第四章练习答案

一、填空题

1. 如果 $EX^2=200$, $DX=100$, 则 $EX=$ 10 .

2. 若随机变量 X 服从参数为 $5, 0.1$ 的二项分布, 即 $X\sim B(5,0.1)$, 则 $D(1-2X)=$ __1.8__.

解 $D(1-2X)=4DX=4\times5\times0.1\times(1-0.1)=1.8$.

3. 设随机变量 X 服从一区间上的均匀分布, 且 $EX=3, DX=\frac{1}{3}$, 则 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 2\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

解 由 $EX=\frac{a+b}{2}=3$, $DX=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{3}$, 解得 $a=2, b=4$, 故 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 2\le x\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

4. 已知 $X\sim N(-2,0.4^2)$, 则 $E(X+3)^2=$ 1.16 .

解 $EX=-2$, $DX=0.4^2$, $EX^2=DX+(EX)^2=4.16$,

$$E(X+3)^2=EX^2+6EX+9=1.16$$

5. 已知 X 的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x+1)^2}{18}}$, 求 $EX=$ __-1__ ,

$DX=$ __9__.

解 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot3}\mathrm{e}^{-\frac{(x-(-1))^2}{2\cdot3^2}}$, 故 $EX=\mu=-1$, $DX=\sigma^2=3^2=9$.

6. 若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{0<X<4\}=0.6$, 则 $P\{X<0\}=$ 0.2 .

解 $P\{X<0\}=P\{X>4\}$, 故 $P\{X<0\}=\frac{1}{2}[1-P\{0<X<4\}]=0.2$.

二、单项选择题

1. 掷一颗均匀的骰子 600 次, 那么出现“一点”次数的均值为(　　).

A. 50　　　　　B. 100　　　　　C. 120　　　　　D. 150

解　设出现一点的次数为 X, 则 $X \sim B(600, \frac{1}{6})$, $EX = np = 100$, 故本题应选 B.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$, 则(　　).

A. X 服从指数分布　　　　　B. $EX = 1$

C. $DX = 0$　　　　　D. $P(X \le 0) = 0.5$

解　本题应选 B.

3. 已知 $X \sim B(n, p)$, 且 $EX = 8$, $DX = 4.8$, 则 $n =$ (　　).

A. 10　　　　　B. 15　　　　　C. 20　　　　　D. 25

解　由 $np = 8, np(1-p) = 4.8$, 解得 $n = 20$, 故本题应选 C.

4. 若随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 则 X^2 的数学期望是(　　).

A. λ　　　　　B. $\frac{1}{\lambda}$　　　　　C. λ^2　　　　　D. $\lambda^2 + \lambda$

解　$EX = DX = \lambda$, 故 $EX^2 = DX + (EX)^2 = \lambda + \lambda^2$, 本题应选 D.

5. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Ax + B, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 且 $EX = \frac{7}{12}$, 则(　　).

A. $A = 1, B = -0.5$　　　　　B. $A = -0.5, B = 1$

C. $A = 0.5, B = 1$　　　　　D. $A = 1, B = 0.5$

解　$EX = \int_0^1 x(Ax + B)\,dx = \frac{A}{3} + \frac{B}{2} = \frac{7}{12}$, $\int_0^1 (Ax + B)\,dx = \frac{A}{2} + B = 1$,

所以 $A = 1, B = \frac{1}{2}$, 故本题应选 D.

6. 设 $X \sim U(-1, 1)$, 则下列说法中错误的是(　　)

A. $EX^2 = \frac{1}{3}$　　　　　B. $EX = 0$

C. $DX = \frac{2}{3}$　　　　　D. $P(-1 \le X \le 1) = 1$

解　$EX = \frac{-1+1}{2} = 0$,　　$DX = \frac{(-1-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$,

$EX^2 = DX + (EX)^2 = \frac{1}{3}$,　$P\{-1 \le X \le 1\} = 1$,

故本题选 C.

三、计算题

1. 设随机变量 X 具有分布律为:

$$P\{X=i\}=\frac{1}{5},\quad i=1,2,3,4,5.$$

求DX.

解 $EX=\sum_{i=1}^{5} i\times\frac{1}{5}=3$，$EX^2=\sum_{i=1}^{5} i^2\times\frac{1}{5}=11$，$DX=11-3^2=2$.

2. 某教材平均每页有 2 个疵点, 每页中的疵点数 X 服从泊松分布, 求该教材某页疵点数少于 3 个的概率.

解 $X\sim P(2)$，

$$P\{X<3\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}$$

$$=\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}=5e^{-2}\approx 0.6767.$$

3. 设有十只同种电器元件, 其中有两只废品, 装配仪器时, 从这批元件中任取一只, 如是废品, 则重新任取一只; 若仍是废品, 则仍再任取一只. 求在取到正品之前, 已取出废品数的期望和方差.

解 设在取到正品之前, 已取出废品数为 X，则 X 的所有可能取值为 $0,1,2$，其分布律为

$$P\{X=0\}=\frac{4}{5},\ P\{X=1\}=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{45},\ P\{X=2\}=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45},$$

$$EX=\frac{2}{9},\quad EX^2=\frac{4}{15},\quad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{88}{405}.$$

4. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x^2), & -1<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求: (1) 常数 a; (2) $P(X\geq\frac{1}{2})$; (3) 求 EX, DX.

解 (1) 由 $\int_{-1}^{1} a(1-x^2)\,dx=\frac{4}{3}a=1$，得 $a=\frac{3}{4}$.

(2) $P(X\geq\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{3}{4}(1-x^2)dx=\frac{5}{32}$.

(3) $EX=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)dx=0$，$\quad EX^2=\int_{-1}^{1}x^2\frac{3}{4}(1-x^2)dx=\frac{1}{5}$,

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{5}.$$

5. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且已知 $EX=0.5$, $DX=0.15$, 求系数 a, b, c.

解 $\int_0^1(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=1$,

$EX=\int_0^1 x(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}=0.5$,

$EX^2=\int_0^1 x^2(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{c}{3}=0.4=DX+(EX)^2$,

解上述三个方程组, 得 $a=12, b=-12, c=3$.

6. 已知 X 服从参数为 1 的指数分布, 且 $Y=X+\mathrm{e}^{-2X}$, 求 EY.

解 $EY=EX+E(\mathrm{e}^{-2X})=1+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

7. 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2, 机器发生故障时全天停止工作. 若一周五个工作日里无故障, 可获利润 10 万元, 发生一次故障获利润 5 万元, 发生两次故障获利润 0 万元, 发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元, 问一周内期望利润是多少?

解 设一周五个工作日发生故障的次数为 X, 则 $X\sim B(5,0.2)$, 又设一周获利 Y 万元, 则 Y 的可能取值为 10, 5, 0, -2, 其分布律为

$P(Y=10)=P(X=0)=0.3277$, $P(Y=5)=P(X=1)=0.4096$,

$P(Y=0)=P(X=2)=0.2048$, $P(Y=-2)=P(X\geq 3)=0.0579$,

从而 $EY=5.216$.

8. 据统计, 一位 40 岁的健康者在 5 年内活着或自杀的概率为 p $(0<p<1)$, 在 5 年内非自杀死亡的概率为 $1-p$, 保险公司开办 5 年人寿保险, 参加者需交保险费 a 元. 若 5 年内非自杀身亡, 公司赔偿 b 元($b>a$). 试问 b 应如何确定才能使公司期望获益?若有 m 人参加保险, 公司期望可从中收益多少?

解 设 X_i 表示公司从第 i 个参保者获得的收益, 则 X_i 分布律为

X_i	$a-b$	a
P	$1-p$	p

当 $EX_i=ap+(a-b)(1-p)=a-b(1-p)>0$, 即 $a<b<\frac{a}{1-p}$ 时, 公司能够获益.

对于若有 m 个人, 设公司获益为 X 元, $X=\sum_{i=1}^{m}X_i$, 则期望收益为

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} EX_i = ma - mb(1-p).$$