

多维随机变量复习题

一、填空

1. 已知 $P(X \geq 0, Y \geq 0) = \frac{3}{7}$, $P(X \geq 0) = P(Y \geq 0) = \frac{4}{7}$, 则 $P(\max\{X, Y\} \geq 0) =$ ()。

2. 设随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为: $f(x, y) = \begin{cases} k & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则 $k =$ _____,

X, Y 的边缘密度函数分别为: _____。

3. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/15	p	1/5
1	q	1/5	3/10

则当 $p =$ _____, $q =$ _____ 时 X, Y 相互独立。

4. 设随机变量 X, Y, Z 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2)$, $Y \sim N(0, 3)$, $Z \sim N(2, 1)$, 则 $2X + 3Y - Z$ 服从_____分布, $P(0 \leq 2X + 3Y - Z \leq 6) =$ _____。

5. 设 X, Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 4)$, $Y \sim U(0, 4)$, 则 $D(2X + Y) =$ _____, $D(X - 3Y) =$ _____。

6. 已知 $DX = 10, DY = 5, \rho_{X,Y} = -0.5$, 则 $D(2X + 3Y) =$ _____, $D(2X - 3Y) =$ _____。

7. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $EX =$ _____,

$DX =$ _____, $\text{cov}(X, Y) =$ _____, $X - Y$ 服从_____分布, 当 $\mu_1 = \mu_2$ 时

$E|X - Y| =$ _____。

8. 随机变量 X, Y 之间的相关系数 ρ 反映了 X, Y 之间的线性相关程度。如果存在常数 $a \neq 0, b$, 使得 $P(Y = aX + b) = 1$, 则 $|\rho| =$ ____。当____时 $\rho = 1$, 当____时 $\rho = -1$ 。

二、计算题

1. 掷均匀骰子二次, 设 X 是得偶数点数次数, Y 是得 3 点或 6 点次数, (1) 求 (X, Y) 的联合分布律和边缘分布律, (2) 判别 X, Y 是否独立? (3) 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的

分布律，(4) 求 $E(XY)$ 。

2. 设随机变量 $U \sim U(-2, 2)$ ，令

$$X = \begin{cases} -1 & U < -1 \\ 1 & U \geq -1 \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} -1 & U < 1 \\ 1 & U \geq 1 \end{cases}$$

求(1)(X, Y)的联合分布律和边缘分布律，(2) X, Y 是否独立，(3)求给定 $X=1$ 下 Y 的条件分布律，(4) $D(X+Y)$ ，(5) X, Y 的相关系数。

3. 设 X, Y 相互独立，且它们的分布律分别为： $P(X=0)=0.4$ ， $P(X=1)=0.6$ ，

$P(Y=-1)=0.4$ ， $P(Y=1)=0.6$ ，求(1)(X, Y)的联合分布律，(2) $Z=XY$ 的分布律。

4. 设(X, Y)的联合密度函数为： $f(x, y) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ，求(1)常数 k ，(2) X, Y

的边缘密度函数，(3) $P(X+Y \leq 1)$ ，(4) X, Y 是否独立，(5) $Z=X-Y$ 的密度函数，(6) X, Y 的相关系数。

5. 设 X, Y 独立同分布均服从 $N(0, \sigma^2)$ ，求 $E\sqrt{X^2+Y^2}$ 。

三、证明题

1. 设 $X \sim b(1, p_1)$ ， $Y \sim b(1, p_2)$ ，证明 X, Y 相互独立的充分必要条件是不相关。

2. 设 X, Y 独立同分布均服从 $N(0, 1)$ ，证明 $Z = X^2 + Y^2$ 服从均值为 2 的指数分布。