1.1 Sintaxe do Cálculo Proposicional clássico

1. De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$.

   a) $(\neg(p_1 \vee p_2))$

   b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_{100}))$

   c) $((p_3 \wedge p_1) \vee ($

   d) $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \rightarrow \perp)$

   e) $(\perp)$

   f) $(((p_9 \rightarrow ((p_3 \vee (\neg p_8)) \wedge p_{12})) \leftrightarrow (\neg p_4)) \rightarrow (p_7 \vee \perp)))$

2. Represente as seguintes frases através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar *frases atómicas*:

   a) Sou preso se tenho cão, mas também sou preso se não tenho cão.

   b) Não é verdade que neve sempre que está frio.

   c) Uma condição necessária para que uma sucessão seja convergente é que seja limitada.

   d) Uma condição suficiente para um número ser ímpar é que seja primo e não seja 2.

3. Encontre exemplos de frases que possam ser representadas através das fórmulas seguintes.

   a) $(p_1 \rightarrow ((\neg p_2) \vee p_3))$

   b) $((\neg(p_1 \wedge p_2)) \vee p_3)$

   c) $(p_1 \leftrightarrow (\neg p_2))$

   d) $(((p_1 \rightarrow p_2) \wedge p_1) \rightarrow p_2)$

4. Para cada uma das seguintes fórmulas φ do Cálculo Proposicional:
   i) p_{2024}. **ii)** $\neg\perp \vee \perp$. **iii)** $p_0 \rightarrow (\neg p_0 \rightarrow \neg p_1)$:

   a) Calcule $\varphi[p_2/p_0]$, $\varphi[p_0 \wedge p_1/p_1]$ e $\varphi[p_{2025}/p_{2024}]$.

   b) Indique o conjunto das suas subfórmulas.

5. Defina por recursão estrutural as seguintes funções (na alínea c) $BIN = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$):

   a) $p : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $p(\varphi)$ = número de ocorrências de parêntesis em φ.

   b) $v : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $v(\varphi)$ = número de ocorrências de vars. proposicionais em φ.

   c) $b : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{P}(BIN)$ tal que $b(\varphi) = \{\square \in BIN : \square \text{ ocorre em } \varphi\}$.

   d) $\_[\perp/p_7] : \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}$ (recorde que $\varphi[\perp/p_7]$ representa o resultado de substituir em φ todas as ocorrências de p_7 por $\perp$).

6. Considere de novo as funções definidas no exercício anterior. Prove, por indução estrutural, que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$:

   a) $v(\varphi) \geq \#var(\varphi)$. **b)** $p(\varphi) \geq \#b(\varphi)$.

   c) $v(\varphi) \geq v(\varphi[\perp/p_7])$. **d)** $b(\varphi) = b(\varphi[\perp/p_7])$.

   e) se $b(\varphi) \neq \emptyset$ então $p(\varphi) > 0$. **f)** se $p_7 \notin var(\varphi)$ então $\varphi[\perp/p_7] = \varphi$.

7. Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. O *tamanho* de φ (notação: $|\varphi|$) define-se por recursão do seguinte modo: (i) $|p| = 1$, para cada variável proposicional p; (ii) $|\perp| = 1$; (iii) $|\neg\varphi| = 1 + |\varphi|$; (iv) $|\varphi \,\square\, \psi| = 1 + |\varphi| + |\psi|$, para cada conetivo binário $\square$.

   a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior tamanho?

   b) Dê exemplo de fórmulas φ e ψ, com 3 subfórmulas, tais que $|\varphi| = 3$ e $|\psi| > 3$

   c) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $|\varphi| \geq \#subf(\varphi)$.

8. Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$. A *complexidade lógica* de φ (notação: $cl(\varphi)$) define-se por recursão do seguinte modo: (i) $cl(p) = 0$, para cada variável proposicional p; (ii) $cl(\perp) = 0$; (iii) $cl(\neg\varphi) = 1 + cl(\varphi)$; (iv) $cl(\varphi \,\square\, \psi) = 1 + \text{máx}(cl(\varphi), cl(\psi))$, para cada conetivo binário $\square$.

   a) Qual das fórmulas $\neg\neg\neg p_0$ ou $(p_1 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge p_4)$ tem maior complexidade lógica?

   b) Mostre que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $cl(\varphi) < |\varphi|$.

9. Seja $C \subseteq \{\perp, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Para $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, defina-se o predicado $\mathscr{C}(\varphi)$ do seguinte modo: $\mathscr{C}(\varphi)$ sse todo o conectivo que ocorre em φ é um elemento de C. Seja $\Gamma_C = \{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} \mid \mathscr{C}(\varphi)\}$. Neste exercício vamos fixar $C = \{\neg, \vee\}$.

   a) Dê uma definição indutiva do conjunto Γ_C.

   b) Enuncie o Teorema da Indução Estrutural para Γ_C.

   c) Defina por recursão estrutural a função $f : \Gamma_C \longrightarrow \mathcal{P}(\Gamma_C)$ tal que $f(\varphi)$ é o conjunto das subfórmulas de φ.

   d) Prove que: para todo $\varphi \in \Gamma_C$, se $\vee$ não ocorre em φ, então $\#f(\varphi) - 1$ é o número de ocorrências de $\neg$ em φ.

10. Seja Γ o subconjunto de $\mathcal{F}^{CP}$ definido indutivamente por:

    (i) Para cada variável proposicional p, $p \in \Gamma$.

    (ii) Para cada variável proposicional p, $\neg p \in \Gamma$.

    (iii) Se $\varphi, \psi \in \Gamma$ então $\varphi \vee \psi \in \Gamma$.

    a) Indique, justificando, fórmulas em Γ.

    b) Enuncie o Teorema da Indução Estrutural para Γ.

    c) Prove que: para todo $\varphi \in \Gamma$, $\perp$ não ocorre em φ.

    d) Defina por recursão estrutural a função $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{N}_0$ tal que $f(\varphi)$ é o número de ocorrências de $\neg$ em φ.

    e) Recorde a definição de Γ_C dada no exercício anterior. Seja $C = \{\neg, \vee\}$. Diga se $\Gamma \subseteq \Gamma_C$ e se $\Gamma_C \subseteq \Gamma$.