Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação - 1º ano

2º teste - 18 dez 2015 Duração: 2 horas

1. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Sejam A, B e C conjuntos não vazios. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções não constantes, então, $g \circ f : A \to C$ é uma função não constante;

   (b) Sejam A e B conjuntos. Então, $\mathcal{R} = \omega_A \cup \omega_B$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$;

   (c) Seja $(A, \leq)$ um c.p.o. Se existe $\inf \emptyset$ então A admite um elemento maximal;

   (d) Sejam A, B e C conjuntos. Se $A \cup C \sim B \cup C$ então $A \sim B$.

2. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

   (a) uma função sobrejetiva $f : A \to A$ tal que a relação binária f^{-1} não é uma função;

   (b) uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em A tal que $A/\mathcal{R} = \{[1]_{\mathcal{R}}, [2]_{\mathcal{R}}\}$;

   (c) uma ordem parcial $\leq$ em A tal que $(A, \leq)$ é um c.p.o. no qual não existe $\inf \emptyset$ nem $\sup \emptyset$.

   (d) $(A, \mathcal{R})$ é um reticulado mas não é um conjunto bem ordenado.

3. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, definida por $f(m, n) = (mn, m^2)$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

   (a) Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x| = |y| = 1\}$, determine $f(A)$.

   (b) Se $B = \{0, 2\} \times \{2, 0\}$, determine $f^{\leftarrow}(B)$.

   (c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou injetiva.

4. Seja θ a relação binária definida em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ por

$$(x, y)\ \theta\ (a, b) \Leftrightarrow x - y = a - b \qquad\qquad (x, y, a, b \in \mathbb{N}_0).$$

   (a) Mostre que θ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

   (b) Determine as classes $[(0, 2)]_\theta$ e $[(2, 0)]_\theta$.

   (c) Mostre que $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\theta \sim \mathbb{Z}$.

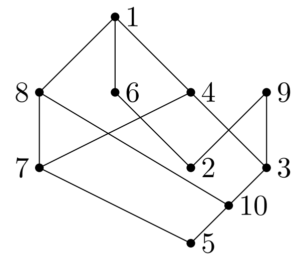
5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

   (a) Indique, caso exista:

      i. Maj $\{7, 10\}$;

      ii. $\sup \emptyset$;

      iii. um subconjunto de A com 5 elementos que admita máximo e mínimo.



   (b) Será $(A, \leq)$ um reticulado? Justifique.

Cotação: **1.** 4 × 1.0 **2.** 4 × 1.0 **3.** 3 × 1.5 **4.** 2 × 1.5 + 2.0 **5.** 3 × 0.5 + 1.0