Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática

Análise

—— prova escrita 2 — duas horas ———————————— 2018'19 ——

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (3 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
   (a) Mostre que f não possui pontos críticos;
   (b) Justifique que f possui em extremo, identificando-o e classificando-o;
   (c) Justifique porque é que uma função real de várias variáveias reais pode ter extremos locais sem possuir pontos críticos.

2. (3 valores) Considere a função

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-2x+2 \end{array},$$

   com $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 4\}$.
   (a) Justifique que f possui máximo e mínimo absoluto;
   (b) Determine o máximo e o mínimo absoluto de f referidos na alínea anterior.

3. (5 valores) Considere o seguinte integral duplo

$$\int_0^{2\sqrt{\pi}}\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(x^2)\,dxdy.$$

   (a) Identifique e esboce a região de integração;
   (b) Inverta a ordem de integração do integral apresentado;
   (c) Calcule o valor do integral. (Sugestão:use o resultado obtido na alínea anterior)

4. (3 valores) Use integrais duplos para calcular a área da região

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq -x, 0\geq x^2+y-2\}.$$

5. (4 valores) Considere o sólido S definido por:

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq 4, x^2+y^2+z^2\leq 16\}.$$

   Observação: O sólido S é formado por um cilindro de raio 2 no interior de uma esfera de raio 4.
   (a) Escreva um integral duplo (ou soma de integrais duplos), em coordenadas polares, que permita calcular o volume de S;
   (b) Escreva um integral triplo (ou soma de integrais triplos), em coordenadas cilindricas, que permita calcular o volume de S;
   (c) Escreva um integral triplo (ou soma de integrais triplos), em coordenadas esféricas, que permita calcular o volume de S.

6. (2 valores) Indique, justificando, se as proposições seguintes são verdadeiras ou falsas:
   (a) $\displaystyle\int_0^2\int_1^3 \mathrm{e}^{x^2y^2}\,dxdy<4$; (Sugestão: não efectuar contas)
   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy\geq 0$, para qualquer função $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ contínua;

Fim

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \qquad (r,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[.$$

Coordenadas cilindricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ z = z \end{cases}, \qquad (r,\theta,z) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}.$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ \\ y = \rho\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \qquad (\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi].$$