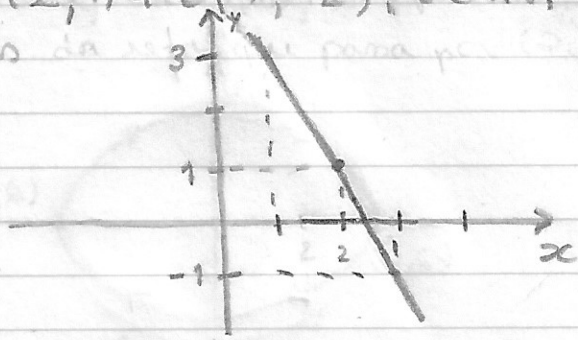
Ficha de trabalho 4

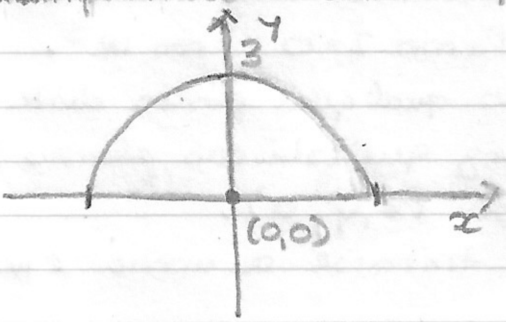
1.(a) $r(t) = (2+t, 1-2t), t \in IR$

As equações paramétricas desta curva são: $x = 2+t$ e $y = 1-2t$, $t \in IR$.
Escrevendo temos que: $r(t) = (2,1) + t(1,-2), t \in IR$, pelo que são as equações paramétricas da reta que passa por $(2,1)$ e é paralela ao vetor $(1,-2)$.



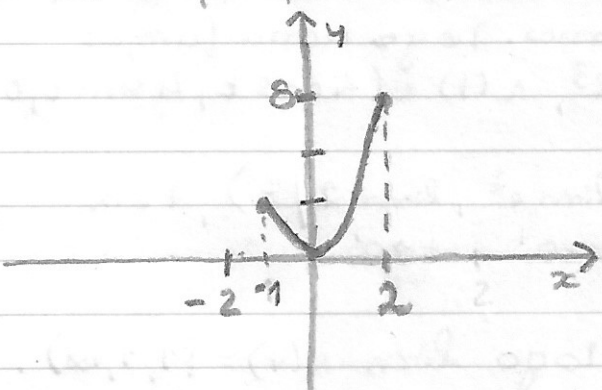
(b) $r(t) = (3\,sen\,t, 3\cos t), t \in [0,\pi]$. Para $t \in [0,\pi]$, $0 \leq sen\,t \leq 3$ e $0 \leq \cos t \leq 3$.
As equações paramétricas desta curva são: $x = 3\,sen\,t$, $y = 3\cos t$.
Temos que: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow sen^2 t + \cos^2 t = 1$

Assim, temos a curva da equação $sen^2 t + \cos^2 t = 1$, ou seja, temos a semi-circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.



(c) $r(t) = (t, 2t^2), t \in [-1,2]$

As equações paramétricas desta curva são: $x = t$ e $y = 2t^2$, $t \in [-1,2]$
Pelo que $r(t) = (0,0) + t(1, 2t), t \in [-1,2]$. Pelo que a curva da função $r(t)$ é uma parábola.

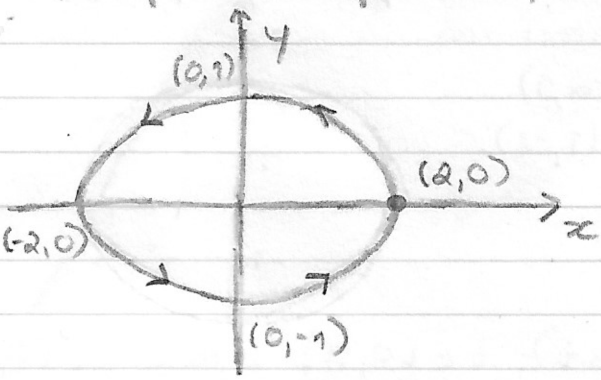


Como $x = t$, temos $x \in [-1,2]$.
$r(1) = (1, 2)$
$r(-1) = (-1, 2)$
$r(2) = (2, 8)$

(d) $r(t) = (2\cos t, sen\,t), t \in [0, 2\pi]$
Para $t \in [0, 2\pi]$, $-2 \leq \cos t \leq 2$ e $-1 \leq sen\,t \leq 1$.

Temos que as equações paramétricas são $x = 2\cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, para $t \in [0, 2\pi]$.

Assim, $\frac{x^2}{4} + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. Logo a curva da função vetorial $r(t)$ é a elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, percorrida uma única vez a partir do ponto $(2,0)$ no sentido direto.



2. (a) $y = x^4 + x$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Pelo que temos que $x = x$ e $y = x^4 + x$, logo uma parametrização da curva desta equação é, para $t \in \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, t^4 + t)$.

(b) $x^2 + y^2 = 16$ no plano $z = 0$, em $\mathbb{R}^3$.

Como é em $\mathbb{R}^3$, pelo qualquer ponto desta curva será do tipo (x, y, z) e uma vez que está no plano $z = 0$. As coordenadas serão do tipo $(x, y, 0)$.

A equação $x^2 + y^2 = 16$ trata-se de uma circunferência de raio 4.

Sabemos que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, multiplicando todo por 16, temos que: $16\cos^2 x + 16\operatorname{sen}^2 x = 16$

$$\Leftrightarrow (4\cos x)^2 + (4\operatorname{sen} x)^2 = 16$$

Considerando $x = 4\cos x$ e $y = 4\operatorname{sen} x$, temos que $x^2 + y^2 = 16$ que é a equação da curva que temos. Logo uma função vetorial desta curva é, para $t \in \mathbb{R}^3$, $r(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 0)$.

3. $\lim_{t \to 0^+} r(t) = \left(\lim_{t \to 0^+} \sqrt{t+1}, \lim_{t \to 0^+} e^t, \lim_{t \to 0^+} 1/t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim_{t \to 0^+} \sqrt{t+1} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1 \\ \bullet \lim_{t \to 0^+} e^t = e^0 = 1 \\ \bullet \lim_{t \to 0^+} 1/t = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array}\right\} \text{logo } \lim_{t \to 0^+} r(t) = (1, 1, +\infty).$$

4. $\int r(t)\,dt = ?$

$r(t) = (\cos t, t, 2e^t), t \in \mathbb{R}$

$$\int r(t)\,dt = \left(\int \cos t\,dt, \int t\,dt, \int 2e^t\,dt\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int \cos t\,dt = \text{sen}\, t + C_1\\ &\int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C_2\\ &\int 2e^t\,dt = 2e^t + C_3\end{aligned}\right\} \text{logo } \int r(t)\,dt = \left(\text{sen}\, t + C_1, \frac{1}{2}t^2 + C_2, 2e^t + C_3\right),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

5. $r(t) = (t^3, t^2, t+1), t \in [0,2]$

(a) A posição inicial da partícula é igual a $r(0) = (0,0,1)$.

(b) O vetor velocidade corresponde à derivada da $r(t)$. Ou seja, o vetor velocidade é igual a $(3t^2, 2t, 1), t \in \mathbb{R}$.

O vetor aceleração corresponde à segunda derivada de $r(t)$. Ou seja, o vetor aceleração é igual a $(6t, 2, 0), t \in \mathbb{R}$.

(c). A velocidade escalar no instante $t=1$ corresponde a $\|r'(1)\|$. Logo a velocidade escalar, em $t=1$, é $\|(3,2,1)\| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14}$.

O versor tangente, em $t=1$, corresponde a $\frac{r'(1)}{\|r'(1)\|}$. Logo, o versor tangente, no instante $t=1$, é $\frac{(3,2,1)}{\sqrt{14}} =$

$$= \frac{\sqrt{14}(3,2,1)}{14} = \left(\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{2\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}\right).$$

A91640 Beatriz Oliveira