第二章 随机变量及其分布复习题解答

一、填空题

1. 设 $P(X \le b) = 1-\beta$，$P(X \ge a) = 1-\alpha$，其中 $a < b$，则 $P(a \le X \le b) =$ ______。

解：$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a) = 1-\beta-\left[1-(1-\alpha)\right] = 1-\alpha-\beta$

2. 已知 10 件产品中有 3 件是次品，从中有放回取出 5 件产品，则所取出的 5 件产品中次品数 X 的分布律为______________________；如果是无放回取出 5 件产品，则所取出的 5 件产品中次品数 Y 的分布律为______________________。

解：$X \sim b(5, 0.3)$，Y 的分布律为 $P(Y=k) = \dfrac{C_3^k C_7^{5-k}}{C_{10}^5}, k = 0,1,2,3$

3. 设 $X \sim b(2, p)$，$Y \sim b(3, p)$，且 $P(X \ge 1) = \dfrac{5}{9}$，则 $P(Y \ge 1) =$ ______________。

解：$P(X \ge 1) = 1-(1-p)^2 = \dfrac{5}{9}$， $p = \dfrac{1}{3}$，所以 $P(Y \ge 1) = 1-(1-p)^3 = \dfrac{19}{27}$

4. 设 $X \sim P(\lambda)$，且 $P(X=1) = P(X=2)$，则 $\lambda =$ ____________。

解：由 $P(X=1) = P(X=2)$ 得：$\lambda e^{-\lambda} = \dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$，所以 $\lambda = 2$

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0.3 & 1 \le x < 2 \\ 0.6 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$，则 X 的分布律为

_________________。

解：$P(X=1) = P(X \le 1) - P(X < 1) = 0.3$，$P(X=2) = 0.3$，$P(X=3) = 0.4$

6. 设 $X \sim U(1,5)$，则当 $x_1 < 1 < x_2 < 5$ 时，$P(x_1 < X < x_2) =$ __________________；当 $1 < x_1 < 5 < x_2$ 时，$P(x_1 < X < x_2) =$ __________________。

解：当 $x_1<1<x_2<5$ 时，$P(x_1<X<x_2)=P(x_1<X<1)+P(1\le X<x_2)=\dfrac{x_2-1}{4}$

当 $1<x_1<5<x_2$ 时，$P(x_1<X<x_2)=P(x_1<X<5)+P(5\le X<x_2)=\dfrac{5-x_1}{4}$

7. 已知 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$a\neq 0$，则 $aX+b\sim$____________________。

解：$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$

8. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-\frac{x^2-4x+4}{6}}$，则 $\mu=$_____，

$\sigma^2=$______。

解：$\mu=2$，$\sigma^2=3$

9. 设 $X\sim N(\mu,9)$，且 $P(X>c)=P(X<c)$，则 $c=$_____________。

解：由 $P(X>c)=P(X<c)$ 得：$1-\Phi\left(\dfrac{c-\mu}{3}\right)=\Phi\left(\dfrac{c-\mu}{3}\right)$，所以 $\Phi\left(\dfrac{c-\mu}{3}\right)=0.5$

从而 $c=\mu$

10. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & other\end{cases}$，$Y$ 是 X 的三次独立观察中小于 0.5 的次数，则 Y 的分布律为__________________。

解：$p=P(X<0.5)=\int_0^{0.5}f(x)dx=0.25$，$Y\sim b(3,0.25)$

11. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}} & |x|<1\\ 0 & other\end{cases}$，则 $A=$________，

$P(|X|<0.5)=$_________，X 的分布函数 $F(x)=$_________________。

解：由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得：$A=\dfrac{1}{\pi}$

$P(|X|<0.5)=\int_{-0.5}^{0.5}f(x)dx=\dfrac{1}{\pi}\arcsin x|_{-0.5}^{0.5}=\dfrac{1}{3}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \dfrac{1}{\pi}\arcsin x+\dfrac{1}{2} & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

12. 设 $X \sim U(0,2)$，则 $Y = X^2$ 的密度函数为________________。

解：因为 $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ P(|X| \le \sqrt{y}) & y > 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) & y > 0 \end{cases}$$

所以 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ f_X(\sqrt{y}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{y}} & y > 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}} & 0 < y < 4 \\ 1 & y \ge 4 \end{cases}$$

二、单项选择

1. 当随机变量 X 的可能值充满区间__A__时函数 $f(x) = \cos x$ 可以成为随机变量 X 的密度函数。

（A）$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (B) $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ （C）$[0, \pi]$ (D) $\left[\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$

2. 下列函数中，___A____可以成为连续型随机变量的分布函数。

（A）$F(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$ （B）$F(x) = \begin{cases} e^{-x} & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}$

（C）$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^x & x \ge 0 \end{cases}$ （D）$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 + e^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$

3. 设 X 的密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，且 $f(x)$ 是偶函数，则有__B__。

（A） $F(-x) = 1 - \int_0^x f(t)dt$ （B） $F(-x) = \dfrac{1}{2} - \int_0^x f(t)dt$

（C） $F(-x) = F(x)$ （D） $F(-x) = 2F(x) - 1$

解：$F(-x)=\int_{-\infty}^{-x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{-x} f(t)dt=\frac{1}{2}-\int_{-x}^{0} f(t)dt=\frac{1}{2}-\int_{0}^{x} f(t)dt$

4. 设 $X\sim N(1,\sigma^2)$，其密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，则___B__。

（A）$P(X<0)=P(X>0)$　　（B）$P(X<1)=P(X>1)$

（C）$F(-x)=1-F(x)$　　（D）$f(-x)=f(x)$

解：$P(X<1)=\Phi\left(0\right)=0.5, P(X>1)=1-\Phi(0)=0.5$

5. 设 $X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记 $p_1=P(X<\mu-4)$，$p_2=P(Y\ge\mu+5)$，则___A___。

（A）$p_1=p_2$　　（B）$p_1>p_2$

（C）$p_1<p_2$　　（D）p_1,p_2 的大小无法确定

解：$p_1=P(X<\mu-4)=\Phi\left(-1\right)$，$p_2=P(Y\ge\mu+5)=1-\Phi(1)=\Phi(-1)$

6. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)$ 的值随着 σ 的增加____C____。

（A）单调增加　（B）单调减少　（C）不变　（D）增减不定

解：$P(|X-\mu|<\sigma)=P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=\Phi(1)-\Phi(-1)$

7. 设 X,Y 的分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x)$，若 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，则 a,b 应取值__A__。

（A）$a=3/5,b=-2/5$　　（B）$a=2/3,b=2/3$

（C）$a=-1/2,b=3/2$　　（D）$a=1/2,b=-3/2$

解：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[aF_1(x)-bF_2(x)\right]=a-b=1$ 知：只有 A 是满足这条件

8. 设 X 的密度函数为 $f(x)$，则 $Y=-2X+3$ 的密度函数为__B__。

（A）$-\frac{1}{2}f\left(-\frac{y-3}{2}\right)$　　（B）$\frac{1}{2}f\left(-\frac{y-3}{2}\right)$

（C） $-\frac{1}{2}f\left(-\frac{y+3}{2}\right)$　　　　（D） $\frac{1}{2}f\left(-\frac{y+3}{2}\right)$

解：由 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-2X+3\le y)=P(X\ge\frac{3-y}{2})=1-F_X(\frac{3-y}{2})$ 得：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{2}f(\frac{3-y}{2})$$

三、计算题

1. 某车间有 20 部同型号机床，短线产品机床开支的概率是 0.8，假定各机床是否开动彼此相互独立，每部机床开动时所消耗的电能为 15 单位，求这个车间消耗电能不少于 270 单位的概率。

解：设 X 是 20 部同型号机床同时开动数，则 $X\sim b(20,0.8)$。

$$P(15X\ge 270)=P(X\ge 18)=\sum_{k=18}^{20}C_{20}^{k}0.8^{k}0.2^{20-k}$$

2. 甲、乙二人轮流投篮直到一人投中为止。设甲投中的概率为 0.4，乙投中的概率为 0.5，求（1）每人投篮次数的分布律；（2）二人投篮次数和的分布律。

解：（1）设 X,Y 分别是甲、乙两人的投篮次数，A_i 表示甲在他的第 i 次投时投中，B_i 表示乙在他的第 i 次投时投中，则 X 的所有可能取值为 $1,2,\cdots$，Y 的所有可能取值为 $0,1,2,\cdots$，且

$$\{X=x\}=\bar{A}_1\bar{B}_1\cdots\bar{A}_{x-1}\bar{B}_{x-1}(A_x+\bar{A}_xB_x),$$

$$\{Y=0\}=A_1,\quad \{Y=y\}=\bar{A}_1\bar{B}_1\cdots\bar{A}_{y-1}\bar{B}_{y-1}(\bar{A}_yB_y+\bar{A}_y\bar{B}_yA_{y+1})$$

所以 $P(X=x)=(0.6\times0.5)^{x-1}0.4+(0.6\times0.5)^{x-1}0.6\cdot0.5$

$$=0.7\times0.3^{x-1},\ x=1,2,\cdots$$

$P(Y=0)=0.4$， $P(Y=y)=(0.6\times0.5)^{y-1}0.6\times0.5+(0.6\times0.5)^{y}\times0.4$

$$=1.4\times 0.3^y,\ y=1,2,\cdots$$

（2）设Z是甲、乙二人投篮次数和，则Z的所有可能取值为$1,2,\cdots$，

且 $\{Z=z\}=\begin{cases}\bar{A}_1\bar{B}_1\cdots\bar{A}_{k-1}\bar{B}_{k-1}\bar{A}_kB_k & z=2k\\ \bar{A}_1\bar{B}_1\cdots\bar{A}_{k-1}\bar{B}_{k-1}\bar{A}_k\bar{B}_kA_{k+1} & z=2k+1\end{cases}$

所以$P(Z=z)=\begin{cases}P(\bar{A}_1\bar{B}_1\cdots\bar{A}_{k-1}\bar{B}_{k-1}\bar{A}_kB_k)=0.3^k & z=2k\\ P(\bar{A}_1\bar{B}_1\cdots\bar{A}_{k-1}\bar{B}_{k-1}\bar{A}_k\bar{B}_kA_{k+1})=0.4\times 0.3^k & z=2k+1\end{cases}$

3. 设X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}ax+b & 0<x<1\\ 0 & other\end{cases}$，且$P(X>\frac{1}{3})=P(X<\frac{1}{3})$，求

（1）常数a,b；（2）分布函数$F(x)$。

解：（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，及$P(X>\frac{1}{3})=P(X<\frac{1}{3})$得：

$$\int_0^1(ax+b)dx=1,\int_{1/3}^1(ax+b)dx=\int_0^{1/3}(ax+b)dx$$

所以$a=-\frac{3}{2},b=\frac{7}{4}$

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{7}{4}x-\frac{3}{4}x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

4. 设X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-x} & x\ge 0\\ 0 & other\end{cases}$，求（1）常数$A,B$；（2）密度函数$f(x)$；（3）$P(-3<X<1)$；（4）$Y=X^2$的密度函数。

解：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=A=1$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}-Be^{-x} & x\ge 0\\ 0 & other\end{cases}$$

由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$得：$B=-1$

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & other\end{cases}$

（3）$P(-3<X<1)=F(1)-F(-3)=1-e^{-1}$

（4）因为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ P(|X|\le\sqrt{y}) & y>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}) & y>0\end{cases}$$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ f_X(\sqrt{y})\times\dfrac{1}{2\sqrt{y}}+f_X(-\sqrt{y})\times\dfrac{1}{2\sqrt{y}} & y>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}} & y>0\end{cases}$$

5. 假设测量误差 $X\sim N(0,100)$，求在 100 次独立测量中至少有 3 次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率，并用 Poisson 近似计算这个概率。

解： $p=P(|X|>19.6)=2\left[1-\Phi(1.96)\right]$=0.05

记 Y 是 100 次独立测量中测量误差的绝对值大于 19.6 的次数，则 $Y\sim b(100,0.05)$。所以 Y 近似服从 $P(5)$。由此得：

$$P(Y\ge 3)=1-\sum_{k=0}^{2}\frac{5^k}{k!}e^{-5}$$

四、证明题

假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)\sim P(\lambda t)$，证明相继二次故障之间时间间隔 T 服从参数为 λ 的指数分布。

证明：当 $t<0$ 时， $F(t)=P(T\le t)=0$，

当 $t\ge 0$ 时， $F(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-P(N(t)=0)=1-e^{-\lambda t}$