Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Tópicos de Matemática | 2º teste – 16 nov 2023

Lic. em Ciências de Computação - 1º ano | duração: 1h45m

Nome ____________________ Número __________

Grupo 1. [10 valores] Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1.1. Se $A = \{\emptyset\}$ e $B = \{\{\emptyset\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☒

1.1. Se $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☒

1.1. Se $A = \{\{\emptyset\}\}$ e $B = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☒ F☐

1.2. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então $(A \backslash B) \cap B = \{1, 3, 5\}$. V☐ F☒

1.2. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$. V☒ F☐

1.2. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então $(A \backslash B) \cap A = \{1, 3, 5\}$. V☒ F☐

1.3. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$, então $A \backslash C \subseteq B \backslash C$. V☒ F☐

1.3. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$, então $C \backslash A \subseteq C \backslash B$. V☐ F☒

1.3. Para todos os conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$, então $C \backslash B \subseteq C \backslash A$. V☒ F☐

1.4. Para todo o conjunto A, se $A \neq \emptyset$, então $(A \times \{1, 2\}) \cap (A \times \{1, 3\}) \neq \emptyset$. V☒ F☐

1.4. Para todo o conjunto A, se $(A \times \{1, 2\}) \cap (A \times \{1, 3\}) = \emptyset$, então $A = \emptyset$. V☒ F☐

1.4. Para todo o conjunto A, se $(A \times \{1, 2\}) \cap (A \times \{2, 4\}) = \emptyset$, então $A = \emptyset$. V☒ F☐

1.5. $\mathbb{N} \times \{3n : n \in \mathbb{N}\} = \{(n, 3n) : n \in \mathbb{N}\}$. V☐ F☒

1.5. $\{x : x \in \mathbb{R}\} \times \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. V☐ F☒

1.5. $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\} \times \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\} = \{(2n, 2n - 1) : n \in \mathbb{N}\}$ V☐ F☒

1.6. Existe um conjunto A para o qual $\mathcal{P}(A)$ tem exatamente 64 elementos. V☒ F☐

1.6. Existe um conjunto A para o qual $\mathcal{P}(A)$ tem exatamente 68 elementos. V☐ F☒

1.6. Existe um conjunto A para o qual $\mathcal{P}(A)$ tem exatamente 72 elementos. V☐ F☒

1.7. Para qualquer conjunto A, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \neq \emptyset$. V☒ F☐

1.7. Para qualquer conjunto A, $\emptyset \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. V☒ F☐

1.7. Para qualquer conjunto A, $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. V☒ F☐

1.8. Se $S = \{(1, 2)\}$ e $R = \{(2, 3)\}$ são relações binárias em $\mathbb{N}$, $S \circ R = \{(1, 3)\}$. V☐ F☒

1.8. Se $S = \{(1, 2)\}$ e $R = \{(2, 3)\}$ são relações binárias em $\mathbb{N}$, $R \circ S = \emptyset$. V☐ F☒

1.8. Se $S = \{(1, 2)\}$ e $R = \{(2, 3)\}$ são relações binárias em $\mathbb{N}$, $R \circ S = \{(1, 3)\}$. V☒ F☐

1.9. Existem 256 relações binárias diferentes de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{5, 6\}$. V☒ F☐

1.9. Existem 256 relações binárias diferentes de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{5, 6, 7, 8\}$. V☐ F☒

1.9. Existem 256 relações binárias diferentes de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ em $B = \{9\}$. V☒ F☐

1.10. Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, existe uma relação binária R de A em B tal que $R^{-1} \circ R = \mathrm{id}_A$. V☒ F☐

1.10. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, existe uma relação binária R de A em B tal que $R^{-1} \circ R = \mathrm{id}_A$. V☐ F☒

1.10. Para $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{4,5\}$, existe uma relação binária R de A em B tal que $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_B$. V ☒ F ☐

Grupo 2. [5 valores] Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):

2.1. Seja A um conjunto qualquer. Então:

☒ $\emptyset \subseteq A$ ☒ $\emptyset \subseteq \{A\}$ ☐ $\{\emptyset, A\} \in \{A, \{\emptyset\}\}$ ☒ $\{\emptyset, A\} \in \{A, \{\emptyset, A\}\}$

2.1. Seja A um conjunto qualquer. Então:

☒ $\emptyset \subseteq \{A, \{\emptyset, A, \{A\}\}\}$ ☒ $\emptyset \in \{\emptyset, A\}$ ☐ $\{\emptyset\} \in \{A, \{\emptyset, A, \{A\}\}\}$ ☒ $\{\emptyset\} \in \{A, \{\emptyset\}\}$

2.1. Seja A um conjunto qualquer. Então:

☐ $\emptyset \in \{A\}$ ☒ $\emptyset \subseteq \{A, \emptyset\}$ ☒ $\{\emptyset, A\} \in \{\emptyset, A, \{\emptyset, A\}\}$ ☐ $\{\emptyset, A\} \in \{A, \{\emptyset, A, \{A\}\}\}$

2.2. Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{1, \{2\}\}$. Então:

☐ $A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ ☐ $A \times B = \{(1,1), \{(1,2)\}, (2,1), \{(2,2)\}\}$

☒ $A \times B = \{(1,1), (1,\{2\}), (2,1), (2,\{2\})\}$ ☐ $A \times B = \{(1,1), (2,\{2\})\}$

2.2. Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{\{1\}, 2\}$. Então:

☐ $A \times B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$ ☒ $A \times B = \{(1,\{1\}), (1,2), (2,\{1\}), (2,2)\}$

☐ $A \times B = \{\{(1,1)\}, (1,2), \{(2,1)\}, (2,2)\}$ ☐ $A \times B = \{(1,\{1\}), (2,2)\}$

2.3. Sejam A, B e C conjuntos. Então:

☐ $A \backslash (B \cup C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☒ $A \backslash (B \cap C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☒ $A \cup (B \cap C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

☐ $A \cap (B \cup C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

2.3. Sejam A, B e C conjuntos. Então:

☐ $A \backslash (B \cap C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \backslash B$ e em $A \backslash C$.

☒ $A \backslash (B \cup C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \backslash B$ e em $A \backslash C$.

☐ $A \cup (B \cap C)$ é o menor conjunto que contém $A \cup B$ e $A \cup C$.

☐ $A \cap (B \cup C)$ é o menor conjunto que contém $A \cup B$ e $A \cup C$.

2.3. Sejam A, B e C conjuntos. Então:

☒ $A \backslash (B \cap C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☐ $A \backslash (B \cup C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☒ $A \cup (B \cap C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

☐ $A \cap (B \cup C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

2.4. Sejam $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ e R a relação binária em X definida por

$$R = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (4,5), (4,6), (6,3)\}.$$

Então,

☒ $R(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$.

☐ $R(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$.

☒ $(R \circ R)(\{2,4\}) = \{3,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})^{\leftarrow}(\{2,4\}) = \{3,5,6\}$.

☐ $(R \circ R)(\{2,4\}) = \{3,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})(\{3,5,6\}) = \{2,4\}$.

2.4. Sejam $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ e R a relação binária em X definida por

$$R = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (4,5), (4,6), (6,3)\}.$$

Então,

☒ $R(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$.

☐ $R(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$.

☒ $(R \circ R)(\{1,4\}) = \{3,4,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})(\{3,4,5,6\}) = \{1,2,4\}$.

☐ $(R \circ R)(\{1,4\}) = \{3,4,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})^{\leftarrow}(\{3,4,5,6\}) = \{1,4\}$.

2.5. Sejam $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$. Então,

☒ $R \circ R = S$ ☒ $R \circ S = R$ ☐ $S \circ R = S$ ☒ $S \circ S = S$

2.5. Sejam $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$. Então,

☐ $R \circ R = R$ ☐ $R \circ S = S$ ☒ $S \circ R = R$ ☒ $S \circ S = S$

2.5. Sejam $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$. Então,

☐ $R \circ R = R$ ☒ $R \circ S = R$ ☐ $S \circ R = S$ ☒ $S \circ S = S$

Grupo 3. [5 valores] Responda a cada uma das questões, de forma detalhada e justificada.

3.1. Seja $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}$. Determine
(a) $A \cap \mathcal{P}(A)$;

Qualquer elemento de $\mathcal{P}(A)$ é um conjunto, pelo que qualquer elemento de $A \cap \mathcal{P}(A)$ é um conjunto. Mais ainda, temos que:

$$X \in A \cap \mathcal{P}(A) \iff X \in A \wedge X \in \mathcal{P}(A) \iff X \in A \wedge X \subseteq A.$$

Assim, um elemento de $A \cap \mathcal{P}(A)$ é um conjunto que é simultaneamente um elemento e um subconjunto de A. Como

- $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$ (pois $1 \in A$), temos que $\{1\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$;
- $\{1, \{1\}\} \in A$ e $\{1, \{1\}\} \subseteq A$ (pois $1 \in A$ e $\{1\} \in A$), temos que $\{1, \{1\}\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$;
- $\{\{1\}\} \in A$ e $\{\{1\}\} \subseteq A$ (pois $\{1\} \in A$), temos que $\{\{1\}\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$

Logo, $A \cap \mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}$.

(b) $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;

Qualquer elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ é um conjunto, pelo que qualquer elemento de $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ é um conjunto. Mais ainda, temos que:

$$X \in A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \iff X \in A \wedge X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \iff X \in A \wedge X \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Assim, um elemento de $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ é um conjunto que é simultaneamente um elemento de A e um subconjunto de A cujos elementos são conjuntos. O único elemento de A que é um seu subconjunto cujos elementos são conjuntos é $\{\{1\}\}$. Logo, $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\{\{1\}\}\}$.

(c) O número de elementos de $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$.

O conjunto A tem 5 elementos, pelo que o conjunto $\mathcal{P}(A)$ tem 2^5 elementos, ou seja, tem 32 elementos. Assim, podemos concluir que o produto cartesiano $A \times \mathcal{P}(A)$ tem 5×32 elementos, ou seja, tem 160 elementos. Finalmente, estamos em condições de concluir que $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$ tem 2^{160} elementos.

3.1. Seja $A = \{1, 2, \{2\}, \{1\}, \{1, \{2\}\}, \{\{2\}\}\}$. Determine
(a) $A \cap \mathcal{P}(A)$;

Qualquer elemento de $\mathcal{P}(A)$ é um conjunto, pelo que qualquer elemento de $A \cap \mathcal{P}(A)$ é um conjunto. Mais ainda, temos que:

$$X \in A \cap \mathcal{P}(A) \iff X \in A \wedge X \in \mathcal{P}(A) \iff X \in A \wedge X \subseteq A.$$

Assim, um elemento de $A \cap \mathcal{P}(A)$ é um conjunto que é simultaneamente um elemento e um subconjunto de A. Como

- $\{1\} \in A$ e $\{1\} \subseteq A$ (pois $1 \in A$), temos que $\{1\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$;
- $\{2\} \in A$ e $\{2\} \subseteq A$ (pois $2 \in A$), temos que $\{2\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$;
- $\{1, \{2\}\} \in A$ e $\{1, \{2\}\} \subseteq A$ (pois $1 \in A$ e $\{2\} \in A$), temos que $\{1, \{2\}\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$;
- $\{\{2\}\} \in A$ e $\{\{2\}\} \subseteq A$ (pois $\{2\} \in A$), temos que $\{\{2\}\} \in A \cap \mathcal{P}(A)$

Logo, $A \cap \mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, \{2\}\}, \{\{2\}\}\}$.

(b) $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;

Qualquer elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ é um conjunto, pelo que qualquer elemento de $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ é um conjunto. Mais ainda, temos que:

$$X \in A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \iff X \in A \wedge X \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \iff X \in A \wedge X \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Assim, um elemento de $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ é um conjunto que é simultaneamente um elemento de A e um subconjunto de A cujos elementos são conjuntos. O único elemento de A que é um seu subconjunto cujos elementos são conjuntos é $\{\{2\}\}$. Logo, $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = \{\{\{2\}\}\}$.

(c) O número de elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \times A^2)$.

O conjunto A tem 6 elementos, pelo que o conjunto $\mathcal{P}(A)$ tem 2^6 elementos, ou seja, tem 64 elementos e o conjunto A^2 tem 6^2 elementos, ou seja, 36 elementos. Assim, podemos concluir que o produto cartesiano $\mathcal{P}(A) \times A^2$ tem 64×36 elementos, ou seja, tem 2304 elementos. Finalmente, estamos em condições de concluir que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \times A^2)$ tem 2^{2304} elementos.

3.2. Sejam A um conjunto qualquer e R, S e T relações binárias em A.
(a) Mostre que $T \cap (S \circ R) \subseteq T \circ (R^{-1} \circ R)$.

Sejam $x, y \in A$. Então:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in T \cap (S \circ R) &\Leftrightarrow (x,y) \in T \ \wedge \ (x,y) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in T \ \wedge \ (\exists z \in A : (x,z) \in R \ \wedge \ (z,y) \in S) \\
&\Rightarrow (x,y) \in T \ \wedge \ (\exists z \in A : \ (x,z) \in R \ \wedge \ (z,x) \in R^{-1}) \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in T \ \wedge \ (x,x) \in R^{-1} \circ R \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in T \circ (R^1 \circ R),
\end{aligned}$$

o que prova o pretendido.

(b) Dê exemplo de um conjunto A e relações binárias R, S e T em A tais que $T \cap (S \circ R) \neq T \circ (R^{-1} \circ R)$.
Seja, por exemplo, $A = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(1, 2)\}$ e $T = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Então:

- $T \cap (S \circ R) = T \cap \emptyset = \emptyset$;
- $R^-1 \circ R = \{(1, 1)\}$;
- $T \circ (R^{-1} \circ R) = \{(1, 1), (1, 2)\}$.

3.2. Sejam A um conjunto qualquer e R, S e T relações binárias em A.
(a) Mostre que, se $T^{-1} \circ S \subseteq S$, então $S \cap (T \circ R) \subseteq T \circ (S \cap R)$.

Sabendo que $T^{-1} \circ S \subseteq S$, queremos provar que $S \cap (T \circ R) \subseteq T \circ (S \cap R)$. Sejam $x, y \in A$. Então:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in S \cap (T \circ R) &\Leftrightarrow (x,y) \in S \ \wedge \ (x,y) \in T \circ R \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in S \ \wedge \ (\exists z \in A : (x,z) \in R \ \wedge (z,y) \in T) \\
&\Leftrightarrow \exists z \in A : \ (x,y) \in S \ \wedge \ (x,z) \in R \ \wedge (z,y) \in T \\
&\Leftrightarrow \exists z \in A : \ (x,y) \in S \ \wedge \ (y,z) \in T^{-1} \ \wedge \ (x,z) \in R \ \wedge (z,y) \in T \\
&\Leftrightarrow \exists z \in A : \ (x,z) \in T^{-1} \circ S \ \wedge \ (x,z) \in R \ \wedge (z,y) \in T \\
&\Rightarrow \exists z \in A : \ (x,z) \in S \ \wedge \ (x,z) \in R \ \wedge (z,y) \in T \qquad [T^{-1} \circ S \subseteq S] \\
&\Leftrightarrow \exists z \in A : \ (x,z) \in S \cap R \ \wedge (z,y) \in T \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in T \circ (S \cap R),
\end{aligned}$$

o que prova o pretendido.

(b) Dê exemplo de um conjunto A e relações binárias R, S e T em A tais que $T^{-1} \circ S \subseteq S$ e $S \cap (T \circ R) \neq T \circ (S \cap R)$.

Seja, por exemplo, $A = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 2), (1, 1)\}$, $S = \{(1, 2)\}$ e $T = \{(2, 1)\}$. Então:

- $T^{-1} = \{(1, 2)\}$;
- $T^{-1} \circ S = \emptyset \subseteq S$;
- $S \cap (T \circ R) = S \cap \{(1, 1)\} = \emptyset$;
- $T \circ (S \cap R) = T \circ \{(1, 2)\} = \{(1, 1)\}$.