UNIVERSIDADE DO MINHO

Geometria

Curso: M. C. C. **Primeiro teste - 29 ABR 2023**

Nota. O teste é constituído por duas páginas, frente e verso. Justifique pormenorizadamente todas as respostas.

1. Seja X o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - y = 1 \quad \wedge \quad x - z = -1\}$$

   a) (2,5 val) Mostre que X é um subespaço afim de $\mathbb{R}^3$.

   b) (2,5 val) Determine a dimensão de X.

   c) (1 val) Escreva X na forma $X = a + F$, em que a é um ponto de X e F é o subespaço vetorial associado a X.

2. Designe por $A(E)$ o grupo de todos os isomorfismos afins de um espaço vetorial E (cf. com a proposição 2.2.6 das notas teóricas; recorde que a operação que se considera no grupo $A(E)$ é a composição de funções). Seja a um ponto arbitrário de E e denote por S o subconjunto de $A(E)$ constituído por todos os isomorfismos afins $\lambda : E \longrightarrow E$ tais que $\lambda(a) = a$. Simbolicamente,

$$S = \{\lambda \in A(E) : \ \lambda(a) = a\}$$

(ou, para uma leitura mais acessível,

$$S = \{\lambda : E \longrightarrow E, \ \ \lambda \text{ é isomorfismo afim}, \ \ \lambda(a) = a\}$$

   a) (1 val) Mostre que a aplicação identidade $\mathbf{Id} : E \longrightarrow E$ pertence a S.

   b) (2 val) Mostre que S é um subgrupo do grupo $A(E)$. Isto é, mostre que

      i)
$$\xi \in S \ \wedge \ \eta \in S \implies \xi \circ \eta \in S$$

      ii)
$$\lambda \in S \implies \lambda^{-1} \in S$$

- **Note que**:
  - $\xi \circ \eta$ é a composição de ξ com η
  - Seja $(G, \cdot)$ um grupo escrito em linguagem multiplicativa. Um subconjunto H de G diz-se um subgrupo de G se
    * $H \neq \varnothing$ (por exemplo, se $e \in H$, em que e denota o elemento neutro de $(G, \cdot)$)
    * $g \in H \ \wedge \ h \in H \implies g \cdot h \in H$
    * $g \in H \implies g^{-1} \in H$ $\quad$ (g^{-1} é o elemento oposto a g para a operação $\cdot$)

– O conjunto S, equipado com a operação de composição de funções, designa-se por grupo das simetrias de E relativas ao ponto a.

3. (2 val) Sejam E um espaço vetorial e F um subespaço vetorial de E. Seja $a \in E$ e considere o subespaço afim X de E definido por $X = a + F$. Mostre que a diferença de dois pontos de X é um vetor de F, isto é,

$$p \in X \quad \wedge \quad q \in X \quad \Longrightarrow \quad p - q \in F$$

4. (3 val) Sejam E um espaço vetorial e $\cdot \mid \cdot : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em E. Sejam u e v dois vetores de E tais que

$$u \neq 0_E \quad \wedge \quad v \neq 0_E \quad \wedge \quad u \mid v = 0$$

Mostre que o conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente.

5. Seja E um espaço vetorial.

a) (2 val) Seja $\cdot \mid \cdot : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno e considere em E a norma associada a este produto interno, que está definida por

$$\|x\| = \sqrt{x \mid x}$$

(compare com a definição 3.1.8 e o teorema 3.1.11 das notas teóricas). Mostre que esta norma satisfaz a regra do paralelograma, isto é,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

para quaisquer $x, y \in E$.

b) Seja $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma norma qualquer (não necessariamente associada a um produto interno em E) que satisfaça regra do paralelograma. Considere a seguinte aplicação

$$\cdot \mid \cdot : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x \mid y = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

Mostre que:

i) (1 val) $x \mid y = y \mid x$

ii) (1 val) $x \mid x \geq 0_{\mathbb{R}}$

iii) (1 val) $x \mid x = 0_{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow x = 0_E$

iv) (1 val) $\sqrt{x \mid x} = \|x\|$

Observação. Prova-se que esta aplicação é bilinear (esta demonstração não é trivial) e, portanto, esta aplicação é um produto interno em E. Tem-se então que uma norma está associada a um produto interno se, e só se, essa norma satisfaz a regra do paralelograma. A regra do paralelograma pode ser deduzida no quadro da geometria direta (geometria clássica) como consequência do teorema dos cossenos.

* * * **FIM** * * *

Sugestão para o exercício 4)

Considere uma combinação linear nula $0_E = \alpha u + \beta v$. Pretende-se verificar que $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$ e $\beta = 0_{\mathbb{R}}$. Para concluir que $\alpha = 0_{\mathbb{R}}$, note que $0_{\mathbb{R}} = 0_E \mid u$. Agora, substitua 0_E por $\alpha u + \beta v$. Aplique a bilinearidade do produto interno, a hipótese $u \mid v = 0$, a lei do anulamento do produto escalar num espaço vetorial e ainda o facto de o produto interno ser definido (axioma d na definição 3.1.1 das notas teóricas; este axioma d está descrito de forma mais intuitiva na alínea d logo após o parágrafo que começa por Notação). Analogamente, para concluir que $\beta = 0_{\mathbb{R}}$, note que $0_{\mathbb{R}} = 0_E \mid v \cdots$ e $\cdots$ já está feito.

Sugestão para o exercício 5-a)

Use os exercícios 7-a) e 7-c) das notas teóricas.

Sugestão para o exercício 5-b)

Continhas. No entanto, para a alínea 5-b)-i), recorde que um dos axiomas que caracterizam a definição de norma é: $\|\alpha z\| = |\alpha| \|z\|$. Em particular, tomando $\alpha = -1$, tem-se $\|-z\| = \|z\|$