Departamento de Matemática — Universidade do Minho

Tópicos de Matemática — 3º teste – 13 jan 2023

Lic. em Ciências de Computação - 1º ano — duração: duas horas

Nome ________________________________ Nº __________

GRUPO I. Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Existem conjuntos A para os quais qualquer relação binária simétrica neles definida é transitiva. V☐ F☐
2. Para qualquer relação de equivalência R em $A = \{1, 2, 3, 4\}$, se $2 \in [1]_R \cap [3]_R$, então, $(3, 1) \in R$. V☐ F☐
3. O conjunto $\{\{1, 2\}, 3, \{4, 5\}\}$ é uma partição de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. V☐ F☐
4. Para quaisquer conjuntos não vazios A e B, $\omega_{B\setminus A} \cup \omega_{A\setminus B}$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$. V☐ F☐
5. A relação binária $\theta = \{(1, 2), (3, 1), (2, 1)\}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é uma relação antissimétrica. V☐ F☐
6. A relação $R = \{(2, 1), (1, 3), (2, 3), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ é uma relação de ordem total em $A = \{1, 2, 3\}$. V☐ F☐
7. Para qualquer c.p.o. $(A, \leq)$ e qualquer subconjunto não vazio X de A, se X admite elemento máximo, então, $A\setminus X$ admite elemento mínimo. V☐ F☐
8. Para quaisquer c.p.o.'s A e B e qualquer função isótona sobrejetiva $f : A \to B$, se m é elemento máximo de A então $f(m)$ é elemento máximo de B. V☐ F☐

GRUPO II. Considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

1. Uma relação binária θ em A que seja simétrica mas não transitiva;

2. Uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em A com 4 elementos;

3. Uma relação de ordem parcial $\leq$ em A tal que $\leq = \leq_d$;

4. Uma relação de ordem parcial $\leq$ em A tal que no c.p.o. A não existe $\inf \varnothing$ nem $\sup \varnothing$.

GRUPO III. Sejam A um conjunto e ρ a relação binária definida em $\mathcal{P}(A) \times A$ por

$$(X, a)\ \rho\ (Y, b) \Leftrightarrow \{a\} \cup X = \{b\} \cup Y \qquad (a, b \in A,\ X, Y \subseteq A).$$

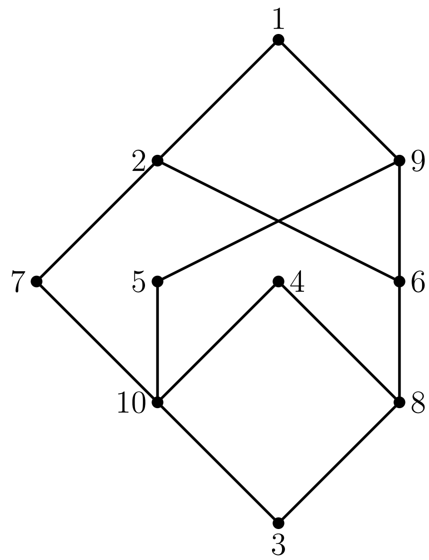
1. Mostre que ρ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A) \times A$.

2. Dado $a \in A$, determine as classes $[(\emptyset, a)]_\rho$ e $[(A, a)]_\rho$.

3. Determine em que condições se tem $[(\emptyset, a)]_\rho \cap [(A, a)]_\rho \neq \emptyset$.

4. Para $A = \{1, 2\}$, indique o conjunto quociente definido por ρ.

GRUPO IV. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse apresentado.
Indique, caso exista:



1. Maj $\{2, 4, 5, 7\}$;

2. inf$\{2, 4\}$:

3. $\inf \emptyset$ e $\sup \emptyset$;

4. Um subconjunto X de A que não admita supremo;

5. Um subconjunto X de A com 3 elementos maximais e 4 elementos minimais;

6. um elemento x de A tal que $\{3, 5, 9, x\}$ seja um reticulado para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. A.

[Cotação:] **GRUPO I.** $8 \times 1.0 = 8.0$ **GRUPO II.** $4 \times 1.0 = 4.0$ **GRUPO III.** $1.5+1.0+1.0+1.5 = 5.0$ **GRUPO IV.** $6 \times 0.5 = 3.0$.