Geometria
Licenciatura em Ciências da Computação

Segundo teste
02 junho de 2017

Proposta de Resolução

1. A espaço 3D

Homotetia de centro $\Omega = (1,-1,0)$ e razão $\lambda = -3$

$h(M) = \Omega + \lambda \vec{\Omega M} = \Omega + \lambda(M - \Omega) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$

$h(x,y,z) = 4(1,-1,0) - 3(x,y,z) = (4-3x, -4-3y, -3z)$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2 A plano afim euclidiano.

$\rho(x,y) = (1+y, 1-x) \qquad \sigma(x,y) = (-1+y, 1+x)$

a Representação matricial de ρ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Seja A a matriz principal de ρ. Temos $AA^T = Id$ logo ρ é uma isometria do plano.

Temos que $\det A = 1$ logo ρ é uma rotação ou uma translação.

Claramente ρ não é uma translação $(A \neq Id)$ logo ρ é uma rotação.

O centro da rotação de ρ é o único ponto fixo de ρ. Temos:

$$\rho(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+y = x \\ 1-x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = x \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Portanto, o centro de ρ é $\Omega = (1,0)$.

A matriz principal de uma rotação é da forma $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Comparando com a matriz A, resulta que θ, ângulo de rotação de ρ, é tal que $\theta = -\pi/2$.

b Representação matricial de σ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Seja B a matriz principal de σ. Temos que $BB^T = Id$ logo σ é uma isometria do plano.

Temos que $\det B = -1$ logo σ é uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

Pontos fixos de σ: $\sigma(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} -1+y = x \\ 1+x = y \end{cases} \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

σ tem uma reta de pontos fixos: A reta r de equação cartesiana $x-y+1=0$ logo σ é uma reflexão e a reta de reflexão é a reta r.

c) $\sigma \circ \rho$

Temos $\sigma\circ\rho(x,y) = \sigma(1+y, 1-x) = (-1+1-x, 1+1+y) = (-x, 2+y)$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

A composta de duas isometrias é uma isometria, portanto $\sigma\circ\rho$ é isometria.

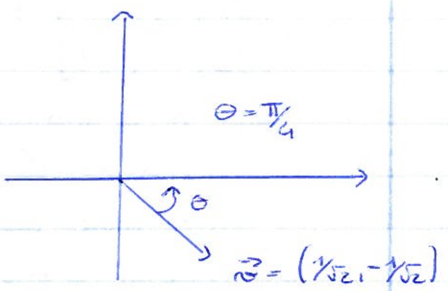
Seja C a matriz principal de $\sigma\circ\rho$. Temos $\det C = -1$ logo $\sigma\circ\rho$ é uma reflexão ou uma reflexão deslizante.

Pontos fixos de $\sigma\circ\rho$: $\sigma\circ\rho(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x \\ 2+y = y \end{cases}$ $\not y$

Como $\sigma\circ\rho$ não possui pontos fixos, trata-se de uma reflexão deslizante.

3 A plano euclidiano

a) Seja f a transvecção de fator 1 centrada na origem e dirigida por $\vec{v}$



Temos: $f = \rho_{-\pi/4} \circ r \circ \rho_{\pi/4}$

onde r é a transvecção de fator 1 centrada na origem na direção de $\vec{e_1} = (1,0)$, $\rho_{\pi/4}$ é a rotação centrada na origem de ângulo $\pi/4$ e $\rho_{-\pi/4}$ é a rotação centrada na origem de ângulo $-\pi/4$. Usando coordenadas homogéneas temos:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $f(x,y) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$

b) Seja g a transvecção de fator 1 na direção de $\vec{v}$ centrada em A.

Temos $g = t_{\vec{OA}} \circ f \circ t_{-\vec{OA}}$, onde $t_{-\vec{OA}}$ é a translação segundo o vetor $-\vec{OA}$, f é a aplicação da alínea anterior e $t_{\vec{OA}}$ é a translação segundo o vetor $\vec{OA}$. Usando coordenadas homogéneas temos:

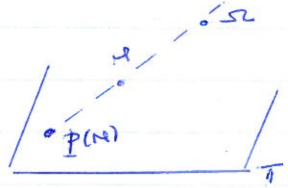
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $g(x,y) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \right)$

4 A espaço 3D.

Seja $M = (x_0, y_0, z_0) \in A$.



Temos que $P(M) = r_M \cap \pi$, onde r_M é a reta que incide em Ω e M.

Como $P(M) \in r_M$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$P(M) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(x_0 - 2, y_0 - 1, z_0) =$$
$$= (x_0 + \lambda(x_0 - 2), y_0 + \lambda(y_0 - 1), z_0 + \lambda z_0)$$

Como $P(M) \in \pi$ então: $y_0 + \lambda(y_0 - 1) - z_0 - \lambda z_0 = 3 \Rightarrow \lambda = \dfrac{3 - y_0 + z_0}{y_0 - z_0 - 1}$

Portanto:

$$P(x_0, y_0, z_0) = \left(x_0 + \frac{3 - y_0 + z_0}{y_0 - z_0 - 1}(x_0 - 2), y_0 + \frac{3 - y_0 + z_0}{y_0 - z_0 - 1}(y_0 - 1), z_0 + \frac{3 - y_0 + z_0}{y_0 - z_0 - 1} z_0 \right)$$

$$= \left(\frac{2x_0 + y_0 - z_0 - 3}{y_0 - z_0 - 1}, \frac{3y_0 - z_0 - 3}{y_0 - z_0 - 1}, \frac{2z_0}{y_0 - z_0 - 1} \right)$$

O plano de pontos excecionais é o plano paralelo a π incidente em Ω, ou seja, o plano de equação cartesiana $y - z - 1 = 0$ (conjunto dos pontos para os quais P não está definida).

5 A, espaço euclidiano de dimensão n.

Seja s a simetria central de centro $\Omega \in A$. Temos $s(M) = \Omega - \vec{\Omega M}$.

Queremos ver que s é uma isometria, isto é, que $d(s(M), s(N)) = d(M,N)$, para quaisquer que sejam os pontos $M, N \in A$.

Temos: $d(s(M), s(N)) = \| \overrightarrow{s(M)s(N)} \| = \| s(N) - s(M) \| =$

$= \| \Omega - \vec{\Omega M} - (\Omega - \vec{\Omega N}) \| = \| \vec{\Omega N} - \vec{\Omega M} \| = \| (N - \Omega) - (M - \Omega) \| =$

$= \| N - M \| = \| \vec{MN} \| = d(M,N)$, como queríamos demonstrar.