Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	26 de janeiro de 2023

Exame de Álgebra Linear CC

duração: 2h15min

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

		V	F
1.	Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e para quaisquer matrizes A e B tais que $AB \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, a expressão BAB^T define uma matriz.	☐	☐
2.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, a matriz $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica.	☐	☐
3.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se $car(A) = car(B) = n$, então $car(A + B) = 2n$.	☐	☐
4.	O conjunto $\{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} \cup < (1, 1, 0) >$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
5.	Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in V$, se (v_1, v_2) é linearmente dependente, então (v_1, v_2, v_3) é linearmente dependente.	☐	☐
6.	Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in V$, se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto gerador de V, então $\{v_1, v_2\}$ não é um conjunto gerador de V.	☐	☐
7.	Para qualquer endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, f é injetiva se e só se $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^3$.	☐	☐
8.	Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, se A é invertível, então 0 não é valor próprio de A.	☐	☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Para cada $\alpha, \beta, a, b, c, d \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 & 1 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ 0 & c & -2 & 1 \\ 0 & d & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta o sistema $A_\alpha x = b_\beta$ em função dos parâmetros α e β.

(b) Justifique que a matriz A_1 é invertível e determine a sua inversa utilizando o método de Gauss-Jordan.

$\overrightarrow{\text{v.s.f.f.}}$

(c) Admitindo que $|B| = 3$, justifique que o sistema representado por

$$B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

é um sistema de Cramer. Sendo $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ a solução deste sistema, determine α_2.

2. Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, os subespaços vetoriais

$$W = \{(x-y, y-x, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad U =< (1,-1,2), (1,0,1) > .$$

(a) Determine uma base de W.

(b) Determine $\dim(W+U)$. Diga, justificando, se a soma $W+U$ é uma soma direta.

(c) Determine um suplementar de U relativamente a $\mathbb{R}^3$.

3. Considere os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ as bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ definidas, respetivamente, por

$$\mathcal{B}' = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)), \quad \mathcal{B}'' = ((1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)).$$

Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ as aplicações lineares definidas por

$$f(1,0,0) = (1,0,1,1) \text{ e } f(0,1,0) = (0,1,-1,0), f(0,0,1) = (0,1,0,0)$$

e

$$M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine Nuc$f$. Diga, justificando, se f é injetiva.

(b) Determine $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$ e indique uma matriz A tal que $M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}'') = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')A$.

(c) Mostre que $(-1, 2, -1)$ é um vetor próprio de g.

(d) Mostre que 2 é um valor próprio de g com multiplicidade geométrica 2.

(e) Sabendo que -1 é um valor próprio de g, diga se g é diagonalizável.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,5$.

Grupo II: 1.$(1,5+1,5+1,5)$; 2.$(1,5+1,5+1,5)$; 3.$(1,5+1,5+1,25+1,5+1,25)$.