Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
6 de novembro de 2023

1º teste de Álgebra Linear CC

Duração: 1h50min

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Em cada uma das questões deste grupo, indique se cada uma das afirmações é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

V F

1. Para quaisquer matrizes reais A e B, se a matriz $A+B$ está definida, então a expressão AB^TA define uma matriz. ☐ ☐
2. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se as matrizes A e B são antissimétricas, então a matriz $AB+BA$ é simétrica. ☐ ☐
3. Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, se $car(A) = car(B) = 3$, então a matriz $A+B$ é invertível. ☐ ☐
4. Para quaisquer matrizes invertíveis $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tem-se $((AB)^{-1})^2 = (B^{-1})^2(A^{-1})^2$. ☐ ☐
5. Existem matrizes $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$ tais que o sistema $Ax = 0$ é possível determinado e o sistema $Ax = b$ é impossível. ☐ ☐
6. Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se o sistema $Bx = 0_{2\times 2}$ é determinado, então o sistema $ABx = 0_{2\times 2}$ é determinado. ☐ ☐
7. Para qualquer espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ e para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in V$, se a sequência (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, então $(v_1, v_1+v_2+v_3, v_3)$ é linearmente independente. ☐ ☐
8. O conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que a matriz A é invertível e determine uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$2X - ((A^{-1})^T B)^T = I_3.$$

$\overrightarrow{\text{v.s.f.f.}}$

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais correspondente à equação matricial $A_\alpha x = b_\alpha$, onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ -\alpha & \alpha & -9 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \\ 2\alpha - 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta o sistema $A_\alpha x = b_\alpha$ em função do parâmetro α.

(b) Considere $\alpha = 3$. Utilizando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine o conjunto de soluções do sistema $A_3 x = b_3$.

3. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços vetoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 3y = 0\}, \quad G =< (3,1,0), (0,0,2), (6,2,-10) >,$$

$$H =< (1,1,0), (0,1,0) > .$$

(a) Mostre que $F = G$.

(b) Determine uma base de $F + H$ e a dimensão de $F \cap H$.

(c) Determine um subespaço U de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = F \bigoplus U$.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: $1.(2,75)$; $2.(2,75 + 1,5)$; $2.(2,0 + 3,0 + 2,0)$.