$ 较为集中. 以稳定性为目的的试验希望有较小的方差. 例如, 对质量指标的掌握总是以较高的期望和较小的方差为努力目标.

2. 方差的计算公式

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

3. 方差的性质

(1) $D(C)=0$, 其中 C 为任意常数;

(2) $D(kX\pm c)=k^2D(X)$, 其中 k,C 为任意常数;

(3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$.

特别地, 当 X,Y 相互独立时, 有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

4.1.3 协方差与相关系数

1. 矩的概念

设 X 和 Y 为随机变量, k 和 l 是正整数.

如果 X^k 的数学期望存在, 则称 $E(X^k)$ 为随机变量 X 的 k 阶原点矩, 记作 μ_k, 即

$$\mu_k=E(X^k),\qquad k=1,2,\cdots;$$

如果 $[X-E(X)]^k$ 的数学期望存在, 则称 $E[X-E(X)]^k$ 为随机变量 X 的 k 阶中心矩, 记作 v_k, 即

$$v_k=E[X-E(X)]^k,\quad k=1,2,\cdots;$$

如果 X^kY^l 的数学期望存在, 则称 $E(X^kY^l)$ 为随机变量 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩.

如果 $[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l$ 的数学期望存在, 则称 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$ 为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

2. 协方差与相关系数的概念

协方差与相关系数是反映两个随机变量之间相互关联程度的数字特征.

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y),$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}.$$

3. 协方差的性质

(1) $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$;

(2) 对任意实数 a,b,c,d 有: $\operatorname{cov}(aX+c,bY+d)=ab\operatorname{cov}(X,Y)$;

(3) $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$;

(4) 若随机变量 X,Y 相互独立, 则 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$.

4. 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}|\le 1$.

(2) X,Y 以概率 1 呈线性相关 $\Leftrightarrow |\rho_{XY}|=1$ (称 X,Y 完全相关).

(3) X,Y 相互独立 $\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow \rho_{XY}=0$ (称 X,Y 不相关).

这里需要注意的是, 其逆命题未必成立. 特别地, 当 (X,Y) 为二维正态变量时, X,Y 相互独立 $\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$.

4.1.4 常用分布的数学期望与方差

随机变量的数学期望、方差由随机变量的分布完全确定, 其数值常常与分布的参数有关.

对于六个常用的分布族, 我们将它们的分布列或分布密度及其所含参数、数学期望、方差等一并列举在表 4.1 中.

表 4.1 常用分布表

分布名称	记号	分布列或分布密度	数学期望	方差
0-1 分布	$B(1,p)$	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$ $(k=0,1;0<p<1)$	p	$p(1-p)$
二项分布	$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,2\cdots,n,0<p<1,$ n 为自然数)	np	$np(1-p)$
泊松分布	$P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}!$ $(k=0,1,2\cdots,\lambda>0)$	λ	λ
均匀分布	$U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & 其他\end{cases}$ (a,b 均为有限数)	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $(\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	$\phi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $(-\infty<x<\infty;-\infty<\mu<\infty,$ $\sigma>0)$	μ	σ^2

4.1.5　切比雪夫不等式

设 X 是一随机变量, 数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在. 对任给常数 $\varepsilon>0$, 有

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^{2}},$$

或

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq1-\frac{D(X)}{\varepsilon^{2}}.$$

4.2 习题详解

4.1 练习题

1. 填空题

(1) 将 3 只球放入 3 只盒子中去, 设每只球落入各个盒子是等可能的, 则有球的盒子数 X 的数学期望 $E(X)=$________.

解　X 的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$

由数学期望的定义知, $E(X)=1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{2}{9}=\frac{19}{9}$.

(2) 已知随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布; 随机变量

$$Y=\begin{cases}1, & X>0,\\ 0, & X=0,\\ -1, & X<0,\end{cases}$$

则 $E(Y)=$________.

解　由题设可知 Y 的分布律为

$$P(Y=1)=P(X>0)=\frac{2}{3},\ P(Y=0)=P(X=0)=0,\ P(Y=-1)=P(X<0)=\frac{1}{3},$$

故由数学期望的定义有, $E(Y)=-1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

2. 选择题

(1) 已知随机变量 X 与 Y 均服从 0-1 分布 $B(1,\frac{3}{4})$, 如果 $E(XY)=\frac{5}{8}$, 则 $P\{X+Y$

$\le 1\} =$（　　）.

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{2}{8}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{4}{8}$

解　由题意知，$E(XY)=P\{X=1,Y=1\}=\frac{5}{8}$, 故

$$P\{X+Y\le 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-P\{X=1,Y=1\}=\frac{3}{8},$$

故本题应选 C.

（2）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$

则 $Y=\frac{1}{X}$ 的数学期望 $E(Y)=$（　　）.

A. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$　　B. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　　C. $\sqrt{\pi}$　　D. $\sqrt{2\pi}$

解　$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, 故本题应选 A.

4.2 练习题

1. 填空题

（1）设随机变量 X 与 Y 相互独立同分布, 其中 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

则 $D(X-Y)=$__________.

解　由题设得,

$$E(X)=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad E(X^2)=\int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18},$$

再由 X 与 Y 相互独立同分布知,

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)=\frac{1}{9}.$$

（2）设随机变量 X 服从参数为 1 泊松分布, 则 $P\{X=E(X^2)\}=$__________.

解　有题意知, $E(X)=D(X)=\lambda=1$, 因此 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=2$, 从而

$$P\{X=E(X^2)\}=P\{X=2\}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=\frac{1}{2e}.$$

2. 设相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2,则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是(　　).

A. 8　　B. 16　　C. 28　　D. 44

解　$D(3X-2Y)=9D(X)+4D(Y)=44$.

4.3 练习题

1. 填空题

(1) 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.9,若 $Z=X-0.4$,则 Y 与 Z 的相关系数为__________.

解　根据题意,有 $D(Z)=D(X)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z,Y)&=\operatorname{cov}(X-0.4,Y)=E\{[X-0.4-E(X-0.4)][Y-E(Y)]\}\\&=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=\operatorname{cov}(X,Y),\end{aligned}$$

因此,
$$\rho_{YZ}=\frac{\operatorname{cov}(Z,Y)}{\sqrt{D(Z)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho_{XY}=0.9.$$

(2) 设 X 与 Y 分别为在 n 重伯努利试验中失败和成功的次数,则它们的相关系数 $\rho_{XY}=$__________.

解　由于 X 与 Y 满足线性关系: $Y=n-X$,故它们的相关系数 $\rho_{XY}=-1$.

2. 选择题

(1) 设随机变量 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4$,且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则(　　).

A. $P\{Y=-2X-1\}=1$　　B. $P\{Y=2X-1\}=1$

C. $P\{Y=-2X+1\}=1$　　D. $P\{Y=2X+1\}=1$

解　因相关系数的绝对值为 1,所以 X 与 Y 以概率 1 有线性关系 $Y=aX+b$,而 $\rho_{XY}=1$ 说明了 X 与 Y 正相关,即 $a>0$. 再根据题意,对 $Y=aX+b$ 两边分别取方差与数学期望,可算得 $a=2$,$b=1$,因此本题应选 D.

(2) 已知随机变量 X 与 Y 有相同的不为零的方差,则 X 与 Y 相关系数 $\rho=1$ 的充分必要条件是(　　).

A. $\operatorname{cov}(X+Y,X)=0$　　B. $\operatorname{cov}(X+Y,Y)=0$

C. $\operatorname{cov}(X+Y,X-Y)=0$　　D. $\operatorname{cov}(X-Y,X)=0$

解　依题意, $D(X)=D(Y)$,且

$$\operatorname{cov}(X-Y,X)=\operatorname{cov}(X,X)-\operatorname{cov}(Y,X)=D(X)-\operatorname{cov}(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cov}(X,Y)=D(X)\Leftrightarrow \rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=1,$$

故本题应选 D.

(3) 已知随机变量 X_1, X_2, X_3 的方差存在且不为零, 则下列命题不正确的是(　　).

A. 若 X_1 与 X_2 不相关, 则 $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$

B. 若 $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$, 则 X_1 与 X_2 不相关

C. 若 X_1, X_2, X_3 两两不相关, 则 $D(X_1+X_2+X_3)=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)$

D. 若 $D(X_1+X_2+X_3)=D(X_1)+D(X_2)+D(X_3)$, 则 X_1, X_2, X_3 两两不相关

解 对于两个随机变量 X_1 与 X_2 的情形, A 和 B 都可以推得. 但对于 $n \ge 3$ 个随机变量的情形, 两两不相关能推得 $D(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$, 但反之不行. 本题应选 D.

习题四

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	2
P	0.3	0.5	0.2

试求 $E(X)$ 和 $E(2X^2+1)$.

解 $E(X)=-1\times 0.3+0\times 0.5+2\times 0.2=0.1$.

$E(2X^2+1)=2E(X^2)+1=2[(-1)^2\times 0.3+0^2\times 0.5+2^2\times 0.2]+1=3.2$.

2. 掷一均匀骰子二次, X 为出现的最小点数, 求 $E(X)$.

解 X 的概率分布为:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

从而 $E(X)=1\times\frac{11}{36}+2\times\frac{9}{36}+3\times\frac{7}{36}+4\times\frac{5}{36}+5\times\frac{3}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{91}{36}$.

3. 一批产品共 10 件, 其中 7 件正品, 3 件次品. 每次从这批产品中任意取一件, 取后不放回, 随机变量 X 表示首次取得正品时抽取的次数, 试求 X 的数学期望 $E(X)$.

解 (1) X 的可能取值为: $1,2,3,4$, 其分布律为:

$P\{X=1\}=\frac{7}{10}$, 　　$P\{X=2\}=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$,

$P\{X=3\}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{120}$, 　　$P\{X=4\}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$,

从而所求期望为

$$E(X)=1\cdot\frac{7}{10}+2\cdot\frac{7}{30}+3\cdot\frac{7}{120}+4\cdot\frac{1}{120}=\frac{11}{8}.$$

注 对于实际问题求数学期望，一般先给出分布律或者概率密度，然后由定义去求.

4. 某产品的次品率为 0.1，每次随机抽取 10 件产品进行检验，如发现其中的次品数多于 1，就去调整设备. 若检验员每天检验 4 次，以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 $E(X)$.

解 设 Y 表示一次检验中，检测到的次品数，则 $Y\sim B(10,0.1)$，此时，检验员需要调整设备的概率为

$$P\{Y\geq 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-(0.9)^{10}-C_{10}^{1}(0.9)^{9}\cdot 0.1=0.7361.$$

又设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{第}\,i\,\text{次调整设备},\\ 0, & \text{第}\,i\,\text{次不调整设备},\end{cases}$（$i=1,2,3,4$），其分布律为

$$P\{X_i=1\}=P\{Y\geq 2\}=0.2639,\qquad P\{X_i=0\}=P\{Y=0\}+P\{Y=1\}=0.7361.$$

此时，$X=\sum\limits_{i=1}^{4}X_i$，从而

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}E(X_i)=4E(X_i)=4\times 0.2639=1.0556.$$

5. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\leq 0.5\}$ 出现的次数，试求 $E(Y)$.

解 $P\{X\leq 0.5\}=\int_0^{0.5}2x\,\mathrm{d}x=0.25$，

而 $Y\sim B(3,0.25)$，从而

$$E(Y)=np=3\times 0.25=0.75.$$

6. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生二次故障获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元，求一周内的平均利润是多少？

解 设 X 表示一周内发生故障的次数，Y 表示一周内的利润，则 $X\sim B(5,0.2)$，且

$$Y=\begin{cases}10, & X=0,\\ 5, & X=1,\\ 0, & X=2,\\ -2, & X\geq 3.\end{cases}$$

因此，

$$E(Y)=10P\{X=0\}+5P\{X=1\}+0P\{X=2\}-2P(X\geq 3)$$

$$=10\times 0.8^5+5\times C_5^1\times 0.8^4\times 0.2-2(1-0.8^5-C_5^1\times 0.8^4\times 0.2-C_5^2\times 0.8^3\times 0.2^2)$$

$$\approx 5.216 \quad (\text{万元}).$$

7. 已知随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $F(1)=\dfrac{1}{4}$, 若

$$Y=\begin{cases}1, & X>1,\\ 2, & X=1,\\ 3, & X<1,\end{cases}$$

求 $E(Y)$.

解 因为 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 所以 $P\{X=1\}=0$, 则 Y 的分布律为

$$P\{Y=1\}=P\{X>1\}=1-P\{X\le 1\}=1-F(1)=\frac{3}{4},$$

$$P\{Y=2\}=P\{X=1\}=0,$$

$$P\{Y=3\}=P\{X<1\}=P\{X\le 1\}-P\{X=1\}=F(1)-0=\frac{1}{4},$$

从而

$$E(Y)=1\times\frac{3}{4}+3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}.$$

8. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

试求 $E(X)$ 和 $E(\mathrm{e}^{-X})$.

解 由数学期望的定义知

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=0-2x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=0-2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2,$$

$$E(\mathrm{e}^{-X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$=0-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{4}.$$

9. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos x, & |x|<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $E(X)$ 和 $E(X^2)$.

解 数学期望的定义及被积函数的对称性知

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,\mathrm{d}x=x^2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2}{4}+2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-2.$$

10. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$, 试求 $E(-2\ln X)$.

解 $E(-2\ln X)=\int_{-\infty}^{+\infty}-2\ln x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1-2\ln x\cdot 1\mathrm{d}x=2$.

11. 游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光, 电梯于每个整点的第 5 分钟. 25 分钟和 55 分钟从底层起行. 假设有一游客在早上八点的第 X 分钟到达底层等候电梯, 且 $X\sim U[0,60]$, 求该游客等候时间的数学期望.

分析 求等候时间的期望的关键在于写出等候时间的随机变量, 它必然是到达时刻 X 的函数 $g(X)$, 而 X 是在 $[0,60]$ 上的均匀分布.

解 由题意知, $X\sim U[0,60]$, 其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{60}, & 0\le x\le 60,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

设 Y 是游客等候电梯的时间(单位:分), 则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & 0\le X\le 5,\\ 25-X, & 5<X\le 25,\\ 55-X, & 25<X\le 55,\\ 60-X+5, & 55<X\le 60.\end{cases}$$

因此,

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{60}\left(\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{60}\left(5\times5+25\times20+55\times30+65\times5-\int_0^{60}x\,\mathrm{d}x\right)=\frac{35}{3}.$$

12. 从数字 $0,1,\cdots,n$ 中无放回取出二个数, 求这二个数差的绝对值的数学期望.

解 设 X, Y 分别表示第一次, 第二次取到的球的数字. 则 (X,Y) 的联合分布律为:

$$P\{X=i, Y=j\}=\frac{1}{n(n+1)}, \quad 其中 i, j=0,1,\cdots,n, 且 i\neq j.$$

设 $Z=|X-Y|$, 其分布律为:

$$P\{Z=i\}=P\{|X-Y|\}=2\cdot(n+1-i)\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2(n+1-i)}{n(n+1)}, \quad 其中 i=1,\cdots,n,$$

故所求的数学期望为

$$E(Z)=2\sum_{i=1}^{n} i\cdot\frac{n+1-i}{n(n+1)}=2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]=\frac{n+2}{3}.$$

13. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

试求 $E(X)$ 和 $E(XY)$.

解　X 的边缘分布律为:

X	0	1
P	$\frac{11}{16}$	$\frac{5}{16}$

从而

$$E(X)=\frac{5}{16}, \qquad E(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij}=1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0.$$

14. 设二维随机变量 X 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}15xy^2, & 0\le y\le x\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $E(XY), E(X^2+Y^2)$

解　由定理 4.1.2 有

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x xy\cdot 15xy^2\mathrm{d}y=\frac{15}{4}\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=\frac{15}{28},$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x(x^2+y^2)15xy^2\mathrm{d}y=8\int_0^1x^6\mathrm{d}x=\frac{8}{7}.$$

15. 假设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求$E(X+Y), E(XY^2)$.

解 $$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{|y|<x\\0<x<1}}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\substack{|y|<x\\0<x<1}}x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{|y|<x\\0<x<1}}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y+0=2\int_0^1x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

同理,

$$E(XY^2)=\iint\limits_{\substack{|y|<x\\0<x<1}}xy^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1x\,\mathrm{d}x\int_0^xy^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1x^4\,\mathrm{d}x=\frac{2}{15}.$$

注 这里,在计算二重积分的时候,运用了被积函数的对称性.

16. 在区间$[0,1]$上随机取二点,分别记为X,Y,试求$E(\frac{X^2}{\sqrt{Y}})$.

解 X,Y均服从$[0,1]$上的均匀分布,且它们相互独立.

$$X\sim f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad Y\sim f(y)=\begin{cases}1, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(X,Y)的联合密度函数为

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$E(\frac{X^2}{\sqrt{Y}})=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{y}}\cdot\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{y}}\cdot 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1x^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}.$$

17. 设随机变量X, Y独立同分布,均服从$U(0,1)$,求$Z=\max\{X,Y\}$的数学期望.

解 由题意知, X的分布函数$F(x)$与密度函数$f(x)$依次为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x & 0<x<1,\\ 1 & x\ge 1,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

由于 X , Y 独立同分布, 根据第三章定理 3. 7. 4 知, Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=2F(z)\cdot f(z)=\begin{cases}2z, & 0<z<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

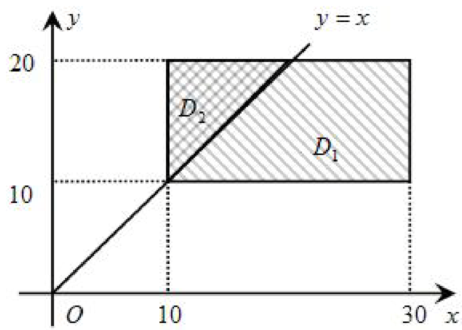
其数学期望为

$$E(Z)=\int_0^1 2z^2\mathrm{d}z=\frac{2}{3}.$$

18. 设电力公司每月可以供应某工厂的电力 $X\sim U(10,30)$（单位: $10^4\,KW$）, 而该厂每月实际需要的电力 $Y\sim U(10,20)$（单位: $10^4\,KW$）. 如果该厂能从电力公司得到足够电力, 则每 $10^4\,KW$ 电可以产生 30 万元的利润；若该厂不能从电力公司得到足够电力, 则不足部分由工厂通过其它途经解决, 由其它途经得到的电力每 $10^4\,KW$ 电只能产生10万元的利润. 求该厂每个月的平均利润.

解　由于 X 与 Y 独立, 易知 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{200}, & 10\le x\le 30, 10\le y\le 20,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$



该厂的利润函数为

$$g(X,Y)=\begin{cases}30Y, & Y\le X,\\ 30X+10(Y-X), & Y>X,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}30Y, & Y\le X,\\ 20X+10Y, & Y>X,\end{cases}$$

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_1}30y\cdot\frac{1}{200}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(20x+10y)\cdot\frac{1}{200}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{20}\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_y^{30}y\,\mathrm{d}x+\frac{1}{20}\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{10}^{y}(2x+y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{20}\int_{10}^{20}(30y-y^2)\,\mathrm{d}y+\frac{1}{20}\int_{10}^{20}(2y^2-10y-100)\,\mathrm{d}y$$

$$=325+\frac{325}{3}=\frac{1300}{3}.$$

即该厂每个月的平均利润为 $\dfrac{1300}{3}$ 万元.

19. 设在 N 个产品, 有 M 个正品, $N-M$ 个次品. 从中无放回取出 $n\ (n\le M)$ 个产品, 记其中含有的正品数为 X , 求 X 的数学期望.

解 设 $X_i=\begin{cases}1, & \text{取出的第}i\text{个产品为正品},\\ 0, & \text{取出的第}i\text{个产品为次品},\end{cases}$ $i=1,2,\cdots,n$,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 其具有相同的分布,其分布律为

X_i	0	1
P	$\dfrac{N-M}{N}$	$\dfrac{M}{N}$

相应的数学期望为 $E(X_i)=\dfrac{M}{N}$. 此时, 取出的 n 个产品中含有的正品数 $X=\sum\limits_{1}^{n}X_i$, 所求的数学期望为

$$E(X)=E(\sum_{1}^{n}X_i)=\sum_{1}^{n}E(X_i)=\frac{nM}{N}.$$

注 某些随机变量的数学期望如用定义求会比较麻烦, 甚至求不出来. 由本例可以看出, 很多随机变量可以分解为有限个随机变量之和, 如果这些随机变量的数学期望易于求出, 则所求随机变量的数学期望就可以转化为这些随机变量的数学期望之和. 读者应学会这一技巧.

20. 设随机变量 X 所有可能的取值为非负的整数, 试证 $E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X\ge k\}$.

解 设 X 的分布律为 $P\{X=k\}=p_k\quad(k=1,2,\cdots)$, 根据分布律的性质, 有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$, 利用级数收敛的性质, 知

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p_k=p_1+2p_2+3p_3+4p_4\cdots\\&=(p_1+p_2+p_3+\cdots)+(p_2+p_3+p_4+\cdots)+(p_3+p_4+\cdots)+\cdots\\&=P\{X\ge 1\}+P\{X\ge 2\}+P\{X\ge 3\}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X\ge k\}.\end{aligned}$$

21. 一台设备由三大部件构成, 在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10 , 0.20 和 0.30 . 假设各部件的状态相互独立, 以 X 表示同时需要调整的部件数, 试求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

分析 若题目只问数字特征, 则可以考虑是否越过求随机变量(离散型)的分布列.

解 设这三个部件依次为第 1, 2, 3 个部件, A_i 表示第 i 个部件需调整 $(i=1,\ 2,3)$, 则 A_1, A_2, A_3 相互独立. 因此, $P(A_1)=0.1$, $P(A_2)=0.2$, $P(A_3)=0.3$. 引入

$$X_i=\begin{cases}1, & A_i\text{发生},\\ 0, & A_i\text{不发生},\end{cases}\qquad (i=1,2,3),$$

显然, X_1, X_2, X_3 相互独立, 从而

$$E(X_i) = 1 \cdot P(A_i) = \frac{i}{10},$$

$$D(X_i) = E(X_i^2) - (EX_i)^2 = 1^2 \cdot P(A_i) - \left(\frac{i}{10}\right)^2 = \frac{i(10-i)}{100} \qquad (i = 1,2,3).$$

而 $X = X_1 + X_2 + X_3$, 故

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = 0.6,$$

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + D(X_3) = \frac{10-1}{100} + \frac{2(10-2)}{100} + \frac{3(10-3)}{100} = 0.46.$$

注　本题主要考查期望, 方差的计算性质. 解中不求 X 的分布列而引入 X_i, 请体会掌握.

22. 一辆汽车沿一街道行驶, 需要通过三个均设有红绿信号灯的路口. 假设每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立, 且红、绿两种信号显示的时间相等, 以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数, 求 $D(X)$.

解　X 的可能取值为 0, 1, 2, 3. 设 A_i 表示汽车在第 i 个路口遇到红灯 $(i = 1,\ 2,3)$, 则 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$, 且 A_1, A_2, A_3 相互独立. 于是

$$P\{X = 0\} = P(A_1) = \frac{1}{2},$$

$$P\{X = 1\} = P(\overline{A_1}A_2) = P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X = 2\} = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X = 3\} = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

从而

$$E(X) = \sum_{i=0}^{3} i\,P\{X = i\} = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

$$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} i^2\,P\{X = i\} = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 9 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{8},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{15}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{71}{64}.$$

注　本题中 $\{X = 3\}$ 表示{三个路口都遇到绿灯} (将来迟早要遇红灯), 不要漏掉.

23. 流水生产线上每个产品不合格的概率为 p $(0 < p < 1)$, 各产品合格与否相互独立, 当

出现k个不合格产品时即停机检修. 设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为X, 求X的数学期望$E(X)$和方差$D(X)$.

解法 1 设X_i表示自第$i-1$个不合格后到出现第i个不合格品时生产的产品数, $i=1,2,\cdots,k$, 则$X=\sum_{i=1}^{k}X_i$.

由生产的独立性可知$X_1,X_2,\cdots,X_n$也相互独立, 且同分布, 每个X_i都服从几何分布(首次发生某结果的试验次数), 即

$$p\{X_i=n\}=(1-p)^{n-1}p,\quad n=1,2,\cdots.$$

由此可得, 对$i=1,2,\cdots,k$有

$$E(X_i)=\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^{n-1}p=p(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'_{x=1-p}=p\cdot(\frac{1}{1-x})'_{x=1-p}=\frac{1}{p},$$

$$E(X_i^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(1-p)^{n-1}p=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)(1-p)^{n-1}p+\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^{n-1}p$$

$$=p(1-p)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)''_{x=1-p}+p(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)'_{x=1-p}$$

$$=p(1-p)\cdot\left.\frac{2}{(1-x)^3}\right|_{x=1-p}+p\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)^2_{x=1-p}=\frac{2-p}{p^2},$$

$$D(X_i)=\frac{2-p}{p^2}-\left(\frac{1}{p}\right)^2=\frac{1-p}{p^2}.$$

由性质得(其中计算方差时利用到独立性):

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{k}{p},\qquad D(X)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{k(1-p)}{p^2}.$$

解法 2 X的分布律可求得为:

$$P\{X=n\}=C_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k},\quad n=k,k+1,\cdots.$$

设Y表示出现$k+1$个不合格品时生产的产品个数, 则Y的分布律为

$$P\{Y=m\}=C_{m-1}^{k}p^{k+1}(1-p)^{m-k-1},\quad m=k+1,\cdots.$$

由分布律的性质可得

$$\sum_{m=k+1}^{\infty}C_{m-1}^{k}p^{k+1}(1-p)^{m-k-1}=1,$$

若记$m-1=n$, 则此式也就是

$$\sum_{n=k}^{\infty}C_n^k p^{k+1}(1-p)^{n-k}=1, \tag{1}$$

类似的方法可得

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_{n+1}^{k+1} p^{k+2}(1-p)^{n-k} = 1, \tag{2}$$

(1)与(2)两个和式将在下面的计算中采用.

$$E(X) = \sum_{n=k}^{\infty} nC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{k}{p} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{k+1}(1-p)^{n-k} = \frac{k}{p} \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^{k+1}(1-p)^{n-k} = \frac{k}{p}.$$

$$E(X^2) = \sum_{n=k}^{\infty} n^2 C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} n(n+1) C_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{n=k}^{\infty} nC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{k(k+1)}{p^2} \sum_{n=k}^{\infty} C_{n+1}^{k+1} p^{k+2}(1-p)^{n-k} - \frac{k}{p} \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^{k+1}(1-p)^{n-k} = \frac{k(k+1)}{p^2} - \frac{k}{p}.$$

从而

$$E(X) = \frac{k}{p}, \qquad D(X) = \frac{k(k+1)}{p^2} - \frac{k}{p} - \frac{k^2}{p^2} = \frac{k(1-p)}{p^2}.$$

24. 设随机变量 X 满足 $E(X) = D(X) = \lambda$, 已知 $E(X-1)(X-2) = 1$, 求 λ.

解 根据题设, 有

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \lambda + \lambda^2,$$

$$E[(X-1)(X-2)] = E[X^2 - 3X + 2] = \lambda^2 + \lambda - 3\lambda + 2 = 1,$$

从而求得 $\lambda = 1$.

25. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试求 $D(X)$.

解 由方差的定义知,

$$E(X) = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_0^2 = \frac{3}{2}, \qquad E(X^2) = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}x^5\Big|_0^2 = \frac{12}{5},$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{3}{20}.$$

26. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

且 $E(X)=\dfrac{3}{5}$. 试求(1)常数 a,b；(2) $D(X)$.

解 (1) 由密度函数的性质及数学期望的定义知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (a+bx^2)\mathrm{d}x=a+\frac{1}{3}b=1,$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(a+bx^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b=\frac{3}{5},$$

从而解得, $a=\dfrac{3}{5},\ b=\dfrac{6}{5}$.

(2) $E(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2(\frac{3}{5}+\frac{6}{5}x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}+\frac{6}{25}=\frac{11}{25}$,

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{11}{25}-\frac{9}{25}=\frac{2}{25}.$$

27. 设随机变量 $X\sim U(-1,1)$, 试求随机变量 $Y=\sin X$ 和 $Z=|X|$ 的方差.

解 (1) $X\sim f_X(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$

函数 $y=\sin x$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增, 处处可导, 且 $y'\neq 0$, 则随机变量 $Y=\sin X$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\arcsin y)\cdot|(\arcsin y)'|, & -\sin 1<y<\sin 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sin 1<y<\sin 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$E(Y)=\displaystyle\int_{-\sin 1}^{\sin 1}\frac{y}{2\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=0$, (被积函数为奇函数, 且积分区域关于原点对称)

$$E(Y^2)=\int_{-\sin 1}^{\sin 1}\frac{y^2}{2\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sin 1}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{令}y=\sin t}{=}\int_0^1 \sin^2 t\mathrm{d}t=(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\cos 2t)\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2,$$

从而 $D(Y)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2$.

(2) $E(Z)=\int_{-1}^{1}|x|\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\quad E(Z^2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$,

从而 $D(Z)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

28. 设随机变量 X,Y 独立同分布, 其共同的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求 $Z=\max\{X,Y\}$ 的密度函数, 数学期望和方差.

解 因为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{\max\{X,Y\}\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=\int_{-\infty}^{z}f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{-\infty}^{z}f(y)\mathrm{d}y,$$

当 $z\le 0$ 时, $F_Z(z)=0$,

当 $0<z<1$ 时, $F_Z(z)=\int_0^z 2x\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^z 2y\,\mathrm{d}y=z^4$,

当 $z\ge 1$ 时, $F_Z(z)=\int_0^1 2x\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 2y\,\mathrm{d}y=1$.

所以 $$f_Z(z)=\frac{\mathrm{d}F_Z(z)}{\mathrm{d}z}=\begin{cases}4z^3, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而 $$E(Z)=\int_0^1 z\cdot 4z^3\,\mathrm{d}z=\frac{4}{5},\qquad E(Z^2)=\int_0^1 z^2\cdot 4z^3\,\mathrm{d}z=\frac{2}{3},$$

$$D(Z)=\frac{2}{3}-\frac{16}{25}=\frac{2}{75}.$$

29. 已知随机变量 $X\sim N(-3,1),Y\sim N(2,1)$, 且 X,Y 相互独立. 设随机变量 $Z=X-2Y+7$, 求 $D(Z)$.

解 由方差的性质及独立性知

$$D(Z)=D(X-2Y+7)=D(X)+4D(Y)=1+4=5.$$

30. 设两个随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从均值为 0, 方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布, 求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

解 由题设条件知 $X-Y\sim N(0,1)$, 于是

$$E|X-Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$E|X-Y|^2=E(X-Y)^2=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2=1,$$

故 $$D|X-Y|=1-\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2=\frac{\pi-2}{\pi}.$$

31. 设随机变量 X 的方差为 1, 试根据切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X-E(X)|\ge 2\}$.

解 由切比雪夫不等式得

$$P\{|X-E(X)|\ge 2\}\le\frac{D(X)}{2^2}=\frac{1}{4}.$$

32. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 -1 和 1, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为 -0.5, 试根据切比雪夫不等式估计概率 $P\{|X+Y|\ge 5\}$.

解 由题意知,

$$E(X+Y)=-1+1=0,$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}=1+4-2\times0.5\times\sqrt{1\times4}=3,$$

故

$$P\{|X+Y|\ge 5\}\le\frac{D(X+Y)}{5^2}=\frac{3}{5^2}=\frac{3}{25}.$$

33. 二维随机变量 (X,Y) 的分布律见第 13 题, 求 X 和 Y 的协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$ 与相关系数 ρ_{XY}.

解 $$E(X)=\sum_{i=1}^{2}x_i p_{i\cdot}=0\times\frac{11}{16}+1\times\frac{5}{16}=\frac{5}{16},$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{2}x_i^2 p_{i\cdot}=0^2\times\frac{11}{16}+1^2\times\frac{5}{16}=\frac{5}{16},$$

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{3}y_j p_{\cdot j}=(-1)\times\frac{1}{2}+0\times\frac{3}{16}+1\times\frac{5}{16}=-\frac{3}{16},$$

$$E(Y^2)=\sum_{j=1}^{3}y_j^2 p_{\cdot j}=(-1)^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{5}{16}=\frac{13}{16},$$

$$E(XY)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j p_{ij}=1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times1\times\frac{1}{8}=0,$$

$$D(X)=\frac{5}{16}-\left(\frac{5}{16}\right)^2=\frac{55}{256},\qquad D(Y)=\frac{13}{16}-\left(-\frac{3}{16}\right)^2=\frac{199}{256}.$$

从而

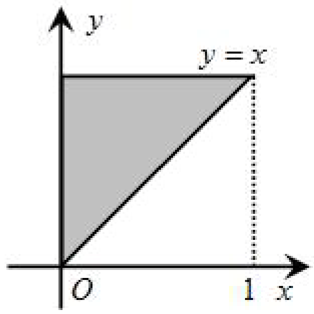
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-\frac{5}{16}\times(-\frac{3}{16})=\frac{15}{256}\approx0.0586,$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{15}{\sqrt{10945}}\approx0.1434.$$

34. 设随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求X和Y的协方差$\operatorname{cov}(X,Y)$与相关系数ρ_{XY}.



解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 8x^2y\,\mathrm{d}y=4\int_0^1(x^2-x^4)\mathrm{d}x=\frac{8}{15},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 8x^3y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3},$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 8xy^2\,\mathrm{d}y=\frac{4}{5},$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 8xy^3\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 8x^2y^2\,\mathrm{d}y=\frac{4}{9},$$

$$D(X)=\frac{1}{3}-\left(\frac{8}{15}\right)^2=\frac{11}{225},\qquad D(Y)=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75},$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{9}-\frac{8}{15}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{225}\approx 0.0178,$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{11}{225}}\sqrt{\frac{2}{75}}}=\frac{4}{\sqrt{66}}\approx 0.4924.$$

35. 设随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

试求X和Y的协方差$\operatorname{cov}(X,Y)$与相关系数ρ_{XY}.

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=2\cdot 1=2,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=6,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=1,$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=2,$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=2,$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=2-2=0,$$

$$\rho_{XY}=0.$$

36. 设随机变量 X,Y 相互独立且都服从 $U(0,1)$，求随机变量 $U=X+2Y$ 和 $V=2X-Y$ 的相关系数.

解 由于 X,Y 相互独立, 且都服从 $U(0,1)$，则 $D(X)=D(Y)=\dfrac{1}{12}$, $\mathrm{cov}(X,Y)=0$,

利用方差与协方差的性质有,

$$D(U)=D(X+2Y)=D(X)+4D(Y)+4\,\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+0=\frac{5}{12},$$

$$D(V)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\,\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-0=\frac{5}{12},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(U,V)&=\mathrm{cov}(X+2Y,2X-Y)\\&=\mathrm{cov}(X,2X)+\mathrm{cov}(2Y,2X)+\mathrm{cov}(X,-Y)+\mathrm{cov}(2Y,-Y)\\&=2D(X)+3\,\mathrm{cov}(X,Y)-2D(Y)=2\cdot\frac{1}{12}+0-2\cdot\frac{1}{12}=0,\end{aligned}$$

从而 $\rho_{XY}=0$.

37. 设随机变量 X,Y 的方差都是 2, 相关系数为 0.25, 求随机变量 $U=2X+Y$ 和 $V=2X-Y$ 的相关系数.

解

$$\begin{aligned}D(U)&=D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)+4\,\mathrm{cov}(X,Y)\\&=4D(X)+D(Y)+4\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=4\times2+2+4\times0.25\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=12,\end{aligned}$$

$$D(V)=4D(X)+D(Y)-4\,\mathrm{cov}(X,Y)=4\times2+2-4\times0.25\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=8,$$

$$\mathrm{cov}(U,V)=\mathrm{cov}(2X+Y,2X-Y)=4D(X)-D(Y)=8-2=6,$$

从而 $\rho_{UV}=\dfrac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\dfrac{6}{\sqrt{12}\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

38. 设 X,Y 是二个随机变量, 已知 $D(X)=4$, $D(Y)=9$, $\rho_{XY}=0.2$，试求 $D(2X+Y)$ 和 $D(2X-Y)$.

解 $D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)+4\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=16+9+4.8=29.8$,

$$D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=16+9-4.8=20.2.$$

39. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$；

(2) 求 X 与 $|X|$ 的协方差, 并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(3) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

解 (1) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ 为偶函数, $x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ 为奇函数, 所以, 由积分性质知

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0, \text{(奇函数在对称区间上的积分值为零)},$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}(-x^2)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=(-x^2\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2.$$

(2) $\operatorname{cov}(X,|X|)=E(X|X|)-E(X)\cdot E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot|x|\cdot f(x)\mathrm{d}x$,

因为 $x\cdot|x|\cdot f(x)$ 也为奇函数, 所以 $\operatorname{cov}(X,|X|)=0$, 从而 X 与 $|X|$ 不相关.

(3) 对给定的 $0<a<+\infty$, 显然事件 $\{|X|<a\}$ 包含在事件 $\{X<a\}$ 内, 且

$$P\{X<a\}<1,\qquad P\{X<a,|X|<a\}=P\{|X|<a\},$$

但 $\qquad P\{X<a\}P\{|X|<a\}<P\{|X|<a\}$,

所以 $P\{X<a,|X|<a\}\neq P\{X<a\}P\{|X|<a\}$,

因此, X 与 $|X|$ 不独立.

注 本题涉及数学期望, 方差, 协方差, 相关系数的计算, 独立与不相关的关系, 在计算过程中, 充分运用被积函数的对称性, 大大简化了计算.

40. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,|y|<x\}$ 上的均匀分布, 求随机变量函数 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

解 D 的面积 $S_D=1$, 于是联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

从而关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\cdot\mathrm{d}y=2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

此时

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\quad E(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\quad DX=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18},$$

从而 $\quad D(Z)=4D(X)=4\times\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$.

41. 设 (X,Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y), & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $D(2X-3Y+8)$.

解 $\quad E(X)=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2 x(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1(2x^2+2x)\mathrm{d}x=\frac{5}{9},$

$$E(X^2)=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2 x^2(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1(2x^3+2x^2)\mathrm{d}x=\frac{7}{18},$$

$$E(Y)=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2 y(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1(2x+\frac{8}{3})\mathrm{d}x=\frac{11}{9},$$

$$E(Y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2 y^2(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1(\frac{8}{3}x+4)\mathrm{d}x=\frac{16}{9},$$

$$E(XY)=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2 xy(x+y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\int_0^1(2x^2+\frac{8}{3}x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$D(X)=\frac{7}{18}-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{13}{162},\qquad DY=\frac{16}{9}-\left(\frac{11}{9}\right)^2=\frac{23}{81},$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{3}-\frac{5}{9}\times\frac{11}{9}=-\frac{1}{81},$$

$$D(2X-3Y+8)=4D(X)+9D(Y)-12\,\mathrm{cov}(X,Y)=4\cdot\frac{13}{162}+9\cdot\frac{23}{81}+12\cdot\frac{1}{81}=\frac{245}{81}.$$

42. 设 A,B 是二随机事件, 随机变量

$$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{出现},\\ -1, & \text{若}A\text{不出现},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{出现},\\ -1, & \text{若}B\text{不出现},\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充要条件是 A 与 B 相互独立.

证明 由于

$$\begin{aligned}E(XY)&=1\cdot 1\cdot P(X=1,Y=1)+1\cdot(-1)\cdot P(X=1,Y=-1)\\&\quad+(-1)\cdot 1\cdot P(X=-1,Y=1)+(-1)\cdot(-1)\cdot P(X=-1,Y=-1)\\&=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}B)-P(A\overline{B})\\&=P(AB)+1-P(A\cup B)-P(B-AB)-P(A-AB)\end{aligned}$$

$$=1-2P(A)-2P(B)+4P(AB),$$

$$E(X)=1\cdot P(A)+(-1)P(\overline{A})=2P(A)-1,$$

$$E(Y)=1\cdot P(B)+(-1)P(\overline{B})=2P(B)-1,$$

故有

$$\begin{aligned} X\text{ 与 }Y\text{ 不相关} &\Leftrightarrow E(XY)=E(X)\cdot E(Y) \\ &\Leftrightarrow 1-2P(A)-2P(B)+4P(AB)=(2P(A)-1)(2P(B)-1) \\ &\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B) \\ &\Leftrightarrow A\text{ 与 }B\text{ 相互独立.} \end{aligned}$$