Cálculo

Licenciatura em Ciências da Computação

1º Teste :: 23 de outubro de 2023

Duração :: 2h

Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $1,0(29)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|x-3| \geq |x+1|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto

$$B = \left\{ -3 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\} \cup ([2,\pi] \cap \mathbb{Q}).$$

(a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto B.

(b) Determine os seguintes conjuntos: o interior $(\mathring{B})$, a aderência $(\overline{B})$ e o derivado (B') do conjunto B.

(c) Diga, justificando, se o conjunto B é fechado.

Exercício 4. (2 valores) Considere o conjunto

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \ \left|2 - x^2\right| < 2 \right\}.$$

(a) Mostre que $S =]-2,2[\setminus \{0\}$.

(b) Apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja não monótona e convergente para -2.

Exercício 5.

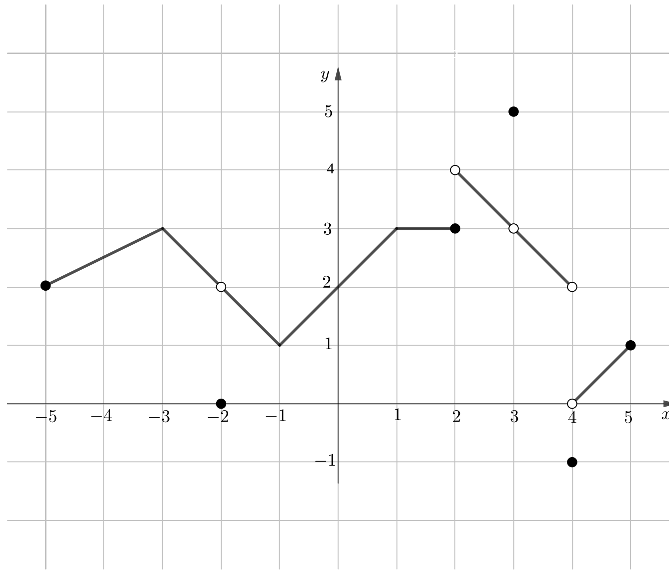
1. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{5^n} + \frac{4^{n-1}}{7^{n+1}} \right)$.

2. (2 valores) Responda a **<u>uma e uma só</u>** das duas questões seguintes:

I. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cos n}{(n+1)!}$.

II. Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^7+1}$ é absolutamente convergente.

Exercício 6. (3 valores) Considere a função $f : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.



(a) Determine $f([-2,3])$.

(b) Determine $f^{-1}([1,3[)$.

(c) Indique os pontos de mínimo local de f, mencionando os respetivos mínimos locais.

(d) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{4x^2-1}{x^2}\right)$.

(e) Determine, **justificando**, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x+3| < \delta \Rightarrow |f(x)-3| < 2\,.$$

Exercício 7. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ |x+1| & \text{se } x \in \mathbb{Q}\backslash\mathbb{Z} \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

(a) Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e determine o seu valor.

(b) Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f.

Exercício 8. (4 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} 2n & \text{se } n \leq 70 \\ \dfrac{n \operatorname{sen} n}{2n^2+1} & \text{se } n > 70 \end{cases}$ é convergente.

(b) Existe uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(X) = \{-2, 1\}$.

(c) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continua e limitada. Então o conjunto $f(\mathbb{R})$ tem máximo.

(d) Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g(x) = f(|x|)$, com $x \in \mathbb{R}$, é contínua. Então f é contínua.

FIM