Geometria

Resolução do exame de recurso 06/02/2012

I. 1. $O' = (0,1)_R$ $\begin{cases} \vec{v_1}' = 3\vec{v_1} + 2\vec{v_2} \\ \vec{v_2}' = -\vec{v_2} \end{cases}$

a. A expressão matricial para a mudança de coordenadas de R' para R é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

b. R ortonormado

i. $d(O,O') = \|\vec{OO'}\| = \|(0,1)_R\| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

ii. Temos que

$\vec{v_1}'.\vec{v_2}' = (3\vec{v_1} + 2\vec{v_2})(-\vec{v_2}) = -3\vec{v_1}.\vec{v_2} - 2\vec{v_2}\vec{v_2}$

$= -3 \times 0 - 2 \times 1 = -2$

Como $\vec{v_1}'.\vec{v_2}' \neq 0$, R' não é ortogonal (e, portanto, não é ortonormado)

II. 2.

a. $A = (2,0,2)$ $B = (0,2,2)$

$\vec{AB} = B - A = (-2,2,0)$ é um vector director de r.

Como r é perpendicular a Π, então $\vec{AB}$ é um vector normal a Π, logo Π é da forma

$-2x + 2y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$

Como $(0,0,0) \in \Pi$ então a equação cartesiana de Π é

$-2x + 2y = 0 \iff y = x$

Equações paramétricas de Π

$$\Pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b. Π': $-x + z + 1 = 0$

$\vec{n} = (-1, 0, 1)$ é um vector normal a Π'

Como r' é perpendicular a Π' então $\vec{n}$ é um vector director de r' e como $(0,1,0) \in r'$, vem que as equações paramétricas de r' são dadas por:

$(x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(-1,0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

Equações cartesianas de r' $\begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases}$

3. $r = \underset{A}{(1,0,0)} + \langle \underset{\vec{v}}{(1,0,1)} \rangle$ $\quad s = \underset{B}{(1,1,1)} + \langle \underset{\vec{w}}{(1,1,-1)} \rangle$

a. $\vec{AB} = B - A = (0,1,1)$

$r + s = A + \langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$= (1,0,0) + \langle (0,1,1), (1,0,1), (1,1,-1) \rangle$

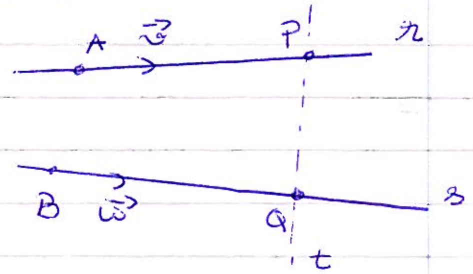
$\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -(-2) + 1 = 3 \neq 0$

Logo $\{\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de três vectores linearmente independentes e, portanto, $\dim(r+s) = 3$

Assim r e s são rectas enviesadas

b. Temos



$\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QB}$ $\quad (*)$

Como A e $P \in r$ e B e $Q \in s$

existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$\vec{AP} = \alpha \vec{v}$ e $\vec{QB} = \beta \vec{w}$

Note-se também que como t é a perpendicular comum a r e a t se tem $\vec{v} \perp \vec{PQ}$ e $\vec{w} \perp \vec{PQ}$

Fazendo o produto escalar em $(*)$ com $\vec{v}$ e $\vec{w}$ temos

$\begin{cases} \vec{AB}\cdot\vec{v} = \alpha \vec{v}\vec{v} + \beta \vec{w}\vec{v} \\ \vec{AB}\cdot\vec{w} = \alpha \vec{v}\vec{w} + \beta \vec{w}\vec{w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha \\ 0 = 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Assim temos:

$P = A + \vec{AP} = (1,0,0) + \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$Q = B + \vec{BQ} = B - \vec{QB} = (1,1,1) - 0(1,1,-1) = (1,1,1) = B$

c. Como r e s são enviesadas temos que:

$d(r,s) = d(P,Q) = \sqrt{3/2}$

C.A $d(P,Q)^2 = \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + (1-0)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

d. Como $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, o ângulo formado por r e por s tem amplitude igual a $\pi/2$ radianos (90 graus)

4. A plano euclidiano

a. A expressão analítica de t é dada por

$t(x,y) = (x-1, y-3)$

Portanto a sua expressão matricial é em coordenadas homogéneas a seguinte

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se $M=(x,y)$, $\Omega=(0,2)$ e $\lambda=3$, a homotetia h é dada por: $h(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \lambda(M-\Omega) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$

Assim $h(x,y) = -2(0,2) + 3(x,y) = (3x, 3y-4)$

Expressão matricial de h em coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo a expressão matricial de $t \circ h$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b. A expressão ~~matricial~~ da transformação $t \circ h$ em coordenadas usuais é dada por

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como a matriz da parte linear é uma matriz diagonal cujas entradas são iguais a 3, concluímos que $h' = t \circ h$ é uma homotetia de razão $\lambda = 3$

Comparando a expressão de h' com a fórmula

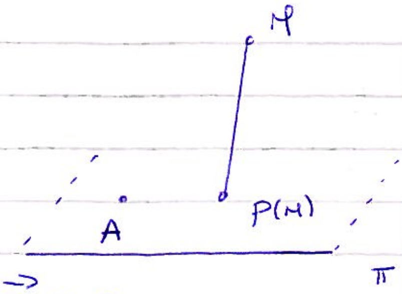
$h'(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$ (λ razão, Ω centro)

Resulta que $(1-\lambda)\Omega = (-1,-7) \Leftrightarrow \Omega = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

Portanto h' é uma homotetia de razão 3 e centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$

5. π: $x + 2y - z + 1 = 0$

a. Seja $p(M)$ a projecção ortogonal de $M = (x,y,z)$ em π.



O vector $\vec{n} = (1,2,-1)$ é um vector normal a Π e o ponto $A = (0,0,1)$ é um ponto de Π.

Temos: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP(M)} + \overrightarrow{P(M)M}$ (*)

Como $A \in \Pi$ e $P(M) \in \Pi$ então $\overrightarrow{AP(M)} \cdot \vec{n} = 0$

e como $p(M)$ é a projecção ortogonal de M em Π, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{P(M)M} = \lambda \vec{n}$.

Fazendo o produto escalar de (*) com $\vec{n}$ vem

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n}\,\vec{n} \iff \lambda = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \frac{(x,y,z-1)\cdot(1,2,-1)}{6}$$

$$\iff \lambda = \frac{x+2y-z+1}{6}$$

Logo $\overrightarrow{P(M)M} = \lambda \vec{n} \iff \overrightarrow{MP(M)} = -\lambda \vec{n}$

$\iff P(M) = M - \lambda \vec{n}$

$$P(x,y,z) = (x,y,z) - \frac{x+2y-z+1}{6}(1,2,-1)$$

$$= (x,y,z) - \left(\frac{x+2y-z+1}{6}, \frac{x+2y-z+1}{3}, \frac{-(x+2y-z+1)}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{5x-2y+z-1}{6}, \frac{-x+y+z-1}{3}, \frac{x+2y-1}{6}\right)$$

b. Se s é a reflexão no plano Π então $s(M) = M + 2\,\overrightarrow{MP(M)}$

Logo: $s(x,y,z) = (x,y,z) + 2(-\lambda \vec{n}) =$

$$= (x,y,z) - \frac{(x+2y-z+1)}{3}(1,2,-1)$$

$$= (x,y,z) - \left(\frac{x+2y-z+1}{3}, \frac{2x+4y-2z+2}{3}, \frac{-x-2y+z-1}{3}\right)$$

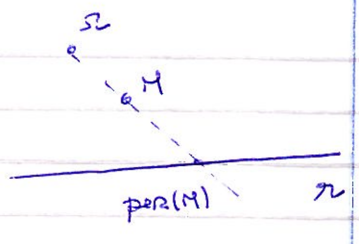
$$= \left(\frac{2x-2y+z-1}{3}, \frac{-2x-y+2z-2}{3}, \frac{x+2y+2z+1}{3}\right)$$

Expressão matricial de s em coordenadas usuais:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5. A plano afim $\Omega = (1,1)$, $r: x - y = 1$

a. A recta excepcional de f é a recta paralela a r que incide em Ω, ou seja, é a recta de equação cartesiana $x - y = 0$



b. Seja $M = (x, y)$ um ponto genérico de A não incidente na recta excepcional e seja $per(M)$ a projecção perspectiva de M desde Ω até r.

Temos que $per(M)$ incide na recta definida por Ω e M, logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$per(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$

ou seja,

$$per(x,y) = (1,1) + \lambda(x-1, y-1) = (1+\lambda(x-1),\ 1+\lambda(y-1))$$

Por outro lado $per(M) \in r$ logo satisfaz a equação cartesiana de r, ou seja,

$$1+\lambda(x-1) - (1+\lambda(y-1)) = 1 \iff \lambda(x-\cancel{1}-y+\cancel{1}) = 1$$
$$\iff \lambda = \frac{1}{x-y}$$

Assim,

$$per(x,y) = (1,1) + \frac{1}{x-y}(x-1, y-1)$$
$$= \left(1 + \frac{x-1}{x-y},\ 1 + \frac{y-1}{x-y}\right) = \left(\frac{2x-y-1}{x-y},\ \frac{x-1}{x-y}\right)$$

c. coordenadas homogéneas de M $[x : y : 1]$

$$per([x : y : 1]) = \left[\frac{2x-y-1}{x-y} : \frac{x-1}{x-y} : 1\right]$$
$$= [2x-y-1 : x-1 : x-y]$$

Matricialmente, $per(M)$ representa-se em coordenadas homogéneas por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \end{pmatrix}$$

Observação: qualquer múltiplo da matriz acima é também uma matriz associada à projecção perspectiva pretendida.