Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	2 de janeiro de 2023

Teste de Álgebra Linear CC

duração: 2 horas

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

		V	F
1.	O conjunto $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\vert\, a+b=c+2\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.	☐	☒
2.	O subespaço vetorial $\{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \,\vert\, x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3.	☐	☒
3.	Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2, v_3, v \in V$, se $V =< v_1, v_2, v_3 >$, então $V =< v_1, v_2, v_3, v >$.	☒	☐
4.	Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2 \in V$, se $v_1 + v_2 \neq 0_V$, então a sequência (v_1, v_2) é linearmente independente.	☐	☒
5.	Se v_1, v_2, v_3 são vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, então $\mathbb{R}^3 =< v_1, v_2, v_3 >$.	☒	☐
6.	A aplicação $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(a,b,c,d) = (2a, c+d, 0)$, para qualquer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, é uma aplicação linear.	☒	☐
7.	Para qualquer endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, f é sobrejetiva se e só se $\text{Nuc}f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.	☒	☐
8.	Para qualquer endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, se $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio 3 , então $2v$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio 6.	☐	☒

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Considere no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, os vetores

$$u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,3), u_3 = (-3,0,6), u_4 = (1,0,-2)$$

e os subespaços vetoriais $U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$ e $W = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,\vert\, x, y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determine uma base de U.

Uma sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ de vetores de $\mathbb{R}^3$ diz-se uma base de U se $U =< v_1, \ldots, v_k >$ e $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente independente.

Uma vez que $U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$, basta verificar se (u_1, u_2, u_3, u_4) é linearmente independente. Ora, atendendo a que $u_3 = 0u_1 + 0u_2 - 3u_4$, conclui-se que a sequência indicada não é linearmente independente e tem-se $U =< u_1, u_2, u_4 >$. A sequência (u_1, u_2, u_4) também não é uma base de U, pois não é linearmente independente; de facto, tem-se $u_4 = u_1 - u_2$. Considerando a igualdade anterior, segue que $U =< u_1, u_2 >$. A sequência (u_1, u_2) é linearmente independente, uma vez que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_1 \neq \alpha u_2$ e $u_2 \neq \beta u_1$. Então, como $U =< u_1, u_2 >$ e a sequência (u_1, u_2) é linearmente independente, conclui-se que (u_1, u_2) é uma base de U.

(b) Mostre que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = -2x + 3y\}$.

Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = -2x + 3y\}$. Da alínea anterior temos $U =< u_1, u_2 >$. Pretendemos mostrar que $S = U$, ou seja, considerando que S e U são subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, pretendemos provar que, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in U$ se e só se $(x, y, z) \in S$.

Ora, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in < u_1, u_2 > &\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, (x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_1 \\
&\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}\, (x, y, z) = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 3\beta) \\
&\Leftrightarrow \text{ o sistema } \begin{cases} \alpha = x \\ \alpha + \beta = y \\ \alpha + 3\beta = z \end{cases} \text{ é possível.}
\end{aligned}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ deste sistema, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{l_2 \to l_2 - l_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - x \\ 0 & 3 & z - x \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & z + 2x - 3y \end{array}\right].$$

O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$, ou seja, se e só se $z + 2x - 3y = 0$. Assim, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in U &\Leftrightarrow z + 2x - 3y = 0 \\
&\Leftrightarrow z = -2x + 3y \\
&\Leftrightarrow (x, y, z) \in S.
\end{aligned}$$

Portanto, $S = U$.

(c) Determine $\dim(W \cap U)$ e $\dim(W + U)$.

Temos

$$\begin{aligned}
W \cap U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = -2x + 3y \text{ e } z = 0\} \\
&= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = \tfrac{3}{2}y \text{ e } z = 0\} \\
&= \{(\tfrac{3}{2}y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= < (\tfrac{3}{2}, 1, 0) > .
\end{aligned}$$

A sequência $((\frac{3}{2}, 1, 0))$ é linearmente independente, uma vez que $(\frac{3}{2}, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$. Logo $((\frac{3}{2}, 1, 0))$ é uma base de $W \cap U$. Como esta base tem um único vetor, então $\dim(W \cap U) = 1$.

Um vez que $\dim(W + U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$, $\dim U = 2$ e $\dim(W \cap U) = 1$, para calcular $\dim(W + U)$ resta determinar $\dim W$.

Uma vez que

$$\begin{aligned}
W &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} \\
&= < (1, 0, 0), (0, 1, 0) >
\end{aligned}$$

e a sequência $((1,0,0),(0,1,0))$ é linearmente independente, então $((1,0,0),(0,1,0))$ é uma base de W. Portanto, $\dim W = 2$.

Logo $\dim(W+U) = 2+2-1 = 3$.

2. Considere os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_1$ a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B}_1 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $f(x,y,z,w) = (x-y, z, x-w)$, para qualquer $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$.

Uma vez que

$$(x,y,z,w) = x(1,0,0,0) + y(0,1,0,0) + z(0,0,1,0) + w(0,0,0,1),$$

o vetor coluna de (x,y,z,w) na base $\mathcal{B}$ é $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$. Logo

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-w \\ -x+z+w \\ x-y-z \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $f(x,y,z,w)$ na base $\mathcal{B}_1$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x,y,z,w) &= (x-1)(1,1,1) + (-x+z+w)(1,1,0) + (x-y-z)(1,0,0) \\ &= (x-y, z, x-w). \end{aligned}$$

(b) Determine $\dim \mathrm{Im} f$.

Uma vez que

$$\mathbb{R}^4 =< (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) >,$$

tem-se

$$\mathrm{Im} f =< f(1,0,0,0), f(0,1,0,0), f(0,0,1,0), f(0,0,0,1) > .$$

Daqui segue que $\dim \mathrm{Im} f = car(M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1))$.

Dos cálculos seguintes

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

conclui-se que $car(M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1)) = 3$ e , portanto, $\dim \mathrm{Im} f = 3$.

(c) Diga, justificando, se:

i) f é sobrejetiva.

A aplicação linear f é sobrejetiva se e só se $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^3$. Considerando que $\mathrm{Im}f$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, tem-se $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^3$ se e só se $\dim \mathrm{Im}f = \dim \mathbb{R}^3$.
Ora, da alínea anterior segue que $\dim \mathrm{Im}f = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ e, portanto, f é sobrejetiva.

ii) f é injetiva.

A aplicação linear f é injetiva se e só se $\mathrm{Nuc}f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Como $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subseteq \mathrm{Nuc}f$, tem-se $\mathrm{Nuc}f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ se e só se $\dim \mathrm{Nuc}f = \dim\{0_{\mathbb{R}^3}\} = 0$.
Então, considerando que

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \mathrm{Nuc}f + \dim \mathrm{Im}f$$

e $\dim \mathrm{Im}f = 3$, conclui-se que f não é injetiva, pois $\dim \mathrm{Nuc}f = 1$.

(d) Sendo $\mathcal{B}_2$ uma base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_3$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$, $B = M(id_{\mathbb{R}^4}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B})$ e $C = M(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1)$, indique, justificando, qual das expressões seguintes define a matriz $M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$:

i. CAB. ii. CAB^{-1}. iii. $C^{-1}AB^{-1}$. iv. $C^{-1}AB$. v. BAC.

Sendo V, V', V'' espaços vetoriais de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ bases de V, V' e V'', respetivamente, $f_1 : V \to V'$ e $f_2 : V' \to V''$ aplicações lineares, tem-se

$$M(f_2 \circ f_1; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = M(f_2; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')M(f_1; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Também se tem $M(id_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = M(id_V, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.
Então, como $f = id_{\mathbb{R}^3} \circ f \circ id_{\mathbb{R}^4}$, segue que

$$M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3) = M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)M(id_{\mathbb{R}^4}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}).$$

Assim, considerando que $M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_1) = M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)^{-1}$, conclui-se que a opção correta é a opção iv.

3. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que -1 e 2 são valores próprios de φ com multiplicidades algébricas 1 e 2, respetivamente.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ é valor próprio de } \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad |M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) - \lambda I_3| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^{3+3}(2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -1.
\end{aligned}$$

Logo os valores próprios de φ são -1 e 2. Como 1 é raiz simples do polinómio característico de φ, tem-se m.a.$(1) = 1$. Como 2 é raiz dupla do polinómio característico de φ, então m.a.$(2) = 2$.

(b) Determine o subespaço próprio de φ associado ao valor próprio 2. Justifique que o valor próprio 2 tem multiplicidade geométrica 1.

Pretendemos determinar

$$\mathbb{R}^3_{[\varphi,2]} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi(a,b,c) = 2(a,b,c)\}.$$

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3_{[\varphi,2]} & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi(a,b,c) = 2(a,b,c)\} \\ & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi(a,b,c) - 2(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\varphi - 2id_{\mathbb{R}^3})(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \quad (*) \\ & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A - 2I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}. \end{array}$$

(*) Uma vez que $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$, o vetor coluna de (a,b,c) relativamente à base $\mathcal{B}$ é $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Resolvendo o sistema

$$(A - 2I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pelo método de eliminação de Gauss, temos

$$[A|0] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_3 + \frac{1}{3}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde concluímos que o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -3b = 0 \end{cases}$$

e do qual se obtem $a = b = 0$. Logo

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3_{[\varphi,2]} & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = b = 0\} \\ & = & \{(0,0,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{c(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, c \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(0,0,1)>. \end{array}$$

Como $(0,0,1) \neq (0,0,0)$, a sequência $((0,0,1))$ é linearmente independente. Assim, $((0,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3_{[\varphi,2]}$. Portanto, $\dim \mathbb{R}^3_{[\varphi,2]} = 1$, pelo que $m.g.(2) = 1$.

(c) Diga, justificando, se φ é diagonalizável.

Da alínea (a) sabe-se que o polinómio característico de φ se decompõe em fatores lineares. Logo φ é diagonalizável se e só se m.a.(λ) = m.g.(λ), para cada λ valor próprio de φ. Como m.a.$(2) = 2 \neq 1 =$ m.g.(2), concluímos que φ não é diagonalizável.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: $1.(1,5+1,5+1,5)$; $2.(1,5+1,25+1,25+1,25)$; $3.(1,5+1,5+1,25)$.