
| Nome: | Nº | Curso: |
|-------|----|--------|
|-------|----|--------|

Responda à questão 3 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste.

Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do R que utilizar. Duração: 2h.

1. Seja X a variável aleatória real (v.a.r.) que representa o saldo diário (em centenas de euros) de uma certa empresa A. Sabe-se que X é uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{4}{3}x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } \text{c.c.} \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

- (a) Mostre que $k = \frac{1}{3}$ e determine a função de distribuição de X .
- (b) Calcule a probabilidade de, em 5 dias, haver pelo menos 3 dias em que a empresa tem prejuízo e de haver apenas um dia em que tem lucro superior a 50€. Justifique.
- (c) Determine o primeiro decil ($\chi_{0.1}$) e o nono decil ($\chi_{0.9}$) de X .
- (d) Usando a definição, mostre que $E[X]$ e $Var[X]$ existem e que $E[X] = \frac{5}{18}$ e $Var[X] = \frac{119}{324}$.
- (e) Calcule a probabilidade aproximada de, ao fim de 40 dias de vendas, a empresa ter lucro.
- (f) Numa outra empresa B, o saldo diário é uma v.a.r., Y , independente de X e tal que $Y \sim U([-1, 1])$. Calcule a probabilidade de, sabendo que, num dia, a empresa B teve lucro, o lucro da empresa A ser pelo menos o dobro do da empresa B.

Observações: 1) Assuma que saldos obtidos em dias distintos são quantidades independentes.

2) Caso não consiga resolver a alínea a), use $F_X(0) = 1/3$ e $F_X(1/2) = 1/2$ nas seguintes.

2. Considere duas v.a.r.'s, X e Y , independentes e tais que $X \sim N(5, 9)$ e $Y \sim Poisson(3)$.
 - (a) Identifique, justificando, a lei da v.a.r. $Z = \frac{X-5}{3}$ e determine $P(Z > \frac{1}{2}, Y = 3)$.
 - (b) Determine $E[Y^2]$ e a mediana da v.a.r. Y^2 .
 - (c) Uma certa empresa tem uma loja física, com 4 vendedores, e tem ainda uma plataforma de vendas online. Sabe-se que os montantes diáários de vendas (em milhares de euros) dos diferentes vendedores da loja são v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com X , enquanto que o montante diário de vendas da plataforma online é uma v.a.r. que segue uma lei Normal, com valor médio de 10 mil euros e desvio-padrão de 2 mil euros. Supondo que o montante diário de vendas online é independente do montante da loja física,
 - i. identifique, justificando, a lei de probabilidade do montante diário de vendas da empresa;
 - ii. calcule a probabilidade de o montante diário de vendas da empresa ser superior a 45 mil euros;
 - iii. calcule a probabilidade de, num dia, o montante de vendas online ser inferior ao da loja física.

Cotação:

1) 11.0 [3.0+1.5+1.0+2.0+1.5+2.0]; 2) 6.5 [a) 2.0, b) 1.5, c) 3.0]; 3) 2.5 [a) 1.0, b) 1.5]

3. Seja X uma v.a.r. e $L_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, a transformada de Laplace de X . Sejam ainda a e b constantes reais.

- (a) Mostre que a transformada de Laplace da v.a.r. $aX + b$ é dada por

$$L_{aX+b}(t) = e^{-bt} L_X(at), t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Recorrendo à transformada de Laplace diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- i. Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $a \neq 0$, então $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- ii. Se $X \sim Poisson(\lambda)$ e $b \neq 0$, então $X + b \sim Poisson(\lambda + b)$.

Observação: Na alínea (b) pode usar, **sem demonstrar**, que:

- se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $L_X(t) = \exp\left\{-t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$, $t \in \mathbb{R}$;
- se $X \sim Poisson(\lambda)$ então $L_X(t) = \exp\left\{-\lambda(1 - e^{-t})\right\}$, $t \in \mathbb{R}$.