Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 5 - Versão Final** **2024/2025**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = \max\{0, 1 - |x|\}, x \in \mathbb{R}.$$
Observação: A lei de probabilidade de X é conhecida por lei *triangular* (ver gráfico de f).
   (a) Determine a função de distribuição de X e esboce o seu gráfico.
   (b) Calcule $P(X = 0)$, $P(X \leq 1/2)$, $P(0 < X \leq 1/2)$, $P(X \geq 1/2)$, $P(|X| < 1/3)$.

2. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = ke^{-|x|}, x \in \mathbb{R},$$
em que k é uma constante real.
   (a) Determine k, construa a função de distribuição, F, e esboce os gráficos de f e de F.
   (b) Calcule: $P(X < 0)$, $P(X > 0)$, $P(0 < X < 1)$, $P(0 \leq X \leq 1)$ e $P(X^2 < 1)$.
   (c) Identifique a lei de probabilidade da v.a.r. $Y = |X|$.

3. Seja T uma v.a.r. absolutamente contínua que segue a lei exponencial de parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$, i.e., T tem função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$
Observação: Abrevia-se por $T \sim Exp(\lambda)$.
   (a) Determine a função de distribuição de T, esboçe o seu gráfico e calcule $P(T > c)$, $c \in \mathbb{R}$.
   (b) Mostre que T tem a propriedade de falta de memória, i.e., para todo o $x, t \in \mathbb{R}^+$ tem-se
$$P(T > t + x | T > t) = P(T > x).$$
   (c) Uma colónia contém bactérias de dois tipos A e B, aparentemente iguais, na proporção de 1 para 3. A duração de vida de uma bactéria do tipo A (em horas) é uma v.a.r. com lei exponencial de parâmetro 0.1 enquanto que a de uma bactéria do tipo B é exponencial com parâmetro 0.2. Selecionou-se uma bactéria ao acaso nesta população e observou-se que após 20h ela ainda vivia. Qual a probabilidade de ela ser do tipo B?

4. O director de compras de uma empresa pretende definir uma política de aquisição de matéria prima. As necessidades diárias de matéria prima (em 1 000kg) são representadas por uma v.a.r. X absolutamente contínua com função de distribuição dada por
$$F(c) = \begin{cases} a & se \quad c < 0 \\ c - \frac{c^2}{4} & se \quad 0 \leq c < k \\ b & se \quad c \geq k \end{cases},$$
com a, b e k constantes reais.
   (a) Determine a, b e k e obtenha uma função densidade de probabilidade de X.
   (b) Calcule a probabilidade de num dia o consumo de matéria prima ser superior a 1 500kg.
   (c) Calcule a probabilidade de, numa semana, haver pelo menos 2 dias em que o consumo de matéria prima é superior a 1 500kg? (suponha que a semana tem 5 dias e que os consumos de matéria prima em dias diferentes são quantidades independentes)
   (d) Se se quiser que a probabilidade de ruptura de matéria prima num dia não ultrapasse os 0.02, qual o nível de abastecimento que deve ser assegurado diariamente?

5. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-1)} & se \quad x > \beta \\ 0 & se \quad x \leq \beta \end{cases}.$$

Mostre que $\beta = 1$ e identifique a lei de probabilidade da v.a.r. $Y = 2X - 2$.

6. Sejam $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Mostre que:

   (a) se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

   (b) se $Y \sim N(0,1)$ então $Z = \sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$.

   (c) se $X \sim N(0,1)$ então a função de distribuição de X, F_X, satisfaz a condição

   $$F_X(c) = 1 - F_X(-c), \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

7. Suponha que o saldo diário, em milhares de euros, de um estabelecimento comercial é uma v.a.r., X, absolutamente contínua e tal que $X \sim N(1.7, 2)$.

   (a) Qual a probabilidade de, num dia escolhido ao acaso, este estabelecimento ter:

      i) saldo superior 1 800€?

      ii) saldo inferior a 1 700€?

      iii) saldo superior a 1 700€ e inferior a 1 900€?

      iv) ter prejuízo?

   (b) Qual a probabilidade de, numa semana, haver pelo menos 2 dias em que este estabelecimento tem prejuízo? (assuma que a semana tem 6 dias e que os saldos obtidos em dias distintos são quantidades independentes).

8. Calcule o valor das seguintes probabilidades quando $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

   (a) $P(|X - \mu| \leq \sigma)$

   (b) $P(|X - \mu| \leq 2\sigma)$

   (c) $P(|X - \mu| \leq 3\sigma)$

9. Sejam a um número real estritamente positivo e X uma v.a.r. tal que $X \sim N(0,1)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:

   (a) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 0$

   (b) $P(X \leq a) + P(X \geq -a) = 1$

   (c) $P(X \leq a) = P(X > a)$

   (d) $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$

10. Sejam $\mu \in \mathbb{R}^+$ e $X \sim N(\mu, \mu^2)$. Determine $P(X < -\mu | X < u)$.

11. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < a \vee x > b \\ \frac{1}{10} & se \quad a \leq x \leq b \end{cases},$$

com a e b constantes reais, e tal que $P_X(\,]8, +\infty[\,) = 0.4$ (com P_X a lei de probabilidade de X).

   (a) Mostre que $a = 2$ e $b = 12$. Determine a função de distribuição de X.

   (b) A lei de probabilidade de X é conhecida. Identifique-a.

(c) Suponha agora que a v.a.r. X representa o consumo diário de água, em metros cúbicos (m^3), de uma certa empresa.

i. Calcule a probabilidade de, num dia, o consumo de água ser de inferior a $8\mathrm{m}^3$?

ii. Determine a probabilidade de, em 10 dias, haver dois dias em que o consumo de água é superior a $8\mathrm{m}^3$ (assuma que os consumos de água em dias diferentes são quantidades independentes).

12. O rótulo de uma garrafa de água indica que esta contém 350 ml. A linha de produção, que enche estas garrafas, pode não conseguir colocar exatamente os 350 ml, mas garante que uma garrafa contém uma quantidade de água aleatória que segue a lei Uniforme no intervalo $[340, 360]$.

(a) Qual é a probabilidade de uma garrafa conter menos do que 345 ml de água?

(b) Qual é a probabilidade de uma garrafa conter mais de 355 ml de água?

(c) O controle de qualidade aceita uma garrafa se a quantidade de água que esta contém não se afastar em mais de 4 ml do indicado no rótulo. Qual é a probabilidade de uma garrafa de água produzida nesta linha ser rejeitada no controle de qualidade?

(d) Determine o valor de água (em ml) abaixo do qual estão 95% das garrafas enchidas.

13. O tempo decorrido, em minutos, entre chegadas consecutivas de dois clientes a uma repartição pública é uma v.a.r. que segue a lei $Exp(0.1)$. De igual modo, o tempo decorrido entre a abertura da repartição e até à chegada do primeiro cliente também é uma v.a.r. com a mesma lei Exponencial.

(a) Determine a probabilidade de o tempo entre chegadas de dois clientes ser inferior a 5 minutos.

(b) Determine a probabilidade de o tempo entre chegadas de dois clientes ser de pelo menos 10 minutos.

(c) Sabendo que nos primeiros 10 minutos de abertura da repartição ainda não tinha chegado qualquer cliente, qual a probabilidade de o primeiro cliente chegar durante os 5 minutos seguintes?

14. (*) Sejam $X \sim Exp(\lambda)$, a uma constante real positiva e considere a v.a.r. $Y = \begin{cases} X - a & se \quad X > a \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$.
Calcule $P(Y = 0)$ e determine a função de distribuição de Y.

15. (*) Seja X uma v.a.r. com função de distribuição dada por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} & t < -1 \\ 1/2 & \text{se} & -1 \leq t < 1/2 \\ (t+1)/3 & \text{se} & 1/2 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{se} & t \geq 2 \end{cases}.$$

(a) Mostre que $P(X = -1) = \frac{1}{2}$ e que $P(X = a) = 0, \ \forall\, a \neq -1$.

(b) Mostre que a função H se pode escrever da seguinte forma

$$H(t) = \frac{1}{2}\, H_1(t) + \frac{1}{2}\, H_2(t), \ t \in \mathbb{R},$$

onde H_1 e H_2 são, respectivamente, funções de distribuição de uma lei discreta e de uma lei absolutamente contínua. Identifique as funções H_1 e H_2 e as correspondentes leis de probabilidade. *Obs.: Neste caso, diz-se que a lei de probabilidade da v.a.r. X é uma lei mista ou de mistura.*

(*) Exercícios desafio