

Informatik II Skript

Steffen Lindner

July 7, 2015

Contents

1	Einf[Pleaseinsertintopreamble]hrung - 14.04.15	4
2	Ausdrücke, Defines, usw. - 16.04.2015	5
3	Signaturen, Testfälle - 21.04.15	6
4	Substitutionsmodell, Fallunterscheidung - 23.04.15	8
5	One-of Signatur - 28.04.15	10
6	Zusammengesetzte Daten - 30.04.15	11
7	Fortsetzung zusammengesetzte Daten - 05.05.15	14
8	Gemischte Daten - 07.05.15	15
9	Parametrisch polymorphe Funktionen - 12.05.15	17
10	Listen - 12.05.15	19
11	Listenprozeduren - 19.05.2015	20
12	Rekursion auf Listen - 21.05.15	22
13	Endrekursive Prozeduren - 09.06.2015	24
14	Induktive Definitionen - 11.06.2015	26
15	Prozeduren höherer Ordnung (high-order procedures) - 16.06.2015 und 18.06.2015	27
16	Teachpack "universe" - 23.6.	29
	16.0.1 Implementierung Star Wars VII	29
	16.0.2 Komposition von Prozeduren allgemein:	29
	16.1 Parametrische Kurven (Higher Order Datenstrukturen)	30
17	Currying (Haskell B. Curry) 25.6.	31
	17.1 Beispiel Ableitung als HOP	31
	17.2 Beispiel Charakteristische Funktion einer Menge $s \subseteq M$	32
18	set-inset, Streams, delay, force 30.6.	33
	18.0.1 Charakterisiere Funktion zur Repräsentation von Mengen:	34
	18.0.2 Streams (stream-of %a)	34

19 Stream von fib - 2.7.	36
19.0.3 Hinweis:	36
19.0.4 Visualisierung	36
19.0.5 Schablone (gemischte Daten):	37
20 Fortsetzung Bäume - 7.7.	38
20.1 Einschub: Pretty-Printing von Bäumen	38
20.2 Induktion über Binärbäume	38
20.2.1 Beispiel:	39

Chapter 1

Einführung - 14.04.15

Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion

Dr.Racket: Definitionsfenster (oberer Bereich), Interaktionsfenster (unterer Bereich)

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschließlich in Präfixnotation durchgeführt.

Beispiele

Mathematik	Scheme
$44-2$	<code>(- 44 2)</code>
$f(x,y)$	<code>(f x y)</code>
$\sqrt{81}$	<code>(sqrt 81)</code>
9^2	<code>(expt 9 2)</code>
$3!$	<code>(! 3)</code>

Allgemein: `(< function > < arg1 > < arg2 > ...)`

`(+ 40 2)` und `(odd? 42)` sind Beispiele für Ausdrücke, die bei Auswertung einen Wert liefern. (Notation: \rightsquigarrow)

`(+ 40 2) \rightsquigarrow 42` (\rightsquigarrow = Auswertng / Reduktion / Evalutation)

`(odd? 42) \rightsquigarrow #f`

Interaktionsfenster: `Read \rightarrow Eval \rightarrow Print \rightarrow Read ...` (Read-Eval-Print-Loop aka. REPL)

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch konstante) und sind nicht weiter reduzierbar.

Literal:

`#t`, `#f` (true, false, Wahrheitswerte) (boolean)

`"abc"`, `"x"`, `" "` (Zeichenkette) (String)

`0` `1904` `42` `-2` (ganze Zahlen) (Integer)

`0.42` `3.1415` (Fließkommazahl) (Reel)

`1/2`, `3/4` (rationale Zahl) (Rational)

`_("/)"/` (Bilder) (Image)

Chapter 2

Ausdrücke, Defines, usw. - 16.04.2015

Auswertung zusammengesetzter Ausdrücke in mehreren Schritten (steps), von "innen nach außen" bis keine Reduktion mehr möglich ist.

$$(+ (+ 20 20) (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 2) \rightsquigarrow 42$$

Achtung: Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung ist binär).

Bsp.: Auswertung des zusammengesetzten Ausdrucks $0.7 + (1/2)/0.25 - 0.6/0.3$

Arithmetik mit rationalen Zahlen ist exakt.

Ein Wert kann an einen Namen (auch Identifier) gebunden werden, durch

$$(\text{define } \langle id \rangle \langle e \rangle) \text{ } (\langle id \rangle \text{ Identifier, } \langle e \rangle \text{ Expression})$$

Erlaubt konsistente Wiederverwendung und dient der Selbstdokumentation von Programmen.

Achtung: Dies ist eine sogenannte Spezifikation und kein Ausdruck. Insbesondere besitzt diese Spezialform keinen Wert, sondern einen Effekt: Name $\langle id \rangle$ wird an den Wert von $\langle e \rangle$ gebunden.

Namen können in Scheme fast beliebig gewählt werden, solange:

1. die Zeichen (kommt noch) nicht vorkommen
2. der Name nicht einem numerischen Literal gleicht
3. kein whitespace (Leerzeichen, Tabulatoren, Return) enthalten ist.

Bsp.: euro \rightarrow us\$

Achtung: Groß-/Kleinschreibung ist in Identifiern nicht relevant.

Eine Lambda-Abstraktion (auch: Funktion, Prozedur) erlaubt die Formulierung von Ausdrücken, die mittels Parametern konkreten Werten abstrahieren:

$$(\text{lambda } (\langle p1 \rangle \langle p2 \rangle \dots) \langle e \rangle), \langle e \rangle \text{ Rumpf}$$

$\langle e \rangle$ enthält Vorkommen der Parameter $\langle p1 \rangle, \langle p2 \rangle \dots$

$(\text{lambda } \dots)$ ist eine Spezialform. Wert der Lambda-Abstraktion ist $\# \langle procedure \rangle$

Anwendung (auch: Applikation/Aufruf) der Lambda-Abstraktion führt zur Ersetzung der vorkommenden Parameter im Rumpf durch die angegebenen Argumente:

$$(\text{lambda } (\text{days}) (* \text{ days } (* 155 \text{ min-in-a-day}))) \rightsquigarrow (* 365 (* 155 \text{ min-in-a-day})) \rightsquigarrow 81468000$$

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar, der bis zum Zeilenende reicht, ein und wird vom System bei der Auswertung ignoriert.

Prozeduren sollten im Programm eine ein-bis zweizeiliger Kurzberschreibung direkt voran gestellt werden.

Chapter 3

Signaturen, Testfälle - 21.04.15

Eine Signatur prüft, ob ein Name an einen Wert einer angegebenen Sorte (Typ) gebunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.

$$(: < id > < signatur >)$$

Bereits eingebaute Signaturen:

- natural \mathbb{N}
- integer \mathbb{Z}
- rational \mathbb{Q}
- real \mathbb{R}
- number \mathbb{C}
- boolean
- string
- image

(: ...) ist eine Spezialform ohne Wert, aber Effekt: Signaturprüfung

Prozedur-Signaturen spezifizieren sowohl Signaturen für die Parameter p_1, p_2, \dots, p_n als auch den Ergebniswert der Prozedur:

$$(< signaturp_1 > \dots < signaturp_n > - > < signatur - ergebnis >)$$

Prozedur-Signaturen werden bei jeder Anwendung eine Prozedur auf Verletzung geprüft.

Testfälle dokumentieren das erwartete Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

$$(check - expect < e_1 > < e_2 >)$$

Werte Ausdruck $< e_1 >$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwartung (= der Wert von $< e_2 >$) entspricht.

Einer Prozedurdefinition sollten Testfälle direkt vorangestellt werden.

Spezialform: Kein Wert, aber Effekt: Testverletzung protokollieren.

Konstruktionsanleitung für Prozeduren

- ; ... (1) Kurzbeschreibung (1-2 zeiliger Kommentar mit Bezug auf Parameter)
- (: ...) (2) Signatur
- (check-expect ...) (3) Testfälle
- (define (lambda (...) ...) (4) Prozedur + Rumpf

Top-Down-Entwurf (Programmieren durch "Wunschdenken")

Bsp.: Zeichnen Ziffernblatt (Stunden- und Minutenzeiger) zur Uhrzeit H:m auf einer analogen 24h-Uhr

- Minutenzeiger legt $360^\circ/60$ pro Minute zurück ($360/60 * m$)
- Stundenzeiger legt $360^\circ/12$ pro Stunde zurück ($360/12 * h + 360/12 * m/60$)

Chapter 4

Substitutionsmodell, Fallunterscheidung - 23.04

Reduktionsregeln für Scheme (Fallunterscheidung je nach Ausdrucksart)

Wiederhole, bis keine Reduktion mehr möglich:

- Literal (1, "abc", #t, ...) [eval_{lit}]

$l \rightsquigarrow l$

- Identifier id (pi, clock-face, ...) [eval_{id}]

$id \rightsquigarrow$ gebundener Wert

- Lambda-Abstraktion

$(\text{lambda } ()) \rightsquigarrow (\text{lambda } ())$ [eval_{λ}]

- Applikation (f, e1, e2)

– (1) f, e1, e2 reduziere, erhalte f', e1', e2'

– (2)

* Operation f' auf e1', e2', ... falls f' primitive Operation (+, *, ...) [apply_{prim}]

* Argumentenwert e1', e2', ... Rumpf von f' einsetzen, dann Rumpf reduzieren, falls f' Lambdaabstraktion
[apply_{λ}]

Beispiel: Applikation

$(+ \ 40 \ 2)$

$\rightsquigarrow (\#< \text{procedure } + \ > \ 40 \ 2) \rightsquigarrow 42$

$\text{eval}_{lit} (+)$

$\text{eval}_{lit} (40)$

$\text{eval}_{lit} (2)$ •

(position-minute-hand 30)

$\rightsquigarrow ((\text{lambda } (m) \ (* \ \text{degrees-per-minute } m)) \ 30)$

$\rightsquigarrow (* \ \text{degrees-per-minute } 30)$

$\rightsquigarrow (* \ \text{degrees-per-minute } 30)$

$\rightsquigarrow (\#< \text{procedure } * \ > \ 360/60 \ 30)$

Bezeichnen $(\text{lambda } (x) \ (* \ x \ x))$ und $(\text{lambda } (r) \ (* \ r \ r))$ die gleiche Prozedur? \Rightarrow Ja!

Achtung: Das hat Einfluss auf das korrekte Einsetzen von Argumenten für Parameter! (s. apply_{λ})

Das bindenen Vorkommen eines Identifiers x kann im Programmtext systematisch bestimmt werden: suche strik von "innen nach außen" bis zum ersten

- (lambda (x))
- (define x)

(Prinzip der lexikalischen Bindung)

Übliche Notation in der Mathematik: Fallunterscheidung

$$\textit{maximum}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Tests auch (Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern. Typische primitive Tests:

- (: = (number number \rightarrow boolean))
- (: < (real real \rightarrow boolean)), auch >, \leq , \geq
- (: string=? (string string \rightarrow boolean)), auch string>?, string \leq ?
- (: boolean? (boolean boolean \rightarrow boolean))
- (: zero? (number \rightarrow boolean))
- odd?, even?, positive?, negative?, ...

Binäre Fallunterscheidung: if

(if < t_1 > < e_1 > < e_2 >)

$$\text{Mathematisch: } \begin{cases} e_1, & \text{falls } t_1 \\ e_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Chapter 5

One-of Signatur - 28.04.15

Die Signatur one-of lässt genau einen der aufgezählten n Werte zu:

$$(\text{one-of } \langle e_1 \rangle \dots \langle e_n \rangle)$$

Reduktion von if:

$$(\text{if } t_1 \ e_1 \ e_2) \rightsquigarrow \begin{cases} \langle e_1 \rangle, & \text{falls } t_1' = \#t ; e_2 \text{ wird niemals ausgewertet} \\ \langle e_2 \rangle, & \text{sonst; } e_1 \text{ wird niemals ausgewertet} \end{cases}$$

(1) Reduziere t_1 , erhalte t_1'

Spezialform Fallunterscheidung (conditional expression):

$$(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) \dots (\langle t_n \rangle \langle e_n \rangle) (\text{else } \langle e_{n+1} \rangle)) (\text{else optional})$$

Werte die Tests in der Reihenfolge t_1, t_2, \dots, t_n aus. Sobald $t_i \neq \#t$ ergibt wertige Zweig e_i aus. e_i ist das Ergebnis der Fallunterscheidung. Wenn $t_n \neq \#f$ liefert, dann liefere

$$\begin{cases} \text{Fehlermeldung, } & \text{"cond: alle Tests ergaben } \#f", \text{ falls kein else-Zweig} \\ \langle e_{n+1} \rangle, & \text{sonst} \end{cases}$$

Reduktion von cond [eval_{cond}]

$$(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) (\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle) \dots) \rightsquigarrow \begin{cases} \langle e_1 \rangle, & \text{falls } t_1' = \#f \\ (\text{cond } (\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle) \dots), & \text{sonst} \end{cases}$$

Reduziere t_1 , erhalte t_1' .

$(\text{cond }) \rightsquigarrow$ Fehlermeldung "Alle Tests..."

$(\text{cond } (\text{else } \langle e_{n+1} \rangle)) \rightsquigarrow e_{n+1}$

cond ist "systematischer Zucker"

(auch: abgeleitete Form) für eine verschachtelte Anwendung von 'if':

$(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) \dots))$ entspricht $(\text{if } \langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle (\text{if } \langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle (\text{if } \dots)))$

Spezialformen 'and' und 'or':

$(\text{or } \langle t_1 \rangle \langle t_2 \rangle \dots \langle t_n \rangle)$ entspricht $(\text{if } \langle t_1 \rangle \#t (\text{or } \langle t_2 \rangle \dots))$

$(\text{or}) \rightsquigarrow \#f$

$(\text{and } \langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle) \rightsquigarrow (\text{if } \langle t_1 \rangle (\text{and } \langle t_2 \rangle \dots \langle t_n \rangle) \#f)$

$(\text{and}) \rightsquigarrow \#t$

Chapter 6

Zusammengesetzte Daten - 30.04.15

Ein Charakter besteht aus drei Komponenten.

- Name des Charakters (name)
- Handelt es sich um einen Jedi? (jedi?)
- Stärke der Macht (force)

→ Datendefinition für zusammengesetzte Daten.

Konkreter Charakter:

Name	"Luke Skywalker"
jedi?	#f
force	25

; Ein Charakter (character) besteht aus

; - Name (name)

; - Jedi-Status (jedi?)

; - Stärke der Macht (force)

```
(define-records-procedures charakter
  (make-character
    character?
    (character-name
      character-jedi
      character-force)))
```

(make-character n j f) \rightsquigarrow *< records >* (konstruktion)

(character-name *< record >*) \rightsquigarrow n (Komponentenzugriff)

(character-jedi? *< record >*) \rightsquigarrow j (Komponentenzugriff)

(character-force *< record >*) \rightsquigarrow f (Komponentenzugriff)

Zusammengesetzte Daten = Records in Scheme.

Record-Definition legt fest:

- Record-Signatur
- Konstruktor (Baut aus Komponenten einen Record)

- Prädikat (liegt Record vor?)
- Liste von Selektoren (lesen jeweils eine Komponenten des Records)

```
(define-records-procedures < t >
  make-< t > ; Konstruktor
  < t >?
  (< t > - < comp1 > ... < t > - < compn > 4)) ; Liste der n-Selektoren
```

Verträge des Konstruktors / der Selektoren für Record-Signatur $\langle t \rangle$ mit n Komponenten namens $\langle comp_1 \rangle \dots \langle comp_n \rangle$:

- $(: \text{make-}\langle t \rangle (\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle \rightarrow \langle t \rangle))$
- $(: \langle t \rangle - \langle comp_1 \rangle (\langle t \rangle \rightarrow \langle t_1 \rangle))$
- ...
- $(: \langle t \rangle - \langle comp_n \rangle (\langle t \rangle \rightarrow \langle t_n \rangle))$

Es gilt für die Strings n, Booleans j und Integer f:

$(\text{character-name} (\text{make-character } n \ j \ f)) = n$

(analog für den Rest)

Interaktion von Funktionen (algebraische Eigenschaften).

Spezialform check-property:

```
(check-property
  (for-all ((<id1> <sig1> ... <idn> <sign>))
    <e>))
```

$\langle e \rangle$ bezieht sich auf $\langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$.

Test erfolgreich, falls $\langle e \rangle$ für bel. gewählte Bindungen für $\langle id_1 \rangle \dots \langle id_n \rangle$ immer #t ergibt.

Interaktion von Selektor und Konstruktor:

```
(check-property
  (for-all ((n string)
            (j booleans)
            (f integer))
    (string=? (character-name (make-character n j f)) n)))
```

Beispiel: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist mindestens so groß wie jede dieser Zahlen: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq \max x_1, x_2$

```
(check-property
  (for-all ((x1 natural)
            (x2 natural))
    (\geq (+ x1 x2) (max x1 x2))))
```

Konstruktion von Funktionen, die zusammengesetzte Daten konsumieren:

- Welche Record-Komponenten sind relevant für Funktionen?

→ Schablone:

; könnte Charakter e ein Sith-Lord sein?

(: sith? (character → boolean))

```
(define sith?
  (lambda (e)
    ... (character-jedi? c) ... (character-force c) ... ))
```

Konstruktion von Funktionen, die zusammengesetzte Daten konstruieren:

- Der Konstruktor muss aufgerufen werden.

→ Schablone:

```
(define
  (lambda (...)
    (make-<t> ... ) ... ))
```

Chapter 7

Fortsetzung zusammengesetzte Daten - 05.05.1

- lego-character
 - figure
 - * Name
 - * jedi?
 - * force

Sei $\langle p \rangle$ ein Prädikat mit Signatur $\langle t \rangle \rightarrow \text{boolean}$. Eine Signatur der Form $(\text{predicate } \langle p \rangle)$ gilt für jeden Wert x der Signatur $\langle t \rangle$ sofern $(\langle p \rangle x) \rightsquigarrow \#t$. Signatur $(\text{predicate } \langle p \rangle)$ ist somit spezifischer (restriktiver) als die Signatur $\langle t \rangle$ selbst.

Einführung eines neuen Signaturnamens $\langle new - t \rangle$ für die Signatur $\langle t \rangle$:

$(\text{define } \langle new - t \rangle (\text{signatur } \langle t \rangle))$

Bsp.:

```
(define farbe
  (signatur
    (one-of "Karo" "Herz" "Pik" "Kreuz"))))

(define latitude
  (signature (predicate latitude?)))
```

Chapter 8

Gemischte Daten - 07.05.15

Geocoding: Übersetzt eine Ortsangabe mittels des Google Maps Geocoding API (Application Programming Interface) in eine Position auf der Erdkugel.

$$(\text{ : geocoder (string} \rightarrow (\text{mixed geocode geocode-error})))$$

Ein Geocode besteht aus:

- Adresse (address) (string)
- Ortsangabe (loc) (location)
- Nordostecke (northeast) (location)
- Südwestecke (southwest) (location)
- Typ (type) (string)
- Genauigkeit (accuracy) (string)

$$(\text{ : geocode-address (geocode} \rightarrow \text{string})) \dots$$

Ein geocode-error besteht aus:

- Fehlerart (level) (one-of "TCP" "HTTP" "JSON" "API")
- Fehlermeldung (message) (string)

Teachpack: geocoder.rkt

Gemischte Daten Die Signatur

$$(\text{mixed} < t_1 > \dots < t_n >)$$

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine der Signatur $< t_1 > \dots < t_n >$ erfüllt.

Beispiel: Datendefinition:

Eine Antwort des Geocoders ist entweder

- ein Geocode (geocode) oder
- eine Fehlermeldung (geocode-error)

Beispiel (eingebaute Funktion $\text{string} \rightarrow \text{number}$):

$$(\text{ : string} \rightarrow \text{number (string} \rightarrow (\text{mixed number (one of \#f)})))$$
$$(\text{string} \rightarrow \text{number "42"}) \rightsquigarrow 42$$

$(\text{string} \rightarrow \text{number } \text{"foo"}) \rightsquigarrow \#f$

Erinnerung:

Das Prädikat $< t >?$ einer Signatur $< t >$ unterscheidet Werte der Signatur $< t >$ von allen anderen Werten:

$(: < t >? (\text{any} \rightarrow \text{boolean}))$

Auch Prädikate für eingebaute Signaturen:

- number?
- complex?
- real?
- rational?
- integer?
- natural?
- string?
- boolean?

Prozeduren die gemischte Daten der Signaturen $< t_1 > \dots < t_n >$ konsumieren:

Konstruktionsanleitung:

$(: < f > ((\text{mixed } < t_1 > \dots < t_n > \rightarrow \dots))$

$(\text{define } < f > (\text{lambda } (x) (\text{cond } ((< t_1 >? x) \dots) \dots (< t_n >? x) \dots)))$

Mittels let lassen sich Werte an lokale Namen binden:

$$(\text{let } ((< id_1 > < e_1 >) \dots (< id_n > < e_n >)) < e >)$$

Die Ausdrücke $< e_1 > \dots < e_n >$ werden parallel ausgewertet $\rightarrow < id_1 > \dots < id_n >$ können in $< e >$ (und nur hier) verwendet werden. Der Wert let-Ausdruck ist der Wert von $< e >$.

Achtung: 'let' ist verfügbar ab Sprachebene "DMdA".

'let' ist syntaktischer Zucker.

$(\text{let } ((< id_1 > < e_1 >) \dots (< id_n > < e_n >)) < e >)$

\leftrightarrow

$((\text{lambda } (< id_1 > \dots < id_n >) < e >) < e_1 > \dots < e_n >)$

Chapter 9

Parametrisch polymorphe Funktionen - 12.05.1

Abstand zweier geografischer Positionen l_1, l_2 auf der Erdkugel in km (lat, lng jeweils in Radian):

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \text{Erdradius in km} \cdot \text{acos}(\cos(l_1.\text{lat}) \cdot \cos(l_1.\text{lng}) \cdot \cos(l_2.\text{lat}) \cdot \cos(l_2.\text{lng}) + \cos(l_1.\text{lat}) \cdot \sin(l_1.\text{lng}) \cdot \cos(l_2.\text{lat}) \cdot \sin(l_2.\text{lng}) + \sin(l_1.\text{lat}) \cdot \sin(l_2.\text{lat}))$$

Parametrisch polymorphe Funktionen

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente: parametrisch polymorphe Prozeduren (gr.: vielgestaltig). Nutze Signaturvariablen: %a, %b, ...

Beispiel:

; Identität

(: id (%a → %a))

(define id (lambda (x) x))

; Konstante Funktion (ignoriert zweites Argument)

(: const (%a %b → %a))

(define cost (lambda (x y) x))

; Projection (ein Argument auswählen)

(: proj ((one-of 1 2) %a %b → (mixed %a %b)))

(define proj (lambda (i x1 x2) (cond ((= i 1) x1) ((= i 2) x2))))

Eine polymorphe Signatur steht für alle Signaturen in denen die Signaturvariablen durch konkrete Signaturen ersetzt werden.

Beispiel:

Wenn eine Prozedur (number %a %b → %a) erfüllt, dann auch :

(number string boolean → string)

(number boolean natural → boolean)

(number number number → number)

; Ein polymorphes Paar (pair) besteht aus

; - erster Komponente (first)

; - zweiter Komponente (rest)

; wobei die Komponenten bel. Signaturen besitzen

(define-record-procedures-pair pair-of

```
make-pair  
pair?  
(first rest))
```

(pair-of $< t_1 >$ $< t_2 >$) ist eine Signatur für Paare, deren erste bzw. zweite Komponente die Signaturen $< t_1 >$ bzw. $< t_2 >$ erfüllen

→ pair-of: Signatur mit (zwei) Signaturparametern

```
(: make-par (%a %b → (pair-of %a %b)))  
(: pair? (any → boolean))  
(: first ((pair-of %a %b) → %a))  
(: rest ((pair-of %a %b) → %b))
```

Chapter 10

Listen - 12.05.15

Eine Liste von werten der Signatur $< t >$ (list-of $< t >$) ist entweder:

- leer (Signatur empty-list) oder
- ein Paar (Signatur pair-of) aus einem Wert der Signatur $< t >$ und einer Liste von Werten der Signatur $< t >$

```
(define list-of
  (lambda (t)
    (signature
      (mixed empty-list (pair-of t (list-of t))))))
```

Signatur empty-list bereits in Racket vordefiniert. Ebenfalls vordefiniert:

- (: empty empty-list)
- (: empty? (any \rightarrow boolean))

Operationen auf Listen

- Konstruktoren:

```
(: empty empty-list) ; leere Liste
(: make-pair (%a (list-of %a) -> (list-of %a)))
```

- Prädikate:

```
(: empty? (any -> boolean)) ; leer Liste?
(: pair? (any -> boolean)) ; nicht-leere Liste?
```

- Selektoren:

```
(: first ((list-of %a) -> %a)) ; Kopfelement
(: rest (list-of %a) -> (list-of %a))) ; Restliste
```

Chapter 11

Listenprozeduren - 19.05.2015

Prozeduren, die Listen konsumieren

Konstruktionsanleitung befolgen!

Beispiel:

```
; Summe der Zeichen der Liste xs
(: list-sum (list-of number) -> number)
(check-expect (list-sum empty) 0)
(check-expect (list-sum one-to-four) 10)
```

Schablone (gemische + zusammengesetzte Daten)

```
(define list-sum
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+ (first xs) (list-sum (rest xs)))))))
```

(rest xs) mit Signatur (list-of number) ist selbst wieder eine kürzere Liste von Zahlen.

(list-sum (rest xs)) erzielt Fortschritt !.

Konstruktionsanleitung für Prozeduren λl , die Liste xs konsumiert.

```
(: <f> ((list-of <t_1>) -> <t_2>))
(define <f>
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) ...)
          ((pair? xs) ... (first xs) ... (<f> (rest xs)) ...))))
```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur (list-of % a) eingebaut
- Neuer syntaktischer Zucker:

```
(list <e_1> <e_2> ... <e_n>)
```

- Ausgabeformat für nicht leere Liste:

$\#< list\ x_1\ x_2... x_n >$

Füge Listen xs, ys zusammen (concatenation):

Beobachtung:

- Die Länge von `xs` bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe von `cat`
- Auf `ys` werden niemals Selektoren angewandt

Chapter 12

Rekursion auf Listen - 21.05.15

Generierung aller natürlichen Zahlen (vgl. gemischte Daten). Eine natürliche Zahl (`natuarl`) ist entweder:

- die 0 (`zero`)
- der Nachfolger (`succ`) einer natürlichen Zahl.

Konstruktoren

```
(: zero natural)
(define zero 0)

(: succ (natural -> natural))
(define succ
  (lambda (n)
    (+ n 1)))
```

Vorgängerfunktion (`pred`), definiert für $n > 0$:

```
(: pred (natural -> natural)) \
(define pred
  (lambda (n)
    (- n 1)))
```

Bedinge algebraische Eigenschaften (s. `check-property`):

$(\Rightarrow \langle p \rangle \langle t \rangle)$

Nur wenn $\langle p \rangle \not\Rightarrow \#t$, wird Ausdruck $\langle t \rangle$ ausgewertet und getestet ob $\langle t \rangle \not\Rightarrow \#t$.

Beispiel:

Fakultätsfunktion $n!$ ($n \in \mathbb{N}$)

$0! = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$

Konstruktionsanleitung für gem. Daten:

```
; Berechne n!
(: factorial (natural -> natural))
( define factorial
  (lambda (n)
    (cond ((= n 0) 1)
          ((> n 0) (* n (factorial (- n 1)))))))
```

Beobachtung:

- Im letzten Zweig ist $n > 0 \Rightarrow \text{pred}$ anwendbar
- $(\langle f \rangle (-n\ 1))$ hat die Signatur $\langle t \rangle$

Satz

Eine Prozedur, die nach der Konstruktionsanleitung für Listen oder natürliche Zahlen konstruiert ist, terminiert immer (= liefert immer ein Ergebnis).

Beweis: in Kürze

Die Größe eines Ausdrucks ist proportional zum Platzverbrauch des Reduktionsprozesses im Rechner

\Rightarrow Wenn möglich, erzeugte Reduktionsprozesse, die konstanten Platzverbrauch - unabhängig vom Eingabeparametern - benötigen.

Chapter 13

Endrekursive Prozeduren - 09.06.2015

Idee für die Multiplikation:

Führe Multiplikation sofort aus. Schleife das Zwischenergebnis (akkumulierendes Argument) durch die Berechnung. Am Ende enthält Akkumulator das Ergebnis.

```
; Berechne n!
; (wrapper)

(: fac (natural -> natural))

(define fac
  (lambda (n)
    (fac-worker n 1)))

(: fac-worker (natural natural -> natural))

(define fac-worker
  (lambda (n acc)
    (cond ((= n 0) acc)
          ((> n 0) (fac-worker (- n 1) (* acc n))))))
```

Ein Berechnungsprozess ist iterativ, falls seine Größe konstant bleibt.

Damit:

- factorial nicht iterativ
- fac-worker iterativ

Wieso ist fac-worker iterativ?

Der rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Ausdruck vollständig. Es gibt keinen Kontext (ungebundenen Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet".

Kontext des rekursiven Aufrufs in

- factorial : (* n [])
- fac-worker : keiner

Ein Prozeduraufruf ist endrekursiv (tail call), wenn er keinen Kontext besitzt. Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduraufrufe beinhalten, heißen selber endrekursiv.

Endrekursive Prozeduren generieren iterative Berechnungsprozesse.

Beobachtung:

```
(cat (list 1000 ... 2) (list 1))
```


Aufrufe von make-pair: $1000 + 999 + 998 + \dots + 1$

⇒ Quadratischer Aufwand

Konstruiere iterative listenumkehr (backwards)

Berechnung von (backwards (list 1 2 3))

```
(: backwards-worker ((list-of %a) (lsit-of %a) \rightarrow (list-of %a)))
```

Mittels letrec lassen sich Werte an lokale Namen binden:

```
(letrec (((<id_1> <e_1>)
          ...
          (<id_n> <e_n>))
  <e>)
```

Die Ausdrücke e_1, \dots, e_n und e dürfen sich auf die Namen von $<id_1> \dots <id_n>$ beziehen.

Chapter 14

Induktive Definitionen - 11.06.2015

Konstruktive Definition der natürlichen Zahlen \mathbb{N} :

Def.: (Peano-Axiome)

- (P1) $0 \in \mathbb{N}$ (Null)
- (P2) $\forall n \in \mathbb{N} : \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$ (Nachfolger)
- (P3) $\forall n \in \mathbb{N} : \text{succ}(n) \neq 0$
- (P4) $\forall m, n \in \mathbb{N} : \text{succ}(m) = \text{succ}(n) \Rightarrow m = n$

(P3) und (P4) $\Rightarrow \mathbb{N}$ ist induktiv definiert.

- (P5) Induktionsaxiom

Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und $\forall n : n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M$, gilt $M = \mathbb{N}$

- \mathbb{N} enthält nicht mehr als die durch 0 und die durch $\text{succ}()$ generierten Elemente
- Nichts sonst ist in \mathbb{N}

Beschweisschema der vollständigen Induktion:

Sei $P(n)$ eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$:

`(: P (natural -> boolean))`

Ziel: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Definiere $M = \{n \in \mathbb{N} | P(n)\} \subseteq \mathbb{N}$

Induktionsaxiom:

Falls $0 \in M$

und $\forall n(n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$

dann $M = \mathbb{N}$

Chapter 15

Prozeduren höherer Ordnung (high-order procedures) - 16.06.2015 und 18.06.2015

```
; Extrahiere die Elemente von xs, die Predikat p? erfüllen

(: filter ((%a -> boolean) (list-of %a) -> (list-of %a)))

(define filter
  (lambda (p? xs)
    (cond ((empty? xs) xs)
          ((pair? xs)
           (if (p? (first xs))
               (make-pair (first xs) (filter p? (rest xs)))))))
```

Wert des Parameters p? ist Prozedur

Higher-order procedures (H.O.P)

- (a) akzeptieren Prozeduren als Parameter und/oder
- (b) liefern Prozeduren als Ergebnis

H.O.P vermeiden Duplizierung von Code und führen zu kompakteren Programmen, verbesserter Lesbarkeit, verbesserter Wartbarkeit

Bsp.: (map f xs)

```
; Wende f auf alle Elemente von Liste xs an

(: map ((%a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %b))

(define map
  (lambda (f xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs)
           (make-pair (f (first xs)) (map f (rest xs)))))))
```

Allgemeinere Transformation von Listen: Listenfaltung (list-folding), Idee: Ersetze die Listenkonstruktoren make-pair und empty systematisch:

- (foldr z c xs) wirkt als Spine Transformer
 - empty \rightsquigarrow z
 - make-pair \rightsquigarrow c

- Eingabe: Liste (list-of %a)
- Ausgabe: Im allg. keine Liste mehr (etwa %b)

```
; Falte Liste xs bzgl. c und z
(: foldr (%b (%a %b -> %b) (list-of %a) -> %b))

(define foldr
  (lambda (z c xs)
    (cond ((empty? xs) z)
          ((pair? xs)
           (c (first xs) (foldr z c (rest xs)))))))
```

Beispiel Summe:

```
(: sum ((list-of number) -> number))

(define sum
  (lambda (xs)
    (foldr 0 + xs)))
```

Beispiel Länge einer Liste durch Listenreduktion:

```
(foldr 0 c xs)
```

mit $c = (\text{lambda } (x \ r) \ (+ \ 1 \ r))$

Chapter 16

Teachpack ”universe” - 23.6.

Teachpack ”universe” nutzt H.O.P., um Animationen (Sequenzen von bildern/Szenen) zu definieren.

```
(big-bang < init >\\  
(on-tick <tock>)\\  
(to-draw <render><w><h>)\\
```

optional

- (: <init> %a)

Startzustand -(: <tock> (%a → %a))

Funktion, die neuen Zustand aus altem Zustand berechnet, wird 28 Mal pro Sekunde aufgerufen.

- (: <render> (%a → image))

Funktion, die aus aktuellem Zustand ein Bild einer Szene berechnet (wird in Fenster mit Dimension <w>x<h> Pixel angezeigt).

- Bei Schliessen der Animation wird der letzte Zustand zurück gegeben.

16.0.1 Implementierung Star Wars VII

Ausgabe der römischen Episodennummer für Film f. (roman (film-episode f))

Gesuchte Funktion ist Komposition von zwei existierenden Prozeduren.

1. Wende 'film-episode' an, dann
2. wende 'roman' auf das Ergebnis von (1) an.

16.0.2 Komposition von Prozeduren allgemein:

```
(compose f g) \equiv (f (g x))
```

neue Prozedur realisiert

Komposition von f und g.

Mathematik: $(\text{compose } f \ g) \equiv f \circ g$. 'f nach g'

```
(: compose ((%b -> %c) (%a -> %b) -> (%a ->%c)))  
(define compose  
  (lambda (f g)
```

```
(lambda (x)
  (f (g x))))
```

repeat: n-fache Komposition von f mit sich selbst (n-fache Anwendung von f, Exponentiation):

$$f^0 = \text{id} - (\text{id} \equiv (\text{lambda } (x) x))$$

$$f^n = f \circ f^{n-1}$$

```
(: repeat (natural (%a -> %a) -> (%a -> %a)))

(define repeat
  (lambda (n f)
    (cond ((= n 0) (lambda (x) x))
          ((> n 0) (compose f (repeat (- n 1) f))))))
```

; Greife auf das n-te Element der Liste xs zu

```
(: nth (natural (list-of %a) -> %a))

(define nth
  (lambda (n xs)
    ((compose first (repeat (- n 1) rest)) xs)))
```

16.1 Parametrische Kurven (Higher Order Datenstrukturen)

$f(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ siehe rkt-Datei

Reduktion:

```
((add 1) 21)
```

$$\text{eval}_i^d \rightsquigarrow (((\text{lambda } (x) (\text{lambda } (y) (+ x y))) 1) 21)$$

$$\text{apply-lambda}(x) \rightsquigarrow \underline{((\text{lambda}(y)(+1y))21)}$$

$$\text{apply-lambda}(y) \rightsquigarrow (+ 1 21)$$

Chapter 17

Currying (Haskell B. Curry) 25.6.

Erstmals implementiert von Moses Schönfinkel.

Anwendung einer Prozedur auf ihr erstes Argument liefert Prozedur der restlichen Argumente.

- Jede n-stellige Prozedur lässt sich in eine alternative curried Prozedur transformieren, die in n Schritten jeweils ein Argument: curry. Umgekehrte Transformation: uncurry.

$(\%a \%b \rightarrow \%c) \rightarrow$ Applikation auf 2 Argumente (Signaturen $\%a \%b \rightarrow \%c$)

$\text{curry} \uparrow \downarrow \text{uncurry} = (\%a (\%b \rightarrow \%c)) \rightarrow$ Applikation auf 1 Argument (Signaturen $\%a \rightarrow (\%b \%c) \rightarrow$ Applikation auf 1 Argument (Signatur $\%b \rightarrow \%c$)

partielle Applikation

```
(: curry ((\%a \%b -> \%c) -> (\%a (\%b -> \%c))))
```

```
(define curry
  (lambda (f)
    (lambda (x)
      (lambda (y)
        (f x y))))))
```

```
(: uncurry ((\%a (\%b -> \%c)) -> ((\%a \%b -> \%c) ))
```

```
(define uncurry
  (lambda (f)
    (lambda (x y)
      ((f x) y))))
```

17.1 Beispiel Ableitung als HOP

Bestimmung der ersten Ableitung der reellen Funktion f durch Bildung des Differenzenquotienten:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \text{ Differenzialquotient}$$

- Operator `'` (Ableitung) konsumiert Funktion f und produziert Funktion f' \Rightarrow `'` ist higher-order!

```
(: diffquot (h f -> f')
```

```
(: diffquot (reat1 (real -> real) -> (real -> real)))
```

```
(define difquot
  (lambda (h f)
    (lambda (x)
```

```
(/ (- (f (+ x h)) (f x))
    h))))
```

17.2 Beispiel Charakteristische Funktion einer Menge $s \subseteq M$

Charakteristische Funktion für S: $(: \chi_S(M \rightarrow \text{boolean}))$

(Sei $0 = \#f$ und $1 = \#t$)

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in S \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\chi_s(m) = \#f$$

$$\chi_s(s) = \#t$$

- Idee: Repräsentative $S \subseteq M$ durch Prozedur $(M \rightarrow \text{boolean})$ und Mengenoperation durch Operation auf Prozeduren (H.O.P.)
- \therefore) Darstellung unendlicher Mengen ($S_{42} = \{x \in \mathbb{Z} | x > 42\}$)
- \therefore) Mengenoperationen (\cup, \cap, \setminus) in konstanter Zeit.

Element x in Menge S einfügen:

(Sei $0 = \#f$ und $1 = \#t$)

$$\chi_{S \cup \{x\}}(y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in S \\ \chi_S(y) & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Chapter 18

set-inset, Streams, delay, force 30.6.

Konvertiere Liste xs in eine Menge gleicher Elemente:

```
;      xs
;  +---+---+
;  |   |   |
;  +---+---+
;  /       \
; x1      +---+---+                xs
;          |   |   |                \
;          +---+---+      (foldr empty-set set-inset))
;          /       \
;      x2          .
;                  \
;                  +---+---+
;                  |   |   |
;                  +---+---+
;                  /       \
;                  xn      empty
```

\rightsquigarrow (fold empty-set set-in-set xs)) - empty \rightarrow empty-set - make-pair \rightarrow set -inset

```
;      set-inset
;      /       \
;  xn      set-inset
;      /       \
;                  .
;                  .
;                  \
;                  set-inset
;                  /       \
;                  xn      empty-set
```

18.0.1 Charakterisiere Funktion zur Repräsentation von Mengen:

1. Performance: set-member 2 hat lineare Laufzeit bei mit set-inset konstruierten Mengen (wie Liste!)
2. Vorteile:
 - unendliche Mengen darstellbar
 - Mengenoperationen in konstanter Zeit durchführbar
3. Nachteil: Elemente sind nicht aufzählbar

18.0.2 Streams (stream-of %a)

Unendliche Ströme von Elementen x_i mit Signaturen %a. Ein Stream ist ein Paar.

```
;   Stream-head
;   +-----+
;   | x1 |   tail |
;   +-----+
```

%a (\rightarrow (stream-of %a)) -Erst eine Ausführung des tails (*fore*) erzeugt nächstes Stream-Element (daher auch: lazy list)

```
;   +-----+
;   | xn |   (force tail) |   ->   +-----+
;   +-----+                       | x2 |   tail |
;                                   +-----+
```

- Vergleich:

<pre>; (list-of %a) ; xs ; +---+ ; ; +---+ ; / \ ; x1 +---+ ; ; +---+ ; / \ ; x2 . ; \ ; +---+ ; ; +---+ ; / \ ; xn empty</pre>	<pre>(stream-of %a) +-----+ xs +-----+ / \ xn +---+ 2 +---+ / x2</pre>
---	--

delayed evaluation

Verzögerte Auswertung eines Ausdrucks (delayed evaluation)

- `(delay e)` : Verzögere die Auswertung des Ausdrucks `e` und liefere "Versprechen " (promise), `e` bei Bedarf später auswerten zu können $(\text{delay } e) \equiv (\text{lambda } () \text{ e \{nicht ausgewertet\}})$
- `(force p)`: Erzwingt Auswertung des Promise `p`, liefert Wert zurück
`(: force ((\rightarrow %a) \rightarrow %a))`

```
(define force
  (lambda (p)
    (p)))
```

Chapter 19

Stream von fib - 2.7.

Generiere den unendlichen Strom fibs der Fibonacci-Zahlen

$\text{fib}(0) = 1; \text{fib}(1) = 1; \text{fib}(n) = \text{fib}(n - 1) + \text{fib}(n - 2)$

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)

Beobachtung:

1 1* 2 3 5 8 Start des Streams fibs
+ 1* 2 3 5 8 tail von fibs
= 2 3 5 8 tail von tail von fibs

Stream-Diagramm zu fibs:

yet-to-follow

Die Menge der Binärbäume $T(M)$ ist induktiv definiert:

(T_1) empty-tree $\in T(M)$

(T_2) $\forall x \in M$ und $l, r \in T(M)$: (make-node l x r) $\in T(M)$

(T_3) Nichts sonst ist in $T(M)$

19.0.3 Hinweis:

- Jeder Knoten (make-node) in einem Binärbaum hat zwei Teilbäume sowie eine Markierung (label) x
- Vergleiche: M^* und $T(M)$, empty und empty-tree, make-pair und make-node

19.0.4 Visualisierung

- empty-tree: \square
(make-node l x r): (Zeichnung yet-to-come)
- Der Knoten mit Markierung x ist Wurzel (root) des Baumes
- Ein Knoten, der nur leere Teilbäume besitzt heißt Blatt (leaf). Alle anderen Knoten sind innere Knoten (inner nodes)
(Zeichnung yet-to-come)

Beispiele für Binärbäume der Menge $T(M)$

Baum t_1 (listenartig, rechts-tief):

```

;   +---+
;   | 1| Wurzel
;   +---+
;   /      \
;  |_|      +---+
;           |  |      innerer Knoten
;           +---+
;           /      \
;          |_|      .
;                   \
;                   +---+
;                   |  |  Blatt
;                   +---+
;                   /      \
;                  |_|      |_|

```

Baum t_2 (balanciert): alle Teilbäume auf einer Tiefe haben gleiche Anzahl von Knoten

(Zeichnung)

(Binär-) Bäume haben zahllose Anwendungen:

- Suchbäume (z.B. in Datenbanken)
- Datenkompression
- Darstellung von Termen (Ausdrücken)

Bäume sind **die** induktive Datenstruktur!

Die Tiefe (depth) eines Baumes ist die maximale Länge eines Weges von der Wurzel zu einem leeren Baum. Also:

$(\text{btree-depth empty tree}) = 0$

$(\text{btree-depth } t_1) = 3$

$(\text{btree-depth } t_2) = 2$

19.0.5 Schablone (gemischte Daten):

```

(: btree-depth ((btree-of %a) -> natural))

(define btree-depth
  (lambda (f)
    (cond ((empty-tree? t) 0)
          ((node? t) (+ 1 (max (btree-depth (node-left-branch))
                                (btree-depth (node-right-branch)))))))

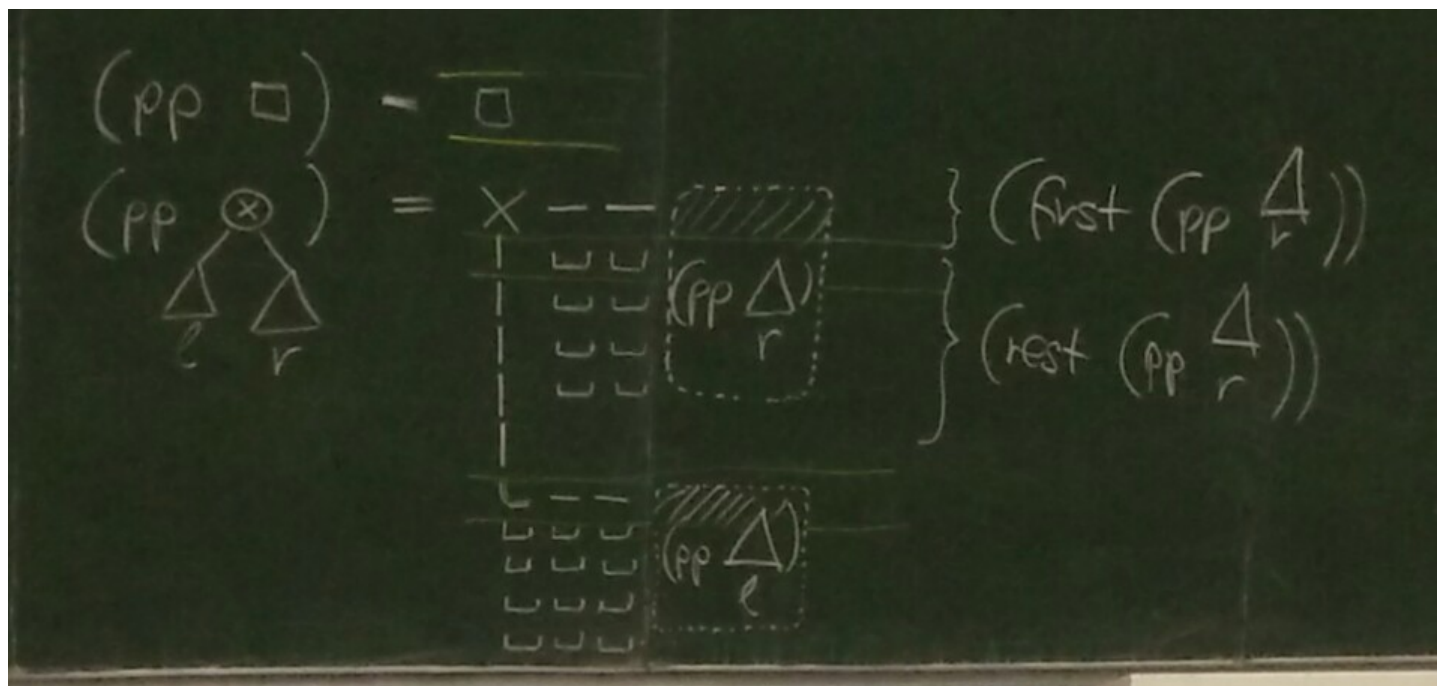
```

Chapter 20

Fortsetzung Bäume - 7.7.

20.1 Einschub: Pretty-Printing von Bäumen

Prozedur (pp t) erzeugt formatierten String für den Binärbaum t.



Idee: Repräsentiere formatierten String als Liste von Zeilen (Strings).

1. Nutze (string-append ...) um Zeilen-Strings zu definieren. (horizontale Konkatenation).
2. Nutze (append ...) um die einzelnen Zeilen zu einer Liste von Zeilen zusammenzusetzen (vertikale Konkatenation).
Erst direkt vor der Ausgabe werden die Zeilen-Strings zu einem auszugebenden String zusammengesetzt. (strings-list \rightarrow string)

20.2 Induktion über Binärbäume

Sei $P(t)$ eine Eigenschaft von Binärbäumen $t \in T(M)$, also

```
(: P ((btree-of M) -> boolean))
```

Falls $P(\text{empty-tree})$ [Induktionsbasis]

und $\forall x \in M, l \in T(M), r \in T(M)$:

$P(l) \wedge P(r) \Rightarrow P((\text{make-node } l \text{ x } r))$

dann $\forall t \in T(M) : P(t)$

20.2.1 Beispiel:

Zusammenhang zwischen Grösse (btree-size) und Tiefe (btree-depth) eines Binärbaums t ("ein Baum der Tiefe n enthält mindestens n Knoten und höchstens $2^n - 1$ Knoten"):

$P(t) \equiv (\text{btree-depth } t) \leq (\text{btree-size } t) \leq 2^{(\text{btree-depth } t)} - 1$

Erstes \leq trivial. Zweites:

Induktionsbasis $P(\text{empty-tree})$:

(size empty-tree)

$\rightsquigarrow [\text{depth}] 0$

$= 2^{(0)} - 1 \checkmark$

Induktionsschritt: $(P(l) \wedge P(r) \Rightarrow P((\text{make-node } l \text{ x } r)))$

$(\text{size } (\text{make-node } l \text{ x } r))$

$\rightsquigarrow [\text{size}] (\text{size } l) + 1 + (\text{size } r)$

$\leq [\text{I.V.}] 2^{(\text{depth } l)} - 1 + 1 + 2^{(\text{depth } r)} - 1$

$= 2^{(\text{depth } l)} + 2^{(\text{depth } r)} - 1$

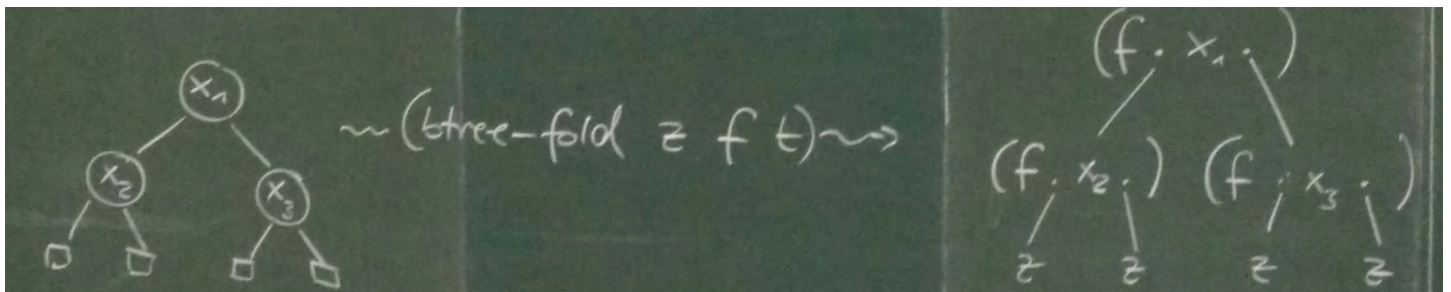
$\leq 2 \times \max(2^{(\text{depth } l)} + 2^{(\text{depth } r)}) - 1$

$= 2 \cdot 2^{\max((\text{depth } l), (\text{depth } r))} - 1$

$= 2^{(1 + \max((\text{depth } l), (\text{depth } r)))}$

$\leftarrow [\text{depth}] 2^{\text{depth}((\text{make-node } l \text{ x } r))} - 1 \checkmark$

Wie müsste sich btree-fold, eine fold-Operation für Binärbäume verhalten? Tree transformer für Baum t :



opku9zfswdefrtgzhujiKolpölokijuzhtgrffgtzhujiKolpkijuzhtgrftgzhujiKlpö [Anmerkung Marvin]

Falte Baum t bzgl. f und z :

$(: \text{ btree-fold } (\%a \%b \%a \rightarrow \%a) (\text{btree-of } \%b) \rightarrow \%a))$

```
(define btree-fold
  (lambda (z f t)
    (cond ((empty? t) z)
          ((node? t) (f (btree-fold z f (node-left-branch t))
                        (node-label t)
                        (btree-fold z f (note-right-branch t)))))))
```