Departamento de Matemática	Universidade do Minho
Tópicos de Matemática	Exame de recurso – 19 janeiro 2024
Lic. em Ciências de Computação - 1º ano	duração: duas horas

Nome ____ Número ____________

GRUPO I.

Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Para quaisquer proposições p, q e r, se as proposições $q \Rightarrow p \wedge r$ e $\sim p$ são verdadeiras, então a proposição q é falsa. V☐ F☐
2. Afirmar que "Se ando de carro e ando de comboio, então não ando a pé" é logicamente equivalente a "Se ando a pé, então não ando de carro nem de comboio." V☐ F☐
3. Para toda a condição $p(n)$, em $\mathbb{N}$, se $p(n)$ é hereditária e $p(4)$ é uma proposição falsa, então $p(5)$ é uma proposição falsa. V☐ F☐
4. Para quaisquer conjuntos A, B e C, $(A \cap B) \cup C \subseteq A \cap (B \cup C)$. V☐ F☐
5. Se o produto cartesiano de dois conjuntos é o conjunto vazio, então um dos conjuntos é o conjunto vazio. V☐ F☐
6. Para qualquer conjunto não vazio A, se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A tal que $A/\mathcal{R} \cup \{\emptyset\} = \mathcal{P}(A)$, então A tem exatamente um elemento. V☐ F☐
7. Para toda a relação de equivalência R em $A = \{1, 2, 3\}$, se $[1]_\mathcal{R} \cap [2]_\mathcal{R} = [3]_\mathcal{R}$ então, $\mathcal{R}$ é a relação universal em A. V☐ F☐
8. Para qualquer c.p.o. $(A, \leq)$ e quaisquer $x, y \in A$ com $x \neq y$, se x e y são elementos minimais de A então não existe supremo de $\emptyset$ em A. V☐ F☐

GRUPO II.

Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

1. um conjunto A tal que $\{\emptyset\} \in A$ e $\{\emptyset\} \subseteq A$;

2. uma condição $p(n)$ que seja hereditária em $\mathbb{N}$ tal que $p(1)$, $p(2)$ e $p(3)$ são proposições falsas e $\forall n \geq 4$, $p(n)$ é uma proposição verdadeira;

3. um conjunto A e uma função $f : A \to A$ tal que $f^{\to}(\{a, b\}) = \{c\}$ e $f^{\leftarrow}(\{a, c\}) = \{a, b, d, c\}$;

4. uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $A/\mathcal{R}$ tem exatamente 3 elementos.

GRUPO III.

Seja $f_\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por $f(x, y) = x - y$, para todo $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1. Determine:

   (a) $f(\{0, 1\} \times \{1, 2\})$;

   (b) $f^{\leftarrow}(\{1\})$.

2. Classifique f quanto à injetividade e sobrejetividade.

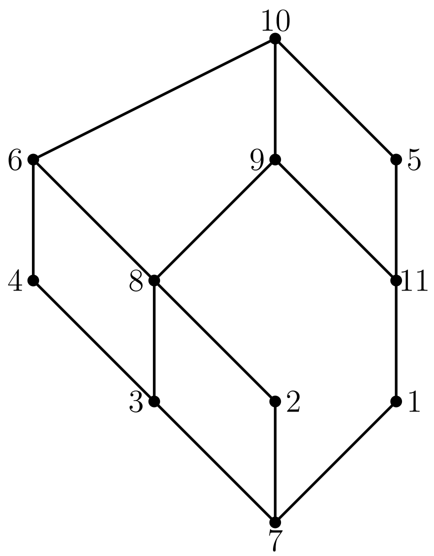
3. Considere, em $\mathbb{Z}$, a relação binária $\mathcal{R}$ definida por

$$x \; \mathcal{R} \; y \Leftrightarrow f(x^2, y^2) = f(y, x).$$

Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência e determine $[0]_{\mathcal{R}}$.

GRUPO IV.

Considere o c.p.o. $(X, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse apresentado.



1. o conjunto dos majorantes de $A = \{2, 3, 11\}$;

2. o ínfimo e o supremo de $B = \{1, 2\}$;

3. os elementos minimais de $C = \{4, 6, 8, 11\}$;

4. o ínfimo e o supremo do conjunto vazio;

5. um subconjunto D que seja uma cadeia de comprimento 5 para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. X.

6. um subconjunto E com 5 elementos que seja um reticulado para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. X.

[Cotação:] **GRUPO I.** $8 \times 1.0 = 8.0$ **GRUPO II.** $4 \times 1.0 = 4.0$ **GRUPO III.** $1.0 + 1.5 + 2.5 = 5.0$ **GRUPO IV.** $6 \times 0.5 = 3.0.$