Universidade do Minho - 2021/22
Licenciatura em Ciências de Computação

Álgebra

Paula Mendes Martins
Departamento de Matemática

Conteúdo

1 preliminares

1.1 semigrupos - conceitos básicos

Definição 1.1. *Um par* $(S, *)$ *diz-se um* grupóide *se* S *é um conjunto e* $*$ *é uma operação binária em* S*, i.e., se* $*$ *é definida por*

$$\begin{aligned} * : S \times S &\longrightarrow S \\ (x, y) &\longmapsto x * y. \end{aligned}$$

Definição 1.2. *Seja* $(S, *)$ *um grupóide. A operação* $*$ *diz-se* comutativa *se*

$$a * b = b * a, \qquad \forall a, b \in S.$$

Nestas condições, dizemos que $(S, *)$ *é* comutativo *ou* abeliano.

Exemplo 1.3.

- *Se* $*$ *é definida por* $x * y = \frac{x+y}{2}$ *em* $S = \mathbb{R}$*, então,* $(S, *)$ *é um grupóide abeliano.*
- *Se* $*$ *é definida por* $x * y = x - y$ *em* $S = \mathbb{N}$*, então,* $(S, *)$ *não é um grupóide.*
- *Se* $*$ *é definida por* $x * y = 3$ *em* $S = \mathbb{N}$*, então,* $(S, *)$ *é um grupóide comutativo.*
- *Se* $*$ *é a adição ou a multiplicação usuais de classes em* $\mathbb{Z}_n$*, com* $n \in \mathbb{N}$*, então* $(\mathbb{Z}_n, *)$ *é um grupóide comutativo.*

Exemplo 1.4. *Sejam* $S = \{a, b, c\}$ *e* $*$ *a operação binária definida pela seguinte tabela (à qual se chama* tabela de Cayley*):*

$$\begin{array}{c|ccc} * & a & b & c \\ \hline a & a & b & b \\ b & b & a & c \\ c & b & c & a \end{array}.$$

Então, $(S, *)$ *é um grupóide comutativo.*

Definição 1.5. *Seja* $(S, *)$ *um grupóide. A operação* $*$ *diz-se* associativa *se*

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad \forall a, b, c \in S.$$

Nestas condições, escrevemos apenas $a * b * c$ *e dizemos que o grupóide* $(S, *)$ *é um* semigrupo.

Exemplo 1.6. *O conjunto dos números inteiros constitui um semigrupo quando algebrizado com a multiplicação usual.*

Exemplo 1.7. *O primeiro grupóide do Exemplo 1.3 não é um semigrupo. De facto,*

$$x * (y * z) = \frac{x + \frac{y+z}{2}}{2} = \frac{2x + y + z}{4} \neq \frac{x + y + 2z}{4} = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = (x * y) * z.$$

Exemplo 1.8. *O grupóide do Exemplo 1.4 não é um semigrupo. De facto, temos que* $a * (c * c) = a * a = a$ e $(a * c) * c = c$.

Num grupóide ou semigrupo, destacam-se alguns elementos, tendo em conta os resultados obtidos quando os operamos com eles próprios ou com outros elementos. De seguida, apresentamos alguns desses elementos.

Definição 1.9. *Seja* $(S, *)$ *um grupóide. Um elemento* $a \in S$ *diz-se um* elemento idempotente *se* $a * a = a$.

Exemplo 1.10. *No grupóide do Exemplo 1.3, todos os elementos são idempotentes. De facto, para todo* $x \in S$, $x * x = \frac{x+x}{2} = x$.

Definição 1.11. *Seja* $(S, *)$ *um grupóide. Um elemento* $0 \in S$ *diz-se* elemento zero *ou* nulo *se*

$$0 * a = a * 0 = 0, \qquad \forall a \in S.$$

Definição 1.12. *Seja $(S, *)$ um grupóide. Um elemento $e \in S$ diz-se* elemento neutro *ou* elemento identidade *se*

$$a * e = e * a = a, \qquad \forall a \in S.$$

Resulta imediatamente das definições anteriores que um elemento neutro e um elemento zero de um grupóide são elementos idempotentes. Vejamos que num grupóide não podem existir simultaneamente dois elementos neutros. Assim, quando existe, podemos referir-nos **ao** elemento neutro e destacá-lo com notação própria.

Proposição 1.13. *Num grupóide $(S, *)$ existe, no máximo, um elemento neutro.*

Demonstração: Suponhamos que $(S, *)$ admite dois elementos neutros, e e e'. Então, porque e é elemento neutro,

$$e * e' = e'.$$

Por outro lado, porque e' é elemento neutro,

$$e * e' = e.$$

Logo, $e = e'$. □

De modo análogo, provamos que, num grupóide, existe no máximo um elemento zero.

Definição 1.14. *Um semigrupo $(S, *)$ que admita elemento neutro diz-se um* monóide *ou um* semigrupo com identidade*. O único elemento neutro existente num monóide $(S, *)$ representa-se por* 1_S

Exemplo 1.15. *O semigrupo $(\mathbb{N}, *)$ onde $*$ está definida por*

$$a * b = 2ab, \qquad \forall a, b \in \mathbb{N},$$

não admite elemento neutro.

Exemplo 1.16. *No semigrupo $S = \{a, b, c, d\}$ algebrizado com a operação $*$ definida pela tabela*

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

é um monóide, pois a é elemento neutro.

Definição 1.17. *Sejam* $(S, *)$ *um semigrupo com identidade e* $a \in S$*. Um elemento* $a' \in S$ *diz-se* elemento oposto *de* a *se* $a * a' = a' * a = 1_S$.

Proposição 1.18. *Num semigrupo* $(S, *)$ *com identidade, um elemento* $a \in S$ *tem, no máximo, um elemento oposto.*

Demonstração: Suponhamos que $a \in S$ admite dois elementos opostos, a' e a''. Então,

$$a' = a' * 1_S = a' * \big(a * a''\big) = \big(a' * a\big) * a'' = 1_S * a'' = a''.$$

Logo, quando existe, o oposto de um elemento é único. □

1.2 potência natural de um elemento num semigrupo

Caso não haja ambiguidade quanto à operação $*$, referimo-nos muitas vezes ao grupóide (respetivamente, semigrupo, monóide) $(S, *)$ como o grupóide (respetivamente, semigrupo, monóide) S. Para representarmos a operação binária definida num conjunto podemos usar dois tipos de linguagem: a multiplicativa e a aditiva. Nestes casos temos:

Linguagem multiplicativa	Linguagem aditiva
$a * b = ab$ (produto de a por b)	$a * b = a + b$ (a soma de a por b)
a^{-1} é o oposto ou *inverso* de a	$-a$ é o oposto ou *simétrico* de a

A não ser que seja referido, trabalhamos normalmente com a linguagem multiplicativa.

Dado um elemento a de um semigrupo S, utilizamos a seguinte notação para representar os seguintes produtos (ou somas):

Linguagem multiplicativa	Linguagem aditiva	
$a^2 = aa$	$2a = a + a$	
$a^3 = aaa$	$3a = a + a + a$	
$\vdots$	$\vdots$	
$a^n = \underbrace{aa \cdots aa}_{n \text{ vezes}}$	$na = \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{n \text{ vezes}}$	(com $n \in \mathbb{N}$)

A a^n chamamos *potência de* a e a na chamamos *múltiplo de* a.

A potenciação natural em semigrupos satisfaz as propriedades apresentadas na seguinte proposição.

Proposição 1.19. *Sejam* S *um semigrupo,* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $a \in S$*. Então,*

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$ $\quad [\ ma + na = (m+n)\, a\ ]$;

(ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ $\quad [\ n\,(ma) = (nm)\, a\ ]$.

□

2 elementos da teoria de grupos

2.1 generalidades

Definição 2.1. *Seja G um conjunto no qual está definida uma operação binária. Então, G diz-se um* grupo *se G é um semigrupo com identidade e no qual todos os elementos admitem um único elemento oposto, i.e., G é grupo se:*

(G1) A operação binária é associativa em G;

(G2) $(\exists e \in G)\,(\forall a \in G) \qquad ae = ea = a;$

(G2) $(\forall a \in G)\,\left(\exists^! a^{-1} \in G\right) \qquad aa^{-1} = a^{-1}a = e.$

Se a operação for comutativa, o grupo diz-se comutativo *ou* abeliano.

Exemplo 2.2. $(\mathbb{R}, +)$ *é grupo abeliano ($+$ é a adição usual de números reais).*

Exemplo 2.3. $(\mathbb{R}, \cdot)$ *não é grupo ($\cdot$ é a multiplicação usual de números reais), mas $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ é grupo abeliano.*

Exemplo 2.4. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ *não é grupo ($\cdot$ é a multiplicação usual de números inteiros), mas $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo abeliano ($+$ é a adição usual de números inteiros).*

Exemplo 2.5. *Um conjunto singular, $\{x\}$, quando algebrizado com a única operação binária possível, $x * x = x$, é um grupo abeliano (chamado, obviamente, de* grupo trivial*).*

Exemplo 2.6. *O conjunto $G = \{x, e\}$, quando algebrizado com a operação definida pela tabela*

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & e & x \\ \hline e & e & x \\ x & x & e \end{array},$$

é um grupo abeliano.

Exemplo 2.7. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Sendo $\oplus$ e $\otimes$ as operações de adição e multiplicação usuais de classes de $\mathbb{Z}_n$, temos que $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ é grupo e $(\mathbb{Z}_n, \otimes)$ não é grupo. Sendo $\mathbb{Z}_n^* = \mathbb{Z}_n \backslash \{[0]_n\}$, temos que $(\mathbb{Z}_n^*, \otimes)$ é grupo se e só se n é primo. No caso de $n = 4$, as operações $\oplus$ e $\otimes$ em $\mathbb{Z}_4$ podem ser definidas pelas tabelas*

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

e

$\otimes$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

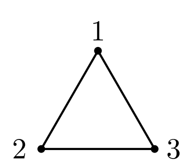
.

Repare-se que, neste caso, $(\mathbb{Z}_4^*, \otimes)$ não é um grupóide, pois $\bar{2} \otimes \bar{2} = \bar{0} \notin \mathbb{Z}_4^*$. Uma situação análoga verifica-se em qualquer $\mathbb{Z}_n^*$, com n não primo.

Exemplo 2.8. *Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n, quando algebrizado com a multiplicação usual de matrizes, não é um grupo. No entanto, o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n invertíveis é um grupo não abeliano quando considerada a mesma multiplicação. A este grupo chama-se* grupo linear geral de ordem n *e representa-se por $GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL(n, \mathbb{R})$.*

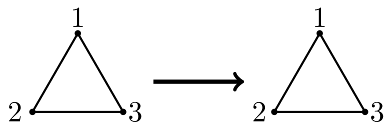
Exemplo 2.9. *Seja X um conjunto não vazio. O conjunto $\mathcal{F}(X)$ das funções de X em X é um semigrupo não abeliano quando algebrizado com a composição usual de funções. Já o conjunto $\mathcal{S}_X = \{f \in \mathcal{F}(X) : f$ é bijetiva$\}$ é um grupo quando algebrizado com a mesma operação. Prova-se este grupo é não abeliano se o conjunto X tiver pelo menos três elementos distintos. Este tipo de grupos, aos quais chamamos* grupos simétricos, *têm grande importância na Teoria de Grupos e serão estudados com algum detalhe no final deste capítulo.*

Exemplo 2.10. *Seja D_3 o conjunto das isometrias num triângulo equilátero.*

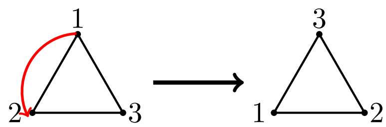


O conjunto D_3 tem exatamente seis elementos, três rotações e três simetrias axiais.

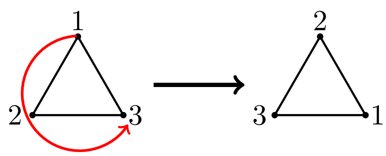
As rotações, de ângulos com 0^o, 120^o e 240^o de amplitude, são, respetivamente:

- 

que podemos representar por $\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

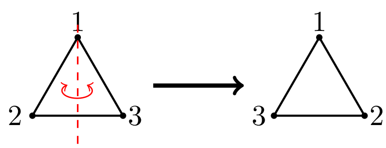
- 

que podemos representar por $\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

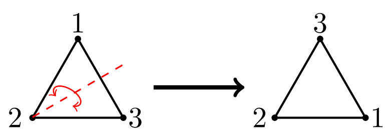
- 

que podemos representar por $\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

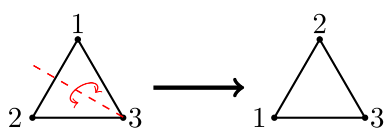
As simetrias, em relação às bissetrizes dos ângulos 1, 2 e 3, são, repetivamente:

- 

que podemos representar por $\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

- 

que podemos representar por $\theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

- 

que podemos representar por $\theta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Considerando a composição usual de funções, obtemos a tabela:

$\circ$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	θ_3	θ_1	θ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2	θ_2	θ_3	θ_1
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
θ_2	θ_2	θ_3	θ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
θ_3	θ_3	θ_1	θ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1

O grupo D_3 é o menor grupo não abeliano que se pode definir, no sentido em que qualquer grupo com um número inferior de elementos é abeliano. A este grupo é costume chamarmos grupo diedral do triângulo. *Este grupo não é mais do que o grupo simétrico $\mathcal{S}_X$, com $X = \{1, 2, 3\}$, referido no exemplo anterior.*

De seguida, apresentamos alguns resultados básicos na teoria de grupos.

Proposição 2.11. *Num grupo G são válidas as leis do corte, i.e., para $x, y, a \in G$,*

$$ax = ay \Rightarrow x = y \quad e \quad xa = ya \Rightarrow x = y.$$

Demonstração: Sejam $a, x, y \in G$. Então,

$$\begin{aligned} ax = ay &\Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}(ay) \\ &\Rightarrow \left(a^{-1}a\right)x = \left(a^{-1}a\right)y \\ &\Rightarrow 1_G x = 1_G y \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

A segunda implicação demonstra-se de modo análogo. □

Repare-se que existem semigrupos que não são grupos nos quais se verifica a lei do corte. O exemplo seguinte ilustra esta situação.

Exemplo 2.12. *Seja $\mathbb{Z} \backslash \{0\}$ algebrizado com a multiplicação usual de inteiros. Este semigrupo comutativo com identidade satisfaz as leis do corte, mas não é um grupo, pois os únicos elementos que admitem inverso são 1 e -1.*

Teorema 2.13. *Num grupo G, as equações $ax = b$ e $ya = b$, admitem uma única solução, para quaisquer $a, b \in G$.*

Reciprocamente, um semigrupo S no qual as equações $ax = b$ e $ya = b$ admitem soluções únicas, para quaisquer $a, b \in S$, é um grupo.

Demonstração: Suponhamos, primeiro, que G é um grupo. Então, para $a, b \in G$, os elementos $a^{-1}b$ e ba^{-1} de G são soluções das equações $ax = b$ e $ya = b$, respetivamente. A unicidade destas soluções resulta do facto de as leis de corte serem válidas em G.

Reciprocamente, sejam S um semigrupo e $a \in S$. Então, existem soluções únicas das equações $ax = a$ e $ya = a$. Sejam e e e' essas soluções, respetivamente. Então, como para todo $b \in S$ existe um único $c \in S$ tal que $b = ca$, temos que

$$be = (ca)\,e = c\,(ae) = ca = b.$$

Logo, e é elemento neutro à direita em S. De modo análogo, provamos que e' é elemento neutro à esquerda. Assim,

$$e = e'e = e'$$

e, portanto, e é elemento neutro do semigrupo S.

Seja $a \in S$. Então, existem soluções únicas das equações $ax = e$ e $ya = e$. Sejam a' e a'' essas soluções, respetivamente. Temos então que $aa' = e$ e $a''a = e$. Logo,

$$a'' = a''e = a''\left(aa'\right) = \left(a''a\right)a' = ea' = a',$$

pelo que cada elemento $a \in S$ admite um oposto $a' \in S$. Portanto, S é um grupo. □

Proposição 2.14. *Seja S um semigrupo finito que satisfaz as leis do corte. Então S é um grupo.*

Demonstração: Seja a um elemento qualquer de S. Então, as aplicações $\rho_a, \lambda_a : S \to S$ definidas por, respetivamente, $\rho_a\,(x) = xa$ e $\lambda_a\,(x) = ax$, $x \in S$, são injetivas. De facto, para $x, y \in S$, tendo em conta as leis do corte,

$$\rho_a\,(x) = \rho_a\,(y) \Leftrightarrow xa = ya \Rightarrow x = y$$

e

$$\lambda_a\,(x) = \lambda_a\,(y) \Leftrightarrow ax = ay \Rightarrow x = y.$$

Logo, sendo S um conjunto finito, temos que as duas aplicações são também sobrejetivas, pelo que as duas equações

$$ax = b \text{ e } ya = b$$

têm soluções únicas em S. Assim, pela proposição anterior, o semigrupo S é um grupo. □

Proposição 2.15. *Seja G um grupo. Então:*

(i) $1_G^{-1} = 1_G$;
(ii) $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a, \quad \forall a \in G$;
(iii) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}, \quad \forall a, b \in G$;
(iv) $(a_1a_2\cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\cdots a_2^{-1}a_1^{-1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in G)\,.$ □

2.1.1 potência inteira de um elemento num grupo

Dado um elemento a de um grupo G e $p \in \mathbb{Z}$, define-se

$$\begin{array}{ll} a^P = \underbrace{aa \cdots a}_{p \text{ vezes}} & \text{se } p \in \mathbb{Z}^+; \\ a^p = 1_G & \text{se } p = 0; \\ a^p = \left(a^{-1}\right)^{-p} = \left(a^{-p}\right)^{-1} & \text{se } p \in \mathbb{Z}^-. \end{array}$$

Em linguagem aditiva temos

$$\begin{array}{ll} pa = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{p \text{ vezes}} & \text{se } \mathbb{Z}^+; \\ pa = 1_G & \text{se } p = 0; \\ pa = (-p)\,(-a) = -\left((-p)\,a\right) & \text{se } p \in \mathbb{Z}^-. \end{array}$$

Proposição 2.16. *Sejam G um grupo, $x \in G$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então,*

i) $x^m x^n = x^{m+n}$ $\quad$ (*na linguagem aditiva:* $mx + nx = (m+n)\,x$) ;

ii) $(x^m)^n = x^{mn}$ $\quad$ (*na linguagem aditiva:* $n\,(mx) = (nm)\,x$) .

Demonstração: Temos de considerar vários casos.

Caso 1: Sejam $m, n \in \mathbb{Z}^+$. O caso resulta imediatamente da definição.

Caso 2: Sejam $m, n \in \mathbb{Z}^-$. Então, $m = -l$ e $n = -k$ com $l, k > 0$, pelo que

$$x^m x^n = x^{-l} x^{-k} = \left(x^l\right)^{-1} \left(x^k\right)^{-1} = \left(x^k x^l\right)^{-1} = \left(x^{k+l}\right)^{-1} =$$
$$= x^{-(k+l)} = x^{-k-l} = x^{n+m}.$$

Por outro lado,

$$(x^m)^n = \left(x^{-l}\right)^{-k} = \left[\left(\left(x^{-1}\right)^l\right)^k\right]^{-1} = \left[\left(x^{-1}\right)^{lk}\right]^{-1} = \left[\left(x^{lk}\right)^{-1}\right]^{-1} =$$
$$= x^{lk} = x^{(-m)(-n)} = x^{mn}.$$

Caso 3: Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $m > 0$, $n < 0$ e $|m| > |n|$. Então, $n = -l$ com $m > l > 0$, pelo que

$$x^m x^n = x^{m-l+l} x^{-l} = x^{m-l} x^l \left(x^l\right)^{-1} = x^{m-l} 1_G = x^{m-l} = x^{m+n},$$

o que prova (i). Por outro lado,

$$(x^m)^n = (x^m)^{-l} = \left[(x^m)^l\right]^{-1} = \left(x^{ml}\right)^{-1} = x^{-ml} = x^{mn},$$

o que prova a condição (ii).

Caso 4. Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $m > 0,\ n < 0$ e $|m| < |n|$. Então, $n = -l$ com $l > m > 0,$ pelo que

$$\begin{aligned} x^m x^n &= x^m x^{-l} = x^m \left(x^l\right)^{-1} = x^m \left(x^{l-m+m}\right)^{-1} = x^m \left(x^{l-m} x^m\right)^{-1} = \\ &= x^m \left(x^m\right)^{-1} \left(x^{l-m}\right)^{-1} = 1_G x^{-(l-m)} = x^{-l+m} = x^{n+m}. \end{aligned}$$

A demonstração de *(ii)* é igual ao caso 3.

Os casos em que pelo menos um dos inteiros é zero são triviais e qualquer outro caso é igual aos casos 3 ou 4. □

2.2 subgrupos

Definição 2.17. *Seja G um grupo. Um seu subconjunto não vazio H diz-se um* subgrupo de G *se H for grupo para a operação de G restringida a H. Neste caso escrevemos $H < G$.*

Observação. Um grupo não trivial G tem, pelo menos, dois subgrupos: $\{1_G\}$ (*subgrupo trivial*) e G (*subgrupo impróprio*).

Exemplo 2.18. *O grupóide $(\mathbb{Z}, +)$ é subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.*

Exemplo 2.19. *O grupóide $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \cdot)$ não é subgrupo de $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$.*

Exemplo 2.20. *Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo de* 4-Klein, *i.e., o grupo cuja operação é dada pela seguinte tabela*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

Os seus subgrupos são: $\{e, a, b, c\}, \{e\}, \{e, a\}, \{e, b\}$ e $\{e, c\}$.

Exemplo 2.21. *Seja* $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ *o conjunto das classes módulo-4 algebrizado com a adição, i.e.,*

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

.

Então, $(\mathbb{Z}_4, +)$ *é grupo e os seus subgrupos são:* $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}, \{\bar{0}\}$ *e* $\{\bar{0}, \bar{2}\}$.

Exemplo 2.22. *Relativamente ao grupo não comutativo* $D_3 = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ *apresentado no Exemplo 2.10, cuja tabela de Cayley é*

$\circ$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	θ_3	θ_1	θ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2	θ_2	θ_3	θ_1
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
θ_2	θ_2	θ_3	θ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
θ_3	θ_3	θ_1	θ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1

,

os seus subgrupos são $\{\rho_1\}$, $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}$, $\{\rho_1, \theta_1\}$, $\{\rho_1, \theta_2\}$ *e* $\{\rho_1, \theta_3\}$.

Proposição 2.23. *Sejam* G *um grupo e* $H < G$. *Então:*

(i) O elemento neutro de H, 1_H, *é o mesmo que o elemento neutro de* G, 1_G;

(ii) Para cada $h \in H$, *o inverso de* h *em* H *é o mesmo que o inverso de* h *em* G.

Demonstração: (i) Porque 1_H é elemento neutro de H, temos que

$$1_H 1_H = 1_H;$$

por outro lado, como 1_G é elemento neutro de G e $1_H \in G$, temos que

$$1_H 1_G = 1_H.$$

Logo,

$$1_H 1_H = 1_H 1_G,$$

pelo que, pela lei do corte,

$$1_H = 1_G.$$

(ii) Sejam $h \in H$, h^{-1} o inverso de h em G e h' o inverso de h em H. Então,

$$hh' = 1_H = 1_G = hh^{-1}.$$

Logo, pela lei do corte,

$$h' = h^{-1}.$$

□

2.2.1 critérios de subgrupo

Proposição 2.24. *Sejam G um grupo e $H \subseteq G$. Então, $H < G$ se e só se são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) $H \neq \emptyset$;

(ii) $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$;

(iii) $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.

Demonstração: Suponhamos que $H < G$. Então:

(i) $H \neq \emptyset$, pois $1_G \in H$;

(ii) dados $x, y \in H$, como H é um grupóide, $xy \in H$;

(iii) dado $x \in H$, como todo o elemento de H admite inverso em H e este é igual ao inverso em G, então $x^{-1} \in H$.

Reciprocamente, suponhamos que $H \subseteq G$ satisfaz as condições (i), (ii) e (iii). Então

(a) H é grupóide por (ii);

(b) dado $x \in H$ (este elemento existe por (i)), $x^{-1} \in H$ (por (iii)), pelo que $1_G = xx^{-1} \in H$ (por (ii));

(c) qualquer elemento de H admite inverso em H (por (iii)).

Como a operação é associativa em G, também o é obviamente em H e, portanto, concluímos que $H < G$. □

Proposição 2.25. *Sejam G um grupo e $H \subseteq G$. Então, $H < G$ se e só se são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) $H \neq \emptyset$;

(ii) $x, y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H$.

2.2.2 exemplos de subgrupos importantes

centralizador de um elemento

Definição 2.26. *Sejam G um grupo e $a \in G$. Chama-se* centralizador de a *ao conjunto*

$$C(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}.$$

Proposição 2.27. *Seja G um grupo. Então, para todo $a \in G$, $C(a) < G$.*

Demonstração: Seja $a \in G$. Então,

(i) $C(a) \neq \emptyset$, pois $1_G \in G$ é tal que $1_G a = a 1_G$ e, portanto, $1_G \in C(a)$;

(ii) dados $x, y \in C(a)$, temos que $xy \in G$ e

$$a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a,$$

pelo que $xy \in C(a)$;

(iii) dado $x \in C(a)$, temos que $x^{-1} \in G$ e

$$\begin{aligned} ax = xa \quad &\Rightarrow \quad x^{-1}(ax)x^{-1} = x^{-1}(xa)x^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x^{-1}a\right)\left(xx^{-1}\right) = \left(x^{-1}x\right)\left(ax^{-1}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x^{-1}a\right)1_G = 1_G\left(ax^{-1}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad x^{-1}a = ax^{-1}, \end{aligned}$$

pelo que $x^{-1} \in C(a)$.

Logo, $C(a) < G$. □

centro de um grupo

Definição 2.28. *Seja G um grupo. Chama-se* centro de G *ao conjunto*

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall a \in G, \quad ax = xa\}.$$

Proposição 2.29. *Seja G um grupo. Então, $Z(G) < G$.*

Demonstração: Seja G um grupo. Então,

(i) $Z(G) \neq \emptyset$, pois $1_G \in G$ é tal que, para todo $a \in G$, $\quad 1_G a = a 1_G$ e, portanto, $1_G \in Z(G)$;

(ii) dados $x, y \in Z(G)$, temos que $xy \in G$ e, para todo $a \in G$,

$$a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a,$$

pelo que $xy \in Z(G)$;

(iii) dado $x \in Z(G)$, temos que $x^{-1} \in G$ e, para todo $a \in G$,

$$\begin{aligned} x^{-1}a &= \left(x^{-1}a\right)e = \left(x^{-1}a\right)\left(x^{-1}x\right) = \left(x^{-1}ax^{-1}\right)x = \\ &= x\left(x^{-1}ax\right) = \left(xx^{-1}\right)\left(ax^{-1}\right) = 1_G\left(ax^{-1}\right) = ax^{-1}, \end{aligned}$$

pelo que $x^{-1} \in Z(G)$. Logo, $Z(G) < G$. □

intersecção de subgrupos

Proposição 2.30. *Sejam G um grupo e $H, K < G$. Então, $H \cap K < G$.*

Demonstração: Sejam G um grupo e $H, K < G$. Então,

(i) $H \cap K \neq \emptyset$, pois $1_G \in H$ e $1_G \in K$, pelo que $1_G \in H \cap K$;

(ii) dados $x, y \in H \cap K$, temos que $x, y \in H$ e $x, y \in K$, pelo que $xy \in H$ e $xy \in K$. Logo, $xy \in H \cap K$.

(iii) dado $x \in H \cap K$, temos que $x \in H$ e $x \in K$, pelo que $x^{-1} \in H$ e $x^{-1} \in K$ e, portanto, $x^{-1} \in H \cap K$.

Logo, $H \cap K < G$. □

Corolário 2.31. *Seja G um grupo. Então, a intersecção de uma família não vazia de subgrupos de G é ainda um subgrupo de G.*

Observação. Sempre que se fala na interseção de subonjuntos, é natural questionar o que acontece com a união desses mesmos subconjuntos. No geral, a união de dois subgrupos de um grupo G não é um subgrupo de G. Por exemplo, a união dos subgrupos $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ do grupo $(\mathbb{Z}, +)$ não é um subgrupo de Z, uma vez que $2, 3 \in 2\cup 3\mathbb{Z}$ e $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$. Facilmente se prova que a união de dois subgrupos de um grupo G é um subgrupo de G se e só se um dos subgrupos está contido no outro.

subgrupo gerado

Proposição 2.32. *Sejam G um grupo e $\varnothing \neq X \subseteq G$. Consideremos*

$$\mathcal{H} = \{H \subseteq G \mid H < G \quad \text{e} \quad X \subseteq H\}$$

(i.e., $\mathcal{H}$ é o conjunto de todos os subgrupos de G que contêm X). Então, $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{H}} H$ é o menor subgrupo de G que contém X.

Demonstração: Sejam G um grupo e $\mathcal{H} = \{H \subseteq G \mid H < G \quad \text{e} \quad X \subseteq H\}$. Então, como $\mathcal{H} \neq \emptyset$ (porque $G \in \mathcal{H}$), pelo corolário da proposição anterior, $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{H}} H < G$.

Mais ainda, pela definição de $\mathcal{H}$, temos que, $X \subseteq \bigcap\limits_{H \in \mathcal{H}} H$.

Finalmente, seja $K < G$ tal que $X \subseteq K$. Então, $K \in \mathcal{H}$ e, portanto, $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{H}} H \subseteq K$.

Concluímos então que $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{H}} H$ é o menor subgrupo que contém X. $\square$

Definição 2.33. *Sejam G um grupo e $\varnothing \neq X \subseteq G$. Chama-se* subgrupo de G gerado por X, *e representa-se por $\langle X \rangle$, ao menor subgrupo que contém X.*

Se $X = \{a\}$, então escrevemos $\langle a \rangle$ para representar $\langle X \rangle$ e falamos no subgrupo de G gerado por a.

Observação. Pela proposição anterior, temos que $\langle X \rangle$ é a intersecção de todos os subgrupos de G que contêm X.

Proposição 2.34. *Sejam G um grupo e $a \in G$. Então, $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.*

Demonstração: Sejam G um grupo e $a \in G$. Seja $B = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Então,

(i) $B \neq \emptyset$, pois $1_G = a^0$ e, portanto, $1_G \in B$;

(ii) dados $x, y \in B$, sabemos que existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $x = a^n$ e $y = a^m$,

$$y^{-1} = (a^m)^{-1} = a^{-m}$$

e

$$xy^{-1} = a^n a^{-m} = a^{n-m}.$$

Como $-m, n-m \in \mathbb{Z}$, temos que $xy^{-1} \in B$. Logo, $B < G$.

Mais ainda, como $1 \in \mathbb{Z}$, temos que $a \in B$.

Finalmente, seja $H < G$ tal que $a \in H$. Então,

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \quad x = a^n \\ &\Rightarrow x \in H \qquad \text{(pois } H < G\text{)}. \end{aligned}$$

Logo, $B \subseteq H$ e, portanto, $\langle a \rangle = B$. □

2.3 ordem de um elemento

Terminamos a última secção provando que, dados um grupo G e $a \in G$, $\langle a \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. É óbvio que, no caso de $a = 1_G$, o subgrupo reduz-se ao subgrupo trivial. Mais ainda, no grupo $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, é fácil ver que $\langle -1 \rangle = \{-1, 1\}$. Torna-se, portanto, óbvio que, embora o subgrupo gerado esteja definido à custa do conjunto dos inteiros, nem sempre vamos obter um número infinito de elementos. Nesta secção vamos explorar esta ideia.

Definição 2.35. *Sejam G um grupo e $a \in G$.*

(i) Diz-se que a tem ordem infinita, *e escreve-se $o(a) = \infty$, se não existe nenhum $p \in \mathbb{N}$ tal que $a^p = 1_G$.*

(ii) Diz-se que a tem ordem k $(k \in \mathbb{N})$, *e escreve-se $o(a) = k$, se*

(a) $a^k = 1_G$;

(b) $p \in \mathbb{N}$ e $a^p = 1_G \Rightarrow k \leq p$.

Exemplo 2.36. *No grupo $(\mathbb{R}, +)$ a ordem de qualquer elemento não nulo a é infinita. Por outro lado, $o(0) = 1$.*

Exemplo 2.37. *Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo 4-Klein. Então, a tabela de Cayley é*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Facilmente se verifica que $o(e) = 1$ e $o(a) = o(b) = o(c) = 2$.

Exemplo 2.38. *No grupo* $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, *temos que:*

(i) $o(\bar{0}) = 1;$

(ii) $o(\bar{1}) = 4,$ *pois* $\bar{1} \neq \bar{0}, \bar{1}+\bar{1} = \bar{2} \neq \bar{0}, \bar{1}+\bar{1}+\bar{1} = \bar{3} \neq \bar{0}$ *e* $\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1} = \bar{0};$

(iii) $o(\bar{2}) = 2,$ *pois* $\bar{2} \neq \bar{0}$ *e* $\bar{2}+\bar{2} = \bar{0}$

(iv) $o(\bar{3}) = 4,$ *pois* $\bar{3} \neq \bar{0}, \bar{3}+\bar{3} = \bar{2} \neq \bar{0}, \bar{3}+\bar{3}+\bar{3} = \bar{1} \neq \bar{0}$ *e* $\bar{3}+\bar{3}+\bar{3}+\bar{3} = \bar{0}.$

Não é coincidência o facto de, nos exemplos apresentados, o único elemento com ordem 1 ser a identidade do grupo. Este é um resultado da Teoria de Grupos que provamos de seguida.

Proposição 2.39. *Num grupo G o elemento identidade é o único elemento que tem ordem 1.*

Demonstração: É óbvio que $o(1_G) = 1$. Provemos agora que é único elemento nestas condições. Suponhamos que $a \in G$ é tal que $o(a) = 1$. Então, $a^1 = 1_G$, i.e., $a = 1_G$. □

Os próximos resultados permitem-nos estudar a cardinalidade do subgrupo gerado por um elemento de um grupo em função da ordem desse elemento.

Proposição 2.40. *Sejam G um grupo e $a \in G$ um elemento com ordem infinita. Então, para $m, n \in \mathbb{Z}$,*

$$a^m \neq a^n \qquad \text{se} \qquad m \neq n.$$

Demonstração: Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que $a^m = a^n$. Então,

$$\begin{aligned} a^m = a^n &\Rightarrow a^m a^{-n} = a^n a^{-m} = 1_G \\ &\Rightarrow a^{m-n} = a^{n-m} = 1_G \\ &\Rightarrow a^{|m-n|} = 1_G \\ &\Rightarrow |m-n| = 0 \qquad\qquad (o(a) = \infty) \\ &\Rightarrow m = n. \end{aligned}$$

Logo, se $m \neq n$ então $a^m \neq a^n$. □

Corolário 2.41. *Sejam G um grupo e $a \in G$ um elemento com ordem infinita. Então, $\langle a \rangle$ tem um número infinito de elementos.*

Demonstração: Imediata, tendo em conta que $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ e a proposição anterior. □

Corolário 2.42. *Num grupo finito nenhum elemento tem ordem infinita.*

Demonstração: Sejam G um grupo finito e $a \in G$. Se $o(a) = \infty$, então, $\langle a \rangle$ é infinito e, portanto, não pode ser um subconjunto de G. □

Proposição 2.43. *Sejam G um grupo, $a \in G$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $o(a) = k$. Então,*

(i) se um inteiro n tem r como resto na divisão por k então $a^n = a^r$;

(ii) para $n \in \mathbb{Z}$, $a^n = 1_G \Leftrightarrow k \mid n$;

(iii) $\langle a \rangle = \{1_G, a^1, a^2, \ldots, a^{k-1}\}$;

(iv) $\langle a \rangle$ tem exatamente k elementos.

Demonstração: (i) Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \le r < k$ para os quais existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $n = qk + r$. Então,

$$a^n = a^{qk+r} = a^{qk}a^r = \left(a^k\right)^q a^r = 1_G^q a^r = 1_G a^r = a^r.$$

(ii) Pretendemos provar que $a^m = 1_G \Leftrightarrow k \mid m$, ou seja, que

$$a^m = 1_G \Leftrightarrow m = kp \quad \text{para algum } p \in \mathbb{Z}.$$

Suponhamos primeiro que $m = kp$ para algum $p \in \mathbb{Z}$. Então,

$$a^m = a^{kp} = \left(a^k\right)^p = 1_G^p = 1_G.$$

Reciprocamente, suponhamos que $a^m = 1_G$. Sabemos que, pelo algoritmo da divisão, existem $p \in \mathbb{Z}$ e $0 \le r < k$ tais que $m = kp + r$ e, portanto,

$$1_G = a^m = a^{kp+r} = \left(a^k\right)^p a^r = 1_G^p a^r = 1_G a^r = a^r.$$

Como $o(a) = k$, temos que $r = 0$ (pois $0 \le r < k$ e $k \le r$ se $r \ge 1$). Logo, $m = kp$.

(iii) Sabemos que $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Obviamente, temos que $\{1_G, a, a^2, a^3, \ldots, a^{k-1}\} \subseteq \langle a \rangle$. Provemos agora a inclusão contrária.

Seja $x \in \langle a \rangle$. Então,

$$x = a^p \qquad \text{para algum} \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Se $p \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ então $x \in \{1_G, a, a^2, a^3, \ldots, a^{k-1}\}$.

Se $p \notin \{0, 1, 2, 3, \ldots, k-1\}$ então sabemos, por (i), que existe $0 \le r \le k-1$ tal que $a^p = a^r$.

Logo, $\langle a \rangle \subseteq \{e, a, a^2, a^3, \ldots, a^{k-1}\}$ e a igualdade verifica-se.

(iv) pretendemos provar que, na lista $1_G, a, a^2, a^3, \ldots, a^{k-1}$ não há repetição de elementos. Suponhamos que sim, i.e., suponhamos que

$$a^p = a^q \qquad \text{com } 0 \le q < p \le k-1.$$

Então, $p-q>0$ e

$$a^{p-q}=a^pa^{-q}=a^qa^{-q}=1_G,$$

pelo que $k\leq p-q\leq k-1$, o que é impossível. Logo, não há qualquer repetição e o subgrupo $\langle a\rangle$ tem exatamente k elementos. $\square$

2.3.1 algumas propriedades

Proposição 2.44. *Sejam G um grupo e $a,b\in G$. Então, a e $b^{-1}ab$ têm a mesma ordem.*

Demonstração: Suponhamos que $o(a)=n_0$ é finita. Porque a operação é associativa, temos que $(b^{-1}ab)^{n_0}=b^{-1}a^{n_0}b$. Logo, como $a^{n_0}=1_G$, obtemos

$$(b^{-1}ab)^{n_0}=b^{-1}1_Gb=b^{-1}b=1_G.$$

Suponhamos agora que k é um inteiro positivo tal que $(b^{-1}ab)^k=1_G$. Então,

$$\begin{aligned}(b^{-1}ab)^k=1_G\quad&\Leftrightarrow b^{-1}a^kb=1_G\\&\Leftrightarrow b(b^{-1}a^kb)b^{-1}=b1_Gb^{-1}\\&\Leftrightarrow (bb^{-1})a^k(bb^{-1})=1_G\\&\Leftrightarrow a^k=1_G.\end{aligned}$$

Como a ordem de a é n_0, segue-se que $k\geq n_0$. Assim, n_0 é, de facto, o menor inteiro positivo n tal que $(b^{-1}ab)^n=1_G$, ou seja, $o(b^{-1}ab)=n_0$.

Mostramos de seguida que, se a tiver ordem infinita, então, $b^{-1}ab$ também tem ordem infinita, usando a regra do contrarrecíproco. Suponhamos que $o(b^{-1}ab)=k$ é finita. Então, pelo que acabámos de provar, $o\left(b(b^{-1}ab)b^{-1}\right)=k$ e, portanto, $o(a)=k$ é finita. $\square$

Resta observar que, se G é abeliano, o resultado anterior não tem qualquer interesse porque se reduz a $o(a)=o(a)$.

Proposição 2.45. *Seja G um grupo e $a\in G$ um elemento de ordem finita n. Então, para qualquer $p\in\mathbb{N}$, $o(a^p)=\frac{n}{d}$, onde $d=\mathrm{m.d.c.}(n,p)$.*

Demonstração: Sejam $p\in\mathbb{N}$ e $d=\mathrm{m.d.c.}(n,p)$. Então $\frac{n}{d},\frac{p}{d}\in\mathbb{N}$ e $d=xn+yp$, para certos $x,y\in\mathbb{Z}$. Temos

$$(a^p)^{\frac{n}{d}}=(a^n)^{\frac{p}{d}}=1_G^{\frac{p}{d}}=1_G.$$

Se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $(a^p)^k = 1_G$, então, como $o(a) = n$, temos que $n \mid pk$ (ponto 2 da Proposição 2.43, i.e., $pk = nq$ para certo $q \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} d = xn + yp \quad &\Rightarrow dk = xnk + ypk = xnk + ynq = n(xk + yq) \\ &\Rightarrow k = \tfrac{n}{d}(xk + yq), \end{aligned}$$

pelo que $\frac{n}{d} \mid k$. Portanto, $o(a^p) = \frac{n}{d}$. □

Exemplo 2.46. *Considere-se o grupo $(\mathbb{Z}_{31}^*, \otimes)$. Facilmente se verifica que, neste grupo, $o\left([2]_{31}\right) = 5$. Então,*

$$o\left([8]_{31}\right) = o\left([2]_{31}^3\right) = \frac{5}{\text{m.d.c.}(5,3)} = 5.$$

Lema 2.47. *Sejam G um grupo e $a, b \in G$. Então, para qualquer inteiro positivo k,*

$$(ab)^k = 1_G \Leftrightarrow (ba)^k = 1_G.$$

Demonstração: Sejam a, b elementos arbitrários de um grupo G e k um inteiro positivo. Temos:

$$\begin{aligned} (ab)^k = 1_G \quad &\Leftrightarrow (ab)^{k+1} = ab \\ &\Leftrightarrow a(ba)^k b = ab \\ &\Leftrightarrow a^{-1}\left[a(ba)^k b\right] b^{-1} = a^{-1}(ab)b^{-1} \\ &\Leftrightarrow (a^{-1}a)(ba)^k(bb^{-1}) = (a^{-1}a)(bb^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (ba)^k = 1_G. \qquad \square \end{aligned}$$

Proposição 2.48. *Sejam G um grupo e $a, b \in G$. Se ab tem ordem finita então $o(ba) = o(ab)$.*

Proposição 2.49. *Sejam G um grupo e $a \in G$. Então, $o(a^{-1}) = o(a)$.*

Demonstração: O resultado é imediato tendo em conta que, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$a^k = 1_G \Leftrightarrow (a^{-1})^k = 1_G. \qquad \square$$

Proposição 2.50. *Se a e b são elementos de ordem finita de um grupo abeliano G, então $o(ab) \mid o(a)\,o(b)$.*

Demonstração: Se G é abeliano, sabemos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $(ab)^n = a^n b^n$ (exercício 9 da folha 2). Assim, temos que

$$(ab)^{o(a)\,o(b)} = a^{o(a)\,o(b)} b^{o(a)\,o(b)} = (a^{o(a)})^{o(b)} (b^{o(b)})^{o(a)} = (1_G)^{o(b)} (1_G)^{o(a)} = 1_G 1_G = 1_G.$$

Pelo ponto 2 da Proposição 2.43 estamos em condições de concluir que $o(ab) \mid o(a)\,o(b)$. □

Exemplo 2.51. *No grupo aditivo $(\mathbb{Z}_6)$, temos que $o([2]_6) = 3$, $o([3]_6) = 2$ e $o([4]_6) = 3$.*

Temos que

$$o([2]_6 \oplus [4]_6) = o([0]_6) = 1 \text{ e } o([2]_6)\, o([4]_6) = 3 \times 3 = 9.$$

Temos também que

$$o([2]_6 \oplus [3]_6) = o([5]_6) = 6 \text{ e } o([2]_6)\, o([3]_6) = 3 \times 2 = 6.$$

2.4 o teorema de Lagrange

Definição 2.52. *Sejam G um grupo e $X, Y \subseteq G$. Chama-se* produto de X por Y, *e representa-se por XY, ao conjunto*

$$XY = \begin{cases} \{xy \in G : x \in X \text{ e } y \in Y\} & \text{se } X \neq \emptyset \text{ e } Y \neq \emptyset; \\ \emptyset & \text{se } X = \emptyset \text{ ou } Y = \emptyset. \end{cases}$$

Proposição 2.53. *Sejam G um grupo e $\mathcal{P}(G) = \{X \mid X \subseteq G\}$. Então, $\mathcal{P}(G)$ é um semigrupo, quando algebrizado com o produto de subconjuntos de G.* □

Observação. Escreve-se aY para representar

$$\{a\}\,Y = \{ay \in G \mid y \in Y\}$$

e escreve-se Xb para representar

$$X\,\{b\} = \{xb \in G \mid x \in X\}\,.$$

Proposição 2.54. *Sejam G um grupo e $H < G$. A relação $\equiv^e \pmod H$, definida em G por*

$$\forall x, y \in G, \qquad x \equiv^e y \pmod H \iff x^{-1}y \in H$$

é uma relação de congruência à esquerda.

Demonstração: Primeiro, verifiquemos que $\equiv^e \pmod H$ é uma relação de equivalência. De facto:

(i) Para todo $x \in G$, $x^{-1}x = 1_G \in H$, pelo que a relação é reflexiva.

(ii) Sejam $x, y \in G$ tais que $x \equiv^e y \pmod H$. Então,

$$x \equiv^e y \pmod H \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow y^{-1}x = \left(x^{-1}y\right)^{-1} \in H \Leftrightarrow y \equiv^e x \pmod H.$$

Logo, a relação é simétrica.

(iii) Sejam $x, y, z \in G$ tais que $x \equiv^e y \pmod H$ e $y \equiv^e z \pmod H$. Então,

$$\begin{aligned} x \equiv^e y \pmod H \text{ e } y \equiv^e z \pmod H &\iff x^{-1}y \in H \text{ e } y^{-1}z \in H \\ &\Rightarrow x^{-1}z = x^{-1}yy^{-1}z \in H \\ &\iff x \equiv^e z \pmod H, \end{aligned}$$

pelo que a relação é transitiva.

Verifiquemos agora que a relação é congruente à esquerda:

Sejam $x, y \in G$ tal que $x \equiv^e y \pmod H$ e $a \in G$. Queremos provar que $ax \equiv^e ay \pmod H$. De facto,

$$\begin{aligned} x \equiv^e y \pmod H &\iff x^{-1}y \in H \\ &\iff x^{-1}ey \in H \\ &\iff x^{-1}a^{-1}ay \in H \\ &\iff (ax)^{-1}\, ay \in H \\ &\iff ax \equiv^e ay \pmod H. \end{aligned}$$

Concluímos então que $\equiv^e \pmod H$ é uma relação de congruência à esquerda. □

Analogamente, provamos que

Proposição 2.55. *Sejam G um grupo e $H < G$. A relação $\equiv^d \pmod H$, definida em G por*

$$\forall x, y \in G, \qquad x \equiv^d y \pmod H \iff xy^{-1} \in H$$

é uma relação de congruência à direita. □

Definição 2.56. *Sejam G um grupo e $H < G$. À relação $\equiv^e \pmod H$ chama-se* congruência esquerda módulo H *e à relação $\equiv^d \pmod H$ chama-se* congruência direita módulo H.

Cada uma destas relações de equivalência define em G uma partição (que pode não ser necessariamente a mesma). Representando por $[a]_e$ a classe de equivalência do elemento $a \in G$ quando consideramos a congruência esquerda módulo H, temos que

$$\begin{aligned} x \in [a]_e \quad &\Leftrightarrow \quad x \equiv^e a \pmod H \Leftrightarrow x^{-1}a \in H \Leftrightarrow \exists h \in H : x^{-1}a = h \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \exists h \in H : x^{-1} = ha^{-1} \Leftrightarrow \exists h \in H : x = ah^{-1} \Leftrightarrow x \in aH, \end{aligned}$$

pelo que

$$[a]_e = aH, \quad \forall a \in G.$$

De modo análogo, representando por $[a]_d$ a classe de equivalência do elemento $a \in G$ quando consideramos a congruência direita módulo H, temos que

$$[a]_d = Ha, \quad \forall a \in G.$$

Definição 2.57. *Sejam G um grupo e $H < G$. Para cada $a \in G$, o subconjunto aH designa-se por* classe lateral esquerda de a módulo H *e o subconjunto Ha designa-se por* classe lateral direita de a módulo H.

Proposição 2.58. *Sejam G um grupo e $H < G$. Se H é finito então cada classe módulo H tem a mesma cardinalidade que H.*

Demonstração: Sejam G um grupo e $a \in G$. As aplicações

$$\begin{array}{rcl} \lambda_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcl} \rho_a : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & xa \end{array}$$

são bijecções em G. Logo, $\lambda_a|_H$ e $\rho_a|_H$ são bijecções de H em $\lambda_a(H) = aH$ e de H em $\rho_a(H) = Ha$, respetivamente. Assim, se H for finito,

$$\sharp(aH) = \sharp H = \sharp(Ha).$$

$\square$

Exemplo 2.59. *Seja $G = \{e, a, b, c\}$ o grupo de* 4-Klein, *i.e., o grupo cuja operação é dada pela seguinte tabela*

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

.

Considerando o subgrupo $H = \{e, a\}$, as classes laterais esquerdas são

$$eH = H = aH \quad \text{e} \quad bH = \{b, c\} = cH$$

e as classes laterais direitas são iguais já que o grupo é comutativo.

Exemplo 2.60. *Relativamente ao grupo não comutativo $D_3 = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ apresentado no Exemplo 2.10, cuja tabela de Cayley é*

$\circ$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	θ_3	θ_1	θ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2	θ_2	θ_3	θ_1
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
θ_2	θ_2	θ_3	θ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
θ_3	θ_3	θ_1	θ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1

,

considerando o subgrupo $H = \{\rho_1, \theta_1\}$, as classes laterais esquerdas são

$$\rho_1 H = H = \theta_1 H, \quad \theta_2 H = \{\theta_2, \rho_3\} = \rho_3 H \quad \text{e} \quad \theta_3 H = \{\theta_3, \rho_2\} = \rho_2 H$$

e as classes laterais direitas são

$$H\rho_1 = H = H\theta_1, \quad H\theta_2 = \{\theta_2, \rho_2\} = H\rho_2 \quad \text{e} \quad H\theta_3 = \{\theta_3, \rho_3\} = H\rho_3.$$

Os exemplos anteriores mostram que as classes laterais direitas definidas por um subgrupo de um grupo não são necessariamente iguais às classes laterais esquerdas definidas pelo mesmo subgrupo. No entanto, em cada exemplo, podemos verificar que o número de classes esquerdas é igual ao número de classes direitas e que o número de elementos de cada classe (direita ou esquerda) mantém-se constante. São estas duas caraterísticas das classes laterais direitas que provamos de seguida.

Proposição 2.61. *Sejam G um grupo finito e $H < G$. Se $a_1H, a_2H, \ldots, a_rH$ são exatamente as classes laterais esquerdas de H em G (com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$), então, $Ha_1^{-1}, Ha_2^{-1}, \ldots, Ha_r^{-1}$ são exatamente as classes laterais direitas de H em G.*

Demonstração: Cada elemento de G pertence exatamente a uma e uma só classe lateral esquerda $a_1H, a_2H, \ldots, a_rH$. Sejam $x \in G$ e $1 \leq i \leq r$. Então,

$$\begin{aligned} x \in Ha_i^{-1} &\iff x\left(a_i^{-1}\right)^{-1} \in H \\ &\iff xa_i \in H \\ &\iff \left(x^{-1}\right)^{-1} a_i \in H \\ &\iff x^{-1} \in a_iH. \end{aligned}$$

Como a condição $x^{-1} \in a_iH$ é verdadeira para exatamente um valor de i, então também a expressão $x \in Ha_i^{-1}$ é verdadeira para exatamente um valor de i. □

Observação. No seguimento desta proposição, escrevemos

$$G/_{\equiv^e(\mod H)} = \{a_1H, a_2H, \ldots, a_rH\}$$

se e só se

$$G/_{\equiv^d(\mod H)} = \left\{Ha_1^{-1}, Ha_2^{-1}, \ldots, Ha_r^{-1}\right\}.$$

Definição 2.62. *Sejam G um grupo finito e $H < G$. Chama-se:*

(i) ordem do grupo G, *e representa-se por $|G|$ ao número de elementos de G;*

(ii) índice de H, *e representa-se por $|G : H|$, ao número de classes laterais esquerdas (ou direitas) de H em G.*

Teorema 2.63. ***(de Lagrange)*** *Sejam G um grupo finito e $H < G$. Então,*

$$|G| = |G : H| \cdot |H|.$$

Demonstração: Imediata, tendo em conta que, se se considerar a partição em G definida pela congruência esquerda módulo H, temos $|G : H|$ classes, cada uma das quais com $|H|$ elementos. □

Corolário 2.64. *Num grupo finito G, a ordem de cada elemento divide a ordem do grupo.*

Demonstração: Imediata, tendo em conta que $o(a) = |\langle a \rangle|$, para todo $a \in G$. $\square$

Corolário 2.65. *Sejam G um grupo finito e p um primo tal que $|G| = p$. Então, existe $b \in G$ tal que $G = \langle b \rangle$.*

Demonstração: . Como p é primo, $p \neq 1$, pelo que $G \neq \{1_G\}$. Seja $x \in G$ tal que $x \neq 1_G$. Então,

$$o(x) \mid p \Rightarrow o(x) = p \Rightarrow |\langle x \rangle| = p \Longleftrightarrow G = \langle x \rangle .$$

$\square$

O recíproco do teorema de Lagrange nem sempre é verdadeiro: o facto de a ordem de um grupo admitir um determinado fator, não implica que exista necessariamente um subgrupo desse grupo cuja ordem é esse fator. No entanto, se esse fator é um número primo, podemos afirmar a existência desse subgrupo.

Teorema 2.66. *(*Teorema de Cauchy*) Sejam G um grupo de ordem $n \in \mathbb{N}$ e p um primo divisor de n. Então, existe um elemento $a \in G$ tal que $o(a) = p$.*

$\square$

2.5 subgrupos normais, relações de congruência e grupos quociente

Na secção anterior, vimos que nem sempre a classe lateral esquerda de um elemento coincide com a sua classe lateral direita. Neste capítulo veremos que o facto de exigirmos que tal aconteça para todos os elementos de grupo, permite-nos falar num outro grupo - o grupo quociente.

Definição 2.67. *Sejam G um grupo e $H < G$. Diz-se que H é* subgrupo invariante *ou* normal *de G, e escreve-se $H \lhd G$, se*

$$xH = Hx, \qquad \forall x \in G.$$

Assim, um subgrupo H de G é invariante se, para cada $x \in G$ e $h_1 \in H,$existe $h_2 \in H$ tal que

$$xh_1 = h_2 x.$$

Exemplo 2.68. *Dado um grupo G qualquer, o subgrupo trivial e o subgrupo impróprio são subgrupos invariantes de G.*

Exemplo 2.69. *Seja G um grupo. Então, $Z(G) \lhd G$. De facto, seja $g \in G$. Então,*

$$\begin{aligned} x \in gZ(G) &\Leftrightarrow (\exists a \in Z(G)) \quad x = ga \\ &\Leftrightarrow (\exists a \in Z(G)) \quad x = ag \\ &\Leftrightarrow x \in Z(G)\, g. \end{aligned}$$

Exemplo 2.70. *No grupo $D_3 = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ e subgrupo $H = \{\rho_1, \theta_1\}$ referidos no Exemplo 2.60, como*

$$\theta_2 H = \{\theta_2, \rho_3\} \neq \{\theta_2, \rho_2\} = H\theta_2,$$

concluímos que H não é subgrupo invariante de D_3.

Proposição 2.71. *Sejam G um grupo e $H < G$ tal que $|G : H| = 2$. Então, $H \lhd G$.*

Demonstração: Seja $H < G$ tal que $|G : H| = 2$. Então, existe $x \in G \backslash H$ tal que $Hx = xH$. Assim, para todo $y \in G$, como

$$yH = \begin{cases} H & \text{se } y \in H \\ xH & \text{se } y \notin H \end{cases}$$

e

$$Hy = \begin{cases} H & \text{se } y \in H \\ Hx & \text{se } y \notin H, \end{cases}$$

temos que $yH = Hy$, qualquer que seja $y \in G$. □

Proposição 2.72. *Todo o subgrupo de um grupo abeliano é um subgrupo invariante.* □

Teorema 2.73. *Sejam G um grupo e $H < G$. Então,*

$$H \lhd G \Longleftrightarrow (\forall x \in G)(\forall h \in H) \quad xhx^{-1} \in H.$$

Demonstração: Suponhamos primeiro que $H \lhd G$. Então, para todo $x \in G$,

$$xH = Hx.$$

Sejam $g \in G$ e $h \in H$. Então,

$$ghg^{-1} = (gh)\, g^{-1} = \left(h'g\right) g^{-1} = h' \left(gg^{-1}\right) = h' \in H.$$

Reciprocamente, suponhamos que, para todos $x \in G$ e $h \in H$,

$$xhx^{-1} \in H.$$

Seja $g \in G$. Então,

$$\begin{aligned} y \in gH \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\exists h' \in H\right) \quad y = gh' \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\exists h' \in H\right) \quad y = gh' \left(g^{-1}g\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\exists h' \in H\right) \quad y = \left(gh'g^{-1}\right) g \\ &\Rightarrow \quad y \in Hg \qquad \textit{por hipótese}, \end{aligned}$$

pelo que $gH \subseteq Hg$. De modo análogo, prova-se que $Hg \subseteq gH$ e, portanto, $Hg = gH$. □

Observação. É óbvio que, se um grupo G admite um subgrupo invariante H, as relações $\equiv^e (\mod H)$ e $\equiv^d (\mod H)$ são uma e uma só relação de congruência. De facto,

$$x \equiv^e y\, (\mod H) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow y \in xH = Hx \Leftrightarrow yx^{-1} \in H \Leftrightarrow x \equiv^d y\, (\mod H)\,.$$

Assim, fala-se de uma única relação $\equiv (\mod H)$, que, por sua vez, define um único conjunto quociente, que se representa por G/H. Logo,

$$G/H = \{xH \mid x \in G\} = \{Hx \mid x \in G\}\,.$$

Proposição 2.74. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Então, G/H é grupo, se considerarmos o produto de subconjuntos de G.*

Demonstração: Sejam $x, y \in G$. Então,

$$xHyH = xyHH = xyH,$$

pelo que G/H é fechado para o produto.

Mais ainda, a operação é associativa, H é o seu elemento neutro e cada classe xH admite a classe $x^{-1}H$ como elemento inverso. □

Definição 2.75. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Ao grupo G/H chama-se* grupo quociente.

Proposição 2.76. *Sejam G um grupo e θ uma relação de congruência definida em G. Então, a classe de congruência do elemento identidade, $[1_G]_\theta$, é um subgrupo invariante de G. Mais ainda, para $x, y \in G$,*

$$x\theta y \iff x^{-1}y \in [1_G]_\theta .$$

Demonstração: Seja G um grupo e θ uma relação de congruência em G. Pretendemos provar, primeiro, que

$$[1_G]_\theta = \{x \in G \mid x\theta 1_G\} \lhd G.$$

De facto,

(i) $[1_G]_\theta \neq \emptyset$, pois é uma classe de congruência;

(ii) Sejam $x, y \in [1_G]_\theta$. Então,

$$x\theta 1_G \Rightarrow xy\theta 1_G y = y\theta 1_G \Rightarrow xy\theta 1_G,$$

pelo que $xy \in [1_G]_\theta$;

(iii) Seja $x \in [1_G]_\theta$. Então,

$$x\theta 1_G \Rightarrow xx^{-1}\theta 1_G x^{-1} \Leftrightarrow 1_G\theta x^{-1} \Rightarrow x^{-1}\theta 1_G,$$

pelo que $x^{-1} \in [1_G]_\theta$.

Logo, $[1_G]_\theta$ é um subgrupo de G.

Mais ainda, sejam $x \in G$ e $a \in [1_G]_\theta$. Então,

$$a\theta 1_G \Rightarrow xax^{-1}\theta x1_G x^{-1} = xx^{-1} = 1_G,$$

pelo que $xax^{-1} \in [1_G]_\theta$ e, portanto, $[1_G]_\theta$ é invariante.

Finalmente, sejam $x, y \in G$. Então,

$$x\theta y \Rightarrow x^{-1}x\theta x^{-1}y \Leftrightarrow 1_G\theta x^{-1}y \Leftrightarrow x^{-1}y \in [1_G]_\theta$$

e

$$x^{-1}y \in [1_G]_\theta \Leftrightarrow x^{-1}y\theta 1_G \Rightarrow xx^{-1}y\theta x1_G \Leftrightarrow y\theta x.$$

Logo,

$$x\theta y \Longleftrightarrow x^{-1}y \in [1_G]_\theta\,.$$

□

2.6 morfismos

Definição 2.77. *Sejam G_1, G_2 grupos. Uma aplicação $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ diz-se um* morfismo *ou* homomorfismo *se*

$$(\forall x, y \in G_1) \qquad \psi(xy) = \psi(x)\,\psi(y)\,.$$

Um morfismo diz-se um epimorfismo *se for uma aplicação sobrejetiva.*

Um morfismo diz-se um monomorfismo *se for uma aplicação injetiva.*

Um morfismo diz-se um isomorfismo *se for uma aplicação bijectiva. Neste caso, escreve-se $G_1 \cong G_2$ e diz-se que os dois grupos são* isomorfos.

Um morfismo de um grupo nele mesmo diz-se um endomorfismo.

Um endomorfismo diz-se um automorfismo *se for uma aplicação bijetiva.*

Exemplo 2.78. *Sejam G_1 e G_2 grupos e $\varphi : G_1 \to G_2$ definida por $\varphi(x) = 1_{G_2}$, para todo $x \in G_1$. Então, φ é um morfismo de grupos (conhecido por* morfismo nulo*)*

Proposição 2.79. *Sejam G_1 e G_2 dois grupos. Se $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ é um morfismo então*

$$\psi(1_{G_1}) = 1_{G_2}.$$

Demonstração: Temos que

$$1_{G_1}1_{G_1} = 1_{G_1},$$

pelo que

$$\psi\left(1_{G_1}\right)\psi\left(1_{G_1}\right)=\psi\left(1_{G_1}1_{G_1}\right)=\psi\left(1_{G_1}\right).$$

Por outro lado, como $\psi\left(1_{G_1}\right)\in G_2$, temos que

$$\psi\left(1_{G_1}\right)1_{G_2}=\psi\left(1_{G_1}\right).$$

Logo,

$$\psi\left(1_{G_1}\right)\psi\left(1_{G_1}\right)=\psi\left(1_{G_1}\right)1_{G_2},$$

pelo que, pela lei do corte,

$$\psi\left(1_{G_1}\right)=1_{G_2}.$$

□

Proposição 2.80. *Sejam G_1 e G_2 dois grupos e $\psi:G_1\longrightarrow G_2$ um morfismo. Então*

$$\left[\psi\left(x\right)\right]^{-1}=\psi\left(x^{-1}\right).$$

Demonstração: Seja $x\in G_1$. Então,

$$\psi\left(x\right)\psi\left(x^{-1}\right)=\psi\left(xx^{-1}\right)=\psi\left(1_{G_1}\right)=1_{G_2}$$

e

$$\psi\left(x^{-1}\right)\psi\left(x\right)=\psi\left(x^{-1}x\right)=\psi\left(1_{G_1}\right)=1_{G_2}.$$

Logo, pela própria definição de inverso, $\left[\psi\left(x\right)\right]^{-1}=\psi\left(x^{-1}\right).$ □

Proposição 2.81. *Sejam G_1 e G_2 dois grupos, $H\subseteq G_1$ e $\psi:G_1\longrightarrow G_2$ um morfismo. Então,*

$$H<G_1\Rightarrow\psi\left(H\right)<G_2.$$

Demonstração: Seja $H<G_1$. Então:

(i) $\psi\left(H\right)\neq\emptyset$, pois

$$1_{G_1}\in H\Rightarrow\psi\left(1_{G_1}\right)\in\psi\left(H\right);$$

(ii) Sejam $a,b\in\psi\left(H\right)$. Então,

$$\left(\exists x,y\in H\right)\quad a=\psi\left(x\right)\quad \text{e}\quad b=\psi\left(y\right).$$

Então,

$$(\exists x, y \in H) \quad ab = \psi(x)\psi(y) = \psi(xy),$$

pelo que

$$(\exists z = xy \in H) \quad ab = \psi(z),$$

e, portanto, $ab \in \psi(H)$;

(iii) Seja $a \in \psi(H)$. Então,

$$a = \psi(x) \quad \text{com } x \in H \Rightarrow a^{-1} = [\psi(x)]^{-1} = \psi\left(x^{-1}\right) \quad \text{com } x^{-1} \in H.$$

Logo, $a^{-1} \in \psi(H)$.

Concluímos, assim, que $\psi(H) < G$. □

Corolário 2.82. *Seja $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ um morfismo de grupos. Se ψ é um monomorfismo então*

$$G_1 \cong \psi(G_1).$$

□

Observação. Dois grupos finitos isomorfos têm a mesma ordem. Mas, dois grupos com a mesma ordem, não são necessariamente isomorfos. Como contra-exemplo, basta pensar no grupo 4-Klein e no $\mathbb{Z}_4$.

Proposição 2.83. *Sejam G_1 e G_2 dois grupos, $H \subseteq G_1$ e $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ um epimorfismo. Então,*

$$H \lhd G_1 \Rightarrow \psi(H) \lhd G_2.$$

Demonstração: Considerando a proposição anterior, falta apenas provar que, para $g \in G_2$ e $a \in \psi(H)$, temos que $gag^{-1} \in \psi(H)$. De facto,

$$\begin{aligned} g \in G_2, \quad a \in \psi(H) \quad &\Rightarrow \quad (\exists x \in G_1)(\exists h \in H) \quad g = \psi(x), \quad a = \psi(h) \\ &\Rightarrow \quad (\exists x \in G_1)(\exists h \in H) \quad gag^{-1} = \psi(x)\psi(h)[\psi(x)]^{-1} \\ &\Rightarrow \quad gag^{-1} = \psi\left(xhx^{-1}\right) \quad com \quad xhx^{-1} \in H \\ &\Rightarrow \quad gag^{-1} \in \psi(H), \end{aligned}$$

pelo que $\psi(H) \lhd G_2$. □

Definição 2.84. *Seja* $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ *um morfimo de grupos. Chama-se* núcleo (*ou* kernel) *de* ψ, *e representa-se por* $\mathrm{Nuc}\psi$ *ou* $\ker\psi$, *ao subconjunto de* G_1

$$\mathrm{Nuc}\psi = \{x \in G_1 \mid \psi(x) = 1_{G_2}\}.$$

Proposição 2.85. *Seja* $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ *um morfimo de grupos. Então,* $\mathrm{Nuc}\psi \lhd \mathrm{G}_1$.

Demonstração: Começamos por provar que $\mathrm{Nuc}\psi$ é subgrupo de G_1.

(i) Observemos, primeiro, que $1_{G_1} \in \mathrm{Nuc}\psi$. De facto, $1_{G_1} \in G_1$ e $\psi(1_{G_1}) = 1_{G_2}$;

(ii) Sejam $a, b \in \mathrm{Nuc}\psi$. Então,

$$\begin{aligned} a, b \in \mathrm{Nuc}\psi &\Rightarrow a, b \in G_1 \text{ e } \psi(a) = \psi(b) = 1_{G_2} \\ &\Rightarrow a^{-1}, b \in G_1,\ \psi\left(a^{-1}\right) = [\psi(a)]^{-1} = 1_{G_2}^{-1} = 1_{G_2} = \psi(b) \\ &\Rightarrow a^{-1}b \in G_1 \text{ e } \psi\left(a^{-1}b\right) = \psi\left(a^{-1}\right)\psi(b) = 1_{G_2}1_{G_2} = 1_{G_2} \\ &\Rightarrow a^{-1}b \in \mathrm{Nuc}\psi. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que este subconjunto de G_1 é, de facto, um seu subgrupo.

Sejam $g \in G_1$ e $b \in \mathrm{Nuc}\psi$. Então,

$$gbg^{-1} \in G_1$$

e

$$\begin{aligned} \psi\left(gbg^{-1}\right) &= \psi(g)\,\psi(b)\,\psi\left(g^{-1}\right) \\ &= \psi(g)\,1_{G_2}\,[\psi(g)]^{-1} \\ &= 1_{G_2}, \end{aligned}$$

pelo que $gbg^{-1} \in \mathrm{Nuc}\psi$. Logo, $\mathrm{Nuc}\psi \lhd G_1$. □

Assim sendo, o núcleo de um morfismo $\psi : G_1 \longrightarrow G_2$ de grupos define uma relação de congruência, a saber

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{\mathrm{Nuc}\psi} &\iff xy^{-1} \in \mathrm{Nuc}\psi \\ &\iff \psi\left(xy^{-1}\right) = 1_{G_2} \\ &\iff \psi(x)\,[\psi(y)]^{-1} = 1_{G_2} \\ &\iff \psi(x) = \psi(y). \end{aligned}$$

Proposição 2.86. *Sejam G um grupo e $H \lhd G$. Então,*

$$\begin{array}{rcl} \pi : G & \longrightarrow & G/H \\ x & \longmapsto & xH \end{array}$$

é um epimorfismo (ao qual se chama epimorfismo canónico*) tal que* $\mathrm{Nuc}\pi = H$.

Demonstração: Sejam G um grupo e $H \lhd G$.

Então, para $x, y \in G$,

$$\psi\left(xy\right) = \left(xy\right) H = xHyH = \psi\left(x\right)\psi\left(y\right),$$

pelo que π é um morfismo. Além disso, ψ é obviamente sobrejetiva (cada classe é imagem por π do seu representante). Por fim,

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Nuc}\pi & \Longleftrightarrow & \pi\left(x\right) = H \\ & \Longleftrightarrow & xH = H \\ & \Longleftrightarrow & x \in H. \end{array}$$

□

As duas últimas proposições dizem-nos que:

(i) Dado um morfismo qualquer entre dois grupos, o seu núcleo é um subgrupo invariante do domínio;

(ii) Dado um subgrupo invariante de um grupo, existe um morfismo cujo núcleo é aquele subgrupo.

Considerando as duas situações em simultâneo, temos que:

Seja $\psi : G \longrightarrow G'$ um morfismo de grupos. Então, por (i),

$$\mathrm{Nuc}\psi \lhd G.$$

Logo, por (ii), $\pi : G \longrightarrow G/_{\mathrm{Nuc}\psi}$ é um epimorfismo tal que

$$\mathrm{Nuc}\pi = \mathrm{Nuc}\psi.$$

Teorema 2.87. ***Teorema Fundamental do Homomorfismo.*** *Seja $\theta : G \longrightarrow G'$ um morfismo de grupos. Então,*

$$\mathrm{Im}\theta \cong G/_{\mathrm{Nuc}\theta}.$$

Demonstração: Sejam $K = \mathrm{Nuc}\theta$ e $\phi : G/_K \longrightarrow G'$ tal que

$$\phi\left(xK\right) = \theta\left(x\right), \qquad \forall x \in G.$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \\ G/\mathrm{Nuc}\theta \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Estará a função ϕ bem definida, i.e., se $xK = yK$ será que $\theta\left(x\right) = \theta\left(y\right)$? SIM. De facto,

$$\begin{aligned} xK = yK & \iff x^{-1}y \in K \left(= \mathrm{Nuc}\theta\right) \\ & \iff \theta\left(x^{-1}y\right) = 1_{G'} \\ & \iff \theta\left(x\right) = \theta\left(y\right). \end{aligned}$$

Além disso, demonstrámos ainda que $\theta\left(x\right) = \theta\left(y\right) \Rightarrow xK = yK$, i.e., que

$$\phi\left(xK\right) = \phi\left(yK\right) \Rightarrow xK = yK,$$

pelo que ϕ é injetiva.

Mais ainda,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\phi & = \left\{\phi\left(xK\right) \mid x \in G\right\} \\ & = \left\{\theta\left(x\right) \mid x \in G\right\} \\ & = \mathrm{Im}\theta. \end{aligned}$$

Observamos, por último, que ϕ é um morfismo, já que

$$\phi\left(xKyK\right) = \phi\left(xyK\right) = \theta\left(xy\right) = \theta\left(x\right)\theta\left(y\right) = \phi\left(xK\right)\phi\left(yK\right).$$

Concluímos, então, que ϕ é um monomorfismo cujo conjunto imagem (que é isomorfo ao seu domínio) é igual a $\mathrm{Im}\theta$. Logo,

$$\mathrm{Im}\theta \cong \mathrm{G}/_{\mathrm{K}} = \mathrm{G}/_{\mathrm{Nuc}\theta}.$$

$\square$

2.6.1 teoremas de isomorfismo

Terminamos esta secção apresentando dois resultados envolvendo isomorfismos entre grupos. Estes resultados são muitas vezes referenciados como *Teoremas de Isomorfismo*.

Para provarmos o 1º Teorema de Isomorfismo, começamos por enunciar e demonstrar o seguinte lema.

Lema 2.88. *Sejam $\psi : G \to G'$ um morfismo de grupos e $K < G$. Então,*

$$\mathrm{Nuc}\psi \subseteq K \Rightarrow \psi^{-1}\left(\psi\left(K\right)\right) = K.$$

Demonstração: Precisamos apenas de provar que $\psi^{-1}\left(\psi\left(K\right)\right) \subseteq K$, já que a outra inclusão acontece sempre. Assim,

$$\begin{aligned}
x \in \psi^{-1}\left(\psi\left(K\right)\right) &\iff (\exists y \in \psi\left(K\right)) \quad y = \psi\left(x\right) \\
&\iff (\exists a \in K) \quad y = \psi\left(a\right) = \psi\left(x\right) \\
&\iff (\exists a \in K) \quad \psi\left(a^{-1}x\right) = \left[\psi\left(a\right)\right]^{-1}\psi\left(x\right) = 1_{G'} \\
&\iff (\exists a \in K) \quad a^{-1}x \in \mathrm{Nuc}\psi \\
&\Rightarrow (\exists a \in K) \quad a^{-1}x \in K \\
&\Rightarrow x = a \cdot a^{-1}x \in K.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.89. ***(1º Teorema do Isomorfismo)*** *Sejam G e G' dois grupos e $\psi : G \longrightarrow G'$ um epimorfismo. Seja $K \lhd G$ tal que $\mathrm{Nuc}\psi \subseteq K$. Então,*

$$G/_{K} \cong G'/_{\psi(K)}.$$

Demonstração: Observemos, primeiro, que, sendo ψ um epimorfismo,

$$K \lhd G \Rightarrow \psi\left(K\right) \lhd G',$$

pelo que faz sentido falar no grupo quociente $G'/_{\psi(K)}$.

Seja $\theta : G/_{K} \longrightarrow G'/_{\psi(K)}$ definida por $\theta\left(xK\right) = \psi\left(x\right)\psi\left(K\right)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \arrow[d, "\pi'"] \\ G/K \arrow[r, "\theta"'] & G'/\psi(K) \end{tikzcd}$$

Estará θ bem definida? De facto, para todo $x \in G$, $\psi(x) \in G'$ e

$$\begin{aligned} xK = yK &\iff x^{-1}y \in K \\ &\Rightarrow \psi\left(x^{-1}y\right) \in \psi(K) \\ &\iff [\psi(x)]^{-1}\psi(y) \in \psi(K) \\ &\iff \psi(x)\psi(K) = \psi(y)\psi(K) \\ &\iff \theta(xK) = \theta(yK). \end{aligned}$$

Por outro lado, porque $\mathrm{Nuc}\psi \subseteq K$, temos que $\psi^{-1}(\psi(K)) = K$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \theta(xK) = \theta(yK) &\iff \psi(x)\psi(K) = \psi(y)\psi(K) \\ &\iff \psi\left(x^{-1}y\right) \in \psi(K) \\ &\Rightarrow x^{-1}y \in \psi^{-1}(\psi(K)) = K \\ &\iff xK = yK, \end{aligned}$$

pelo que ψ é injetiva. Mais ainda, como ψ é sobrejetiva, temos que

$$\left(\forall y \in G'\right)(\exists x \in G) \quad \psi(x) = y,$$

o que equivale a dizer que

$$\left(\forall y\psi(K) \in G'/_{\psi(K)}\right)(\exists xK \in G/_K) \quad \theta(xK) = y\psi(K),$$

pelo que θ é também sobrejetiva.

Falta então verificar que θ é um morfismo. De facto,

$$\begin{aligned} \theta(xKyK) &= \theta(xyK) = \psi(xy)\psi(K) = \psi(x)\psi(y)\psi(K) \\ &= \psi(x)\psi(K)\psi(y)\psi(K) = \theta(xK)\theta(yK). \end{aligned}$$

Logo, θ é um isomorfismo e o resultado verifica-se. $\square$

Para demonstrarmos o 2^o teorema do isomorfismo necessitamos dos seguintes lemas:

Lema 2.90. *Sejam G um grupo e $H < G$ e $H' \lhd G$. Então, $HH' < G$.* $\square$

Lema 2.91. *Sejam G um grupo e $H < G$ e $H' \lhd G$. Então, se $H' \subseteq H$, então, $H' \lhd H$.* $\square$

Teorema 2.92. ***(2^o Teorema do Isomorfismo)*** *Sejam G um grupo e $H, T < G$ tal que $T \lhd G$. Então,*

$$(HT)/_T \cong H/_{(H\cap T)}.$$

Demonstração: Pelos lemas anteriores, $HT < G$ e $T \lhd HT$. Faz então sentido falar no grupo quociente $(HT)/_T$.

Por outro lado, $H \cap T \lhd H$. De facto, sabemos que $H \cap T < G$, e, portanto, $H \cap T < H$. Mais ainda

$$\begin{aligned} x \in H \cap T \quad \text{e} \quad a \in H \quad &\Rightarrow \quad x \in T \quad \text{e} \quad a \in G \\ &\Rightarrow \quad xax^{-1} \in T \qquad (T \lhd G), \end{aligned}$$

pelo que $H \cap T \lhd H$. Logo, podemos falar no grupo quociente $H/_{H\cap T}$.

Provemos agora que os dois grupos quocientes são isomorfos.

Seja $\pi : HT \longrightarrow HT/_T$ o epimorfismo canónico. Como $H \subseteq HT$, consideremos

$$\begin{aligned} \pi|_H : H \quad &\longrightarrow \quad HT/_T \\ x_1 \quad &\longmapsto \quad x_1T\,(= x_1 1_G T) \end{aligned}$$

Como $\pi|_H$ é uma restrição de um morfismo é ainda um morfismo. Mais ainda, este morfismo é sobrejectivo. De facto,

$$\begin{aligned} & (\forall yT \in HT/_T)\,(\exists x_1 \in H, x_2 \in T) \quad yT = x_1x_2T \\ \Longleftrightarrow \quad & (\forall yT \in HT/_T)\,(\exists x_1 \in H) \quad yT = x_1T. \\ \Longleftrightarrow \quad & (\forall yT \in HT/_T)\,(\exists x_1 \in H) \quad yT = \pi|_H(x_1). \end{aligned}$$

Assim, $H/_T = \mathrm{Im}\pi|_H = HT/_T$.

Por outro lado, $\mathrm{Nuc}\pi|_H = H \cap T$, já que

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nuc}\pi|_{\mathrm{H}} &\iff x \in H \text{ e } \pi|_H(x) = T \\ &\iff x \in H \text{ e } xT = T \\ &\iff x \in H \text{ e } x \in T \\ &\iff x \in H \cap T. \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema fundamental do homomorfismo, concluímos que

$$H/_{H\cap T} = H/_{\mathrm{Nuc}\pi|_{\mathrm{H}}} \cong \mathrm{Im}\pi|_H = HT/_T.$$

□

2.7 grupos cíclicos

Vimos, no final da secção 1.3, o conceito de subgrupo gerado por um subconjunto singular $\{a\}$ de um grupo G. Este conceito revela-se de grande importância para a Teoria de Grupos se pensarmos que pode esse subgrupo gerado ser o próprio grupo. Justifica-se, por isso, a existência de uma secção a ele dedicada.

2.7.1 conceito e exemplos

Definição 2.93. *Um grupo G diz-se* cíclico *se*

$$(\exists a \in G) \quad G = \langle a \rangle\,,$$

i.e., se existe $a \in G$ tal que

$$(\forall x \in G)\,(\exists n \in \mathbb{Z}) \quad x = a^n.$$

Exemplo 2.94. *O grupo $(\mathbb{Z}, +)$ é cíclico, já que $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, pois*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad n = n \cdot 1.$$

Exemplo 2.95. *O grupo $(\mathbb{R}, +)$ não é cíclico.*

Exemplo 2.96. *O grupo* $(\mathbb{Z}_4, +)$ *é cíclico, já que* $\mathbb{Z}_4 = \langle\bar{1}\rangle = \langle\bar{3}\rangle$, *pois*

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot \bar{1} = 0 \cdot \bar{3} \\ \bar{1} &= 1 \cdot \bar{1} = 3 \cdot \bar{3} \\ \bar{2} &= 2 \cdot \bar{1} = 2 \cdot \bar{3} \\ \bar{3} &= 3 \cdot \bar{1} = 1 \cdot \bar{3} \end{aligned}$$

Exemplo 2.97. *Para qualquer* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $(\mathbb{Z}_n, +)$ *é cíclico, já que* $\mathbb{Z}_n = \langle\bar{1}\rangle$.

Exemplo 2.98. *O conjunto* $G = \{i, -i, 1, -1\}$, *quando algebrizado pela multiplicação usual de complexos, é um grupo cíclico. De facto,* $G = \langle i \rangle$.

Exemplo 2.99. *O grupo trivial* $G = \{1_G\}$ *é um grupo cíclico. De facto, em qualquer grupo* G, $\langle 1_G \rangle = \{1_G\}$.

2.7.2 propriedades elementares

Proposição 2.100. *Todo o grupo cíclico é abeliano.*

Demonstração: Sejam $G = \langle a \rangle$ e $x, y \in G$. Então, existem $n, m \in \mathbb{Z}$ tais que $x = a^n$ e $y = a^m$. assim,

$$xy = a^n a^m = a^{n+m} = a^{m+n} = a^m a^n = yx.$$

Observe-se que o recíproco do teorema anterir não é verdadeiro, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.101. *O grupo 4-Klein apresentado no Exemplo 2.37 é obviamente um grupo abeliano. No entanto, não é cíclico, pois* $\langle 1_G \rangle = \{1_G\} \neq G$, $\langle a \rangle = \{1_G, a\} \neq G$, $\langle b \rangle = \{1_G, b\} \neq G$ *e* $\langle c \rangle = \{1_G, c\} \neq G$. *Assim, podemos concluir que não existe* $x \in G$ *tal que* $G = \langle x \rangle$.

Teorema 2.102. *Qualquer subgrupo de um grupo cíclico é cíclico.*

Demonstração: Sejam $G = \langle a \rangle$, para algum $a \in G$, e $H < G$. Se $H = \{1_G\}$, então $H = \langle 1_G \rangle$ e, portanto, H é cíclico.

Se $H \neq \{1_G\}$, então, existe $x = a^n \in G$ $(n \neq 0)$ tal que $x \in H$. Então, H tem pelo menos uma potência positiva de a. Seja d o menor inteiro positivo tal que $a^d \in H$. Vamos provar que $H = \left\langle a^d \right\rangle$:

(i) Por um lado $a^d \in H$, logo $\left\langle a^d \right\rangle \subseteq H$;

(ii) Reciprocamente, seja $y \in H$. Como $y \in G$, $y = a^m$ para algum $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Então, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < d$, tais que

$$y = a^m = a^{dq+r} = a^{qd} a^r.$$

Assim,

$$a^r = \left(a^d\right)^{-q} a^m \in H,$$

pelo que $r = 0$. Logo,

$$a^m = a^{qd} \in \left\langle a^d \right\rangle,$$

pelo que $H = \left\langle a^d \right\rangle$. □

Exemplo 2.103. *Os subgrupos de $\mathbb{Z}$ são todos do tipo $n\mathbb{Z}$. De facto, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$.*

O próximo resultado deduz-se facilmente dos resultados anteriores, pelo que a sua demonstração será omitida.

Proposição 2.104. *Qualquer gerador de um grupo cíclico finito tem ordem igual à ordem do grupo.*
□

Exemplo 2.105. *Em $\mathbb{Z}_4$ tem-se que: $o(\bar{3}) = 4$ e $\mathbb{Z}_4 = \langle \bar{3} \rangle$.*

Vimos já que, para um grupo $G = \langle a \rangle$, G é abeliano e se $H < G$, $H = \left\langle a^d \right\rangle$, para algum $d \in \mathbb{N}$.

Assim, $H \lhd G$, pelo que podemos falar no grupo $G/_H$. Vejamos de seguida como são os elementos deste grupo:

Proposição 2.106. *Seja $G = \langle a \rangle$ um grupo infinito e $H = \left\langle a^d \right\rangle \lhd G$. Então,*

$$H, aH, a^2H, ..., a^{d-1}H$$

é a lista completa de elementos de G/H.

Demonstração: Observemos primeiro que, para todo $x \in G$,

$$xH = a^r H, \quad \text{para algum } r \in \{0, 1, 2, ..., d-1\}.$$

De facto, se $x \in G = \langle a \rangle$, então existe $p \in \mathbb{Z}$ para o qual $x = a^p$. Mas, se $p \in \mathbb{Z}$, existem $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r \leq d-1$ tais que $p = qd + r$, pelo que

$$a^p = a^{qd+r} = a^r \cdot \left(a^d\right)^q \in a^r H.$$

Logo,

$$a^p H = a^r H.$$

Provemos agora que, para $0 \leq i, j \leq d-1$,

$$i \neq j \Rightarrow a^i H \neq a^j H.$$

Suponhamos que $i < j$. Então, $0 \leq j - i \leq d - 1$, pelo que

$$\begin{aligned} a^i H = a^j H &\iff \left(a^i\right)^{-1} a^j \in H \\ &\iff a^{j-i} \in H \\ &\iff j - i = kd, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\iff j - i = 0 \\ &\iff j = i. \end{aligned}$$

Logo, a implicação verifica-se e, portanto,

$$G/_H = \left\{H, aH, ..., a^{d-1}H\right\}.$$

□

2.7.3 morfismos entre grupos cíclicos

Vimos, na secção anterior, que dois grupos com a mesma ordem não são necessariamente isomorfos. Tal não se verifica quando falamos em grupos cíclicos.

Proposição 2.107. *Dois grupos cíclicos finitos são isomorfos se e só se tiverem a mesma ordem.*

Demonstração: Sejam G e T dois grupos cíclicos e finitos. Então, existem $a \in G$ e $b \in T$ tais que $G = \langle a \rangle$ e $T = \langle b \rangle$.

Se $G \cong T$, então obviamente G e T têm a mesma ordem.

Se G e T têm a mesma ordem n, então, $o(a) = o(b) = n$ e

$$\begin{aligned} G &= \left\{1_G, a, a^2, ..., a^{n-1}, a^n\right\} \\ &\text{e} \\ T &= \left\{1_T, b, b^2, ..., b^{n-1}, b^n\right\}. \end{aligned}$$

Logo, a aplicação $\psi : G \longrightarrow T$ definida por

$$\psi = \begin{pmatrix} 1_G & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & a^n \\ 1_T & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} & b^n \end{pmatrix}$$

é obviamente um isomorfismo. □

Corolário 2.108. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e G um grupo cíclico de ordem n. Então, $G \cong \mathbb{Z}_n$.*

Demonstração: Imediata, tendo em conta o exemplo 1.30. □

Observação. Vimos já que se G é um grupo e $a \in G$ é tal que $o(a) = \infty$, então, para $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m \neq n \Rightarrow a^m \neq a^n.$$

Assim, se G é infinito e cíclico, temos que $G = \langle a \rangle$ para algum $a \in G$ tal que $o(a) = \infty$, pelo que

$$G = \left\{ ..., a^{-2}, a^{-1}, 1_G, a, a^2, a^3, ... \right\}.$$

Podemos então concluir que:

Proposição 2.109. *Se G é um grupo cíclico infinito, então, $G \cong \mathbb{Z}$.* □

2.8 grupo simétrico

Definição 2.110. *Seja A um conjunto. Uma* permutação *de A é uma aplicação bijectiva de A em A.*

Observação 1. Se A é um conjunto finito com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), podemos estabelecer uma bijecção entre A e o conjunto $\{1, 2, ..., n\}$, pelo que aqui iremos adoptar esta última notação para qualquer conjunto com n elementos. Assim, dizemos, por exemplo, que

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

é uma permutação de um conjunto com 4 elementos.

Observação 2. Se A é um conjunto finito com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), sabemos que podemos definir $n!$ permutações de A distintas. Mais ainda, se algebrizarmos este conjunto de $n!$ elementos com a composição de aplicações obtemos, obviamente, um grupo.

Definição 2.111. *Chama-se* grupo simétrico *de um conjunto com n elementos, e representa-se por S_n, ao grupo das permutações desse conjunto.*

Exemplo 2.112. *Se considerarmos um conjunto com dois elementos,*

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

Exemplo 2.113. *Se considerarmos um conjunto com 3 elementos,*

$$\begin{aligned} S_3 \;=\; & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

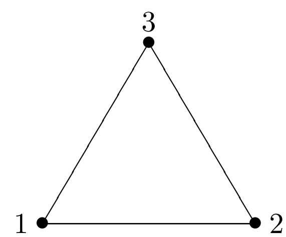
Exemplo 2.114. *Se considerarmos um conjunto com 4 elementos, temos que*

$$\begin{aligned} S_4 \;=\; & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \right. \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2.8.1 O grupo diedral

Definição 2.115. *Chama-se* grupo diedral *ao grupo das simetrias e rotações de uma linha poligonal.*

Exemplo 2.116. *O grupo diedral D_3 :*



Neste caso, os elementos de D_3 são os mesmos de S_3. De facto, se considerarmos:

(i) as rotações de 0º, 120º e 240º temos, respetivamente,

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

(ii) as simetrias em relação às bissectrizes dos ângulos 1, 2 e 3, temos, respetivamente,

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \theta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Considerando a composição de funções, obtemos a seguinte tabela:

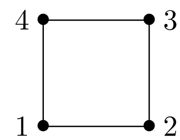
$\circ$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	θ_1	θ_2	θ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	θ_3	θ_1	θ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2	θ_2	θ_3	θ_1
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
θ_2	θ_2	θ_3	θ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
θ_3	θ_3	θ_1	θ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1

Obviamente que $\rho_1 = id$ é o elemento idempotente de $D_3 = S_3$, o grupo é não abeliano e os seus subgrupos são:

$$\{\rho_1\}, \{\rho_1, \theta_1\}, \{\rho_1, \theta_2\}, \{\rho_1, \theta_3\}, \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} \text{ e } S_3.$$

Observe-se que este grupo é isomorfo ao grupo apresentado no Exemplo 2.60. De facto, S_3 é fundamental no estudo da Teoria de Grupos, pois, a menos de um isomorfismo, é o menor (em ordem) grupo não abeliano.

Exemplo 2.117. *O grupo diedral D_4 :*



Neste caso, no grupo didedral existem menos elementos do que no grupo simétrico. De facto, se considerarmos:

(i) as rotações de 0^o, 90^o, 180^o e 270^o, temos, respetivamente:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

(ii) as simetrias em relação às bissectrizes $[1,3]$ e $[2,4]$ temos, respetivamente:

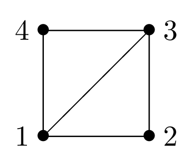
$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

(iii) as simetrias em relação às mediatrizes do lado $[1,2]$ e do lado $[2,3]$ temos, respetivamente:

$$\theta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } \theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

assim, D_4 tem 8 elementos enquanto que S_4 tem 24 elementos.

Exemplo 2.118. *Relativamente à figura*



o grupo diedral é composto pelas aplicações

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \phi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.8.2 ciclos

Definição 2.119. *Diz-se que uma permutação σ de um conjunto finito A é um ciclo de comprimento n se existirem*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$$

tais que

$$\sigma(a_1) = a_2, \quad \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \quad \sigma(a_{n-1}) = a_n, \quad \sigma(a_n) = a_1$$

e se

$$\sigma(x) = x, \qquad \forall x \in A \backslash \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

Neste caso, representa-se este facto por $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.120. *Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que*

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observação. O produto (composição) de dois ciclos nem sempre é um ciclo, como o prova o seguinte exemplo: em S_6,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

não é um ciclo.

Definição 2.121. *Dado um conjunto A finito, dizemos que dois ciclos são* disjuntos *se não existir nenhum elemento de A que apareça simultaneamente na notação desses ciclos, i.e., se nenhum elemento de A for movido simultaneamente pelos dois ciclos.*

Exemplo 2.122. *Em S_6, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 6)(2 \quad 5 \quad 3)$, i.e., a permutação σ é o produto de dois ciclos disjuntos.*

Teorema 2.123. *Toda a permutação σ de um conjunto finito é um produto (composição) de ciclos disjuntos.*

Demonstração: Suponhamos, sem perdas de generalidade, que $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Consideremos então o primeiro elemento (1) e, para a permutação σ em A, consideremos a lista

$$1 \quad \sigma(1) \quad \sigma^2(1) \quad \sigma^4(1) \quad .... \tag{*}$$

Como A é finito, sabemos que os elementos de (*) não podem ser todos distintos. Seja $\sigma^r(1)$ o primeiro elemento que aparece repetido. Então, $\sigma^r(1) = 1$. De facto, se

$$\sigma^r(1) = \sigma^s(1), \qquad \text{para algum } s \in \{1, 2, ..., r-1\},$$

concluíamos que

$$\sigma^{r-s}(1) = id(1) = 1 \qquad \text{e} \quad 0 < r - s < r,$$

pelo que $\sigma^r(1)$ não seria o primeiro elemento a aparecer repetido.

Formamos então o ciclo

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & \sigma(1) & \sigma^2(1) & \cdots & \sigma^{r-1}(1) \end{pmatrix}.$$

Seja, então, i o primeiro elemento de A que não aparece em ρ_1. Aplicamos a i o raciocínio aplicado a 1 e formamos o ciclo

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} i & \sigma(i) & \sigma^2(i) & \cdots & \sigma^{t-1}(i) \end{pmatrix}.$$

Por raciocínios análogos, "percorremos" todos os elementos de A. Suponhamos que são k os ciclos que formamos. Então

$$\sigma = \rho_1 \rho_2 ... \rho_k.$$

Vejamos agora que os ciclos são disjuntos dois a dois.

Consideremos os ciclos ρ_1 e ρ_2. Suponhamos que existe $j \in A$ tal que j aparece no ciclo ρ_1 e no ciclo ρ_2. Suponhamos, sem perdas de generalidade, que $j = \sigma^2(1)$ e que $j = \sigma^3(i)$. Então,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \begin{pmatrix} \sigma^2(1) & \sigma^3(1) & \cdots & \sigma^{r-1}(1) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} j & \sigma^2(j) & \sigma^4(j) & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^3(i) & \sigma^4(i) & \sigma^5(i) & \cdots \end{pmatrix} \\ &= \rho_2, \end{aligned}$$

o que não acontece pois i não aparece em ρ_1.

Generalizando esta demonstração, provamos que todos os ciclos são disjuntos dois a dois. □

Questão: Dada uma permutação σ num conjunto com n elementos, i.e., dado o elemento $\sigma \in S_n$, qual será a sua ordem?

Resposta:

(i) se σ é um ciclo, então $o(\sigma)$ é o comprimento do ciclo.

(ii) se σ é um produto de pelo menos dois ciclos disjuntos, então $o(\sigma)$ é o m.m.c. entre os comprimentos dos ciclos em questão.

Exemplo 2.124. *Em S_8, como $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 7 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 5 \quad 7)(3 \quad 4)$, temos que $o(\sigma) = 4$.*

De facto, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 3 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ e $\sigma^4 = id$.

Exemplo 2.125. *Em S_8, como $\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 4)(5 \quad 7)(6 \quad 8)$, temos que $o(\phi) = 6$.*

2.8.3 grupo alterno

Definição 2.126. *Uma* transposição *é um ciclo de comprimento 2.*

Proposição 2.127. *Qualquer ciclo é produto de transposições.*

Demonstração: Imediata, tendo em conta que

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n) = (a_1 \quad a_n)(a_1 \quad a_{n-1}) \cdots (a_1 \quad a_3)(a_1 \quad a_2).$$

□

Observação. Considerando o teorema e a proposição anteriores, temos que qualquer permutação se escreve como produto de transposições.

Teorema 2.128. *Nenhuma permutação de um conjunto finito pode ser expressa simultaneamente como produto de um número par de transposições e como produto de um número ímpar de transposições.* □

Definição 2.129. *Uma permutação diz-se* par *se se escreve como o produto de um número par de transposições. Uma permutação diz-se* ímpar *se se escreve como produto de um número ímpar de permutações.*

Exemplo 2.130. *A identidade é uma permutação par. De facto, se A tem n elementos*

$$id = (a_i \quad a_j)\,(a_i \quad a_j)\,,$$

para quaisquer $a_i, a_j \in A$.

Teorema 2.131. *Seja A um conjunto com n elementos. Então, o conjunto das permutações pares em A é um subgrupo de S_n de ordem $\frac{n!}{2}$.*

Demonstração: Seja $A_n = \{\sigma : \sigma \text{ é uma permutação par}\}$. Sabemos que $id \in A_n$, que a composição de duas permutações pares é ainda uma permutação par e que a inversa de uma permutação par é ainda uma permutação par. Logo, temos que $A_n < S_n$.

Para demonstrar que $|A_n| = \frac{n!}{2}$, basta considerar uma transposição $\tau \in S_n$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_\tau : A_n &\longrightarrow B_n \\ \sigma &\longmapsto \tau\sigma, \end{aligned}$$

onde B_n é o conjunto das permutações ímpares. Provando que ϕ_τ é bijectiva, temos que $\#(A_n) = \#(B_n)$ e, como $\#(A_n) + \#(B_n) = \#(S_n) = n!$, o resultado é imediato. □

Definição 2.132. *Seja A um conjunto com n elementos. Chama-se* grupo alterno de A, *e representa-se por A_n, ao subgrupo das permutações pares.*

2.8.4 o teorema de representação de Cayley

Para finalizarmos este capítulo sobre grupos, vamos mostrar a importância do estudo do grupo simétrico na Teoria de Grupos. De facto, como se prova no próximo teorema, qualquer grupo é isomorfo a um subgrupo de um dado grupo simétrico.

Teorema 2.133. ***(Teorema de representação de Cayley)*** *Todo o grupo é isomorfo a um grupo de permutações.*

Demonstração: Para cada $x \in G$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \lambda_x : G & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & \lambda_x(a) = xa, \end{array}$$

é uma permutação em G.

Assim, se S é o grupo das permutações de G, consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} \theta : G & \longrightarrow & S \\ x & \longmapsto & \lambda_x. \end{array}$$

Então, para $x, y, g \in G$,

$$(\lambda_x \circ \lambda_y)(g) = \lambda_x(\lambda_y(g)) = \lambda_x(yg) = x(yg) = (xy)g = \lambda_{xy}(g),$$

pelo que

$$\theta(x)\,\theta(y) = \theta(xy),$$

i.e., θ é um morfismo.

Mais ainda,

$$x \in \mathrm{Nuc}\theta \Leftrightarrow \theta(\mathrm{x}) = \mathrm{id_G} \Leftrightarrow \lambda_\mathrm{x} = \mathrm{id_G} \Rightarrow \mathrm{x} = \lambda_\mathrm{x}(1_\mathrm{G}) = \mathrm{id_G}(1_\mathrm{G}) = 1_\mathrm{G},$$

e, portanto,

$$\mathrm{Nuc}\theta = \{1_\mathrm{G}\}.$$

Logo, θ é um monomorfismo, pelo que $G \cong \mathrm{Im}\theta < S$. □

Exemplo 2.134. *Seja* $G = \mathbb{Z}_4$. *Então, com para todos* $a, x \in \mathbb{Z}_4,\ \lambda_a(x) = a + x,$ *temos que*

$$\begin{aligned}
\lambda_{\bar{0}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix} = id \\
\lambda_{\bar{1}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} = (\bar{0} \quad \bar{1} \quad \bar{2} \quad \bar{3}) \\
\lambda_{\bar{2}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = (\bar{0} \quad \bar{2})(\bar{1} \quad \bar{3}) \\
\lambda_{\bar{3}} &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} = (\bar{0} \quad \bar{3} \quad \bar{2} \quad \bar{1}).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathbb{Z}_4 \cong \{\lambda_{\bar{0}}, \lambda_{\bar{1}}, \lambda_{\bar{2}}, \lambda_{\bar{3}}\}$.

3 elementos da teoria de anéis

3.1 generalidades

Definição 3.1. *Seja A um conjunto não vazio e duas operações binárias [$+$ e $\cdot$] nele definidas. O triplo $(A, +, \cdot)$ diz-se um* anel *se*

A1. $(A, +)$ *é um grupo comutativo (também chamado* módulo*);*

A2. $(A, \cdot)$ *é um semigrupo;*

A3. A operação de multiplicação é distributiva *em relação à operação de adição, i.e., para todos $a, b, c \in A$,*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{e} \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$$

Tendo em conta que temos duas operações definidas num mesmo conjunto, é natural haver uma maior complexidade de notação. Para tornarmos a abordagem mais simples, referimo-nos sempre à primeira operação (i.e., à operação para a qual temos um grupo) como *adição*. À segunda operação (i.e., à operação para a qual temos um semigrupo) chamamos *multiplicação*. Ao elemento neutro do grupo chamamos *zero do anel* e representamos por 0_A. Quando existe, ao elemento neutro do semigrupo chamamos *identidade do anel* e representamos por 1_A. Por último, ao elemento oposto de $a \in A$ para a adição chamamos *simétrico de a* e representamos por $-a$. Note-se que, sendo $(A, +)$ grupo, qualquer elemento do anel admite um único simétrico. No que diz respeito à multiplicação, no caso de o anel ter identidade, podem existir elementos que admitem elemento oposto para a multiplicação. Quando existe, referimo-nos ao elemento oposto de $a \in A$ para a multiplicação como o *inverso de a*. Neste caso, representamos o inverso de a por a^{-1}.

Se não houver ambiguidade, falamos no anel A quando nos referimos ao anel $(A, +, \cdot)$ e omitimos o sinal da multiplicação.

O anel A diz-se *comutativo* se a multiplicação for comutativa.

Exemplo 3.2. *Seja* $A = \{a\}$*. Então,* $(A, +, \cdot)$*, onde* $a + a = a$ *e* $a \cdot a = a$*, é um anel comutativo com identidade, ao qual se chama* anel nulo*. Representa-se por* $A = \{0_A\}$*.*

Exemplo 3.3. $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *é um anel comutativo com identidade.*

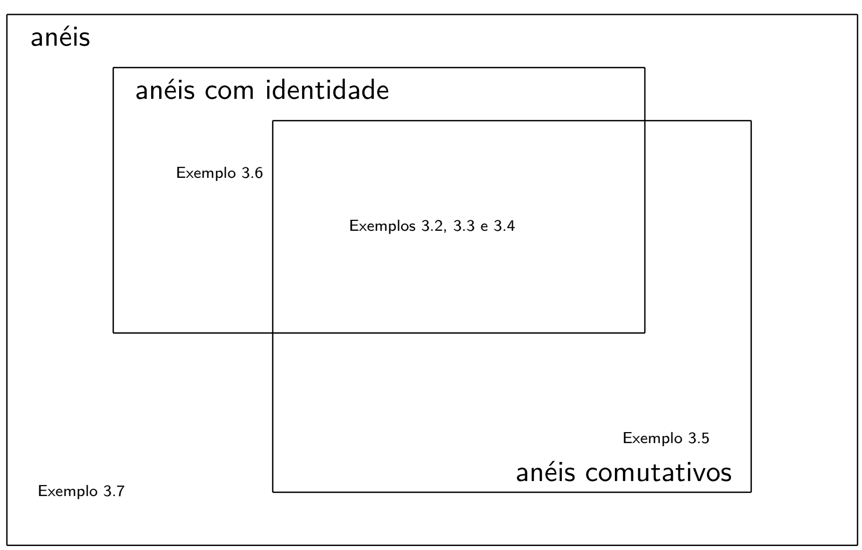
Exemplo 3.4. $(\mathbb{R}, +, \times)$ *é um anel comutativo com identidade.*

Exemplo 3.5. $(2\mathbb{Z}, +, \times)$ *é um anel comutativo sem identidade.*

Exemplo 3.6. $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ *é um anel não comutativo com identidade.*

Exemplo 3.7. *O conjunto* $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$*, quando algebrizado com a adição e multiplicação usuais de matrizes quadradas de ordem 2, é um anel não comutativo e sem identidade.*

Os exemplos que acabámos de apresentar permitem-nos entender o diagrama seguinte, onde estão representadas as relações existentes entre a classe dos anéis, a classe dos anéis comutativos e a classe dos anéis com identidade



As quatro proposições que apresentamos de seguida apresentam propriedades satisfeitas por qualquer anel, que usaremos constantemente ao longo deste capítulo.

Proposição 3.8. *Seja A um anel. Então, para todo $x \in A$,*

$$0_A x = x 0_A = 0_A.$$

Demonstração: Seja $x \in A$. Então, pela distributividade, temos que

$$0_A x + 0_A x = (0_A + 0_A)\, x.$$

Mas,

$$\begin{aligned} 0_A x + 0_A x = (0_A + 0_A)\, x \quad & \Leftrightarrow 0_A x + 0_A x = 0_A x \\ & \Leftrightarrow 0_A x + 0_A x = 0_A x + 0_A \\ & \Leftrightarrow 0_A x = 0_A. \end{aligned}$$

Logo, $0_A x = 0_A$. Analogamente, de

$$x 0_A + x 0_A = x\,(0_A + 0_A)$$

e

$$x 0_A + x 0_A = x\,(0_A + 0_A) \Leftrightarrow x 0_A = 0_A,$$

obtemos $x 0_A = 0_A$. □

Proposição 3.9. *Se $A \neq \{0_A\}$ é um anel com identidade 1_A, então $1_A \neq 0_A$.*

Demonstração: Se 0_A fosse a identidade do anel, então, para $x \neq 0_A$, teríamos

$$x = 0_A x.$$

Mas, pela proposição anterior,

$$0_A x = 0_A,$$

pelo que $x = 0_A$. □

Proposição 3.10. *Sejam A um anel e $x, y \in A$. Então:*

(i) $(-x)\, y = x\,(-y) = -xy$;

(ii) $(-x)\,(-y) = xy$.

Demonstração: Sejam $x, y \in A$. Então,

(i) $(-x)\,y$ é o simétrico de xy já que

$$(-x)\,y + xy = (-x + x)\,y = 0_A y = 0_A$$

e $x\,(-y)$ é também o simétrico de xy pois

$$x\,(-y) + xy = x\,(-y + y) = x0_A = 0_A;$$

Logo, $-xy = (-x)y = x(-y)$.

(ii) $(-x)\,(-y)$ é o simétrico de $(-xy)$ já que

$$(-x)\,(-y) + (-xy) = (-x)\,(-y) + (-x)\,y = (-x)\,(-y + y) = (-x)\,0_A = 0_A.$$

Como o simétrico de $-xy$ é, de facto, xy, obtemos o resultado pretendido. □

Proposição 3.11. *Sejam A um anel, $n \in \mathbb{N}$ e $a, b_1, b_2, ..., b_n \in A$. Então,*

(i) $a\,(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n;$

(ii) $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)\,a = b_1 a + b_2 a + \cdots + b_n a.$

Demonstração: Por indução. □

A propriedade apresentada na última proposição é conhecida, em Teoria de Anéis, como *propriedade distributiva generalizada*.

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então, $(A, +)$ é grupo, pelo que podemos falar nas potências de expoente inteiro de $a \in A$. Assim, temos

(i) $0a = 0_A$;

(ii) $(n + 1)\,a = na + a$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$;

(iii) $na = -\,(-na)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^-$.

Proposição 3.12. *Sejam A, um anel, $a, b \in A$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então,*

(i) $(m + n)\,a = ma + na;$

(ii) $n\,(ma) = (nm)\,a;$

(iii) $n\,(a + b) = na + nb.$

Demonstração: Os dois primeiros resultados são consequência imediata do facto de $(A,+)$ ser grupo. Provemos (iii):

(a) $n = 0$. Neste caso, temos

$$0_A(a+b) = 0_A = 0_A + 0_A = 0_A a + 0_A b.$$

(b) $n > 0$. Vamos usar o Método de Indução Matemática. Se $n = 1$, o resultado é imediato. Supondo que o resultado é válido para n, provemos para $n+1$. Como $(A,+)$ é grupo comutativo, temos que

$$(n+1)(a+b) = n(a+b)+(a+b) = na+nb+a+b = (na+a)+(nb+b) = (n+1)a+(n+1)b.$$

Concluímos, então, que, para todo $n \geq 1$, $n(a+b) = na + nb$.

(c) $n < 0$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} n(a+b) &= (-(-n))(a+b) = -[(-n)(a+b)] = -[(-n)a + (-n)b] \\ &= -(-n)a + (-(-n)b) = na + nb. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.13. *Sejam A um anel, $a, b \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$. Então,*

$$n\,(ab) = (na)\,b = a\,(nb)\,.$$

Demonstração: Temos de considerar três casos:

(i) $n = 0$. A demonstração é trivial.

(ii) $n > 0$. Vamos usar o Método de Indução Matemática. Para $n = 1$, o resultado é imediato. Supondo que o resultado é válido para n, provemos para $n+1$. Temos que

$$(n+1)\,(ab) = n(ab) + ab = a(nb) + ab = a(nb+b) = a[(n+1)b]$$

e

$$(n+1)\,(ab) = n(ab) + ab = (na)b + ab = (na+a)b = [(n+1)a]b.$$

Concluímos, então, que, para todo $n \geq 1$, $n(ab) = a(nb) = (na)b$.

(iii) $n < 0$. Para $a, b \in A$, temos que

$$n\,(ab) = -\left((-n)\,(ab)\right) = -\left[((-n)\,a)\,b\right] = \left[-\left(-\left(na\right)\right)\right]b = (na)\,b$$

e

$$n(ab) = -((-n)ab) = -[a((-n)b)] = a[-(-n)b] = a(nb).$$

□

Seja $(A, +, \cdot)$ um anel. Então, $(A, \cdot)$ é semigrupo, pelo que podemos falar nas potências de expoente natural de $a \in A$. Assim, temos

(i) $a^1 = a$;

(ii) $a^{n+1} = a^n \cdot a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.14. *Sejam A um anel, $a \in A$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Então,*

(i) $(a^n)^m = a^{nm}$;

(ii) $a^n a^m = a^{n+m}$. □

Observação: tendo em conta que estamos a trabalhar num anel e, portanto, a trabalhar com duas operações simultaneamente, distinguiremos as duas potências a^n e na (com $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}$) falando em *múltiplo de a* para na e em *potência de a* para a^n.

Consoante as especificidades de um anel, podemos destacar alguns dos seus elementos. É o que vamos fazer de seguida.

Definição 3.15. *Seja A um anel com identidade 1_A. Um elemento $a \in A$ diz-se uma* unidade *se admite um inverso em A. Representa-se por $\mathcal{U}_A$ o conjunto das unidades de um anel com identidade.*

Exemplo 3.16. *No anel $(\mathbb{Z}, +, \times)$, temos que $\mathcal{U}_A = \{-1, 1\}$.*

Exemplo 3.17. *No anel $(\mathbb{R}, +, \times)$, temos que $\mathcal{U}_A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Exemplo 3.18. *No anel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$, temos que*

$$\mathcal{U}_A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Definição 3.19. *Seja A um anel. Um elemento $a \in A$ diz-se* simplificável *se, para todos $x, y \in A$*

$$xa = ya \quad ou \quad ax = ay \Rightarrow x = y.$$

Exemplo 3.20. *Nos anéis* $(\mathbb{Z},+,\times)$ *e* $(\mathbb{R},+,\times)$, *qualquer elemento não nulo é simplificável.*

Exemplo 3.21. *No anel* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, *o elemento* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *não é simplificável. De facto,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definição 3.22. *Seja A um anel. Um elemento $a\in A$ diz-se um* divisor de zero *se existe $b\in A\backslash\{0_A\}$ tal que*

$$ab=0_A \quad \text{ou} \quad ba=0_A.$$

Exemplo 3.23. *No anel* $(\mathbb{Z},+,\times)$, *o único divisor de zero existente é o elemento* 0.

Exemplo 3.24. *No anel* $(\mathbb{R},+,\times)$, *o único divisor de zero é o elemento* 0.

Exemplo 3.25. *No anel* $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$, *qualquer matriz* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *tal que $ad-bc=0$ é divisor de zero. De facto,*

(i) se $a=b=c=d=0$, para qualquer matriz M, quadrada de ordem 2, temos que

$$M\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(ii) se $d\neq 0$ ou $c\neq 0$, temos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} d & d \\ -c & -c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ad-bc & ad-bc \\ cd-dc & cd-dc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

(iii) se $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, temos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -b & -b \\ a & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -ab+ba & -ab+ba \\ -cb+da & -cb+da \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação. O elemento zero de um anel A só não é divisor de zero se $A=\{0_A\}$.

3.1.1 domínios de integridade

Definição 3.26. *Um anel comutativo com identidade A diz-se um* domínio *(ou* anel*)* de integridade *se admitir como único divisor de zero o elemento zero do anel.*

Exemplo 3.27. *Os anéis $(\mathbb{Z},+,\times)$ e $(\mathbb{R},+,\times)$ são domínios de integridade.*

Exemplo 3.28. *O anel das matrizes quadradas de ordem 2 não é um domínio de integridade.*

Resulta imediatamente da definição que, se A é um domínio de integridade, então, $A \neq \{0_A\}$. As três proposições seguintes apresentam caracterizações diferentes de um domínio de integridade.

Proposição 3.29. *Seja A um anel comutativo com identidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é domínio de integridade;

(ii) $A\setminus\{0_A\} \neq \emptyset$ e todo o elemento de $A\setminus\{0_A\}$ é simplificável.

Demonstração: Suponhamos que A é um domínio de integridade. Então, $A\setminus\{0_A\} \neq \emptyset$. Sejam $y \in A\setminus\{0_A\}$ e $a, b \in A$ tais que

$$ya = yb.$$

Então,

$$ya - yb = 0_A,$$

pelo que

$$y(a-b) = 0_A.$$

Como A é domínio de integridade e $y \neq 0_A$, temos que

$$a - b = 0_A,$$

i.e.,

$$a = b.$$

Supondo que $ay = by$, faz-se o raciocínio análogo.

Reciprocamente, suponhamos que todo o elemento $y \in A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ é simplificável. Como $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$, temos que 0_A é um divisor de zero. Vejamos que é o único elemento nestas condições. Seja x_0 um divisor de zero de A, i.e., seja $x_0 \in A$ para o qual existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tal que

$$bx_0 = 0_A \qquad \text{ou} \qquad x_0 b = 0_A.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que é a primeira condição que se verifica. Então,

$$bx_0 = 0_A = b0_A.$$

e, como b é simplificável (já que $b \neq 0_A$), temos que

$$x_0 = 0_A.$$

Logo, 0_A é o único dividor de zero, pelo que A é um domínio de integridade. □

Proposição 3.30. *Seja A um anel comutativo com identidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é domínio de integridade;

(ii) $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ e $A \setminus \{0_A\}$ é subsemigrupo de A relativamente ao produto.

Demonstração: Suponhamos que A é domínio de integridade. Então, $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$. Provemos então que $(A \setminus \{0_A\}, \cdot)$ é subsemigrupo de $(A, \cdot)$. De facto:

(a) $A \setminus \{0_A\} \subseteq A$;

(b) se $a, b \in A \setminus \{0_A\}$, $ab \in A \setminus \{0_A\}$. Se $ab = 0_A$, com $a, b \in A \setminus \{0_A\}$, a e b seriam divisores de zero e, portanto, A não seria um domínio de integridade.

Reciprocamente, suponhamos que $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ e que $(A \setminus \{0_A\}, \cdot)$ é subsemigrupo de $(A, \cdot)$, ou seja, que

$$a \neq 0_A, b \neq 0_A \Rightarrow ab \neq 0_A. \tag{*}$$

De $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ concluímos que 0_A é divisor de zero. Provemos que é único. Seja x_0 um divisor de zero. Então, existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ tal que

$$x_0 y = 0_A \qquad \text{ou} \qquad yx_0 = 0_A.$$

Comparando com (*), concluímos que $x_0 = 0_A$. □

Proposição 3.31. *Seja A um anel comutativo com identidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A é domínio de integridade;

(ii) $A\backslash\{0_A\} \neq \emptyset$ e, se as equações $ax = b$ e $xa = b$ $(a \neq 0_A)$ tiverem solução, então, a solução é única.

Demonstração: Seja A um domínio de integridade. Então, $A\backslash\{0_A\} \neq \emptyset$. Suponhamos que, para $a, b \in A$ com $a \neq 0_A$,

$$(\exists x_0, y_0 \in A) \qquad ax_0 = b \quad \text{e} \quad y_0 a = b.$$

Sejam x_1 e y_1 outras soluções das equações $ax = b$ e $xa = b$, respetivamente. Então,

$$ax_0 = b = ax_1 \qquad \text{e} \qquad y_0 a = b = y_1 a$$

e, pelo facto de todos os elementos não nulos serem simplificáveis, temos que

$$x_0 = x_1 \qquad \text{e} \qquad y_0 = y_1.$$

Logo, as soluções, quando existem, são únicas.

Reciprocamente, suponhamos que $A\backslash\{0_A\} \neq \emptyset$ e que, para $a \in A\backslash\{0_A\}$ e $b \in A$, se as equações $ax = b$ e $xa = b$ tiverem solução, então, a solução é única.

Como $x = 0_A$ é solução de $ax = 0_A$ e $xa = 0_A$, concluímos então que $x = 0_A$ é a única solução possível. Logo, 0_A é o único divisor de zero de A, pelo que A é um domínio de integridade. □

3.1.2 anéis de divisão e corpos

Definição 3.32. *Um anel A diz-se um* anel de divisão *se $(A\backslash\{0_A\}, \cdot)$ é um grupo. Um anel de divisão comutativo diz-se um* corpo*.*

Resulta da definição que qualquer corpo é um domínio de integridade, mas o recíproco não é verdadeiro, como demonstra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.33. *O domínio de integridade $(\mathbb{Z}, +, \times)$ não é um anel de divisão, pois $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \times)$ não é grupo.*

Exemplo 3.34. *O domínio de integridade $(\mathbb{R}, +, \times)$ é um corpo e, portanto, um anel de divisão.*

Exemplo 3.35. *Seja* $\mathcal{Q} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$*, onde* $i^2 = j^2 = k^2 = -1$*,* $ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i$*. Considere em* $\mathcal{Q}$ *as operações de adição e de multiplicação definidas por*

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = a + a' + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

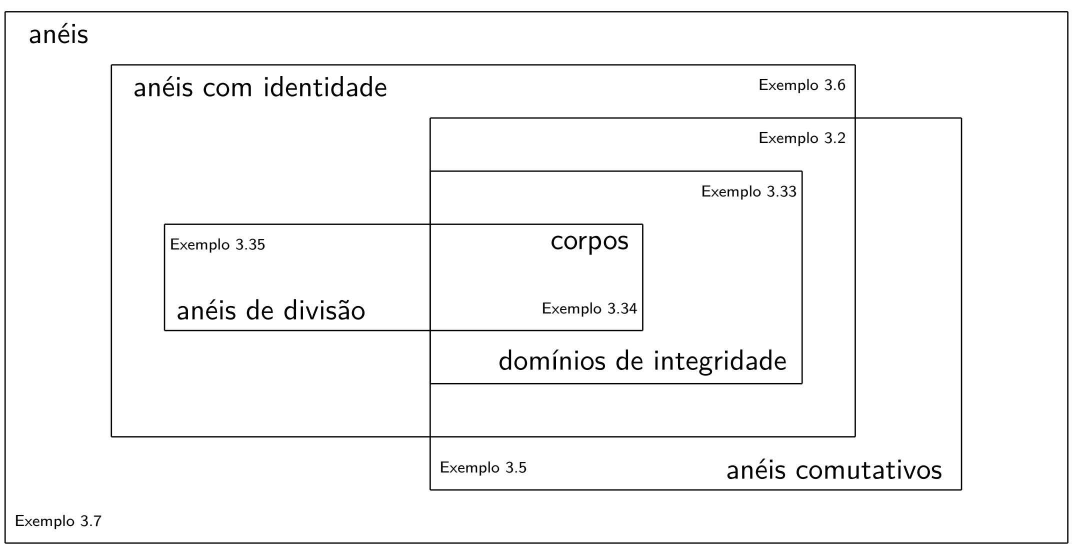
e

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk) \times (a' + b'i + c'j + d'k) = \\ aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + a'b + cd' - c'd)i + \\ (ac' - bd' + a'c + b'd)j + (ad' + bc' - b'c + a'd)k,\end{aligned}$$

em que as somas dos elementos $a, a', b, b', c, c', d, d'$ *são efectuadas em* $\mathbb{R}$*.*

Então, $(\mathcal{Q}, +, \times)$ *é um anel de divisão não comutativo. Este anel designa-se por* Anel dos Quarteniões.

De seguida, completamos o diagrama já apresentado, incluindo os conceitos de domínio de integridade, anel de divisão e corpo.



3.2 característica de um anel

Sejam A um anel e $a \in A$. Considerando os múltiplos de a, i.e., os elementos da forma na com $n \in \mathbb{Z}$, temos duas situações a considerar:

(i) $(\exists m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})\ (\forall a \in A) \quad ma = 0_A$;

(ii) $(\forall m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})\,(\exists b \in A) \quad mb \neq 0_A$ (i.e., $nb = 0_A\ (\forall b \in A) \Rightarrow n = 0$).

Exemplo 3.36. *São exemplos da situação (ii) o anel dos reais e o anel dos inteiros.*

Exemplo 3.37. *É exemplo da situação (i) o anel* $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$, *onde*

$$\begin{array}{c|cccc} + & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c|cccc} \cdot & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \hline \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{array}.$$

De facto, para $m = 4$, *temos que*

$$\begin{aligned} 4 \cdot \bar{0} &= \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \\ 4 \cdot \bar{1} &= \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}, \\ 4 \cdot \bar{2} &= \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} + \bar{2} = \bar{0}, \\ 4 \cdot \bar{3} &= \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.38. *Seja* A *um anel tal que* $a^2 = a$, *para todo* $a \in A$. *(tal anel existe; basta pensar em* $A = \{0_A\}$*). Então,* A *é um exemplo de anel que satisfaz a condição (i). De facto, para todo* $a \in A$,

$$2a = a + a = (a + a)^2 = (a + a)\,(a + a) = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = 4a^2 = 4a,$$

pelo que

$$4a - 2a = 0_A,$$

i.e.,

$$2a = 0_A.$$

Assim, para todo $a \in A$, *existe* $m = 2 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ *tal que* $ma = 0_A$.

Vamos distinguir estas duas situações através da definição de *característica de um anel*, que de seguida apresentamos.

Definição 3.39. *Seja* A *um anel.*

1. *Se*
$$nb = 0_A, \ \forall b \in A \Rightarrow n = 0,$$
A *diz-se um anel de* característica 0 *e escreve-se* $c(A) = 0$*;*

2. *Se*
$$(\exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \, (\forall a \in A) \quad ma = 0_A,$$
A *diz-se um anel de* característica q *onde* $q = \min\{n \in \mathbb{N} : na = 0_A \ \forall a \in A\}$. *Escreve-se* $c(A) = q$.

Observação. A segunda parte da definição faz todo o sentido, pois se A é um anel tal que
$$(\exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}) \, (\forall a \in A) \quad ma = 0_A$$
temos que, sendo
$$M = \{m \in \mathbb{Z} : ma = 0_A, \quad \forall a \in A\},$$
$(M, +)$ é um subgrupo do grupo cíclico $(\mathbb{Z}, +)$ e, portanto, é ele próprio um grupo cíclico e o seu gerador é o menor inteiro positivo de M.

Seja A um anel. Fazendo a ligação com o conceito de ordem de um elemento num grupo (neste caso, o grupo $(A, +)$), levanta-se imediatamente a seguinte questão:

Se A é um anel de característica q e $x \in A$ é tal que a ordem de x no grupo $(A, +)$ é $o(x) = p$, qual a relação de p com q?

A resposta é obviamente $p \mid q$. De facto, se q é a característica de A, temos que $qa = 0_A$, para todo $a \in A$. Em particular, para $a = x$ temos que $qx = 0_A$. Logo, como $p = o(x)$, vem, como consequência da definição de ordem de um elemento, que $p \mid q$.

Assim, podemos concluir que a característica de um anel A é o m.m.c. entre as ordens de todos os elementos de A.

Se o anel tiver identidade, então a característica desse anel é determinada em função da ordem da identidade, como nos mostra o próximo resultado:

Proposição 3.40. *Sejam $A \neq \{0_A\}$ um anel com identidade 1_A e $n \in \mathbb{N}$. Então, a característica de A é n se e só se a ordem de 1_A é n.*

Demonstração: $[\Rightarrow]$. Por hipótese, temos que $c(A) = n$, i.e., temos que:

(i) $\forall a \in A \quad na = 0_A$;

(ii) $(\exists p \in \mathbb{N} \forall a \in A \quad pa = 0_A) \Rightarrow n \mid p$.

Queremos provar que $p(1_A) = n$, i.e., queremos provar que:

(a) $n1_A = 0_A$;

(b) $(\exists p \in \mathbb{N} : p1_A = 0_A) \Rightarrow n \mid p$.

A condição (a) resulta naturalmente da condição (i) pois, se $na = 0_A$ para todo $a \in A$, então, como $1_A \in A$, temos que $n1_A = 0_A$. Para provarmos a condição (b) supomos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p1_A = 0_A$. Para aplicarmos (ii), temos que provar que $pa = 0_A$ para todo $a \in A$. De facto,

$$pa = p(1_A a) = (p1_A)a = 0_A a = 0_A.$$

Assim, por (ii), temos que $n \mid p$. Logo, verifica-se a condição (b).

$[\Leftarrow]$. Suponhamos agora que $p(1_A) = n$, i.e., que (a) e (b) são satisfeitos. Queremos provar que o anel satisfaz (i) e (ii):

(i) Para todo $a \in A$, temos que

$$na = n(1_A a) = (n1_A)a = 0_A a = 0_A.$$

(ii) Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $a \in A$, $pa = 0_A$. Em particular, como $1_A \in A$, temos que $p1_A = 0_A$. Então, por (b), concluímos que $n \mid p$, o que termina a nossa demonstração.

□

Exemplo 3.41. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Como, em $\mathbb{Z}_n$, $p(\bar{1}) = n$, concluímos que $c(\mathbb{Z}_n) = n$.*

Exemplo 3.42. *O anel dos números inteiros e o anel dos números reais são anéis de característica 0.*

3.3 subanéis

Definição 3.43. *Uma parte A' de um anel (respetivamente, domínio de integridade, anel de divisão, corpo) A diz-se um* subanel (respetivamente, subdomínio de integridade, subanel de divisão, subcorpo) de A *se for um anel (respetivamente, domínio de integridade, anel de divisão, corpo) relativamente às restrições das operações de adição e produto do anel.*

Exemplo 3.44. *Quando consideradas as operações usuais de adição e multiplicação, o anel $\mathbb{Z}$ é subanel e subdomínio de integridade de $\mathbb{R}$, mas não é seu subanel de divisão, nem subcorpo.*

Exemplo 3.45. *Quando consideradas as operações usuais de adição e multiplicação, o anel $n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$ é subanel mas não é subdomínio de integridade de $\mathbb{Z}$.*

Exemplo 3.46. *Dado um anel A, $\{0_A\}$ e A são subanéis de A. No entanto, dado um anel de divisão ou corpo A, $\{0_A\}$ não é subanel de divisão nem subcorpo de A.*

De modo análogo àquele efectuado para os subgrupos, podemos estabelecer critérios de subanel, subdomínio de integridade, subanel de divisão e subcorpo. Por serem semelhantes, as demonstrações são deixadas como exercício.

Proposição 3.47. *Sejam A um anel e $A' \subseteq A$. Então, A' é subanel de A se e só se:*

(i) $A' \neq \emptyset$;

(ii) $x, y \in A' \Rightarrow x - y \in A'$;

(iii) $x, y \in A' \Rightarrow xy \in A'$ □

Proposição 3.48. *Sejam A um domínio de integridade e $A' \subseteq A$. Então, A' é subdomínio de integridade de A se e só se:*

(i) $1_A \in A'$;

(ii) $x, y \in A' \Rightarrow x - y \in A'$;

(iii) $x, y \in A' \Rightarrow xy \in A'$ □

Proposição 3.49. *Sejam A um anel de divisão (respetivamente, corpo) e $A' \subseteq A$. Então, A' é subanel de divisão (respetivamente, subcorpo) de A se e só se:*

(i) $A' \neq \emptyset$;

(ii) $x, y \in A' \Rightarrow x - y \in A'$;

(iii) $x, y \in A'\backslash\{0_A\} \Rightarrow xy^{-1} \in A'\backslash\{0_A\}$. □

Acabamos esta secção com a seguinte observação: Sejam A um anel e A_1 e A_2 subanéis de A. Como $(A_1,+)$ e $(A_2,+)$ são subgrupos do grupo comutativo $(A,+)$, sabemos que o subconjunto de A

$$A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\}$$

é subgrupo de $(A,+)$. No entanto, dados $a_1+a_2, b_1+b_2 \in A_1+A_2$,

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2) = a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2$$

não é necessariamente um elemento de A_1+A_2, pelo que A_1+A_2 não é necessariamente um subanel de A.

3.4 ideais e relações de congruência num anel

Definição 3.50. *Seja A um anel. Uma parte I de A diz-se um* ideal direito *(respetivamente,* ideal esquerdo*) de A se:*

(i) $(I,+) < (A,+)$;

(ii) $(\forall a \in A)\,(\forall x \in I) \quad xa \in I$ *(respetivamente, $ax \in I$)*

Se I for simultaneamente ideal esquerdo e ideal direito, então, I diz-se um ideal de A.

Exemplo 3.51. *Consideremos o anel $(\mathbb{Z},+,\times)$. O conjunto $2\mathbb{Z}$ é um seu ideal pois $(2\mathbb{Z},+) < (\mathbb{Z},+)$ e o produto de um inteiro qualquer por um inteiro par é um inteiro par.*

Exemplo 3.52. *Relativamente ao anel $(\mathbb{Z}_4,+,\cdot)$, o conjunto $\{\bar{0},\bar{2}\}$ é um ideal pois*

$$(\{\bar{0},\bar{2}\},+) < (\mathbb{Z}_4,+)$$

e

$$\begin{aligned}&\bar{0}\cdot\bar{0} = \bar{0}\cdot\bar{1} = \bar{0}\cdot\bar{2} = \bar{0}\cdot\bar{3} = \bar{0} \in \{\bar{0},\bar{2}\}\\ &\bar{2}\cdot\bar{0} = \bar{2}\cdot\bar{2} = \bar{0} \in \{\bar{0},\bar{2}\} \quad e \quad \bar{2}\cdot\bar{1} = \bar{2}\cdot\bar{3} = \bar{2} \in \{\bar{0},\bar{2}\}.\end{aligned}$$

Como o anel em questão é comutativo, concluímos que $\{\bar{0},\bar{2}\}$ é um ideal de $\mathbb{Z}_4$.

Exemplo 3.53. *Seja A um anel. Então, $\{0_A\}$ é um ideal de A (ao qual se chama* ideal trivial de *A).*

Exemplo 3.54. *Um anel A é um ideal de si próprio (ao qual se chama* ideal impróprio de *A).*

Resulta imediatamente do critério de subanel (ver Proposição 3.47) e da definição de subanel que:

Proposição 3.55. *Todo o ideal de um anel A é um subanel de A.* □

Apresentamos de seguida algumas proposições envolvendo ideais.

Proposição 3.56. *A intersecção de uma família de ideais de um anel A é um ideal de A.*

Demonstração: Exercício. □

Proposição 3.57. *Num anel com identidade todo o ideal que contém essa identidade é impróprio.*

Demonstração: Sejam A um anel com identidade 1_A e I um ideal de A tal que $1_A \in I$. Então,

$$\forall a \in A, \qquad a = a \cdot 1_A \in I.$$

Logo, $A \subseteq I$. Como, por definição, $I \subseteq A$, temos o resultado pretendido, i.e., $I = A$. □

Proposição 3.58. *Num anel de divisão existem apenas dois ideais: o trivial e o impróprio.*

Demonstração: Vimos já nos Exemplos 3.53 e 3.54 que $\{0_A\}$ e A são ideais de qualquer anel A. Vejamos que, se A é um anel de divisão, estes ideais são de facto os únicos ideais de A. Seja $I \neq \{0_A\}$ um ideal de A. Então, existe $x \in A \backslash \{0_A\}$ tal que $x \in I$. Mas, como $(A \backslash \{0_A\}, \cdot)$ é um grupo, temos que $x^{-1} \in A \backslash \{0_A\} \subseteq A$. Assim, como I é um ideal de A, temos que

$$1_A = xx^{-1} \in I.$$

Logo, I é um ideal que contém a identidade do anel, pelo que, pela proposição anterior, é o ideal impróprio. □

Novamente à semelhança do caso dos grupos, podemos ter ideais de um anel A que sejam gerados por um elemento de a.

Definição 3.59. *Sejam A um anel e $a \in A$. Chama-se* ideal principal direito *(respetivamente,* ideal principal esquerdo, ideal principal*) gerado por a, e representa-se por $(a)_d$ (respetivamente $(a)_e$, (a)) ao menor ideal direito (respetivamente, ideal esquerdo, ideal) que contém a.*

Exemplo 3.60. *Consideremos o anel $\mathbb{Z}_4$ com as operações usuais de adição e multiplicação de classes. Como a multiplicação é comutativa, todos os ideais esquerdos são direitos e vice-versa, pelo que podemos falar simplesmente em ideais. Os ideais de $\mathbb{Z}_4$ são $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ e $\mathbb{Z}_4$. Assim, temos que*

$$(\bar{0}) = \{\bar{0}\},$$
$$(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{2}\},$$
$$(\bar{1}) = (\bar{3}) = \mathbb{Z}_4$$

Os resultados que de seguida apresentamos, caracterizam os ideais principais esquerdos, ideais principais direitos e ideais principais de um anel, de um anel com identidade e de um anel comutativo com identidade.

Proposição 3.61. *Sejam A um anel e $a \in A$. Então,*

(i) $(a)_d$ é a intersecção de todos os ideais direitos de A que contêm a.

(ii) $(a)_e$ é a intersecção de todos os ideais esquerdos de A que contêm a.

(iii) (a) é a intersecção de todos os ideais de A que contêm a.

Demonstração: Imediata, tendo em conta a Proposição 3.56. □

Proposição 3.62. *Sejam A um anel com identidade e $a \in A$. Então, $(a)_d = aA$ e $(a)_e = Aa$.*

Demonstração: Seja A um anel com identidade 1_A e $a \in A$. Pretendemos provar que

$$aA = \{ax \mid x \in A\}$$

é o menor ideal direito que contém a.

De facto, $(aA, +)$ é um subgrupo de $(A, +)$, pois

(i) $aA \neq \emptyset$, já que $a = a \cdot 1_A \in aA$;

(ii) $ax, ay \in aA \Rightarrow ax - ay = a(x - y) \in A$;

Mais ainda,

$$x \in A, ay \in aA \Rightarrow (ay)x = a(xy) \in aA,$$

pelo que aA é um ideal de A.

Por outro lado, ao provar que $aA \neq \emptyset$, provamos que aA contém a.

Finalmente, seja J um ideal direito de A tal que $a \in J$. Então,

$$\begin{aligned} x \in aA &\Rightarrow x = ay \quad \text{com } y \in A \\ &\Rightarrow x = ay \quad \text{com } a \in J \text{ e } y \in A \\ &\Rightarrow x = ay \in J. \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se que $(a)_e = Aa$. □

Corolário 3.63. *Sejam A um anel comutativo com identidade e $a \in A$. Então, $(a) = Aa = aA$.* □

Estudadas que estão algumas propriedades de ideais de um anel, vamos ver qual a sua relação com as relações de congruência nesse mesmo anel. Começamos por apresentar a definição de relação de congruência num anel.

Definição 3.64. *Seja A um anel. Uma relação de equivalência ρ definida em A diz-se uma* relação de congruência *se, para todos $x, x', y, y' \in A$,*

$$x \,\rho\, x' \quad \text{e} \quad y \,\rho\, y' \Rightarrow (x+y)\ \rho\ \left(x'+y'\right) \quad \text{e} \quad (xy)\ \rho\ \left(x'y'\right).$$

Exemplo 3.65. *Considere-se em $\mathbb{Z}$ a relação*

$$a \,\rho\, b \Longleftrightarrow a - b \in 2\mathbb{Z}.$$

Então, a relação ρ é de equivalência e é tal que

$$\begin{aligned} a \,\rho\, b \quad \text{e} \quad a' \,\rho\, b' &\Longleftrightarrow a - b, a' - b' \in 2\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a + a' - \left(b + b'\right) \in 2\mathbb{Z} \quad \text{e} \\ &\ aa' - bb' = aa' - ba' + ba' - bb' = (a-b)\,a' + b\left(a' - b'\right) \in 2\mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \left(a + a'\right)\ \rho\ \left(b + b'\right) \quad \text{e} \quad aa' \,\rho\, bb', \end{aligned}$$

pelo que ρ é uma relação de equivalência.

A proposição seguinte generaliza o exemplo anterior.

Proposição 3.66. *Sejam A um anel e I um ideal de A. Então, a relação definida em A por*

$$a \,\rho\, b \Longleftrightarrow a - b \in I$$

é uma relação de congruência.

Demonstração: Comecemos por provar que ρ é uma relação de equivalência em A: Como $(I,+)$ é subgrupo comutativo de $(A,+)$, temos que:

(i) para todo $a \in A$, $a - a = 0_A \in I$ e, portanto, $a\,\rho\,a$. Assim, ρ é reflexiva;

(ii) se $a, b \in A$ são tais que $a\,\rho\,b$, temos que $a - b \in I$ e, portanto, $b - a = -(a-b) \in I$. Logo, $b\,\rho\,a$, o que nos permite concluir que ρ é simétrica;

(iii) se $a, b, c \in A$ são tais que $a\,\rho\,b$ e $b\,\rho\,c$, temos que $a - b \in I$ e $b - c \in I$ e, portanto,

$$a - c = (a-b) + (b-c) \in I.$$

Assim, $a\,\rho\,c$, o que nos permite concluir que ρ é transitiva.

Assim, ρ é uma relação de equivalência. Para concluir que ρ é uma relação de congruência basta verificar que

$$a\,\rho\,b,\ a'\,\rho\,b' \Rightarrow (a+a')\,\rho\,(b+b') \text{ e } aa'\,\rho\,bb'.$$

De facto, como I é ideal de A,

$$\begin{aligned}
a\,\rho\,b,\ a'\,\rho\,b' \ &\Rightarrow a-b, a'-b' \in I \\
&\Rightarrow (a+a')-(b+b') \in I, \\
&\qquad aa' - bb' = aa' - ba' + ba' - bb' = (a-b)a' + b(a'-b') \in I \\
&\Longleftrightarrow (a+a')\,\rho\,(b+b'),\ aa'\,\rho\,bb'.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.67. *Seja ρ uma relação de congruência definida num anel A. Então:*

(i) a classe $[0_A]_\rho$ é um ideal de A;

(ii) $a\,\rho\,b \Longleftrightarrow a - b \in [0_A]_\rho$;

(iii) $(\forall a \in A) \quad [a]_\rho = a + [0_A]_\rho (= \{a + x \in A \mid x\,\rho\,0_A\})$.

Demonstração: (i) Sendo uma classe de equivalência, temos que $\neq \emptyset$. Sejam $a, b \in [0_A]_\rho$. Então, $a\,\rho\,0_A$ e $b\,\rho\,0_A$ e, portanto, $a - b\,\rho\,0_A$, pelo que $a - b \in [0_A]_\rho$. Então, $([0_A]_\rho, +) < (A,+)$. Sejam $a \in [0_A]_\rho$ e $x \in A$. Então $a\,\rho\,0_A$ e $x\,\rho\,x$ e, portanto, $ax\,\rho\,0_Ax$ e $xa\,\rho\,x0_A$, i.e., $ax\,\rho\,0_A$ e $xa\,\rho\,0_A$. Assim, $ax, xa \in [0_A]_\rho$. Estamos em condições de concluir que $[0_A]_\rho$ é um ideal de A.

(ii) Sejam $a, b \in A$. Então,

$$a\,\rho\,b \Leftrightarrow a - b\,\rho\,b - b \Leftrightarrow a - b\,\rho\,0_A \Leftrightarrow a - b \in [0_A]_\rho.$$

(iii) Seja $a \in A$. Então,

$$b \in [a]_\rho \Leftrightarrow b \, \rho \, a \Leftrightarrow b - a \in [0_A]_\rho \Leftrightarrow b = a + [0_A] \, .$$

$\square$

3.4.1 anel quociente

Se ρ é uma relação de congruência num anel A (e, portanto, de equivalência), podemos então falar no conjunto quociente

$$A/\rho = \left\{ [a]_\rho \mid a \in A \right\} .$$

Neste conjunto, definem-se duas operações binárias:

(i) uma adição de classes: para $a, b \in A$,

$$[a]_\rho + [b]_\rho = [a+b]_\rho \, ;$$

(ii) uma multiplicação de classes: para $a, b \in A$,

$$[a]_\rho \cdot [b]_\rho = [a \cdot b]_\rho \, .$$

Sendo ρ uma relação de congruência, prova-se que as operações estão bem definidas, i.e., não dependem da escolha do representante da classe:

Se $[a]_\rho = [a']_\rho$ e $[b]_\rho = [b']_\rho$, temos que

$$a \, \rho \, a' \text{ e } b \, \rho \, b',$$

pelo que

$$(a+b) \, \rho \, (a'+b') \quad \text{e} \quad (ab) \, \rho \, (a'b')$$

e, portanto,

$$[a+b]_\rho = [a'+b']_\rho \quad \text{e} \quad [ab]_\rho = [a'b']_\rho \, .$$

Teorema 3.68. *Sejam A um anel e ρ uma relação de congruência definida em A. Então, considerando a adição e a multiplicação acima definidas, $(A/\rho, +, \cdot)$ é um anel.*

Demonstração: Exercício. □

Observação. Pelas Proposições 3.66 e 3.67, sabemos que existe uma relação biunívoca entre o conjunto das relações de congruência em A e o conjunto dos ideais de A. Assim, se I é ideal de A, podemos falar no anel quociente

$$A/I = \{x + I : x \in A\}$$

e escreve-se

$$y \in x + I \Longleftrightarrow y - x \in I.$$

Mais ainda, as operações são definidas por, para todos $x, y \in A$,

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

e

$$(x + I)(y + I) = xy + I.$$

Resulta de imediato que a comutatividade e a existência da identidade se mantêm quando passamos ao anel quociente. De facto, tem-se que:

Proposição 3.69. *Sejam A um anel e I um ideal de A.*

(i) Se A é uma anel comutativo, então A/I é um anel comutativo;

(ii) Se A é um anel com identidade 1_A, então A/I é um anel com identidade $1_A + I$. □

3.4.2 ideais primos e ideais maximais

Definição 3.70. *Seja A um anel comutativo com identidade. Um ideal I de A diz-se* maximal *se não existir um ideal K de A tal que*

$$I \subsetneqq K \subsetneqq A.$$

Exemplo 3.71. *O ideal $2\mathbb{Z}$ do anel $\mathbb{Z}$ é maximal. O ideal $4\mathbb{Z}$ não é maximal pois*

$$4\mathbb{Z} \subsetneqq 2\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Z}.$$

Definição 3.72. *Seja A um anel comutativo com identidade. Um ideal I de A diz-se* primo *se $A \backslash I \neq \emptyset$ e $A \backslash I$ é fechado para o produto.*

Exemplo 3.73. *O ideal $2\mathbb{Z}$ do anel $\mathbb{Z}$ é primo. De facto, $\mathbb{Z}\backslash 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}+1$ é fechado para o produto, já que*

$$(2n+1)(2m+1) = 2(n+m+2nm)+1,$$

para todos $n, m \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.74. *Sejam A um anel comutativo com identidade e I um ideal de A. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) I é maximal;

(ii) A/I é corpo.

Demonstração: $[(i) \Rightarrow (ii)]$. Como A é um anel comutativo com identidade, temos que A/I é um anel comutativo com identidade. Para provar que A/I é corpo, falta apenas provar que todo o elemento não nulo $x+I \in A/I$ admite um inverso.

Seja $a+I \in A/I$ tal que $a+I \neq I$. Então,

$$K = \{i + xa \in A \mid i \in I \text{ e } x \in A\}$$

é um ideal de A. De facto,

(a) $0_A = 0_A + 0_A a$, pelo que $0_A \in K$ e, portanto, $K \neq \emptyset$;

(b) para $i+xa, j+ya \in K$, temos que $i+xa-(j+ya) = (i-j)+(x-y)a \in K$;

(c) Para $i+xa \in K$ e $y \in A$, temos que $y(i+xa) = yi + (yx)a$. Como $yi \in I$ (porque I é ideal) e $yx \in A$, concluímos que $y(i+xa) \in K$.

Como o anel é comutativo, concluímos que K é um ideal de A.

Mais ainda, o ideal assim definido K é tal que

$$I \subsetneqq K.$$

De facto,

$$i \in I \Rightarrow i = i + 0_A a \in K$$

e $a \notin I$ é tal que

$$a = 0_A + 1_A a \in K.$$

Logo, porque I é um ideal maximal por hipótese, temos que $K = A$. Então, $1_A \in K$, pelo que existem $i_1 \in I$ e $x_1 \in A$ tais que

$$1_A = i_1 + x_1 a,$$

ou seja

$$1_A - x_1 a = i_1 \in I.$$

Logo,

$$(1_A - x_1 a) + I = I.$$

Mas,

$$(1_A - x_1 a) + I = I \Longleftrightarrow x_1 a + I = 1_A + I \Longleftrightarrow (x_1 + I)(a + I) = 1_A + I,$$

pelo que

$$(a + I)^{-1} = x_1 + I.$$

$[(ii) \Rightarrow (i)]$. Seja I um ideal de A tal que A/I é um corpo.

Suponhamos que existe um ideal K de A, tal que $I \subsetneqq K \subseteq A$. De $I \subsetneqq K$, concluímos que

$$(\exists x \in K) \qquad x \notin I.$$

Logo, $x + I \neq I$. Mas,

$$\begin{aligned} x + I \neq I \quad &\Rightarrow \quad \big(\exists x' + I \in (A/I) \setminus \{I\}\big) \quad (x + I)\big(x' + I\big) = 1_A + I \\ &\Rightarrow \quad \big(\exists x' \in A \backslash I\big) \quad xx' + I = 1_A + I \\ &\Rightarrow \quad \big(\exists x' \in A \backslash I\big) \quad xx' - 1_A = i \in I \\ &\Rightarrow \quad \big(\exists x' \in A\big) \quad 1_A = xx' - i, \quad \text{com } i, x \in K, \\ &\Rightarrow \quad 1_A \in K. \end{aligned}$$

Assim, $K = A$ e, portanto, I é maximal. □

Exemplo 3.75. *Se considerarmos o anel $\mathbb{Z}$, um ideal é maximal se e só se é do tipo $p\mathbb{Z}$, com p primo, pois $\mathbb{Z}_p$ só é corpo se p for primo.*

Teorema 3.76. *Sejam A um anel comutativo com identidade e I um ideal de A. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) I é ideal primo;

(ii) A/I é um domínio de integridade.

Demonstração: $[(i) \Rightarrow (ii)]$. Como A é um anel comutativo com identidade, A/I também. Mais ainda, como I é primo, $A \backslash I \neq \emptyset$, pelo que $A/I \neq \{I\}$. Para provar que A/I é um domínio de integridade, falta então provar que

$$(x + I)(y + I) = I \Rightarrow x + I = I \text{ ou } y + I = I.$$

De facto,

$$\begin{aligned} (x+I)(y+I)=I &\iff xy+I=I \\ &\iff xy\in I \\ &\Rightarrow x\in I \text{ ou } y\in I \qquad (I \text{ primo}) \\ &\iff x+I=I \text{ ou } y+I=I. \end{aligned}$$

$[(ii)\Rightarrow(i)]$. Seja A um anel e I um ideal de A tal que A/I é um domínio de integridade. Então, $A/I\neq\{I\}$ e, portanto, $A\neq I$ pelo que $A\backslash I\neq\emptyset$.

Sejam $a,b\in A\backslash I$. Pretendemos provar que $ab\in A\backslash I$.

Suponhamos que $ab\in I$. Então, $ab+I=I$. Logo,

$$(a+I)(b+I)=I\Rightarrow a+I=I \text{ ou } b+I=I,$$

o que contradiz a hipótese de $a,b\in A\backslash I$. □

Como consequência dos dois últimos teoremas, temos que

Corolário 3.77. *Qualquer anel maximal de um anel comutativo com identidade é ideal primo.*

Demonstração: A demonstração é trivial, tendo em conta que todo o corpo é um domínio de integridade. Assim,

$$I \text{ ideal maximal} \iff A/I \text{ corpo} \Rightarrow A/I \text{ domínio de integridade} \iff I \text{ ideal primo.}$$

□

3.5 morfismos

Definição 3.78. *Sejam A e A' dois anéis. Uma aplicação $\varphi: A\to A'$ diz-se um* morfismo *(ou* homomorfismo*) se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $(\forall a,b\in A)\qquad \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$;

(ii) $(\forall a,b\in A)\qquad \varphi(a\cdot b)=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.

Um morfismo diz-se um monomorfismo *(respetivamente,* epimorfismo, isomorfismo*) se for injetivo (respetivamente, sobrejetivo, bijetivo)*

Um morfismo diz-se um endomorfismo *se $A=A'$. Um endomorfismo bijetivo diz-se um* automorfismo.

Exemplo 3.79. *Sejam A e A' anéis. Então, a aplicação $\varphi_0 : A \to A'$ definida por $\varphi_0(x) = 0_{A'}$, para todo $x \in A$, é um morfismo, ao qual chamamos* morfismo nulo.

Exemplo 3.80. *Seja A um anel. Então, a aplicação identidade em A é um automorfismo, ao qual chamamos* morfismo identidade.

Proposição 3.81. *Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um morfismo. Então:*

(i) $\varphi(0_A) = 0_{A'}$;

(ii) $(\forall a \in A) \quad \varphi(-a) = -\varphi(a)$;

(iii) $(\forall a \in A)(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad \varphi(ka) = k\varphi(a)$.

Demonstração: (i) De

$$0_{A'} + \varphi(0_A) = \varphi(0_A) = \varphi(0_A + 0_A) = \varphi(0_A) + \varphi(0_A)$$

concluímos, pela lei do corte, que

$$\varphi(0_A) = 0_{A'};$$

(ii) Seja $a \in A$. Como

$$\varphi(-a) + \varphi(a) = \varphi(-a + a) = \varphi(0_A) = 0_{A'},$$

temos que

$$-\varphi(a) = \varphi(-a);$$

(iii) Sejam $a \in A$ e $k = 0$. Então,

$$\varphi(0a) = \varphi(0_A) = 0_{A'} = 0\varphi(a).$$

Sejam $a \in A$ e $k \in \mathbb{Z}^+$. Então, como

$$\varphi(1a) = \varphi(a) = 1\varphi(a)$$

e, sempre que $\varphi(na) = n\varphi(a)$, temos que

$$\varphi((n+1)a) = \varphi(na + a) = \varphi(na) + \varphi(a) = n\varphi(a) + \varphi(a) = (n+1)\varphi(a),$$

concluímos, por indução, que

$$\varphi(ka) = k\varphi(a).$$

Sejam $a \in A$ e $k \in \mathbb{Z}^-$. Então,

$$\varphi(ka) = \varphi(-(-k)a) = -\varphi((-k)a) = -(-k)\varphi(a) = k\varphi(a).$$

$\square$

De modo análogo ao efectuado já no caso dos grupos, as seguintes proposições caracterizam as imagens e as imagens inversas de subanéis e de ideais de anéis por morfismos.

Proposição 3.82. *Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e B um subanel de A. Então, $\varphi(B)$ é um subanel de A'.*

Demonstração: Seja B um subanel de A. Então,

(i) $\varphi(B) \neq \emptyset$, pois $0_{A'} = \varphi(0_A)$ e $0_A \in B$;

(ii) dados $x, y \in \varphi(B)$, existem $a, b \in B$ tais que $x = \varphi(a)$ e $y = \varphi(b)$, pelo que

$$x - y = \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) \quad \text{com } a - b \in B$$

e

$$xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \quad \text{com } ab \in B.$$

Assim, $x - y, xy \in \varphi(B)$, pelo que $\varphi(B)$ é um subanel de A'. $\square$

Proposição 3.83. *Sejam $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo de anéis e I um ideal de A. Então, $\varphi(I)$ é um ideal de A'.*

Demonstração: Pela proposição anterior, temos que $(\varphi(I), +) < (A', +)$. Por outro lado, sejam $a' \in A'$ e $x' \in \varphi(I)$. Então, existem $a \in A$ e $i \in I$ tais que $\varphi(a) = a'$ e $\varphi(i) = x'$, pelo que

$$a'x' = \varphi(a)\varphi(i) = \varphi(ai) \in \varphi(I)$$

e

$$x'a' = \varphi(i)\varphi(a) = \varphi(ia) \in \varphi(I).$$

Logo, $a'x', x'a' \in \varphi(I)$, pelo que $\varphi(I)$ é um ideal de A'. $\square$

Proposição 3.84. *Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e B' um subanel de A'. Então,*

$$\varphi^{-1}(B') = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B'\}$$

é um subanel de A.

Demonstração: Seja B' um subanel de A'. Então,

(i) $\varphi^{-1}(B') \neq \emptyset$ pois $\varphi(0_A) = 0_{A'} \in B'$, pelo que $0_A \in \varphi^{-1}(B')$;

(ii) dados $x, y \in \varphi^{-1}(B')$, temos que $\varphi(x), \varphi(y) \in B'$ e, portanto,

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \in B',$$

pelo que $x - y \in \varphi^{-1}(B')$;

(iii) dados $x, y \in \varphi^{-1}(B')$, temos que $\varphi(x), \varphi(y) \in B'$ e, portanto,

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \in B',$$

pelo que $xy \in \varphi^{-1}(B')$.

Assim, $\varphi^{-1}(B')$ é um subanel de A. □

Proposição 3.85. *Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e I' um ideal de A'. Então,*

$$\varphi^{-1}\left(I'\right) = \left\{x \in A \mid \varphi(x) \in I'\right\}$$

é um ideal de A.

Demonstração: Seja I' um ideal de A'. Então, pela proposição anterior, $\varphi^{-1}(I')$ é um subanel de A. Por outro lado, seja $a \in A$ e $x \in \varphi^{-1}(I')$. Então, $\varphi(x) \in I'$ e, portanto,

$$\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) \in I',$$

pelo que $ax \in \varphi^{-1}(I')$. De modo análogo, temos $xa \in \varphi^{-1}(I')$ e, portanto, $\varphi^{-1}(I')$ é um ideal de A. □

Dado um qualquer morfismo entre dois anéis, destacam-se os seguintes subconjuntos do domínio e do conjunto de chegada desse mesmo morfismo.

Definição 3.86. *Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis.*

(i) Chama-se Núcleo de φ *(ou* kernel de φ*), e representa-se por* $\mathrm{Nuc}\varphi$ *(ou* $\mathrm{Ker}\varphi$*), ao subconjunto de A definido por*

$$\mathrm{Nuc}\varphi = \{x \in A : \varphi(x) = 0_{A'}\};$$

(ii) Chama-se imagem de φ, *e representa-se por* $\mathrm{Im}\varphi$ *ou* $\varphi(A)$, *ao subconjunto de A' definido por*

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) : x \in A\}.$$

Proposição 3.87. *Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então,*

(i) $\mathrm{Nuc}\varphi$ *é um ideal de* A*;*

(ii) $\mathrm{Im}\varphi$ *é um subanel de* A'*.*

Demonstração: (i) Trivial, tendo em conta que $\mathrm{Nuc}\varphi = \varphi^{-1}\{0_{A'}\}$ e $\{0_{A'}\}$ é um ideal de A' e aplicando a Proposição 3.85.

(ii) Trivial, tendo em conta que A é um subanel de A e aplicando a Proposição 3.82. □

3.5.1 teorema fundamental do homomorfismo

Proposição 3.88. *Sejam A um anel e I um seu ideal. Então, a aplicação $\pi : A \to A/I$ definida por $\pi(x) = x + I$ $(x \in A)$, é um epimorfismo (ao qual se chama* epimorfismo canónico*).*

Demonstração: Sejam A um anel e I um ideal de A. Então, em A/I, temos que

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

e

$$(x + I)(y + I) = xy + I.$$

Logo, a aplicação π é tal que

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$$

e

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(xy),$$

pelo que π é um morfismo. Além disso, o facto de qualquer elemento de A/I se definir à custa de um representante de A, permite-nos concluir que π é uma aplicação sobrejetiva. □

Teorema 3.89. ***(fundamental do homomorfismo)*** *Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, existe um ideal I de A tal que*

$$A/I \cong \varphi(A).$$

Demonstração: Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, $\mathrm{Nuc}\varphi$ é um ideal de A e, portanto, $\pi : A \to A/\mathrm{Nuc}\varphi$ é um epimorfismo. Seja θ a relação que a cada classe $x + \mathrm{Nuc}\varphi$ de $A/\mathrm{Nuc}\varphi$ faz corresponder o elemento $\varphi(x)$ de A'. Então,

(i) θ é uma aplicação injetiva, pois

$$(\forall x + \mathrm{Nuc}\varphi \in A/\mathrm{Nuc}\varphi) \qquad x \in A \text{ e } \varphi(x) \in A',$$

e

$$\begin{aligned} x + \mathrm{Nuc}\varphi = y + \mathrm{Nuc}\varphi &\iff x - y \in \mathrm{Nuc}\varphi \\ &\iff \varphi(x - y) = 0_{A'} \\ &\iff \varphi(x) - \varphi(y) = 0_{A'} \\ &\iff \varphi(x) = \varphi(y)\,. \end{aligned}$$

(ii) θ é um morfismo, pois

$$\begin{aligned} \theta((x + \mathrm{Nuc}\varphi) + (y + \mathrm{Nuc}\varphi)) &= \theta((x + y) + (\mathrm{Nuc}\varphi)) \\ &= \varphi(x + y) \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ &= \theta(x + \mathrm{Nuc}\varphi) + \theta(y + \mathrm{Nuc}\varphi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta((x + \mathrm{Nuc}\varphi) \cdot (y + \mathrm{Nuc}\varphi)) &= \theta((x \cdot y) + (\mathrm{Nuc}\varphi)) \\ &= \varphi(x \cdot y) \\ &= \varphi(x) \cdot \varphi(y) \\ &= \theta(x + \mathrm{Nuc}\varphi) \cdot \theta(y + \mathrm{Nuc}\varphi)\,. \end{aligned}$$

(iii) $\theta(A/\mathrm{Nuc}\varphi) = \mathrm{Im}\varphi$, porque

$$\begin{aligned} y \in \theta(A/\mathrm{Nuc}\varphi) &\iff (\exists x \in A) \quad y = \theta(x + \mathrm{Nuc}\varphi) \\ &\iff (\exists x \in A) \quad y = \varphi(x) \\ &\iff y \in \mathrm{Im}\varphi. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$A/\mathrm{Nuc}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi.$$

□

3.5.2 teoremas do isomorfismo

Mais uma vez fazendo o paralelismo com a Teoria de Grupos, apresentamos aqui dois teoremas envolvendo isomorfismos entre anéis, teoremas esses que são conhecidos como teoremas de isomorfismo.

Teorema 3.90. ***(1º Teorema do Isomorfismo)*** *Seja $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo de anéis. Se I é um ideal de A tal que $\mathrm{Nuc}\varphi \subseteq I$, então,*

$$A/I \cong A'/\varphi(I).$$

Demonstração: Começamos por observar que, sendo φ um epimorfismo, então, $\varphi(I)$ é um ideal de A', pelo que faz sentido falar no anel quociente $A'/\varphi(I)$.

Seja θ a relação que, dado $x \in A$, faz corresponder a classe $x + I$ de A/I na classe $\varphi(x) + \varphi(I)$ do anel $A'/\varphi(I)$. Então,

(i) θ é uma aplicação, pois

$$(\forall a + I \in A/I)\left(\exists y = \varphi(a) \in A'\right) \qquad \theta(a + I) = \varphi(a) + \varphi(I) \in A'/\varphi(I)$$

e

$$\begin{aligned} a + I = b + I &\iff a - b \in I \\ &\Rightarrow \varphi(a - b) \in \varphi(I) \\ &\iff \varphi(a) - \varphi(b) \in \varphi(I) \\ &\iff \varphi(a) + \varphi(I) = \varphi(b) + \varphi(I) \\ &\iff \theta(a + I) = \theta(b + I). \end{aligned}$$

(ii) θ é injetiva, pois

$$\begin{aligned} \theta(a + I) = \theta(b + I) &\iff \varphi(a) + \varphi(I) = \varphi(b) + \varphi(I) \\ &\iff \varphi(a - b) \in \varphi(I) \\ &\Rightarrow a - b \in \varphi^{-1}(\varphi(I)) = I \qquad (porque\ \mathrm{Nuc}\varphi \subseteq I) \\ &\iff a + I = b + I. \end{aligned}$$

e θ é sobrejetiva porque φ é sobrejetiva.

(iii) θ é um morfismo, porque

$$\begin{aligned} \theta((x + I) + (y + I)) &= \theta((x + y) + I) \\ &= \varphi(x + y) + \varphi(I) \\ &= (\varphi(x) + \varphi(y)) + \varphi(I) \\ &= (\varphi(x) + \varphi(I)) + (\varphi(y) + \varphi(I)) \\ &= \theta(x + I) + \theta(y + I) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\theta\left((x+I)\cdot(y+I)\right) &= \theta\left(xy+I\right)\\ &= \varphi\left(xy\right)+\varphi\left(I\right)\\ &= \varphi\left(x\right)\varphi\left(y\right)+\varphi\left(I\right)\\ &= \left(\varphi\left(x\right)+\varphi\left(I\right)\right)\cdot\left(\varphi\left(y\right)+\varphi\left(I\right)\right)\\ &= \theta\left(x+I\right)\cdot\theta\left(y+I\right).\end{aligned}$$

Logo, θ é um isomorfismo, pelo que

$$A/I \cong A'/\varphi\left(I\right).$$

□

Teorema 3.91. ***(2º Teorema do Isomorfismo)*** *Sejam A um anel* e *A_1 e A_2 subanéis de A. Se A_2 é um ideal de A, então,*

$$\left(A_1+A_2\right)/A_2 \cong A_1/\left(A_1\cap A_2\right).$$

Demonstração: Começamos por observar que:

(i) A_1+A_2 é um subanel de A que contém A_2 (assim sendo, A_2 é ideal de A_1+A_2). De facto,

$$0_A = 0_A + 0_A \in A_1 + A_2,$$

pelo que $A_1+A_2 \neq \emptyset$. Mais ainda, se $x=a_1+a_2, y=b_1+b_2 \in A_1+A_2$, temos que

$$x+y=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)\in A_1+A_2$$

e, porque A_2 é ideal de A,

$$\begin{aligned} xy &= a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2\\ &= a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1+b_1b_2)\in A_1+A_2.\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$a_2\in A_2 \Rightarrow a_2 = 0_A + a_2 \in A_1+A_2,$$

temos que A_1+A_2 é um subanel de A tal que $A_2\subseteq A_1+A_2$.

(ii) $A_1\cap A_2$ é um ideal de A_1. De facto, $A_1\cap A_2\subseteq A_1$ e, dados $x\in A_1$ e $i\in A_1\cap A_2$, temos que $xi\in A_1$, porque A_1 é subanel de A, e $xi\in A_2$, porque A_2 é ideal de A.

Faz, então, sentido falar nos dois aneis quociente. Consideremos a restrição do epimorfismo

$$\begin{array}{rcl} \pi : A_1 + A_2 & \longrightarrow & (A_1 + A_2)/A_2 \\ x & \longmapsto & x + A_2, \end{array}$$

ao subconjunto A_1 de $A_1 + A_2$ $(a \in A_1 \Rightarrow a = a + 0_A \in A_1 + A_2)$. Temos, portanto, o morfismo

$$\begin{array}{rcl} \pi|_{A_1} : A_1 & \longrightarrow & (A_1 + A_2)/A_2 \\ a_1 & \longmapsto & a_1 + A_2. \end{array}$$

Este morfismo $\pi|_{A_1}$ é, na verdade, um epimorfismo tal que $\mathrm{Nuc}\pi|_{A_1} = A_1 \cap A_2$. De facto, para todo $x = a_1 + a_2 \in A_1 + A_2$,

$$x + A_2 = a_1 + A_2,$$

pelo que, para todo $x + A_2 \in (A_1 + A_2)/A_2$, existe $a_1 \in A_1$ tal que

$$x + A_2 = \pi|_{A_1}(a_1).$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} a \in \mathrm{Nuc}\pi|_{A_1} & \Longleftrightarrow & a \in A_1 \text{ e } \pi|_{A_1}(a) = A_2 \\ & \Longleftrightarrow & a \in A_1 \text{ e } a + A_2 = A_2 \\ & \Longleftrightarrow & a \in A_1 \text{ e } a \in A_2 \\ & \Longleftrightarrow & a \in A_1 \cap A_2. \end{array}$$

Logo, pelo teorema fundamental do homomorfismo,

$$A_1/(A_1 \cap A_2) = A_1/\mathrm{Nuc}\pi|_{A_1} \cong \pi|_{A_1}(A_1) = (A_1 + A_2)/A_2.$$

$\square$

4 divisibilidade em anéis

4.1 definições básicas

Ao longo deste capítulo, D é um domínio de integridade, i.e., um anel comutativo com identidade no qual 0_D é o único divisor de zero. Recordamos também que $\mathcal{U}_D$ representa o conjunto das unidades de D, i.e., o conjunto dos elementos $u \in D$ para os quais existe $u^{-1} \in D$. Como $1_D \in D$, temos que $\mathcal{U}_D \neq \emptyset$.

Definição 4.1. *Dados $x, y \in D$, diz-se que x* divide *y (ou que x* é fator de *y ou que y* é divisível por *x) se*

$$\exists t \in D: \ y = tx.$$

Neste caso, diz-se também que tx é uma fatorização *(ou* decomposição em fatores*) de y.*

Exemplo 4.2. *No domínio de integridade $\mathbb{Z}$, temos que $-2 \mid 4$, mas $2 \nmid 3$.*

Como consequência da definição, provam-se algumas propriedades básicas que agrupamos na seguinte proposição:

Proposição 4.3. *Sejam $x, y \in D$. Então,*

(i) $x \mid 0_D$;

(ii) $1_D \mid x$;

(iii) $\forall u \in \mathcal{U}_D \quad u \mid x$;

(iv) $x \mid y$ *e* $y \mid x$ *se e só se* $y = ux$ *para algum* $u \in \mathcal{U}_D$ *(e, consequentemente,* $x = u^{-1}y$*).*

Demonstração: (i) Seja $x \in D$. Então, $0_D = 0_D x$, pelo que podemos afirmar que $x \mid 0_D$.

(ii) Seja $x \in D$. Como $x = 1_D x$, temos que $1_D \mid x$.

(iii) Sejam $x \in D$ e u uma unidade de D. Como

$$x = 1_D x = u(u^{-1}x),$$

concluímos que $u \mid x$.

(iv) Sejam $x, y \in D$ tais que $y = ux$ e $x = u^{-1}y$ para algum $u \in \mathcal{U}_D$. Então, obviamente, temos que $x \mid y$ e $y \mid x$.

Reciprocamente, suponhamos que $x \mid y$ e $y \mid x$. Então, existem $t, s \in D$ tais que

$$y = tx \text{ e } x = sy. \qquad (*)$$

Temos que considerar 2 casos:

Caso 1: $x = 0_D$ ou $y = 0_D$. Neste caso, concluímos que $x = y = 0_D$ e, como $0_D = 1_D 0_D$, temos que $x = uy$ para $u = 1_D \in \mathcal{U}_D$;

Caso 2: $x \neq 0_D$ e $y \neq 0_D$. Neste caso, por $(*)$, temos que

$$1_D x = x = sy = stx.$$

Aplicando a lei do corte (pois $x \neq 0_D$), temos que

$$st = 1_D.$$

Assim, $s = t^{-1}$ e $t = s^{-1}$, pelo que $s, t \in \mathcal{U}_D$. □

Exemplo 4.4. *No anel dos inteiros relativos, se $x, y \in \mathbb{Z}$ são tais que $x \mid y$ e $y \mid x$, então, $x = \pm y$. De facto, sabemos que $\mathcal{U}_\mathbb{Z} = \{-1, 1\}$.*

Na sequência da propriedade (iv) da última proposição, surge a seguinte definição:

Definição 4.5. *Dois elementos x e y de um domínio de integridade D dizem-se* associados *se $x \mid y$ e $y \mid x$.*

Proposição 4.6. *Sejam $x, y \in D$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

(i) x e y são associados;

(ii) $x \in y\mathcal{U}_D$;

(iii) $y \in x\mathcal{U}_D$.

Demonstração: Trivial, tendo em conta a Proposição 4.3(iv). □

Definição 4.7. *Um elemento $p \in D$ diz-se* irredutível em D *se*

(i) $p \neq 0_D$ e $p \notin \mathcal{U}_D$*;*

(ii) $p = ab \Rightarrow a \in \mathcal{U}_D$ *ou* $b \in \mathcal{U}_D$*.*

O elemento p diz-se redutível em D *se não for irredutível em D.*

Exemplo 4.8. *Em $\mathbb{Z}$, os elementos irredutíveis são os números primos e os seus simétricos.*

Definição 4.9. *Um elemento $p \in D$ diz-se* primo *se*

(i) $p \neq 0_D$ e $p \notin \mathcal{U}_D$*;*

(ii) $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ *ou* $p \mid b$*.*

Proposição 4.10. *Seja p um elemento não nulo de D. Então,*

(i) p é primo se e só se (p) é ideal primo de D;

(ii) p é irredutível se e só se (p) é ideal maximal na classe dos ideais principais de D.

Demonstração: (i) Como D é um anel comutativo com identidade, temos, pelo Corolário 2.1, que $(p) = pD$. Suponhamos, então, que p é primo. Como $p \notin \mathcal{U}_D$, $1_D \notin pD$, pelo que $D \backslash (p) \neq \emptyset$. Sejam $a, b \in D$ tais que $ab \in pD$. Então, $p \mid ab$. Como p é primo, temos que $p \mid a$ ou $p \mid b$ e, portanto, $a \in pD$ ou $b \in pD$. Estamos em condições de concluir que pD é ideal primo de D.

Reciprocamente, suponhamos que $(p) = pD$ é um ideal primo. Então, $pD \neq D$ pelo que, pela Proposição 2.17, $1_D \notin pD$ e, portanto, p não é unidade de D. Sejam $a, b \in D$ tais que $p \mid ab$. Então, $ab \in (p)$. Como (p) é ideal primo, concluímos que $a \in (p)$ ou $b \in (p)$. Assim, temos que $p \mid a$ ou $p \mid b$. Logo, p é primo.

(ii) Exercício. □

Proposição 4.11. *Todo o elemento primo de D é um elemento irredutível.*

Demonstração: Sejam p um elemento primo e $a, b \in D$ tais que $p = ab$. Então, $p \notin \mathcal{U}_D \cup \{0_D\}$ é tal que $p \mid ab$ e, portanto, $p \mid a$ ou $p \mid b$. Se $p \mid a$, temos que $a = px$, para algum $x \in D$. Logo,

$$p = ab = pxb.$$

Assim, pela lei de corte,

$$1_D = xb,$$

o que nos leva a concluir que $b \in \mathcal{U}_D$. Analogamente, ao supor que $p \mid b$, concluíamos que $a \in \mathcal{U}_D$. Logo, p é irredutível □

O recíproco deste corolário não é verdadeiro, como o demonstra o seguinte exemplo.

Exemplo 4.12. *Considere-se o conjunto* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$*, algebrizado com duas operações definidas por, para todos* $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$*:*

$$(a + b\sqrt{-3}) + (c + d\sqrt{-3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-3},$$

$$(a + b\sqrt{-3})(c + d\sqrt{-3}) = (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{-3}.$$

Então, $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *é um domínio de integridade. Para provarmos este facto, basta observarmos que* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *é um subdomínio de integridade de* $\mathbb{C}$*, munido das operações usuais de adição e multiplicação de números complexos. De facto, tendo em conta que*

$$a + b\sqrt{-3} = a + 3bi,$$

verificamos que a adição e multiplicação definidas no enunciado não são mais do que restrições das operações usuais de números complexos ao subconjunto $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *de* $\mathbb{C}$*. Mais ainda, temos que* $1 = 1 + 0\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *e a soma e o produto de dois elementos de* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *são ainda elementos de* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$*. Logo, pela Proposição 2.13,* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *é um subdomínio de integridade de* $\mathbb{C}$*.*

Neste domínio, o elemento $x = 1 + \sqrt{-3}$ *é irredutível, mas não é primo.*

Determinemos primeiro o conjunto das unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$*: Seja* $a + b\sqrt{-3}$ *uma unidade de* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$*. Então, existe* $c + d\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *tal que*

$$(A) \qquad (a + b\sqrt{-3})(c + d\sqrt{-3}) = 1.$$

Sendo dois números complexos iguais, também são iguais os quadrados dos seus módulos. Assim, temos que

$$(a^2 + 3b^2)(c^2 + 3d^2) = 1.$$

Como $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$*, concluímos que só podemos ter* $a = \pm 1$*,*$c = \pm 1$ *e* $b = d = 0$*. Substituindo em (A), concluímos que só podemos ter* $a = c = \pm 1$ *e* $b = d = 0$*. Assim, as únicas unidades de* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *são 1 e -1. Logo* $\mathcal{U}_{\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]} = \{-1, 1\}$*.*

Para provarmos que $1+\sqrt{-3}$ *é irredutível temos de escrever esse elemento como produto de dois e chegar à conclusão que um destes dois é uma unidade. Sejam* $a+b\sqrt{-3}, c+d\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *tais que*

$$1+\sqrt{-3} = (a+b\sqrt{-3})(c+d\sqrt{-3}).$$

Sendo estes dois complexos iguais, então, também o são os quadrados dos seus módulos. Logo, temos que

$$4 = (a^2+3b^2)(c^2+3d^2).$$

Tendo em conta que os fatores são não negativos, as únicas fatorizações possíveis são, a menos da ordem dos fatores, 2×2 *e* 1×4. *Como a primeira é impossível (pois* $a^2+3b^2 \neq 2$, *para quaisquer inteiros* a *e* b*), concluímos que* $a^2+3b^2=1$ *ou* $c^2+3d^2=1$. *Aplicando agora o raciocínio usado anteriormente, concluímos que* $a+b\sqrt{-3}$ *é uma unidade ou* $c+d\sqrt{-3}$ *é uma unidade. Logo* $1+\sqrt{-3}$ *é irredutível.*

Finalmente, temos que $1+\sqrt{-3}$ *não é primo pois divide* $4(=2\times 2)$ *(pois* $4=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$*) e não divide 2. De facto, se* $1+\sqrt{-3} \mid 2$, *existiria* $a+b\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ *tal que*

$$2 = (1+\sqrt{-3})(a+b\sqrt{-3}) = (a-3b)+(b+a)\sqrt{-3},$$

ou seja, existiria $b \in \mathbb{Z}$ *tal que* $2=-4b$.

Definição 4.13. *Dados* $a, b \in D$, *um elemento* d *de* D *diz-se um máximo divisor comum de* a *e* b *(abreviadamente,* $\mathrm{m.d.c.}(a,b)$*) se:*

(i) $d \mid a$ e $d \mid b$;

(ii) $(\forall c \in D) \qquad c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$.

Exemplo 4.14. *No domínio de integridade dos inteiros relativos,* 2 e -2 *são* $\mathrm{m.d.c.}(4,6)$.

Observe-se que, embora no anel dos inteiros relativos qualquer par de elementos admite pelo menos um máximo divisor comum, existem anéis onde não existem máximos divisores comuns de pares de elementos. Pelo facto de estarmos a falar em anéis com identidade, temos a certeza que existem sempre divisores comuns a quaisquer dois elementos. No entanto, dois elementos podem ter dois divisores em comum que não sejam comparáveis em termos de divisibilidade. O seguinte exemplo ilustra esta situação.

Exemplo 4.15. *Considere-se, no domínio de integridade definido no Exemplo 4.12, os elementos* $-2+2\sqrt{-3}$ *e* 8. *Tirando as unidades, os divisores comuns dos dois elementos são*

$$2, -2, 1+\sqrt{-3}, -1-\sqrt{-3}.$$

No entanto, dentro desta lista não temos nenhum elemento que seja maior do que os outros, no sentido em não há nenhum elemento que seja divisível por todos os outros (basta verificarmos que $2 \nmid 1+\sqrt{-3}$ *e* $1+\sqrt{-3} \nmid 2$, *todos os outros casos são iguais a este a menos de uma unidade). Concluímos, assim, que não existe máximo divisor comum destes dois elementos em* $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Proposição 4.16. *Sejam* d *um* $\text{m.d.c.}(a,b)$ *e* $d' \in D$. *Então,*

$$d' \text{ é } \text{m.d.c.}(a,b) \Longleftrightarrow d' \in d\mathcal{U}_D.$$

Demonstração: Suponhamos que d e d' são $\text{m.d.c.}(a,b)$. Então,

(i_d) $d \mid a$ e $d \mid b$;

(ii_d) $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$;

$(i_{d'})$ $d' \mid a$ e $d' \mid b$;

$(ii_{d'})$ $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d'$.

Logo, de (i_d) e de $(ii_{d'})$, concluímos que $d \mid d'$ e, de $(i_{d'})$ e de (ii_d), concluímos que $d' \mid d$. Assim, pela Proposição 4.3(iv), obtemos o resultado.

Reciprocamente, suponhamos que $d' \in d\mathcal{U}_D$ e que d é $\text{m.d.c.}(a,b)$. Então:

(i_d) $d \mid a$ e $d \mid b$;

(ii_d) $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$;

(iii) $\exists u_0 \in \mathcal{U}_D : \qquad d' = du_0$.

Assim,

(a) De (i_d), temos que existem $s, t \in D$ tais que

$$a = ds \qquad e \qquad b = dt.$$

Então,

$$a = (du_0)(u_0^{-1}s) \qquad e \qquad b = (du_0)(u_0^{-1}).$$

Logo, por (iii), temos que $d' \mid a$ e $d' \mid b$.

(b) Seja $c \in D$ tal que $c \mid a$ e $c \mid b$. Então, por (ii_d), temos que $c \mid d$, pelo que existe $r \in D$ tal que $d = cr$. Logo,

$$d' = du_0 = cru_0$$

e, portanto, $c \mid d'$.

Estamos em condições de concluir que d' é $\mathrm{m.d.c.}(a,b)$. $\square$

A última proposição apresentada permite-nos afirmar que, se existe $\mathrm{m.d.c.}(a,b)$, ele é univocamente determinado a menos de uma unidade. Assim, representando por $[a,b]$ o conjunto dos $\mathrm{m.d.c.}(a,b)$ em D, se d é $\mathrm{m.d.c.}(a,b)$, temos que

$$[a,b] = d\mathcal{U}_D.$$

Mais ainda, como a relação de associado é uma relação de equivalência, o conjunto $[a,b]$ pode ser visto como uma classe de equivalência. Temos assim, o seguinte resultado.

Corolário 4.17. *Sejam $a,b,c,e,d,d' \in D$ tais que $d \in [a,b]$, $d' \in [c,e]$ e d e d' são associados. Então, $[a,b] = [c,e]$.* $\square$

Proposição 4.18. *Sejam $a,b,p \in D$. Então,*

(i) se $a \mid b$, $a \in [a,b]$ e, portanto, $[a,b] = a\mathcal{U}_D$;

(ii) se p é irredutível, existe $\mathrm{m.d.c.}(a,p)$ e

$$[a,p] = \mathcal{U}_D \qquad ou \qquad [a,p] = p\mathcal{U}_D.$$

Demonstração: Exercício. $\square$

Proposição 4.19. *Em D, sempre que as expressões fizerem sentido, são válidas as seguintes igualdades:*

(i) $[ac,bc] = [a,b]c$;

(ii) $[[a,b],c] = [a,[b,c]]$.

Demonstração: (i) Seja $d' \in [ac,bc]$. Queremos provar que $d' = d_1c$ para algum $d_1 \in [a,b]$. Começamos por observar que, por um lado,

$$d \in [a,b] \Rightarrow d \mid a \text{ e } d \mid b \Rightarrow dc \mid ac \text{ e } dc \mid bc \Rightarrow dc \mid d' \Rightarrow \exists t \in D: \; d' = tdc = dtc.$$

Por outro lado,

$$d' \mid ac \Rightarrow \exists q \in D: \; ac = d'q \Rightarrow \exists q \in D: \; ac = dtcq \Rightarrow \exists q \in D: \; a = dtq$$

e, de modo análogo,

$$d' \mid b \Rightarrow \exists s \in D: \; b = dts.$$

Logo,

$$dt \mid a \text{ e } dt \mid b,$$

pelo que $dt \mid d$ (pois $d \in [a,b]$). Assim,

$$\exists r \in D: \; d = dtr$$

e, portanto,

$$1_D = tr.$$

Concluímos então que $t \in \mathcal{U}_D$ e, assim, $dt \in [a,b]$. Logo, existe $d_1 = dt \in [a,b]$ tal que $d' = d_1 c$.

Reciprocamente, seja $d \in [a,b]$. Queremos provar que $dc \in [ac,bc]$. Seja $d' \in [ac,bc]$. Como $dc \mid ac$ e $dc \mid bc$, temos que $dc \mid d'$. Assim, existe $t \in D$ tal que $d' = dct$. Como já provamos que existe $d_1 \in [a,b]$ tal que $d' = d_1 c$, concluímos que $d_1 = dt$ e, portanto, $t \in \mathcal{U}_D$. Logo, $dc \in d'\mathcal{U}_D = [ac,bc]$.

(ii) Sejam

$$d \in [a,b], \qquad d' \in [b,c],$$

$$d_1 \in [d,c], \qquad d_1' \in [a,d'].$$

Então,

(a) de $d \mid a$, $d \mid b$ e $d_1 \mid d$, concluímos que $d_1 \mid a$ e $d_1 \mid b$;

(b) de $d_1 \mid b$ e $d_1 \mid c$, concluímos que $d_1 \mid d'$;

(c) de $d_1 \mid d'$ e $d_1 \mid a$, concluímos que $d_1 \mid d_1'$.

De igual modo,

(d) de $d' \mid b$, $d' \mid c$ e $d_1' \mid d'$, concluímos que $d_1' \mid b$ e $d_1' \mid c$;

(e) de $d_1' \mid a$ e $d_1' \mid b$, concluímos que $d_1' \mid d$;

(f) de $d_1' \mid d$ e $d_1' \mid c$, concluímos que $d_1' \mid d_1$.

De (c) e (f), temos que d_1 e d_1' são associados e, portanto, $[d,c] = [a,d']$, i.e.,

$$[[a,b],c] = [a,[b,c]]\,.$$

□

Proposição 4.20. *Sejam* $a,b,c \in D$. *Se existe* m.d.c. *de qualquer par de elementos em* D, *então,*

$$[a,b] = \mathcal{U}_D, \;\; [a,c] = \mathcal{U}_D \Rightarrow [a,bc] = \mathcal{U}_D.$$

Demonstração: Seja $d \in [a, bc]$. Então, $d \mid a$ e $d \mid bc$, pelo que $d \mid ac$ e $d \mid bc$. Logo, $d \mid d_1$ para algum $d_1 \in [ac, bc]$. Então, pela Proposição anterior, existe $u \in [a, b] = \mathcal{U}_D$ tal que $d_1 = uc$. Logo, $d \mid uc$. Como $uc \mid c$, temos que $d \mid c$. Assim, de $d \mid a$ e $d \mid c$, concluímos que $d \mid u'$, para qualquer $u' \in \mathcal{U}_D = [a, c]$. Logo, $d \in \mathcal{U}_D$. Logo, $[a, bc] \subseteq \mathcal{U}_D$. Como $[a, bc]$ é uma classe de equivalência, temos que $[a, bc] = \mathcal{U}_D$. □

Vimos já que, num domínio de integridade, nem todo o elemento irredutível é primo. No entanto, se existir $\mathrm{m.d.c.}$ de dois quaisquer elementos do domínio, prova-se que todo o elemento irredutível é primo.

Proposição 4.21. *Se $[a, b] \neq \emptyset$, para todos $a, b \in D$, então, qualquer elemento irredutível é primo.*

Demonstração: Sejam $x \in D$ um elemento irredutível e $a, b \in D$ tais que $x \mid ab$. Se $x \nmid a$ e $x \nmid b$, teríamos $[x, a] = [x, b] = \mathcal{U}_D$ e, portanto, pela proposição 4.20,

$$[x, ab] = \mathcal{U}.$$

Mas, pela Proposição 4.18, como $x \mid ab$,

$$[x, ab] = x\mathcal{U}_D.$$

No entanto, $x\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_D$, já que $x \notin \mathcal{U}_D$. A contradição a que chegamos resultado do facto de supormos que $x \nmid a$ e $x \nmid b$. Logo, $x \mid a$ ou $x \mid b$. □

O Exemplo 4.15 permite-nos concluir que nem sempre existe $\mathrm{m.d.c.}$ de dois elementos quaisquer de um domínio de integridade. Nas secções seguintes vamos estudar algumas classes de domínios de integridade onde a existência de $\mathrm{m.d.c.}$ de dois elementos é garantida.

4.2 domínios de fatorização única

Definição 4.22. *Um* domínio de fatorização única *ou* domínio de Gauss *é um domínio de integridade D no qual todo o elemento $x \in D \backslash (\mathcal{U}_D \cup \{0_D\})$ se escreve como produto de elementos irredutíveis, sendo essa decomposição única, a menos do produto por unidades, ou seja,*

$$\forall x \in D \backslash (\mathcal{U}_D \cup \{0_D\}) \exists p_1, p_2, ..., p_n \; \textit{irredutíveis em} \; D: \;\; x = p_1 p_2 \cdots p_n$$

e se existem $q_1, q_2, ..., q_t$ irredutíveis em D tais que

$$x = q_1 q_2 \cdots q_t,$$

então, $n = t$ e cada elemento p_i $(i = 1, 2, ..., n)$ é associado a um elemento q_j $(j = 1, 2, ..., n)$ e reciprocamente.

Ao número de fatores irredutíveis que aparecem na fatorização de um elemento x de D chamamos o comprimento *de x.*

Exemplo 4.23. *O domínio de integridade $\mathbb{Z}$ é um domínio de Gauss. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, sabemos que todo o inteiro maior que do que 1 se escreve como produto de primos (que, como já vimos, são os elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}^+$) de modo único, a menos da ordem dos fatores. Assim, concluímos que $x \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$ se escreve como produto de elementos irredutíveis de $\mathbb{Z}$. Essa decomposição é única a menos do produto de ± 1. Por exemplo, as únicas fatorizações possíveis de 6 são, a menos da ordem dos fatores, $2 \cdot 3$ e $(-2)(-3)$.*

Teorema 4.24. *Seja D um domínio de Gauss e $a, b \in D$. Então, existe* $\mathrm{m.d.c.}(a, b)$.

Demonstração: Se $a = 0_D$ ou $b = 0_D$, temos que $[a, b] = \{0_D\}$. Sejam, então, $a, b \in D\backslash\{0_D\}$. Suponhamos primeiro que $a \in \mathcal{U}_D$. Então, $a \mid b$ e, portanto, pela Proposição 4.18, existe $\mathrm{m.d.c.}(a, b)$ e $[a, b] = a\mathcal{U}_D$. A situação é análoga se supormos que $b \in \mathcal{U}_D$.

Suponhamos, então, que $a, b \notin \mathcal{U}_D$. Então, existem $r \in \mathbb{N}$, $m_1, m_2, ..., m_r, n_1, n_2, ..., n_r \in \mathbb{N}_0$ e $p_1, p_2, ..., p_r, q_1, q_2, ..., q_r$ elementos irredutíveis em D tais que

$$a = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$$

e

$$b == q_1^{n_1} q_2^{n_2} \cdots q_r^{n_r}.$$

Observe-se que temos garantia que existe pelo menos um dos fatores. Se mais não houver, consideramos expoentes nulos, que transforma o fator em 1_D. Assim, nestas duas fatorizações, podemos considerar o mesmo número de fatores.

Seja $d = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_r^{s_r}$ onde $s_i = \min(m_i, n_i)$ para cada $i = 1, 2, ..., r$. Vamos provar que d é $\mathrm{m.d.c.}(a, b)$. Uma vez que $s_i \leq m_i$, podemos escrever

$$a =^(p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_r^{s_r})(p_1^{m_1 - s_1} p_2^{m_2 - s_2} \cdots p_r^{m_r - s_r}) = d(p_1^{m_1 - s_1} p_2^{m_2 - s_2} \cdots p_r^{m_r - s_r}),$$

pelo que $d \mid a$. De modo análogo, concluímos que $d \mid b$.

Seja $k \in D$ tal que $k \mid a$ e $k \mid b$. Se $k \in \mathcal{U}_D$, temos obviamente que $k \mid d$. Se $k \notin \mathcal{U}_D$, existem $v_1, v_2, ..., v_r \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$u = p_1^{v_1} p_2^{v_2} \cdots p_r^{v_r} u',$$

com $u' \in \mathcal{U}_D$ e, como $k \mid a$ e $k \mid b$,

$$v_i \leq m_i \text{ } e \text{ } v_i \leq n_i \qquad (i = 1, 2, ..., r).$$

Logo, para cada $i = 1, 2, ..., r$, $v_i \leq s_i$ e, portanto, $k \mid d$. Logo, d é $\mathrm{m.d.c.}(a, b)$. □

O Teorema que acabámos de enunciar e demonstrar permite-nos concluir que, num domínio de Gauss, são válidos todos os resultados que apresentámos que envolvem máximos divisores comuns, pois temos sempre a garantia que qualquer par de elementos admite pelo menos um $\mathrm{m.d.c.}$.

4.3 domínios de ideais principais

Definição 4.25. *Um* domínio de ideais principais *é um domínio de integridade onde todos os ideais são principais.*

Exemplo 4.26. *O domínio de integridade dos inteiros é um domínio de ideais principais. De facto, sabemos que B é ideal de $\mathbb{Z}$ se e só se existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $B = (n)$.*

A Proposição 4.10(b) pode ser reescrita no caso de um domínio de ideais principais.

Proposição 4.27. *Se D é um domínio de ideais principais, $p \in D \backslash \{0_D\}$ é irredutível se e só se (p) é um ideal maximal de D.* □

O Teorema seguinte, cuja demonstração omitimos mas que pode ser encontrada em qualquer livro de Álgebra, permite-nos incluir a classe dos domínios de ideais principais na classe dos domínios de Gauss.

Teorema 4.28. *Todos os domínios de ideais principais são domínios de fatorização única.* □

Observemos, no entanto, que o recíproco do teorema anterior não é verdadeiro como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 4.29. *Consideremos o conjunto dos polinómios em x com coeficientes em $\mathbb{Z}$, o qual representamos por $\mathbb{Z}[x]$. Prova-se que, quando algebrizado com a adição e a multiplicação usuais de polinómios, é um domínio de fatorização única. No entanto, não é um domínio de ideais principais. Para provarmos tal afirmação basta observar que o ideal gerado pelos polinómios $p(x) = 2$ e $q(x) = x$, i.e., o menor ideal que contém os dois polinómios, não é principal.*

Estamos, então, em condições de afirmar que, num domínio de ideais principais, existe $\mathrm{m.d.c.}$ de qualquer par de elementos de D. De facto, cada domínio de ideais principais é um domínio de Gauss e, em cada domínio de Gauss, existe $\mathrm{m.d.c.}$ de dois quaisquer elementos. No entanto, é só num domínio de ideais principais que podemos escrever qualquer $\mathrm{m.d.c.}$ de dois elementos como combinação linear desses mesmos elementos. É o resultado que enunciamos e demonstramos de seguida.

Proposição 4.30. *Sejam D um domínio de ideais principais e $a, b, d \in D$. Se d é $\mathrm{m.d.c.}(a, b)$, então, existem $\alpha, \beta \in D$ tais que $d = \alpha a + \beta b$.*

Demonstração: Seja $I = \{xa + yb : x, y \in D\}$. Como

- $0_D = 0_D a + 0_D b \in I$;
- $(x_1 a + y_1 b) - (x_2 a + y_2 b) = (x_1 - x_2)a + (y_1 - y_2)b \in I$ para todos $x_1, x_2, y_1, y_2 \in D$;
- $t(xa + yb) = (tx)a + (ty)b \in I$, para todos $x, y, t \in D$,

concluímos que I é um ideal de D. Como D é um domínio de ideais principais, temos que

$$\exists d \in D : \; I = (d) = dD.$$

Facilmente se vê que d é $\mathrm{m.d.c.}(a, b)$ (porquê?). Assim, de $d \in I$, concluímos que

$$\exists \alpha, \beta \in D : \;\; d = \alpha a + \beta b.$$

Mais ainda, se $d_1 \in [a, b]$, $d_1 = du$ para alguma unidade u de D. Logo,

$$d_1 = (\alpha u)a + (\beta u)b.$$

□

4.4 domínios euclidianos

Definição 4.31. *Um domínio de integridade diz-se um* domínio euclidiano *se for possível definir uma aplicação* $\delta : D \to \mathbb{N}_0$ *tal que*

(E1) $\forall a, b \in D \backslash \{0_D\} \qquad b \mid a \Rightarrow \delta(b) \leq \delta(a)$*;*

(E2) se $a, b \in D$ *e* $b \neq 0_D$*, então, existem* $q, r \in D$ *tais que* $a = bq + r$ *e* $\delta(r) < \delta(b)$*.*

À aplicação δ *chama-se* valoração em D*.*

Exemplo 4.32. *O domínio de integridade* $\mathbb{Z}$ *é um domínio euclidiano. Basta pensar na aplicação que a cada inteiro faz corresponder o seu valor absoluto.*

Proposição 4.33. *Seja* D *um domínio euclidiano. Então,*

$$\forall b \in D \backslash \{0_D\} \qquad \delta(0_D) < \delta(b).$$

Demonstração: Como $b \neq 0_D$ e $0_D \in D$, temos, por (E2) da definição de domínio euclidiano, que existem $q, r \in D$ tais que $0_D = bq + r$ e $\delta(r) < \delta(b)$. Assim, $r = -bq = b(-q)$ e, portanto, $b \mid r$. Se $r \neq 0_D$, temos, por (E1), que $\delta(b) \leq \delta(r)$. Logo, $\delta(r) < \delta(r)$, o que é um absurdo. O absurdo resulta do facto de supormos que $r \neq 0_D$. Concluímos, então, que $r = 0_D$ e, portanto, $\delta(0_D) < \delta(b)$. □

Teorema 4.34. *Todo o domínio euclidiano é um domínio de ideais principais.*

Demonstração: Sejam D um domínio euclidiano e I um ideal de D. Se $I = \{0_D\}$, então, $I = (0_D)$ e I é principal.

Suponhamos que $I \neq \{0_D\}$. Então, existe $b \neq 0_D$ e, portanto, pela proposição anterior, $\delta(b) \neq \delta(0_D)$. Seja $a \in I \backslash \{0_D\}$ tal que $\delta(a) \leq \delta(x)$ para todo $x \in I \backslash \{0_D\}$. Vamos provar que $I = (a)$. Seja $i \in I$. Como $a \neq 0_D$, por (E2) existem $q, r \in D$ tais que $i = aq + r$ e $\delta(r) < \delta(a)$. Então,

$$r = i - aq \in I.$$

Como a é o elemento não nulo de D de menor valoração, concluímos que $r = 0_D$ e, portanto, $i = aq \in aD = (a)$. Assim, $I \subseteq (a)$. Como a outra inclusão é trivial, concluímos que I é principal. □

Corolário 4.35. *Todo o domínio euclidiano é domínio de fatorização única.*

Mais uma vez, estamos perante um teorema cujo recíproco é falso e, mais uma, apresentamos um exemplo que o demonstra.

Exemplo 4.36. *O anel* $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ *é um domínio de ideais principais que não é euclidiano.*

A importância do estudo dos domínios euclidianos prende-se com a generalização do conhecido Algoritmo de Euclides, enunciado para os inteiros (aliás, é deste facto que resulta a escolha do nome para esta classe de domínios de integridade). É esse resultado que passamos a apresentar.

Teorema 4.37. ***Algoritmo de Euclides*** *Sejam* D *um domínio euclidiano e* $a, b \in D \backslash \{0_D\}$. *Sejam* $r_1, q_1 \in D$ *tais que*

$$a = bq_1 + r_1 \qquad onde\ ou\ r_1 = 0_D \text{ ou } \delta(r_1) < \delta(b).$$

Se $r_1 \neq 0_D$, *sejam* $r_2, q_2 \in D$ *tais que*

$$b = r_1q_2 + r_2 \qquad onde\ ou\ r_2 = 0_D \text{ ou } \delta(r_2) < \delta(r_1).$$

Em geral, sejam $r_{i+1}, q_{i+1} \in D$ *tais que*

$$r_{i-1} = r_iq_{i+1} + r_{i+1} \qquad onde\ ou\ r_{i+1} = 0_D \text{ ou } \delta(r_{i+1}) < \delta(r_i).$$

Então, a sequência $r_1, r_2, \ldots$ *tem de terminar para algum* $r_s = 0_D$. *Se*

- $r_1 = 0_D$ *então* $b \in [a, b]$;
- $r_1 \neq 0_D$ *e* r_s *é o primeiro dos* r_i *nulo, então* $r_{s-1} \in [a, b]$.

Demonstração: Como $\delta(r_i) < \delta(r_{i-1})$ e $\delta(r_i) \in \mathbb{N}_0$, é óbvio que, após um número finito de passos, temos algum $r_s = 0_D$.

Se $r_1 = 0_D$, então $a = bq_1$ e, portanto, $b \mid a$. Logo, $b \in [a, b]$ (ver Proposição 4.18).

Suponhamos que $r_1 \neq 0_D$. Se $d \in D$ é tal que $d \mid a$ e $d \mid b$, então, $d \mid (a - bq_1)$, ou seja, $d \mid r_1$. No entanto, se $d_1 \in D$ é tal que $d_1 \mid r_1$ e $d_1 \mid b$, então, $d_1 \mid (bq_1 + r_1)$, i.e., $d_1 \mid a$. Assim,

$$[a, b] = [b, r_1].$$

Com um raciocínio análogo, se $r_2 = 0_D$, provamos que

$$[b, r_1] = [r_1, r_2].$$

Continuando o processo, concluímos que

$$[a, b] = [r_{s-2}, r_{s-1}],$$

onde r_s é o primeiro dos r_i nulo. Mas, como

$$r_{s-2} = r_{s-1}q_s + r_s = r_{s-1}q_s,$$

$r_{s-1} \mid r_{s-2}$. Logo,

$$[a, b] = r_{s-1}\mathcal{U}.$$

$\square$

Bibliografia

[1] Durbin, J. R., *Modern Algebra, an introduction*, John Wiley (1985)

[2] Fraleigh, J. B., *A first course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley (1982)

[3] Marques Smith, P., Mendes Martins, P., Roçadas, L., *Álgebra. Exercícios resolvidos e exercícios propostos*, Escolar Editora (2015),

[4] Monteiro, A. J., Matos, I. T., *Álgebra, um primeiro curso*, Escolar Editora (1995)