

# **Álgebra Linear CC**

**Licenciatura em Ciências da Computação**

---

Carla Mendes

2025/2026

Departamento de Matemática

# Sistemas de equações lineares

---

## Conceitos básicos

São diversos os problemas práticos com que nos deparamos no dia a dia que envolvem a resolução de sistemas de equações lineares. Embora alguns destes sistemas sejam simples de resolver, outros há que, devido às suas dimensões e complexidade, requerem métodos sistemáticos para a sua resolução. Este capítulo é dedicado ao estudo de um desses métodos.

Tal como no capítulo anterior, representamos por  $\mathbb{K}$  o conjunto  $\mathbb{R}$  ou o conjunto  $\mathbb{C}$ .

# Sistemas de equações lineares

## Definição

Sejam  $n \in \mathbb{N}$ . Uma **equação linear** nas incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sobre  $\mathbb{K}$ , é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

com  $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$ .

Os elementos  $a_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) designam-se por **coeficientes** da equação e o elemento  $b$  designa-se por **termo independente** da equação.

# Sistemas de equações lineares

## Definição

Sejam  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dá-se o nome de **sistema de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas**  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sobre  $\mathbb{K}$ , a uma coleção de equações lineares

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.,$$

onde  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

# Sistemas de equações lineares

## Definição (continuação)

O sistema  $(S)$  diz-se **homogéneo** se  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , i.e., se os termos independentes de  $(S)$  são todos nulos.

Chama-se **solução de  $(S)$**  a qualquer  $n$ -uplo  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  de  $\mathbb{K}^n$  tal que, para todo  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$ .

Representa-se por  $\text{Sol}_{(S)}$  o **conjunto de soluções de  $(S)$** , i.e.,

$$\text{Sol}_{(S)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

# Sistemas de equações lineares

## Definição

Se  $(S)$  e  $(S')$  são sistemas de equações lineares sobre  $\mathbb{K}$  com o mesmo conjunto de soluções, diz-se que  $(S)$  e  $(S')$  são **equivalentes**.

## Definição

Um sistema  $(S)$  de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas e de coeficientes em  $\mathbb{K}$  diz-se:

- **impossível** se não tem solução i.e., se  $\text{Sol}_{(S)} = \emptyset$ ;
- **possível** se tem, pelo menos, uma solução, i.e., se  $\text{Sol}_{(S)} \neq \emptyset$ ;
- **possível determinado** se o sistema tem uma única solução;
- **possível indeterminado** caso o sistema tenha mais do que uma solução.

# Sistemas de equações lineares

**Observação:** Um sistema  $(S)$  de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas que seja homogéneo é sempre possível, uma vez que  $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$  é solução de  $(S)$ ; a esta solução dá-se a designação de ***solução trivial***.

Dado um sistema  $(S)$  de equações lineares entende-se por:

- ***discutir o sistema***, verificar se  $(S)$  é possível e, neste caso, se é determinado ou indeterminado;
- ***resolver o sistema***, determinar o conjunto de soluções do sistema.

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

A equação

$$x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

é equivalente a

$$x_1 = -x_2 + 8x_3.$$

Uma vez que  $x_2$  e  $x_3$  são arbitrários, este sistema é possível e indeterminado. Para obtermos uma solução diferente da trivial podemos considerar, por exemplo,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 1$ , donde resulta  $x_1 = 7$ .

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x - 5y - 2z = 2 \quad (i) \\ 2x - 2y + z = 0 \quad (ii) \\ 3x + 3y + 3z = -1 \quad (iii). \end{array} \right.$$

Se adicionarmos (i) e (iii), obtemos obtemos a equação

$$2x - 2y + z = 1,$$

o que não é consistente com a equação (ii), pelo que o sistema não admite nenhuma solução, i.e., é um sistema impossível.

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Dado o sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \quad (i) \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \quad (ii) \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 \quad (iii) \end{array} \right.$$

vamos calcular a sua solução.

Se trocarmos a equação (i) com a equação (ii), obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \quad (i) \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \quad (ii) \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 \quad (iii) \end{array} \right.$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

Agora, se substituirmos a equação (iii) por (iii)-(i) ficamos com

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 0x_1 - 1x_2 - 1x_3 = -10 \end{array} \right. \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array}$$

Substituindo a equação (iii) por (iii)+(ii) tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 0x_1 + 0x_2 - 9x_3 = -27 \end{array} \right. \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \\ (iii) \end{array}$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

Finalmente, se multiplicarmos a equação (iii) por  $-1/9$ , obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \quad (i) \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \quad (ii) \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3 \quad (iii) \end{array} \right.$$

Neste momento é fácil determinar a solução do sistema; substituindo  $x_3$  por 3 em (ii) obtém-se  $x_2 = 7$  e da equação (i), por substituição de  $x_3$  e  $x_2$ , resulta que  $x_1 = 7$ . Assim, uma vez que o sistema admite solução e que esta é única, concluímos que o sistema é possível e determinado.

## Sistemas de equações lineares

Em cada um dos exemplos anteriores, o sistema inicial foi sucessivamente transformado noutros sistemas efectuando apenas as seguintes operações sobre equações:

- 1) troca da equação  $i$  com a equação  $j$ ;
- 2) multiplicação da equação  $i$  por  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ;
- 3) substituição da equação  $i$  pela sua soma com a equação  $j$  multiplicada por  $\beta \in \mathbb{K}$ , com  $i \neq j$ .

A estas operações damos a designação de ***operações elementares sobre equações.***

É simples de verificar que se  $(S')$  for um sistema obtido a partir de um sistema  $(S)$  efectuando uma operação elementar sobre as equações de  $(S)$ , então os dois sistemas são equivalentes.

# Sistemas de equações lineares

Um sistema ( $S$ ) de equações lineares e de coeficientes em  $\mathbb{K}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right.$$

pode ser representado pela equação matricial

$$Ax = b$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

## Sistemas de equações lineares

As matrizes  $A$ ,  $x$  e  $b$  designam-se, respetivamente, por **matriz simples de** ( $S$ ), **matriz incógnita de** ( $S$ ) e **matriz dos termos independentes de** ( $S$ ). Tendo em conta que as incógnitas têm um papel secundário na resolução de um sistema e que as operações elementares sobre as equações envolvem apenas os coeficientes e os termos independentes, o sistema ( $S$ ) pode ainda ser representado, de uma forma mais abreviada, pela matriz

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

à qual se dá a designação de **matriz ampliada de** ( $S$ ) e que se representa por  $[A | b]$ . O sistema ( $S$ ) fica completamente representado por esta matriz, uma vez que cada linha da matriz representa uma equação de ( $S$ ).

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Se consideramos o sistema ( $S$ ) a seguir indicado

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 \end{array} \right.$$

a matriz simples, a matriz incógnita e a matriz dos termos independentes deste sistema são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada associada ao sistema é a matriz

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

## Sistemas de equações lineares

Dado um sistema ( $S$ ) de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas e de coeficientes em  $\mathbb{K}$ , o seu conjunto de soluções pode ser determinado através da resolução da equação matricial  $Ax = b$  que lhe está associada. De facto,  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$  é solução de ( $S$ ) se e só se

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = b.$$

Nos exemplos anteriores, os sistemas foram resolvidos recorrendo apenas a operações elementares sobre equações. Efectuar uma destas operações sobre as equações de um sistema ( $S$ ) corresponde, em termos matriciais, a efectuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada  $[A | b]$  associada ao sistema.

# Sistemas de equações lineares

Mais precisamente:

- trocar a equação  $i$  com a equação  $j$  no sistema ( $S$ ) corresponde a trocar a linha  $i$  com a linha  $j$  da matriz  $[A | b]$ ;
- multiplicar a equação  $i$  do sistema ( $S$ ) por  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  corresponde a multiplicar a linha  $i$  da matriz  $[A | b]$  por  $\alpha$ ;
- substituir a equação  $i$  do sistema ( $S$ ) pela sua soma com a equação  $j$  multiplicada por  $\beta \in \mathbb{K}$  corresponde a substituir a linha  $i$  da matriz  $[A | b]$  pela sua soma com a linha  $j$  multiplicada por  $\beta \in \mathbb{K}$ , com  $i \neq j$ .

## Sistemas de equações lineares

Da mesma forma que as operações elementares sobre as equações de um sistema não alteram o seu conjunto de soluções, as operações elementares sobre as linhas da sua matriz ampliada também não alteram a solução da equação matricial associada ao sistema.

# Sistemas de equações lineares

## Teorema

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $Ax = b$  a equação matricial de um sistema de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas, sobre  $\mathbb{K}$ . Se a matriz  $[A' | b']$  é obtida de  $[A | b]$  efectuando uma operação elementar sobre as linhas, então  $A'x = b'$  e  $Ax = b$  têm o mesmo conjunto de soluções.

# Sistemas de equações lineares

## Demonstração.

Cada operação elementar sobre as linhas da matriz ampliada  $[A \mid b]$  corresponde a multiplicar (à esquerda) ambos os membros da equação  $Ax = b$  por uma matriz elementar  $Q$ . Assim, tendo em conta que  $A' = QA$ ,  $b' = Qb$  e que as matrizes elementares são invertíveis, o resultado é imediato. De facto, dado  $c \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ ,

$$Ac = b \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow A'c = b'$$

e

$$A'c = b' \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow Q^{-1}QAc = Q^{-1}Qb \Rightarrow Ac = b. \quad \square$$

## Sistemas de equações lineares

**Observação:** Como já observámos anteriormente, toda a matriz que é equivalente por linhas a uma matriz  $A$  também é equivalente por colunas à matriz  $A$ . Porém, o resultado anterior não é válido para todas as operações elementares por colunas. Com efeito, quando se aplicam operações elementares sobre matrizes, tendo por objetivo a resolução de sistemas, a única operação sobre colunas que pode ser aplicada é a troca de colunas, sendo que neste caso tem de se proceder a uma troca de incógnitas no sistema final que seja coerente com a troca de colunas efetuada. Por este motivo, na resolução de sistemas optaremos por recorrer apenas a operações elementares sobre linhas.

## Discussão e resolução de sistemas

Nesta secção descrevemos um método que permite sistematizar o processo de resolução e discussão de sistemas: o método de eliminação de Gauss. Com este método o sistema inicial é transformado num outro sistema que lhe é equivalente mas de mais fácil resolução.

## Sistemas de equações lineares

Num exemplo anterior o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 \end{array} \right.$$

foi sucessivamente transformado, efectuando operações elementares sobre equações, até obtermos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 3 \end{array} \right.$$

o qual é de resolução bastante mais simples.

## Sistemas de equações lineares

Considerando a representação do sistema em termos de matrizes, esta transformação corresponde a efectuar sucessivas operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

até obtermos a matriz a matriz

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].$$

Esta última matriz tem a particularidade de estar na forma de escada.

## Sistemas de equações lineares

O processo que foi adoptado na resolução do sistema do exemplo anterior, e que permitiu reduzir a matriz ampliada deste sistema a uma matriz em escada, é o método de eliminação de Gauss descrito no capítulo anterior.

O método de eliminação de Gauss permite simplificar e sistematizar a resolução de sistemas de equações lineares.

Um passo elementar deste método, quando aplicado à matriz ampliada  $[A|b]$  de um sistema  $Ax = b$ , consiste em adicionar a uma certa equação um múltiplo de outra, de forma a que na equação obtida seja nulo o coeficiente de certa incógnita. Diz-se que se eliminou essa incógnita da equação. Os passos elementares são conduzidos de maneira a eliminar a incógnita  $x_1$  de todas as equações a partir da 2<sup>a</sup> equação, depois eliminar a incógnita  $x_2$  de todas as equações a partir da 3<sup>a</sup> equação, etc.

## Sistemas de equações lineares

Quando termina o método de eliminação de Gauss, obtemos uma matriz em escada  $[U|c]$ .

O sistema correspondente a esta matriz,  $Ux = c$ , é de resolução mais simples e há a garantia de ser equivalente ao sistema  $Ax = b$ , uma vez que  $[U|c]$  é obtida de  $[A|b]$  efectuando apenas operações elementares sobre linhas.

Quando se obtém o sistema correspondente à matriz  $[U|c]$ , é fácil verificar se o sistema é possível ou impossível. Se o sistema for possível, resolve-se de baixo para cima, escrevendo, se necessário, as **incógnitas básicas** (as que estão a multiplicar pelos pivots) em função das **livres** (as restantes variáveis).

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{array} \right.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} l_2 \rightarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 2l_1 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - 3l_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{l_4 \rightarrow l_4 + l_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{l_4 \rightarrow l_4 - \frac{1}{2}l_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right].$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

Desta forma obtém-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_2 - x_3 - x_4 & = & 1 \\ 2x_3 + 2x_4 & = & -4 \\ -x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

equivalente ao inicial, mas de mais fácil resolução. Da última equação obtém-se  $x_4 = -5$ , substituindo  $x_4$  na 3<sup>a</sup> equação temos  $x_3 = 3$ , donde  $x_2 = 1$  e  $x_1 = 1$ .

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Consideremos o seguinte de 4 equações lineares em 4 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 1 \\ 4x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 8x_4 = -6 \\ 4x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 8x_4 = -6 \end{array} \right.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & -6 & 1 \\ 4 & 8 & 14 & 8 & -6 \\ 4 & 12 & 16 & 20 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} l_2 \rightarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 - 2l_1 \\ l_4 \rightarrow l_4 - 2l_1 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \right] \rightarrow$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{l_4 \rightarrow l_4 - 2l_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

O sistema correspondente à última matriz, e equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_3 - 8x_4 = -8 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema por substituição inversa, obtem-se

$$Sol_{(S)} = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 = 6a_4 + \frac{5}{2}, a_2 = -5a_4 + 5, a_3 = 4a_4 - 4\}.$$

## Sistemas de equações lineares

Como vimos nos exemplos anteriores, quando se aplica o método de eliminação de Gauss na resolução de um sistema de equações lineares, a matriz ampliada do sistema é transformada, por meio de operações elementares sobre linhas, numa matriz em forma de escada. Mas, como foi referido no capítulo anterior, o processo descrito no método de eliminação de Gauss pode ser complementado com outras operações elementares, de forma a obter uma matriz equivalente por linhas à matriz ampliada e que esteja em forma de *escada reduzida*. Este método, conhecido por método de eliminação de Gauss-Jordan, quando aplicado na resolução de sistemas de equações lineares, permite obter sistemas equivalentes aos sistema dados e que, de uma forma geral, terão uma resolução ainda mais simplificada.

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Consideremos de novo o sistema seguinte, o qual já foi estudado num exemplo anterior.

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{array} \right.$$

Nesse mesmo exemplo vimos que aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema é possível obter a matriz em escada a seguir indicada

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

Partindo desta última matriz e reduzindo-a a uma matriz em forma de escada reduzida, temos

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} l_3 \rightarrow l_3 + 2l_4 \\ l_2 \rightarrow l_2 - l_4 \\ l_1 \rightarrow l_1 + l_4 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} l_2 \rightarrow l_2 + \frac{1}{2}l_3 \\ l_1 \rightarrow l_1 - \frac{1}{2}l_3 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 \rightarrow l_1 + 2l_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} l_2 \rightarrow -l_2 \\ l_3 \rightarrow \frac{1}{2}l_3 \\ l_4 \rightarrow -l_4 \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right].$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

A última matriz obtida, em forma de escada reduzida, é equivalente por linhas à matriz  $[A | b]$ . Por conseguinte, o sistema inicial  $(S)$  é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -5 \end{cases},$$

onde obtemos  $Sol(S) = \{(1, 1, 3, -5)\}$ .

## Sistemas de equações lineares

Seguidamente debruçamo-nos sobre um outro tipo de problema que também já foi referido no início do capítulo - a discussão de sistemas de equações lineares.

Como vamos ver, a discussão de um sistema pode ser feita recorrendo à característica da sua matriz simples e da sua matriz ampliada.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema,  $[A | b]$ , podemos determinar a característica dessa matriz e a característica da matriz simples do sistema, A.

## Sistemas de equações lineares

Sendo  $[U|c]$  a matriz em escada obtida a partir de  $[A|b]$  por aplicação do método de eliminação de Gauss, então  $\text{car}([A|b])$  é o número de linhas não nulas de  $[U|c]$  e  $\text{car}(A)$  é número de linhas não nulas de  $U$ .

Note-se que se tem sempre  $\text{car}(A) \leq \text{car}([A|b])$ .

Sendo  $(S)$  um sistema a  $m$  equações lineares e  $n$  incógnitas,  $[A|b]$  a matriz ampliada do sistema e designando por  $r$  a característica de  $A$ , tem-se um dos seguintes casos:

- 1)  $r = m = n$ ;
- 2)  $r = m < n$ ;
- 3)  $r < m$

# Sistemas de equações lineares

No caso 1), a matriz  $[U | c]$  tem a forma

$$[U | c] = \left[ \begin{array}{ccccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} & c_n \end{array} \right]$$

que corresponde ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = c_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ u_{nn}x_n = c_n \end{array} \right.$$

em que  $u_{ii} \neq 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

A partir da última equação deste sistema obtemos  $x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$  e, por substituição inversa nas equações anteriores, obtemos sucessivamente  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ .

Neste caso, o sistema é possível determinado.

## Sistemas de equações lineares

No caso 2), em que temos  $r = m < n$ , a matriz  $[U | c]$  será da forma

$$[U | c] = \left[ \begin{array}{cccccccccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{mj_m} & \dots & u_{mn} & c_n \end{array} \right]$$

onde, para todo  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $u_{kj_k} \neq 0$  e, para todo  $j < j_k$ ,  $u_{kj} = 0$ .

No sistema correspondente a  $[U | c]$  são livres as incógnitas  $x_j$ , com  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ , e obtemos as restantes incógnitas em função destas. Desta forma, o sistema é possível indeterminado.

# Sistemas de equações lineares

No caso 3), em que  $r < m$ , tem-se

$$[U | c] = \left[ \begin{array}{cccc|cccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{rj_m} & \dots & u_{rn} & c_r \\ 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_m \end{array} \right]$$

Se  $c_i \neq 0$ , para algum  $i \in \{r + 1, \dots, m\}$ , o sistema é obviamente impossível.

Se  $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$ , então as últimas  $m - r$  equações do sistema correspondente à matriz  $[U|c]$  são identidades, e o sistema é equivalente ao das  $r$  primeiras equações. Este sistema está num dos casos estudados antes; de facto, se  $r = n$ , o sistema enquadra-se no primeiro caso, e se  $r < n$ , temos um sistema do tipo que foi estudado no segundo caso.

# Sistemas de equações lineares

Do que foi observado conclui-se o seguinte:

## Teorema

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $Ax = b$  um sistema de equações lineares, com  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Então

- o sistema é possível se e só se  $\text{car}(A) = c([A|b])$ ;
- o sistema é possível determinado se e só se  $\text{car}(A) = c([A|b]) = n$ ;
- o sistema é possível indeterminado se e só se  $\text{car}(A) = c([A|b]) < n$ .

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Consideremos o sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{rcll} & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[ \begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[ \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right]$$
  
$$\xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - L_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

O sistema correspondente à última matriz, e equivalente ao inicial, é o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & + & x_2 & = 2 \\ & + & 2x_2 & - x_3 = 1 \\ & & 2x_3 & + x_4 = 2 \\ & & 0 & = -1 \end{array} \right.$$

que obviamente é impossível.

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Consideremos o sistema

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{array} \right.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema obtemos a matriz

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

à qual corresponde o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_2 - x_3 - x_4 & = & 1 \\ 2x_3 + 2x_4 & = & -4 \\ -x_4 & = & 5 \end{array} \right.$$

Uma vez que  $\text{car}(A) = \text{car}(A|b) = 4$ , o sistema é possível e determinado.  
De facto, da última equação resulta que  $x_4 = -5$  e substituindo  
sucessivamente nas equações anteriores, obtemos  $x_3 = 3$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_1 = 1$ .

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Consideremos o sistema ( $S$ ) de 3 equações lineares em 3 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_3 = 8 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Como

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

## Sistemas de equações lineares

### Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - \frac{1}{6}l_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

concluímos que  $c(A) = c(A|b) = 2 < 3$ , pelo que o sistema é possível indeterminado. O sistema correspondente à última matriz é dado por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ 6x_2 & = & 6 \end{array} \right.$$

onde  $x_3$  é arbitrário,  $x_2 = 1$ ,  $x_1 = 4 - 2x_3$ .

Assim,  $Sol(S) = \{(4 - 2a, 1, a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$ .

# Sistemas de equações lineares

No caso particular dos sistemas homogéneos já havíamos observado que estes sistemas são sempre possíveis. Agora, com base no teorema anterior, sabe-se também que o sistema  $Ax = 0$ , com  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , é determinado se e só  $\text{car}(A) = n$ .

## Definição

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $Ax = b$ , com  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , um sistema de equações lineares. Dá-se a designação de **sistema homogéneo associado a  $Ax = b$**  ao sistema  $Ax = 0$ .

# Sistemas de equações lineares

O conjunto de soluções de um sistema e do sistema homogéneo associado estão relacionados de acordo com o estabelecido no teorema seguinte.

## Teorema

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $Ax = b$  um sistema de equações lineares, com  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ , e  $y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  uma solução do sistema. Então  $w \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  é solução de  $Ax = b$  se e só se  $w = y + z$ , onde  $z \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  é solução de  $Ax = 0$ .

# Sistemas de equações lineares

## Demonstração.

Seja  $y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  uma solução de  $Ax = b$ .

Suponhamos que  $z \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$  é uma solução do sistema homogéneo  $Ax = 0$ . Então

$$A(y + z) = Ay + Az = b + 0 = b,$$

pelo que  $w = y + z$  é solução de  $Ax = b$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $w$  é solução de  $Ax = b$ . Então

$$A(w - y) = Aw - Ay = b - b = 0.$$

Por conseguinte,  $w$  pode escrever-se como a soma de  $y$  com uma solução do sistema  $Ax = 0$ , pois  $w = y + (w - y)$  onde  $w - y$  é solução de  $Ax = 0$ . □

# Sistemas de equações lineares

Do teorema anterior segue de imediato o resultado seguinte.

## Corolário

*Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  e  $Ax = b$  um sistema de equações lineares, com  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Então, se for possível, o sistema  $Ax = b$  é determinado se e só se o sistema homogéneo associado é determinado (i.e., admite como única solução  $0_{n \times 1}$ ).*

## Inversão de matrizes

A determinação da inversa de uma matriz, caso exista, corresponde à resolução de um sistema de equações lineares. Assim sendo, o método de eliminação de Gauss-Jordan, para além de nos facultar um algoritmo para a resolução de sistemas, dá-nos também um processo para o cálculo da inversa de matrizes invertíveis.

Antes de vermos de que forma o método de eliminação de Gauss-Jordan pode ser aplicado no cálculo da inversa de uma matriz, apresentamos uma caracterização de matrizes invertíveis que nos permite decidir sobre a invertibilidade de uma matriz através do cálculo da sua característica.

# Sistemas de equações lineares

## Teorema

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Então  $A$  é invertível se e só se  $\text{car}(A) = n$ .

### Demonstração.

Suponha-se que  $A$  é invertível.

Então

$$Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}(Ax) = 0 \Rightarrow (A^{-1}A)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Logo, como o sistema  $Ax = 0$  é determinado, temos  $\text{car}(A) = n$ .

Reciprocamente, suponha-se que  $\text{car}(A) = n$  e mostremos que  $A$  é invertível. Por definição, uma matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  é invertível se existir uma matriz  $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $AX = I_n = XA$ .

# Sistemas de equações lineares

## Demonstração.

A existência de  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $AX = I_n$  é equivalente à existência de

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

tais que

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad Ax_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

## Sistemas de equações lineares

**Demonstração (continuação).**

Como  $\text{car}(A) = n$ , cada um dos sistemas indicado em (\*) é possível e determinado, o que significa que existe  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tal que  $AX = I_n$ .

Para podermos concluir que  $X$  é a inversa de  $A$  falta verificar que  $XA = I_n$ .

Para tal, começemos por mostrar que se  $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  é uma matriz tal que  $AB = 0$ , então  $B = 0$ . De facto, se representarmos por  $b_i$  a coluna  $i$  de  $B$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , então de  $AB = 0$  segue que, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $Ab_i = 0$ . Como  $\text{car}(A) = n$ , o sistema  $Ax = 0$  é determinado e, portanto,  $b_i = 0$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Logo  $B = 0$ .

Assim, de

$$A(XA - I_n) = A(XA) - A = (AX)A - A = I_nA - A = 0,$$

concluímos que  $XA - I_n = 0$ , i.e.,  $XA = I_n$ . Logo,  $A$  é invertível.

## Sistemas de equações lineares

Já sabemos que se  $A, X \in M_n(\mathbb{K})$  são matrizes tais que  $A$  é invertível e  $AX = I_n$ , então  $XA = I_n$ . Logo, sendo  $A$  uma matriz invertível, para determinarmos a sua inversa basta resolver os sistemas referidos em (\*). Além disso, uma vez que a matriz simples destes sistemas é a mesma, podemos optar pela resolução de todos os sistemas em simultâneo. Tal é conseguido aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz  $[A | I_n]$ ; a matriz obtida após a aplicação deste método é a matriz  $[I_n | A^{-1}]$ .

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Então, de

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - 5l_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 + 2l_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} l_1 \rightarrow l_1 - l_3 \\ l_2 \rightarrow l_2 - \frac{2}{3}l_3 \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

# Sistemas de equações lineares

## Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow{l_1 \rightarrow l_1 - l_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{l_2 \rightarrow \frac{1}{2}l_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right], \quad \xrightarrow{l_3 \rightarrow \frac{1}{3}l_3}$$

concluímos que  $A$  admite inversa e que

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right].$$

# Sistemas de equações lineares

## Teorema

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Se  $AB = I_n$ , então  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis,  $B^{-1} = A$  e  $BA = I_n$ .

# Sistemas de equações lineares

## Demonstração.

Admitamos que  $AB = I_n$ . Então

$$Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Assim, o sistema  $Bx = 0$  também é possível e determinado, pelo que  $\text{car}(B) = n$ . Logo,  $B$  é invertível. Provemos, agora, que  $A$  é invertível. De facto, como  $AB = I_n$  e  $B$  é invertível, tem-se

$$A = AI_n = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = I_nB^{-1} = B^{-1}.$$

Como a matriz  $B^{-1}$  é invertível, então  $A$  é uma matriz invertível.

Considerando que  $B^{-1} = A$  também se tem  $BA = I_n$ . □

# Sistemas de equações lineares

## Teorema

*Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ . Então  $AB$  é invertível se e só se  $A$  e  $B$  são invertíveis.*