Espaços Vetoriais **Exercícios**

1. Verifique que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são as aplicações definidas, respetivamente, por

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 - 3)$$
$$\alpha \odot (x_1, x_2) = \big(\alpha x_1, \alpha(x_2 - 3) + 3\big)$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Seja $V = \big\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\big\}$. Defina-se uma adição em V e uma multiplicação externa de $\mathbb{R} \times V$ em V por, respetivamente,

$$\big(x, x^2\big) + \big(y, y^2\big) = \big(x + y, (x + y)^2\big)$$
$$\alpha \cdot (x, x^2) = \big(\alpha x, (\alpha x)^2\big)$$

para quaisquer $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que $(V, +, \cdot)$ é uma espaço vetorial real.

3. Seja $\mathbb{R}_1[x] = \{a_1 x + a_0 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ o conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a 1 e de coeficientes reais. Considerando a adição de polinómios e a multiplicação de um real por um polinómio, prove que $\mathbb{R}_1[x]$ é um espaço vetorial.

4. Indique o elemento simétrico, para a adição, de cada um dos elementos do espaço vetorial indicado.

   (a) $(1, -2, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$.

   (b) $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (d) $x^3 - 2x^2 + 3x \in \mathbb{R}_3[x]$.

5. Verifique que

   (a) $F = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon a + b + c = 1\big\}$ não é uma subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   (b) $G = \big\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \colon ab = 1\big\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

   (c) $H = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ não é um subsespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (d) $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   (e) $H = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \colon d = -a,\ e = b,\ f = 2c\right\}$ é um subsespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que o conjunto N das soluções do sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

$$N = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\},$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

7. Justifique que não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes
   (a) invertíveis.
   (b) não invertíveis.
   (c) com a diagonal principal não nula.

8. Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial indicado.
   (a) $F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ em $\mathbb{R}^2$.
   (b) $F_2 = \{(0, a, b, -1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^4$.
   (c) $F_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a = b\}$ em $\mathbb{R}^3$.
   (d) $F_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a = b,\ c = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.
   (e) $F_5 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

9. Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços
$$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \colon a - b = 0,\ a - b - d = 0\}$$
e
$$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \colon b - c = 0,\ d = 0\}.$$
Mostre que $F \cap G = \{(c, c, c, 0) \colon c \in \mathbb{R}\}$.

10. Considere os seguintes subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:
$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0,\ y - z = 0\},$$
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0,\ z = 0\}.$$
   (a) Mostre que
      i. $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$.
      ii. $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Diga, justificando, se:
      i. $V_1 \subseteq V_2$, $V_2 \subseteq V_3$, $V_3 \subseteq V_2$;
      ii. $V_1 \cap V_3$, $V_1 \cup V_2$, $V_2 \cup V_3$ são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

11. Mostre que qualquer vetor (a, b) do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ se pode escrever como combinação linear dos vetores $(1, 0)$ e $(-3, 4)$.

12. Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, os vetores
$v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 1, -2)$, $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 0, 1)$.
Verifique se
   (a) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de v_1 e v_2.
   (b) $(1, 2, 4)$ é combinação linear de v_1 e v_2.
   (c) $(3, 0, 2)$ é combinação linear de u_1, u_2 e u_3.
   (d) $(0, 2, 1)$ é combinação linear de u_1, u_2 e u_3.

13. Considere o conjunto

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2c = 0,\ b = -c\}.$$

Mostre que $F = \langle(-2, -1, 1)\rangle$.

14. Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço $F = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle$.
Mostre que $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon c - b = 0\}$.

15. Determine os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ gerados por

(a) $\{(1, 1, 1)\}$

(b) $\{(0, 0, 0)\}$

(c) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(d) $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), (2, 3, 4)\}$

(e) $\{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (4, 8, 12)\}$

(f) $\{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (3, 6, 9\}$

16. Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathbb{R}^4$;

(b) $\{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = 0, 2b + d + c = 0\}$.

17. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, sejam $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, -1)$ e $W = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$. Indique, caso exista,

(a) um conjunto gerador de W que tenha exactamente 4 vetores.

(b) um conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ que gere W e tal que $w_j \neq v_1$, $\forall\ j \in \{1, 2, 3\}$.

(c) um conjunto gerador de W que tenha exactamente 2 vetores.

18. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Mostre que

(a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

19. Considere o espaço vetorial $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e os seus elementos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escreva, se possível, C como combinação linear de A e B.

20. Determine o subespaço do espaço vetorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por

(a) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

21. Nos espaços vetoriais indicados, diga se são linearmente independentes os vetores que se apresentam a seguir:

(a) $(1,1)$, $(2,2)$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $(1,1)$, $(-1,1)$ em $\mathbb{R}^2$.

(c) $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,1)$ em $\mathbb{R}^2$.

(d) $(0,1,1),(1,1,0),(2,1,0)$ em $\mathbb{R}^3$.

(e) $(0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1)$ em $\mathbb{R}^4$.

22. Verifique se os seguintes vetores do espaço vetorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ são linearmente independentes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$

23. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ tal que $\dim V = n$ e $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ elementos de V tais que $V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) $(\ v_1, v_2 ..., v_n)$ é uma base de V.

(b) Os vetores $v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.

(c) Os vetores $v_1, v_2, ..., \alpha v_i, ..., v_n$ são linearmente independentes.

(d) Os vetores $v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, ..., v_n$ são linearmente independentes.

24. Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\},$$
$$W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\},$$
$$W_2 =< (1,1,1,0), (-1,1,0,1), (1,3,2,1), (-3,1,-1,2) >.$$

(a) Diga, justificando, se $((1,1,1,1),(0,1,0,0),(1,0,0,1))$ é uma base de U.

(b) Determine uma base de i. W_1. ii. W_2.

25. Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (\alpha, 6, -1),\ v_2 = (1, \alpha, -1),\ v_3 = (2, \alpha, -3).$$

(a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector $v = (-1,1,2)$ em relação à base (v_1, v_2, v_3).

26. Indique, se existir, uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ da qual façam parte os vetores:

(a) $(1,0,-1),(1,0,1)$.

(b) $(0,1,1),(0,1,0)$.

(c) $(1,-1,-1),(-2,2,2)$.

(d) $(1,-1,-1),(0,1,2),(1,0,1)$.

27. Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

   (a) Determine um conjunto gerador de F.
   (b) Averigue se o conjunto encontrado na alínea anterior é linearmente independente.
   (c) Indique a dimensão e uma base de F.
   (d) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $F =< (1, 0, -1), (-1, 1, \alpha) >$.

28. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ e $F = \{(a, a, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Verifique que F é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Calcule dim F.
   (c) Seja H um subespaço de $\mathbb{R}^4$ tal que $H =< u_1, u_2, u_3 >$ e $u_1 + 2u_2 = u_1 + u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$. O que pode afirmar sobre dim H?
   (d) Supondo que $u_1 = (-4, -2, 0, 2), u_2 = (2, 1, 0, -1)$ e $u_3 = (-2, -1, 0, 1)$, calcule uma base de $H \cap F$.

29. Sejam V um espaço vetorial e $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto de vetores de V linearmente independente. Mostre que os seguintes conjuntos também são linearmente independentes:

   (a) $\{v_1, v_2\}$
   (b) $\{v_1, v_1 + v_2\}$
   (c) $\{2v_1, v_1 + v_2, -v_1 + v_3\}$
   (d) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$

30. Indique para que valores de α o conjunto $\{(\alpha, 6), (1, \alpha)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

31. Determine uma base e a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + 3z = 0,\ z - 2w = 0\}.$$

32. Considere o conjunto $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ e os vetores $u_1 = (0, 2, 0)$, $u_2 = (1, 0, 0)$ e $u_3 = (-1, 6, 0)$.

   (a) Verifique que $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.
   (b) O conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de F?
   (c) Diga qual é a dimensão de F.

33. Sejam V um espaço vetorial e $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V$ tais que $V = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\{u_1, u_2\}$ é um conjunto linearmente independente, $u_3 = 2u_1$ e $u_4 = u_1 + u_2$. Diga quais das afirmações seguintes são verdadeiras.

   (a) $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é um conjunto gerador de V.
   (b) $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto linearmente independente.
   (c) $\{u_3, u_2\}$ é um conjunto linearmente independente.
   (d) $V = \langle u_2, u_3, u_4 \rangle$.
   (e) $\{u_2, u_4\}$ é uma base de V.
   (f) $\dim(V) = 3$.

Soluções

4. (a) $(-1,2,-3,0)$

   (b) $(0,0,0)$

   (c) $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 0\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (d) $-x^3+2x^2-3x$

5. (a) $(0,0,0) \notin F$ (b) $(0,0) \notin G$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \notin H$

7. (a) A matriz nula não pertence ao conjunto das matrizes invertíveis.

   (b) A soma de duas matrizes não invertíveis pode não ser uma matriz não invertível. Por exemplo, para $n=3$, as matrizes

   $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

   são não invertíveis e a sua soma é a matriz I_n que é uma matriz invertível.

   (c) As matrizes I_n e $-I_n$ têm diagonal principal não nula e, no entanto, a sua soma é a matriz nula (a matriz nula não pertence ao conjunto das matrizes com diagonal principal não nula).

8. São subespaços vetoriais apenas os conjuntos F_3 e F_4.

9. $F \cap G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon a-b=0,\ a-b-d=0,\ b-c=0,\ d=0\}$.

   Precisamos resolver um sistema nas incógnias a,b,c e d com matriz ampliada

   $$\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\cdots]{} \left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad \text{(forma em escada reduzida).}$$

   Solução do sistema: $d=0,\ b=c,\ a=c,\ c\in\mathbb{R}$. Ou seja, $F\cap G = \{(c,c,c,0)\colon c\in\mathbb{R}\}$

10. (b) i. Observe-se que $V_1 = \{(a,b,0)\in\mathbb{R}^3 : a,b\in\mathbb{R}\}$.
    É falso que $V_1 \subseteq V_2$ (temos, no entanto, $V_2 \subseteq V_1$).
    É falso que $V_2 \subseteq V_3$. Por exemplo, $(1,0,0)\in V_2$ e $(1,0,0)\notin V_3$.
    É falso que $V_3 \subseteq V_2$. Por exemplo, $(2,1,0)\in V_3$ e $(2,1,0)\notin V_2$.

    ii. $V_1\cap V_3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. A interseção de quaiquer dois subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

    $V_1\cup V_2 = V_1$, uma vez que $V_2\subseteq V_1$. Logo, $V_1\cup V_2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

    $V_2\cup V_3$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, $(1,0,0)\in V_2$, $(2,1,0)\in V_3$ e, portanto, $(1,0,0),(2,1,0)\in V_2\cup V_3$ mas $(1,0,0)+(2,1,0)=(3,1,0)\notin V_2\cup V_3$, pois $(3,1,0)\notin V_2$ e $(3,1,0)\notin V_3$. Ou seja, o conjunto $V_2\cup V_3$ não é fechado para a adição.

11. Dado $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, resolvendo o sistema $(a,b)=\alpha(1,0)+\beta(-3,4)$, na incógnitas α e β, obtemos a solução $\alpha = a+\frac{3}{4}b$ e $\beta=\frac{b}{4}$. Ou seja, qualquer vetor $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ se decompõe na forma

    $$(a,b) = \left(a+\tfrac{3}{4}b\right)\cdot(1,0)+\tfrac{b}{4}\cdot(-3,4).$$

12. (a) Sim. $(1,4,-5) = 3(1,-1,1)-(2,1,-2)$

    (b) Não.

(c) Sim. $(3,0,2) = (2-\gamma)\cdot(-1,0,1) + (5-2\gamma)\cdot(1,0,0) + \gamma(1,0,1), \gamma \in \mathbb{R}$.

(d) Não.

13. $F = \{(-2c,-c,c) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(-2,-1,1) : c \in \mathbb{R}\} = \langle(-2,-1,1)\rangle$.

14. $F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a,b,c) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,1), \text{ com } \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$

Pretende-se, portanto, determinar os vetores $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tais que o sistema nas variáveis α, β e γ com matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longrightarrow l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-b \end{array}\right]$$

tem solução. O sistema é possível se e só se $c - b = 0$.

15. (a) $\{(a,a,a) : a \in \mathbb{R}\}$
(b) $\{(0,0,0)\}$
(c) $\mathbb{R}^3$
(d) $\mathbb{R}^3$
(e) $\{(a,2a,3a) : a \in \mathbb{R}\}$
(f) $\{(a,2a,3a) : a \in \mathbb{R}\}$

16. (a) Por exemplo,

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \quad \text{e} \quad \{(2,0,0,0),(0,2,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,3)\}.$$

(b) Por exemplo, $\{(1,-1,0,0),(0,1,1,2)\}$ e $\{(2,-2,0,0),(0,3,3,6)\}$.

(c) Por exemplo, $\{(-1,0,1,-1),(0,1,0,-2)\}$ e $\{(-1,0,1,-1),(-1,1,1,-3)\}$.

17. (a) Por exemplo, $\{v_1, v_2, v_3, 2v_1\}$.

(b) Por exmplo, $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\} = \{v_1+v_2, v_2, v_3\}$.

(c) Por exemplo, $\{v_1, v_2\}$. Note-se que $v_3 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$.

18. (a) Basta verificar que os três vetores são linearmente independentes. Com $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, qualquer conjunto com três vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(b) Existem no conjunto três vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes.

(c) Para que um conjunto seja gerador de $\mathbb{R}^3$ tem de conter três vetores linearmente independentes.

19. Não é possível.

20. (a) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

(b) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$

(c) $\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}$

21. (a) lin. dependentes.
(b) lin. independentes.
(c) lin. dependentes.
(d) lin. independentes.
(e) lin. dependentes.

22. (a) lin. dependentes.
    Verifique o sistema de quatro equações nas incógnitas α, β, γ e δ definido por

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

    não tem apenas a solução nula $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

    (b) lin. independentes.

23. (a) Verdadeiro. Dado que $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ e $\dim(V) = n$, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes e, portanto, $\big(v_1, v_2, \ldots, v_n\big)$ é uma base de V. Qualquer conjunto gerador de V com n vetores é uma base de V.

    (b) Verdadeiro. Como $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ e $v_{n+1} \in V$, v_{n+1} é combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

    (c) Verdadeiro.

    (d) Verdadeiro.

24. (a) Não. $U = \langle (1,0,1,1), (0,1,0,0) \rangle = \langle (1,1,1,1), (0,1,0,0) \rangle \subseteq \langle (1,1,1,1), (0,1,0,0), (1,0,0,1) \rangle$
    Repare-se que $(1,0,0,1) \notin U$ e, portanto, $U \subset \langle (1,1,1,1), (0,1,0,0), (1,0,0,1) \rangle$.

    (b) i. Base de $W_1 : \big((1,0,0,1), (-2,-2,1,0)\big)$ ii. Base de $W_2 : \big((1,1,1,0), (-1,1,0,1)\big)$

25. (a) $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -\frac{3}{2}$. Sugestão: discuta a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 2 & \alpha & -3 \\ \alpha & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Para, por exemplo, $\alpha = 1$, as coordenadas de v na base (v, v_2, v_3) são $(1/5, 4/5, -1)$.

26. Por exemplo,

(a) $\big((1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\big)$

(b) $\big((0,1,1),(0,1,0),(1,0,0)\big)$

(c) Não existe.

(d) Não existe.

27. (a) $F = \langle(-2,1,0),(-1,0,1)\rangle$

(b) Sim.

(c) $\dim(F) = 2$

(d) Determinar α de forma que $(-1,1,\alpha) \in F$. Obtém-se $\alpha = -1$.
Repare-se que $F = \langle(-2,1,0),(1,0,-1)\rangle = \langle(-2,1,0)+(1,0,-1),(1,0,-1)\rangle$

28. (a) $F = \langle(1,1,2,0),(0,0,0,1)\rangle$

(b) $\dim(F) = 2$

(c) $H = \langle u_2\rangle$. Se $u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, $\dim(H) = 1$.

(d) $H \cap F = \{(0,0,0,0)\}$. Diz-se que H tem por base o conjunto vazio.

29. (d) Sabemos que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_V \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. Assim,

$$\alpha(v_1+v_2)+\beta(v_1+v_3)+\gamma(v_2+v_3) = 0_V \Longrightarrow (\alpha+\beta)v_1+(\alpha+\gamma)v_2+(\beta+\gamma)v_3 = 0_V$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \gamma=0 \\ \beta=0 \end{cases}$$

30. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$.

31. Base de F : $\big((1,1,0,0),(-6,0,2,1)\big)$, por exemplo; $\dim(F) = 2$.

32. (a) Observe-se que qualquer vetor $(x,y,0) \in F$ se pode escrever da forma

$$(x,y,0) = x(1,0,0)+y(0,1,0) = x(1,0,0)+\frac{y}{2}(0,2,0) = x(1,0,0)+\frac{y}{2}(0,2,0)+0\cdot(-1,6,0).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} F = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle = \langle(1,0,0),(0,2,0)\rangle &= \langle(1,0,0),(0,2,0),(-1,6,0)\rangle \\ &= \langle u_2,u_1,u_3\rangle = \langle u_1,u_2,u_3\rangle \end{aligned}$$

(b) Não. O conjunto $\{u_1,u_2,u_3\}$ é gerador de F mas não é linearmente independente.

(c) $\dim(F) = 2$.

33. (a) V (b) F (c) V (d) V (e) V (f) F