Teorema dos números primos

Distribuição dos números primos

$\pi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0$ definida por

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathbb{N} : p \leq x \wedge p \in \mathcal{P}\} = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \leq x} 1.$$

In [1]:
```
L = prime_range(1, 50)
L
```
Out[1]: `[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47]`

In [2]:
```
len(L)
```
Out[2]: `15`

In [3]:
```
prime_pi(50)
```
Out[3]: `15`

In [4]:
```
def lista_primos(n):
    L = [p for p in range(1, floor(n)+1) if is_prime(p)]
    return L
```

In [5]:
```
lista_primos(9.4)
```
Out[5]: `[2, 3, 5, 7]`

In [6]:
```
lista_primos(10*pi)
```
Out[6]: `[2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31]`

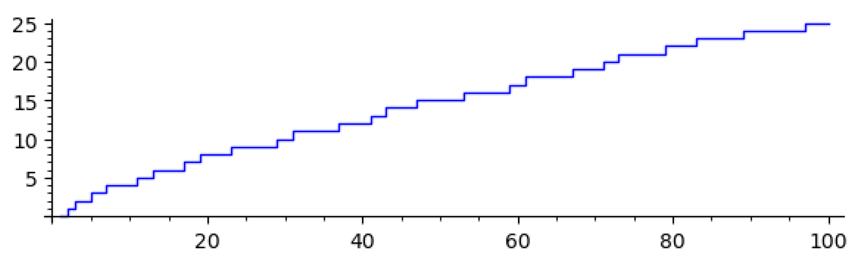
In [7]:
```
len(lista_primos(10*pi))
```
Out[7]: `11`

In [8]:
```
prime_pi(10*pi)
```
Out[8]: `11`

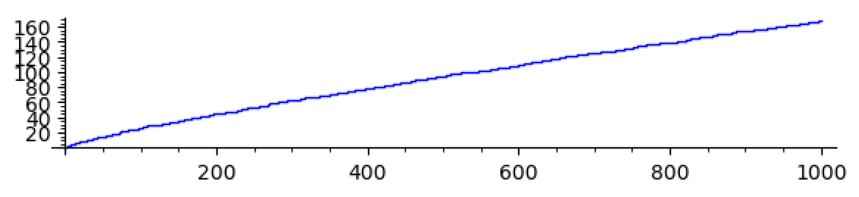
In [9]:
```
prime_pi(100)
```
Out[9]: `25`

In [10]:
```
prime_pi(10^10)-prime_pi(10^10-100)
```
Out[10]: `3`

In [11]:
```
plot(prime_pi, 1,100, aspect_ratio=true)
```
Out[11]:



In [12]:
```
plot(prime_pi, 1,1000, aspect_ratio=true)
```
Out[12]:



Estimação de $\pi(x)$.

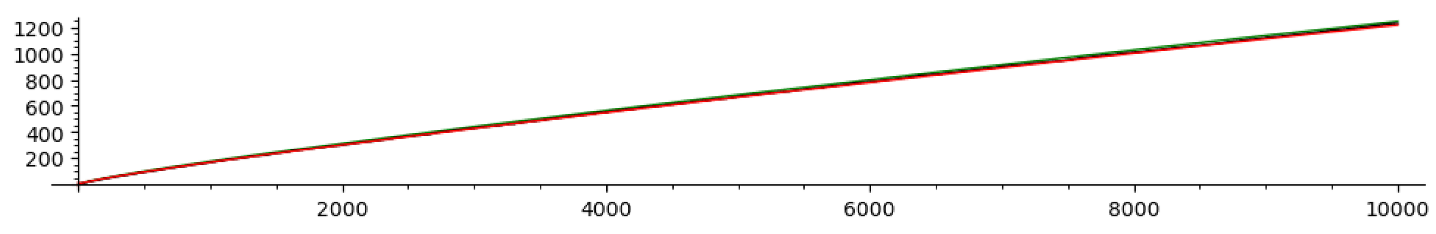
- (1798) Adrien-Marie Legendre, usando a tabela de primos de Vega até 400031, aproximou heuristicamente $\pi(x) \approx \dfrac{x}{log(x) - 1.08366}$.
- Gauss conjecturou que $\pi(x)$ cresce à mesma razão que $\frac{x}{log(x)}$ e que $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{log(t)} dt$.
- (1850) Chebychev mostrou que, para x suficientemente grande, existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$, com $c_1 < 1 < c_2$, para os quais
$$c_1 \frac{x}{log(x)} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{log(x)}.$$
Considerou $c_1 = 0.92129$ e $c_2 = 1.1056$. Sylvester melhorou com $c_1 = 0.95695$ e $c_2 = 1.04423$
- Chebychev: Se
$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{log(x)}}$$
é convergente com $x \to +\infty$ então converge para 1.

Teorema dos números primos

(Hadamard, Vallée-Poussin)

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{log(x)}} \to_{x \to +\infty} 1.$$

In [13]:
```
P = plot(Li, 2,10000, rgbcolor='green')
Q = plot(prime_pi, 2,10000, rgbcolor='black')
R = plot(x/(log(x)-1),2,10000,rgbcolor='red')
show(P+Q+R,xmin=0, aspect_ratio=true, figsize=[10,4])
```



Duas funções f e g dizem-se *assimptóticas*, $f \sim g$, se

$$\frac{f}{g} \to 1.$$

Teorema dos Números Primos:

- $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$
- $\pi(x) \sim Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$

A função ζ de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

com $s \in \mathbb{C}$.

In [14]:
```
zeta(1) #série harmónica
```
Out[14]: `Infinity`

In [15]:
```
zeta(2)
```
Out[15]: `1/6*pi^2`

In [16]:
```
pretty_print(zeta(2))
```
$$\frac{1}{6}\pi^2$$

In [17]:
```
zeta(4)
```
Out[17]: `1/90*pi^4`

Teorema de Euler , (s natural)

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

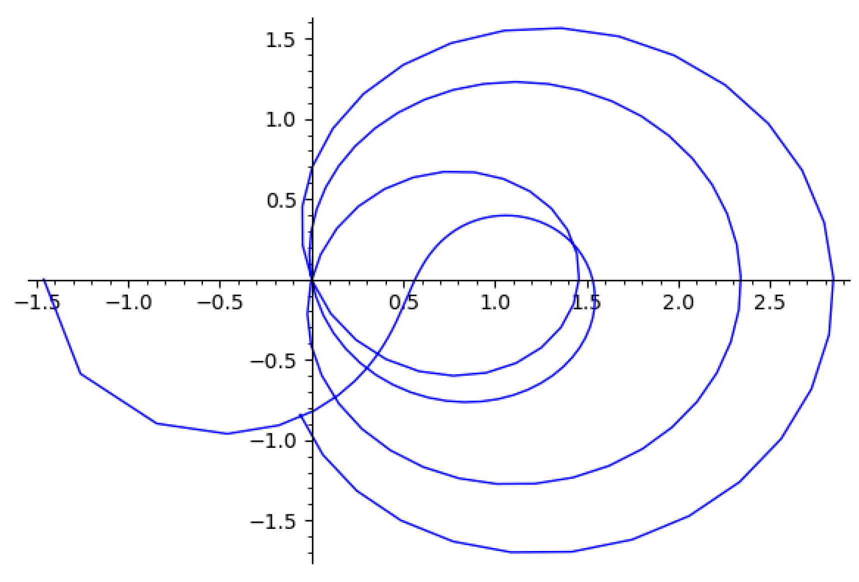
o que mostra que $\#\mathcal{P} = \aleph_0$.

Para $Re(s) > 1$ (na extensão analítica),

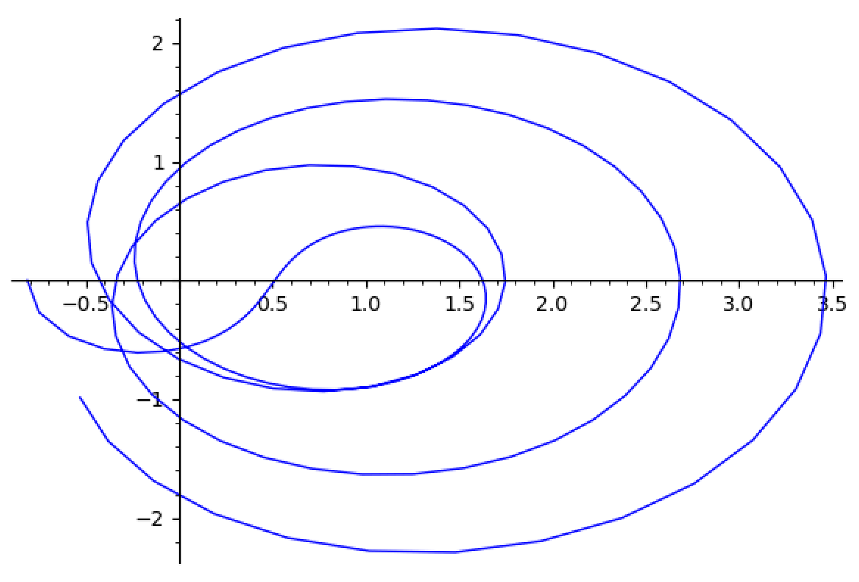
$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

https://doc.sagemath.org/html/en/reference/plotting/sage/plot/plot.html

In [18]:
```
I = CDF.0
show(line([zeta(1/2 + k*I/6) for k in range(180)]))
```

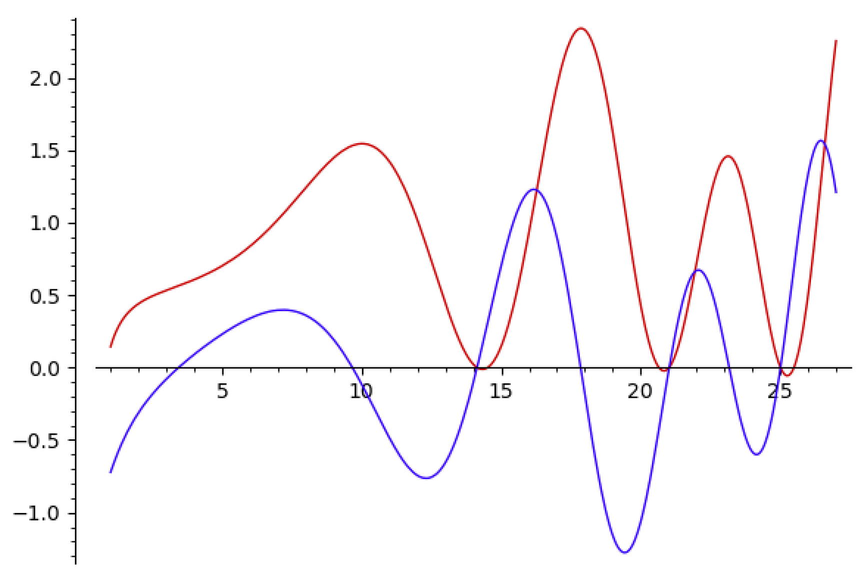


In [19]:
```
show(line([zeta(1/4 + k*I/6) for k in range(180)]))
```



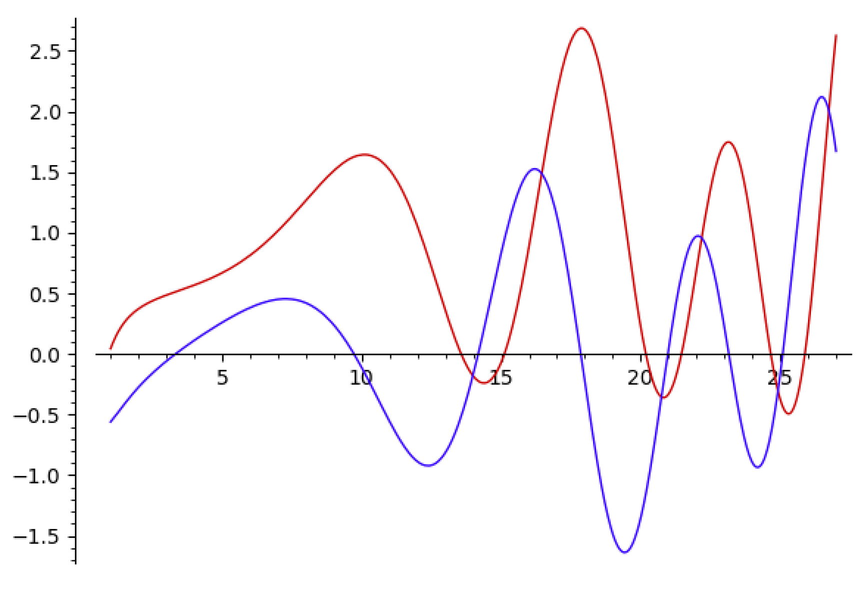
In [20]:
```
zeta(-2)
```
Out[20]: `0`

In [21]:
```
p1 = plot(lambda t: real_part(zeta(0.5+t*I)), 1, 27, rgbcolor=(0.8,0,0))
p2 = plot(lambda t: imag_part(zeta(0.5+t*I)), 1, 27, color=hue(0.7))
p1+p2
```
Out[21]:



Todos os zeros não triviais (ou seja, inteiros negativos) de ζ são em número infinito e estão na faixa crítica
$$\{a + bi : 0 < a < 1\} = \{s \in \mathbb{C} : 0 < Re(s) < 1\}.$$

In [22]:
```
p1 = plot(lambda t: real_part(zeta(0.25+t*I)), 1, 27, rgbcolor=(0.8,0,0))
p2 = plot(lambda t: imag_part(zeta(0.25+t*I)), 1, 27, color=hue(0.7))
p1+p2
```
Out[22]:



Hipótese de Riemann: *Todos* os zeros não triviais de ζ estão na linha crítica
$$\left\{\frac{1}{2} + bi : b \in \mathbb{R}\right\}.$$

A hipótese de Riemann é uma conjectura, e é um dos problemas do milénio do Clay Institute.

https://demonstrations.wolfram.com/HowTheZerosOfTheZetaFunctionPredictTheDistributionOfPrimes/

$$J(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \frac{1}{4}\pi(x^{\frac{1}{4}}) + \cdots, x \in \mathbb{R}$$

Esta soma **não é infinita!** Por exemplo, para calcular $J(100)$ apenas temos 7 parcelas, já que $\sqrt[8]{100} < 2$.

$J(x)$ é uma função escada, com saltos:

- 1 se x é primo
- 1/2 se x é um quadrado
- 1/3 se x é um cubo
- etc

$$\pi(x) = \sum_n \mu(n) \frac{J\left(\sqrt[n]{x}\right)}{n}$$

onde $\mu(n)$ é a função de Mobius:

- 1 se é livre de quadrados e com um número par de factores primos
- 0 se não é livre de quadrados
- -1 se é livre de quadrados e tem um número ímpar de factores primos

$$\pi(x) = J(x) - \frac{1}{2}J\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}J\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}J\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}J\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}J\left(x^{\frac{1}{7}}\right) + \frac{1}{10}J\left(x^{\frac{1}{10}}\right) - \cdots$$

$$\pi(100) = J(100) - \frac{1}{2}J\left(100^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}J\left(100^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}J\left(100^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}J\left(100^{\frac{1}{6}}\right)$$

$$J(x) = Li(x) - \sum_{\rho}^{+\infty} Li(x^{\rho}) - \log 2 + \int_x^{+\infty} \frac{1}{t(t^2-1)\log t} dt$$

In [ ]: