Grafos

M. Lurdes Teixeira
Dep. Matemática
Univ. Minho

2º semestre de 2019/2020

Definição

Um grafo (simples) G é um par ordenado de conjuntos de objetos de tipos distintos:

- um conjunto V não vazio, cujos objetos se designam vértices;
- um conjunto E cujos objetos se designam arestas e que são conjuntos com exatamente dois vértices.

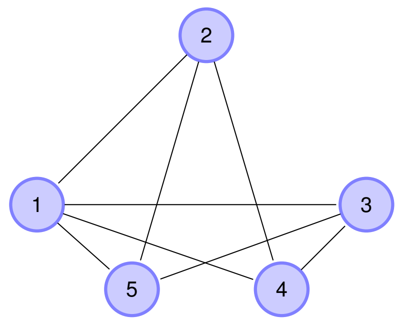
Em tal caso, escreve-se $G = (V, E)$.

Graficamente, cada vértice é representado por um círculo e cada aresta é representada por uma linha que liga dois vértices.

EXEMPLO 1 $\quad G = (V, E) = \Big(\{1, 2\}, \quad \{ \{1, 2\} \} \Big)$

EXEMPLO 2 $\quad V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

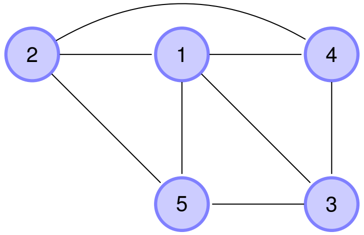
$$E = \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 4\} \}$$



$$G = \Big(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 4\} \} \Big)$$

EXEMPLO 3 $V = \{1,2,3,4,5\}$

$E = \{\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,5\},\ \{2,4\},\ \{3,5\},\ \{3,4\}\ \}$



$G = \Big(\ \{1,2,3,4,5\},\quad \{\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,5\},\ \{2,4\},\ \{3,5\},\ \{3,4\}\ \}\Big)$

Existe diferença entre os grafos dos EXEMPLOS 2 e 3?

Definição

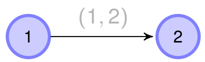
Um digrafo (ou grafo orientado) $G = (V, E)$ é um par ordenado de conjuntos de objetos de tipos distintos:

- um conjunto V cujos objetos se designam vértices;
- um conjunto E cujos objetos se designam arestas e que são pares ordenados de vértices.

Se (v_1, v_2) é uma aresta, então v_1 é dito o vértice inicial e v_2 é dito o vértice final.

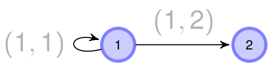
Graficamente, cada vértice é representado por um círculo e cada aresta é representada por uma linha orientada entre dois vértices.

EXEMPLO 4 $G = (V, E) = \Big(\ \{1,2\},\quad \{\ (1,2)\ \}\ \Big)$

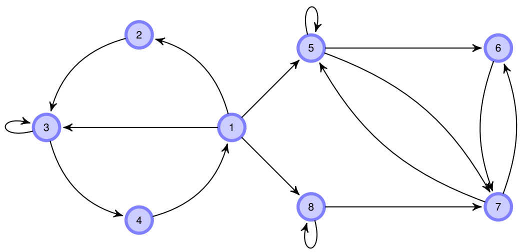


Notar que num digrafo, podem existir arestas da forma (v, v), onde v representa um vértice.

EXEMPLO 5 $G = (V, E) = \Big(\ \{1,2\},\quad \{\ (1,1),\ (1,2)\ \}\ \Big)$



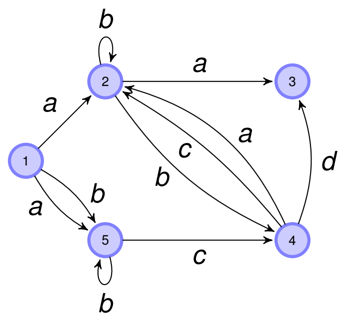
EXEMPLO 6 $G = (V, E)$ em que $V = \{1, \ldots, 8\}$ e $E = \{\quad \ldots ? \ldots \quad\}$



Definição

Um multigrafo G (um multidigrafo ou multigrafo orientado) é um par ordenado de conjuntos: um conjunto de V de vértices e um conjunto E de arestas, podendo existir várias arestas entre dois vértices. A cada aresta deve estar associada uma etiqueta.

EXEMPLO 7 - Multigrafo orientado



$G = (V, E)$ em que:

$V = \{1, \ldots, 5\}$

$E = \{\ (1, a, 2),\ (1, a, 5),\ (1, b, 5),\ (2, b, 2), \ldots\ \}$

- Um grafo $G = (V, E)$ diz-se finito se V e E são conjuntos finitos. Neste curso, trabalharemos apenas com grafos finitos.
- Dois grafos como os dos EXEMPLOS 2 e 3 são iguais.
- Em geral, não distinguiremos dois grafos que tenham a mema *estrutura*, dito de outra forma, dois grafos com o mesmo número de vértices e em que as arestas se definem de forma análoga, diferindo apenas na natureza dos vértices.
- Neste contexto, para facilitar a notação, se $G = (V, E)$ é um grafo com m vértices e n arestas, então escreveremos que

$$V = \{v_i \mid i \in \{1, \ldots, m\}\} \quad \text{e} \quad E = \{e_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Definição

Dados um grafo $G = (V, E)$, uma aresta $e \in E$ e um vértice $v \in V$, diz-se que e incide em v se existe um vértice $v' \in V$ tal que $e = \{v, v'\}$.

Nota: no caso de $e = (v, v')$ diz-se que v e v' são as extremidades da aresta e.

A incidência das diversas arestas num grafo pode ser caraterizada por uma matriz.

Definição

Dado um grafo $G = (V, E)$ com m vértices e n arestas, define-se a matriz de incidência de G como sendo a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a aresta } e_j \text{ incide em } v_i \\ 0 & \text{se a aresta } e_j \text{ não incide em } v_i \end{cases}$$

Definição

Dados um grafo $G = (V, E)$, e dois vértices $v, v' \in V$, diz-se que v e v' são adjacentes se $\{v, v'\} \in E$.

Nota: fala-se também de arestas adjacentes, significando isso que as arestas são distintas e têm uma extremidade comum.

A adjacência num grafo pode ser caraterizada por uma matriz.

Definição

Dado um grafo $G = (V, E)$ com m vértices, define-se a matriz de adjacência de G como sendo a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \text{ e } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Nota: a matriz adjacência de um grafo (simples) é uma matriz quadrada, simétrica e em que a diagonal é formada por zeros.

Definição

Um caminho de um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices de G no qual dois vértices consecutivos são adjacentes. Representa-se um caminho por

$$(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$$

onde $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k} \in V$.

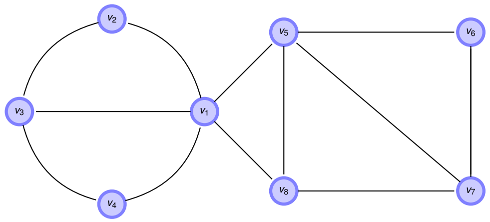
O primeiro vértice da sequência, v_{i_1}, chamamos origem do caminho ou vértice inicial e ao último vértice, v_{i_k}, chamamos destino do caminho ou vértice final.

Alternativamente, um caminho de um grafo pode ser definido por uma sequência de arestas adjacentes:

$$(\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_2}, v_{i_3}\}, \ldots, \{v_{i_{k-1}} v_{i_k}\}).$$

Nota: dizemos que o caminho percorre as arestas $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, ..., e $\{v_{i_{k-1}} v_{i_k}\}$ e que passa nos vértices $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$.

EXEMPLO 8 $G = (V, E)$



- $C = (v_5,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_1,\ v_5,\ v_7)$ é um caminho de G com origem v_5 e destino v_7.

O caminho C verifica $C = (\{v_5,\ v_1\},\ \{v_2, v_1\},\ \{v_2, v_3\},\ \{v_3, v_1\},\ \{v_1,\ v_5\},\ \{v_7, v_5\})$.

- (v_4) é um caminho trivial de G.

Definição

O comprimento de um caminho é igual ao comprimento da sequência de arestas que o definem (que é igual ao comprimento da sequência de vértices menos 1).

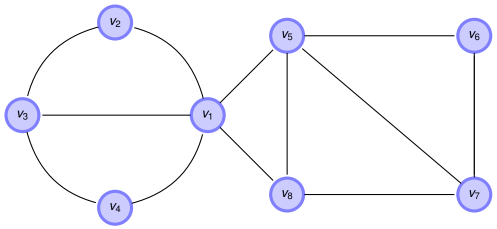
- Qual é o comprimento do caminho C do EXEMPLO 8? E do caminho trivial?

Definições

Um caminho $(v_{i_1},\ v_{i_2},\ \ldots,\ v_{i_k})$ de um grafo G diz-se:

- trivial se é uma sequência com um único vértice;
- fechado, ou que é um circuito, se $v_{i_1} = v_{i_k}$;
- elementar se não passa duas vezes num vértice exceto, eventualmente, se $v_{i_1} = v_{i_k}$;
- simples, ou um atalho, se não percorre duas vezes uma aresta;
- um ciclo se é um circuito elementar não trivial e $k > 3$.

Considere-se novamente o grafo do EXEMPLO 8.



- $(v_5,\ v_1,\ v_2,\ v_3)$ e $(v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_1)$ são caminhos elementares de G.
- $(v_5,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_1,\ v_5)$ não é elementar nem simples.
- $(v_5,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_1,\ v_8)$ não é elementar mas é simples.
- $(v_5,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_1,\ v_5)$ e $(v_1,\ v_5,\ v_6,\ v_7,\ v_5,\ v_8,\ v_1)$ são circuitos mas não são ciclos.
- $(v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_1)$ é um ciclo de G.

Definição

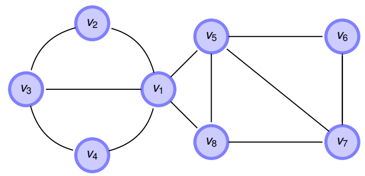
Um subgrafo de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo $G' = (V', E')$ em que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.
Em tal caso escreve-se $G' \leq G$.

EXEMPLO 9

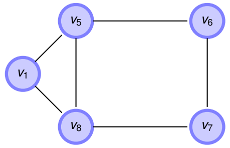
A estrutura (V', E') onde

$$V' = \{v_1, \ldots, v_6\} \text{ e } E' = \{\{v_1, v_2\},\ \{v_2, v_3\},\ \{v_1, v_8\},\ \{v_1, v_5\}\},$$

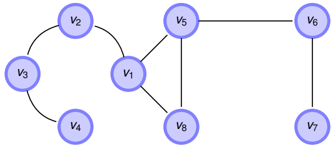
não é subgrafo do grafo seguinte:



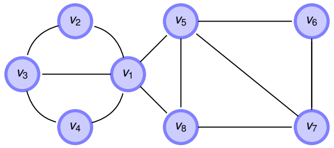
EXEMPLO 10



e



são subgrafos de



Definição

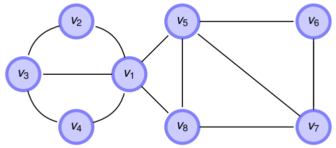
Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $V' \subseteq V$. Seja

$$E' = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i, v_j \in V' \wedge \{v_i, v_j\} \in E\}.$$

Então $G' = (V', E')$ é um subgrafo de G que designa subgrafo de G induzido por V'.

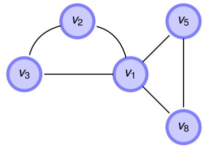
EXEMPLO 11

Sejam $G =$



e $V' = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8\}$.

O sugrafo de G induzido por V' é o grafo



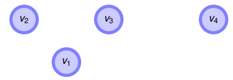
Definição

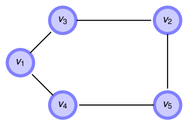
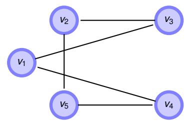
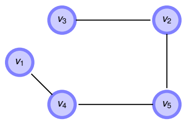
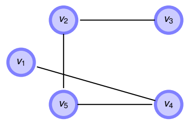
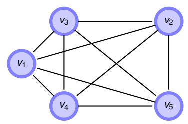
Um grafo $G = (V, E)$ diz-se:

- trivial se $\sharp V = 1$;
- nulo se $\sharp E = 0$;
- ciclo de comprimento n se $\sharp V = \sharp E = n \geq 3$ e $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}, v_{i_1})$ é um ciclo, caso em que o grafo se representa por C_n;
- linha de comprimento n se $\sharp E = n \geq 1$, $\sharp V = n + 1$ e $E = \{\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_2}, v_{i_3}\}, \ldots, \{v_{i_{n-1}}, v_{i_n}\}, , \{v_{i_n}, v_{i_{n+1}}\}\}$, caso em que o grafo se representa por P_n.
- completo se dois quaisquer dos seus vértices são adjacentes, caso em que o grafo se representa por K_n, onde $n = \sharp V$.

EXEMPLOS 12

- Grafo trivial 

- Grafo nulo 

- $C_5 =$  $=$ 
- $P_5 =$  $=$ 
- $K_5 =$ 

Proposição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $V' \subseteq \{v1, \ldots, v_n\}$. O subgrafo de K_n induzido por V' é um grafo completo.

Notar que nas condições da proposição acima, dados dois vértices $v_i, v_j \in V'$, a aresta $\{v_i, v_j\}$ pertence ao conjunto dos vértices de K_n pelo que pertence ao grafo induzido por V'. Consequentemente, o subgrafo de K_n induzido por V' é um grafo completo, nomeadamente é igual a K_m onde $m = \sharp V'$.

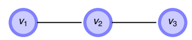
Corolário

Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \leq n$ então K_m é um subgrafo de K_n.

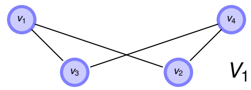
Definição

Um grafo $G = (V, E)$ diz-se um grafo bipartido se $\{V_1, V_2\}$ é uma partição do conjunto V tal que toda a aresta de G tem uma extremidade em V_1 e a outra em V_2.

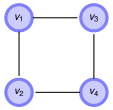
EXEMPLOS 13 - Grafos bipartidos



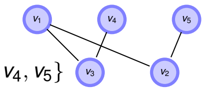
$V_1 = \{v_1, v_3\}$
e $V_2 = \{v_2\}$



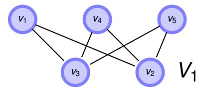
$=$



$V_1 = \{v_1, v_4\}$
e $V_2 = \{v_2, v_3\}$



$V_1 = \{v_1, v_4, v_5\}$
e $V_2 = \{v_2, v_3\}$



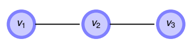
$V_1 = \{v_1, v_4, v_5\}$
e $V_2 = \{v_2, v_3\}$

Definição

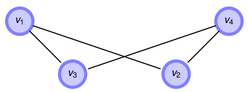
Um grafo $G = (V, E)$ diz-se um grafo bipartido completo se é um grafo bipartido e, se a partição considerada de V é $\{V_1, V_2\}$, todo o vértice de V_1 é adjacente a todo o vértice de V_2.

Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \leq n$, representa-se por $K_{m,n}$ o grafo bipartido completo com $m + n$ vértices em que m e n são os cardinais de V_1 e V_2.

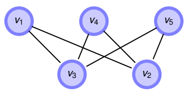
EXEMPLOS 14 - Grafos bipartidos completos



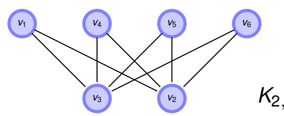
$K_{1,2}$



$K_{2,2}$



$K_{2,3}$



$K_{2,4}$

Proposição

Um grafo G é bipartido se e só se não admite ciclos de comprimento ímpar.

PROVA

Sejam $G = (V, E)$ um grafo bipartido e $\{V_1, V_2\}$ a partição associada. Seja

$$C = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}, v_{i_1})$$

um ciclo de G de comprimento k. Sem perda de generalidade suponhamos que $v_{i_1} \in V_1$. Então, $v_{i_2} \in V_2$, $v_{i_3} \in V_1$, e assim sucessivamente os vértices do caminho pertencem alternadamente a V_1 e a V_2, de modo a que os vértices do tipo $v_{i_{2j}}$ pertencem a V_2 e os vértices do tipo $v_{i_{2j+1}}$ pertencem a V_1.
Como o vértice final de C, v_{i_1}, pertence a V_1, então o vértice anterior, v_{i_k}, pertence a V_2. Logo, K é par.

(continua)

PROVA (continuação)

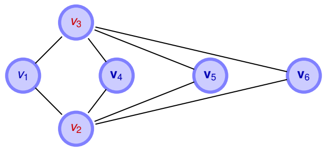
Reciprocamente, suponhamos que G só admite ciclos de comprimento par. Então, para cada ciclo $C = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{2j}}, v_{i_1})$, colocamos vértices adjacentes em conjuntos distintos $V_{C,1}$ e $V_{C,2}$. Como cada ciclo tem comprimento par $V_{C,1} \cap V_{C,2} = \emptyset$.

Sejam v_{i_s} e $v_{i_{s+2j}}$ vértices de C. Se v_{i_s} e $v_{i_{s+2j}}$ fossem adjacentes, então $(v_{i_s}, \dots, v_{i_{s+2j}}, v_{i_s})$ seria um ciclo de comprimento ímpar. Logo os vértices da forma v_{i_s} e $v_{i_{s+2j}}$ não são adjacentes, ou seja, em cada um dos conjuntos $V_{C,1}$ e $V_{C,2}$ não há vértices adjacentes.

Se existissem dois ciclos C' e C'' e vértices $v \in V_{C',1} \cap V_{C'',1}$ e $v' \in V_{C',1} \cap V_{C'',2}$, então existiria um ciclo $C = (v, \dots, v', \dots, v)$ em que $(v, \dots, v')$ e $(v', \dots, v)$ são sub-sucessões dos ciclos C' e C'' de comprimento par e ímpar, respetivamente. Então C era um ciclo de comprimento ímpar, o que é impossível.

Desta forma é possível definir uma partição de V, $\{V_1, V_2\}$, em que vértices adjacentes pertencem a elementos da partição distintos, o que prova que G é bipartido.

EXEMPLOS 15 - Coloração do vértices de grafos bipartidos



$K_{2,4}$

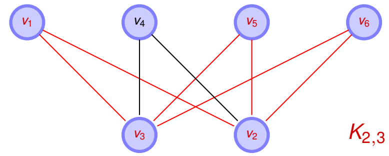
Proposição

Todo o subgrafo de um grafo bipartido é também bipartido.

Proposição

Sejam $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq n$ e $p \leq q$. $K_{p,q}$ é um subgrafo de $K_{m,n}$ se e só se $p \leq m$ e $q \leq n$.

EXEMPLOS 16

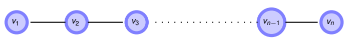


$K_{2,3} \leq K_{2,4}$

Definição

Se $G = (V, E)$ é um grafo e $v \in V$, define-se grau (de incidência) do vértice v ao número de arestas que incidem em v. Tal valor representa- se por $gr\ v$.

EXEMPLOS 17

- $P_n =$ 

Em P_n, $gr\ v_1 = gr\ v_n = 1$ e $gr\ v_2 = \cdots = gr\ v_{n-1} = 2$.

- Para qualquer $n \geq 3$, todos os vértices de C_n têm grau 2.
- Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, todos os vértices de K_n têm grau $n - 1$.
- Num grafo bipartido completo $K_{m,n}$ em que a partição associada é $\{V_1, V_2\}$ e $\sharp V_1 = m$, se $v \in V_1$, então $gr\ v = n$, se $v \in V_2$, então $gr\ v = m$.

Notas

- o grau de um vértice v pode ser calculado somando todas as entradas da linha correspondente a v na matriz de incidência;
- o grau de um vértice pode pode ser calculado somando todas as entradas da linha (ou da coluna) correspondente a v na matriz de adjacência.

Proposição (do aperto de mão)

Num grafo G a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas.

PROVA

Por indução, sobre $n \geq 0$, vamos mostrar que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo com n arestas é $2n$.

Passo base Se que o grafo não tem arestas, *i.e.*, $n = 0$, então todos os vértices têm grau 0, pelo que a soma dos graus é 0 $(= 2 \times 0)$.

Passo indutivo Seja $k \in \mathbb{N}_0$. Por hipótese de indução, suponhamos que a soma dos graus dos vértices de um grafo com k arestas é $2k$. Pretende-se provar que a soma dos graus dos vértices de um grafo com $k+1$ arestas é $2(k+1)$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que $\sharp E = k+1$. Se $e \in E$, considera- se $G' = (V', E')$ um subgrafo de G em que $V' = V$ e $E' = E \setminus \{e\}$. Então, G' tem k arestas e, pela hipótese de indução, a soma dos graus de todos os vértices de G' é $2k$. Juntando a aresta e a G' obtém-se G e, então, há dois vértices (as extremidades de e) cujo o grau é aumentado em 1. Logo, a soma dos graus de todos os vértices de G é igual à soma dos graus dos vérices de G' mais 2, ou seja é igual a $2k+2$.

Pelo Princípio de Indução a prova está completa.

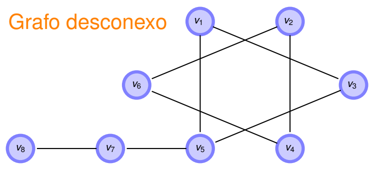
Definição

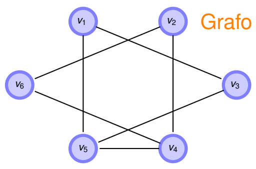
Um grafo conexo é um grafo G no qual, se v e v' são vértices de G, então existe um caminho de origem v e destino v'.

Um grafo que não é conexo diz-se um grafo desconexo.

EXEMPLO 18

Grafo desconexo





Grafo conexo

Proposição

Seja $G = (V, E)$ um grafo. A relação binária θ nos vértices de G por: se $v, v' \in V$,

$$v \,\theta\, v' \text{ se e só se existe um caminho } (v, \ldots, v')$$

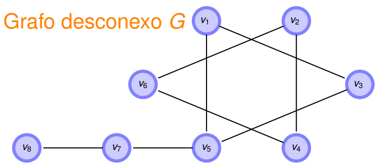
é uma relação de equivalência.

Definição

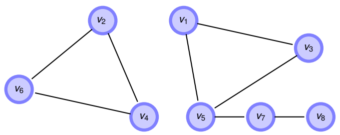
As classes de equivalência da relação θ no conjunto dos vértices de um grafo induzem subgrafos de G que se designam componentes conexas de G.

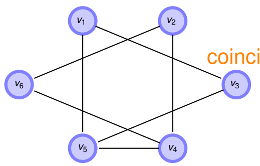
EXEMPLO 18- continuação

Grafo desconexo G



Componentes conexas de G





Grafo conexo G'
coincide com a componente conexa

Corolário

Cada componente conexa de um grafo é um grafo conexo.

Corolário

Um grafo $G = (V, E)$ é conexo se e só se a relação θ definida em V admite uma única classe de equivalência.

Proposição

Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo e $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}, v_{i_1})$ $(k \geq 3)$ um ciclo em G. Então, o grafo $G' = (V, E \setminus \{\{v_{i_1}, v_{i_2}\}\})$ também é conexo.

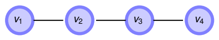
PROVA

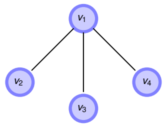
Notar que $(v_{i_1}, v_{i_k}, v_{i_k - 1}, \ldots, v_{i_2})$ é um caminho em G' de origem v_{i_1} e destino v_{i_2}. Assim, se em G existe um caminho C que percorre a aresta $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$, então em G' existe um caminho C' com as mesmas extremidades que resulta da sequência C por substituir a subsequência (v_{i_1}, v_{i_2}) pela sequência $(v_{i_1}, v_{i_k}, v_{i_k - 1}, \ldots, v_{i_2})$.

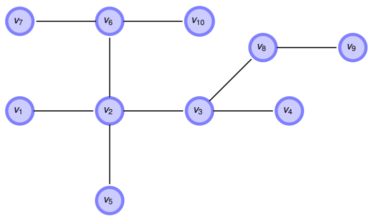
Definição

Uma árvore é um grafo conexo no qual não existem ciclos (comprimento maior ou igual a 3).

EXEMPLO 19 Árvores







Proposição

Numa árvore, o número de arestas é igual ao número de vértices menos um.

Proposição

Toda a árvore não trivial tem pelo menos dois vértices de grau 1.

PROVA

Seja $G = (V, E)$ uma árvore. Pela proposição anterior, se G tem n vértices e m arestas, então $m = n - 1$. Assim,

$$\Sigma_{i=1}^{n} gr\ v_i = 2m = 2n - 2.$$

Como uma árvore é um grafo conexo, $gr\ v_i \geq 1$ para qualquer vértice v_i. Se pelo menos $n - 1$ vértices tivessem grau maior ou igual a 2, então

$$\Sigma_{i=1}^{n} gr\ v_i \geq 2(n-1) + 1 = 2n - 1 > 2n - 2.$$

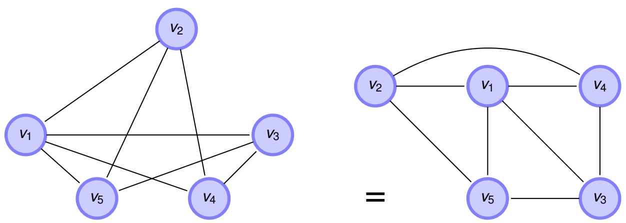
Logo, há pelo menos dois vértices de grau 1.

Todo o grafo finito pode ser representado no espaço (tridimensional) sem que existam cruzamentos de arestas, exceto no caso de arestas adjacentes que se encontram no extremo comum. No entanto, tal não se verifica se considerarmos a representação num plano.

Definição

Um grafo diz-se planar se pode ser representado no plano sem se verificarem cruzamentos de arestas, a não ser arestas adjacentes no vértice comum.

EXEMPLO 20 Grafo planar



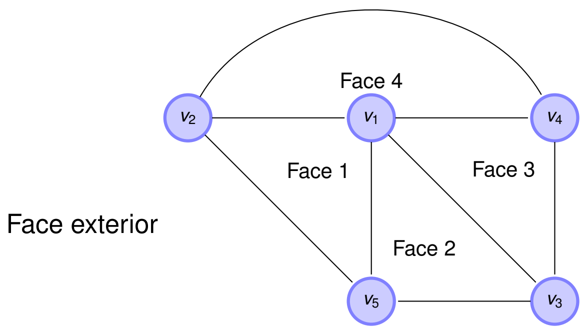
Notas

- um grafo planar admite diferentes representações no plano sem cruzamentos de arestas, exceto nos vértices comuns a arestas adjacentes;
- qualquer subgrafo de um grafo planar é um grafo planar;
- se o grafo não é conexo, o estudo da planaridade reduz-se ao estudo em cada componente conexa.

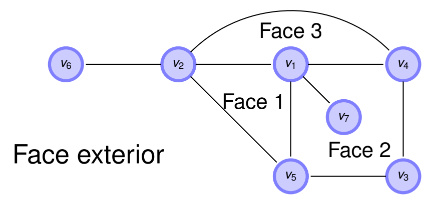
A cada representação de um grafo planar sem cruzamentos de arestas, exceto nos vértices comuns a arestas adjacentes, chamamos representação planar do grafo.

Uma representação planar de um grafo planar conexo define no plano regiões disjuntas delimitadas pelas arestas, às quais chamamos faces do grafo. Uma dessas regiões é ilimitada e designa-se por face exterior do grafo.

EXEMPLO 21



EXEMPLO 22



Notas

- Cada face limitada permite identificar um ciclo que a circunda a que chamamos fronteira. Uma aresta que não faz parte de nenhuma fronteira não faz parte de um ciclo.

No EXEMPLO 22, $(v_1, v_4, v_3, v_5, v_1)$ é a fronteira da face 2 e $\{v_1, v_7\}$ e $\{v_2, v_6\}$ são arestas que não fazem arte de nenhuma fronteira.

- Se num grafo retirarmos uma aresta de um ciclo, então obtemos um subgrafo que tem menos uma face.
- Dizemos que uma aresta 'toca' uma face se faz parte da sua fronteira ou se encontra no interior da região.

No EXEMPLO 22, as arestas da fronteira da face 2 e a aresta $\{v_1, v_7\}$ tocam a face 2.

Nesta secção vamos estudar a fórmula de Euler para grafos planares, que generaliza a fórmula de Euler para poliedros. Tal resultado permite mostrar que certos grafos são não planares.

Em particular, veremos que o número de faces de um grafo planar é independente da representação planar que se considere.

Teorema de Euler

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e planar. Então o número de faces F de uma representação plana de G é a solução da igualdade

$$\sharp V - \sharp E + F = 2.$$

PROVA (por indução sobre o número de arestas)

Passo base Se $\sharp E = 0$, então $E = \emptyset$ e $V = \{v_1\}$, porque o grafo é conexo. Logo só existe uma região, que é ilimitada, e

$$\sharp V - \sharp E + F = 2 \Leftrightarrow 1 - 0 + 1 = 2 \Leftrightarrow \textit{Verdade}.$$

Passo indutivo Seja $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese de indução, suponhamos que a igualdade é válida em qualquer grafo em que $\sharp E = n$. Seja $G = (V, E)$ um grafo planar conexo tal que $\sharp E = n + 1$.

- Se existe em G um vértice v com grau 1, então o subgrafo G' induzido por $V \setminus \{v\}$ tem menos uma aresta do que G, que é uma aresta que não pertence a um ciclo de G, pelo que o número de faces de G é igual ao de G'. Em tal caso, como por hipótese de indução em G' se verifica $(\sharp V - 1) - n + F = 2$, vem que
$$\sharp V - (n + 1) + F = 2.$$
- Senão, então G não é uma árvore, tem pelo menos um ciclo, e a eliminação de uma aresta desse ciclo implica a redução do número de faces em 1. Assim, o grafo G', que resulta de G por remoção de uma aresta de um ciclo, tem n arestas e $F - 1$ faces e, pela hipótese de indução, $\sharp V - n + (F - 1) = 2$. Então,
$$\sharp V - (n + 1) + F = 2.$$

Lema 1

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e planar com pelo menos duas faces. Se qualquer ciclo de G tem comprimento maior ou igual a c, então o número de faces F verifica

$$F \leq \frac{2}{c} \sharp E.$$

PROVA

Para cada face somamos o número de arestas que tocam essa face. Fazendo o somatório destes valores para todas as faces, obtém-se um valor S que verifica

$$S \leq 2\sharp E,$$

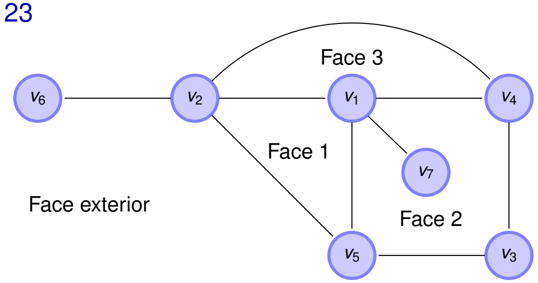
porque cada aresta, toca no máximo em duas faces. Por outro lado, existem no mínimo c arestas que tocam cada face, pelo que

$$S \geq cF.$$

Logo, $cF \leq 2\sharp E$, ou seja, $F \leq \frac{2}{c}\sharp E$.

(Notar que então $F \leq \frac{2}{3}\sharp E$ em qualquer caso, porque $c \geq 3$.)

EXEMPLO 23



Face 1	$\longrightarrow$	3 arestas
Face 2	$\longrightarrow$	5 arestas
Face 3	$\longrightarrow$	3 arestas
Face exterior	$\longrightarrow$	5 arestas

Logo $S = 16$.

Notar que $c = 3$, $S \leq 18 = 2\sharp E$ e $S \geq 12 = 3F$.

Então,

$$F = 4 \leq 6 = \frac{2}{3}9 = \frac{2}{3}\sharp E.$$

Lema 2

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar e conexo com pelo menos duas faces. Então,

$$3\sharp V - \sharp E \geq 6.$$

PROVA

Pela fórmula de Euler, vem que $\sharp V - \sharp E + F = 2$. Pelo Lema 1, $F \leq \frac{2}{3}\sharp E$.
Então, $\sharp V - \sharp E + \frac{2}{3}\sharp E \geq 2$. Assim, $3\sharp V - \sharp E \geq 6$.

Lema 3

Seja $G = (V, E)$ um grafo bipartido completo, planar, com pelo menos duas faces. Então,

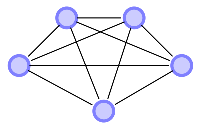
$$2\sharp V - \sharp E \geq 4.$$

PROVA

Aplicando o Lema 1 no caso de um grafo bipartido completo, como cada ciclo tem comprimento mínimo 4, conclui-se que o número de faces F é tal que $F \leq \frac{1}{2}\sharp E$.
Então, usando a fórmula de Euler, vem que $\sharp V - \sharp E + \frac{1}{2}\sharp E \geq 2$. Assim, $2\sharp V - \sharp E \geq 4$.

Proposição

K_5 não é um grafo planar.



PROVA

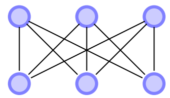
K_5 tem 5 vértices, 10 ($= C_2^5$) arestas, mais de 2 faces e é conexo.

$$3\sharp V - \sharp E \geq 6 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 - 10 \geq 6.$$

Como a última desigualdade é falsa, pelo Lema 2, K_5 não é planar.

Proposição

$K_{3,3}$ não é um grafo planar.



PROVA

$K_{3,3}$ é um grafo bipartido completo com 6 vértices, 9 arestas e mais de 2 faces.

$$2\sharp V - \sharp E \geq 4 \Leftrightarrow 2 \cdot 6 - 9 \geq 4.$$

Como a última desigualdade é falsa, pelo Lema 3, $K_{3,3}$ não é planar.

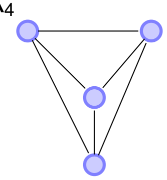
Se um grafo G contém um subgrafo que não é planar, então G também não é planar. Logo, se G é um grafo que admite como subgrafo K_5 ou $K_{3,3}$, então G não é planar.

Proposição

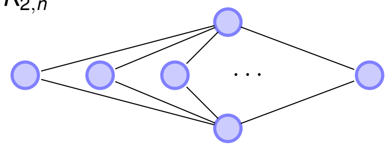
Sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

1. K_n é um grafo planar se e só se $n < 5$.
2. $K_{m,n}$ é um grafo planar se e só se $m < 3$.

K_4



$K_{2,n}$



Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $v \in V$ tal que $gr\, v = 2$. Se $a, b \in V$, $\{a, b\} \notin E$ e $\{a, v\}, \{v, b\} \in E$, então o grafo $G' = (V', E')$ em que

$$V' = V \setminus \{v\}$$
$$E' = E \cup \{\{a, b\}\} \setminus \{\{a, v\}, \{v, b\}\}$$

diz-se obtido a partir G por remoção do vértice v de grau 2.

Definição

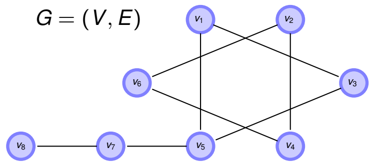
Seja $G = (V, E)$ um grafo e $a, b \in V$ tal que $\{a, b\} \in E$. Se $v \notin V$, então o grafo $G' = (V', E')$ em que

$$V' = V \cup \{v\}$$
$$E' = E \cup \{\{a, v\}, \{v, b\}\} \setminus \{\{a, b\}\}$$

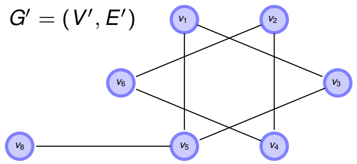
diz-se obtido a partir G por adição do vértice v com grau 2.

EXEMPLO 24

$G = (V, E)$

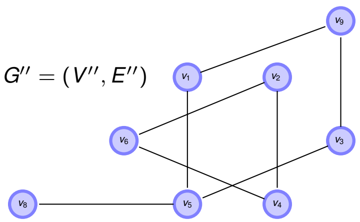


$G' = (V', E')$



G resulta de G' por adição do vértice v_7. G' resulta de G por remoção do vértice v_7.

$G'' = (V'', E'')$



G'' resulta de G' por adição do vértice v_9.

G, G' e G'' dizem-se homeomorfos

Definição

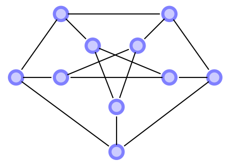
Dois grafos dizem-se homeomorfos se um deles puder ser obtido do outro por adição ou remoção de vértices de grau 2.

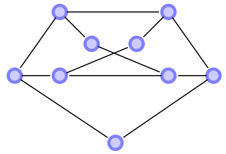
Se dois grafos são homeomorfos, então ou são ambos planares ou ambos não planares.

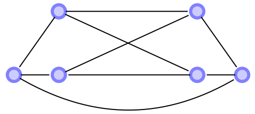
Teorema de Kuratowski

Um grafo é planar se e só se não contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.

EXEMPLO 25







Identifique as relações entre os três grafos. Classifique o grafo da direita.

Definição

Um grafo platónico é um grafo conexo, planar, no qual todos os vértices têm o mesmo grau e o número de arestas que tocam cada face é constante.

EXEMPLO 26

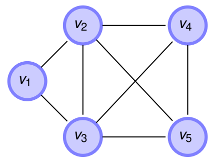
São grafos platónicos

- o grafo trivial, em que o único vértice tem grau 0,
- K_2, em que os dois vértices têm grau 1,
- C_n, com $n \geq 3$, em que os vértices têm grau 2,
- os grafos resultantes da planificação dos sólidos platónicos, ou seja,
  - do tetraedro, em que os quatro vértices têm grau 3,
  - do octaedro, em que os seis vértices têm grau 4,
  - do cubo, em que os oito vértices têm grau 3,
  - do dodecaedro, em que os vinte vértices têm grau 3,
  - do icosaedro, em que os doze vértices têm grau 5.

Definição

Um caminho num grafo diz-se um caminho euleriano se é um caminho simples e percorre todas as arestas do grafo.

EXEMPLO 27

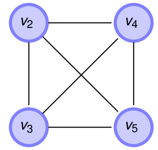


O caminho

$$(v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_5, v_2, v_3, v_4)$$

é euleriano.

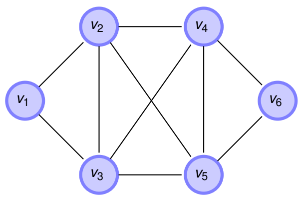
No grafo seguinte não existem caminhos eulerianos.



Definição

Um circuito num grafo diz-se um circuito euleriano se é um circuito simples e percorre todas as arestas do grafo.

EXEMPLO 28



O caminho

$$(v_3, v_1, v_2, v_4, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_5, v_3)$$

é um circuito euleriano.

Definição

Um grafo G diz-se euleriano se existir em G um circuito euleriano.

Definição

Um grafo G diz-se semi-euleriano se existir em G um caminho euleriano mas não existe um circuito euleriano.

Notas

- Se G é euleriano, então G tem pelo menos 3 vértices.
- Qualquer grafo euleriano ou semi-euleriano é conexo.
- Se $G = (V, E)$ é um grafo euleriano e $\{u, w\} \in E$, então existe um circuito euleriano
$$(v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1)$$
em que $\{u, w\} = \{v_n, v_1\}$ ou $\{u, w\} = \{v_i, v_{i+1}\}$ para algum $i < n$. Consequentemente,
$$(v_n, v_1, v_2, \ldots, v_n) \text{ e } (v_1, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$$
ou $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, v_2, \ldots, v_i)$ e $(v_{i+1}, v_i, \ldots, v_2, v_1, v_n, \ldots, v_{i+1})$ são circuitos eulerianos de G em que a primeira aresta é $\{u, w\}$.
- Sejam G um grafo semi-euleriano e $(v_1, \ldots, v_n)$ um caminho euleriano. Então, acrescentando $\{v_n, v_1\}$ ao conjunto das arestas obtém-se um grafo euleriano, porque $(v_1, \ldots, v_n, v_1)$ é um circuito euleriano.

Proposição

Num grafo G em que todos os vértices têm grau par, qualquer caminho simples pode ser estendido a um circuito simples.

PROVA
Seja $C_0 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ um caminho simples de G. Seja m o número de arestas de C_0 que incidem em v_n.

- Se $v_1 = v_n$, então C_0 é um circuito simples (notar que, neste caso, m é par).
- Senão, m é ímpar e, como $gr\ v_n$ é par, há pelo menos uma aresta que incide v_n, digamos $\{v_n, v_{n+1}\}$, que não faz parte de C_0. Então

$$C_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1})$$

é um caminho simples.

Repetindo, sucessivamente, este processo, como G é finito, ao fim de um número finito k ($k \geq 1$) de etapas teremos que

$$C_k = (v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+k})$$

é um caminho simples e $v_1 = v_{n+k}$.

Teorema

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então verifica-se que G é euleriano se e só se todos os vértices têm grau par.

PROVA
Suponhamos que G é euleriano. Seja $v_i \in V$. Então existe $C = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n, v_1)$ um circuito euleriano. Seja m o número de ocorrências do vértice v_i em C. Então,

$$gr\ v_i = \begin{cases} 2m & \text{se } v_i \neq v_1 \\ 2(m-1) & \text{se } v_i = v_1 \end{cases}$$

Logo, $gr\ v_i$ é par.

Reciprocamente, se todos os vértices de V têm grau par, então G tem circuitos simples. Seja $C = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_n, v_1)$ um circuito simples de comprimento máximo. Se C não é euleriano, como G é conexo, existe $w \in V$ e v_i um vértice do caminho C tal que $\{v_i, w\} \in E$. Assim,

$$(w, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i)$$

é um caminho simples, que pode ser estendido a um circuito simples C', cujo comprimento é maior do que o comprimento de C. Então C é um circuito euleriano.

Corolário

Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo, então verifica-se que G é semi-euleriano se e só se existem exatamente dois vértices com grau ímpar.

PROVA
Suponhamos que G é semi-euleriano. Então existe um caminho euleriano que não é um circuito:

$$C = (v_1, \ldots v_i, \ldots, v_n).$$

Seja G' um grafo que resulta de G por se acrescentar $\{v_n, v_1\}$ ao conjunto das arestas. Então, $(v_1, \ldots v_i, \ldots, v_n, v_1)$ é um circuito euleriano em G', pelo que todos os vértices de G' têm grau par. Logo, em G, v_1 e v_n têm grau ímpar e todos os outros vértices têm grau par.
Reciprocamente, se em G existem exatamente dois vértices com grau ímpar, digamos v e w, acrescentemos a G a aresta $\{v, w\}$ obtendo assim um grafo G' em que todos os vértices têm grau par. Logo G' é um grafo euleriano e existe um circuito euleriano do tipo

$$(v, w, \ldots, v).$$

Assim,

$$(w, \ldots, v)$$

é um caminho simples em G que passa por todos os vértices de G. Logo G é semi-euleriano.

EXEMPLOS 29 São grafos eulerianos os grafos:

- C_n ($n \in \mathbb{N}$);
- K_n com n ímpar;
- $K_{m,n}$ onde m e n são pares;
- o octaedro.

Algoritmo para calcular um circuito euleriano

1. Selecionar um vértice v qualquer e construir o caminho trivial $C = (v)$;
2. se não há nenhuma aresta de extremidade v, o algoritmo termina;
3.
   1. caso exista, selecionar uma aresta $\{v, w\}$ que não é uma ponte;
   2. se não existir, selecionar uma aresta ponte $\{v, w\}$;
4. 'remover' a aresta escolhida $\{v, w\}$;
5. prolongar o caminho C acrescentando w no final da sequência;
6. fazer $v = w$ e regressar ao passo 2.

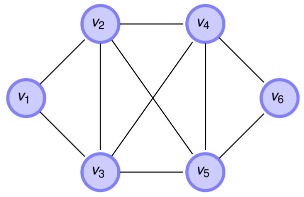
No final se o grafo resultante não tem arestas, o grafo é euleriano e o caminho encontrado é um circuito euleriano.

Para calcular um caminho euleriano, num grafo semi-euleriano, no passo 2 deve-se iniciar o processo selecionando um vértice v de grau ímpar.

Definição

Um caminho num grafo diz-se caminho hamiltoniano se é um caminho elementar e passa em todos os vértices do grafo. Um ciclo que é um caminho hamiltoniano diz-se um ciclo hamiltoniano

EXEMPLO 30



O caminho $(v_3, v_1, v_2, v_4, v_6, v_5)$ é um caminho hamiltoniano.

O ciclo $(v_5, v_3, v_1, v_2, v_4, v_6, v_5)$ é um ciclo hamiltoniano.

Definição

Um grafo G diz-se hamiltoniano se existir um ciclo hamiltoniano em G.

EXEMPLOS 31

São exemplos de grafos hamiltonianos

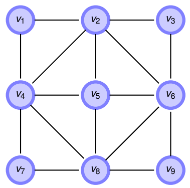
- os grafos ciclos C_n com $n \geq 3$;
- os grafos completos K_n com $n \geq 3$;
- os grafos bipartidos completos da forma $K_{n,n}$ com $n \geq 2$;
- os grafos platónicos.

Notas

Um grafo hamiltoniano é conexo e

- não existem vértices de grau 1;
- se um vértice v tem grau 2, as duas arestas que incidem em v fazem parte de qualquer ciclo hamiltoniano;
- se um vértice v tem grau maior do que 2, em cada ciclo hamiltoniano, apenas duas das arestas que incidem em v fazem parte desse ciclo.

EXEMPLO 32



Como $gr\, v_1 = gr\, v_3 = gr\, v_7 = gr\, v_9 = 2$, então as arestas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_3, v_2\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_7, v_4\}$, $\{v_7, v_8\}$, $\{v_9, v_8\}$ e $\{v_9, v_6\}$ teriam de fazer parte de um qualquer ciclo hamiltoniano de G, caso existisse.

Notar que estas arestas formam o ciclo

$$(v_1, v_2, v_3, v_6, v_9, v_8, v_7, v_4, v_1)$$

que não passa no vértice v_5, pelo que este ciclo não é hamiltoniano.

A inclusão de mais arestas para 'expandir' este ciclo conduzia a um caminho que teria três ou mais arestas incidentes num mesmo vértice.

Logo, não há nenhum ciclo hamiltoniano neste grafo, embora existam caminhos hamiltonianos.

Definição

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $\mathcal{C}$ um conjunto finito a cujos elementos chamaremos cores. Uma coloração de G é uma função $c : V \to \mathcal{C}$ tal que $c(v) \neq c(w)$ se v e w são vértices adjacentes.

c diz-se uma k-coloração se é uma coloração tal que $\sharp c(V) = k$.

Designa-se por número cromático de G ao menor número natural k tal que existe uma k-coloração de G.
Tal número representa-se por $\chi(G)$.

EXEMPLOS 33

- Se G é um grafo bipartido então $\chi(G) = 2$.
- $\chi(C_n) \leq 3$ para qualquer $n \geq 3$.
- $\chi(K_n) = n$ para $n \in \mathbb{N}$.
- Se G é um grafo nulo, então $\chi(G) = 1$

$$1 \leq \chi(G) \leq \sharp V \quad \text{e} \quad \chi(G) = \text{máx}\,\{\chi(G') \mid G' \leq G \text{ e } G' \text{ é conexo}\}.$$

Proposição

Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que $\chi(G) = k$. Então, G tem pelo menos k vértices de grau maior ou igual a $k-1$.

PROVA

Seja G' um subgrafo de G que resulta de G por se retirar um conjunto maximal de arestas sem alterar o número cromático k e eliminar os vértices isolados. É claro que G' é conexo e tem pelo menos k vértices.
Sejam v um vértice qualquer de G' e G'' o grafo que resulta de G' por se eliminar o vértice v e as arestas incidentes em v. Então $\chi(G'') \leq k-1$.

Se $gr\, v \leq k-2$, então, em G', v deverá ter uma cor diferente dos vértices adjacentes (no máximo $k-2$). Assim, o número cromático de G' seria não superior a $k-1$ o que é contraditório com a forma de construção de G'. Logo, os vértices de G' têm grau superior a $k-2$.

$$\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\,\{gr\, v \mid v \in V\}.$$

A primeira conjetura sobre coloração de grafos dizia respeito à coloração de vértices de grafos planares. Francis Guthrie em 1852 conjeturou que todo o grafo planar poderia ser colorido com no máximo 4 cores.

Teorema das cinco cores - Headwood (1890)

Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 5$.

Teorema das quatro cores - Kenneth Appel e Wolfgang Haken (1976)

Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 4$.

Se G é um grafo com n vértices e $\sharp C = k$, existem k^n funções de $V \to \mathcal{C}$. Analisar por exaustão quais dessas funções são colorações não é um método adequado para determinar o número cromático de G.

No entanto existem vários algoritmos para colorir os vértices de um grafo tentando não usar muitas cores sem ser necessário.

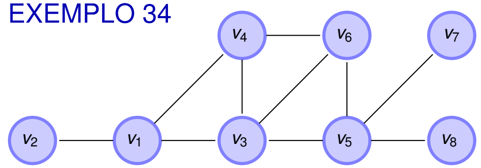
Algoritmo de coloração de vértices de Welch-Powell

1. Colocar os vértices de G em sequência S por ordem decrescente dos seus graus e escolher uma cor c;
2. Atribuir c ao primeiro vértice de S e, percorrendo S por ordem, atribuir a mesma cor a cada vértice que não é adjacente a um vértice de S já colorido com c;
3. Eliminar em S os vértices que foram coloridos com c e retirar c do conjunto das cores.
4. Escolher um novo valor para c e voltar ao passo 2. com a nova sequência, também designada S, enquanto não é vazia.

No final todos os vértices estão coloridos.

Este método nem sempre conduz ao número cromático e é um algoritmo de complexidade $\mathcal{O}(n^2)$. O problema número cromático é um dos 21 problemas NP-completos de Karp, de 1972. Vários algoritmos de tempo exponencial foram desenvolvidos com base no método de Zykov (1949).

EXEMPLO 34



grau	vértices
1	$v_2,\ v_7,\ v_8$
3	$v_1,\ v_4,\ v_6$
4	$v_3,\ v_5$

$$\chi(G) \leq 1 + 4 = 5$$

$\chi(G) \neq 5$ porque não existem 5 vértices de grau maior ou igual a 4. No entanto, existem 4 vértices de grau maior ou igual a 3. Logo, $\chi(G) \leq 4$.

Fazendo $S = (v_3, v_5, v_1, v_6, v_4, v_2, v_7, v_8)$, seguindo o algoritmo, obter-se-ia

$$\begin{array}{cccccccc} v_3 & v_5 & v_1 & v_6 & v_4 & v_2 & v_7 & v_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c_1 & c_2 & c_2 & c_3 & c_4 & c_1 & c_1 & c_1 \end{array}$$

Fazendo $S = (v_3, v_5, v_4, v_6, v_1, v_2, v_7, v_8)$, seguindo o algoritmo, obter-se-ia

$$\begin{array}{cccccccc} v_3 & v_5 & v_4 & v_6 & v_1 & v_2 & v_7 & v_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ c_1 & c_2 & c_2 & c_3 & c_3 & c_1 & c_1 & c_1 \end{array}$$

Como o grafo não é bipartido, então $\chi(G) > 2$ e, consequentemente, $\chi(G) = 3$.

O problema das 4 cores

O resultado foi conjeturado inicialmente em 1852 quando Francis Guthrie, ao tentar colorir o mapa das províncias de Inglaterra, colorindo com cores distintas províncias vizinhas, verificou que só precisava de quatro cores.

A resolução do problema passa por construir um grafo a partir de um mapa:

- cada país (ou região) do mapa é representado por um vértice;
- uma aresta liga dois países que partilham uma fronteira.

Tal grafo é planar e notar que qualquer grafo planar pode ser associado a um mapa. O problema é então o de mostrar que o número cromático de um grafo planar é no máximo quatro.
Só em 1976 surgiu uma prova do resultado. É uma prova computacional que consistia em estudar 1476 mapas e provar que qualquer outro mapa se reduz a um daqueles. Em 1994, Robertson, Sanders e Thomas que reduziram o número de mapas a considerar para 633.

O problema das 3 casas

O problema foi pela primeira vez referido em 1913 por Henry Ernest Dudeney (1857-1930). Trata-se de fazer a ligação de cada uma de três casas às redes de água, de electricidade e de gás, sem que qualquer uma das ligações se cruze. No grafo correspondente,

- os vértices representam as casas e as redes de abastecimento,
- as arestas representam as ligações entre as casas e as redes.

O grafo que modela este problema é $K_{3,3}$.

O problema é saber se o grafo é planar. Como $K_{3,3}$ não é planar o problema não tem solução.

O problema do rei com cinco filhos

Este problema foi apresentado por August F. Möbius (1790-1868) e consiste no seguinte: um rei que tinha cinco filhos, deixou em testamento que, após a sua morte, o reino devia ser dividido em cinco regiões de modo a que cada região tivesse fronteira com cada uma das restantes. Mais, deveriam os filhos fazer estradas que ligasem as capitais de cada região sem que as estradas se cruzassem.

Como resolver o problema?
Construindo um grafo que modele o problema ter-se-ia que:

- os vértices representam as capitais,
- as arestas representam as estradas.

O desejo do rei consiste então em desenhar um grafo com cinco vértices, no qual dois quaisquer vértices são adjacentes que seja planar.

O grafo é K_5 que já sabemos não é planar.