0. Indução e recursão

Exemplo 1: Seja C o menor subconjunto Y de $\mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $0 \in Y$;
2. para todo $n \in \mathbb{N}_0$, se $n \in Y$, então $n+2 \in Y$.

0, 2, 4 são exemplos de elementos de C. De facto:

- 0 é um elemento de C, por C satisfazer 1.;
- sabendo que $0 \in C$, por C satisfazer 2., segue $0+2=2 \in C$;
- sabendo que $2 \in C$, por C satisfazer 2., segue $2+2=4 \in C$.

Veremos mais tarde que C é o conjunto dos números pares.

Esta forma de definir o conjunto C é um caso particular das chamadas *definicões indutivas de conjuntos*, um mecanismo muito útil para definir conjuntos.

Dado um conjunto X, um seu subconjunto B não vazio e um conjunto de operações O em X, podem ser vários os subconjuntos de X que contêm B e que são fechados para as operações de O.

O mais pequeno desses tais subconjuntos é chamado o *conjunto definido indutivamente* (ou *conjunto gerado*) por O em B.

Dizemos que (B, O) é uma *definição indutiva sobre* o conjunto suporte X.

Observação 2: O conjunto G gerado por O em B é a interseção de todos os subconjuntos de X que contêm B e são fechados para as operações de O.

Os elementos de G são exatamente os objetos que podem ser obtidos a partir de B, aplicando um número finito de operações de O.

Observação 3: O conjunto dos números naturais admite a seguinte caracterização indutiva: $\mathbb{N}$ é o menor subconjunto Y de $\mathbb{N}$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $1 \in Y$;
2. para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \in Y$, então $n+1 \in Y$.

Definição 4:

1. Chamaremos *alfabeto* a um conjunto de símbolos e chamaremos *letras* aos elementos de um alfabeto.
2. Dado um alfabeto A, chamaremos *palavra sobre* o alfabeto A a uma sequência finita de letras de A. A notação A^* representará o conjunto de todas as palavras sobre A.
3. À sequência vazia de letras de A chamaremos *palavra vazia*, notando-a por ϵ.

4. Dado $n \in \mathbb{N}$ e dadas n letras a_1, a_2, ..., a_n de um alfabeto A (possivelmente com repetições), utilizamos a notação $a_1 a_2 \ldots a_n$ para representar a palavra sobre A cuja i-ésima letra (para $1 \leq i \leq n$) é a_i.
5. O *comprimento* de uma palavra é o comprimento da respetiva sequência de letras. (Em particular, a única palavra de comprimento 0 é ϵ.)
6. Duas palavras sobre um alfabeto dizem-se *iguais* quando têm o mesmo comprimento e coincidem letra a letra.
7. Dadas duas palavras u, v sobre um alfabeto, utilizamos a notação uv para representar a *concatenação* de u com v (i. e., a concatenação das respetivas sequências de letras, colocando primeiro a sequência de letras relativa a u).
8. Uma *linguagem* sobre um alfabeto A é um conjunto de palavras sobre A (i.e. um subconjunto de A^*).

Exemplo 5: Seja A o alfabeto $\{0, s, +, \times, (,)\}$. Consideremos a linguagem E sobre A (E para *expressões*), definida indutivamente pelas seguintes *regras*:

1. $0 \in E$;
2. $e \in E \Rightarrow s(e) \in E$, para todo $e \in A^*$;
3. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 + e_2) \in E$, para todos $e_1, e_2 \in A^*$;
4. $e_1, e_2 \in E \Rightarrow (e_1 \times e_2) \in E$, para todos $e_1, e_2 \in A^*$.

Por exemplo, as palavras 0, $s(0)$, (0×0), $(s(0) + (0 \times 0))$ pertencem a E. De facto:

- $0 \in E$, pela regra 1.;
- de $0 \in E$, pela regra 2., segue $s(0) \in E$;
- de $0 \in E$, pela regra 4., segue $(0 \times 0) \in E$;
- de $s(0) \in E$ e $(0 \times 0) \in E$, pela regra 3., segue $(s(0) + (0 \times 0)) \in E$.

Já as palavras $+(00)$ e $s0$, que são palavras sobre A, não pertencem a E: note-se que nenhuma palavra de E tem a letra $+$ como primeira letra e nenhuma palavra de E, com exceção da palavra 0, tem 0 como última letra.

Teorema 6 (Princípio de indução para $\mathbb{N}$): Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a números $n \in \mathbb{N}$. Se:

1. $P(1)$ é verdadeira;
2. para todo $n \in \mathbb{N}$, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ é verdadeira;

então para todo $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

Dem.: consultar bibliografia. $\square$

Teorema 7 (Princípio de indução estrutural associado a uma definição indutiva): Considere-se uma definição indutiva (B,O) de um conjunto I sobre X e seja $P(e)$ uma propriedade relativa a elementos $e \in I$. Se:

1. para todo $b \in B$, $P(b)$ é verdadeira;
2. para cada operação $f : X^n \longrightarrow X$ de O e para todos $e_1, \ldots, e_n \in I$, se $P(e_1), \ldots P(e_n)$ são verdadeiras, então $P(f(e_1, \ldots, e_n))$ é verdadeira;

então para todo $e \in I$, $P(e)$ é verdadeira.

Dem.: consultar bibliografia. $\square$

Observação 8:

1. A cada definição indutiva de um conjunto I está associado um princípio de indução estrutural.
2. O Princípio de indução sobre os naturais é o princípio de indução estrutural associado à caracterização indutiva de $\mathbb{N}$ referida na observação 3.

Exemplo 9: O Princípio de indução estrutural associado à definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 é o seguinte:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa a $n \in C$. Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(k)$, então $P(k+2)$, para todo o $k \in C$;

então $P(n)$ é verdadeira, para todo o $n \in C$.

Consideremos a propriedade $P(n)$, relativa a $n \in C$, dada por "n é par". Provemos que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in C$. Pelo Princípio de indução estrutural para C, basta mostrarmos as duas condições acima descritas.

1. 0 é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.
2. Seja $k \in C$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira. Então, k é par. Logo, $k+2$ é também par e, portanto, $P(k+2)$ é verdadeira. Provámos, assim, a condição 2 do Princípio de indução estrutural para C.

Para mostar que C é efetivamente o conjunto dos números pares, falta ainda demonstrar que C contém o conjunto dos números pares. Para tal, pode provar-se, por indução em $\mathbb{N}_0$, que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $2n \in C$. (Exercício.)

Exemplo 10: O Princípio de indução estrutural associado à linguagem de expressões E do Exemplo 5 é o seguinte:

Seja $P(e)$ uma propriedade sobre $e \in E$. Se:

1. $P(0)$;
2. se $P(e)$, então $P(s(e))$, para todo $e \in E$;
3. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 + e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;
4. se $P(e_1)$ e $P(e_2)$, então $P((e_1 \times e_2))$, para todo $e_1, e_2 \in E$;

então $P(e)$, para todo $e \in E$.

Exemplo 11: Consideremos de novo a linguagem de expressões E do Exemplo 5 e consideremos a função $np : E \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada expressão de E faz corresponder o número de ocorrências de parênteses nessa expressão.

Esta função pode ser definida por *recursão estrutural em E* do seguinte modo:

1. $np(0) = 0$;
2. para todo $e \in E$, $np(s(e)) = 2 + np(e)$;
3. para todos $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$;
4. para todos $e_1, e_2 \in E$, $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$.

Mostremos, agora, uma das propriedades das expressões de E relativa à função np. Designadamente, mostremos que, para todo $e \in E$, $np(e)$ é par. A prova será feita com recurso ao Princípio de indução estrutural para E, descrito no exemplo 10.

Para cada $e \in E$, seja $P(e)$ a afirmação “$np(e)$ é par”.

1. $P(0)$ é a afirmação “$np(0)$ é par”. Ora, $np(0) = 0$, que, evidentemente, é par. Logo, $P(0)$ é verdadeira.

2. Seja $e \in E$ e suponhamos que $P(e)$ é válida (esta é a hipótese de indução (H. I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e)$ é par.

   Queremos provar que $P(s(e))$ é válida, i. e., que $np(s(e))$ é par. Ora, $np(s(e)) = 2 + np(e)$. Sendo $np(e)$ par, por H. I., e sendo a soma de dois pares um par, é óbvio que também $np(s(e))$ é par. Logo, podemos deduzir que $P(s(e))$ é válida.

3. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (estas são as hipóteses de indução (H. I.)). Ou seja, suponhamos que $np(e_1)$ é par, assim como $np(e_2)$.

   Queremos provar que $P((e_1 + e_2))$ é válida, i. e., que $np(e_1 + e_2)$ é par. Note-se que $np((e_1 + e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$. Por H. I., temos que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Como a soma de pares é também par, é claro que $np((e_1 + e_2))$ é par. Assim, pode-se concluir que $P((e_1 + e_2))$ é válida.

4. Sejam $e_1, e_2 \in E$ e suponhamos que $P(e_1)$ e $P(e_2)$ são válidas (H. I.). Logo, $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares.

   Queremos mostrar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida, ou seja, que $np(e_1 \times e_2)$ é par. Temos que $np((e_1 \times e_2)) = 2 + np(e_1) + np(e_2)$.

   Ora, temos, por H. I., que $np(e_1)$ e $np(e_2)$ são pares. Consequentemente, $np((e_1 \times e_2))$ é par. Assim, podemos afirmar que $P((e_1 \times e_2))$ é válida.

Mostrámos assim que as condições 1, 2, 3 e 4 do Princípio de indução estrutural para E são válidas. Logo, por esse Princípio, conclui-se que $P(e)$ é verdadeira para todo o $e \in E$, ou seja, que $np(e)$ é par para todo o $e \in E$.

Exemplo 12: A definição indutiva do conjunto C do Exemplo 1 também permite a definição de funções por recursão estrutural. Por exemplo, existe uma e uma só função $f : C \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(0) = 0$;
2. para todo $n \in C$, $f(n+2) = 1 + f(n)$.

Acerca desta função, pode provar-se, com recurso ao Princípio de indução para C (ver Exemplo 1), que, para todo $n \in C$, $f(n) = \frac{n}{2}$. (Exercício.)

Observação 13: Ao contrário do que sucede em relação ao *Princípio de indução estrutural*, nem todas as definições indutivas têm um *Princípio de recursão estrutural* associado. Este princípio é válido apenas para as chamadas *definições indutivas deterministas*, classe na qual se inserem as definições indutivas de C e E, que vimos nos Exemplos 1 e 5, e que se caracterizam por permitirem *decomposições únicas* dos seus elementos.

[Mais precisamente: uma definição indutiva (B, O) dum conjunto G é *determinista* se e só se, sempre que $f_1(x_1, \ldots, x_m) = f_2(y_1, \ldots, y_n)$ ($f_1, f_2 \in O$, $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in G$), temos $f_1 = f_2$, $m = n$ e, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x_i = y_i$.]