Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

—— prova escrita 1 — duas horas —————————————— 2018'19 ——

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (2 valores) Mostre que não existe cada um dos seguintes limites:

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1}; \quad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

2. (4 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^4x}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

   (a) Estude a continuidade de f;

   (b) Dado $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\|(u,v)\|=1$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0)$;

   (c) Identifique $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

   (d) A função f é derivável em $(0,0)$? Justifique.

3. (8 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=x^3+x^2y^2-2y^2-\ln(y).$$

   (a) Identifique o domínio da função f;

   (b) Calcule as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

   (c) Justifique que f é derivável em $(-2,1)$;

   (d) Determine $f'(-2,1)$;

   (e) Obtenha a taxa de variação da função f no ponto $(-2,1)$ e na direcção e sentido do vector $(\sqrt{3},1)$;

   (f) A taxa de variação da função f obtida na alínea anterior é a taxa de variação máxima de f no ponto $(-2,1)$? Justifique.

   (g) Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-2,1,-6)$.

4. (3 valores) Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$x^3+y^2+z^3+2xyz=6.$$

   (a) Mostre que a equação define z como uma função de (x,y) para pontos "próximos" de $(1,-1,2)$;

   (b) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-1)$;

   (c) Obtenha uma equação da recta tangente à curva de nível 2 da função $z(x,y)$ no ponto $(1,-1)$.

5. (3 valores) Sejam $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ e $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funções deriváveis tais que

$$f(x,y,z)=(xy^2z, z\mathrm{e}^{\,y}+x+\mathrm{e}\,) \qquad \text{e} \qquad Jg(-2,2)=\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $Jf(2,1,-1)$;

   (b) Determine $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(2,1,-1)$ e $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(2,1,-1)$.

Fim