Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

2º Trabalho de Grupo de Análise - 5 Mai

Nome: Proposta de Resolução Número:________

Nome: ______________________________ Número:________

---

1. Determine, ou justifique que não existem, os extremos locais da função $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \ln(y) - x^2y - y.$$

2. Determine os extremos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$, vinculada à condição:
$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

$\boxed{1}$ Pontos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ \dfrac{1}{y} - x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{1}{y} - 1 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ \text{---} \end{cases}$$

impossível pois não pertence ao domínio de f.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad (0,1)$$

$$Hess\, f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -\dfrac{1}{y^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Hess} f(0,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios da matriz hessiana de f em $(0,1)$ são negativos, logo $f(0,1) = \ln(1) - 0^2 \times 1 - 1 = -1$ é máximo local.

$\boxed{2}$ Para $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = x^2 - 2x + y^2$, pelo método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x, 2y) = \lambda(2x-2, 2y) \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2x - 2\lambda \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y(1-\lambda) = 0 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2x - 2 \\ \lambda = 1 \\ \text{———} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{———} \\ y = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2 \\ \lambda = 1 \text{ (impossível)} \\ \text{———} \end{cases} \text{ ou}$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ y = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases} \qquad (0,0); (2,0) \quad \text{~~são os pontos críticos de f~~}$$

Pontos singulares

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = \vec{0} \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ 1 - 2 + 0 = 0 \end{cases} \text{ impossível (não há pontos singulares)}$$

Sendo $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 = 0\}$ um conj.^{to} fechado e limitado, então $f_{|K}$ tem máximo e tem mínimo, donde

$f(0,0) = 0$ é mínimo de f condicionado por $g(x,y) = 0$.

$f(2,0) = 4$ é máximo de f condicionado por $g(x,y) = 0$.