Ficha de Trabalho 3

1. $f(x) = x(x-1)^2$

Pontos críticos:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1+2x)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x-1)=0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - x - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1/3$

Logo 1 e 1/3 sao pontos críticos de f.

Teste da segunda derivada:

$f''(x) = 6x - 4$

Como $f''(1) = 2 > 0$, entao f tem um mínimo local em $x=2$ que é igual a $f(1)=0$.

Como $f''(1/3) = -2 < 0$, entao f tem um máximo local em $x = 1/3$ que é igual a $f(1/3) = 4/27$.

2. $f(x) = x^3$

$g(x) = x^4$

(a) Pontos críticos de f:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Logo $x=0$ é um ponto crítico de f.

Teste da segunda derivada:

$f''(x) = 6x$

Logo, como $f''(0)=0$, nada se pode concluir, sendo necessário a execuçao de outro teste. Testaremos o teste da primeira derivada:

		0	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

$f'(x) = 3x^2$

Qualquer número positivo ou negativo ao quadrado é positivo, pelo que nao existe variaçao do sinal, logo $x=0$ nao é ponto extremante.

(b) Pontos críticos de g:

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3=0 \Leftrightarrow x=0.$

logo $x=0$ é um ponto crítico de g.

Teste da segunda derivada:

$$g''(x) = 12x^2$$

Como $g''(0)=0$, nada se pode concluir. Sendo necessário efectuar o teste da primeira derivada.

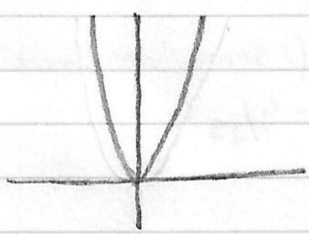
		0	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$g'(x) = 4x^3$

Qualquer número negativo ao cubo é negativo, logo $g'(x)<0$ à esquerda. E qualquer número positivo ao cubo é positivo, logo $g'(x)>0$ à direita.

Pelo que a função g tem um mínimo local em $x=0$.

Como o gráfico de $g(x)$ tem a seguinte forma:



Pelo que podemos concluir que $x=0$ é também mínimo absoluto.

3. $f(x,y) = y^3 - x^3 + 6xy$

(a) Pontos críticos de f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2+6y=0 \\[2ex] 3y^2+6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\[2ex] y^2 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{——} \\[2ex] \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\[2ex] x^4 = -8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\[2ex] x^4+8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\[2ex] x(x^3+8)=0 \end{cases}$$

logo $x=0 \vee x^3+8=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^3=-8 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2$

Logo os pontos críticos são $(0,0)$ e $(-2,2)$.

(b) $f_{xx}(x,y) = 6x$

$f_{yy}(x,y) = 6y$

$f_{xy}(x,y) = 6$

$\Delta f(x,y) = (-6x)(6y) - 6^2$
$= -36xy - 36$

$\Delta f(0,0) = -36 < 0$, logo é um ponto de sela.
$\Delta f(-2,2) = -36 \times (-2) \times 2 - 36$
$= 108 > 0$
$f_{xx}(-2,2) = -6 \times (-2) = 12 > 0$

Como $\Delta f(-2,2) > 0$ e $f_{xx}(-2,2) > 0$ podemos concluir que $(-2,2)$ é minimizante local de f e o mínimo local é $f(-2,2)$.

$f(-2,2) = 2^3 - (-2)^3 + 6 \times (-2) \times 2 = 8 - (-8) - 24 = -8$
logo o minimizante local é $(-2,2)$ e o mínimo local é -8.

4.

$f(x,y) = x^2 - y^2$ sujeito à condição $x^2 + y^2 = 4$

Seja $g(x,y) = x^2 + y^2$.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y) \\ g(x,y) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x, -2y) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y(-1-\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee \lambda = 1 \\ y = 0 \vee \lambda = -1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 4 \text{ (imp)} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = \pm 2 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

logo os pontos extremantes são: $(-2,0), (2,0), (0,-2), (0,2)$

$f(-2,0) = f(2,0) = 4 \rightarrow$ Máximo
$f(0,2) = f(0,-2) = -4 \rightarrow$ Mínimo