第三章　练习题参考答案

1. $N(0,5)$

2. 由 $P(A\cup B)=\frac{7}{9}$ 及 X,Y 相互独立得, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\frac{2}{9}$, 由此得

$$\frac{3-a}{2}\cdot\frac{a-1}{2}=\frac{2}{9},$$

解得: $a=\frac{5}{3}$ 或 $\frac{7}{3}$

3.

Z	0	1
P	0.25	0.75

4. $P(\max\{X,Y\}\ge 0)=P(X\ge 0\text{或}Y\ge 0)$

$$=P(X\ge 0)+P(Y\ge 0)-P(X\ge 0,Y\ge 0)=\frac{5}{7}$$

5. 由 $P(X=x_1,Y=y_1)+P(X=x_2,Y=y_1)=P(Y=y_1)$, 可得

$$P(X=x_1,Y=y_1)=\frac{1}{24},$$

因为 X,Y 相互独立, 所以

$$P(X=x_1,Y=y_1)=P(X=x_1)P(Y=y_1),$$

由此得 $P(X=x_1)=\frac{1}{4}$, 由

$$P(X=x_1)+P(X=x_2)=1,$$

可得 $P(X=x_2)=\frac{3}{4}$, 由

$$P(X=x_1,Y=y_1)+P(X=x_1,Y=y_2)+P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)$$

得 $P(X=x_1,Y=y_3)=\frac{1}{12}$, 因为 X,Y 相互独立, 所以

$$P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)P(Y=y_3),$$

由此得 $P(Y=y_3)=\frac{1}{3}$, 由

$$P(Y=y_3)=P(X=x_1,Y=y_3)+P(X=x_2,Y=y_3),$$

可得 $P(\xi = x_2, \eta = y_3) = \dfrac{1}{4}$, 由

$$P(\eta = y_1) + P(\eta = y_2) + P(\eta = y_3) = 1$$

可得 $P(Y = y_2) = \dfrac{1}{2}$, 由联合分布律性质可得 $P(X = x_2, Y = y_2) = \dfrac{3}{8}$,

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X = x_i) = p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y = y_j) = p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

6. 设 (X_1, X_2) 的联合分布律为:

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}

由 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$ 得: $p_{11} = 0$, $p_{13} = 0$, $p_{31} = 0$, $p_{33} = 0$

由 $P(X_1 = -1) = p_{11} + p_{12} + p_{13}$ 得: $p_{12} = 0.25$,

由 $P(X_2 = -1) = p_{11} + p_{21} + p_{31}$ 得: $p_{21} = 0.25$,

由 $P(X_2 = 1) = p_{13} + p_{23} + p_{33}$ 得: $p_{23} = 0.25$,

由 $P(X_1 = 1) = p_{31} + p_{32} + p_{33}$ 得: $p_{32} = 0.25$,

由联合分布律性质可得：$p_{22}=0$（也可用 $P(\xi_1=0)=0.5$ 得到）

所以

$$P(X_1=X_2)=P(X_1=-1,X_2=-1)+P(X_1=0,X_2=0)$$
$$+P(X_1=1,X_2=1)=0$$

7. $p+q=7/30$，$p=1/10$，$q=2/15$

8.

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	3/35	2/35
1	0	6/35	12/35	2/35
2	1/35	6/35	3/35	0

9.

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Y	1	2	3	4	5	6
P	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

10. $P(Y_1=0,Y_2=0)=P(X\le 1,X\le 2)=P(X\le 1)=1-e^{-1}$,

$P(Y_1=0,Y_2=1)=P(X\le 1,X>2)=0$,

$P(Y_1=1,Y_2=0)=P(X>1,X\le 2)=P(1<X\le 2)=e^{-1}-e^{-2}$,

$P(Y_1=1,Y_2=1)=P(X>1,X>2)=P(X>2)=e^{-2}$

11.（1）由联合分布律性质得: $k=\dfrac{1}{36}$

（2）$P(1\le X\le 2,Y\ge 2)=P(X=1,Y=2)+P(X=1,Y=3)$

$$+P(X=2,Y=2)+P(X=2,Y=3)=\frac{15}{36}$$

（3）$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\dfrac{30}{36}$

（4）$P(Y<2)=P(Y=1)=\dfrac{6}{36}$

（5）在 $X=1$ 条件下 Y 的条件分布律为

$$P(Y=1|X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{1/36}{6/36}=\frac{1}{6}$$

$$P(Y=2|X=1)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=\frac{2/36}{6/36}=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=3|X=1)=\frac{P(X=1,Y=3)}{P(X=1)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}$$

在 $Y=2$ 条件下 X 的条件分布律为

$$P(X=1|Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{2/36}{12/36}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=2|Y=2)=\frac{P(X=2,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{4/36}{12/36}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=3|Y=2)=\frac{P(X=3,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{6/36}{12/36}=\frac{1}{2}$$

（6）因为 $P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$, 故 X 与 Y 独立

12.（1）因为随机变量 X,Y 相互独立, 所以

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j),$$

由此得(X,Y)的联合分布律为:

X \ Y	1	2	3
−3	0.1	0.05	0.1
−2	0.1	0.05	0.1
−1	0.2	0.1	0.2

(2)

$2X+Y$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
P	0.1	0.05	0.2	0.05	0.3	0.1	0.2

13. $P(X=0,Z=0)=P(X=0,Y=0)=(1-p)^2$,

$P(X=0,Z=1)=P(X=0,Y=1)=p(1-p)$,

$P(X=1,Z=0)=P(X=1,Y=1)=p^2$,

$P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=0)=p(1-p)$,

因为X和Z相互独立, 所以

$$P(X=0,Z=1)=P(X=0)\ P(Z=1),$$

由此得

$$p(1-p)=(1-p)\cdot 2p(1-p),$$

从而$p=0.5$

14. 因为(X,Y)服从均匀分布, 所以易得

$P(X\le Y)=0.25$, $P(X>2Y)=0.5$, $P(Y<X\le 2Y)=0.25$

而(X,Y)的可能取值为$(0,0),(1,0),(1,1)$, 且

$$P(U=0,V=0)=P(X\le Y,\ X\le 2Y)=P(X\le Y)=0.25$$

$$P(U=1,V=0)=P(X>Y,\ X\le 2Y)=P(Y<X\le 2Y)=0.5$$

$$P(U=1,V=1)=P(X>Y,\ X>2Y)=P(X>2Y)=0.25$$

所以随机变量(U,V)的联合分布律为

U \ V	0	1

0	0.25	0
1	0.5	0.25

15.（1）因 $\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = 1$，即 $\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy = 1$，

解得 $k = \frac{1}{8}$.

（2）$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}(3-x), & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

同理得

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{1}{4}(5-y), & 2 \le y \le 4, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（3）$P(X+Y \le 4) = \iint_{x+y\le 4} f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx\int_2^{4-x} \frac{1}{8}(6-x-y)dy = \frac{2}{3}$

（4）$P(X<1, Y<3) = \int_0^1 dx\int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y)dy = \frac{3}{8}$

（5）$P(X<1.5) = P(X<1.5, 2 \le Y \le 4) = \int_0^{1.5} dx\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy = \frac{27}{32}$

（6） 由于 $f(x,y) \ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立

16.（1）由 $\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 kx^2 ydy = 1$，得 $k = \frac{21}{4}$

（2）$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2 ydy, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

$$= \begin{cases} \frac{21}{8}x^2(1-x^4), & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

同理得

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) $P(X<Y)=\iint\limits_{x<y} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{y}\frac{21}{4}x^2 ydx=\frac{17}{20}$

(4) 由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立

17. 因为 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)$

$$=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy=\begin{cases}\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-x-2y}dy, & z>0,\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=\frac{dF_Z(z)}{dz}=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$