第 7 章　参数估计

7.1　内容提要

7.1.1　点估计

1. 参数的估计量与估计值

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，θ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本观察值．选取一个统计量 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，以数值 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 估计 θ 的真值 θ_0，则称 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 θ_0 的估计量，称 $T(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 θ_0 的估计值. 这种对未知参数进行估计的方法, 称为点估计.

常用的点估计方法有两种:矩估计法和极大似然估计法.

2. 矩估计法

用样本矩估计总体矩, 用样本矩的相应连续函数估计总体矩的连续函数, 这种估计方法称作矩估计法.

设有 k 个未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$，求未知参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的矩法估计量的基本步骤如下:

第一步:计算出 $E(X), E(X^2), \cdots, E(X^k)$，可记

$$E(X^j) = g_j(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k),\ j = 1, 2, \cdots, k.$$

第二步：用 $E(X), E(X^2), \cdots, E(X^k)$ 表示参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$

$$\theta_j = h_j(E(X), E(X^2), \cdots, E(X^k)),\ j = 1, 2, \cdots, k.$$

第三步：用 $\overline{X^j} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^j$ 估计 EX^j，得参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}_j = h_j(\overline{X}, \overline{X^2}, \cdots, \overline{X^k}),\ j = 1, 2, \cdots, k.$$

使用矩估计法进行点估计的时候, 要注意以下几点:

(1) 可用样本的各阶中心矩作为总体各阶中心矩的估计, 求得的参数估计量也是参数的矩估计量;

(2) 矩估计量不是唯一的;

(3) 若总体矩不存在, 则矩估计法失效.

3. 极大似然估计法

极大似然估计法是用似然函数在参数空间内的最大值来估计未知参数.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 X 的样本, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是样本观察值. 称

$$L(\theta)=L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\text{当}X\text{是离散型且其分布律为}p(x;\theta)\text{时}\\ \prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)),\text{当}X\text{是连续型且其概率密度为}f(x;\theta)\text{时}\end{cases}$$

为似然函数. 对于似然函数 $L(\theta)=L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 若存在 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 使得

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(\theta),$$

则称 $\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是未知参数 θ 的极大似然估计值, 称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的极大似然估计量.

求极大似然估计只要两步就可完成, 第一步写出似然函数 $L(\theta)$, 第二步就是求使 $L(\theta)$ 达到最大值的点. 这里 θ 可以是单个参数或多个参数(向量形式).

在用极大似然法估计参数时, 须注意以下几点:

(1) 一般的可通过求解方程 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}=0$ 来得到未知参数 θ 的极大似然估计值. 如果在参数空间中解存在且唯一, 则可断定该解即为所求. 但是有时似然方程可能无解, 此时就要根据定义, 在给定样本值时来确定似然函数在何时取得最大值.

(2) 一个参数的极大似然估计值也有可能不是唯一的.

4. 极大似然估计的不变性

设 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的极大似然估计量, $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数, 则 $g(\hat{\theta})$ 是参数 $g(\theta)$ 的极大似然估计量.

7.1.2 估计量的评价标准

1. 无偏性

设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量, $\theta\in\Theta$, 若

$$E(\hat{\theta})=\theta,\ \text{对一切}\ \theta\in\Theta,$$

则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的无偏估计量; 若

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta,\ \text{对一切}\ \theta\in\Theta,$$

则称 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的渐近无偏估计量.

样本均值与样本方差分别为总体均值和总体方差的无偏估计.

2.有效性及 C-R 不等式

设 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_I,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_I,\cdots,X_n)$ 都是未知参数 θ 的无偏估计量, 若有 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

Cramer-Rao 不等式：设总体 X 为具有概率密度函数 $f(x;\theta)$ 的连续型随机变量，未知参数 $\theta\in\Theta$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 X 的样本，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 是 θ 的无偏估计量. 如果

（1） Θ 是实数域 R 中的开区间，且集合 $\{x: f(x;\theta)>0\}$ 与 θ 无关.

（2） $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)$ 对一切 x,θ 都存在，且

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)\mathrm{d}x,$$

即可以在积分号下求导数.

（3） $0<I(\theta)=E[\dfrac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X,\theta)]^2<\infty$，则有 $D(\hat{\theta})\geq\dfrac{1}{nI(\theta)}$，对一切 $\theta\in\Theta$ 均成立，且等号成立的充分必要条件是以概率 1 有关系式

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\ln\prod_{i=1}^{n} f(X_i;\theta)\right]=C(\theta)(\hat{\theta}-\theta),$$

其中 $C(\theta)$ 与样本无关.

如果 θ 的无偏估计量 $\hat{\theta}(X_I,X_2,\cdots,X_n)$ 使得 $D(\hat{\theta})=\dfrac{1}{nI(\theta)}$，对任意 $\theta\in\Theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的有效估计量.

3. 一致性（相合性）

设 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的估计量，若对任意给定的正数 ε，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)-\theta|\geq\varepsilon\}=0,$$

对一切 $\theta\in\Theta$，即当 $n\to\infty$ 时，$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 依概率收敛于 θ，则称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 θ 的一致（或相合）估计量.

7.1.3 区间估计

1. 置信区间

设 θ 为总体分布的未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 X 的样本. $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,X_1,\cdots X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,X_1,\cdots X_n)$ 是关于样本的两个统计量，若对于给定的概率 $1-\alpha(0<\alpha<1)$，有

$$P\{\underline{\theta}\leq\theta\leq\overline{\theta}\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为参数 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$ 为置信下限，$\overline{\theta}$ 为置信上限，$\overline{\theta}-\underline{\theta}$ 为置信区间的长度.

2. 求置信区间的基本步骤

第一步：选取一个函数 $Z=Z(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$，它只含待估计的参数 θ，而不含有其它的未知参数，且它的分布不依赖于任何未知参数（当然也不依赖参数 θ 本身）；

第二步：对于给定的置信度$1-\alpha$，定出常数a,b，使得

$$P\{a < Z(X_1,\cdots,Z_n;\theta) < b\} = 1-\alpha,$$

由于$Z = Z(X_1,X_2,\cdots,Z_n;\theta)$的分布是已知的，所以常数$a,b$是可以计算的，一般可利用该分布的分位点来确定；

第三步：利用不等式变形，求得未知参数θ的置信区间. 若

$$a < Z(X_1,\cdots,Z_n;\theta) < b \Leftrightarrow \underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n),$$

则有

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$$

即$(\underline{\theta},\overline{\theta})$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间，其中$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$.

3. 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的区间估计

(1) σ^2已知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right);$$

(2) σ^2未知时，μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right);$$

(3) μ已知时，σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right);$$

(4) μ未知时，σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

4. 两个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的情形

设$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$是正态总体$X \sim N(\mu_1,{\sigma_1}^2)$的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$是正态总体$Y \sim N(\mu_2,{\sigma_2}^2)$的样本，且两组样本相互独立，记

$$\overline{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i, \qquad S_1^2 = \frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i, \qquad S_2^2 = \frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\overline{Y})^2$$

(1) σ_1^2及σ_2^2已知时，$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

(2) $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知时, $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2\ ,\ \bar{X}-\bar{Y}+S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2\right),$$

其中 $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

(3) σ_1^2 及 σ_2^2 未知 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$, 但 $n_1=n_2$ 时, $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \ \bar{X}-\bar{Y}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right),$$

其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-Z)^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}[(X_i-Y_i)-(X-Y)]^2$.

(4) σ_1^2 及 σ_2^2 未知 $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$, 但 $n_1\neq n_2$ 时, $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right).$$

(5) μ_1 及 μ_2 未知时, σ_1^2/σ_2^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\quad \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

7.2 习题详解

7.1 练习题

1. 填空题

(1) 已知总体 X 服从参数为 p 的 0-1 分布, $X_1,\dots,X_n$ 是取自该总体的样本, 则 p 的矩估计量为____________.

解 $E(X)=p$, 由矩估计有 $E(X)=\bar{X}$, 所以 p 的矩估计量为 $\hat{p}=\bar{X}$.

(2) 设总体 $X\sim N(\mu,1)$, $p=P\{X>2\}$, 已知 μ 的极大似然估计值 $\hat{\mu}=1$, 则 p 的极大似然估计值 $\hat{p}=$________.

解 $p=P\{X>2\}=1-P\{X\le 2\}=1-P\left\{\dfrac{X-\mu}{1}\le\dfrac{2-\mu}{1}\right\}=1-\Phi(\dfrac{2-\mu}{1})$, 又 μ 的极大似然估计值 $\hat{\mu}=1$, 且极大似然估计具有不变性, 所以 p 的极大似然估计值 $\hat{p}=1-\Phi(1)$.

2. 选择题

(1)假设总体 X 的方差 $D(X)$ 存在，$X_1,\cdots,\ X_n$ 是取自该总体的样本，样本均值和方差分别为 $\bar{X}$，S^2，则 $E(X^2)$ 的矩估计量是（　　）.

A. $S^2+\bar{X}^2$　　B. $(n-1)S^2+\bar{X}^2$　　C. $nS^2+\bar{X}^2$　　D. $\frac{n-1}{n}S^2+\bar{X}^2$

解　因为 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$，而样本均值 $\bar{X}$ 是总体均值 $E(X)$ 的矩估计量，样本的二阶中心矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2$ 是总体方差 $D(X)$ 的矩估计量，所以 $E(X^2)$ 的矩估计量为 $\frac{n-1}{n}S^2+\bar{X}^2$. 故本题应选 D.

(2)假设总体 X 的方差 $D(X)=\sigma^2$ 存在，$X_1,\ldots,X_n$ 是取自该总体的样本，样本方差为 S^2，且 $D(S)>0$，则（　　）.

A. S 是 σ 的矩估计量　　B. S 是 σ 的最大似然估计量

C. $E(S)=\sigma$　　D. $E(S^2)=\sigma^2$

解　$E(S^2)=E[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2)$

$$=\frac{1}{n-1}[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)]=\frac{1}{n-1}[n(\mu^2+\sigma^2)-n(\mu^2+\frac{\sigma^2}{n})]=\sigma^2.$$

故本题应选 D.

7.2 练习题

1. 填空题

设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,\ldots,X_n$ 是取自该总体的样本，若 $a\bar{X}+bS^2$ 是 λ 的无偏估计量，则 a 与 b 满足关系式_______.

解　$a\bar{X}+bS^2$ 是 λ 的无偏估计量，则 $E(a\bar{X}+bS^2)=aE(\bar{X})+bE(S^2)=(a+b)\lambda=\lambda$，于是 a 与 b 必须满足关系式 $a+b=1$.

2. 选择题

设 (X_1,X_2,X_3) 是总体 X 的样本，$E(X)=\mu$，则以下四个估计量中关于参数 μ 的最有效估计是　　（　　）.

A. $\hat{\mu}_1=\frac{1}{6}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{2}X_3$　　B. $\hat{\mu}_2=\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$

C. $\hat{\mu}_3=\frac{1}{4}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{2}X_3$　　D. $\hat{\mu}_4=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

解　经计算 $D(\hat{\mu}_4)=D(\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3)=\frac{1}{3}D(X)$ 是四个无偏估计量中方差最小的.

故本题应选 D.

注 更一般的,若从总体中抽取的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$,则可以证明满足系数和 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1$ 的所有统计量 $\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2+\cdots+\alpha_n X_n$ 均是总体均值 μ 的无偏估计量,并且当 $\alpha_1=\alpha_2\cdots=\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ 时所确定的统计量是最有效的估计量.

习题七

1. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自总体的一个样本,求下述各总体的概率密度或分布律中未知参数的矩估计量:

(1) $f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>-1$ 是未知参数;

(2) $P\{X=x\}=p(1-p)^{x-1}, x=1,2\cdots$ 其中 $0<p<1$ 是未知参数;

(3) $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x\geq\theta, \\ 0, & x<\theta,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数;

(4) $f(x,\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\leq x\leq 1, \\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数;

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1, \\ 0, & x\leq 1,\end{cases}$ 其中 $\theta>1$ 是未知参数;

(6) $f(x,\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}$,其中 $\sigma>0$ 为未知参数.

解 (1) 总体的一阶原点矩为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}x^{\theta+2}\bigg|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

由矩估计原理,令

$$E(X)=\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X},$$

解得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

(2) 因为

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1}=p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}=p\times\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p},$$

由矩估计原理,令

$$E(X)=\frac{1}{p}=\overline{X},$$

解得参数 p 的矩估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

（3）因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+\frac{1}{2},$$

由矩估计原理, 令

$$E(X)=\theta+\frac{1}{2}=\overline{X},$$

解得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}-\dfrac{1}{2}$.

（4）因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1},$$

由矩估计原理, 令

$$E(X)=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X},$$

解得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}\right)^2$.

（5）因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty} \theta x^{-\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{\theta-1},$$

由矩估计原理, 令

$$E(X)=\frac{\theta}{\theta-1}=\overline{X},$$

解得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$.

（6）因为总体的一阶原点矩

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,\sigma)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=0,$$

它与参数 σ 无关, 所以须用二阶原点矩. 又

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,\sigma)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}\mathrm{d}x=2\sigma^2,$$

由矩估计的原理, 令总体的二阶原点矩等于样本的二阶原点矩, 即

$$E(X^2)=2\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

从而参数σ的矩估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

注 由于可用样本的各阶中心矩作为总体各阶中心矩的估计, 因此当用样本的一阶原点矩替代总体的一阶原点矩无法求出未知参数时, 可以考虑采用样本的二阶甚至更高阶的矩来替代总体的矩.

2. 求上题中各未知参数的极大似然估计量.

解 (1) 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的观察值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}.$$

当$0<x_i<1, i=1,2,\cdots,n$时, $L(\theta)>0$, 并且有

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i .$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得θ的极大似然估计值为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

从而θ的极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

(2) 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的观察值, 则似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}.$$

等式两边取对数, 得到

$$\ln L(p)=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p).$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{n}{p}+\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0,$$

解得p的极大似然估计值为$\hat{p}=\frac{1}{\overline{x}}$, 从而$\theta$的极大似然估计量为$\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$.

（3）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}2^n\mathrm{e}^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i\ge\theta, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

等式两边取对数, 得到

$$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta,$$

对 θ 求导, 有

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=2n>0,$$

即似然函数是单调递增函数, 于是欲使得似然函数达到最大值, 参数 θ 应该取所有可能值中的最大值. 又因为 $\theta\le x_i$, 所以 $\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots x_n\}=X_{(1)}$, 即 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=X_{(1)}$.

（4）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=(\theta)^{\frac{n}{2}}x_1^{\sqrt{\theta}-1}x_2^{\sqrt{\theta}-1}\cdots x_n^{\sqrt{\theta}-1}.$$

等式两边取对数得到

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\sigma}=\dfrac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i\right)^2}$, 所以 σ 的极大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{n^2}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i\right)^2}$.

（5）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值, 则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\theta^n\frac{1}{x_1^{\theta+1}}\frac{1}{x_2^{\theta+1}}\cdots\frac{1}{x_n^{\theta+1}}.$$

等式两边取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

令

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}$, 所以 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

(6) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值, 则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\sigma)=\frac{1}{2}\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_1|}.$$

等式两边取对数得

$$\ln L(\sigma)=\frac{-n}{2}\ln\sigma-\frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma}=\frac{-n}{2\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0,$$

解得 σ 的极大似然估计值为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.

所以 σ 的极大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$.

3. 设总体 X 服从参数为 m,p 的二项分布:

$$P\{X=x\}=\binom{m}{x}p^x(1-p)^{m-x}, x=0,1,2,\ldots,m,\ 0<p<1$$

$X_1,\cdots,X_n$ 是来自该总体的一个样本, 求未知参数 p 的极大似然估计量.

解 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观察值, 则似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}.$$

等式两边取对数得

$$\ln L(p)=\ln\left(\binom{m}{x_1}\binom{m}{x_2}\cdots\binom{m}{x_n}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p).$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\left(nm-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\Big/(1-p)=0,$$

解得 p 的极大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{\overline{x}}{m}$, 所以 p 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{\overline{X}}{m}$.

4. (1) 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 求 $P\{X=0\}$ 的极大似然估计;

(2) 某铁路局证实一个扳道员在五年内所引起的严重事故的次数服从泊松分布. 求一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的极大似然估计值. 使用下面 122 个观察值. 下表中, r 表示一扳道员五年内引起严重事故的次数, s 表示观察到的扳道员人数.

r	0	1	2	3	4	5
s	44	42	21	9	4	2

解　(1) 因为泊松分布参数 λ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\overline{x}$，而 $P\{X=0\}=\mathrm{e}^{-\lambda}$，所以由极大似然估计的不变性知：$P\{X=0\}$ 的极大似然估计值为 $e^{-\overline{x}}$.

(2) 观察到的五年内每一扳道员引起的严重事故的平均次数为

$$\overline{x}=\frac{1}{122}(0\times 44+1\times 42+2\times 21+3\times 9+4\times 4+5\times 2)=\frac{137}{122}=1.123,$$

所以一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的极大似然估计值为

$$\hat{p}=e^{-1.123}=0.3253.$$

5. 设总体 X 的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ \theta^2 & 2\theta(1-\theta) & \theta^2 & 1-2\theta\end{pmatrix}$$

其中 θ（$0<\theta<\dfrac{1}{2}$）是未知参数，利用总体 X 的如下样本值

3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解　因为

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta,$$

由矩估计的原理，令

$$E(X)=3-4\theta=\overline{X},$$

解得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{4}$.

由已知的样本值计算得到 $\overline{x}=2$，因此 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{x}}{4}=\dfrac{1}{4}$.

又根据题设的样本确立似然函数为

$$L(\theta;x_1,x_2,\cdots,x_8)=p(0;\theta)p^2(1;\theta)p(2;\theta)p^4(3;\theta)=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4,$$

等式两边取对数得

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta).$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}-\frac{4}{1-2\theta}=0,$$

解得 $\hat{\theta}=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$. 又因为 $0<\theta<\dfrac{1}{2}$，所以 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

6. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda(x-2)}, & x>2\\ 0, & x\le 2\end{cases}$$

其中 λ 是未知参数 $(\lambda>0)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，求：(1) θ 的矩估计；(2) θ 的最大似然估计.

解 (1) 总体 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_2^{+\infty}\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda(x-2)}\mathrm{d}x=2+\frac{1}{\lambda}.$$

令 $2+\dfrac{1}{\lambda}=\overline{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\overline{X}-2}$.

(2) 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\lambda},$$

等式两边取对数, 有

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\lambda.$$

令
$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i+2n=0,$$

解得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\overline{x}-2}$，则 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{\overline{X}-2}$.

7. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本. (1) 求参数 θ 的矩估计量; (2) 判断 $4\left(\overline{X}\right)^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量.

解 (1) 总体 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1+2\theta}{4}.$$

令 $\dfrac{1+2\theta}{4}=\overline{X}$，解得参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为 $E(X^2)=\displaystyle\int_0^{\theta}\frac{x^2}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{1}\frac{x^2}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}$，所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2\theta^2+\theta+1}{6}-\left(\frac{1+2\theta}{4}\right)^2=\frac{4\theta^2-4\theta+5}{48},$$

于是 $E(\overline{X}^2)=[E(\overline{X})]^2+D(\overline{X})=[E(X)]^2+\dfrac{1}{n}D(X)$

$$=\frac{(12n+4)\theta^2+(12n-4)+3n+5}{48n}.$$

从而 $E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=\dfrac{(12n+4)\theta^2+(12n-4)+3n+5}{12n}\neq\theta^2$,

所以$4\left(\overline{X}\right)^2$不是$\theta^2$的无偏估计量.

8. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本, 试确定常数c, 使统计量$c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计.

解 由正态分布的性质以及样本的独立性可知$X_{i+1}-X_i\sim N(0,2\sigma^2)$, 故

$$E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)+[E(X_{i+1}-X_i)]^2=2\sigma^2.$$

又因为

$$\sigma^2=E\left(c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right)=c\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=2(n-1)c\sigma^2,$$

故当$c=\dfrac{1}{2(n-1)}$时, 统计量$c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计.

9. 设$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$相互独立且均为参数θ的无偏估计, 并且$\hat{\theta}_1$的方差是$\hat{\theta}_2$的方差的 2 倍, 试求出常数a,b, 使得$a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$是$\theta$的无偏估计, 并且在所有这样的无偏估计中方差最小.

解 由于$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$均为参数θ的无偏估计, 所以

$$E(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=aE(\hat{\theta}_1)+bE(\hat{\theta}_2)=(a+b)\theta.$$

为了使$a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$是$\theta$的无偏估计, 必须$a+b=1$, 即$b=1-a$. 又由$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$的独立性以及题设条件, 可得

$$D(\widehat{a\theta_1+b\theta_2})=a^2D(\theta_1)+b^2D(\theta_2)=2a^2D(\theta_2)+(1-a)^2D(\theta_2)=(3a^2-2a+1)D(\theta_2).$$

上式右边当$a=\dfrac{1}{3}$时达到最小, 即当$a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{2}{3}$时, $a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$是$\theta$的无偏估计, 并且在所有这样的无偏估计中方差最小.

10. 设总体X服从参数为λ的泊松分布, $X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本, $\overline{X}$, S^2分别为样本均值和样本方差, (1) 试证对一切α ($0\le\alpha\le1$), 统计量$\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$均为$\lambda$的无偏估计量; (2) 试求$\lambda,\lambda^2$的极大似然估计量$\hat{\lambda}_M$, $\hat{\lambda}_M^2$; (3) 讨论$\hat{\lambda}_M^2$的无偏性, 并给出λ^2的一个无偏估计量.

解 (1) 由于总体X服从参数为λ的泊松分布, 所以

$$E(X)=D(X)=\lambda.$$

又因为样本均值和样本方差是总体均值和方差的无偏估计, 于是有

$$E(\overline{X})=E(S^2)=\lambda.$$

进而 $$E[\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2]=\alpha E(\overline{X})+(1-\alpha)E(S^2)=\lambda,$$

即 $\alpha\overline{X}+(1-\alpha)S^2$ 是 λ 的无偏估计量.

(2) 由于泊松分别参数 λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}_M=\overline{X}$, 所以根据极大似然估计的不变性可知参数 λ^2 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}_M^2=\overline{X}^2$.

(3) 由于 $E(\hat{\lambda}_M^2)=E(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+[E(\overline{X})]^2=\dfrac{\lambda}{n}+\lambda^2\neq\lambda^2$, 所以 $\hat{\lambda}_M^2=(\overline{X})^2$ 不是 λ^2 的无偏估计量. 若令

$$\hat{\lambda}^2=\overline{X}^2-\frac{\overline{X}}{n}$$

则有 $$E(\hat{\lambda}^2)=E(\overline{X}^2)-\frac{1}{n}E(\overline{X})=\frac{\lambda}{n}+\lambda^2-\frac{\lambda}{n}=\lambda^2,$$

因此 $\hat{\lambda}^2=\overline{X}^2-\dfrac{\overline{X}}{n}$ 是 λ^2 的一个无偏估计量.

注 λ^2 的无偏估计量不是唯一的, 例如统计量 $\hat{\lambda}_i^2=(\overline{X})^2-\dfrac{X_i}{n}\ (i=1,2,\cdots.n)$ 都是 λ^2 无偏估计量.

11. 设总体 X 服从区间 $(\theta,\theta+1)$ 上的均匀分布, $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本, 证明估计量

$$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{2},\qquad \hat{\theta}_2=X_{(n)}-\frac{n}{n+1}$$

皆为参数 θ 的无偏估计, 并且 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

解 由题意可知 X 的概率密度和分布函数分别为

$$f(x)=\begin{cases}1, & \theta<x<\theta+1\\ 0, & 其他\end{cases},\quad F(x)=\begin{cases}0, & x\le\theta\\ x-\theta, & \theta<x<\theta+1\\ 1, & x\ge\theta+1\end{cases}.$$

于是最大顺序统计量 $X_{(n)}$ 的概率密度为

$$f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}n(x-\theta)^{n-1}, & \theta<x<\theta+1\\ 0, & 其他\end{cases},$$

所以 $$E\left(X_{(n)}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{(n)}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{\theta+1}nx(x-\theta)^{n-1}\mathrm{d}x=n\int_0^1(t+\theta)t^{n-1}dt=\frac{n}{n+1}+\theta,$$

$$E\left(X_{(n)}^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_{(n)}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{\theta+1}nx^2(x-\theta)^{n-1}\mathrm{d}x=n\int_0^1(t+\theta)^2t^{n-1}\mathrm{d}t=\frac{n}{n+2}+\frac{2n}{n+1}\theta+\theta^2,$$

$$D\left(X_{(n)}\right)=E\left(X_{(n)}^2\right)-[E(X_{(n)}^2]=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$

于是 $$E(\hat{\theta}_1)=E(\bar{X}-\frac{1}{2})=E(X)-\frac{1}{2}=\frac{\theta+\theta+1}{2}-\frac{1}{2}=\theta,$$

$$E(\hat{\theta}_2)=E\left(X_{(n)}-\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}+\theta-\frac{n}{n+1}=\theta.$$

所以$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$都是参数$\theta$的无偏估计. 又因为

$$D(\hat{\theta}_1)=D(\bar{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{1}{12n},$$

$$D(\hat{\theta}_2)=D\left(X_{(n)}\right)=\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}<\frac{1}{12n}\quad (n>1),$$

所以$\hat{\theta}_2$比$\hat{\theta}_1$有效.

12. 从一台机床加工的轴承中, 随机地抽取 200 件, 测量其椭圆度, 得样本均值$\bar{x}=0.081mm$, 并由累积资料知道椭圆度服从$N(\mu,0.025^2)$, 试求μ的置信度为 0.95 的置信区间.

解 已知$\sigma^2=0.025^2$, 所以参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

将$\bar{x}=0.081$, $\sigma=0.025$, $u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$代入得$\mu$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(0.0775, 0.0845)$.

13. 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$是其样本值, 如果σ^2为已知, 问n取多大值时, 能保证μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间的长度不大于给定的L?

解 σ^2已知时, μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right),$$

故欲使其区间长度不大于给定的L, 必须 $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\le L$, 即$n\ge\frac{4u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma^2}{L^2}$.

14. 在测量反应时间中, 一心理学家估计的标准差为 0.05 秒, 为了以 95%的置信度使他对平均反应时间的估计误差不超过 0.01 秒, 应取多大的样本容量n.

解 设测量反应时间为X, 则$\mu=E(X)$表示平均反应时间. 由题设$s=0.05$, 当n充分大时, 统计量

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

故要求样本容量n满足

$$P\{\left|\bar{X}-\mu\right|\le 0.01\}=P\left\{\frac{\left|\bar{X}-\mu\right|}{0.05/\sqrt{n}}\le\frac{0.01\sqrt{n}}{0.05}\right\}=0.95,$$

又查表得 $u_{0.025}=1.96$, 所以 $\dfrac{0.01\sqrt{n}}{0.05}\ge 1.96$, 即 $n\ge 96.04$, 亦即 $n=97$.

因此当 $n\ge 97$ 时, 可以 95%的置信度使他对平均反应时间的估计误差不超过 0.01 秒.

15. 从自动机床加工的同类零件中抽取 16 件, 测得长度为(单位 mm):

12.15　12.12　12.01　12.08　12.09　12.16　12.03　12.01

12.06　12.07　12.13　12.11　12.08　12.01　12.03　12.06

设零件长度近似服从正态分布, 试求方差 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间.

解　在总体均值未知时, 总体方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

已知 $\alpha=0.05,\ n=16$, 查表得 $\chi^2_{0.975}(15)=6.262,\ \chi^2_{0.025}(15)=27.488$. 又由样本数据计算得 $s^2=0.00244$, 所以 σ^2 的置信度为 95%的置信区间为 $(0.00133, 0.00584)$.

16. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本, 已知 $\mu=6.5$, 且有样本值

7.5, 2.0, 12.1, 8.8, 9.4, 7.3, 1.9, 2.8, 7.0, 7.3

试求 σ^2 和 σ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解　在总体均值 μ 已知时, 总体方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\quad \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right).$$

已知 $\mu=6.5, n=10$, 又查表可得 $\chi^2{}_{0.025}(10)=20.483, \chi^2_{0.975}(10)=3.247$, 所以 σ^2 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(5.013,\ 31.626)$.

总体均方差 σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}},\quad \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}}\right)=(2.239,\ 5.624).$$

17. 为比较甲与乙两种型号同一产品的寿命, 随机地抽取甲型产品 5 个, 测得平均寿命 $\bar{x}=1000h$, 标准差 $s_1=28h$, 随机地抽取乙型产品 7 个, 测得平均寿命 $\bar{y}=980h$, $s_2=32h$, 设总体服从正态分布, 并且由生产过程知它们的方差相等, 求两个总体均值差的置信度为 0.99 的置信区间.

解　此题为方差未知但相等时的两个总体均值差的区间估计问题, 此时 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2),\ \overline{X}-\overline{Y}+S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right),$$

其中 $S_W=\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$.

已知 $n_1=5,\ n_2=7,\ s_1=28$, $s_2=32$, 所以

$$s_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{4\times28^2+6\times32^2}{5+7-2}}=30.463.$$

又有 $\overline{x}=1000,\ \overline{y}=980,\ t_{0.005}(10)=3.1693$, 则均值差的置信度为 0. 99 的置信区间为

$$\left(1000-980-30.463\times3.1693\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}},1000-980+30.463\times3.1693\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}\right)=(-36.53, 76.53).$$

18. 为了在正常条件下检验一种杂交作物的两种新处理方案, 在同一地区随机地挑选 8 块地, 在每块试验地上按两种方案种植作物, 这 8 块地的单位面积产量分别如下表所示

一号方案产量	86	87	56	93	84	93	75	79
二号方案产量	80	79	58	91	77	82	74	66

假设两种方案的产量都服从正态分布, 试求这两个平均产量之差的置信度为 0. 95 的置信区间.

分析

解 设 X,Y 分别为一号和二号方案的单位面积产量, 且 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 分别为总体 X,Y 的样本.

令 $Z=X-Y$, 则 $Z\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$, 且 $Z_i=X_i-Y_i$ 为总体 Z 的样本. 此时, $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}-\overline{Y}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right),$$

其中 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}[(X_i-Y_i)-(\overline{X}-\overline{Y})]^2Z_i-\overline{Z})^2$.

已知 $n=8$, $\overline{z}=\overline{x}-\overline{y}=5.75$, $s=5.12$, $\alpha=0.05$, 查表得 $t_{0.025}(7)=2.3646$. 计算得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0. 95 的置信区间为 $(1.47,10.03)$.

19. 设两位化验员 A,B 独立地对某种聚合物含氯量用相同的方法各做 10 次测定, 其测定值的样本方差依次为 $s_A^2=0.5419$, $s_B^2=0.6065$, 设 σ_A^2,σ_B^2 分别为 A,B 所测定的测定值总体的方差, 设总体均为正态的. 求方差比 $\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的置信度为 0. 95 的置信区间.

解 这是两正态总体中 μ_A 及 μ_B 未知的情形. 方差比 $\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_A^2/S_B^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\quad \frac{S_A^2/S_B^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

已知 $n_1=n_2=10$，$\alpha=0.05$，查表得 $F_{0.025}(9,9)=4.03$，$F_{0.975}(9,9)=0.2481$．又 $s_A^2=0.5419$，$s_B^2=0.6065$，计算可得$\dfrac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$的置信度为 0.95 的置信区间为$(0.2217,\ 3.601)$.

20. 设总体 X 服从区间 $(\theta,\theta+1)$ 上的均匀分布，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，其中 $-\infty<\theta<+\infty$，试证 θ 的极大似然估计量不止一个．如：$\hat{\theta}_1=X_{(1)}$，$\hat{\theta}_2=X_{(n)}-1$，$\hat{\theta}_3=\dfrac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})-\dfrac{1}{2}$都是$\theta$的极大似然估计量.

解　X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}1, & \theta<x<\theta+1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的样本观察值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}1, & \theta<x_i<\theta+1,i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

因此当$\theta<x_i<\theta+1,i=1,2,\cdots,n$时，$L(\theta)=1$为常数，因此对于满足

$$\theta<x_{(1)}\le x_{(n)}<\theta+1$$

的一切θ均为极大似然估计，因此θ的极大似然估计量不止一个．由于区间$(\theta,\theta+1)$的总长度为 1，因此由上述不等式知，如果θ尽可能的靠近$x_{(1)}$，或者$\theta+1$应尽量靠近$x_{(n)}$，则所得的估计显得更加合理．因此$\hat{\theta}_1=X_{(1)}$和$\hat{\theta}_2=X_{(n)}-1$都可以是θ的极大似然估计量．由极大似然估计的不变性知：$\hat{\theta}_3=\dfrac{1}{2}(X_{(1)}+X_{(n)})-\dfrac{1}{2}$也可以作为极大似然估计.

21. 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，求未知参数λ的倒数$\theta=\dfrac{1}{\lambda}$的极大似然估计量$\hat{\theta}$，并问所得的估计量$\hat{\theta}$是否为$\theta$的有效估计.

解　X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

设$X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的样本观察值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\theta^{-n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_i>0,i=1,\cdots,n\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

所以当 $x_i > 0, i = 1, \cdots, n$ 时，$L(\theta) > 0$，并且有

$$\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

令 $$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta} = \bar{x}$，故其极大似然估计量为 $\hat{\theta} = \bar{X}$.

由于 $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = E(X) = \theta$，故 $\hat{\theta} = \bar{X}$ 是 θ 无偏估计. 又因为

$$\ln f(x,\theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta},$$

所以 $$\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}.$$

因此，信息量

$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(X,\theta)\right]^2 = E\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}\right)^2 = \frac{1}{\theta^4}E(X-\theta)^2 = \frac{D(X)}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2}.$$

由于 $$D(\hat{\theta}) = D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{nI(\theta)},$$

所以估计量 $\hat{\theta}$ 是为 θ 的有效估计.

22. 设随机变量 X 服从均值为 λ 的泊松分布，λ 为未知参数，(1) 求 e^{λ} 的无偏估计；(2) 证明 $\theta = e^{-2\lambda}$ 的无偏估计为

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, & X\text{取偶数}, \\ -1, & X\text{取奇数}. \end{cases}$$

解 (1) 由于 $$E(2^X) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{2\lambda}e^{-\lambda} = e^{\lambda},$$

所以如果 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，则 $2^{X_i}\ (i = 1,2,\cdots,n)$ 均为 e^{λ} 的无偏估计.

(2) 由于 $\hat{\theta} = (-1)^X$，所以有

$$E(\hat{\theta}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-2\lambda},$$

故 $\hat{\theta} = (-1)^X$ 是 $\theta = \mathrm{e}^{-2\lambda}$ 的无偏估计.

23. 设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$（记 $E(X) = b$）;

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 (1) 因为 $Y = \ln X$，所以 $X = e^Y$. 于是

$$E(X)=E(e^Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy \overset{令\ t=y-\mu}{====} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-1)^2}{2}}dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

(2) 由于$Y\sim N(\mu,1)$, 所以μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\overline{Y}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}},\overline{Y}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}})$$

当$\alpha=0.05$时, 查表可得$u_{\alpha/2}=u_{0.025}=1.96$. 又由题设可算得

$$\overline{Y}=\frac{1}{4}[\ln(0.50)+\ln(1.25)+\ln(0.8)+\ln(2.00)]=\frac{1}{4}\ln 1=0,$$

所以μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为$(-0.98,\ 0.98)$.

(3) 由于$P\left\{\overline{Y}-0.98<\mu<\overline{Y}+0.98\right\}=0.95$, 所以

$$P\left\{\overline{Y}-0.98+\frac{1}{2}<\mu+\frac{1}{2}<\overline{Y}+0.98+\frac{1}{2}\right\}=P\left\{\overline{Y}-0.48<\mu+\frac{1}{2}<\overline{Y}+1.48\right\}=0.95.$$

又因为e^x为x的单调函数, 故

$$P\left\{e^{\overline{Y}-0.48}<e^{\mu+\frac{1}{2}}<e^{\overline{Y}+1.48}\right\}=0.95.$$

注意到$\overline{Y}=0$, 所以$b=e^{\mu+\frac{1}{2}}$的置信度为 0. 95 的置信区间为$(e^{-0.48},e^{1.48})$.

24. 设$X_1,\cdots,X_n$是来自于正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本, (1) 求σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信上限; (2) 说明如何构造$\log\sigma^2$的具有固定长度L的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解 (1) 因为$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, 所以

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$$

即

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}>\sigma^2\right\}=1-\alpha.$$

所以σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信上限为$\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$.

(2) 由于σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right),$$

所以$\log\sigma^2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\log\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\log\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right),$$

其长度为$\log\dfrac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$. 因此要使其具有固定长度$L$, 必须选择样本容量$n$使其满足

$\log\dfrac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=L$, 即$\dfrac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=10^L$.

25. 设$X_i=\dfrac{\theta}{2}t_i^2+\varepsilon_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 这里ε_i是均值为 0, 方差为σ^2(设为已知)的独立正态随机变量.

(1)用θ的估计量$\hat{\theta}=\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^n t_i^2x_i}{\sum\limits_{i=1}^n t_i^4}$, 求$\theta$的具有固定长度$L$的置信度为$1-\alpha$的置信区间;

(2)若$0\le t_i\le 1$, $i=1,2,\cdots,n$, 除此限制外, 我们可以自由地选择t_i, 我们应该使用t_i的什么值, 能使我们的区间对于给定的α尽可能地短.

解 (1) 由题意可知, $X_i\sim N(\dfrac{\theta}{2}t_i^2,\sigma^2)$ $(i=1,2\cdots,n)$, 且相互独立, 由于$\hat{\theta}$是X_i的线性组合, 故也服从正态分布. 又

$$E(\hat{\theta})=\frac{2\sum\limits_{i=1}^n t_i^2E(X_i)}{\sum\limits_{i=1}^n t_i^4}=\frac{\theta\sum\limits_{i=1}^n t_i^4}{\sum\limits_{i=1}^n t_i^4}=\theta,\quad D(\hat{\theta})=\frac{4\sum\limits_{i=1}^n t_i^4D(X_i)}{(\sum\limits_{i=1}^n t_i^4)^2}=\frac{4\sigma^2}{\sum\limits_{i=1}^n t_i^4},$$

于是$U=\dfrac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{4\sigma^2\Big/\sum\limits_{i=1}^n t_i^4}}\sim N(0,1)$. 由$P\{u_{1-\alpha+\alpha_1}<U<u_{\alpha_1}\}=1-\alpha$, 解得$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\hat{\theta}-\frac{2\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n t_i^4}}u_{\alpha_1},\hat{\theta}-\frac{2\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n t_i^4}}u_{1-\alpha+\alpha_1}\right).$$

因此, 要使得上面的区间具有固定的长度, 必须选择合适的 α_1, 使 $\dfrac{2\sigma(u_{\alpha_1}-u_{1-\alpha+\alpha_1})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^4}}=L$.

(2) 由于 $0\le t_i\le 1$, $i=1,2,\cdots,n$, 因此要使区间长度尽可能地短, 必须使上式的分母 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^4}$ 尽可能的大, 因此可以取 $t_i=1$, $i=1,2,\cdots,n$.

26. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态母体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本, 其中 σ^2 已知. 试证明形如 $(\overline{X}-u_{\alpha_1}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha_2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 的置信度为 $1-\alpha$（$\alpha_1+\alpha_2=\alpha$）的置信区间中, 当 $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}$ 时, 区间长度最短.

证 不妨设 $\alpha_1<\dfrac{\alpha}{2}<\alpha_2$, 则 $u_{\alpha_2}<u_{\alpha/2}<u_{\alpha_1}$. 因为 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, 故 $\alpha_2-\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}-\alpha_1$. 于是

$$\int_{u_{\alpha_2}}^{u_{\frac{\alpha}{2}}}\varphi(x)dx=\alpha_2-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}-\alpha_1=\int_{u_{\frac{\alpha}{2}}}^{u_{\alpha_1}}\varphi(x)dx,$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数.

又因为当 $x>0$ 时, $\varphi(x)$ 是单调递减的, 所以有 $u_{\alpha_1}-u_{\frac{\alpha}{2}}>u_{\frac{\alpha}{2}}-u_{\alpha_2}$, 即

$$u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}>2u_{\frac{\alpha}{2}}.$$

于是, 区间 $(\overline{X}-u_{\alpha_1}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha_2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 的长度为 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2})>\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$, 而 $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}$ 即为 $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}$ 时置信区间的长度.

因此, 形如 $(\overline{X}-u_{\alpha_1}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha_2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ 的置信度为 $1-\alpha$（$\alpha_1+\alpha_2=\alpha$）的置信区间中, 当 $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}$ 时, 区间长度最短.

27. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1})$ 和 $(Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$ 是分别来自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的两个相互独立的样本, (1) 若 σ_1^2, σ_2^2 已知, 求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的具有固定长度 L 的置信区间; (2) 若 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 为使置信度为 90%的 $\mu_1-\mu_2$ 的置信区间长度为 $\dfrac{2}{5}\sigma$, 样本容量 $n_1=n_2=n$ 应取多大?

解 (1) 当 σ_1^2, σ_2^2 已知时, 统计量

$$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1).$$

因此

$$P\{-u_{\alpha_1}<\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}<u_{\alpha-\alpha_1}\}=1-\alpha,$$

即

$$P\{(\bar{X}-\bar{Y})-u_{\alpha-\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<(\bar{X}-\bar{Y})-u_{\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\}=1-\alpha.$$

因此 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-u_{\alpha-\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{X}-\bar{Y}+u_{\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right),$$

要使该区间具有固定长度 L, 必须选择适当的 α_1 和样本容量 n_1 和 n_2, 使得

$$u_{\alpha-\alpha_1}+u_{\alpha_1}=\frac{L}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

(2) 由于 $L=\frac{2}{5}\sigma$, $n_1=n_2=n$, 取 $\alpha_1=\frac{\alpha}{2}$, 则上式变成

$$u_{\alpha-\alpha_1}+u_{\alpha_1}=2u_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2}{5}\sigma}{\sigma\sqrt{\frac{2}{n}}},$$

解得 $n=(5\sqrt{2}\,u_{\frac{\alpha}{2}})^2$. 又 $\alpha=0.1$, 查表可得 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.05}=1.645$, 代入计算得 $n=135.3$. 由于容量为整数, 故取 $n=136$.

28. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的样本,

(1) 试求未知参数 μ 的极大似然估计量;

(2) 问所得的估计量是否为 μ 的一致的、无偏的达到罗-克拉美不等式下界的有效估计?

解 (1) 因为 $X\sim N(\mu,1)$, 所以 X 概率密度为

$$f(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}.$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本观察值, 则似然函数为

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right),$$

等式两边同时取对数得

$$\ln L(\mu)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

令 $$\frac{\mathrm{d}\ln L(\mu)}{\mathrm{d}\mu}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0,$$

解得 μ 的极大似然估计值为 $\hat{\mu}=\bar{x}$, 从而 μ 的极大似然估计量为 $\hat{\mu}=\bar{X}$.

(2) 由辛钦大数定律知, 当 $n\to\infty$ 时, $\hat{\mu}=\bar{X}$ 依概率收敛于 μ, 故 $\hat{\mu}=\bar{X}$ 是 μ 的一致估计量. 又

$$E(\hat{\mu})=E(\bar{X})=E(X)=\mu,$$

故 $\hat{\mu}=\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计量.

由于 $$\ln f(x,\mu)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}(x-\mu)^2,$$

所以 $$\frac{\partial}{\partial\mu}\ln f(x,\mu)=x-\mu.$$

于是信息量

$$I(\mu)=E\left(\frac{\partial\ln f(X,\mu)}{\partial\mu}\right)^2=E(X-\mu)^2=D(X)=1.$$

而 $$D(\hat{\mu})=D(\bar{X})=\frac{D(X)}{n}=\frac{1}{n}=\frac{1}{nI(\mu)},$$

故 $\hat{\mu}=\bar{X}$ 是参数 μ 的有效估计量.

综上所述, $\hat{\mu}=\bar{X}$ 是参数 μ 的一致的、无偏的达到罗-克拉美不等式下界的有效估计.

29. 设总体 X 概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 证明 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量;

(3) 证明 $D(\hat{\theta})$ 小于罗-克拉美不等式的下界.

解 (1) 因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}=\frac{2}{3}\theta,$$

由矩估计有 $E(X)=\dfrac{2}{3}\theta=\overline{X}$，所以参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}\overline{X}$.

(2) 由于

$$E(\hat{\theta})=\frac{3}{2}E(\overline{X})=\frac{3}{2}E(X)=\theta,$$

故 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

(3)因为 $\qquad \ln f(x,\theta)=\ln 2x-2\ln\theta,$

所以 $$\frac{\partial \ln f}{\partial\theta}=-\frac{2}{\theta}.$$

于是信息量 $$I(\theta)=E\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2=\frac{4}{\theta^2}.$$

又 $$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\theta}\frac{2x^3}{\theta^2}=\frac{1}{2}\theta^2,$$

故 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{18}\theta^2.$$

由于 $$D(\hat{\theta})=\frac{9}{4}D(\overline{X})=\frac{9}{4n}D(X)=\frac{1}{8n}\theta^2<\frac{1}{4n}\theta^2=\frac{1}{nI(\theta)},$$

所以 $D(\hat{\theta})$ 小于罗-克拉美不等式的下界.