Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

2º Trabalho de Grupo de Análise - 5 Mai

Nome: Proposta de Resolução Número: ________

Nome: ______________________ Número: ________

1. Determine, ou justifique que não existem, os extremos locais da função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = e^y - x^2 y.$$

2. Determine os extremos da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 - y^2$, vinculada à condição:

$$x^2 + 2x + y^2 = 0.$$

$\boxed{1}$ Pontos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ e^y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^y = 0 \end{cases} \text{(impossível) ou } \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \text{ ou } x = -1 \end{cases} \qquad (1,0); (-1,0)$$

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -2x & e^y \end{bmatrix}$$

$$\text{Hess} f(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(\text{Hess} f(1,0)) = -4 \neq 0$$

$$\det[0] = 0$$

Logo $(1,0)$ é ponto de sela.

$$\text{Hess} f(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(\text{Hess} f(-1,0)) = -4 \neq 0$$

$$\det[0] = 0$$

Logo $(-1,0)$ é ponto de sela.

<u>Conclusão</u>: A função f não tem extremos locais.

$\boxed{2}$ Pelo método dos multiplicadores de Lagrange tem-se

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ x^2+2x+y^2=0 \end{cases}, \quad \text{onde } g(x,y) = x^2+2x+y^2 \text{ e } f(x,y) = x^2-y^2$$

$\nabla f(x,y) = (2x, -2y)$; $\nabla g(x,y) = (2x+2, 2y)$. Assim

$$\begin{cases} (2x,-2y) = \lambda(2x+2, 2y) \\ x^2+2x+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x + 2\lambda \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2+2x+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ y(1+\lambda)=0 \\ \text{---} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -2x - 2 \\ \lambda = -1 \\ \text{---} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{---} \\ y = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \text{---} \\ \frac{1}{4} - 1 + y^2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{---} \\ y = 0 \\ x(x+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ \text{---} \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{---} \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{---} \\ y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ \text{---} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1/2 \\ \text{---} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{---} \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \text{---} \\ y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$(-2, 0) \,;\, (0, 0) \,;\, \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ; \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$f(-2,0) = 4$

$f(0,0) = 0$

$f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -1/2$

$f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -1/2$

Pontos singulares

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = \vec{0} \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ 1 - 2 + 0 = 0 \end{cases} \text{ impossível,}$$

donde não há pontos singulares.

Sendo $K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x + y^2 = 0 \}$ um conj^to^ fechado e limitado, então $f_{|K}$ tem máximo e tem mínimo, donde $-\frac{1}{2}$ é mínimo condicionado $f(-2,0) = 4$ é máximo condicionado.