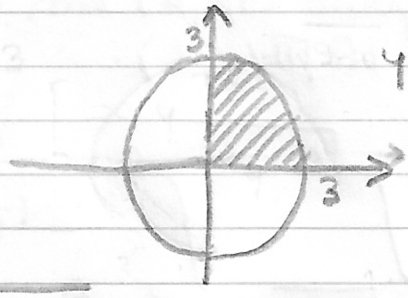
Ficha de Trabalho 7 A91640 - Beatriz Oliveira

1 (a) $D_1 = \{(r,\theta): 2 \leq r \leq 4,\ \pi/2 \leq \theta \leq \pi\}$

(b) $D_2 = \{(r,\theta): 2 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$

2. $$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} x \, dy \, dx$$



$y = \sqrt{9-x^2}$
$\Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2$
$\Leftrightarrow y^2 + x^2 = 9$

Logo temos que $0 \leq y \leq \sqrt{9-x^2}$ e $0 \leq x \leq 3$.

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} x \, dy\, dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 (r\cos\theta)\, r \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r^2 \cos\theta \, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{3} r^3 \cos\theta\right]_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 9\cos\theta \, d\theta = \left[9 \,\text{sen}\, \theta\right]_0^{\pi/2} = 9$$

3. $(r, \theta, z) = (6, \pi/2, 5)$ para passar para coordenadas cartesianas temos que:

$$\begin{cases} x = 6\cos \pi/2 \\ y = 6 \,\text{sen}\, \pi/2 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ z = 5 \end{cases}$$

Logo o ponto $(6, \pi/2, 5)$ em coordenadas cartesianas corresponde ao ponto $(0, 6, 5)$.

O ponto $(x, y, z) = (1, 1, 6)$ para passar para coordenadas cilíndricas temos que:

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \arctan 1 \\ z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi/4 \\ z = 6 \end{cases}$$

Logo o ponto $(1,1,6)$ em coordenadas cilíndricas corresponde ao ponto $(\sqrt{2}, \pi/4, 6)$.

4. $$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4} (x+z)\, dz\, dy\, dx$$

Temos que: $-2 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$ e $x^2+y^2 \leq z \leq 4$.

Logo $D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, x^2+y^2 \leq z \leq 4 \right\}$

Temos que: $y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow y^2 = 4-x^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 4$

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r \sin\theta$, logo:

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow r^2[\cos^2\theta + \sin^2\theta] = 4$$
$$\Leftrightarrow r^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2} \text{, como } r \geq 0$$
$$\Leftrightarrow r = 2$$

Assim sendo, em coordenadas cilíndricas temos que:

$D = \{ (r,\theta,z) : -2 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r^2 \leq z \leq 4 \}$

Logo $$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4} (x+z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \int_{-2}^{2} \int_{r^2}^{2} (r\cos\theta + z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$$

5. $(\rho, \theta, \phi) = (5, \pi/4, \frac{3\pi}{4})$ para passar para coordenadas cartesianas temos que:

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \cos \pi/4 \\ y = 5 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \operatorname{sen} \pi/4 \\ z = 5 \cos 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ y = 5/2 \\ z = 5 \end{cases}$$

Logo o ponto $(5, \pi/4, 0)$ em coordenadas cartesianas corresponde ao ponto $(5/2, 5/2, 5)$

6. $$\iiint_U 1 \, dx \, dy \, dz$$

$U \to$ semi-esfera de inequação $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ com $z \geq 0$

Em coordenadas esféricas temos que:

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow \rho^2 \leq 4$

Logo $U = \{(\rho, \theta, \phi\} : 0 \leq \rho \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$

Assim sendo, $\iiint_U 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

Em coordenadas cartesianas temos que:

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \Leftrightarrow z^2 \leq 4 - x^2 - y^2$

$\Leftrightarrow z \leq \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, logo como $z \geq 0$

$\Leftrightarrow z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Logo $0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

$y^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ Logo $-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$ logo $-2 \leq x \leq 2$

Assim sendo, temos que $\iiint_U 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx$