Geometria
Notas teóricas e exercícios

Curso: Matemática e Ciências de Computação

Março 2022

Contents

Introdução

Estas notas estão ainda incompletas. Contudo, o nosso teste será baseado apenas na matéria exposta nestas notas.

1. Polinómios em várias variáveis

Os polinómios em várias variáveis têm uma notação um pouquinho pesada. A fim de evitar esta notação, definiremos polinómios apenas de duas e três variáveis, deixando a definição geral de polinómio para uma fase mais avançada.

Definição 1.1. (**Polinómio em duas variáveis**). Fixe a sua atenção no espaço vetorial canónico $\mathbb{R}^2$.

a) Um monómio nas variáveis x, y é uma expressão do tipo

$$ax^i y^j$$

em que $a \in \mathbb{R}$ e $i, j \in \mathbb{N}_0$.

b) Se $a \neq 0$, define-se grau do monómio $p(x, y) = ax^i y^j$, e representa-se por $gr(p(x, y))$ ou simplesmente por $gr(p)$, como sendo o número natural $i + j$. O número real a chama-se coeficiente de $p(x, y)$ em grau $i + j$.

c) Um polinómio nas variáveis x, y é uma soma finita de vários monómios nas variáveis x, y.

d) Sejam $p(x, y)$ um polinómio nas variáveis x, y e $k \in \mathbb{N}_0$ um número natural. Diz-se que o grau de $p(x, y)$ é k se

- $p(x, y)$ tem pelo menos um coeficiente em grau k que seja diferente de zero;
- todos os coeficientes de $p(x, y)$ em grau estritamente superior a k são iguais a zero.

Exemplo 1.2. O grau do polinómio

$$p(x, y) = 0x^4y^3 + 6x^2y^3 + 0x^2y^2 + 4x^2 + 1$$

é igual a cinco porque o coeficiente em grau cinco é igual ao número real seis, que é diferente de zero, e os coeficientes de $p(x, y)$ em grau estritamente superior a 5 são iguais a zero.

Exemplo 1.3. O grau do polinómio $p(x, y) = 4x^2 + 1$ é igual a dois.

Exemplo 1.4. O grau do polinómio $p(x, y) = 2$ é igual a zero ($p(x, y) = 2x^0y^0$).

Definição 1.5. (**Polinómio em três variáveis**). Fixe a sua atenção no espaço vetorial canónico $\mathbb{R}^3$.

a) Um monómio nas variáveis x, y, z é uma expressão do tipo

$$ax^i y^j z^k$$

em que $a \in \mathbb{R}$ e $i, j, k \in \mathbb{N}_0$.

b) Se $a \neq 0$, define-se grau do monómio $p(x,y,z) = ax^iy^jz^k$, e representa-se por $gr(p(x,y,z))$ ou simplesmente por $gr(p)$, como sendo o número natural $i+j+k$. O número real a chama-se coeficiente de $p(x,y,z)$ em grau $i+j+k$.

c) Um polinómio nas variáveis x, y, z é uma soma finita de vários monómios nas variáveis x, y, z.

d) Sejam $p(x,y,z)$ um polinómio nas variáveis x, y, z e $k \in \mathbb{N}_0$ um número natural. Diz-se que o grau de $p(x,y,z)$ é k se

- $p(x,y,z)$ tem pelo menos um coeficiente em grau k que seja diferente de zero;
- todos os coeficientes de $p(x,y,z)$ em grau estritamente superior a k são iguais a zero.

Exemplo 1.6. O grau do polinómio

$$p(x,y,z) = 0x^6y^3 + 6x^2y^3z^2 + 0x^2y^2 + 4x^2z^3 + z + x + 1$$

é igual a sete porque o coeficiente em grau sete é igual ao número real seis, que é diferente de zero, e os coeficientes de $p(x,y,z)$ em grau estritamente superior a 7 são iguais a zero.

2. Variedades

Nesta secção, daremos a noção geral de variedade no seguimento de duas proposições que relacionam aplicações lineares com espaços vetoriais e aplicações afins com espaços afins. Começaremos por anotar estas relações.

Recorde que qualquer espaço vetorial é igual ao kernel de alguma aplicação linear. Precisamente, se E é um espaço vetorial então existem dois espaços vetoriais G e H e uma aplicação linear $\psi : G \longrightarrow H$ tais que E é um subespaço vetorial de G e

$$E = \textbf{Ker } \psi$$

Portanto, $E = \textbf{Ker } \psi = \{x \in G : \ \psi(x) = 0_H\}$, tendo-se que o espaço vetorial E é o conjunto dos zeros de alguma aplicação linear.

No contexto afim, prova-se que qualquer espaço afim é o kernel de alguma aplicação afim, e portanto, é o conjunto dos zeros de alguma aplicação afim.

Em geral, **chama-se variedade a qualquer conjunto que seja igual ao conjunto de zeros de uma certa aplicação**. As variedades têm designações diferentes consoante as propriedades das aplicações que definem essas variedades. Assim,

- a variedade diz-se linear se a aplicação que a define for linear (variedade linear = espaço linear = espaço vetorial);
- a variedade diz-se afim se a aplicação que a define for afim (variedade afim = espaço afim);
- a variedade diz-se diferenciável se a aplicação que a define for diferenciável (em alguns contextos, a noção de variedade diferenciável é um pouco mais restritiva no seguinte sentido: a variedade diz-se diferenciável se a aplicação que a define for diferenciável e ainda se, em cada ponto do domínio da aplicação, a sua derivada for uma aplicação linear injetiva, o que é equivalente a afirmar que a característica da matriz jacobiana seja máxima);
- a variedade diz-se algébrica se a aplicação que a define for um polinómio.

O tema central destas notas é o estudo muito elementar de uma certa classe de variedades algébricas, designadas por cónicas e quádricas. Faremos esse estudo nas seções seguintes.

3. Cónicas

Nesta secção, consideremos o espaço vetorial canónico $\mathbb{R}^2$. Qualquer polinómio de duas variáveis e de grau dois tem a seguinte expressão:

$$p(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + b_1x + b_2y + c$$

em que todos os coeficientes são números reais e pelo menos um dos coeficienties a_{11} ou a_{22} ou a_{12} é diferente de zero. As parcelas $a_{11}x^2$ e $a_{22}y^2$ chamam-se termos quadrados. A parcela $a_{12}xy$ chama-se termo retangular. As parcelas b_1x e b_2y chamam-se termos lineares. A parcela c chama-se termo independente.

Definição 3.1. (**Cónica**). Define-se cónica como sendo o conjunto de zeros de qualquer polinómio de duas variáveis e de grau dois.

Temos então que, se Q é uma cónica,

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ p(x,y) = 0\}$$

em que $p(x,y)$ é um polinómio de duas variáveis e de grau dois:

$$p(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + b_1x + b_2y + c$$

Com o objetivo de classificar a cónica Q, introduziremos as seguintes matrizes associadas ao polinómio $p(x, y)$:

- A matriz A do tipo 2×2 definida por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

- A matriz B do tipo 2×1 definida por

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

- A matriz X do tipo 2×1 definida por

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

- A matriz C do tipo 1×1 definida por

$$C = \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

Assim, a equação $p(x, y) = 0$ é equivalente à equação matricial

$$X^T AX + B^T X + C = [0]_{1\times 1} \tag{1}$$

Definição 3.2. (**Segmento de reta**). Sejam E um espaço vetorial real e a e b dois pontos de E, não necessariamente distintos. O segmento de reta de a a b, denotado por $[a, b]$, é o conjunto definido por

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \in E : t \in [0, 1]\}$$

Os pontos a e b chamam-se pontos extremos do segmento de reta $[a, b]$. Se $a = b$, o segmento de reta $[a, a]$, que coincide com o conjunto singular $\{a\}$, designa-se por segmento de reta degenerado. Se $a \neq b$, o segmento de reta $[a, b]$ designa-se por segmento de reta não degenerado.

Observação. Note que, se $a = b$, o segmento de reta $[a, a]$ é um espaço afim de dimensão zero. Se $a \neq b$, o segmento de reta $[a, b]$ está contido num único espaço afim de dimensão um, que é o espaço afim definido por

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \in E : \ t \in \mathbb{R}\}$$

Definição 3.3. (**Cónica não degenerada**). Uma cónica $Q \subset \mathbb{R}^2$ diz-se não degenerada se Q não contém qualquer segmento de reta não degenerado e se Q não estiver contida em qualquer segmento de reta não degenerado.

Estabeleceremos seguidamente, sem referência a qualquer demonstração, dois teoremas fundamentais que classificam completamente todas as cónicas não degeneradas.

Teorema 3.4. *Seja Q a cónica definida pela equação matricial (1) e suponhamos que $Q \neq \emptyset$. Tem-se,*

a) Q é não degenerada $\iff$ $r[A|B] = 2$.

b) Toda a cónica não degenerada é uma elipse ou uma hipérbole ou uma parábola.

Teorema 3.5. *Seja Q a cónica definida pela equação matricial (1) e suponha-se que Q é não degenerada. Sejam λ e μ os valores próprios da matriz A. Tem-se,*

a) Q é uma elipse $\iff$ $\lambda\mu > 0$.

b) Q é uma hipérbole $\iff$ $\lambda\mu < 0$.

c) Q é uma parábola $\iff$ $\lambda\mu = 0$.

4. Quádricas

Nesta secção, consideremos o espaço vetorial canónico $\mathbb{R}^3$. Qualquer polinómio de três variáveis e de grau dois tem a seguinte expressão:

$$p(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c$$

em que todos os coeficientes são números reais e pelo menos um dos coeficienties a_{ij}, com $i, j \in \{1, 2\}$, é diferente de zero. As parcelas $a_{11}x^2$, $a_{22}y^2$ e $a_{33}z^2$ chamam-se termos quadrados. As parcelas $a_{12}xy$, $a_{13}xz$ e $a_{23}yz$ chamam-se termos retangulares. As parcelas b_1x, b_2y e b_3z chamam-se termos lineares. A parcela c chama-se termo independente.

Definição 4.1. (**Quádrica**). Define-se quádrica como sendo o conjunto de zeros de qualquer polinómio de três variáveis e de grau dois.

5. Exercícios

1. De forma informal, isto é, sem usar a teoria das matrizes, identifique a cónica definida por cada uma das seguintes equações.

   a) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

   b) $x^2 + y^2 = 0$

   c) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$

   d) $x^2 + y^2 - 2x = 2$

   e) $x^2 + y^2 - 2x = 1$

   f) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$

   g) $9x^2 + 4y^2 = 36$

   h) $y = 4x - x^2$

2. Classifique as cónicas definidas pelas seguintes equações.

   a) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$ (R.: parábola)

   b) $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$ (R.: hipérbole)

   c) $x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 6y - 1 = 0$ (R.: hipérbole)

   d) $x^2 + 2xy + x + 4y = 0$ (R.: hipérbole)

   e) $x^2 + 3x - y + 2 = 0$ (R.: parábola)

   f) $x^2 + 2y^2 + 3x + 4y + 1 = 0$ (R.: elipse)

   g) $4x^2 + 3y^2 + 6xy - x - y = 0$ (R.: elipse)

   Resolução. 2-a) Podemos aplicar as proposições 3.4 e 3.5. Temos

   - A matriz A do tipo 2×2 está definida por

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

   - A matriz B do tipo 2×1 está definida por

   $$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

- A matriz X do tipo 2×1 está definida por

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

- A matriz C do tipo 1×1 está definida por

$$C = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}_{1\times 1}$$

Ora,

$$r[A|B] = r \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ & & \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 2$$

Logo, pela proposição 3.4-a), a cónica é não degenerada. Determinemos os valores própios da matriz A, que são os zeros do polinómio $p(x) = det(xI_2 - A)$, em que I_2 denota a matriz identidade do tipo 2×2. Ora,

$$p(x) = 0 \Longleftrightarrow det(xI_2 - A) = 0 \Longleftrightarrow det \begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ & \\ 1 & x-1 \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x-1)^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

Logo, pela proposição 3.5, a cónica é uma parábola.

Observação. A proposição 3.5 pode ser usada quando a cónica é não degenerada. Se a cónica for degenerada, outras técnicas existem para determinar a natureza da cónica. Essas técnicas não foram estudadas na nossa unidade curricular. Em casos simples, podemos determinar a natureza de uma cónica degenerada fazendo simplificações apropriadas (por exemplo, usar os casos notáveis da multiplicação). As alíneas a), b) e c) do primeiro exercício são exemplos em que simplificações apropriadas mostram que esses conjuntos são cónicas degeneradas.