2.3. Dedução Natural para o Cálculo de Predicados

Observação 211: O sistema formal DNP será estendido ao Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica, ao longo desta secção, mantendo-se a generalidade dos conceitos e resultados.

As diferenças essenciais serão as de que as derivações passarão a utilizar *fórmulas de tipo L*, em vez de fórmulas proposicionais, e existirão *novas regras de inferência, relativas aos quantificadores*.

O *sistema formal de Dedução Natural para o Cálculo de Predicados* de Primeira Ordem da Lógica Clássica é parametrizado por um tipo de linguagem L e será denotado por DN_L ou, simplesmente, por DN.

Definição 212: As regras de inferência de DN são as regras de DNP (que, agora, em vez de se aplicarem a fórmulas do Cálculo Proposicional se aplicam a fórmulas de tipo *L*), juntamente com quatro regras para quantificadores, introduzidas em slides seguintes.

Definição 213: As regras de inferência de DN relativas à *quantificação universal* são as seguintes:

Regra de **I***ntrodução* *Regra de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\forall x\,\varphi}\ \forall I\ \text{(a)} \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \forall x\,\varphi\end{array}}{\varphi[t/x]}\ \forall E\ \text{(b)}$$

(a) Na derivação da premissa, x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas.

(b) x é substituível por t em φ.

Exemplo 214: Seja L um tipo de linguagem com símbolos de relação unários P e Q.

As combinações de inferências que se seguem constituem derivações em DN:

1.
$$\frac{\forall x_0\,(P(x_0) \wedge Q(x_0))}{P(x_0) \wedge Q(x_0)}\ \forall E$$

Note-se que $(P(x_0) \wedge Q(x_0))[x_0/x_0] = P(x_0) \wedge Q(x_0)$ e que x_0 é substituível por x_0 em $P(x_0) \wedge Q(x_0)$.

2.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x_0\,(P(x_0) \wedge Q(x_0))}{P(x_0) \wedge Q(x_0)}\;\forall E}{P(x_0)}\;\wedge_1 E$$

3.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x_0\,(P(x_0) \wedge Q(x_0))}{P(x_0) \wedge Q(x_0)}\;\forall E}{P(x_0)}\;\wedge_1 E}{\forall x_0\, P(x_0)}\;\forall I$$

Note-se que *a aplicação da regra* $\forall I$ *é correta* uma vez que a única hipótese não cancelada na derivação é $\forall x_0\,(P(x_0) \wedge Q(x_0))$ e $x_0 \notin LIV(\forall x_0\,(P(x_0) \wedge Q(x_0)))$.

Exemplo 215: A seguinte aplicação da regra $\forall I$ é **incorreta**:

$$\frac{P(x_0)}{\forall x_0\, P(x_0)}\ \forall I$$

A *condição lateral* imposta por esta regra não é satisfeita: esta condição impõe que x_0 não tenha ocorrências livres nas hipóteses não canceladas da derivação da premissa, mas esta derivação (com apenas um nodo) tem como hipótese não cancelada $P(x_0)$, onde x_0 tem uma ocorrência livre.

Exemplo 216: A seguinte aplicação da regra $\forall E$ (envolvendo fórmulas de tipo *ARIT*) é **incorreta**:

$$\frac{\forall x_0 \, \exists x_1 \, (x_0 = x_1)}{\exists x_1 \, (s(x_1) = x_1)} \; \forall E$$

Neste caso, a condição lateral relativa a esta regra impõe que x_0 seja substituível por $s(x_1)$ em $\exists x_1 \, (x_0 = x_1)$, o que não se verifica.

Definição 217: As regras de inferência de DN relativas à *quantificação existencial* são as seguintes:

Regra de **I***ntrodução* *Regra de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi[t/x]\end{matrix}}{\exists x\,\varphi}\ \exists I\ \text{(a)} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \exists x\,\varphi\end{matrix}\quad \begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\ \exists E\ \text{(b)}$$

(a) x é substituível por t em φ.

(b) x não tem ocorrências livres em ψ e, na derivação da segunda premissa, x não tem ocorrências livres nas hipóteses não canceladas distintas de φ.

Exemplo 218: Consideremos de novo que L é um tipo de linguagem com símbolos de relação unários P e Q.

As combinações de inferências que se seguem constituem derivações em DN:

1.
$$\dfrac{P(x_0)}{P(x_0) \vee Q(x_0)}\ \vee_1 I$$

2.
$$\dfrac{\dfrac{P(x_0)}{P(x_0) \vee Q(x_0)}\ \vee_1 I}{\exists x_1\,(P(x_1) \vee Q(x_1))}\ \exists I$$

Note-se que $P(x_0) \vee Q(x_0) = (P(x_1) \vee Q(x_1))\,[x_0/x_1]$ e que x_1 é substituível por x_0 em $P(x_1) \vee Q(x_1)$.

3.

$$\dfrac{\exists x_0\, P(x_0) \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{P(x_0)}}{P(x_0) \vee Q(x_0)}\ \vee_1 I}{\exists x_1\, (P(x_1) \vee Q(x_1))}\ \exists I}{\exists x_1\, (P(x_1) \vee Q(x_1))}\ \exists E$$

Note-se que a aplicação de $\exists E$ é correta uma vez que $x_0 \notin LIV(\exists x_1\, (P(x_1) \vee Q(x_1)))$ e que a derivação da segunda premissa (ou seja a derivação do item anterior — onde $P(x_0)$ ainda não está cancelada) não tem hipóteses por cancelar além de $P(x_0)$.

Exemplo 219: Na combinação de inferências que se segue, a aplicação de $\exists E$ é **incorreta**:

$$\dfrac{\exists x_0\, P(x_0) \qquad \dfrac{\cancel{P(x_0)}}{P(x_0) \vee Q(x_0)}\ \vee_1 I}{P(x_0) \vee Q(x_0)}\ \exists E$$

Neste caso, a aplicação de $\exists E$ impõe que x_0 não tenha ocorrências livres na segunda premissa ($P(x_0) \vee Q(x_0)$), o que não se verifica.

Definição 220: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DN}$ *das derivações em DN* é definido de modo análogo a $\mathcal{D}^{DNP}$, ou seja, $\mathcal{D}^{DN}$ é o menor conjunto X de árvores finitas de fórmulas de tipo L (com folhas possivelmente canceladas) que contém as árvores com uma única fórmula e que é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DN.

Por exemplo, X é fechado para a regra $\forall I$ quando satisfaz a condição:

se $\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \in X$ e x é uma variável que não ocorre livre nas hipóteses não canceladas de D, então

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array}}{\forall x \varphi}\ \forall I \quad \in X.$$

Observação 221: O conjunto $\mathcal{D}^{DN}$ das derivações em DN admite princípios de *indução estrutural e de recursão estrutural* e existe um conceito natural de *subderivação*.

Definição 222: Em DN, os conceitos (e notações associadas) de *hipótese* de uma derivação, *de hipótese (não) cancelada* de uma derivação, de *conclusão* de uma derivação, de *derivação de uma fórmula a partir de um conjunto de fórmulas*, de *demonstração de uma fórmula*, de *consequência sintática*, de *teorema* e de *(in)consistência sintática* são definidos tal como em DNP (tomando por base o conjunto das derivações em DN, em vez do conjunto das derivações em DNP).

Exemplo 223:

1. Sejam φ uma fórmula de tipo L e x uma variável.
   A seguinte árvore de fórmulas é uma derivação de $\exists x\,\varphi$ a partir de $\{\forall x\,\varphi\}$:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\,\varphi}{\varphi}\ \forall E}{\exists x\,\varphi}\ \exists I$$

   (Note-se que $\varphi[x/x] = \varphi$ e que x é substituível por x em φ, pelo que as inferências $\forall E$ e $\exists I$ satisfazem as respetivas *condições laterais*.)

   Desta derivação podemos concluir: $\forall x\,\varphi \vdash \exists x\,\varphi$.

2. Sejam φ uma fórmula de tipo L e x uma variável.
   A seguinte árvore de fórmulas é uma demonstração em DN de $\forall x\,\varphi \to \exists x\,\varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x\,\varphi}^{(1)}}{\varphi}\ \forall E}{\exists x\,\varphi}\ \exists I}{\forall x\,\varphi \to \exists x\,\varphi}\ \to I^{(1)}$$

   Assim, $\forall x\,\varphi \to \exists x\,\varphi$ é teorema de DN.

Exemplo 224: Sejam φ uma fórmula de tipo L e x e y variáveis. A árvore de fórmulas abaixo é uma demonstração em DN de $\exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$, pelo que esta fórmula é teorema de DN.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\cancel{\exists x \forall y \varphi}^{(1)}$}
\AxiomC{$\cancel{\forall y \varphi}^{(2)}$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{φ}
\RightLabel{$\exists I$}
\UnaryInfC{$\exists x \varphi$}
\RightLabel{$\exists E^{(2)}$ (a)}
\BinaryInfC{$\exists x \varphi$}
\RightLabel{$\forall I$ (b)}
\UnaryInfC{$\forall y \exists x \varphi$}
\RightLabel{$\to I^{(1)}$}
\UnaryInfC{$\exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$}
\end{prooftree}
$$

(a) x não ocorre livre na segunda premissa (a fórmula $\exists x \varphi$) e x não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada da derivação da segunda premissa que seja distinta de $\forall y \varphi$ (na derivação da segunda premissa, a única hipótese não cancelada é $\forall y \varphi$).

(b) y não ocorre livre em nenhuma hipótese não cancelada da derivação da premissa (a única hipótese não cancelada na derivação da premissa é $\exists x \forall y \varphi$, que não tem ocorrências livres de y).

Proposição 225: Sejam φ e ψ fórmulas de tipo L, sejam Γ e Δ conjuntos de fórmulas de tipo L, seja x uma variável e seja t um termo de tipo L.

a) Se $\Gamma \vdash \forall x \varphi$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$.

b) Se $\Gamma \vdash \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \vdash \forall x \varphi$.

c) Se $\Gamma \vdash \varphi[t/x]$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \vdash \exists x \varphi$.

d) Se $\Gamma \vdash \exists x \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$ e $x \notin LIV(\Delta \cup \{\psi\})$, então $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Dem.:

a), **b)** e **c)**: exercício.

d): slide seguinte.

d) Pela hipótese $\Gamma \vdash \exists x\, \varphi$, existe uma derivação D_1 cuja conclusão é $\exists x\, \varphi$ e tal que o seu conjunto de hipóteses não canceladas é $\mathcal{H}(D_1) \subseteq \Gamma$. Pela hipótese $\Delta, \varphi \vdash \psi$, existe uma derivação D_2 cuja conclusão é ψ e tal que o seu conjunto de hipóteses não canceladas é $\mathcal{H}(D_2) \subseteq \Delta \cup \{\varphi\}$. Ainda por hipótese, x não tem ocorrências livres nas fórmulas do conjunto $\Delta \cup \{\psi\}$. Logo, x não tem ocorrências livres nem na conclusão de D_2, nem em nenhuma das hipóteses não canceladas de $D2$ distintas de φ, pelo que a aplicação de $\exists E$ que se segue é correta:

$$D = \dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ \exists x\, \varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D_2 \\ \psi \end{array}}{\psi}\ \exists E.$$

Assim, D é uma derivação cuja conclusão é ψ e tal que o seu conjunto de hipóteses não canceladas é $\mathcal{H}(D) \subseteq \mathcal{H}(D_1) \cup (\mathcal{H}(D_2) \setminus \{\varphi\}) \subseteq \Gamma \cup \Delta$, donde $\Gamma, \Delta \vdash \psi$. $\square$

Observação 226: Os resultados fundamentais estudados no Cálculo Proposicional, que relacionam o sistema formal DNP com os conceitos semânticos, mantêm-se válidos no Cálculo de Predicados para o sistema formal DN. Especificamente, para qualquer L-fórmula φ e para qualquer conjunto de L-fórmulas Γ, tem-se:

1. (Teorema da Correção) Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \models \varphi$.
2. Γ é consistente sse Γ é satisfazível.
3. (Teorema da Completude) Se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.
4. (Teorema da Adequação) $\Gamma \vdash \varphi$ sse $\Gamma \models \varphi$.
5. (Corolário) φ é teorema de DN sse φ é universalmente válida.

Em particular:
(i) para mostrar $\Gamma \nvdash \varphi$ bastará mostrar $\Gamma \not\models \varphi$;
(ii) para mostrar que Γ é consistente, bastará mostrar que Γ é satisfazível;
(iii) para mostrar que φ não é teorema de DN, bastará mostar que φ não é universalmente válida.