工商线代 2016/2017-1(A)参考答案

一、选择(每题 3 分)

1, D　　2, C　　3,　A　4, C　　5, B

二、填空（每题 3 分）

1, 28 ；　　2,　-24 ；　3, n-1　　4,　105；　　5,　-3<a<1

三、(1) $D_n=\begin{vmatrix} x+1 & x & \cdots & x \\ x & x+2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & x & \cdots & x \\ -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$ ………… 4 分

$=n!\begin{vmatrix} 1+x & \frac{x}{2} & \frac{x}{3} & \cdots & \frac{x}{n} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ ………… 6 分

$=n!\begin{vmatrix} 1+x\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} & \frac{x}{2} & \frac{x}{3} & \cdots & \frac{x}{n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=n!(1+x\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})$ ………8 分

(2) 解　$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$　所以方程为: 2 分

$$-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}-2\boldsymbol{X}$$

$\therefore\ \boldsymbol{X}=(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$ 5 分

$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{-1}$ 7 分

$=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$ 10 分

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$………（4 分）

向量组 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组是 α_1,α_2 ……………………（7 分）

$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2,\alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2$ ……………………（11 分）

(4) 解： $(A\vdots b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

…………………3 分

（1） 当 $a\neq 1$ 时，$R(A\vdots b)=R(A)=4$，此线性方程组有唯一解。…..5 分

（2） 当 $a=1,b\neq -1$ 时，$R(A\vdots b)\neq R(A)$，线性方程组无解。……….7 分

（3）当 $a=1,b=-1$ 时，$R(A\vdots b)=R(A)=2<4$，此线性方程组有无穷组解

……………9 分

易知当 $a=1,b=-1$ 时，此线性方程组有无穷组解，其通解为

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ （k_1,k_2 为任意常数 ）…….12 分

(5) 解：（1） 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & c \end{pmatrix}$

由于 $R(A)=2$， 所以 $|A|=0$ ，得 $c=3$ ………………3 分

(2) 由 $|A-\lambda E|=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$ 得 A 的特征值

为 $\lambda_1=4,\lambda_2=9,\lambda_3=0$ ………6 分

它们对应的特征向量分别为 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ ………9 分

单位化后得 $\gamma_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\gamma_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ …………12 分

故正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

化二次型为 $f=4y_1^2+9y_2^2$ …………………..14 分

(6) 解： $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$ ……………. .（2 分）

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$ ……………………（3 分）

$$=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&3&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$ ………………………………（7 分）

$$\alpha_A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$$ ………………….（10 分）

四、若 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=\theta$。（1 分）整理得

$$(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2+2k_3)\alpha_2+(k_1+2k_2+3k_2)\alpha_3=\theta,$$

于是

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 + 2k_3 = 0 \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \end{cases} \quad 因为 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

由克莱姆法则，只有零解，即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关 ….5 分