浙江工商大学 2015/2016 学年第 2 学期期末考试
《概率论与数理统计》试卷 A 参考答案

一、 1. $\dfrac{3}{64}$；　　2. 0.1, 0.7；　　3. 2；　　4. 0；

5. $\dfrac{1}{12\pi}e^{-\frac{(x-1)^2}{18}-\frac{y^2}{8}}$；　　6. $\dfrac{3}{n}, 1$；　　7. $1-\alpha$；　　8. $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$.

二、 1. C;　　2. A;　　3. B;　　4. D;　　5. D.

三、 设 A_i 表示箱内有 i 件次品, $i=0,1,2$, B 表示该箱产品通过验收, 则

$P(A_i)=\dfrac{1}{3}$（$i=0,1,2$），　　$P(B|A_0)=1$，

$P(B|A_1)=\dfrac{C_9^2}{C_{10}^2}=\dfrac{4}{5}$,　　$P(B|A_2)=\dfrac{C_8^2}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$,　　(2 分)

(1) 由全概率公式, 有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{28}{45}=\frac{109}{135}\approx0.807. \quad (6\text{ 分})$$

(2) 由贝叶斯公式, 有

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{28}{45}}{\frac{109}{135}}=\frac{28}{109}\approx0.257. \quad (10\text{ 分})$$

四、 (1) 区域 D 的面积为 $S(D)=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$,

（X，Y）的联合密度函数　$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　(3 分)

(2) 当 $0<x<1$ 时，　$f_X(x)=\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x$,

所以关于 X 的边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$　　(6 分)

同理, 当 $-1<y<0$ 时，　$f_Y(y)=\int_{-y}^{1}\mathrm{d}x=1+y$；

当 $0<y<1$ 时，　$f_Y(y)=\int_{y}^{1}\mathrm{d}x=1-y$,

所以关于 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0,\\ 1-y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$　　(9 分)

(3)　$P\{X<\dfrac{1}{2}\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{4}$.　　(12 分)

五、 (1)　(X,Y) 的联合分布律

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{Y=0\,|\,X=0\}P\{X=0\}=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{20},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\,|\,X=0\}P\{X=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{40},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=P\{Y=2\,|\,X=0\}P\{X=0\}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{40},$$

同理,

$P\{X=1,Y=0\}=\frac{3}{20}$,　　$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{10}$,　　$P\{X=1,Y=2\}=\frac{1}{20}$.（8 分）

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{40}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

（2） $Y=1$ 下 X 的条件分布律为

$$P\{X=0\,|\,Y=1\}=\frac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{7}{11},$$

$$P\{X=1\,|\,Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{4}{11}.$$　（12 分）

六、设 X 表示某一时刻同时开动的机器数, 则 $X\sim B(200,0.7)$,　（1 分）

又设电厂至少要供应 x 个单位的电能, 则由题意, 有

$$P\{X\le\frac{x}{15}\}\ge 0.95,$$　（4 分）

由棣莫弗-拉布拉斯中心极限定理, 有

$$P\{X\le\frac{x}{15}\}=P\left\{\frac{X-200\times0.7}{\sqrt{200\times0.7\times0.3}}\le\frac{\frac{x}{15}-200\times0.7}{\sqrt{200\times0.7\times0.3}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{\frac{x}{15}-140}{\sqrt{42}}\right)\ge 0.95,$$（7 分）

$$\Rightarrow\ \frac{\frac{x}{15}-140}{\sqrt{42}}\ge 1.65,\qquad\Rightarrow\ x\ge 150.69\times15=2260.40,$$

故最少要供应这个车间 2261 单位的电能, 才能以95% 的概率保证不致因供电不足而影响生产.　（10 分）

七、（1） 似然函数

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=C_n^{x_1}p^{x_1}(1-p)^{n-x_1}\cdot C_n^{x_2}p^{x_2}(1-p)^{n-x_2}\cdots\cdot C_n^{x_n}p^{x_n}(1-p)^{n-x_n}$$

$$=C_n^{x_1}C_n^{x_2}\cdots C_n^{x_n}\cdot p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(n-x_i)},$$　（2 分）

对数似然函数

$$\ln L=\ln(C_n^{x_1}C_n^{x_2}\cdots C_n^{x_n})+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p),$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}(n^2-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0,$$ (6 分)

解得最大似然估计为

$$\hat{p}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{n}\overline{X}.$$ (8 分)

(2) $E(\hat{p})=E(\frac{1}{n}\overline{X})=\frac{1}{n}E(\overline{X})=\frac{1}{n}\cdot np=p$,

故 $\hat{p}$ 为 p 的无偏估计. (12 分)

八、(1) $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. (1 分)

检验统计量为 $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(20,15)$ (在 H_0 成立时), (2 分)

由 $\alpha=0.1$, 故临界值

$$F_{\alpha/2}=F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)=F_{0.05}(20,\ 15)=2.33,$$

$$F_{1-\alpha/2}=\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)}=\frac{1}{2.20}=0.4545.$$

由样本值算得 $F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=\frac{81^2}{105^2}=0.5951$, 由于 $F_{1-\alpha/2}<F<F_{\alpha/2}$, (3 分)

故不能拒绝 H_0, 即认为两个总体的方差相等. (4 分)

(2) $H_0:\mu_1=\mu_2$, $H_1:\mu_1\neq\mu_2$. (5 分)

检验统计量 $T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(\frac{1}{21}+\frac{1}{16})\frac{20S_1^2+15S_2^2}{35}}}\sim t(35)$ (在 H_0 成立时), (8 分)

临界值 $t_{\alpha/2}=t_{0.05}(35)=1.69$. 由题意知 $\overline{x}=2600$, $s_1^2=6561$, $\overline{y}=2700$, $s_2^2=11025$, 算得

$$|T|=\frac{|2600-2700|}{\sqrt{(\frac{1}{21}+\frac{1}{16})\frac{20\times6561+15\times11025}{35}}}=3.27,$$ (11 分)

因为 $|T|>t_{\alpha/2}$, (12 分)

故拒绝 H_0, 即两家银行的储户的平均年存款余额有显著差异. (14 分)