Álgebra Linear CC

—— 1^o teste — 25 de novembro de 2015 —————— duração: 2 horas ——

1. (a) **Considere as matrizes**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz real X que é solução da equação matricial $AB + X = 2bb^T$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} AB + X = 2bb^T \quad &\text{sse} \quad -(AB) + (AB + X) = -AB + 2bb^T \\ &\text{sse} \quad (-AB + AB) + X = -AB + 2bb^T \\ &\text{sse} \quad (\mathbf{0}_n) + X = -AB + 2bb^T \\ &\text{sse} \quad X = -AB + 2bb^T, \end{aligned}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 2bb^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$X = -\begin{bmatrix} 0 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) **Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:**

i. **Se $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{R})$ são matrizes tais que a expressão $(CD)^T - 2C$ define uma matriz, então $p = 1$.**

A afirmação é verdadeira.

Admitamos que a expressão $(CD)^T - 2C$ define uma matriz. Então o produto CD está definido e, por definição de multiplicação de matrizes, o número de colunas de C tem de ser igual ao número de linhas de D, $n = p$, e $CD \in \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Por conseguinte, por definição de transposta de uma matriz, $(CD)^T \in \mathcal{M}_{1\times m}(\mathbb{R})$. Relativamente à matriz $-2C$, sabe-se que $-2C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, uma vez que $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e atendendo à definição de produto de um escalar por uma matriz. Por último, uma vez que a adição de matrizes apenas está definida para matrizes da mesma ordem, segue que as matrizes $(CD)^T$ e $-2C$ têm de ser da mesma ordem, pelo que $m = 1$ e $n = m$. Logo $p = n = m = 1$.

ii. **Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se A e B são matrizes simétricas, então AB é simétrica.**

A afimação é falsa.

Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diz-se simétrica se $X^T = X$.
Se considerarmos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

é simples verificar que se tratam de matrizes simétricas, pois $A = A^T$ e $B = B^T$. No entanto, a matriz AB não é simétrica, uma vez que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = (AB)^T.$$

(c) **Sejam $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mostre que se A e AB são matrizes ortogonais, então B é também uma matriz ortogonal.**

Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diz-se ortogonal se $XX^T = I_n = X^TX$. Admitindo que A e AB são matrizes ortogonais, tem-se $AA^T = I_n = A^TA$ e $(AB)(AB)^T = I_n = (AB)^T(AB)$. Então, atendendo a que

$$\begin{aligned}
(AB)^T(AB) = I_n \quad &\Rightarrow \quad B^TA^TAB = I_n \quad && \left({\scriptstyle (AB)^T = B^TA^T}\right) \\
&\Rightarrow \quad B^TI_nB = I_n && \left({\scriptstyle A^TA = I_n}\right) \\
&\Rightarrow \quad B^TB = I_n && (I_n \text{ elemento neutro para a multiplicação})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(AB)(AB)^T = I_n \quad &\Rightarrow \quad ABB^TA^T = I_n && \left({\scriptstyle (AB)^T = B^TA^T}\right) \\
&\Rightarrow \quad A^T(ABB^TA^T)A = A^TI_nA \\
&\Rightarrow \quad (A^TA)BB^T(A^TA) = A^TA && (I_n \text{ elemento neutro ; associatividade}) \\
&\Rightarrow \quad I_nBB^TI_n = I_n && \left({\scriptstyle A^TA = I_n}\right) \\
&\Rightarrow \quad BB^T = I_n, && (I_n \text{ elemento neutro para a multiplicação})
\end{aligned}$$

concluímos que $BB^T = I_n$ e $B^TB = I_n$ e, portanto, B é ortogonal.

2. **Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares $A_\alpha x = b_\beta$, onde:**

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad b_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) **Discuta o sistema $A_\alpha x = b_\beta$, em função dos parâmetros α e β.**

O sistema $A_\alpha x = b_\beta$ é possível se e só $car(A_\alpha) = car([A_\alpha | b_\beta])$. Caso seja possível, o sistema é:

- determinado se e só se $car(A_\alpha) = \text{n}^o \text{incógnitas} = 3$;
- indeterminado se e só se $car(A_\alpha) < \text{n}^o \text{incógnitas} = 3$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A_\alpha \,|\, b_\beta]$ do sistema, temos

$$[A_\alpha \,|\, b_\beta] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & \alpha+1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l3 - \alpha l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & \beta \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right]$$

Então,

- para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é possível e determinado, pois $car(A_\alpha) = 3 = car([A_\alpha|b_\beta])$ e $car(A_\alpha) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$incógnitas.
- para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, o sistema é possível e indeterminado, pois $car(A_\alpha) = 1 = car([A_\alpha|b_\beta])$ e $car(A_\alpha) = 1 < \text{n}^{\text{o}}$incógnitas.
- para para $\alpha = 1$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o sistema é impossível, uma vez que $car(A_\alpha) = 1 \neq 2 = car([A_\alpha|b_\beta])$.

(b) **Utilizando o método de eliminação de Gauss, determine o conjunto de soluções do sistema $A_1x = b_0$. Diga se $(1, 0, 1)$ é uma solução deste sistema.**

Considerando o método de eliminação de Gauss aplicado à matriz $[A_\alpha \,|\, b_\beta]$ na alínea anterior, conclui-se que para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, a matriz $[A_1 \,|\, b_0]$ é equivalente por linhas à matriz

$$[U \,|\, c] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por conseguinte, o sistema $A_1x = b_0$ é equivalente ao sistema associado à matriz $[U \,|\, c]$, ou seja, é equivalente ao sistema

$$\left\{ \; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right. \;.$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} \text{Sol}(A_1x = b_0) & = & \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_1 + a_2 + a_3 = 0\} \\ & = & \{(-a_2 - a_3, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Facilmente se verifica que $(1, 0, 1)$ não é solução do sistema $A_1x = b_0$, pois este elemento não satisfaz a condição que caracteriza o conjunto de soluções do sistema $(1 + 0 + 1 \neq 0)$.

(c) **Justifique que a matriz A_0 é invertível e, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine a sua inversa.**

Da alínea (a) sabe-se que para $\alpha = 0$, $car(A_0) = 3$. Como A_0 é uma matriz quadrada de ordem 3 e $car(A_0) = 3$, concluímos que A_0 é invertível.

Aplicando o método de eliminação Gauss-Jordan à matriz $[A_0 \,|\, I_3]$, temos

$$[A_0 \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_3 \\ l_1 \to l_1 + l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to -l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Logo

$$(A_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. **No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,-1,1)$, $u_3 = (0,1,0)$ e $u_4 = (1,1,1)$. Sejam S e T os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$, ambos de dimensão 2, tais que $S =< u_1, u_2 >$ e $T =< u_3, u_4 >$ e seja U o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dado por**

$$U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a - b - c = 0\}.$$

(a) **Determine uma base de U.**

Tem-se

$$\begin{aligned} U &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a - b - c = 0\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = b + c\} \\ &= \{(b+c,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(1,1,0) + c(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 : b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1,1,0),(1,0,1) > . \end{aligned}$$

Logo $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ é um conjunto gerador de U. Uma vez que os vetores $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ são não nulos e, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $(1,1,0) \neq \lambda(1,0,1)$, concluímos que estes vetores são linearmente independentes. Por conseguinte, atendendo a que

(i) $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ é um conjunto gerador de U,

(ii) os vetores $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ são linearmente independentes,

a sequência $((1,1,0),(1,0,1))$ é uma base de U.

(b) **Determine as dimensões de $S+T$ e $S \cap T$.**

Uma vez que $S =< u_1, u_2 >$ e $T =< u_3, u_4 >$, então

$$S + T =< u_1, u_2, u_3, u_4 > .$$

Atendendo a que $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$, segue que

$$S + T =< u_1, u_2, u_3 > .$$

Os vetores u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes, uma vez que, para todo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Então, uma vez que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é um conjunto gerador de $S + T$ e os vetores u_1, u_2, u_3 são linearmente independentes, a sequência (u_1, u_2, u_3) é uma base $S + T$. Por conseguinte, toda a base de U tem 3 vetores e $\dim(S + T) = 3$.

Pelo Teorema das Dimensões, tem-se $\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$. Então, como $\dim(S + T) = 3$ e $\dim S = \dim T = 2$, resulta que $\dim(S \cap T) = 1$.

(c) **Diga, justificando, se:**

i. $S = U$.

Uma vez que

- $u_1 \in U$ (pois $1 - 1 - 0 = 0$) e $u_2 \in U$ (pois $0 - (-1) - 1 = 0$),
- U é um subsepaço vetorial de $\mathbb{R}^3$,
- S é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contém $\{u_1, u_2\}$,

segue que $S \subseteq U$. Atendendo a que $S \subseteq U$ e $\dim S = \dim U$, concluímos que $S = U$.

ii. $T \cup U$ **é um subespaço vetorial de** $\mathbb{R}^3$**.**

Sabe-se que $T \cup U$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se e só se $T \subseteq U$ ou $U \subseteq T$. Porém, é óbvio que $T \nsubseteq U$, pois $u_4 \in T$ e $u_4 \notin U$ (note-se que $1 - 1 - 1 \neq 0$). Também é simples verificar que $U \nsubseteq T$, pois $(1, 1, 0) \in U$ e $(1, 1, 0) \notin T$ (admitindo que $(1, 1, 0) \in T$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(1, 1, 0) = \alpha u_3 + \beta u_4$, donde obtemos o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_2 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

o qual é impossível).

Logo $T \cup U$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

iii. $\mathbb{R}^3 = S \bigoplus T$.

Tem-se $\mathbb{R}^3 = S \bigoplus T$ se $\mathbb{R}^3 = S + T$ e $S \cap T = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Contudo, da alínea (b) sabe-se que $\dim(S \cap T) = 1$. Logo $S \cap T \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e, portanto, $\mathbb{R}^3 \neq S \bigoplus T$.

(d) **Mostre que se u é um vetor de $\mathbb{R}^3$ tal que (u_1, u_2, u) é uma sequência de vetores linearmente independentes, então $S\cap < u >= \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.**

A interseção de quaisquer dois subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Logo $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subseteq S\cap < u >$. Assim, para concluir que $S\cap < u >= \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, basta mostrar que $\dim(S\cap < u >) = 0$. Ora, admitindo que (u_1, u_2, u) é uma sequência de vetores linearmente independentes, tem-se $\dim < u_1, u_2, u >= 3$ e $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ (caso contrário, os vetores u_1, u_2, u seriam linearmente dependentes). Logo $\dim(< u_1, u_2 > + < u >) = 3$ e $\dim < u >= 1$. Por conseguinte, atendendo a que pelo Teorema das Dimensões

$$\dim(< u_1, u_2 > + < u >) = \dim < u_1, u_2 > + \dim < u > - \dim(< u_1, u_2 > \cap < u >)$$

e que $\dim < u_1, u_2 >= 2$, resulta que $\dim < u_1, u_2 > \cap < u >= 0$. Logo $< u_1, u_2 > \cap < u >= \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ou seja, $S\cap < u >= \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Cotação: 1 - (1.75 + 2.5 + 1.75); **2** - (2.25 + 1.5 + 2.25); **3** - (1.5 + 2.0 + 3.0 + 1.5).