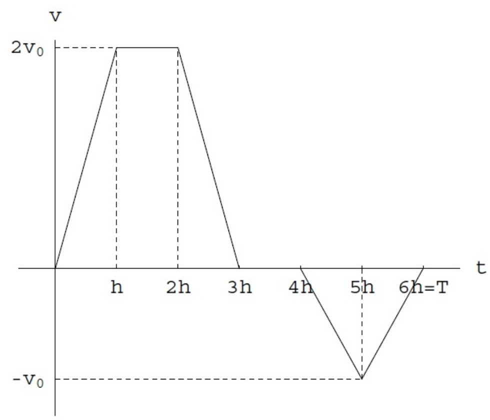
Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Integrais

1. Um objeto move-se ao longo de um eixo de coordenadas x. O seu movimento é descrito por uma função $x = x(t)$ no intervalo de tempo $[0, T]$. Sabendo que a posição no instante inicial é $x(0) = 0$ e que a lei das velocidades deste movimento é descrita pelo seguinte gráfico:



determine:

(a) os intervalos de tempo onde o objeto está respectivamente: parado, em movimento uniforme, em movimento acelerado e em movimento desacelerado;

(b) os deslocamentos efetuados nestes intervalos de tempo;

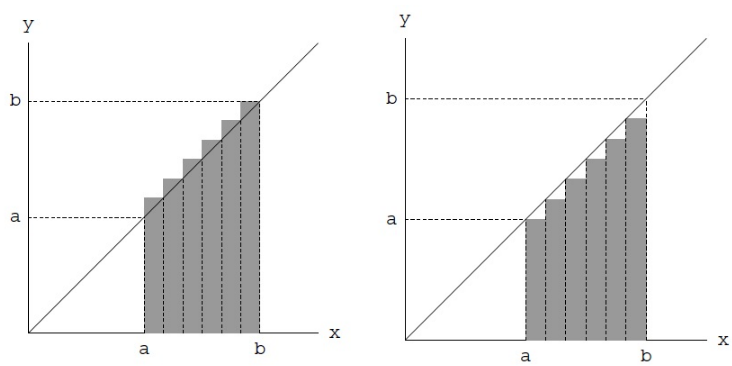
(c) as distâncias percorridas nos mesmos intervalos de tempo;

(d) a posição no instante $t = T$ e o deslocamento total;

(e) a lei do movimento $x(t)$. Esboce o seu gráfico.

2. Considere a sequência de pontos $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ no intervalo $[a, b]$, onde $x_i = a + i(b-a)/n$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. As somas superior e inferior da função $f(x) = x$ neste intervalo são:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{b-a}{n}\right) \text{ e } s_n = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} \left(\frac{b-a}{n}\right).$$



Mostre que:

(a) $S_n = (b-a)\left(a + (b-a)\dfrac{n+1}{2n}\right)$;

(b) $s_n = (b-a)\left(a + (b-a)\dfrac{n-1}{2n}\right)$;

(c) ambas estas sucessões convergem para $(b^2-a^2)/2$;

(d) conclua que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

3. Calcule os seguintes integrais:

(1) $\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_2^3 (3x^2-4x+2)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 e^{\pi x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 |(x-1)(3x-2)|\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{-3}^5 |x-1|\,dx$

(7) $\displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)\,dx$

(9) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

(10) $\displaystyle\int_{-5}^0 2x\sqrt{4-x}\,dx$

(11) $\displaystyle\int_0^2 x^3\,e^{x^2}\,dx$

(12) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x\,\cos x\,dx$

(13) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\,dx$

(14) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 u \operatorname{sen} u\,du$

(15) $\displaystyle\int_{-4}^0 t\sqrt{1+t^2}\,dt$

(16) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$

(17) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x\,dx$

(18) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2x)\,\cos x\,dx$

(19) $\displaystyle\int_1^{e^3} \log t\,dt$

(20) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^x\left(e^x + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$

(21) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{sen} x - \cos x|\,dx$

(22) $\displaystyle\int_{-3}^2 \sqrt{|x|}\,dx$

(23) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ com $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

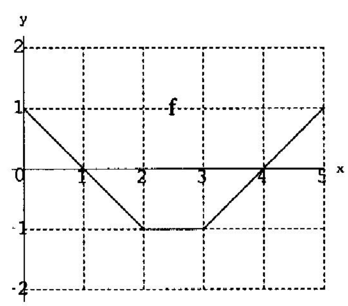
(24) $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ com $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$

4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x \operatorname{sen}(2x) + \frac{\cos(2x)}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcule $f(\frac{\pi}{4})$ e $f'(\frac{\pi}{4})$.

5. Considere $F : [0, \sqrt{5}] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$, onde a função $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada pelo seguinte gráfico



Determine $F(\sqrt{3})$ e $F'(\sqrt{3})$.

6. Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida por:

(a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $F(x) = \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$

7. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(0) = 2$ e $f'(x) > 4$, para todo $x \neq 0$, e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt - (2x + 2x^2).$$

(a) Calcule $g'(x)$ e $g''(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) Mostre que $g(0) = g'(0) = 0$ e que $g''(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

(c) Estude a monotonia de g e conclua que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt > 2x + 2x^2$, $\forall x \neq 0$.

8. Considere a função real de variável real definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} e^{t^2}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule os zeros de F.
   (b) Estude a paridade da função F.
   (c) Determine os intervalos de monotonia da função.

9. Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

   (a) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável;
   (b) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não integrável;
   (c) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável mas não primitivável;
   (d) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ primitivável mas não derivável;
   (e) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrável mas não primitivável;
   (f) uma função $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ não integrável tal que $|f|$ seja integrável.

10. Em cada alínea calcule a área da região limitada pelas curvas de equações:

    (a) $x = 1, \quad x = 4, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = 0$
    (b) $x = 0, \quad x = 2, \quad y = x, \quad y = x^2$
    (c) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 3x, \quad y = -x^2 + 4$
    (d) $x = 0, \quad x = 2, \quad x^2 + (y-2)^2 = 4, \quad x^2 + (y+2)^2 = 4$
    (e) $x = 0, \quad x = \pi/2, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x$
    (f) $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4$
    (g) $x = 0, \quad x = 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = -x + 2$
    (h) $x = -1, \quad y = |x|, \quad y = 2x, \quad x = 1$
    (i) $y = \log x, \quad y = 0, \quad x = e^2$
    (j) $x = 0, \quad x = \pi, \quad y = 2\operatorname{sen} x, \quad y = -\operatorname{sen} x$
    (k) $y^2 = 2x - 2, \quad y - x + 5 = 0$

(l) $y=-x^3, \quad y=-(4x^2-4x)$

(m) $y=-x^2+\dfrac{7}{2}, \quad y=x^2-1$

(n) $y=0, \quad x=-\log 2, \quad x=\log 2, \quad y=\operatorname{sh} x$

11. Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região

(a) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2 \ \wedge\ -x\le y\le x^2\right\}$

(b) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2\le 4 \ \wedge\ 0\le y\le x\right\}$

(c) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\le 1\right\}$

(d) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-1\le y\le x+1\right\}$

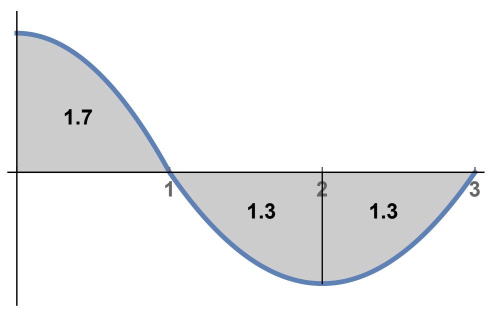
(e) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 2 \ \wedge\ 0\le y\le e^x \ \wedge\ 0\le y\le e^{-x}\right\}$

(f) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2 \ \wedge\ 0\le y\le x^2 \ \wedge\ 0\le y\le 2-x\right\}$

(g) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge 0 \ \wedge\ y\ge x^2-2x \ \wedge\ y\le 4\right\}$

(h) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 3 \ \wedge\ x^2-4x+3\le y\le -x^2+5x-4\right\}$

12. Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f:[0,3]\to\mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abcissas, que correspondem às abcissas dos intervalos $[0,1]$, $[1,2]$ e $[2,3]$, respetivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.



Nestas condições, considere a função $F:[-3,3]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\displaystyle\int_1^{\frac{3+x}{2}} f(t)\,dt$.

(a) Preencha a tabela, determinando os correspondentes valores de $F(x)$:

x	-3	-1	1	3
$F(x)$				

(b) Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.

(c) Represente F graficamente.