

---

**Probabilidades e Aplicações**


---

**Leis de Probabilidade Discretas Univariadas Mais Conhecidas**


---

**I) Binomial com parâmetros  $n$  e  $p$ :**  $X \sim \text{Bin}(n, p) \parallel E[X] = np; \text{Var}[X] = np(1-p)$ 
 $C_X = \{0, 1, \dots, n\}$ 

Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{se c.c.} \end{cases}$$

 Observações: 1)  $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$  2) Quando  $n = 1$ , a lei é designada de *Bernoulli*( $p$ )

**II) Hipergeométrica com parâmetros  $N$ ,  $M$  e  $n$ :**  $X \sim \text{HG}(N, M, n) \parallel$ 
 $C_X = \{\max(0, n - (N - M)), \dots, \min(n, M)\}$ 

Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{se } k \in C_X \\ 0 & \text{se c.c.} \end{cases}$$

**III) Poisson com parâmetro  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ :**  $X \sim \text{Poisson}(\lambda) \parallel E[X] = \text{Var}[X] = \lambda$ 
 $C_X = \mathbb{N}_0$ 

Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{se } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{se c.c.} \end{cases}$$

**IV) Geométrica com parâmetro  $p$ :**  $X \sim \text{Geom}(p) \parallel E[X] = 1/p; \text{Var}[X] = (1-p)/p^2$ 
 $C_X = \mathbb{N}$ 

Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{se } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se c.c.} \end{cases}$$

---

**Funções do R - Leis Discretas Univariadas**


---

$X$	$\text{Bin}(n, p)$	$\text{HG}(N, M, n)$	$\text{Poisson}(\lambda)$	$\text{Geom}(p)$
$P(X = k)$	<code>dbinom(k, n, p)</code>	<code>dhyper(k, M, N-M, n)</code>	<code>dpois(k, λ)</code>	<code>dgeom(k-1, p)</code>
$P(X \leq k)$	<code>pbinom(k, n, p)</code>	<code>phyper(k, M, N-M, n)</code>	<code>ppois(k, λ)</code>	<code>pgeom(k-1, p)</code>
quantil de ordem $\beta$	<code>qbinom(β, n, p)</code>	<code>qhyper(β, M, N-M, n)</code>	<code>qpois(β, λ)</code>	<code>qgeom(β, p) + 1</code>

---

**Leis de Probabilidade Absolutamente Contínuas Univariadas Mais Conhecidas**


---

**I) Uniforme no intervalo  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ :**  $X \sim U([a, b]) \parallel E[X] = \frac{a+b}{2}; \text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$ 

Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{se c.c.} \end{cases}$$

Função de distribuição:

$$F(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < a \\ \frac{c-a}{b-a} & \text{se } a \leq c \leq b \\ 1 & \text{se } c > b. \end{cases}$$

**II) Exponencial de parâmetro  $\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ :**  $X \sim \text{Exp}(\lambda) \parallel E[X] = \frac{1}{\lambda}; \text{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Função de distribuição:

$$F(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & \text{se } c \geq 0 \end{cases}$$

**III) Normal de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ ,  $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$ :**  $X \sim N(\mu, \sigma^2) \parallel E[X] = \mu; \text{Var}[X] = \sigma^2$

Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Função de distribuição:

$$F(c) = \int_{-\infty}^c \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx$$

---

### Funções do R - Leis Absolutamente Contínuas Univariadas

---

$X \sim$	$U([a, b])$	$\text{Exp}(\lambda)$	$N(\mu, \sigma^2)$
$f(x)$	<code>dunif(x, a, b)</code>	<code>dexp(x, λ)</code>	<code>dnorm(x, μ, σ)</code>
$F(c) = P(X \leq c)$	<code>punif(c, a, b)</code>	<code>pexp(c, λ)</code>	<code>pnorm(c, μ, σ)</code>
quantil de ordem $\beta$	<code>qunif(β, a, b)</code>	<code>qexp(β, λ)</code>	<code>qnorm(β, μ, σ)</code>

---

### Leis de Probabilidade Multivariadas Mais Conhecidas

---

**A) Multinomial com parâmetros  $n$  e  $p_1, p_2, \dots, p_{r-1}$ :**  $(X_1, X_2, \dots, X_{r-1}) \sim M(n; p_1, p_2, \dots, p_{r-1})$

Função de probabilidade conjunta: (caso discreto)

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_{r-1} = n_{r-1}) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_{r-1}! n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_{r-1}^{n_{r-1}} p_r^{n_r}, \quad (1)$$

com  $p_i \in ]0, 1[$  e  $n_i \in \mathbb{N}_0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , e tais que  $n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} \leq n$ ,  $n_r = n - (n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1})$  e  $p_r = 1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1})$ .

Função do R: Para obter (1)

- definir vetores **a** e **p** (ambos de dimensão  $r$ ): **a** = `c(n1, n2, ..., nr-1, nr)` e **p** = `c(p1, p2, ..., pr-1, pr)`;
- executar: `dmultinom(a, n, p)`.

**B) Normal Multivariada com parâmetros **u** e  $\Sigma$ :**  $(X_1, X_2, \dots, X_p) \sim N_p(\mathbf{u}, \Sigma)$

Função densidade de probabilidade conjunta: (caso absolutamente contínuo)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{u})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{u}) \right\}, \quad \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]^\top \in \mathbb{R}^p,$$

com **u** vetor coluna de  $\mathbb{R}^p$  e  $\Sigma$  matriz real, quadrada de ordem  $p$ , invertível, simétrica e positiva definida.

Observação: **u** é o vetor valor médio de  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  (i.e.  $\mathbf{u} = [E[X_1] \ E[X_2] \ \dots \ E[X_p]]^\top$ ) e  $\Sigma = [\sigma_{i,j}]_{i,j=1}^p$  é a respetiva matriz das covariâncias (i.e.,  $\sigma_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j)$ ).

---

Extra: No R, para obter:  $\sqrt{x}$  executar `sqrt(x)` ||  $e^x$  executar `exp(x)`