Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Soluções

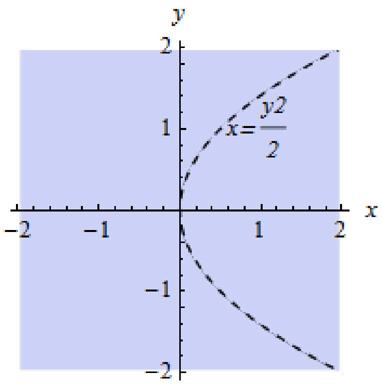
- **Curvas e superfícies de nível. Gráficos de funções de duas variáveis**

1. (a) $D_f = \mathbb{R}^2$; $f(-2,5) = -29$; $f(0,-2) = -4$;

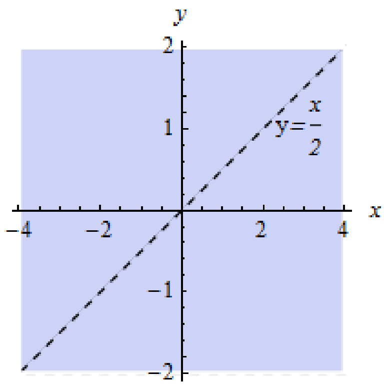
(b) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq \dfrac{y^2}{2}\right\}$; $f(-2,1) = -\frac{1}{5}$; $f(-1,0) = -\frac{1}{2}$;

(c) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $f(2,1) = \frac{2}{5}$; $f(-1,-1) = -\frac{1}{2}$

(d) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq \dfrac{x}{2}\right\}$; $f(2,3) = -\frac{3}{2}$; $f(-1,4) = \frac{4}{9}$;



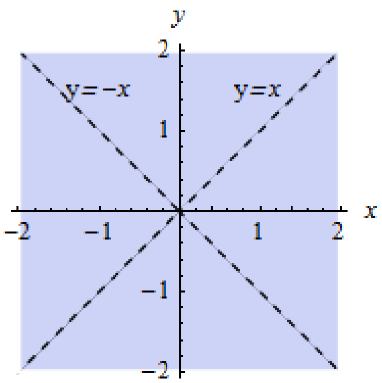
(b)



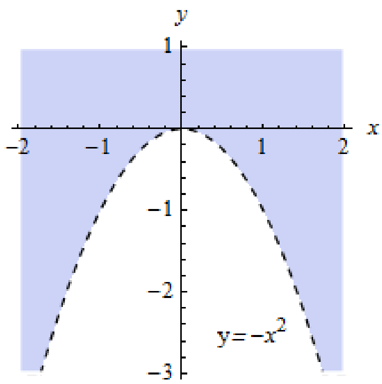
(d)

(e) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq x \ \wedge \ y \neq -x\right\}$; $f(2,0) = 0$; $f(-1,2) = \frac{2}{3}$;

(f) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > -x^2\right\}$; $f(1,0) = 0$; $f(0,1) = 0$;



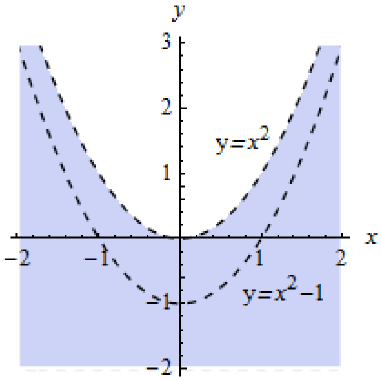
(e)



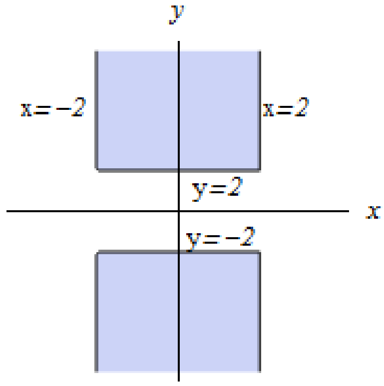
(f)

(g) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y < x^2 \ \wedge \ y \neq x^2 - 1\right\}$; $f(0,e) = -e$; $f(e,0) = 0$;

(h) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq 4 \ \wedge \ y^2 \geq 4\right\}$; $f(1,2) = \sqrt{3}$; $f(-1,3) = \sqrt{3} - \sqrt{5}$;



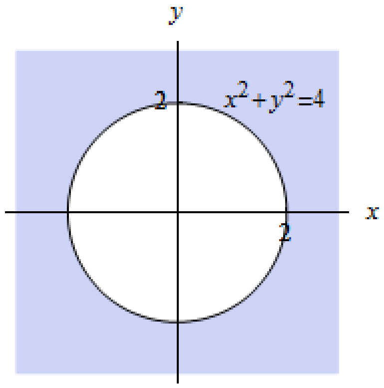
(g)



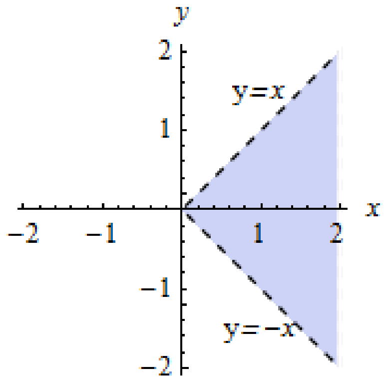
(h)

(i) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geq 4\}$; $\quad f(3,1) = \sqrt{6}$; $f(-1,-3) = \sqrt{6}$;

(j) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > -x \ \wedge y < x\}$; $\quad f(2,1) = f(2,-1) = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$.
(Nota: os pontos $(0,1)$ e $(1,-1)$ não pertencem ao domínio de f).



(i)



(j)

2. Considere a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$.

(a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \neq 1\}$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{1-(x^2+y^2)} = -\dfrac{16}{3}$ quando $x^2 + y^2 = 4$.

3. (a) $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -x + k, \ k \in \mathbb{R}\}$; por exemplo, $k = -2, -1, 0, 1, 2$.

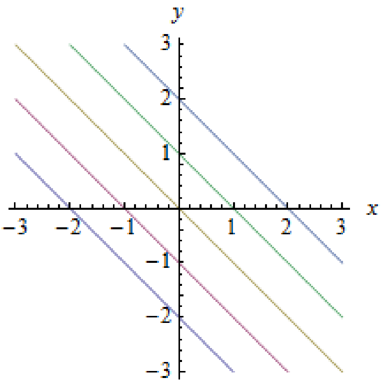
(b) $C_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -x + \dfrac{k}{3}, \ k \in \mathbb{R}\right\}$; por exemplo, $k = -2, -1, 0, 1, 2$.

(c) $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = k, \ k \geq 0\}$; por exemplo, $k = 0, 1, 3, 4, 6$.

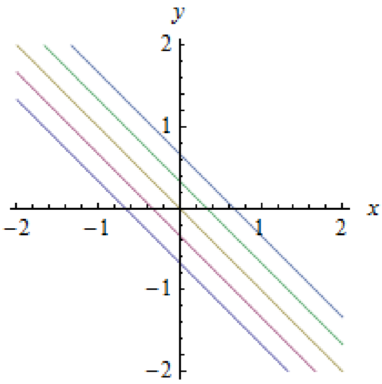
(d) $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1 - k, \ k \leq 1\}$; por exemplo, $k = 1, -2, -4, -5, -7$.

(e) $C_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \dfrac{k}{x}, \ k \neq 0\right\}$; por exemplo, $k = -3, -2, -1, 1, 2, 3$.
$C_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0 \ \vee \ y = 0\}$.

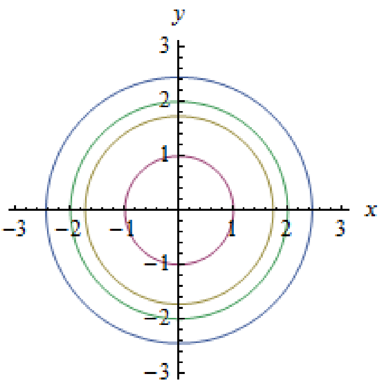
(f) $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2 + k, \ k \in \mathbb{R}\}$; por exemplo, $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$.



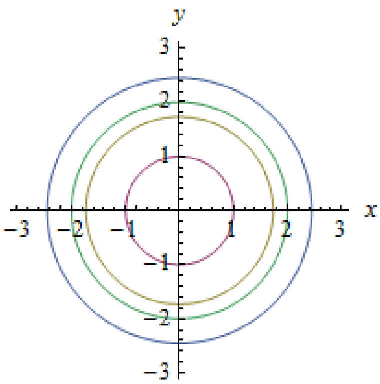
(a)



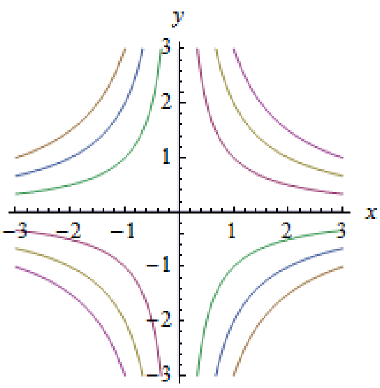
(b)



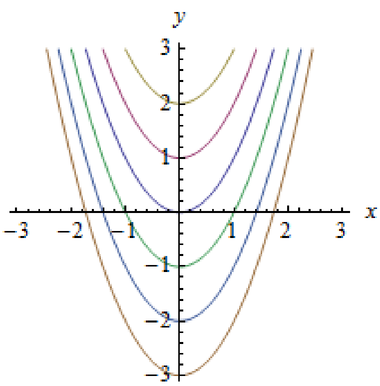
(c)



(d)

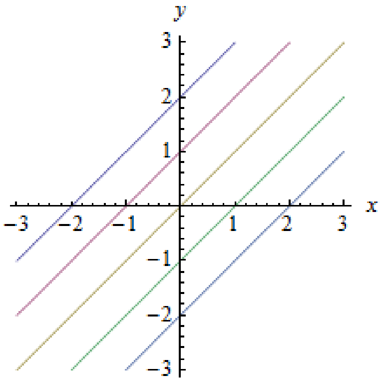


(e)

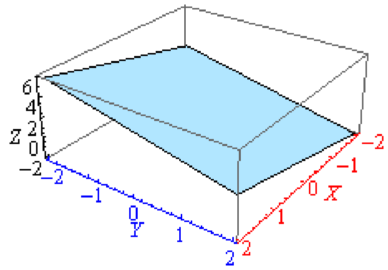


(f)

4. (a)



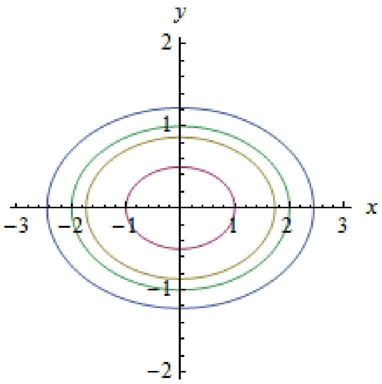
$y = x + 2 - k;\ k = 0, 1, 2, 3, 4$



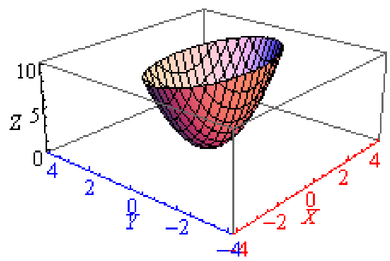
Plano $z = x - y + 2$

Figura 1: $f(x, y) = x - y + 2$

(b)



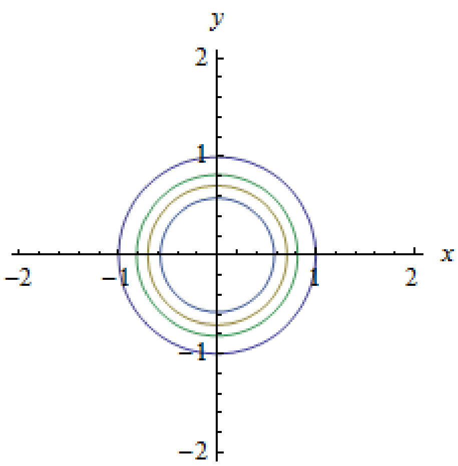
$x^2 + 4y^2 = k;\ k = 0, 1, 3, 4, 6$



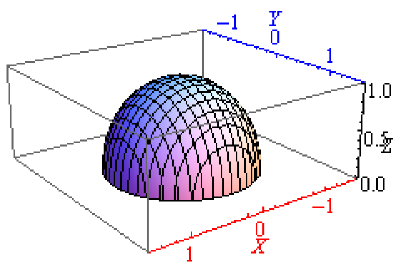
Parabolóide elíptico $z = x^2 + 4y^2$

Figura 2: $f(x, y) = x^2 + 4y^2$

(c)



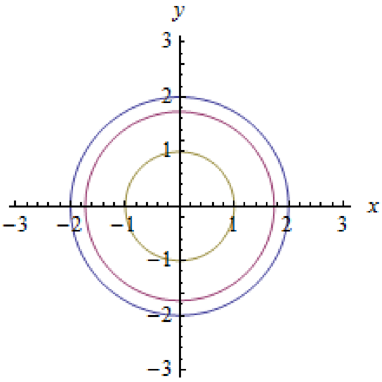
$x^2 + y^2 = 1 - k^2;\ k = 0, \sqrt{1/3}, \sqrt{1/2}, \sqrt{2/3}, 1$



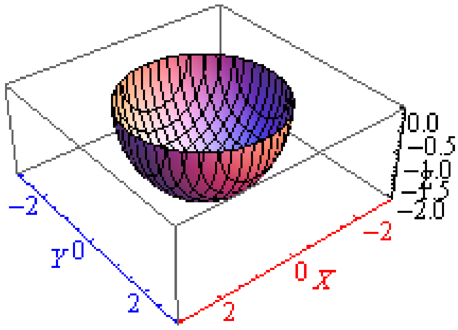
Semi-superfície esférica $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Figura 3: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(d)



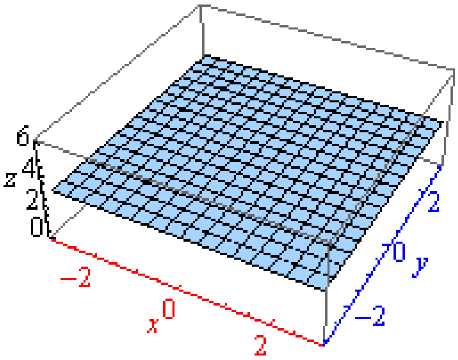
$x^2 + y^2 = 4 - k^2;\ k = -2, -\sqrt{3}, -1, 0$



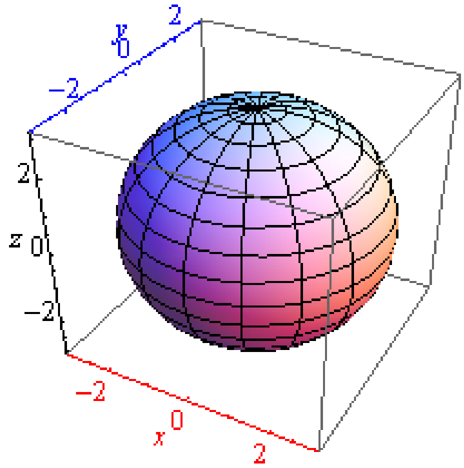
Semi-superfície esférica $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Figura 4: $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

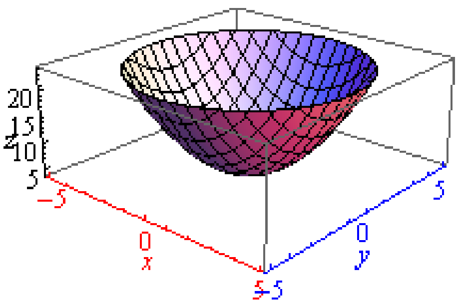
5.



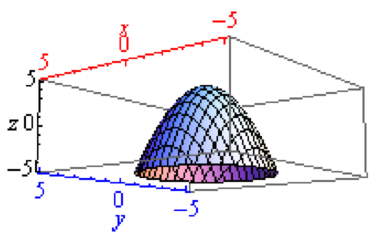
(a) Plano $z = 3$



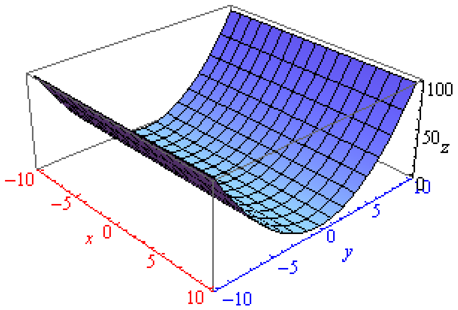
(b) Superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$



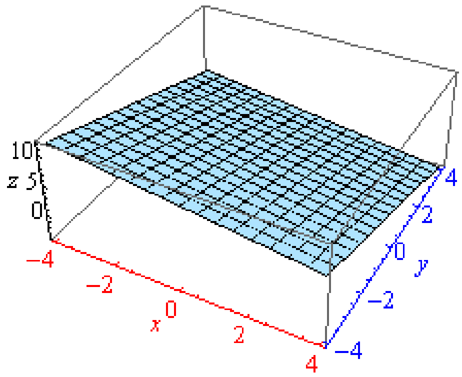
(c) Parabolóide $z = x^2 + y^2 + 4$



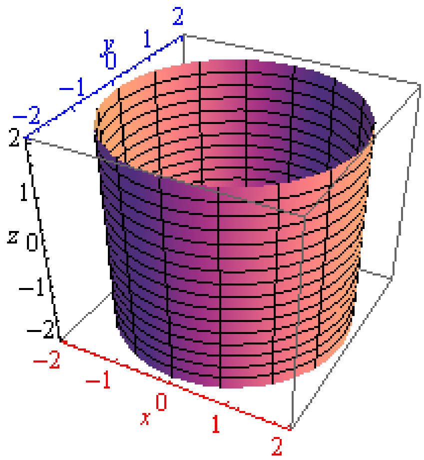
(d) Parabolóide $z = 5 - (x^2 + y^2)$



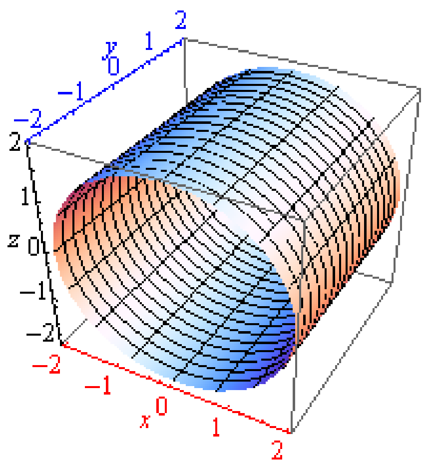
(e) Cilindro parabólico $z = y^2$



(f) Plano $2x + 4y + 3z = 12$



(g) Cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$



(h) Cilindro circular $x^2 + z^2 = 4$

6. Gráfico de f: parabolóide "voltado para cima"com vértice em $(0, 0, 0)$; superfície de equação $z = x^2 + y^2$.

(a) Gráfico de g: parabolóide "voltado para cima"com vértice em $(0, 0, 3)$.

(b) Gráfico de g: parabolóide "voltado para baixo"com vértice em $(0, 0, 5)$.

(c) Gráfico de k: parabolóide "voltado para cima"com vértice em $(0, 1, 0)$.

7. (a) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
Esfera de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1.

(b) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \geq 25\}$.
Região do espaço formada pela superfície esférica de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 5 e pelos pontos exteriores a esta superfície.

8. S_k- superfície de nível k

(a) $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = k, \; k \geq 0\}$.
Superfície esférica de centro na origem e raio $\sqrt{k}$.

(b) $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 + y^2 + k, \; k \in \mathbb{R}\}$.
Parabolóide "voltado para cima"de vértice $(0, 0, k)$.

(c) $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y + 3z = k, \; k \in \mathbb{R}\}$.
Plano ortogonal ao vetor $\vec{u} = (1, 2, 3)$ e que passa no ponto $(0, 0, \frac{k}{3})$.

(d) $S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = k, \; k \geq 0\}$.
Cilindro circular de raio $\sqrt{k}$ ao longodo eixo dos zz.

- **Limite e continuidade**

9. (a) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} 1 = 1;\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1;$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x-mx}{x+mx} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1-m)}{x(1+m)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-m}{1+m} = \frac{1-m}{1+m}\quad (m\neq -1).$$

Nota: Devemos ter também $m\neq -1$. Observe-se que $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\neq -x\}$.

Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ uma vez que temos limites trajetoriais distintos.

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0;$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ uma vez que temos limites trajetoriais distintos. O limite segundo as retas $y=mx$ depende do declive m.

(c) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1;\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1;$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} 0 = 0;$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0.$$

Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ dado que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \frac{1}{2}$ (limites trajetoriais diferentes).

(e) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x}{x+y} = \lim_{x\to 0} 1 = 1;\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x}{x+y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0;$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x}{x+y} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x+mx} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(1+m)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+m} = \frac{1}{1+m}\quad (m\neq -1).$$

Não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(f) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0;\qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0;$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx)^4}{\left(x^2+(mx)^4\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^6}{\left[x^2(1+m^4x^2)\right]^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^2}{\left(1+m^4x^2\right)^2} = 0.$$

Não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ dado que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\sqrt{x}}} \dfrac{x^2y^4}{(x^2+y^4)^2} = \dfrac{1}{4}$

(limites trajetoriais diferentes).

10. (a) -5

(b) 0

(c) $-\dfrac{2}{3}$

(d) 0; observe-se que $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = x^2(x-y) + y^2(x-y) = (x^2+y^2)(x-y)$.

(e) Não existe. Os limites segundo as retas $x = 0$ e $y = 0$ são distintos ($-\frac{1}{2}$ e 2, respetivamente).

(f) Não existe. Os limites segundo as retas $x = 0$ e $y = 0$ são distintos ($\frac{5}{4}$ e $\frac{1}{3}$, respetivamente).

(g) Não existe. Os limites segundo as retas $y = 0$ e $y = x$ são distintos (0 e 2, respetivamente).

(h) 0; observe-se que $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \dfrac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2 - y^2$.

(i) $\dfrac{1}{2}$; observe-se que $\dfrac{x-y}{x^2-y^2} = \dfrac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \dfrac{1}{x+y}$.

(j) $+\infty$; observe-se que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left[(x-1)^2 + (y-2)^2\right] = 0^+$.

(k) 0

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^3+y)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{y+x} = 0$ uma vez que

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^3+y) = 0$ e $\left|\text{sen}\,\frac{1}{y+x}\right| \leq 1$ (produto de um infinitésimo por uma função limitada).

11. Deve ser $k = 1$ de forma que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x^2+y^2) = 1 = g(0,0)$.

12. (a) Contínua em $(0,0)$.

Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \dfrac{y^2}{x^2+y^2} = 0$, dado que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ e $\left|\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\dfrac{y^2}{y^2}\right| = 1$ (produto de um infinitésimo por uma função limitada), e $f(0,0) = 0$.

(b) Uma vez que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, f não é contínua em $(0,0)$.

Temos limites trajetoriais distintos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} 0 = 0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} 1 = 1.$$

(c) Contínua em $(0,0)$.

Uma vez que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq 0}} (x+y)\,\text{sen}\,\frac{1}{x} = 0$$

(produto de um infinitésimo por uma função limitada) e

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$, concluímos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

13. (a) f é contínua em $\mathbb{R}^3$ por ser uma função polinomial de três variáveis.

(b) f é uma função contínua no seu domínio, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y-1>0\}$, por ser uma função composta de duas funções contínuas.

De facto, $f(x,y) = h\big(g(x,y)\big) = (h \circ g)(x,y)$ com $g(x,y) = x+y-1$ e $h(u) = \ln u$, sendo $D_g = \mathbb{R}^2$ e $D_h = \mathbb{R}^+$.

(c) f é contínua no seu domíno, $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \neq z^2\}$, por ser uma função racional em três variáveis.

(d) f é contínua em $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ por ser uma função polinomial neste domínio.

f não é contínua em $(0,0)$ uma vez que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(e) f é contínua em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\}$, ou seja, f é contínua em $\mathbb{R}^2$ exceto nos pontos da circunferência de equação $x^2+y^2=1$.

(f) Para $(x,y) \neq (0,0)$, f é uma função racional, logo contínua; e para $(x,y) = (0,0)$, temos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.