Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação - 1º ano

1º teste - 6 nov 2015 — Duração: 2 horas

---

1. Sejam p, q, r e s proposições. Sabendo que são verdadeiras as proposições $p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)$, $r \Rightarrow p$, $(\sim s \vee \sim p) \Rightarrow r$ e $\sim s$, podemos afirmar que a proposição $\sim q$ é verdadeira?

   Se $v(\sim s) = V$ então $v(\sim s \vee \sim p) = V$. Uma vez que $v((\sim s \vee \sim p) \Rightarrow r) = V$, concluímos que $v(r) = V$. Este facto, juntamente com o facto de $v(r \Rightarrow p) = V$, leva-nos a concluir que $v(p) = V$. Estamos em condições de afirmar que $v(q \Rightarrow \sim r) = V$, uma vez que $(v(p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)) = V$. De $v(q \Rightarrow \sim r) = V$, sabendo que $v(\sim r) = F$, concluímos que $v(q) = F$, ou seja, que $v(\sim q) = V$.

2. Seja $s(X, Y) =$"X é subconjunto de Y.", onde o conjunto de variação de X e Y é $\mathcal{P}(A)$, para um dado conjunto A.

   (a) Utilizando a condição dada, exprima, por meio de uma proposição lógica, a afirmação

   "Todos os elementos de $\mathcal{P}(A)$ admitem pelo menos dois subconjuntos distintos."

   $\forall X \in \mathcal{P}(A) \exists Y, Z \in \mathcal{P}(A) : s(Y, X) \wedge s(Z, X) \wedge Y \neq Z.$

   (b) Formule a negação da proposição dada e indique a valoração da proposição obtida.

   Negar a proposição apresentada é afirmar que existe pelo menos um elemento de $\mathcal{P}(A)$ que não admite subconjuntos ou que admite um único subconjunto:

   $$\exists X \in \mathcal{P}(A) : \big(\forall Y \in \mathcal{P}(A), \sim s(Y, X) \qquad \vee \qquad \exists^1 Y \in \mathcal{P}(A) : s(Y, X)\big).$$

   Esta proposição é verdadeira porque $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $\emptyset$ admite um único subconjunto, que é o próprio $\emptyset$.

3. Usando indução matemática, prove que:

   (a) para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 2$ é par;

   (1) Comecemos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos que $1^2 + 1 + 2 = 4$, que é um número par;

   (2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n^2 + n + 2$ é par. Queremos provar que $(n+1)^2 + (n+1) + 2$ é um número par. De facto, como

   $$(n+1)^2 + (n+1) + 2 = n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 2 = (n^2 + n + 1) + (2n + 2),$$

   podemos afirmar, aplicando a hipótese de indução, que $(n+1)^2 + (n+1) + 2$ é um número par, pois é a soma de dois números pares.

   Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural n.

   (b) para todo o natural $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$

(1) Comecemos por verificar o caso base: considerando $n = 2$, temos:

$$\sum_{k=1}^{2} k \cdot k! = (2+1)! - 1,$$

o que é verdade, pois, efetuando os cálculos, obtemos $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5 = 6 - 1 = 3! - 1$;

(2) Suponhamos agora que o natural $n \geq 2$ é tal que $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$. Queremos provar que $\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1$. De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= [1 + n + 1](n+1)! - 1 \\
&= (n+2)(n+1)! - 1 \\
&= (n+2)! - 1.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural n.

4. Dê, ou justifique que não existe, um exemplo de:

(a) conjuntos A, B e C tais que $A \times B = A \times C$ e $B \neq C$;

Sejam $A = \emptyset$, $B = \{1\}$ e $C = \{2\}$. Então, $A \times B = \emptyset = A \times C$ e $B \neq C$.

(b) conjuntos A e B tais que $A \cup B = A \cap B$ e $A \neq B$;

Não existe. Se $A \cup B = A \cap B$ então $A \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq B$ e $B \subseteq A \cup B = A \cap B \subseteq A$, pelo que $A = B$.

(c) uma família de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Z}$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{-1, 1\}$;

Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $A_i = \{1 - i, -1, 1, i\}$. Então, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Z}$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{-1, 1\}$.

(d) um conjunto A e uma relação binária R em A tais que $R \neq \omega_A$ e $R \circ R = \omega_A$.

Sejam $A = \{1, 2\}$ e $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Então, $R \neq \omega_A$, uma vez que $(1, 1) \notin R$ e

$$R \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\} = \omega_A.$$

5. Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $C \subseteq A$ e $A \cap B = \emptyset$. Prove que

$$A \cup B \subseteq C \cup D \Rightarrow B \subseteq D:$$

(a) fazendo uma prova direta;

Tendo por hipóteses que $C \subseteq A$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B \subseteq C \cup D$, pretendemos provar que $B \subseteq D$. Para isso, vamos provar que todo o elemento de B é elemento de D:

$$\begin{array}{lll} x \in B & \Rightarrow x \in A \cup B & [A \subseteq A \cup B] \\ & \Rightarrow x \in C \cup D & [A \cup B \subseteq C \cup D] \\ & \Rightarrow x \in C \vee x \in D & \\ & \Rightarrow x \in A \vee x \in D & [C \subseteq A] \\ & \Rightarrow cond.\, imp. \vee x \in D & [A \cap B = \emptyset \wedge x \in B] \\ & \Rightarrow x \in D. & \end{array}$$

Estamos em condições de afirmar que $B \subseteq D$.

(b) fazendo uma prova por redução ao absurdo.

Para efetuarmos uma prova por redução ao absurdo, começamos por supor que, sabendo que $A \cap B = \emptyset$ e $C \subseteq A$, temos

$$A \cup B \subseteq C \cup D \wedge B \not\subseteq D.$$

De $B \not\subseteq D$, podemos concluir que existe $x \in B$ tal que $x \notin D$. Mas, se $x \in B$, temos que $x \in A \cup B$ e, como $A \cup B \subseteq C \cup D$, temos que $x \in C \cup D$. Como $x \notin D$, temos que $x \in C$ e, como $C \subseteq A$, $x \in A$. Logo, $x \in A \cap B = \emptyset$, o que é um absurdo. O absurdo resulta de termos suposto que $A \cup B \subseteq C \cup D \wedge B \not\subseteq D$. Logo, se $A \cup B \subseteq C \cup D$, temos de ter $B \subseteq D$.

6. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$ uma relação binária em A.

(a) Mostre que $\mathrm{id}_A \subseteq R \circ R$ mas que $\mathrm{id}_A \neq R \circ R$.

Como $A = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. Como

- $(1, 3) \in R \wedge (3, 1) \in R$, temos que $(1, 1) \in R \circ R$;
- $(2, 2) \in R \wedge (2, 2) \in R$, temos que $(2, 2) \in R \circ R$;
- $(3, 3) \in R \wedge (3, 3) \in R$, temos que $(3, 3) \in R \circ R$,

concluímos que $\mathrm{id}_A \subseteq R \circ R$. Por outro lado, como $(1, 2) \in R$ e $(2, 2) \in R$, temos que $(1, 2) \in R \circ R$. Assim, como $(1, 2) \notin \mathrm{id}_A$, concluímos que $\mathrm{id}_A \neq R \circ R$.

(b) Justifique que $(1, 2) \in R^{-1} \circ R$ e que $(1, 2) \notin R \circ R^{-1}$.

Por um lado, como $(1, 2), (2, 2) \in R$, podemos afirmar que $(1, 2) \in R$ e $(2, 2) \in R^{-1}$, e, portanto, $(1, 2) \in R^{-1} \circ R$.

Por outro lado, provemos que $(1, 2) \notin R \circ R^{-1}$ por redução ao absurdo. Se $(1, 2) \in R \circ R^{-1}$, tem de existir $x \in A$ tal que $(1, x) \in R^{-1}$ e $(x, 2) \in R$, ou seja, tal que $(x, 1), (x, 2) \in R$. Assim $x \in R^{-1}(\{1\}) \cap R^{-1}(\{2\}) = \emptyset$, pois $R^{-1}(\{1\}) = \{3\}$ e $R^{-1}(\{2\}) = \{1, 2\}$. Logo, não podemos ter $(1, 2) \in R \circ R^{-1}$.

(c) Determine $R \cup R^{-1}$ e $R \cap R^{-1}$.

Como $R^{-1} = \{(2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$, temos que

$$R \cup R^{-1} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

e

$$R \cap R^{-1} = \{(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\}$$

(d) Considere, em $\mathcal{P}(A)$, a relação binária S definida por

$$(X,Y) \in S \Leftrightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in Y)\ (x,y) \in R.$$

Determine $S(\{2\})$ e $S^{-1}(\{2\})$.

Por definição de conjunto imagem e conjunto imagem completa inversa, temos que

$$\begin{aligned} S(\{2\}) &= \{Y \subseteq A : (\{2\},Y) \in S\} \\ &= \{Y \subseteq A : (\forall y \in Y)\ (2,y) \in R\} \\ &= \{\{2\},\emptyset\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S^{\leftarrow}(\{2\}) &= \{X \subseteq A : (X,\{2\}) \in S\} \\ &= \{X \subseteq A : (\exists x \in X)\ (x,2) \in R\} \\ &= \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}. \end{aligned}$$

Cotação: **1.** 2.0 **2.** 2 × 1.5 **3.** 2 × 1.5 **4.** 4 × 1.0 **5.** 2 × 1.5 **6.** $1.0 + 1.0 + 1.0 + 2.0.$