

Problema 1 (5 valores). Tirando partido da semântica descrita na Figura 1, calcule o “output” do seguinte programa.

if ff then $x := 3$ else $(x := 2; x := 1)$

Não se esqueça de justificar cada passo nos seus cálculos.

Problema 2 (5 valores). Tirando agora partido da semântica descrita na Figura 2, calcule a pré-condição mais fraca do mesmo programa relativo à pós-condição $x \leq 1$. Mais uma vez não se esqueça de justificar cada passo nos seus cálculos.

Problema 3 (4 valores). De seguida pretende-se introduzir na nossa linguagem “while” um novo tipo de ciclo, nomeadamente,

do {p} while b

Este comporta-se da seguinte forma: executa o programa p enquanto a condição booleana b for verdadeira, sendo que o teste b é realizado *após* a execução do corpo do ciclo. Por exemplo, se $b = \text{ff}$ sabemos que p vai ser executado precisamente uma vez. Estenda a semântica na Figura 1 de forma a que esta inclua o novo tipo de ciclo.

Problema 4 (3 valores). Prove a seguinte implicação com base na semântica que desenvolveu.

$\langle \text{do } \{p\} \text{ while } b, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$ implica que $\langle p; \text{while } b \{p\}, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$

Problema 5 (3 valores). Prove através do método de indução (relativo à profundidade das árvores de derivação) a seguinte implicação.

$\langle p, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'$ implica que $\llbracket p \rrbracket(\sigma) = \sigma'$

Pode assumir que $\langle b, \sigma \rangle \Downarrow v$ implica $\llbracket b \rrbracket(\sigma) = v$ e que $\langle e, \sigma \rangle \Downarrow v$ implica $\llbracket e \rrbracket(\sigma) = v$. (Sugestão: no caso dos ciclos “while” use a equação do ponto-fixe que aprendeu nas aulas).

$$\begin{array}{c}
\frac{\langle e, \sigma \rangle \Downarrow v}{\langle x := e, \sigma \rangle \Downarrow \sigma[v/x]} \text{ (asg)} \qquad \frac{\langle p, \sigma \rangle \Downarrow \sigma' \quad \langle q, \sigma' \rangle \Downarrow \sigma''}{\langle p ; q, \sigma \rangle \Downarrow \sigma''} \text{ (seq)} \\
\\
\frac{\langle b, \sigma \rangle \Downarrow \text{tt} \quad \langle p, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } p \text{ else } q, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'} \text{ (if}_1\text{)} \qquad \frac{\langle b, \sigma \rangle \Downarrow \text{ff} \quad \langle q, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } p \text{ else } q, \sigma \rangle \Downarrow \sigma'} \text{ (if}_2\text{)} \\
\\
\frac{\langle b, \sigma \rangle \Downarrow \text{tt} \quad \langle p, \sigma \rangle \Downarrow \sigma' \quad \langle \text{while } b \text{ do } \{ p \}, \sigma' \rangle \Downarrow \sigma''}{\langle \text{while } b \text{ do } \{ p \}, \sigma \rangle \Downarrow \sigma''} \text{ (wh}_1\text{)} \\
\\
\frac{\langle b, \sigma \rangle \Downarrow \text{ff}}{\langle \text{while } b \text{ do } \{ p \}, \sigma \rangle \Downarrow \sigma} \text{ (wh}_2\text{)}
\end{array}$$

Figure 1: Semântica operacional “big-step”.

$$\begin{aligned}
\text{wp}(x := e, \Phi) &= \Phi[e/x] \\
\text{wp}(p ; q, \Phi) &= \text{wp}(p, \text{wp}(q, \Phi)) \\
\text{wp}(\text{if } b \text{ then } p \text{ else } q, \Phi) &= b \wedge \text{wp}(p, \Phi) \vee \neg b \wedge \text{wp}(q, \Phi) \\
\text{wp}(\text{while } b \text{ do } \{ p \}, \Phi) &= \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n \\
\Psi_0 &= \text{tt} \\
\Psi_{n+1} &= \neg b \wedge \Phi \vee b \wedge \text{wp}(p, \Psi_n)
\end{aligned}$$

Figure 2: Semântica associada às pré-condições mais fracas.

$$\begin{aligned}
\llbracket x := e \rrbracket &= \sigma \mapsto \sigma[\llbracket e \rrbracket(\sigma)/x] \\
\llbracket p ; q \rrbracket &= \llbracket q \rrbracket \cdot \llbracket p \rrbracket \\
\llbracket \text{if } b \text{ then } p \text{ else } q \rrbracket &= [\llbracket p \rrbracket, \llbracket q \rrbracket] \cdot \text{dist} \cdot \langle \llbracket b \rrbracket, \text{id} \rangle \\
\llbracket \text{while } b \text{ do } \{ p \} \rrbracket &= \text{lfp} \left(k \mapsto [k \cdot \llbracket p \rrbracket, \text{id}] \cdot \text{dist} \cdot \langle \llbracket b \rrbracket, \text{id} \rangle \right)
\end{aligned}$$

Figure 3: Semântica denotacional.