Capítulo 0 - Tópicos sobre o corpo dos números reais

Vamos começar por falar brevemente das

- propriedades algébricas dos reais de onde resultam regras de manipulação e
- propriedades topológicas relacionadas com a noção de proximidade que conferem ao conjunto $\mathbb{R}$ a estrutura adequada para as noções de limite e continuidade

0. Tópicos sobre o corpo dos números reais

0.1 Estrutura algébrica de $\mathbb{R}$

- O corpo ordenado $\mathbb{R}$
- Números naturais, inteiros e racionais
- Conjunto limitado

0.2 Estrutura topológica de $\mathbb{R}$

- Valor absoluto e suas propriedades
- Distância
- Conjunto aberto, conjunto fechado e fronteira
- Ponto de acumulação e ponto isolado

0.1 Estrutura algébrica de $\mathbb{R}$

O cálculo depende das propriedades dos números reais.

Números reais

$$
\begin{aligned}
5 &= 5.00000\ldots \\
-\frac{3}{4} &= -0.750000\ldots \\
\frac{1}{3} &= 0.3333\ldots \\
\sqrt{2} &= 1.4142\ldots \\
\pi &= 3.14159\ldots
\end{aligned}
$$

Para $\sqrt{2}$ e π não existe nenhum padrão evidente.

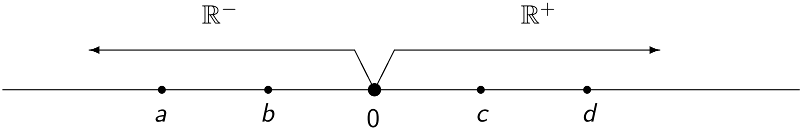
O corpo ordenado $\mathbb{R}$

O conjunto $\mathbb{R}$ constitui uma estrutura munida de:

- duas operações, adição $(+)$ e multiplicação $(\times)$ que verificam certas propriedades ou axiomas (associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro, existência de simétrico (na adição) e de inverso (na multiplicação), ...) a partir das quais se define também a subtração (-) e a divisão (/) ;
- uma relação de ordem que permite escrever $\mathbb{R}$ na forma

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$$

e tratá-lo, do ponto de vista geométrico, como a habitual *reta real* .



O corpo ordenado $\mathbb{R}$

Dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\text{ou} \quad x = y \quad \text{ou} \quad x < y \quad \text{ou} \quad x > y$$

Outras notações usuais:

$$x \geq y \quad \text{para indicar} \quad x = y \quad \text{ou} \quad x > y$$
$$x \leq y \quad \text{para indicar} \quad x = y \quad \text{ou} \quad x < y$$

Para $x, y, z \in \mathbb{R}$,

1. $x < y \ \text{ e } \ y < z \quad \Longrightarrow \quad x < z$
2. $x < y \quad \Longrightarrow \quad x + z < y + z$
3. $x < y \ \text{ e } \ z > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z$
4. $x < y \ \text{ e } \ z < 0 \quad \Longrightarrow \quad x \cdot z > y \cdot z$
5. $0 < x < y \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

Números naturais, inteiros e racionais

Em $\mathbb{R}$ destacam-se os subconjuntos dos números

- naturais ou inteiros positivos

  $$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

  Propriedade indutiva

  $$1 \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$$

- inteiros

  $$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- racionais

  $$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

- irracionais

  $$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

Números naturais, inteiros e racionais

É imediato que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Exemplo

Os números

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{5},\ \pi,\ \frac{\pi}{3},\ e,\ 2e, \ldots$$

são números irracionais.

Números naturais, inteiros e racionais

Densidade dos racionais e dos irracionais

$\mathbb{Q}$ é *denso* em $\mathbb{R}$, ou seja, se a e b são números reais com $a < b$,

$$\text{existe um número racional } \frac{p}{q} \text{ tal que } a < \frac{p}{q} < b.$$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é *denso* em $\mathbb{R}$.

Consequência: entre quaisquer dois números reais, existe uma infinidade de números racionais e irracionais.

Exercício

Mostre que o número

a) $x = 3.2777\ldots = 3.2\overline{7}$

b) $x = 1.3333\ldots = 1.\overline{3}$

c) $x = 0.3405405405\ldots = 0.3\overline{405}$

é um número racional exprimindo-o como um quociente de dois números inteiros.

Exercício

Apresente um exemplo de

a) *um número irracional pertencente ao intervalo* $\left[\frac{3}{100}, \frac{4}{100}\right]$*;*

b) *um número racional pertencente ao intervalo* $\left[\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{10}\right]$*.*

Exercício

Resolva a inequação seguinte e represente graficamente o conjunto solução.

$$\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x}.$$

Exercício

Resolva as inequações (ou sistemas de inequações) seguintes. Exprima os conjuntos solução sob a
forma de intervalo ou de reunião de intervalos e represente-os graficamente.

a) $2x - 1 > x + 3$

b) $-\frac{x}{3} \geq 2x - 1$

c) $\frac{2}{x-1} \geq 5$

d) $3 \leq 2x + 1 \leq 5$

e) $3x - 1 \leq 5x + 3 \leq 2x + 15$

f) $3(2 - x) < 2(3 + x)$

g) $x^2 - 2x \leq 0$

h) $2x^2 + 1 > 4x$

i) $-x^2 + 5x - 6 < 0.$

Conjunto limitado

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que X é *limitado inferiormente* quando

$$\exists a \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in X\,, \;\; x \geq a$$

ou seja, quando

$$\exists a \in \mathbb{R} : \quad X \subset [a, +\infty[$$

- Nestas condições diz-se que a é um *minorante* de X.
- Define-se o *ínfimo* de X, e representa-se por *inf* X, como o maior dos minorantes de X. O ínfimo é único.
- Quando, em particular, $\mathit{inf}\, X \in X$, então designa-se por *mínimo* de X e representa-se por *min* X.

Conjunto limitado

Dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, dizemos que X é *limitado superiormente* quando

$$\exists b \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in X \, , \;\; x \leq b$$

ou seja, quando

$$\exists b \in \mathbb{R}, \quad X \subset]-\infty, b]$$

- Nestas condições diz-se que b é um *majorante* de X.
- Define-se o *supremo* de X, e representa por $sup\, X$, como o menor dos majorantes de X. O supremo é único.
- Quando, em particular, $sup\, X \in X$, então designa-se por *máximo* de X e representa-se por $max\, X$.

Conjunto limitado

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado* quando X é, simultaneamamente, limitado inferiormente e limitado superiormente, isto é, quando

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X, \quad a \leq x \leq b$$

ou, equivalentemente, quando

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}, \quad X \subset [a, b]$$

Exercício

Determine o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, se existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo do conjunto

a) $A = \{-5, 1\} \cup [-2, -1[\cup]3, 4[$;

b) $B = [0, \sqrt{2}]$;

c) $C = [1, \pi[\cup \{5\}$;

d) $D =]-3, +\infty[\setminus \{2\}$.

0.2 Estrutura topológica de $\mathbb{R}$

As noções topológicas estão fortemente relacionadas com o conceito de

proximidade.

Para medir proximidade, precisamos de um distância. Em $\mathbb{R}$ definimos esta distância à custa do *valor absoluto* ou *módulo*,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Definição alternativa:

$$|x| = \sqrt{x^2},$$

uma vez que $\sqrt{a}$ representa sempre a raíz quadrada não negativa de $a \geq 0$.

Propriedades do valor absoluto

Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$. Então:

a) $|x| \geq 0 \quad \text{e} \quad |x| = 0 \quad \text{sse} \quad x = 0$;

b) $|-x| = |x|$;

c) $|x| \geq x \quad \text{e} \quad |x| \geq -x$;

d) $-|x| \leq x \leq |x|$;

e) sendo $a \geq 0$, tem-se $|x| \leq a \quad \text{sse} \quad -a \leq x \leq a$;

f) sendo $a \geq 0$, tem-se $|x| \geq a \quad \text{sse} \quad x \geq a \vee x \leq -a$;

g) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

h) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, sempre que $y \neq 0$;

i) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

j) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$. [desigualdade triangular]

Distância

A noção de valor absoluto permite introduzir o conceito de *distância* entre dois números reais. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, chama-se *distância* de x a y ao número $d(x, y)$ definido por

$$d(x, y) = |x - y|$$

Usando a noção de distância, podemos exprimir o conceito de *intervalo aberto* (ou fechado) de *centro a* e raio r da seguinte forma

$$]a - r, a + r[= \{ x \in \mathbb{R} : d(x, a) < r \} = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < r \}$$

$$[a - r, a + r] = \{ x \in \mathbb{R} : d(x, a) \leq r \} = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r \}$$

Podemos agora introduzir algumas **noções de carácter topológico**.

Exercício

Determine os valores de x que satisfazem as condicões seguintes.

a) $|2x+5| = 3$ b) $|3x-2| \leq 1$ c) $\left|5 - \frac{2}{x}\right| < 3$

Exercício

Resolva geometricamente a inequação

$$|x-2| \leq 1,$$

interpretando o valor absoluto como uma distância.

Exercício

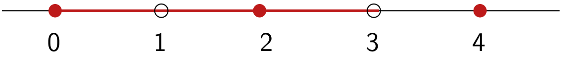
Resolva a equação

$$|x+1| = |x-3|.$$

Conjunto aberto

Considere-se o conjunto

$$X = [0,3[\,\setminus\{1\} \cup \{4\}$$



- Dados um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}$, dizemos que x é *ponto interior* de A quando

$$\exists r > 0 : \quad]\, x - r \,,\, x + r \,[\, \subset A$$

- Designamos por *interior* de A e representa-se por *int* A o conjunto constituído pelos pontos interiores a A.
- Para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$, tem-se sempre $\mathit{int} A \subset A$.
- Quando, em particular, for $\mathit{int}\, A = A$, dizemos que A é um conjunto *aberto*.

Conjunto fechado

Considere-se novamente o conjunto

$$X = [0,3[\,\setminus\{1\}\cup\{4\}$$

- Dados um conjunto $A\subset\mathbb{R}$ e um ponto $x\in\mathbb{R}$, dizemos que x é *ponto aderente* de A quando

$$\forall r>0,\quad]\,x-r,x+r\,[\,\cap A\neq\emptyset.$$

- O conjunto dos pontos aderentes a A designa-se por *aderência* de A ou por *fecho* de A, e representa-se por $\bar{A}$.
- Para qualquer conjunto $A\subset\mathbb{R}$, tem-se sempre $A\subset\bar{A}$.
- Quando, em particular, for $\bar{A}=A$, dizemos que A é um conjunto *fechado*.

Fronteira

Considere-se ainda o conjunto

$$X = [0, 3[\,\setminus\{1\} \cup \{4\}$$

- Dados um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $x \in \mathbb{R}$, dizemos que x é *ponto fronteiro* de A quando

$$x \in \bar{A} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus A}$$

  ou, equivalentemente, quando

$$\forall r > 0, \quad]\,x - r, x + r\,[\cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad]\,x - r, x + r\,[\cap \mathbb{R}\setminus A \neq \emptyset.$$

- O conjunto dos pontos fronteiros de A chama-se *fronteira* de A e representa-se por *fr$A$* .

Ponto de acumulação

Mais uma vez, considere-se o conjunto

$$X = [0,3[\,\setminus\{1\}\cup\{4\}$$

- Dados um conjunto $A\subset\mathbb{R}$ e um ponto $x\in\mathbb{R}$, dizemos que x é *ponto de acumulação* de A quando

$$\forall r>0\,,\quad \big(\,]\,x-r,x+r\,[\,\setminus\{x\}\big)\cap A\neq\emptyset$$

- Em particular, dizemos que x é *ponto de acumulação à esquerda* de A quando

$$\forall r>0\,,\quad]\,x-r,x\,[\,\cap A\neq\emptyset$$

  e que x é *ponto de acumulação à direita* de A quando

$$\forall r>0\,,\quad]\,x,x+r\,[\,\cap A\neq\emptyset$$

- O conjunto dos pontos de acumulação de X designa-se por *derivado* de X e representa-se por X' .

Ponto isolado

Dizemos que x é um *ponto isolado* de A quando $x \in A$ mas $x \notin A'$, ou seja, quando

$$\exists r > 0 : \;]x - r, x + r[\cap A = \{x\}$$

Observações

- Os pontos de acumulação de um dado conjunto A são os candidatos ao estudo de limites, quando esse conjunto é o domínio de uma certa função.
- Os pontos de acumulação de um só lado aparecerão no estudo dos limites ditos laterais.
- Por outro lado, os pontos isolados de um conjunto não servem para estudar limites.

Exercício

Determine o interior, o fecho, a fronteira, o derivado e o conjunto dos pontos isolados de cada um dos seguintes conjuntos e indique os que são abertos e os que são fechados:

a) $A = \mathbb{R}$;

b) $B = \emptyset$;

c) $C =]5, 10[$;

d) $D = [0, 2]$;

e) $E =]0, 5[\setminus \{3\} \cup \{7, 8\}$;

f) $H = \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.