Universidade do Minho | **Cursos: CC & MAT**

DMAT

Probabilidades e Aplicações | **2019/2020**

Teste II - 8/Janeiro/2020

Nome: **Nº** **Curso:**

Responda à questão 4 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique os cálculos intermédios e funções do R que utilizar.
Duração: 2h30m.

---

1. O Sr. José é um artesão que fabrica objectos que podem ter defeitos. O número de defeitos num objecto por ele fabricado é uma v.a.r. Z tal que $Z \sim Poisson(2)$.

   (a) Qual probabilidade de um objecto fabricado pelo Sr. José ter mais do que 2 defeitos? Justifique.

   (b) Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 10 objectos fabricados pelo Sr. José, pelo menos 7 terem mais do que 2 defeitos? Justifique.

   (c) Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 100 objectos fabricados pelo Sr. José, a média do número de defeitos ser superior a 2.5? Justifique.

   (d) O Sr. José aceita a devolução de um objecto por ele fabricado se o número de defeitos for superior a um certo valor k, com $k \in \mathbb{N}$. Qual é o menor valor de k que o Sr. José pode indicar de modo a que a probabilidade de um cliente devolver um objecto seja, no máximo, de 0.1? Justifique.

2. O peso (em kg) de um trabalhador de uma certa empresa é uma v.a.r. $X \sim N(75, 9)$.

   (a) Qual a probabilidade de um trabalhador, escolhido ao acaso nesta empresa, pesar mais de 70kg e menos de 75kg? Justifique.

   (b) Considere agora uma amostra aleatória de 5 trabalhadores desta empresa.

      i. Qual a probabilidade de, na amostra aleatória, haver exactamente 2 trabalhadores que pesam menos de 70kg e haver pelo menos 2 trabalhadores que pesam mais de 75kg? Justifique.

      ii. O único elevador existente na empresa admite uma carga máxima de 380 kg. Qual a probabilidade de o elevador conseguir transportar todos os trabalhadores da amostra? Justifique.

3. Seja Y uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(y) = \begin{cases} 2e^{-2(y-2)} & se \quad y \geq \beta \\ 0 & se \quad y < \beta \end{cases},$$

   em que β é uma constante real.

   (a) Mostre que $\beta = 2$.

   (b) Determine a função de distribuição de Y e identifique a mediana de Y.

   (c) Identifique a lei da v.a.r. $T = Y - 2$. Justifique.

   (d) Seja X uma v.a.r. independente de Y e tal que $X \sim Exp(1)$. Calcule $P(X + Y > 4)$.

(v.s.f.f.)

4. Seja X uma v.a.r. discreta com função de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & se \quad x \in \{0,1\} \\ 0 & se \quad c.c \end{cases},$$

em que é uma constante real tal que $0 < p < 1$.

(a) Recorra à transformada de Laplace para mostrar que, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídas com X, então $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Bin(n,p)$.

(b) Sejam X_1 e X_2 independentes e identicamente distribuídas com X. Calcule $P(X_1 \leq X_2)$.

(c) Seja Z uma v.a.r. i.i.d. com X. Diga, justificando, se X e XZ ainda são independentes.