
Nome:	Nº	Curso:
-------	----	--------

*Justifique todas as respostas, indique os cálculos intermédios e funções do R que utilizar.
As questões 1 e 2 valem 60% da nota do exame. As questões 3 e 4 valem os restantes 40%.
Duração: 2h30m.*

1. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ k & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x < 1 \vee x > 3 \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

- (a) Mostre que $k = \frac{3}{4}$ e determine a função de distribuição de X .
 - (b) Averigue se existem e, em caso afirmativo, calcule $E[X]$ e $Var[X]$.
 - (c) Seja Y uma v.a.r. tal que X e Y são i.i.d.'s. Calcule $P(X \geq Y)$.
 - (d) Suponha agora que X é uma v.a.r. que representa o tempo, em horas, que um atleta demora a efetuar uma certa prova desportiva.
 - i. Qual a probabilidade de um atleta demorar pelo menos 1h30m a efectuar a prova? Justifique.
 - ii. Calcule a probabilidade de, numa amostra aleatória de 5 atletas, haver pelo menos 3 atletas que demoram pelo menos 1h30m a efectuar a prova.
2. O Sr. José afirma que o número de defeitos num objecto por ele fabricado é uma v.a.r. Z tal que $Z \sim \text{Poisson}(3)$.
- (a) Qual probabilidade de um objecto fabricado pelo Sr. José ter mais do que 2 defeitos? Justifique.
 - (b) Sabendo que um objecto fabricado pelo Sr. José tem pelo menos um defeito, qual a probabilidade de ter mais do que 2 defeitos? Justifique.
 - (c) Qual a probabilidade de, entre 10 objectos fabricados pelo Sr. José, haver 8 objectos com mais do que 2 defeitos e haver 1 objecto sem qualquer defeito? Justifique.
 - (d) Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 50 objectos fabricados pelo Sr. José, a média do número de defeitos ser superior a 3.5? Justifique.
 - (e) O Sr. José aceita a devolução de um objecto por ele fabricado se o número de defeitos for superior a um certo valor k , com $k \in \mathbb{N}$. Qual é o menor valor de k que o Sr. José pode indicar de modo a que a probabilidade de um cliente devolver um objecto seja, no máximo, de 0.05? Justifique.
 - (f) Determine os quartis de Z .

Observação: Nas alíneas (c) e (d), assuma que o número de defeitos nos vários objectos são v.a.r.'s independentes.

(v.s.f.f.)

3. Numa certa população, 30% dos indivíduos possuem uma certa doença e os restantes são saudáveis. Dos que têm a doença, 40% possuem a forma contagiosa. Escolheu-se ao acaso um indivíduo nesta população.

- (a) Mostre que a probabilidade de o indivíduo escolhido ter a doença na forma não contagiosa é igual a 0.18.
- (b) Um teste clínico para detectar a doença dá positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em todos os casos contagiosos, em 50% dos casos doentes não contagiosos e em 10% dos casos saudáveis. Suponha que o indivíduo escolhido vai ser submetido a este teste clínico.
 - i. Qual a probabilidade de o teste clínico dar negativo? Justifique.
 - ii. Se o teste clínico der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser saudável? Justifique.
 - iii. Diga, justificando, se os seguintes acontecimentos A , B e C , são independentes:

A: "indivíduo escolhido é doente",
B: "o teste clínico deu resultado positivo",
C: "indivíduo escolhido tem a doença na forma contagiosa".

4. Sejam (Ω, \mathcal{A}, P) um espaço de probabilidade, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma v.a.r. e F a função de distribuição de X .

- (a) Mostre que, se $B \in \mathcal{A}$ é tal que $P(B) > 0$, então a função $P_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

é uma medida de probabilidade sobre (Ω, \mathcal{A}) .

- (b) Mostre que

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} F(c) = 0.$$

- (c) Considere $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq 0 \\ 2 & \text{se } a > 0 \end{cases}.$$

Prove que $h(X)$ é v.a.r. e determine, em função de F , a função de distribuição de $h(X)$.