Exemplo 130: O conjunto $\mathcal{T}_{ARIT}$ é o subconjunto de $(\mathcal{A}_{ARIT})^*$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

- **a)** para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_{ARIT}$;
- **b)** $0 \in \mathcal{T}_{ARIT}$;
- **c)** para todo $t_1 \in (\mathcal{A}_{ARIT})^*$, $t_1 \in \mathcal{T}_{ARIT} \Rightarrow s(t_1) \in \mathcal{T}_{ARIT}$;
- **d)** para todos $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_{ARIT})^*$, $t_1 \in \mathcal{T}_{ARIT}$ e $t_2 \in \mathcal{T}_{ARIT} \Rightarrow +(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_{ARIT}$;
- **e)** para todos $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_{ARIT})^*$, $t_1 \in \mathcal{T}_{ARIT}$ e $t_2 \in \mathcal{T}_{ARIT} \Rightarrow \times(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_{ARIT}$.

Teorema 134 (Indução Estrutural em $\mathcal{T}_L$): Seja $P(t)$ uma propriedade relativa a termos t. Se:

- **a)** para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;
- **b)** para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;
- **c)** para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todos $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$, $(P(t_1)$ e … e $P(t_n)) \Longrightarrow P(f(t_1, \dots, t_n))$;

então para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Definição 146: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

- **a)** $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in At_L$;
- **b)** $\perp \in \mathcal{F}_L$;
- **c)** $\varphi \in \mathcal{F}_L \Longrightarrow (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;
- **d)** $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \Longrightarrow (\varphi \,\square\, \psi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todos $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;
- **e)** $\varphi \in \mathcal{F}_L \Longrightarrow (Qx\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo L* ou *L*-fórmulas ou, abreviadamente, *fórmulas*.

Teorema 150 (Indução Estrutural em *L*-Fórmulas): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade relativa a fórmulas φ. Se:

- **a)** $P(\psi)$, para todo $\psi \in At_L$;
- **b)** $P(\perp)$;
- **c)** $P(\psi) \Rightarrow P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;
- **d)** $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \Rightarrow P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$ e para todos $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;
- **e)** $P(\psi) \Rightarrow P(Qx\psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

ARIT – 0;s;+;x-=;<

Tl = {símbolos de função e constantes},{símbolos de relação(boleanos}, N(aridade)

Fórmula atómica – só tem um conectivo de relação

Defina por recursão estrutural o conjunto subf(φ) das subformulas duma formula φ

$subf: \mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_L)$ é a unica função tq

$Subf(\varphi) = \{\varphi\}$, para todo $\varphi \in At_L$

$subf(\perp) = \{\perp\}$

$Subf(\neg\varphi) = \{\neg\varphi\} \cup subf(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$

$Subf(\varphi \square \psi) = \{\varphi \square \psi\} \cup Subf(\varphi) \cup Subf(\psi)$, Para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$, $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

$Subf(Qx\varphi) = \{Qx\varphi\} \cup Subf(\varphi)$, para todos $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $Q \in \{\forall, \exists\}$, $x \in V$

2. Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$. **a)** Explicite a definição indutiva do conjunto dos termos de tipo *L*.

1 - $0 \in T_L$;

2 - $x \in T_L$, para todo $x \in V$;

3 - se $t \in T_L$, então $f(t) \in T_L$;

4 - se $t_1, t_2 \in T_L$, então $g(t_1, t_2) \in T_L$

a) **Enuncie o teorema de indução estrutural para o conjunto $\mathcal{T}_L$.**

1) Para todo $x \in V$, $P(x) \in T_L$;

2) Para todo $0 \in C$, $P(0) \in T_L$;

3) Para todo $f \in F$, de aridade $n \geq 1$, para todo t_1, ~~…~~ $\in T_L$, $P(t_1) \Rightarrow P(f(t_1))$

4) Para todo $g \in F$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, t_2 \in T_L$, $P(t_1, t_2) \Rightarrow P(g(t_1, t_2))$

d) **Demonstre que, para todo o termo $t \in \mathcal{T}_L$, $\#VAR(t) \leq r(t)$.**

d) Seja $P(t)$ a propriedade $\#Var(t) \leq r(t)$

1) Seja $x \in V$. Então $\#Var = \#\{x\} = 1$, $r(x) = 1$, logo $P(x)$ verifica-se

2) $\#var(0) = \#\emptyset = 0$ e $r(0) = 0$, logo $P(0)$ verifica-se

3) Seja $t \in \mathcal{T}_L$ e suponhamos que $p(t)$ se verifica. Então $\#Var(f(t)) = \#Var(t) \underset{(H.I)}{\leq} r(t) = r(f(t))$, logo $P(f(t))$ verifica-se

4) Sejam $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$ e suponhamos que $P(t_1)$ e $p(t_2)$ se verifiquem. Então $\#var(g(t_1, t_2)) = \#var(t_1) \cup var(t_2) \leq \#var(t_1) + \#var(t_2) \leq r(t_1) + r(t_2) = r(g(t_1, t_2))$, logo $P(g(t_1, t_2))$ verifica-se

Por 1, 2, 3 e 4 e pelo principio de indução estrutural para $\mathcal{T}_L$ $P(t)$ é verdadeira, para todo $t \in \mathcal{T}_L$.

a) Defina uma estrutura de tipo *ARIT* E_0 cujo domínio seja o conjunto $\{0, 1\}$ e, para essa estrutura, defina uma atribuição a_0.

2 a)

$\cdot\ \bar{0} = 0$

$\cdot\ \bar{s}' = \{0,1\} \longrightarrow \{0,1\}$

$1 \longrightarrow 0$

$0 \longrightarrow 1$

$\cdot\ \bar{+}$

$\bar{+}$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot\ \bar{x}$

$\bar{x}$	0	1
0	1	0
1	0	1

} 1 das 16 possibilidades $4 \times 4 = 16$

$\cdot\ \bar{=} = \{(0,0), (1,1)\}$

$\cdot\ \bar{<} = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$

ARIT $\cdot\ \bar{0}$ $\cdot\ \bar{s}$ (…) $\cdot\ \bar{+}$ $\cdot\ \bar{x}$ $\cdot\ \bar{=}$ $\cdot\ \bar{<}$

$a_0 : V \longrightarrow \{0,1\}$ → porque o dominio desta estrutura $\{0,1\}$

$x_i \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } i \text{ par} \\ 1 & \text{se } i \text{ impar} \end{cases}$

i. Seja $L = (\{0, -\}, \{P, <\}, N)$ em que $N(0) = 0$, $N(P) = 1$, $N(-) = N(<) = 2$.

a) Dê exemplos dos termos de tipo L. ~~…~~

0; $0 - 0$; $x_1 - x_2$; $x_1 - (0 - x_2)$

b) Dê exemplo de formulas atomicas de tipo L

$x_1 < x_2$; $P(x_1)$; $P(x_2)$

c) Justifique que cada uma das seguintes palavras é uma formula do tipo L

i) $x_2 - 0 < x_1$ $x_2 - 0 < x_1 \in \mathcal{F}_L$, pois $x_2 - 0 < x_1$ é uma formula atomica

v) $\forall x_0 (x_0 < x_1) \vee \exists x_2 (x_1 < x_0)$ 1) $(x_0 < x_1) \in \mathcal{F}_L$ regra a

1) $(x_0 < x_1) \in \mathcal{F}_L$ (regra a) 2) $\forall x_0$ …

2) …

d) calcule o conjunto dos subformulas

ii) $subf(\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)) = \{\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)\} \cup subf(\forall x_1 (x_1 - x_0 < 0))$ …

b) Prove, por indução em *L*-termos, que, para todo o *L*-termo t, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $t[a]_E = 2z$.

4) b)

1) $0[a] = \bar{0} = 0 = 2 \times 0$

2) seja $x_i \in V$

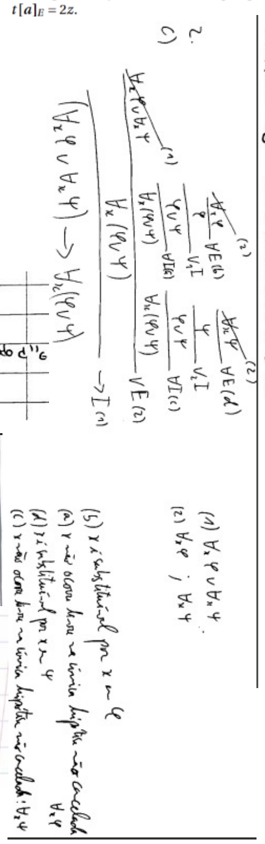
Se i for par, $x_i[a] = a(x_i) = i = 2z$ para algum $z \in \mathbb{Z}$ pq i é par

" i " impar, $x_i[a] = a(x_i) = -2i = 2 \times (-i)$

3) Sejam $t_1, t_2 \in T_L$ e suponhamos que $t_1[a] = 2z_1$ e $t_2[a] = 2z_2$ para alguns $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$

Então $(t_1 - t_2)[a] = t_1[a] - t_2[a] = 2z_1 - 2z_2 = 2\underbrace{(z_1 - z_2)}_{\in \mathbb{Z}}$

Por (i), (ii), (iii) e pelo Principio de indução estrutural para T_L, $t[a] = 2z$, para algum $z \in \mathbb{Z}$, para todo $t \in T_L$.



$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge_1 E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge_2 E$$

$$\frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\to I \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\to E$$

$$\frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg\varphi}\neg I \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\neg E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\vee_1 I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\vee_2 I \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots \\ \sigma\end{matrix}}{\sigma}\vee E$$

$$\frac{\begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{matrix} \quad \begin{matrix}\cancel{\psi}\\ \vdots \\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\leftrightarrow I \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi}\leftrightarrow_1 E \qquad \frac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi}\leftrightarrow_2 E$$

$$\frac{\perp}{\varphi}(\perp) \qquad \frac{\begin{matrix}\cancel{\neg\varphi}\\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\varphi}(RAA)$$

$$\frac{\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}}{\forall x\,\varphi}\forall I\ (a) \qquad \frac{\forall x\,\varphi}{\varphi[t/x]}\forall E\ (b)$$

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\,\varphi}\exists I\ (b) \qquad \frac{\exists x\,\varphi \quad \begin{matrix}\cancel{\varphi}\\ D\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\exists E\ (c)$$

(a) Desde que x não tenha ocorrências livres nas hipóteses não canceladas de $\begin{matrix}D\\ \varphi\end{matrix}$.

(b) Desde que x seja substituível por t em φ.

(c) Desde que x não ocorra livre nem em ψ nem nas hipóteses não canceladas de $\begin{matrix}\varphi\\ D\\ \psi\end{matrix}$ diferentes de φ.

b) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$.

3.b) Seja E uma estrutura de tipo E qualquer e seja a uma atribuição em E

$\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[a]$

sse $(\exists x(\varphi \wedge \psi))[a] = 1$ e $(\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[a] = 0$

sse existe $d \in$ dominio (E) tal que $(\varphi \wedge \psi)[a(^x_d)] = 1$ e $(\exists x\varphi)[a] = 0$ ou $(\exists x\psi)[a] = 0$

sse existe $d \in dom(E)$ tq $\varphi[a(^x_d)] = 1$ e $\psi[a(^x_d)] = 1$ e para todo $d' \in dom(E)$ $\varphi(a(^x_{d'})) = 0$ ou para todo $d'' \in dom(E)$ $\psi[a(^x_{d''})] = 0$

O que é uma contradição.

Assim, $(\exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi))[a] = 1$

Conclusão: $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)$

$\forall_{x_1}((x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2)))_{[a_2]} = 1$ sse $((x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2)))\left[a_2\binom{x_1}{m}\right] = 1$

Ora $(x_1)\left[a_2\binom{x_1}{1}\right] = 1$ e $(x_2)\left[a_2\binom{x_1}{1}\right] = 2$ logo $(x_1 < x_2)\left[a_2\binom{x_1}{m}\right] = 1$

e se $m < 2$, $s(m) < 3$, logo $(s(x_1) < s(x_2))\left[a_2\binom{x_1}{1}\right] = 1$

logo $\forall_{x_1}((x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2)))_{[a_2]} = 1$.

iv) $(x_1 < x_2) \to (S(x_1) < S(x_2))$ é valida em Earit

seja a uma atribuição qualquer em Earit

$(x_1 < x_2) \longrightarrow (S(x_1) < S(x_2))[a] \neq 0$

sse $(x_1 < x_2)[a] = 1$ e $(S(x_1) < S(x_2))[a] = 0$

Ora se $(x_1 < x_2)[a] = 1$ então $a(x_1) < a(x_2)$, donde $a(x_1) + 1 < a(x_2) + 1$, ou seja, $(S(x_1) < S(x_2))[a] = 1$;

Assim, $((x_1 < x_2) \to (S(x_1) < S(x_2)))[a] = 1$

Sejam *L*, *E* e *a* a linguagem, a estrutura e a atribuição, respetivamente, definidas no Exercício 4. Para cada uma das seguintes fórmulas de tipo *L*

iv) $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 < x_2) \to (0 < x_2 - x_1))$

a) $(\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 < x_2) \to (0 < x_2 - x_1)))[a]_E = 1$

sse para todos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1 < x_2) \to (0 < x_2 - x_1)\left[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}\right] = 1$

sse para todos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $(x_1 < x_2)\left[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}\right] = 0$ ou $(0 < x_2 - x_1)\left[a\binom{x_1}{n_1}\binom{x_2}{n_2}\right] = 1$

sse para todos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ $n_1 \geq n_2$ ou $0 > n_2 - n_1$

sse para todos $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ $n_1 \geq n_2$ ou $n_1 < n_2$, o que se verifica; logo $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 < x_2 \to 0 < x_2 - x_1)[a] = 1$

b) mesma coisa mas começando com: Seja a' uma atribuição qualquer em E

c) Não. Seja $E' = (\mathbb{Z}, -')$ e a estrutura do tipo L onde $\bar{0} = 2$, $\bar{=}' = \bar{=}$, $\bar{<}' = \bar{<}$, $\bar{P}' = \bar{P}$

seja a' uma atribuição qualquer em E'. $(\forall x_1 \forall x_2 (x_1 < x_2 \to 0 < x_2 - x_1))[a'] = 0$ pq $(x_1 < x_2 \to 0 < x_2 - x_1)\left[a'\binom{x_1}{1}\binom{x_2}{2}\right] = 0$ já que $(x_1 < x_2)\left[a'\binom{x_1}{1}\binom{x_2}{2}\right]_{E'} = 1$ $(1 < 2)$ mas $(0 < x_2 - x_1)\left[a'\binom{x_1}{1}\binom{x_2}{2}\right]_{E'} = 0$ $2 \not< 2 - 1$

~~seja a' a atribuição em E' tq a'(x_1) = i~~

iv) $\not\models (x_1 < x_2) \to (S(x_1) < S(x_2))$

Seja $E' = (\mathbb{N}_0, -')$ como $\bar{0}' = \bar{0}$, $\bar{+}' = \bar{+}$, $\bar{x}' = \bar{x}$, $\bar{=}' = \bar{=}$, $\bar{<}' = \bar{<}$ e $\bar{S}' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto 0$

Seja $a : V \to \mathbb{N}_0$, $x_i \longmapsto i$, $(x_1 < x_2)[a]_{E'} = 1$ pq $1 < 2$ $a(x_1) = 1$ $a(x_2) = 2$ mas $S(x_1) < S(x_2) = 0$ pq $S(x_1) = 0$ e $S(x_2) = 0$ e $0 \not< 0$

5) iii) a) $(x_0 < 0 \vee \neg(x_0 < 0))[a]_E = 1$ pq $(\neg(x_0 < 0))[a]_E = 1$, já que $(x_0 < 0)[a]_E = 0$ $(a(x_0) = 0, \bar{0} = 0$ e $0 \not< 0)$

c) $(x_0 < 0 \vee \neg(x_0 < 0)) = (p_0 \vee \neg p_0)[x_0 < 0 / p_0]$

e $p_0 \vee \neg p_0$ é uma tautologia, logo $x_0 < 0 \vee \neg(x_0 < 0)$ é universalmente valida

c) Não. Consideremos o tipo de linguagem ARIT, a estrutura EArit, a variavel x_1 as formulas $x_1 = 0$ e $x = S(0)$.

Seja a uma atribuição em EArit

$((\exists x_1\, x = 0 \wedge \exists x_1\, x_1 = S(0)) \longrightarrow \exists x_1 (x_1 = 0 \wedge x_1 = S(0)))[a] = 0$

pq. $(\exists x_1\, x_1 = 0)[a] = 1$ $((x_1 = 0)[a(^{x_1}_0)] = 1$ $(\exists x_1\, x = S(0))[a] = 1$ $((x_1 = S(0))[a(^{x_1}_1)] = 1$

$\exists x_1 (x_1 = 0 \wedge x_1 = S(0))[a] = 0$ (para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $(x = 0 \wedge x_1 = S(0))[a(^{x_1}_n)] = 0$, ja que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq 0$ ou $n \neq 1$)