

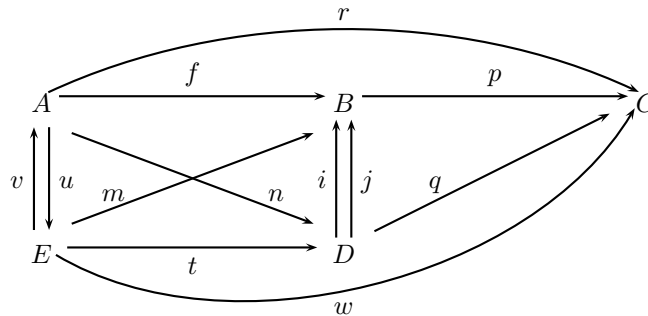
Álgebra Universal e Categorias

2º teste

duração: 1h45min

Justifique todas as suas respostas, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.

1. Considere a categoria \mathbf{C} representada pelo diagrama seguinte



Sem apresentar justificações, indique se existem, na categoria \mathbf{C} , morfismos e objetos nas condições a seguir indicadas. Caso existam, forneça um exemplo correspondente:

(a) Um morfismo que não seja um monomorfismo.

Resposta:

O morfismo p não é um monomorfismo.

(Tem-se $p \circ i = q = p \circ j$ e $i \neq j$.)

(b) Um bimorfismo que não seja um isomorfismo.

Resposta:

O morfismo f é um bimorfismo, mas não é um isomorfismo.

(O morfismo f é um epimorfismo e um monomorfismo, logo é um bimorfismo. O morfismo f não é um isomorfismo, pois não existe qualquer morfismo $f' : B \rightarrow A$ tal que $f \circ f' = id_B$ e $f' \circ f = id_A$.)

(c) Um isomorfismo que não seja um bimorfismo.

Resposta:

Não existe.

(Todo o isomorfismo é um bimorfismo.)

(d) Objetos distintos e isomorfos.

Resposta:

A e E .

(Os morfismos u e v são isomorfismos, uma vez que $u \circ v = id_E$ e $v \circ u = id_A$.)

2. (a) Sejam \mathbf{C} uma categoria e $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ morfismos de \mathbf{C} . Mostre que se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.

Resposta:

Recordemos que um morfismo $h : X \rightarrow Y$ é **epimorfismo** se, para quaisquer morfismos $u, v : Y \rightarrow Z$,

$$u \circ h = v \circ h \Rightarrow u = v.$$

Então, assumindo que f e g são epimorfismos, segue que, para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $u, v : C \rightarrow D$,

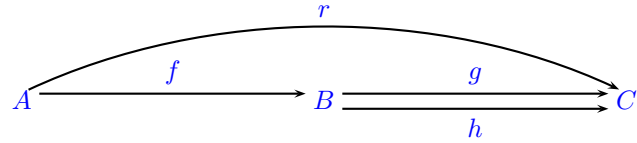
$$\begin{aligned} u \circ (g \circ f) = v \circ (g \circ f) &\Rightarrow (u \circ g) \circ f = (v \circ g) \circ f && \text{(associatividade)} \\ &\Rightarrow u \circ g = v \circ g && \text{(f é epimorfismo)} \\ &\Rightarrow u = v && \text{(g é epimorfismo).} \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é um epimorfismo.

- (b) Dê exemplo de uma categoria \mathbf{C} na qual existam objetos A, B, C e morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ tais que $g \circ f$ é um epimorfismo, mas f não é um epimorfismo.

Resposta:

Seja \mathbf{C} a categoria representada por



O morfismo f não é um epimorfismo, pois $g \circ f = r = h \circ f$ e $g \neq h$. O morfismo $g \circ f$ é um epimorfismo, pois o único morfismo com domínio C é id_C ; assim, para quaisquer morfismos $i, j : C \rightarrow D$,

$$i \circ (g \circ f) = j \circ (g \circ f) \Rightarrow i = id_C = j.$$

3. Sejam \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 categorias. Mostre que se \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 têm objetos iniciais, então a categoria produto $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ tem objeto inicial.

Resposta:

Sejam \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 categorias e I_1 e I_2 são objetos iniciais de \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 , respetivamente. Mostremos que (I_1, I_2) é um objeto inicial de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

Uma vez que I_1 é um objeto inicial de \mathbf{C}_1 , então $I_1 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e, para cada $X \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1)$, existe um e um só \mathbf{C}_1 -morfismo $f : I_1 \rightarrow X$. Como I_2 é um objeto inicial de \mathbf{C}_2 , então $I_2 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_2)$ e, para cada $Y \in \text{Obj}(\mathbf{C}_2)$, existe um e um só \mathbf{C}_2 -morfismo $g : I_2 \rightarrow Y$.

Como $I_1 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e $I_2 \in \text{Obj}(\mathbf{C}_2)$, então $(I_1, I_2) \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$. Mostremos que, para todo $(X, Y) \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$, existe um e um só $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y) . Como $(X, Y) \in \text{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$, então X é um objeto de \mathbf{C}_1 e Y é um objeto de \mathbf{C}_2 . Logo, existe um \mathbf{C}_1 -morfismo $f : I_1 \rightarrow X$ e existe um \mathbf{C}_2 -morfismo $g : I_2 \rightarrow Y$. Assim, (f, g) é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y) . Além disso, é simples verificar que (f, g) é o único $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y) . De facto, se (f', g') é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ -morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y) , então f' é um \mathbf{C}_1 -morfismo de I_1 em X e g' é um \mathbf{C}_2 -morfismo de I_2 em Y . Logo, atendendo a que f é o único morfismo de I_1 em X e g é o único morfismo de I_2 em Y , segue que $f' = f$ e $g' = g$. Portanto, $(f', g') = (f, g)$. Desta forma, provámos que (I_1, I_2) é um objeto inicial de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos $\{1\}$ e \mathbb{Z} e as funções i, f e g definidas por

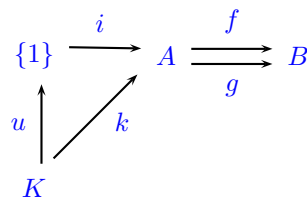
$$\begin{array}{ccc} i : \{1\} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 3 + x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 5 - x \end{array}.$$

Mostre que $(\{1\}, i)$ é um igualizador de f e g .

Resposta:

Pretende-se mostrar que $(\{1\}, i)$ é um igualizador de f e g , isto é, que:

- (i) $f \circ i = g \circ i$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow A$ tal que $f \circ k = g \circ k$, existe um, e um só, morfismo $u : K \rightarrow \{1\}$ tal que $i \circ u = k$.



- (i) A prova desta condição é imediata, pois as funções $f \circ i$ e $g \circ i$ têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in \{1\}$,

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(1) = 3 + 1 = 4 = 5 - 1 = g(1) = g(i(x)) = (g \circ i)(x).$$

(ii) Sejam $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $k : K \rightarrow A$ um \mathbf{C} -morfismo tais que $f \circ k = g \circ k$. Então, para qualquer $x \in K$,

$$(f \circ k)(x) = (g \circ k)(x),$$

donde resulta

$$3 + k(x) = 5 - k(x)$$

e, portanto, $k(x) = 1$, para todo $x \in K$. Assim, k é a função definida por

$$\begin{array}{ccc} k : K & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

Pretende-se mostrar que existe uma, e uma só, função $u : K \rightarrow \{1\}$ tal que $i \circ u = k$. Claramente, existe uma única função de K em $\{1\}$ (pois $\{1\}$ é um objeto terminal) - tal função é a função definida por

$$\begin{array}{ccc} k : K & \rightarrow & \{1\} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

As funções $i \circ u$ e k têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in K$, $(i \circ u)(x) = 1 = k(x)$. Logo, $i \circ u = k$.

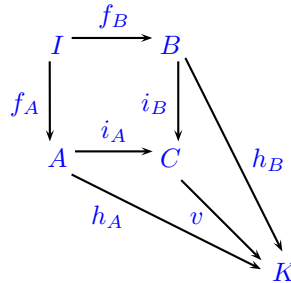
5. Sejam \mathbf{C} uma categoria e A, B, C, I objetos de \mathbf{C} tais que I é um objeto inicial. Considere os morfismos $f_A : I \rightarrow A$, $f_B : I \rightarrow B$, $i_A : A \rightarrow C$, $i_B : B \rightarrow C$ em \mathbf{C} . Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) , então $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B .

Resposta:

Sejam \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e morfismos $f_A : I \rightarrow A$ e $f_B : I \rightarrow B$.

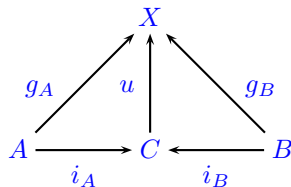
Admitamos que $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) . Então:

- (1) $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;
- (2) para qualquer objeto K de \mathbf{C} e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $h_A : A \rightarrow K$ e $h_B : B \rightarrow K$ tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$, existe um, e um só, morfismo $v : C \rightarrow K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$.



Pretendemos mostrar que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , ou seja, temos de provar que:

- (3) $i_A \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(A, C)$ e $i_B \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(B, C)$;
- (4) para qualquer objeto X de \mathbf{C} e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $g_A : A \rightarrow X$ e $g_B : B \rightarrow X$, existe um, e um só, morfismo $u : C \rightarrow X$ tal que $u \circ i_A = g_A$ e $u \circ i_B = g_B$.



(3) É imediato pelo enunciado.

(4) Sejam $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $g_A : A \rightarrow X$ e $g_B : B \rightarrow X$ morfismos de \mathbf{C} . Como $g_A \circ f_A \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(I, X)$, $g_B \circ f_B \in \text{Mor}_{\mathbf{C}}(I, X)$ e I é um objeto inicial, segue que $g_A \circ f_A = g_B \circ f_B$. Logo, por (2), existe um, e um só, morfismo $u : C \rightarrow X$ tal que $u \circ i_A = g_A$ e $u \circ i_B = g_B$.

Logo $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B .

6. Seja $S = \{0, 1\}$. Considere o funtor $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ da categoria **Set** nela própria tal que:

- $F_{Obj} : \text{Obj}(\mathbf{Set}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{Set})$ é a função que a cada conjunto A associa o conjunto $A \times S$,
- $F_{Mor} : \text{Mor}(\mathbf{Set}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{Set})$ é a função que a cada **Set**-morfismo $f : A \rightarrow B$ associa a função

$$F_{Mor}(f) : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(B) \\ (x, y) & \mapsto & (f(x), y) \end{array}.$$

(a) Diga se o funtor F é fiel.

Resposta:

O funtor F é fiel se, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \rightarrow B$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Uma vez que, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \rightarrow B$,

$$\begin{aligned} F(f) = F(g) &\Rightarrow \forall (x, y) \in A \times S, F(f)(x, y) = F(g)(x, y) \\ &\Rightarrow \forall (x, y) \in A \times S, (f(x), y) = (g(x), y) \\ &\Rightarrow \forall (x, y) \in A \times S, f(x) = g(x) \text{ e } y = y \\ &\Rightarrow \forall x \in A, f(x) = g(x) \\ &\Rightarrow f = g \quad (\text{as funções } f \text{ e } g \text{ têm o mesmo domínio e codomínio}), \end{aligned}$$

então o funtor F é fiel.

(b) Justifique que o funtor F não é pleno.

Resposta:

O funtor F é pleno se, para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$ e para qualquer **Set**-morfismo $g : F(A) \rightarrow F(B)$, existe um **Set**-morfismo $f : A \rightarrow B$, tal que $F(f) = g$.

Se consideramos a função g a seguir definida

$$g : \{(a, 0), (a, 1)\} \rightarrow \{(b, 0), (b, 1)\} \\ \begin{array}{ccc} (a, 0) & \mapsto & (b, 0) \\ (a, 1) & \mapsto & (b, 0) \end{array},$$

a função tem domínio $F(\{a\})$ e codomínio $F(\{b\})$, com $\{a\}, \{b\} \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$, e não existe qualquer função $f : \{a\} \rightarrow \{b\}$ tal que $F(f) = g$, uma vez que, por definição de F , $F(f)(a, 1) \neq (x, 0)$, para todo $x \in \{b\}$.

Logo, o funtor F não é pleno.

(c) Diga se o funtor F preserva objetos terminais.

Resposta:

O funtor F preserva objetos terminais se, para qualquer $A \in \text{Obj}(\mathbf{Set})$,

$$A \text{ é objeto terminal} \Rightarrow F(A) \text{ é objeto terminal.}$$

Na categoria **Set**, os objetos terminais são os conjuntos singulares. Então F não preserva objetos terminais, pois $A = \{a\}$ é um objeto terminal e $F(A) = \{(a, 0), (a, 1)\}$ não é um objeto terminal.