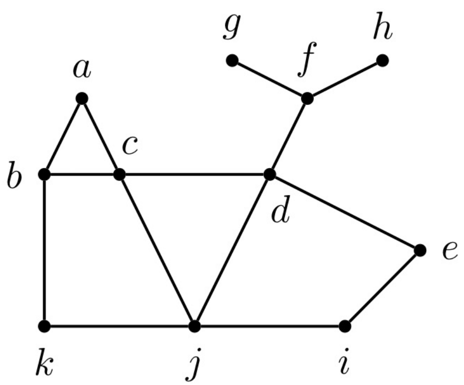
9. (a) Considere o grafo



i. Determine dois caminhos elementares distintos de f a k.

ii. Determine um ciclo com vértices usados na alínea anterior.

(b) Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $x, y \in V$. Mostre que se existem dois caminhos elementares distintos entre x, y, então G admite um ciclo.

a) i) Consideramos $\langle f, d, e, i, j, k \rangle$

e $\langle f, d, j, c, b, k \rangle$

ii) Por exemplo $\langle k, j, i, e, d, c, b, k \rangle$

ou $\langle d, j, c, d \rangle$

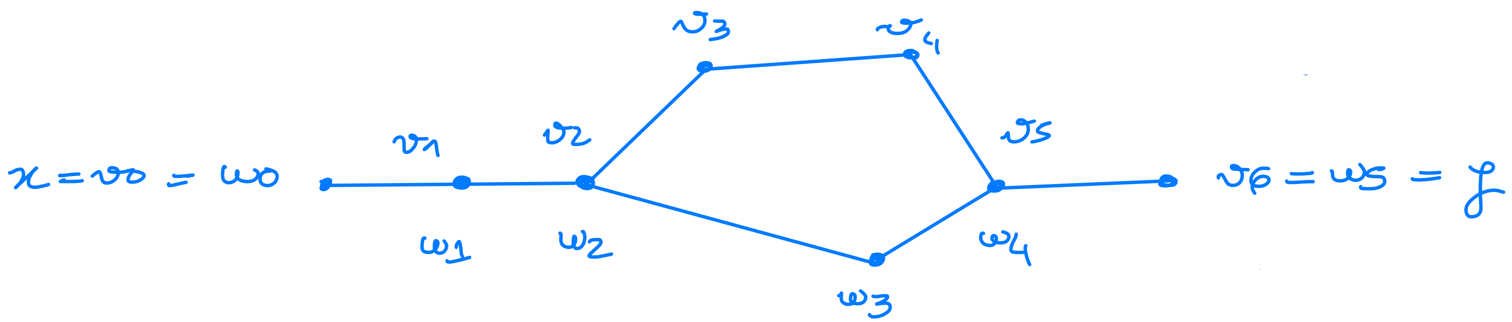
b) Sejam $x, y \in V$. Se $x = y$ então temos imediatamente dois ciclos.

Se $x \neq y$, consideramos $C_1 = \langle x = v_0, v_1, \dots, v_n = y \rangle$
$C_2 = \langle x = w_0, w_1, \dots, w_m = y \rangle$

Seja i o primeiro índice tal que $v_i = w_i$ mas $v_{i+1} \neq w_{i+1}$ ou seja, C_1 e C_2 "bifurcam" em $v_i = w_i$ (tal vértice existe uma vez que $C_1 \neq C_2$, podendo acontecer $v_i = w_i = x$)

Sejam agora r e s os próximos índices em C_1 e C_2 tais que $v_r = w_s$ mas $v_{r-1} \neq w_{s-1}$ (podendo acontecer $v_r = w_s = y$).

Então, por construção, $\langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_r = w_s, w_{s-1}, \dots, w_i = v_i \rangle$ é um ciclo.



ciclo: $\langle v_2 = w_2, v_3, v_4, v_5 = w_4, w_3, w_2 = v_2 \rangle$

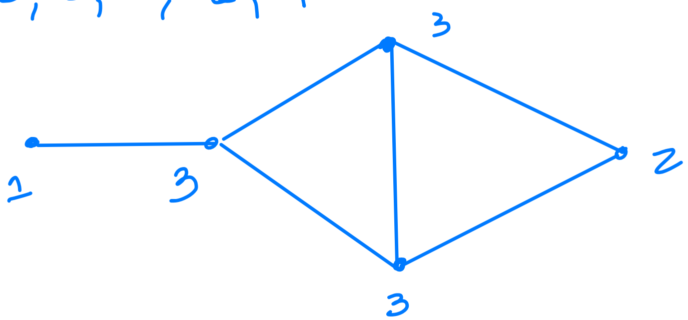
16. A *sequência gradual* de um grafo é a sequência dos graus dos seus vértices ordenados do maior ao menor. Por exemplo, a sequência gradual do grafo completo K_4 é $3, 3, 3, 3$ e a sequência gradual do grafo $K_{2,3}$ é $3, 3, 2, 2, 2$. Para cada uma das sequências de números, indique as que são sequência gradual de algum grafo. Neste caso, represente o grafo em questão.

(a) $4, 4, 4, 4$;
(b) $3, 3, 3, 2, 1$;
(c) 1,1,1,1,1,1;
(d) 5,4,4,3,2,2;
(e) 4,3,3,2,2,1;
(f) 4,4,3,3,3,3,3,3,2,2.

a) 4, 4, 4, 4

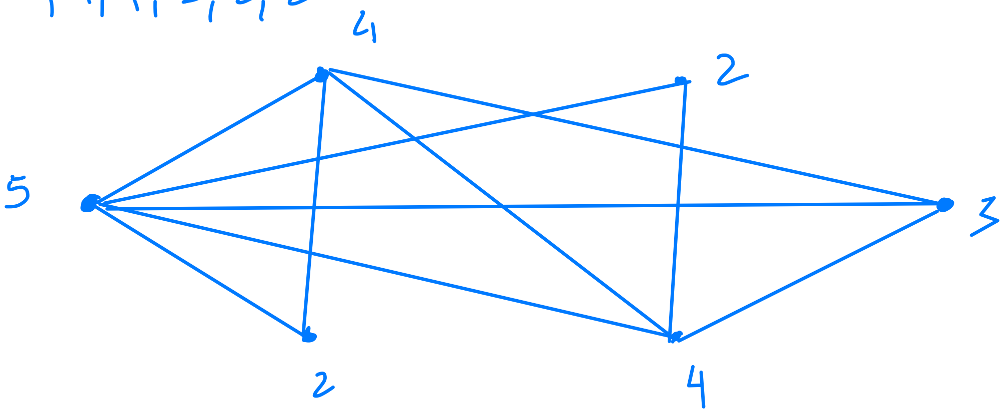
Este seria um grafo com 4 vértices; mas num grafo simples com 4 vértices o grau máximo de um vértice é 3. Logo tal grafo não existe.

b) 3, 3, 3, 2, 1



c) 1, 1, 1, 1, 1, 1

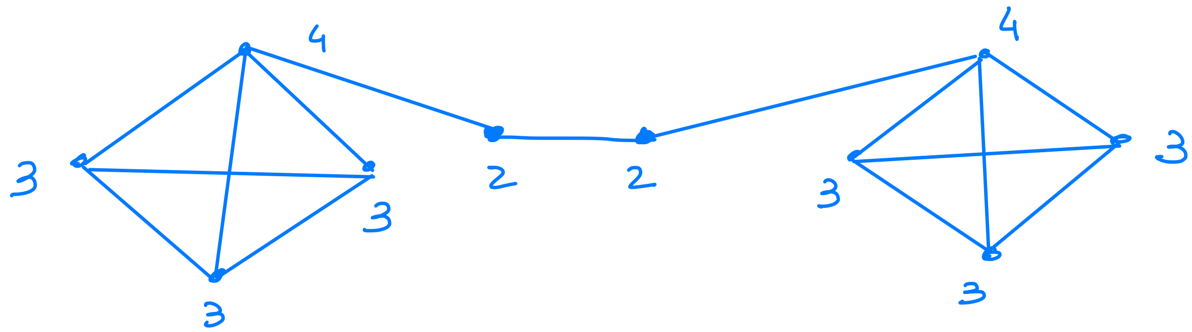
d) 5, 4, 4, 3, 2, 2



e) 4, 3, 3, 2, 2, 1

Não é possível construir tal grafo uma vez que o número de vértices de grau ímpar é 3 e tal não pode acontecer pois num grafo simples o número de vértices de grau ímpar é par.

f) 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2

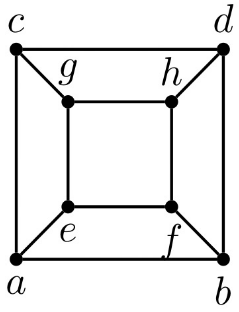


19. Um *conjunto de desconexão* de um grafo conexo G é um conjunto de arestas cuja remoção dá origem a um grafo desconexo.

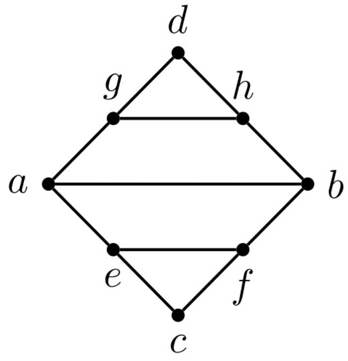
(a) Encontre conjuntos de desconexão para o grafo de Petersen com $3, 4$ e 5 arestas.

(b) Encontre conjuntos de desconexão com o menor número possível de arestas para os grafos seguintes:

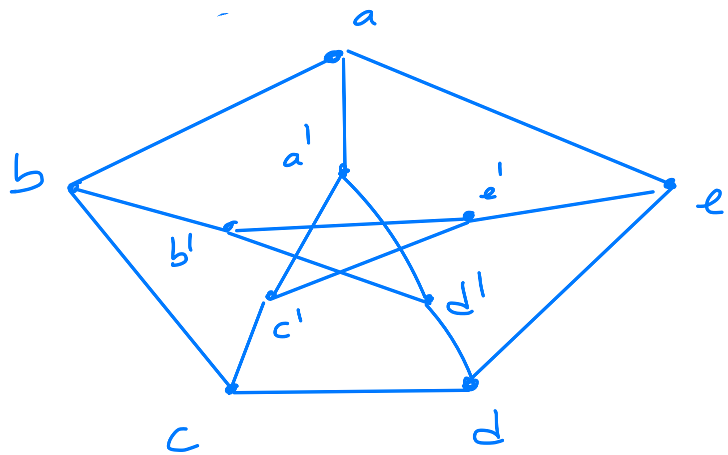
(i)



(ii)



a)



Conjunto de desconexão com 3 arestas

$\{ \{b,a\}, \{a',a\}, \{a,e\} \}$

Conjunto de desconexão com 4 arestas

$\{ \{b,a\}, \{a,a'\}, \{e',e\}, \{e,d\} \}$

Conjunto de desconexão com 5 arestas

$\{ \{a,a'\}, \{e,e'\}, \{d,d'\}, c\{c', \}, \{b,b'\} \}$

b) i) O número mínimo de arestas a retirar é 3 uma vez que todos os vértices têm grau 3

ii) Não é possível encontrar um conjunto de desconexão com uma aresta pois não existem vértices de grau 1.

Considerando $\{\{d,g\},\{d,h\}\}$ temos um conjunto de desconexão com 2 arestas pois grau $(d) = 2$.

24. O *complemento* de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, onde

$$\overline{V} = V \text{ e } \overline{E} = \{\{x, y\} \subseteq V : x \neq y, \{x, y\} \notin E\}.$$

(a) Determine o complemento de $K_{3,5}$.

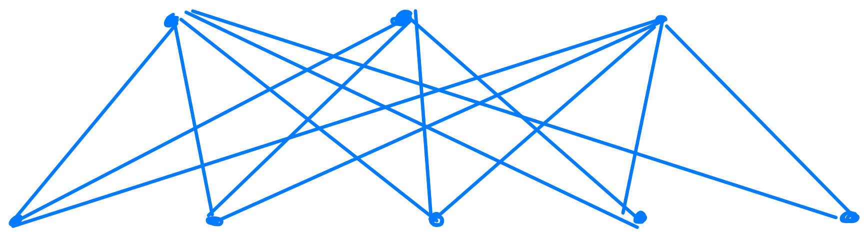
(b) Determine $\overline{G}$, onde G é um grafo desconexo com duas componentes conexas que são os grafos K_3 e K_5.

(c) Dado o grafo ciclo C_5, mostre que $\overline{C_5}$ e C_5 são o mesmo grafo.

(d) Considere o grafo linha P_3. Mostre que $\overline{P_3}$ e P_3 são o mesmo grafo.

(e) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "O complemento de um grafo conexo é um grafo conexo.".

a)



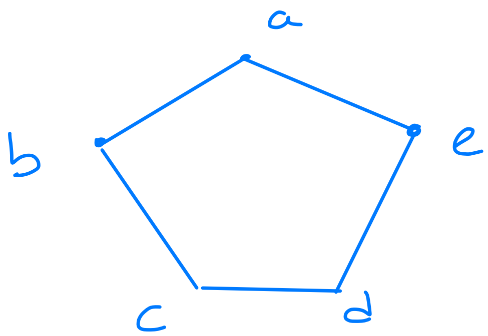
$K_{3,5}$

O complemento de $K_{3,5}$ é o grafo desconexo com duas componentes conexas que são os grafos completos K_3 e K_5.

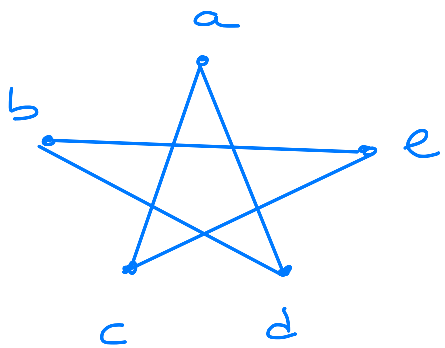
b) $K_{3,5}$

c)

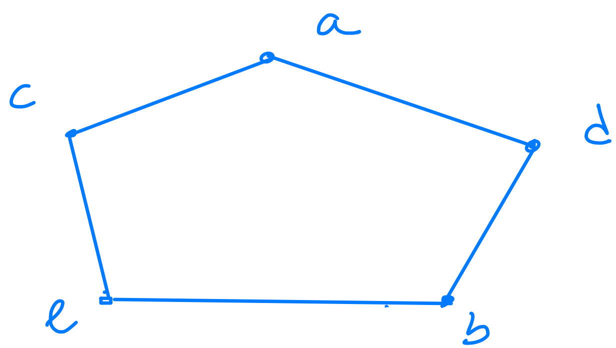
C_5



$\overline{C_5}$



$\overline{C_5}$ também pode ser representado



que é de facto um grafo ciclo.

d)

P_3 (3 arestas)

$\overline{P_3}$:

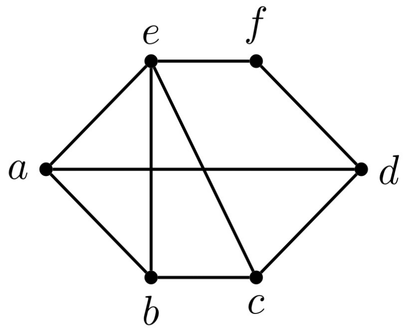
que é equivalente a

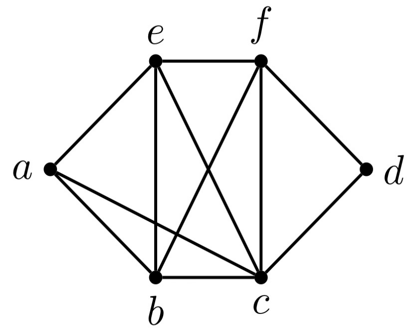
que é de facto o grafo linha P_3.

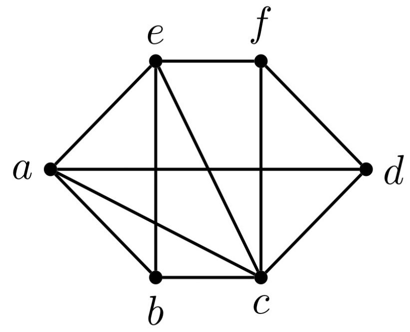
e) Falso. Contra-exemplo da alínea a).

(se qualquer grafo completo K_n, $\overline{K_n}$ é o grafo nulo com n vértices)

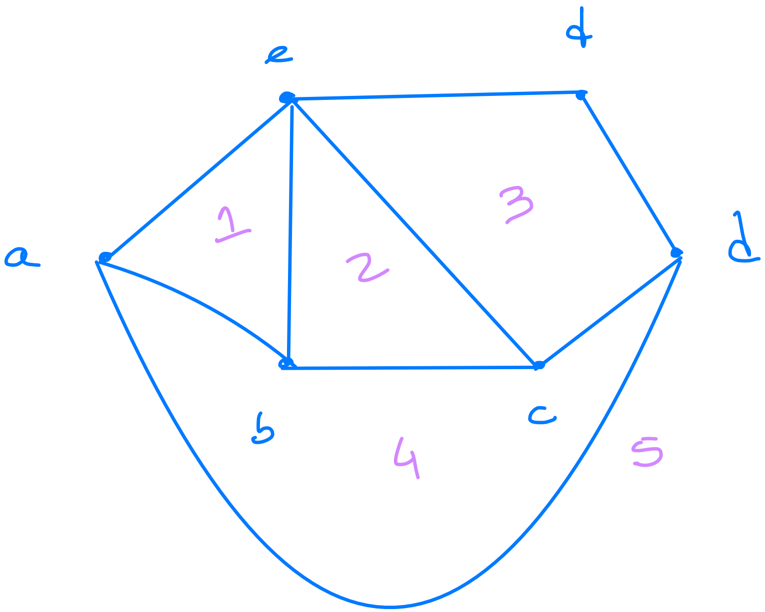
26. Para cada um dos seguintes grafos planares encontre uma representação planar e indique o número de faces:

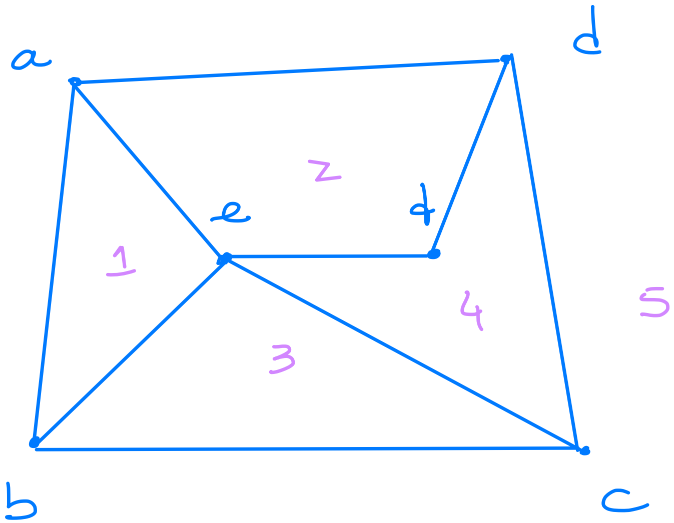
(a) 

(b) 

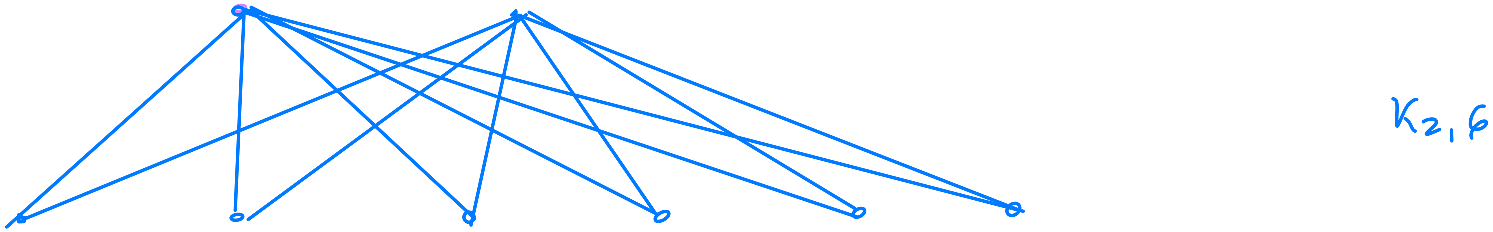
(c) 

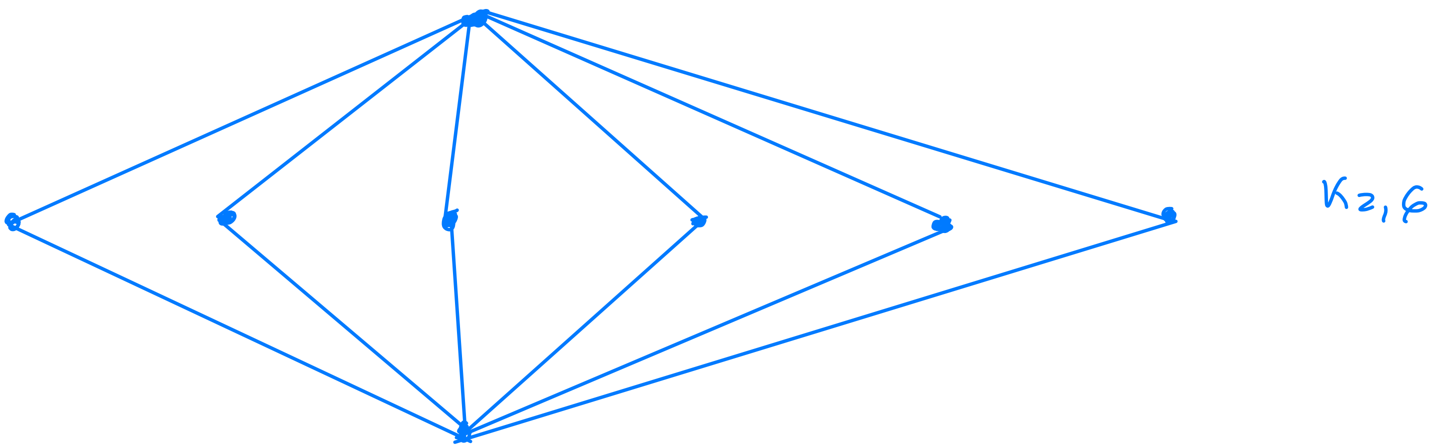
a)



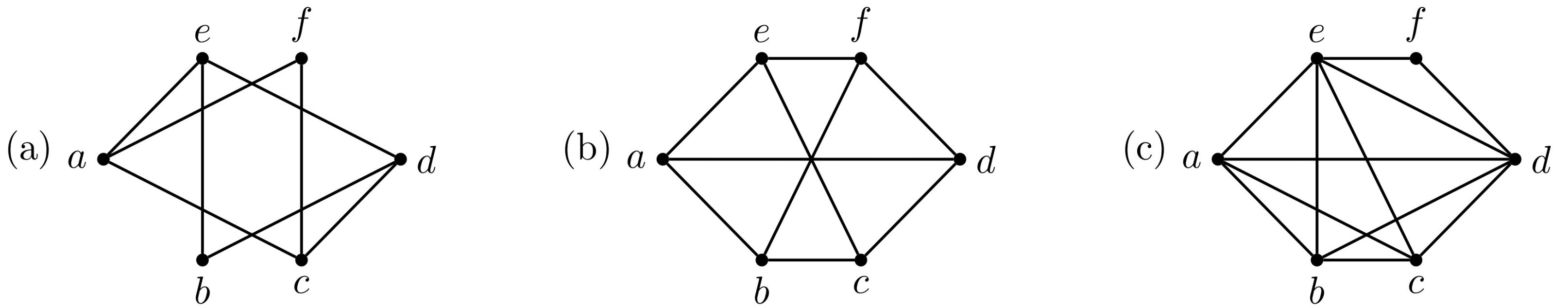


27. Encontre uma representação planar de $K_{2,6}$.

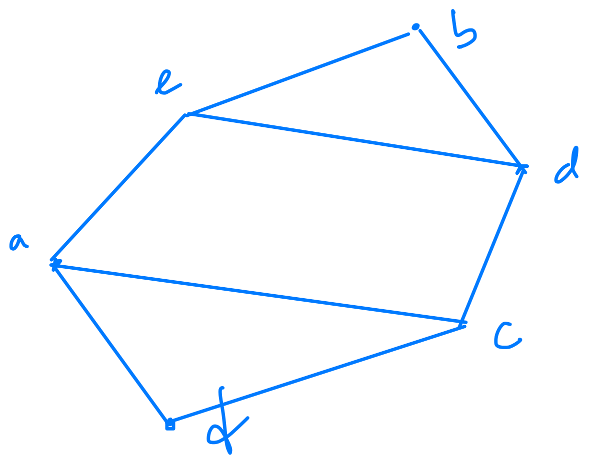




28. Para cada um dos grafos seguintes, encontre uma representação planar ou justifique porque é que não é possivel ter tal representação.

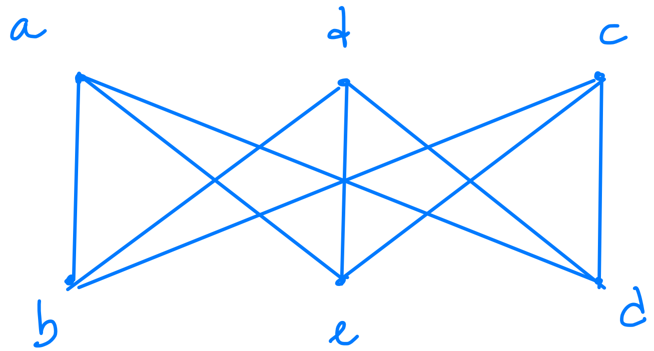


a)



representação planar

b)



$K_{3,3}$

não é planar

c) Retirando o vértice f temos o grafo K_5 que não é planar