Universidade do Minho — LCC
Dep. Matemática — 2025/2026

Lógica CC

2º teste — 8 de janeiro de 2026 — Duração: 2 horas

Nome: ______________________ Número: __________

Grupo I

Responda a cada uma das 8 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, **sem apresentar justificações**.

1. Indique um conjunto de fórmulas proposicionais Γ que seja maximalmente consistente e tal que $\{p_1 \leftrightarrow \neg p_2, \neg p_1 \vee p_2\} \subset \Gamma$.

   Resposta:

2. Seja L um tipo de linguagem com um símbolo de função binário g. Dê exemplo de um L-termo t_1 e de um L-termo t_2 tais que $\mathsf{g}(x_2, t_1)[x_0/x_2] = \mathsf{g}(t_2, \mathsf{g}(x_1, x_1))$.

   Resposta:

3. Seja L um tipo de linguagem com um símbolo de relação binário R. Dê exemplo de uma L-fórmula φ que tenha no máximo 4 subfórmulas e tal que $\mathrm{LIV}(\varphi) = \{x_0, x_1\}$ e $\mathrm{LIG}(\varphi) = \{x_1\}$.

   Resposta:

4. Seja φ a L_{Arit}-fórmula: $\exists x_0(x_0 = x_1) \vee \neg(x_0 = x_1)$. Calcule $\varphi[\mathsf{s}(x_0)/x_0]$.

   Resposta:

5. Considere a L_{Arit}-fórmula $\psi = \exists x_2 \neg(x_0 + x_1 < x_2)$. Dê exemplo de uma variável x e de um L_{Arit}-termo t tais que x não seja substituível sem captura de variáveis por t em ψ.

   Resposta:

6. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ tal que:

   $\overline{\mathsf{c}} = 1$ $\qquad$ $\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ tal que $\overline{\mathsf{f}}(z_1, z_2) = z_1 \times z_2$

   $\overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} : z = 2z', \text{ para algum } z' \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ $\overline{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 : z_1 = z_2\}$

   Determine $\mathsf{f}(x_2, \mathsf{f}(x_1, \mathsf{c}))[a_0]_E$, onde a_0 é a atribuição em E tal que $a_0(x_i) = -i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

   Resposta:

7. Considere o tipo de linguagem L e a L-estrutura E definidas na Questão 6. Dê exemplo de uma atribuição a_1 em E tal que: $E \models \mathsf{P}(x_0) \wedge \mathsf{f}(x_0, \mathsf{c}) = x_1[a_1]$.

   Resposta:

8. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}\}, \{\mathsf{P}, \mathsf{Q}\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = \mathcal{N}(\mathsf{Q}) = 1$. Indique uma L-estrutura E cujo domínio seja $\{a, b\}$ e que seja um modelo de $\{\neg\mathsf{P}(\mathsf{c}), \forall x_0(\mathsf{P}(x_0) \vee \mathsf{Q}(x_0))\}$.

   Resposta:

Grupo II

Responda às 5 questões deste grupo na folha de teste, **justificando** convenientemente as respostas.

1. Apresente uma demonstração em DNP da fórmula $(p_0 \vee (\neg p_1 \wedge p_2)) \to (\neg p_0 \to \neg p_1)$.

2. Seja $\varphi = p_0 \wedge \neg p_0$.

   (a) Diga se φ é um teorema de DNP. Justifique.

   (b) Dê exemplo de $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \notin \Gamma$ e $\Gamma \vdash \varphi$. Justifique.

   (c) Mostre que, para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, se $\Gamma \vdash \varphi$, então Γ é semanticamente inconsistente.

3. Considere de novo o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ e a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ definidas na Questão 6 do Grupo I. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_1 \,(\, (\mathsf{P}(x_1) \wedge \mathsf{P}(x_2)) \to \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_2))\,)$. Mostre que

   (a) φ é válida em E.

   (b) φ não é universalmente válida.

4. Dê exemplo de uma forma normal prenexa que seja logicamente equivalente à L_{Arit}-fórmula $(\neg\exists x_1\, x_0 = x_1) \wedge \exists x_0\, x_0 < 0$. Justifique.

5. Sejam L um tipo de linguagem, φ, ψ, σ L-fórmulas e x uma variável tal que $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$. Mostre que: $(\forall x\, \varphi) \wedge \psi, \exists x\, \sigma \models \exists x(\,\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$.

Cotações	II (8 valores)	II (12 valores)
	1+1+1+1+1+1+1+1	2+3,75+3,25+1,5+1,5