

# Primitivas e integrais indefinidos

A primitivação é uma operação efetuada num subconjunto do conjunto das funções reais de variável real e corresponde, num certo sentido, à operação inversa da operação de derivação.

## Definição

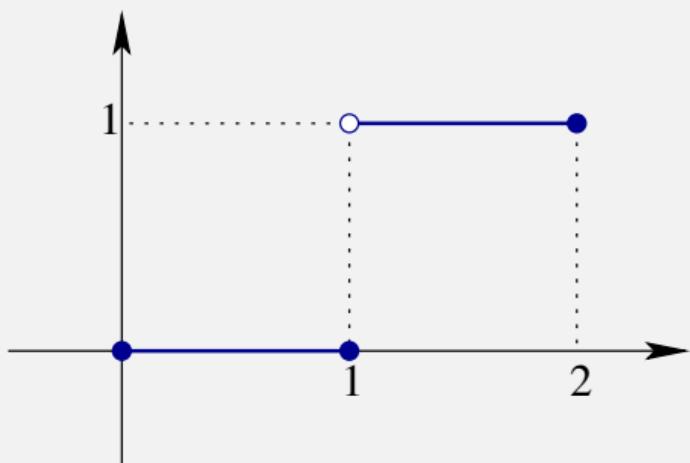
Seja  $X$  uma união finita de intervalos de  $\mathbb{R}$ . Dada uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , diz-se que uma função  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **primitiva** de  $f$  se  $F$  for derivável e  $F' = f$ . Diz-se que a função  $f$  é **primitivável** se  $f$  admitir uma primitiva.

## Exemplo

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1 + x^2$  é primitivável, visto que  $F(x) = x + \frac{x^3}{3}$  é uma primitiva de  $f$ .

## Exemplo

A função  $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = 0$  se  $x \in [0, 1]$ ,  $g(x) = 1$  se  $x \in ]1, 2]$  não é primitivável.



## Nota

Recordar o Teorema de Darboux.

## Exemplo

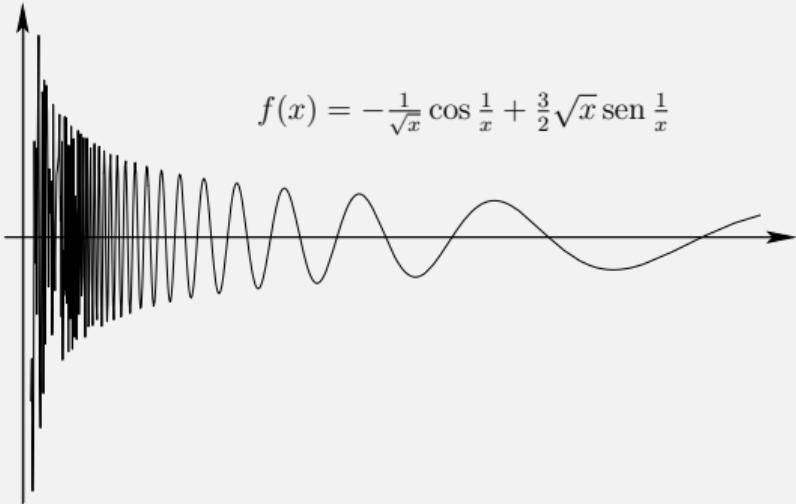
A função  $g$  do exemplo anterior é descontínua e não admite primitiva. Vejamos agora o exemplo de uma função descontínua que admite primitiva. A função

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in ]0, 1] \end{cases}$$

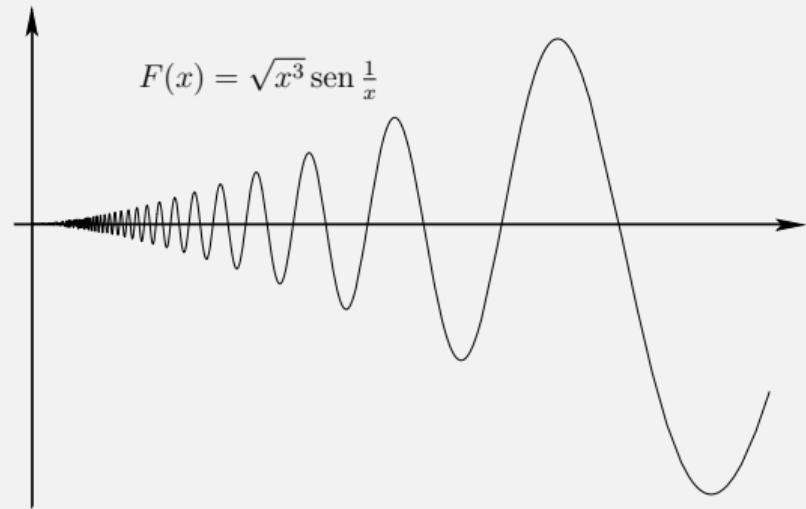
admite primitiva  $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \sqrt{x^3} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \in ]0, 1]. \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$



$$F(x) = \sqrt{x^3} \sin \frac{1}{x}$$



## Nota

*Veremos mais tarde que qualquer função contínua é primitivável.*

## Teorema

Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva de  $f$ . Então

$$G \text{ é primitiva de } f \iff \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad G(x) = F(x) + C.$$

## Definição

Seja  $f$  uma função definida num intervalo, primitivável, e  $F$  uma sua primitiva. Ao conjunto de todas as primitivas de  $f$  chamamos **integral indefinido** de  $f$  e denotamo-lo por  $\int f(x) dx$ , escrevendo, normalmente,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## Algumas propriedades dos integrais indefinidos

Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções primitiváveis,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então  $f + g$  e  $\lambda f$  são primitiváveis e:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$
- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$

Sejam  $I$  e  $J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis e suponhamos que  $g(J) \subseteq I$ . Então  $f'$  e  $(f' \circ g) \cdot g'$  são primitiváveis e:

- $\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R};$
- $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

## Integração imediata

- $\int 1 \, dx = x + C$
- $\int f'(x) \, dx = f(x) + C$
- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
- $\int f^\alpha(x) f'(x) \, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + C$

- $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$
- $\int \operatorname{cotg} x dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
- $\int \operatorname{th} x dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C$
- $\int \operatorname{coth} x dx = \ln |\operatorname{sh} x| + C$

# Integração por partes

## Teorema

Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções de classe  $C^1$ . Então é válida a seguinte

### fórmula de integração por partes

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

## Integrais do tipo $\int \sin^n x \cos^m x dx$ , $n, m \in \mathbb{N}_0$

Vamos separar o cálculo dos integrais deste tipo em vários casos:

- se  $n = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  (isto é,  $n$  é ímpar) então

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x dx$$

que pode ser decomposto numa soma finita de integrais do tipo

$$a \int \sin x \cos^l x dx, \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ e } l \in \mathbb{N}_0,$$

integrais que são imediatos.

- se  $m = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$  (isto é,  $m$  é ímpar), procede-se de modo análogo, atribuindo à função cos o papel atribuído à função sen no item anterior;

- se  $n = 2k$  e  $m = 2l$ , sendo  $k, l \in \mathbb{N}_0$ , não simultaneamente nulos, então, como

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2},$$

temos que

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cos^m x dx &= \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^l dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^k \left(\frac{\cos(2x) + 1}{2}\right)^l dx; \end{aligned}$$

O cálculo deste último integral reduz-se ao de uma soma de integrais do tipo dos do segundo ou do terceiro itens. Os do segundo item calculam-se imediatamente; para resolver os do terceiro item, nota-se que os expoentes são agora menores e procede-se do mesmo modo, isto é, utilizam-se as fórmulas de duplicação do ângulo. Obviamente, este processo termina necessariamente, chegando ou a integrais do tipo do segundo item ou a integrais do tipo  $a \int \cos(2^r x) dx$ .

# Integração de frações racionais

# Integração por substituição

## Teorema

Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite primitiva  $F$ . Sejam  $J$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $\varphi : J \rightarrow I$  uma função bijetiva, derivável, cuja derivada não se anula. Então  $\Phi = F \circ \varphi$ , é uma primitiva de  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$  e é válida a seguinte

**fórmula de integração por  
substituição ou mudança de variável**

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

# Integração por substituição

## Nota

Para se calcular o integral  $\int f(x) dx$ , fazendo a mudança de variável  $x = \varphi(t)$ , procede-se do seguinte modo:

- ① a função que nos dá a mudança de variável,  $\varphi$ , deve ser uma função regular (deve admitir, pelo menos, primeira derivada). Se a sua derivada for não nula num ponto, e se a derivada for contínua, podemos garantir que há um intervalo que contém o ponto onde a derivada não se anula. Admitimos assim que tudo é feito num certo intervalo onde as condições do teorema são verificadas;
- ② ao considerarmos a mudança de variável  $x = \varphi(t)$  escrevemos que “ $dx = \varphi'(t) dt$ ”. Esta forma de escrever, aparentemente sem sentido, tem um significado matemático claro e a sua utilização permite simplificar alguns cálculos.

**Integrais do tipo**  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ :

Faz-se a mudança de variável  $x = a \operatorname{sen} t$  (ou  $x = a \cos t$ ).

**Integrais do tipo**  $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ :

Faz-se a mudança de variável  $x = a \operatorname{sh} t$  (em certos casos também resulta a substituição  $x = a \operatorname{tg} t$ ).

**Integrais do tipo**  $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$ :

Faz-se a mudança de variável  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

Expressando  $\operatorname{sen} x$ ,  $\cos x$  em função da variável  $t$  e  $dx$  em função de  $t$  e de  $dt$ , obtemos:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t;$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$