



FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

As funções ditas *hiperbólicas* são definidas a partir de certas combinações de exponenciais. Tais funções possuem propriedades muito boas, muitas delas semelhantes a algumas das funções trigonométricas.

Seno hiperbólico

O *seno hiperbólico* é a função

$$\begin{aligned} \text{sh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

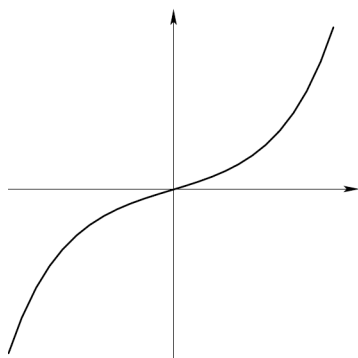
Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injetiva. Possui um único zero, a origem. Além disso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh } x = -\infty$.

Cosseno hiperbólico

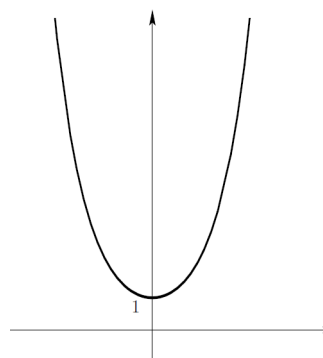
O *cosseno hiperbólico* é a função

$$\begin{aligned} \text{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Trata-se de uma função contínua e par. Logo, não é injetiva. Não possui zeros e atinge um mínimo na origem, com valor $\text{ch } 0 = 1$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch } x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch } x = +\infty$.



$$y = \text{sh } x, x \in \mathbb{R}, \text{CD}_{\text{sh}} = \mathbb{R}$$



$$y = \text{ch } x, x \in \mathbb{R}, \text{CD}_{\text{ch}} = [1, +\infty[$$

Tangente hiperbólica

A *tangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned}\text{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}\end{aligned}$$

ou seja, por

$$\text{th } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Trata-se de uma função contínua, ímpar e estritamente crescente, logo injetiva. Possui um único zero, em 0. Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th } x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 1$$

pelo que o gráfico da th possui uma assíntota horizontal de equação $y = 1$, para $x \rightarrow +\infty$. Da imparidade da th , existe outra assíntota horizontal de equação $y = -1$, para $x \rightarrow -\infty$. Tem-se ainda $\text{CD}_{\text{th}} =]-1, 1[$.

Cotangente hiperbólica

A *cotangente hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned}\text{coth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}\end{aligned}$$

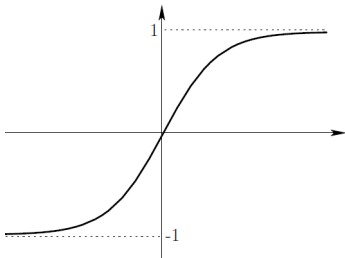
ou seja, por

$$\text{coth } x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1)$$

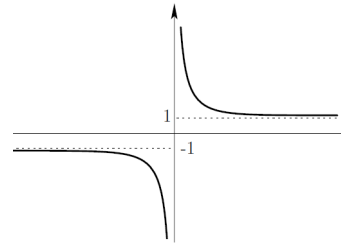
Trata-se de uma função contínua, ímpar e sem zeros. Apesar de não ser monótona, é estritamente decrescente para $x > 0$, onde toma valores positivos, e para $x < 0$, onde toma valores negativos. Logo é injetiva. Da definição (1) sai que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{coth } x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{coth } x = 1$$

pelo que o gráfico da coth possui uma assíntota horizontal de equação $y = 1$, para $x \rightarrow +\infty$, e uma assíntota vertical de equação $x = 0$. Da imparidade da coth , existe outra assíntota horizontal de equação $y = -1$, para $x \rightarrow -\infty$. Tem-se ainda que $\text{CD}_{\text{coth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.



$$y = \text{th } x, x \in \mathbb{R}, \text{CD}_{\text{th}} =]-1, 1[$$



$$y = \text{coth } x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{CD}_{\text{coth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

Secante hiperbólica

A *secante hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned}\operatorname{sech} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}\end{aligned}$$

Cossecante hiperbólica

A *cossecante hiperbólica* é a função definida por

$$\begin{aligned}\operatorname{cosech} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\operatorname{sh} x}\end{aligned}$$

