



Séries

1. Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$

2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^{2n}} = 9$

4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{50}{3}$

5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{n+1}}{3^n} = \frac{9}{2}$

6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{4}$

7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{45}$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} 4^{-(n+2)} = \frac{9}{16}$

9 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -1$

10 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

11 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \right) = \frac{1}{2}$

2. Considere as sucessões definidas por $a_n = \frac{2n+n^2}{3n^2+7}$, $b_n = \frac{1}{\pi^{2n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e ainda as sucessões de termo geral

$$x_n = a_n + 3b_n, \quad y_n = \begin{cases} a_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ b_n & \text{se } n > 10^8 \end{cases} \quad \text{e} \quad z_n = \begin{cases} b_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ a_n & \text{se } n > 10^8. \end{cases}$$

(a) Conclua, justificando, que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ é divergente e que $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ é convergente.

(b) Justificando devidamente, determine a natureza das séries

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n \quad \text{e} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} z_n.$$

3. Apresente duas séries divergentes, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$, tais que $u_n + v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente.

4. Estude a natureza das seguintes séries:

$$1 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \cos \frac{1}{n}$$

$$2 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{e} \right)^n$$

$$3 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$4 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{e^n}$$

$$5 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$$

$$6 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cos \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

$$7 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \sin n}{e^n}$$

$$8 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n + 5^n}{3^n}$$

$$9 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

$$10 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{5}{3 \cdot 2^n}$$

$$11 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n^2 + 1} r^n, \quad 0 < r < 1$$

$$12 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} n r^n, \quad 0 < r < 1$$

$$13 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n+1} r^n, \quad 0 < r < 1$$

$$14 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 2n}$$

$$15 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+5}$$

$$16 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cos n}{n!}$$

$$17 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{5n^2}$$

$$18 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n^3 + 2}$$

$$19 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cos(n\pi)}{2^n}$$

$$20 \quad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 - 1}$$

$$21 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{2^{2n}}$$

$$22 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^{10} + 7}$$

$$23 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n!}{n^n}$$

$$24 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^n n}$$

$$25 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{1 + n^3}$$

$$26 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}{n}$$

$$27 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n + \sqrt[n]{e}}$$

$$28 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

4. (continuação) Estude a natureza das seguintes séries:

$$29 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\cos(n\pi)}{\log^n(n\pi)}$$

$$30 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$31 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n}{n^2 + 1}\right)^n$$

$$32 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$33 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n + 1}$$

$$34 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 \cos(n\pi)}{1 + n^3}$$

$$35 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{4 + \cos n}{n^3}$$

$$36 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$$

$$37 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$$

$$38 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1 + (-1)^n}{n^2}$$

$$39 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\log n}{n}$$

$$40 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1 + \sin n}{n^2}$$

$$41 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{n^5 + n^2 + 1}$$

$$42 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$$

$$43 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$44 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^5}{2^n}$$

$$45 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{(n+2)!}$$

$$46 \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}$$

5. Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

(a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja divergente, $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente;

(b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja convergente, $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente;

(c) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ seja convergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja divergente;

(d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja convergente e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ seja divergente;

- (e) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(n^2 u_n)_n$ convirja para zero e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ seja divergente;
- (f) uma sucessão $(u_n)_n$ de termos positivos tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^2$ diverge;
- (g) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n \geq 1} u_n^3$ seja divergente;
- (h) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n \geq 1} u_n^2$ seja divergente;
- (i) uma série de termos negativos divergente;
- (j) uma série alternada divergente;
- (k) uma série alternada absolutamente convergente.

6. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões tais que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ é convergente, então $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente;
- (b) se $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n < 0$ e $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente, então $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ é convergente;
- (c) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + u_n)$ é divergente;
- (d) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2 + u_n}$ é convergente;
- (e) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ é convergente, então a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{1 + u_n}$ é também convergente;
- (f) se $\sum_{n \geq 1} u_n$ é divergente e $v_n = \begin{cases} u_n & \text{se } n \leq 100 \\ \frac{1}{n^3} & \text{se } n > 100 \end{cases}$, então $\sum_{n \geq 1} v_n$ é também divergente;
- (g) a série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n + 2}{\sqrt{n}}$ é divergente;
- (h) a série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{3^n}$ é convergente mas não absolutamente convergente.