

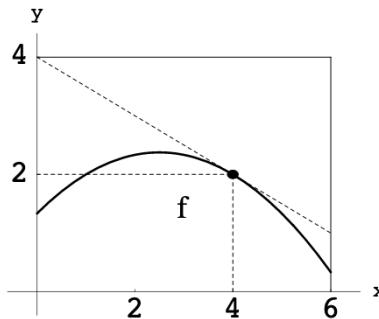


Nome:

Número:

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2 valores) A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (4, 2)$. Sendo $g(x) = [f(2x + 3)]^3$, qual o valor da derivada $g'(\frac{1}{2})$?



Exercício 2. (2.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - e^{x^2} + 3$.

- (a) Determine os limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (b) Determine o número de zeros de f .

Exercício 3. (2 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

I. Calcule $\int \frac{x + (\arcsen(3x))^2}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx.$ II. Calcule $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsen x dx.$

Exercício 4. (2 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

I. Calcule $\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x - 1)^2(x + 2)} dx.$ II. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}.$

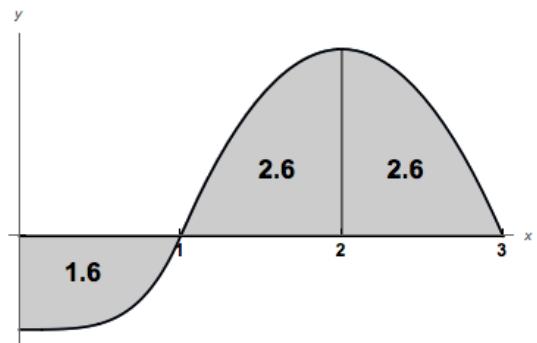
Exercício 5. (2 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

I. Calcule o integral $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx,$ efetuando a substituição $x = \operatorname{sen}^2 t.$
 II. Calcule o integral $\int_{1/2}^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx,$ efetuando a substituição $x = \frac{1}{t}.$

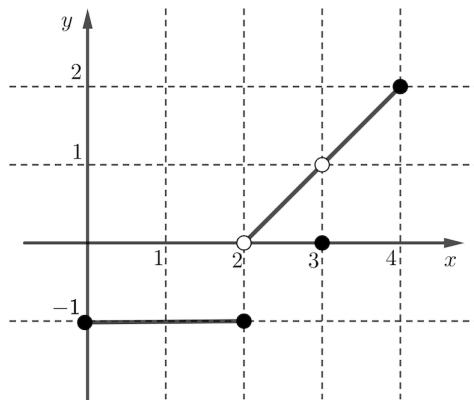
Exercício 6. (3 valores) Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abscissas, que correspondem às abscissas dos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$, respectivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Nestas condições, considere a função $F : [-1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_2^{\frac{1+x}{3}} f(t) dt$.

- Determine os valores de $F(-1)$, $F(2)$, $F(5)$ e $F(8)$.
- Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.
- Represente F graficamente.



Exercício 7. (3.5 valores) Considere a função $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte e seja $F : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.



- Determine o conjunto dos zeros da função F .
- Determine, caso existam, $F'(1)$ e $F'(3)$.
- Apresente, ou justifique que não existe, uma primitiva da função f .

Exercício 8. (2 valores) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq -2 \wedge 1 \leq y \leq 2 - x^2\},$$

fazendo previamente um esboço da região R .

Exercício 9. (1 valor) Apresente um exemplo, **justificando**, de duas funções $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis, tais que $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in [-1, 1]$ e $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 g(x) dx$.