Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC **Análise**

Exame de Recurso [Versão 1] 2019/2020

Proposta de Correção

Pergunta 9

Considere o integral duplo

$$\mathcal{I} = \int_0^2 \int_{x^2}^{x+4} (x-1)\, dy\, dx.$$

a) Esboce a região de integração do integral.

b) Calcule o valor de $\mathcal{I}$.

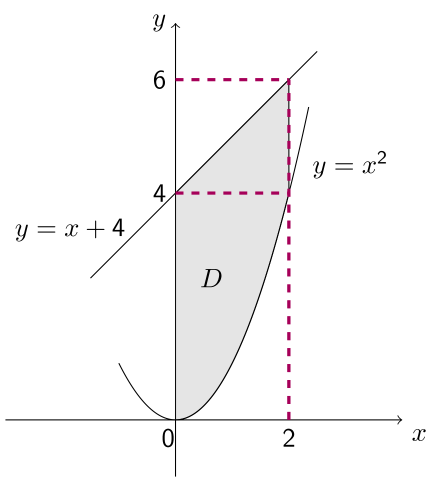
c) Como escreveria $\mathcal{I}$ se invertesse a ordem de integração?

d) Escreva um integral duplo que represente o valor da área da região de integração.

Nota: Nas alíneas c) e d) não calcule o valor de integral.

Resolução.

a)



b)

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int_0^2 \int_{x^2}^{x+4} (x-1)\, dy\, dx = \int_0^2 \left[(x-1)y\right]_{y=x^2}^{x+4} dx \\ &= \int_0^2 (x-1)\left[(x+4) - x^2\right] dx = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2 + 3x - 4)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{x=0}^2 = -\frac{1}{4} + \frac{16}{3} + 6 - 8 = \frac{37}{12}\end{aligned}$$

c) $\mathcal{I} = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} (x-1)\, dx\, dy + \int_4^6 \int_{y-4}^2 (x-1)\, dx\, dy$

d) $Area(D) = \int_0^2 \int_{x^2}^{x+4} 1\, dy\, dx$

Pergunta 10

Considere no espaço o deslocamento de uma partícula ao longo de uma curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 1, t)$, $t \geq 0$, sob a atuação do campo de forças $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Calcule a velocidade e a aceleração iniciais da partícula.

b) Determine uma equação do plano normal à curva no ponto $(2, 3, 2)$.

c) Mostre que $\mathbf{F}$ é um campo gradiente exibindo uma função escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\nabla} f = \mathbf{F}$.

d) Calcule o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$ no deslocamento da partícula entre os pontos $(0, -1, 0)$ e $(2, 3, 2)$.

Resolução.

a) Vetor velocidade: $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 1)$, $t \geq 0$. Vetor aceleração: $\mathbf{r}''(t) = (0, 2, 0)$, $t \geq 0$.
No instante inicial, $t = 0$, $\mathbf{r}'(0) = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{r}''(0) = (0, 2, 0)$.

b) Plano normal em $\mathbf{r}(2) = (2, 3, 2)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(2) \cdot \big((x, y, z) - (2, 3, 2)\big) = 0 &\iff (1, 4, 1) \cdot (x - 2, y - 3, z - 2) = 0 \\ &\iff x - 2 + 4y - 12 + z - 2 = 0 \iff x + 4y + z = 16\end{aligned}$$

c) Para f definida por $f(x, y, z) = xyz$, temos $\overrightarrow{\nabla} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy) = \mathbf{F}(x, y, z)$.

d) O trabalho realizado pela força $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$ é dado pelo integal de linha $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde $\mathcal{C}$ é a curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = (t, t^2 - 1, t)$ entre $t = 0$ e $t = 2$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^2 \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^2 \mathbf{F}(t, t^2 - 1, t) \cdot (t, t^2 - 1, t)'\, dt \\ &= \int_0^2 (t^3 - t, t^2, t^3 - t) \cdot (1, 2t, 1)\, dt \\ &= \int_0^2 (4t^3 - 2t)\, dt = \big[t^4 - t^2\big]_0^2 = 12.\end{aligned}$$

Pergunta 11 Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis e considere a curva em $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que os vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ são ortogonais quando $\|\mathbf{r}(t)\|$ assume um extremo local (máximo ou mínimo).

b) Verifique o resultado da alínea anterior para $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

Resolução.

a) Se $\|\mathbf{r}(t)\|$ assume um extremo local, então $\|\mathbf{r}(t)\|^2$ também assume um extremo local e teremos, necessariamente, $\big(\|\mathbf{r}(t)\|^2\big)' = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}\big(f^2(t) + g^2(t) + h^2(t)\big)' = 0 &\iff 2f(t)f'(t) + 2g(t)g'(t) + 2h(t)h'(t) = 0 \\ &\iff f(t)f'(t) + g(t)g'(t) + h(t)h'(t) = 0 \\ &\iff \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0 \\ &\iff \mathbf{r}(t) \text{ e } \mathbf{r}'(t) \text{ são ortogonais.}\end{aligned}$$

b) $\|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2} = \sqrt{1 + t^2} \geq 1$ e existe, portanto, um mínimo local (e absoluto) em $t = 0$. Vejamos que $\mathbf{r}(0) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$. De facto,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) \cdot \mathbf{r}'(0) &= (\cos t, \operatorname{sen} t, t)|_{t=0} \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)|_{t=0} \\ &= (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 1) = 0.\end{aligned}$$