

Análise

— Folha de exercícios 9 — 2022'23 —

1. Calcule o valor do integral $\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) d(x, y, z)$, onde:

- (a) $f(x, y, z) = x + y + z$ e $\mathcal{R} = [1, 2] \times [0, 1] \times [-2, 1]$;
- (b) $f(x, y, z) = ze^{x+y}$ e $\mathcal{R} = [0, 1]^3$;
- (c) $f(x, y, z) = xy$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$;
- (d) $f(x, y, z) = x$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$.

2. Use integrais triplas para expressar o volume do sólido definido pela superfície $z = 2 - x^2 - y^2$ e pelo plano XOY .

3. Determine as coordenadas cilíndricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, \sqrt{3}, -1), \quad B = (2, 0, 0), \quad C = (0, -5, 3) \quad \text{e} \quad D = (3, -3, 2).$$

4. Usando coordenadas cilíndricas, calcule $\iiint_{\mathcal{R}} f(x, y, z) d(x, y, z)$, para

- (a) $f(x, y, z) = x$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 \leq z\}$;
- (b) $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq z \leq 3, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
- (c) $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ e \mathcal{R} a região do primeiro octante limitada pelas superfícies cilíndricas de equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos de equações $z = 0$, $z = 1$, $x = 0$ e $x = y$;
- (d) $f(x, y, z) = x + y$ e $\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4 - (x^2 + y^2)\}$.

5. Seja $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$. Calcule o volume de V , usando coordenadas cilíndricas.

6. Determine as coordenadas esféricas dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (1, -1, 0), \quad B = (1, 1, \sqrt{2}), \quad C = (-1, -1, \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad D = (0, 1, -1).$$

7. Calcule o volume da esfera de centro na origem e raio 2.

8. Usando coordenadas esféricas, calcule o valor do integral

$$\iiint_S \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} d(x, y, z),$$

$$\text{onde } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4\}.$$

9. Calcule o volume do sólido que é:

- (a) definido pelas condições $3z \geq x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;
- (b) definido pelas condições $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (c) limitado pela superfície esférica de equação $\rho = 1$ e pela superfície cónica de equação $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

10. Calcule o volume do sólido S , onde S é descrito por

- (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}\}$;
- (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$.