Universidade do Minho
Departamento de Matemática



## Derivadas e funções trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas

1. (a) $f'(x) = 30(6x+1)^4, \quad x \in \mathbb{R}$

   (b) $f'(x) = 15\,x^2\cos(2x) - 10x^3\operatorname{sen}(2x), \quad x \in \mathbb{R}$

   (c) $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   (d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}, \quad x \in ]3, +\infty[$

   (e) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (f) $f'(x) = \dfrac{3\,e^{3x} + 2x}{e^{3x} + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (g) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

   (h) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad x < 3 \\ 3 & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$

2. (a) Equação da reta tangente $\rightsquigarrow$ $y = 2(x-1)$; equação da reta normal $\rightsquigarrow$ $y = -\frac{1}{2}(x-1)$

   (b) Equação da reta tangente $\rightsquigarrow$ $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$; equação da reta normal $\rightsquigarrow$ $y = -4x - \frac{31}{4}$

3. (a) A função $f$ não é contínua nos pontos $-1$ e $1$. Com efeito:
   - $f$ não é contínua no ponto 1 porque não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$;
   - $f$ não é contínua no ponto $-1$ porque apesar de existir $\lim_{x\to -1} f(x)$ tem-se que $\lim_{x\to -1} f(x) = 1 \neq 2 = f(-1)$.

   (b) A função $f$ é contínua mas não derivável nos pontos 0 e 3. Com efeito:
   - $f$ não é derivável no ponto 0 porque $f'_+(0) < 0$ e $f'_-(0) > 0$;
   - $f$ não é derivável no ponto 3 porque $f'_+(3) = 0$ e $f'_-(3) \neq 0$.

4. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$g'(x) = f'(x^2-2).(x^2-2)' = f'(x^2-2).2x\,.$$

Em particular,

$$g'(2) = 4f'(2)\,.$$

Como $f'(2)$ é igual ao declive $m_t$ da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2,2)$, vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(2,2)$ passa nos pontos $(2,2)$ e $(6,0)$, tem-se que

$$m_t = \frac{0-2}{6-2} = -\frac{1}{2}\,.$$

Então,

$$f'(2) = m_t = -\frac{1}{2}\,.$$

Consequentemente,

$$g'(2) = 4.f'(2) = -\frac{4}{2} = -2\,.$$

5. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$g'(x) = f'(4-2x+x^3).(4-2x+x^3)' = f'(4-2x+x^3).(-2+3x^2)\,.$$

Em particular,

$$g'(1) = f'(3).1 = f'(3)\,.$$

Como $f'(3)$ é igual ao declive $m_t$ da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(3,4)$, vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta perpendicular ao gráfico de $f$ no ponto $(3,4)$ passa nos pontos $(3,4)$ e $(0,6)$, tem-se que o declive $m_p$ desta reta é:

$$m_p = \frac{6-4}{0-3} = -\frac{2}{3}\,.$$

Consequentemente, o declive $m_t$ é dado por

$$m_t = -\frac{1}{m_p} = \frac{3}{2}\,,$$

e, portanto,

$$f'(3) = m_t = \frac{3}{2}\,.$$

Então,

$$g'(1) = f'(3) = \frac{3}{2}\,.$$

6. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\,f(-4+2x+x^2)[f(-4+2x+x^2]' \\ &= 2\,f(-4+2x+x^2)f'(-4+2x+x^2).(-4+2x+x^2)' \\ &= 2\,f(-4+2x+x^2)f'(-4+2x+x^2).(2+2x) \end{aligned}$$

Em particular,

$$g'(2) = 2f(4)f'(4)6 \ = 12f(4)f'(4).$$

Observemos que $f(4) = 2$. Como $f'(4)$ é igual ao declive $m_t$ da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(4, 2)$, vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta perpendicular ao gráfico de $f$ no ponto $(4, 2)$ passa nos pontos $(4, 2)$ e $(6, 6)$, tem-se que o declive $m_p$ desta reta é:

$$m_p = \frac{6-2}{6-4} = 2\,.$$

Consequentemente, o declive $m_t$ é dado por

$$m_t = -\frac{1}{m_p} = -\frac{1}{2}\,,$$

e, portanto,

$$f'(4) = m_t = -\frac{1}{2}\,.$$

Então,

$$g'(2) = 12\,f(4)f'(4) = 12.2.(-\frac{1}{2}) = -12\,.$$

7. $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$ (Observe que $f(0) = 5$ ou, equivalentemente, $f^{-1}(5) = 0$).

8. (1) (a) Temos que:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x^2 + 1) = 3\,$; e que
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2 = 3\,.$

Consequentemente, como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$, concluímos que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$. Observemos agora que $f(1) = 3$. Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$, concluímos que $f$ é contínua no ponto 1.

(1) (b) Temos que:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(2x^3+1)-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2(x^3-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} 2(x^2+x+1) = 6\,.$
  Logo, $f'_+(1) = 6$.
- $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x^2-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3(x^2-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} 3(x+1) = 6\,.$
  Logo, $f'_-(1) = 6$.

Consequentemente, como $f'_+(1) = f'_-(1) = 6$, concluímos que $f$ é derivável no ponto 1 e que $f'(1) = 6$.

(2) (a) $f$ é contínua no ponto $-1$ (Justifique).

(2) (b) $f$ não é derivável no ponto $-1$ (Justifique).

(3) (a) $f$ é contínua no ponto 2 (Justifique).

(3) (b) $f$ não é derivável no ponto 2 (Justifique).

9. Resolvido na aula.

10. Resolvido na aula.

11. (a) Seja $f(x) = x^3 - 3x + b$, $x \in \mathbb{R}$. Comecemos por observar que $f$ é derivável. Em particular, $f$ é contínua em $[-1, 1]$ e derivável em $]-1, 1[$ e, portanto, o Teorema de Rolle e os seus corolários são aplicáveis a $f_{|[-1,1]}$. Temos que

$$f'(x) = 3x^2 - 3,\ x \in \mathbb{R}$$

e que

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \pm 1\,.$$

Por um dos corolários do Teorema de Rolle temos que entre dois zeros consecutivos de $f'$ existe quando muito um zero de $f$. Assim, a equação $x^3 - 3x + b = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real no intervalo $]-1, 1[$ qualquer que seja o valor de $b$.

(b) Observemos que

$$f'(x) < 0,\ \forall x \in ]-1, 1[\,.$$

Consequentemente, $f$ é estritamente decrescente neste intervalo e, portanto, existe no máximo uma raiz real da equação $x^3 - 3x + b = 0$ em $]-1, 1[$.
Existe exatamente uma raiz real da equação $x^3 - 3x + b = 0$ em $]-1, 1[$ para os valores de $b$ para os quais $f(-1) > 0$ e $f(1) < 0$. Mas

$$f(-1) = b + 2 > 0 \ \Leftrightarrow\ b > -2\,,$$

e

$$f(1) = b - 2 < 0 \ \Leftrightarrow\ b < 2\,.$$

Concluímos então que existe exatamente uma raiz real da equação $x^3 - 3x + b = 0$ em $]-1, 1[$ para $b \in ]-2, 2[$.

12. Seja $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Atendamos a que:

(i) A função $f$ é derivável e

$$f'(x) = 2x - \operatorname{sen} x - x\cos x + \operatorname{sen} x = 2x - x\cos x,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

A derivada de $f$ tem apenas um zero:

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x(2 - \cos x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0\,.$$

Por um dos corolários do Teorema de Rolle, $f$ tem no máximo dois zeros, pelo que a equação dada possui no máximo duas raízes reais.

(ii) Por outro lado temos que:

$$f(-2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0, \qquad f(0) = -1 < 0, \qquad f(2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0\,.$$

Como a função $f$ é contínua em cada um dos intervalos $[-2\pi, 0]$ e $[0, 2\pi]$ e muda de sinal nestes intervalos, então pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $f$ tem pelo menos um zero em cada um desses intervalos. Em particular, a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tem pelo menos uma raiz real em cada um desses intervalos.

De (i) e (ii), concluímos que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

13. Resolvido na aula.

14. Resolvido na aula.

15. (a) Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - x - 1$.
Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[0,x]}}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists\, c_x \in ]0, x[: \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists\, c_x \in ]0, x[: \qquad \frac{e^x - x - 1}{\underbrace{x}_{>0}} = \underbrace{e^{c_x} - 1}_{>0}.$$

Com efeito, $e^{c_x} - 1 > 0$ porque $e^{c_x} > 1$. Consequentemente, $e^x - x - 1 > 0$, isto é, $e^x > x + 1$.
Seja agora $x < 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[x,0]}}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists\, c_x \in ]x, 0[: \qquad \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists\, c_x \in ]x, 0[: \qquad \frac{-e^x + x + 1}{\underbrace{-x}_{>0}} = \underbrace{e^{c_x} - 1}_{<0}.$$

Com efeito, $e^{c_x} - 1 < 0$ porque $e^{c_x} < 1$. Consequentemente, $-e^x + x + 1 < 0$, isto é, $e^x > x + 1$.

(b) Consideremos a função $f\colon ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(1 + x) - x$.
Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[0,x]}}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists\, c_x \in ]0, x[: \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists\, c_x \in ]0, x[: \qquad \frac{\log(1 + x) - x}{\underbrace{x}_{>0}} = \underbrace{\frac{1}{1 + c_x} - 1}_{<0}.$$

Consequentemente, $\log(1 + x) - x < 0$, isto é, $\log(1 + x) < x$.
Consideremos agora a função $f\colon ]-1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \log(1 + x)$.

Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f_{|_{[0,x]}}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists\, c_x \in ]0, x[: \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists\, c_x \in ]0, x[: \qquad \frac{x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x)}{\underbrace{x}_{>0}} = \underbrace{1 - c_x - \frac{1}{1 + c_x}}_{<0}.$$

Consequentemente, $x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x) < 0$, isto é, $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$.

(c) Consideremos os seguintes dois casos:

(i) se $x = y$ vem $0 = 0$, o que é óbvio.

(ii) se $x \neq y$ (suponhamos $x < y$), podemos definir $f(z) = \operatorname{sen} z$, $z \in [x, y]$. Temos que $f$ é derivável com $f'(z) = \cos z$. Aplicando o Teorema de Lagrange a $f$ no intervalo $[x, y]$ vem

$$\exists\, c \in ]x, y[: \qquad \frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x} = \cos c\,.$$

Consequentemente,

$$\exists\, c \in ]x, y[: \qquad \left|\frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x}\right| = |\cos c|\ .$$

Como $|\cos c| \leq 1$, para todo o $c \in ]x, y[$, concluimos que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x}{y - x}\right| \leq 1\,,$$

donde $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.

16. Não existe uma tal função. Com efeito, existindo uma tal função $f$, a sua derivada, definida no intervalo $[0, 2]$ não possuiria a propriedade do valor intermédio, contrariando o Teorema de Darboux.

17. Comecemos por observar que $f$ é uma função derivável no intervalo $\mathbb{R}$. Em particular, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, $f$ é contínua em $[x, y]$ e derivável em $]x, y[$. Aplicando o Teorema de Lagrange a $f$ no intervalo $[x, y]$, temos que

$$\exists\, c \in ]x, y[: \qquad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)\,.$$

Consequentemente,

$$\exists\, c \in ]x, y[: \qquad \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = \left|f'(c)\right|\ .$$

Como $|f'(c)| \leq M$, concluimos que

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leq M\,,$$

donde

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \text{para todo o } x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Consideremos a função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$.

    Dado $x > a$ apliquemos o Teorema de Lagrange a $h_{|[a,x]}$ ($h$ é contínua em $[a, x]$ e derivável em $]a, x[$). Temos que

$$\exists\, c \in ]a, x[: \quad \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c)$$

    ou equivalentemente,

$$\exists\, c \in ]0, x[: \quad \frac{(g(x) - f(x)) - (g(a) - f(a))}{\underbrace{x - a}_{>0}} = \underbrace{g'(c) - f'(c)}_{>0}.$$

    Consequentemente, $g(x) > f(x)$.

19. Calcule os seguintes limites:

    (a) 2 (b) $-\frac{1}{3}$

    (c) 0 (d) 1

    (e) 0 (f) 0

    (g) $\frac{1}{6}$ (h) 0

    (i) 6 (j) $\frac{1}{3}$

    (l) $\frac{7}{5}$ (m) 3

20. Calcule:

    (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$

    (d) $-\frac{1}{2}$ (e) $-1$ (f) $-\frac{\pi}{6}$

    (g) $-\frac{\pi}{6}$ (h) $\frac{\pi}{3}$ (i) 0

    (j) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (k) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

21. (a) Seja $x \in \mathbb{R}$. Então

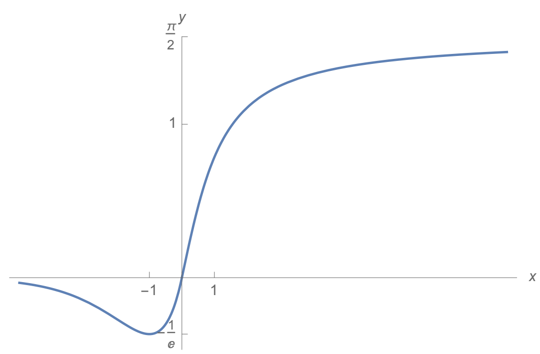
$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\tfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}) = 1\,. \end{aligned}$$

22. Ver slides das aulas.

23. Foram resolvidas nas aulas as alíneas (b) e (e) .

24. Resolvido na aula.

25. A função $f$ pode ser representada graficamente da seguinte forma:

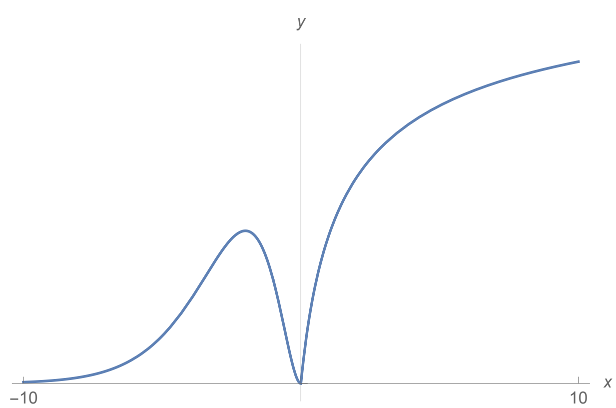



(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0\,.$

(c) A função $f$ é decrescente em $]-\infty,-1]$ e é crescente em $[1,+\infty[$.

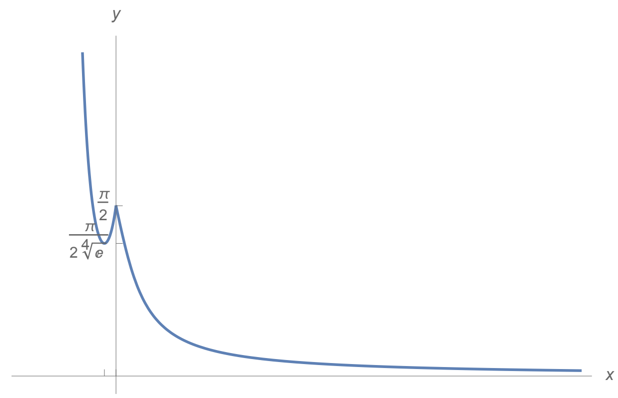
(d) $\mathrm{Im(f)} = \left[-\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right[$.

26. A função $f$ pode ser representada graficamente da seguinte forma:




(b) A função $f$ é derivável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

27. A função $f$ pode ser representada graficamente da seguinte forma:




(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

(c) A função $f$ é derivável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(d) A função $f$ é decrescente nos intervalos $]-\infty, -1/2]$ e $[0, +\infty[$. A função $f$ é crescente em $[-1/2, 0]$. A função tem um máximo local igual a $\frac{\pi}{2}$ no ponto 0 e tem um mínimo local igual a $\frac{\pi}{2}e^{-1/4}$ no ponto $-\frac{1}{2}$.

(e) $\text{Im(f)} = ]0, +\infty[$.

28. (a) Um exemplo pode ser dado pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ (x-1)^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

(b) Não existe. Com efeito, se existisse uma tal função $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que $f(2) = f(3)$ então pelo Teorema de Lagrange, existiria um ponto $c \in ]2,3[$ tal que $f'(c) = 0$. Então não poderíamos ter $f'(x) \geq x \geq 2$, para todo o $x \in [2,3]$.

(c) Um exemplo pode ser dado pela função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x & \text{se} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

(d) Um exemplo pode ser dado pela função $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ (Justifique).

29. (a) Afirmação falsa (Justifique). Este exercício foi referido na aula TP do dia 16 de novembro. Observe que $f$ não é contínua no ponto 1.

(b) Não existe uma tal função. Com efeito, existindo uma tal função $f$, a sua derivada, definida no intervalo $[1,4]$ não possuiria a propriedade do valor intermédio, contrariando o Teorema de Darboux.

(c) Afirmação verdadeira. Um exemplo pode ser dado pela função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se} \quad 1\le x\le 2 \\ 2 & \text{se} \quad 3\le x\le 4 \end{cases}$$

30. (a) Seja $f(x)=e^x-a+2x^3,\ x\in\mathbb{R}$. Temos que

$$f'(x)=e^x+6x^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\,.$$

Então, $f$ é estritamente crescente. Consequentemente $f$ tem no máximo um zero ou, de modo equivalente, a equação $e^x=a-2x^3$ tem no máximo uma raiz real.

(b) Como $f$ é estritamente crescente, $f$ tem exatamente um zero em $[0,2]$ se e só se:

(i) $f(0)=0$ ou

(ii) $f(2)=0$ ou

(iii) $f(0)<0<f(2)$, aplicando o Teorema de Bolzano-Cauchy.

Como $f(0)=1-a$ e $f(2)=e^2+16-a$, obtemos que $f$ tem exatamente um zero em $[0,2]$ se e só se $1\le a\le 16+e^2$.

31. Considere a função $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-3+e^{2x}-2x$.

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to=+\infty} f(x)+\infty$.

(b) A função $f$ tem um valor mínimo absoluto igual a $-2$ no ponto $x=0$. A função $f$ é decrescente em $]-\infty,0]$ e crescente em $[0,+\infty[$.

(c) Como

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty>0,\quad f(0)=-2<0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)+\infty>0\,,$$

pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $f$ tem pelo menos dois zeros reais, um em cada um dos intervalos $]-\infty,0[$ e $]0,+\infty[$.

Como $f$ é estritamente monótona em cada um desses intervalos, esses zeros são únicos. (Em alternativa poderia ser argumentado da seguinte forma: temos que $f'(x)=2e^{2x}-2,\ x\in\mathbb{R}$. Consequentemente, a derivada tem apenas um zero (em $x=0$). Como a derivada tem apenas um zero, por um dos corolários do Teorema de Rolle, concluímos que $f$ tem no máximo dois zeros).

32. (a) $[0, 10]$.

(b) $[0, 4] \cup [6, 7[\cup[8, 9[\cup]9, 10]$.

(c) $x \in [1, 2], \quad x = 7$.

(d) $x = 0, \quad x \in ]1, 2[, \quad x = 5, \quad x = 9, \quad x = 10$.

(e) $x = 2, \quad x = 7, \quad x = 9$

(f) $f'(4) = 2$.

(g) $x = 1, \quad x = 2, \quad x = 5, \quad x = 6, \quad x = 7, \quad x = 9$.

(h) $\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 8; \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{7x-1}{x}\right) = 3$.

33. (a) $]-2, 2]$.

(b) $]-5, -4[\cup]-4, -7/2[\cup]1, 2[$.

(c) $x = -6, \quad x \in ]-3, 0[, \quad x = 6$

(d) $x = -4, \quad x \in [-3, 0], \quad x = 4, \quad x = 5, \quad x = 8$

(e) $x = -3, \quad x = 1, \quad x = 5$

(f) $f'(-5) = 1$.

(g) $x = -4, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4, \quad x = 6$

(h) $x = 7$

(i) $\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = -1$