Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação

Departamento de Matemática e Aplicações — 17 de janeiro de 2014

Álgebra Linear CC

teste total — duração: 2 horas

1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ k & k+1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3a & 3c & 6b \\ d-a & f-c & 2(e-b) \\ g & i & 2h \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "A matriz $B_0 - bb^T$ é invertível e $(B_0 - bb^T)^{-1} = B_0 - bb^T$.".

(b) Discuta, em função do parâmetro k, o sistema $B_k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = b$.

(c) Sabendo que $|C| = 4$, indique o valor de $|D|$. Justifique a sua resposta.

(d) Mostre que se A é ortogonal, então $\det A \in \{-1, 1\}$.

2. Considere o subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ dado por

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0\}.$$

(a) Determine uma base de S.

(b) Justifique que existe uma base de S que inclui os vetores $(1, 1, 1, 0)$ e $(1, 1, 1, 1)$ e indique uma base de S nessas consições.

(c) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, um subconjunto de S com 4 vetores linearmente independentes.

3. Seja B_1 a base canónica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ e considere para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ a base canónica B_2 e a base B_3 dada por $B_3 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$. Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $f(x, y, z, w) = (y - z, x, 2x)$, para todo $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, e seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$M(g; B_3, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $g(x, y, z) = (x, y - z, -y)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Classifique g quanto à injetividade e sobrejetividade.

(b) Determine $M(f; B_1, B_3)$ e $M(g \circ f; B_1, B_2)$.

(c) Determine os valores próprios de g.

(d) Determine a dimensão do subespaço próprio de g associado ao valor próprio 1.

(e) Diga, justificando, se g é diagonalizável.

Cotação: **1** - (1.75 + 2.0 + 1.75 + 1.75); **2** - (2.0 + 2.0 + 0.75);
3 - (2.0 + 2.0 + 1.5 + 1.5 + 1.0).

Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações | 17 de janeiro de 2014

Álgebra Linear CC

segundo teste — duração: 2 horas

1. Seja B_1 a base canónica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ e considere para o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ a base canónica B_2 e a base B_3 dada por $B_3 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$. Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por $f(x,y,z,w) = (y-z, x, 2x)$, para todo $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, e seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$M(g; B_3, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que f é uma transformação linear.

   (b) Determine uma base de $\operatorname{Nuc} f$.

   (c) Mostre que $g(x,y,z) = (x, y-z, -y)$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   (d) Classifique as transformações lineares f e g quanto à injetividade e sobrejetividade.

   (e) Determine $M(f; B_1, B_3)$ e $M(g \circ f; B_1, B_2)$.

   (f) Diga, justificando, se $(1,2,3)$ é vetor próprio de g.

   (g) Determine os valores próprios de g.

   (h) Determine a dimensão do subespaço próprio de g associado ao valor próprio 1.

   (i) Diga, justificando, se g é diagonalizável.

2. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3a & 3c & 6b \\ d-a & f-c & 2(e-b) \\ g & i & 2h \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Sabendo que $|C| = 4$, indique o valor de $|D|$. Justifique a sua resposta.

   (b) Recorrendo ao Teorema de Laplace, calcule $|B|$.

   (c) Justifique que $B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = b$ é um sistema de Cramer e, utilizando determinantes, resolva-o.

   (d) Mostre que se A é ortogonal, então $\det A \in \{-1, 1\}$.

Cotação: 1 - (1.5 + 1.75 + 1.75 + 1.25 + 2.0 + 1.0 + 1.5 + 1.5 + 1.0);
2 - (1.75 + 1.5 + 1.75 + 1.75).