Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações	21 de novembro de 2014

Teste de Álgebra Linear CC

(versão A) duração: 2 horas

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente. Cada resposta certa conta 0,5 valores e cada resposta errada desconta 0,3 valores.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

e B e C matrizes sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ tais que B é uma matriz do tipo $4 \times (m+3)$ e C é uma matriz do tipo $(n+2) \times (m+3)$, onde $m, n \in \mathbb{N}$.

V	F		
☐	☐	a)	A expressão BC^TB define uma matriz só se $n = 2$.
☐	☐	b)	Se $m = 1$ e $n = 1$ a expressão BC^TB define uma matriz.
☐	☐	c)	$(AA^T - 2I_3)_{1,2} = 2$ e $(AA^T - 2I_3)_{3,3} = 8$.
☐	☐	d)	A matriz $AA^T - 2I_3$ não é simétrica.

2. Sejam A, B matrizes quadradas de ordem $n \geq 2$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \beta \\ 1 & \alpha+1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

V	F		
☐	☐	a)	Se $\beta = 2$, a matriz C é invertível.
☐	☐	b)	Se a matriz C é invertível, então $\alpha \neq 1$.
☐	☐	c)	Se A e B são invertíveis, então $car(A) = car(B)$.
☐	☐	d)	Se $car(A) = car(B) = n$, então $car(AB) = n^2$.

3. Sejam $u_1 = (1, 2, 3, -1)$, $u_2 = (2, 4, 6, -2)$, $u_3 = (3, 6, 9, -3)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3, $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto gerador de V e $v \in V$.

V	F		
☐	☐	a)	Os vetores u_1, u_2, u_3, u_4 são linearmente independentes.
☐	☐	b)	O vetor u_4 é combinação linear dos vetores u_1, u_2, u_3.
☐	☐	c)	$\{v_1, v_2, v_3, v\}$ não é um conjunto gerador de V.
☐	☐	d)	Os vetores v_1 v_2 são linearmente independentes.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

II

As questões deste grupo devem ser resolvidas numa folha em separado.
Justifique convenientemente todas as suas respostas.

5. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, onde $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se A e B são matrizes ortogonais, então a matriz AB também é ortognal. (1,5 valores)

6. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares $A_{\alpha,\beta}x = b_\beta$, onde:

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & -1 & \beta+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad b_\beta = \begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \\ -\beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Discuta o sistema $A_{\alpha,\beta}x = b_\beta$, em função dos parâmetros α e β. (2,0 valores)

   (b) Utilizando o método de eliminação de Gauss, determine o conjunto de soluções do sistema $A_{1,2}x = b_2$. (1,5 valores)

   (c) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, $c \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ tal que o sistema $A_{2,2}x = c$ seja impossível. (1,0 valores)

7. Sejam $k \in \mathbb{R}$, $S_k = \{(a, b, c, k^2 - 4) \in \mathbb{R}^4 : a = b - c \in \mathbb{R}\}$ um suconjunto de $\mathbb{R}^4$ e $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 0)$ vetores de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Determine os valores de k para os quais S_k é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. (2,0 valores)

   (b) Considere $k = 2$.

      i. Verifique que $S_2 =< u_1, u_2, u_3 >$. (1,75 valores)

      ii. Diga se a sequência (u_1, u_2, u_3) é uma base de S_2. (1,25 valores)

      iii. Indique a dimensão de S_2. (1,25 valores)

      iv. Determine um suplementar de S_2 relativamente a $\mathbb{R}^4$. (1,75 valores)

(fim)

Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações	21 de novembro de 2014
Teste de Álgebra Linear CC	
(versão B)	duração: 2 horas

Nome do aluno: ____ Número: ________

I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente. Cada resposta certa conta 0,5 valores e cada resposta errada desconta 0,3 valores.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e B e C matrizes sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$ tais que B é uma matriz do tipo $8 \times (m+2)$ e C é uma matriz do tipo $(n+3) \times (m+2)$, onde $m, n \in \mathbb{N}$.

V	F		
☐	☐	a)	A expressão BC^TB define uma matriz só se $n = 5$.
☐	☐	b)	Se $m = 2$ e $n = 2$ a expressão BC^TB define uma matriz.
☐	☐	c)	$(AA^T - 4I_3)_{1,2} = 4$ e $(AA^T - 4I_3)_{3,3} = 1$.
☐	☐	d)	A matriz $AA^T - 4I_3$ é simétrica.

2. Sejam A, B matrizes quadradas de ordem $n \geq 2$,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & \beta \\ 1 & \alpha+1 & 2 \\ 2 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \text{ onde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

V	F		
☐	☐	a)	Se $\alpha = 3$, a matriz C é invertível.
☐	☐	b)	Se a matriz C é invertível, então $\beta \neq 4$.
☐	☐	c)	Se A e B são invertíveis, então $car(A) = car(B)$.
☐	☐	d)	Se $car(A) = car(B) = n$, então $car(AB) = n^2$.

3. Sejam $u_1 = (1, 2, 3, -1)$, $u_2 = (2, 4, 6, -2)$, $u_3 = (3, 6, 9, -3)$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)$ vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3, $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto gerador de V e $v \in V$.

V	F		
☐	☐	a)	Os vetores u_1, u_2, u_3, u_4 são linearmente independentes.
☐	☐	b)	O vetor u_4 é combinação linear dos vetores u_1, u_2, u_3.
☐	☐	c)	$\{v_1, v_2, v_3, v\}$ não é um conjunto gerador de V.
☐	☐	d)	Os vetores v_1 v_2 são linearmente independentes.

$\overrightarrow{v.s.f.f.}$

II

As questões deste grupo devem ser resolvidas numa folha em separado.
Justifique convenientemente todas as suas respostas.

5. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n, onde $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se A e B são matrizes ortogonais, então a matriz AB também é ortognal. (1,5 valores)

6. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares $A_{\alpha,\beta}x = b_\beta$, onde:

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & -1 & \beta+1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad b_\beta = \begin{bmatrix} -\beta \\ 1 \\ -\beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Discuta o sistema $A_{\alpha,\beta}x = b_\beta$, em função dos parâmetros α e β. (2,0 valores)

   (b) Utilizando o método de eliminação de Gauss, determine o conjunto de soluções do sistema $A_{1,3}x = b_3$. (1,5 valores)

   (c) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, $c \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ tal que o sistema $A_{3,3}x = c$ seja impossível. (1,0 valores)

7. Sejam $k \in \mathbb{R}$, $S_k = \{(a, b, c, k^2 - 9) \in \mathbb{R}^4 : a = b - c \in \mathbb{R}\}$ um suconjunto de $\mathbb{R}^4$ e $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 2, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 0)$ vetores de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Determine os valores de k para os quais S_k é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. (2,0 valores)

   (b) Considere $k = 3$.

      i. Verifique que $S_3 =< u_1, u_2, u_3 >$. (1,75 valores)

      ii. Diga se a sequência (u_1, u_2, u_3) é uma base de S_3. (1,25 valores)

      iii. Indique a dimensão de S_3. (1,25 valores)

      iv. Determine um suplementar de S_3 relativamente a $\mathbb{R}^4$. (1,75 valores)

(fim)