Tópicos de Matemática

Licenciatura em Matemática - 1º ano

teste - 11 jan 2018 | Duração: 3 horas

Este teste tem 6 grupos de questões. Os grupos 3 e 6 são obrigatórios para todos os alunos. Quem realizou os minitestes, pode optar por responder às questões dos grupos 1, 2, 4 ou 5. No caso de apresentar resposta a qualquer uma daquelas questões, a nota do miniteste correspondente será anulada.

GRUPO 1. Sejam p, q e r proposições. Considere a fórmula proposicional

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

(a) Escreva a fórmula proposicional dada usando apenas os conetivos $\sim$ e $\wedge$.

(b) Verifique que a fórmula proposicional é uma tautologia.

(c) Sejam $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ condições com o mesmo domínio de variável D. Sabendo que $a(x) \Rightarrow (b(x) \Rightarrow c(x))$ e $a(x) \Rightarrow c(x)$ são condições impossíveis, classifique a condição $b(x)$.

Cotação: 1. 1.5+1.5+0.5

GRUPO 2. (a) Demonstre o seguinte resultado:

Para todo o número inteiro n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

(b) Prove, por indução matemática, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $13^n - 4^n$ é divisível por 9.

Cotação: 2.(a) 1.75 **2.(b)** 1.75

GRUPO 3. (a) Seja $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

i. $\emptyset \subseteq A$;

ii. $\emptyset \in A$;

iii. $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$;

iv. $\{\{\emptyset\}\} \in A$;

v. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq A$;

vi. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A$.

(b) Sejam A e B conjuntos não vazios e C um conjunto qualquer. Mostre que

$$(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C \Leftrightarrow A = B = C.$$

Cotação: 3.(a) 1.5 **3.(b)** 2.0

GRUPO 4. Considere os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 4, 8\}$.

(a) Seja R a relação binária de A em B definida por

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow y^x \in B, \qquad (x \in A, y \in B).$$

i. Represente R em extensão;

ii. Determine, justificando, os conjuntos D_R, D'_R e $R^{\leftarrow}(\{4, 8\})$.

(b) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, uma função $f : B \to A$:

i. injetiva e não sobrejetiva;

ii. não injetiva;

iii. não sobrejetiva;

iv. bijetiva.

Cotação: 4.(a) 1.75 **4.(b)** 1.75

GRUPO 5. (a) Considere, em $\mathbb{Z}$, a relação binária definida por

$$a\ \theta\ b \Leftrightarrow 3a + b \text{ é um múltiplo de 4} \qquad (a, b \in \mathbb{Z}).$$

i. Mostre que θ é uma relação de equivalência.

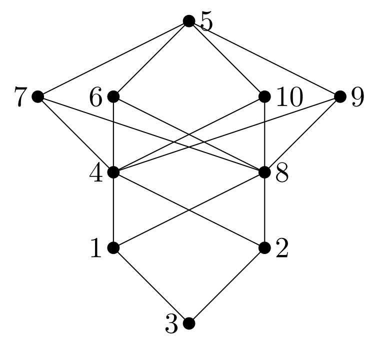
ii. Determine $[0]_\theta$.

iii. Indique, justificando, um inteiro a tal que $[2]_\theta \cap [a]_\theta = \emptyset$.

(b) Seja $A = \{a, b, c, d\}$. Existirá alguma relação de equivalência em A com 9 elementos? Justifique a sua resposta. [**Sugestão:** Comece por considerar as partições possíveis de A.]

Cotação: 5.(a) 1,5 + 0.5 + 0,5 **5.(b)** 1,0.

GRUPO 6. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $\leq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse



(a) Indique os elementos maximais, os elementos minimais, o máximo e o mínimo do conjunto $B = \{1, 4, 7, 8, 9, 10\}$.

(b) Justifique que, neste c.p.o., o conjunto vazio admite supremo e ínfimo.

(c) Justifique que $(A, \leq)$ não é um reticulado.

(d) Dê um exemplo de um subconjunto C de A tal que $(C, \leq|_C)$ seja um reticulado mas não seja uma cadeia.

Cotação: 6. 1,0+0,5+0,5+0,5