

Primitivas e integrais indefinidos

A primitivação é uma operação efetuada num subconjunto do conjunto das funções reais de variável real e corresponde, num certo sentido, à operação inversa da operação de derivação.

Definição

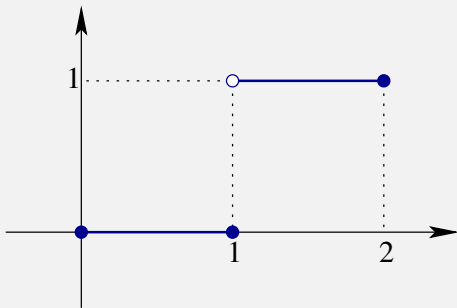
Seja X uma união finita de intervalos de \mathbb{R} . Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, diz-se que uma função $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **primitiva** de f se F for derivável e $F' = f$. Diz-se que a função f é **primitivável** se f admitir uma primitiva.

Exemplo

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + x^2$ é primitivável, visto que $F(x) = x + \frac{x^3}{3}$ é uma primitiva de f .

Exemplo

A função $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 0$ se $x \in [0, 1]$, $g(x) = 1$ se $x \in]1, 2]$ não é primitivável.



Nota

Recordar o Teorema de Darboux.

Exemplo

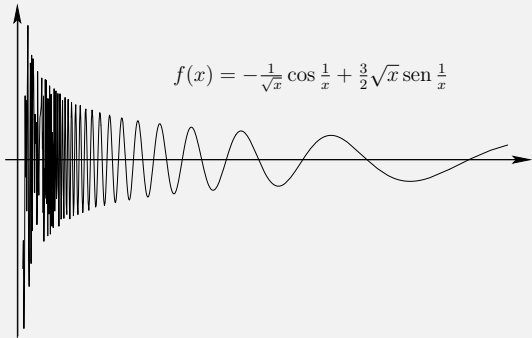
A função g do exemplo anterior é descontínua e não admite primitiva. Vejamos agora o exemplo de uma função descontínua que admite primitiva. A função

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

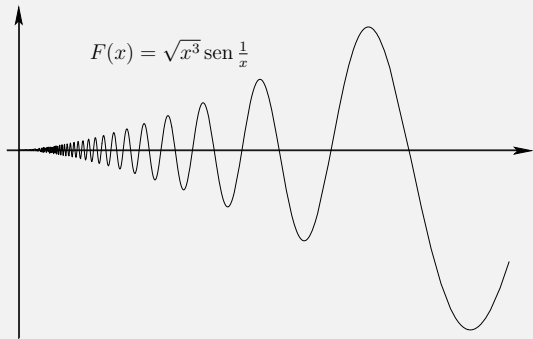
admite primitiva $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ \sqrt{x^3} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$



$$F(x) = \sqrt{x^3} \sin \frac{1}{x}$$



Nota

Veremos mais tarde que qualquer função contínua é primitivável.

Teorema

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} , $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de f . Então

$$G \text{ é primitiva de } f \iff \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad G(x) = F(x) + C.$$

Definição

Seja f uma função definida num intervalo, primitivável, e F uma sua primitiva. Ao conjunto de todas as primitivas de f chamamos **integral indefinido** de f e denotamo-lo por $\int f(x) dx$, escrevendo, normalmente,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Algumas propriedades dos integrais indefinidos

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} , $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções primitiváveis, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $f + g$ e λf são primitiváveis e:

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$
- $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$

Sejam I e J intervalos de \mathbb{R} , $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis e suponhamos que $g(J) \subseteq I$. Então f' e $(f' \circ g) \cdot g'$ são primitiváveis e:

- $\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R};$
- $\int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Integração imediata

- $\int 1 \, dx = x + C$
- $\int f'(x) \, dx = f(x) + C$
- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
- $\int f^\alpha(x) f'(x) \, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C$
- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int e^{f(x)} f'(x) \, dx = e^{f(x)} + C$

- $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
- $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$
- $\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln |\operatorname{sen} x| + C$
- $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$
- $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$
- $\int \operatorname{th} x \, dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C$
- $\int \operatorname{coth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x| + C$

Integração por partes

Teorema

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1 . Então é válida a seguinte

fórmula de integração por partes

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Integrais do tipo $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $n, m \in \mathbb{N}_0$

Vamos separar o cálculo dos integrais deste tipo em vários casos:

- se $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$ (isto é, n é ímpar) então

$$\int \sin^n x \cos^m x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x dx$$

que pode ser decomposto numa soma finita de integrais do tipo

$$a \int \sin x \cos^l x dx, \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ e } l \in \mathbb{N}_0,$$

integrais que são imediatos.

- se $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}_0$ (isto é, m é ímpar), procede-se de modo análogo, atribuindo à função \cos o papel atribuído à função \sin no item anterior;

- se $n = 2k$ e $m = 2l$, sendo $k, l \in \mathbb{N}_0$, não simultaneamente nulos, então, como

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2},$$

temos que

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cos^m x \, dx &= \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^l \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^k \left(\frac{\cos(2x) + 1}{2} \right)^l \, dx; \end{aligned}$$

O cálculo deste último integral reduz-se ao de uma soma de integrais do tipo dos do segundo ou do terceiro itens. Os do segundo item calculam-se imediatamente; para resolver os do terceiro item, nota-se que os expoentes são agora menores e procede-se do mesmo modo, isto é, utilizam-se as fórmulas de duplicação do ângulo. Obviamente, este processo termina necessariamente, chegando ou a integrais do tipo do segundo item ou a integrais do tipo $a \int \cos(2^r x) \, dx$.

Integração de frações racionais

Integração por substituição

Teorema

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} , $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite primitiva F . Sejam J um intervalo de \mathbb{R} e $\varphi : J \longrightarrow I$ uma função bijetiva, derivável, cuja derivada não se anula. Então $\Phi = F \circ \varphi$, é uma primitiva de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e é válida a seguinte

**fórmula de integração por
substituição ou mudança de variável**

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Integração por substituição

Nota

Para se calcular o integral $\int f(x) dx$, fazendo a mudança de variável $x = \varphi(t)$, procede-se do seguinte modo:

- 1 a função que nos dá a mudança de variável, φ , deve ser uma função regular (deve admitir, pelo menos, primeira derivada). Se a sua derivada for não nula num ponto, e se a derivada for contínua, podemos garantir que há um intervalo que contém o ponto onde a derivada não se anula. Admitimos assim que tudo é feito num certo intervalo onde as condições do teorema são verificadas;*
- 2 ao considerarmos a mudança de variável $x = \varphi(t)$ escrevemos que “ $dx = \varphi'(t) dt$ ”. Esta forma de escrever, aparentemente sem sentido, tem um significado matemático claro e a sua utilização permite simplificar alguns cálculos.*

Integrais do tipo $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$:

Faz-se a mudança de variável $x = a \operatorname{sen} t$ (ou $x = a \cos t$).

Integrais do tipo $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$:

Faz-se a mudança de variável $x = a \operatorname{sh} t$ (em certos casos também resulta a substituição $x = a \operatorname{tg} t$).

Integrais do tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) dx$:

Faz-se a mudança de variável $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Expressando $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ em função da variável t e dx em função de t e de dt , obtemos:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t;$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$