Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Folha 3** **2024/2025**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Dispomos de n caixas, numeradas de 1 a n. Colocamos, ao acaso, n bolas (também numeradas de 1 a n) nas n caixas e de tal modo que em cada caixa fica uma, e uma só, bola. Seja E_i o acontecimento: "a bola numerada com i ficou colocada na caixa i", $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   (a) Calcule $P(E_i)$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   (b) Identifique o acontecimento $(E_i \cap E_j)$ e calcule $P(E_i \cap E_j)$, para $1 \leq i < j \leq n$.

   (c) Calcule $P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \ldots \cap E_{i_k})$, para $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

   (d) Identifique o acontecimento $\overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} E_i$ e calcule a sua probabilidade.

   (e) Seja Z_n o número de bolas, entre as n, que estão colocadas na caixa correspondente ao seu número. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = e^{-1}$.

   Obs.: Em (e) pode usar, sem demonstrar, o seguinte resultado: para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. Considere a experiência aleatória ξ: "lançamento de uma moeda equilibrada $n - 1$ vezes consecutivas", com $n \geq 3$.

   (a) Identifique o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associado a esta experiência.

   (b) Considere os seguintes n acontecimentos

$$E_j = \begin{cases} \text{“saiu cara no } j\text{-ésimo lançamento”} & \text{se } \quad j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \text{“saíram faces distintas nos 2 primeiros lançamentos ”} & \text{se } \quad j = n \end{cases}.$$

      i. Prove que $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$, para todo o $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$.

      ii. Calcule $P\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\cap}} E_j\right)$.

      iii. Comente a afirmação: "Uma família finita de acontecimentos independentes 2 a 2 é uma família de acontecimentos independentes."

3. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes e generalize-as para uma qualquer família finita de acontecimentos:

   (a) A e B são independentes

   (b) A e $\overline{B}$ são independentes

   (c) $\overline{A}$ e B são independentes

   (d) $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são independentes

   Mostre ainda que A é independente de A sse $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

4. Tenho duas moedas normais, e equilibradas, e ainda uma moeda falsa que tem 'cara' nas duas faces. Escolho ao acaso uma moeda entre estas três, lanço-a n vezes e observo que saíram n caras. Qual a probabilidade de eu ter escolhido a moeda falsa?

5. Numa dada população, certa doença está presente sob a forma grave em 2% dos indivíduos, sob a forma moderada em 10% e ausente nos restantes 88%. Um exame dá resultado positivo (i.e., diz que o indíviduo tem a doença) em 90% dos casos graves, em 70% dos casos moderados e em 10% dos saudáveis. Um indíviduo é escolhido, ao acaso, na população e é submetido a exame.

   (a) Qual a probabilidade de o seu exame dar positivo?

   (b) Se o exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente moderado?

   (c) Se o exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?

   (d) Se o exame der negativo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?

   (e) Os acontecimentos "indivíduo é doente" e "exame deu positivo" são independentes?

6. Uma determinada caixa automática da UM está 5% das vezes fora de serviço. Mesmo quando está em serviço, nem todas as opções estão disponíveis. Em particular sabe-se que, quando a caixa está em serviço, em 10% das vezes não é possível consultar o saldo. Suponha que um aluno da UM, escolhido ao acaso, vai utilizar esta caixa automática.

   (a) Determine a probabilidade de ele conseguir consultar o saldo.

   (b) Sabendo que ele não conseguiu consultar o saldo, qual a probabilidade de a caixa estar fora de serviço?

   (c) Os acontecimentos "aluno não conseguiu consultar o saldo" e "o aluno encontrou a máquina fora de serviço" são independentes?

7. Em três lançamentos consecutivos de um dado equilibrado, qual a probabilidade de:

   (a) saírem 3 faces iguais?

   (b) saírem 2 faces iguais?

   (c) saírem 3 faces distintas?

   (d) a soma das faces obtidas nos dois primeiros lançamentos ser igual ao valor do terceiro? (Sugestão: use raciocíneo semelhante ao efetuado na demonstração do T.P.T.).

   (e) as 3 faces saírem por ordem estritamente crescente?

8. No tratamento de uma certa doença, um médico receita aos doentes <u>pelo menos um</u> de dois medicamentos, A ou B. Em 70% dos casos o médico receita o medicamento A, enquanto que o medicamento B é receitado em 40% dos casos.
   É introduzido no mercado um novo medicamento, C, para complementar o efeito dos medicamentos já existentes, mas que só pode ser usado com <u>um e um só</u> dos outros dois medicamentos, i.e., não é compatível com a utilização em simultâneo de A e B. O médico receita C a 30% dos doentes que só tomam A e a 60% dos que só tomam B.

   (a) Determine a percentagem de doentes que:

      i. toma ambos os medicamentos A e B;
      ii. toma A mas não toma B;
      iii. toma B mas não toma A;
      iv. toma o medicamento C;
      v. só toma o medicamento A;
      vi. só toma um dos medicamentos.

   (b) Sabendo que o médico não receitou o medicamento C a um doente, qual a probabilidade de este utilizar o medicamento A?

9. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar dois lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.
   (a) Identifique o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associado a esta experiência aleatória.
   (b) Identifique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis decorrentes desta experiência.
   (c) Identifique, justificando, dois acontecimentos independentes decorrentes desta experiência.
   (d) Sabendo que saíram duas faces par nos dois lançamentos, qual a probabilidade de ter saído face seis no primeiro lançamento? Justifique.
   (e) Sabendo que saiu pelo menos uma face ímpar nos dois lançamentos, qual a probabilidade de ter saído face seis no primeiro lançamento? Justifique.
   (f) Sabendo que saiu pelo menos uma face ímpar nos dois lançamentos, qual a probabilidade de ter saído ás no primeiro lançamento? Justifique.

10. No país Maravilha decorre uma campanha em que os carros são inspeccionados relativamente ao seu Índice de Poluição (IP). Sabe-se que, dos carros existentes neste país, 20% têm IP alto e os restantes têm um IP baixo. Sabe-se ainda que, dos carros que têm IP alto, 50% têm um IP considerado perigoso para a saúde pública. Os carros que têm IP baixo não são considerados perigosos para a saúde pública. Escolheu-se, ao acaso, um carro neste país.
    (a) Calcule a probabilidade de o carro ter um IP considerado perigoso para a saúde pública.
    (b) O objetivo da inspecção é declarar inaptos os carros que têm IP alto e declarar aptos os carros que têm IP baixo. No entanto, processo de inspecção tem algumas falhas. Em particular, sabe-se que a inspecção declara:
        - aptos apenas 80% dos carros que têm IP baixo;
        - inaptos apenas 50% dos carros que têm IP alto considerado não perigoso para a saúde;
        - inaptos todos os carros que têm um IP alto considerado perigoso para a saúde.

        Suponha que o carro escolhido vai ser submetido a inspecção.
        i. Mostre que a probabilidade de o carro ser declarado inapto é de 0.31.
        ii. Sabendo que o carro foi declarado inapto, qual a probabilidade de ter um IP alto considerado perigoso para a saúde?
        iii. Sabendo que o carro foi declarado apto, qual a probabilidade de ter IP baixo?

11. Um hospital abriu concurso para uma vaga de enfermeiro e todos os candidatos foram submetidos a duas provas, A e B. Sabe-se que 40% dos candidatos reprovou na prova A, 30% reprovou na B e 10% reprovou em ambas as provas. Depois de efetuar estas provas, alguns candidatos seguem para a fase seguinte, em que são entrevistados, de acordo com o seguinte:
    - os candidatos aprovados em ambas as provas seguem para a entrevista;
    - os candidatos que reprovam na prova B são automaticamente excluídos (e não seguem para a entrevista);
    - dos candidatos que só reprovam na prova A, 10% são escolhidos aleatoriamente para seguir para a entrevista.

    Escolheu-se, ao acaso, um indivíduo que se candidatou a esta vaga.
    (a) Mostre que a probabilidade de ele ter sido aprovado em ambas as provas é igual a 0.4.
    (b) Mostre que a probabilidade de ele ter reprovado apenas na prova A é igual a 0.3.
    (c) Qual a probabilidade de este indivíduo seguir para a entrevista?
    (d) Sabendo que o indivíduo seguiu para entrevista, qual a probabilidade de ter reprovado A?
    (e) Diga, justificando, se os seguintes acontecimentos, R_A e R_B, são independentes:
    R_A : "o indivíduo reprovou na prova A", R_B : "o indivíduo reprovou na prova B".