UNIVERSIDADE DO MINHO

Geometria

Curso: M. C. C. **Exercícios resolvidos 2023**

1. (**Questão 1 do teste 26 de abril de 2022**) Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno canónico. Seja $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por

$$\lambda(x, y) = (x + 1, y - 1)$$

a) Mostre que λ é uma isometria.

b) Determine o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e o isomorfismo ortogonal $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda = T_{(a,b)} \circ \varphi$$

em que $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ designa a translação associada ao ponto (a, b).

Resolução.

Nota. Isometria = imersão isométrica + bijetiva. Como uma imersão isométrica é sempre uma aplicação injetiva, então isometria = imersão isométrica + sobrejetiva.

a) Vejamos que λ é uma imersão isométrica. Sejam (a, b) e (x, y) dois pontos de $\mathbb{R}^2$. Ora,

$$\begin{aligned} d\Big[\lambda(a,b), \lambda(x,y)\Big] &= \\ &= d\Big[(a+1, b-1), (x+1, y-1)\Big] = \\ &= \Big\|(a+1, b-1) - (x+1, y-1)\Big\| = \\ &= \Big\|(a-x, b-y)\Big\| = \\ &= \Big\|(a,b) - (x,y)\Big\| = \\ &= d\Big[(a,b), (x,y)\Big] \end{aligned}$$

Logo, λ é uma imersão isométrica. Vejamos que λ é sobrejetiva. Seja (x, y) um ponto de $\mathbb{R}^2$. Consideremos o ponto $(x - 1, y + 1)$ de $\mathbb{R}^2$. Temos,

$$\lambda(x-1, y+1) = (x - 1 + 1, y + 1 - 1) = (x, y)$$

Logo, λ é sobrejetiva. Portanto, λ é uma isometria.

b) Ora, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda(x, y) = (x + 1, y - 1) = (1, -1) + (x, y)$$

Sejam

$$T_{(1,-1)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

a translação associada ao ponto $(1,-1)$ e

$$\mathbf{Id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

a aplicação identidade de $\mathbb{R}^2$, que é um isomorfismo ortogonal. Tem-se então a igualdade

$$\lambda(x,y) = (x+1, y-1) = (1,-1) + (x,y) = (1,-1) + \mathbf{Id}_{\mathbb{R}^2}(x,y) = \Big(T_{(1,-1)} \circ \mathbf{Id}_{\mathbb{R}^2}\Big)(x,y)$$

Portanto, o ponto (a,b) é o par $(1,-1)$ e o isomorfismo ortogonal é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^2$.

Observação. Na resolução deste exercício, o produto interno parece que, à primeira vista, não foi usado.

- Note que, na alínea b), a aplicação identidade é sempre ortogonal para qualquer produto interno. Se tivéssemos obtido outra aplicação que não fosse a aplicação identidade então teríamos de verificar que essa aplicação preservava o produto interno considerado no exercício.

- Na alínea a), a situação poderá ser um pouco mais subtil. Obviamente, verificou-se que a aplicação λ preserva a distância. No entanto, o produto interno não desempenhou qualquer papel nesta demonstração. Recorde que uma aplicação linear que preserve a norma preserva também a distância. Se uma aplicação não for linear, essa aplicação pode preservar a norma, mas não preservar a distância. Note que a aplicação λ do exercício é afim. Ora, se (a,b) e (x,y) são dois pontos de $\mathbb{R}^2$, na diferença $\lambda(a,b) - \lambda(x,y)$, figura apenas a parte linear da aplicação λ. A fim de ilustrar melhor estes argumentos, resolva o seguinte exercício:

  Exercício. Sejam E e F dois espaços vetoriais normados (não necessariamente euclidianos) e

  $$\lambda : E \longrightarrow F$$
  $$\lambda(x) = b + \varphi(x)$$

  uma aplicação afim, em que $b \in F$ e $\varphi : E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear. Mostre que, se a aplicação φ preservar as normas, a aplicação λ preserva as distâncias associadas às normas.

- No teorema 3.5.7 das notas teóricas, é fundamental que φ seja uma isometria para a distância associada a um produto interno (cf. com as alíneas 17-d), 17-e) e 17-f) do exercício 17 das notas teóricas).

2. (**Exercício 13-c) das notas teóricas**). Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ equipado com o produto interno canónico. Mostre que a aplicação

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x,y) = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\Big)$$

é um isomorfismo ortogonal.

Resolução. Vejamos que φ é ortogonal. Sejam (a,b) e (x,y) dois pontos de $\mathbb{R}^2$. Ora,

$$\varphi(a,b) \mid \varphi(x,y) =$$

$$= \Big[\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b), \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\Big)\Big] \Big| \Big[\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\Big)\Big] =$$

$$= \frac{2}{4}(a-b)(x-y) + \frac{2}{4}(a+b)(x+y) =$$

$$= \frac{1}{2}\big[ax - ay - bx + by + ax + ay + bx + by\big] =$$

$$= \frac{1}{2}\big[ax + ax + by + by\big] = ax + by = (a,b) \mid (x,y)$$

Portanto,

$$\varphi(a,b) \mid \varphi(x,y) = (a,b) \mid (x,y)$$

Logo, φ é ortogonal.

Consequentemente, φ é linear.

Vejamos que φ é injetiva. Seja (x,y) um ponto de $\mathbb{R}^2$ tal que $\varphi(x,y) = (0,0)$. Ora,

$$\varphi(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\Big) = (0,0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x - y = 0 \quad \wedge \quad x + y = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \wedge \quad y = 0$$

Logo, $\mathbf{Ker}\,\varphi \subset \{(0,0)\}$, donde $\mathbf{Ker}\,\varphi = \{(0,0)\}$. Portanto, φ é injetiva.

Como a dimensão do espaço vetorial de partida é igual à dimensão do espaço vetorial de chegada e φ é linear injetiva, então φ é um isomorfismo linear.

Como φ é um isomorfismo linear e é ortogonal, então φ é um isomorfismo ortogonal.

* * * **FIM** * * *