Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
4 de janeiro de 2016

Álgebra Linear CC

segundo teste — duração: 2 horas

1. Sejam B_1 a base canónica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, B_2 a base deste mesmo espaço vetorial dada por $B_2 = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ e B_3 a base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ dada por $B_3 = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0))$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$f_k(x,y,z,w) = (x+z, x-ky-w, x-y), \ \forall (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4,$$

e seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$M(g; B_1, B_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "Para todo $k \in \mathbb{R}$, a aplicação f_k é uma transformação linear.". ✓

   (b) Considere a transformação linear f_0.

      i. Determine uma base de Nucf_0 e a característica de f_0. ✓

      ii. Diga, justificando, se f_0 é: (α) injetiva.✓ (β) sobrejetiva. ✓

      iii. Determine $M(f_0; B_3, B_1)$, $M(id_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_2)$ e $M(g \circ f_0; B_3, B_2)$. ✓

   (c) Mostre que $(-1,2,2)$ é um vetor próprio de g e indique a que valor próprio está associado. ✓

   (d) Mostre que g tem apenas dois valores próprios distintos. Determine uma base do subespaço próprio associado ao menor valor próprio de g e conclua que a multiplicidade geométrica desse valor próprio é 2. ✓

   (e) Diga, justificando, se g é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$. ✓

   (f) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, uma base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g; B, B)$ é diagonal. ✓

2. Considere as matrizes reais a seguir indicadas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ d & -d & e & f \\ a & -a & b & c \\ g & -g & h & i \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e sejam $D, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Sabendo que $|B| = 3$, determine $|C|$. ✓

   (b) Justifique que o sistema $A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = b$ é um sistema de Cramer e resolva-o recorrendo a determinantes. ✓

   (c) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "Se $\det D = 0$ ou $\det E = 0$, então car$(DE) < n$." ✓

   (d) Mostre que se D é invertível, então a matriz Adj$D$ é invertível e $\text{Adj}(\text{Adj}\, D) = |D|^{n-2} D$. ✓

Cotação: **1** - (1.5 + 2.25 + 1.0 + 2.25 + 1.5 + 3.0 + 1.0 + 1.5); **2** - (1.5 + 1.75 + 1.25 + 1.5).