Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
4 de janeiro de 2016

Álgebra Linear CC

segundo teste — duração: 2 horas

1. **Sejam B_1 a base canónica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, B_2 a base deste mesmo espaço vetorial dada por $B_2 = ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ e B_3 a base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ dada por $B_3 = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0))$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por**

$$f_k(x,y,z,w) = (x+z, x-ky-w, x-y),\ \forall (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4,$$

e seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$M(g; B_1, B_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) **Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "Para todo $k \in \mathbb{R}$, a aplicação f_k é uma transformação linear.".**

A afirmação é verdadeira. De facto, para todo $k \in \mathbb{R}$, tem-se

- para quaisquer $(x_1,y_1,z_1,w_1),(x_2,y_2,z_2,w_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned}
& f_k((x_1,y_1,z_1,w_1)+(x_2,y_2,z_2,w_2)) \\
= \ & f_k(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, w_1+w_2) \\
= \ & ((x_1+x_2)+(z_1+z_2), (x_1+x_2)-k(y_1+y_2)-(w_1+w_2), (x_1+x_2)-(y_1+y_2)) \\
= \ & ((x_1+z_1)+(x_2+z_2), (x_1-ky_1-w_1)+(x_2-ky_2-w_2), (x_1-y_1)+(x_2-y_2)) \\
= \ & (x_1+z_1, x_1-ky_1-w_1, x_1-y_1)+(x_2+z_2, x_2-ky_2-w_2, x_2-y_2) \\
= \ & f_k(x_1,y_1,z_1,w_1)+f_k(x_2,y_2,z_2,w_2),
\end{aligned}$$

- para quaisquer $(x_1,y_1,z_1,w_1) \in \mathbb{R}^4$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f_k(\alpha(x_1,y_1,z_1,w_1)) &= f_k(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha w_1) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha z_1, \alpha x_1 - k(\alpha y_1) - \alpha w_1, \alpha x_1 - \alpha y_1) \\
&= \alpha(x_1+z_1, x_1-ky_1-w_1, x_1-y_1) \\
&= \alpha f_k(x_1,y_1,z_1,w_1),
\end{aligned}$$

e, portanto, f_k é uma transformação linear.

(b) **Considere a transformação linear f_0.**

i. **Determine uma base de $\text{Nuc} f_0$ e a característica de f_0.**

Tem-se

$$\begin{aligned}
\text{Nuc} f_0 &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, f_0(x,y,z,w) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (x+z, x-w, x-y) = (0,0,0)\} \\
&= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, z=-x, w=x, y=x\} \\
&= \{(x,x,-x,x) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1,1,-1,1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x \in \mathbb{R}\} \\
&= < (1,1,-1,1) >,
\end{aligned}$$

logo $\{(1,1,-1,1)\}$ é um conjunto gerador de Nucf_0. Uma vez que $(1,1,-1,1) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, o vetor $(1,1,-1,1)$ é linearmente independente. Então $((1,1,-1,1))$ é uma base de Nucf_0.

A característica de f_0, c_{f_0}, é a dimensão do espaço vetorial Imf_0 e, sendo f_0 uma transformação linear cujo domínio é $\mathbb{R}^4$, sabe-se que

$$\dim\mathbb{R}^4 = \dim Nucf_0 + \dim \mathrm{Im} f_0.$$

Assim, como dos cálculos feitos anteriormente temos dimNuc$f_0 = 1$, segue que

$$4 = 1 + \dim \mathrm{Im} f_0,$$

pelo que $\dim \mathrm{Im} f_0 = 3$, ou seja, $c_{f_0} = 3$.

ii. **Diga, justificando, se f_0 é:**

(α) **injetiva.**

Uma vez que f_0 é uma transformação linear com domínio $\mathbb{R}^4$, então f_0 é injetiva se e só se Nuc$f_0 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Ora, da alínea anterior sabe-se que $(1,1,-1,1) \in$ Nucf_0. Então, como $(1,1,-1,1) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, concluímos que f_0 não é injetiva.

(β) **sobrejetiva.**

O conjunto de chegada da transformação linear f_0 é $\mathbb{R}^3$, logo f_0 é sobrejetiva se e só se Im$f_0 = \mathbb{R}^3$. Ora, como Im$f_0 \leq \mathbb{R}^3$ e sabemos da alínea anetrior que $\dim \mathrm{Im} f_0$ $= 3 = \dim\mathbb{R}^3$, concluímos que Im$f_0 = \mathbb{R}^3$. Logo f_0 é sobrejetiva.

iii. **Determine $M(f_0; B_3, B_1)$, $M(id_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_2)$ e $M(g \circ f_0; B_3, B_2)$.**

Temos

$$\begin{array}{rcl} f_0(1,1,1,1) & = & (2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ f_0(1,1,1,0) & = & (2,1,0) = 2(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ f_0(1,1,0,0) & = & (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1) \\ f_0(1,0,0,0) & = & (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1) \end{array},$$

logo, pela definição de $M(f_0; B_3, B_1)$, vem que

$$M(f_0; B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relativamente à matriz $M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_2)$, e uma vez que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) & = & (1,0,0) = 1.(1,1,1) - 1(0,1,1) + 0(0,0,1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) & = & (0,1,0) = 0.(1,1,1) + 1(0,1,1) - 1(0,0,1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(0,0,1) & = & (0,0,1) = 0.(1,1,1) + 0(0,1,1) + 1(0,0,1) \end{array},$$

tem-se

$$M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que $g \circ f = id_{\mathbb{R}^3} \circ g \circ f$, tem-se

$$M(g; B_3, B_2) = M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_2) M(g; B_1, B_1) M(f_0; B_3, B_1),$$

donde resulta

$$\begin{aligned}
M(g;B_3,B_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ -8 & -10 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(c) **Mostre que $(-1,2,2)$ é um vetor próprio de g e indique a que valor próprio está associado.**

Um vetor $u \in \mathbb{R}^3$ diz-se um vetor próprio de g se

(i) $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$,

(ii) $g(u) = \lambda u$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

A condição (i) é óbvio que se verifica, pois $(-1,2,2) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. A condição (ii) também é simples de verificar. De facto, uma vez que

$$(-1,2,2) = -1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 2(0,0,1),$$

$$v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $(-1,2,2)$ relativamente à base B_1. Logo

$$M(g;B_1,B_1) \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $g(-1,2,2)$ relativamente à base B_1. Assim,

$$g(-1,2,2) = -4(1,0,0) + 8(0,1,0) + 8(0,0,1) = (-4,8,8).$$

Logo $g(-1,2,2) = 4.(-1,2,2)$.

Assim, $(-1,2,2)$ é um vetor próprio de g associado ao valor próprio 4.

(d) **Mostre que g tem apenas dois valores próprios distintos. Determine uma base do subespaço próprio associado ao menor valor próprio de g e conclua que a multiplicidade geométrica desse valor próprio é 2.**

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de g sse $|M(g;B_1,b_1) - \lambda I_3| = 0$. Então, atendendo a que

$$\begin{aligned}
|M(g;B_1,B_1) - \lambda I_3| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ -4 & -2-\lambda & 4 \\ -4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^{2+2}(-2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (-1)^{2+2}(-2-\lambda)((-\lambda)(2-\lambda) - 8) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (-2-\lambda) = 0 \text{ ou } \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 4,
\end{aligned}$$

concluímos que -2 e 4 são os únicos valores próprios de g.

O menor valor próprio de g é o -2, pelo que vamos determinar uma base do subespaço próprio de g associado a este valor próprio, ou seja, vamos determinar uma base do subespaço $\mathbb{R}^3{}_{-2} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : g(a,b,c) = -2(a,b,c)\}$. Relativamente a este subespaço tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3{}_{-2} &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : g(a,b,c) = -2(a,b,c)\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : g(a,b,c) + 2(a,b,c) = (0,0,0)\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (g + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(a,b,c) = (0,0,0)\} \\
&= \left\{ a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : M(g + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_1) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Assim, no sentido de determinarmos os elementos de $\mathbb{R}^3{}_{-2}$, vamos resolver o sistema

$$M(g + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora, aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema, temos

$$[M(g + 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_3 + 2l_1]{l_2 \leftrightarrow l_2 + 2l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

pelo que o sistema inicial é equivalente ao sistema

$$2x + 0y - 2z = 0.$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3{}_{-2} &= \{a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : 2a - 2c = 0\} \\
&= \{a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : a = c\} \\
&= \{c(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{b(0,1,0) + c(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 : b, c \in \mathbb{R}\} \\
&= < (0,1,0), (1,0,1) > .
\end{aligned}$$

Logo $\{(0,1,0),(1,0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3{}_{-2}$. Uma vez que os vetores $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ são não nulos e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $(0,1,0) \neq \lambda(1,0,1)$, estes vetores são linearmente independentes. Por conseguinte, $((0,1,0),(1,0,1))$ é uma base $\mathbb{R}^3{}_{-2}$.

A multiplicidade geométrica do valor próprio -2 é a dimensão do subespaço próprio de g associado a este valor próprio. Então, como $\dim \mathbb{R}^3{}_{-2} = 2$ (pois $\mathbb{R}^3{}_{-2}$ tem uma base com dois vetores), tem-se $m.g.(-2) = 2$.

(e) **Diga, justificando, se g é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.**

Sejam V, V' espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Diz-se que uma aplicação linear $f : V \to V'$ é um automorfismo se f é um endmorfismo (isto é, se $V = V'$) e se f é bijetiva. Um endomorfismo f é um automorfismo se e só se 0 não é valor próprio de f.

No caso particular da aplicação linear g é óbvio que se trata de um endomorfismo, uma vez que g é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Além disso, da alínea anterior sabe-se que -2 e 4 são os únicos valores próprios de g. Logo 0 não é valor próprio de g e, portanto, g é um automorfismo.

(f) **Dê exemplo de, ou justifique que não existe, uma base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g; B, B)$ é diagonal.**

Da definição e da caracterização de endomorfismos diagonalizáveis sabe-se que existe uma base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(g; B, B)$ é diagonal se e só se existir uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de g.

Ora, da alínea (d) sabe-se que os únicos valores próprios de g são -2 e 4 com multiplicidades algébricas 2 e 1, respetivamente. Sabe-se também que ${\mathbb{R}^3}_{-2} =< (0,1,0),(1,0,1) >$ e que $\dim{\mathbb{R}^3}_{-2} = 2$. A respeito do subespaço próprio de g associado ao valor próprio 4 tem-se $< (-1,2,2) >\subseteq {\mathbb{R}^3}_4$ (pois $(-1,2,2)$ é um vetor próprio de g associado ao valor próprio 4) e $\dim{\mathbb{R}^3}_4 = 1$ (uma vez que $\dim{\mathbb{R}^3}_4 = m.g.(4)$ e $1 \leq m.g.(4) \leq m.a.(4) = 1$). Então, como $< (-1,2,2) >\subseteq {\mathbb{R}^3}_4$ e $\dim{\mathbb{R}^3}_4 = 1 = \dim < (-1,2,2) >$, pode-se concluir que ${\mathbb{R}^3}_4 =< (-1,2,2) >$. Sabendo que $\dim{\mathbb{R}^3}_{-2} = 2$, $\dim{\mathbb{R}^3}_4 = 1$ e que a soma de subespaços próprios de g associados a valores próprios distintos é uma soma direta, segue que

$$\begin{aligned}\dim({\mathbb{R}^3}_{-2} + {\mathbb{R}^3}_4) &= \dim < (0,1,0),(1,0,1),(-1,2,2) > \\ &= \dim < (0,1,0),(1,0,1) > + \dim < (-1,2,2) > \\ &= 2+1=3.\end{aligned}$$

Por conseguinte, os vetores $(0,1,0),(1,0,1),(-1,2,2)$ são linearmente independentes. Como $(0,1,0),(1,0,1),(-1,2,2)$ são 3 vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes e $\dim\mathbb{R}^3 = 3$, a sequência $B = ((0,1,0),(1,0,1),(-1,2,2))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Então B é uma base formada por vetores próprios de g e a matriz $M(g; B, B)$ é uma matriz diagonal;

$$M(g; B, B) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. **Considere as matrizes reais a seguir indicadas**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ d & -d & e & f \\ a & -a & b & c \\ g & -g & h & i \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e sejam $D, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) **Sabendo que $|B| = 3$, determine $|C|$.**

Aplicando o Teorema de Laplace ao longo da linha 1 da matriz C e tendo em conta as propriedades relativas a determinates, tem-se

$$
\begin{aligned}
|C| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ d & -d & e & f \\ a & -a & b & c \\ g & -g & h & i \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} -d & e & f \\ -a & b & c \\ -g & h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times 2 \times (-1) \times \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times 2 \times (-1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\
&= 2 \times |B| - |B| \\
&= 6 - 3 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

(b) **Justifique que o sistema $A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = b$ é um sistema de Cramer e resolva-o recorrendo a determinantes.**

Um sistema $Ax = b$ a n equações e n incógnitas diz-se um sistema de Cramer se $|A| \neq 0$.

O sistema $A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = b$ é um sistema a 3 equações e 3 incógitas. Além disso,

$$
\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 2 \times (2+1) - (1-1) = 6 \neq 0.
\end{aligned}
$$

Logo o sistema indicado é um sistema de Cramer. Uma vez que um sistema de Cramer é um sistema possível e determinado, o sistema indicado tem uma única solução $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, onde

$$
a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-1)^{2+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(0+1)}{6} = -\frac{1}{6}
$$

$$
a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-1)^{2+2} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(4-1)}{6} = \frac{1}{2}
$$

$$
a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-1)^{2+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(-2-0)}{6} = \frac{1}{3}
$$

Assim, o conjunto de soluções do sistema dado é $\{(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})\}$.

(c) **Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "Se** $\det D = 0$ **ou** $\det E = 0$**, então** $\mathrm{car}(DE) < n$**."**

Uma vez que as matrizes D e E são ambas matrizes quadradas de ordem n, tem-se $\det(DE) = \det D \det E$. Assim, se $\det D = 0$ ou $\det E = 0$, resulta que $\det(DE) = 0$. Logo DE não é uma matriz invertível e, por conseguinte, $car(DE) < n$.

Logo a afirmação é verdadeira.

(d) **Mostre que se** D **é invertível, então a matriz** $\mathrm{Adj}D$ **é invertível e** $\mathrm{Adj}(\mathrm{Adj}\, D) = |D|^{n-2}D$**.**

Se D é uma matriz invertível tem-se $|D| \neq 0$ e $D^{-1} = \frac{1}{|D|}Adj(D)$. Desta igualdade segue que $Adj(D) = |D|D^{-1}$ e daqui é simples concluir que $Adj(D)$ é invertível e que $(AdjD)^{-1} = |D|^{-1}D$, uma vez que

$$Adj(D)(|D|^{-1}D) = (|D|D^{-1})(|D|^{-1}D) = (|D||D|^{-1})(D^{-1}D) = I_n$$

e

$$(|D|^{-1}D)Adj(D) = (|D|^{-1}D)(|D|D^{-1}) = (|D|^{-1}|D|)(D^{-1}D) = I_n.$$

Atendendo a que a matriz $Adj(D)$ é invertível, tem-se

$$(Adj(D))^{-1} = \frac{1}{|Adj(D)|}Adj(Adj(D))$$

donde resulta

$$Adj(Adj(D)) = |Adj(D)|^{-1}(Adj(D))^{-1}.$$

Então, uma vez que

$$|Adj(D)| = ||D|^{-1}D| = (|D|^{-1})^n|D| = |D|^{-n+1},$$

obtemos

$$Adj(Adj(D)) = (|D|^{-n+1})^{-1}(|D|^{-1}D) = |D|^{n-2}D.$$

Cotação: **1** - (1.5 + 2.25 + 1.0 + 2.25 + 1.5 + 3.0 + 1.0 + 1.5); **2** - (1.5 + 1.75 + 1.25 + 1.5).