

Álgebra Universal e Categorias

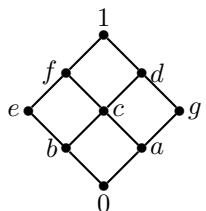
2. Álgebra Universal

- 2.1. Sejam $A = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$, $B = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ e (A, \leq) o c.p.o. correspondente ao diagrama de Hasse a seguir representado. Considere as álgebras $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}})$ e $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}})$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$, onde as operações binárias de \mathcal{A} e \mathcal{B} são definidas por

$$x \wedge^{\mathcal{A}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{A}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in A,$$

$$x \wedge^{\mathcal{B}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{B}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in B,$$

as operações unárias são definidas pelas tabelas a seguir indicadas e $0^{\mathcal{A}} = 0^{\mathcal{B}} = 0$ e $1^{\mathcal{A}} = 1^{\mathcal{B}} = 1$.



| |
|--|
| $x \mid 0 \quad a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad 1$ $\delta^{\mathcal{A}}(x) \mid 1 \quad b \quad a \quad c \quad f \quad g \quad d \quad e \quad 0$ |
| $x \mid 0 \quad a \quad b \quad c \quad d \quad f \quad 1$ $\delta^{\mathcal{B}}(x) \mid 1 \quad b \quad a \quad c \quad f \quad b \quad 0$ |

- (a) Dê exemplo de um reduto de \mathcal{A} que seja:

- i. um semigrupo.

A álgebra \mathcal{A} é do tipo (O_1, τ_1) , onde $O_1 = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ e $\tau_1 : O_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$ é a aplicação definida por $\tau_1(\wedge) = \tau_1(\vee) = 2$, $\tau_1(\delta) = 1$ e $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$. Uma álgebra $\mathcal{C} = (C; F)$ de tipo (O_2, τ_2) diz-se um reduto de \mathcal{A} se $C = A$, $O_2 \subseteq O_1$ e, para qualquer $f \in O_2$, $\tau_1(f) = \tau_2(f)$ e $f^{\mathcal{C}} = f^{\mathcal{A}}$.

A álgebra $\mathcal{C} = (C; \{\wedge_C\})$ do tipo $(\{\wedge\}; \tau_2)$, onde $C = A$, $\tau_2 : \{\wedge\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ é a função definida por $\tau_2(\wedge) = 2$ e \wedge_C é a operação binária em C definida por

$$x \wedge_C y = x \wedge_A y, \quad \forall_{x, y \in C},$$

é um reduto de \mathcal{A} , uma vez que respeita as condições indicadas anteriormente. A álgebra \mathcal{C} é um semigrupo, pois a operação \wedge_A é associativa e, portanto, a operação \wedge_C também é associativa.

- ii. um reticulado.

A álgebra \mathcal{A} é do tipo (O_1, τ_1) , onde $O_1 = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ e $\tau_1 : O_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$ é a aplicação definida por $\tau_1(\wedge) = \tau_1(\vee) = 2$, $\tau_1(\delta) = 1$ e $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$. Uma álgebra $\mathcal{C} = (C; F)$ de tipo (O_2, τ_2) diz-se um reduto de \mathcal{A} se $C = A$, $O_2 \subseteq O_1$ e, para qualquer $f \in O_2$, $\tau_1(f) = \tau_2(f)$ e $f^{\mathcal{C}} = f^{\mathcal{A}}$.

A álgebra $\mathcal{C} = (C; \{\wedge_C, \vee_C\})$ de tipo $(\{\wedge, \vee\}; \tau_2)$, onde $C = A$, $\tau_2 : \{\wedge, \vee\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ é a função definida por $\tau_2(\wedge) = \tau_2(\vee) = 2$ e \wedge_C, \vee_C são as operações binárias em C definidas por

$$x \wedge_C y = x \wedge_A y \quad \text{e} \quad x \vee_C y = x \vee_A y, \quad \forall_{x, y \in C},$$

é um reduto de \mathcal{A} , pois respeita as condições indicadas anteriormente. A álgebra \mathcal{C} é um reticulado, pois as operações \wedge_A e \vee_A são associativas, comutativas, idempotentes e satisfazem a lei da absorção e, portanto, as operações \wedge_C e \vee_C satisfazem as mesmas propriedades.

- (b) Para cada um dos conjuntos C a seguir indicados, diga se C é um subuniverso de \mathcal{A} :

- i. $C = \emptyset$.

Um subconjunto S de \mathcal{A} diz-se um subuniverso de \mathcal{A} se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n , $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto \emptyset não é um subuniverso de \mathcal{A} , pois $0^{\mathcal{A}}$ é uma operação nulária de \mathcal{A} e $0^{\mathcal{A}} = 0 \notin \emptyset$.

ii. $C = \{0, f, d, 1\}$.

Um subconjunto S de \mathcal{A} diz-se um subuniverso de \mathcal{A} se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n , $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto $C = \{0, f, d, 1\}$ não é um subuniverso de \mathcal{A} , pois $f, d \in C$ e $f \wedge_{\mathcal{A}} d = c \notin C$.

iii. $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$.

Um subconjunto S de \mathcal{A} diz-se um subuniverso de \mathcal{A} se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n , $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ é um subuniverso de \mathcal{A} , pois:

- $0^{\mathcal{A}} = 0, 1^{\mathcal{A}} = 1 \in C$;
- para quaisquer $x, y \in C$, $x \wedge_{\mathcal{A}} y, x \vee_{\mathcal{A}} y \in C$;
- para qualquer $x \in C$, $\delta^{\mathcal{A}}(x) \in C$.

(c) Diga se \mathcal{B} é uma subálgebra de \mathcal{A} .

A álgebra \mathcal{A} é do tipo (O, τ) , onde $O = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ e $\tau : O \rightarrow \mathbb{N}_0$ é a aplicação definida por $\tau(\wedge) = \tau(\vee) = 2$, $\tau(\delta) = 1$ e $\tau(0) = \tau(1) = 0$. Uma álgebra $\mathcal{C} = (C; F)$ de tipo (O, τ) diz-se uma subálgebra de \mathcal{A} se C é um subuniverso de \mathcal{A} e, para qualquer $h \in O$ de aridade n , $n \in \{0, 1, 2\}$,

$$h^{\mathcal{C}}(a_1, \dots, a_n) = h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), \forall (a_1, \dots, a_n) \in C^n.$$

A álgebra \mathcal{B} não é uma subálgebra \mathcal{A} , pois, embora \mathcal{B} seja do mesmo tipo da álgebra \mathcal{A} e B seja um subuniverso de \mathcal{A} , tem-se $\delta^{\mathcal{B}}(f) \neq \delta^{\mathcal{A}}(f)$.

2.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{A}_n = (A_n; (f^{\mathcal{A}_n}, 0^{\mathcal{A}_n}))$ a álgebra de tipo $(1, 0)$, onde $A_n = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$, $0^{\mathcal{A}_n} = 0$ e $f^{\mathcal{A}_n} : A_n \rightarrow A_n$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \in \{0, 1, 2, \dots, 2n - 2\} \\ 1 & \text{se } x = 2n - 1 \\ 0 & \text{se } x = 2n \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine todos os subuniversos de \mathcal{A}_n .

Seja S um subuniverso de \mathcal{A}_n . Então $S \subseteq A_n$ e S é fechado para todas as operações de \mathcal{A}_n . Como S é fechado para a operação $0^{\mathcal{A}_n}$, segue que $0 \in S$. O conjunto S também é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$, donde resulta que

$$f^{\mathcal{A}_n}(0) = 2 \in S, f^{\mathcal{A}_n}(2) = 4 \in S, \dots, f^{\mathcal{A}_n}(2n - 2) = 2n \in S.$$

Se o conjunto S não tem inteiros ímpares, temos $S = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$. Caso S tenha um número ímpar, então, atendendo a que S é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$, segue que $\{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\} \subseteq S$, pelo que $S = A$.

Assim, os únicos subuniversos de \mathcal{A}_n são $\{0, 2, 4, \dots, 2n\}$ e A_n .

2.3. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $a \in R$. Mostre que $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ é um subuniverso de \mathcal{R} .

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e, para cada $a \in R$, seja $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$.

O conjunto $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ é um subuniverso de \mathcal{R} se $I_a \subseteq R$ e I_a é fechado para as duas operações de \mathcal{R} .

Por definição de I_a , tem-se $I_a \subseteq R$.

Além disso, para quaisquer $x, y \in I_a$, tem-se $x, y \in R$, $x \vee a = a$ e $y \vee a = a$, donde segue que $x \vee y \in I_a$, pois:

- $x \vee y \in R$ ($x, y \in R$ e R é fechado para a operação \vee);
- $(x \vee y) \vee a = x \vee (y \vee a) = x \vee a = a$.

Considerando que $x = x \wedge a$ e $y = y \wedge a$, também temos $x \wedge y \in I_a$, uma vez que:

- $x \wedge y \in R$ ($x, y \in R$ e R é fechado para a operação \wedge);
- $(x \wedge y) \vee a = ((x \wedge a) \wedge (y \wedge a)) \vee a = ((x \wedge y) \wedge a) \vee a = a$.

O conjunto I_a é fechado para as operações \wedge e \vee e, portanto, S é um subuniverso de \mathcal{R} .

2.4. Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ diz-se *mono-unária* se F é formado por uma única operação e essa operação é unária. Uma subálgebra $\mathcal{B} = (B; G)$ de \mathcal{A} diz-se uma *subálgebra própria* se $B \subsetneq A$.

- (a) Para cada inteiro $n > 0$, dê exemplo de uma álgebra mono-unária $\mathcal{A}_n = (\{0, 1, \dots, n-1\}; f)$ que não admite subálgebras próprias.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{A}_n = (A_n; f^{\mathcal{A}_n})$ a álgebra de tipo (1), onde $f^{\mathcal{A}_n} : A_n \rightarrow A_n$ é a operação unária definida por

$$f^{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in \{0, 1, \dots, n-2\} \\ 0 & \text{se } x = n-1 \end{cases}$$

Seja $\mathcal{S} = (S; f^{\mathcal{S}})$ uma subálgebra de \mathcal{A}_n . Então \mathcal{S} é uma álgebra do mesmo tipo de \mathcal{A}_n , $\emptyset \neq S \subseteq A_n$, S é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$ e, para todo $x \in S$, $f^{\mathcal{S}}(x) = f^{\mathcal{A}_n}(x)$.

Como $S \neq \emptyset$, consideremos $s \in S$. Uma vez que S é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}_n}$, segue que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $(f^{\mathcal{A}_n})^k(s) \in S$ e, portanto, $\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq S$. Logo $S = A_n$ e, portanto, \mathcal{A}_n não admite subálgebras próprias.

- (b) Mostre que qualquer álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

Seja $\mathcal{A} = (A; f)$ uma álgebra mono-unária infinita. No sentido de se fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que \mathcal{A} não admite subálgebras próprias. Como $A \neq \emptyset$, consideremos $a \in A$ e a subálgebra de \mathcal{A} gerada por $\{f(a)\}$. Uma vez que \mathcal{A} não admite subálgebras próprias, então $A = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(\{f(a)\})$. Logo, para todo $x \in A$, tem-se $x = f^k(a)$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Em particular, tem-se $a = f^r(a)$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Logo $A = \{a, f(a), \dots, f^{r-1}(a)\}$ e, portanto, A é finito (contradição). Por conseguinte, toda a álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

2.5. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A$. Mostre que:

- i. $X \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$.

Imediato, uma vez que $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ é o menor subuniverso de \mathcal{A} que contém X .

- ii. $X \subseteq Y \Rightarrow \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$.

Admitamos que $X \subseteq Y$. Considerando que $Y \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$, segue que $X \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$. Então, atendendo a que $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ é o menor subuniverso de \mathcal{A} que contém X , conclui-se que $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$.

- iii. $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)) = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$.

Por (a), temos $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X))$. Por outro lado, $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ é um subuniverso de \mathcal{A} e $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$. Então, considerando que $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X))$ é o menor subuniverso de \mathcal{A} que contém $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$, concluímos que $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$. Portanto $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)) = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$.

- iv. $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$.

Para cada conjunto finito Z tal que $Z \subseteq X$, tem-se $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$. Por conseguinte,

$$\bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\} \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X).$$

A inclusão contária também é válida. De facto, para cada $x \in A$, se $x \in \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$, tem-se $x \in \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z)$, para algum conjunto finito $Z \subseteq X$. Logo,

$$x \in \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}.$$

Portanto,

$$\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}.$$

Desta forma, provámos que $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$.

2.6. Considere a álgebra \mathcal{A} definida no exercício 2.1.

- (a) Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq A$ tais que:

- i. $X \neq Y$ e $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$.

Sejam $X = \emptyset$ e $Y = \{0\}$. Tem-se $X \neq Y$ e $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\emptyset) = \{0, 1\} = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(\{0\})$.

ii. $|X| = 2$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) = A$.

Dado $X \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$, onde

- $X_0 = X$;
- $X_{i+1} = X_i \cup \{h^{\mathcal{A}}(x) \mid h^{\mathcal{A}} \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \{0, 1, 2\}\}$.

Sendo $X = \{f, g\}$, tem-se

- $X_0 = \{f, g\}$;
- $X_1 = \{f, g\} \cup \{0, f \wedge^{\mathcal{A}} g = a, f \vee^{\mathcal{A}} g = 1, \delta^{\mathcal{A}}(f) = d, \delta^{\mathcal{A}}(g) = e\}$;
- $X_2 = \{0, a, d, e, f, g, 1\} \cup \{d \wedge^{\mathcal{A}} f = c, d \wedge^{\mathcal{A}} e = b\}$;
- $X_3 = X_2 = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$,

e, portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(X) = A$.

(b) Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{e\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{f, g\})$.

• $Sg^{\mathcal{A}}(\{e\})$

Dado $X \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$, onde

- $X_0 = X$;
- $X_{i+1} = X_i \cup \{h^{\mathcal{A}}(x) \mid h^{\mathcal{A}} \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \{0, 1, 2\}\}$.

Sendo $X = \{e\}$, tem-se

- $X_0 = \{e\}$;
- $X_1 = \{e\} \cup \{0, \delta^{\mathcal{A}}(e) = g, 1\}$;
- $X_2 = X_1 = \{0, e, g, 1\}$.

e, portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(\{e\}) = \{0, e, g, 1\}$.

Logo

$$Sg^{\mathcal{A}}(\{e\}) = (\{0, e, g, 1\}, (f^{Sg^{\mathcal{A}}(\{e\})})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}}),$$

onde, para toda o símbolo de operação n -ário $f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$, tem-se

$$f^{Sg^{\mathcal{A}}(\{e\})}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in Sg^{\mathcal{A}}(\{e\})^n.$$

• $Sg^{\mathcal{A}}(\{f, g\})$

Da alínea anterior, sabe-se que $Sg^{\mathcal{A}}(\{f, g\}) = A$. Logo $Sg^{\mathcal{A}}(\{f, g\}) = \mathcal{A}$.

2.7. Seja $\mathcal{A} = (\{e, a, b, c, d\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(2, 0)$, onde $A = \{e, a, b, c, d\}$, $c^{\mathcal{A}} = d$ e $*^{\mathcal{A}}$ é a operação definida por

| $f^{\mathcal{A}}$ | e | a | b | c | d |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| e | e | a | b | c | d |
| a | a | d | e | c | b |
| b | b | e | d | e | e |
| c | c | e | a | e | c |
| d | d | b | e | c | e |

(a) Determine todos os subuniversos de \mathcal{A} .

Seja S um subuniverso de \mathcal{A} . Então S é um subconjunto de A fechado para as operações de \mathcal{A} . Em particular, S é fechado para a operação nulária, pelo que $c^{\mathcal{A}} = d \in S$. Considerando que S é fechado para a operação binária, segue que $d *^{\mathcal{A}} d = e \in S$. Assim, se S é um subuniverso de \mathcal{A} , tem-se $\{d, e\} \subseteq S$. O conjunto $\{d, e\}$ é fechado para todas as operações de \mathcal{A} e, portanto, é um subuniverso de \mathcal{A} . São também subuniversos de \mathcal{A} os conjuntos: $\{d, e, b\}$, $\{d, e, c\}$, $\{a, d, e, b\}$, $\{a, b, c, d, e\}$.

(b) Sejam $X = \{b\}$ e $Y = \{c\}$. Diga, justificando, se $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

Dado $Z \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(Z) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} Z_k$, onde

- $Z_0 = Z$;
- $Z_{i+1} = Z_i \cup \{h^{\mathcal{A}}(z) \mid h^{\mathcal{A}} \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } z \in (Z_i)^n, n \in \{0, 2\}\}$.

Sendo $X = \{b\}$, tem-se:

$$X_0 = \{b\}; X_1 = \{b\} \cup \{d\}; X_2 = \{b, d\} \cup \{e\}; X_3 = X_2 = \{b, d, e\}.$$

Logo, $Sg^{\mathcal{A}}(\{b\}) = \{b, d, e\}$.

Sendo $Y = \{c\}$, tem-se:

$$Y_0 = \{c\}; Y_1 = \{c\} \cup \{d, e\}; Y_2 = Y_1 = \{c, d, e\}.$$

Logo, $Sg^{\mathcal{A}}(\{b\}) = \{c, d, e\}$.

Sendo $X \cup Y = \{b, c\}$, tem-se

$$(X \cup Y)_0 = \{b, c\}; (X \cup Y)_1 = \{b, c\} \cup \{a, d, e\}; (X \cup Y)_2 = X_1.$$

Logo, $Sg^{\mathcal{A}}(\{b, c\}) = \{a, b, c, d, e\}$.

$$\text{Portanto, } Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = \{b, c, d, e\} \neq \{a, b, c, d, e\} = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y).$$

2.8. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária. Mostre que:

(a) Se S_1 e S_2 são subuniversos de \mathcal{A} , então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de \mathcal{A} .

Uma vez que \mathcal{A} é uma álgebra unária, todas as operações de \mathcal{A} têm aridade 1. Sejam S_1 e S_2 subuniversos de \mathcal{A} . Então $S_1, S_2 \subseteq A$ e S_1 e S_2 são fechados para todas as operações de \mathcal{A} . Nestas condições, o conjunto $S_1 \cup S_2$ também é um subuniverso de \mathcal{A} , pois $S_1 \cup S_2 \subseteq A$ e, para qualquer operação unária $f^{\mathcal{A}}$ de \mathcal{A} e para qualquer $x \in A$,

$$\begin{aligned} x \in S_1 \cup S_2 &\Rightarrow x \in S_1 \text{ ou } x \in S_2 \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \text{ ou } f^{\mathcal{A}}(x) \in S_2 \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

(b) Para quaisquer $X, Y \subseteq A$, $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

Para quaisquer $X, Y \subseteq A$, tem-se $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$ e $Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$, donde segue que

$$Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \text{ e } Sg^{\mathcal{A}}(Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$$

e, portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

Para a prova da inclusão contrária, começemos por observar que, como $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ e $Sg^{\mathcal{A}}(Y)$ são subuniversos de \mathcal{A} e \mathcal{A} é uma álgebra unária, o conjunto $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$ é um subuniverso de \mathcal{A} . Então, para concluir que $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$, basta provar que $X \cup Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$, pois $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$ é o menor subuniverso de \mathcal{A} que contém $X \cup Y$. Ora, para quaisquer $X, Y \subseteq A$, temos $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$ e $Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$, pelo que

$$X \cup Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y).$$

Por conseguinte, considerando o observado anteriormente, temos $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

$$\text{Assim, } Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y).$$

2.9. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, f)$ a álgebra de tipo (1) onde f é a operação definida por

$$\begin{array}{c|cccc} x & a & b & c & d \\ \hline f(x) & c & b & a & d \end{array}$$

(a) Determine todas as relações de congruência em \mathcal{A} e represente $Cong(\mathcal{A})$ por meio de um diagrama de Hasse.

Para toda a congruência Θ de uma álgebra \mathcal{A} , tem-se $\Theta = \bigvee \{\Theta(x, y) \mid (x, y) \in \Theta\}$. Assim, no sentido de determinarmos todas as congruências de \mathcal{A} , começamos por determinar as congruências principais de \mathcal{A} , obtendo-se:

- $\theta(x, x) = \Delta_A$, para qualquer $x \in A$.
- $\Theta(a, b) = \Theta(b, a) = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$.
- $\Theta(a, c) = \Theta(c, a) = \Delta_A \cup \{(a, c), (c, a)\}$;
- $\Theta(a, d) = \Theta(d, a) = \Delta_A \cup \{(a, d), (d, a), (c, d), (d, c), (a, c), (c, a)\}$;
- $\Theta(b, c) = \Theta(c, b) = \Delta_A \cup \{(c, b), (b, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\} = \Theta(a, b)$;
- $\Theta(b, d) = \Theta(d, b) = \Delta_A \cup \{(b, d), (d, b)\}$;
- $\Theta(c, d) = \Theta(d, c) = \Delta_A \cup \{(c, d), (d, c), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a)\} = \Theta(a, d)$.

Apresentamos a justificação de que $\Theta(a, b) = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$, sendo as restantes justificações semelhantes.

Por definição de $\Theta(a, b)$, $\Theta(a, b)$ é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\{(a, b)\}$. Então $(a, b) \in \Theta(a, b)$, $\Theta(a, b)$ é uma relação de equivalência (é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição (ou seja, para quaisquer $x, y \in A$, $(x, y) \in \Theta(a, b) \Rightarrow (f^A(x), f^A(y)) \in \Theta(a, b)$). Uma vez que $\Theta(a, b)$ é reflexiva, temos $\Delta_A \subseteq \Theta(a, b)$. Como $(a, b) \in \Theta(a, b)$ e $\Theta(a, b)$ é simétrica, também temos $(b, a) \in \Theta(a, b)$. Atendendo a que $(a, b), (b, a) \in \Theta(a, b)$ e $\Theta(a, b)$ satisfaz a propriedade de substituição, $(f^A(a), f^A(b)) = (c, b) \in \Theta(a, b)$ e $(f^A(b), f^A(a)) = (b, c) \in \Theta(a, b)$. Dado que $(c, b), (b, c) \in \Theta(a, b)$, então, novamente pela propriedade de substituição, $(f^A(b), f^A(c)) = (b, a) \in \Theta(a, b)$ e $(f^A(c), f^A(b)) = (a, b) \in \Theta(a, b)$. Considerando que $(a, b), (b, c) \in \Theta(a, b)$ e $(c, b), (b, a) \in \Theta(a, b)$, então, por transitividade, $(a, c), (c, a) \in \Theta(a, b)$. Pela propriedade de substituição segue que $(f^A(a), f^A(c)) = (c, a) \in \Theta(a, b)$ e $(f^A(c), f^A(a)) = (a, c) \in \Theta(a, b)$. A relação $\Theta = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição, logo Θ é uma congruência em \mathcal{A} que contém $\{(a, b)\}$; além disso Θ é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\{(a, b)\}$. Por conseguinte, $\Theta(a, b) = \Theta$. Uma relação de congruência é simétrica, pelo que também se tem $\Theta(b, a) = \Theta$.

No sentido de determinarmos as restantes congruências, calculamos o supremo das congruências principais duas a duas:

- $\Theta(x, x) \vee \theta = \theta$, para qualquer $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$.

Imediato, pois $\Theta(x, x) \subseteq \theta$.

- $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, c) = \Theta(a, b)$.

Imediato, pois $\Theta(a, c) \subseteq \Theta(a, b)$.

- $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(b, d), (d, b)\} = \nabla_A$.

A relação $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$ é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$; logo $\Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \subseteq \Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$. Uma vez que $(b, a), (a, d) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d)$ e a relação $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$ é transitiva, então $(b, d) \in \Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$. Considerando que a relação é simétrica também se tem $(d, b) \in \Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$. A relação $\Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(b, d), (d, b)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$.

- $\Theta(a, b) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (c, d), (c, d)\} = \nabla_A$.

A relação $\Theta(a, b) \vee \Theta(b, d)$ é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\Theta(a, b)$ e $\Theta(b, d)$; logo $\Theta(a, b) \cup \Theta(b, d) \subseteq \Theta(a, b) \vee \Theta(b, d)$. Uma vez que $(a, b), (b, d), (c, b), (b, d) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d)$ e a relação $\Theta(a, b) \vee \Theta(b, d)$ é transitiva, tem-se $(a, d), (c, d) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d)$. Considerando que a relação é simétrica também se tem $(d, a), (d, c) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d)$. A relação $\Theta(a, b) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (c, d), (c, d)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\Theta(a, b)$ e $\Theta(b, d)$.

- $\Theta(a, c) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, d)$.

Imediato, pois $\Theta(a, c) \subseteq \Theta(a, d)$.

- $\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, c) \cup \Theta(b, d)$.

- $\Theta(a, d) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b)\} = \nabla_A$.

A relação $\Theta(a, d) \vee \Theta(b, d)$ é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\Theta(a, d)$ e $\Theta(b, d)$; logo $\Theta(a, d) \cup \Theta(b, d) \subseteq \Theta(a, d) \vee \Theta(b, d)$. Uma vez que $(a, d), (d, b), (c, d), (d, b) \in \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d)$ e a relação $\Theta(a, d) \vee \Theta(b, d)$ é transitiva, tem-se $(a, b), (c, b) \in \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d)$. Considerando que a relação é simétrica também se tem $(b, a), (b, c) \in \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d)$. A relação $\Theta(a, d) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b)\}$ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\Theta(a, d)$ e $\Theta(b, d)$.

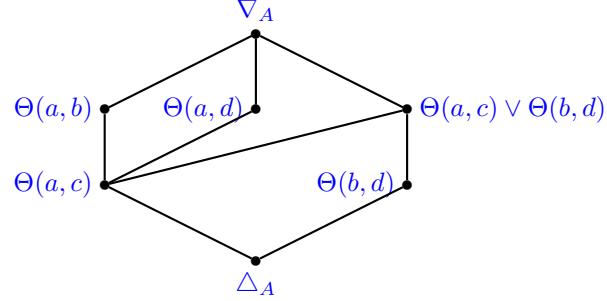
Considerando que $\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$ e ∇_A são distintas das congruências principais, calculemos o supremo de cada uma destas congruências com as congruências já determinadas:

- $\nabla_A \vee \theta = \nabla_A$, para qualquer $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Delta_A = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(a, b) = \nabla_A$;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(a, c) = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, c) \cup \Theta(b, d) \cup \Theta(a, d) \cup \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\} = \nabla_A$;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$.

Considerando os cálculos anteriores, temos

$$\text{Cong}(\mathcal{A}) = \{\Delta_A, \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, d), \Theta(b, d), \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d), \nabla_A\}.$$

O reticulado $(\text{Cong}(\mathcal{A}), \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



- (b) Para cada $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$, determine a álgebra quociente \mathcal{A}/θ .

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra do tipo (O, τ) e θ uma congruência em \mathcal{A} . A álgebra quociente \mathcal{A} módulo θ é a álgebra $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, F)$ do tipo (O, τ) tal que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $f \in O_n$,

$$f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta) = [f^\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)]_\theta.$$

Assim,

- sendo $\theta = \Delta_A$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta, [c]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a\}, [b]_\theta = \{b\}, [c]_\theta = \{c\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(a)]_\theta = [c]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [c]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(c)]_\theta = [a]_\theta \\ [d]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{aligned}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, b)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = [b]_\theta = [c]_\theta = \{a, b, c\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [d]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{aligned}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, c)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = [c]_\theta = \{a, c\}, [b]_\theta = \{b\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [d]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{aligned}$$

- sendo $\theta = \Theta(b, d)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [c]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a\}, [b]_\theta = \{b, d\}, [c]_\theta = \{c\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(a)]_\theta = [c]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [c]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(c)]_\theta = [a]_\theta \end{aligned}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, d)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, c, d\} = [c]_\theta = [d]_\theta, [b]_\theta = \{b\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^\mathcal{A}(b)]_\theta = [b]_\theta \end{aligned}$$

- sendo $\theta = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, c\} = [c]_\theta, [b]_\theta = \{b, d\} = [d]_\theta,$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \end{aligned}$$

- sendo $\theta = \nabla_A$, temos $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$ onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, b, c, d\} = [b]_\theta = [c]_\theta = [d]_\theta,$$

e

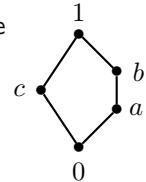
$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \end{aligned}$$

- 2.10. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{R})$. Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in R$, se $a \leq c \leq b$ e $(a, b) \in \theta$, então $(a, c) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta$.

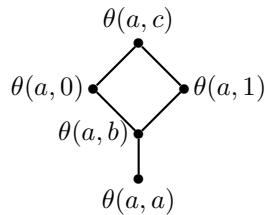
Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado, $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{R})$ e $a, b, c \in R$ tais que $a \leq c \leq b$ e $(a, b) \in \theta$.

Como $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{R})$, então θ é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição. Uma vez que θ é reflexiva, tem-se $(c, c) \in \theta$. Considerando que $(a, b), (c, c) \in \theta$ e θ satisfaz a propriedade de substituição segue que $(a \wedge c, b \wedge c) \in \theta$ e $(a \vee c, b \vee c) \in \theta$, ou seja, $(a, c) \in \theta$ e $(c, b) \in \theta$. Atendendo a que θ é simétrica e $(c, b) \in \theta$, também se tem $(b, c) \in \theta$. Portanto, $(a, c) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta$.

- 2.11. Considere o reticulado $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$ representado pelo diagrama de Hasse



Mostre que o reticulado das congruências de \mathcal{N}_5 pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



Dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$, tem-se $\theta = \bigvee \{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\}$. Assim sendo, no sentido de determinarmos o reticulado de congruências de \mathcal{N}_5 , começemos por determinar as congruências principais de \mathcal{N}_5 . Para a determinação de congruências num reticulado recorremos à seguinte caracterização - se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então $\theta \in \text{Eq}(\mathcal{R})$ é uma congruência em \mathcal{R} se e só se são satisfeitas as condições seguintes:

- (1) cada classe de θ é um sub-reticulado de \mathcal{R} ;
- (2) cada classe de θ é um subconjunto convexo de R ;
- (3) as classes de equivalência de θ são fechadas para quadriláteros
(i.e. sempre que a, b, c, d são elementos de R distintos tais que $a < b, c < d$ e

$$(a \vee d = b \wedge a \wedge d = c) \text{ ou } (b \vee c = d \wedge b \wedge c = a),$$

então $a \theta b$ sse $c \theta d$).

Recorrendo à caracterização anterior, concluímos que:

- $\theta(a, a) = \Delta_{N_5}$ uma vez que a menor congruência que identifica um elemento com ele mesmo é a relação identidade.
- $\Theta(a, 1)$ é a congruência tal que $N_5/\Theta(a, 1) = \{\{a, b, 1\}, \{0, c\}\}$. Como $(a, 1) \in \Theta(a, 1)$ e as classes de equivalência de uma congruência são conjuntos convexos, segue que $(a, b), (1, b) \in \Theta(a, 1)$. Considerando que $(1, b) \in \Theta(a, 1)$ e as classes de equivalência de $\Theta(a, 1)$ são fechadas para quadriláteros, temos $(c, 0) \in \Theta(a, 1)$. Na partição $\{\{a, b, 1\}, \{0, c\}\}$, as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de \mathcal{N}_5 e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contém $\{(a, 1)\}$, portanto $\Theta(a, 1)$ é a congruência que define o conjunto quociente indicado.

- $\Theta(a, 0)$ é a congruência tal que $N_5/\Theta(a, 0) = \{\{a, b, 0\}, \{c, 1\}\}$. De facto, como $(a, 0) \in \Theta(a, 0)$ e as classes são fechadas para quadriláteros, segue que $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$. Como $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$, e novamente porque as classes são fechadas para quadriláteros, temos $(b, 0) \in \Theta(a, 0)$. Na partição $\{\{a, b, 0\}, \{c, 1\}\}$, as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de N_5 e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contém $\{(a, 0)\}$, portanto $\Theta(a, 0)$ é a congruência que define o conjunto quociente indicado.
- $\Theta(a, b)$ é a congruência tal que $N_5/\Theta(a, b) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{0\}, \{1\}\}$. Na partição $\{\{a, b\}, \{c\}, \{0\}, \{1\}\}$, as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de N_5 e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contém $\{(a, b)\}$, portanto $\Theta(a, b)$ é a congruência que define o conjunto quociente indicado.
- $\Theta(a, c) = \nabla_{N_5}$. Considerando que $(a, c) \in \Theta(a, c)$, tem-se $\{a, c\} \subseteq [c]_{\Theta(a, c)}$. Então, considerando que as classes de uma congruência em N_5 são sub-reticulados de N_5 , segue que $0, 1 \in [c]_{\Theta(a, c)}$. Atendendo a que $0, 1 \in [c]_{\Theta(a, c)}$ e as classes são conjuntos convexos, conclui-se que todos os elementos de N_5 pertencem à classe $[c]_{\Theta(a, c)}$. Portanto, $\Theta(a, c) = \nabla_{N_5}$.
- $\Theta(0, b) = \Theta(a, 0)$. Tem-se $(0, b) \in \Theta(0, b)$, pelo que $0, b \in [b]_{\Theta(0, b)}$. Então, considerando que as classes de equivalência de $\Theta(0, b)$ são conjuntos convexos, segue que $a \in [b]_{\Theta(0, b)}$. Logo $(a, 0) \in \Theta(b, 0)$, donde resulta que $\Theta(a, 0) \subseteq \Theta(b, 0)$. Como $(0, b) \in \Theta(a, 0)$, também temos $\Theta(0, b) \subseteq \Theta(a, 0)$.
- $\Theta(0, c) = \Theta(a, 1)$. Como $(0, c) \in \Theta(0, c)$ e as classes são fechadas para quadriláteros, tem-se $(a, 1) \in \Theta(0, c)$. Logo $\Theta(a, 1) \subseteq \Theta(0, c)$. Também se tem $(0, c) \in \Theta(a, 1)$, pelo que $\Theta(0, c) \subseteq \Theta(a, 1)$.
- $\Theta(0, 1) = \nabla_{N_5}$. Como $(0, 1) \in \Theta(0, 1)$, tem-se $0, 1 \in [1]_{\Theta(0, 1)}$. Considerando que as classes são conjuntos convexos, resulta que $[1]_{\Theta(0, 1)} = \{0, a, b, c, 1\}$. Portanto, $\Theta(0, 1) = \nabla_{N_5}$.
- $\Theta(b, c) = \nabla_{N_5}$. Considerando que $(b, c) \in \Theta(b, c)$, tem-se $\{b, c\} \subseteq [b]_{\Theta(b, c)}$. Então, considerando que as classes de uma congruência em N_5 são sub-reticulados de N_5 , segue que $0, 1 \in [b]_{\Theta(b, c)}$. Atendendo a que $0, 1 \in [b]_{\Theta(b, c)}$ e que as classes são conjuntos convexos, conclui-se que todos os elementos de N_5 pertencem à classe $[b]_{\Theta(b, c)}$. Portanto, $\Theta(b, c) = \nabla_{N_5}$.
- $\Theta(b, 1) = \Theta(a, 1)$. Tem-se $(b, 1) \in \Theta(b, 1)$. Logo, como as classes são fechadas para quadriláteros, também se tem $(0, c) \in \Theta(b, 1)$. Por conseguinte, $\Theta(a, 1) = \Theta(0, c) \subseteq \Theta(b, 1)$. Como $(b, 1) \in \Theta(a, 1)$, também temos $\Theta(b, 1) \subseteq \Theta(a, 1)$.
- $\Theta(c, 1) = \Theta(a, 0)$. Tem-se $(c, 1) \in \Theta(c, 1)$. Então, como as classes são fechadas para quadriláteros, $(a, 0) \in \Theta(c, 1)$. Assim, $\Theta(a, 0) \subseteq \Theta(c, 1)$. Atendendo a que $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$, segue que $\Theta(c, 1) \subseteq \Theta(a, 0)$.
- $\theta(x, x) = \Delta_{N_5}$, para todo $x \in N_5$. Uma vez que a menor congruência que identifica um elemento com ele mesmo é a identidade.
- $\Theta(x, y) = \Theta(y, x)$, para todos $x, y \in N_5$. As congruências são relações de equivalência e, portanto, são simétricas.

Considerando que:

- todas as congruências principais são iguais a alguma das congruências de

$$\{\Theta(a, 0), \Theta(a, a), \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, 1)\},$$

- qualquer congruência é supremo de congruências principais,
- qualquer supremo de duas congruências de $\{\Theta(a, 0), \Theta(a, a), \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, 1)\}$ é uma destas 5 congruências,

concluímos que $\text{Con}N_5 = \{\Theta(a, 0), \Theta(a, a), \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, 1)\}$. O diagrama de Hasse indicado resulta da comparação entre as classes de congruência.

Nota: As congruências podem ser determinadas por um processo alternativo, considerando o facto de se tratarem de relações de equivalência que satisfazem a propriedade de substituição.

A título de exemplo, calculemos $\Theta(a, 0)$ seguindo esse outro processo. Atendendo a que $\Theta(a, 0)$ é a menor congruência que contém $\{(a, 0)\}$, tem-se $(a, 0) \in \Theta(a, 0)$. Como $\Theta(a, 0)$ é reflexiva, $\Delta_{N_5} \subseteq \Theta(a, 0)$. Uma vez que $(a, 0) \in \Theta(a, 0)$ e $\Theta(a, 0)$ é simétrica, também se tem $(0, a) \in \Theta(a, 0)$. Como $(a, 0), (c, c) \in \Theta(a, 0)$ e $\Theta(a, 0)$ satisfaz a propriedade de substituição, segue que

$$(a \wedge c, 0 \wedge c) = (0, 0) \in \Theta(a, 0) \text{ e } (a \vee c, 0 \vee c) = (1, c) \in \Theta(a, 0).$$

Como $(1, c) \in \Theta(a, 0)$ e $\Theta(a, 0)$ é simétrica, tem-se $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$. Dado que $(c, 1), (b, b) \in \Theta(a, 0)$, então, pela propriedade de substituição, temos

$$(c \wedge b, 1 \wedge b) = (0, b) \in \Theta(a, 0) \text{ e } (c \vee b, 1 \vee b) = (1, 1) \in \Theta(a, 0).$$

Dado que $(0, b) \in \Theta(a, 0)$, também temos $(b, 0) \in \Theta(a, 0)$, uma vez que a relação é simétrica. Considerando que

$$(a, 0), (0, b), (b, 0), (0, a) \in \Theta(a, 0),$$

então, por transitividade, temos $(a, b), (b, a) \in \Theta(a, 0)$. A relação

$$\Theta = \Delta_{N_5} \cup \{(a, 0), (0, a), (c, 1), (1, c), (0, b), (b, 0), (a, b), (b, a)\}$$

é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição (verificar), logo é uma congruência em N_5 que contém $\{(a, 0)\}$; além disso Θ é a menor congruência em N_5 que contém $\{(a, 0)\}$. Assim, $\Theta(a, 0) = \Theta$ e, portanto, $N_5/\Theta(a, 0) = \{\{0, a, b\}, \{c, 1\}\}$.

- 2.12. Considere o anel $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$. Para cada $q \in \mathbb{Z}$, seja \equiv_q a relação de equivalência definida em \mathbb{Z} por

$$r \equiv_q s \text{ sse } r - s = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que, para cada $q \in \mathbb{Z}$, a relação \equiv_q é uma congruência em \mathcal{Z} .

A relação \equiv_q é uma congruência em \mathcal{Z} se é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que já é referido que \equiv_q é uma relação de equivalência, resta provar que a relação \equiv_q satisfaz a propriedade de substituição, ou seja, temos de provar que, para qualquer operação n -ária $f \in \{+, \cdot, -, 0\}$, $n \in \{0, 1, 2\}$, é satisfeita a seguinte propriedade

$$(\forall_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i \equiv_q b_i) \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \equiv_q f(b_1, \dots, b_n).$$

(1) A relação \equiv_q é uma relação reflexiva e $0 \in \mathbb{Z}$, pelo que $0 \equiv_q 0$.

(2) Para quaisquer $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} a_1 \equiv_q b_1 &\Rightarrow a_1 - b_1 = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow -a_1 - (-b_1) = q(-k), \text{ com } -k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow -a_1 \equiv_q -b_1. \end{aligned}$$

(3) Para quaisquer $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (a_1 \equiv_q b_1 \text{ e } a_2 \equiv_q b_2) &\Rightarrow a_1 - b_1 = qk \text{ e } a_2 - b_2 = qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = q(k + k'), \text{ com } k + k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 + a_2) \equiv_q (b_1 + b_2). \end{aligned}$$

(4) Para quaisquer $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} (a_1 \equiv_q b_1 \text{ e } a_2 \equiv_q b_2) &\Rightarrow a_1 - b_1 = qk \text{ e } a_2 - b_2 = qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a_1 = b_1 + qk \text{ e } a_2 = b_2 + qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 a_2) = b_1 b_2 + q(b_1 k' + b_2 k + qkk'), \text{ com } b_1 k' + b_2 k + qkk' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a_1 a_2 - b_1 b_2 = q(b_1 k' + b_2 k + qkk'), \text{ com } b_1 k' + b_2 k + qkk' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 a_2) \equiv_q (b_1 b_2). \end{aligned}$$

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que \equiv_q satisfaz a propriedade de substituição. Logo \equiv_q é uma congruência em \mathcal{Z} .

- 2.13. Seja $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ um semigrupo. Um subconjunto não vazio I de S diz-se um *ideal* de \mathcal{S} se, para quaisquer $s \in S$ e $i \in I$, tem-se $is \in I$ e $si \in I$. Mostre que, para qualquer ideal I , $I^2 \cup \Delta_S$ é uma congruência em \mathcal{S} , designada a *congruência de Rees induzida por I*.

Representemos $I^2 \cup \Delta_S$ por θ . Pretende-se provar que θ é uma congruência em \mathcal{S} , ou seja, que θ é uma relação de equivalência em S que satisfaz a propriedade de substituição.

(i) θ é reflexiva

Uma vez que $\Delta_S \subseteq \theta$, é imediato que θ é reflexiva.

(ii) θ é simétrica

Para quaisquer $x, y \in S$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \theta &\Rightarrow (x, y) \in I^2 \text{ ou } (x, y) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (x \in I \text{ e } y \in I) \text{ ou } (x = y) \\ &\Rightarrow (y \in I \text{ e } x \in I) \text{ ou } (y, x) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (y, x) \in I^2 \text{ ou } (y, x) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (y, x) \in \theta \end{aligned}$$

(iii) θ é transitiva

Para quaisquer $x, y, z \in S$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \theta \wedge (y, z) \in \theta &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ ou } (x, y) \in \Delta_S) \text{ e } ((y, z) \in I^2 \text{ ou } (y, z) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ e } (y, z) \in I^2) \text{ ou } ((x, y) \in I^2 \text{ e } (y, z) \in \Delta_S) \\ &\quad \text{ou } ((x, y) \in \Delta_S \text{ e } (y, z) \in I^2) \text{ ou } ((x, y) \in \Delta_S \text{ e } (y, z) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow (x, y, z \in I) \text{ ou } (x, y \in I \text{ e } y = z) \text{ ou } (x = y \text{ e } y, z \in I) \\ &\quad \text{ou } (x = y \text{ e } y = z) \\ &\Rightarrow (x, z \in I) \text{ ou } (x, z \in I) \text{ ou } (x, z \in I) \text{ ou } (x = z) \\ &\Rightarrow (x, z) \in I^2 \text{ ou } (x, z) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (x, z) \in \theta. \end{aligned}$$

(iv) θ satisfaz a propriedade de substituição

Para quaisquer $x, y, z, w \in S$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \theta \text{ e } (z, w) \in \theta &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ ou } (x, y) \in \Delta_S) \text{ e } ((z, w) \in I^2 \vee (z, w) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ e } (z, w) \in I^2) \text{ ou } ((x, y) \in I^2 \text{ e } (z, w) \in \Delta_S) \\ &\quad \vee ((x, y) \in \Delta_S \wedge (z, w) \in I^2) \vee ((x, y) \in \Delta_S \text{ e } (z, w) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow (x, y, z, w \in I) \text{ ou } (x, y \in I \text{ e } z = w) \text{ ou } (x = y \text{ e } z, w \in I) \\ &\quad \text{ou } (x = y \text{ e } z = w) \\ &\Rightarrow (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \text{ ou } (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \text{ ou } (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \\ &\quad \text{ou } (x \cdot z = y \cdot w) \\ &\Rightarrow (x \cdot z, y \cdot w) \in I^2 \text{ ou } (x \cdot z, y \cdot w) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (x \cdot z, y \cdot w) \in \theta. \end{aligned}$$

De (i), (ii), (iii), (iv) conclui-se que θ é uma congruência em S .

- 2.14. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo $(O; \tau)$. Mostre que $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ e $\nabla_A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$ são congruências em \mathcal{A} .

A relação Δ_A é uma relação de equivalência. Assim sendo, resta provar que Δ_A satisfaz a propriedade de substituição.

Seja $f \in O_n$. Para quaisquer $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$,

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \in \Delta_A \text{ e } \dots \text{ e } (a_n, b_n) \in \Delta_A &\Rightarrow a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A \text{ e } a_1 = b_1 \text{ e } \dots \text{ e } a_n = b_n \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) \in A \\ &\quad \text{e } f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) \text{ ($f^{\mathcal{A}}$ é uma operação em } A) \\ &\Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n)) \in \Delta_A. \end{aligned}$$

Logo Δ_A satisfaz a propriedade de substituição e, portanto, Δ_A é uma congruência em \mathcal{A} .

A relação ∇_A é uma relação de equivalência. Resta provar que ∇_A satisfaz a propriedade de substituição.

Seja $f \in O_n$. Para quaisquer $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$,

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \in \nabla_A \text{ e } \dots \text{ e } (a_n, b_n) \in \nabla_A &\Rightarrow a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A \\ &\Rightarrow f^A(a_1, \dots, a_n), f^A(b_1, \dots, b_n) \in A \text{ (}f^A\text{ é uma operação em }A\text{)} \\ &\Rightarrow (f^A(a_1, \dots, a_n), f^A(b_1, \dots, b_n)) \in \nabla_A \text{ (definição de } \nabla_A\text{).} \end{aligned}$$

Logo ∇_A satisfaz a propriedade de substituição e, portanto, ∇_A é uma congruência em \mathcal{A} .

- 2.15. Sejam $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{1, 2\}; *^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo $(2, 0)$ cujas operações nulárias são dadas por $c^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{B}} = 1$ e cujas operações binárias são definidas por

| $*^{\mathcal{A}}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | $*^{\mathcal{B}}$ | 1 | 2 |
|-------------------|---|---|---|---|---|--|-------------------|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 2 | 5 | 2 | | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | | 2 | 2 | 1 |
| 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | | | | |
| 4 | 5 | 2 | 2 | 4 | 2 | | | | |
| 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | |

Seja $\alpha : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a aplicação definida por $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 3$. Mostre que a aplicação α é um monomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} . Justifique que \mathcal{B} é isomorfa a uma subálgebra de \mathcal{A} .

A aplicação α é:

- um monomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} se α é um homomorfismo e se é injetiva;
- um homomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} se é compatível com todos os símbolos de operação, ou seja, se para todo o símbolo de operação $f \in \{0, *\}$ de aridade n , $n \in \{0, 2\}$,

$$\alpha(f^{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{A}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n));$$

- injetiva se, para quaisquer $a, b \in \{1, 2\}$,

$$\alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow a = b.$$

Facilmente verificamos que α é um homomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} , pois:

- $\alpha(c^{\mathcal{B}}) = \alpha(1) = 2 = c^{\mathcal{A}}$;
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$;
- $\alpha(1 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(2) = 3 = 2 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(1) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$;
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 2) = \alpha(1) = 2 = 3 *^{\mathcal{A}} 3 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(2)$;
- $\alpha(2 *^{\mathcal{B}} 1) = \alpha(2) = 3 = 3 *^{\mathcal{A}} 2 = \alpha(2) *^{\mathcal{A}} \alpha(1)$.

A aplicação também é injetiva, uma vez que, para quaisquer $x, y \in B$, tem-se $\alpha(x) \neq \alpha(y)$ sempre que $x \neq y$ ($1 \neq 2$ e $\alpha(1) \neq \alpha(2)$).

Uma vez que α é um monomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} , tem-se $\mathcal{B} \cong \alpha(\mathcal{B})$; de facto, como α é um monomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} , a aplicação $\beta : B \rightarrow \alpha(B)$ definida por $\beta(x) = \alpha(x)$, para todo $x \in B$, é um isomorfismo de \mathcal{B} em $\alpha(\mathcal{B})$. Por outro lado, como a álgebra \mathcal{B} é uma subálgebra de si mesma e α é um homomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} , $\alpha(\mathcal{B})$ é uma subálgebra de \mathcal{A} . Portanto, a álgebra \mathcal{B} é isomorfa a uma subálgebra de \mathcal{A} .

- 2.16. Sejam \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, então $\beta \circ \alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

Sejam \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} álgebras de tipo (O, τ) , $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$. Pretendemos mostrar que $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{C} .

Uma vez que α é uma função de A em B e β é uma função de B em C , então, por definição de composição de funções, $\beta \circ \alpha$ é uma função de A em C . Além disso, prova-se que $\beta \circ \alpha$ é compatível com todos os símbolos de operação. De facto, para quaisquer $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in O_n$ e $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(f^A(a_1, \dots, a_n)) &= \beta(\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n))) \\ &= \beta(f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))) \quad (\alpha \text{ é homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{B}) \\ &= f^{\mathcal{C}}(\beta(\alpha(a_1)), \dots, \beta(\alpha(a_n))) \quad (\beta \text{ é homomorfismo de } \mathcal{B} \text{ em } \mathcal{C}) \\ &= f^{\mathcal{C}}((\beta \circ \alpha)(a_1), \dots, (\beta \circ \alpha)(a_n)). \end{aligned}$$

Logo $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{C} .

- 2.17. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um isomorfismo, então α^{-1} é um isomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} .

Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} álgebras de tipo (O, τ) e $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um isomorfismo.

Como α é um isomorfismo, então α é uma aplicação bijetiva e, portanto, admite inversa $\alpha^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. A função α^{-1} também é bijetiva, pelo que, para provar que α^{-1} é um isomorfismo, resta mostrar que α^{-1} é um homomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} .

Para quaisquer $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in O_n$ e $(b_1, \dots, b_n) \in \mathcal{B}^n$, tem-se

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)) &= \alpha^{-1}(f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))) \quad (\alpha \text{ é sobrejetiva, logo } \forall b_i \in \mathcal{B} \exists a_i \in \mathcal{A}, b_i = \alpha(a_i)) \\ &= \alpha^{-1}(\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))) \quad (\alpha \text{ é um homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{B}) \\ &= (\alpha^{-1} \circ \alpha)(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \\ &= f^{\mathcal{A}}(\alpha^{-1}(b_1), \dots, \alpha^{-1}(b_n)).\end{aligned}$$

Logo α^{-1} é um homomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} .

Uma vez que α^{-1} é um homomorfismo e bijetiva, então α^{-1} é um isomorfismo de \mathcal{B} em \mathcal{A} .

- 2.18. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que:

- (a) Se A_1 é um subuniverso de \mathcal{A} , então $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de \mathcal{B} .

Seja A_1 um subuniverso de \mathcal{A} . Então

- (1) $A_1 \subseteq A$;
- (2) para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \dots, a_n) \in (A_1)^n$, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in A_1$.

Pretende-se provar que $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de \mathcal{B} , ou seja, pretende-se mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $\alpha(A_1) \subseteq B$;
- (ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(b_1, \dots, b_n) \in \alpha(A_1)^n$, $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) \in \alpha(A_1)$.

Prova de (i): uma vez que $A_1 \subseteq A$ e α é uma função de A em B , é imediato que $\alpha(A_1) \subseteq B$.

Prova de (ii): Sejam f um símbolo de operação de aridade n e $(b_1, \dots, b_n) \in \alpha(A_1)^n$.

Como $b_1, \dots, b_n \in \alpha(A_1)$, tem-se

$$b_1 = \alpha(a_1), \dots, b_n = \alpha(a_n), \text{ para alguns } a_1, \dots, a_n \in A_1.$$

Então

$$\begin{aligned}f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) &= f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \\ &= \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)). \quad (\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))\end{aligned}$$

Atendendo a que $a_1, \dots, a_n \in A_1$, $f^{\mathcal{A}}$ é uma operação n -ária em A e A_1 é um subuniverso de \mathcal{A} , tem-se $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in A_1$; logo $\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in \alpha(A_1)$; portanto, $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) \in \alpha(A_1)$.

Da prova de (i) e de (ii), conclui-se que $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de \mathcal{B} .

- (b) Se B_1 é um subuniverso de \mathcal{B} , então $\alpha^{-1}(B_1)$ é um subuniverso de \mathcal{A} .

Seja B_1 um subuniverso de \mathcal{B} . Então

- (1) $B_1 \subseteq B$;
- (2) para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(b_1, \dots, b_n) \in (B_1)^n$, $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) \in (B_1)$.

Pretendemos mostrar que $\alpha^{-1}(B_1)$ é um subuniverso de \mathcal{A} , ou seja, temos de provar que

- (i) $\alpha^{-1}(B_1) \subseteq A$;
- (ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \dots, a_n) \in (\alpha^{-1}(B_1))^n$, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in \alpha^{-1}(B_1)$.

Prova de (i): Por definição de $\alpha^\leftarrow(B_1)$, tem-se $\alpha^\leftarrow(B_1) = \{a \in A \mid \alpha(a) \in B_1\}$. Logo $\alpha^\leftarrow(B_1) \subseteq A$.

Prova de (ii): Para qualquer símbolo de operação f de operação de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e qualquer $(a_1, \dots, a_n) \in (\alpha^\leftarrow(B_1))^n$, tem-se

$$\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \quad \text{e} \quad (\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in (B_1)^n.$$

Então, como B_1 é subuniverso de \mathcal{B} , temos $f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in B_1$.
Logo $\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) \in B_1$ e, portanto, $f^A(a_1, \dots, a_n) \in \alpha^\leftarrow(B_1)$.

De (i) e (ii) conclui-se que $\alpha^\leftarrow(B_1)$ é um subuniverso de \mathcal{A} .

2.19. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} álgebras do mesmo tipo e $\alpha, \beta \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que

$$\text{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$$

é um subuniverso de \mathcal{A} . A este subuniverso chama-se *igualizador de α e β* .

O conjunto $\text{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$ é um subuniverso de \mathcal{A} se:

- (i) $\text{Eq}(\alpha, \beta) \subseteq A$;
- (ii) para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)^n$, $f^A(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)$.

Prova de (i): Imediato, pela definição de $\text{Eq}(\alpha, \beta)$.

Prova de (ii): para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)^n$, tem-se $f^A(a_1, \dots, a_n) \in A$. Além disso,

$$\begin{aligned} \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) &= f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \quad (\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \\ &= f^B(\beta(a_1), \dots, \beta(a_n)) \quad (a_1, \dots, a_n \in \text{Eq}(\alpha, \beta)) \\ &= \beta(f^A(a_1, \dots, a_n)) \quad (\beta \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{aligned}$$

Logo $f^A(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)$.

2.20. Sejam \mathcal{A} , \mathcal{B} álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que α é injetiva se e só se $\ker \alpha = \Delta_A$.

\Rightarrow) Admitamos que α é injetiva.

A relação $\ker \alpha$ é uma relação de equivalência em A , logo $\Delta_A \subseteq \ker \alpha$. Por outro lado, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker \alpha &\Rightarrow \alpha(x) = \alpha(y) \\ &\Rightarrow x = y \quad (\alpha \text{ é injetiva}) \\ &\Rightarrow (x, y) \in \Delta_A. \end{aligned}$$

Assim, $\ker \alpha \subseteq \Delta_A$. Portanto, $\ker \alpha = \Delta_A$.

\Leftarrow) Consideremos, por hipótese, que $\ker \alpha = \Delta_A$. Então, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow (x, y) \in \ker \alpha \Rightarrow (x, y) \in \Delta_A \Rightarrow x = y.$$

Logo α é injetiva.

2.21. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : A \rightarrow B$ uma função. Mostre que α é um homomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{B} se e só se $\{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Admitamos que $S = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Mostremos que α é um homomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{B} . Uma vez que α é uma função de A em B , resta mostrar que α é compatível com todos os símbolos de operação. Considerando que, por hipótese, S é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, segue que, para qualquer símbolo de operação f de aridade n e para qualquer $((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) \in S^n$,

$$f^{A \times B}((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) \in S,$$

ou seja

$$(f^A(x_1, \dots, x_n), f^B(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))) \in S.$$

Por conseguinte, por definição de S , temos $f^A(x_1, \dots, x_n) \in A$ e $f^B(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = \alpha(f^A(x_1, \dots, x_n))$. Portanto, para para qualquer símbolo de operação f de aridade n e para qualquer $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$,

$$\alpha(f^A(x_1, \dots, x_n)) = f^B(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)).$$

Logo, α é um homomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{B} .

Reciprocamente, admitamos que α é um homomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{B} e mostremos que o conjunto $S = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Uma vez que α é um homomorfismo, para qualquer símbolo de operação f de aridade n e para qualquer $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$, tem-se

$$\alpha(f^A(x_1, \dots, x_n)) = f^B(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)).$$

Então, para qualquer $((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) \in S^n$,

$$\begin{aligned} f^{A \times B}((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) &= (f^A(x_1, \dots, x_n), f^B(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))) \\ &= (f^A(x_1, \dots, x_n), \alpha(f^A(x_1, \dots, x_n))) \end{aligned}$$

e $(f^A(x_1, \dots, x_n), \alpha(f^A(x_1, \dots, x_n))) \in S$, uma vez que $f^A(x_1, \dots, x_n) \in A$.

Portanto, S é um subuniverso de \mathcal{A} , pois é fechado para todas as operações de \mathcal{A} .

2.22. Sejam \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} álgebras do mesmo tipo. Mostre que $S = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

(a) $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$.

Seja $\alpha : A \times B \rightarrow B \times A$ a aplicação definida por $\alpha(a, b) = (b, a)$, para qualquer $(a, b) \in A \times B$. Mostremos que α é um isomorfismo.

1) A aplicação α está bem definida. De facto, para qualquer $(a, b) \in A \times B$, tem-se $a \in A$ e $b \in B$, pelo que $\alpha(a, b) = (b, a) \in B \times A$. Além disso, para quaisquer $(a, b), (a', b') \in A \times B$,

$$(a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow (b, a) = (b', a') \Rightarrow \alpha(a, b) = \alpha(a', b').$$

2) A aplicação α é injetiva, pois, para quaisquer $(a, b), (a', b') \in A \times B$,

$$\alpha(a, b) = \alpha(a', b') \Rightarrow (b, a) = (b', a') \Rightarrow a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow (a, b) = (a', b').$$

3) Claramente, a aplicação α também é sobrejetiva, pois, para todo $(b, a) \in B \times A$, existe $(a, b) \in A \times B$ tal que $\alpha(a, b) = (b, a)$.

4) A aplicação α é compatível com todos os símbolos de operação, pois, para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \in (A \times B)^n$,

$$\begin{aligned} \alpha(f^{A \times B}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))) &= \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n), f^B(b_1, \dots, b_n)) \\ &= (f^B(b_1, \dots, b_n), f^A(a_1, \dots, a_n)) \\ &= f^{B \times A}((b_1, a_1), \dots, (b_n, a_n)) \\ &= f^{B \times A}(\alpha(a_1, b_1), \dots, \alpha(a_n, b_n)). \end{aligned}$$

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que α é um isomorfismo de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$ e, portanto, $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$.

Seja $\alpha : A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a, (b, c)) = ((a, b), c)$, para qualquer $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$. Mostremos que α é um isomorfismo.

1) A aplicação α está bem definida. De facto, para qualquer $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$, tem-se $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, pelo que $\alpha(a, (b, c)) = ((a, b), c) \in (A \times B) \times C$. Além disso, para quaisquer $(a, (b, c)), (a', (b', c')) \in A \times (B \times C)$,

$$\begin{aligned} (a, (b, c)) = (a', (b', c')) &\Rightarrow a = a', (b, c) = (b', c') \\ &\Rightarrow a = a', b = b', c = c' \\ &\Rightarrow (a, b) = (a', b'), c = c' \\ &\Rightarrow ((a, b), c) = ((a', b'), c') \\ &\Rightarrow \alpha(a, (b, c)) = \alpha(a', (b', c')). \end{aligned}$$

2) A aplicação α é injetiva, pois, para quaisquer $(a, (b, c)), (a', (b', c')) \in A \times (B \times C)$,

$$\begin{aligned}\alpha(a, (b, c)) = \alpha(a', (b', c')) &\Rightarrow ((a, b), c) = ((a', b'), c') \\&\Rightarrow (a, b) = (a', b'), c = c' \\&\Rightarrow a = a', b = b', c = c' \\&\Rightarrow a = a', (b, c) = (b', c') \\&\Rightarrow (a, (b, c)) = (a', (b', c')).\end{aligned}$$

3) Claramente, a aplicação também é sobrejetiva, pois, para todo $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$, existe $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ tal que $\alpha(a, (b, c)) = ((a, b), c)$.

4) A aplicação é compatível com todos os símbolos de operação, pois, para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $((a_1, (b_1, c_1)), \dots, (a_n, (b_n, c_n))) \in (A \times (B \times C))^n$,

$$\begin{aligned}\alpha(f^{A \times (B \times C)}((a_1, (b_1, c_1)), \dots, (a_n, (b_n, c_n)))) &= \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n), f^{B \times C}((b_1, c_1), \dots, (b_n, c_n))) \\&= \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n), (f^B(b_1, \dots, b_n), f^C(c_1, \dots, c_n))) \\&= ((f^A(a_1, \dots, a_n), f^B(b_1, \dots, b_n)), f^C(c_1, \dots, c_n)) \\&= (f^{A \times B}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)), f^C(c_1, \dots, c_n)) \\&= f^{(A \times B) \times C}(((a_1, b_1), c_1), \dots, ((a_n, b_n), c_n)) \\&= f^{(A \times B) \times C}(\alpha(a_1, (b_1, c_1)), \dots, \alpha(a_n, (b_n, c_n))).\end{aligned}$$

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que α é um isomorfismo de $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$ em $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$.

2.23. Sejam \mathcal{A} uma álgebra e $\theta, \rho \in \text{Con}\mathcal{A}$.

(a) Mostre que a aplicação $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$ definida por $\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_\rho)$ é um homomorfismo.

Para qualquer símbolo de operação f de aridade n , $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\begin{aligned}\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) &= ([f^A(a_1, \dots, a_n)]_\theta, [f^A(a_1, \dots, a_n)]_\rho) \\&= (f^{A/\theta}([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta), f^{A/\rho}([a_1]_\rho, \dots, [a_n]_\rho)) \\&= f^{A/\theta \times A/\rho}(([a_1]_\theta, [a_1]_\rho), \dots, ([a_n]_\theta, [a_n]_\rho)) \\&= f^{A/\theta \times A/\rho}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)).\end{aligned}$$

Logo α é compatível com qualquer operação e, portanto, α é um homomorfismo de \mathcal{A} em $\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$.

(b) Mostre que $\ker \alpha = \theta \cap \rho$. Conclua que α é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \Delta_A$.

Para quaisquer $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}(a, b) \in \ker \alpha &\Leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \\&\Leftrightarrow ([a]_\theta, [a]_\rho) = ([b]_\theta, [b]_\rho) \\&\Leftrightarrow [a]_\theta = [b]_\theta \text{ e } [a]_\rho = [b]_\rho \\&\Leftrightarrow (a, b) \in \theta \text{ e } (a, b) \in \rho \\&\Leftrightarrow (a, b) \in \theta \cap \rho.\end{aligned}$$

Logo $\ker \alpha = \theta \cap \rho$.

A função α é injetiva se e só se $\ker \alpha = \Delta_A$. Considerando o que foi provado em 2.20 segue que α é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \Delta_A$.

(c) Mostre que α é sobrejetiva se e só se $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

\Rightarrow) Admitamos que α é sobrejetiva. Pretendemos provar que $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

Uma vez que θ e ρ são relações binárias em A , $\theta \circ \rho$ é uma relação binária em A e, portanto, $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$.

Sejam $a, b \in A$. Então $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Considerando que α é sobrejetiva, existe $c \in A$ tal que $\alpha(c) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$, donde segue que $([c]_\theta, [c]_\rho) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$ e, por conseguinte, $[c]_\theta = [a]_\theta$ e $[c]_\rho = [b]_\rho$. Assim, $(c, a) \in \theta$ e $(b, c) \in \rho$, pelo que $(b, a) \in \theta \circ \rho$. Logo, para quaisquer $a, b \in A$, tem-se $(b, a) \in \theta \circ \rho$ e, portanto, $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$.

Considerando que $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$ e $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$, concluímos que $\nabla_A = \theta \circ \rho$.

\Leftarrow) Admitamos que $\nabla_A = \theta \circ \rho$.

Pretende-se provar que α é sobrejetiva.

Seja $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$. Para quaisquer $a, b \in A$, tem-se $(b, a) \in \nabla_A$ e, uma vez que $\nabla_A = \theta \circ \rho$, $(b, a) \in \theta \circ \rho$. Então existe $c \in A$ tal que $(b, c) \in \rho$ e $(c, a) \in \theta$. Assim, $[a]_\theta = [c]_\theta$, $[b]_\rho = [c]_\rho$ e, portanto, $([a]_\theta, [b]_\rho) = ([c]_\theta, [c]_\rho)$. Logo, para qualquer $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$, existe $c \in A$ tal que $([a]_\theta, [b]_\rho) = \alpha(c)$, ou seja, α é sobrejetiva.

- 2.24. Sejam $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in O})$, $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in O})$ e $\mathcal{C} = (C; (f^{\mathcal{C}})_{f \in O})$ álgebras de tipo (O, τ) , $\alpha_1 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Seja $\alpha : A \rightarrow B \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.

- (a) Mostre que α é um homomorfismo de \mathcal{A} em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

Para qualquer símbolo de operação f de aridade n e para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\begin{aligned}\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) &= (\alpha_1(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)), \alpha_2(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))) \\ &\stackrel{*}{=} (f^{\mathcal{B}}(\alpha_1(a_1), \dots, \alpha_1(a_n)), f^{\mathcal{C}}(\alpha_2(a_1), \dots, \alpha_2(a_n))) \\ &= f^{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}((\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_1)), \dots, (\alpha_1(a_n), \alpha_2(a_n))) \\ &= f^{\mathcal{B} \times \mathcal{C}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)).\end{aligned}$$

A aplicação α é compatível com todos os símbolos de operação, logo α é um homomorfismo de \mathcal{A} em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

(*) $\alpha_1 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

- (b) Mostre que $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

Para quaisquer x, y ,

$$\begin{aligned}(x, y) \in \ker \alpha &\Leftrightarrow x, y \in A \text{ e } \alpha(x) = \alpha(y) \\ &\Leftrightarrow x, y \in A \text{ e } (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\alpha_1(y), \alpha_2(y)) \\ &\Leftrightarrow x, y \in A \text{ e } \alpha_1(x) = \alpha_1(y) \text{ e } \alpha_2(x) = \alpha_2(y) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \ker \alpha_1 \text{ e } (x, y) \in \ker \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2.\end{aligned}$$

Logo $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

- (c) Mostre que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos e

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

Comecemos por mostrar que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos. Uma vez que α_1 e α_2 são homomorfismos, resta provar que α_1 e α_2 são funções sobrejetivas.

Seja $b \in B$. Como $C \neq \emptyset$, existe $c \in C$. Logo $(b, c) \in B \times C$. Considerando que α é um epimorfismo de \mathcal{A} em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = (b, c)$, i.e., existe $a \in A$ tal que $(\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (b, c)$. Logo, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $\alpha_1(a) = b$. Assim, α_1 é sobrejetiva. De modo análogo, prova-se que α_2 é sobrejetiva.

Pelo 1º Teorema do Isomorfismo, tem-se

$$\mathcal{A}/\ker \alpha \cong \alpha(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \cong \alpha_1(\mathcal{A}) \text{ e } \mathcal{A}/\ker \alpha_2 \cong \alpha_2(\mathcal{A}).$$

Uma vez que α , α_1 e α_2 são sobrejetivas, então

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha) \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \quad \mathcal{A}/(\ker \alpha_1) \cong \mathcal{B} \text{ e } \mathcal{A}/(\ker \alpha_2) \cong \mathcal{C}.$$

Assim,

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha) \cong \mathcal{A}/(\ker \alpha_1) \times \mathcal{A}/(\ker \alpha_2).$$

Considerando o que foi provado na alínea anterior segue que

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/(\ker \alpha_1) \times \mathcal{A}/(\ker \alpha_2).$$

- 2.25. Sejam \mathcal{A} uma álgebra e $\theta, \theta^* \in \text{Cong}(\mathcal{A})$. Mostre que (θ, θ^*) é um par de congruências fator em \mathcal{A} se e só se $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.

\Rightarrow) Sejam $\theta, \theta^* \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ tais que (θ, θ^*) é um par de congruências fator em \mathcal{A} . Então:

$$(1) \theta \cap \theta^* = \Delta_A; \quad (2) \theta \vee \theta^* = \nabla_A; \quad (3) \theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta.$$

Pretende-se provar que:

$$(i) \theta \cap \theta^* = \Delta_A; \quad (ii) \theta \circ \theta^* = \nabla_A.$$

De (1) é imediato (i). De (3) segue que $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$ (Teorema 2.3.15). Então, por (2), tem-se (ii).

\Leftarrow) Reciprocamente, admitamos que θ e θ^* são congruências em \mathcal{A} tais que:

$$(i) \theta \cap \theta^* = \Delta_A; \quad (ii) \theta \circ \theta^* = \nabla_A.$$

Pretende-se mostrar que:

$$(1) \theta \cap \theta^* = \Delta_A; \quad (2) \theta \vee \theta^* = \nabla_A; \quad (3) \theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta.$$

De (i) é imediato (1). Uma vez que $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$, tem-se $\theta^* \circ \theta \subseteq \theta \circ \theta^*$, pelo que $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$ e $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$ (Teorema 2.3.15). Assim, tem-se (3). De $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$ e de (ii) segue (2).

2.26. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $f^{\mathcal{A}} : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ é a operação definida por

| | | | | |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|
| x | a | b | c | d |
| $f^{\mathcal{A}}(x)$ | c | d | a | b |

(a) Determine $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$. Justifique que $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$ é um par de congruências fator.

Comecemos por determinar $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$.

A relação $\Theta(a, b)$ é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\{(a, b)\}$. Então $(a, b) \in \Theta(a, b)$, $\Theta(a, b)$ é uma relação de equivalência (i.e., é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que $\Theta(a, b)$ é reflexiva, tem-se $\Delta_A \subseteq \Theta(a, b)$. Uma vez que $(a, b) \in \Theta(a, b)$ e $\Theta(a, b)$ é simétrica segue que $(b, a) \in \Theta(a, b)$. Como $(a, b), (b, a) \in \Theta(a, b)$ e $\Theta(a, b)$ satisfaz a propriedade de substituição, tem-se

$$(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(b)) = (c, d) \in \Theta(a, b), (f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(a)) = (d, c) \in \Theta(a, b).$$

Considerando que $(c, d), (d, c) \in \Theta(a, b)$, então, novamente pela propriedade de substituição, temos

$$(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(d)) = (a, b) \in \Theta(a, b), (f^{\mathcal{A}}(d), f^{\mathcal{A}}(c)) = (b, a) \in \Theta(a, b).$$

Então, $\Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \subseteq \Theta(a, b)$. A relação $\Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ é uma congruência em \mathcal{A} que contém $\{(a, b)\}$ e é a menor congruência nestas condições. Assim, $\Theta(a, b) = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$.

De modo análogo, obtém-se $\Theta(a, d) = \Delta_A \cup \{(a, d), (d, a), (c, b), (b, c)\}$.

Um par (θ_1, θ_2) de congruências em \mathcal{A} diz-se um par de congruências fator se satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A; \quad (ii) \theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A; \quad (iii) \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1.$$

Então, atendendo a que:

- $\Theta(a, b) \cap \Theta(a, d) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} = \Delta_A;$
- $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\} = \nabla_A;$
- $\Theta(a, b) \circ \Theta(a, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(a, c), (d, b), (c, a), (b, d)\} = \Theta(a, d) \circ \Theta(a, b),$

conclui-se que $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$ é um par de congruências fator.

(Em alternativa pode-se mostrar que $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$ é um par de congruências fator recorrendo à caracterização referida no exercício 2.24.)

- (b) Justifique que existem álgebras \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Dê exemplo de álgebras \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 nas condições indicadas e determine a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Sejam $\theta_1 = \Theta(a, b)$, $\theta_2 = \Theta(a, d)$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2$. Uma vez que \mathcal{A} é não trivial e $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_{\mathcal{A}}\}$, então \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 são álgebras não triviais. Como (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator, tem-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ (Teorema 2.5.5).

Tem-se $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1 = (A/\theta_1; f^{\mathcal{A}/\theta_1})$, onde $A/\theta_1 = \{[a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_1}\}$ (pois $\theta_1 = \Theta(a, b) = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ e, portanto, $[a]_{\theta_1} = [b]_{\theta_1}$ e $[c]_{\theta_1} = [d]_{\theta_1}$), e $f^{\mathcal{A}/\theta_1} : A/\theta_1 \rightarrow A/\theta_1$ é a operação definida por

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}) &= [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_1} = [c]_{\theta_1}, \\ f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}) &= [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_1} = [a]_{\theta_1}. \end{aligned}$$

No caso da álgebra $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2 = (A/\theta_2; f^{\mathcal{A}/\theta_2})$, tem-se $A/\theta_2 = \{[a]_{\theta_2}, [c]_{\theta_2}\}$ (pois $\theta_2 = \Theta(a, d) = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(a, d), (d, a), (c, b), (b, c)\}$ e, portanto, $[a]_{\theta_2} = [d]_{\theta_2}$ e $[c]_{\theta_2} = [b]_{\theta_2}$), e $f^{\mathcal{A}/\theta_2} : A/\theta_2 \rightarrow A/\theta_2$ é a operação definida por

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2}) &= [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_2} = [c]_{\theta_2}, \\ f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2}) &= [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_2} = [a]_{\theta_2}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (A/\theta_1 \times A/\theta_2; f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2})$, onde

$$A/\theta_1 \times A/\theta_2 = \{([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2})\}$$

e $f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} : (A/\theta_1 \times A/\theta_2) \rightarrow (A/\theta_1 \times A/\theta_2)$ é a operação definida por

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([a]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), \\ f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([c]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), \\ f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([a]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), \\ f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([c]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}). \end{aligned}$$

- 2.27. (a) Mostre que toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível.

Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) , onde $|A| = n$, com $n \in \mathbb{N}$ e n primo. Sejam $\mathcal{A}_1 = (A_1; G)$ e $\mathcal{A}_2 = (A_2; H)$ álgebras de tipo (O, τ) tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Como \mathcal{A} é finita, então \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 são finitas e tem-se $|A| = |A_1 \times A_2| = |A_1| \times |A_2|$. Como $|A| = n$ e n é primo, segue que $|A_1| = 1$ ou $|A_2| = 1$; logo \mathcal{A}_1 é a álgebra trivial ou \mathcal{A}_2 é a álgebra trivial. Portanto, a álgebra \mathcal{A} é diretamente indecomponível.

- (b) Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra tal que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ é a operação unária em A definida por

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{2, 4\} \\ 2 & \text{se } x \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

- i. Sejam θ_1 e θ_2 as congruências de \mathcal{A} definidas por $\theta_1 = \Theta(1, 2)$ e $\theta_2 = \Theta(3, 5)$. Determine θ_1 e θ_2 . Verifique que $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_{\mathcal{A}}\}$ e $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_{\mathcal{A}}$.

A relação $\theta_1 = \Theta(1, 2)$ é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\{(1, 2)\}$. Então $(1, 2) \in \Theta(1, 2)$, $\Theta(1, 2)$ é uma relação de equivalência (i.e. $\Theta(1, 2)$ é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que $\Theta(1, 2)$ é reflexiva, tem-se $\Delta_{\mathcal{A}} \subseteq \Theta(1, 2)$. Como $(1, 2) \in \Theta(1, 2)$ e $\Theta(1, 2)$ é simétrica, também se tem $(2, 1) \in \Theta(1, 2)$. Uma vez que $(1, 2), (2, 1) \in \Theta(1, 2)$ e $\Theta(1, 2)$ satisfaz a propriedade de substituição, segue que

$$(f^{\mathcal{A}}(1), f^{\mathcal{A}}(2)) = (2, 1), (f^{\mathcal{A}}(2), f^{\mathcal{A}}(1)) = (1, 2) \in \Theta(1, 2).$$

Assim, $\Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(1, 2), (2, 1)\} \subseteq \Theta(1, 2)$. A relação $\Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(1, 2), (2, 1)\}$ é uma congruência em \mathcal{A} e é a menor congruência em \mathcal{A} que contém $\{(1, 2)\}$; portanto $\theta_1 = \Theta(1, 2) = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(1, 2), (2, 1)\}$.

De modo análogo, determina-se $\theta_2 = \Theta(3, 5)$ e obtem-se $\theta_2 = \Theta(3, 5) = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(3, 5), (5, 3)\}$.

Claramente, tem-se $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_{\mathcal{A}}\}$, pois $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A})$, $\theta_1 \neq \Delta_{\mathcal{A}}$ ($(1, 2) \in \theta_1$ e $(1, 2) \notin \Delta_{\mathcal{A}}$) e $\theta_2 \neq \Delta_{\mathcal{A}}$ ($(3, 5) \in \theta_2$ e $(3, 5) \notin \Delta_{\mathcal{A}}$). Também é imediato que

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} = \Delta_{\mathcal{A}}.$$

ii. Justifique que se θ e ϕ são congruências de \mathcal{A} tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, então $\theta = \nabla_A$ ou $\phi = \nabla_A$.

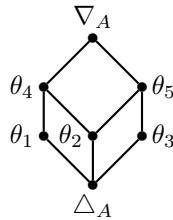
A álgebra \mathcal{A} tem um número primo de elementos ($|A| = 5$). Logo, por (a), conclui-se que \mathcal{A} é diretamente indecomponível. Então, se θ e ϕ são congruências de \mathcal{A} tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, \mathcal{A}/θ é a álgebra trivial ou \mathcal{A}/ϕ é a álgebra trivial. No primeiro caso, tem-se $\theta = \nabla_A$; no segundo caso tem-se $\phi = \nabla_A$.

iii. Diga, justificando, se a álgebra \mathcal{A} é subdiretamente irredutível.

A álgebra \mathcal{A} é subdiretamente irredutível se e só se \mathcal{A} é a álgebra trivial ou $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ tem elemento mínimo.

A álgebra \mathcal{A} não é trivial ($|A| = 5$). Por outro lado, da alínea (b) i., sabe-se que existem $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ tais que $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$ e, portanto, $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ não tem elemento mínimo. Logo \mathcal{A} não é subdiretamente irredutível.

2.28. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra cujo reticulado das congruências é representado pelo diagrama de Hasse seguinte

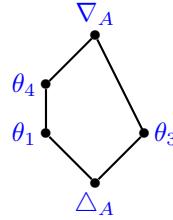


Justifique que:

(a) A álgebra \mathcal{A} não é congruente-distributiva.

A álgebra \mathcal{A} é congruente-distributiva se e só se $\text{Cong}(\mathcal{A})$ é um reticulado distributivo. Um reticulado é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a M_3 ou a N_5 .

O reticulado

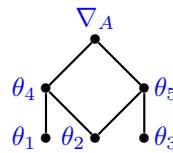


é um sub-reticulado de $\text{Con}\mathcal{A}$ e é isomorfo a N_5 . Logo a álgebra \mathcal{A} não é congruente-distributiva.

(b) A álgebra \mathcal{A} não é subdiretamente irredutível.

A álgebra \mathcal{A} é subdiretamente irredutível se e só se \mathcal{A} é a álgebra trivial ou $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ tem elemento mínimo.

A álgebra \mathcal{A} não é trivial, pois $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\} \neq \emptyset$. Além disso, o c.p.o. $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$

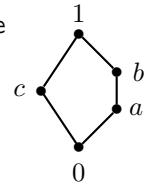


não tem elemento mínimo. Logo, a álgebra \mathcal{A} não é subdiretamente irredutível.

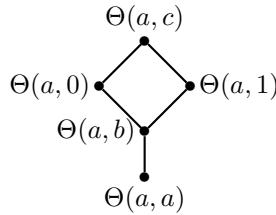
(c) Os reticulados $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_1)$ e $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_3)$ são isomorfos.

Pelo Teorema da Correspondência, tem-se $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_1) \cong [\theta_1, \nabla_A]$ e $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_3) \cong [\theta_3, \nabla_A]$. Como $[\theta_1, \nabla_A] \cong [\theta_3, \nabla_A]$ (pois a aplicação $\varphi : [\theta_1, \nabla_A] \rightarrow [\theta_3, \nabla_A]$, definida por $\varphi(\theta_1) = \theta_3$, $\varphi(\theta_4) = \theta_5$ e $\varphi(\nabla_A) = \nabla_A$, é um isomorfismo de c.p.o.'s), então $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_1) \cong \text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_3)$.

2.29. Considere o reticulado $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$ representado pelo diagrama de Hasse



Sabendo que o reticulado das congruências de \mathcal{N}_5 pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



diga, justificando, se a álgebra \mathcal{N}_5 é:

(a) Congruente-modular.

Uma álgebra \mathcal{A} diz-se congruente-modular se o reticulado $\text{Cong}(\mathcal{A})$ é modular.

O reticulado $\text{Con}\mathcal{N}_5$ é modular. De facto, um reticulado é modular se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5 . Então, como o único sub-reticulado de $\text{Con}\mathcal{N}_5$ com 5 elementos é o próprio reticulado e este não é isomorfo a N_5 , concluímos que $\text{Con}\mathcal{N}_5$ é modular.

(b) Diretamente indecomponível.

Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ é diretamente indecomponível se e só se as únicas congruências fator de \mathcal{A} são Δ_A e ∇_A . Uma congruência $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ diz-se uma congruência fator se existe $\theta' \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ tal que $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$, $\theta \vee \theta' = \nabla_A$ e $\theta \cap \theta' = \Delta_A$.

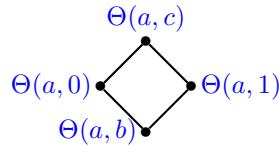
Considerando o reticulado de congruências de \mathcal{N}_5 , conclui-se que $\Delta_{\mathcal{N}_5}$ e $\nabla_{\mathcal{N}_5}$ são as únicas congruências fator de \mathcal{N}_5 . De facto, se $\theta_1 \in \text{Con}\mathcal{N}_5$ é uma congruência fator, então existe $\theta_2 \in \text{Con}\mathcal{N}_5$ tal que: $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_{\mathcal{N}_5}$; $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$; $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Então de $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_{\mathcal{N}_5}$ segue que $\theta_1 = \Delta_{\mathcal{N}_5}$ ou $\theta_2 = \Delta_{\mathcal{N}_5}$. Se $\theta_1 = \Delta_{\mathcal{N}_5}$, de $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$ resulta que $\theta_2 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$; se $\theta_2 = \Delta_{\mathcal{N}_5}$, conclui-se de modo análogo que $\theta_1 = \nabla_{\mathcal{N}_5}$.

Logo a álgebra \mathcal{A} é diretamente indecomponível.

(c) Subdiretamente irredutível.

Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ é subdiretamente irredutível se e só se $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ tem elemento mínimo.

Considerando que $\text{Con}\mathcal{N}_5 \setminus \{\Delta_A\}$ é o c.p.o. a seguir representado



conclui-se que $\text{Con}\mathcal{N}_5 \setminus \{\Delta_A\}$ tem elemento mínimo (sendo esse elemento mínimo a congruência $\Theta(a, b)$). Logo o reticulado \mathcal{N}_5 é subdiretamente irredutível.

2.30. Mostre que toda a cadeia é um reticulado diretamente indecomponível.

Uma \mathcal{A} uma álgebra diz-se diretamente indecomponível se sempre que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, então uma das álgebras \mathcal{A}_1 ou \mathcal{A}_2 é uma álgebra trivial.

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge^{\mathcal{R}}, \vee^{\mathcal{R}})$ uma cadeia e $\mathcal{A}_1 = (A_1; \wedge^{A_1}, \vee^{A_1})$, $\mathcal{A}_2 = (A_2; \wedge^{A_2}, \vee^{A_2})$ álgebras do tipo $(2, 2)$ tais que $\mathcal{R} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Então existe um isomorfismo $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Uma vez que \mathcal{R} é um reticulado e $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é uma imagem homomorfa de \mathcal{R} , a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ é um reticulado. Para cada $i \in \{1, 2\}$, tem-se $\mathcal{A}_i = p_i(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, onde $p_i : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_i$ é o homomorfismo projeção. Logo as álgebras \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 também são reticulados. No sentido de provarmos, por redução ao absurdo, que \mathcal{R} é subdiretamente irredutível, admitamos que nenhuma das álgebras \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 é uma álgebra trivial. Então $|A_1|, |A_2| \geq 2$ e, portanto, existem $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ tais que (a_1, a_2) e (b_1, b_2) são incomparáveis em $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Logo $(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} (b_1, b_2) \notin \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$. Considerando que α é um epimorfismo, existem $x_1, x_2 \in R$

tais que $\alpha(x_1) = (a_1, a_2)$ e $\alpha(x_2) = (b_1, b_2)$. Como \mathcal{R} é uma cadeia, os elementos x_1, x_2 são comparáveis. Admitamos, sem perda de generalidade, que $x_1 \leq x_2$. Então $x_1 \wedge^{\mathcal{R}} x_2 = x_1$, donde segue que

$$\alpha(x_1 \wedge^{\mathcal{R}} x_2) = \alpha(x_1) = (a_1, a_2) \neq (a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} (b_1, b_2),$$

o que contradiz a hipótese de que α é um homomorfismo. Por conseguinte, uma das álgebras \mathcal{A}_1 ou \mathcal{A}_2 tem de ser uma álgebra trivial, ficando provado que \mathcal{R} é diretamente indecomponível.

2.31. Mostre que, para cada operador $O \in \{H, S\}$, $IO = OI$.

$[SI = IS]$

Pretende-se provar que, para qualquer classe de álgebras \mathbf{K} , $SI(\mathbf{K}) = IS(\mathbf{K})$.

Seja \mathbf{K} uma classe de álgebras.

Comecemos por mostrar $SI(\mathbf{K}) \subseteq IS(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$. Uma vez que $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \alpha(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$. Atendendo a que $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ é um isomorfismo, $\alpha^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ é também um isomorfismo. Como \mathcal{A} é uma subálgebra de \mathcal{B} , $\alpha^{-1}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de \mathcal{C} . Então, como $\alpha(\alpha^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$, tem-se $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$.

Mostremos que também temos $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) tal que $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Admitamos, sem perda de generalidade, que $A \cap C = \emptyset$ (se $A \cap C \neq \emptyset$, considera-se uma álgebra $\mathcal{C}' = (C'; G)$ isomorfa a \mathcal{C} e tal que $C' \cap A = \emptyset$). Consideremos $D = A \cup (C \setminus B)$ e a aplicação $\delta : \mathcal{C} \rightarrow D$ definida por

$$\delta(c) = \begin{cases} \alpha(c) & \text{se } c \in B \\ c & \text{se } c \in C \setminus B \end{cases}$$

A aplicação δ é uma bijeção. Seja $\mathcal{D} = (D; (f^{\mathcal{D}})_{f \in O})$ a álgebra de tipo (O, τ) onde, para cada cada símbolo $f \in O_n$, $f^{\mathcal{D}} : D^n \rightarrow D$ é a função definida por

$$f^{\mathcal{D}}(d_1, \dots, d_n) = \delta(f^{\mathcal{C}}(\delta^{-1}(d_1), \dots, \delta^{-1}(d_n))).$$

A aplicação δ é um isomorfismo de \mathcal{C} em \mathcal{D} . Além disso, a álgebra $\alpha(\mathcal{B})$ é uma subálgebra de \mathcal{D} . Assim, uma vez que $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, $\alpha(\mathcal{B}) \leq \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \cong \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$, concluímos que $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Logo, $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$.

Desta forma, provámos que $SI = IS$.

$[HI = IH]$

Seja $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$, então $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum epimorfismo $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e $\alpha \circ \delta$ é um homomorfismo, então $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$. Uma vez que $id_C(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, segue que $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta)(id_C(\mathcal{C}))$. Assim, considerando que $id_C : C \rightarrow C$ é um isomorfismo de \mathcal{C} em \mathcal{C} , tem-se $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K})$. Logo $IH(\mathbf{K}) \subseteq HI(\mathbf{K})$.

Mostremos que também temos $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$ e algum epimorfismo $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$, então $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum isomorfismo $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e $\alpha \circ \delta$ é um homomorfismo, tem-se $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$. Como $id_A(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{A} = id_A((\alpha \circ \delta)(\mathcal{C}))$. Então, considerando que $id_A : A \rightarrow A$ é um isomorfismo de \mathcal{A} em \mathcal{A} , conclui-se que $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K})$. Logo $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$.

2.32. Mostre que os operadores S , I , H e IP são idempotentes.

$[S^2 = S]$

Pretendemos provar que $S^2 = S$, ou seja, pretende-se provar que, para toda a classe de álgebras \mathbf{K} , $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$.

Seja \mathbf{K} uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras \mathbf{K}' , tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $S(\mathbf{K}) \subseteq S(S(\mathbf{K})) = SS(\mathbf{K})$.

Resta provar que $SS(\mathbf{K}) \subseteq S(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in SS(\mathbf{K}) = S(S(\mathbf{K}))$. Então $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$. Como $B \in S(\mathbf{K})$, tem-se $B \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Por conseguinte, $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$, para

alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Assim, $\mathcal{A} \in S(\mathbf{K})$.
Desta forma, provámos que $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$.

$$[I^2 = I]$$

Pretendemos provar que $I^2 = I$, ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras \mathbf{K} , $II(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K})$.

Seja \mathbf{K} uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras \mathbf{K}' , tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $I(\mathbf{K}) \subseteq I(I(\mathbf{K})) = II(\mathbf{K})$.

Resta provar que $II(\mathbf{K}) \subseteq I(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in II(\mathbf{K}) = I(I(\mathbf{K}))$. Então $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$. Logo $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ para algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Por conseguinte, $\mathcal{B} = \beta(\mathcal{C})$ para algum isomorfismo $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$. A composição de isomorfismos, desde que esteja definida, é um isomorfismo. Assim, $\alpha \circ \beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ é um isomorfismo. Logo, como $\mathcal{A} = (\alpha \circ \beta)(\mathcal{C})$, tem-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ e, portanto, $\mathcal{A} \in I(\mathbf{K})$.

Desta forma, provámos que $II(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K})$.

$$[H^2 = H]$$

Pretendemos provar que $H^2 = H$, ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras \mathbf{K} , $HH(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$.

Seja \mathbf{K} uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras \mathbf{K}' , tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $H(\mathbf{K}) \subseteq H(H(\mathbf{K})) = HH(\mathbf{K})$.

Resta provar que $HH(\mathbf{K}) \subseteq H(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in HH(\mathbf{K}) = H(H(\mathbf{K}))$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ para algum epimorfismo $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ e para alguma álgebra $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$. Como $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \beta(\mathcal{C})$ para algum epimorfismo $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ e para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. A composição de epimorfismos, desde que esteja definida, é um epimorfismo. Assim, $\alpha \circ \beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ é um epimorfismo. Logo, como $\mathcal{A} = (\alpha \circ \beta)(\mathcal{C})$, tem-se $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$.

Desta forma, provámos que $HH(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$.

$$[(IP)^2 = IP]$$

Pretendemos mostrar que, para qualquer classe de álgebras \mathbf{K} , $IPIP(\mathbf{K}) = IP(\mathbf{K})$.

Seja \mathbf{K} uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras \mathbf{K}' , tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $IP(\mathbf{K}) \subseteq IPIP(\mathbf{K})$.

Resta mostrar que $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$. Considerando que $PI \leq IP$, tem-se $IPIP \leq IIPP$. Então, como I é idempotente, segue que $IPIP \leq IPP$. Assim, para provar que $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$, basta mostrar que $IPP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$.

Seja \mathbf{K} uma classe de álgebras. Se $\mathcal{A} \in IPP(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ para alguma álgebra $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ onde, para todo $i \in I$, $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$. Considerando que $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{C}_i = \prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j}$ onde, para todo $i \in I$ e $j \in J_i$, $\mathcal{D}_{i,j} \in \mathbf{K}$. Assim,

$$\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \left(\prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j} \right).$$

A correspondência

$$\delta : \prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s \rightarrow \prod_{i \in I} \left(\prod_{j \in J_i} D_{i,j} \right)$$

definida por

$$\delta(d) = ((d(i,j) \mid j \in J_i) \mid i \in I)$$

é um isomorfismo de $\prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s$ em $\prod_{i \in I} \left(\prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j} \right)$.

Assim, $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta)(\prod_{s \in \bigcup_{u \in U} (\bigcup_{j \in J_u} \{(u,j)\})} D_s)$. Como α e δ são isomorfismos, $\alpha \circ \delta$ é um isomorfismo. Então, como $\prod_{s \in \bigcup_{u \in U} (\bigcup_{j \in J_u} \{(u,j)\})} D_s \in P(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{A} \in IP(\mathbf{K})$.

Logo, $IPP \leq IP$. Portanto, $IPIP \leq IP$.

2.33. Mostre que HS , HIP e SIP são operadores de fecho em classes de álgebras do mesmo tipo.

Mostremos que HIP é um operador de fecho. Pretendemos mostrar que, para quaisquer classes de álgebras \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 :

- (1) $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$;
- (2) $(HIP)^2(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$;
- (3) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2)$.

Prova de (1): Para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras \mathbf{K}' , tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$. Logo, para qualquer classe de álgebras \mathbf{K}_1 , tem-se $\mathbf{K}_1 \subseteq P(\mathbf{K}_1)$, $P(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_1)$ e $IP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$. Assim, $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$.

Prova de (2): Para qualquer classe de álgebras \mathbf{K}_1 , tem-se

$$HIPHIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(i)}{\subseteq} HIHIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(ii)}{=} HHIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(iii)}{=} HIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(iv)}{=} HIP(\mathbf{K}_1).$$

- (i) $PH \leq HP$;
- (ii) $HI = IH$;
- (iii) $H^2 = H$;
- (iv) $(IP)^2 = IP$.

Prova de (3): Para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para quaisquer classes de álgebras \mathbf{K} e \mathbf{K}' ,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim, para quaisquer classes de álgebras \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 &\Rightarrow P(\mathbf{K}_1) \subseteq P(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow IP(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2). \end{aligned}$$

De (1), (2) e (3), conclui-se que HIP é um operador de fecho.

De modo semelhante prova-se que HS e SIP são operadores de fecho.

2.34. Mostre que $SH \neq HS$, $PS \neq SP$, $PH \neq HP$.

$[SH \neq HS]$

Como $SH \leq HS$, temos de provar que $HS \not\leq SH$. Sendo assim, tem de se provar que existe uma classe de álgebras \mathbf{K} tal que $HS(\mathbf{K}) \not\subseteq SH(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K} = \{Q\}$ com $Q = (\mathbb{Q}; +^Q, .^Q, -^Q, 0^Q, 1^Q)$, onde $+^Q, .^Q, -^Q$ são as operações usuais em \mathbb{Q} , $0^Q = 0$ e $1^Q = 1$. Se \mathcal{B} é uma álgebra homomorfa de Q , então \mathcal{B} é uma álgebra isomorfa a Q ou é uma álgebra trivial. Assim,

$$H(\{Q\}) = I(\{Q\}) \cup \{\mathcal{B} = (B; F) \mid \mathcal{B} \text{ é uma álgebra do mesmo tipo da álgebra } Q \text{ e } |B| = 1\}.$$

Consideremos as álgebras

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +^{\mathcal{Z}}, .^{\mathcal{Z}}, -^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}}), \text{ onde } +^{\mathcal{Z}}, .^{\mathcal{Z}}, -^{\mathcal{Z}} \text{ são as operações usuais em } \mathbb{Z}, 0^{\mathcal{Z}} = 0 \text{ e } 1^{\mathcal{Z}} = 1$$

e

$$\mathcal{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2; +^{\mathcal{Z}_2}, .^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2}, 0^{\mathcal{Z}_2}, 1^{\mathcal{Z}_2}), \text{ onde } +^{\mathcal{Z}_2}, .^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2} \text{ são as operações usuais em } \mathbb{Z}_2, 0^{\mathcal{Z}_2} = \bar{0} \text{ e } 1^{\mathcal{Z}_2} = \bar{1}.$$

Uma vez que $\mathcal{Z} \in S(\{Q\})$ e $\mathcal{Z}_2 \in H(\{\mathcal{Z}\})$, tem-se $\mathcal{Z}_2 \in HS(\{Q\})$. No entanto, $\mathcal{Z}_2 \not\subseteq SH(\{Q\})$ (se $\mathcal{C} \in SH(\{Q\})$, então \mathcal{C} é uma álgebra trivial ou é uma álgebra infinita).

Logo $HS(\mathbf{K}) \not\subseteq SH(\mathbf{K})$.

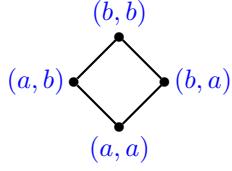
$[PS \neq SP]$

Uma vez que $PS \leq SP$, temos de provar que $SP \not\leq PS$, ou seja, é necessário mostrar que existe uma classe de álgebras \mathbf{K} tal que $SP(\mathbf{K}) \not\subseteq PS(\mathbf{K})$.

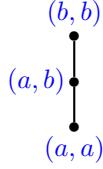
Seja $\mathbf{K} = \{\mathbf{2}\}$ onde $\mathbf{2} = (\{a, b\}; \wedge, \vee)$ é o reticulado representado por



O reticulado $R_1 = 2 \times 2$ a seguir representado



é um elemento de $P(\mathbf{K})$. Assim, o reticulado R_2 representado por



é um elemento de $SP(\mathbf{K})$.

O reticulado R_2 não é um elemento de $PS(\mathbf{K})$. De facto, se $R' = (R'; \wedge^{R'}, \vee^{R'})$ é um elemento de $S(\mathbf{K})$, então $|R'| \in \{1, 2\}$. Logo, para todo $R'' = (R''; \wedge^{R''}, \vee^{R''}) \in PS(\mathbf{K})$, tem-se $|R''| \neq 3$.

Portanto, $SP(\mathbf{K}) \not\subseteq PS(\mathbf{K})$.

$[PH \neq HP]$

Uma vez que $PH \leq HP$, temos de provar que $HP \not\leq PH$, ou seja, é necessário mostrar que existe uma classe de álgebras \mathbf{K} tal que $HP(\mathbf{K}) \not\subseteq PH(\mathbf{K})$.

Consideremos as álgebras

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2 &= (\mathbb{Z}_2; +^{\mathbb{Z}_2}, -^{\mathbb{Z}_2}, 0^{\mathbb{Z}_2}), \\ \mathcal{Z}_3 &= (\mathbb{Z}_3; +^{\mathbb{Z}_3}, -^{\mathbb{Z}_3}, 0^{\mathbb{Z}_3}), \\ \mathcal{Z}_6 &= (\mathbb{Z}_6; +^{\mathbb{Z}_6}, -^{\mathbb{Z}_6}, 0^{\mathbb{Z}_6}) \end{aligned}$$

do tipo $(2, 1, 0)$, onde, para cada $p \in \{2, 3, 6\}$, $+^{\mathbb{Z}_p}, -^{\mathbb{Z}_p}, 0^{\mathbb{Z}_p}$ representam as operações usuais em \mathbb{Z}_p .

Seja $\mathbf{K} = \{\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3\}$. Tem-se

$$H(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K}) \cup \{\mathcal{A} = (A; F) \mid \mathcal{A} \text{ é uma álgebra do mesmo tipo da álgebra } \mathcal{A} \text{ e } |A| = 1\}.$$

Como $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3 \in P(\mathbf{K})$ e $\mathcal{Z}_6 \cong \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3$, $\mathcal{Z}_6 \in HP(\mathbf{K})$. No entanto, $\mathcal{Z}_6 \notin PH(\mathbf{K})$.

Logo $HP(\mathbf{K}) \not\subseteq PH(\mathbf{K})$.

2.35. Mostre que, se \mathbf{G} é a classe dos grupos abelianos (vistos como álgebras do tipo $(2, 1, 0)$), então $HS(\mathbf{G}) = SH(\mathbf{G})$.

Toda a subálgebra de um grupo abeliano é um grupo abeliano e todo o grupo é uma subálgebra de si mesmo. Assim, $S(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

Todo o grupo abeliano é imagem epimorfa de si mesmo e toda a imagem epimorfa de um grupo abeliano é um grupo abeliano. Logo $H(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

Portanto,

$$HS(\mathbf{G}) = H(S(\mathbf{G})) = H(\mathbf{G}) = \mathbf{G} = S(\mathbf{G}) = (S(H(\mathbf{G}))) = SH(\mathbf{G}).$$

2.36. Sejam $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ álgebras do mesmo tipo. Prove que $V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$.

Sejam $V_1 = V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$ e $V_2 = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$.

Por definição, V_1 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$. Então, como $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \in V_1$ e V_1 é fechada para a formação de produtos diretos, tem-se $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n \in V_1$. Mas V_2 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n\}$, pelo que $V_2 \subseteq V_1$.

Por outro lado, V_2 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n\}$. Então, como V_2 é fechada para a formação de imagens homomorfas vem que, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_i(\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3 \times \dots \times \mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_i \in V_2$. Como $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\} \subseteq V_2$ e V_1 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$, conclui-se que $V_1 \subseteq V_2$.

Logo $V_1 = V_2$.