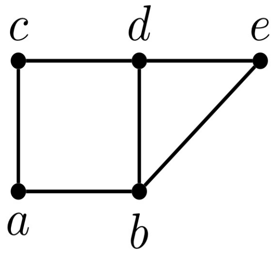
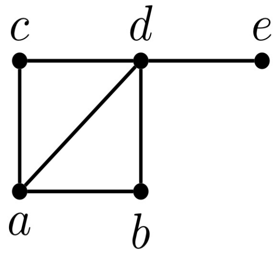
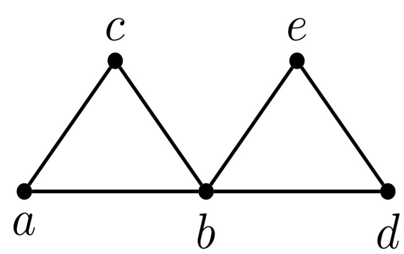
1. Escreva uma descrição formal de cada um dos seguinte grafos:

(a)


(b)


(c)


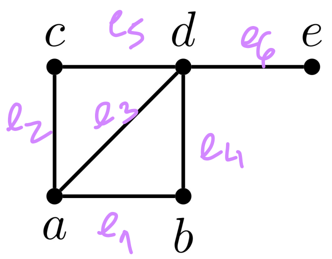
b) $G = (V, E)$ onde $V = \{a, b, c, d, e\}$

$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{d,e\}\}$

c) $G = (V, E)$ onde $V = \{a, b, c, d, e\}$

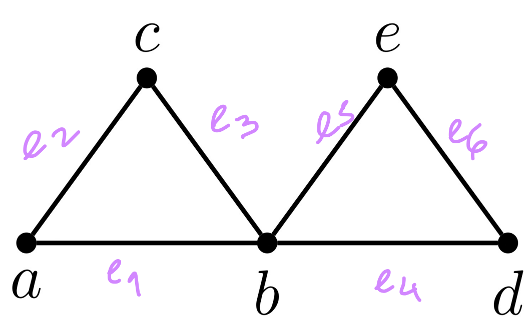
$E = \{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b,e\}, \{d,e\}\}$

2. Determine as matrizes de incidência e de adjacência de cada um dos grafos apresentados no exercício anterior.

(b) 

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}$$

$$I = \begin{matrix} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) 

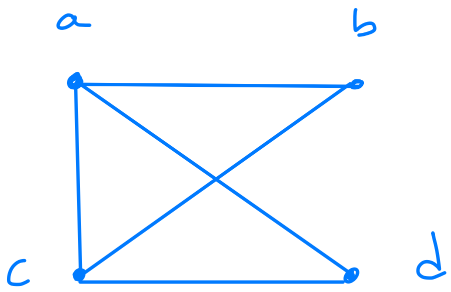
$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

$$I = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}$$

3. Desenhe um grafo que tenha como matriz de adjacência a matriz:

(a) $\begin{array}{cc} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \end{array}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

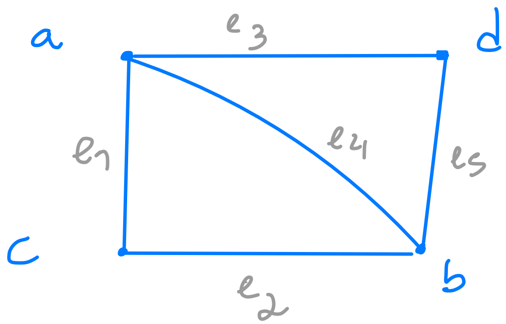
a)



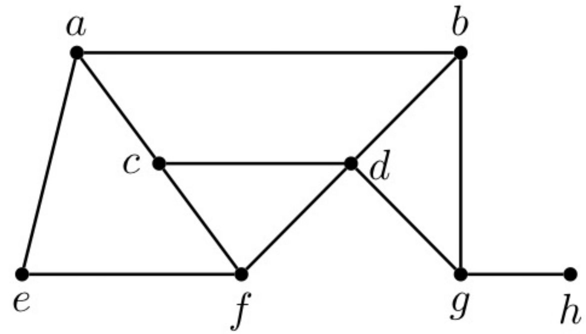
4. Desenhe um grafo que tenha como matriz de incidência a matriz:

(a) $\begin{array}{cc} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \end{array}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a)



5. Considere o seguinte grafo



(a) Indique um caminho de a a h que não seja simples.

(b) Indique um caminho simples de a a h que não seja elementar.

(c) Indique um caminho elementar de a a h.

(d) Indique um circuito de G que não seja ciclo.

(e) Indique um ciclo de G de comprimento 7.

(f) Verifique se os seguintes grafos são subgrafos de G:

i. $G_1 = (\{a, b, e, f\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{e, f\}\})$;

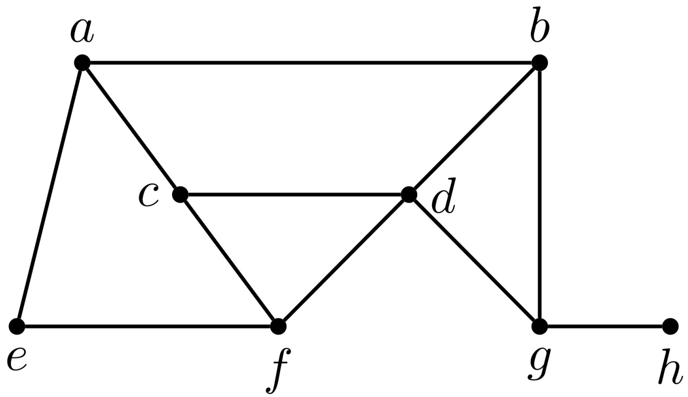
ii. $G_2 = (\{a, b, d, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, g\}, \{d, g\}, \{g, h\}\})$;

iii. $G_3 = (\{a, c, d, e, f\}, \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{e, f\}\})$.

(g) Determine o subgrafo de G induzido por cada um dos subconjuntos de vértices seguintes:

i. $\{a, b, c, d, e\}$; ii. $\{b, c, e, f, g\}$; iii. $\{b, c, e\}$.

a) Caminho simples: caminho sem arestas repetidas



$\langle a, e, f, a, e, f, d, g, h \rangle$

ou

$\langle a, e, f, d, g, b, d, g, h \rangle$

ou ...

b) caminho elementar: caminho sem vértices repetidos

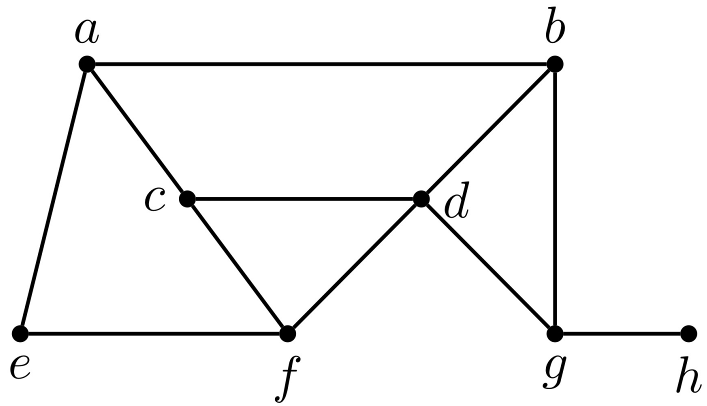
$\langle a, b, d, c, f, d, g, h \rangle$

ou $\langle a, e, f, c, a, b, g, h \rangle$ ou ...

c) $\langle a, b, g, h \rangle$ ou $\langle a, c, d, g, h \rangle$ ou $\langle a, e, f, d, g, h \rangle$

d) Circuito: caminho que começa e termina no mesmo vértice

ciclo: circuito que não repete vértices



$\langle a, e, f, c, d, f, c, a \rangle$

ou

$\langle a, b, d, f, d, c, a \rangle$

ou ...

e) $\langle a, b, g, d, c, f, e, a \rangle$

f) i) $G_1 = (\{a, b, e, f\}, \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{e, f\}\})$

Não é subgrafo uma vez que $\{a, f\}$ não aresta de G

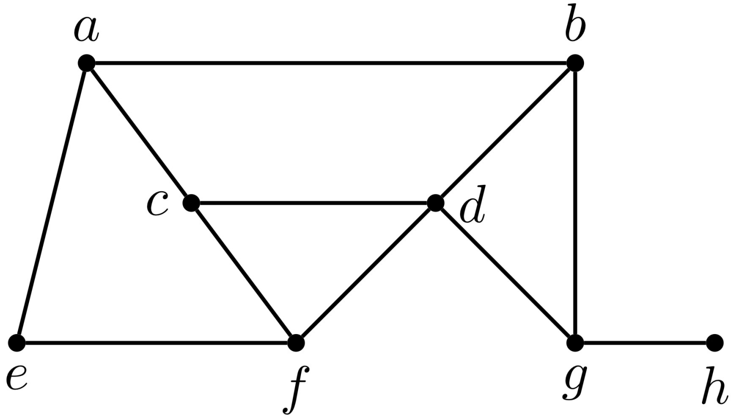
ii) $G_2 = (\{a, b, d, g, h\}, \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, g\}, \{d, g\}, \{g, h\}\})$

Não é subgrafo uma vez que $\{a, d\}$ não é aresta de G

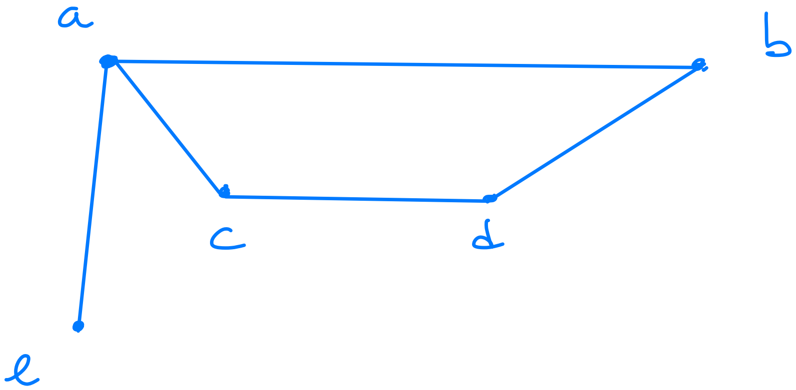
iii) $G_3 = (\{a, c, d, e, f\}, \{\{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{e, f\}\})$

É subgrafo de G.

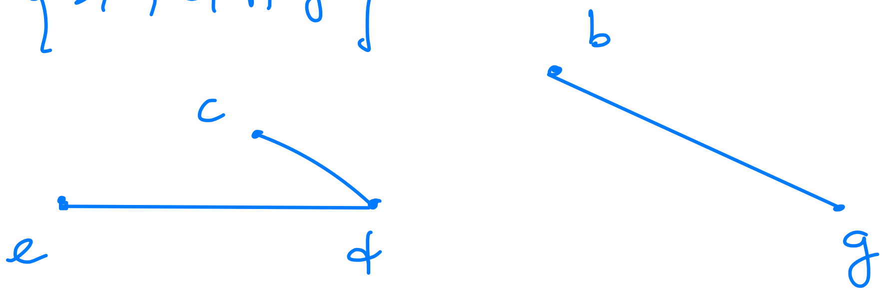
g)



i) $\{a, b, c, d, e\}$



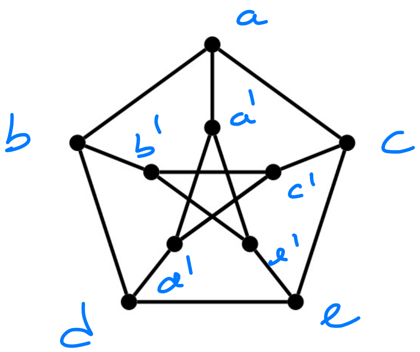
ii) $\{b, c, e, f, g\}$



iii) $\{b, c, e\}$

Grafo nulo

7. Considere o grafo de Petersen aqui apresentado



Determine

(a) um caminho simples de comprimento 5;

(b) um caminho elementar de comprimento 9;

(c) ciclos de comprimento 5, 6, 8 e 9.

a) caminho simples: sem arestas repetidas.
$\langle a, c, e, d, b, b' \rangle$

b) caminho elementar: sem vértices repetidos.
$\langle a, b, d, e, c, c', d', a', e', b' \rangle$

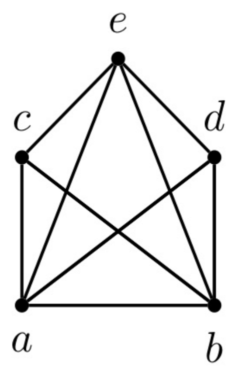
c) comprimento 5: $\langle a, b, d, e, c, a \rangle$

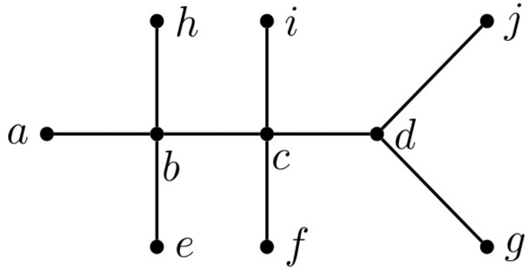
comprimento 6: $\langle a, a', e', b', c', c, a \rangle$

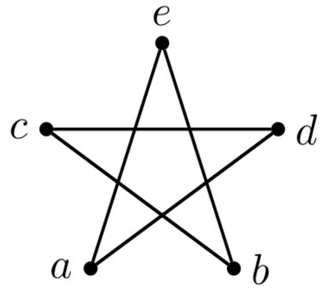
comprimento 8: $\langle c', d', a', e', b', b, a, c, c' \rangle$

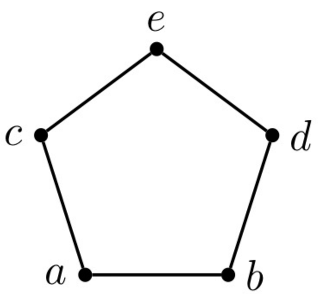
comprimento 9: $\langle c', d', a', e', b', b, d, e, c, c' \rangle$

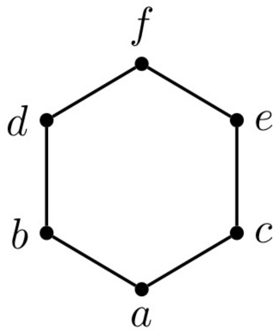
11. Dos seguintes grafos, diga quais são bipartidos, indicando uma partição do conjunto dos seus vértices

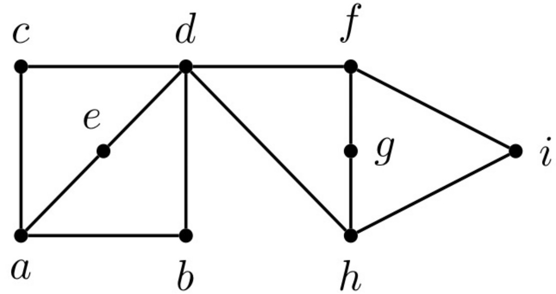
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

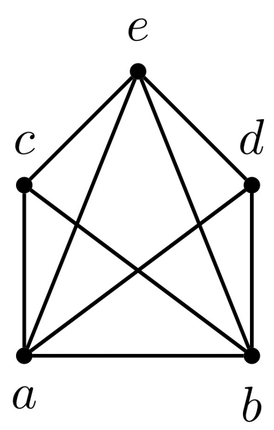
(f) 

Grafo bipartido: $G = (V, E)$

Existe uma partição $\{X, Y\}$ de V tal que os vértices de X só são adjacentes a vértices de Y e vice-versa.

Teorema: Um grafo é um bipartido sse não tem ciclos de comprimento ímpar

(a)



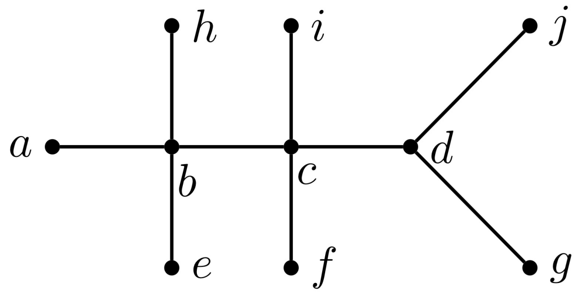
$X = \{a,$

$Y = \{b, c, e, d\}$

Não funciona!

Este grafo não é bipartido pois $\{a, b, c, a\}$ é um ciclo de comprimento ímpar

(b)

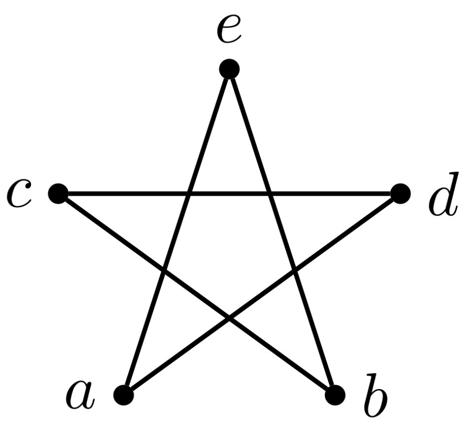


Este grafo é bipartido pois não tem ciclos (e portanto não tem ciclos de comp. ímpar)

$X = \{a, h, e, c, j, g\}$

$Y = \{b, i, f, d\}$

(c)



$X = \{a, b, c$

$Y = \{e, , d$

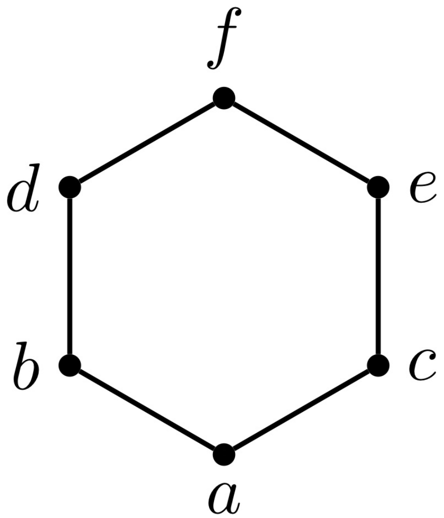
Não funciona!

O caminho $\langle a, e, b, c, d, a \rangle$

é um ciclo de comprimento 5 logo

o grafo não é bipartido.

(e)



Todos os ciclos deste grafo têm comprimento 6

logo o grafo é bipartido

$X = \{ a, d, e \}$

$Y = \{ b, c, f \}$

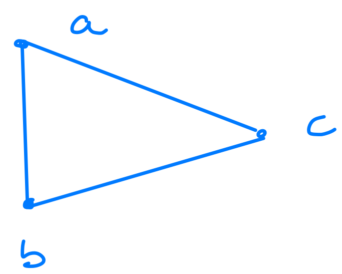
13. Dê exemplo, caso exista, de:

(a) um grafo sem vértices de grau ímpar;
(b) um grafo sem vértices de grau par;
(c) um grafo com exatamente um vértice de grau ímpar;
(d) um grafo com exatamente um vértice de grau par;
(e) um grafo com exatamente dois vértices de grau ímpar;
(f) um grafo com exatamente dois vértices de grau par.

a) G:

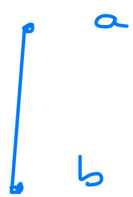
$\text{grau}(a) = 0$

G':



$\text{grau}(a) = \text{grau}(b) = \text{grau}(c) = 2$

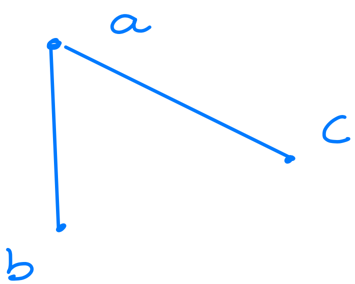
b) G:



$\text{grau}(a) = \text{grau}(b) = 1$

c) Teorema: Em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar é par
Logo tal grafo não existe

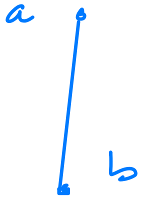
d)



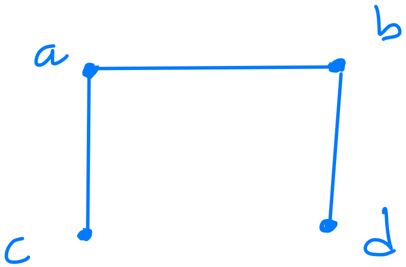
grau(a) = 2

grau(b) = grau(c) = 1

e)



f)



grau(a) = grau(b) = 2

grau(c) = grau(d) = 1

15. Qual o número mínimo de vértices de um grafo simples com 200 arestas? Porquê?

O grafo completo K_n é o grafo simples com n vértices e o maior número de arestas possível uma vez que quaisquer dois vértices são adjacentes. O grafo K_n tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas

Temos que K_{20} tem $\frac{20 \times 19}{2} = 190$ arestas

K_{21} tem $\frac{21 \times 20}{2} = 210$ arestas

Portanto para construir um grafo com 200 arestas e o número mínimo de vértices devemos tomar um grafo $G = (V, E)$ onde $\# V = 21$, digamos, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{20}, w\}$, o subgrafo gerado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_{20}\}$ é K_{20} e além disso grau$(w) = 10$, ou seja,

$$E = \{\{v_i, v_j\},\ i \neq j,\ i,j = 1 \ldots 20\} \cup \{\{w, v_k\},\ k = 1, \ldots, 10\}.$$