
Nome: _____ N.º _____ Curso: _____

*Responda às questões 1 e 2 na folha de teste. Responda à questão 3 neste enunciado.
Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e as funções do R que utilizar.
O teste tem a duração de 2 horas.*

1. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ k & \text{se } \frac{1}{4} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se c.c.} \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

- (a) Mostre que $k = \frac{5}{6}$.
 - (b) Determine a função de distribuição de X e esboce o seu gráfico.
 - (c) Determine os quartis de X .
 - (d) Seja Y uma v.a.r. tal que X e Y são i.i.d.'s.
 - i. Calcule $P(X > \frac{1}{4} \cup Y < \frac{1}{4})$.
 - ii. Determine a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) .
 - iii. Calcule $P(Y \leq X, Y \leq \frac{1}{4})$.
2. Seja Z a v.a.r. que representa a quantidade vendida diariamente (em kg) de um certo produto numa determinada empresa. Sabe-se que Z é uma v.a.r. absolutamente contínua, que segue uma lei Uniforme e que:
- a probabilidade de, num dia, se vender no máximo 3 kg do produto é igual a $\frac{1}{2}$.
 - a probabilidade de, num dia, se vender pelo menos 4 kg deste produto é igual a $\frac{1}{4}$.
- (a) Mostre que $Z \sim U([1, 5])$.
 - (b) Mostre, usando a definição, que $E[Z]$ e $Var[Z]$ existem. Mostre ainda que

$$E[Z] = 3 \text{ e } Var[Z] = \frac{4}{3}.$$

- (c) Determine a probabilidade de, em 10 dias de vendas, haver um dia em que se vende menos de 1.5kg e de haver pelo menos 8 dias em que se vende mais de 3kg.
- (d) Determine a probabilidade de, em 100 dias de vendas, se vender no total mais de 350 kg.
- (e) Sabendo que, por cada kg vendido, esta empresa tem um lucro de 5 Euros, determine:
 - i) $E[L]$ e $Var[L]$, sendo L a v.a.r. que representa o lucro diário obtido com a venda deste produto;
 - ii) $E[T]$ e $Var[T]$, sendo T a v.a.r. que representa o lucro total obtido com a venda deste produto ao fim de 10 dias de vendas.

Observação: Quando for necessário, assuma que as quantidades vendidas em dias distintos são independentes.

(v.s.f.f.)

3. Recorde que se X é uma v.a.r. discreta e é tal que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com $\lambda \in \mathbb{R}^+$, então

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

- (a) Seja X uma v.a.r. tal que $X \sim \text{Poisson}(2)$. Determine, usando a definição, os quartis X .
(b) Considere X_1, X_2, \dots, X_n v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i), i \in \{1, \dots, n\}$.
Mostre que

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

- (c) Calcule $P(X_1 + X_2 \geq 2)$, sendo X_1 e X_2 v.a.r.'s, i.i.d.'s com lei $\text{Poisson}(2)$.