Álgebra Universal e Categorias

Carla Mendes

2024/2025

Departamento de Matemática

Teoria de Categorias

A teoria de categorias é um ramo da matemática que foi desenvolvido no sentido de unificar e clarificar diferentes conceitos matemáticos. Esta teoria permite identificar semelhanças estruturais entre diversos objetos matemáticos que aparentemente não estão relacionados, sendo assim possível formular conceitos de grande generalidade e efetuar a prova de resultados com aplicações nas mais diversas áreas da matemática e na área das ciências da computação.

Categorias

As teorias axiomáticas desempenham um papel relevante na área de matemática. Estas teorias tratam de conjuntos com uma determinada estrutura e de correspondências que relacionam estes conjuntos preservando a sua estrutura. O conceito de categoria generaliza estas teorias.

Definição

Uma ***categoria*** $\mathbf{C}$ *é um sêxtuplo* $(\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), dom, cod, id, \circ)$ *onde:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *é uma classe de entidades designadas por* ***objetos****, os objetos de* $\mathbf{C}$ *são usualmente representados por letras maiúsculas* $A, B, C, \ldots$*.*
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *é uma classe de entidades designadas por* ***morfismos****, os morfismos de* $\mathbf{C}$ *são usualmente representados por letras minúsculas* $f, g, h, \ldots$*.*
- $dom : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *é uma função que a cada morfismo* f *associa um objeto de* $\mathbf{C}$*, o objeto* $dom(f)$ *é designado por* ***domínio de*** f*.*
- $cod : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *é uma função que a cada morfismo* f *associa um objeto de* $\mathbf{C}$*, o objeto* $cod(f)$ *é designado por* ***codomínio de*** f*.*

Definição (continuação)

- $\circ : \text{Mor}(\mathbf{C}) \times \text{Mor}(\mathbf{C}) \to \text{Mor}(\mathbf{C})$ é uma função parcial que a cada par de morfismos (f, g) tais que $dom(g) = cod(f)$ associa um único morfismo $g \circ f : dom(f) \to cod(g)$, designado por **composição de g com f**, e que satisfaz a seguinte condição
  - (associatividade) para quaisquer morfismos f, g, h tais que $cod(f) = dom(g)$ e $cod(g) = dom(h)$,
  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- $id : \text{Obj}(\mathbf{C}) \to \text{Mor}(\mathbf{C})$ é uma função que a cada objeto A de $\mathbf{C}$ associa um morfismo id_A de $\mathbf{C}$ tal que $dom(id_A) = A$ e $\text{cod}(id_A) = A$. O morfismo id_A é designado por **identidade em** A e satisfaz a seguinte condição
  - (identidade) para quaisquer morfismos f e g tais que $dom(f) = A$ e $cod(g) = A$,
  $$f \circ id_A = f \quad \text{e} \quad id_A \circ g = g.$$

Terminologia e notação:

- Dado um morfismo f de $\mathbf{C}$, escrevemos $f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ para indicar que $dom(f) = A$ e $cod(f) = B$.
- Dados objetos A e B de uma categoria $\mathbf{C}$, pode não existir qualquer morfismo de A em B (se $A \neq B$) ou podem existir vários; a **coleção de morfismos de** A **em** B é representada por $\mathrm{Mor}(A, B)$.
- Os objetos e os morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$ são designados por $\mathbf{C}$-objetos e por $\mathbf{C}$-morfismos, respetivamente. Havendo necessidade de identificar a categoria à qual pertencem determinados morfismos, indexam-se os morfismos com o símbolo que designa a categoria. Por exemplo, para indicar que $\mathrm{Mor}(A, B)$, id_A, $g \circ f$ se referem a morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$, escreve-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$, $id_A^{\mathbf{C}}$, $g \circ_{\mathbf{C}} f$.

Da definição anterior resulta que, para cada objeto A de uma categoria **C**, existe um único morfismo identidade.

De facto, se admitirmos que, para um objeto A, existem dois morfismos identidade id_A e id'_A, então

$$id'_A = id'_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A.$$

Exemplos de categorias

(1) A categoria **Pfn**: Obj(**Pfn**) é a classe de todos os conjuntos. Mor(**Pfn**) é a classe de todas as funções parciais entre conjuntos. Se X e Y são conjuntos, define-se $\text{Mor}_{\mathbf{Pfn}}(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações parciais de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de aplicações parciais. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(2) A categoria **Set**: Obj(**Set**) é a classe de todos os conjuntos. Mor(**Set**) é a classe de todas as funções entre conjuntos. Se X e Y são conjuntos, define-se $\text{Mor}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de funções. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(3) A categoria **FinSet**: Obj(**FinSet**) é a classe de todos os conjuntos finitos. Mor(**FinSet**) é a classe de todas as funções entre conjuntos finitos. Se X e Y são conjuntos finitos, define-se $\text{Mor}_{\textbf{FinSet}}(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de funções. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(4) A categoria **Sgp**: Obj(**Sgp**) é a classe de todos os semigrupos. Mor(**Sgp**) é a classe de todos os homomorfismos de semigrupos. Dados semigrupos S e U, define-se $\text{Mor}_{\textbf{Sgp}}(S, U)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de semigrupo de S em U. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se S é um semigrupo, então id_S é o morfismo identidade.

(5) A categoria **Mon**: $\mathrm{Obj}(\mathbf{Mon})$ é a classe de todos os monóides. $\mathrm{Mor}(\mathbf{Mon})$ é a classe de todos os homomorfismos de monóides. Dados monóides S e T, define-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Mon}}(S, T)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de S em T. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se S é um monóide, então id_S é o morfismo identidade.

(6) A categoria **Grp**: $\mathrm{Obj}(\mathbf{Grp})$ é a classe de todos os grupos. $\mathrm{Mor}(\mathbf{Grp})$ é a classe de todos os homomorfismos de grupos. Dados grupos G e H, define-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Grp}}(G, H)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de grupo de G em H. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se G é um grupo, então id_G é o morfismo identidade.

(7) A categoria **AbGrp**: Obj(**AbGrp**) é a classe de todos os grupos abelianos. Mor(**AbGrp**) é a classe de todos os homomorfismos entre grupos abelianos. Dados grupos abelianos G e H, define-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{AbGrp}}(G, H)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de grupo de G em H. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se G é um grupo abeliano, então id_G é o morfismo identidade.

(8) A categoria **Rng**: Obj(**Rng**) é a classe de todos os anéis. Mor(**Rng**) é a classe de todos os homomorfismos de anéis. Dados anéis A e B, define-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Rng}}(A, B)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de anel de A em B. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se A é um anel, então id_A é o morfismo identidade.

(9) A categoria $\mathbf{Vect}_K$: $\mathrm{Obj}(\mathbf{Vect}_K)$ é a classe de todos os espaços vetoriais sobre um corpo K. Mor($\mathbf{Vect}_K$) é a classe de todas as aplicações lineares entre espaços vetoriais. Dados espaços vetoriais U e V sobre K, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Vect}_K}(U, V)$ é o conjunto de todas as aplicações lineares de U em V. A composição de morfismos é a composição usual de aplicações lineares. Se V é um espaço vetorial sobre K, id_V é a aplicação linear identidade.

(10) A categoria **Poset**: Obj(**Poset**) é a classe de todos os conjuntos parcialmente ordenados. Mor(**Poset**) é a classe de todas as aplicações isótonas entre conjuntos parcialmente ordenados. Dados conjuntos parcialmente ordenados P e Q, define-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Poset}}(P, Q)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações isótonas de P em Q. A composição de morfismos é a composição usual de aplicações. Dado um conjunto parcialmente ordenado P, id_P é a aplicação identidade em P.

As categorias anteriores são exemplos de categorias designadas por ***categorias concretas***, isto é, tratam-se de categorias cujos objetos são conjuntos (possivelmente com algum tipo de estrutura) e cujos morfismos são funções (que eventualmente preservam a estrutura do conjunto).

Além das categorias concretas, existem outras categorias, também relevantes, nas quais os objetos não têm de ser necessariamente conjuntos e os morfismos nem sempre são funções. Por exemplo, no caso particular das categorias finitas que a seguir se definem, os objetos e os morfismos podem ser qualquer tipo de objeto matemático ou de entidade física.

(1) A categoria $\mathbf{0}$: É a categoria sem objetos e sem morfismos.

(2) A categoria $\mathbf{1}$: A categoria que tem um único objeto e um único morfismo (o morfismo identidade associado ao único objeto da categoria).

(3) A categoria $\mathbf{2}$: A categoria que tem dois objetos, dois morfismos identidade e um morfismo de um objeto no outro.

(4) A categoria $\mathbf{3}$: A categoria que tem três objetos (designemo-los por $\star$, $\bullet$ e $*$), três morfismos identidade e outros três morfismos, $f : \star \to \bullet$, $g : \star \to *$ e $h : * \to \bullet$ tais que $f = h \circ g$.

Teoria de Categorias

Graficamente, as categorias **1**, **2** e **3** podem ser representadas por

$$
\begin{tikzcd}
\star \arrow[loop above, "id_\star"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\star \arrow[loop left, "id_\star"] \arrow[rr, "f"] & & \bullet \arrow[loop right, "id_\bullet"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& * \arrow[loop above, "id_*"] \arrow[dr, "h"] & \\
\star \arrow[loop left, "id_\star"] \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & \bullet \arrow[loop right, "id_\bullet"]
\end{tikzcd}
$$

(5) Todo o conjunto X pode ser visto como uma categoria $\mathbf{Dis}(X)$: os objetos de $\mathbf{Dis}(X)$ são os elementos de X e os únicos morfismos são os morfismos identidade (um para cada elemento $x \in X$).

(6) Todo o monóide $\mathcal{M} = (M; \cdot, 1_{\mathcal{M}})$ também pode ser encarado como uma categoria $\mathbf{M}$: esta categoria tem um único objeto (designamos este objeto por $\mathcal{M}$, mas poderá ser usada uma qualquer outra designação); os morfismos de $\mathbf{M}$ são os elementos de M, o morfismo identidade $id_{\mathcal{M}}$ é a identidade de $\mathcal{M}$ e a composição de morfismos é a operação binária do monóide.

(7) A categoria **Rel**: Obj(**Rel**) é a classe de todos os conjuntos. Dados conjuntos A e B, um morfismo de A em B é um subconjunto de $A \times B$ e, portanto, $\mathrm{Mor}(A, B)$ é o conjunto de todas as relações binárias de A em B. Dado um conjunto A, o morfismo identidade em A é a relação identidade em A definida por $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$. A composição de morfismos é a composição usual de relações binárias, isto é, dadas duas relações binárias $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$,

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C : \exists\, b \in B : (a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in S\}.$$

(8) Uma **linguagem de programação funcional** é definida por:

- tipos de dados primitivos;
- constantes de cada tipo;
- operações, que são funções entre os tipos;
- construtores, que podem ser aplicados a tipos de dados e operações para produzir outros tipos de dados e outras operações.

Toda a linguagem de programação funcional poderá ser associada a uma categoria se:

- adicionarmos à linguagem uma função identidade, id_A, para cada tipo A;
- adicionarmos um tipo adicional chamado $Unit$ tal que, para todo o tipo A, há uma única operação de A em $Unit$;
- cada constante c do tipo A for interpretada como uma operação que ao único elemento do tipo $Unit$ associa o elemento de A correspondente a c;

Teoria de Categorias

- adicionarmos um construtor de composição que a duas operações f e g, onde f é uma operação que tem como entrada um elemento do tipo A e produz um elemento do tipo B e g é uma operação que que tem como entrada um elemento do tipo B e como saída um elemento do tipo C, associa uma outra operação, usualmente representada por $f; g$ que tem como entrada um elemento do tipo A e que tem como saída um elemento do tipo C;
- sempre que uma das operações $(f; g); h$ ou $f; (g; h)$ estiver definida, a outra operação também está e ambas definem a mesma operação;
- para cada operação f com entrada A e saída B, as operações $f; id_A$ e $id_B; f$ forem definidas como sendo a mesma operação f; tal é conseguido acrescentando à linguagem as equações $id_A; f = f$ e $f; id_B = f$.

Teoria de Categorias

As linguagens de programação funcional geralmente possuem funções identidade para cada tipo e construtores de composição que respeitam a associatividade. A linguagem resultante das mudanças indicadas é operacionalmente equivalente à linguagem original.

Sob as condições indicadas, uma linguagem de programação funcional L possui uma estrutura de categoria $\mathbf{C}(L)$ onde:

- os tipos de L são os objetos de $\mathbf{C}(L)$.
- as operações (primitivas e derivadas) de L são os morfismos de $\mathbf{C}(L)$.
- o domínio e o codomínio de um morfismo são os tipos de entrada e saída da operação correspondente;
- a composição é dada pelo construtor de composição, escrita na ordem inversa;
- os morfismos identidade são as operações de "fazer nada".

Dependendo do "tamanho" da coleção de objetos e da coleção de morfismos que formam uma categoria, as categorias classificam-se de acordo com a definição seguinte.

Definição

Uma categoria $\mathbf{C}$ *diz-se:*

- ***pequena*** *se as classes* $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *e* $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *são conjuntos;*
- ***localmente pequena*** *se, para quaisquer objetos* A *e* B *de* $\mathbf{C}$*,* $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$ *é um conjunto;*
- ***magra*** *se, para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$*,* $|\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)| \leq 1$*;*
- ***discreta*** *se os únicos morfismos de* $\mathbf{C}$ *são os morfismos identidade.*

Exemplo

(1) Dado um conjunto X, a categoria **Dis**(X) *é discreta e magra.*

(2) As categorias $\mathbf{1}$ *e* $\mathbf{2}$ *são exemplos de categorias pequenas. O monóide* $(\mathbb{N};\cdot,1)$, *visto como uma categoria, também é exemplo de uma categoria pequena.*

Diagramas

Um *diagrama* numa categoria é uma coleção de objetos da categoria e uma coleção de morfismos relacionando estes objetos. A descrição de um diagrama e a prova de propriedades sobre objetos e morfismos de uma dada categoria pode tornar-se mais simples recorrendo a *diagramas representacionais*.

A definição de diagrama apresentada nesta secção é uma definição informal, mas é suficiente para o estudo desenvolvido ao longo das próximas secções.

Dá-se a designação de **diagrama numa categoria C** a uma coleção $\{D_i\}_{i \in I}$ de objetos de **C**, indexada por uma classe I, juntamente com uma coleção de morfismos (eventualmente vazia) entre os objetos de $\{D_i\}_{i \in I}$.

Um **diagrama representacional numa categoria C** é um grafo orientado cujos vértices representam objetos de um diagrama em **C** e cujas arestas orientadas representam morfismos do diagrama em **C**. Se uma determinada aresta representa um morfismo com domínio A e codomínio B, então o vértice origem e o vértice destino da aresta representam, respetivamente, os objetos A e B. Os vértices e as arestas do grafo podem ser identificados pelos nomes dos objetos e pelos nomes dos morfismos aos quais estão associados.

Sempre que seja claro pelo contexto, usaremos o termo diagrama para nos referirmos quer a diagramas quer a diagramas representacionais.

Um diagrama pode ser usado para representar uma categoria ou pode representar apenas uma parte dos objetos e dos morfismos que definem a categoria.

Teoria de Categorias

Por exemplo, o diagrama seguinte

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & C \arrow[loop below, "id_C"] \arrow[r, "h"'] & D \arrow[loop right, "id_D"]
\end{tikzcd}
$$

representa uma categoria com quatro objetos e dez morfismos. Note-se que, para cada objeto $X \in \{A, B, C, D\}$, existe um morfismo id_X e, para quaisquer morfismos $s \in \text{Mor}(X, Y)$ e $t \in \text{Mor}(Y, Z)$, com $X, Y, Z \in \{A, B, C, D\}$, existe um morfismo $t \circ s \in \text{Mor}(X, Z)$.

A representação do diagrama de uma categoria pode ser simplificada suprimindo a representação de alguns morfismos. Em particular, caso se assuma que um determinado diagrama representa uma categoria, os morfismos identidade podem ser omitidos, uma vez que é garantido que estes existem. Assim, o diagrama

$$\star \xrightarrow{f} \bullet$$

pode ser usado para representar a categoria **2**.

Teoria de Categorias

Note-se, porém, que no caso de morfismos resultantes da composição de outros dois é necessário que fique claro qual o morfismo respeitante à composição. Por exemplo, no caso dos diagramas seguintes

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[r, "f"'] & \bullet \arrow[r, "g"'] & * \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & * \arrow[dr, "h"] & \\ \star \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & * \arrow[dr, "h"] & \\ \star \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "l"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

o primeiro diagrama não representa uma categoria, uma vez que não há qualquer morfismo que possa corresponder ao morfismo $g \circ f$. No caso do segundo diagrama, caso se assuma que este representa uma categoria, tem de se considerar $f = h \circ g$. No último caso, este diagrama não será considerado a representação de uma categoria, a não ser que se identifique qual dos morfismos l ou f corresponde ao morfismo $h \circ g$.

O recurso a diagramas para estabelecer propriedades a respeito de categorias é bastante usual e tais propriedades são geralmente expressas dizendo que um determinado diagrama comuta.

Dado um diagrama representacional numa categoria $\mathbf{C}$ diz-se que o ***diagrama representacional comuta*** (ou que **é comutativo**) se, para quaisquer objetos A, B do diagrama e para qualquer par $((f_1, f_2, \ldots, f_n), (g_1, g_2, \ldots, g_m))$ de caminhos de A a B, em que $m, n \in \mathbb{N}$ e pelo menos um dos caminhos tem comprimento superior a 1, tem-se $f_n \circ \ldots f_2 \circ f_1 = g_m \circ \ldots g_2 \circ g_1$.

Teoria de Categorias

Por exemplo, quando se afirma que o diagrama a seguir representado comuta tal significa que $h \circ f = k$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dd, "h"] \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "k"'] & \\
 & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Teoria de Categorias

No caso do diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "g"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "k"'] & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, "l"'] &
\end{tikzcd}$$

diz-se que este diagrama comuta se $g \circ f = l \circ k$.

Relacionado com a definição anterior, diz-se que um **diagrama numa categoria comuta** (ou que **é comutativo**) se for representado por um diagrama representacional comutativo.

Construção de categorias

Seguidamente estudam-se alguns processos que permitem, a partir de categorias dadas, construir novas categorias.

Subcategorias, produtos, quocientes

Começamos por generalizar processos de construção usuais em diversas estruturas matemáticas; em particular, referimos a formação de subestruturas, de produtos de estruturas e de estruturas quociente.

Definição

Seja $\mathbf{C}$ *uma categoria. Uma categoria* $\mathbf{S}$ *diz-se uma* **subcategoria** *de* $\mathbf{C}$ *se:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$;
- *para qualquer objeto* S *de* $\mathbf{S}$, $\mathrm{id}_S^{\mathbf{C}}$ *é um morfismo de* $\mathbf{S}$ *e* $\mathrm{id}_S^{\mathbf{S}} = \mathrm{id}_S^{\mathbf{C}}$;
- *para qualquer* $\mathbf{S}$*-morfismo* f, $dom_{\mathbf{S}}(f) = dom_{\mathbf{C}}(f)$ *e* $cod_{\mathbf{S}}(f) = cod_{\mathbf{C}}(f)$;
- *para quaisquer* $\mathbf{S}$*-morfismos* f *e* g *tais que* $dom_{\mathbf{S}}(g) = cod_{\mathbf{S}}(f)$, *o morfismo* $g \circ_{\mathbf{S}} f$ *é o mesmo que o morfismo* $g \circ_{\mathbf{C}} f$.

Exemplo

(1) **Set** *é uma subcategoria de* **Pfn**.

(2) **FinSet** *é uma subcategoria de* **Set**.

(3) **AbGrp** *é uma subcategoria de* **Grp**.

Definição

Uma subcategoria **S** *de uma categoria* **C** *diz-se uma* ***subcategoria plena*** *de* **C** *se, para quaisquer objetos* A, B *de* **S**, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, B)$.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Designa-se por* ***categoria produto de*** $\mathbf{C}$ ***por*** $\mathbf{D}$, *e representa-se por* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, *a categoria definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *são todos os pares* (C, D), *onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* D *é um objecto de* $\mathbf{D}$;
- *os morfismos de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *são todos os pares* (f, g), *onde* f *é um morfismo de* $\mathbf{C}$ *e* g *é um morfismo de* $\mathbf{D}$;
- *para qualquer morfismo* (f, g) *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, $dom_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((f,g)) = (dom_{\mathbf{C}}(f), dom_{\mathbf{D}}(g))$ *e* $cod_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((f,g)) = (cod_{\mathbf{C}}(f), cod_{\mathbf{D}}(g))$;

Definição (continuação)

- para cada objeto (C, D) de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, o morfismo identidade $id^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}_{(C,D)}$ é o par $(id^{\mathbf{C}}_{C}, id^{\mathbf{D}}_{D})$;
- para quaisquer $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismos (f, g) e (f', g') tais que $dom((f', g')) = cod((f, g))$, a composição $(f', g') \circ_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}} (f, g)$ dos morfismos (f', g') e (f, g) é definida componente a componente, isto é, $(f', g') \circ_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}} (f, g) = (f' \circ_{\mathbf{C}} f, g' \circ_{\mathbf{D}} g)$.

Exemplo

Considerando grupos G e H como categorias $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$, o produto de categorias $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ corresponde ao usual produto direto dos grupos G e H.

Definição

Seja $\mathbf{C}$ *uma categoria. Uma relação de equivalência* $\sim$ *definida em* $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *diz-se uma* **congruência** *em* $\mathbf{C}$ *se, para quaisquer* $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *tais que* $f \sim g$*, as condições seguintes são satisfeitas:*

(1) $dom(f) = dom(g)$ *e* $cod(f) = cod(g)$*;*

(2) $j \circ f \circ i \sim j \circ g \circ i$*, sempre que as composições estejam definidas.*

Dado $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$*, representamos por* $[f]$ *a classe de equivalência de* f*.*

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $\sim$ *uma congruência em* $\mathbf{C}$. *Designa-se por* ***categoria quociente***, *e representa-se por* $\mathbf{C}/\sim$, *a categoria definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C}/\sim$ *são os objetos de* $\mathbf{C}$;
- *os morfismos de* $\mathbf{C}/\sim$ *são as classes de equivalência* $[f]$ *de todos os morfismos* f *de* $\mathbf{C}$;
- *para qualquer morfismo* $[f]$ *de* $\mathbf{C}/\sim$,

$$dom_{\mathbf{C}/\sim}([f]) = dom_{\mathbf{C}}(f), \quad cod_{\mathbf{C}/\sim}([f]) = cod_{\mathbf{C}}(f);$$

- *para cada objeto* A *de* $\mathbf{C}/\sim$, *o morfismo identidade* $id_A^{\mathbf{C}/\sim}$ *é* $[id_A^{\mathbf{C}}]$;
- *a composição* $[g] \circ_{\mathbf{C}/\sim} [f]$ *dos morfismos* $[f]$ *e* $[g]$ *é o morfismo* $[g \circ_{\mathbf{C}} f]$.

Dualidade

Um processo bastante simples, mas particularmente importante, que permite a construção de uma categoria a partir de outra categoria dada consiste em "trocar o sentido dos morfismos" da categoria inicial. A categoria obtida por este processo, cuja definição formal se apresenta a seguir, designa-se por *categoria dual* da categoria dada.

Definição

Seja $\mathbf{C}$ *uma categoria. Designa-se por* ***categorial dual*** *ou* ***categoria oposta*** *de* $\mathbf{C}$*, e representa-se por* $\mathbf{C}^{op}$*, a categoria definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C}^{op}$ *são os objetos de* $\mathbf{C}$*;*
- *os morfismos de* $\mathbf{C}^{op}$ *são os morfismos de* $\mathbf{C}$*;*
- *para qualquer* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{op})$, $dom_{\mathbf{C}^{op}}(f) = cod_{\mathbf{C}}(f)$, $cod_{\mathbf{C}^{op}}(f) = dom_{\mathbf{C}}(f)$;
- *para qualquer* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op})$, $id_A^{\mathbf{C}^{op}} = id_A^{\mathbf{C}}$;
- *para quaisquer* $\mathbf{C}^{op}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$, $g \circ_{\mathbf{C}^{op}} f = f \circ_{\mathbf{C}} g$.

Note-se que de acordo com a definição anterior, para quaisquer objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op})$, $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathbf{C}^{op}$ se e só se $f : B \to A$ é um morfismo de $\mathbf{C}$.

Observe-se também que $(\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$.

Assim, toda a categoria é a dual de alguma categoria e toda a definição da teoria de categorias pode ser reformulada numa definição na categoria dual.

Cada afirmação S sobre categorias pode ser transformada numa afirmação dual S^{op}, trocando as palavras "domínio" e "codomínio" e substituindo cada ocorrência de $f \circ g$ por $g \circ f$.

Se S é uma afirmação verdadeira a respeito de uma categoria $\mathbf{C}$ então S^{op} é uma afirmação verdadeira a respeito de $\mathbf{C}^{op}$. Por conseguinte, é válido o princípio seguinte.

Princípio da dualidade: Se S é uma afirmação verdadeira para todas as categorias, então S^{op} também é uma afirmação verdadeira para todas as categorias.

Categorias de morfismos

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* I *um objeto de* $\mathbf{C}$*. Designa-se por* ***categoria dos objetos sobre*** I*, e representa-se por* $\mathbf{C}/\mathbf{I}$*, a categoria definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C}/\mathbf{I}$ *são todos os morfismos de* $\mathbf{C}$ *com codomínio* I*;*
- *dados objetos* f *e* g *de* $\mathbf{C}/\mathbf{I}$ *(isto é, dados* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to I$ *e* $g : B \to I$*), um* $\mathbf{C}/\mathbf{I}$*-morfismo de* f *em* g *é um triplo de morfismos* (f, j, g)*, onde* j *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo de* A *em* B *tal que* $g \circ_{\mathbf{C}} j = f$*;*
- *para cada objeto* $f : A \to I$ *de* $\mathbf{C}/\mathbf{I}$*, o morfismo identidade* $id_f^{\mathbf{C}/\mathbf{I}}$ *é o triplo de* $\mathbf{C}$*-morfismos* (f, id_A, f)*;*
- *a composição* $(f_2, h, f_3) \circ_{\mathbf{C}/\mathbf{I}} (f_1, g, f_2)$ *dos morfismos* $(f_1, g, f_2) : f_1 \to f_2$ *e* $(f_2, h, f_3) : f_2 \to f_3$ *de* $\mathbf{C}/I$ *é o morfismo* $(f_1, h \circ_{\mathbf{C}} g, f_3) : f_1 \to f_3$*.*

Dualmente, define-se $\mathbf{I}/\mathbf{C}$, a ***categoria dos objetos sob*** I.

Definição

Seja $\mathbf{C}$ *uma categoria. Designa-se por* ***categoria dos*** $\mathbf{C}$***-morfismos****, e representa-se por* $\mathbf{C}^{\rightarrow}$*, a categoria definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ *são os morfismos de* $\mathbf{C}$*;*
- *dados objetos* f_1, f_2 *de* $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ *(isto é, dados* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1$ *e* $f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$*), um morfismo de* f_1 *em* f_2 *é um par* $(j : X_1 \rightarrow X_2, k : Y_1 \rightarrow Y_2)$ *de* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que* $f_2 \circ_{\mathbf{C}} j = k \circ_{\mathbf{C}} f_1$*;*
- *para qualquer* $\mathbf{C}^{\rightarrow}$*-objeto* $f : X \rightarrow Y$*, o morfismo identidade* $id_f^{\mathbf{C}^{\rightarrow}}$ *é o par* $(id_X^{\mathbf{C}}, id_Y^{\mathbf{C}})$*;*
- *a composição* $(j', k') \circ_{\mathbf{C}^{\rightarrow}} (j, k)$ *dos morfismos* $(j, k) : f_1 \rightarrow f_2$ *e* $(j', k') : f_2 \rightarrow f_3$ *é o morfismo* $(j' \circ_{\mathbf{C}} j, k' \circ_{\mathbf{C}} k) : f_1 \rightarrow f_3$*.*

Morfismos especiais

No estudo de conjuntos e funções têm especial destaque as funções que satisfazem propriedades tais como injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Tais propriedades motivaram a definição de conceitos análogos para morfismos de categorias, os quais desempenham um papel relevante no estudo da teoria de categorias.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$.
Um morfismo $f : A \to B$ *de* $\mathbf{C}$ *diz-se um* **monomorfismo** *se* f *é* **cancelável à esquerda**, *i.e., se para quaisquer morfismos* $g, h : C \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$

Um monomorfismo f *de* A *em* B *também se diz uma* ***inclusão*** *de* A *em* B *e é usualmente representado por* $f : A \rightarrowtail B$ *ou* $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$.
Caso exista um monomorfismo de A *em* B, *então* A *diz-se um* ***subobjeto de*** B *e escreve-se* $A \subset B$.

Proposição

Na categoria **Set***, os monomorfismos são exatamente as aplicações injetivas.*

Demonstração

Seja $f : A \to B$ uma função injetiva e sejam $g, h : C \to A$ funções tais que $f \circ g = f \circ h$.

Então tem-se necessariamente $g = h$.

Com efeito, se admitirmos que $g \neq h$, existe $c \in C$ tal que $g(c) \neq h(c)$ e, uma vez que f é injetiva, segue que $f(g(c)) \neq f(h(c))$, o que contradiz $f \circ g = f \circ h$.

Demonstração.

Reciprocamente, admitamos que $f : A \to B$ é um momomorfismo.

Sejam $a, a' \in A$ tais que $a \neq a'$. No sentido de provar que $f(a) \neq f(a')$, consideremos um conjunto singular $\{x\}$ e as funções

$$\begin{array}{rccc} \overline{a}: & \{x\} & \to & A \\ & x & \mapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \overline{a'}: & \{x\} & \to & A \\ & x & \mapsto & a' \end{array}.$$

Uma vez que $\overline{a} \neq \overline{a'}$ e f é um monomorfismo, então $f \circ \overline{a} \neq f \circ \overline{a'}$. Assim,

$$f(a) = (f \circ \overline{a})(x) \neq (f \circ \overline{a'})(x) = f(a').$$

Logo f é injetiva. $\square$

Em muitas outras categorias nas quais os morfismos são funções, verifica-se que os monomorfismos são exatamente as funções injetivas; tal acontece, por exemplo, em muitas categorias de "conjuntos estruturados" tais como as categorias **Grp**, **Rng**, $\mathbf{Vect}_K$.

Observe-se, no entanto, que existem categorias cujos morfismos são funções e nas quais a classe dos monomorfismos não coincide com a classe das funções injetivas.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$.
Um morfismo $f : A \to B$ *de* $\mathbf{C}$ *diz-se um* **epimorfismo** *se* f *é* **cancelável à direita**, *i.e., se para quaisquer morfismos* $g, h : B \to C$,

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Um epimorfismo f *de* A *em* B *é usualmente representado por* $f : A \twoheadrightarrow B$ *ou* $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$.
Caso exista um epimorfismo de A *em* B, *então* B *diz-se um* ***objeto quociente*** *de* A.

A noção de epimorfismo é dual da noção de monomorfismo.

Assim, um morfismo f é um epimorfismo numa categoria $\mathbf{C}$ se e só se f é um monomorfismo na categoria dual $\mathbf{C}^{op}$.

O conceito de epimorfismo surge como uma abstração do conceito de função sobrejetiva e na categoria **Set** verifica-se o seguinte.

Proposição

Os epimorfismos na categoria **Set** *são exatamente as funções sobrejetivas.*

Demonstração

Sejam $f : A \to B$ uma função sobrejetiva e $g, h : B \to C$ funções tais que $g \neq h$.

Então, para algum $b \in B$, $g(b) \neq h(b)$ e, uma vez que f é sobrejetiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Assim, $g(f(a)) \neq h(f(a))$ e, portanto, $g \circ f \neq h \circ f$.

Logo f é um epimorfismo.

Demonstração.

Reciprocamente, suponhamos que $f : A \to B$ não é uma função sobrejetiva.

Então existe $b \in B$ tal que, para todo $a \in A$, $b \neq f(a)$.

No sentido de provar que f não é um epimorfismo, consideremos duas funções $g, h : B \to \{0, 1\}$ definidas da seguinte forma:

(i) $g(a) = h(a) = 0$, para todo $a \in B$ tal que $a \neq b$,

(ii) $g(b) = 0$,

(iii) $h(b) = 1$.

Então $g \circ f = h \circ f$, mas $g \neq h$ e, portanto, f não é um epimorfismo. $\square$

Embora na categoria **Set** os epimorfimos coincidam com as funções sobrejetivas, tal não é em geral verdade para outras categorias cujos morfismos são funções.

Exemplo

Na categoria **Mon**, *consideremos os monóides* $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *e* $(\mathbb{N}_0, +, 0)$.

A função de inclusão $i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, *que a cada inteiro não negativo* z *associa o inteiro* z, *é um monomorfismo.*

Esta função também é um epimorfismo, pois assumindo que g *e* h *são dois morfismos do monóide* $(\mathbb{Z}; +, 0)$ *num monóide* $(E; *, 1_E)$ *tais que* $g \circ i = h \circ i$, *prova-se que* $g = h$.

No entanto, a função i *não é sobrejetiva.*

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$.

(1) *Para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$, id_A *é um monomorfismo e um epimorfismo.*

(2) *Se* f *e* g *são monomorfismos (respetivamente, epimorfismos), então* $g \circ f$ *é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo).*

(3) *Se* $g \circ f$ *é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo), então* f *é um monomorfismo (respetivamente,* g *é um epimorfismo).*

Demonstração

(2) Sejam $i : D \to A$ e $j : D \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$. Pretendemos mostrar que $i = j$.

Ora, assumindo que $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$, então, por associatividade, tem-se $g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j)$.

Uma vez que g é um monomorfismo, segue que $f \circ i = f \circ j$.

Por último, atendendo a que f é um monomorfismo tem-se $i = j$.

Demonstração.

(3) Suponhamos que $g \circ f$ é um monomorfismo.

Pretendemos mostrar que, para quaisquer $i : D \to A$ e $j : D \to A$, se $f \circ i = f \circ j$, então $i = j$.

De facto, se $f \circ i = f \circ j$, então $g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j)$.

Por conseguinte, $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$ e atendendo a que $g \circ f$ é um monomorfismo vem que $i = j$. $\square$

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria. Um morfismo* $f : A \to B$ *de* $\mathbf{C}$ *diz-se um* ***bimorfismo*** *se é simultanemente um monomorfismo e um epimorfismo.*

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$ *um morfismo de* $\mathbf{C}$. *Diz-se que:*

- f *é* ***invertível à direita*** *se existe um morfismo* $g : B \to A$ *de* $\mathbf{C}$ *tal que* $f \circ g = \mathrm{id}_B$*; neste caso, o morfismo* g *diz-se um* ***um inverso direito*** *de* f.
- f *é* ***invertível à esquerda*** *se existe um morfismo* $g : B \to A$ *de* $\mathbf{C}$ *tal que* $g \circ f = \mathrm{id}_A$*; neste caso, o morfismo* g *diz-se um* ***um inverso esquerdo*** *de* f.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$.

Então $f : B \to A$ e $g : A \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}^{op}$.

Assim, tem-se $g \circ f = \mathrm{id}_A$ em $\mathbf{C}$ se e só se $f \circ g = \mathrm{id}_A$ em $\mathbf{C}^{op}$.

Por conseguinte, os conceitos de inverso direito e inverso esquerdo são duais.

Proposição

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *morfsmos numa categoria* $\mathbf{C}$*.*

(1) *Para todo* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_A *é invertível à direita e à esquerda.*

(2) *Se* f *e* g *são invertíveis à direita (respetivamente, esquerda), então* $g \circ f$ *é invertível à direita (respetivamente, esquerda).*

(3) *Se* $g \circ f$ *é invertível à direita (respetivamente, esquerda), então* g *é invertível à direita (respetivamente,* f *é invertível à esquerda).*

Observe-se que existem morfismos que podem não ter qualquer inverso esquerdo.

Na categoria **Set**, a função $f : \{0, 1\} \to \{1\}$ definida por

$$f(0) = f(1) = 1$$

não tem inverso esquerdo.

Verifica-se também que um mesmo morfismo pode ter mais do que um inverso esquerdo.

Se consideramos na categoria **Set** a função

$$\begin{array}{rcl} f:\{0,1\} & \to & \{0,1,2\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array},$$

então as funções

$$\begin{array}{rcl} g:\{0,1,2\} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h:\{0,1,2\} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{array}$$

são inversos esquerdos de f.

Os conceitos de morfismos invertíveis à esquerda (respetivamente, invertíveis à direita) e de monomorfismo (respetivamente, epimorfismo) estão relacionados entre si, como se verifica nos resultados seguintes.

Proposição

Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria $\mathbf{C}$.

(1) *Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.*

(2) *Se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.*

Demonstração.

(1) Suponhamos que f é invertível à esquerda. Então f tem um inverso esquerdo, isto é, existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por conseguinte, para quaisquer morfismos $i, j : C \to A$

$$\begin{array}{rcll} f \circ i = f \circ j & \Rightarrow & g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j) & \\ & \Rightarrow & (g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j & \text{(por associatividade)} \\ & \Rightarrow & id_A \circ i = id_A \circ j & (g \text{ é inverso esquerdo de } f) \\ & \Rightarrow & i = j & \end{array}$$

$\square$

O recíproco do resultado anterior não é, porém, válido em geral, ou seja, nem todo o monomorfismo é um morfismo invertível à esquerda e nem todo o epimorfismo é invertível à direita.

Por exemplo, na categoria **2**, o único morfismo de um objeto no outro é um epimorfismo e um monomorfismo, mas não tem nem inverso direito nem inverso esquerdo.

Na categoria **Set** é, no entanto, possível garantir a existência de inverso esquerdo (respetivamente, inverso direito) para certos monomorfismos (respetivamente, epimorfismos).

Proposição

Na categoria **Set**, *todo o monomorfismo com domínio não vazio é invertível à esquerda e todo o epimorfismo é invertível à direita.*

Demonstração

Seja $f : A \to B$ um monomorfismo com domínio não vazio.

Então $A \neq \emptyset$ e f é injetiva.

Por conseguinte, é possível definir uma função $g : B \to A$, da seguinte forma: $g(f(a)) = a$, para todo $a \in A$ e $g(b) = a_0$, se $b \notin f(A)$, com a_0 elemento fixo em A.

A função g é um inverso esquerdo de f.

Demonstração.

Se $f : A \to B$ é um epimorfismo, então f é sobrejetiva.

Neste caso, pode definir-se uma função $h : B \to A$ da seguinte forma: para todo $b \in B$, $h(b) = a$, onde a é um elemento fixo em A tal que $f(a) = b$.

Esta função h é um inverso direito de f. Note-se que se f não é injetiva, este inverso não é único.

$\square$

Caso um determinado morfismo de uma categoria admita simultaneamente inverso esquerdo e inverso direito, então estes são o mesmo morfismo.

Proposição

Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria $\mathbf{C}$. *Se $g : B \to A$ é um inverso direito de f e $h : B \to A$ é um inverso esquerdo de f, então $g = h$.*

Demonstração.

Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$ tal que $g : B \to A$ é um inverso direito de f e $h : B \to A$ é um inverso esquerdo de f. Então

$$g = \mathrm{id}_A \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ \mathrm{id}_B = h.$$

$\square$

Definição

Um morfismo $f : A \to B$ de uma categoria **C** *diz-se um* ***isomorfismo*** *ou um* ***morfismo invertível*** *se é simultaneamente invertível à direita e à esquerda. Um isomorfismo f de A em B é usualmente representado por $f : A \xrightarrow{\backsim} B$.*

Exemplo

(1) *Na categoria* **Set**, *os isomorfismos são exatamente as funções bijetivas.*
(2) *Na categoria* **Grp**, *os isomorfismos são os homomorfismos de grupo bijetivos.*

Proposição

Seja $\mathbf{C}$ *uma categoria.*

(1) *Para todo* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_A *é um isomorfismo.*

(2) *Se* $f : A \to B$ *é um isomorfismo, então existe um único morfismo* $g : B \to A$ *tal que* $g \circ f = \mathrm{id}_A$ *e* $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Definição

Seja $f : A \to B$ *um isomorfismo numa categoria* $\mathbf{C}$. *Designa-se por* ***inverso de*** f, *e representa-se por* f^{-1}, *o único morfismo* $f^{-1} : B \to A$ *tal que* $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ *e* $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

Proposição

Se $f : A \to B$ *é um isomorfismo numa categoria* $\mathbf{C}$, *então* $f^{-1} : B \to A$ *também é um isomorfismo.*

Caso exista um isomorfismo de um objeto A num objeto B também existe um isomorfismo de B em A.

Assim, caso exista um isomorfismo de um objeto A num objeto B diz-se apenas que os objetos A e B são isomorfos e escreve-se $A \cong B$.

Generalizando o que sucede a respeito da composição de funções bijetivas na categoria **Set**, onde a composição de funções bijetivas é ainda uma função bijetiva, a composição de isomorfismos numa categoria **C** também é um isomorfismo.

Proposição

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ isomorfismos numa categoria $\mathbf{C}$. Então $g \circ f$ é um isomorfismo e o seu inverso é $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposição

Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria $\mathbf{C}$.
Se f é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo) e é invertível à direita (respetivamente, invertível à esquerda), então f é um isomorfismo.

Demonstração.

Seja $f : A \to B$ um monomorfismo invertível à direita.

Então existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Logo $(f \circ g) \circ f = \mathrm{id}_B \circ f = f$, donde $f \circ (g \circ f) = f \circ \mathrm{id}_A$.

Por conseguinte, atendendo a que f é um monomorfismo, tem-se

$$g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Assim, g é simultaneamente um inverso direito e um inverso esquerdo de f e, portanto, f é um isomorfismo. $\square$

Observe-se que todo o isomorfismo é um bimorfismo.

Contudo, um bimorfismo não é necessariamente um isomorfismo.

Na categoria **Mon** é possível encontrar bimorfismos que não são isomorfismos. De facto, $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ e $(\mathbb{Z}, +, 0)$ são objetos desta categoria e a função $i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, que a cada inteiro não negativo z associa o respetivo inteiro z, não é invertível, mas é um monomorfismo e um epimorfismo.

Definição

Uma categoria **C** *diz-se* ***equilibrada*** *se todo o bimorfismo é um isomorfismo.*

Exemplo

A categoria **Set** *é equilibrada, mas a categoria* **Mon** *não é.*

Limites e colimites

Os conceitos de limite e de colimite unificam muitas construções da matemática que são similares entre si. De facto, como será possível verificar através de alguns dos exemplos apresentados ao longo desta secção, muitos dos métodos de construção de novas estruturas a partir de outras estruturas dadas não são mais do que limites ou de colimites em categorias adequadas.

Objetos iniciais, objetos terminais

Nesta secção consideram-se caracterizações abstratas do conjunto vazio e dos conjuntos singulares da categoria **Set** e de outros objetos estruturalmente similares existentes em outras categorias.

Definição

Seja **C** *uma categoria.*

- *Um objeto I de* **C** *diz-se um* ***objeto inicial*** *se, para qualquer objeto X de* **C**, *existe um, e um só, morfismo $I \to X$.*
- *Um objeto T de* **C** *diz-se um* ***objeto terminal*** *se, para qualquer objeto X de* **C**, *existe um, e um só, morfismo $X \to T$.*

Exemplo

(1) *Na categoria* **Set***, o conjunto vazio é um objeto inicial e qualquer conjunto singular* $\{x\}$ *é um objeto terminal. Note-se que a categoria* **Set** *tem um único objeto inicial e tem vários objetos terminais.*

(2) *Na categoria* **Grp***, um grupo trivial é um objeto inicial e terminal.*

(3) *Na categoria* **Poset***, qualquer c.p.o.* $(\{x\}, \{(x, x)\})$ *é um objeto terminal.*

Exemplo

(4) *Considerando o c.p.o.* $(\mathbb{N}_0, \leq)$ *como uma categoria, o inteiro zero é o único objeto inicial e não existem objetos terminais. O c.p.o.* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *não tem objetos iniciais nem objetos terminais.*

(5) *Um c.p.o., encarado como uma categoria, tem objeto inicial se e só se tem elemento mínimo e tem objeto terminal se e só se tem elemento máximo.*

Os exemplos anteriores permitem perceber que certas categorias não têm qualquer objeto inicial nem qualquer objeto terminal e que em outros casos a mesma categoria pode ter vários objetos iniciais ou vários objetos terminais. Caso uma determinada uma categoria tenha mais do que um objeto inicial (respetivamente, terminal) prova-se que este é único a menos de isomorfismo.

Proposição

Os objetos iniciais (respetivamente, terminais) de uma categoria $\mathbf{C}$*, caso existam, são únicos a menos de isomorfismo. Reciprocamente, se* I *é um objeto inicial (respetivamente, terminal) e* $I \cong J$*, então* J *é um objeto inicial (respetivamente, terminal).*

Demonstração.

Se I e J são objetos iniciais numa categoria $\mathbf{C}$, então existem morfismos únicos $f : I \to J$ e $g : J \to I$.

Por conseguinte, $g \circ f$ é um morfismo de I em I.

Outro morfismo de I em I é o morfismo identidade id_I.

Atendendo a que I é um objeto inicial, existe um único morfismo de I em I; logo $g \circ f = \mathrm{id}_I$.

De modo análogo, tem-se $f \circ g = \mathrm{id}_J$. Logo g é inverso direito e inverso esquerdo de f e, portanto, f é um isomorfismo.

Assim, $I \cong J$.

Demonstração.

Reciprocamente, sejam I e J objetos de $\mathbf{C}$ tais que I é um objeto inicial e $I \cong J$.

Então, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $f : I \to X$ e existe um isomorfismo $i : I \to J$.

Logo $f \circ u^{-1} : J \to X$ é um $\mathbf{C}$-morfismo e prova-se que este é o único $\mathbf{C}$-morfismo de J em X.

De facto, se $g : J \to X$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, tem-se $g \circ i : I \to X$ e, por conseguinte, $g \circ i = f$.

Logo $g = f \circ i^{-1}$.

Assim, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $J \to X$ e, portanto, J é um objeto inicial de $\mathbf{C}$.

□

Nos exemplos anteriores verificou-se que um mesmo objeto pode ser simultaneamente inicial e terminal.

Definição

Um objecto 0 *numa categoria* $\mathbf{C}$ *que seja simultaneamente inicial e terminal diz-se um* ***objeto zero****.*

Observação: Note-se que uma categoria pode ter objetos iniciais e objetos terminais e não ter objeto zero; é o caso, por exemplo, da categoria **Set**.

Se **C** é uma categoria com objeto zero 0, então, para quaisquer objetos A e B existem morfismos únicos $\xi_A : A \to 0$ e $\xi^B : 0 \to B$. Considerando a composição $\xi^B \circ \xi_A : A \to B$, prova-se que este morfismo depende apenas de A e B e não depende de 0.

Proposição

Sejam **C** *uma categoria,* 0 *e* $0'$ *objetos zero e* A*,* B *objetos de* **C***. Então o diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\xi^B"] & B \\ A \arrow[u, "\xi_A"] \arrow[r, "\xi'_A"'] & 0' \arrow[u, "\xi'^B"'] \end{tikzcd}$$

comuta; i.e., $\xi^B \circ \xi_A = \xi'^B \circ \xi'_A$.

Demonstração.

Como 0 e $0'$ são objetos zero, existe um isomorfismo entre eles. Seja $f : 0 \to 0'$ esse isomorfismo. Então

$$f \circ \xi_A = {\xi'}_A \quad \text{e} \quad {\xi'}^B \circ f = \xi^B,$$

donde

$$\xi_A = f^{-1} \circ {\xi'}_A \quad \text{e} \quad \xi^B = {\xi'}^B \circ f.$$

Logo

$$\xi^B \circ \xi_A = ({\xi'}^B \circ f) \circ (f^{-1} \circ {\xi'}_A) = {\xi'}^B \circ (f \circ f^{-1}) \circ {\xi'}_A = {\xi'}^B \circ {\xi'}_A.$$

□

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* 0 *um objeto zero de* $\mathbf{C}$*,* A *e* B *objetos de* $\mathbf{C}$*,* $\xi_A : A \to 0$ *o único morfismo de* A *em* 0 *e* $\xi^B : 0 \to B$ *o único morfismo de* 0 *em* B*. Chama-se* ***morfismo nulo*** *de* A *em* B *ao morfismo* $\xi^B \circ \xi_A$*.*

A proposição anterior garante que numa categoria com objeto zero, para quaisquer dois objetos A e B da categoria, existe um único morfismo nulo de A em B que representamos por $0_{A,B}$.

Exemplo

Na categoria **Grp**, *se* $\mathcal{H} = (H; \cdot, ^{-1}, 1_H)$ *e* $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1_G)$ *são grupos,* $(\{1_G\}, \cdot, ^{-1}, 1_G)$ *é um objeto zero e o morfismo*

$$\begin{array}{rcl} 0_{H,G} : H & \to & G \\ x & \mapsto & 1_G \end{array}$$

é o morfismo nulo de $\mathcal{H}$ *em* $\mathcal{G}$.

Proposição

Seja **C** *uma categoria com objeto zero. A composta de um morfismo nulo com qualquer outro morfismo é ainda um morfismo nulo.*

Produtos e coprodutos

As noções que a seguir se apresentam permitem caracterizar de forma abstrata conceitos bem conhecidos tais como produto cartesiano de conjuntos, produto direto de álgebras e união disjunta de conjuntos.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* A_1, A_2 *objetos de* $\mathbf{C}$. *Chama-se* ***produto de*** A_1 ***e*** A_2 *a um par* $(P, (p_i)_{i\in\{1,2\}})$, *onde* P *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $p_1 : P \to A_1$ *e* $p_2 : P \to A_2$ *são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada objeto* S *de* $\mathbf{C}$ *e para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f_1 : S \to A_1$ *e* $f_2 : S \to A_2$, *existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $u : S \to P$ *tal que* $p_1 \circ u = f_1$ *e* $p_2 \circ u = f_2$, *i.e., tal que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A_1 & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A_2
\end{tikzcd}$$

O morfismo p_i, $i \in \{1, 2\}$, *designa-se por* ***projeção de índice*** i.

Exemplo

(1) *Na categoria* **Set**, *todo o par* $(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$, *onde* $A_1 \times A_2$ *é o produto cartesiano de conjuntos* A_1 *e* A_2 *e* $p_i : A_1 \times A_2 \to A_i$, $i \in \{1, 2\}$, *é a projeção-*i, *é um produto dos objetos* A_1 *e* A_2.

(2) *Na categoria* **Grp**, *todo o par* $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, (p_1, p_2))$, *onde* $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ *é o produto direto de grupos* $\mathcal{G}_1$ *e* $\mathcal{G}_2$ *e* $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$, $i \in \{1, 2\}$, *é a projeção-*i, *é um produto dos objetos* $\mathcal{G}_1$ *e* $\mathcal{G}_2$.

Exemplo

(3) *Considerando um conjunto parcialmente ordenado* P *como uma categoria, o produto de dois elementos* $p, q \in P$ *é um elemento* $p \times q \in P$*, juntamente com projeções*

$$p \times q \leq p$$
$$p \times q \leq q$$

tais que, para qualquer elemento $s \in P$*, se*

$$s \leq p \quad e \quad s \leq q,$$

então $s \leq p \times q$*; ou seja,* $p \times q$ *é o ínfimo de* $\{p, q\}$*.*

Proposição

O produto de dois objetos de uma categoria é único a menos de isomorfismo.

Demonstração.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A_1, A_2 objetos de $\mathbf{C}$ e $(P, (p_i)_{i \in \{1,2\}})$ e $(Q, (q_i)_{i \in \{1,2\}})$ produtos de A_1 e A_2.

Então, uma vez que Q é um produto de A_1 e A_2, existe um único morfismo $i : P \to Q$ tal que $q_1 \circ u = p_1$ e $q_2 \circ u = p_2$.

De forma análoga, como P é um produto de A_1 e A_2, existe um único morfismo $j : Q \to P$ tal que $p_1 \circ v = q_1$ e $p_2 \circ v = q_2$.

Demonstração.

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A_1 & Q \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] \arrow[d, "v"'] & A_2 \\
 & P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Assim, $p_1 \circ v \circ u = p_1$ e $p_2 \circ v \circ u = p_2$. Por conseguinte, atendendo a que $p_1 \circ id_P = p_1$, $p_2 \circ id_P = p_2$ e $(P, (p_i)_{i \in \{1,2\}})$ é um produto de A_1 e A_2, pela condição de unicidade temos $v \circ u = id_P$. De forma similar prova-se que $u \circ v = id_Q$. Logo $u : P \to Q$ é um isomorfismo. $\square$

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* A_1*,* A_2*,* P*,* Q *objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $p_i : P \to A_i$*,* $q_i : Q \to A_i$*, com* $i \in \{1, 2\}$*, morfismos de* $\mathbf{C}$*.*
Se $(P, (p_i : P \to A_i)_{i \in \{1,2\}})$ *é um produto de* A_1 *e* A_1 *e existe um isomorfismo* $h : Q \to P$ *tal que* $p_i \circ h = q_i$*, para todo* $i \in \{1, 2\}$*, então* $(Q, (q_i : Q \to A_i)_{i \in \{1,2\}})$ *também é um produto de* A_1 *e* A_2*.*

Notação: Nas condições da definição anterior, e caso exista o produto dos objetos A_1 e A_2, o objeto P é usualmente representado por $A_1 \times A_2$ e o morfismo u, univocamente determinado pelos morfismos f_1, f_2, é representado por $< f_1, f_2 >$.

O conceito de produto de dois objetos de uma categoria **C** pode ser generalizado a famílias de objetos de **C**.

Definição

Sejam **C** *uma categoria e* $(A_i)_{i \in I}$ *uma família de objetos de* **C**. *Chama-se* ***produto de*** $(A_i)_{i \in I}$ *a um par* $(P, (p_i)_{i \in I})$, *onde* P *é um objeto de* **C** *e* $p_i : P \to A_i$, $i \in I$, *são* **C**-*morfismos tais que, para cada* $S \in Obj(\mathbf{C})$ *e para cada família* $(f_i : S \to A_i)_{i \in I}$ *de* **C**-*morfismos, existe um único* **C**-*morfismo* $u : S \to P$ *tal que* $p_i \circ u = f_i$, *para todo* $i \in I$.

Terminologia: Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria. Se $(P, (p_i)_{i \in I})$ é o produto de uma família $(A_i)_{i \in I}$ de objetos de $\mathbf{C}$ e $|I| = n$, para algum $n \in \mathbb{N}_0$, o produto $(P, (p_i)_{i \in I})$ diz-se n-***ário***; em particular, se $|I| = 0, 1, 2$ ou 3 o produto diz-se ***nulário***, ***unário***, ***binário*** ou ***ternário***, respetivamente.

Observação: (1) Os produtos nulários de uma categoria coincidem com os objetos terminais.

De facto, se $(P; (p_i)_{i \in \emptyset})$ é um produto de uma família $(A_i)_{i \in \emptyset}$ de objetos de uma categoria $\mathbf{C}$, então P é um objeto de $\mathbf{C}$ tal que, para qualquer objeto S de $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $u : S \to P$.

Reciprocamente, se P é um objeto terminal, então $(P; (p_i)_{i \in \emptyset})$ é um produto nulário.

(2) Os produtos unários existem para qualquer objeto A de uma categoria $\mathbf{C}$; de facto, $(A, (id_A))$ é um produto de (A).

Definição

Se **C** *é uma categoria em que toda a família finita de objetos tem produto, diz-se que* **C** ***tem produtos finitos****. Se* **C** *é uma categoria em que toda a família de objetos tem produto, diz-se que* **C** ***tem produtos****.*

Dualmente, define-se o coproduto de dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* A_1, A_2 *objetos de* $\mathbf{C}$. *Chama-se* ***coproduto de*** A_1 ***e*** A_2 *a um par* $(Q, (i_j)_{j\in\{1,2\}})$, *onde* Q *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i_1 : A_1 \to Q$ *e* $i_2 : A_2 \to Q$ *são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada* $Z \in Obj(\mathbf{C})$ *e para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $g_1 : A_1 \to Z$ *e* $g_2 : A_2 \to Z$, *existe um único morfismo* $v : Q \to Z$ *tal que* $v \circ i_1 = g_1$ *e* $v \circ i_2 = g_2$, *i.e., tal que o diagrama seguinte comuta*

$$
\begin{tikzcd}
 & Z & \\
A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"'] & Q \arrow[u, "v"] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}
$$

O morfismo i_j, $j \in \{1, 2\}$, *designa-se por* ***injeção de índice*** j.

Exemplo

(1) *Na categoria* **Set**, *o coproduto de dois conjuntos* A_1 *e* A_2 *corresponde à sua união disjunta, onde* $A_1 + A_2$ *pode ser definido, por exemplo, por*

$$A_1 + A_2 = \{(a, 1) : a \in A_1\} \cup \{(a, 2) \mid a \in A_2\}$$

e cujas funções injeção são naturalmente definidas por

$$i_1(a) = (a, 1) \text{ e } i_2(a) = (a, 2).$$

Exemplo

Dadas funções g_1 e g_2 nas condições descritas no diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"'] & A_1 + A_2 \arrow[u, "{[g_1, g_2]}"] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

define-se

$$[g_1, g_2](x, \delta) = \begin{cases} g_1(x) \text{ se } \delta = 1 \\ g_2(x) \text{ se } \delta = 2 \end{cases}$$

Se $h : A_1 + A_2 \to Z$ é uma função tal que $h \circ i_1 = g_1$ e $h \circ i_2 = g_2$, tem-se $h(x, \delta) = [g_1, g_2](x, \delta)$, para qualquer $(x, \delta) \in A_1 + A_2$.

Exemplo

(2) *Considerando um conjunto parcialmente ordenado* P *como uma categoria, o coproduto de dois elementos* $p, q \in P$ *é um elemento* $p + q \in P$*, juntamente com injeções*

$$p \leq p + q$$
$$q \leq p + q$$

tais que, para qualquer elemento $z \in P$*, se*

$$p \leq z \text{ e } q \leq z,$$

então $p + q \leq z$*; ou seja,* $p + q$ *é o supremo de* $\{p, q\}$.

Proposição

O coproduto de dois objetos de uma categoria é único a menos de isomorfismo.

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* A_1, A_2, Q, Q' *objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $q_i : A_i \to Q$, $q_i' : A_i \to Q'$, *com* $i \in \{1, 2\}$, *morfismos de* $\mathbf{C}$.
Se $(Q, (q_i : A_i \to Q)_{i \in \{1,2\}})$ *é um coproduto de* A_1 *e* A_1 *e existe um isomorfismo* $h : Q' \to Q$ *tal que* $h \circ q_i = q_i'$, *para todo* $i \in \{1, 2\}$, *então* $(Q', (q_i' : A_i \to Q')_{i \in \{1,2\}})$ *também é um coproduto de* A_1 *e* A_2.

Notação: Caso exista o coproduto $(Q, (i_j)_{j\in\{1,2\}})$ de dois objetos A_1 e A_2 de uma categoria $\mathbf{C}$, o objeto Q é usualmente representado por $A_1 + A_2$ e o morfismo v referido na definição anterior, univocamente determinado pelos morfismos g_1 e g_2, é representado por $[g_1, g_2]$.

A noção de coproduto também pode ser generalizada a famílias arbitrárias de objetos.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $(A_j)_{j\in J}$ *uma família de objetos de* $\mathbf{C}$*. Chama-se* ***coproduto de*** $(A_j)_{j\in J}$ *a um par* $(Q; (i_j)_{j\in J})$*, onde* Q *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i_j : A_j \to Q$, $j \in J$*, são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada* $Z \in Obj(\mathbf{C})$ *e para cada família* $\{g_j : A_j \to Z\}_{j\in J}$ *de* $\mathbf{C}$*-morfismos, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $v : Q \to Z$ *tal que* $v \circ i_j = g_j$*, para todo* $j \in J$*.*

Terminologia: Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria. Se $(Q, (q_i)_{i\in J})$ é um coproduto de uma família $(A_j)_{j\in J}$ de objetos de $\mathbf{C}$ e $|J| = n$, para algum $n \in \mathbb{N}_0$, o coproduto $(Q, (q_i)_{i\in J})$ diz-se um coproduto ***n-ário***; se $|J| = 0, 1, 2$ ou 3 o coproduto diz-se ***nulário***, ***unário***, ***binário*** ou ***ternário***, respetivamente.

Observação: Os coprodutos nulários de uma categoria $\mathbf{C}$ coincidem com os objetos iniciais de $\mathbf{C}$ e os coprodutos unários existem para qualquer objeto A de $\mathbf{C}$.

Definição

Se $\mathbf{C}$ é uma categoria na qual existe coproduto para toda a família finita de objetos diz-se que $\mathbf{C}$ ***tem coprodutos finitos****. Se $\mathbf{C}$ é uma categoria na qual existe coproduto para toda a família de objetos diz-se que $\mathbf{C}$* ***tem coprodutos****.*

Igualizadores e coigualizadores

A noção de igualizador generaliza conceitos tais como o de kernel de um homomorfismo de grupo e a noção de coigualizador generaliza o conceito de conjunto quociente por uma relação de equivalência.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f, g : A \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$. *Um par* (I, i), *onde* I *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *é um* $\mathbf{C}$-*morfismo, diz-se um* **igualizador de** f **e** g *se:*

(i) $f \circ i = g \circ i$;

(ii) *para qualquer morfismo* $i' : I' \to A$ *tal que* $f \circ i' = g \circ i'$, *existe um único morfismo* $u : I' \to I$ *tal que* $i \circ u = i'$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
I' \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "i'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* I *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Diz-se que* (I, i) *é um* ***igualizador*** *em* $\mathbf{C}$ *se existem morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *tais que* (I, i) *é um igualizador de* f *e* g*.*
Diz-se que a categoria $\mathbf{C}$ ***tem igualizadores*** *se para qualquer par de* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f, g : A \to B$ *existe um igualizador.*

Exemplo

(1) *Na categoria* **Set**, *sejam* $f, g : A \to B$ *funções e seja*

$$I = \{a \in A : f(a) = g(a)\}.$$

Então o par (I, i), *onde* i *é a função inclusão de* I *em* A

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f *e* g.

Exemplo

(2) *Na categoria* **Grp**, *sejam* $\mathcal{G}_1 = (G_1; \cdot, ^{-1}, 1_{G_1})$ *e* $\mathcal{G}_2 = (G_2; \cdot, ^{-1}, 1_{G_2})$ *grupos,* $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ *um homomorfismo de grupos,* $\phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ *o homomorfismo trivial (i.e., o homomorfismo que a cada elemento de* G_1 *associa o elemento neutro de* G_2*) e seja* $I = \{x \in G_1 : f(x) = \phi(x) = 1_{G_2}\}$. *Então o par* (I, i), *onde* i *é a função inclusão de* I *em* G_1

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & G_1 \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f *e* ϕ.

Proposição

Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$. Se $(I, i : I \to A)$ e $(I', i' : I' \to A)$ são igualizadores de f e g, então I e I' são isomorfos.

Demonstração.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$, $(I, i : I \to A)$ e $(I', i' : I' \to A)$ igualizadores de f e g.

Uma vez que (I, i) é um igualizador de f e g, tem-se $f \circ i = g \circ i$.

Então, atendendo a que (I', i') também é um igualizador de f e g, existe um, e um só, morfismo $u : I \to I'$ tal que $i' \circ u = i$.

Considerando que (I', i') é um igualizador de f e g, também se tem $f \circ i' = g \circ i'$.

Logo, como (I, i) é um igualizador de f e g, existe um, e um só morfismo $v : I' \to I$ tal que $i \circ v = i'$.

Demonstração (continuação).

Além disso, como (I, i) é um igualizador de f e g, sabe-se que existe um, e um só, morfismo $w : I \to I$ tal que $i \circ w = i$, esse morfismo é o morfismo id_I.

Então, uma vez que $v \circ u$ é um morfismo de I em I e $i \circ (v \circ u) = i$, temos $v \circ u = id_I$.

De modo análogo, prova-se que $u \circ v = id_{I'}$. Assim, u é invertível à direita e à esquerda e, portanto, u é um isomorfismo de I' em I. Logo, I e I' são isomorfos.

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* A *e* I *objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Se* (I, i) *é um igualizador em* $\mathbf{C}$*, então* i *é um monomorfismo.*

Demonstração.

Seja $(I, i : I \to A)$ um igualizador em $\mathbf{C}$. Então existem $\mathbf{C}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : A \to B$ tais que (I, i) é um igualizador de f e g.

Pretendemos mostrar que i é um monomorfismo, ou seja, que para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $k : C \to I$ e $h : C \to I$,

$$i \circ k = i \circ h \Rightarrow k = h.$$

De facto, se $k : C \to A$ e $h : C \to A$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $i \circ k = i \circ h$ e se considerarmos $z = i \circ k = i \circ h$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, shift left, "k"] \arrow[u, shift right, "h"'] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}$$

Demonstração.

tem-se

$$f \circ z = f \circ (i \circ k) = (f \circ i) \circ k = (g \circ i) \circ k = g \circ (i \circ k) = g \circ z.$$

Mas (I, i) é um igualizador de f e g e, por conseguinte, existe um único morfismo $u : C \to I$ tal que $i \circ u = z$. Então, como $i \circ k = i \circ h = z$ resulta que $k = h = u$. □

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* A *e* I *objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Se* (I, i) *é um igualizador em* $\mathbf{C}$ *e* i *é um epimorfismo, então* i *é um isomorfismo.*

Demonstração

Sejam $(I, i : I \to A)$ um igualizador em $\mathbf{C}$ e $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos dos quais (I, i) é um igualizador. Então $f \circ i = g \circ i$. Se i é um epimorfismo segue que $f = g$, donde $f \circ \mathrm{id_A} = g \circ \mathrm{id_A}$.

Demonstração (continuação)

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f=g"] & B \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_A"'] & & \end{tikzcd}$$

Atendendo a que (I, i) é um igualizador de f e g, existe um único morfismo $u : A \to I$ tal que $i \circ u = \mathrm{id}_A$. Logo, $i \circ u \circ i = id_A \circ i = i = i \circ id_I$. Então, como todo o igualizador é um monomorfismo, resulta que $u \circ i = id_I$. Assim, u é um inverso direito e um inverso esquerdo de i e, portanto, i é um isomorfismo.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria com objeto zero* 0, N *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f : A \to B$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Diz-se que* N *é um* ***núcleo de f*** *(ou um* ***kernel de*** f*) se existe algum* $\mathbf{C}$*-morfismo* $i : N \to A$ *tal que* (N, i) *é um igualizador de* f *e* $0_{A,B}$*.*

Da definição anterior e da proposição enunciada na página 114 resulta que dois núcleos de um morfismo $f : A \to B$ são isomorfos.

Notação: O nucleo de um morfismo f (kernel de f) é, usualmente, representado por $\mathrm{Nuc}f$ (ou $\mathrm{ker}f$).

Proposição

Se $f : A \to B$ *é um monomorfismo numa categoria com objeto zero* 0*, então* $\mathrm{Nuc} f = 0$.

O conceito de igualizador de um par de morfismos de uma categoria **C** pode ser generalizado a famílias de morfismos.

Definição

Sejam **C** *uma categoria e* $(f_j : A \to B)_{j \in J}$ *uma família de morfismos de* **C**. *Um par* (I, i), *onde* I *é um objeto de* **C** *e* $i : I \to A$ *é um* **C**-*morfismo, diz-se um* **multi-igualizador dos morfismos da família** $(f_j : A \to B)_{j \in J}$ *se:*

(i) *para quaisquer* $j_1, j_2 \in J$, $f_{j_1} \circ i = f_{j_2} \circ i$;

(ii) *para qualquer* **C**-*morfismo* $i' : I' \to A$ *tal que, para quaisquer* $j_1, j_2 \in J$, $f_{j_1} \circ i' = f_{j_2} \circ i'$, *existe um único* **C**-*morfismo* $u : I' \to I$ *tal que* $i \circ u = i'$

Considerando o dual da definição de igualizador temos a noção de coigualizador.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f, g : A \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$. *Um par* (K, k), *onde* K *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo, diz-se um* ***coigualizador de*** f ***e*** g *se:*

(i) $k \circ f = k \circ g$;

(ii) *para qualquer* $\mathbf{C}$*-morfismo* $k' : B \to K'$ *tal que* $k' \circ f = k' \circ g$, *existe um único morfismo* $v : K \to K'$ *tal que* $v \circ k = k'$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "k'"'] & K \arrow[d, "v"] \\ & & K' \end{tikzcd}$$

Definição

Sejam **C** *uma categoria,* K *um objeto de* **C** *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* **C***. Diz-se que* (K, k) *é um* ***coigualizador*** *em* **C** *se existem morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *tais que* (K, k) *é um coigualizador de* f *e* g*. Diz-se que a categoria* **C** ***tem coigualizadores*** *se para qualquer par de* **C***-morfismos* $f, g : A \to B$ *existe um coigualizador.*

Exemplo

Na categoria **Set**, *sejam* X *um conjunto,* $R \subseteq X \times X$ *uma relação de equivalência em* X *e considere-se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

onde r_1 *e* r_2 *são as funções de* R *em* X *definidas por*

$$\begin{array}{rccc} r_1 : & R & \rightarrow & X \\ & (a,b) & \mapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} r_2 : & R & \rightarrow & X \\ & (a,b) & \mapsto & b \end{array}$$

e p_1 *e* p_2 *são as projeções de* $X \times X$ *em* X*. Então* $(X/R, \pi_R)$*, onde* π_R *é a aplicação natural*

$$\begin{array}{rccc} \pi_R : & X & \rightarrow & X/R \\ & x & \mapsto & [x]_R \end{array},$$

é um coigualizador de r_1 *e* r_2*.*

Sendo o conceito de coigualizador dual da noção de igualizador, são imediatos os resultados seguintes.

Proposição

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *morfismos de uma categoria* $\mathbf{C}$*. Se* $(K, k : B \to K)$ *e* $(K', k' : B \to K')$ *são coigualizadores de* f *e* g*, então* K *e* K' *são isomorfos.*

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Se* (K, k) *é um coigualizador em* $\mathbf{C}$*, então* k *é um epimorfismo.*

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Se* (K, k) *é um coigualizador em* $\mathbf{C}$ *e* k *é um monomorfismo, então* k *é um isomorfismo.*

Definição

Sejam **C** *uma categoria com objeto zero* 0, K *um objeto de* **C** *e* $f : A \to B$ *um morfismo de* **C**. *Diz-se que* K *é um* ***conúcleo de f*** *(ou um* ***cokernel de*** f*) se existe um* **C***-morfismo* $k : B \to K$ *tal que* (K, k) *é um coigualizador de* f *e* $0_{A,B}$.

O conceito de conúcleo é dual do conceito de núcleo, pelo que os resultados estabelecidos para núcleos podem ser dualizados para conúcleos.

Produto fibrado e soma amalgamada

O conceito de produto fibrado, frequentemente utilizado em matemática, generaliza conceitos tais como o de interseção e de imagem inversa. A noção de soma amalgada é a noção dual de produto fibrado.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to C$ *e* $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$. *Chama-se* ***produto fibrado*** *de* (f, g) *(ou* ***pullback*** *de* (f, g)*) a um par* $(P, (f', g'))$, *onde* P *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f' : P \to A$ *e* $g' : P \to B$ *são morfismos de* $\mathbf{C}$ *tais que*

(i) $f \circ f' = g \circ g'$, *i.e., tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Definição (continuação)

(ii) para quaisquer morfismos $i : X \to A$ e $j : X \to B$ tais que $f \circ i = g \circ j$, existe um único morfismo $k : X \to P$ tal que $i = f' \circ k$ e $j = g' \circ k$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "j"] \arrow[ddr, bend right, "i"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Definição

Diz-se que a categoria **C** ***tem produtos fibrados*** *se existe produto fibrado para qualquer par de morfismos de* **C** *que tenham o mesmo codomínio.*

Terminologia: Sejam **C** uma categoria e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ morfismos de **C**. Se $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g), o diagrama apresentado na alínea (i) da definição anterior diz-se um ***quadrado de produto fibrado*** ou ***quadrado cartesiano.***

Exemplo

(1) *Na categoria* **Set**, *sejam* A, B, C *conjuntos e* $f : A \to C$ *e* $g : B \to C$ *funções. Então o produto fibrado de* (f, g) *é o par* $(P, (f', g'))$, *onde*

$$P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

e $f' : P \to A$ *e* $g' : P \to B$ *são as funções definidas, para todo* $(a, b) \in P$, *por*

$$f'(a, b) = a \text{ e } g'(a, b) = b.$$

Exemplo

(2) *Nas condições do exemplo anterior se consideramos que* $A, B \subseteq C$ *e que* f *e* g *são, respetivamente, as funções inclusão* $i_1 : A \to C$ *e* $i_2 : B \to C$, *tem-se*

$$\begin{aligned} P &= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\} \\ &= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, i_1(a) = i_2(b)\} \\ &= \{(a,b) \mid a \in A, b \in B, a = b\} \end{aligned}$$

e, portanto, $P \cong A \cap B$.

Exemplo

(3) *Se em* (1) *tomarmos* $B = C$ *e* $g = \mathrm{id}_B$, *então*

$$\begin{aligned} P &= \{(a,c) \mid a \in A, c \in C, f(a) = g(c)\} \\ &= \{(a,c) \mid a \in A, c \in C, f(a) = c)\} \\ &\cong \{a \in A \mid \exists c \in C, f(a) = c\} \\ &= f^{\leftarrow}(C). \end{aligned}$$

Proposição

Sejam **C** *uma categoria e* $f : A \to C$ *e* $g : B \to C$ *morfismos de* **C**. *Se* $(P, (f', g'))$ *e* $(Q, (f'', g''))$ *são produtos fribrados de* (f, g), *então* P *e* Q *são isomorfos.*

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

um quadrado cartesiano em $\mathbf{C}$. *Se* f *é um monomorfismo, então* j *também o é.*

Demostração

Suponhamos que $u, v : B \to A$ são dois morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $j \circ u = j \circ v$. Então

$$\begin{aligned} f \circ (i \circ u) &= (f \circ i) \circ u \\ &= (g \circ j) \circ u \\ &= g \circ (j \circ u) \\ &= g \circ (j \circ v) \\ &= (g \circ j) \circ v \\ &= (f \circ i) \circ v \\ &= f \circ (i \circ v) \end{aligned}$$

e, uma vez que f é monomorfismo, vem que $i \circ u = i \circ v$.

Demonstração.

Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, shift left, "u"] \arrow[dr, shift right, "v"'] \arrow[drr, "j \circ u = j \circ v"] \arrow[ddr, "i \circ u = i \circ v"'] & & \\
& A \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\
& X_1 \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo, o que implica $u = v$. Logo, j é um monomorfismo. $\square$

Proposição

Sejam **C** *uma categoria e* $f : A \to B$ *um* **C***-morfismo. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) f *é um monomorfismo.*

(2) *O diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano.

(3) *Existe um objeto* X *e um morfismo* $g : X \to A$ *tal que o diagrama seguinte*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : C \to A$ *e* $g : C \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$*.*
Chama-se ***soma amalgamada*** *de* (f, g) *(ou* ***pushout*** *de* (f, g)*) a um par* $(S, (f', g'))$*, onde* S *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f' : A \to S$ *e* $g' : B \to S$ *são morfismos de* $\mathbf{C}$ *tais que*

(i) $f' \circ f = g' \circ g$*, i.e., tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g'"'] & S \end{tikzcd}$$

Definição

(ii) *para quaisquer morfismos* $i : B \to X$ *e* $j : A \to X$ *tais que* $i \circ g = j \circ f$, *existe um único morfismo* $k : S \to X$ *tal que* $i = k \circ g'$ *e* $j = k \circ f'$.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f'"] \arrow[ddr, "j"] & \\
B \arrow[r, "g'"] \arrow[drr, "i"'] & S \arrow[dr, "k"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Definição

Se **C** *é uma categoria tal que existe soma amalgamada para qualquer par de morfismos que tenham o mesmo domínio, diz-se que a categoria* **C** ***tem somas amalgamadas***.

Os duais de todos os resultados estudados para produtos fibrados são válidos para somas amalgamadas.

Limites e colimites

Nas secções anteriores definiram-se os conceitos de objeto terminal, produto e igualizador, sendo possível perceber semelhanças nas definições apresentadas. O conceito de limite generaliza o que há de comum nestas noções, pelo que objetos terminais, produtos e igualizadores não são mais do que exemplos de limites. Dualmente define-se colimite, que tem os objetos iniciais, os coprodutos e os coigualizadores como exemplos.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D*. Um* ***cone para o diagrama*** D *(ou* D*-**cone**) é um par* $(C; (f_i : C \to D_i)_{i\in I})$*, onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $(f_i : C \to D_i)_{i\in I}$ *é uma família de* $\mathbf{C}$*-morfismos, tal que, para cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $g : D_j \to D_k$ *existente em* D*, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} D_j \arrow[rr, "g"] & & D_k \\ & C \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "f_k"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $g \circ f_j = f_k$*. Ao objeto* C *dá-se a designação de* ***vértice*** *do cone.*

Observação: Note-se que podem existir diversos cones, com vértices distintos, para um mesmo diagrama D.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D. *Um cone* $(L;(\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ *do diagrama* D *diz-se um* ***limite para o diagrama*** D *(ou* D-***limite****) se, para qualquer outro* D*-cone* $(C;(f_i : C \to D_i)_{i\in I})$*, existe um único morfismo* $u : C \to L$ *tal que, para cada* $i \in I$, $\lambda_i \circ u = f_i$*, i.e., tal que cada triângulo de vértices* C, L *e* D_i *comuta*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "f_j"'] \arrow[ddr, "f_k"] \arrow[ddrr, "f_l"] & & \\
 & L \arrow[dl, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\lambda_k"] \arrow[drr, "\lambda_l"] & & \\
D_j & \cdots & D_k & D_l
\end{tikzcd}$$

Exemplo

(1) *Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ e seja D um diagrama em $\mathbf{C}$ formado apenas por dois objetos A e B*

$$A \qquad\qquad\qquad B$$

Então um D-cone é um par $(C;(f,g))$, onde C é um objeto de $\mathbf{C}$ e $f: C \to A$ e $g: C \to B$ são $\mathbf{C}$-morfismos.

$$A \xleftarrow{\quad f \quad} C \xrightarrow{\quad g \quad} B$$

Um D-limite, caso exista, é um produto de A e B.

Exemplo

(2) *Seja D um diagrama sem objetos e sem morfismos numa categoria* $\mathbf{C}$.

Então um cone para o diagrama D é qualquer par $(C, (\,))$, onde C é um objeto de $\mathbf{C}$.

Por conseguinte, um D-limite é um par $(L, (\,))$, onde L é um objeto de $\mathbf{C}$ *tal que, para qualquer outro D-cone $(C, ())$, existe um único morfismo $u : C \to L$, i.e., L é um objeto terminal.*

Exemplo

(3) *Seja D o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

com três objetos e dois morfismos. Um D-cone é um par $(P'; (f', g', h'))$ onde P' é um objeto de $\mathbf{C}$ *e $f' : P' \to B$, $g' : P' \to A$ e $h' : P' \to C$ são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "h'"] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

i.e., tais que $f \circ f' = h' = g \circ g'$.

Exemplo (continuação)

Se $(P', (f', g', h'))$ é um D-limite, então, para qualquer outro D-cone $(P'', (f'', g'', h''))$, existe um único morfismo $u : P'' \to P'$ tal que $f'' = f' \circ u$, $g'' = g' \circ u$ e $h'' = h' \circ u$. Assim, $(P', (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g).

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i \in I}$ *a família de objetos de* D*. Um* D*-limite é único a menos de isomorfismo, i.e., se* $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i \in I})$ *e* $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i \in I})$ *são* D*-limites, então* L *e* L' *são isomorfos.*

Proposição

Sejam **C** *uma categoria,* D *um diagrama em* **C** *cuja coleção de objetos é* $(D_i)_{i\in I}$, $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ *um cone para* D *e* $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ *um* D*-limite. Se existe um isomorfismo* $u : L' \to L$ *tal que* $\lambda_i \circ u = \lambda'_i$, *para todo* $i \in I$*, então* $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ *também é um limite para* D.

Definição

Diz-se que uma categoria **C** ***tem limites*** *(respetivamente,* ***limites finitos****) se existe limite para todo o diagrama (respetivamente, diagrama finito) D em* **C**.

Proposição

Seja **C** *uma categoria. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(1) **C** *tem limites finitos.*

(2) **C** *tem produtos finitos e igualizadores.*

(3) **C** *tem um objeto terminal e produtos fibrados.*

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D*. Um* ***cocone para o diagrama*** D *é um par* $(C; (f_i : D_i \to C)_{i\in I})$ *onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $(f_i : D_i \to C)_{i\in I}$ *é uma família de* $\mathbf{C}$*-morfismos, tal que, para cada morfismo* $g : D_j \to D_k$ *existente em* D*, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} D_j \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_j"'] & & D_k \arrow[dl, "f_k"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $f_k \circ g = f_j$*.*

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D*. Um cocone* $(L, (\lambda_i : D_i \to L)_{i\in I})$ *para* D *diz-se um* ***colimite para o diagrama*** D *se, para qualquer outro cocone* $(C, (f_i : D_i \to C)_{i\in I})$*, existe um único morfismo* $u : L \to C$ *tal que, para cada* $i \in I$*, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "u"] & & C \\
& D_i \arrow[ul, "\lambda_i"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $u \circ \lambda_i = f_i$*.*

O dual dos resultados estabelecidos a respeito de limites é válido para colimites.

Funtores

No início deste capítulo foram apresentados vários exemplos de domínios matemáticos formulados como categorias. Atendendo a que as categorias constituem elas próprias um domínio matemático, é natural questionar se existem categorias de categorias. Como iremos referir mais à frente, tais categorias existem: os objetos destas categorias são categorias e os morfismos, designados por *funtores*, são correspondências entre categorias que preservam a sua estrutura.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um* ***funtor*** *(ou* ***funtor covariante****) de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *é um par de funções*

$$F = (F_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D}), F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D}))$$

onde

- F_{Obj} *é uma função que associa a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *um objeto* $F_{Obj}(A)$ *de* $\mathbf{D}$,
- F_{Mor} *é uma função que associa a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *um* $\mathbf{D}$*-morfismo* $F_{Mor}(f) : F_{Obj}(A) \to F_{Obj}(B)$

e tal que as condições seguintes são satisfeitas:

(F1) *para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$, $F_{Mor}(id_A) = id_{F_{Obj}(A)}$;

(F2) *para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$,

$$F_{Mor}(g \circ f) = F_{Mor}(g) \circ F_{Mor}(f).$$

Notação:

(1) Se F é um funtor de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$, escrevemos $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

(2) As funções F_{Obj} e F_{Mor} referidas na definição anterior são usualmente representadas pelo mesmo símbolo F.

(3) Para abreviar a escrita, e desde que seja claro a partir do contexto quais são as categorias domínio e codomínio do funtor F, podemos descrever um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ da forma a seguir indicada

$$\begin{array}{lrcl} F : & A & \mapsto & F(A) \\ & f : A \to B & \mapsto & F(f) : F(A) \to F(B) \end{array}$$

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. A um funtor* $F : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{D}$ *dá-se a designação de* ***cofuntor*** *(ou* ***funtor contravariante****) de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$*.*

Observação: Dadas categorias **C** e **D**, o conceito de cofuntor de **C** em **D** pode também ser definido diretamente a partir da categoria **C**. Um cofuntor de **C** em **D** é um par de funções

$$(\overline{F}_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D}), \overline{F}_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D}))$$

onde

- $\overline{F}_{Obj}$ é uma função que associa a cada objeto A de **C** um objeto $\overline{F}_{Obj}(A)$ de **D**,
- $\overline{F}_{Mor}$ é uma função que associa a cada **C**-morfismo $f : A \to B$ um **D**-morfismo $\overline{F}_{Mor}(f) : \overline{F}_{Obj}(B) \to \overline{F}_{Obj}(A)$

e tal que as condições seguintes são satisfeitas:

(CF1) para qualquer objeto A de **C**, $\overline{F}_{Mor}(id_A) = id_{\overline{F}_{Obj}(A)}$,

(CF2) $\overline{F}_{Mor}(g \circ f) = \overline{F}_{Mor}(f) \circ \overline{F}_{Mor}(g)$, para quaisquer **C**-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$.

Exemplo

(1) *Para qualquer categoria* $\mathbf{C}$, *define-se um funtor de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{C}$ *que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa o próprio objeto* A *e que a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* f *associa o próprio morfismo* f. *A este funtor, representado por* $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, *dá-se a designação de* ***funtor identidade em*** $\mathbf{C}$.

(2) *Para qualquer categoria* $\mathbf{C}$ *e qualquer subcategoria* $\mathbf{C}'$ *de* $\mathbf{C}$, *define-se um funtor de* $\mathbf{C}'$ *em* $\mathbf{C}$ *que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}'$ *associa o próprio objeto* A *e que a cada* $\mathbf{C}'$*-morfismo* f *associa o próprio morfismo* f. *A este funtor dá-se a designacão de* ***funtor inclusão*** *e representa-se por* $I : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$.

Exemplo

(3) *Define-se da categoria* ***Set*** *nela própria o funtor* P : ***Set*** $\to$ ***Set*** *que:*

- *a cada conjunto* A *faz corresponder o conjunto potência* $\mathcal{P}(A)$;
- *a cada função* $f : A \to B$ *associa a função* $P(f) : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ *definida por*

$$P(f)(A') = f(A'), \quad \forall A' \subseteq A.$$

(4) *Define-se um funtor* E : ***Mon*** $\to$ ***Set***, *da categoria dos monóides* ***Mon*** *na categoria dos conjuntos* ***Set***, *que a cada monóide* $(M; \cdot^M, 1_M)$ *associa o conjunto* M *e que a cada homomorfismo de monóides* $f : (M; \cdot^M; 1_M) \to (N; \cdot^N, 1_N)$ *associa a função* $f : M \to N$. *Este funtor é um exemplo de funtores designados por funtores esquecimento.*

Exemplo

(5) *Considerando monóides* $\mathcal{M} = (M; \cdot^M, 1_M)$ *e* $\mathcal{N} = (N; \cdot^N, 1_N)$ *vistos como categorias* **M** *e* **N**, *respetivamente, qualquer par*

$$(\{\mathcal{M}\} \to \{\mathcal{N}\} : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}, f),$$

onde $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *é um homomorfismo de monóides, é um funtor de* **M** *em* **N**.

Exemplo

(6) *Sejam* $(P_1, \leq_1)$ *e* $(P_2, \leq_2)$ *c.p.o.'s. Considerando* $(P_1, \leq_1)$ *e* $(P_2, \leq_2)$ *vistos como categorias* $\mathbf{P}_1$ *e* $\mathbf{P}_2$*, respetivamente, tem-se* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}_1) = \leq_1$ *e* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}_2) = \leq_2$. *Se* $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ *é um funtor de* $\mathbf{P}_1$ *em* $\mathbf{P}_2$*, então a cada* $\mathbf{P}_1$*-morfismo de* a *em* b *é associado um* $\mathbf{P}_2$*-morfismo de* $F_{Obj}(a)$ *em* $F_{Obj}(b)$*, i.e.,*

$$(a, b) \in \leq_1 \Rightarrow (F_{Obj}(a), F_{Obj}(b)) \in \leq_2 .$$

Por conseguinte, F_{Obj} *é uma aplicação isótona de* $(P_1, \leq_1)$ *em* $(P_2, \leq_2)$.

Exemplo

(7) *Dada uma categoria* $\mathbf{C}$ *e a sua categoria dual* $\mathbf{C}^{\text{op}}$, *define-se um cofuntor* D *de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{C}^{\text{op}}$ *que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa o próprio objeto* A *e que a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *associa o* $\mathbf{C}^{\text{op}}$*-morfismo* $f : B \to A$. *A este cofuntor dá-se a designação de* ***cofuntor dualidade***. *De forma análoga define-se o cofuntor dualidade* D^{op} *de* $\mathbf{C}^{op}$ *em* $\mathbf{C}$.

Exemplo

(8) *Para quaisquer conjuntos* X, Y *e para qualquer função* $f : X \to Y$, *seja* $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ *a função definida por*

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\},$$

para todo $B \subseteq Y$. *Então o par funções*

$$(\overline{P}_{Obj} : \mathrm{Obj}(\boldsymbol{Set}) \to \mathrm{Obj}(\boldsymbol{Set}), \overline{P}_{Mor} : \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Set}) \to \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Set})),$$

definidas por

- $\overline{P}_{Obj}(A) = \mathcal{P}(A)$, *para qualquer* $A \in \mathrm{Obj}(\boldsymbol{Set})$,
- $\overline{P}_{Mor}(f) = f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, *para qualquer* $f : X \to Y \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Set})$,

é um cofuntor de ***Set*** *em* ***Set***.

Exemplo

(9) *Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria localmente pequena, então, para cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$*, define-se o funtor* $Mor_{\mathbf{C}}(A,-) : \mathbf{C} \to \textbf{\textit{Set}}$ *que:*

- *a cada objeto* X *de* $\mathbf{C}$ *associa o conjunto* $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X)$,
- *a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : X \to Y$ *associa a função*

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,f) : \begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,Y) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array}.$$

Exemplo

(10) *Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria localmente pequena, então, para cada objeto* B *de* $\mathbf{C}$*, define-se o funtor* $Mor_{\mathbf{C}}(-, B) : \mathbf{C}^{op} \to \textbf{\textit{Set}}$ *(cofuntor de* $\mathbf{C}$ *em* ***Set****) que:*

- *a cada objeto* X *de* $\mathbf{C}^{op}$ *associa o conjunto* $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X, B)$*,*
- *a cada* $\mathbf{C}^{op}$*-morfismo* $f : X \to Y$ *associa a função*

$$Mor_{\mathbf{C}}(f, B) : \begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X, B) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(Y, B) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}.$$

Observe-se que a composição $g \circ f$ *indicada na definição de* $Mor_{\mathbf{C}}(f, B)$ *refere-se à composição de morfismos em* $\mathbf{C}$*, pelo que no cálculo de* $g \circ f$ *deve ser considerado o morfismo* $f : Y \to X$ *de* $\mathbf{C}$*.*

Exemplo (continuação)

Alternativamente, o cofuntor $Mor_{\mathbf{C}}(-, B)$ pode ser definido como o par de funções

$(\overline{Mor}_{\mathbf{C}_{Obj}}(-, B) : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D}), \overline{Mor}_{\mathbf{C}_{Mor}}(-, B) : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D}))$

que:

- a cada objeto X de $\mathbf{C}$ associa o conjunto $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X, B)$,
- a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : Y \to X$ associa a função

$$\begin{array}{rcl} \overline{Mor}_{\mathbf{C}_{Mor}}(f, B) : \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X, B) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(Y, B) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}.$$

Definição

Dadas categorias $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$, *dá-se a designação de* ***bifuntor*** *a um funtor da forma* $F : \mathbf{A} \times \mathbf{B} \to \mathbf{C}$.

Exemplo

(1) *Dados conjuntos A, B, C, D, consideremos os produtos $(A \times B, (p_A, p_B))$ e $(C \times D, (p_C, p_D))$. Para quaisquer funções $f : A \to C$ e $g : B \to D$, existe uma única função $f \times g : A \times B \to C \times D$ tal que o diagrama seguinte*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "f \times g"'] & B \arrow[d, "g"'] \\
C & C \times D \arrow[l, "p_C"] \arrow[r, "p_D"'] & D
\end{tikzcd}$$

comuta; esta função é definida por $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$. Assim, podemos definir o bifuntor $F : \textbf{Set} \times \textbf{Set} \to \textbf{Set}$ tal que $F(A, B) = A \times B$, para qualquer objeto (A, B) de $\textbf{Set} \times \textbf{Set}$, e $F(f, g) = f \times g$, para qualquer morfismo (f, g) de $\textbf{Set} \times \textbf{Set}$.

Exemplo

(2) *Para qualquer categoria* **C** *localmente pequena, define-se o bifuntor*

$$Mor_{\mathbf{C}}(-,-) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \textbf{\textit{Set}}$$

que:

- *a cada par de objetos* (X, Y) *de* $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}$ *associa o conjunto* $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X, Y)$*;*
- *a cada* $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}$*-morfismo* (f, g)*, onde* $f : X \to X'$ *(em* $\mathbf{C}^{op}$*) e* $g : Y \to Y'$*, associa a função*

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(f,g) : \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X',Y') \\ j & \mapsto & g \circ j \circ f \end{array} .$$

Composição de funtores

Seguidamente estudamos processos de construção de funtores a partir de funtores dados.

Definição

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *categorias. Dados funtores* $F = (F_{Obj}, F_{Mor}) : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e* $G = (G_{Obj}, G_{Mor}) : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, *representa-se por* $G \circ F$ *o par de funções*

$$(G_{Obj} \circ F_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}), G_{Mor} \circ F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C})).$$

Proposição

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *funtores. Então* $G \circ F$ *é um funtor.*

Definição

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *categorias e* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *funtores. Ao funtor* $G \circ F$ *dá-se a designação de* ***funtor composição de*** G ***com*** F.

Proposição

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *e* $H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores. Então*

(1) $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$.

(2) $F \circ Id_{\mathbf{A}} = F = Id_{\mathbf{B}} \circ F$.

Notação: Sejam $\mathrm{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathrm{G} : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ e $\mathrm{H} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funtores.

- No sentido de simplificar a escrita, podemos escrever GF em vez de $G \circ F$.

- Atendendo à propriedade (2) da proposição anterior, escreve-se HGF para representar quer H(GF) quer (HG)F.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *diz-se um* ***isomorfismo*** *se existir um funtor* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tal que* $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$ *e* $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Se existir um funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *que é um isomorfismo, a categoria* $\mathbf{C}$ *diz-se* ***isomorfa*** *à categoria* $\mathbf{D}$ *e escreve-se* $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$.

Observação: Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Se existir um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ que é um isomorfismo também existe um isomorfismo $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Assim, caso exista um isomorfismo de uma categoria noutra, diz-se apenas que as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são isomorfas.

Proposição

Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ *categorias e* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *funtores. Se* F *e* G *são isomorfismos, então* $G \circ F$ *é um isomorfismo.*

Preservação e reflexão de propriedades

Sejam **C** e **D** categorias. Um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ associa a cada objeto A de **C** a sua imagem $F(A)$ em **D** e associa a cada **C**-morfismo $f : A \to B$ a sua imagem $F(f) : F(A) \to F(B)$. Estas imagens permitem obter uma representação de **C** na categoria **D**, pelo que é importante perceber quais as propriedades de **C** que são preservadas pelo funtor F.

Comecemos por observar que a representação de uma categoria **C** numa categoria **D**, obtida por meio de um funtor F, não é necessariamente uma subcategoria de **D**.

Exemplo

Considere-se, por exemplo, a categoria **C** *definida pelo diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B_1 \arrow[loop right, "id_{B_1}"] & B_2 \arrow[loop left, "id_{B_2}"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[loop right, "id_C"]
\end{tikzcd}$$

e seja **D** *a categoria*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[loop left, "id_{A'}"] \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend left, "g' \circ f'"] & B' \arrow[loop above, "id_{B'}"] \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[loop right, "id_{C'}"]
\end{tikzcd}$$

Exemplo (continuação):

Considerem-se, também, as funções

$$F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D}) \text{ e } F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$$

de **C** em **D** definidas por

- $F_{Ob}(A) = A'$, $F_{Ob}(B_1) = F_{Ob}(B_2) = B'$, $F_{Ob}(C) = C'$;
- para cada objeto X de **C**, $F_{Mor}(id_X) = id_{F(X)}$;
- $F_{Mor}(f) = f'$, $F_{Mor}(g) = g'$.

Exemplo (continuação):

Facilmente se verifica que $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$. Note-se, porém, que a imagem de $\mathbf{C}$ não é uma subcategoria de $\mathbf{D}$; de facto, a imagem de $\mathbf{C}$ por F

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[loop left, "id_{A'}"] \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[loop above, "id_{B'}"] \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[loop right, "id_{C'}"]
\end{tikzcd}$$

não é uma categoria, uma vez que tem os morfismos $f' : A' \to B'$ e $g' : B' \to C'$, mas não tem a sua composição.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor. Diz-se que:*

- *F* ***preserva uma propriedade*** *P de morfismos (de objetos) se, para qualquer morfismo f em* $\mathbf{C}$*, F(f) tem a propriedade P sempre que f a tiver (respetivamente, se, para qualquer objeto A de* $\mathbf{C}$*, F(A) tem a propriedade P sempre que A a tiver).*
- *F* ***reflete uma propriedade*** *P de morfismos (de objetos) se, para qualquer morfismo f em* $\mathbf{C}$*, f tem a propriedade P sempre que* $F(f)$ *a tiver (respetivamente, se, para qualquer objeto A de* $\mathbf{C}$*, A tem a propriedade P sempre que* $F(A)$ *a tiver).*

Note-se que os funtores não preservam necessariamente monomorfismos e epimorfismos.

Exemplo

Considerando a categoria **2**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop right, "id_B"] \end{tikzcd}$$

e a categoria **C** *definida pelo diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[loop above, distance=4em, "g"'] \arrow[r, "f = f \circ g"] & B \arrow[loop right, "id_B"] \end{tikzcd}$$

verifica-se que o morfismo f é um monomorfismo na categoria **2**, *mas não é um monomorfismo na categoria* **C**. *Assim, o funtor inclusão da categoria* **2** *na categoria* **C** *não preserva monomorfismos.*

Proposição

Os funtores preservam morfismos invertiveis à esquerda, morfismos invertiveis à direita e isomorfismos.

Demonstração.

Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$.

Se f é invertível à esquerda, então existe um $\mathbf{C}$-morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Então $F(g \circ f) = F(\mathrm{id}_A)$, donde segue que $F(g) \circ F(f) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Logo, $F(f)$ é um $\mathbf{D}$-morfismo invertível à esquerda. $\square$

Embora os funtores preservem a existência de inversos direitos e de inversos esquerdos de morfismos, não refletem necessariamente estas propriedades.

Exemplo

O funtor F da categoria $\mathbf{2}$ na categoria $\mathbf{1}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] & & A' \arrow[loop left, "\mathrm{id}_{A'}"] \end{tikzcd}$$

que associa cada objeto da categoria $\mathbf{2}$ ao objeto A' da categoria $\mathbf{1}$ e que associa cada morfismo da categoria $\mathbf{2}$ ao mofismo $\mathrm{id}_{A'}$, não reflete isomorfismos, uma vez que o morfismo $\mathrm{id}_{A'}$ é um isomorfismo na categoria $\mathbf{1}$, mas o morfismo f da categoria $\mathbf{2}$ não é.

Tipos especiais de funtores

Alguns dos exemplos apresentados na secção anterior permitem perceber que a imagem de uma categoria $\mathbf{C}$ por meio de um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ pode não manter muitas das propriedades de $\mathbf{C}$. Assim sendo, tem interesse estudar funtores que preservam/refletem mais propriedades.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um functor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *diz-se:*

(1) ***injetivo em objetos*** *se, para quaisquer objetos* A *e* B *de* $\mathbf{C}$*,*

$$F(A) = F(B) \Rightarrow A = B;$$

(2) ***fiel*** *se para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f, g : A \to B$*,*

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g;$$

(3) *um* ***mergulho*** *se é injetivo em objetos e é fiel;*

Definição ***(continuação)***

(4) ***sobrejetivo nos objetos*** *se, para todo o objeto* B *de* $\mathbf{D}$*, existe um objeto* A *em* $\mathbf{C}$ *tal que* $F(A) = B$*;*

(5) ***representativo*** *se, para todo o objeto* B *de* $\mathbf{D}$*, existe um objeto* A *em* $\mathbf{C}$ *tal que* $F(A) \cong B$*;*

(6) ***sobrejetivo nos morfismos*** *se, para qualquer* $\mathbf{D}$*-morfismo* g*, existe um* $\mathbf{C}$*-morfismo* f *tal que* $F(f) = g$*;*

(7) ***pleno*** *se, para quaisquer objetos* A *e* B *de* $\mathbf{C}$ *e para qualquer* $\mathbf{D}$*-morfismo* $g : F(A) \to F(B)$*, existe um* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *tal que* $F(f) = g$*.*

Exemplo

(1) *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $\mathbf{C}'$ *uma subcategoria de* $\mathbf{C}$. *O funtor inclusão* $I : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ *é injetivo em objetos e é fiel; caso* $\mathbf{C}'$ *seja uma subcategoria plena de* $\mathbf{C}$, *o funtor* I *é pleno.*

Exemplo

(2) *O funtor esquecimento* $E : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$, *que a cada monóide* $(M; \cdot^M, 1_M)$ *associa o conjunto* M *e que a cada homomorfismo de monóides* $f : (M; \cdot^M, 1_M) \to (N; \cdot^N, 1_N)$ *associa a função* $f : M \to N$, *é, claramente, um funtor fiel, pois a homormofismos de monóides diferentes são associadas funções diferentes. Contudo, atendendo a que existem morfismos da categoria* **Set** *que não correspondem a homomorfismos de monóides, o funtor* E *não é pleno. Este funtor também não é injetivo em objetos, uma vez que é possível ter monóides distintos com o mesmo conjunto suporte.*

Exemplo

(3) *Sejam* **M** *e* **N** *as categorias correspondentes aos monóides* $\mathcal{M} = (M; \cdot^M, 1_M)$ *e* $\mathcal{N} = (N; \cdot^N, 1_N)$ *e seja* $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *um homomorfismo de monóides sobrejetivo e não injetivo. Então* f *é um funtor pleno, mas não é fiel.*

Embora, de um modo geral, os funtores não reflitam morfismos canceláveis à esquerda/direita nem morfismos invertíveis à esquerda/direita, os funtores fiéis e plenos refletem estas propriedades.

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor.*

(1) *Se* F *é um funtor fiel, então* F *reflete monomorfismos e epimorfismos.*

(2) *Se* F *é um funtor fiel e pleno, então* F *reflete morfismos invertíveis à esquerda e morfismos invertíveis à direita.*

(3) *Se* F *é um funtor fiel e pleno, então* F *reflete isomorfismos.*

Demonstração

(1) Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo e suponhamos que $F(f)$ é um monomorfismo.

Sejam $g, h : C \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$.

Então $F(f \circ g) = F(f \circ h)$, donde $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$.

Uma vez que $F(f)$ é um monomorfismo, segue que $F(g) = F(h)$. Por último, atendendo a que F é fiel, obtemos $g = h$. Logo, F reflete monomorfismos.

De modo análogo, prova-se que F reflete epimorfismos.

(2), (3) Exercício.

Categorias de categorias

Na secção anterior, referimos que para cada categoria $\mathbf{C}$ existe um funtor identidade da categoria $\mathbf{C}$ nela própria, definimos a composição de funtores e provámos a associatividade da composição de funtores. Assim sendo, as propriedades dos funtores sugerem o estudo de categorias cujos objetos são categorias e cujos morfismos são funtores.

Uma **categoria de categorias** é uma categoria $\mathbf{S}$ cujos objetos são categorias e cuja classe de morfismos é uma classe de funtores entre essas categorias. A classe de morfismos de $\mathbf{S}$ tem de incluir: (i) o funtor identidade associado a cada uma das categorias de $\mathbf{S}$; (ii) o funtor $F \circ G$, para quaisquer funtores $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ que sejam morfismos de $\mathbf{S}$.

Exemplo

São exemplos de categorias de categorias:

(1) *A categoria* **Mon**. *Já observamos anteriormente que cada monóide pode ser visto como uma categoria, logo* **Mon** *pode ser vista como uma categoria de categorias.*

(2) *A categoria que tem como único objeto uma categoria* **C** *e que tem como único morfismo o funtor* $Id_{\mathbf{C}}$.

(3) *A categoria cuja classe de objetos é formada por todas as categorias finitas e cuja classe de morfismos é a coleção de funtores entre estas categorias.*

(4) *A categoria* **Cat** *cuja classe de objetos é formada por todas as categorias pequenas e cuja classe de morfismos é formada por todos os funtores entre categorias pequenas.*

Os casos anteriores são exemplos de categorias que não são problemáticos. No entanto, existem situações em que é necessário tomar atenção.

Por exemplo, definindo como categoria ***normal*** uma categoria que não é um dos seus objetos, será que existe alguma categoria que inclua todas as categorias normais?

Será que existe a categoria de todas as categorias?

Atendendo a que para o nosso estudo não há a necessidade de considerar uma categoria universal de categorias, limitamos o estudo de categorias de categorias a casos em que não se coloquem este tipo de problemas.

Transformações naturais

Os morfismos de uma categoria permitem relacionar objetos e cada funtor relaciona categorias. Seguidamente iremos ver como as transformações naturais permitem relacionar funtores.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores. Chama-se* ***transformação natural de*** F ***em*** G, *e representa-se por* $\tau : F \to G$, *a uma família de morfismos de* $\mathbf{D}$

$$(\tau_C : F(C) \to G(C) \,|\, C \text{ é um objeto } \mathbf{C})$$

tal que, para cada $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : C_1 \to C_2$, *o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
F(C_1) \arrow[r, "\tau_{C_1}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C_1) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(C_2) \arrow[r, "\tau_{C_2}"'] & G(C_2)
\end{tikzcd}$$

i.e., $\tau_{C_2} \circ F(f) = G(f) \circ \tau_{C_1}$.

Para cada objeto C *de* $\mathbf{C}$, *o morfismo* τ_C *diz-se uma* ***componente de*** τ *e é usual dizer que* τ_C *é natural em* C *de* F *para* G. *A classe de todas as transformações naturais de* F *em* G *é representada por* $\mathrm{Nat}(F, G)$.

Exemplo

(1) *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor. A família de* $\mathbf{D}$*-morfismos* $(id_{F(C)} \,|\, C$ *é um objeto de* $\mathbf{C})$ *é uma transformação natural de* F *em* F*, designada por* ***transformação identidade*** *e representada por* id_F.

Exemplo

(2) *Dado um grupo* $\mathcal{G} = (G; *, \ ^{-1}, 1_G)$, *define-se grupo dual de* $\mathcal{G}$ *como sendo o grupo* $\mathcal{G}^{op} = (G; *^{op}, \ ^{-1}, 1_G)$, *onde* $*^{op}$ *é a operação definida por* $a *^{op} b = b * a$.
Considerando a noção de grupo dual, define-se o funtor $Op : \textbf{Grp} \to \textbf{Grp}$ *que a cada grupo* $\mathcal{G}$ *da categoria* ***Grp*** *associa o seu grupo dual* $\mathcal{G}^{op}$ *e que a cada homomorfismo de grupos* $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ *associa o homomorfismo de grupos* $f^{op} : \mathcal{G}^{op} \to \mathcal{H}^{op}$, *definido por* $f^{op}(x) = f(x)$, *para cada* $x \in G$.

Para cada grupo $\mathcal{G}$ *da categoria* ***Grp***, *seja* $\tau_{\mathcal{G}} : Id_{\textbf{Grp}}(\mathcal{G}) \to Op(\mathcal{G})$, *o homormorfismo de grupos definido por* $\tau_{\mathcal{G}}(x) = x^{-1}$. *A família de homomorfismos* $\tau = (\tau_G \mid G$ *é um objeto de* ***Grp***$)$ *é uma transformação natural do funtor* $Id_{\textbf{Grp}}$ *no funtor* Op.

Exemplo

(3) *Para quaisquer conjuntos* X, Y *e para qualquer função* $f : X \to Y$, *seja* $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ *a função definida por*

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Então o par funções

$$P^* = ({P^*}_{Obj} : \text{Obj}(\textbf{\textit{Set}}) \to \text{Obj}(\textbf{\textit{Set}}), {P^*}_{Mor} : \text{Mor}(\textbf{\textit{Set}}) \to \text{Mor}(\textbf{\textit{Set}})),$$

definidas por

- ${P^*}_{Obj}(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, *para qualquer objeto* A *de* ***Set***,
- ${P^*}_{Mor}(f) = (f^{\leftarrow})^{\leftarrow} : \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$, *para qualquer função* $f : X \to Y$ *de* ***Set***,

é um cofuntor de ***Set*** *em* ***Set***.
Para cada conjunto A, *seja* $\tau_A : A \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ *a função definida por* $\tau_A(a) = \{\{a\}\}$. *É simples verificar que a família de funções* $\tau = (\tau_A \mid A \text{ é um conjunto})$ *é uma transformação natural de* $Id_{\textbf{Set}}$ *em* P^*.

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$ *e* $\eta : G \to H$ *transformações naturais. Então a família de* $\mathbf{D}$*-morfismos* $\eta \circ \tau = (\eta_C \circ \tau_C \,|\, C$ *é um objeto de* $\mathbf{C})$ *é uma transformação natural de* F *em* H*.*

Definição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$*,* $\eta : G \to H$ *transformações naturais. Designa-se por* ***composta de*** η ***e*** τ*, e representa-se por* $\eta \circ \tau$*, a tranformação natural* $(\eta_C \circ \tau_C \,|\, C$ *é um objeto de* $\mathbf{C})$*.*

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G, H, L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$, $\eta : G \to H$, $\sigma : H \to L$ *transformações naturais. Então*

(1) $id_G \circ \tau = \tau$ e $\tau \circ id_G = \tau$.

(2) $(\sigma \circ \eta) \circ \tau = \sigma \circ (\eta \circ \tau)$.

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $H : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$, $G, G' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *funtores e* $\tau : G \to G'$ *uma transformação natural. Então:*

(1) *A família de* $\mathbf{E}$*-morfismos* $(\tau_{F(C)} \mid C$ *é um objeto de* $\mathbf{C})$ *é uma transformação natural de* GF *em* $G'F$ *que se representa por* $\tau F : GF \to G'F$.

(2) *A família de* $\mathbf{C}$*-morfismos* $(H(\tau_D) \mid D$ *é um objeto de* $\mathbf{D})$ *é uma transformação natural de* HG *em* HG' *que se representa por* $H\tau : HG \to HG'$.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$ *uma transformação natural. Diz-se que* τ *é um* ***isomorfismo natural*** *se exitir uma transformação natural* $\eta : G \to F$ *tal que* $\tau \circ \eta = id_G$ *e* $\eta \circ \tau = id_F$.

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$ *uma transformação natural. A transformação natural* τ *é um isomorfismo se e só se, para cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$, τ_C *é um isomorfismo.*

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $H : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$, $G, G' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *funtores e* $\tau : G \to G'$ *uma transformação natural. Se* τ *é um isomorfismo natural, então:*

(1) *a família de* $\mathbf{E}$*-morfismos* $\tau^{-1} = ((\tau_D)^{-1} \mid D$ *é um objeto de* $\mathbf{D})$ *é um isomorfismo natural de* G' *em* G *e tem-se* $\tau \circ \tau^{-1} = id_{G'}$ *e* $\tau^{-1} \circ \tau = id_G$.

(2) τF *é um isomorfismo natural e* $(\tau F)^{-1} = \tau^{-1} F$.

(3) $H\tau$ *é um isomorfismo natural e* $(H\tau)^{-1} = H\tau^{-1}$.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias e* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores. Diz-se que o funtor* F *é* ***naturalmente isomorfo*** *(ou* ***naturalmente equivalente****) a* G*, e escreve-se* $F \approx G$*, se existir um isomorfismo natural* $\tau : F \to G$*.*

Observação: Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ categorias e $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funtores. Caso exista um isomorfismo natural $\tau : F \to G$, também existe um isomorfismo natural $\eta : G \to F$. Assim, caso exista um isomorfismo natural de um funtor no outro, diz-se apenas que os funtores F e G são **naturalmente isomorfos** (ou **naturalmente equivalentes**).

Categorias de funtores

Para quaisquer categorias $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ e para qualquer funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, existe uma transformação natural $id_F : F \to F$. Além disso, para quaisquer funtores $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e para quaisquer transformações naturais $\tau : F \to G$, $\eta : G \to H$, existe a transformação natural composição de η com τ, $\eta \circ \tau : G \to H$, sendo a composição de transformações naturais associativa. Estas propriedades das transformações naturais motivam a definição de categorias cujos objetos são funtores e cujos morfismos são transformações naturais.

Uma categoria $\mathbf{F}$ cujos objetos são funtores e cuja classe de morfismos é uma classe de transformações naturais entre os funtores de $\mathbf{F}$, que contém a transformação natural identidade associada a cada funtor de $\mathbf{F}$ e que é fechada para a composição de transformações naturais, diz-se uma **categoria de funtores**.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. A* ***categoria dos funtores de*** $\mathbf{C}$ ***em*** $\mathbf{D}$*, que se representa por* $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$*, é a categoria cujos objetos são os funtores de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *e cujos morfismos são todas as transformações naturais entre estes funtores.*

Exemplo

(1) Para qualquer categoria $\mathbf{C}$, $[\mathbf{C}, \boldsymbol{Set}]$ *é a categoria cujos objetos são todos os funtores de* $\mathbf{C}$ *em* $\boldsymbol{Set}$ *e cujos morfismos são as transformações naturais entre eles. Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria localmente pequena, os funtores de* $\mathbf{C}$ *em* $\boldsymbol{Set}$ *incluem os funtores* $\mathrm{Mor}(A, -)$, *para todo o objeto* A *de* $\mathbf{C}$. *Estes funtores, juntamente com as transformações naturais entre eles, formam uma subcategoria plena de* $[\mathbf{C}, \boldsymbol{Set}]$. *Os funtores* $\mathrm{Mor}(-, A)$ *formam uma subcategoria plena de* $[\mathbf{C}^{op}, \boldsymbol{Set}]$.

(2) Para qualquer categoria $\mathbf{C}$, *a categoria* $[\mathbf{2}, \mathbf{C}]$, *formada pelos funtores de* $\mathbf{2}$ *em* $\mathbf{C}$, *é isomorfa à categoria* $\mathbf{C}^{\rightarrow}$.

Seguidamente apresentamos um exemplo de um funtor entre categorias de funtores.

Exemplo

Sejam $\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{J}$ *categorias tal que* $\mathbf{J}$ *é uma categoria pequena e seja* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor. O par de funções*

$$[\mathbf{J}, F] = ([\mathbf{J}, F]_{Obj}, [\mathbf{J}, F]_{Mor}),$$

onde

$$\begin{array}{rcl} [\mathbf{J}, F]_{Obj} : \mathrm{Obj}([\mathbf{J}, \mathbf{C}]) & \to & \mathrm{Obj}([\mathbf{J}, \mathbf{D}]) \\ D : \mathbf{J} \to \mathbf{C} & \mapsto & F \circ D : \mathbf{J} \to \mathbf{D} \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} [\mathbf{J}, F]_{Mor} : \mathrm{Mor}([\mathbf{J}, \mathbf{C}]) & \to & \mathrm{Mor}([\mathbf{J}, \mathbf{D}]) \\ \tau : D \to D' & \mapsto & F\tau : FD \to FD' \end{array},$$

é um funtor da categoria $[\mathbf{J}, \mathbf{C}]$ *na categoria* $[\mathbf{J}, \mathbf{D}]$.

Equivalência de categorias

Várias categorias têm bastantes propriedades em comum sem que exista necessariamente um isomorfismo entre elas. Tal observação conduziu à definição de *categorias equivalentes*, um conceito"menos exigente" que o de categorias isomorfas.

Definição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. As categorias* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *dizem-se* ***equivalentes***, *e escreve-se* $\mathbf{C} \approx \mathbf{D}$, *se existem funtores* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *e* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tais que* $GF \approx Id_{\mathbf{C}}$ *e* $FG \approx Id_{\mathbf{D}}$.

Proposição

Sejam $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. As categorias* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *são equivalentes se e só se existe um funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *pleno, fiel e representativo.*

Exemplo

(1) *Seja* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita* $n \geq 1$ *e seja* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *a categoria das matrizes sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *(os objetos desta categoria são os inteiros positivos; dados* $m, n \in \mathbb{N}$, *o conjunto dos morfismos de* n *em* m *é o conjunto das matrizes do tipo* $m \times n$ *sobre* $\mathbb{K}$; *a composição de morfismos é a multiplicação de matrizes).*

Seja G *o funtor de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *em* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *tal que: para cada objeto* V *de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$, $G(V) = \mathrm{dim} \mathrm{V}$; *para cada morfismo* f *de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$, $G(f)$ *é a matriz do morfismo* f *relativamente a bases fixas.*

Exemplo (continuação)

O funtor G é fiel e pleno, uma vez que cada matriz A do tipo $m \times n$ representa (relativamente a bases fixas) uma única transformação linear.

O funtor G também é representativo, uma vez que cada inteiro m é a dimensão do espaco vetorial $\mathbb{K}^m$.

Assim, as categorias $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ e $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ são equivalentes.

Exemplo

(2) *Seja P um conjunto pré-ordenado (i.e., um conjunto munido de uma relação binária $\preceq$ reflexiva e transitiva) visto como uma categoria. Considere-se a relação de equivalência θ definida em P por*

$$x\ \theta\ y \Leftrightarrow x \preceq y \quad \text{e} \quad y \preceq x, \qquad x, y \in P.$$

No conjunto quociente P/θ, a relação

$$[x]_\theta \leq [y]_\theta \Leftrightarrow x \preceq y, \qquad x, y \in P$$

é uma ordem.

Exemplo (continuação)

A aplicação canónica $F : P \to P/\theta$, que a cada $x \in P$ associa $[x]_\theta$, é compatível com as relações binárias definidas nos conjuntos, pelo que F é um funtor de P em P/θ.

É simples verificar que F é uma equivalência de categorias. De facto, da sobrejetividade de F podemos concluir que F é um funtor representativo. De

$$\forall x, y \in P,\; x \preceq y \Leftrightarrow [x]_\theta \leq [y]_\theta$$

conclui-se que F é um funtor pleno. Considerando a não existência de dois morfismos de um objeto para outro, é imediato que F é fiel.