Universidade do Minho

Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Licenciatura em Ciências da Computação

23/03/2024

Primeiro Teste

Nome: Número:

1. Justifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

   (a) O grafo completo K_6 tem um circuito de comprimento 7.

   (b) Existe um grafo com 6 vértices cujos graus dos vértices são 5,4,3,2,2,1.

   (c) O grafo bipartido completo $K_{24,683}$ é um grafo Euleriano.

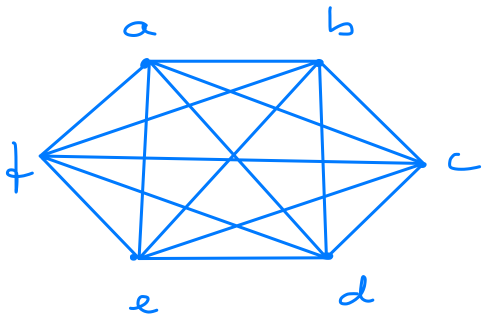
   (d) Existe um grafo planar conexo com 6 vértices todos eles de grau 4 e cuja representação planar tem 8 faces.

   (e) Um grafo conexo com 4 vértices e 3 arestas é necessariamente uma árvore.

a

Verdadeiro.

Uma representação do grafo K_6 é a seguinte:



O caminho

$\langle a, b, c, d, e, f, b, a \rangle$

é um circuito de comprimento 7.

b

Falso.

Pelo corolário do Teorema do aperto de mãos, todo o grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.

Assim, não é possível termos um grafo com a sequência gradual 5, 4, 3, 2, 2, 1 que apresenta três vértices de grau ímpar.

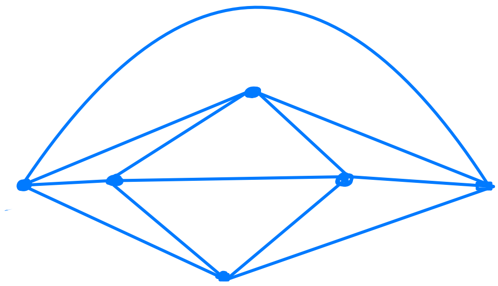
c

Verdadeiro.

O grafo $K_{24,683}$ é um grafo conexo que tem 24 vértices de de grau 683 (e 683 vértices de grau 24). Logo não é um grafo Euleriano, uma vez que um grafo conexo é um grafo Euleriano sse todos os seus vértices têm grau par.

d) Verdadeiro.

Exemplo:

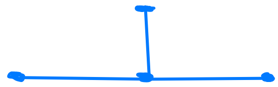


e) Verdadeiro.

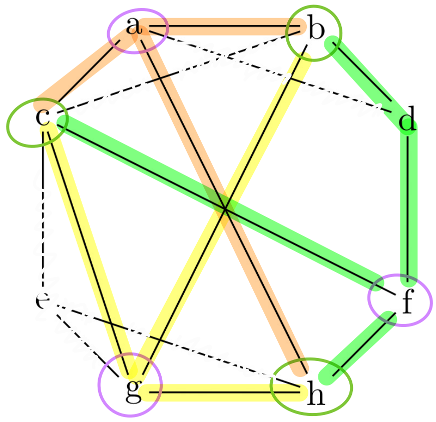
Um grafo com 4 vértices e 3 arestas se for conexo não pode conter um ciclo, uma vez que esse ciclo teria que ser formado pelas três arestas deixando um dos vértices desconectado dos restantes.

Logo um tal grafo sendo conexo não pode ter ciclos pelo que se trata efetivamente de uma árvore.

ou

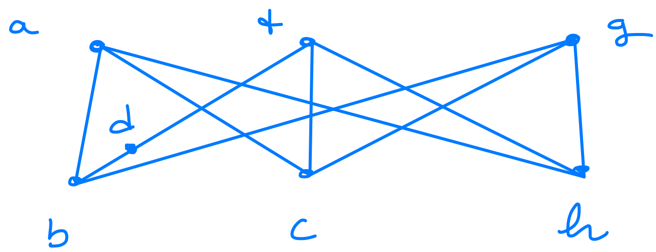


2. Justifique se o seguinte grafo é ou não planar.



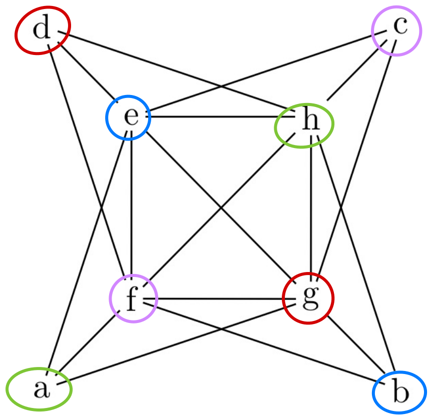
Consideremos o subgrafo que se obtem do grafo apresentado eliminando o vértice e e as arestas $\{a,d\}$ e $\{c,b\}$.

Neste subgrafo, o vértice d tem grau 2 e observamos que é assim homeomorfo a $K_{3,3}$.



Pelo teorema de Kuratowski, o grafo não é planar.

3. Considere o grafo G a seguir representado.



(a) Justifique se G é

(i) platónico (ii) bipartido (iii) semi-Euleriano (iv) Hamiltoniano

(b) Determine o número crómatico de G.

a i O grafo não é platónico uma vez que apresenta vértices de graus diferentes. Por exemplo, grau$(a) = 3 \neq$ grau$(f) = 6$.

ii O grafo não é bipartido pois apresenta ciclos de comprimento ímpar. Por exemplo, $\langle a, f, g, a \rangle$ é um ciclo de comprimento 3.

iii Um grafo conexo é semi-Euleriano sse tem exatamente dois vértices de grau ímpar. O grafo G tem 4 vértices de grau ímpar, os vértices a, b, c, d, logo não é semi-Euleriano.

iv O caminho $\langle a, e, d, h, c, g, b, f, a \rangle$ é um ciclo Hamiltoniano, isto é, um ciclo que contém todos os vértices de G, pelo que G é um grafo Hamiltoniano.

b A figura acima apresenta uma coloração de G com 4 cores pelo que $\chi(G) \leq 4$. Como K_4 é um subgrafo de G então $\chi(G) \geq 4$. Portanto, $\chi(G) = 4$.