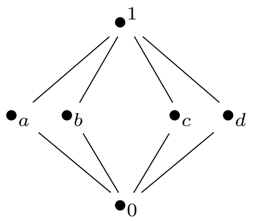
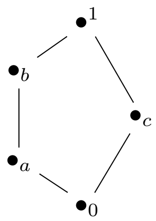
Lic. em Ciências da Computação e Lic. em Matemática 2023/2024
Teste de Álgebra Universal e Categorias
3 Abril 2024

Nome e No.:____

Este teste é constituído por 3 grupos. O grupo I é para responder neste enunciado. Os grupos II e III devem ser respondidos na folha de teste providenciada. Duração: 1h45m minutos.

Em todo este teste, $\mathcal{N}$ denota a álgebra $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ de tipo 2,0; M_4 denota o conjunto $\{0, a, b, c, d, 1\}$, N_5 denota o conjunto $\{0, a, b, c, 1\}$; e $\mathcal{M}_4 = (M_4, \leq)$ e $\mathcal{N}_5 = (N_5, \leq')$ são os reticulados dados respectivamente pelos dois diagramas seguintes.





I

1. Diga se cada uma das seguintes 6 afirmação é verdadeira ou falsa. Cada resposta correcta vale 1 valor, cada resposta errada vale -0.25 valores, a ausência de resposta vale 0 valores.

		V	F
a)	Para toda a álgebra $\mathcal{A}$, $\emptyset$ é subuniverso de $\mathcal{A}$.	☐	☐
b)	$Sg^{\mathcal{N}_5}(\{a, c\}) = N_5$.	☐	☐
c)	As cadeias são reticulados distributivos.	☐	☐
d)	$\mathcal{M}_4$ é um reticulado distributivo.	☐	☐
e)	O conjunto $\{2n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ é um subuniverso de $\mathcal{N}$.	☐	☐
f)	$\mathcal{N}_5$ é um reticulado completo.	☐	☐

II

Para cada uma das seguintes afirmações, escreva <u>duas linhas</u> para justificar a veracidade ou falsidade das mesmas. (2 valores cada).

2. A ordem induzida por $\mathcal{M}_4$ em $\{a, b, c, d\}$ é uma cadeia.
3. Existe um mergulho $\alpha : \mathcal{M}_4 \to \mathcal{N}_5$.
4. Existe $X \subseteq \mathbb{N}_0$ tal que $Sg^{\mathcal{N}}(X) = \mathbb{N}_0$.
5. b é um elemento compacto de $\mathcal{N}_5$.

III

Demonstre as seguintes afirmações (2 valores cada).

6. Seja $\mathcal{Q}$ um c. p. o. $(Q, \leq)$ admitindo máximo $1 = max\, Q$, e seja $\alpha : Q \to Q$ a aplicação constante $\alpha(x) = 1$. A aplicação α é um operador de fecho em $\mathcal{Q}$.
7. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ e $\mathcal{R}' = (R; \wedge', \vee')$ reticulados, S um sub-universo de $\mathcal{R}$ e $h : R \to R'$ um homomorfismo. Mostre que $h(S) = \{h(x) | x \in S\}$ é um sub-universo de $\mathcal{R}'$.
8. Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Mostre que $\mathcal{R}$ é modular sse, para todo $x, y, z \in R$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z)$.