Tópicos de Matemática

Licenciatura em Matemática - 1º ano

teste - 11 jan 2018 Proposta de resolução

Este teste tem 6 grupos de questões. Os grupos 3 e 6 são obrigatórios para todos os alunos. Quem realizou os minitestes, pode optar por responder às questões dos grupos 1, 2, 4 ou 5. No caso de apresentar resposta a qualquer uma daquelas questões, a nota do miniteste correspondente será anulada.

GRUPO 1. Sejam p, q e r proposições. Considere a fórmula proposicional

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

(a) Escreva a fórmula proposicional dada usando apenas os conetivos $\sim$ e $\wedge$.

Utilizando a tautologia $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\sim a \vee b)$, temos que

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

é equivalente a

$$\sim [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)].$$

Aplicando agora a tautologia $\sim (a \wedge b) \Leftrightarrow (\sim a \vee \sim b)$ (lei de de Morgan), concluímos que a fórmula anterior é equivalente a

$$\sim [\sim\sim [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \wedge \sim [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]] \,.$$

Aplicando sucessivamente a tautologia $\sim (a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \sim b)$, concluímos que a fórmula obtida é equivalente a

$$\sim [\sim [p \wedge \sim (q \Rightarrow r)] \wedge [q \wedge \sim (p \Rightarrow r)]]$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\sim [\sim [p \wedge (q \wedge \sim r)] \wedge [q \wedge (p \wedge \sim r)]] \,.$$

Eliminando os parênteses desnecessários, concluímos que a fórmula dada é equivalente à fórmula

$$\sim [\sim (p \wedge q \wedge \sim r) \wedge (q \wedge p \wedge \sim r)] \,.$$

(b) Verifique que a fórmula proposicional é uma tautologia.

Pela alínea anterior, a fórmula dada é equivalente a uma fórmula do tipo $\sim (\sim a \wedge a)$, que sabemos ser uma tautologia, já que é a negação de uma contradição $(\sim a \wedge a)$. Logo, a fórmula proposicional dada é uma tautologia.

(c) Sejam $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ condições com o mesmo domínio de variável D. Sabendo que $a(x) \Rightarrow (b(x) \Rightarrow c(x))$ e $a(x) \Rightarrow c(x)$ são condições impossíveis, classifique a condição $b(x)$.

Por (b), sabemos que a condição

$$[b(x) \Rightarrow (a(x) \Rightarrow c(x))] \Rightarrow [a(x) \Rightarrow (b(x) \Rightarrow c(x))]$$

é universal. Sabendo que a condição $a(x) \Rightarrow (b(x) \Rightarrow c(x))$ é impossível, concluímos que

$$b(x) \Rightarrow (a(x) \Rightarrow c(x))$$

é uma condição impossível (por Modus Tollens aplicado às condições).

Aplicando agora o facto de $a(x) \Rightarrow c(x)$ ser impossível, concluímos que $b(x)$ tem de ser uma condição universal. De facto, se existisse $d \in D$ para o qual $b(d)$ fosse uma proposição falsa, $b(d) \Rightarrow (a(d) \Rightarrow c(d))$ era uma proposição verdadeira e, por isso, $b(x) \Rightarrow (a(x) \Rightarrow c(x))$ era uma condição possível.

Cotação: 1. 1.5+1.5+0.5

GRUPO 2. (a) Demonstre o seguinte resultado:

Para todo o número inteiro n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

Para provar esta equivalência, provamos uma dupla implicação:

i. n é ímpar $\Rightarrow n^2$ é ímpar;

ii. n^2 é ímpar $\Rightarrow n$ é ímpar.

Temos:

i. Suponhamos que n é um número ímpar. Então, $n = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, temos que

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Como $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, concluímos que n^2 é um número ímpar.

ii. Para provar esta implicação, usamos o método do contrarrecíproco. Vamos provar a implicação pretendida provando que se n não é ímpar, então, n^2 não é ímpar, ou seja, provando que se n é par, então, n^2 é par.

Se n é par, então, $n = 2k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$ e, por isso, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Como $2k^2 \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que n^2 é um número par.

(b) Prove, por indução matemática, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ é divisível por 9.

Começamos por verificar o caso base: para $n = 1$ temos que $13^1 - 4^1 = 13 - 4 = 9$, que é obviamente divisível por 9. Podemos, por isso, concluir que a igualdade é verdadeira para $n = 1$.

De seguida, supondo que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $13^n - 4^n$ é divisível por 9, queremos provar que $13^{n+1} - 4^{n+1}$ é divisível por 9.

De facto, como, por hipótese de indução, $13^n - 4^n$ é divisível por 9, temos que $13^n - 4^n = 9k$, para algum $k \in \mathbb{N}$ e, por isso, temos que

$$\begin{aligned} 13^{n+1} - 4^{n+1} &= 13^n \times 13 - 4^n \times 4 \\ &= 13^n \times 9 + 13^n \times 4 - 4^n \times 4 \\ &= 13^n \times 9 + (13^n - 4^n) \times 4 \\ &= 13^n \times 9 + 9k \times 4 \\ &= 9(13^n + 4k). \end{aligned}$$

Como $13^n + 4k \in \mathbb{N}$, concluímos que $13^{n+1} - 4^{n+1}$ é divisível por 9.

Aplicando o princípio de indução matemática, concluímos que $13^n - 4^n$ é divisível por 9, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cotação: 2.(a) 1.75 **2.(b)** 1.75

GRUPO 3. (a) Seja $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

i. $\emptyset \subseteq A$;
ii. $\emptyset \in A$;
iii. $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$;
iv. $\{\{\emptyset\}\} \in A$;
v. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$;
vi. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$.

As afirmações verdadeiras são as afirmações i., ii., iii., v. e vi.

(b) Sejam A e B conjuntos não vazios e C um conjunto qualquer. Mostre que

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Leftrightarrow A = B = C.$$

Começamos por observar que se A e B são conjuntos não vazios, temos que existem $a \in A$ e $b \in B$.

Vamos provar que a equivalência dada e válida provando uma dupla implicação:

- $A = B = C \Rightarrow (A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$.
  Tendo por hipótese que $A = B = C$, queremos provar que $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$.
  Se $A = B = C$, então,
  $$(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times C) \cup (C \times C) = C \times C.$$
- $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Rightarrow A = B = C$.
  Tendo por hipótese que $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$, queremos provar que $A = B = C$.
  Começamos por provar que $A = C$. Como
  $$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow (x, b) \in A \times B \\ &\Rightarrow (x, b) \in (A \times B) \cup (B \times A) \\ &\Leftrightarrow (x, b) \in C \times C \\ &\Rightarrow x \in C, \end{aligned}$$
  temos que $A \subseteq C$ e como
  $$\begin{aligned} x \in C &\Rightarrow (x, x) \in C \times C \\ &\Leftrightarrow (x, x) \in (A \times B) \cup (B \times A) \\ &\Leftrightarrow (x, x) \in A \times B \text{ ou } (x, x) \in B \times A \\ &\Rightarrow x \in A, \end{aligned}$$

concluímos que $C \subseteq A$. Logo, $A = C$.

De modo análogo, provamos que $B = C$.

Cotação: 3.(a) 1.5 **3.(b)** 2.0

GRUPO 4. Considere os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$.

(a) Seja R a relação binária de A em B definida por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow y^x \in B, \qquad (x \in A, y \in B).$$

i. Represente R em extensão; $R = \{(-1,1), (0,1), (0,2), (0,4), (0,8), (1,1,), (1,2), (1,4), (1,8), (2$

ii. Determine, justificando, os conjuntos D_R, D'_R e $R^{\leftarrow}(\{4, 8\})$.

$D_R = \{x \in A : (\exists y \in B)\, (x, y) \in R\} = \{-1, 0, 1, 2\} = A$;

$D'_R = \{y \in B : (\exists x \in A)\, (x, y) \in R\} = \{1, 2, 4, 8\} = B$;

$R^{\leftarrow}\{4, 8\} = \{x \in A : (x, 4) \in R$ ou $(x, 8) \in R\} = \{0, 1\}$.

(b) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, uma função $f : B \to A$:

i. injetiva e não sobrejetiva;

Não existe. Como B e A têm o mesmo número de elementos, uma função de B em A é injetiva se e só se é sobrejetiva.

ii. não injetiva;

Por exemplo, $f = \{(1, 2), (2, 2), (4, -1), (8, 0)\}$.

iii. não sobrejetiva;

Por exemplo, $f = \{(1, 2), (2, 2), (4, 2), (8, 2)\}$.

iv. bijetiva.

Por exemplo, $f = \{(1, -1), (2, 0), (4, 1), (8, 2)\}$.

Cotação: 4.(a) 1.75 **4.(b)** 1.75

GRUPO 5. (a) Considere, em $\mathbb{Z}$, a relação binária definida por

$$a\ \theta\ b \Leftrightarrow 3a + b \text{ é um múltiplo de 4} \qquad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

i. Mostre que θ é uma relação de equivalência.

A relação θ é uma relação de equivalência porque é reflexiva, simétrica e transitiva. De facto, temos:

- Para todo $a \in \mathbb{Z}$, temos que $3a + a$ é um múltiplo de 4, pelo que

$$\forall a \in \mathbb{Z},\ a\ \theta\ a.$$

  Logo, θ é reflexiva;

- Para $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned} a\,\theta\,b &\Leftrightarrow 3a + b \text{ é múltiplo de 4} \\ &\Leftrightarrow 3(3a + b) \text{ é múltiplo de 4} \\ &\Leftrightarrow 9a + 3b \text{ é múltiplo de 4} \\ &\Leftrightarrow 8a + 3b + a \text{ é múltiplo de 4} \\ &\Leftrightarrow 3b + a \text{ é múltiplo de 4} \\ &\Leftrightarrow b\,\theta\,a \end{aligned}$$

e, portanto, θ é simétrica;

- Para $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que

$$
\begin{aligned}
a\,\theta\,b \text{ e } b\,\theta\,c &\Leftrightarrow 3a+b \text{ e } 3b+c \text{ são múltiplos de 4}\\
&\Rightarrow 3a+b+3b+c \text{ é múltiplo de 4}\\
&\Leftrightarrow 4b+3a+c \text{ é múltiplo de 4}\\
&\Leftrightarrow 3a+c \text{ é múltiplo de 4}\\
&\Leftrightarrow a\,\theta\,c
\end{aligned}
$$

e, portanto, θ é transitiva.

ii. Determine $[0]_\theta$.

Como $[0]_\theta = \{x \in \mathbb{Z} : 0\,\theta x\}$, temos que

$$[0]_\theta = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \times 0 + x \text{ é múltiplo de } 4\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é múltiplo de } 4\} = 4\mathbb{Z}.$$

iii. Indique, justificando, um inteiro a tal que $[2]_\theta \cap [a]_\theta = \emptyset$.

Sendo θ uma relação de equivalência, temos que $[2]_\theta \cap [a]_\theta = \emptyset$ se e só se $(2, a) \notin \theta$, ou seja, se e só se $3 \times 2 + a$ não é um múltiplo de 4. Podemos considerar, por exemplo, $a = 0$.

(b) Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Existirá alguma relação de equivalência em A com 9 elementos? Justifique a sua resposta. [**Sugestão:** Comece por considerar as partições possíveis de A.]

Como a cada relação de equivalência ρ em A está associada a partição A/ρ e a cada partição de A está associada uma relação de equivalência em A, começamos por considerar possíveis partições de A, tendo em conta o número de conjuntos dessas mesmas partições:

$$P_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\},$$

$$P_2 = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\},$$

$$P_3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\},$$

$$P_4 = \{\{a, b, c\}, \{d\}\},$$

$$P_5 = \{\{a, b, c, d\}\}.$$

Quaisquer outras partições de A são análogas a alguma destas partições (em termos de número de conjuntos e número de elementos de cada conjunto), pelo que o raciocínio aplicado será o mesmo. Considerando agora as equivalências associadas a estas partições, obtemos:

i. $R_{P_1} = \mathrm{id}_A$ que tem 4 elementos;

ii. $R_{P_2} = \omega_{\{a,b\}} \cup \omega_{\{c\}} \cup \omega_{\{d\}}$ que tem 6 (4+1+1) elementos;

iii. $R_{P_3} = \omega_{\{a,b\}} \cup \omega_{\{c,d\}}$ que tem 8 (4+4) elementos;

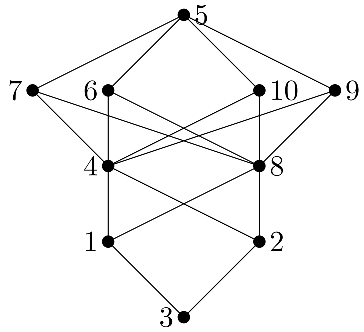
iv. $R_{P_4} = \omega_{\{a,b,c\}} \cup \omega_{\{d\}}$ que tem 10 (9+1) elementos;

v. $R_{P_5} = \omega_A$ que tem 16 elementos.

Logo, não existe qualquer relação de equivalência em A com 9 elementos.

Cotação: 5.(a) 1,5 + 0.5 + 0,5 **5.(b)** 1,0.

GRUPO 6. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$, onde $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ e $\leq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse



(a) Indique os elementos maximais, os elementos minimais, o máximo e o mínimo do conjunto $B = \{1,4,7,8,9,10\}$.

Elementos maximais: 7, 9 e 10; elementos minimais: 1; máximo: não existe; mínimo: 1.

(b) Justifique que, neste c.p.o., o conjunto vazio admite supremo e ínfimo.

O supremo de $\emptyset$ é, por definição, o menor dos majorantes de $\emptyset$. Também por definição, $a \in A$ é um majorante de $\emptyset$ se

$$x \in \emptyset \Rightarrow x \leq a.$$

Como esta implicação é verdadeira para todo $a \in A$, temos que Maj $\emptyset = A$. Assim, o supremo de $\emptyset$ é 3, que é, neste caso, o mínimo de A. Logo, $\emptyset$ admite supremo.

O ínfimo de $\emptyset$ é, por definição, o maior dos minorantes de $\emptyset$. Também por definição, $a \in A$ é um minorante de $\emptyset$ se

$$x \in \emptyset \Rightarrow a \leq x.$$

Como esta implicação é verdadeira para todo $a \in A$, temos que Min $\emptyset = A$. Assim, o ínfimo de $\emptyset$ é 5, que é, neste caso, o máximo de A. Logo, $\emptyset$ admite ínfimo.

(c) Justifique que $(A, \leq)$ não é um reticulado.

Um c.p.o. é um reticulado se qualquer seu subconjunto com dois elementos admite supremo e ínfimo. Relativamente ao c.p.o. $(A, \leq)$, podemos observar que o conjunto $\{4,8\}$ não admite ínfimo, uma vez que Min $\{4,8\} = \{1,2\}$ e este conjunto não tem máximo (já que $1||2$). Logo, A não é um reticulado.

(d) Dê um exemplo de um subconjunto C de A tal que $(C, \leq|_C)$ seja um reticulado mas não seja uma cadeia.

Seja $C = \{1,2,3,4\}$. Então, $(C, \leq|_C)$ é um reticulado, uma vez que existem supremo e ínfimo de qualquer subconjunto com dois elementos e $(C, \leq|_C)$ não é uma cadeia, uma vez que tem elementos não comparáveis (o 1 e o 2).

Cotação: 6. 1,0+0,5+0,5+0,5