O Teorema de Kuratowski

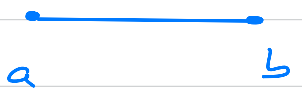
Def: Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $a, b \in V$ tal que $\{a,b\} \in E$.

Diz-se que $G' = (V', E')$ é um grafo obtido de G por adição de um vértice de grau 2 se:

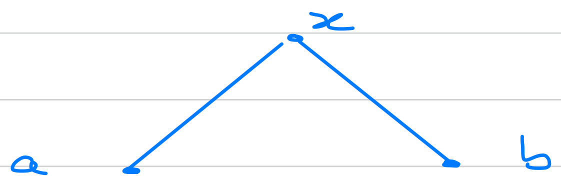
- $V' = V \cup \{x\}$ $\quad (x \notin V)$
- $E' = E \setminus \{\{a,b\}\} \cup \{\{a,x\},\{b,x\}\}$

Exemplos:

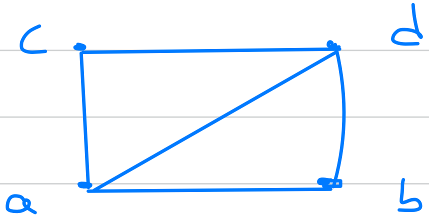
G



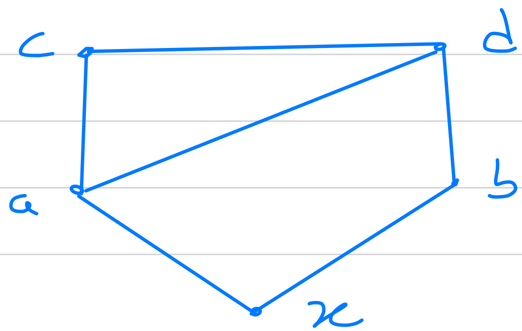
$\rightsquigarrow$ G'



H



$\rightsquigarrow$ H'



Também podemos considerar o processo recíproco

Def: Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $a, b, x \in V$ tais que $\text{grau}(x) = 2$ $\{a, x\}, \{b, x\} \in E$ mas $\{a, b\} \notin E$. Diz-se que $G' = (V', E')$ é um grafo obtido de G por remoção de um vértice de grau 2 se

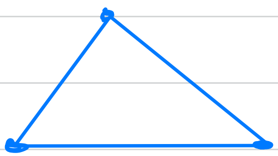
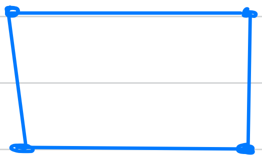
$$V' = V \setminus \{x\}$$

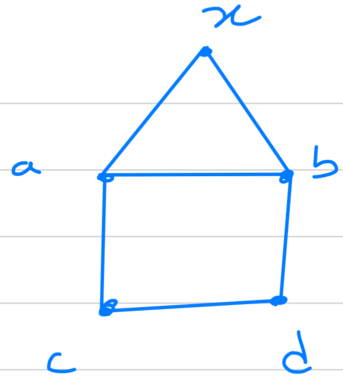
$$E' = E \setminus \{ \{a, x\}, \{b, x\} \} \cup \{ \{a, b\} \}$$

Exemplos: ver exemplos anteriores

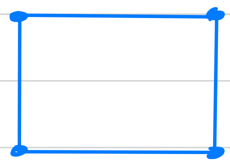
Def: Dois grafos dizem-se homeomorfos se um deles puder ser obtido do outro por adição ou remoção de um vértice de grau 2.

Exemplos:

 e  são homeomorfos



e

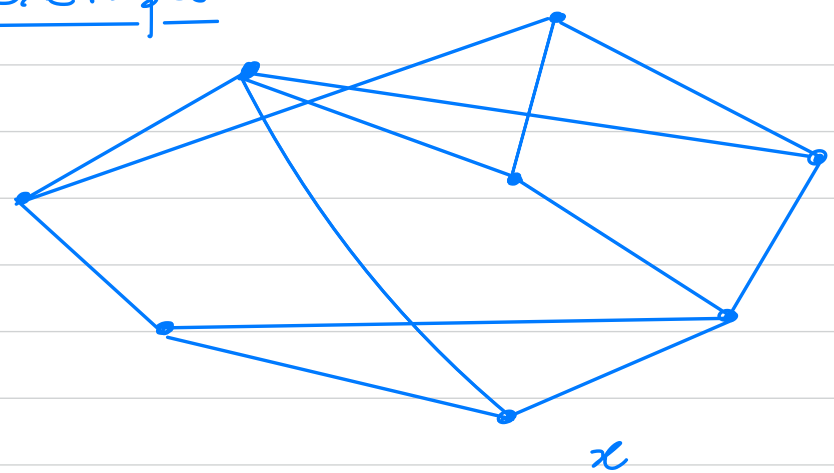


não são homeomorfos

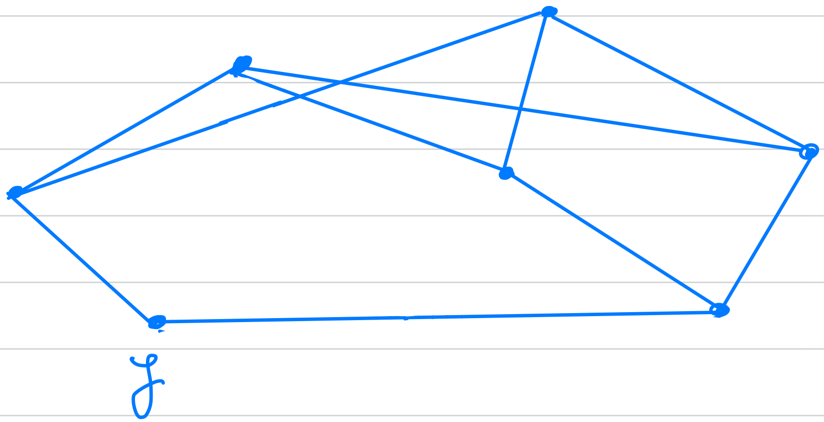
Teorema de Kuratowski

Um grafo é planar se e só se não contém um subgrafo que é homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

Exemplo

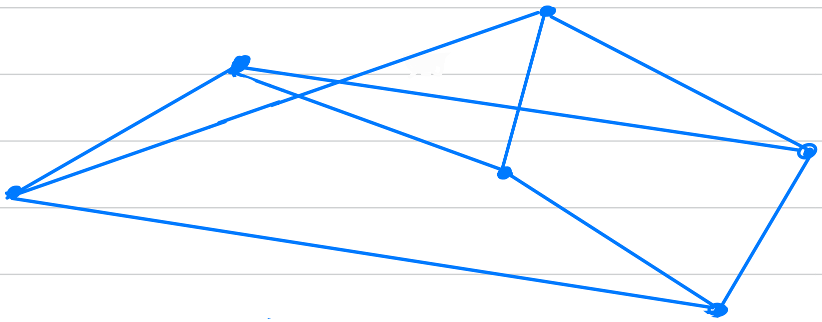


Eliminamos o vértice x

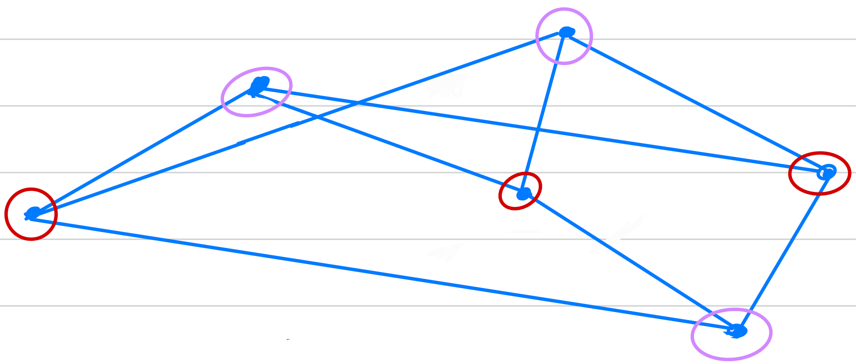


e obtemos este subgrafo

o vértice y tem grau 2



Este grafo é homeomorfo ao grafo anterior.



Este grafo é o $K_{3,3}$

Logo o grafo original não é planar

Grafos eulerianos

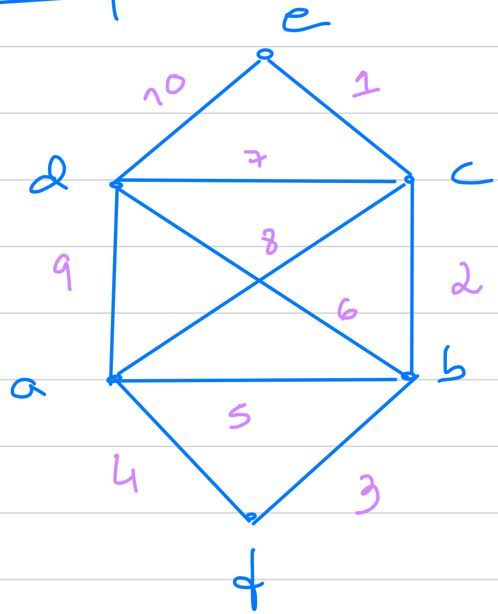
Def: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um caminho euleriano é um caminho simples que contém todas as arestas do grafo.

Def: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um circuito euleriano é um caminho euleriano onde o primeiro e o último vértice coincidem.

Def: Um grafo $G = (V, E)$ diz-se um grafo euleriano se existir um circuito euleriano em G.

Def: Um grafo $G = (V, E)$ diz-se um grafo semieuleriano se existir um caminho euleriano em G que não é circuito.

Exemplo:

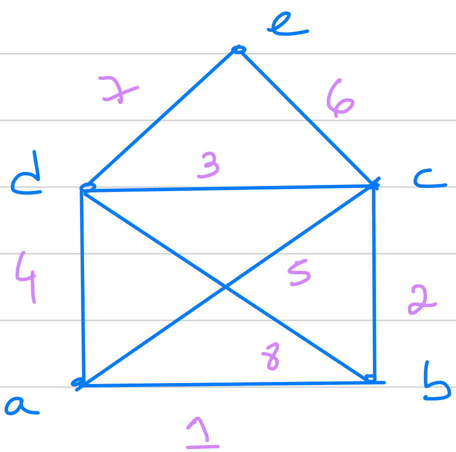


O caminho

$\langle e, c, b, f, a, b, d, c, a, d, e \rangle$

é um circuito euleriano

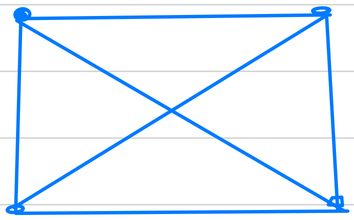
Exemplo



O caminho $\langle a, b, c, d, a, c, e, d, b \rangle$

é um caminho semi-euleriano

Exemplo



O grafo não é euleriano nem semi-euleriano.

Lema: Seja G um grafo conexo onde todos os vértices têm grau par. Então qualquer caminho simples pode ser estendido a um circuito simples

Dem: Ver sebenta

Teorema: Seja G um grafo conexo. Então G é euleriano se e só se todos os vértices têm grau par.

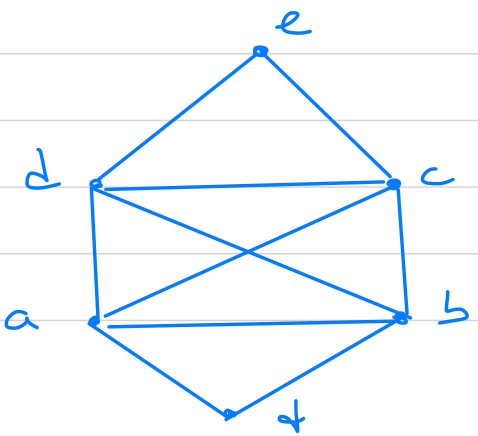
Dem: Ver sebenta.

Teorema: Um grafo conexo é semieuleriano se e só existem exatamente dois vértices de grau ímpar.

Grafos hamiltonianos

Def: Seja $G = (V, E)$ um grafo. Chama-se caminho hamiltoniano a qualquer caminho elementar que passa por todos os vértices de G. Chama-se ciclo hamiltoniano a um ciclo que contém todos os vértices.

Exemplo:



O caminho $\langle e, c, b, f, a, d \rangle$ é um caminho hamiltoniano e $\langle e, c, b, f, a, d, e \rangle$ é um ciclo hamiltoniano.

Def: Um grafo hamiltoniano é um grafo que contém um ciclo hamiltoniano.

Exemplos: Os grafos

- C_n, $n \geq 3$
- K_n, $n \geq 3$
- $K_{m,n}$ com $m = n \geq 2$

são todos hamiltonianos.

Nota: Não existe uma caracterização completa para grafos hamiltonianos. No entanto, existem algumas propriedades que nos podem ajudar a deduzir se um grafo é haltoniano ou não.

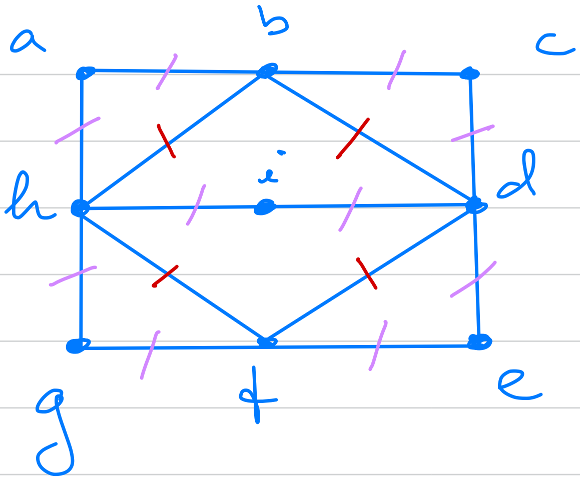
Propriedades: Se $G = (V, E)$ é hamiltoniano, então temos que:

(i) Se um vértice tem grau 2 então as duas arestas incidentes a esse vértice têm que fazer parte de qualquer ciclo hamiltoniano

(ii) Na construção do ciclo hamiltoniano, nenhum ciclo se pode formar até terem sido percorrido todos os vértices

(iii) Se na construção de um ciclo hamiltoniano duas arestas incidentes a um mesmo vértice são consideradas na construção então as restantes arestas incidentes a esse vértice não podem ser consideradas na construção.

Exemplo:



Por (i) as arestas a violeta teriam que ser consideradas na construção de um ciclo hamiltoniano

Por (ii) as arestas a vermelho não podem fazer parte do ciclo.

Teríamos com algumas das arestas a violeta o seguinte ciclo

<a, b, c, d, e, f, g, h, a> o que contradiz (ii) pois não

percorremos o vértice i.