Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

— prova escrita 2 — duas horas — 2018'19 —

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   (a) Mostre que f não possui pontos críticos;
   (b) Justifique que f possui em extremo, identificando-o e classificando-o;
   (c) Justifique porque é que uma função real de várias variáveias reais pode ter extremos locais sem possuir pontos críticos.

2. (3 valores) Considere a função
$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-2x+2 \end{array},$$
com $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\}$.
   (a) Justifique que f possui máximo e mínimo absoluto;
   (b) Determine o máximo e o mínimo absoluto de f referidos na alínea anterior.

3. (5 valores) Considere o seguinte integral duplo
$$\int_0^{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(x^2)\, dx dy.$$
   (a) Identifique e esboce a região de integração;
   (b) Inverta a ordem de integração do integral apresentado;
   (c) Calcule o valor do integral. (Sugestão:use o resultado obtido na alínea anterior)

4. (3 valores) Use integrais duplos para calcular a área da região
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq -x, 0 \geq x^2+y-2\}.$$

5. (4 valores) Considere o sólido S definido por:
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4, x^2+y^2+z^2 \leq 16\}.$$
Observação: O sólido S é formado por um cilindro de raio 2 no interior de uma esfera de raio 4.
   (a) Escreva um integral duplo (ou soma de integrais duplos), em coordenadas polares, que permita calcular o volume de S;
   (b) Escreva um integral triplo (ou soma de integrais triplos), em coordenadas cilindricas, que permita calcular o volume de S;
   (c) Escreva um integral triplo (ou soma de integrais triplos), em coordenadas esféricas, que permita calcular o volume de S.

6. (2 valores) Indique, justificando, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:
   (a) $\int_0^2 \int_1^3 e^{x^2y^2}\, dxdy < 4$; (Sugestão: não efectuar contas)
   (b) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dxdy \geq 0$, para qualquer função $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ contínua;

Fim

Proposta de Resolução 2º teste

Análise (2018/2019)

$\boxed{1}$ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$

a) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2x\,(x^2+y^2)^{-1/2}=0 \\ \frac{1}{2}\,2y\,(x^2+y^2)^{-1/2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \end{cases}$ impossível,

logo f não tem pontos críticos

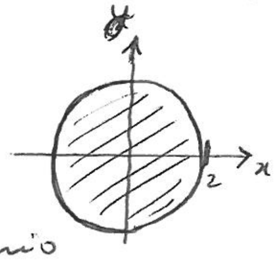
b) $f(0,0)=0 \leq \sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Consequentemente

$f(0,0)=0$ é mínimo absoluto de f.

c) A situação descrita pode acontecer quando a função f não é derivável em todos os pontos do seu domínio.

$\boxed{2}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 4\}$

$(x,y) \longmapsto x^2+y^2-2x+2$



a) f é uma função contínua e o domínio D é um conj^{to} fechado e limitado. Logo f possui máximo e mínimo absoluto.

b) → Pontos críticos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \\ y=0 \end{cases}$$

$(1,0) \in D$ é o único ponto crítico

→ Análise na fronteira

Método dos multiplicadores de Lagrange: Definindo

$g(x,y) = x^2+y^2$

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ \\ g(x,y) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-2, 2y) = \lambda(2x,2y) \\ \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \lambda x \\ y(1-\lambda)=0 \\ \text{---} \end{cases}$$

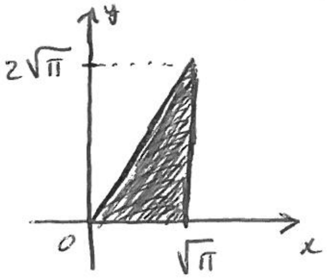
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y=0 \\ x=\pm 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -1=0 \\ \lambda = 1 \\ \text{---} \end{cases} \text{ impossível}$$

Lista de candidatos a extremantes obtida: $(1,0)$; $(-2,0)$; $(2,0)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0) = 1 \\ f(-2,0) = 10 \\ f(2,0) = 2 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} \text{Máximo: } 10 \\ \text{Mínimo: } 1 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ $$\int_0^{2\sqrt{\pi}} \int_{y/2}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(x^2)\, dx\, dy$$ ③

a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \leq y \leq 2\sqrt{\pi}, \quad \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{\pi}\}$



b) $$\int_0^{2\sqrt{\pi}} \int_{y/2}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(x^2)\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{2x} \operatorname{sen}(x^2)\, dy\, dx$$

c) $$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{2x} \operatorname{sen}(x^2)\, dy\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{sen}(x^2)\, y\right]_{y=0}^{2x} dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$$

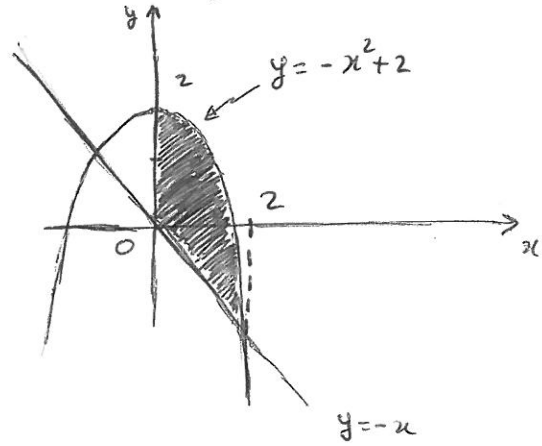
$$= \left[-\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}} = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

$\boxed{4}$ $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq -x, 0 \geq x^2 + y - 2\}$

$-x^2 + 2 = -x$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$

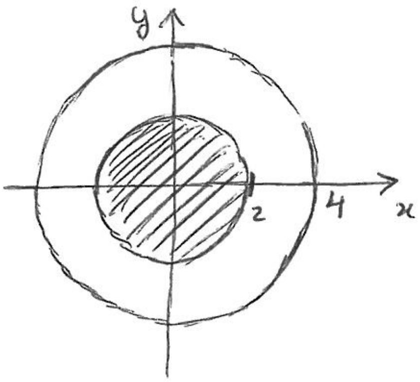


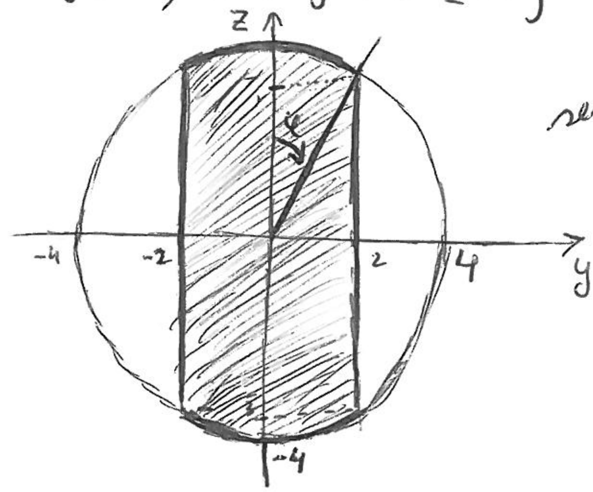
$$\text{Área}(R) = \int_0^2 \int_{-x}^{-x^2+2} 1\, dy\, dx = \int_0^2 \left[y\right]_{y=-x}^{-x^2+2} dx = \int_0^2 -x^2 + 2 + x\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + 2 = \frac{18}{3} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

5 $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2+z^2\le 16\}$

4





$\operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{4}$

$\Leftrightarrow \varphi = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$

$x^2+y^2+z^2\le 16 \Leftrightarrow z^2\le 16-x^2-y^2 \Leftrightarrow |z|\le\sqrt{16-x^2-y^2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{16-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{16-x^2-y^2}$

a)

$$\text{Volume}(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\left(\sqrt{16-r^2}+\sqrt{16-r^2}\right)r\,dr\,d\theta$$

b)

$$\text{Volume}(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

c)

$$\text{Volume}(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^4 \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{5\pi/6}^{\pi}\int_0^4 \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}\int_0^{\frac{2}{\operatorname{sen}\varphi}} \rho^2\operatorname{sen}\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

$x^2+y^2=4 \longleftrightarrow \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta=4 \Leftrightarrow \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi=4$

$\Leftrightarrow \rho=\frac{2}{\operatorname{sen}\varphi}$ $\quad\left(\varphi\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]\Rightarrow \operatorname{sen}\varphi>0\right)$

a) $\int_0^2 \int_1^3 e^{x^2 y^2} dx dy < 4$ Falso.

A região de integração é $R = [0,2] \times [1,3]$, logo

área$(R) = 4$

Como $e^{x^2+y^2} \geq 1$, então $\int_0^2 \int_1^3 e^{x^2 y^2} dx dy \geqslant 4 \times 1 = 4$.

b) $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx dy \geqslant 0$ para qualquer $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua.

Falso. Por exemplo, para $f(x,y) = -1$, $\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$,

tem-se $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 -1\, dx dy = -1 < 0$.