Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Álgebra Linear LCC | Teste 2 | 20/12/2019 | Duração: 2h | A

Proposta de resolução

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. O seguinte conjunto F é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   ☐ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y = z\}$.

   ☐ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y\}$.

   ☐ $F = \{(0, 0, 0), (0, 2, 0), (0, -2, 0)\}$.

   ☒ $F = \{(x, 2x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

2. Seja V um espaço vetorial real e $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ uma base de V.

   ☒ $(2\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ também é uma base de V.

   ☐ O vetor nulo $\mathbf{0}_V$ não pode escrever-se como combinação linear de $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$.

   ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente dependente.

   ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, 2\boldsymbol{v_1}\}$ não é um conjunto gerador de V.

3. Seja $S = \{(\alpha + \beta, \alpha - \beta, 2\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   ☒ $S = \langle (1, 1, 2), (1, -1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.

   ☐ S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1.

   ☐ $(1, 1, 1) \in S$.

   ☐ $S = \mathbb{R}^3$.

4. Seja $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear e A_f a matriz de f. Se $\operatorname{car}(A_f) = 3$, então

   ☒ $\mathsf{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

   ☐ f é sobrejetiva.

   ☐ $\mathsf{Nuc}(f)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1.

   ☐ f não é injetiva.

5. Sejam $A_g = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ as matrizes associadas às aplicações lineares g e h, respetivamente.

   ☐ As aplicações $g \circ h$ e $h \circ g$ estão ambas bem definidas.

   ☐ A aplicação αg, com $\alpha \in \mathbb{R}$, está bem definida e $\big(\alpha g\big)(1, 1, 1) = (2, 1, -1)$.

   ☐ A aplicação $h + g$ está bem definida e $\big(h + g\big)(1, 1, 1) = (2, 1, -1)$.

   ☒ A aplicação $g \circ h$ está bem definida e $\big(g \circ h\big)(1, 1) = (2, 1, -2)$.

6. Seja $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ o polinómio característico de uma dada matriz A. Então,

- [ ] A é invertível e 1 e $\frac{1}{2}$ são valores próprios de A^{-1}.
- [ ] o sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tem solução única.
- [ ] os valores próprios de A são 0, 1 e 2, com a mesma multiplicidade algébrica.
- [X] o sistema $(A-2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e indeterminado.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todas as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [3 valores] Considere os vetores $\boldsymbol{u}_1 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1,2)$ e $\boldsymbol{u}_4 = (-1,0,1,0)$ e o subespaço $S = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Verifique se os vetores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{u}_4$ são linearmente independentes. Qual a dimensão de S?

   (b) Determine os vetores $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ que pertencem a S.

   (c) Determine α de modo que o vetor $(1,-1,0,\alpha)$ pertença a S.

<u>Resolução.</u>

(a) Consideremos a matriz cujas linhas são os vetores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{u}_4$. Temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \longleftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 + l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 - l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a característica desta matriz é 3, os vetores são linearmente dependentes. Temos apenas 3 vetores linearmente independentes. Por exemplo, o conjunto $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ é linearmente independente e podemos escrever

$$S = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle.$$

Ou seja, $\dim(S) = 3$.

(b) Devemos discutir a existência de solução do sistema, nas incógnitas α, β e γ,

$$\alpha \boldsymbol{u}_1 + \beta \boldsymbol{u}_2 + \gamma \boldsymbol{u}_3 = (x,y,z,w).$$

Temos, então,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 2 & w \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & w \end{array}\right] \xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & w-z \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 - l_3]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & w-z-x \end{array}\right].$$

Se $w - z - x \neq 0$, o sistema é impossível; caso contrário, tem solução única. Assim, apenas quando $w - z - x = 0$ temos $(x, y, z, w) \in S$, ou seja,

$$S = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w - z - x = 0\right\} = \{(x, y, z, z + x) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Pela alínea anterior, $(x, y, z, w) = (1, -1, 0, \alpha) \in S$ quando

$$\alpha - 0 - 1 = 0,$$

ou seja, quando $\alpha = 1$.

2. [2.5 valores] Considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$g(a, b, c, d) = \begin{bmatrix} a & b+d \\ c-d & a \end{bmatrix}, \text{ para } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine um vetor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\boldsymbol{u} \neq (1, 1, 1, 1)$ e $g(\boldsymbol{u}) = g(1, 1, 1, 1)$.

(b) Determine uma base para $\mathsf{Nuc}(g)$ e uma base para $\mathsf{Im}(g)$.

Resolução.

(a) Temos $g(1, 1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. O vetor $\boldsymbol{u} = (a, b, c, d)$ deverá ser tal que $g(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, deveremos ter

$$\begin{bmatrix} a & b+d \\ c-d & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos, assim, o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + d = 2 \\ c - d = 0 \\ a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - d \\ c = d \\ a = 1 \end{cases}.$$

O sistema tem, portanto, uma infinidade de soluções cuja expressão geral é $(1, 2 - d, d, d)$, $d \in \mathbb{R}$. Por exemplo, para $d = 2$, obtemos a solução $(1, 0, 2, 2) = \boldsymbol{u}$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathsf{Nuc}(g) &= \left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : g(a,b,c,d) = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}\\
&= \left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix}a & b+d\\ c-d & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}\\
&= \left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a=0, b=-d, c=d\right\}\\
&= \{(0,-d,d,d) : d\in\mathbb{R}\} = \langle(0,-1,1,1,)\rangle
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,-1,1,1,)\}$ é uma base para $\mathsf{Nuc}(g)$ pois é linearmente independente.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Im}(g) &= \{g(a,b,c,d)\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a,b,c,d\in\mathbb{R}\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}a & b+d\\ c-d & a\end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ c & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & d\\ -d & 0\end{bmatrix} : a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\langle\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right\rangle
\end{aligned}$$

Repare-se que $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ e, assim,

$$\mathsf{Im}(g) = \left\langle\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\rangle$$

O conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e constitui, portanto, uma base para $\mathsf{Im}(g)$.

3. [2.5 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(1,1) = (1,3,1), \quad T(-1,1) = (-1,0,2).$$

(a) Determine $T(x,y)$, para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(b) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.

Resolução.

(a) Como o conjunto $\{(1,1),(-1,1)\}$ é linearmente independente, constitui uma base de $\mathbb{R}^2$, dado que $\dim(\mathbb{R}^2)=2$. Assim, o sistema, nas variáveis α e β,

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1)$$

tem solução única para qualquer vetor $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Temos, então,

$$\left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & x\\ 1 & 1 & y\end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & x\\ 0 & 2 & y-x\end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2/2]{} \left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & x\\ 0 & 1 & (y-x)/2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & (x+y)/2\\ 0 & 1 & (y-x)/2\end{array}\right].$$

A solução é, então, $(\alpha,\beta) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$ e, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a aplicação linear T fica definida por

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= T\left(\frac{x+y}{2}\cdot(1,1) + \frac{y-x}{2}\cdot(-1,1)\right) = \frac{x+y}{2}\cdot T(1,1) + \frac{y-x}{2}\cdot T(-1,1) \\
&= \frac{x+y}{2}\cdot(1,3,1) + \frac{y-x}{2}\cdot(-1,0,2) = \left(x, \frac{3}{2}(x+y), \frac{1}{2}(-x+3y)\right).
\end{aligned}$$

(b) Dado que $T(1,0) = (1, 3/2, -1/2)$ e $T(0,1) = (0, 3/2, 3/2)$, a matriz que representa T relativamente às bases canónicas é

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & 3/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}.$$

4. [3 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que os valores próprios de A são 2 e 4.
(b) Indique os valores próprios de $(A-5I)^3$.
(c) Determine a dimensão do subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A.
(d) Apresente, se possível, uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, com D diagonal.

<u>Resolução.</u>

(a) Os valores próprios de A são as soluções da equação $\det(A-\lambda I) = 0$. Temos

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = (4-\lambda)\big[(3-\lambda)(3-\lambda) - 1\big] \\
&= (4-\lambda)\big[(3-\lambda)^2 - 1\big]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) = 0 &\iff (4-\lambda)\big[(3-\lambda)^2-1\big] = 0 \iff 4-\lambda = 0 \ \vee \ (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \\
&\iff \lambda = 4 \ \vee \ (3-\lambda)^2 = 1 \iff \lambda = 4 \ \vee \ 3-\lambda = 1 \ \vee \ 3-\lambda = -1 \\
&\iff \lambda = 4 \ \vee \ \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 4
\end{aligned}$$

Logo, os valores próprios de A são 2, com multiplicidade algébrica 1, e 4, com multiplicidade algébrica 2.

(b) Os valores próprios de $(A-5I)^3$ são $(2-5)^3 = -27$ e $(4-5)^3 = -1$.

(c) O subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 4$, E_4, é o conjunto-solução do sistema $(A-4I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, com $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$. Usando o método de eliminação de Gauss para a resolução do sistema, vem

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, x_3 e x_2 são variáveis livres e, da primeira equação, obtemos $x_1 = -x_2$. O subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A, $\lambda = 4$, é, então, dado por

$$E_4 = \{(-x_2, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,1,0), (0,0,1) \rangle.$$

Uma vez que o conjunto $\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente, $\dim(E_4) = 2$.

(d) Determinemos o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 2$, E_2, ou seja, o conjunto-solução do sistema $(A - 2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, com $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Obtemos

$$E_2 = \{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-1,-1,1) \rangle.$$

A matriz P formada pelos vetores próprios $(-1,1,0)$, $(0,0,1)$ e $(-1,-1,1)$, vetores das bases de E_4 e E_2, em colunas,

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

é tal que $AP = PD$ onde $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e, como P é invertível (os vetores próprios são linearmente independentes),

$$AP = PD \iff P^{-1}AP = D.$$

5. [1.5 valores] Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Mostre que se $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ são vetores linearmente dependentes, então $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k) \in E'$ são também linearmente dependentes. A afirmação recíproca é verdadeira?

Resolução.

Se $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ são linearmente dependentes, então, por definição, existem constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ não todas nulas tais que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k = 0_E.$$

Assim,

$$f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_k u_k) = f(0_E)$$

e, como f é uma plicação linear, vem

$$\alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \ldots + \alpha_k f(u_k) = 0_{E'}$$

com constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ não todas nulas. Ou seja, $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k) \in E'$ são linearmente dependentes.

A afirmação recíproca é falsa. Podemos ter $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k) \in E'$ linearmente dependentes sem que $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ sejam linearmente dependentes. Por exemplo, se $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ for uma base de E, podemos definir f tal que

$$f(u_1) = f(u_2) = \ldots = f(u_k).$$

Ou seja, neste caso teremos que os vetores $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k)$ são linearmente dependentes e os vetores $u_1, u_2, \ldots, u_k$ linearmente independentes.