Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
24 de maio de 2025

Álgebra Universal e Categorias

2º teste

duração: 1h45min

Justifique todas as suas respostas, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.

1. Considere a categoria $\mathbf{C}$ representada pelo diagrama seguinte

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "r"] \arrow[d, shift left, "u"] \arrow[dr, "n"] & B \arrow[r, "p"] & C \\
E \arrow[u, shift left, "v"] \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "t"'] \arrow[urr, bend right, "w"'] & D \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[ur, "q"] &
\end{tikzcd}
$$

Sem apresentar justificacões, indique se existem, na categoria $\mathbf{C}$, morfismos e objetos nas condições a seguir indicadas. Caso existam, forneça um exemplo correspondente:

(a) Um morfismo que não seja um monomorfismo.

(b) Um bimorfismo que não seja um isomorfismo.

(c) Um isomorfismo que não seja um bimorfismo.

(d) Objetos distintos e isomorfos.

2. (a) Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.

(b) Dê exemplo de uma categoria $\mathbf{C}$ na qual existam objetos A, B, C e morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tais que $g \circ f$ é um epimorfismo, mas f não é um epimorfismo.

3. Sejam $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ categorias. Mostre que se $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ têm objetos iniciais, então a categoria produto $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ tem objeto inicial.

4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos $\{1\}$ e $\mathbb{Z}$ e as funções i, f e g definidas por

$$
\begin{array}{rcl} i : \{1\} & \to & \mathbb{Z} \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, \qquad
\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 3+x \end{array}, \qquad
\begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 5-x \end{array}.
$$

Mostre que $(\{1\}, i)$ é um igualizador de f e g.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e A, B, C, I objetos de $\mathbf{C}$ tais que I é um objeto inicial. Considere os morfismos $f_A : I \to A$, $f_B : I \to B$, $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$ em $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B), então $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B.

6. Seja $S = \{0, 1\}$. Considere o funtor $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ da categoria **Set** nela própria tal que:

- $F_{Obj} : \mathrm{Obj}(\textbf{Set}) \to \mathrm{Obj}(\textbf{Set})$ é a função que a cada conjunto A associa o conjunto $A \times S$,
- $F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\textbf{Set}) \to \mathrm{Mor}(\textbf{Set})$ é a função que a cada **Set**-morfismo $f : A \to B$ associa a função

$$
\begin{array}{rccc} F_{Mor}(f) : & F(A) & \to & F(B) \\ & (x, y) & \mapsto & (f(x), y) \end{array}.
$$

(a) Diga se o funtor F é fiel.

(b) Justifique que o funtor F não é pleno.

(c) Diga se o funtor F preserva objetos terminais.

Cotações: $1.(4 \times 0,75)$; $2.(2,25 + 1,25)$; $3.(2,75)$; $4.(3,5)$; $5.(3,5)$; $6.(3 \times 1,25)$.