## 1.3 Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

1. **a)** Indique uma derivação em DNP cuja conclusão seja $p_0 \wedge p_1$ e cuja única hipótese não cancelada seja $p_1 \wedge p_0$.

   **b)** Indique duas derivações distintas em DNP de conclusão $p_0 \to (p_1 \to (p_0 \vee p_1))$ e sem hipóteses por cancelar.

   **c)** Indique as subderivações de cada uma das derivações que apresentou em **a)** e em **b)**.

2. Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$. Encontre demonstrações em DNP das fórmulas abaixo indicadas.

   **a)** $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$. **b)** $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$.

   **c)** $\varphi \to \varphi$. **d)** $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$.

   **e)** $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$. **f)** $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

   **g)** $(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$. **h)** $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$.

3. Mostre que:

   **a)** $p_0 \to p_1, \neg p_1 \vdash \neg p_0$.

   **b)** $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_0 \vdash ((p_0 \leftrightarrow p_1) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \wedge (p_0 \leftrightarrow p_2)$.

4. Represente o raciocínio que se segue através de uma consequência sintática e prove que essa consequência sintática é válida: O Tiago disse: “Vou almoçar ao McDonald’s ou à Pizza Hut”. E, acrescentou: “Se comer no McDonald’s, fico mal disposto e não vou ao cinema”. Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e conclui: “O Tiago foi almoçar à Pizza Hut”.

5. Mostre que os conjuntos $\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1, \neg p_2\}$ e $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge \neg p_1\}$ são inconsistentes.

6. Demonstre as seguintes proposições, para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$.

   **a)** $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ sse $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \psi$. **b)** $\Gamma \vdash \varphi$ sse $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$.

   **c)** $\Gamma \vdash \bot$ se e só se $\Gamma \vdash p_0 \wedge \neg p_0$. **d)** Se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

7. Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que:

   **a)** $(p_0 \vee p_1) \to (p_0 \wedge p_1)$ não é um teorema de DNP.

   **b)** $p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \wedge p_1$.

   **c)** $\{p_0 \vee p_1, \neg p_0 \wedge p_1\}$ é consistente.

   **d)** $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ se e só se $\Gamma$ não é satisfazível.

   **e)** Se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ e $\varphi$ é uma tautologia, então $\Gamma \vdash \psi$.

   (Sugestão: aplique o Teorema da Correção e/ou o Teorema da Completude.)

8. Dê exemplo de dois conjuntos de fórmulas distintos que contenham $\{p_1 \vee p_2, p_1 \leftrightarrow p_2\}$ e que sejam maximalmente consistentes.

9. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: $\Gamma \models \varphi$ sse existe um subconjunto $\Gamma_0$ de $\Gamma$, finito, tal que $\Gamma_0 \models \varphi$.