Teste — 12 de janeiro de 2023 Duração: 120 minutos

Nome: __________ Número: __________

Grupo I

Responda a cada uma das 8 questões deste grupo no enunciado, no espaço disponibilizado a seguir à questão, **sem apresentar justificações**.

1. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional que tenha exatamente três subfórmulas e tal que $var((p_0 \vee p_1)[\varphi/p_1]) = \{p_0, p_1\}$.

   Resposta:

2. Dê exemplo de uma fórmula φ do Cálculo Proposicional cujos conetivos estejam no conjunto $\{\neg, \wedge\}$ e tal que $\varphi \wedge (p_0 \vee p_1)$ seja uma contradição.

   Resposta:

3. Dê exemplo de uma valoração v_0 que mostre que: $p_0 \to p_1, p_1 \to p_2 \not\models p_0 \vee p_2$.

   Resposta:

4. Indique um conjunto de fórmulas proposicionais Γ que seja maximalmente consistente e tal que $\{p_1 \leftrightarrow p_2, \neg p_1\} \subset \Gamma$.

   Resposta:

5. Considere o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(\mathsf{c}) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ tal que:

   $\overline{\mathsf{c}} = 1$ $\quad$ $\overline{\mathsf{f}} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ tal que $\overline{\mathsf{f}}(z_1, z_2) = z_1 + z_2$

   $\overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z = 2z', \text{ para algum } z' \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $\overline{=} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid z_1 = z_2\}$

   Dê exemplo de uma atribuição a_0 em E tal que $\mathsf{f}(\mathsf{c}, x_0)[a_0]_E = \mathsf{f}(x_1, \mathsf{f}(\mathsf{c}, \mathsf{c}))[a_0]_E$.

   Resposta:

6. Considere de novo o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ definido na Questão 5. Indique o número de L-estruturas cujo domínio é $\{0, 1\}$.

   Resposta:

7. Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$. Seja $\psi = \forall x_1 \exists x_2 \neg (x_0 + x_1 < x_2)$. Dê exemplo de um L-termo t tal que x_0 não seja substituível sem captura de variáveis por t em ψ.

   Resposta:

8. Considere o tipo de linguagem $L = L_{Arit}$. Dê exemplo de uma L-fórmula φ que seja uma forma normal prenexa tal que $\varphi \Leftrightarrow (x_0 = 0 \wedge \neg \exists x_0\, x_0 < 0)$.

   Resposta:

Grupo II

Responda às 6 questões deste grupo na folha de teste, **justificando** convenientemente as respostas.

1. Sejam v_1 a valoração tal que $v_1(p_i) = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $BIN = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Prove por indução estrutural que, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, se os conetivos de φ pertencem a BIN, então $v_1(\varphi) = 1$.

2. Indique, justificando, uma forma normal disjuntiva logicamente equivalente à fórmula $(p_0 \leftrightarrow p_1) \vee \neg p_1$.

3. Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Mostre que: se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é consistente e $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, então ψ não é contradição.

4. Apresente uma demonstração em DNP de $(\neg p_0 \vee (p_1 \rightarrow \perp)) \rightarrow (p_0 \rightarrow \neg p_1)$.

5. Considere de novo o tipo de linguagem $L = (\{\mathsf{c}, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$ e a L-estrutura $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ definidas na Questão 5 do Grupo I. Seja φ a L-fórmula: $\forall x_1\, ((\mathsf{P}(x_1) \wedge \mathsf{P}(x_2)) \rightarrow \mathsf{P}(\mathsf{f}(x_1, x_2)))$. Mostre que φ é válida em E.

6. Sejam L um tipo de linguagem, φ, ψ, σ fórmulas de tipo L e x uma variável tal que $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$. Mostre que: $(\exists x\, \sigma) \wedge \varphi, \exists x \psi \vdash \exists x (\varphi \wedge \psi)$.

Cotações	I (8 valores)	II (12 valores)
	1+1+1+1+1+1+1+1	2+2+2+2+2+2