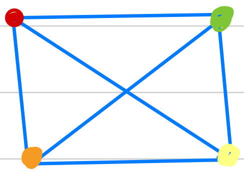
Número Cromático

Definição: Sejam $G = (V, E)$ um grafo e C um conjunto a que chamamos cores. Uma coloração de G é uma aplicação $f : V \longrightarrow C$ tal que, dados $v, w \in V$, $f(v) \neq f(w)$ se $\{v, w\} \in E$. Uma k-coloração é uma coloração f tal que $\# f(V) = k$.

Definição: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Chama-se número cromático de G, e representa-se por $\chi(G)$, ao menor $k \in \mathbb{N}$ tal que existe uma k-coloração de G.

Exemplo: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $\chi(K_{m,n}) = 2$.

Exemplo: K_4



$\chi(K_4) = 4$

$\chi(K_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Em geral $\chi(K_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, uma vez que todos os vértices são adjacentes.

Teorema (1890) Seja G um grafo conexo planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Teorema ? (1976) Seja G um grafo conexo planar, então $\chi(G) \leq 4$.

$\rightarrow$ Demonstração com recurso a computador

Algoritmo de Welch-Powell

1º passo: Listar todos os vértices em ordem decrescente de grau.

2º passo: Atribuimos uma cor C_1 ao 1º vértice da lista, atribua a cor C_1 a cada vértice não adjacente aos vértices aos quais foi anteriormente atribuída a cor C_1.

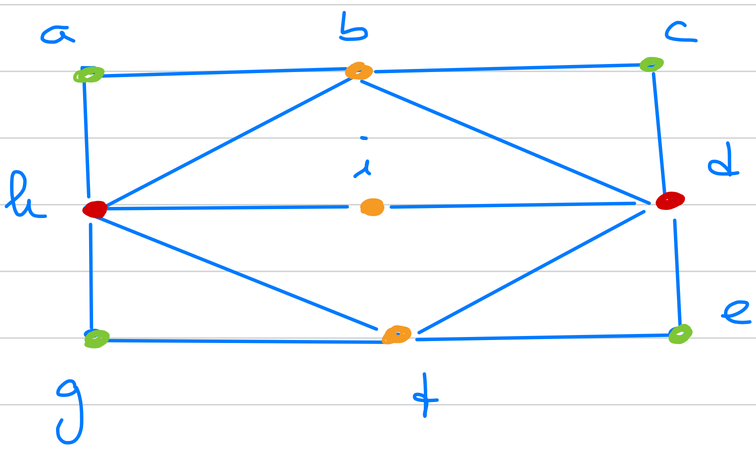
3º passo: Repetimos o passo 1 com os vértices ainda não coloridos

4° passo: Repetimos o 2° passo com uma cor diferente C_2

Repetimos o processo até esgotarmos os vértices.

Exemplo:

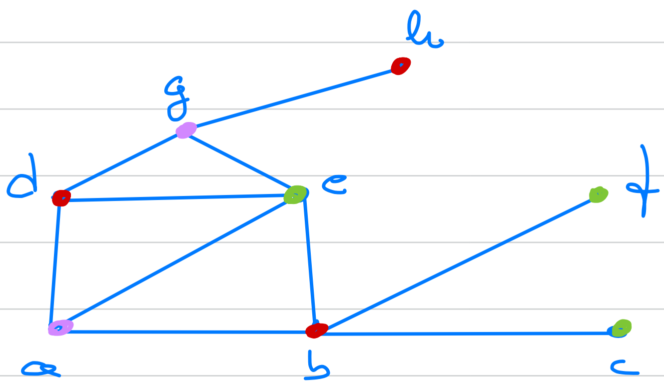
G:



grau 5	d, h
grau 4	b, f
grau 2	a, c, e, g

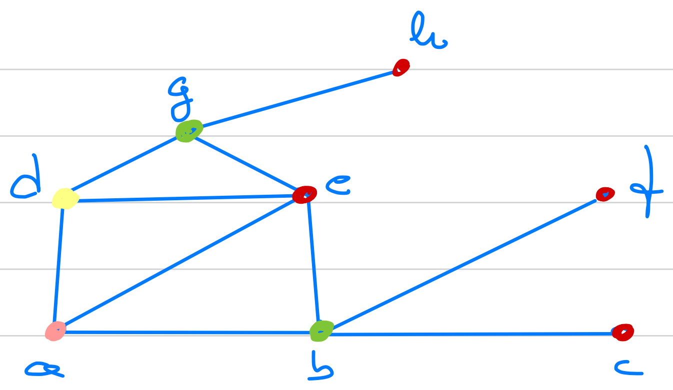
Temos então que $\chi(G) = 3$.

Exemplo



grau 4	b, e
grau 3	a, d, g
grau 1	c, f, h

Temos uma coloração com 3 cores.

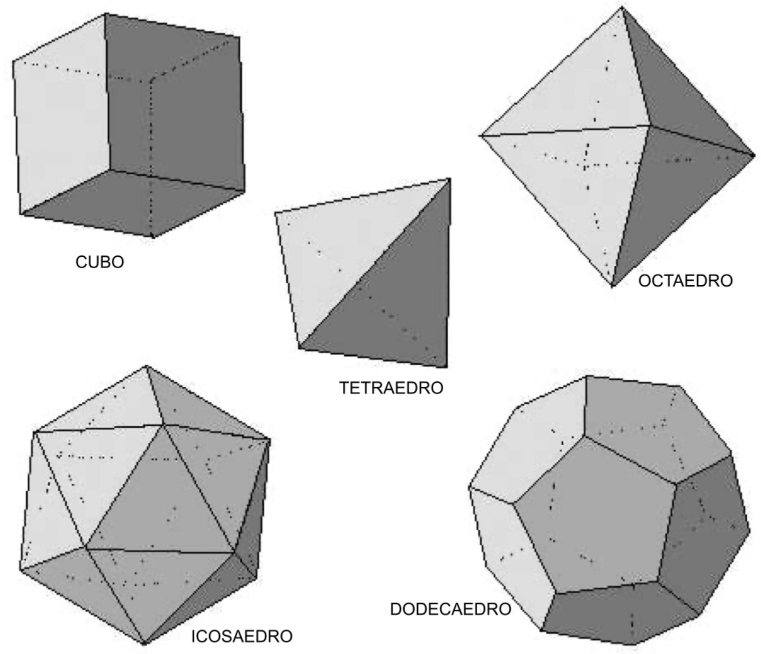


Esta coloração tem 4 cores

Conclusão: é necessário ter algum cuidado com o algoritmo de Welch-Powell.

Grafos platónicos

Sólidos platónicos:



Definição: Um grafo platônico é um grafo conexo, planar, no geral todos os vértices têm o mesmo grau e o número de arestas adjacente a cada face é constante.

Exemplo O grafo trivial é um grafo platônico.

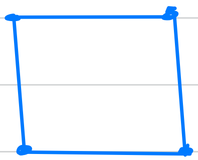
Exemplo: K_2

$\text{grau}(a) = \text{grau}(b) = 1$

$f = 1 \qquad a = 1$

Exemplo: O grafo ciclo C_n, $n \geq 3$, é um grafo platonico

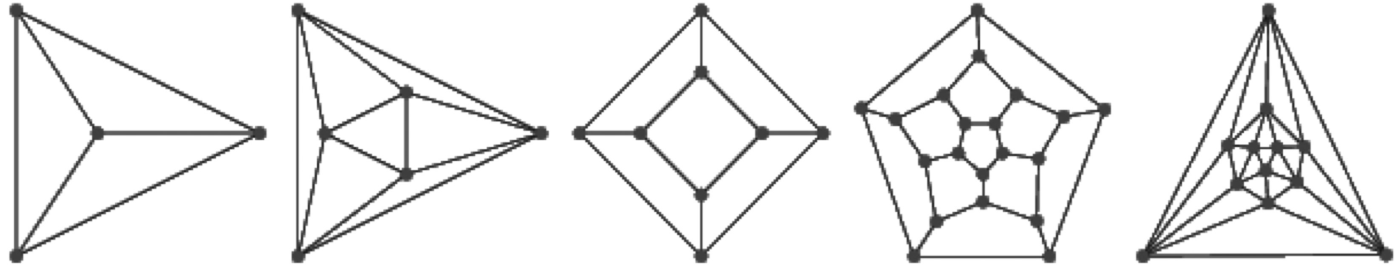
C_4



$\text{grau}(v_i) = 2$

$f = 2$ todos as arestas incidem em ambas as faces

Teorema: Seja $G = (V, E)$ um grafo platônico onde $\text{grau}(v) \geq 3$, para qualquer $v \in V$. Então G é um dos seguintes grafos:



tetraedro octaedro cubo Dodecaedro icosaedro

Demonstração: Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo planar com v vertices, a arestas e f faces. Então, pela fórmula de Euler: $v - a + f = 2$.

Como G é um grafo platônico então, se m e n, são tais que grau$(v) = m$ e o número de arestas incidentes a cada face é n

então $mv = 2a$ e $nf = 2a$

Substituindo na fórmula de Euler temos: $\frac{2a}{m} - a + \frac{2a}{n} = 2$

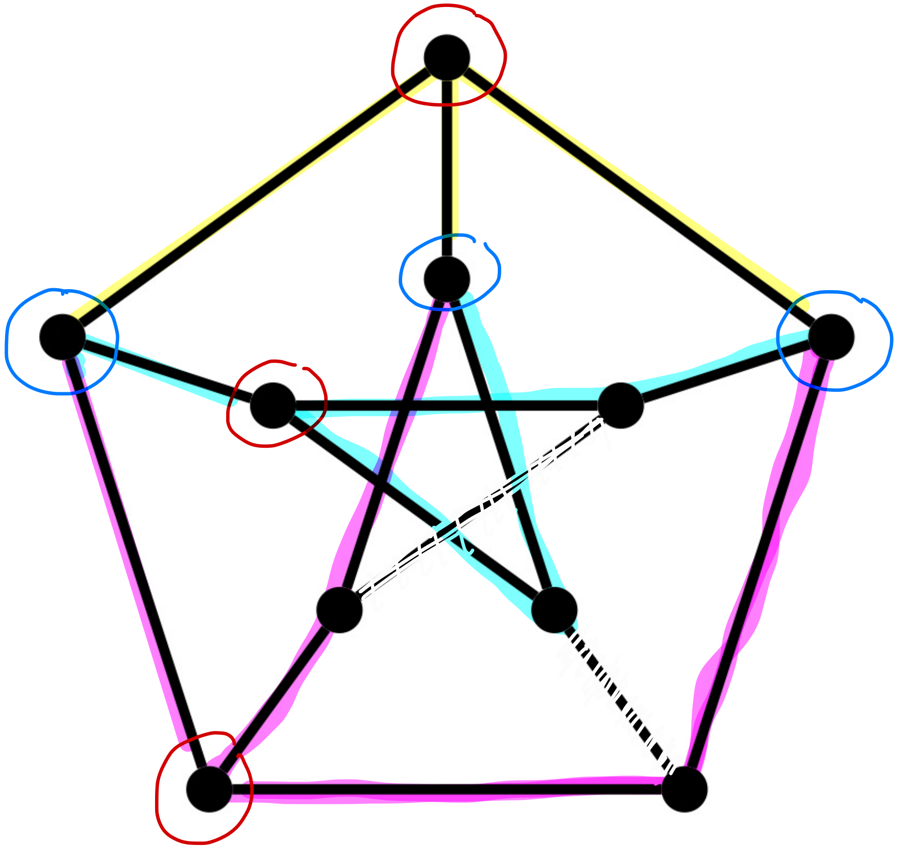
Logo: $a\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)=1.$

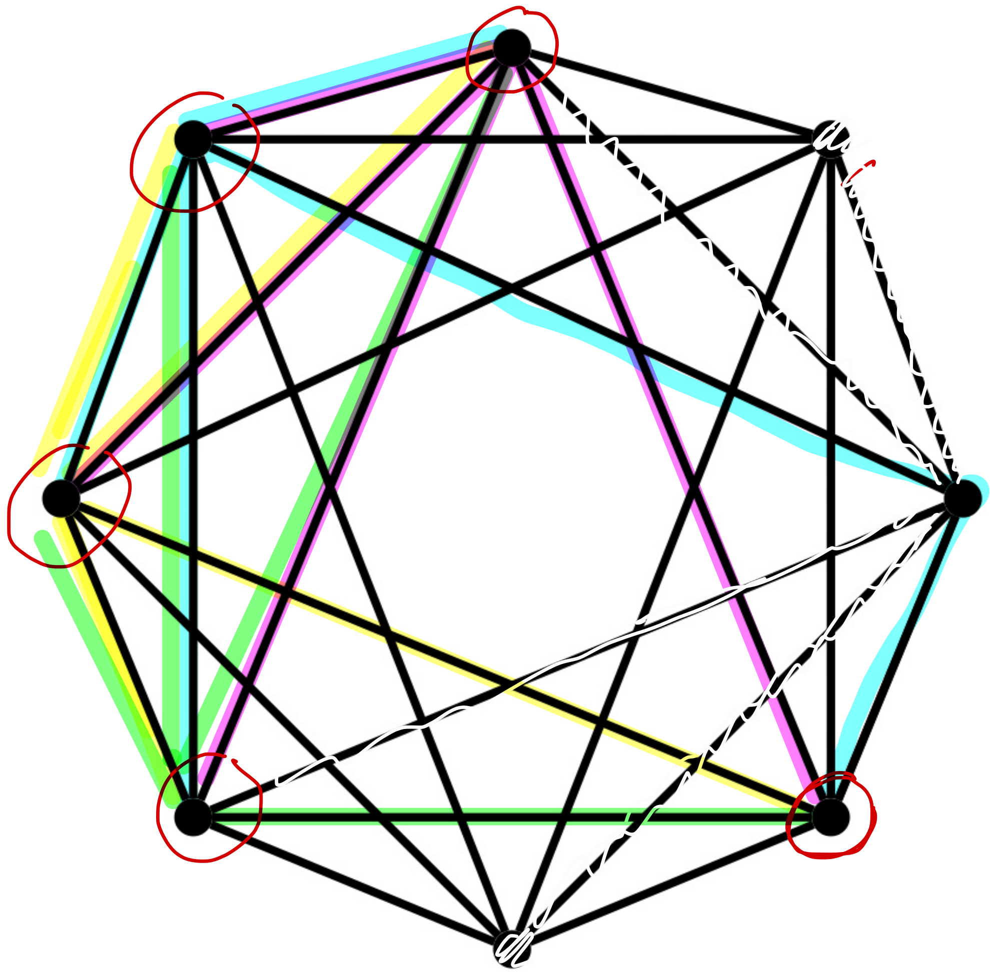
ou seja $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a}$

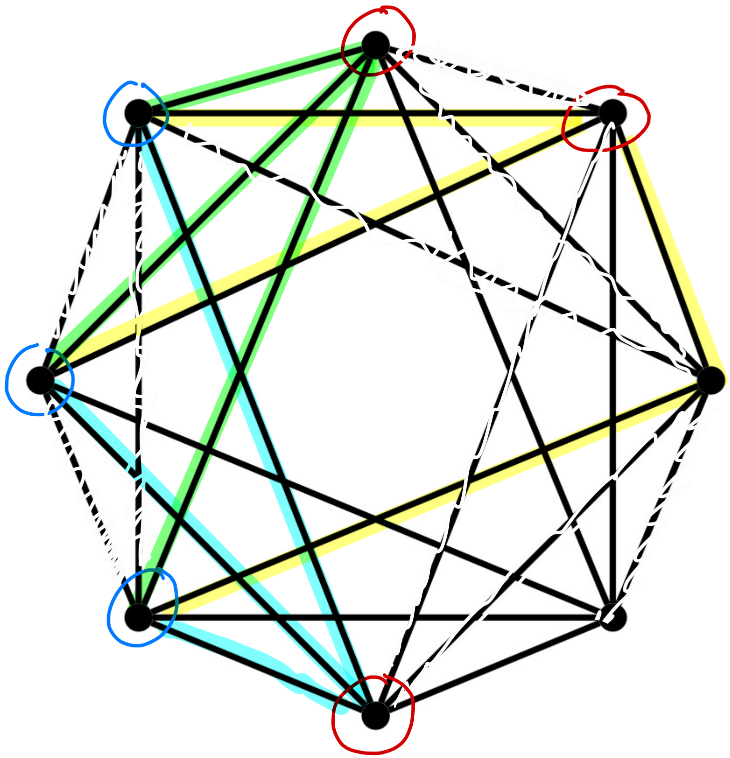
em particular $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$

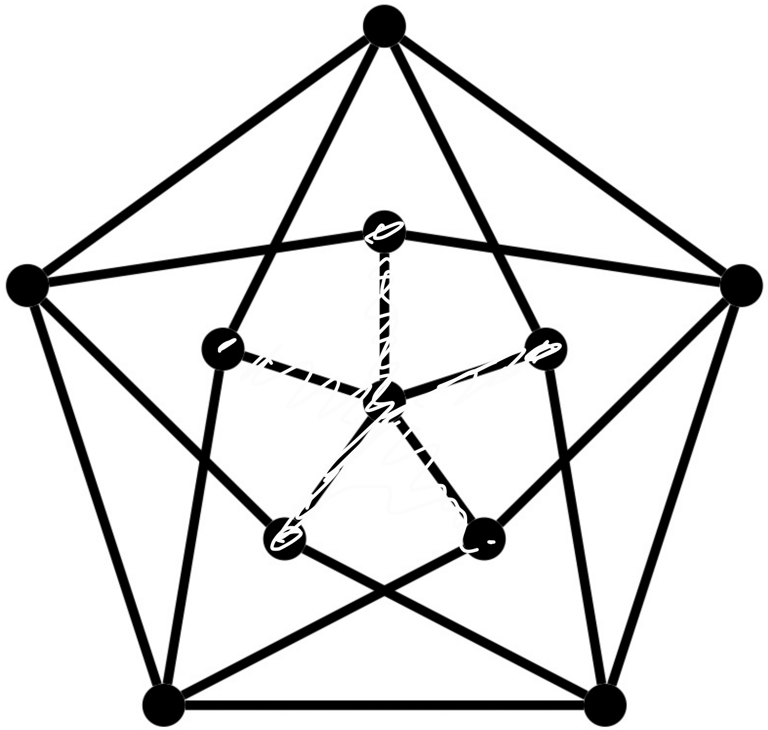
- $m=3$ e $n=3$: tetraedro
- $m=3$ e $n=4$: cubo
- $m=3$ e $n=5$: dodecaedro
- $m=3$ e $n\geq 6$ $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$ ✗
- $m=4$ e $n=3$: octaedro
- $m=4$ e $n\geq 4$ ✗
- $m=5$ e $n=3$: icosaedro
- $m=5$ e $n\geq 4$: ✗
- $m\geq 6$ e $n\geq 3$: ✗

□









K_5