1.2. Semântica do Cálculo Proposicional clássico

Definição 36: Os *valores lógicos* do CP são *verdade* e *falsidade* e são habitualmente notados por 1 e 0 ou **V** e **F**, respetivamente.

O significado do conetivo $\neg$ é dado pela função

$$\begin{array}{rcl} v_\neg : \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 0 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

O significado do conetivo $\wedge$ é dado pela função

$$\begin{array}{rcl} v_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (1,1) & \longmapsto & 1 \\ (1,0) & \longmapsto & 0 \\ (0,1) & \longmapsto & 0 \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

O significado do conetivo $\vee$ é dado pela função

$$\begin{array}{rcl} v_{\vee} : \{0,1\} \times \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (1,1) & \longmapsto & 1 \\ (1,0) & \longmapsto & 1 \\ (0,1) & \longmapsto & 1 \\ (0,0) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

O significado do conetivo $\rightarrow$ é dado pela função

$$\begin{array}{rcl} v_{\rightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (1,1) & \longmapsto & 1 \\ (1,0) & \longmapsto & 0 \\ (0,1) & \longmapsto & 1 \\ (0,0) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

O significado do conetivo $\leftrightarrow$ é dado pela função

$$\begin{array}{rcl} v_{\leftrightarrow} : \{0,1\} \times \{0,1\} & \longrightarrow & \{0,1\} \\ (1,1) & \longmapsto & 1 \\ (1,0) & \longmapsto & 0 \\ (0,1) & \longmapsto & 0 \\ (0,0) & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Definição 37: Uma *valoração* é uma função $v : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $v(\perp) = 0$;

b) $v(\neg\varphi) = v_{\neg}(v(\varphi))$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

c) $v(\varphi \square \psi) = v_{\square}((v(\varphi), v(\psi)))$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Proposição 38: Sejam v uma valoração e φ, ψ fórmulas do CP. Então:

1. $v(\neg\varphi) = 1$ sse não é verdade que $v(\varphi) = 1$;
2. $v(\varphi \wedge \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$;
3. $v(\varphi \vee \psi) = 1$ sse $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$;
4. $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ sse (se $v(\varphi) = 1$ então $v(\psi) = 1$);
5. $v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ sse ($v(\varphi) = 1$ se e só se $v(\psi) = 1$).

Dem.: Imediata, a partir da definição de valoração. $\square$

Definição 39: O *valor lógico de uma fórmula φ para uma valoração v* é $v(\varphi)$.

Dada uma fórmula arbitrária φ, a relação entre o valor lógico de φ e o valor lógico de $\neg\varphi$ pode ser representada através da seguinte tabela:

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

Dadas duas fórmulas φ e ψ, a relação entre os valores lógicos de φ e ψ e o valor lógico de $\varphi \wedge \psi$ pode ser representada através da seguinte tabela:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Dadas duas fórmulas φ e ψ, a relação entre os valores lógicos de φ e ψ e o valor lógico de $\varphi \vee \psi$ pode ser representada através da tabela:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e a relação entre os valores lógicos de φ e ψ e o valor lógico de $\varphi \rightarrow \psi$ pode ser representada através da seguinte tabela:

φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Dadas duas fórmulas φ e ψ, a relação entre os valores lógicos de φ e ψ e o valor lógico de $\varphi \leftrightarrow \psi$ pode ser representada através da seguinte tabela:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

O Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP dá-nos a garantia de que uma valoração fica totalmente definida se conhecermos as imagens das variáveis proposicionais.

Proposição 40: Seja $f : \mathcal{V}^{CP} \longrightarrow \{0,1\}$ uma função. Então, existe uma e uma só valoração v tal que $v(p) = f(p)$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Dem.: Consequência imediata do Princípio de recursão estrutural para fórmulas do CP. □

Exemplo 41: Sejam v_1 a única valoração tal que $v_1(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$, e v_2 a única valoração tal que

$$v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_0, p_2\} \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p_0, p_2\} \end{cases} .$$

Sejam ainda $\varphi = (p_1 \vee p_2) \longrightarrow (p_1 \wedge p_2)$ e $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \longrightarrow \perp)$. Então:

a) por definição de valoração,

$$v_1(\varphi) = \begin{cases} 0 \text{ se } v_1(p_1 \vee p_2) = 1 \text{ e } v_1(p_1 \wedge p_2) = 0 \\ 1 \text{ se } v_1(p_1 \vee p_2) = 0 \text{ ou } v_1(p_1 \wedge p_2) = 1 \end{cases}.$$

Assim, como $v_1(p_1 \vee p_2) = v_\vee((v_1(p_1), v_1(p_2))) = v_\vee((0,0)) = 0$, segue que $v_1(\varphi) = 1$.

[Exercício: verifique que $v_2(\varphi) = 0$.]

b) por definição de valoração,

$$v_1(\psi) = \begin{cases} 1 \text{ se } v_1(\neg p_1) = v_1(p_1 \longrightarrow \perp) \\ 0 \text{ se } v_1(\neg p_1) \neq v_1(p_1 \longrightarrow \perp) \end{cases}.$$

Assim, como

$$v_1(\neg p_1) = v_\neg(v_1(p_1)) = v_\neg(0) = 1$$

e

$$\begin{array}{rcl} v_1(p_1 \to \bot) & = & v_\to((v_1(p_1), 0)) \\ & = & v_\to((0, 0)) \\ & = & 1, \end{array}$$

segue que $v_1(\psi) = 1$.

[Exercício: verifique que $v_2(\psi) = 1$; em particular, observe que v_2 e v_1 atribuem o mesmo valor lógico à única variável proposicional que ocorre em ψ.]

Proposição 42: Sejam v_1 e v_2 valorações e seja φ uma fórmula do CP. Se, para todo $p \in var(\varphi)$, $v_1(p) = v_2(p)$, então $v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

Dem.: Por indução estrutural em fórmulas do CP.

Seja $P(\varphi)$ a propriedade:
para todo $p \in var(\varphi), v_1(p) = v_2(p) \Rightarrow v_1(\varphi) = v_2(\varphi)$.

a) $P(\bot)$ é verdadeira, pois $v_1(\bot) = 0 = v_2(\bot)$, por definição de valoração.

b) Suponhamos que p' é uma variável proposicional e que, para todo $p \in var(p')$, $v_1(p) = v_2(p)$. Assim, como $p' \in var(p')$, temos $v_1(p') = v_2(p')$. Deste modo, para qualquer $p' \in \mathcal{V}^{CP}$, $P(p')$ é verdadeira.

c) Mostremos que $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$ implicam $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, para todos $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$.
Começamos por assumir $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, como hipóteses de indução.
Suponhamos que, para todo $p \in var(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $v_1(p) = v_2(p)$.
Então, como $var(\varphi_i) \subseteq var(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, temos $v_1(p) = v_2(p)$, para todo $p \in var(\varphi_i)$ $(i \in \{1,2\})$ e, aplicando as hipóteses de indução $P(\varphi_1)$ e $P(\varphi_2)$, segue que $v_1(\varphi_i) = v_2(\varphi_i)$ $(i \in \{1,2\})$.
Assim, $v_1(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = v_\wedge((v_1(\varphi_1), v_1(\varphi_2))) = v_\wedge((v_2(\varphi_1), v_2(\varphi_2))) = v_2(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, e, portanto, $P(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ é verdadeira.

d) Exercício: demonstrar as restantes condições necessárias à aplicação do Princípio de indução estrutural para fórmulas do CP.

$\square$

Observação 43: Pela Proposição 42, para estudar o valor lógico de uma fórmula φ para uma dada valoração v, basta conhecer o valor lógico, para v, das variáveis proposicionais que ocorrem em φ.

Para estudar os possíveis valores lógicos de φ para as diferentes valorações, podemos recorrer a uma *tabela de verdade*, como se segue: Introduzimos uma coluna para cada variável proposicional de φ; uma coluna para φ; e colunas (auxiliares) para cada uma das restantes subfórmulas de φ. Introduzimos linhas para cada uma das atribuições, possíveis, de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ (i. e., sequências de 0's e 1's de comprimento igual ao número de variáveis proposicionais em φ). Preenchemos as colunas respeitantes às variáveis proposicionais com essas atribuições. Nas restantes posições pos_{ij} da tabela, escrevemos o valor lógico da fórmula respeitante à coluna j, para uma valoração que satisfaz as atribuições às variáveis proposicionais na linha i.

Exemplo 44: Queremos estudar os possíveis valores lógicos da fórmula $\varphi = \neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.

Nesta fórmula ocorrem duas variáveis proposicionais, p_0 e p_1, pelo que se torna necessário considerar todas as combinações possíveis dos valores lógicos de p_0 e p_1.

Como cada variável pode assumir um de dois valores lógicos (0 ou 1), existem 2^2 combinações possíveis. Logo, a tabela de verdade de φ terá 4 linhas:

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

Definição 45: Seja v uma valoração.

1. Dizemos que *v satisfaz uma fórmula do CP φ*, e escrevemos v sat. φ, quando $v(\varphi) = 1$. Quando *v não satisfaz φ*, i. e., quando $v(\varphi) = 0$, escrevemos v não sat. φ.

2. Dizemos que *v satisfaz um conjunto de fórmulas do CP Γ*, e escrevemos v sat. Γ, quando v satisfaz todas as fórmulas de Γ. Quando *v não satisfaz Γ*, i. e., quando existe $\varphi \in \Gamma$ t. q. v não sat. φ ou, equivalentemente, quando existe $\varphi \in \Gamma$ t. q. $v(\varphi) = 0$, escrevemos v não sat. Γ.

Definição 46: Uma fórmula φ do CP diz-se *satisfazível* quando existe pelo menos uma valoração que satisfaz φ.

Exemplo 47: Seja v_0 a valoração que atribui o valor lógico 0 a todas as variáveis proposicionais.

1. v_0 sat. $p_1 \leftrightarrow p_2$ e v_0 sat. $\neg p_1 \wedge \neg p_2$;
2. v_0 não sat. $p_1 \vee p_2$ e v_0 não sat. $p_1 \leftrightarrow \neg p_2$;
3. v_0 sat. $\{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ (por 1.);
4. v_0 não sat. $\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2.ª fórmula);
5. v_0 não sat. $\{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ (v_0 não satisfaz a 2.ª fórmula);
6. As fórmulas $p_1 \leftrightarrow p_2$ e $\neg p_1 \wedge \neg p_2$ são satisfazíveis (por 1.).

Observação 48: Dado que no conjunto vazio não há qualquer fórmula, tem-se, trivialmente, que, para toda a valoração v, v sat. $\emptyset$.

Observação 49: Dadas uma valoração v e duas fórmulas φ e ψ do CP,

1. v sat. $\neg\varphi$ se e só se v não sat. φ;
2. v sat. $\varphi \wedge \psi$ se e só se v sat. φ e v sat. ψ.;
3. v sat. $\varphi \vee \psi$ se e só se v sat. φ ou v sat. ψ.;
4. v sat. $\varphi \to \psi$ se e só se v não sat. φ ou v sat. ψ.;
5. v sat. $\varphi \leftrightarrow \psi$ se e só se (v sat. φ e v sat. ψ.) ou (v não sat. φ e v não sat. ψ.).

Definição 50:

1. Uma fórmula φ é uma *tautologia* quando, para qualquer valoração v, v sat. φ (ou seja, $v(\varphi) = 1$).
2. Uma fórmula φ é uma *contradição* quando φ não é satisfazível, i. e., quando, para qualquer valoração v, $v(\varphi) = 0$.

Notação 51: A notação $\models \varphi$ significará que φ é uma tautologia e $\not\models \varphi$ significará que φ não é uma tautologia. A notação $\varphi \models$ significará que φ é uma contradição e $\varphi \not\models$ significará que φ não é uma contradição.

Exemplo 52:

1. A fórmula $\psi = \neg p_1 \leftrightarrow (p_1 \rightarrow \bot)$ é uma tautologia: dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(p_1) = 0$ ou $v(p_1) = 1$, e
   (a) caso $v(p_1) = 0$, então $v(\neg p_1) = 1$ e $v(p_1 \rightarrow \bot) = 1$, donde $v(\psi) = 1$;
   (b) caso $v(p_1) = 1$, então $v(\neg p_1) = 0$ e $v(p_1 \rightarrow \bot) = 0$, donde $v(\psi) = 1$.

2. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \wedge \neg\varphi$ é uma contradição. De facto, dada uma valoração v arbitrária, sabemos que $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = 1$, e:
   (a) caso $v(\varphi) = 0$, então $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = v_\wedge((0,1)) = 0$.
   (b) caso $v(\varphi) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 0$ e $v(\varphi \wedge \neg\varphi) = v_\wedge((1,0)) = 0$.

3. As fórmulas $p_0, \neg p_0, p_0 \vee p_1, p_0 \wedge p_1, p_0 \rightarrow p_1, p_0 \leftrightarrow p_1$ não são tautologias nem são contradições. (Porquê?)

Proposição 53: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$,

1. $\models \varphi$ se e só se $\neg\varphi \models$;
2. $\varphi \models$ se e só se $\models \neg\varphi$.

Dem.: Exercício. □

Observação 54: Sabendo que φ não é uma tautologia, não podemos concluir que φ é uma contradição e, analogamente, sabendo que φ não é uma contradição, não podemos concluir que φ é uma tautologia. Tenha-se em atenção que existem fórmulas que não são tautologias, nem são contradições (como vimos no exemplo anterior).

Exemplo 55: Seja φ a fórmula $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$. Da tabela de verdade para φ, apresentada de seguida, podemos concluir que φ é uma tautologia, uma vez que φ assume o valor lógico 1 para todas as possíveis atribuições de valores de verdade às variáveis proposicionais de φ.

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_1 \rightarrow \neg p_2$	$p_2 \rightarrow p_1$	$(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Tabela de verdade de $(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \leftrightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$.

Teorema 56 (Generalização): Sejam p uma variável proposicional e sejam φ e ψ fórmulas do CP. Se φ é uma tautologia, então $\varphi[\psi/p]$ é também uma tautologia.

Dem.: Qualquer que seja a valoração v, demonstra-se, por indução estrutural na fórmula φ, que a valoração v' definida, a partir de v e de ψ, do seguinte modo

$$v'(p') = \begin{cases} v(\psi) \text{ se } p' = p \\ \\ v(p') \text{ se } p' \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p\} \end{cases}$$

é tal que $v'(\varphi) = v(\varphi[\psi/p])$. Portanto, se φ é uma tautologia, $v'(\varphi) = 1$ e, pela igualdade anterior, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$. Assim, qualquer que seja a valoração v, $v(\varphi[\psi/p]) = 1$, i. e., $\varphi[\psi/p]$ é uma tautologia.

□

Exemplo 57: A fórmula $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia. Logo, para qualquer fórmula ψ, a fórmula $(p_0 \vee \neg p_0)[\psi / p_0] = \psi \vee \neg \psi$ é ainda uma tautologia.

Definição 58: Seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Γ diz-se um conjunto *satisfazível* ou *semanticamente consistente* quando existe alguma valoração que satisfaz Γ.
2. Γ diz-se um conjunto *insatisfazível* ou *não satisfazível* ou *semanticamente inconsistente* quando não há valorações que satisfaçam Γ. Neste caso escrevemos $\Gamma \models$.

Observação 59: Para qualquer fórmula φ do Cálculo Proposicional, $\{\varphi\} \models$ se e só se $\varphi \models$, ou seja, $\{\varphi\}$ é um conjunto não satisfazível se e só se a fórmula φ é uma contradição.

Exemplo 60:

a) Como vimos no **exemplo 47**, o conjunto de fórmulas $\Delta_1 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1 \wedge \neg p_2\}$ é satisfeito pela valoração v_0 desse exemplo e, portanto, Δ_1 é satisfazível.

b) O conjunto $\Delta_2 = \{p_1 \leftrightarrow p_2, p_1 \vee p_2\}$, considerado no **exemplo 47**, não é satisfeito pela valoração v_0, mas é satisfeito, por exemplo, pela valoração que atribui valor lógico 1 a qualquer variável proposicional. Logo, Δ_2 é também satisfazível.

c) O conjunto $\Delta_3 = \{\neg p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$, considerado no **exemplo 47**, não é satisfazível.

Dem.: Suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz Δ_3. Então, $v(\neg p_1 \wedge \neg p_2) = 1$, e portanto $v(p_1) = 0$ e $v(p_2) = 0$, e $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Ora, de $v(p_2) = 0$, segue $v(\neg p_2) = 1$ e daqui e de $v(p_1) = 0$, segue $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 0$, o que contradiz $v(p_1 \leftrightarrow \neg p_2) = 1$. Logo, não podem existir valorações que satisfaçam Δ_3 e, assim, Δ_3 é não satisfazível.

Proposição 61: Sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas do CP tais que $\Gamma \subseteq \Delta$. Então:

i) se Δ é satisfazível, então Γ é satisfazível;

ii) se Γ não é satisfazível, então Δ não é satisfazível.

Dem.: Exercício. $\square$

Definição 62: Uma fórmula φ diz-se *logicamente equivalente*, ou *semanticamente equivalente*, a uma fórmula ψ (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) quando, para toda a valoração v, $v(\varphi) = v(\psi)$.

Observação 63:

1. Prova-se que a relação de equivalência lógica é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}^{CP}$. Em particular, sabemos que, se uma fórmula φ for logicamente equivalente a uma fórmula ψ, então ψ será logicamente equivalente a φ. Diremos, nesse caso, que φ e ψ são *logicamente equivalentes*, ou *semanticamente equivalentes*.

2. Dadas duas fórmulas φ e ψ, $\varphi \Leftrightarrow \psi$ se e só se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$.
3. Se $\varphi \Leftrightarrow \psi$ então $\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.
4. Se $\varphi_1 \Leftrightarrow \psi_1$ e $\varphi_2 \Leftrightarrow \psi_2$ então $(\varphi_1 \square \psi_1) \Leftrightarrow (\varphi_2 \square \psi_2)$, para quaisquer $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2 \in \mathcal{F}^{CP}$ e qualquer $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Exemplo 64: Para toda a fórmula φ,$\neg\varphi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$. A demonstração deste resultado pode ser sintetizada numa *tabela de verdade*, como se segue:

φ	$\neg\varphi$	$\varphi \rightarrow \bot$	$\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$
1	0	0	1
0	1	1	1

Tabela de verdade de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$.

O valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 1 e o valor lógico de $\neg\varphi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \bot)$ é 1 para qualquer valoração para a qual φ assuma o valor lógico 0.

Proposição 65: As seguintes equivalências lógicas são válidas.

$$(\varphi \vee \psi) \vee \sigma \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma) \qquad (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$$

(*associatividade*)

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \psi \vee \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \psi \wedge \varphi$$

(*comutatitvidade*)

$$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*idempotência*)

$$\varphi \vee \bot \Leftrightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \neg\bot \Leftrightarrow \varphi$$

(*elemento neutro*)

$$\varphi \vee \neg\bot \Leftrightarrow \neg\bot \qquad \varphi \wedge \bot \Leftrightarrow \bot$$

(*elemento absorvente*)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \qquad \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$$

(*distributividade*)

$$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$$

(*leis de De Morgan*)

$$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$$

(*lei da dupla negação*)

$$\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \qquad \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi \qquad \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \bot \qquad \bot \Leftrightarrow \varphi \wedge \neg\varphi$$

(*expressão de um conetivo em termos de outros conetivos*)

Dem.: Exercício. □

Exemplo 66: Sejam φ e ψ fórmulas. Então,

$$\neg(\neg\varphi \wedge \psi) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \neg\neg\varphi \vee \neg\psi \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \varphi \vee \neg\psi .$$

Justificações

(1) Lei de De Morgan.
(2) Como $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$, segue-se que $\neg\neg\varphi \vee \neg\psi \Leftrightarrow \varphi \vee \neg\psi$.

Donde, como $\Leftrightarrow$ é transitiva, podemos concluir a equivalência lógica entre a primeira fórmula e a última fórmula.

Notação 67: Uma vez que a conjunção pode ser vista como uma operação associativa, utilizaremos por vezes a notação $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ (com $n \in \mathbb{N}$) para representar qualquer associação, através da conjunção, das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ duas a duas. Analogamente, e uma vez que a disjunção também pode ser vista como uma operação associativa, utilizaremos por vezes a notação $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ para representar qualquer associação, através da disjunção, das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ duas a duas. Em ambos os casos, quando $n = 1$, as notações anteriores representam simplesmente a fórmula φ_1.

Exemplo 68: $p_0 \wedge \neg p_1 \wedge p_2$ representa as fórmulas $(((p_0 \wedge (\neg p_1)) \wedge p_2)$ e $(p_0 \wedge ((\neg p_1) \wedge p_2))$, que são logicamente equivalentes.

Definição 69: Seja $X \subseteq \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ um conjunto de conetivos. X diz-se *completo* quando, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\varphi \Leftrightarrow \psi$ e todos os conetivos de ψ estão em X.

Proposição 70: Os conjuntos de conetivos $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, \perp\}$, $\{\wedge, \neg\}$ e $\{\vee, \neg\}$ são completos.

Dem.: Vamos demonstrar que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos.

(A demonstração de que os outros conjuntos de conetivos mencionados são completos é deixada como exercício.)

Para tal, comecemos por definir, por recursão estrutural em fórmulas, a função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}$ como a única função tal que:

a) $f(\perp) = \neg(p_0 \to p_0)$;

b) $f(p) = p$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;

c) $f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

d) $f(\varphi \to \psi) = f(\varphi) \to f(\psi)$, para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

e) $f(\varphi \vee \psi) = \neg f(\varphi) \to f(\psi)$, para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

f) $f(\varphi \wedge \psi) = \neg(f(\varphi) \to \neg f(\psi))$, para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

g) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = \neg((f(\varphi) \to f(\psi)) \to \neg(f(\psi) \to f(\varphi)))$, para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

Lema: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.
Dem.: Por indução estrutural em φ. Exercício.

Do lema anterior concluímos de imediato que $\{\rightarrow, \neg\}$ é um conjunto completo de conetivos, pois, para toda a fórmula φ, existe uma fórmula $f(\varphi)$ tal que $\varphi \Leftrightarrow f(\varphi)$ e os conetivos de $f(\varphi)$ estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$. $\square$

Exemplo 71: Da demonstração da proposição anterior, podemos concluir que a fórmula $f((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \bot) = \neg(\neg p_1 \rightarrow \neg p_2) \rightarrow \neg(p_0 \rightarrow p_0)$ é logicamente equivalente a $(\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow \bot$ e os seus conetivos estão no conjunto $\{\rightarrow, \neg\}$.

Definição 72: As variáveis proposicionais e as negações de variáveis proposicionais são chamadas *literais*.

Definição 73: Fórmulas do CP das formas

i) $(l_{11} \vee \ldots \vee l_{1m_1}) \wedge \ldots \wedge (l_{n1} \vee \ldots \vee l_{nm_n})$

ii) $(l_{11} \wedge \ldots \wedge l_{1m_1}) \vee \ldots \vee (l_{n1} \wedge \ldots \wedge l_{nm_n})$

em que os l_{ij} são literais e n, bem como os m_i, pertencem a $\mathbb{N}$, serão designadas por *formas normais conjuntivas* (FNC) e *formas normais disjuntivas* (FND), respetivamente.

Exemplo 74:

a) Todo o literal l é simultaneamente uma forma normal conjuntiva e disjuntiva (na definição de formas normais, basta tomar $n = 1$, $m_1 = 1$ e $l_{11} = l$).

b) A fórmula $p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_0$ é uma FNC (faça-se $n = 3$, $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m_3 = 1$, $l_{11} = p_1$, $l_{21} = \neg p_2$ e $l_{31} = \neg p_0$) e é também uma FND (faça-se $n = 1$, $m_1 = 3$, $l_{11} = p_1$, $l_{12} = \neg p_2$ e $l_{13} = \neg p_0$).

Também a fórmula $p_1 \vee p_2$ é, em simultâneo, uma FND e uma FNC.

Mais geralmente, conjunções de literais e disjunções de literais são, em simultâneo, formas normais conjuntivas e disjuntivas.

c) A fórmula $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_0 \vee \neg p_1)$ é uma FNC, mas não é uma FND.

d) A fórmula $\neg(p_1 \vee p_0)$ não é nem uma FNC nem uma FND.

Proposicão 75: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, existe uma forma normal conjuntiva φ^c tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^c$ e existe uma forma normal disjuntiva φ^d tal que $\varphi \Leftrightarrow \varphi^d$.

Dem.: Dada uma fórmula φ, uma forma normal conjuntiva e uma formal normal disjuntiva logicamente equivalentes a φ podem ser obtidas através das seguintes transformações:

1. Eliminar equivalências, implicações e ocorrências do absurdo, utilizando as equivalências lógicas $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$, $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \Leftrightarrow \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$ e $\perp \Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$.
2. Mover negações que se encontrem fora de conjunções ou disjunções para dentro delas, utilizando as leis de De Morgan.
3. Eliminar duplas negações.
4. Aplicar a distributividade entre a conjunção e a disjunção. $\square$

Exemplo 76: Seja $\varphi = ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0$. Então:

i)

$$\begin{array}{ll} & \varphi \\ \Leftrightarrow & ((\neg p_1 \vee p_2) \rightarrow p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 \\ \Leftrightarrow & (p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \wedge p_0 \end{array}$$

e a última fórmula é uma FNC;

ii)

$$\begin{array}{lll} & \varphi & \\ \Leftrightarrow & ((p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3) \wedge p_0 & \text{por } \textbf{i)} \\ \Leftrightarrow & (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_0) \vee (p_3 \wedge p_0), & \end{array}$$

sendo a última fórmula uma FND.

Observação 77: Consideremos de novo a Proposição 75 e a sua demonstração. Uma demonstração alternativa, que permite obter uma FND e uma FNC logicamente equivalentes a uma dada fórmula φ, pode ser feita com recurso à tabela de verdade de φ. Em particular, vejamos como obter uma FND φ^d, logicamente equivalente a φ, a partir da tabela de verdade de φ.

- Se φ é uma contradição ou uma tautologia, basta tomar, respetivamente, uma FND que seja uma contradição e uma FND que seja uma tautologia; por exemplo, tome-se, respetivamente, $\varphi^d = p_0 \wedge \neg p_0$ e $\varphi^d = p_0 \vee \neg p_0$.
- Doutro modo, sem perda de generalidade, suponhamos que $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são as variáveis proposicionais que ocorrem em φ. A tabela de verdade de φ terá 2^n linhas e pode ser representada da seguinte forma:

	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n	φ
	1	1	$\cdots$	1	1	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
linha $i \longrightarrow$	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$	$\cdots$	$a_{i,n-1}$	$a_{i,n}$	b_i
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	0	0	$\cdots$	0	0	b_{2^n}

onde, para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, $b_i = v_i(\varphi)$ para toda a valoração v_i tal que $v_i(p_j) = a_{i,j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.
Para cada $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$ tal que $b_i = 1$, seja

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} p_j & \text{se } a_{i,j} = 1 \\ \neg p_j & \text{se } a_{i,j} = 0 \end{cases} \qquad \text{(para todo } j \in \{1, \ldots, n\}\text{)}$$

e seja $\beta_i = \alpha_{i,1} \wedge \alpha_{i,2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i,n}$.
Finalmente, suponhamos que $i_1, i_2, \ldots, i_k$ são as linhas para as quais $b_{i_r} = 1$, e tome-se $\varphi^d = \beta_{i_1} \vee \beta_{i_2} \vee \cdots \vee \beta_{i_k}$.
Prova-se que φ^d assim definida, de facto, é uma FND e é logicamente equivalente a φ. (Exercício.)

Exemplo 78: Consideremos a fórmula $\varphi = ((p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)) \wedge p_2$. Denotemos por ψ a subfórmula $(p_3 \rightarrow p_1) \vee (\neg p_1 \leftrightarrow \bot)$ de φ. A tabela de verdade de φ é:

p_1	p_2	p_3	$\bot$	$\neg p_1$	$p_3 \rightarrow p_1$	$\neg p_1 \leftrightarrow \bot$	ψ	φ
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0

As linhas para as quais φ tem valor lógico 1 são a 1, a 2 e a 6. Portanto, uma FND logicamente equivalente a φ é:
$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \vee (\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3)$.

Definição 79: Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP.

1. Dizemos que φ é uma *consequência semântica* de Γ, e escrevemos $\Gamma \models \varphi$, quando, para toda a valoração v, se v sat. Γ, então v sat. φ.
2. Escrevemos $\Gamma \not\models \varphi$ quando φ *não é consequência semântica* de Γ, i. e., quando existe alguma valoração v t. q. v sat. Γ e v não sat. φ.

Observação 80: Da definição anterior, aplicando as definições de satisfação de uma fórmula e satisfação de um conjunto de fórmulas, segue de imediato que:

1. $\Gamma \models \varphi$ se e só se para toda a valoração v, se para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, então $v(\varphi) = 1$.
2. $\Gamma \not\models \varphi$ se e só se existe alguma valoração v tal que, para todo $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$ e $v(\varphi) = 0$.

Exemplo 81:

1. Seja $\Gamma = \{p_1, \neg p_1 \vee p_2\}$. Então:

   (a) $\Gamma \models p_1$.

   Se tomarmos uma valoração v tal que v sat. Γ, então v é tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$. Em particular, temos $v(p_1) = 1$.

   (b) $\Gamma \models p_2$.

   Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos $v(\neg p_1) = 0$ e daqui e de $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, segue $v(p_2) = 1$.

   (c) $\Gamma \models p_1 \wedge p_2$.

   Tomando uma valoração v tal que $v(p_1) = 1$ e $v(\neg p_1 \vee p_2) = 1$, temos necessariamente $v(p_1) = 1$ e $v(p_2) = 1$ (tal como vimos nos exemplos anteriores) e, por isso, temos $v(p_1 \wedge p_2) = 1$.

(d) $\Gamma \not\models p_3$.

Existem valorações v tais que v sat. Γ e $v(p_3) = 0$. Por exemplo, a valoração que atribui valor lógico 1 a p_1 e p_2 e valor lógico 0 às restantes variáveis proposicionais é uma tal valoração.

(e) $\Gamma \not\models \neg p_1 \vee \neg\, p_2$.

Por exemplo, para a valoração v_1 tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, temos v_1 sat. Γ e, no entanto, $v_1(\neg p_1 \vee \neg p_2) = 0$.

(f) $\Gamma \models p_3 \vee \neg p_3$.

Se tomarmos uma valoração v tal que v sat. Γ, temos $v(p_3 \vee \neg p_3)$. De facto, $p_3 \vee \neg p_3$ é uma tautologia e, como tal, o seu valor lógico é 1 para qualquer valoração (em particular, para aquelas valorações que satisfazem Γ).

2. Para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \models \psi$. De facto, para qualquer valoração v, se $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \to \psi) = 1$, então $v(\psi) = 1$.
3. Já a afirmação "para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}, \{\varphi \to \psi\} \models \psi$" é falsa. Por exemplo, $\{p_1 \to p_2\} \not\models p_2$ (uma valoração v tal que $v(p_1) = v(p_2) = 0$ satisfaz $\{p_1 \to p_2\}$ e não satisfaz p_2.

Proposição 82: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\models \varphi$ se e só se $\emptyset \models \varphi$.

Dem.: Suponhamos que φ é uma tautologia. Então, para toda a valoração v, v sat. φ e, assim, de imediato, a implicação "v sat. $\emptyset \Rightarrow v$ sat. φ" é verdadeira, pelo que $\emptyset \models \varphi$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\emptyset \models \varphi$, i. e., suponhamos que para toda a valoração v,

$$v \text{ sat. } \emptyset \Rightarrow v \text{ sat. } \varphi.$$

Seja v uma valoração arbitrária. Pretendemos mostrar que $v(\varphi) = 1$. Ora, trivialmente, v sat. $\emptyset$ (Observação 48). Assim, da suposição, segue v sat. φ, ou seja, $v(\varphi) = 1$. $\square$

Proposição 83: Para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$, $\Gamma \models$ se e só se $\Gamma \models \bot$.
Dem.: Exercício □

Observação 84: Se Γ é um conjunto de fórmulas não satisfazível, então $\Gamma \models \varphi$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ (porquê?). Como tal, é possível ter-se $\Gamma \models \varphi$ sem que existam valorações que satisfaçam Γ.

Notação 85: Muitas vezes, no contexto da relação de consequência semântica, usaremos a vírgula para denotar a união de conjuntos e escrevemos uma fórmula para denotar o conjunto singular composto por essa fórmula. Assim, por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \psi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ e conjuntos de fórmulas Γ, Δ, escrevemos:

a) $\Gamma, \Delta \models \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \models \varphi$;

b) $\Gamma, \varphi \models \psi$ em vez de $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$;

c) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ em vez de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi$.

Proposição 86: Sejam φ e ψ fórmulas e sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas.

a) Se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \models \varphi$.

b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \models \varphi$.

c) Se $\Gamma \models \varphi$ e $\Delta, \varphi \models \psi$, então $\Delta, \Gamma \models \psi$.

d) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \models \psi$.

e) Se $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da definição de satisfação de conjuntos, sabemos que v atribui valor lógico 1 a todas as fórmulas de Γ. Assim, dado que por hipótese $\varphi \in \Gamma$, temos $v(\varphi) = 1$.

b) Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Δ. Assim, em particular, v satisfaz Γ, pois (por hipótese) $\Gamma \subseteq \Delta$. Donde, pela hipótese de que φ é uma consequência semântica de Γ, segue que $v(\varphi) = 1$.

c) Exercício.

d) **$\Rightarrow$)** Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, por definição de satisfação de conjuntos, v satisfaz Γ e $v(\varphi) = 1$ (*). Assim, como v satisfaz Γ, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$ segue que $v(\varphi \to \psi) = 1$ (**). Logo, de (*) e (**), por definição de valoração, $v(\psi) = 1$.

$\Leftarrow$) Exercício.

e) Seja v uma valoração e suponhamos que v satisfaz Γ. Então, da hipótese $\Gamma \models \varphi \to \psi$, podemos concluir que $v(\varphi \to \psi) = 1$ (*) e, da hipótese $\Gamma \models \varphi$, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$ (**). Logo, de (*) e (**), por definição de valoração, $v(\psi) = 1$. □

Proposição 87: Sejam $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ fórmulas, onde $n \in \mathbb{N}$. As seguintes proposições são equivalentes:

i) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$;

ii) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \models \varphi$;

iii) $\models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi$.

Dem.: A equivalência entre ii) e iii) é um caso particular de d) da proposição anterior. A equivalência entre i) e ii) pode ser demonstrada a partir da equivalência mais geral: para todo o conjunto Γ de fórmulas,

$$\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \text{ se e só se } \Gamma, \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \models \varphi,$$

a qual pode ser demonstrada por indução em n (exercício). A equivalência entre i) e iii) segue, então, por transitividade. $\square$

Proposição 88 (Redução ao absurdo): Seja φ uma fórmula do CP e seja Γ um conjunto de fórmulas do CP. Então: $\Gamma \models \varphi$ se e só se $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ não é satisfazível.

Dem.:

$\Rightarrow$) Tendo em vista uma contradição, suponhamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfazível, i. e., suponhamos que existe uma valoração v que satisfaz $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Então, v satisfaz Γ e $v(\neg\varphi) = 1$, i. e., $v(\varphi) = 0$ (*). Contudo, da hipótese, uma vez que v satisfaz Γ, podemos concluir que $v(\varphi) = 1$, o que é contraditório com (*). Logo, por redução ao absurdo, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ não é satisfazível.

$\Leftarrow$) Suponhamos que v satisfaz Γ. Então, $v(\neg\varphi) = 0$, de outra forma teríamos $v(\neg\varphi) = 1$, donde, como v satisfaz Γ, seguiria que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ seria satisfazível, contrariando a hipótese. Logo, $v(\varphi) = 1$. Mostrámos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ também satisfaz φ e, portanto, $\Gamma \models \varphi$. $\square$