Informatik II Skript

Steffen Lindner

July 21, 2015

Contents

1 Einf[Pleaseinsertintopreamble]hrung - 14.04.15 **4**

2 Ausdrücke, Defines, usw. - 16.04.2015 **5**

3 Signaturen, Testfälle - 21.04.15 **6**

4 Substitutionsmodell, Fallunterscheidung - 23.04.15 **8**

5 One-of Signatur - 28.04.15 **10**

6 Zusammengesetzte Daten - 30.04.15 **11**

7 Fortsetzung zusammengesetzte Daten - 05.05.15 **14**

8 Gemischte Daten - 07.05.15 **15**

9 Parametrisch polymorphe Funktionen - 12.05.15 **17**

10 Listen - 12.05.15 **19**

11 Listenprozeduren - 19.05.2015 **20**

12 Rekursion auf Listen - 21.05.15 **22**

13 Endrekursive Prozeduren - 09.06.2015 **24**

14 Induktive Definitionen - 11.06.2015 **26**

15 Prozeduren höherer Ordnung (high-order procedures) - 16.06.2015 und 18.06.2015 **27**

16 Teachpack "universe" - 23.6. **29**

16.0.1 Implementierung Star Wars VII . . . 29

16.0.2 Komposition von Prozeduren allgemein: . . . 29

16.1 Parametrische Kurven (Higher Order Datenstrukturen) . . . 30

17 Currying (Haskell B. Curry) 25.6. **31**

17.1 Beispiel Ableitung als HOP . . . 31

17.2 Beispiel Charakteristische Funktion einer Menge $s \subseteq M$ . . . 32

18 set-inset, Streams, delay, force 30.6. **33**

18.0.1 Charakterisiere Funktion zur Repräsentation von Mengen: . . . 34

18.0.2 Streams (stream-of %a) . . . 34

19 Stream von fib - 2.7. **36**

19.0.3 Hinweis: 36

19.0.4 Visualisierung 36

19.0.5 Schablone (gemischte Daten): 37

20 Fortsetzung Bäume - 7.7. **38**

20.1 Einschub: Pretty-Printing von Bäumen 38

20.2 Induktion über Binärbäume 38

20.2.1 Beispiel: 39

21 Fortsetzung Bäume (btree-fold) - 9.7. **41**

21.1 Tiefendurchläufe (depth-first-traversals) 41

22 Zeichencodierungen - 14.07 **43**

22.1 Prozeduren zur Huffman-Codierung 44

23 Fortsetzung Codierung mit Bäumen - 16.07 **46**

23.1 Erstellung eines Huffman-Tree für einen gegebenen Text txt 46

24 DMdA-fortgeschritten - 16.7. **47**

24.1 Quote 47

24.1.1 Beispiele 47

24.1.2 Listennotation in Programmen: 47

24.2 Symbole 47

24.3 Operationen: 47

24.4 Repräsentation und Auswertung arithmetischer Ausdrücke 48

25 Der λ-Kalkül - 21.7. **50**

25.0.1 Syntax des λ-Kalküls 50

25.0.2 Abkürzungen 50

25.1 Freie/Gebundene Variablen 50

Chapter 1

Einführung - 14.04.15

Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion

Dr.Racket: Definitionsfenster (oberer Bereich), Interaktionsfenster (unterer Bereich)

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschließlich in Präfixnotation durchgeführt.

Beispiele

Mathematik	Scheme
44-2	(- 44 2)
f(x,y)	(f x y)
$\sqrt{81}$	(sqrt 81)
9^2	(expt 9 2)
3!	(! 3)

Allgemein: ($< function >< arg1 >< arg2 >$ ...)

(+ 40 2) und (odd? 42) sind Beispiele für Ausdrücke, die bei Auswertung einen Wert liefern. (Notation: $\rightsquigarrow$)

(+ 40 2) $\rightsquigarrow$ 42 ($\rightsquigarrow$ = Auswertng / Reduktion / Evalutation)

(odd? 42) $\rightsquigarrow$ #f

Interaktionsfenster: Read → Eval → Print → Read ... (Read-Eval-Print-Loop aka. REPL)

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch konstante) und sind nicht weiter reduzierbar.

Literal:

#t, #f (true, false, Wahrheitswerte) (boolean)

"abc", "x", " " (Zeichenkette) (String)

0 1904 42 -2 (ganze Zahlen) (Integer)

0.42 3.1415 (Fließkommazahl) (Reel)

1/2, 3/4 (rationale Zahl) (Rational)

_(″)_/" (Bilder) (Image)

Chapter 2

Ausdrücke, Defines, usw. - 16.04.2015

Auswertung zusammengesetzter Ausdrücke in mehreren Schritten (steps), von "innen nach außen" bis keine Reduktion mehr möglich ist.

$$(+\ (+\ 20\ 20)\ (+\ 1\ 1)) \rightsquigarrow (+\ 40\ (+\ 1\ 1) \rightsquigarrow (+\ 40\ 2) \rightsquigarrow 42$$

Achtung: Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung ist binär).

Bsp.: Auswertung des zusammengesetzten Ausdrucks 0.7 + (1/2)/0.25 - 0.6/0.3

Arithmetik mit rationalen Zahlen ist exakt.

Ein Wert kann an einen Namen (auch Identifier) gebunden werden , durch

$$(\text{define} < id > < e >)\ (< id > \text{Identifier}, < e > \text{Expression})$$

Erlaubt konsistente Wiederverwendung und dient der Selbstdokumentation von Programmen.

Achtung: Dies ist eine sogenannte Spezifikation und kein Ausdruck. Insbesodnere besitzt diese Spezialform keinen Wert, sondern einen Effekt: Name $< id >$ wird an den Wert von $< e >$ gebunden.

Namen können in Scheme fast beliebig gewählt werden, solange:

1. die Zeichen (kommt noch) nicht vorkommen
2. der Name nicht einem numerischen Literal gleicht
3. kein whitespace (Leerzeichen, Tabulatoren, Return) enthalten ist.

Bsp.: euro $\rightarrow$ us$

Achtung: Groß-/Kleinschreibung ist in Identifiern nicht relevant.

Eine Lambda-Abstraktion (auch: Funktion, Prozedur) erlaubt die Formulierung von Ausdrücken, die mittels Parametern konkreten Werten abstrahieren:

$$(\text{lambda}\ (< p1 >< p2 > ...)\ < e >),\ < e > \text{Rumpf}$$

$< e >$ enthälft Vorkommen der Parameter $< p1 >, < p2 >$...

(lambda ...) ist eine Spezialform. Wert der Lambda-Abstraktion ist $\# < procedure >$

Anwendung (auch: Applikation/Aufruf) der Lambda-Abstraktion führt zur Ersetzung der vorkommenden Parameter im Rumpf durch die angegebenen Argumente:

(lambda (days) (* days (* 155 min-in-a-day))) $\rightsquigarrow$ (* 365 (* 155 min-in-a-day)) $\rightsquigarrow$ 81468000

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar, der bis zum Zeilenende reicht, ein und wird vom System bei der Auswertung ignoriert.

Prozeduren sollten im Programm eine ein-bis zweizeiliger Kurzberschreibung direkt voran gestellt werden.

Chapter 3

Signaturen, Testfälle - 21.04.15

Eine Signatur prüft, ob ein Name an einen Wert einer angegebenen Sorte (Typ) gebunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.

$$(: < id > < signatur >)$$

Bereits eingebaute Signaturen:

- natural $\mathbb{N}$
- integer $\mathbb{Z}$
- rational $\mathbb{Q}$
- real $\mathbb{R}$
- number $\mathbb{C}$
- boolean
- string
- image

(: ...) ist eine Spezialform ohne Wert, aber Effekt: Signaturprüfung

Prozedur-Signaturen spezifizieren sowohl Signaturen für die Parameter p1, p2, ... , pn als auch den Ergebniswert der Prozedur:

$$(< signaturp_1 > ... < signaturp_n > - >< signatur - ergebnis >)$$

Prozedur-Signaturen werden bei jeder Anwendung eine Prozedur auf Verletzung geprüft.

Testfälle dokumentieren das erwartete Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

$$(check - expect < e_1 >< e_2 >)$$

Werte Ausruck $< e_1 >$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwarung (= der Wert von $< e_2 >$) entspricht.

Einer Prozedurdefinition sollten Testfälle direkt vorangestellt werden.

Spezialform: Kein Wert, aber Effekt: Testverletzung protokollieren.

Konstruktionsanleitung für Prozeduren

- ; ... (1) Kurzbeschreibung (1-2 zeiliger Kommentar mit Bezug auf Parameter)
- (: ...) (2) Signatur
- (check-expect ...) (3) Testfälle
- (define (lambda (...) ...) (4) Prozedur + Rumpf

Top-Down-Entwurf (Programmieren durch "Wunschdenken")

Bsp.: Zeichen Ziffernblatt (Stunden- und Minutenzeiger) zur Uhrzeit H:m auf einer analogen 24h-Uhr

- Minutenzeiger legt 360°/60 pro Minute zurück (360/60 * m)
- Stundenzeiger legt 360°/12 pro Stunde zurück (360/12 * h + 360/12 * m/60)

Chapter 4

Substitutionsmodell, Fallunterscheidung - 23.04

Reduktionsregeln für Scheme (Fallunterscheidug je nach Ausrucksart)

Wiederhole, bis keine Reduktion mehr möglich:

- Literal (1, "abc", #t, ...) [eval_{lit}]

  l $\rightsquigarrow$ l

- Identifier id (pi, clock-face, ...) [eval_{id}]

  id $\rightsquigarrow$ gebundener Wert

- Lambd-Abstraktion

  (lambda ()) $\rightsquigarrow$ (lambda ()) [eval_{λ}]

- Applikation (f, e1, e2)

  - (1) f, e1, e2 reduziere, erhalte f', e1', e2'
  - (2)
    - Operation f' auf e1', e2', ... falls f' primitive Operation (+, *, ...) [apply_{prim}]
    - Argumentenwert e1', e2', ... Rumpf von f' einsetzen, dann Rumpf reduzieren , falls f' Lambdaabstraktion [apply_{λ}]

Beispiel: Applikation

(+ 40 2)

$\rightsquigarrow$ (#< procedure + > 40 2) $\rightsquigarrow$ 42

eval_{lit} (+)

eval_{lit} (40)

eval_{lit} (2)•

(position-minute-hand 30)

$\rightsquigarrow$ ((lambda (m) (* degrees-per-minute m)) 30)

$\rightsquigarrow$ (* degrees-per-minute 30)

$\rightsquigarrow$ (* degress-per-minute 30)

$\rightsquigarrow$ (#<procedure * > 360/60 30)

Bezeichnen (lambda (x) (* x x)) und (lambda (r) (* r r)) die gleiche Prozedur? $\Rightarrow$ Ja!

Achtung: Das hat Einfluss auf das korrekte Einsetzen von Argumenten für Parameter! (s. apply_{λ})

Das bindenen Vorkommen eines Identifiers x kann im Programmtext systematisch bestimmt werden: suche strik von "innen nach außen" bis zum ersten

- (lambda (x))
- (define x)

(Prinzip der lexikalischen Bindung)

Übliche Notation in der Mathematik: Fallunterscheidung

$$maximum(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Tests auch (Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern. Typische primitive Tests:

- (: = (number number → boolean))
- (: < (real real → boolean)), auch >, ≤, ≥
- (: string=? (string string → boolean)), auch string>?, string≤?
- (: boolean? (boolean boolean → boolean))
- (: zero? (number → boolean))
- odd?, even?, positive?, negative?, ...

Binäre Fallunterscheidung: if

(if $< t_1 >< e_1 >< e_2 >$)

Mathematisch: $\begin{cases} e_1, & \text{falls } t_1 \\ e_2, & \text{sonst} \end{cases}$

Chapter 5

One-of Signatur - 28.04.15

Die Signatur <u>one-of</u> lässt genau einen der aufgezählten n Werte zu:

$$\text{(one-of} < e_1 > ... < e_n >)$$

Reduktion von if:

$$\text{(if } t_1\ e_1\ e_2) \rightsquigarrow \begin{cases} < e_1 >, & \text{falls t1' = \#t ; e2 wird niemals ausgewertet} \\ < e_2 >, & \text{sonst; e1 wird niemals ausgewertet} \end{cases}$$

(1) Reduziere t_1, erhalte t_1'

Spezialform Fallunterscheidung (conditional expression):

$$\text{(cond } (< t_1 >< e_1 >)\ ...\ (< t_n >< e_n >)\ \text{(else } < e_{n+1} >))\ \text{(else optional)}$$

Werte die Tests in der Reihenfolge $t_1, t_2, ..., t_n$ aus. Sobald t_i # t ergibt werte Zweig e_i aus. e_i ist das Ergebnis der Fallunterscheidung. Wenn t_n # f liefert, dann liefere

$$\begin{cases} Fehlermeldung, & \text{"cond: alle Tests ergaben \#f", falls kein else-Zweig} \\ < e_{n+1} >, & \text{sonst} \end{cases}$$

Reduktion von cond [eval$_{cond}$]

$$\text{(cond } (< t_1 >< e_1 >)(< t_2 >< e_2 >)...) \rightsquigarrow \begin{cases} < e_1 >, & \text{falls t1' = \#f} \\ (cond(< t_2 >< e_2 >)(...)), & \text{sonst} \end{cases}$$

Reduziere t_1, erhalte t_1'.

(cond) $\rightsquigarrow$ Fehlermeldung "Alle Tests..."

(cond (else $< e_{n+1} >$)) $\rightsquigarrow e_{n+1}$

cond ist "systematischer Zucker"

(auch: abgleitete Form) für eine verschachtelte Anwendung von 'if':

(cond ($< t_1 >< e_1 >$) ($< t_1 >< e_1 >$) ...))) entspricht (if $< t_1 >< e_1 >$ ($if < t_1 >< e_1 >$ (if...))

Spezialformen 'and' und 'or':

$$(or < t_! >< t_2 > ... < t_n >) \text{ entspricht } (if < t_1 > \#t(or < t_2 > ...))$$

$$\text{(or)} \rightsquigarrow \#\text{f}$$

$$(and < t_1 > ... < t_n > \rightsquigarrow (if < t_1 > (and < t_2 > ... < t_n >)\#f)$$

$$\text{(and)} \rightsquigarrow \#t$$

Chapter 6

Zusammengesetzte Daten - 30.04.15

Ein Charakter besteht aus drei Komponenten.

- Name des Charakters (name)
- Handelt es sich um einen Jedi? (jedi?)
- Stärke der Macht (force)

→ Datendefinition für zusammengesetzte Daten.

Konkreter Charakter:

Name	"Luke Skywalker"
jedi?	#f
force	25

; Ein Charakter (character) besteht aus

; - Name (name)

; - Jedi-Status (jedi?)

; - Stärke der Macht (force)

```
(define-records-procedures charakter
make-character
character?
(character-name
character-jedi
character-force))
```

(make-character n j f) $\rightsquigarrow < \textit{records} >$ (konstruktion)

(character-name $< \textit{record} > \rightsquigarrow$ n (Komponentenzugriff)

(character-jedi? $< \textit{record} >$) $\rightsquigarrow$ j (Komponentenzugriff)

(character-force $< \textit{record} >$) $\rightsquigarrow$ f (Komponentenzugriff)

Zusammengesetzte Daten = Records in Scheme.

Record-Definition legt fest:

- Record-Signatur
- Konstruktor (Baut aus Komponenten einen Record)

- Prädikat (liegt Record vor?)
- Liste von Selektoren (lesen jewils eine Komponenten des Records)

(define-records-procedures $<t>$

make-$<t>$; Konstruktor

$<t>$?

($<t> - <comp_1>$ ... $<t> - <comp_n> 4$)) ; Liste der n-Seleketoren

Verträge des Konstruktors / der Selektoren für Record-Signatur $<t>$ mit n Komponenten namens $<comp_1>$ ... $<comp_n>$:

- (: make-$<t>$ ($<t_1>$ ... $<t_n> \rightarrow <t>$))
- (: $<t> - <comp_1>$ ($<t> \rightarrow <t_1>$))
- ...
- (: $<t> - <comp_n>$ ($<t> \rightarrow <t_n>$))

Es gilt für die Strings n, Booleans j und Integer f:

(character-name (make-character n j f)) = n

(analog für den Rest)

Interaktion von Funktionen (algebraische Eigenschaften).

Spezialform check-property:

```
(check-property
  (for-all ((<id_1>  <sig_1> ... <id_n>  <sig_n>))
  <e>))
```

$<e>$ bezieht sich auf $<id_1>$ ... $<id_n>$.

Test erfolgreich, falls $<e>$ für bel. gewählte Bindungen für $<id_1>$ ... $<id_n>$ immer #t ergibt.

Interaktion von Selektor und Konstruktor:

```
(check-property
  (for-all ((n string)
            (j booleans)
            (f integer))
  (string=? (character-name (make-character n j f)) n )))
```

Beispiel: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist mindestens so groß wie jede dieser Zahlen: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq max\ x_1, x_2$

```
(check-property
  (for-all ((x_1 natural)
            (x_2 natural))
  (\geq (+ x_1 x_2) (max x_1 x_2))))
```

Konstruktion von Funktionen, die zusammengesetzte Daten konsumieren:

- Welche Record-Komponenten sind relevant für Funktionen?

  → Schablone:

  ; könnte Charakter e ein Sith-Lord sein?

  (: sith? (character → boolean))

```
(define sith?
  (lambda (e)
    ... (character-jedi? c) ... (character-force c) ... ))
```

Konstrukton von Funktionen, die zusammengesetzte Daten konstruieren:

- Der Konstruktor muss aufgerufen werden.

  → Schablone:

```
(define
  (lambda (...)
    (make-<t> ...) ...))
```

Chapter 7

Fortsetzung zusammengesetzte Daten - 05.05.1

- lego-character
  - figure
  - character
    - Name
    - jedi?
    - force

Sei $< p >$ ein Prädikat mit Signatur ($< t > \rightarrow$ *boolean*). Eine Signatur der Form (predicate $< p >$) gilt für jeden Wert x der Signatur $< t >$ sofern ($< p >$ x) $\rightsquigarrow \#t$. Signatur (predicate $< p >$) ist somit spezifischer (restriktiver) als die Signatur $< t >$ selbst.

Einfürhung eines neuen Signaturnamens $< new - t >$ für die Signatur $< t >$:

$$\text{(define} < new - t > \text{(signatur} < t >\text{))}$$

Bsp.:

```
(define farbe
  (signatur
    (one-of "Karo" "Herz" "Pik" "Kreuz")))

(define latitude
  (signature (predicate latitude?)))
```

Chapter 8

Gemischte Daten - 07.05.15

Geocoding: Übersetzte eine Ortsangabe mittels des Google Maps Geocoding API (Application Programming Interface) in eine Position auf der Erdkugel.

$$(\text{: geocoder (string} \rightarrow \text{(mixed geocode geocode-error)))}$$

Ein Geocode besteht aus:

- Adresse (address) (string)
- Ortsangabe (loc) (location)
- Nordostecke (northeast) (location)
- Südwestecke (southwest) (location)
- Typ (type) (string)
- Genauigkeit (accuracy) (string)

(: geocode-address (geocode → string)) ...

Ein geocode-error besteht aus:

- Fehlerart (level) (one-of "TCP" "HTTP" "JSON" "API")
- Fehlermeldung (message) (string)

Teachpack: geocoder.rkt

Gemischte Daten Die Signatur

$$(\text{mixed} < t1 > ... < t_n >)$$

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine der Signatur $< t_1 > ... < t_n >$ erfüllt.

Beispiel: Datendefinition:

Eine Antwort des Geocoders ist entweder

- ein Geocode (geocode) oder
- eine Fehlermeldung (geocode-error)

Beispiel (eingebaute Funktion string → number):

(: string→number (string → (mixed number (onfe of #f))))

(string→number "42") $\rightsquigarrow$ 42 (string→number ”foo”) $\rightsquigarrow$ #f

Erinnerung:

Das Prädikat $< t >$? einer Signatur $< t >$ unterscheidet Werte der Signatur $< t >$ von <u>allen anderen</u> Werten:

(: $< t >$? (any → boolean))

Auch Prädikafür eingebaute Signaturen:

- number?
- complex?
- real?
- rational?
- integer?
- natural?
- string?
- boolean?

Prozeduren die gemische Daten der Signaturen $< t_1 > ... < t_n >$ konsumieren:

<u>Konstruktionsanleitung</u>:

(: $< f >$ ((mixed $< t_1 > ... < t_n >$ → ...))

(define $< f >$ (lambda (x) (cond (($< t_1 >$? x) ...) ... ($< t_n >$? x)...)))))

Mittels <u>let</u> lassen sich Werte an <u>lokale Namen</u> binden:

$$(\text{let } ((< id_1 >< e_1 >) \text{ ... } (< id_n >< e_n >)) < e >)$$

Die Ausdrücke $< e_1 > ... < e_n >$ werden <u>parallel</u> ausgewertet → $< id_1 > ... < id_n >$ können in $< e >$ (<u>und nur hier</u>) verwendet werden. Der Wert let-Ausdruck ist der Wert von $< e >$.

Achtung: ’let’ ist verfügbar ab Sprachebene ”DMdA”.

’let’ ist syntaktischer Zucker.

(let (($< id_1 >< e_1 >$) ... ($< id_n >< e_n >$)) $< e >$)

↔

((lambda ($< id_1 > ... < id_n >$) $< e >$) $< e_1 > ... < e_n >$)

Chapter 9

Parametrisch polymorphe Funktionen - 12.05.1

Abstand zwier geografischer Positionen l_1, l_2 auf der Erdkugel in km (lat, lng jeweils in Radian):

dist(l_1, l_2) = Erdradius in km · acos(cos(l_1.lat) · cos(l_1.lng) · cos(l_2.lat) · cos(l_2.lng) + cos(l_1.lat) · sin(l_1.lng) · cos(l_2.lat) · sin(l_2.lng) + sin(l_1.lat) · sin(l_2.lat))

Parametrisch polymorphe Funktionen

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente: parametrisch polymophe Prozduren (gr.: vielgestaltig). Nutze Signaturvariablen: %a, %b, ...

Beispiel:

; Identität

(: id (%a → %a))

(define id (lambda (x) x))

; Konstante Funktion (ignoriert zweites Argument)

(: const (%a %b → %a))

(define cost (lambda (x y) x))

; Projection (ein Argument auswählen)

(: proj ((one-of 1 2) %a %b → (mixed %a %b)))

(define proj (lambda (i $x1$ x_2) (cond ((= i 1) x_1) ((= i 2) x_2))))

Eine polymorphe Signatur steht für alle Signaturen in denen die Signaturvariablen durch konkrete Signaturen ersetz werden.

Beispiel:

Wenn eine Prozedur (number %a %b → %a) erfüllt, dann auch :

(number string boolean → string)

(number boolean natural → boolean)

(number number number → number)

; Ein polymorphes Paar (pair) besteht aus

; - erster Komponente (first)

; - zweiter Komponente (rest)

; wobei die Komponenten bel. Signaturen besitzen

```
(define-record-procedures-pair pair-of
```

```
make-pair
pair?
(first rest))
```

(pair-of $< t_1 >$ $< t_2 >$) ist eine Signatur für Paare, deren erste bzw. zweite Komponente die Signaturen $< t_1 >$ bzw. $< t_2 >$ erfüllen

→ pair-of: Signatur mit (zwei) Signaturparametern

(: make-par (%a %b → (pair-of %a %b)))

(: pair? (any → boolean))

(: first ((pair-of %a %b) → %a))

(: rest ((pair-of %a %b) → %b))

Chapter 10

Listen - 12.05.15

Eine Liste von werten der Signatur $< t >$ (list-of $< t >$) ist entweder:

- leer (Signatur empty-list) oder
- ein Paar (Signatur pair-of) aus einem Wert der Signatur $< t >$ und einer Liste von Werten der Signatur $< t >$

```
(define list-of
  (lambda (t)
    (signature
      (mixed empty-list (pair-of t (list-of t))))))
```

Signatur empty-list bereits in Racket vordefiniert. Ebenfalls vordefiniert:

- (: empty empty-list)
- (: empty? (any $\rightarrow$ boolean))

Operationen auf Listen

- Konstruktoren:

  ```
  (: empty empty-list) ; leere Liste
  (: make-pair (%a (list-of %a) -> (list-of %a)))
  ```

- Prädikate:

  ```
  (: empty? (any -> boolean)) ; leer Liste?
  (: pair? (any -> boolean)) ; nicht-leere Liste?
  ```

- Selektoren:

  ```
  (: first ((list-of %a) -> %a)) ; Kopfelement
  (: rest (list-of %a) -> (list-of %a))) ; Restliste
  ```

Chapter 11

Listenprozeduren - 19.05.2015

Prozeduren, die Listen konsumieren

Konstruktionsanleitung befolgen!

Beispiel:

```
; Summe der Zeichen der Liste xs
(: list-sum (list-of number) -> number)
(check-expect (list-sum empty) 0)
(check-expect (list-sum one-to-four) 10)
```

Schablone (gemische + zusammengesetzte Daten)

```
(define list-sum
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) 0)
          ((pair? xs) (+ (first xs) (list-sum (rest xs)))))))
```

(rest xs) mit Signatur (list-of number) ist selbst wieder eine kürzere Liste von Zahlen.

(list-sum (rest xs)) erzielt Fortschritt !.

Konstruktionsanleitung für Prozeduren ¡f¿, die Liste xs konsumiert.

```
(: <f> ((list-of <t_1>) -> <t_2>))
(define <f>
  (lambda (xs)
    (cond ((empty? xs) ...)
          ((pair? xs) ... (first xs) ... (<f> (rest xs)) ...)))
```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur (list-of % a) eingebaut
- Neuer syntaktischer Zucker:

  ```
  (list <e_1> <e_2> ... <e_n>)
  ```

- Ausgabeformat für nicht leere Liste:

  $\# < list\ x_1\ x_2 ...\ x_n >$

Füge Listen xs, ys zusammen (concatenation):

Beobachtung:

- Die Lnge von xs bestimmt die Anzahl der rekusriven Aufrufe von cat
- Auf ys werden niemals Selektoren angewandt

Chapter 12

Rekursion auf Listen - 21.05.15

Generierung aller natürlichen Zahlen (vgl. gemische Daten). Eine natürliche Zahl (natuarl) ist entweder:

- die 0 (zero)
- der Nachfolger (succ) einer natürlichen Zahl.

Konstruktoren

```
(: zero natural)
(define zero 0)


(: succ (natural -> natural))
(define succ
  (lambda (n)
    (+ n 1)))
```

Vorgängerfunktion (pred), definiert für $n > 0$:

```
(: pred (natural -> natural)) \\
(define pred
  (lambda (n)
    (- n 1)))
```

Bedinge algebraische Eigenschaften (s. check-property):

$(\Rightarrow <p> <t>)$

Nur wenn $<p> \not\Rightarrow \#t$, wird Ausdruck $<t>$ ausgewertet und getestet ob $<t> \not\Rightarrow\ \#t$.

Beispiel:

Fakultätsfunktion n! $(n \in \mathbb{N})$

0! $= 1$

n! $=$ n $\cdot$ (n-1)!

Konstruktionsanleitung für gem. Daten:

```
; Berechne n!
(: factorial (natural -> natural))
( define factorial
  (lambda (n)
    (cond ((= n 0) 1)
          ((> n 0) (* n (factorial (- n 1)))))))
```

Beobachtung:

- Im letzten Zweig ist $n > 0 \Rightarrow$ pred anwendbar
- ($< f >$ (- n 1)) hat die Signatur $< t >$

Satz

Eine Prozedur, die nach der Konstruktionsanleitung für Listen oder natürliche Zahlen konstruiert ist, terminiert immer (= liefert immer ein Ergebnis).

Beweis: in Kürze

Die Größe eines Ausdrucks ist proportional zum Platzverbrauch des Reduktionsprozesses im Rechner

$\Rightarrow$ Wenn mäglich, erzeugte Reduktionsprozesse, die konstanten Platzverbrauch - unabhängig vom Eingabeparametern - benötigen.

Chapter 13

Endrekursive Prozeduren - 09.06.2015

Idee für die Multiplikation:

Führe Multiplikation sofort aus. Schleife das Zwischenergebnis (akkumulierendes Argument) durch die Berechnung. Am Ende enthält Akkumulator das Ergebnis.

```
; Berechne n!
; (wrapper)
(: fac (natural -> naural))
(define fac
  (lambda (n)
    (fac-worker n 1)))

(: fac-worker (natural natural -> natural))
(define fac-worker
  (lambda (n acc)
    (cond ((= n 0) acc)
          ((> n 0) (fac-worker (- n 1) (* acc n))))))
```

Ein Berechnungsprozess ist <u>iterativ</u>, falls seine Größe konstant bleibt.

Damit:

- factorial nicht iterativ
- fac-worker iterativ

Wieso ist fac-worker iterativ?

Der rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Ausdruck <u>vollständig</u>. Es gibt keinen <u>Kontext</u> (ungebundenen Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet".

Kontekt des rekursiven Aufrufs in

- factorial : (* n [])
- fac-worker : keiner

Ein Prozeduraufruf ist <u>endrekursiv</u> (tail call), wenn er keinen Kontext besitzt. Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduraufrufe beinhalten, heißen selber endrekursiv.

<u>Endrekursive </u>Prozeduren generieren <u>iterative</u> Berechnungsprozesse.

Beobachtung:

```
(cat (list 1000 ... 2) (list 1)
```

Aufrufe von make-pair: 1000 + 999 +998 + ... + 1

⇒ Quadratischer Aufwand

Konstruiere iterative listenumkehr (backwards)

Berechnung von (backwards (list 1 2 3))

```
(: backwards-worker ((list-of %a) (lsit-of %a) \rightarrow (list-of %a)))
```

Mittels letrec lassen sich Werte an lokale Namen binden:

```
(letrec ((<id_1> <e_1>)
          ...
         (<id_n> <e_n>))
        <e>)
```

Die Ausdrücke $e_1, ...e_n$ und e dürfen sich auf die Namen von $< id_1 > ... < id_n >$ beziehen.

Chapter 14

Induktive Definitionen - 11.06.2015

Konstruktive Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

Def.: (Peano-Axiome)

- (P1) $0 \in \mathbb{N}$ (Null)
- (P2) $\forall n \in \mathbb{N} : succ(n) \in \mathbb{N}$ (Nachfolger)
- (P3) $\forall n \in \mathbb{N} : succ(n) \neq 0$
- (P4) $\forall m, n \in \mathbb{N} : succ(m) = succ(n) \Rightarrow m = n$

  (P3) und (P4) $\Rightarrow \mathbb{N}$ ist induktiv definiert.
- (P5) Induktionsaxiom

  Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und $\forall n : n \in M \Rightarrow succ(n) \in M$, gilt $M = \mathbb{N}$

  - $\mathbb{N}$ enhält nicht mehr als die durch 0 und die durch succ() generierten Elemente
  - Nichts sonst ist in $\mathbb{N}$

Beschweisschema der vollständigen Induktion:

Sei P(n) eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$:

```
(: P (natural -> boolean))
```

Ziel: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Definiere $M = \{n \in \mathbb{N} | P(n)\} \subseteq \mathbb{N}$

Induktionsaxiom:

Falls $0 \in M$

und $\forall n(n \in M \Rightarrow succ(n) \in M)$

dann $M = \mathbb{N}$

Chapter 15

Prozeduren höherer Ordnung (high-order procedures) - 16.06.2015 und 18.06.2015

```
; Extrahiere die Elemente von xs, die Predikat p? erfuellen

(: filter ((%a -> boolean) (list-of %a) -> (list-of %a)))
(define filter
  (lambda (p? xs)
    (cond ((empty? xs) xs)
          ((pair? xs)
            (if (p? (first xs))
              (make-pair (first xs) (filter p? (rest xs))))))))
```

Wert des Parameters p? ist Prozedur

Higher-order procedures (H.O.P)

(a) akzeptieren Prozeduren als Parameter und/oder

(b) liefern Prozeduren als Ergebnis

H.O.P vermeiden Duplizierung von Code und führen zu kompakteren Programmen, verbesserter Lesbarkeit, verbesserter Wartbarkeit

Bsp.: (map f xs)

```
; Wende f auf alle ELemente von Liste xs an
(: map ((%a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %b))
(define map
  (lambda (f xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs)
            (make-pair (f (first xs)) (map f (rest xs)))))))
```

Allgemeinere Transformation von Listen: Listenfaltung (list-folding), Idee: Ersetze die Listenkonstruktoren make-pair und empty systematisch:

- (foldr z c xs) wirkt als Spine Transformer
  - empty $\rightsquigarrow$ z
  - make-pair $\rightsquigarrow$ c

- Eingabe: Liste (list-of %a)
- Ausgabe: Im allg. keine Liste mehr (etwa %b)

```
; Falte Liste xs bzgl. c und z
(: foldr (%b (%a %b -> %b) (list-of %a) -> %b))
(define foldr
  (lambda (z c xs)
    (cond ((empty? xs) z)
          ((pair? xs)
            (c (first xs) (foldr z c (rest xs)))))))
```

Beispiel Summe:

```
(: sum ((list-of number) -> number))
(define sum
  (lambda (xs)
    (foldr 0 + xs)))
```

Beispiel Länge einer Liste durch Listenreduktion:

```
(foldr 0 c xs)
```

mit c = (lambda (x r) (+ 1 r))

Chapter 16

Teachpack "universe" - 23.6.

Teachpack "universe" nutzt H.O.P., um Animationen (Sequenzen von bildern/Szenen) zu definieren.

```
(big-bang < init >\\
(on-tick <tock>)\\
(to-draw <render><w><h>)\\
```

optional

- (: <init> %a)

Startzustand -(: <tock> (%a → %a))

Funktion, die neuen Zustand aus altem Zustand berechnet, wird 28 Mal pro Sekunde aufgerufen.

- (: <render> (%a → image))

Funktion, die aus aktuellem Zustand ein Bild einer Szene berechnet (wird in Fenster mit Dimension <w>x<h> Pixel angezeigt).

- Bei Schliessen der Animation wird der letzte Zustand zurück gegeben.

16.0.1 Implementierung Star Wars VII

Ausgabe der römischen Episodennummer für Film f. (roman (film-episode f))

Gesuchte Funktion ist *Komposition* von zwei existierenden Prozeduren.

1. Wende 'film-episode' an, dann
2. wende 'roman' auf das Ergebnis von (1) an.

16.0.2 Komposition von Prozeduren allgemein:

```
(compose f g) \equiv (f (g x))
```

neue Prozedur realisiert

Komposition von f und g.

Mathematik: (compose f g) $\equiv f \circ g$. 'f nach g'

```
(: compose ((%b -> %c) (%a -> %b) -> (%a ->%c)))
(define compose
        (lambda (f g)
```

```
                (lambda (x)
                        (f (g x)))))
```

repeat: n-fache Komposition von f mit sich selbst (n-fache Anwendung von f, Exponentiation):

f^0 = id - (id $\equiv$ (lambda (x) x))

$f^n = f \circ f^{n-1}$

```
(: repeat (natural (%a -> %a) -> (%a -> %a)))
(define repeat
        (lambda (n f)
                (cond ((= n 0) (lambda (x) x))
                      ((> n 0) (compose f (repeat (- n 1) f))))))
```

; Greife auf das n-te Element der Liste xs zu

```
(: nth (natural (list-of %a) -> %a))
(define nth
        (lambda (n xs)
                ((compose first (repeat (- n 1) rest)) xs)))
```

16.1 Parametrische Kurven (Higher Order Datenstrukturen)

$f(t) =< x(t), y(t) >$ siehe rkt-Datei

Reduktion:

((add 1) 21)

$^{eval_id} \rightsquigarrow$ (((lambda (x) (lambda (y) (+ x y))) 1) 21)

$^{apply-lambda(x)} \rightsquigarrow \underline{((lambda(y)(+1y))}21)$

$^{apply-lambda(y)} \rightsquigarrow$ (+ 1 21)

Chapter 17

Currying (Haskell B. Curry) 25.6.

Erstmals implementier von Moses Schönfinkel.

Anwendung einer Prozedur auf ihr erstes Argument liefert Prozedur der restlichen Argumente.

- Jede n-stellige Prozedur lässt sich in eine alternative curried Prozedur transformieren, die in n Schritten jeweils ein Argument: curry. Umgekehrte Transformation: uncurry.

(%a %b → %c) → Applikation auf 2 Argumente (Signaturen %a %b) → %c

curry ↑ ↓ uncurry = (%a (%b → %c)) → Applikation auf 1 Argument (Signaturen %a) → (%b %c) → Applikation auf 1 Argument (Signatur %b) → %c

partielle Applikation

```
(: curry ((%a %b -> %c) -> (%a (%b -> %c))))
(define curry
        (lambda (f)
                (lambda (x)
                        (lambda (y)
                                (f x y)))))

(: uncurry ((\%a (\%b -> \%c)) -> ((\%a \%b -> \%c) ))
(define uncurry
        (lambda (f)
                (lambda (x y)
                        ((f x) y))))
```

17.1 Beispiel Ableitung als HOP

Bestimmung der ersten Ableitung der reellen Funktion f durch Bildung des Differenzenquotienten:

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ Differenzialquotient

- Operator _' (Ableitung) konsumiert Funktion f und produziert Funktion f' ⇒ _' ist higher-order!

```
(: diffquot (h f -> f')
(: diffquot (reatl (real -> real) -> (real -> real)))
(define difquot
        (lambda (h f)
                (lambda (x)
```

```
                    (/ (- (f (+ x h)) (f x))
                          h))))
```

17.2 Beispiel Charakteristische Funktion einer Menge $s \subseteq M$

Charakteristische Funktion für S: (: $\chi_S(M \rightarrow$ boolean))

(Sei 0 = #f und 1 = #t)

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in S \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$\chi_s(m) = \#\text{f}$

$\chi_s(s) = \#\text{t}$

- Idee: Repräsentative $S \subseteq M$ durch Prozedur (M $\rightarrow$ boolean) und Mengenoperation durch Operation auf Prozeduren (H.O.P.)
- :-) Darstellung unendlicher Mengen ($S_{42} = \{x \in \mathbb{Z} | x > 42\}$)
- :-) Mengenoperationen ($\cup, \cap, \setminus$) in konstanter Zeit.

Element x in Menge S einfügen:

(Sei 0 = #f und 1 = #t)

$$\chi_{S\{x\}}(y) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in S \\ \chi_S(y) & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Chapter 18

set-inset, Streams, delay, force 30.6.

Konvertiere Liste xs in eine Menge gleicher Elemente:

```
;       xs
;    +--+--+
;    |  |  |
;    +--+--+
;    /     \
;  x1       +--+--+                         xs
;           |  |  |                           \
;           +--+--+     (foldr empty-set set-inset))
;           /     \
;        x2        .
;                   \
;                   +--+--+
;                   |  |  |
;                   +--+--+
;                   /     \
;                 xn       empty
```

$\rightsquigarrow$ (fold empty-set set-in-set xs)) - empty $\rightarrow$ empty-set - make-pair $\rightarrow$ set -inset

```
;       set-inset
;         /     \
;      xn       set-inset
;       /             \
;                       .
;                         .
;                          \
;                     set-inset
;                     /       \
;                 xn       empty-set
```

18.0.1 Charakterisiere Funktion zur Repräsentation von Mengen:

1. Performance: set-member 2 hat lineare Laufzeit bei mit set-inset konstruierten Mengen (wie Liste!)
2. Vorteile:
   - unendliche Mengen darstellbar
   - Mengenoperationen in konstanter Zeit durchführbar
3. Nachteil: Elemente sind nicht aufzählbar

18.0.2 Streams (stream-of %a)

Unendliche Ströme von Elementen x_i mit Signaturen %a. Ein Stream ist ein Paar.

```
;   Stream-head
;   +----+-------+
;   | x1 |  tail |
;   +----+-------+
```

%a (→ (stream-of %a)) -Erst eine Ausführung des tails (*fore*) erzeugt nächstes Stream-Elemt (daher auch: lazy list)

```
;   +----+---------------+                           +----+-------+
;   | xn |  (force tail) |            ->             | x2 |  tail |
;   +----+---------------+                           +----+-------+
```

- Vergleich:

```
;   (list-of %a)                           (stream-of %a)
;      xs
;   +--+--+                                 +----+--+
;   |  |  |                                 | xs |  |
;   +--+--+                                 +----+--+
;   /     \                                 /       \
; x1      +--+--+                         xn      +--+--+
;         |  |  |                                 |  | 2|
;         +--+--+                                 +--+--+
;         /     \                                 /
;       x2       .                              x2
;                 \
;                 +--+--+
;                 |  |  |
;                 +--+--+
;                 /     \
;               xn      empty
```

delayed evaluation

Verzögerte Auswertung eines Ausdrucks (delayed evaluation)

- (delay e) : Verzögere die Auswertung des Ausdrucks e und liefere "Versprechen " (promise), e bei Bedarf später auswerten zu können (delay e) $\equiv$ (lambda () e {nicht ausgewertet})
- (force p): Erzwingt Auswertung des Promise p, liefert Wert zurück
  (: force (($\rightarrow$ %a) $\rightarrow$ %a))

```
(define force
        (lambda (p)
                (p)))
```

Chapter 19

Stream von fib - 2.7.

Generiere den unendlichen Strom fibs der Fibonacci-Zahlen

f(0) = 1; fib(1) = 1; fib(n) = fib(n - 1) + fib(n - 2)

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)

Beobachtung:

1 1* 2 3 5 8 Start des Streams fibs

+ 1* 2 3 5 8 tail von fibs

= 2 3 5 8 tail von tail von fibs

Stream-Diagramm zu fibs:

yet-to-follow

Die Menge der Binärbäume $T(M)$ ist induktiv definiert:

(T_1) empty-tree $\in T(M)$

(T_2) $\forall x \in M$ und $l, r \in T(M)$: (make-node l x r) $\in T(M)$

(T_3) Nichts sonst ist in $T(M)$

19.0.3 Hinweis:

- Jeder Knoten (make-node) in einem Binärbaum hat zwei Teilbäume sowie eine Markierung (label) x
- Vergleiche: $M*$ und $T(M)$, empty und empty-tree, make-pair und make-node

19.0.4 Visualisierung

- empty-tree: □
  (make-node l x r): (Zeichnung yet-to-come)
- Der Knoten mit Markierung x ist Wurzel (root) des Baumes
- Ein Knoten, der nur leere Teilbäume besitzt heißt Blatt (leaf). Alle anderen Knoten sind innere Knoten (inner nodes)
  (Zeichnung yet-to-come)

Beispiele für Binärbäume der Menge $T(M)$

Baum t_1 (listenartig, rechts-tief):

```
;    +--+
;    | 1|  Wurzel
;    +--+
;    /      \
;  |_|      +--+
;           |  |        innerer Knoten
;           +--+
;           /      \
;         |_|       .
;                    \
;                    +--+
;                    |  |  Blatt
;                    +--+
;                    /      \
;                  |_|      |_|
```

Baum t_2 (balanciert): alle Teilbäume auf einer Tiefe haben gleiche Anzahl von Knoten

(Zeichnung)

(Binär-) Bäume haben zahllose Anwendungen:

- Suchbäume (z.B. in Datenbanken)
- Datenkompression
- Darstellung von Termen (Ausdrücken)

Bäume sind **die** induktive Datenstruktur!

Die Tiefe (depth) eines Baumes ist die maximale Länge eines Weges von der Wurzel zu einem leeren Baum. Also:

(btree-depth empty tree) = 0

(btree-depth t1) = 3

(btree-depth t2) = 2

19.0.5 Schablone (gemischte Daten):

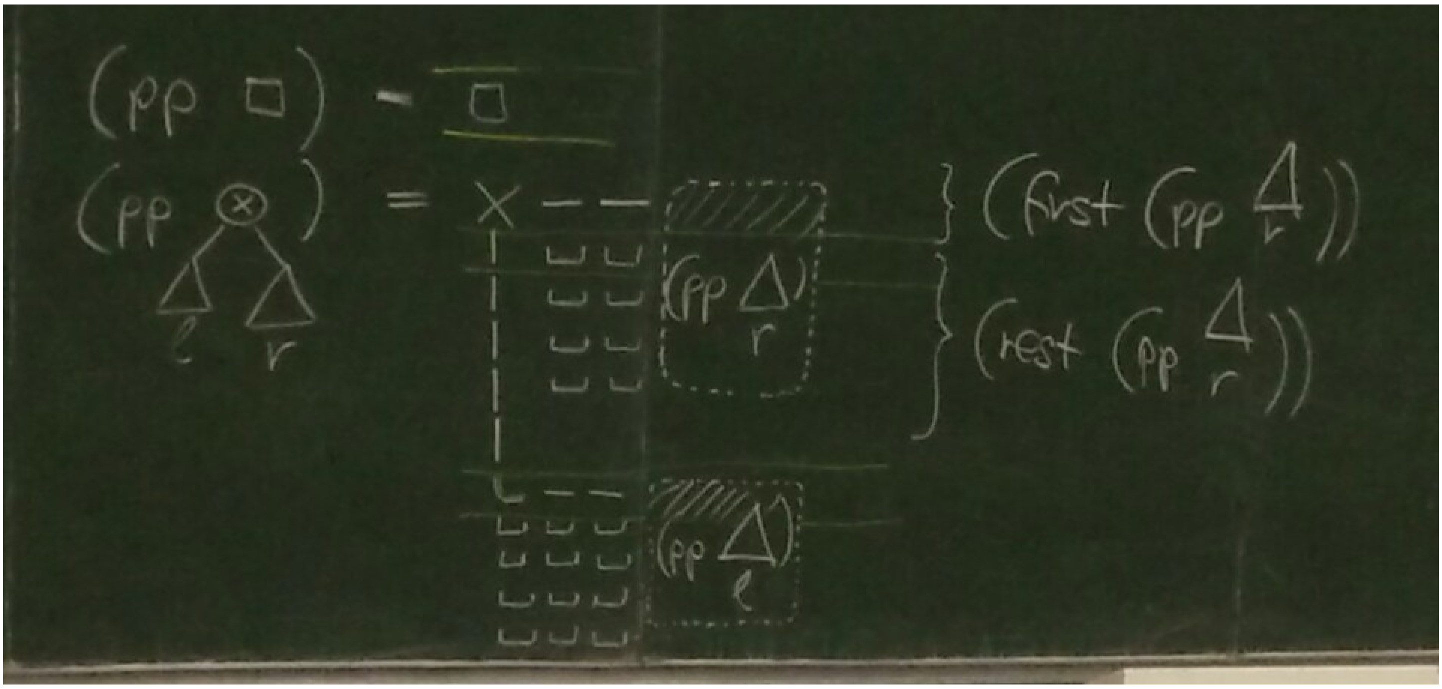
```
(: btree-depth ((btree-of %a) -> natural))
(define btree-depth
        (lambda (f)
                (cond ((empty-tree? t) 0)
                        ((node? t) (+ 1 (max (btree-depth (node-left-branch))
                                                                (btree-depth (node-right-branch))))))
```

Chapter 20

Fortsetzung Bäume - 7.7.

20.1 Einschub: Pretty-Printing von Bäumen

Prozedur (pp t) erzeugt formatierten String für den Binärbaum t.



Idee: Repräsentiere formatierten String als Liste von Zeilen (Strings).

1. Nutze (string-append ...) um Zeilen-Strings zu definieren. (horizontale Konkatenation).

2. Nutze (append ...) um die einzelnen Zeilen zu einer Liste von Zeilen zusammenzusetzen (vertikale Konkatenation). Erst direkt vor der Ausgabe werden die Zeilen-Strings zu einem auszugebenden String zusammengesetzt. (strings-list → string)

20.2 Induktion über Binärbäume

Sei P(t) eine Eigenschaft von Binärbäumen $t \in T(M)$, also

```
(: P ((btree-of M) -> boolean))
```

Falls P(empty-tree) [Induktionsbasis]

und $\forall x \in M$, $l \in T(M), r \in T(M)$:

$P(l) \wedge P(r) \Rightarrow P$ ((make-node l x r))

dann $\forall t \in T(M) : P(t)$

20.2.1 Beispiel:

Zusammenhang zwischen Grösse (btree-size) und Tiefe (btree-depth) eines Binärbaums t ("ein Baum der Tiefe n enthält mindestens n Knoten und höchstens $2^n - 1$ Knoten"):

$P(t) \equiv$ (btree-depth t) $\leq$ (btree-size t) $\leq 2^{\textbf{(btree-depth t)}} - 1$

Erstes $\leq$ trivial. Zweites:

Induktionsbasis P(empty-tree):

```
(size empty-tree)
```

*⇝[depth] 0

$= 2^{(0)} - 1\surd$

Induktionsschrit: (P (l) $\wedge P(r) \Rightarrow P$ ((make-node l x r))

(size (make-node l x r))

⇝[size] (size l) + 1 + (size r)

$\leq$ [I.V.] $2^{(depth\ l)} - 1 + 1 + 2^{(depth\ r)} - 1$

$= 2^{(depth\ l)} + 2^{(depth\ r)} - 1$

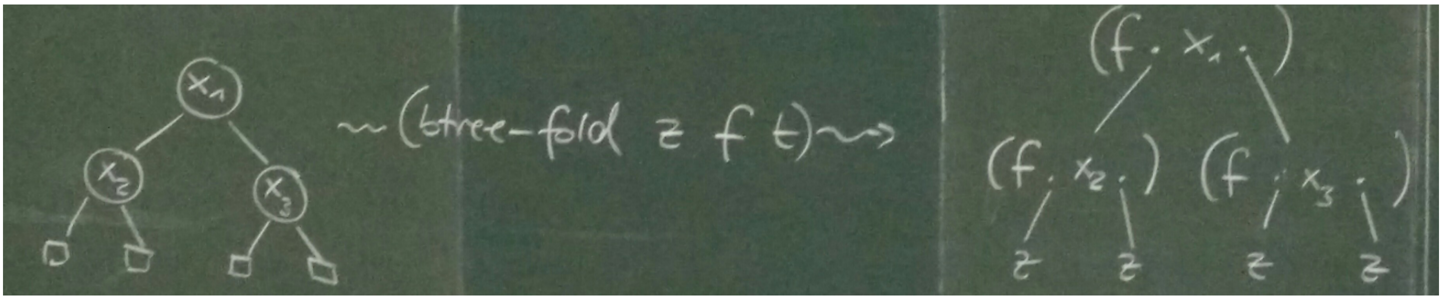
$\leq$ 2 x max($2^{(depth\ l)} + 2^{(depth\ r)}$) -1

$= 2 \cdot 2^{max((depth\ l),\ (depthr)} - 1$

$= 2^{(1+max((depth\ l),\ (depth\ r)))}$

←[depth] $2^{depth((make\text{-}node\ l\ x\ r))} - 1\surd$

Wie müsste sich btree-fold, eine fold-Operation für Binärbäume verhalten? Tree transformer für Baum t:



opku9zfswdefrtgzhujikolpölokijuzhtgrffgtzhujikolpkijuzhtgrftgzhujiklpö [Anmerkung Marvin]

Falte Baum t bzgl. f und z:

```
(: btree-fold (%a %b %a -> %a) (btree-of %b) -> %a))
```

```scheme
(define btree-fold
        (lambda (z f t)
                (cond ((empty? t) z)
                        ((node? t) (f (btree-fold z f (node-left-branch t))
                                      (node-label t)
                                      (btree-fold z f (note-right-branch t)))))))
```

Chapter 21

Fortsetzung Bäume (btree-fold) - 9.7.

Bestimme die Markierung Lm (left most) links-aussen im Baum t (oder empty, falls t leer ist).

(leftmost (x) $\square$) = (list x)

(leftmost (x) Δ) = (leftmost Δ)

Hinweis:

- Nutzt die leere Liste (empty) als Fehlerindikator (insbesondere kein Abbruch mit violation)

(Prinzip: "Replacing Failure by a list of successes", Philip Wadler)

```
(: leftmost ((btree-of %a) -> (list-of %a)))
(check-expect (leftmost empty-tree) empty)
(check-expect (leftost t1) (list 1))
(check-expect (leftost t2) (list 2))

(define leftmost
        (lambda (t)
                (btree-fold empty
                                (lambda (l1 x l2) (if (empty? l1)
                                                        (list x)
                                                        l1))
                                t)))
```

Rechtstiefe Bäume und Listen sind isomorph (gleichgestaltig)

Beweis: $f \circ f^{-1} = \text{id}$

```
(list->btree (btree->list x))
(right-deep? btree-fold ->  Tuete Gummibaerchen)
```

21.1 Tiefendurchläufe (depth-first-traversals)

Ein Tiefendurchlauf (depth-first-traversal) eines Baumes t sammelt die Markierung jedes Knotens n in t auf. Die Markierungen, der Teilbäume L, r des Knotens n = (make-node L x r) werden vor x eingesammelt (Durchlauf zuerst in der Tiefe).

Je nachdem, ob x (a) zwischen, (b) vor, (c) nach den Markierungen von L,r eingeordnet wird, erhält man ein

(a) inorder traversal (xs1 x xs2)

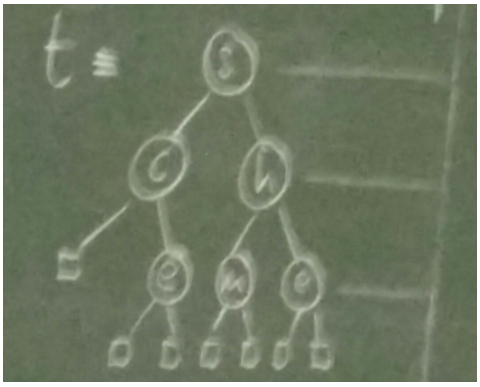
(b) preorder traversal (x xs1 xs2)

(c) postorder traversal (xs1 xs2 x).

```
(: inorder ((btree-of %a) -> (list-of %a)))
(define inorder
        (lambda (t)
                (btree-fold empty
                                                (lambda (xs1 x xs2) (append xs1 (list x) xs2)))
                                                t)))
```

Baumdarstellung eines arithmetischen Ausdrucks

Ein Breitendurchlauf (breadth-firrst-traversal) eines Baumes t sammelt die Markierungen der Knoten ebenenweise von der Wurzel ausgehend auf.



(levelorder t) $\rightsquigarrow$ (list "s" "c" "h" "e" "m" "e")

Idee: Gegeben sei eine Liste ts von Bäumen.

1. Sammle die Liste der Markierungen der Wurzeln der (nicht-leeren) Bäume in ts auf (= (roots ts))

2. Bestimme ts' der nicht-leeren Teilbäume der Bäume in ts (= (subtrees ts))

3. Führe (1) rekursiv auf ts' aus.

4. Konkateniere die Listen aus (1) und (3).

zu Beginn:

roots: "s"

subtrees: ((c), (h)) 1. Rekursion: ((c), (h))

roots: "c" "h"

subtrees: ((e) (m) (e))

2. Rekusion: ((e) (m) (e))

roots: "e" "m" "e" subtress: ( )

Chapter 22

Zeichencodierungen - 14.07

bilden Zeichen auf Sequenzen von Bits ab. Derzeit sind Codes fixer Länge weit verbreitet.

- ASCII (Codes 0-127, 7 Bit, American Standard Code for Information Interchange)
- ISO-8859-1 (Codes 0-255, 8 Bit, 191 lateinische + Steuerzeichen)
- Unicode (20 Bit, codiert Zeichen 129 aktueller/historischer Sprachen, inklusive Klingon)
  Beispiel: Zeichen '€': 0000 0010 0000 1010 1100 ("\020AC")

Huffman-Codes nutzen Bitsequenzen variabler Länge.

Idee: Zeichen mit hoher Frequenz werden mit weniger Bits codiert, als seltene Zeichen.

⇒ Datenkompression

Huffman-Codes sind Binärbäume mit markierten Blättern (Knoten haben keine Codierung).

Beispiel: Humman-Code für "erdbeermarmelade":

```
        o
       /   \
      o      o
     / \    /  \
    r   o    o   e
       /\  /\
      m a  b l
```

Code für Zeichen x Pfad von Wurzel bis Blatt mit Markierung x.

- Abstieg in linken Teilbaum Bit 0
- Abstieg in rechten Teilbaum Bit 1

Zeichen	Frequenz	Code
e	5	11
r	3	00
m	2	010
a	2	011
d	2	101
b	1	1000
l	1	1001

Huffman-Codes sind präfixfrei.: alle Bits eines bestimmten Zeichens sind niemals Präfix eines anderen Zeichens ⇒ eindeutige Decodierung.

11|00|101|1000|11|11|... ⇒ e r d b e e ...

Länge 42 Bit, Unicode 320 Bit

Einsatz in JPEG, MP3, ZIP, ...

22.1 Prozeduren zur Huffman-Codierung

1. Decodieren einer Bitsequenz (: huff-decode ((huff-tree-of string) (list-of bit) → string))

2. Codieren eines Strings: (: huff-encode ((huff-tree-of string) string → (list-of bit)))

   ∀ string s: (huff-decode ht (huff-encode ht s)) = s

3. Huffman-Tree für gegebenen Text erstellen: (: huffman-code (string → (huff-tree-of string))

Decodieren eines huffman-codierten Strings (= Code von 0/1-Bits)

Plan: Baue

```
(: decode ( (huff-tree-of %a) (list-of bit) -> (list-of %a)))
```

1. (decode ht □[...*bits*...]) = (make-pair x (decode ht ht [... bits ...])

2. (decode ht Δ[]) = empty

3.a) (decode ht baum [0 bits ...]) = (decode ht linker-teilbaum [... bits ...])

3.b) (decode ht baum [1 bits ...]) = (decode ht rechter-teilbaum [... bits ...])

   ??? Neueinstieg an Wurzel des Huffman-Tree ⇒ Wurzel des Huffman-Trees als Parameter durchführen.

Huffman-Codierung eines Strings s als Liste von 0/1-Bits

Plan:

(a) Codierung eines Zeichens c: Suche c mittels einer Tiefensuche von der Wurzel des Huffman-Tree aus. Protokolliere den Pfad beim Abstieg als Liste von 0/1-Bits.

   Frage: Wie reagieren, wenn die Tiefensuche zu einem Blatt ≠ c führt?

   Idee: Verfolge an innerem Knoten (make-huff-node l r) jeweils linken UND rechten Teilbaum. Suche nach c schlägt fehl in l oder in r. Bei Fehlschlag liefere die leere Bitliste. Beachte:

   (append empty xs) = xs

   (append xs empty) = xs

```
(: encode ( (huff-tree-of %a) (list-of bit) %a -> (list-of bit)))
                                          |        |
                          bisheriges Protokoll    Zeichen c
```

1) (encode □x [... bits ...] c) = empty ; x $\neq$ c

2) (encode □c [... bits ...] c) = (reverse [... bits ...])

3) (encode baum [... bits ...] c) = (append (encode l-baum [0 bits ...] c) (encode r-baum [1 bits ...] c)

(b) Codiere Zeichen oder Strings s mit encode (map), verbinde die einzelnen Bit-Listen mit flatten (concat)

Chapter 23

Fortsetzung Codierung mit Bäumen - 16.07

(huff-encode Δht s) $\rightsquigarrow$ 0111 0100...

(huff-decode Δht 0111 0100...) $\rightsquigarrow$ s

23.1 Erstellung eines Huffman-Tree für einen gegebenen Text txt

Plan:

(H1) Stelle Häufigkeit des Vorkommens jedes Zeichens in txt fest. Sortiere in Reihenfolge steigender Häufigkeit. (occurences)
Beispiel (occurences "erdbeermarmelade") $\rightsquigarrow$ (list <"l",1>, <"b",1>, ... <"e",5>) Vorkommen <i,n> (occur): Ding i (item) kommt mit Häufigkeit n (freq) vor.

(H2) Baue Huffman-Tree von den Blättern her auf. Initialisiere den Aufbau für Vorkommen <i,n> konstruiere $< \Box i, n >$.

(H3) Die beiden Huffman-Trees, die die seltensten Zeichen repräsentieren, stehen am Anfang der Liste.
(list $< \Box i, n >, < \Box j, m >$...)
Konstruktion des Huffman-Trees, die diese <u>Invariante</u> bewahrt:
Iteration: Wiederhole, bis Liste Länge 1 hat

(a) Fasse Vorkommen $< \Delta l, n >$ und $< \Delta r, m >$ zu einem Vorkommen: $< \Delta l$-O-$\Delta r, n + m >$

(b) Sortiere dieses Vorkommen bzgl. Häufigkeit n + m in die Restliste ein.

(H4) Baum ht in (list $< \Delta ht, n >$) ist der gesuchte Huffman-Tree.

Chapter 24

DMdA-fortgeschritten - 16.7.

- Neues Ausgabeformat in REPL:

  (list x1 ... xn) → (x1 ... xn)

  empty → ()

- Neuer (struktureller) Gleichheitstest für Werte aller (auch benutzer-definierter) Signaturen:

```
(: equal? (%a %b -> boolean))
```

24.1 Quote

Sei e ein beliebiger Scheme-Ausdruck. Dann liefert (quote e) die Repräsentation von e - e wird <u>nicht</u> ausgewertet.

24.1.1 Beispiele

(quote 42) ⇝ 42

(quote "U Tü") ⇝ "U Tü"

Konstante (Literale) repräsentieren sich selbst

(quote (+ 40 2)) ⇝ (+ 40 2) Funktionsapplikation repräsentiert als Liste

Abkürzung (quote e) ≡ 'e

24.1.2 Listennotation in Programmen:

(list x1 ... xn) ≡ '(x1 .. xn)

empty ≡ '()

24.2 Symbole

Was ist (first '(* 1 2))? Was sind lambda, x, +, in '(lambda (x) (+ x 1))?

→ Neue Signatur <u>symbol</u> zur Repräsentation von Namen in Programmen. Effiziente interne Darstellung (KEINE STRINGS), effizient vergleichbar. Kein Zugriff auf einzelne Zeichen des Symbols.

24.3 Operationen:

- `(: symbol? (%a -> boolean))`
- `(: symbol->string (symbol -> string))`

24.4 Repräsentation und Auswertung arithmetischer Ausdrücke

Beispiel: e≡ '$\overbrace{\texttt{(* (! (+ 1 2)) x)}}^{\texttt{list}}$

```
(define arith
        (signature (mixed number         ;Konstanten
                          symbol         ;Variablen
                          (list-of arith))) ; zusammengesetzte Ausdruecke
```

Auswertung möglich, wenn Bindung für Symbole (Variablen <u>und</u> Operatoren) an Werte gegeben. <u>Dictionary</u> (Environment):

d1: { x → 3,

→<procedure: * >,

+ →<procedure: + >,

! → fac }

⇒ e ⇝ 18

d2: { x → 1,

→<procedure: * >,

+ →<procedure: + >,

! → (lambda (x) (- x)) }

⇒ e ⇝ -3

Auswertung eines arithmetischen Ausdrucks e (unter Dictionary d):

((eval d) e)

konfigurierter Auswerter

(E1) ((eval d) c) = c ; c Konstante

(E2) ((eval $\{x_1 \rightarrow v_1$, ... , $x_n \rightarrow v_n\})x_i) = v_i$, ; Xi Variable

(E3) ((eval d) (e_1 e_2 ... e_n)) = (... (((eval d) e_1) ((eval d) e_2)) ... ((eval d) e_n))

Graphisch: $(e_1 e_2) \equiv e_1$ @ e_2

```
(: eval ((dict-of symbol %a) -> (arith -> %b))
(define eval
        (lambda (d)
                (lambda (e)
```

```
(cond ((constant? e) e)
      ((variable? e) (lookup-dict e d))
      ((compound? e)
            (let (es (map (eval d) e)))
                  (foldl (first es) (lambda (f x) (f x))
                      (rest es))))))))
```

Chapter 25

Der λ-Kalkül - 21.7.

Der λ-Kalkül ist eine Notation für beliebige (berechenbare) Funktionen. Entwickelt in den 1930er Jahren von Alonzo Church (* 1903, †1995) als neue Grundlage für die Mathematik. Seither verwendet als theoretischer Unterbau von Programmiersprachen.

25.0.1 Syntax des λ-Kalküls

Die Menge der Ausdrücke (expression) E des λ-Kalküls ist induktiv definiert. Sei V eine unendliche Menge von Variablennamen.

- $\forall v \in V : v \in E$ [Variablen]
- $\forall e_1, e_2 \in E : (e_1\ e_2) \in E$ [Applikation] (e_1 Funktion, e_2 Argument)
- $\forall v \in V, e_1 \in E : (\lambda v.\ e_1) \in E$ [Abstraktion] (v Parameter, e_1 Body)

Beispiel:
$y \in E$, $(\lambda\ y.\ y) \in E$ Identitätsfunktion, $(\lambda\ y.\ z) \in E$ Funktion ignoriert y liefert z, ((f x) y) $\in E$ Currying, $(\lambda f.(f\ x)) \in E$ Anwendung von f auf x (H.O.P.)

25.0.2 Abkürzungen

$(\ldots\ ((e_1\ e_2)e_3)\ \ldots\ e_n) \equiv (e_1 e_2 \ldots e_n)$
(f x y) $\equiv$ ((f x) y)

25.1 Freie/Gebundene Variablen

Zur Auswertung von $E_1 \equiv$ ((λ x . (f x y)) z)

- wird der hier nicht bekannte Wert von Variablen f,y,z benötigt, während
- der Wert von x im Rumpf (f x y) durch das Argument z festgelegt ist.

In E_1 ist

- Variable x (durch das λx als Parameter) <u>gebunden</u>, während

- Variablen f, y, z frei sind.

Welche Variablen eines Ausdrucks sind frei/gebunden?

free (v) = $\{v\}$

free $((e_1 e_2))$ = free(e_1) $\cup$ free (e_2)

free $((\lambda$ v . $e_1))$ = free (e_1) $\setminus\{v\}$

bound (v) = $\{\}$

bound $((e_1 e_2))$ = bound (e_1) $\cup$ bound (e_2)

bound $((\lambda$ v . $e_1))$ = bound (e_1) $\cup\{v\}$

Beispiel:

free $(((\lambda$ x . ((f x) y)) z)) = { f, y, z } NACHRECHNEN

bound $(((\lambda$ x . ((f x) y)) z)) = { x }

Achtung:

Bindung/Freiheit muss für jedes Vorkommen separat entschieden werden.

$E_2 \equiv$ (x1 $(\lambda$ x . x2))

free (E_2) = { x1 }

bound (E_2) = { x2 }