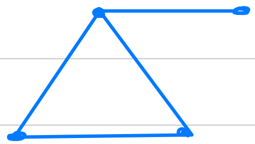
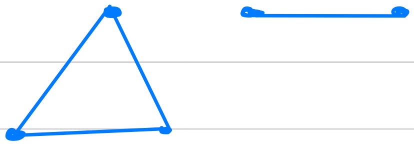
Grafos conexos

Definição: Um grafo conexo é um grafo $G=(V,E)$ para o qual existe um caminho entre quaisquer dois vértices.

Um grafo desconexo é um grafo que não é conexo.

Exemplo O grafo  é conexo

O grafo  é desconexo

Teorema Seja $G=(V,E)$. A relação R definida por, para todos $x,y\in V$

$$xRy \iff x=y \text{ ou existe um caminho de } x \text{ para } y$$

é uma relação de equivalência.

Demonst: Imediato.

As classes de equivalência determinadas por R chamam-se as componentes conexas de $G = (V, E)$.

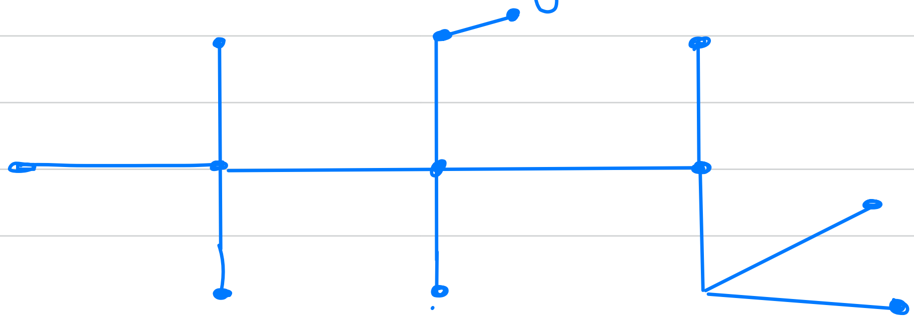
<u>Teorema:</u> Sejam $G = (V, E)$ um grafo <u>conexo</u> e $\langle a, b, x_1, x_2, \ldots, x_n, a \rangle$ um ciclo. Então $G' = (V, E \setminus \{a, b\})$ é um grafo conexo.

<u>Demonst:</u> Imediato, uma vez que $\langle a, x_n, \ldots, x_2, x_1, b \rangle$ é um caminho de a para b.

<u>Árvores</u>

<u>Definição</u>: Uma árvore é um grafo conexo que não tem ciclos.

<u>Exemplo:</u>

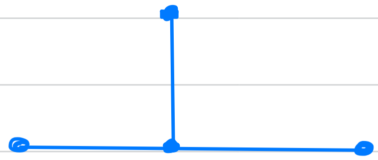


Este grafo é uma árvore

Exemplos

Árvores com 2 vértices: 

Árvores com 3 vértices 

Árvores com 4 vértices  

Teorema: Numa árvore com v vértices e a arestas é tal que

$$v - a = 1$$

Demonst: Exercício (usando o princípio de indução forte)

Teorema: Toda a árvore não trivial tem pelo menos dois vértices de grau 1.

Demonstração: Seja $G = (V, E)$ uma árvore. Sup. que G tem v vértices e a arestas. Pelo teorema anterior, $v - a = 1$ ou seja, $a = v - 1$.

Temos também que $\sum_{v_i \in V} grau(v_i) = 2a = 2(v-1)$

Se todos os vértices tivessem no mínimo grau 2 então

$$\sum_{v_i \in V} grau(v_i) \geq 2v$$

e nesse caso $2v - 2 \geq 2v$, o que é absurdo

Se só existe um vértice de grau 1, então teríamos

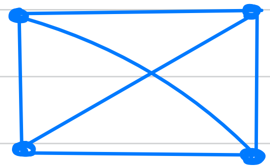
$$\sum_{v_i \in V} grau(v_i) \geq 2(v-1) + 1 = 2v - 1$$

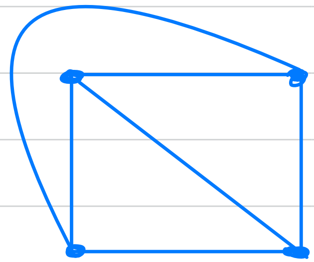
e portanto $2v-2 \geq 2v-1$, o que é absurdo.

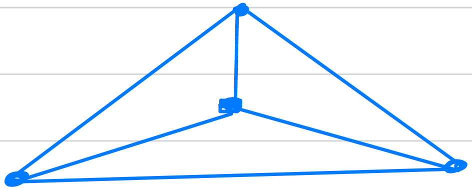
Logo existem pelo menos dois vértices de grau 1 numa árvore $\square$

Grafos planares

Definição: Um grafo planar é um grafo que pode ser representado no plano sem existir cruzamento de arestas a não ser eventualmente nos vértices.

Exemplo: O grafo K_4  é planar

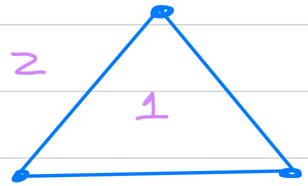
uma vez que pode ser representado como 

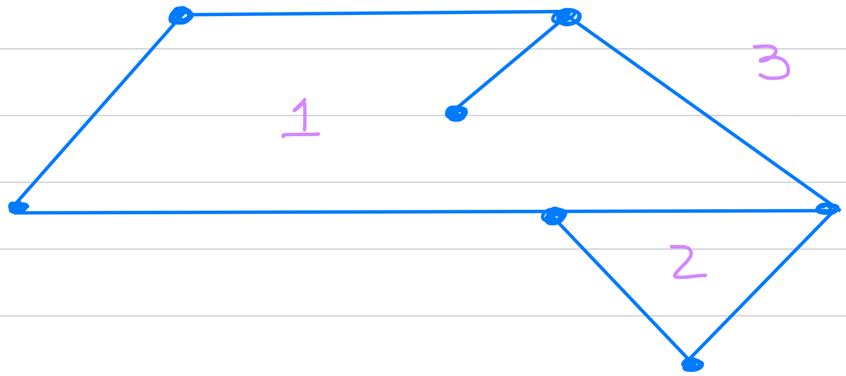
ou como 

<u>Observação</u> Quando um grafo é desconexo podemos reduzir a questão da planaridade às suas componentes conexas.

Uma representação planar de um grafo planar conexo define num plano regiões às quais chamamos <u>faces</u>.

Note-se que dado um grafo planar, uma sua representação planar define uma região ilimitada à qual chamamos <u>face exterior</u>.





Numa face limitada por arestas, identificamos um ciclo que a circunda, ao qual chamamos fronteira da face. Há arestas que não estão nas fronteiras das faces, mas estão nas faces. São as chamadas <u>arestas de corte</u>.

<u>Fórmula de Euler</u>

Para um grafo planar conexo com v vértices, a arestas e f faces tem-se $v - a + f = 2$

<u>Demonstração</u> (ver sebenta)

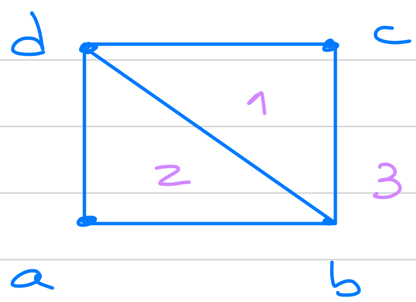
<u>Corolário</u> Toda a árvore satisfaz a fórmula de Euler.

<u>Demonst:</u> Sabemos que numa árvore $v - a = 1$ e como $f = 1$ (só existe a face exterior) então $v - a + f = 2$. $\square$

A não planaridade de K_5 e $K_{3,3}$

Definição Seja $G = (V, E)$ um grafo planar. Diz-se que uma face é incidente a uma aresta se essa aresta "toca" essa face.

Exemplo:



A face 1 é incidente a $\{d,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}$

A face 2 é incidente a $\{a,b\}, \{a,d\}, \{b,d\}$

A face 3 é incidente a $\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,a\}$.

Lema: Seja G um grafo conexo, planar, com a arestas e f faces ($f \geq 2$). Então $f \leq \frac{2}{3} a$.

Demonst: Para cada face contamos o número de arestas às quais essa face é incidente. Somamos todos esses números e seja S a soma.

Por um lado, como para cada aresta existem no máximo duas faces para as quais a aresta é incidente então

$$S \leq 2a$$

Por outro lado, como cada face é incidente, no mínimo a três arestas

$$3f \leq S$$

Logo $3f \leq S \leq 2a$, o que implica que $f \leq \frac{2}{3}a$. $\square$

<u>Lema</u> Seja G um grafo planar conexo com pelo menos duas faces. Se G tem a arestas e v vértices então $3v - a \geq 6$

<u>Demonst</u>: Pela fórmula de Euler, temos que $v - a + f = 2$

Logo $f = 2 - v + a$ e, pelo lema anterior $2 - v + a \leq \frac{2}{3} a$,

ou seja, $3v - a \geq 6$. $\square$

Teorema: O grafo K_5 não é planar.

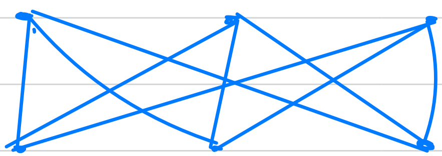
Demonst: O grafo K_5 tem 5 vértices e 10 arestas.

Se K_5 fosse planar teria pelo menos duas faces (pois existem ciclos em K_5) e teríamos então que $3v - a \geq 6$.

Mas $3v - a = 15 - 10 = 5 \not\geq 6$. Absurdo. $\square$

Observação: Este método não funciona para $K_{3,3}$.

$K_{3,3}$ tem 6 vértices e 9 arestas



Então $3v - a = 18 - 9 = 9 \geq 6$.

Lema: Seja G um grafo bipartido completo, planar com a arestas e f faces $(f \geq 2)$. Então $f \leq \frac{1}{2} a$.

Demonst: Analogamente a um lema anterior $S \leq 2a$

Mas como grafo bipartido um ciclo tem comprimento ≥ 4

então $4f \leq S$. Logo $f \leq 1/2\, a$.

$\square$

Lema: Seja G um grafo bipartido completo planar. Se G tem a arestas e v vértices então $2v - a \geq 4$.

Demonst: Análoga a um lema anterior.

$\square$

Teorema: O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Demonst: $K_{3,3}$ tem 6 vértices e 9 arestas. Se $K_{3,3}$ fosse planar teríamos $2v - a \geq 4$. Mas $2v - a = 12 - 9 = 3 \not\geq 4$.

Logo $K_{3,3}$ não é planar. $\square$

Teorema Seja $n \in \mathbb{N}$. O grafo completo K_n é planar sse $n < 5$

Demonst: É fácil ver que K_n, com $n \leq 4$, é um grafo planar.

Por um teorema anterior, K_5 não é planar.

Para $n \geq 6$, K_n não é planar uma vez que contém K_5 como subgrafo. $\square$

Teorema Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$. O grafo bipartido completo $K_{m,n}$ é planar sse $m < 3$.

Demonst: Análoga à anterior. $\square$