Capítulo IV: Transformada de Laplace, Propriedades da Lei Normal e Convergências Estocásticas

Probabilidades e Aplicações

Licenciatura em Matemática
Licenciatura em Ciências da Computação
Universidade do Minho
Ano Letivo 2025/2026

Conteúdo

Neste capítulo iremos

- definir a transformada de Laplace de uma v.a.r. e apresentar algumas das suas propriedades mais importantes;
- enunciar mais propriedades da lei Normal, que são de grande importantância em problemas de inferência estatística;
- apresentar resultados relativos a convergências estocásticas, com particular destaque para o Teorema do Limite Central.

1. Transformada de Laplace

Seja X uma v.a.r. e considere-se a função

$$L_X(t) = E[e^{-tX}], \quad t \in D \subseteq \mathbb{R}.$$

Se $E[e^{-tX}]$ existir, a $L_X(t)$ chamamos *transformada de Laplace* da v.a.r. X (ou da correspondente lei de probabilidade ou da correspondente função de distribuição) em $t \in \mathbb{R}$.

A transformada de Laplace caracteriza a lei de probabilidade da v.a.r., ou seja, a cada lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (que admite transformada de Laplace) corresponde uma e uma só transformada de Laplace e, se duas v.a.r'.s têm a mesma transformada de Laplace, então têm a mesma lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Transformada de Laplace

A transformada de Laplace permite obter os momentos de uma v.a.r..

De facto, pode-se provar a seguinte relação entre os momentos de uma v.a.r. X (quando estes existem) e as derivadas de L_X na origem:

$$E[\,X^k\,] = (-1)^k L_X^{(k)}(0).$$

Esta igualdade é especialmente útil quando o cálculo dos momentos, usando a definição, é muito complicado ou moroso.

1. Transformada de Laplace

Uma das propriedades mais importantes da transformada de Laplace é a seguinte:

Propriedade: Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.r.'s independentes que admitem transformadas de Laplace $L_1, L_2, \ldots, L_n$, respectivamente. Então a transformada de Laplace da v.a.r. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, denotada por L_{S_n}, é dada por

$$L_{S_n}(t) = L_1(t)L_2(t)\ldots L_n(t).$$

[Demonstração]: (TPC - usar a independência das v.a.r.'s.)

A utilização desta propriedade permite ainda obter o seguinte resultado: se as v.a.r.'s forem **identicamente distribuídas** (e, consequentemente, tiverem a mesma transformada de Laplace $L_1 = L_2 = \ldots = L_n = L$) **e independentes**, então a transformada de Laplace de S_n é dada por

$$L_{S_n}(t) = [L(t)]^n.$$

1. Transformada de Laplace

Usando a propriedade anterior da transformada de Laplace, é possível mostrar que a soma de v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) com lei

i) Poisson é ainda uma v.a.r. com lei de Poisson;

ii) Binomial é ainda uma v.a.r. com lei Binomial;

iii) Normal é ainda uma v.a.r. com lei Normal.

[Demonstração]: TPC (Exercícios da Folha Prática 8)

Nota Importante: Do item iii), deduz-se que, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) com a lei $N(\mu, \sigma^2)$ então

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \tag{1}$$

1. Transformada de Laplace

Existem outras transformadas importantes em teoria de probabilidades. Destacam-se aqui:

- a função geradora de momentos:

$$M(t) = E[\, e^{tX} \,], \; t \in \mathbb{R}$$

- a função geradora de probabilidades (só para X v.a.r. discreta):

$$P(t) = E[\, t^{X} \,], \; |t| \leq 1$$

- a função característica:

$$\phi(t) = E[\, e^{itX} \,], \; t \in \mathbb{R}$$

Todas estas transformadas caracterizam a lei de probabilidade da v.a.r. X correspondente.

2. Propriedades da Lei Normal

A lei Normal tem propriedades muito especiais relativas à distribuição da soma de um número finito de v.a.r.'s independentes, todas com lei normal. Mais concretamente, temos o seguinte:

i) Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$. A v.a.r.

$$X_1 + \ldots + X_n$$

segue uma lei normal:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,,\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

ii) O resultado i) estende-se a combinações lineares de $X_1, \ldots, X_n$. Se $X_1, \ldots, X_n$ são v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$, então, quaisquer que sejam as constantes reais $a_1, \ldots, a_n$, não todas nulas, a v.a.r.

$$a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$$

segue uma lei normal, i.e.,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu_i\,,\ \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \sigma_i^2\right).$$

[Demonstração]: É só fazer uso da Transformada de Laplace da lei $N(\mu, \sigma^2)$ e que tem a seguinte expressão:

$$L(t) = \exp\left\{-t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\},\ t \in \mathbb{R}.$$

2. Propriedades da Lei Normal

Observação: Da propriedade anterior deduz-se o seguinte resultado, que é particularmente útil em problemas de inferência estatística:

Dada uma **amostra aleatória,** $X_1, X_2, \ldots, X_n$**, proveniente de uma v.a.r.** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *(i.e., dadas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com a mesma lei de X), a v.a.r.* **média amostral**

$$\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

segue uma lei Normal. De facto, tem-se

$$\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Nos problemas de inferência estatística em que μ é desconhecido, $\overline{X}_n$ é usada como estimador de μ e tem boas propriedades (em particular, $\overline{X}_n$ é um estimador centrado para μ pois $E[\,\overline{X}_n\,] = \mu$).

Um dos resultados mais importantes em inferência estatística, e que envolve a lei Normal, é o **Teorema do Limite Central (TLC)** que diz o seguinte:

Teorema do Limite Central (TLC)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s), com valor médio μ e variância $0 < \sigma^2 < +\infty$, e considere-se a v.a.r. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. A função de distribuição da v.a.r.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

converge, quando $n \to +\infty$, para a função de distribuição da lei $N(0,1)$, i.e.,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_{N(0,1)}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

[Sem demonstração]

3.1 Teorema do Limite Central

Em palavras, o TLC diz-nos que, independentemente da distribuição subjacente às v.a.r.'s X_i e desde que estas tenham variância finita, quando n é grande, a lei da v.a.r. S_n é aproximadamente $N(n\mu, n\sigma^2)$. Daqui podemos também concluir que a v.a.r.

$$\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tem lei aproximadamente $N(\mu, \sigma^2/n)$.

Na prática, isto significa que, desde que n seja suficientemente grande, podemos aproximar o valor de probabilidades relativas à v.a.r. S_n (ou à v.a.r. $\overline{X}_n$) por probabilidades calculadas a partir da lei Normal.

<u>De um modo geral</u>, basta $n \geq 30$ para termos uma boa aproximação.

3.2 Lei dos Grandes Números

Juntamente com o T.L.C., a Lei dos Grandes Números é uma das convergências estocásticas mais importantes em inferência estatística. Veremos, inclusivamente, que permite validar a histórica definição frequencista de probabilidade (vista na 1.ª aula desta UC.)

Lei dos Grandes Números (LGN)

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de v.a.r.'s, definidas sobre o mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, independentes e identicamente distribuídas. Seja ainda $\overline{X_n} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, i.e., $\overline{X_n}$ é a v.a.r. que representa a média de n tais variáveis. Então, tem-se que

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left[\, |\overline{X_n} - \mu| < \epsilon \,\right] = 1.$$

Nota: Na verdade, esta LGN é conhecida por *Lei Fraca dos Grandes Números* pois estabelece a *convergência em probabilidade* da sucessão $\overline{X}_n$ para o valor μ (ver Lopes & Gonçalves).

3.2 Lei dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números valida, matematicamente, a definição frequencista de probabilidade. Para o efeito, basta aplicar a LGN a uma sucessão de v.a.r.'s, independentes e identicamente distribuídas com a lei $Bernoulli(p)$.

De facto, se p representar a probabilidade de ocorrência de um certo acontecimento, A, numa experiência aleatória, esta LGN permite-nos concluir que a frequência relativa de A em n repetições independentes da experiência, denotada por $f_n(A)$, converge para o valor de p, quando $n \to \infty$, i.e.,

$$\forall \epsilon > 0, \quad P(\ |f_n(A) - p| \geq \epsilon\ ) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nota: Observe que, neste contexto,

$$f_n(A) \stackrel{d}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

com $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com a lei $Bernoulli(p)$. Observe ainda que, neste caso, $E[X_i] = p$, $i = 1, \ldots, n$.