UNIVERSIDADE DO MINHO

Geometria

Curso: M. C. C. **Segundo teste - 27 Mai 2022**

Nota. Justifique pormenorizadamente todas as respostas.

1. Considere a cónica definida pela equação

$$x^2 + 2y^2 + 4xy + 3x + 4y + 1 = 0$$

   a) (3 val) Mostre que a cónica é não degenerada.

   b) (3 val) Classifique a cónica.

2. Considere a cónica definida pela equação

$$x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$$

   a) (3 val) Mostre que a cónica é degenerada.

   b) (2 val) Usando o caso notável da multiplicação mais apropriado, escreva a expressão

$$x^2 + y^2 + 2xy$$

   na forma de um quadrado de uma soma.

   c) (3 val) Seja z um número real qualquer. Notando que

$$z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$$

   e considerando $z = x + y$, mostre que a cónica é uma reta.

3. Considere a translação $T_{(1,2)}$ de $\mathbb{R}^2$ associada ao vetor $(1,2) \in \mathbb{R}^2$, que está definida por

$$T_{(1,2)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T_{(1,2)}(x,y) = (x+1, y+2)$$

   Denote por C e $\widehat{C}$ as seguintes circunferências:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\}$$

   e

$$\widehat{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1\}$$

   a) (3 val) Mostre que $T_{(1,2)}(C) = \widehat{C}$.

   b) (3 val) Indique se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa, justificando pormenorizadamente a sua resposta:

   Existe uma isometria de $\mathbb{R}^2$ que transforma a circunferência C na circunferência $\widehat{C}$.

$* * *$ **FIM** $* * *$