

Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2023/24

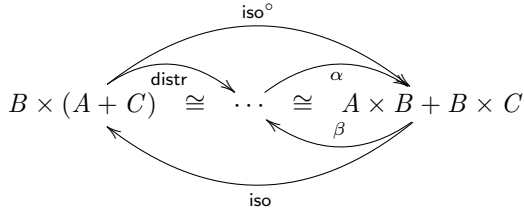
2º Teste — 15 de Maio de 2024, 16h00–18h00
Salas 0.03 + 0.05 do Edifício 2

PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

Importante — Ler antes de iniciar a prova:

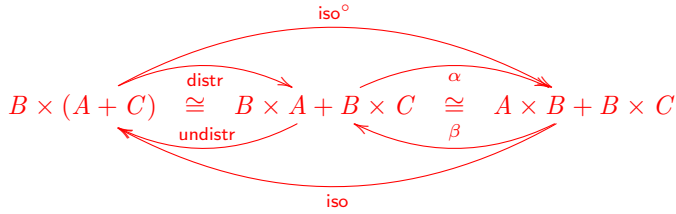
- Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.
- Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

Questão 1 Considere o seguinte diagrama:



(a) Defina o isomorfismo β ; (b) Infira a propriedade gráti de α sem o definir.

RESOLUÇÃO: Partindo do tipo de distr , tem-se:



(a) Do tipo de β inferimos $\beta = \text{swap} + \text{id}$.

(b) Do tipo $\alpha : B \times A + B \times C \rightarrow A \times B + B \times C$ infere-se, pelo método habitual, a propriedade gráti:

$$(f \times g + g \times h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (g \times f + g \times h)$$

□

Questão 2 Demonstrar

$$(p \rightarrow g, h) \times f = p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f, h \times f$$

a partir das leis do condicional de McCarthy e do facto seguinte:

$$q \rightarrow f, f = f \quad (E1)$$

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{aligned}
& p \cdot \pi_1 \rightarrow g \times f, h \times f \\
= & \{ \dots \} \\
& [\langle g \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle, \langle h \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle] \cdot (p \cdot \pi_1)? \\
= & \{ \dots \} \\
& \langle [g \cdot \pi_1, h \cdot \pi_1], [f \cdot \pi_2, f \cdot \pi_2] \rangle \cdot (p \cdot \pi_1)? \\
= & \{ \dots \} \\
& \langle [g \cdot \pi_1, h \cdot \pi_1] \cdot (p \cdot \pi_1)?, [f \cdot \pi_2, f \cdot \pi_2] \cdot (p \cdot \pi_1)? \rangle \\
= & \{ \dots \} \\
& \langle (p \cdot \pi_1 \rightarrow g \cdot \pi_1, h \cdot \pi_1), (p \cdot \pi_1 \rightarrow f \cdot \pi_2, f \cdot \pi_2) \rangle \\
= & \{ \dots \} \\
& \langle (p \rightarrow g, h) \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle \\
= & \{ \dots \} \\
& (p \rightarrow g, h) \times f
\end{aligned}$$

□

Questão 3 A função $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$ é binária e, como tal, faz sentido a sua versão “curried” $\overline{\pi_2} : A \rightarrow B^B$. Usando as leis da exponenciação mostre que $\overline{\pi_2}$ é uma função constante, isto é, que qualquer que seja f se tem:

$$\overline{\pi_2} \cdot f = \overline{\pi_2} \quad (E2)$$

Que função constante é essa? Justifique.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned}
& \overline{\pi_2} \cdot f = \overline{\pi_2} \\
\equiv & \{ \text{universal} \} \\
& \text{ap} \cdot (\overline{\pi_2} \cdot f \times id) = \pi_2 \\
\equiv & \{ \text{functor-}\times \} \\
& \text{ap} \cdot (\overline{\pi_2} \times id) \cdot (f \times id) = \pi_2 \\
\equiv & \{ \text{cancelamento} \} \\
& \pi_2 \cdot (f \times id) = \pi_2 \\
\equiv & \{ \text{natural } \pi_2 \} \\
& \pi_2 = \pi_2
\end{aligned}$$

Pelo tipo $\overline{\pi_2} : A \rightarrow B^B$ infere-se que $\overline{\pi_2} = id$, para $id : B \rightarrow B$. □

Questão 4 As chamadas “rose trees”, que se podem definir em Haskell por

```
data Rose a = Rose a [Rose a]
```

são árvores generalizadas em que cada nó tem um número arbitrário (mas finito) de sub-árvores. Defina para este tipo

- os isomorfismos in e out que o caracterizam;
- o functor de base B e o da recursividade F;
- o gene g do catamorfismo $\llbracket g \rrbracket$ que conta o número de nós de uma “rose tree”.

RESOLUÇÃO: Ver o módulo `Rose.hs` no material pedagógico. \square

Questão 5 Recorra à lei de absorção-cata para demonstrar a propriedade

$$count \cdot (BTree\ f) = count \tag{E3}$$

onde $BTree\ A \xrightarrow{count} \mathbb{N}_0$ é o catamorfismo

$$count = \llbracket [zero, succ \cdot add \cdot \pi_2] \rrbracket$$

para $zero\ _ = 0$, $succ\ n = n + 1$ e $add\ (a, b) = a + b$. **NB:** recorda-se que a base do tipo `BTree` é $B\ (f, g) = id + f \times (g \times g)$.

RESOLUÇÃO: Tem-se (justificar os passos que são dados):

$$\begin{aligned} & count \cdot (BTree\ f) = count \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & \llbracket [zero, succ \cdot add \cdot \pi_2] \rrbracket \cdot (BTree\ f) = count \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & \llbracket [zero, succ \cdot add \cdot \pi_2] \cdot (id + f \times id) \rrbracket = count \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & \llbracket [zero, succ \cdot add \cdot \pi_2 \cdot (f \times id)] \rrbracket = count \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & \llbracket [zero, succ \cdot add \cdot \pi_2] \rrbracket = count \\ \equiv & \{ \dots \} \\ & true \end{aligned}$$

\square

Questão 6 Considere a seguinte generalização da lei de absorção-cata,

$$\langle\langle g \rangle\rangle \cdot \langle\langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle\rangle = \langle\langle g \cdot \alpha \rangle\rangle \quad \Leftarrow \quad G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \quad (\text{E4})$$

a que corresponde o diagrama que se dá ao lado. Use (E4) para demonstrar a igualdade

$$\text{length} \cdot \text{zeros} = id \quad (\text{E5})$$

onde

$$\begin{cases} \text{length} : A^* \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ \text{length} = \langle\langle \text{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2) \rangle\rangle \end{cases} \quad (\text{E6})$$

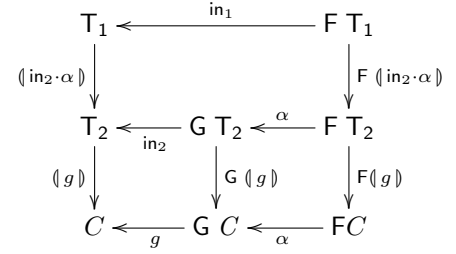
é uma função que conhece bem e onde zeros n é a lista finita de n zeros,

$$\begin{aligned} \text{zeros } 0 &= [] \\ \text{zeros } (n + 1) &= 0 : \text{zeros } n \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{cases} \text{zeros} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0^* \\ \text{zeros} = \langle\langle \text{in}_* \cdot (id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle) \rangle\rangle \end{cases} \quad (\text{E7})$$

para $\text{in}_* = [\text{nil}, \text{cons}]$ e $\text{in}_{\mathbb{N}_0} = [\underline{0}, \text{succ}]$. **NB:** recordar das aulas $F f = id + f$ e $G f = id + id \times f$, a usar em (E4).



RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{aligned} & \text{length} \cdot \text{zeros} = id \\ \equiv & \quad \{ \dots \} \\ & \langle\langle \text{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2) \rangle\rangle \cdot \langle\langle \text{in}_* \cdot (id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle) \rangle\rangle = id \\ \equiv & \quad \{ \dots \} \\ & \underbrace{\langle\langle \text{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot (id + \pi_2) \rangle\rangle}_g \cdot \underbrace{\langle\langle \text{in}_* \cdot id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle \rangle\rangle}_\alpha = \langle\langle \text{in}_{\mathbb{N}_0} \cdot id \rangle\rangle \\ \Leftarrow & \quad \{ \dots \} \\ & \begin{cases} (id + \pi_2) \cdot (id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle) = id \\ G f \cdot (id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle) = (id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle) \cdot F f \end{cases} \\ \equiv & \quad \{ \dots \} \\ & \begin{cases} id + id = id \\ (id + id \times f) \cdot (id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle) = (id + \langle\langle 0, id \rangle\rangle) \cdot (id + f) \end{cases} \\ \equiv & \quad \{ \dots \} \\ & id + \langle\langle 0, f \rangle\rangle = id + \langle\langle 0, f \rangle\rangle \\ \equiv & \quad \{ \dots \} \\ & true \end{aligned}$$

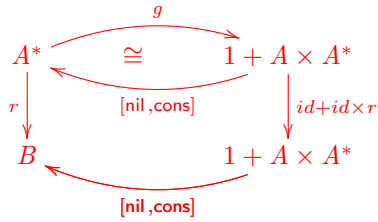
□

Questão 7 Considere o anamorfismo $r = \llbracket g \rrbracket$ onde

$$\begin{aligned} g [] &= i_1 () \\ g x &= i_2 (\text{last } x, \text{init } x) \end{aligned}$$

last x dá o último elemento da lista x e init x dá x sem esse último elemento. O que faz a função r ? Acompanhe a sua resposta com o diagrama de r .

RESOLUÇÃO:



Como g vai buscar o último elemento e o início, e não o primeiro e a cauda, $r = \llbracket g \rrbracket$ faz a inversão da lista de entrada. \square

Questão 8 Considere a seguinte extensão da lei de recursividade mútua a hilomorfismos que partilham o mesmo anamorfismo:

$$\langle f, g \rangle = \llbracket \langle h, k \rangle \rrbracket \cdot \llbracket q \rrbracket \equiv \begin{cases} f = h \cdot F \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot F \langle f, g \rangle \cdot q \end{cases} \quad (E8)$$

- Para uma dada função q , (E8) reduz-se à lei de recursividade mútua do formulário. Identifique essa função q , justificando.
- Apresente as justificações em falta no seguinte cálculo da lei (E8):

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \llbracket \langle h, k \rangle \rrbracket \cdot \llbracket q \rrbracket \\ &\equiv \{ \text{seja } \langle \alpha, \beta \rangle = \llbracket \langle h, k \rangle \rrbracket \} \\ \langle f, g \rangle &= \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \llbracket q \rrbracket \\ &\equiv \{ \dots \} \\ \langle f, g \rangle &= \langle \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket, \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \rangle \\ &\equiv \{ \dots \} \\ &\equiv \begin{cases} f = \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket \\ g = \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \end{cases} \\ &\equiv \{ \dots \} \\ &\equiv \begin{cases} f = h \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{out} \cdot \llbracket q \rrbracket \\ g = k \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{out} \cdot \llbracket q \rrbracket \end{cases} \\ &\equiv \{ \dots \} \\ &\equiv \begin{cases} f = h \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot F \llbracket q \rrbracket \cdot q \\ g = k \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot F \llbracket q \rrbracket \cdot q \end{cases} \\ &\equiv \{ \dots \} \\ &\equiv \begin{cases} f = h \cdot F \langle \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket, \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \rangle \cdot q \\ g = k \cdot F \langle \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket, \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \rangle \cdot q \end{cases} \\ &\equiv \{ \dots \} \\ &\equiv \begin{cases} f = h \cdot F \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot F \langle f, g \rangle \cdot q \end{cases} \\ &\square \end{aligned}$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

- A lei de reflexão-ana diz-nos que $\llbracket \text{out} \rrbracket = id$. Basta fazer $q = \text{out}$ em (E8) e simplificar.
- Justificações em falta no cálculo da lei (E8): faça-se

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \llbracket \langle h, k \rangle \rrbracket \quad (\text{E9})$$

o que, pela lei de Fokkinga, garante:

$$\begin{cases} \alpha \cdot in = h \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \\ \beta \cdot in = k \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \end{cases} \quad (\text{E10})$$

Então:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \llbracket \langle h, k \rangle \rrbracket \cdot \llbracket q \rrbracket \\ &\equiv \{ \text{(E9); fusão-}\times \} \\ \langle f, g \rangle &= \langle \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket, \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \rangle \\ &\equiv \{ \text{Eq-}\times \} \\ &\begin{cases} f = \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket \\ g = \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \end{cases} \\ &\equiv \{ \text{(E10); isomorfismo in / out} \} \\ &\begin{cases} f = h \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{out} \cdot \llbracket q \rrbracket \\ g = k \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{out} \cdot \llbracket q \rrbracket \end{cases} \\ &\equiv \{ \text{cancelamento-ana } \times 2 \} \\ &\begin{cases} f = h \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot F \llbracket q \rrbracket \cdot q \\ g = k \cdot F \langle \alpha, \beta \rangle \cdot F \llbracket q \rrbracket \cdot q \end{cases} \\ &\equiv \{ \text{functor F e fusão-}\times, \text{ nas duas igualdades} \} \\ &\begin{cases} f = h \cdot F \langle \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket, \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \rangle \cdot q \\ g = k \cdot F \langle \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket, \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \rangle \cdot q \end{cases} \\ &\equiv \{ \text{cf. } \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot \llbracket q \rrbracket, \beta \cdot \llbracket q \rrbracket \rangle \text{ acima} \} \\ &\begin{cases} f = h \cdot F \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot F \langle f, g \rangle \cdot q \end{cases} \\ &\square \end{aligned}$$

□
