Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Álgebra Linear LCC Teste 1 Duração: 1h45 4/11/2019 A

Proposta de resolução

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Dadas duas matrizes $A \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, a matriz

   - [ ] $AB + BA$ está bem definida.
   - [ ] $A^T B$ está bem definida.
   - [X] $\left(A + B^T\right)^T$ pode ser calculada.
   - [ ] $AB \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $\alpha \neq 0$.

   - [ ] A comuta com A^T para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$.
   - [ ] A e A^T nunca são comutáveis.
   - [ ] A é uma matriz elementar quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - [X] A é um produto de matrizes elementares para α e β não nulos.

3. Se A é um matriz quadrada de ordem n tal que $A^3 = \frac{1}{4} I_n$, então

   - [X] A é invertível e $A^{-1} = 4A^2$.
   - [ ] A não é invertível.
   - [ ] A^2 é invertível e $(A^2)^{-1} = A$.
   - [ ] $(A^3)^{-1} = I_n$.

4. Se A é uma matriz quadrada de ordem n e B é tal que $A \xrightarrow[l_1 \longleftarrow 2l_1]{} B$, então

   - [ ] $\det(-B) = \det(-A)$.
   - [ ] $\det(2B) = \det(A)$.
   - [ ] $\det(AB) = 2\det(A)$.
   - [X] $\det(B) = 2\det(A)$.

5. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sobre a característica de A sabemos que

   - [ ] $\text{car}(A) = 2$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.
   - [ ] $\text{car}(A) = 2$ se $b = a$.
   - [ ] $\text{car}(A) \geq 3$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.
   - [X] $\text{car}(A) = 3$ se $a \neq 0$.

6. Se $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \beta - 3 \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares, com α e β parâmetros reais, então

   - [X] o sistema é possível e determinado se $\alpha \neq 1$.
   - [ ] o sistema é possível e indeterminado se $\alpha = 1$.
   - [ ] o sistema é sempre possível.
   - [ ] o sistema é impossível se $\beta = 3$.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Se A e B são duas matrizes invertíveis de ordem n tais que $\left[\left(A^{-1}\right)^T B\right]^{-1} = I_n$, mostre que $B = A^T$.

   Resolução.

$$\begin{aligned}
\left[\left(A^{-1}\right)^T B\right]^{-1} = I_n &\Longrightarrow B^{-1}\left[\left(A^{-1}\right)^T\right]^{-1} = I_n \\
&\Longrightarrow B^{-1}\left[\left(A^{T}\right)^{-1}\right]^{-1} = I_n \\
&\Longrightarrow B^{-1}A^T = I_n \\
&\Longrightarrow BB^{-1}A^T = BI_n \\
&\Longrightarrow I_nA^T = BI_n \\
&\Longrightarrow A^T = B.
\end{aligned}$$

2. [3.5 valores] Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 com a seguinte matriz simples e vetor dos termos independentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique que $\boldsymbol{s}_1 = (1, 4, -3, -1)$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

   (b) Verifique que o sistema homogéneo associado $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é possível e indeterminado, usando o método de eliminação de Gauss, e apresente a solução geral deste sistema.

   (c) Se $\boldsymbol{s}$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, então $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}_1$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Mostre este resultado e use-o para apresentar duas outras soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

   Resolução.

(a) $$A\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_1 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 + 2l_2 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - 2l_2}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 + l_3]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como $\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}(A|\mathbf{0}) = 3 < n = 4$ (onde n é o número de incógnitas), o sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e indeterminado.
Temos então o sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & & x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -x_4 \end{cases},$$

onde x_4 é uma variável livre, podendo, portanto, tomar qualquer valor real. A solução geral do sistema é dada por

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, -\alpha, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(c) Uma vez que $A\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$ e $A\boldsymbol{s_1} = \boldsymbol{b}$, temos

$$A(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s_1}) = A\boldsymbol{s} + A\boldsymbol{s_1} = \mathbf{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b},$$

ou seja, $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s_1} = (1, 4, -3 - \alpha, -1 + \alpha)$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Assim, tomando $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$, obtemos duas outras soluções do sistema, respetivamente,

$$(1, 4, -4, 0) \quad \text{e} \quad (1, 4, -5, 1).$$

3. [3 valores] Considere a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Use A^{-1} para resolver as equações matriciais

i. $2A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

ii. $AA^T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$.

Resolução.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) i.

$$\begin{aligned} 2A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff A\boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{b} &\iff \boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}A^{-1}\boldsymbol{b} \\ &\iff \boldsymbol{x} = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} AA^T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{b} \iff A^{-1}AA^T\boldsymbol{x} = A^{-1}A\boldsymbol{b} \iff I_nA^T\boldsymbol{x} = I_n\boldsymbol{b} \iff A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \iff \boldsymbol{x} = \left(A^T\right)^{-1}\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \left(A^{-1}\right)^T\boldsymbol{b} \\ \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. [3 valores] Suponha que existe uma matriz A tal que $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\det(A) = 3$.

(a) Calcule $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big)$ e verifique que $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \big[\det(A)\big]^2$. Conclua que $\operatorname{adj}(A)$ e A são matrizes invertíveis.

(b) Mostre que, em geral, para uma matriz invertível A de ordem n se tem

$$A = \det(A) \cdot \big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}.$$

(c) Sem calcular $\big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}$, determine o elemento na posição $(3,2)$ de A.

Sugestão: recorde que a segunda coluna de $\big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}$ é a soluçao do sistema $\operatorname{adj}(A)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e use a Regra de Cramer.

Resolução.

(a)

$$\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1\times\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 1\times\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (8-2)-(-3) = 9.$$

Verifica-se, então, que $\big[\det(A)\big]^2 = 3^2 = \det\big(\operatorname{adj}(A)\big)$.
As matrizes A e $\operatorname{adj}(A)$ são invertíveis uma vez que $\det(A)$ e $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big)$ são não nulos.

(b) Sabemos que $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$. Então,

$$\begin{aligned}\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)\right)^{-1} &\Longrightarrow A = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^{-1} \cdot \big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1} \\ &\Longrightarrow A = \det(A) \cdot \big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}.\end{aligned}$$

(c) Por (b), sabemos que o elemento na posição $(3,2)$ de A é igual ao elemento na mesma posição da matriz $\big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}$ multiplicado por $\det(A)$.
Sabemos também que o elemento na posição $(3,2)$ da matriz $\big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}$ é a componente x_3 da solução do sistema $\operatorname{adj}(A)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Assim,

$$a_{32} = \det(A) \cdot \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}}{\det\big(\operatorname{adj}(A)\big)} = 3 \cdot \frac{1\times\det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1\times\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{9} = \frac{-2+3}{3} = \frac{1}{3}$$

5. [1.5 valores] Um matriz A de ordem n diz-se involutiva se $A^2 = I_n$ e idempotente se $A^2 = A$. Mostre que

(a) se N é involutiva, então $\frac{1}{2}(I_n+N)$ e $\frac{1}{2}(I_n-N)$ são idempotentes e $(I_n+N)(I_n-N) = O$.

(b) toda a matriz involutiva se pode escrever como a diferença de duas matrizes idempotentes, cujo produto é a matriz nula.

Resolução.

(a) A matriz $\frac{1}{2}(I_n \pm N)$ é uma matriz idempotente uma vez que

$$\begin{aligned}\left[\tfrac{1}{2}(I_n \pm N)\right]^2 &= \tfrac{1}{4}(I_n \pm N)(I_n \pm N)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(I_nI_n \pm I_nN \pm NI_n + N^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(I_n \pm 2N + N^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(I_n \pm 2N + I_n\right) \qquad \text{(porque } N \text{ é involutiva)}\\ &= \tfrac{1}{4}\left(2I_n \pm 2N\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left(I_n \pm N\right)\end{aligned}$$

Temos também

$$(I_n+N)(I_n-N) = I_nI_n - I_nN + NI_n - N^2 = I_n - N + N - N^2 = I_n - N^2 = I_n - I_n = O.$$

(b) Podemos escrever uma matriz involutiva N na forma

$$N = \tfrac{1}{2}\left(I_n + N\right) - \tfrac{1}{2}\left(I_n - N\right),$$

onde, por (a), $\frac{1}{2}(I_n + N)$ e $\frac{1}{2}(I_n - N)$ são matrizes idempotentes cujo produto é a matriz nula.