Resolução explicada dos exercícios 1, 2 e 3 da folha 2 (tratados nas aulas PL dos dias 3, 4, 5 e 6 de novembro

exercício 1 No Matlab, tem-se

```
>> format long, pi

ans =

   3.141592653589793
```

Com 3 algarismos significativos corretos, é $\pi = \mathbf{3.14}$ e com 5 algarismos significatvos corretos é $\pi = \mathbf{3.1416}$ (ver p. 25 das notas das aulas: o o último dos algarismos pedidos deve ser arredondado, acrescentando-lhe uma unidade se o primeiro algarismo que se despreza é igual ou maior do que 5).

```
>> 1/11

ans =

   0.090909090909091
```

O primeiro algarismo significativo é, por definição, maior do que zero. Assim, as aproximações com 3 e 5 algarismos significativos corretos são, neste caso, **0.0909** e **0.090909**.

```
>> log(5)

ans =

   1.609437912434100
```

(nota: no Matlab, log(x) é o logaritmo natural (de base e) de x; log10 e log2 denotam os logaritmos de base 10 e 2, respetivamente). As aproximações neste caso são **1.61** e **1.6094**.

exercício 2a) Numa série alternada convergente, o valor absoluto do erro de truncatura é inferior ao valor absoluto do primeiro termo que se despreza. Por exemplo, denotando por S a soma da série dada (trata-se da série harmónica alternada) e $S_3 = 1-1/2+1/3$ a soma dos primeiros 3 termos, tem-se

$$|S - S_3| < 1/4.$$

Analogamente, $S_4 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4$ aproxima o valor de S com erro de truncatura (em valor absoluto) inferior a 1/5, etc.

Portanto, para a soma dos primeiros 999 termos

$$S_{999} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{999}$$

tem-se

$$|S - S_{999}| < 0.001$$

uma vez que o primeiro termos que se despreza é $-1/1000$.

Para calcular o valor de S_{999} no Matlab podemos executar

```
>> s999=0; for k=1:999, s999=s999+(-1)^(k+1)/k; end, s999

s999 =

   0.693647430559822
```

Nota final: a soma da série harmónica alternada é conhecida, é igual a log(2); sabendo isto, podemos agora confirmar que o valor calculado de s999 aproxima o vale da soma da série com erro de truncatura inferior a 0.001:

```
>> abs(s999-log(2))

ans =

     5.002499998769672e-04
```

exercício 2b) Para

$$S_{10} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots - \frac{1}{2^9}$$

tem-se

$$|S - S_{10}| < \frac{1}{2^{10}} < 0.001.$$

Calculamos a seguir o valor da aproximação.

```
>> s10=0; for k=0:9, s10=s10+(-1)^k/(2^k); end, s10


s10 =

   0.666015625000000
```

Nota 1: também neste caso o valor da soma da série é conhecido, $S = 2/3$, por se tratar da série geométrica cujo primeiro termo é 1 e a razão é -1/2. Em geral, a série geométrica

$$a_1 + a_1.r + a_1.r^2 + ...$$

(cada termo é obtido do anterior multiplicando pela razão r) é convergente se e só se $|r| < 1$ e, neste caso, a soma é

$$S = \frac{a_1}{1-r}.$$

Tal como na alínea a), podemos agora confirmar que o erro de truncatura é inferior a 0.001:

```
>> abs(s10-2/3)

ans =

     6.510416666666297e-04
```

Nota 2: embora ambas as séries tratadas sejam convergentes, a série geométrica de razão -1/2 converge muito mais rapidamente do que a série harmónica alternada. Se se pretender garantir um erro de truncatura inferior a 10^{-9}, teremos de somar os primeiros $10^9 - 1$ termos da série harmónica alternada (para a série geométrica de razão -1/2, bastam os primeiros 29 primeiros termos). A soma de um elevado número de termos requer um tempo de computação maior, obviamente. Ponha à prova a performance da sua máquina, executando no Matlab

```
>> n=10^9; tic, soma=0; for k=1:n, soma=soma+(-1)^(k+1)/k; end, soma, toc
```

exercício 3) Vamos usar o resto de ordem 8 do desenvolvimento da função *sin* em série de potências de x (usamos o resto de ordem 8 porque, neste caso, o polinómio de ordem 8 coincide com o polinómio de ordem 7). Tem-se (ver p. 41 das notas das aulas)

$$sin(x) = p_7(x) + R_8(x)$$

onde

$$R_8(x) = \frac{cos(\theta)}{9!}(\frac{\pi}{4})^9$$

e θ é um ponto (não determinado) que está entre 0 e $\frac{\pi}{4}$ (a derivada de ordem 9 da função *sin* é a função *cos*). Uma vez que $|cos(\theta)| < 1$ resulta

$$|p_7(\frac{\pi}{4}) - sin(\frac{\pi}{4})| < \frac{(\frac{\pi}{4})^9}{9!}.$$

nota 1: Porque a série é alternada, também neste caso se pode usar o valor do primeiro termo desprezado para majorar o erro, ou seja

$$|p_7(\frac{\pi}{4}) - sin(\frac{\pi}{4})| < \frac{(\frac{\pi}{4})^9}{9!}$$

que é afinal o mesmo majorante a que chegámos usando o resto de ordem 8.

nota 2: comparemos o majorante com o erro efetivamente cometido. O majorante:

```
>> (pi/4)^9/factorial(9)

ans =

     3.133616890378120e-07.
```

O erro de truncatura:

```
>> x=pi/4; p7=x-x^3/factorial(3)+x^5/factorial(5)-x^7/factorial(7); abs(p7-sin(pi/4))

ans =

     3.116113693746314e-07
```