Departamento de Matemática	Universidade do Minho
Tópicos de Matemática	3º teste – 15 dez 2023
Lic. em Ciências de Computação - 1º ano	duração: duas horas

Nome ____ Nº ____________________

Grupo I. Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Dado um conjunto A, para todas as funções f e g de A em A, se $g \circ f$ é injetiva, então f e g são injetivas. V☐ F☐

2. Dados A e B conjuntos e f função de A em B, para todos os subconjuntos X e Y de A, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ V☐ F☐

3. Se θ é uma relação de equivalência num conjunto A e $a, b \in A$, então $[a]_\theta$ e $[b]_\theta$ têm o mesmo número de elementos. V☐ F☐

4. O conjunto $\{\{\{1\}, \{2\}\}, \{3\}, \{\{4, 5\}\}\}$ é uma partição de $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$. V☐ F☐

5. Para $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2\}$, $\omega_{\{1,4\}} \cup \omega_{\{2,3\}}$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$. V☐ F☐

6. Se R é uma relação de ordem parcial num conjunto A e $a, b, c \in A$ são tais que $(c, b), (a, c), (b, a) \in R$, então $a = b = c$. V☐ F☐

7. Para qualquer c.p.o. $(A, \leq)$ e qualquer subconjunto não vazio X de A, se X admite um elemento maximal, então $A \backslash X$ admite um elemento minimal. V☐ F☐

8. Para quaisquer c.p.o.'s A e B e qualquer função isótona $f : A \to B$, se $x, y \in A$ são tais que $f(x) || f(y)$, então $x || y$. V☐ F☐

Grupo II. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

1. uma relação binária cujo fecho de equivalência é $\theta = \omega_{\{1,2,3\}} \cup \omega_{\{4,5\}} \cup \omega_{\{6\}}$ em A;

2. uma função f de A em A injetiva mas não sobrejetiva;

3. uma função f de A em $A \times A$ tal que $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(X)) = X$, para todo $X \subseteq A$;

4. uma relação de ordem parcial $\leq$ em A tal que 1, 2 e 3 são os únicos elementos maximais de A e 4 e 6 são os únicos elementos minimais de A.

Grupo III. Sejam A um conjunto não vazio, $a \in A$ e ρ a relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ por

$$X \ \rho \ Y \Leftrightarrow X \backslash \{a\} = Y \backslash \{a\} \qquad (X, Y \subseteq A).$$

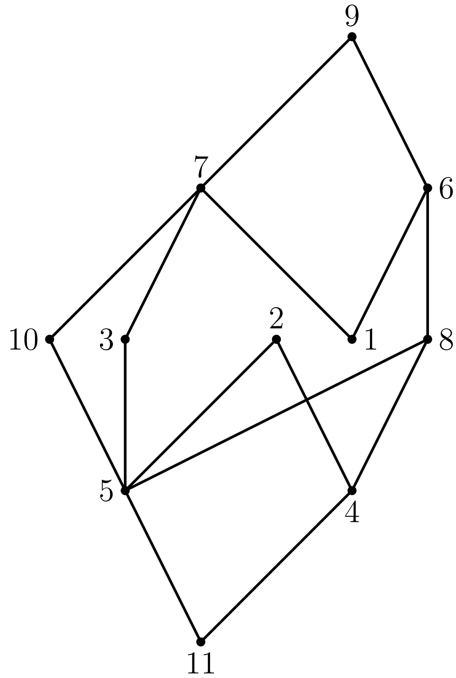
1. Mostre que ρ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

2. Determine as classes $[\emptyset]_\rho$ e $[A]_\rho$.

3. Considere a função $f : A \to \mathcal{P}(A)/\rho$ definida por $f(x) = [\{x\}]_\rho$, para todo $x \in A$. Mostre que se f é sobrejetiva então A tem, no máximo, 2 elementos.

4. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $a = 2$, indique o conjunto quociente definido por ρ.

Grupo IV. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse apresentado. Indique, caso exista:



1. Maj $\{2, 5, 8, 10\}$;

2. inf$\{2, 8\}$:

3. $\inf \emptyset$ e $\sup \emptyset$;

4. Um subconjunto X de A com cinco elementos maximais;

5. Um subconjunto X de A com 6 elementos que é um reticulado para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. A;

6. Um subconjunto X de A tal que Maj $X =$ Min X.

[Cotação:] **GRUPO I.** $8 \times 1.0 = 8.0$ **GRUPO II.** $4 \times 1.0 = 4.0$ **GRUPO III.** $1.5+1.0+1.0+1.5 = 5.0$ **GRUPO IV.** $6 \times 0.5 = 3.0$.