Tópicos Fundamentais de Matemática

(Licenciatura em Ciências da Computação)

3. Teoria Elementar de Conjuntos

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

2025/2026

3.1 Conceitos básicos

A noção de conjunto é uma noção fundamental na Matemática. O estudo de conjuntos (designado por **Teoria de Conjuntos**) foi introduzido por Georg Cantor, nos finais do século XIX. A teoria de Cantor, um tanto intuitiva, foi posteriormente tratada de uma forma axiomática.

A Teoria de Conjuntos revela-se, hoje, essencial não só em muitos campos da matemática, mas também noutras áreas como as Ciências da Computação.

Nesta unidade curricular, iremos considerar a noção de conjunto como um conceito primitivo, ou seja, como uma noção intuitiva, a partir da qual serão definidas outras noções.

Intuitivamente, um **conjunto** é uma coleção de objetos, designados **elementos** ou **membros** do conjunto.

exemplo:

São exemplos de conjuntos as coleções de:

i) *unidades curriculares do primeiro ano do plano de estudos de LCC;*

ii) *pessoas presentes nesta sala;*

iii) *estações do ano;*

iv) *todos os números naturais.*

Representamos os conjuntos por letras maiúsculas A, B, C, ..., X, Y, Z, eventualmente com índices.

Os elementos de um conjunto serão habitualmente representados por letras minúsculas a, b, c, ..., x, y, z, também eventualmente com índices.

definição:

Sejam A um conjunto e x um objeto.

Dizemos que x **pertence a** A, e escrevemos $x \in A$, se x é um dos objetos de A.

Caso x não seja um dos objetos de A, dizemos que x **não pertence a** A e escrevemos $x \notin A$.

exemplo:

Sejam A o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Temos, por exemplo, que $3 \in A$ e $1 \in B$.

Por outro lado, $1 \notin A$ e $3 \notin B$.

Um conjunto pode ser descrito de diversas formas.

definição de um conjunto por extensão:

Podemos descrever um conjunto enumerando explicitamente os seus elementos, colocando-os entre chavetas e separados por vírgulas.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por extensão**.

exemplo:

Se A é o conjunto de todos os números primos inferiores a 50 e B o conjunto de todas as soluções da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$, então A e B podem ser descritos por extensão do seguinte modo:

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$;

$B = \{-4, 1\}$.

Numa descrição por extensão, nem sempre é possível ou praticável a enumeração de todos os elementos. Nesse caso, utiliza-se uma notação sugestiva e não ambígua que permita intuir os elementos não expressos.

exemplo:

O conjunto dos números naturais é usualmente representado por extensão utilizando a seguinte notação:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

O conjunto dos números inteiros pode ser escrito por extensão recorrendo à seguinte notação:

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

definição de um conjunto por compreensão:

Podemos descrever um conjunto indicando um predicado $p(x)$, com domínio de variação U para a variável x, tal que os valores possíveis a em U para os quais $p(a)$ é verdadeira são exatamente os elementos do conjunto em causa.

Neste caso, dizemos que o conjunto é descrito **por compreensão**.

exemplo:

O conjunto dos números naturais menores do que 5 pode ser descrito, por extensão, por $\{1, 2, 3, 4\}$.

Em alternativa, podemos definir esse conjunto por compreensão como se segue:

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 5\}.$$

exercício:

Seja $X = \{-2, -\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$*. Indique os elementos de cada um dos seguintes conjuntos:*

i) $\{x \in X : x \in \mathbb{N}\}$;

ii) $\{x \in X : |x| < 2\}$;

iii) $\{x \in X : \sqrt{x} \in X\}$;

iv) $\{x \in X : x^2 \in X\}$;

v) $\{x^2 : x \in X\}$.

definição:

Ao único conjunto que não tem qualquer elemento chamamos **conjunto vazio**, e representamo-lo por $\emptyset$ ou por $\{\}$.

O conjunto vazio pode ser descrito por compreensão, recorrendo a um predicado que não possa ser satisfeito. Por exemplo,

$$\emptyset = \{n \in \mathbb{N} : n^2 = 28\} = \{x : x \neq x\}.$$

definição:

Dois conjuntos A e B dizem-se **iguais**, e escreve-se $A = B$, quando têm os mesmos elementos, ou seja, quando

$$\forall x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Quando existir um elemento num dos conjuntos que não pertence ao outro, diz-se que A e B são **diferentes**.

exemplo:

1) O conjunto de todos os divisores naturais de 4 é igual ao conjunto $A = \{1, 2, 4\}$ *e também é igual ao conjunto* $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0\}$.

2) Os conjuntos $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é múltiplo de } 3\}$ *e* $D = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ *são diferentes, pois, por exemplo,* $3 \in C$ *e* $3 \notin D$.

definição:

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está contido em** B ou que A **é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \subseteq B$, quando todo o elemento de A é também elemento de B, ou seja, quando

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in B).$$

Quando existir um elemento de A que não é elemento de B, ou seja, quando

$$\exists_x (x \in A \wedge x \notin B) \ ,$$

diz-se que A **não está contido em** B ou que A **não é um subconjunto de** B, e escreve-se $A \nsubseteq B$.

exemplo:

1) $\{-1, 1\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que tanto -1 como 1 são soluções da equação.*

2) $\{0, -1, 1\} \nsubseteq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que 0 não é solução da equação.*

definição:

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que A **está propriamente contido em** B ou que A **é um subconjunto próprio de** B, e escreve-se $A \subsetneq B$ ou $A \subset B$, quando $A \subseteq B$ e $A \neq B$, ou seja, quando

$$\forall_x \ (x \in A \rightarrow x \in B) \quad \wedge \quad \exists_{x \in B} \ x \notin A.$$

exemplo:

$\{-1, 1\} \subsetneq \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, *uma vez que, para além de 1 e -1, 2 também é solução da equação.*

proposição:

Sejam A, B e C conjuntos. Então,
1) $\emptyset \subseteq A$;
2) $A \subseteq A$;
3) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$;
4) $A = B$ se e só se ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$).

demonstração

1) Mostremos, por redução ao absurdo, que $\emptyset \subseteq A$. Nesse sentido, assumamos que $\emptyset \not\subseteq A$. Então, existe um elemento de $\emptyset$ que não pertence a A. Ora, $\emptyset$ não tem elementos. Esta contradição resultou de supormos que $\emptyset \not\subseteq A$. Logo, $\emptyset \subseteq A$.

2) Dado um elemento arbitrário a de A, é claro que $a \in A$. Logo,

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in A) \ ,$$

ou seja, $A \subseteq A$.

3) Suponhamos que $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, ou seja,

$$(*)\ \forall_x\ (x \in A \to x \in B) \qquad \text{e} \qquad (**)\ \forall_x\ (x \in B \to x \in C).$$

Pretendemos mostrar que $A \subseteq C$, isto é,

$$\forall_x\ (x \in A \to x \in C)\ .$$

Seja $x \in A$. Por $(*)$, podemos concluir que $x \in B$. Logo, de $(**)$, vem que $x \in C$. Assim, todo o elemento de A é elemento de C, ou seja, $A \subseteq C$.

4) Pretendemos mostrar a veracidade da equivalência $A = B$ se e só se $(A \subseteq B$ e $B \subseteq A)$. Iremos fazê-lo provando as duas implicações subjacentes.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $A = B$. Então,

$$\forall_x \ (x \in A \leftrightarrow x \in B),$$

ou, equivalentemente,

$$\forall_x \ ((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)) \qquad (*).$$

Comecemos por provar que $A \subseteq B$. Seja $x \in A$. Então, de $(*)$ –primeira parte da conjunção–, segue imediatamente $x \in B$.
Analogamente, prova-se que $B \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Exercício. $\square$

3.2 União, interseção e complementação de conjuntos

definição:

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X (dito o **universo**). Chama-se **união** ou **reunião de A com B**, e representa-se por $A \cup B$, o conjunto cujos elementos são os elementos de A e os elementos de B, ou seja,

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}.$$

exemplo:

1) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$*. Então,* $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*.*

2) Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$*. Então,* $C \cup D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \vee n \leq 10\}$*.*

Na proposição que se segue, apresentam-se algumas propriedades relativas à união de conjuntos.

proposição:

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1) $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$;
2) $A \cup \emptyset = A$;
3) $A \cup A = A$;
4) $A \cup X = X$;
5) $A \cup B = B \cup A$;
6) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
7) se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$.

demonstração:

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2, 4, 6 e 7. As restantes ficam como exercício.

1) Mostremos que $A \subseteq A \cup B$, ou seja, que

$$\forall_x \ (x \in A \to x \in A \cup B).$$

Seja $x \in A$. Então, é verdadeira a proposição $x \in A \vee x \in B$, pelo que $x \in A \cup B$. Logo,

$$x \in A \to x \in A \cup B$$

e, portanto, $A \subseteq A \cup B$.

A prova de $B \subseteq A \cup B$ é análoga.

2) Mostremos que $A \cup \emptyset = A$. Da propriedade 1, vem que $A \subseteq A \cup \emptyset$. Resta, pois, provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Seja $x \in A \cup \emptyset$. Então, $x \in A \vee x \in \emptyset$.

Ora, a proposição $x \in \emptyset$ é falsa, pois $\emptyset$ não tem elementos. Logo, podemos concluir que $x \in A$ e, portanto,

$$x \in A \cup \emptyset \to x \in A.$$

Por outras palavras, $A \cup \emptyset \subseteq A$.

Assim, $A \cup \emptyset = A$.

4) Provemos agora que $A \cup X = X$. Da propriedade 1, vem que $X \subseteq A \cup X$. Basta mostrar que $A \cup X \subseteq X$.

Seja $x \in A \cup X$. Então, $x \in A \vee x \in X$. Pretendemos mostrar que $x \in X$. Podemos dividir a prova em dois casos: (I) $x \in A$; (II) $x \in X$.

No caso (I), como A é um subconjunto de X, temos que todo o elemento de A é também elemento de X. Portanto, $x \in X$.

No caso (II), é imediato que $x \in X$.

Logo, é verdadeira a proposição $x \in A \cup X \to x \in X$, donde $A \cup X \subseteq X$ e, assim, $A \cup X = X$.

6) Mostremos que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Seja $x \in X$. Por definição de união de conjuntos,

$$x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C.$$

Uma vez que é válida a propriedade associativa para a disjunção, temos que:

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C).$$

Novamente pela definição de união de conjuntos, temos:

$$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C).$$

Logo, é verdadeira a proposição $x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$, pelo que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

7) Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cup B = B$. Da propriedade 1, vem que $B \subseteq A \cup B$. Falta, pois, provar que $A \cup B \subseteq B$.

Seja $x \in A \cup B$. Então, $x \in A \vee x \in B$. Podemos dividir a prova em dois casos:
(I) $x \in A$; (II) $x \in B$.

No caso (I), como A é um subconjunto de B, sabemos que todo o elemento de A é também elemento de B. Portanto, $x \in B$.

No caso (II), é imediato que $x \in B$.

Assim, $x \in A \cup B \rightarrow x \in B$.

Logo, $A \cup B \subseteq B$, pelo que $A \cup B = B$. $\square$

definição:

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Chama-se **interseção de A com B**, e representa-se por $A \cap B$, o conjunto cujos elementos pertencem a ambos os conjuntos A e B, ou seja,

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}.$$

exemplo:

1) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ *e* $B = \{3, 4, 5\}$. *Então,* $A \cap B = \{3\}$.

2) Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Então,* $C \cap D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Em seguida, apresentamos algumas propriedades relativas à interseção de conjuntos.

proposição

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1) $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$;
2) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
3) $A \cap A = A$;
4) $A \cap X = A$;
5) $A \cap B = B \cap A$;
6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
7) se $A \subseteq B$ então $A \cap B = A$.

demonstração:

Iremos demonstrar as propriedades 1, 2 e 7. As restantes ficam como exercício.

1) Mostremos que $A \cap B \subseteq A$, ou seja, que

$$\forall_x \ (x \in A \cap B \rightarrow x \in A).$$

Seja $x \in A \cap B$. Então, por definição de interseção de conjuntos, $x \in A \wedge x \in B$.

Logo, são verdadeiras ambas as proposições $x \in A$ e $x \in B$.

Em particular, $x \in A$ é uma proposição verdadeira.

Logo, $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ e, portanto, $A \cap B \subseteq A$.

A prova de $A \cap B \subseteq B$ é análoga.

2) Mostremos que $A \cap \emptyset = \emptyset$. Façamo-lo por redução ao absurdo, admitindo que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Então, existe um objeto x tal que $x \in A \cap \emptyset$.

Logo, $x \in A \wedge x \in \emptyset$. Em particular, $x \in \emptyset$. Mas $\emptyset$ não tem elementos, pelo que temos um absurdo, que resultou de supormos que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Assim, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

7) Admitamos que $A \subseteq B$ e mostremos que $A \cap B = A$. Da propriedade 1, vem que $A \cap B \subseteq A$. Falta, pois, provar que $A \subseteq A \cap B$.

Seja $x \in A$. Então, como $A \subseteq B$, podemos concluir que $x \in B$.

Logo, temos $x \in A \wedge x \in B$. Vimos, portanto, que é verdadeira a proposição $x \in A \rightarrow (x \in A \wedge x \in B)$, ou seja, $x \in A \rightarrow x \in A \cap B$.

Assim, $A \subseteq A \cap B$. $\square$

definição:

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Chama-se **complementar de** B **em** A, e representa-se por $A \setminus B$, o conjunto cujos elementos pertencem a A mas não pertencem a B, ou seja,

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

O complementar de B em A também se designa por **diferença de** A **com** B e representa-se por $A - B$.

Quando A é o universo X, o conjunto $A \setminus B = X \setminus B$ diz-se o **complementar de** B e representa-se por $\overline{B}$ ou B'.

exemplo:

1) *Sejam* $A = \{1,2,3\}$ *e* $B = \{3,4,5\}$. *Então,* $A \setminus B = \{1,2\}$.

2) *Sejam* $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ *e* $D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. *Então,*
$C \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par } \wedge n > 10\}\}$ *e* $\mathbb{N} \setminus D = \{n \in \mathbb{N} : n > 10\}$.

3) *Dados os subconjuntos de* $\mathbb{R}$ $E = \{-2, 0, 2, \pi, 7\}$ *e* $F =]-\infty, 3]$, *temos:*

i) $E \cup F =]-\infty, 3] \cup \{\pi, 7\}$;

ii) $E \cap F = \{-2, 0, 2\}$;

iii) $E \setminus F = \{\pi, 7\}$;

iv) $\overline{E \cup F} = [3, \pi[\cup]\pi, 7[\cup]7, +\infty[$.

Vejamos algumas propriedades relacionadas com a complementação.

proposição:

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Então,

1) $A \cap \overline{A} = \emptyset$ e $A \cup \overline{A} = X$;

2) $A \setminus \emptyset = A$ e $A \setminus X = \emptyset$;

3) se $A \subseteq B$, então $A \setminus B = \emptyset$;

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

5) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

6) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

7) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

8) $\overline{(\overline{A})} = A$.

demonstração: Iremos provar as propriedades 1, 2 e 5. As restantes ficam como exercício.

1) Comecemos por mostrar que $A \cap \overline{A} = \emptyset$ por redução ao absurdo. Suponhamos, pois, que existe $x \in A \cap \overline{A}$.

Então,

$$x \in A \wedge x \in \overline{A}.$$

Logo, por definição de complementar de um conjunto,

$$x \in A \wedge (x \in X \wedge x \notin A).$$

Daqui, por um lado, concluímos $x \in A$ e, por outro lado, $x \notin A$, o que é contraditório. Assim, não pode ser verdade que exista $x \in A \cap \overline{A}$, pelo que $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Verifiquemos, agora, que $A \cup \overline{A} = X$.

Dado $x \in A \cup \overline{A}$, temos $x \in A \vee x \in \overline{A}$. Temos, deste modo, dois casos a considerar: (I) $x \in A$; (II) $x \in \overline{A}$. Como A e $\overline{A}$ são subconjuntos de X, os elementos de cada um desses conjuntos são, ainda, elementos de X. Assim, em ambos os casos podemos afirmar que $x \in X$.

Portanto, $A \cup \overline{A} \subseteq X$.

Resta mostrar que $X \subseteq A \cup \overline{A}$. Nesse sentido, tomemos $x \in X$.

É claro que a proposição $x \in A \vee x \notin A$ é verdadeira. Ora, se $x \in X$ e $x \notin A$, então $x \in \overline{A}$.

Logo,

$$x \in X \to (x \in A \vee x \in \overline{A}),$$

ou seja,

$$x \in X \to x \in A \cup \overline{A}.$$

Portanto, $X \subseteq A \cup \overline{A}$ e a igualdade pretendida segue.

2) Comecemos por mostrar que $A \setminus \emptyset = A$.

Por definição, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A que não pertencem a $\emptyset$. Ora, nenhum elemento pertence a $\emptyset$.

Logo, $A \setminus \emptyset$ é o conjunto de todos os elementos de A, ou seja, $A \setminus \emptyset = A$.

No sentido de provar, por redução ao absurdo, que $A \setminus X = \emptyset$, tomemos $x \in A \setminus X$.

Então, x é tal que $x \in A \wedge x \notin X$.

Como A é um subconjunto de X,

$$x \in A \rightarrow x \in X.$$

Portanto, x é tal que $x \in X \wedge x \notin X$, uma contradição. Assim, $A \setminus X = \emptyset$.

5) Pretendemos mostrar que $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Precisamos, pois, de mostrar que é verdadeira a proposição: $x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Ora, pelas leis de De Morgan e pela propriedade distributiva da operação lógica $\wedge$ em relação à operação $\vee$, temos que:

$$\begin{aligned}
x \in A \setminus (B \cap C) & \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \cap C) \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg(x \in B) \vee \neg(x \in C)) \\
& \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\
& \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\
& \Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\
& \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \ .
\end{aligned}$$

Logo, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. $\square$

3.3 Conjunto potência

Vejamos, agora, outros processos para construir conjuntos a partir de conjuntos.

definição:

Seja A um conjunto. Chamamos **conjunto das partes de** A ou **conjunto potência de** A, que representamos por $\mathcal{P}(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A, ou seja,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

exemplo:

Sejam $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, \{2\}\}$, $C = \{1\}$, $D = \emptyset$, $E = \{a, b, c\}$. Então,
1) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
2) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1, \{2\}\}\}$
3) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}\}$
4) $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset\}$
5) $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

exemplo:

O conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tem uma infinidade de elementos.

Alguns exemplos de elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ são: $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\{n\}$ e $\{x \in \mathbb{N} : x \leq n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos naturais pares.

proposição:

Sejam A e B dois conjuntos. Então,

1) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$;

2) se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$;

3) se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

demonstração:

1) Para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$, pelo que $\emptyset$ e A são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

2) Suponhamos que $A \subseteq B$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, ou seja,

$$\forall X \ (X \in \mathcal{P}(A) \rightarrow X \in \mathcal{P}(B)).$$

Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Então, $X \subseteq A$.

Pela propriedade de transitividade de $\subseteq$ (slide 13), como $X \subseteq A$ e $A \subseteq B$, podemos concluir que $X \subseteq B$.

Logo, $X \in \mathcal{P}(B)$ e, portanto, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

3) Consultar bibliografia adequada.

3.4 Produto cartesiano de conjuntos

Dados dois objetos a e b, os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ são iguais, uma vez que têm exatamente os mesmos elementos. A ordem pela qual são listados os elementos não é importante.

Contudo, em certas situações, interessa considerar os objetos por determinada ordem. Para tal, recorremos ao conceito de par ordenado.

definição:

Dados dois objetos a e b, o **par ordenado de a e de b** será denotado por (a, b). Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) dizem-se **iguais**, escrevendo-se $(a, b) = (c, d)$, quando $a = c$ e $b = d$.

Note-se que, dados dois objetos a e b, se $a \neq b$, então $(a, b) \neq (b, a)$.

Num par ordenado (a, b), o objeto a é designado por **primeira coordenada** (ou **primeira componente**) e o objeto b é designado por **segunda coordenada** (ou **segunda componente**).

Os pares ordenados permitem-nos formar novos conjuntos a partir de conjuntos dados.

definição:

Sejam A e B conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$ diz-se o **produto (cartesiano) de A por B** e representa-se por $A \times B$. Ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

exemplo:

1) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Então,

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

É claro que $A \times B \neq B \times A$.

2) Sejam $C = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e $D = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Então,

$$C \times D = \{(2n, 2m + 1) : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

3) Sejam $E = F = \mathbb{R}$. Os elementos de $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ podem ser representados geometricamente como pontos de um plano munido de um eixo de coordenadas.

A noção de produto cartesiano de dois conjuntos generaliza-se de forma natural:

definição:

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos ($n \geq 2$). O *produto (cartesiano) de* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, notado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto dos n–**úplos ordenados** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em que $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\big\}.$$

Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, escrevemos A^n em alternativa a $A \times A \times \ldots \times A$.

observação:

Dois n–úplos ordenados $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são iguais se e somente se $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$ e $\ldots$ e $a_n = b_n$.

exemplo:

Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{7\}$. Temos que

$$A \times B \times C = \big\{(4,1,7), (4,2,7), (4,3,7), (5,1,7), (5,2,7), (5,3,7)\big\}$$

e

$$A^2 = \big\{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\big\}.$$

Vejamos algumas propriedades relacionadas com o produto cartesiano.

proposição:

Sejam A, B, C e D conjuntos. Então,

1) $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$;

2) $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$;

3a) $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

3b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

4a) $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

4b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

5a) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

5b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

demonstração:

2) Pretendemos mostrar que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ se e só se $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ e procuremos provar que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

Sejam $a \in A$ e $b \in B$. Então, por definição de produto cartesiano, $(a, b) \in A \times B$.

Por hipótese, todo o elemento de $A \times B$ é elemento de $C \times D$.

Portanto, $(a, b) \in C \times D$, pelo que $a \in C$ e $b \in D$.

Provámos, assim, que são verdadeiras as proposições

$$i)\ \forall_a\ (a \in A \rightarrow a \in C) \quad \text{e} \quad ii)\ \forall_b\ (b \in B \rightarrow b \in D),$$

ou seja, $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, admitamos que $A \subseteq C$ e $B \subseteq D$ e mostremos que $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Seja $(a, b) \in A \times B$. Então, por definição de produto cartesiano, $a \in A$ e $b \in B$.

Por hipótese, todo o elemento de A é elemento de C e todo o elemento de B é elemento de D.

Logo, $a \in C$ e $b \in D$ e, portanto, $(a, b) \in C \times D$. Assim,

$$\forall_{a,b}\ ((a, b) \in A \times B \to (a, b) \in C \times D)$$

e, portanto, $(A \times B) \subseteq (C \times D)$.

5a) Pretendemos mostrar que $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$.

Dado um par ordenado (x, y),

$$\begin{array}{rcl}
(x, y) \in (C \times A) \setminus (C \times B) & \Leftrightarrow & (x, y) \in C \times A \wedge (x, y) \notin C \times B \\
& \Leftrightarrow & (x \in C \wedge y \in A) \wedge (x \notin C \vee y \notin B) \\
& \Leftrightarrow & ((x \in C \wedge y \in A) \wedge x \notin C) \vee \\
& & \vee((x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B) \\
& \Leftrightarrow & (x \in C \wedge y \in A) \wedge y \notin B \\
& \Leftrightarrow & x \in C \wedge (y \in A \wedge y \notin B) \\
& \Leftrightarrow & x \in C \wedge y \in (A \setminus B) \\
& \Leftrightarrow & (x, y) \in C \times (A \setminus B)
\end{array}$$

A demonstração das restantes propriedades fica ao cuidado dos alunos. $\square$

observação: se os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ têm $p_1, p_2, \ldots, p_n$ elementos, respetivamente, o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ tem $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ elementos.

3.5 Famílias de conjuntos e uniões e interseções generalizadas

observação: considerem-se n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, com $n \geq 2$. Tendo em conta que as operações de união e de interseção de conjuntos gozam da propriedade associativa, podemos escrever sem ambiguidade

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

e

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

A união dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é usualmente notada por $\displaystyle\bigcup_{i\in\{1,\ldots n\}} A_i$ ou $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ e a interseção por $\displaystyle\bigcap_{i\in\{1,\ldots n\}} A_i$ ou $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Assim,

$$\bigcup_{i\in\{1,\ldots n\}} A_i = \big\{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\big\} = \big\{x : \exists_{i\in\{1,\ldots,n\}}\, x \in A_i\big\}$$

e

$$\bigcap_{i\in\{1,\ldots n\}} A_i = \big\{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\big\} = \big\{x : \forall_{i\in\{1,\ldots,n\}}\, x \in A_i\big\}.$$

As ideias anteriores podem ser generalizadas, com recurso ao conceito de **família de conjuntos**.

definição:

Uma *família de conjuntos* $\mathcal{F}$ é dada por um conjunto não vazio I (chamado o *conjunto de índices*) e por uma coleção de conjuntos, onde a cada índice $i \in I$ é associado um conjunto A_i. Tal família de conjuntos é habitualmente denotada por:

$$\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}.$$

observação:

Numa família de conjuntos, o conjunto de índices I pode ser finito ou infinito. Quando é finito e tem n elementos, é usual escrever-se $I = \{1, 2, ..., n\}$.

exemplo:

Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja

$$A_i = \{x \in \mathbb{N} : x \leq i\}.$$

Então:

a) $\mathcal{F}_1 = (A_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ é uma família constituída por 3 conjuntos, designadamente $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1, 2\}, A_3 = \{1, 2, 3\}$;

b) $\mathcal{F}_2 = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma família constituída por uma infinidade de conjuntos (um conjunto para cada número natural).

definição:

Seja $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos.

a) A *união dos conjuntos da família* é notada por $\bigcup \mathcal{F}$ ou por $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$

e é dada por:

$$\left\{x : \exists_{i \in I}\, x \in A_i\right\} \;;$$

b) A *interseção dos conjuntos da família* é notada por $\bigcap \mathcal{F}$ ou por $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$

e é dada por:

$$\left\{x : \forall_{i \in I}\, x \in A_i\right\} \;.$$

exemplo:

Considerem-se de novo as famílias de conjuntos $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ do exemplo anterior. Então:

a) $\bigcup \mathcal{F}_1 = \bigcup\limits_{i\in\{1,2,3\}} A_i = \{1,2,3\}$, b) $\bigcap \mathcal{F}_1 = \bigcap\limits_{i\in\{1,2,3\}} A_i = \{1\}$,

c) $\bigcup \mathcal{F}_2 = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$, d) $\bigcap \mathcal{F}_2 = \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{1\}$.

observação:

Muitas das propriedades da união e da intersecção de dois conjuntos podem ser facilmente generalizadas à união e à interseção de famílias de conjuntos.

Por exemplo, dada uma família de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$:

para todo $k \in I$, a) $A_k \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ e b) $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq A_k$.

3.6 Partições de conjuntos

definição:

Seja A um conjunto. Uma **partição de** A é um conjunto Π de subconjuntos não vazios de A, disjuntos dois a dois e cuja união é A, ou seja, quando:

i) $\forall_{X \in \Pi} \, (X \subseteq A \wedge X \neq \varnothing)$;

ii) $\forall_{X,Y \in \Pi} \, (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing)$;

iii) $\displaystyle\bigcup_{X \in \Pi} X = \{x : \exists_{X \in \Pi} \, x \in X\} = A$.

Os elementos de Π são chamados **blocos da partição** Π.

observação:

Para qualquer conjunto A não vazio, ambos os conjuntos a) $\{A\}$ e b) $\{\{x\} : x \in A\}$ são partições de A.

exemplo:

1) Seja $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Então

$$\Pi_1 = \{\{1, 5\}, \{3, 9\}, \{7\}\}$$
$$\Pi_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{7, 9\}\}$$
$$\Pi_3 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}\}$$

são partições de A;

$$\Pi_4 = \{\{1, 3, 5\}, \{9\}\}$$
$$\Pi_5 = \{\{1, 5, 7, 9\}, \{3, 5\}\}$$
$$\Pi_6 = \{\{1, 3\}, \{5, 7\}, \varnothing, \{9\}\}$$

não são partições de A.

2) O conjunto $\{\mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+\}$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

3) Seja $A_0 = \{0\}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \{n, -n\}$. Então, o conjunto $\Pi = \{A_i : n \in \mathbb{N}_0\}$ é uma outra partição de $\mathbb{Z}$.

4) Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja $A_x = \{(x, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Então, o conjunto $\Pi = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$ é uma partição de $\mathbb{R}^2$.

observação:

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in I}$ em que cada A_i é não vazio, se os conjuntos da família forem disjuntos dois a dois (ou seja, para todo $i, j \in I$ tais que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$), então $\{A_i : i \in I\}$ é uma partição de $\bigcup \mathcal{F}$.