

Nome:

Nº

Curso:

*Responda à questão 3 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste.  
Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do R que utilizar. Duração: 2h.*

1. Seja  $X$  a variável aleatória real (v.a.r.) que representa o saldo diário (em centenas de euros) de uma certa empresa A. Sabe-se que  $X$  é uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{4}{3}x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{se } \text{c.c.} \end{cases},$$

em que  $k$  é uma constante real.

- (a) Mostre que  $k = \frac{1}{3}$  e determine a função de distribuição de  $X$ .
- (b) Calcule a probabilidade de, em 5 dias, haver pelo menos 3 dias em que a empresa tem prejuízo e de haver apenas um dia em que tem lucro superior a 50€. Justifique.
- (c) Determine o primeiro decil ( $\chi_{0.1}$ ) e o nono decil ( $\chi_{0.9}$ ) de  $X$ .
- (d) Usando a definição, mostre que  $E[X]$  e  $Var[X]$  existem e que  $E[X] = \frac{5}{18}$  e  $Var[X] = \frac{119}{324}$ .
- (e) Calcule a probabilidade aproximada de, ao fim de 40 dias de vendas, a empresa ter lucro.
- (f) Numa outra empresa B, o saldo diário é uma v.a.r.,  $Y$ , independente de  $X$  e tal que  $Y \sim U([-1, 1])$ . Calcule a probabilidade de, sabendo que, num dia, a empresa B teve lucro, o lucro da empresa A ser pelo menos o dobro do da empresa B.

**Observações:** 1) Assuma que saldos obtidos em dias distintos são quantidades independentes.  
2) Caso não consiga resolver a alínea a), use  $F_X(0) = 1/3$  e  $F_X(1/2) = 1/2$  nas seguintes.

2. Considere duas v.a.r.'s,  $X$  e  $Y$ , independentes e tais que  $X \sim N(5, 9)$  e  $Y \sim Poisson(3)$ .
- (a) Identifique, justificando, a lei da v.a.r.  $Z = \frac{X-5}{3}$  e determine  $P(Z > \frac{1}{2}, Y = 3)$ .
  - (b) Determine  $E[Y^2]$  e a mediana da v.a.r.  $Y^2$ .
  - (c) Uma certa empresa tem uma loja física, com 4 vendedores, e tem ainda uma plataforma de vendas online. Sabe-se que os montantes diários de vendas (em milhares de euros) dos diferentes vendedores da loja são v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com  $X$ , enquanto que o montante diário de vendas da plataforma online é uma v.a.r. que segue uma lei Normal, com valor médio de 10 mil euros e desvio-padrão de 2 mil euros. Supondo que o montante diário de vendas online é independente do montante da loja física,
    - i. identifique, justificando, a lei de probabilidade do montante diário de vendas da empresa;
    - ii. calcule a probabilidade de o montante diário de vendas da empresa ser superior a 45 mil euros;
    - iii. calcule a probabilidade de, num dia, o montante de vendas online ser inferior ao da loja física.

Cotação:

1) 11.0 [3.0+1.5+1.0+2.0+1.5+2.0];    2) 6.5 [a) 2.0, b) 1.5, c) 3.0];    3) 2.5 [a) 1.0, b) 1.5]

3. Seja  $X$  uma v.a.r. e  $L_X(t), t \in \mathbb{R}$ , a transformada de Laplace de  $X$ . Sejam ainda  $a$  e  $b$  constantes reais.

(a) Mostre que a transformada de Laplace da v.a.r.  $aX + b$  é dada por

$$L_{aX+b}(t) = e^{-bt} L_X(at), t \in \mathbb{R}.$$

(b) Recorrendo à transformada de Laplace diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

- i. Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  e  $a \neq 0$ , então  $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ .
- ii. Se  $X \sim Poisson(\lambda)$  e  $b \neq 0$ , então  $X + b \sim Poisson(\lambda + b)$ .

Observação: Na alínea (b) pode usar, **sem demonstrar**, que:

- se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  então  $L_X(t) = \exp \left\{ -t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 \right\}, t \in \mathbb{R}$ ;
- se  $X \sim Poisson(\lambda)$  então  $L_X(t) = \exp \{ -\lambda(1 - e^{-t}) \}, t \in \mathbb{R}$ .