Geometria — Lic. Ciências da Computação

Segundo Teste — 06 de junho de 2016

Proposta de Resolução

1 Temos $h(x,y,z,t) = (1,-3,-2,4) + 2(x,y,z,t)$
Logo h é uma homotetia de razão $\lambda = 2$.
Se Ω é o centro da homotetia então $(1-\lambda)\Omega = (1,-3,-2,4)$
logo $\Omega = (-1,3,2,-4)$. (Em alternativa: Ω é o único ponto fixo de h).

2 $\rho(x,y) = (4-y, 2+x)$ e $\sigma(x,y) = (1-y, 1-x)$

a Expressão matricial de ρ

$$\rho: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Expressão matricial de σ

$$\sigma: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Para justificar que ρ e σ são isometrias basta observar que as matrizes principais de ρ e σ são matrizes ortogonais, isto é, satisfazem $AA^{t} = Id$. Temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

b Temos que $\det(\vec{\rho}) = 1$ logo, pelo teorema da classificação das isometrias do plano, ρ ou é uma rotação ou é uma translação.
Vejamos que ρ tem um único ponto fixo:

$$\rho(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-y = x \\ 2+x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2+4-y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Assim $P = (1,3)$ é o único ponto fixo de ρ, pelo que ρ é uma rotação e P é o centro. A matriz principal de uma rotação é da forma $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ pelo que podemos concluir que o ângulo de rotação é $\theta = \pi/2$.

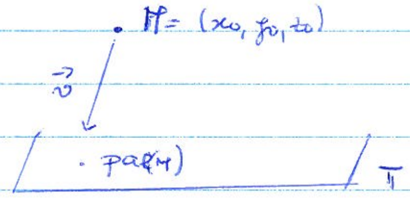
c. Temos que $\det(\vec{\sigma}) = -1$ logo, pelo teorema da classificação das isometrias do plano, σ ou é uma reflexão ou é uma reflexão deslizante. Calculamos os pontos fixos de σ.

$$\sigma(x,y)=(x,y) \iff \begin{cases} 1-y=x \\ 1-x=y \end{cases} \iff x+y=1$$

Assim σ possui uma reta de pontos fixos, a reta de equação cartesiana $x+y=1$. Assim σ é a reflexão nesta reta.

3 $\Omega=(1,1,1)$, $\vec{v}=(1,0,2)$, $\Pi: \ x-y+z=3$

a Sejam $M=(x_0,y_0,z_0)$ e $par(M)$ a imagem de M através da projeção paralela em Π segundo $\vec{v}$.
$par(M)$ é a interseção da reta $r_M = M+\langle \vec{v} \rangle$ com o plano Π.



Assim $par(M) = (x_0,y_0,z_0)+\lambda(1,0,2)$, para algum $\lambda\in\mathbb{R}$
$= (x_0+\lambda, y_0, z_0+2\lambda)$

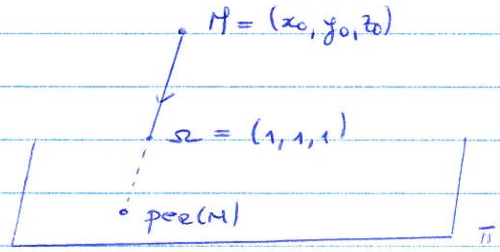
Como $par(M)\in\Pi$ temos $x_0+\lambda-y_0+z_0+2\lambda=3$, logo,
$\lambda = \dfrac{3-(x_0-y_0+2z_0)}{3}$

Portanto $par(x_0,y_0,z_0) = (x_0,y_0,z_0)+\dfrac{3-(x_0-y_0+2z_0)}{3}(1,0,2)$

$$= \left(\frac{2x_0+y_0-z_0+3}{3},\ y_0,\ \frac{-2x_0+2y_0+z_0+6}{3}\right)$$

[Em alternativa poderíamos ter usado a fórmula $par(M) = M - \dfrac{(\vec{AM}\cdot\vec{n})}{\vec{v}\cdot\vec{n}}\vec{v}$ onde $A\in\Pi$ e $\vec{n}$ é vetor normal a Π.]

b Sejam $M=(x_0,y_0,z_0)$ e $per(M)$ a imagem de M através da projeção perspetiva em Π desde Ω.
$per(M)$ é a interseção da reta ΩM que incide em M e em Ω com o plano Π.



Assim $per(M) = (x_0,y_0,z_0)+\lambda(x_0-1, y_0-1, z_0-1)$, para algum $\lambda\in\mathbb{R}$
$= (x_0+\lambda(x_0-1), y_0+\lambda(y_0-1), z_0+\lambda(z_0-1))$

Como $per(M)\in\Pi$ temos $x_0+\lambda(x_0-1)-y_0-\lambda(y_0-1)+z_0+\lambda(z_0-1)=3$
logo, $\lambda = \dfrac{3-(x_0-y_0+z_0)}{x_0-y_0+z_0-1}$

Portanto $per(M) = (x_0,y_0,z_0)+\dfrac{3-(x_0-y_0+z_0)}{x_0-y_0+z_0-1}(x_0-1, y_0-1, z_0-1)$

$$per(M) = \left(\frac{3x_0 - y_0 + z_0 - 3}{x_0 - y_0 + z_0 - 1}, \frac{x_0 + y_0 + z_0 - 3}{x_0 - y_0 + z_0 - 1}, \frac{x_0 - y_0 + 3z_0 - 3}{x_0 - y_0 + z_0 - 1} \right)$$

De notar que $per(M)$ não está definido no plano de equação $x - y + z = 1$ que é o plano paralelo a Π que incide em Ω, o plano de pontos excecionais.

4 $\mathcal{P}$: $y^2 = 8x$

a $y^2 = 4(2x)$ pelo que $\mathcal{P}$ está escrita na forma reduzida de uma parábola e $a = 2$.

Logo: vértice: $(0,0)$ foco: $(2,0)$ diretriz $x = -2$

As equações paramétricas podem ser $x = 2t^2$ $y = 4t$

(ou em alternativa $x = 1/8\, t^2$ e $y = t$)

b Sejam $A = (2t_1^2, 4t_1)$ $B = (2t_2^2, 4t_2)$

vetor $\vec{AB} = (2t_2^2 - 2t_1^2, 4t_2 - 4t_1) = 2(t_2 - t_1)(t_2 + t_1, 2)$

A reta AB está dirigida pelo vetor $(t_2 + t_1, 2)$.

Assim a reta AB é paralela à reta diretriz $x = -2$ sse for uma reta vertical, ou seja, sse $t_2 + t_1 = 0$