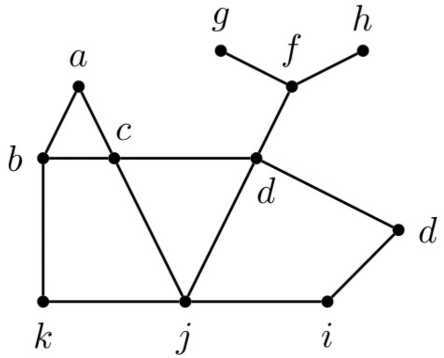
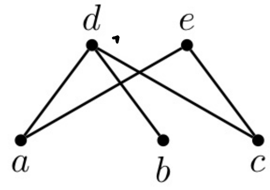
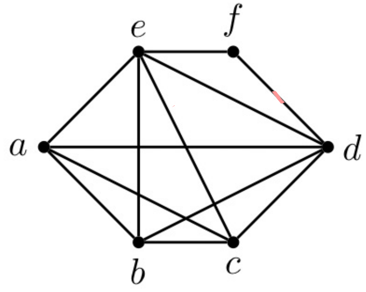
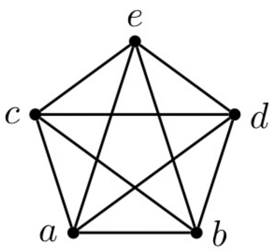
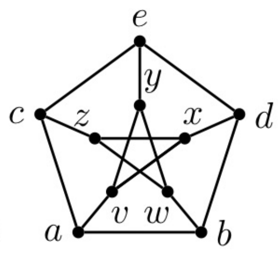
36. Considere os seguintes grafos:

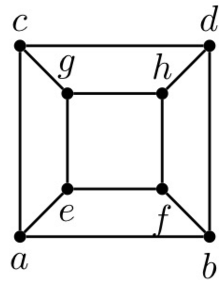
(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

(v) 

(vi) 

(a) Indique os que são eulerianos.

(b) Indique os que são semieulerianos.

(c) Indique os que são hamiltonianos.

Um grafo diz-se euleriano se existir um circuito euleriano, ie, um circuito que é um caminho simples e contém todas as arestas do grafo

Teorema: Um grafo é euleriano sse todos os vértices têm grau par.

a) Não são grafos eulerianos : (i), (ii), (iii), (v), (vi)
pois todos eles têm algum
vértice de grau ímpar

É grafo euleriano : (iv) pois todos os vértices têm grau 4

é circuito euleriano : ⟨a, b, d, e, c, d, a, e, b, c, a⟩

b) Um grafo diz-se semieuleriano se existir um caminho
euleriano em G que não é circuito

Teorema: Um grafo é semieuleriano sse existem exatamente
dois vértices de grau ímpar

Não são grafos semieulerianos : (i), (iv), (v), (vi]

(i) tem pelos menos três vértices de grau ímpar: g, f, h

(iv) é grafo euleriano: todos os vértices tem grau par

(v) + (vi) todos os vértices têm grau 3

São grafos semieulerianos: (ii), (iii)

(ii) tem exatamente dois vértices de grau ímpar: b, d

É caminho euleriano <b, d, a, e, c, d>

(iii) tem exatamente dois vértices de grau ímpar: e, d

É caminho euleriano <e, f, d, c, b, a, e, b, d, a, c, e, d>

c) Um grafo diz-se hamiltoniano se contem um ciclo hamiltoniano, ie, um ciclo elementar que percorre todos os vértices.

Não são grafos hamiltonianos: (i), (iii), (v)

(i) + (ii) não são grafos hamiltonianos pois têm vértices de grau 1

(v) não é grafo hamiltoniano.

São grafos hamiltonianos: (iii), (iv) e (vi).

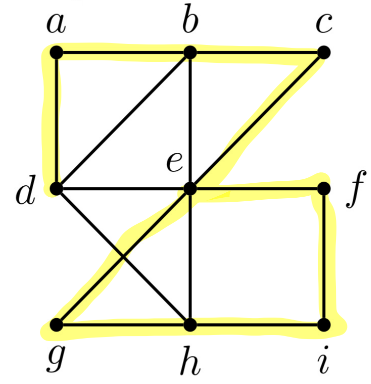
São ciclos hamiltonianos:

(iii) $\langle a, b, c, d, f, e, a \rangle$

(iv) $\langle a, b, d, e, c, a \rangle$

(vi) $\langle a, b, d, c, g, h, f, e, a \rangle$

40. Considere o grafo G representado por



Mostre que o grafo é euleriano mas não é hamiltonaino.

O grafo é euleriano pois todos os vértices têm grau par

grau(a) = grau(c) = grau(g) = grau(i) = grau(f) = 2

grau(b) = grau(d) = grau(h) = 4 e grau(e) = 6

É circuito euleriano: ⟨a, b, c, e, g, h, i, f, e, d, h, e, b, d, a⟩.

O grafo não é hamiltoniano. Suponhamos por redução absurdo que sim.

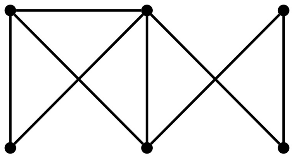
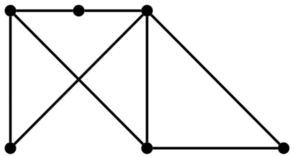
Como temos vértices de grau 2 as arestas: {d,a}, {a,b}, {b,c}, {c,e}

{e,f}, {f,i}, {i,h}, {h,g}, {g,e} fazem parte do ciclo hamiltoniano.

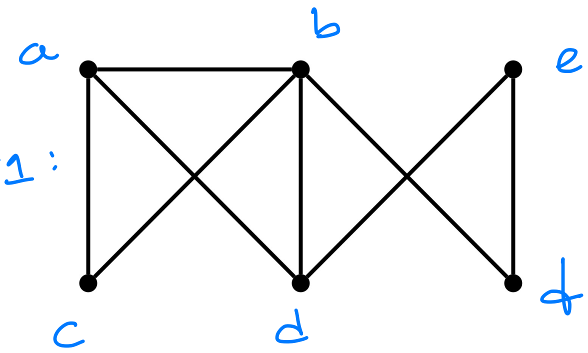
Temos o ciclo $\langle e, f, i, h, g, e \rangle$ que não percorre todos os vértices

Mas tal é absurdo pois não podemos completar um ciclo sem percorrer todos os vértices na construção de um ciclo hamiltoniano.

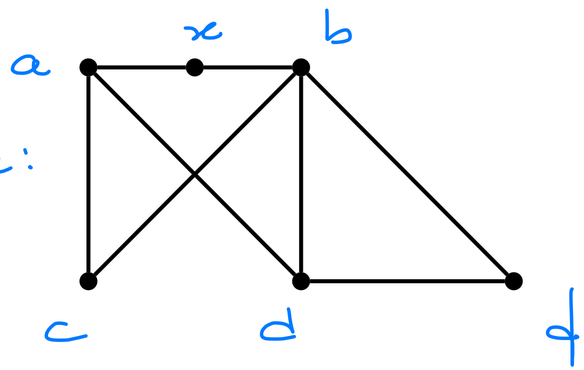
30. Mostre que os seguintes pares de grafos são homeomorfos, fazendo a correta modificação de vértices de grau 2:

(a)  

G_1:



G_2:



obtemos o grafo G_2 a partir de G_1 fazendo o seguinte:

- Removemos a aresta $\{a,b\}$, adicionamos o vértice x e as arestas $\{a,x\}$ e $\{b,x\}$
- Removemos o vértice e (de grau 2) e as arestas $\{e,d\}$ e $\{e,f\}$ e acrescentamos a aresta $\{d,f\}$

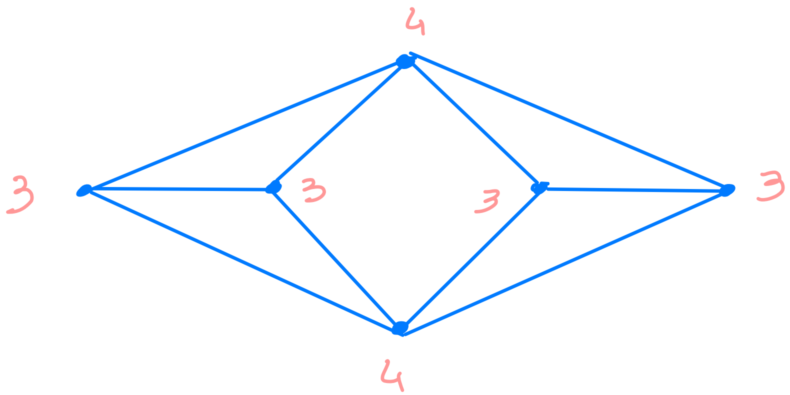
Logo os dois grafos são homeomorfos.

34. Construa um grafo com 6 vértices, sendo dois deles de grau 4 e quatro de grau 3, tal que

(a) G seja planar;

(b) G não seja planar.

a)



b)