Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Funções hiperbólicas inversas

Vamos inverter as funções hiperbólicas. Quando não houver bijetividade, consideramos restrições apropriadas.

Argumento do seno hiperbólico

A função $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, é contínua, bijetiva e possui inversa contínua.
A sua inversa designa-se por *argumento do seno hiperbólico* e representa-se por

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{argsh} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{argsh} y \end{array}$$

onde

$$x = \operatorname{argsh} y \ \ y \in \mathbb{R} \iff y = \operatorname{sh} x,\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Mas, para $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \operatorname{sh} x \quad &\iff \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &\iff \quad y = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \qquad \iff \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

A última condição em (1) traduz uma equação do segundo grau na incógnita e^x. Tratando-a com a fórmula resolvente, sai

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

sendo a solução com o sinal + a única admissível, uma vez que

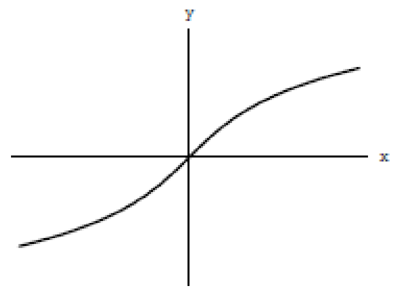
$$e^x > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad y - \sqrt{y^2+1} < 0,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1} \iff x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

donde

$$\operatorname{argsh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),\ y \in \mathbb{R}$$



$$y = \text{argsh}x,\ x \in \mathbb{R},\ \text{CD}_{\text{argsh}} = \mathbb{R}$$

Argumento do cosseno hiperbólico

A função $\text{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \text{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, não é bijetiva, logo não é invertível.
Definiremos a inversa da restrição do ch ao intervalo $[0, +\infty[$, ou seja, da função bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \text{ch} : & [0, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & y = \text{ch}\, x \end{array}$$

A sua inversa designa-se por *argumento do cosseno hiperbólico* e representa-se por

$$\begin{array}{rccc} \text{argch} : & [1, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & y & \longmapsto & \text{argch}\, y \end{array}$$

onde

$$x = \text{argch}\, y,\ y \in [1, +\infty[\iff y = \text{ch}\, x,\ x \in [0, +\infty[.$$

Mas, para $x \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \text{ch}\, x \quad &\iff \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\iff \quad y = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \quad \iff \quad e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

A última condição em (2) traduz uma equação do segundo grau em e^x, donde

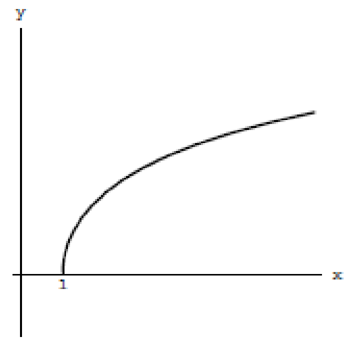
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Atendendo a que $x \geq 0$, tem-se $e^x \geq 1$, pelo que a solução com o sinal $+$ é a única admissível (a solução com o sinal $-$ corresponderia à inversa da restrição do ch para $x \leq 0$. Mas

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1},\ x \geq 0,\ y \geq 1 \iff x = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right),\ x \geq 0,\ y \geq 1$$

donde

$$\text{argch}\, y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right),\ y \in [1, +\infty[$$



$$y = \mathrm{argch} x, \ x \in [1, +\infty[, \ \mathrm{CD}_{\mathrm{argch}} = [0, +\infty[$$

Argumento da tangente hiperbólica

A função $\mathrm{th} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$, é injetiva mas não é sobrejetiva. Para poder inverter basta considerar

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ & x & \longmapsto & y = \mathrm{th}\, x \end{array}$$

que é bijetiva e, portanto, é invertível. Sendo contínua num intervalo, a sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da tangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argth}: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathrm{argth}\, y \end{array}$$

onde

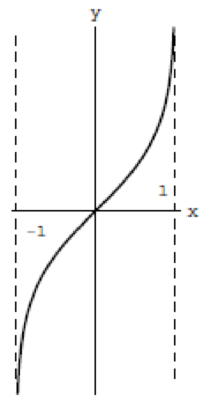
$$x = \mathrm{argth}\, y, \ y \in]-1,1[\iff y = \mathrm{th}\, x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Para $x \in \mathbb{R}$, $y \in]-1,1[$, tem-se

$$\begin{aligned} y = \mathrm{th}\, x \quad & \iff \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ & \iff \quad y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \iff e^{2x}(1-y) = 1 + y \\ & \iff \quad x = \log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) \end{aligned}$$

Então

$$\mathrm{argth}\, y = \log\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right), \ y \in]-1,1[$$



$$y = \text{argth}x,\ x \in]-1,1[,\ \text{CD}_{\text{argth}} = \mathbb{R}$$

Argumento da cotangente hiperbólica

A função $\coth : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\coth = \dfrac{\text{ch}}{\text{sh}}$, injetiva mas não é sobrejetiva. Consideremos então

$$\begin{array}{rccc} \coth : & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash[-1,1] \\ & x & \longmapsto & y = \coth x \end{array}$$

que é bijetiva e, portanto, é invertível. A sua inversa é contínua. Trata-se da função *argumento da cotangente hiperbólica*, que se define por

$$\begin{array}{rccc} \text{argcoth} : & \mathbb{R}\backslash[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ & y & \longmapsto & \text{argcoth}\, y \end{array}$$

onde

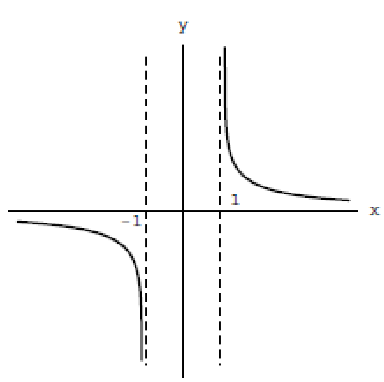
$$x = \text{argcoth}\, y,\ \ y \in \mathbb{R}\backslash[-1,1] \iff y = \coth x,\ \ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Para $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $y \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$, tem-se

$$y = \coth x \iff x = \log\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right)$$

Então

$$\text{argcoth}\, y = \log\left(\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}\right),\ y \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$$



$$y = \text{argcoth}x,\ x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1],\ \text{CD}_{\text{argcoth}} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$