UNIVERSIDADE DO MINHO	
Geometria	
Curso: M. C. C.	**Primeiro teste - 26 Abr 2022**

Nota. O teste é constituído por duas páginas, frente e verso. Justifique pormenorizadamente todas as respostas.

1. Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno canónico. Seja $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por

$$\lambda(x, y) = (x + 1, y - 1)$$

   a) (1 val) Mostre que λ é uma isometria.

   b) (1 val) Determine o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e o isomorfismo ortogonal $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda = T_{(a,b)} \circ \varphi$$

   em que $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ designa a translação associada ao ponto (a, b).

2. Sejam E um espaço vetorial, não necessariamente euclidiano, e $a, b \in E$ dois vetores. Considere as translações

$$T_a : E \longrightarrow E \qquad \text{e} \qquad T_b : E \longrightarrow E$$

   associadas aos vetores a e b.

   a) (1 val) Mostre que $T_a \circ T_b = T_{a+b}$

   b) (1 val) Conclua que o grupo $T(E)$ de todas as translações de E é comutativo.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno canónico e seja X o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y + z = 1\}$$

   a) (1,5 val) Mostre que X é um espaço afim e escreva-o na forma $X = a + F$, em que a é um ponto de X e F é o subespaço vetorial associado a X.

   Nas alíneas seguintes, designe por $F^\perp$ o suplemento ortogonal de F. Recorde que

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$$

   b) (1,5 val) Determine uma base do subespaço vetorial F.

   c) (2 val) Determine o subespaço vetorial $F^\perp$, indicando uma base ortonormada deste subespaço.

   d) (1 val) Determine a projeção ortogonal sobre o subespaço vetorial $F^\perp$.

4. Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e F um subespaço vetorial de E. Considere a soma direta

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

Recorde que, para cada $x \in E$, existem vetores $u \in F$ e $v \in F^{\perp}$ únicos tais que

$$x = u + v$$

Considere a aplicação linear $\varphi : E \longrightarrow E$ definida por

$$\varphi(x) = \varphi(u + v) = u - v$$

a) (2 val) Determine **Ker** φ.

b) (1 val) Conclua que φ é um isomorfismo linear.

c) (2 val) Seja $x = u + v \in E$, em que $u \in F$ e $v \in F^{\perp}$. Mostre que

$$\|\varphi(x)\|^2 = \|x\|^2$$

d) (1 val) Mostre que φ é uma isometria.

e) (1 val) Conclua que φ é um isomorfismo ortogonal.

5. (1 val) Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormada de E e considere o vetor $u \in E$ definido do seguinte modo:

$$u = \varphi(e_1)e_1 + \cdots + \varphi(e_n)e_n$$

Mostre que

$$\varphi(x) = x \mid u \qquad \forall\, x \in E$$

6. (2 val) Sejam E um espaço vetorial, não necessariamente euclidiano, $\varphi : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear e F um subespaço vetorial de E. Sejam $a \in E$ e $T_a : E \longrightarrow E$ a translação associada ao vetor a. Considere a aplicação afim $\lambda : E \longrightarrow E$ definida por

$$\lambda = T_a \circ \varphi$$

Mostre que $\lambda(F)$ é um espaço afim.

$* * *$ **FIM** $* * *$