

Informatik II Skript

Steffen Lindner

June 21, 2015

Contents

1	Einführung - 14.04.15	3
2	Ausdrücke, Defines, usw. - 16.04.2015	4
3	Signaturen, Testfälle - 21.04.15	5
4	Substitutionsmodell, Fallunterscheidung - 23.04.15	7
5	One-of Signatur - 28.04.15	9
6	Zusammengesetzte Daten - 30.04.15	10
7	Fortsetzung zusammengesetzte Daten - 05.05.15	13
8	Gemischte Daten - 07.05.15	14
9	Parametrisch polymorphe Funktionen - 12.05.15	16
10	Listen - 12.05.15	18
11	Listenprozeduren - 19.05.2015	19
12	Rekursion auf Listen - 21.05.15	21
13	Endrekursive Prozeduren - 09.06.2015	23
14	Induktive Definitionen - 11.06.2015	25
15	Prozeduren höherer Ordnung (high-order procedures) - 16.06.2015 und 18.06.2015	26

Chapter 1

Einführung - 14.04.15

Scheme: Ausdrücke, Auswertung und Abstraktion

Dr.Racket: Definitionsfenster (oberer Bereich), Interaktionsfenster (unterer Bereich)

Die Anwendung von Funktionen wird in Scheme ausschließlich in Präfixnotation durchgeführt.

Beispiele

Mathematik	Scheme
$44-2$	<code>(- 44 2)</code>
$f(x,y)$	<code>(f x y)</code>
$\sqrt{81}$	<code>(sqrt 81)</code>
9^2	<code>(expt 9 2)</code>
$3!$	<code>(! 3)</code>

Allgemein: `(< function > < arg1 > < arg2 > ...)`

`(+ 40 2)` und `(odd? 42)` sind Beispiele für Ausdrücke, die bei Auswertung einen Wert liefern. (Notation: \rightsquigarrow)

`(+ 40 2) \rightsquigarrow 42` (\rightsquigarrow = Auswertng / Reduktion / Evalutation)

`(odd? 42) \rightsquigarrow #f`

Interaktionsfenster: `Read \rightarrow Eval \rightarrow Print \rightarrow Read ...` (Read-Eval-Print-Loop aka. REPL)

Literale stehen für einen konstanten Wert (auch konstante) und sind nicht weiter reduzierbar.

Literal:

`#t`, `#f` (true, false, Wahrheitswerte) (boolean)

`"abc"`, `"x"`, `" "` (Zeichenkette) (String)

`0` `1904` `42` `-2` (ganze Zahlen) (Integer)

`0.42` `3.1415` (Fließkommazahl) (Reel)

`1/2`, `3/4` (rationale Zahl) (Rational)

`_("/)"/` (Bilder) (Image)

Chapter 2

Ausdrücke, Defines, usw. - 16.04.2015

Auswertung zusammengesetzter Ausdrücke in mehreren Schritten (steps), von "innen nach außen" bis keine Reduktion mehr möglich ist.

$$(+ (+ 20 20) (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 (+ 1 1)) \rightsquigarrow (+ 40 2) \rightsquigarrow 42$$

Achtung: Scheme rundet bei Arithmetik mit Fließkommazahlen (interne Darstellung ist binär).

Bsp.: Auswertung des zusammengesetzten Ausdrucks $0.7 + (1/2)/0.25 - 0.6/0.3$

Arithmetik mit rationalen Zahlen ist exakt.

Ein Wert kann an einen Namen (auch Identifier) gebunden werden, durch

$$(\text{define } \langle id \rangle \langle e \rangle) \text{ } (\langle id \rangle \text{ Identifier, } \langle e \rangle \text{ Expression})$$

Erlaubt konsistente Wiederverwendung und dient der Selbstdokumentation von Programmen.

Achtung: Dies ist eine sogenannte Spezifikation und kein Ausdruck. Insbesondere besitzt diese Spezialform keinen Wert, sondern einen Effekt: Name $\langle id \rangle$ wird an den Wert von $\langle e \rangle$ gebunden.

Namen können in Scheme fast beliebig gewählt werden, solange:

1. die Zeichen (kommt noch) nicht vorkommen
2. der Name nicht einem numerischen Literal gleicht
3. kein whitespace (Leerzeichen, Tabulatoren, Return) enthalten ist.

Bsp.: $\text{euro} \rightarrow \text{us\$}$

Achtung: Groß-/Kleinschreibung ist in Identifiern nicht relevant.

Eine Lambda-Abstraktion (auch: Funktion, Prozedur) erlaubt die Formulierung von Ausdrücken, die mittels Parametern konkreten Werten abstrahieren:

$$(\text{lambda } (\langle p1 \rangle \langle p2 \rangle \dots) \langle e \rangle), \langle e \rangle \text{ Rumpf}$$

$\langle e \rangle$ enthält Vorkommen der Parameter $\langle p1 \rangle, \langle p2 \rangle \dots$

$(\text{lambda } \dots)$ ist eine Spezialform. Wert der Lambda-Abstraktion ist $\# \langle procedure \rangle$

Anwendung (auch: Applikation/Aufruf) der Lambda-Abstraktion führt zur Ersetzung der vorkommenden Parameter im Rumpf durch die angegebenen Argumente:

$$(\text{lambda } (\text{days}) (* \text{ days } (* 155 \text{ min-in-a-day}))) \rightsquigarrow (* 365 (* 155 \text{ min-in-a-day})) \rightsquigarrow 81468000$$

In Scheme leitet ein Semikolon einen Kommentar, der bis zum Zeilenende reicht, ein und wird vom System bei der Auswertung ignoriert.

Prozeduren sollten im Programm eine ein-bis zweizeiliger Kurzberschreibung direkt voran gestellt werden.

Chapter 3

Signaturen, Testfälle - 21.04.15

Eine Signatur prüft, ob ein Name an einen Wert einer angegebenen Sorte (Typ) gebunden wird. Signaturverletzungen werden protokolliert.

$$(: < id > < signatur >)$$

Bereits eingebaute Signaturen:

- natural \mathbb{N}
- integer \mathbb{Z}
- rational \mathbb{Q}
- real \mathbb{R}
- number \mathbb{C}
- boolean
- string
- image

(: ...) ist eine Spezialform ohne Wert, aber Effekt: Signaturprüfung

Prozedur-Signaturen spezifizieren sowohl Signaturen für die Parameter p_1, p_2, \dots, p_n als auch den Ergebniswert der Prozedur:

$$(< signaturp_1 > \dots < signaturp_n > - > < signatur - ergebnis >)$$

Prozedur-Signaturen werden bei jeder Anwendung eine Prozedur auf Verletzung geprüft.

Testfälle dokumentieren das erwartete Ergebnis einer Prozedur für ausgewählte Argumente:

$$(check - expect < e_1 > < e_2 >)$$

Werte Ausdruck $< e_1 >$ aus und teste, ob der erhaltene Wert der Erwartung (= der Wert von $< e_2 >$) entspricht.

Einer Prozedurdefinition sollten Testfälle direkt vorangestellt werden.

Spezialform: Kein Wert, aber Effekt: Testverletzung protokollieren.

Konstruktionsanleitung für Prozeduren

- ; ... (1) Kurzbeschreibung (1-2 zeiliger Kommentar mit Bezug auf Parameter)
- (: ...) (2) Signatur
- (check-expect ...) (3) Testfälle
- (define (lambda (...) ...) (4) Prozedur + Rumpf

Top-Down-Entwurf (Programmieren durch "Wunschdenken")

Bsp.: Zeichnen Ziffernblatt (Stunden- und Minutenzeiger) zur Uhrzeit H:m auf einer analogen 24h-Uhr

- Minutenzeiger legt $360^\circ/60$ pro Minute zurück ($360/60 * m$)
- Stundenzeiger legt $360^\circ/12$ pro Stunde zurück ($360/12 * h + 360/12 * m/60$)

Chapter 4

Substitutionsmodell, Fallunterscheidung - 23.04

Reduktionsregeln für Scheme (Fallunterscheidung je nach Ausdrucksart)

Wiederhole, bis keine Reduktion mehr möglich:

- Literal (1, "abc", #t, ...) [eval_{lit}]

$l \rightsquigarrow l$

- Identifier id (pi, clock-face, ...) [eval_{id}]

$id \rightsquigarrow$ gebundener Wert

- Lambda-Abstraktion

$(\text{lambda } ()) \rightsquigarrow (\text{lambda } ())$ [eval_{λ}]

- Applikation (f, e1, e2)

– (1) f, e1, e2 reduziere, erhalte f', e1', e2'

– (2)

* Operation f' auf e1', e2', ... falls f' primitive Operation (+, *, ...) [apply_{prim}]

* Argumentenwert e1', e2', ... Rumpf von f' einsetzen, dann Rumpf reduzieren, falls f' Lambdaabstraktion [apply_{λ}]

Beispiel: Applikation

$(+ \ 40 \ 2)$

$\rightsquigarrow (\#< \text{procedure } + \ > \ 40 \ 2) \rightsquigarrow 42$

$\text{eval}_{lit} (+)$

$\text{eval}_{lit} (40)$

$\text{eval}_{lit} (2)$ •

(position-minute-hand 30)

$\rightsquigarrow ((\text{lambda } (m) \ (* \ \text{degrees-per-minute } m)) \ 30)$

$\rightsquigarrow (* \ \text{degrees-per-minute } 30)$

$\rightsquigarrow (* \ \text{degrees-per-minute } 30)$

$\rightsquigarrow (\#< \text{procedure } * \ > \ 360/60 \ 30)$

Bezeichnen $(\text{lambda } (x) \ (* \ x \ x))$ und $(\text{lambda } (r) \ (* \ r \ r))$ die gleiche Prozedur? \Rightarrow Ja!

Achtung: Das hat Einfluss auf das korrekte Einsetzen von Argumenten für Parameter! (s. apply_{λ})

Das bindenen Vorkommen eines Identifiers x kann im Programmtext systematisch bestimmt werden: suche strik von "innen nach außen" bis zum ersten

- (lambda (x))
- (define x)

(Prinzip der lexikalischen Bindung)

Übliche Notation in der Mathematik: Fallunterscheidung

$$\mathit{maximum}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, & \text{falls } x_1 \geq x_2 \\ x_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Tests auch (Prädikate) sind Funktionen, die einen Wert der Signatur boolean liefern. Typische primitive Tests:

- (: = (number number \rightarrow boolean))
- (: < (real real \rightarrow boolean)), auch >, \leq , \geq
- (: string=? (string string \rightarrow boolean)), auch string>?, string \leq ?
- (: boolean? (boolean boolean \rightarrow boolean))
- (: zero? (number \rightarrow boolean))
- odd?, even?, positive?, negative?, ...

Binäre Fallunterscheidung: if

(if < t_1 > < e_1 > < e_2 >)

$$\text{Mathematisch: } \begin{cases} e_1, & \text{falls } t_1 \\ e_2, & \text{sonst} \end{cases}$$

Chapter 5

One-of Signatur - 28.04.15

Die Signatur one-of lässt genau einen der aufgezählten n Werte zu:

$$(\text{one-of } \langle e_1 \rangle \dots \langle e_n \rangle)$$

Reduktion von if:

$$(\text{if } t_1 \ e_1 \ e_2) \rightsquigarrow \begin{cases} \langle e_1 \rangle, & \text{falls } t_1' = \#t ; e_2 \text{ wird niemals ausgewertet} \\ \langle e_2 \rangle, & \text{sonst; } e_1 \text{ wird niemals ausgewertet} \end{cases}$$

(1) Reduziere t_1 , erhalte t_1'

Spezialform Fallunterscheidung (conditional expression):

$$(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) \dots (\langle t_n \rangle \langle e_n \rangle) (\text{else } \langle e_{n+1} \rangle)) (\text{else optional})$$

Werte die Tests in der Reihenfolge t_1, t_2, \dots, t_n aus. Sobald $t_i \neq \#t$ ergibt werte Zweig e_i aus. e_i ist das Ergebnis der Fallunterscheidung. Wenn $t_n \neq \#f$ liefert, dann liefere

$$\begin{cases} \text{Fehlermeldung, } & \text{"cond: alle Tests ergaben } \#f", \text{ falls kein else-Zweig} \\ \langle e_{n+1} \rangle, & \text{sonst} \end{cases}$$

Reduktion von cond [eval_{cond}]

$$(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) (\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle) \dots) \rightsquigarrow \begin{cases} \langle e_1 \rangle, & \text{falls } t_1' = \#f \\ (\text{cond } (\langle t_2 \rangle \langle e_2 \rangle) \dots), & \text{sonst} \end{cases}$$

Reduziere t_1 , erhalte t_1' .

$(\text{cond }) \rightsquigarrow$ Fehlermeldung "Alle Tests..."

$(\text{cond } (\text{else } \langle e_{n+1} \rangle)) \rightsquigarrow e_{n+1}$

cond ist "systematischer Zucker"

(auch: abgeleitete Form) für eine verschachtelte Anwendung von 'if':

$(\text{cond } (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) (\langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle) \dots))$ entspricht $(\text{if } \langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle (\text{if } \langle t_1 \rangle \langle e_1 \rangle (\text{if } \dots)))$

Spezialformen 'and' und 'or':

$(\text{or } \langle t_1 \rangle \langle t_2 \rangle \dots \langle t_n \rangle)$ entspricht $(\text{if } \langle t_1 \rangle \#t (\text{or } \langle t_2 \rangle \dots))$

$(\text{or}) \rightsquigarrow \#f$

$(\text{and } \langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle) \rightsquigarrow (\text{if } \langle t_1 \rangle (\text{and } \langle t_2 \rangle \dots \langle t_n \rangle) \#f)$

$(\text{and}) \rightsquigarrow \#t$

Chapter 6

Zusammengesetzte Daten - 30.04.15

Ein Charakter besteht aus drei Komponenten.

- Name des Charakters (name)
- Handelt es sich um einen Jedi? (jedi?)
- Stärke der Macht (force)

→ Datendefinition für zusammengesetzte Daten.

Konkreter Charakter:

Name	"Luke Skywalker"
jedi?	#f
force	25

; Ein Charakter (character) besteht aus

; - Name (name)

; - Jedi-Status (jedi?)

; - Stärke der Macht (force)

```
(define-records-procedures charakter
  (make-character
    character?
    (character-name
      character-jedi
      character-force)))
```

(make-character n j f) \rightsquigarrow *< records >* (konstruktion)

(character-name *< record >*) \rightsquigarrow n (Komponentenzugriff)

(character-jedi? *< record >*) \rightsquigarrow j (Komponentenzugriff)

(character-force *< record >*) \rightsquigarrow f (Komponentenzugriff)

Zusammengesetzte Daten = Records in Scheme.

Record-Definition legt fest:

- Record-Signatur
- Konstruktor (Baut aus Komponenten einen Record)

- Prädikat (liegt Record vor?)
- Liste von Selektoren (lesen jeweils eine Komponenten des Records)

(define-records-procedures $\langle t \rangle$

make- $\langle t \rangle$; Konstruktor

$\langle t \rangle$?

($\langle t \rangle$ - $\langle comp_1 \rangle$... $\langle t \rangle$ - $\langle comp_n \rangle$ 4)) ; Liste der n-Selektoren

Verträge des Konstruktors / der Selektoren für Record-Signatur $\langle t \rangle$ mit n Komponenten namens $\langle comp_1 \rangle$... $\langle comp_n \rangle$:

- ($\text{make-}\langle t \rangle (\langle t_1 \rangle \dots \langle t_n \rangle \rightarrow \langle t \rangle$))
- ($\langle t \rangle$ - $\langle comp_1 \rangle (\langle t \rangle \rightarrow \langle t_1 \rangle$))
- ...
- ($\langle t \rangle$ - $\langle comp_n \rangle (\langle t \rangle \rightarrow \langle t_n \rangle$))

Es gilt für die Strings n, Booleans j und Integer f:

(character-name (make-character n j f)) = n

(analog für den Rest)

Interaktion von Funktionen (algebraische Eigenschaften).

Spezialform check-property:

(check-property

(for-all (($\langle id_1 \rangle$ $\langle sig_1 \rangle$... $\langle id_n \rangle$ $\langle sig_n \rangle$))

$\langle e \rangle$))

$\langle e \rangle$ bezieht sich auf $\langle id_1 \rangle$... $\langle id_n \rangle$.

Test erfolgreich, falls $\langle e \rangle$ für bel. gewählte Bindungen für $\langle id_1 \rangle$... $\langle id_n \rangle$ immer #t ergibt.

Interaktion von Selektor und Konstruktor:

(check-property

(for-all ((n string)

(j booleans)

(f integer))

(string=? (character-name (make-character n j f)) n)))

Beispiel: Die Summe zweier natürlicher Zahlen ist mindestens so groß wie jede dieser Zahlen: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N} : x_1 + x_2 \geq$

$\max x_1, x_2$

(check-property

(for-all ((x_1 natural)

(x_2 natural))

($\geq (+ x_1 x_2) (\max x_1 x_2)$))))

Konstruktion von Funktionen, die zusammengesetzte Daten konsumieren:

- Welche Record-Komponenten sind relevant für Funktionen?

→ Schablone:

; könnte Charakter e ein Sith-Lord sein?

(: sith? (character → boolean))

(define sith?

(lambda (e) ... (character-jedi? c) ... (character-force c) ...))

Konstruktion von Funktionen, die zusammengesetzte Daten konstruieren:

- Der Konstruktor muss aufgerufen werden.

→ Schablone:

(define

(lambda (...)

... (make-< t > ...) ...))

Chapter 7

Fortsetzung zusammengesetzte Daten - 05.05.1

- lego-character
 - figure
 - character
 - * Name
 - * jedi?
 - * force

Sei $\langle p \rangle$ ein Prädikat mit Signatur $(\langle t \rangle \rightarrow \text{boolean})$. Eine Signatur der Form $(\text{predicate } \langle p \rangle)$ gilt für jeden Wert x der Signatur $\langle t \rangle$ sofern $(\langle p \rangle x) \rightsquigarrow \#t$. Signatur $(\text{predicate } \langle p \rangle)$ ist somit spezifischer (restriktiver) als die Signatur $\langle t \rangle$ selbst.

Einführung eines neuen Signaturnamens $\langle new - t \rangle$ für die Signatur $\langle t \rangle$:

$(\text{define } \langle new - t \rangle (\text{signatur } \langle t \rangle))$

Bsp.:

$(\text{define farbe } (\text{signatur } (\text{one-of "Karo" "Herz" "Pik" "Kreuz"})))$

$(\text{define latitude } (\text{signature } (\text{predicate latitude?})))$

Chapter 8

Gemischte Daten - 07.05.15

Geocoding: Übersetzt eine Ortsangabe mittels des Google Maps Geocoding API (Application Programming Interface) in eine Position auf der Erdkugel.

$$(\text{ : geocoder (string} \rightarrow (\text{mixed geocode geocode-error})))$$

Ein Geocode besteht aus:

- Adresse (address) (string)
- Ortsangabe (loc) (location)
- Nordostecke (northeast) (location)
- Südwestecke (southwest) (location)
- Typ (type) (string)
- Genauigkeit (accuracy) (string)

$$(\text{ : geocode-address (geocode} \rightarrow \text{string})) \dots$$

Ein geocode-error besteht aus:

- Fehlerart (level) (one-of "TCP" "HTTP" "JSON" "API")
- Fehlermeldung (message) (string)

Teachpack: geocoder.rkt

Gemischte Daten Die Signatur

$$(\text{mixed } < t_1 > \dots < t_n >)$$

ist gültig für jeden Wert, der mindestens eine der Signatur $< t_1 > \dots < t_n >$ erfüllt.

Beispiel: Datendefinition:

Eine Antwort des Geocoders ist entweder

- ein Geocode (geocode) oder
- eine Fehlermeldung (geocode-error)

Beispiel (eingebaute Funktion $\text{string} \rightarrow \text{number}$):

$$(\text{ : string} \rightarrow \text{number (string} \rightarrow (\text{mixed number (one of \#f)})))$$
$$(\text{string} \rightarrow \text{number "42"}) \rightsquigarrow 42$$

$(\text{string} \rightarrow \text{number } \text{"foo"}) \rightsquigarrow \#f$

Erinnerung:

Das Prädikat $< t >?$ einer Signatur $< t >$ unterscheidet Werte der Signatur $< t >$ von allen anderen Werten:

$(: < t >? (\text{any} \rightarrow \text{boolean}))$

Auch Prädikate für eingebaute Signaturen:

- number?
- complex?
- real?
- rational?
- integer?
- natural?
- string?
- boolean?

Prozeduren die gemischte Daten der Signaturen $< t_1 > \dots < t_n >$ konsumieren:

Konstruktionsanleitung:

$(: < f > ((\text{mixed } < t_1 > \dots < t_n > \rightarrow \dots))$

$(\text{define } < f > (\text{lambda } (x) (\text{cond } ((< t_1 >? x) \dots) \dots (< t_n >? x) \dots))))$

Mittels let lassen sich Werte an lokale Namen binden:

$$(\text{let } ((< id_1 > < e_1 >) \dots (< id_n > < e_n >)) < e >)$$

Die Ausdrücke $< e_1 > \dots < e_n >$ werden parallel ausgewertet $\rightarrow < id_1 > \dots < id_n >$ können in $< e >$ (und nur hier) verwendet werden. Der Wert let-Ausdruck ist der Wert von $< e >$.

Achtung: 'let' ist verfügbar ab Sprachebene "DMdA".

'let' ist syntaktischer Zucker.

$(\text{let } ((< id_1 > < e_1 >) \dots (< id_n > < e_n >)) < e >)$

\leftrightarrow

$((\text{lambda } (< id_1 > \dots < id_n >) < e >) < e_1 > \dots < e_n >)$

Chapter 9

Parametrisch polymorphe Funktionen - 12.05.1

Abstand zweier geografischer Positionen l_1, l_2 auf der Erdkugel in km (lat, lng jeweils in Radian):

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \text{Erdradius in km} \cdot \text{acos}(\cos(l_1.\text{lat}) \cdot \cos(l_1.\text{lng}) \cdot \cos(l_2.\text{lat}) \cdot \cos(l_2.\text{lng}) + \cos(l_1.\text{lat}) \cdot \sin(l_1.\text{lng}) \cdot \cos(l_2.\text{lat}) \cdot \sin(l_2.\text{lng}) + \sin(l_1.\text{lat}) \cdot \sin(l_2.\text{lat}))$$

Parametrisch polymorphe Funktionen

Beobachtung: Manche Prozeduren arbeiten unabhängig von den Signaturen ihrer Argumente: parametrisch polymorphe Prozeduren (gr.: vielgestaltig). Nutze Signaturvariablen: %a, %b, ...

Beispiel:

; Identität

(: id (%a → %a))

(define id (lambda (x) x))

; Konstante Funktion (ignoriert zweites Argument)

(: const (%a %b → %a))

(define cost (lambda (x y) x))

; Projection (ein Argument auswählen)

(: proj ((one-of 1 2) %a %b → (mixed %a %b)))

(define proj (lambda (i x1 x2) (cond ((= i 1) x1) ((= i 2) x2))))

Eine polymorphe Signatur steht für alle Signaturen in denen die Signaturvariablen durch konkrete Signaturen ersetzt werden.

Beispiel:

Wenn eine Prozedur (number %a %b → %a) erfüllt, dann auch :

(number string boolean → string)

(number boolean natural → boolean)

(number number number → number)

; Ein polymorphes Paar (pair) besteht aus

; - erster Komponente (first)

; - zweiter Komponente (rest)

; wobei die Komponenten bel. Signaturen besitzen

(define-record-procedures-pair pair-of


```

make-pair
  pair?
  (first rest))

```

(pair-of $< t_1 >$ $< t_2 >$) ist eine Signatur für Paare, deren erste bzw. zweite Komponente die Signaturen $< t_1 >$ bzw. $< t_2 >$ erfüllen

→ pair-of: Signatur mit (zwei) Signaturparametern

```

(: make-par (%a %b → (pair-of %a %b)))
(: pair? (any → boolean))
(: first ((pair-of %a %b) → %a))
(: rest ((pair-of %a %b) → %b))

```

Chapter 10

Listen - 12.05.15

Eine Liste von werten der Signatur $< t >$ (list-of $< t >$) ist entweder:

- leer (Signatur empty-list) oder
- ein Paar (Signatur pair-of) aus einem Wert der Signatur $< t >$ und einer Liste von Werten der Signatur $< t >$

(define list-of (lambda (t) (signature (mixed empty-list (pair-of t (list-of t))))))

Signatur empty-list bereits in Racket vordefiniert. Ebenfalls vordefiniert:

- (: empty empty-list)
- (: empty? (any \rightarrow boolean))

Operationen auf Listen

- Konstruktoren:

(: empty empty-list) ; leere Liste

(: make-pair (%a (list-of %a) \rightarrow (list-of %a)))

- Prädikate:

(: empty? (any \rightarrow boolean)) ; leer Liste?

(: pair? (any \rightarrow boolean)) ; nicht-leere Liste?

- Selektoren:

(: first ((list-of %a) \rightarrow %a)) ; Kopfelement

(: rest (list-of %a \rightarrow (list-of %a))) ; Restliste

Chapter 11

Listenprozeduren - 19.05.2015

Prozeduren, die Listen konsumieren

Konstruktionsanleitung befolgen!

Beispiel:

```
; Summe der Zeichen der Liste xs  
(: list-sum (list-of number) → number)  
(check-expect (list-sum empty) 0)  
(check-expect (list-sum one-to-four) 10)
```

Schablone (gemische + zusammengesetzte Daten)

```
(define list-sum  
  (lambda (xs) (cond ((empty? xs) 0)  
                      (pair? xs) (+ (first xs) (list-sum (rest xs))))))
```

(rest xs) mit Signatur (list-of number) ist selbst wieder eine kürzere Liste von Zahlen.

(list-sum (rest xs)) erzielt Fortschritt !.

Konstruktionsanleitung für Prozeduren f , die Liste xs konsumiert.

```
(: < f > ((list-of < t1 >) → < t2 >))  
(define < f >  
  (lambda (xs) (cond ((empty? xs) ...) (pair? xs) ... (< f > (rest xs)) ...)))
```

Neue Sprachebene "Macht der Abstraktion"

- Signatur (list-of % a) eingebaut

- Neuer syntaktischer Zucker:

$(\text{list } < e_1 > < e_2 > \dots < e_n >)$

- Ausgabeformat für nicht leere Liste:

$\#< \text{list } x_1 \ x_2 \dots x_n >$

Füge Listen xs, ys zusammen (concatenation):

Beobachtung:

- Die Länge von xs bestimmt die Anzahl der rekursiven Aufrufe von cat

- Auf ys werden niemals Selektoren angewandt

Chapter 12

Rekursion auf Listen - 21.05.15

Generierung aller natürlichen Zahlen (vgl. gemische Daten). Eine natürliche Zahl (natuarl) ist entweder:

- die 0 (zero)
- der Nachfolger (succ) einer natürlichen Zahl.

Konstruktoren

```
(: zero natural)
```

```
(define zero 0)
```

```
(: succ (natural → natural))
```

```
(define succ (lambda (n) (+ n 1)))
```

Vorgängerfunktion (pred), definiert für $n > 0$:

```
(: pred (natural → natural))
```

```
(define pred
```

```
(lambda (n) (- n 1)))
```

Bedinge algebraische Eigenschaften (s. check-property):

```
(⇒ < p > < t >)
```

Nur wenn $< p > \neq \#t$, wird Ausdruck $< t >$ ausgewertet und getestet ob $< t > \neq \#t$.

Beispiel:

Fakultätsfunktion $n!$ ($n \in \mathbb{N}$)

$0! = 1$

$n! = n \cdot (n-1)!$

Konstruktionsanleitung für gem. Daten:

; Berechne $n!$

```
(: factorial (natural → natural))
```

```
( define factorial
```

```
(lambda (n)
```

```
(cond ((= n 0) 1) ((> n 0) (· n (factorial (- n 1))))))
```

Beobachtung:

- Im letzten Zweig ist $n > 0 \Rightarrow \text{pred}$ anwendbar
- $(\langle f \rangle (-n-1))$ hat die Signatur $\langle t \rangle$

Satz

Eine Prozedur, die nach der Konstruktionsanleitung für Listen oder natürliche Zahlen konstruiert ist, terminiert immer (= liefert immer ein Ergebnis).

Beweis: in Kürze

Die Größe eines Ausdrucks ist proportional zum Platzverbrauch des Reduktionsprozesses im Rechner

\Rightarrow Wenn möglich, erzeugte Reduktionsprozesse, die konstanten Platzverbrauch - unabhängig vom Eingabeparametern - benötigen.

Chapter 13

Endrekursive Prozeduren - 09.06.2015

Idee für die Multiplikation:

Führe Multiplikation sofort aus. Schleife das Zwischenergebnis (akkumulierendes Argument) durch die Berechnung. Am Ende enthält Akkumulator das Ergebnis.

```
; Berechne n!
; (wrapper)

(: fac (natural -> natural))

(define fac
  (lambda (n)
    (fac-worker n 1)))

(: fac-worker (natural natural -> natural))

(define fac-worker
  (lambda (n acc)
    (cond ((= n 0) acc)
          ((> n 0) (fac-worker (- n 1) (* acc n))))))
```

Ein Berechnungsprozess ist iterativ, falls seine Größe konstant bleibt.

Damit:

- factorial nicht iterativ
- fac-worker iterativ

Wieso ist fac-worker iterativ?

Der rekursive Aufruf ersetzt den aktuell reduzierten Ausdruck vollständig. Es gibt keinen Kontext (ungebundenen Ausdruck), der auf das Ergebnis des rekursiven Aufrufs "wartet".

Kontext des rekursiven Aufrufs in

- factorial : (* n [])
- fac-worker : keiner

Ein Prozeduraufruf ist endrekursiv (tail call), wenn er keinen Kontext besitzt. Prozeduren, die nur endrekursive Prozeduraufrufe beinhalten, heißen selber endrekursiv.

Endrekursive Prozeduren generieren iterative Berechnungsprozesse.

Beobachtung:

```
(cat (list 1000 ... 2) (list 1))
```

Aufrufe von make-pair: $1000 + 999 + 998 + \dots + 1$

⇒ Quadratischer Aufwand

Konstruiere iterative listenumkehr (backwards)

Berechnung von (backwards (list 1 2 3))

```
(: backwards-worker ((list-of %a) (lsit-of %a) \rightarrow (list-of %a)))
```

Mittels letrec lassen sich Werte an lokale Namen binden:

```
(letrec ((<id_1> <e_1>)
  ...
  (<id_n> <e_n>))
  <e>)
```

Die Ausdrücke e_1, \dots, e_n und e dürfen sich auf die Namen von $<id_1> \dots <id_n>$ beziehen.

Chapter 14

Induktive Definitionen - 11.06.2015

Konstruktive Definition der natürlichen Zahlen \mathbb{N} :

Def.: (Peano-Axiome)

- (P1) $0 \in \mathbb{N}$ (Null)
- (P2) $\forall n \in \mathbb{N} : \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$ (Nachfolger)
- (P3) $\forall n \in \mathbb{N} : \text{succ}(n) \neq 0$
- (P4) $\forall m, n \in \mathbb{N} : \text{succ}(m) = \text{succ}(n) \Rightarrow m = n$

(P3) und (P4) $\Rightarrow \mathbb{N}$ ist induktiv definiert.

- (P5) Induktionsaxiom

Für jede Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in M$ und $\forall n : n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M$, gilt $M = \mathbb{N}$

- \mathbb{N} enthält nicht mehr als die durch 0 und die durch $\text{succ}()$ generierten Elemente
- Nichts sonst ist in \mathbb{N}

Beschweisschema der vollständigen Induktion:

Sei $P(n)$ eine Eigenschaft einer Zahl $n \in \mathbb{N}$:

`(: P (natural -> boolean))`

Ziel: $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Definiere $M = \{n \in \mathbb{N} | P(n)\} \subseteq \mathbb{N}$

Induktionsaxiom:

Falls $0 \in M$

und $\forall n(n \in M \Rightarrow \text{succ}(n) \in M)$

dann $M = \mathbb{N}$

Chapter 15

Prozeduren höherer Ordnung (high-order procedures) - 16.06.2015 und 18.06.2015

```
; Extrahiere die Elemente von xs, die Predikat p? erfüllen

(: filter ((%a -> boolean) (list-of %a) -> (list-of %a)))

(define filter
  (lambda (p? xs)
    (cond ((empty? xs) xs)
          ((pair? xs)
           (if (p? (first xs))
               (make-pair (first xs) (filter p? (rest xs)))))))
```

Wert des Parameters p? ist Prozedur

Higher-order procedures (H.O.P)

- (a) akzeptieren Prozeduren als Parameter und/oder
- (b) liefern Prozeduren als Ergebnis

H.O.P vermeiden Duplizierung von Code und führen zu kompakteren Programmen, verbesserter Lesbarkeit, verbesserter Wartbarkeit

Bsp.: (map f xs)

```
; Wende f auf alle Elemente von Liste xs an

(: map ((%a -> %b) (list-of %a) -> (list-of %b))

(define map
  (lambda (f xs)
    (cond ((empty? xs) empty)
          ((pair? xs)
           (make-pair (f (first xs)) (map f (rest xs)))))))
```

Allgemeinere Transformation von Listen: Listenfaltung (list-folding), Idee: Ersetze die Listenkonstruktoren make-pair und empty systematisch:

- (foldr z c xs) wirkt als Spine Transformer
 - empty \rightsquigarrow z
 - make-pair \rightsquigarrow c

- Eingabe: Liste (list-of %a)
- Ausgabe: Im allg. keine Liste mehr (etwa %b)

```

; Falte Liste xs bzgl. c und z
(: foldr (%b (%a %b -> %b) (list-of %a) -> %b))

(define foldr
  (lambda (z c xs)
    (cond ((empty? xs) z)
          ((pair? xs)
           (c (first xs) (foldr z c (rest xs)))))))

```

Beispiel Summe:

```

(: sum ((list-of number) -> number))

(define sum
  (lambda (xs)
    (foldr 0 + xs)))

```

Beispiel Länge einer Liste durch Listenreduktion:

```

(foldr 0 c xs)

```

mit $c = (\text{lambda } (x \ r) \ (+ \ 1 \ r))$