Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2023/24

Sucessões

1. Considere as sucessões de termo geral:

(a) $u_n = 1$

(b) $u_n = (-1)^n$

(c) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$

(d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

(e) $u_n = n^2$

(f) $u_n = [1+(-1)^n]n$

(g) $u_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(h) $u_n = \dfrac{n}{n+2}$

(i) $u_n = \dfrac{3}{n+5}$

(j) $u_n = \begin{cases} n^4 & \text{se } n \leq 10 \\ 2 & \text{se } n > 10 \end{cases}$

(k) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$

(l) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$

(m) $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(n) $u_n = (-1)^n \cos(n\pi)$

e indique, justificando, as que são monótonas, limitadas e as que são convergentes.

2. Mostre que $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{n} = 0$, usando a definição.

3. Considere o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ definido por

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |2x^2 - 5| > 3 \wedge x > 0\right\}.$$

(a) Mostre que $S =]0,1[\cup]2,+\infty[$.

(b) Dê um exemplo de, ou justifique porque não existe, uma sucessão de termos em S que seja:

i. não monótona e convergente para 5;

ii. estritamente decrescente e convergente para 0;

iii. limitada e divergente;

iv. não limitada e convergente;

v. não majorada e admita uma subsucessão convergente.

4. Considere o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ definido por

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| > 2 \wedge x \geq 0\}.$$

(a) Mostre que $S = [0,1[\cup]5,+\infty[$.

(b) Determine, caso existam, ou justifique porque não existem, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de S.

(c) Dê um exemplo de uma sucessão, de termos em S, crescente e convergente com limite em $\mathbb{R}\backslash S$.

5. Considere o conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ definido por $S = \left\{x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : \ x \leq \dfrac{1}{x}\right\}$.

(a) Mostre que $S =]-\infty,-1] \cup]0,1]$.

(b) Dê um exemplo de uma sucessão de termos em S que seja

i. estritamente decrescente e convergente com limite em S;

ii. estritamente decrescente e convergente com limite em $\mathbb{R}\backslash S$;

iii. estritamente decrescente e divergente;

iv. não monótona, convergente, com limite em $\mathbb{R}\backslash S$.

6. Utilizando o teorema das sucessões enquadradas, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_n \dfrac{n\,!}{n^n}$

(b) $\lim\limits_n \dfrac{10^n}{n\,!}$

(c) $\lim\limits_n \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right)$

(d) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$

7. Calcule os seguintes limites

(a) $\lim\limits_n \dfrac{1+n^3}{n^2+2n-1}$

(b) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

(c) $\lim\limits_n \dfrac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4}$

(d) $\lim\limits_n \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$

(e) $\lim\limits_n \dfrac{n\cos n}{n^2+24}$

(f) $\lim\limits_n \dfrac{\sqrt{n} - \operatorname{sen} n}{n+2}$

(g) $\lim\limits_n \left(1 - \dfrac{3}{n+2}\right)^n$

(h) $\lim\limits_n \dfrac{\cos(n\pi) + \cos(2n\pi)}{n}$

(i) $\lim\limits_n \dfrac{(n+1)\,! - n\,!}{n\,!(n+2)}$

(j) $\lim\limits_n \sqrt{n^2+2n} - n$

(k) $\lim\limits_n \dfrac{3^n+4^n+5^n}{5^n}$

(l) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$

(m) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n+1}$

(n) $\lim\limits_n \dfrac{2^{n+1}+(-3)^n+6^n}{6^n+1}$

(o) $\lim\limits_n \dfrac{e^n-1}{5^n}$

8. Considere a sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_1 = -2^{-1}$ e $u_{n+1} = -2u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $(u_n)_n$ é monótona;

   (b) $(u_n)_n$ é limitada;

   (c) $(u_n)_n$ é convergente.

9. Considere a sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_1 = 5$ e $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\, u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $(u_n)_n$ é monótona;

   (b) $(u_n)_n$ é limitada;

   (c) $(u_n)_n$ é convergente.

10. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

    (a) toda a subsucessão de uma sucessão convergente é também convergente;

    (b) toda a subsucessão de uma sucessão divergente é também divergente;

    (c) se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito, então $(u_n)_n$ é convergente;

    (d) se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 5\}$, então $(u_n)_n$ é divergente;

    (e) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes, então a sucessão $(u_n + v_n)_n$ é divergente;

    (f) se $(u_n)_n$ e $(v_n + u_n)_n$ são sucessões convergentes, então a sucessão $(v_n)_n$ é convergente;

    (g) sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões reais. Se $\lim\limits_n u_n v_n = 0$ então $\lim\limits_n u_n = 0$ ou $\lim\limits_n v_n = 0$;

    (h) se $\lim\limits_n |u_n| = 1$, então $\lim\limits_n u_n = 1$;

    (i) se $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada, então $(u_n)_n$ é convergente;

    (j) qualquer sucessão crescente de termos em $]-1, 1[$ é convergente;

    (k) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in]0, 1[$ e $u_{2n-1} \in]1, 2[$, então $(u_n)_n$ é divergente;

    (l) se $(u_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos, então $(u_n)_n$ é convergente.

11. Que pode dizer de $\lim_n u_n$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $(u_n)_n$ possui uma subsucessão convergente para a e outra convergente para b, com $b \neq a$;

(b) $(u_n)_n$ é tal que $(u_{2n})_n$ e $(u_{2n-1})_n$ convergem para a;

(c) $(u_n)_n$ é decrescente e $u_n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(d) $(u_n)_n$ é uma sucessão crescente em $]2, 5[$;

(e) $(u_n)_n$ é crescente e de termos negativos;

(f) $(u_n)_n$ é decrescente e de termos positivos.

12. Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

(a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim_n u_n = 0$, $\lim_n v_n = +\infty$ e $\lim_n (u_n v_n) = 1$;

(b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim_n u_n = 0$, $\lim_n v_n = +\infty$ mas $\lim_n (u_n v_n)$ não exista;

(c) uma sucessão convergente e não monótona;

(d) uma sucessão não monótona e não limitada;

(e) uma sucessão de números racionais convergente para um número irracional;

(f) uma sucessão de números irracionais convergente para um número racional;

(g) uma sucessão crescente, convergente para zero;

(h) uma sucessão com duas subsucessões divergentes;

(i) uma sucessão de números irracionais, estritamente decrescente, convergente para π;

(j) uma sucessão não majorada que admite uma subsucessão convergente;

(k) uma sucessão convergente para zero e com todos os termos em $\mathbb{R} \backslash]-1, 1[$;

(l) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1, 2\}$ e $(u_n)_n$ é convergente;

(m) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(u_n)_n$ é limitada mas divergente;

(n) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(u_n)_n$ é alternada e convergente;

(o) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $(u_n)_n$ é estritamente monótona, $u_n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim_n u_n = 2$.