Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
16 de janeiro de 2015

Álgebra Linear CC

segundo teste — duração: 2 horas

Justifique convenientemente todas as suas respostas

1. Sejam B_1 a base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ dada por $B_1 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$, B_2 a base canónica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ e B_3 a base deste mesmo espaço vetorial dada por $B_3 = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0))$. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $f_{a,b} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação tal que

$$f_{a,b}(x,y,z,w) = (-x+2y, y+2a-b, -z+w), \text{ para todo } (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4,$$

e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares tais que

$$M(g; B_2, B_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad M(h; B_1, B_1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Diga qual a relação entre a e b para que $f_{a,b}$ seja uma aplicação linear. Conclua que $f_{1,2}$ é uma transformação linear.

   (b) Mostre que, para todo $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, $g(x,y,z,w) = f_{1,2}(x,y,z,w)$. Conclua que g e $f_{1,2}$ são a mesma transformação linear.

   (c) Determine uma base de $\mathrm{Im}g$. Indique a característica e a nulidade de g. Classifique g quanto à sobrejetividade e injetividade.

   (d) Determine $M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}; B_3, B_2)$ e $M(g; B_3, B_1)$.

   (e) Mostre que -1 e -2 são os únicos valores próprios de h e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

   (f) Diga se (2,2,1) é um vetor próprio de h. Determine a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de h.

   (g) Diga se h é diagonalizável.

2. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a_1+3b_1 & a_1-3b_1 & c_1 \\ a_2+3b_2 & a_2-3b_2 & c_2 \\ a_3+3b_3 & a_3-3b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ e } D_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha & 2 & 0 & 2 \\ 2 & \alpha & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Sem calcular $|B|$ nem $|C|$, mostre que $|C| = -6|B|$.

   (b) i. Utilizando determinantes, determine os valores de α para os quais $car(D_\alpha) = 4$.

   ii. Considere $\alpha = 1$. Justifique que D_1 é invertível. Sem calcular $\mathrm{adj}\, D_1$ nem D_1^{-1} determine o elemento na posição $(2,4)$ de cada uma destas matrizes.

   (c) Mostre que se A é uma matriz ortogonal (isto é, tal que $AA^T = I_n = A^TA$) e $\det A = -1$, então -1 é valor próprio de A.
   [Sugestão: Verifique que $A^T(I_n + A) = (I_n + A)^T$.]

Cotação: **1** - (2.0 + 1.75 + 2.25 + 1.5 + 1.75 + 2.25 + 1.5); **2** - (1.75 + 1.75 + 1.75 + 1.75).