

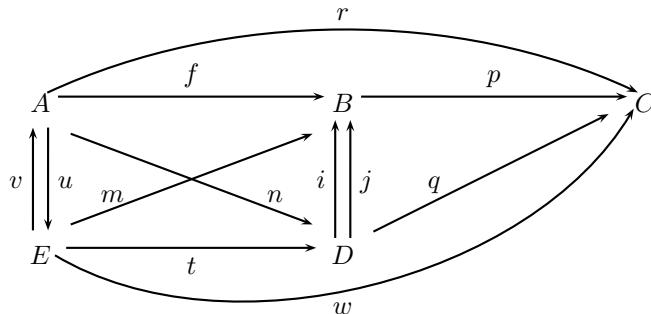
Álgebra Universal e Categorias

2º teste

duração: 1h45min

**Justifique todas as suas respostas, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.**

1. Considere a categoria **C** representada pelo diagrama seguinte



Sem apresentar justificacões, indique se existem, na categoria **C**, morfismos e objetos nas condições a seguir indicadas. Caso existam, forneça um exemplo correspondente:

- (a) Um morfismo que não seja um monomorfismo.
  - (b) Um bimorfismo que não seja um isomorfismo.
  - (c) Um isomorfismo que não seja um bimorfismo.
  - (d) Objetos distintos e isomorfos.
2. (a) Sejam **C** uma categoria e  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  morfismos de **C**. Mostre que se  $f$  e  $g$  são epimorfismos, então  $g \circ f$  é um epimorfismo.  
 (b) Dê exemplo de uma categoria **C** na qual existam objetos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e morfismos  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  tais que  $g \circ f$  é um epimorfismo, mas  $f$  não é um epimorfismo.
3. Sejam **C**<sub>1</sub> e **C**<sub>2</sub> categorias. Mostre que se **C**<sub>1</sub> e **C**<sub>2</sub> têm objetos iniciais, então a categoria produto **C**<sub>1</sub> × **C**<sub>2</sub> tem objeto inicial.
4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos  $\{1\}$  e  $\mathbb{Z}$  e as funções  $i$ ,  $f$  e  $g$  definidas por
- $$i : \{1\} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad 1 \mapsto 1, \quad f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto 3 + x, \quad g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto 5 - x.$$
- Mostre que  $(\{1\}, i)$  é um igualizador de  $f$  e  $g$ .
5. Sejam **C** uma categoria e  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $I$  objetos de **C** tais que  $I$  é um objeto inicial. Considere os morfismos  $f_A : I \rightarrow A$ ,  $f_B : I \rightarrow B$ ,  $i_A : A \rightarrow C$ ,  $i_B : B \rightarrow C$  em **C**. Mostre que se  $(C, (i_A, i_B))$  é uma soma amalgamada de  $(f_A, f_B)$ , então  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ .
6. Seja  $S = \{0, 1\}$ . Considere o functor  $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$  da categoria **Set** nela própria tal que:
- $F_{Obj} : Obj(\mathbf{Set}) \rightarrow Obj(\mathbf{Set})$  é a função que a cada conjunto  $A$  associa o conjunto  $A \times S$ ,
  - $F_{Mor} : Mor(\mathbf{Set}) \rightarrow Mor(\mathbf{Set})$  é a função que a cada **Set**-morfismo  $f : A \rightarrow B$  associa a função

$$F_{Mor}(f) : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(B) \\ (x, y) & \mapsto & (f(x), y) \end{array}.$$

- (a) Diga se o functor  $F$  é fiel.
- (b) Justifique que o functor  $F$  não é pleno.
- (c) Diga se o functor  $F$  preserva objetos terminais.