

1.2 Limite e Continuidade

Limite

- Definição de limite

- Limites trajetoriais

- Resultados sobre o limite

Continuidade

- Definição de continuidade

- Aritmética das funções contínuas

- Continuidade da função composta

Noção de limite

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, função de uma variável real

Escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R},$$

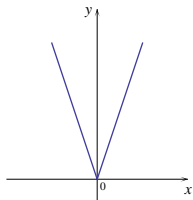
quando os valores de f se aproximam de ℓ à medida que x se aproxima do ponto a , por valores à esquerda ou à direita de a .

É necessário que a seja *um ponto de acumulação* de D .

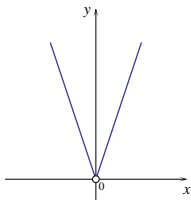
Exemplo

[Análise intuitiva da existência de limite na origem]

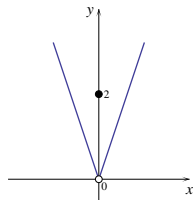
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3|x| \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3|x| \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \mapsto & 3|x| \\ x = 0 & \mapsto & 2 \end{array}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$$

Definição de limite ($n = 1$)

Dizemos que $\ell \in \mathbb{R}$ é o limite de f quando x tende para a e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell,$$

quando é possível tornar a distância de $f(x)$ a ℓ arbitrariamente pequena, desde que se tome x em $D \setminus \{a\}$ suficientemente próximo de a .

Simbolicamente,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

se e só se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

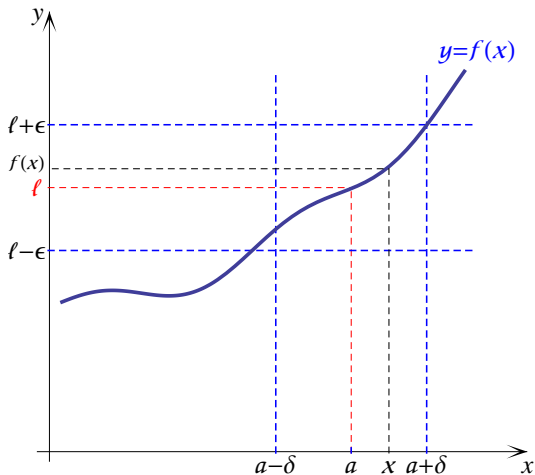


Figura 1: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - l| < \epsilon$.

Temos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

se e só se existem e são iguais a ℓ os correspondentes limites laterais, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell.$$

Consequentemente, se os **limites laterais não existirem** ou **se existirem mas forem diferentes**, concluímos que

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

2. $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, função de duas variáveis reais

Noção de distância

Bola (aberta) de centro em (a, b) e raio $r > 0$

$$B_r(a, b) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r \right\}$$

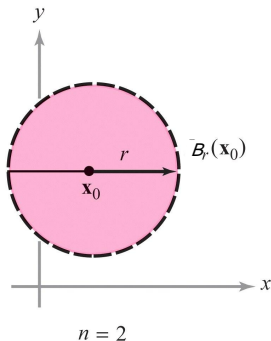


Figura 2: Bola (aberta) de centro em $x_0 = (a, b)$ e raio r

Definição de limite ($n = 2$)

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis definida numa bola com centro (a, b) , exceto possivelmente em (a, b) .

Dizemos que o limite de f quando (x, y) tende para (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

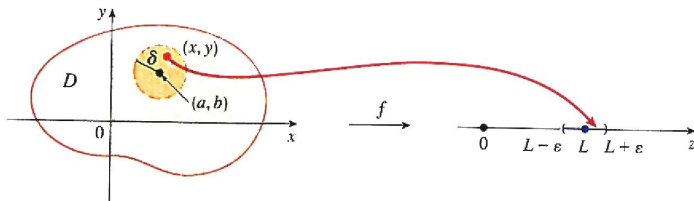
quando é possível tornar $f(x, y)$ arbitrariamente próximo de L desde que se tome (x, y) no domínio de f suficientemente próximo de (a, b) .

Simbolicamente,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

se e só se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$



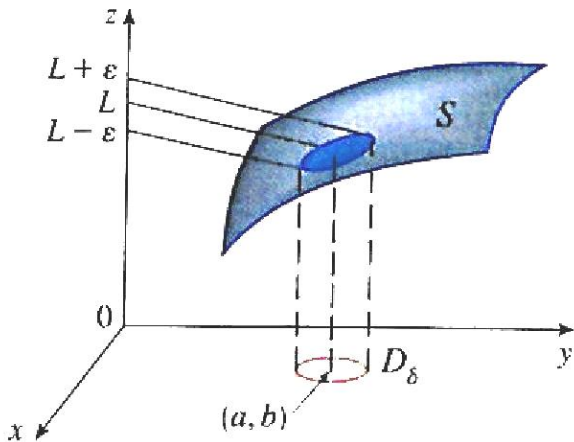
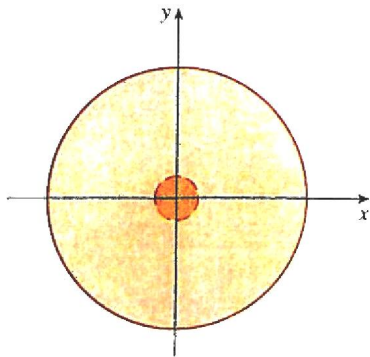
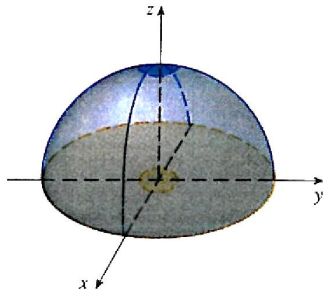


Figura 3: $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$

Exemplo



(a) Domínio de f



(b) Gráfico de f

Figura 4: $f(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$

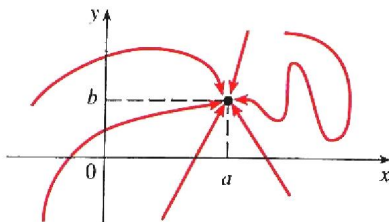
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{9 - (x^2 + y^2)} = 3$$

Limites trajetoriais

A definição de limite refere a **distância entre (x, y) e (a, b)** mas não a direção de aproximação.

Quando consideramos que (x, y) se aproxima de (a, b) ao longo de uma determinada **curva C** , isto é, quando $(x, y) \in C$, estamos a considerar um **limite trajectorial** e escrevemos

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (a, b) \\ (x, y) \in C}} f(x, y)$$



Se o $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ existir, será independente da trajetória descrita pelo ponto (x,y) quando se aproxima de (a,b) , ou seja, os limites trajetoriais são iguais qualquer que seja a curva C .

Consequentemente, se

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C_1}} f(x,y) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in C_2}} f(x,y) = L_2,$$

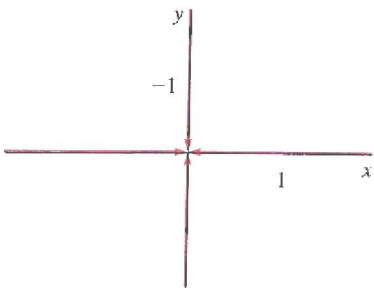
com $L_1 \neq L_2$, podemos concluir que

$$\text{n\~ao existe } \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y).$$

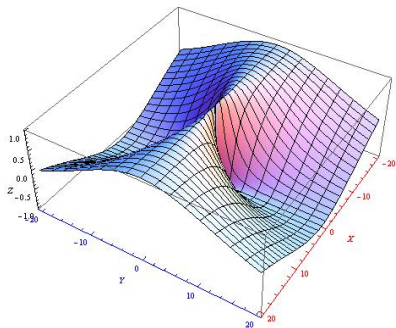
Exemplo

Não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ uma vez que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1.$$



(a) Limites trajetoriais



(b) Gráfico de f

Figura 5: $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Exemplo

Estudemos a existência de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Temos

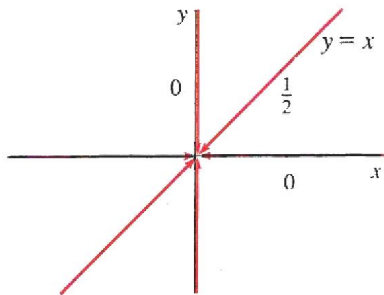
$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0,$$

mas nada podemos concluir quanto à existência do limite, a não ser que, se existir, será igual a zero.

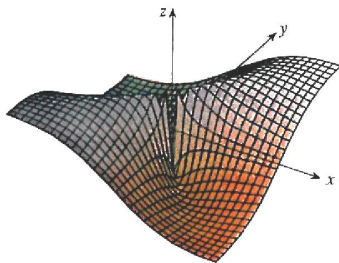
No entanto,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

Logo, *não* existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.



(a) Limites trajetoriais



(b) Gráfico de f

Figura 6: $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Exercício

Estude a existência de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Sugestão: considere os limites ao longo das retas $y = mx$, $m \neq 0$, e ao longo da parábola $y = x^2$.

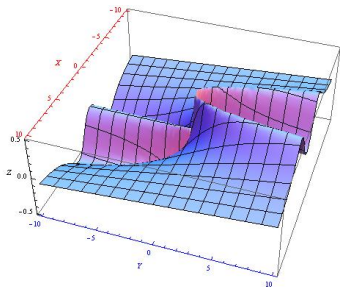


Figura 7: Gráfico de $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Exemplo

Determine, se existir,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}.$$

Solução. Podemos mostrar que o limite ao longo de uma reta qualquer que passa pela origem é 0, mas isto não prova a existência do limite igual a 0. Contudo, também ao longo das parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ obtemos o limite 0, o que nos leva a suspeitar que o limite exista e seja igual a 0. Vamos, então, tentar provar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

usando a definição de limite apresentada na página 9.

Seja $\varepsilon > 0$. Pretendemos determinar $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta,$$

ou seja,

$$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Mas $x^2 < x^2 + y^2$ uma vez que $y^2 \geq 0$, logo $x^2/(x^2 + y^2) \leq 1$ e, portanto,

$$\frac{3x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Então, se escolhermos $\delta = \varepsilon/3$ e sendo $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, temos

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta = 3\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \varepsilon,$$

como pretendíamos verificar.

Definição de limite (caso geral)

Seja f uma função real de n variáveis reais,

$$\begin{aligned} f: \quad D \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

e (a_1, a_2, \dots, a_n) um ponto de acumulação do domínio D .

Dizemos que o **limite de f quando (x_1, x_2, \dots, x_n) tende para (a_1, a_2, \dots, a_n) é L** e escrevemos

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = L$$

se e só se para qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} < \delta \implies |f(x_1, x_2, \dots, x_n) - L| < \varepsilon.$$

Resultados sobre o limite ($n = 2$)

Sejam $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto de acumulação de D .

1. [Unicidade]

Se existir $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$, então l é **único**.

2. [Aritmética dos limites]

Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = m$, então

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = l \pm m$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = l \cdot m$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{l}{m}, \quad m \neq 0$

3.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \lambda = \lambda \quad (\lambda \text{ constante})$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$

4. [Produto de uma função limitada por um infinitésimo]

Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = 0$ e g é limitada em $D \setminus \{(a,b)\}$, então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0.$$

5. [Lei do enquadramento]

Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = l$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = l$ e

$$f(x,y) \leq h(x,y) \leq g(x,y), \text{ numa vizinhança } B_r(a,b),$$

então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x,y) = l.$$

Estes resultados generalizam-se de forma natural para funções com n variáveis e permitem o cálculo de limites sem recorrer à definição.

Continuidade

$$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

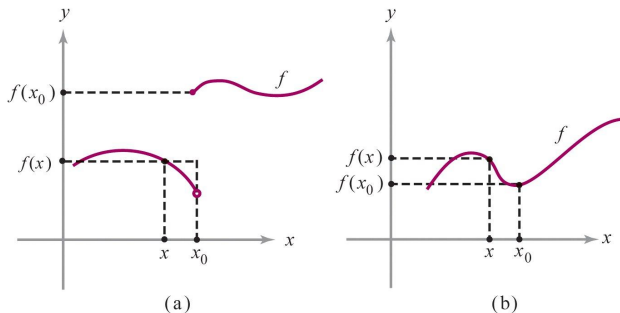
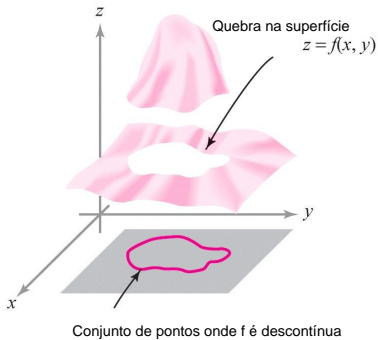
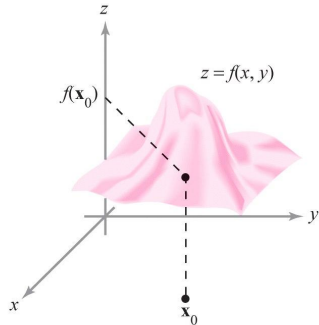


Figura 8: (a) f descontínua em x_0 (b) f contínua em x_0

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$



(a)



(b)

Figura 9: (a) f descontínua

(b) f contínua no seu domínio

Consideremos uma função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e (a, b) um ponto pertencente a D e também ponto de acumulação de D .

Dizemos que f é contínua em (a, b) quando

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Designa-se por *domínio de continuidade* de f o subconjunto de D formado pelos pontos onde f é contínua. Dizemos que f é contínua se é contínua em D .

1. [Aritmética de funções contínuas]

Sejam $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em (a, b) . Então,

- $f + g, \lambda f, f \cdot g$ são contínuas em (a, b) ($\lambda \in \mathbb{R}$);
- $\frac{f}{g}$ é contínua em (a, b) desde que $g(a, b) \neq 0$.

2. Se $g: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em a e $h: B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em b , então $f: A \times B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

é contínua em (a, b) .

Exemplos relevantes

- Toda a **função constante** é contínua.
- Qualquer **função polinomial** de duas variáveis é contínua.

Uma função $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se polinomial quando é a soma finita de parcelas do tipo

$$cx^m y^n,$$

onde c é uma constante real e m e n são inteiros não negativos.

- Toda a **função racional** é contínua no seu domínio.

Uma função $p: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se racional quando é definida pelo quociente entre duas funções polinomiais.

- A **função norma** $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ é contínua.
- Toda a **aplicação linear** $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Continuidade da função composta

Sejam $g: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f: B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $g(A) \subset B$. Se g é contínua em (a, b) e f é contínua em $c = g(a, b)$, então a função composta

$$\begin{aligned} f \circ g: A \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(g(x, y)) \end{aligned}$$

é contínua em (a, b) .

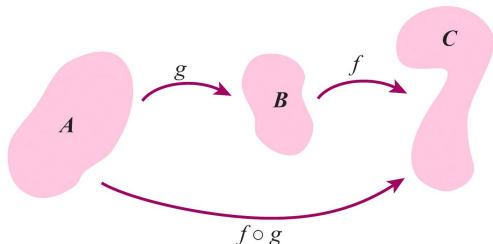


Figura 10: Composição $f \circ g$

Sendo f uma função real de n variáveis reais,

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

e (a_1, a_2, \dots, a_n) um ponto pertencente a D e ponto de acumulação de D , dizemos que f é contínua em (a_1, a_2, \dots, a_n) quando

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

e os resultados apresentados para $n = 2$ também se aplicam (devidamente adaptados).