Universidade do Minho
Departamento de Matemática Lic. em Ciências da Computação

Análise

—— Exame — duas horas + 20min. tolerância —————————— 2018'19 ——

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   (a) Estude a continuidade de f;

   (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

   (c) A função f é derivável em $(0,0)$? Justifique.

2. (8 valores) Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = x^2 y \, \mathrm{e}^{\,z} + z \ln y.$$

   (a) Identifique o domínio D da função f;

   (b) Calcule as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$;

   (c) Justifique que f é derivável em $(1,1,0)$;

   (d) Determine $f'(1,1,0)$;

   (e) Obtenha a taxa de variação da função f no ponto $(1,1,0)$ e na direcção e sentido do vector $(-2, \sqrt{3}, 3)$;

   (f) Obtenha uma equação do plano tangente à superfície de nível 1 da função f no ponto $(1,1,0)$;

   (g) Obtenha, ou justifique que não existem, os extremos locais da função f.

3. (2 valores) Considere a equação $x^2 y \, \mathrm{e}^{\,z} + z \ln y = 1$.

   (a) Mostre que a equação dada define implicitamente z em função de x e y, isto é $z = \varphi(x,y)$, localmente numa vizinhança de $(1,1,0)$;

   (b) Determine $\nabla\varphi(1,1)$, ou seja o gradiente de φ em $(1,1)$.

4. (4 valores) Apresente um integral duplo, ou soma de integrais duplos, em coordenadas polares, que permita calcular a área da região R definida por:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2+y^2 \leq 2, y \geq x^2\right\}.$$

5. (2 valores) Use integrais triplos para obter a fórmula, $\dfrac{\pi \mathcal{R}^2 h}{3}$, que permite obter o volume de um cone de altura $h > 0$ e base de raio $\mathcal{R} > 0$ (ver verso). Ou seja, pretende-se o volume do sólido:

$$Cone = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h - \frac{h}{\mathcal{R}}\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

   Sugestão: Use coordenadas cilíndricas.

Fim

Nota: fórmulas no verso.

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}, \qquad (r,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[.$$

Coordenadas cilindricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \\ \\ z = z \end{cases}, \qquad (r,\theta,z) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}.$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ \\ y = \rho\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \qquad (\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi].$$

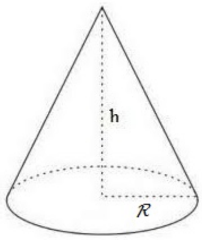

Figura 1: Cone referido na questão número 5