1.3. Dedução Natural para o Cálculo Proposicional

Observação 89: O sistema formal de demonstrações que estudaremos nesta secção será notado por DNP e designado por *Dedução Natural para o Cálculo Proposicional*.

Observação 90: O sistema DNP constitui uma certa formalização da noção de *demonstração* para as fórmulas do Cálculo Proposicional, num estilo conhecido como *dedução natural*. As demonstrações permitirão uma abordagem alternativa à relação de consequência semântica (definida à custa do conceito de valoração) e, em particular, permitirão identificar as tautologias com as fórmulas para as quais podem ser construídas demonstrações.

Exemplo 91: Demonstrações em DNP serão construídas usando um certo conjunto de regras (chamadas *regras de inferência*), que codificam raciocínios elementares utilizados habitualmente na elaboração de demonstrações matemáticas.
Um raciocínio elementar que usamos frequentemente na construção de demonstrações é o seguinte: de φ e $\varphi \to \psi$ podemos concluir ψ.
Representaremos este raciocínio do seguinte modo:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$$

Esta regra é habitualmente conhecida por *modus ponens*, embora no formalismo DNP adotemos um nome diferente para esta regra, como veremos adiante.

Um outro raciocínio elementar é o seguinte: se assumindo φ por hipótese podemos concluir ψ, então podemos concluir $\varphi \to \psi$. Este raciocínio será representado do seguinte modo:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \longrightarrow \psi}$$

Neste raciocínio, φ é uma *hipótese temporária* usada para concluir ψ. A notação $\cancel{\varphi}$ reflete o facto de que a conclusão $\varphi \to \psi$ *não depende* da hipótese temporária φ. Nesta representação, a notação $\vdots$ simboliza a possibilidade de podermos concluir ψ a partir de φ.

Notação 92: O conceito de demonstração em DNP será formalizado adiante, através de uma definição indutiva. As demonstrações corresponderão a certas *árvores finitas de fórmulas*, onde uma fórmula φ que ocorra como *folha* poderá estar *cortada*, o que será notado por $\cancel{\varphi}$.
Na apresentação das regras de inferência de *DNP*, usaremos a notação

$$\begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ \vdots \\ \psi \end{array}$$

para representar uma árvore de fórmulas cuja *raiz* é ψ e cujas eventuais ocorrências da fórmula φ como folha podem ser cortadas.

Definição 93: As *regras de inferência* do sistema formal DNP são apresentadas de seguida. Cada uma destas regras origina uma regra na definição indutiva do *conjunto das derivações* (Definição 95). As regras de inferência recebem derivações (uma ou mais) e produzem uma nova derivação.

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi\rightarrow\psi}\ \rightarrow I \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \varphi & \varphi\rightarrow\psi\end{array}}{\psi}\ \rightarrow E$$

Numa regra de inferência, as fórmulas imediatamente acima do *traço de inferência* serão chamadas as *premissas* da regra e a fórmula abaixo do traço de inferência é chamada a *conclusão* da regra de inferência.

Regras de **I***ntrodução*

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \varphi & \psi\end{array}}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge I$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg I$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ \vee_1 I \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \vee \psi}\ \vee_2 I$$

Regras de **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\varphi}\ \wedge_1 E \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \varphi \wedge \psi\end{array}}{\psi}\ \wedge_2 E$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \varphi & \neg\varphi\end{array}}{\bot}\ \neg E$$

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & \cancel{\varphi} & \cancel{\psi}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi \vee \psi & \sigma & \sigma\end{array}}{\sigma}\ \vee E$$

Regras de **I***ntrodução* *Regras de* **E***liminação*

$$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi} & \cancel{\psi} \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{matrix}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \varphi & \varphi \leftrightarrow \psi \end{matrix}}{\psi} \leftrightarrow_1 E \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \leftrightarrow \psi \end{matrix}}{\varphi} \leftrightarrow_2 E$$

$$\dfrac{\begin{matrix} \cancel{\neg\varphi} \\ \vdots \\ \bot \end{matrix}}{\varphi} \ (RAA) \qquad \dfrac{\begin{matrix} \vdots \\ \bot \end{matrix}}{\varphi} \ (\bot)$$

Uma *aplicação* ou *instância* de uma regra de inferência é uma *substituição das fórmulas da regra (meta-variáveis) por fórmulas do CP*. Chamaremos *inferência* a uma aplicação de uma regra de inferência.

Exemplo 94: Vejamos dois exemplos de inferências $\wedge_1 E$:

$$\dfrac{p_1 \wedge p_2}{p_1}\ \wedge_1 E \qquad\qquad \dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E \tag{1}$$

Estas duas inferências podem ser *combinadas* do seguinte modo:

$$\dfrac{\dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E \tag{2}$$

Combinando esta construção com uma inferência $\to I$ podemos obter:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)}}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \to \neg p_3)) \to p_1}\ \to I \tag{3}$$

As duas inferências em (1), assim como as combinações de inferências em (2) e (3), são exemplos de demonstrações no sistema formal DNP.

Definição 95: O *conjunto* $\mathcal{D}^{DNP}$ *das derivações de DNP* é o menor conjunto X, de árvores finitas de fórmulas, com folhas possivelmente cortadas, tal que:

a) para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, a árvore cujo único nodo é φ pertence a X;

b) X é *fechado* para cada uma das regras de inferência de DNP; por exemplo, X é fechado para as regras $\to I$ e $\to E$:

i) $$\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix} \in X \implies \dfrac{\begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}}{\varphi \to \psi} \to I \in X$$

(onde $\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}$ denota uma derivação (árvore de fórmulas) cuja raiz é ψ e $\begin{matrix} \cancel{\varphi} \\ D \\ \psi \end{matrix}$ denota a árvore de fórmulas obtida de $\begin{matrix} D \\ \psi \end{matrix}$ cortando todas as eventuais ocorrências de φ como folha);

$$\textbf{ii)}\ \ \overset{D_1}{\varphi} \in X \text{ e } \overset{D_2}{\varphi \to \psi} \in X \implies \dfrac{\overset{D_1}{\varphi} \quad \overset{D_2}{\varphi \to \psi}}{\psi} \to E \ \in X.$$

As derivações de DNP são também chamadas *deduções*. No nosso estudo, privilegiaremos a terminologia derivação. A terminologia *demonstração* será reservada para uma classe especial de derivações (ver Definição 99).

Observação 96: O conjunto $\mathcal{D}^{DNP}$ das derivações de DNP admite princípios de indução estrutural e de recursão estrutural. Existe também um conceito natural de *subderivação*. Por exemplo, a derivação (3) do exemplo 94 tem as seguintes quatro subderivações:

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \longrightarrow \neg p_3)\,, \qquad \dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \longrightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E\,,$$

$$\dfrac{\dfrac{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \longrightarrow \neg p_3)}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E\,, \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{(p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \longrightarrow \neg p_3)}}{p_1 \wedge p_2}\ \wedge_1 E}{p_1}\ \wedge_1 E}{((p_1 \wedge p_2) \wedge (p_1 \longrightarrow \neg p_3)) \longrightarrow p_1}\ \longrightarrow I\,.$$

Exemplo 97: Para quaisquer fórmulas do CP φ, ψ e σ, as construções abaixo são exemplos de derivações de DNP.

1)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\varphi}\;\wedge_1 E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi\wedge\psi}^{(1)}}{\psi}\;\wedge_2 E \quad \psi\rightarrow(\varphi\rightarrow\sigma)}{\varphi\rightarrow\sigma}\;\rightarrow E}{\sigma}\;\rightarrow E}{(\varphi\wedge\psi)\rightarrow\sigma}\;\rightarrow I^{(1)}
$$

2)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi}^{(2)} \qquad \cancel{\neg\neg\varphi}^{(1)}}{\perp}\;\neg E}{\varphi}\;RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi\rightarrow\varphi}\;\rightarrow I^{(1)}
$$

3)

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(1)}}{\psi \rightarrow \varphi} \rightarrow I^{(2)}}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)} \rightarrow I^{(1)}$$

Os números naturais que aparecem a anotar inferências e fórmulas cortadas estabelecem uma correspondência, unívoca, entre as fórmulas cortadas e as regras que permitem efetuar esses cortes. Por exemplo, em **3)**, a inferência $\rightarrow I$ anotada com (1) é utilizada para cortar a única ocorrência como folha de φ, enquanto que a inferência $\rightarrow I$ anotada com (2) não é utilizada para efetuar qualquer corte.

Definição 98: Numa derivação D:
a raiz de D é chamada a *conclusão* de D; as folhas de D são chamadas as *hipóteses* de D; as folhas de D cortadas serão chamadas as *hipóteses canceladas* de D; as folhas de D não cortadas serão chamadas as as *hipóteses não canceladas* de D.

Definição 99: Diremos que uma derivação D é uma *derivação de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas* Γ quando φ é a conclusão de D e o conjunto das hipóteses não canceladas de D é um subconjunto de Γ.
Diremos que D é uma *derivação de uma fórmula φ* quando φ é a conclusão de D e todas as hipóteses de D estão canceladas. A uma derivação de φ chamaremos também uma *demonstração* de φ.

Exemplo 100: Sejam φ, ψ e σ fórmulas.

1. Seja D_1 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \to E \qquad \cancel{\psi \to \sigma}^{(1)}}{\sigma} \to E}{\varphi \to \sigma} \to I^{(2)}}{(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)} \to I^{(1)}$$

   Então:

   (i) o conjunto de hipóteses de D_1 é $\{\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \sigma\}$;
   (ii) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_1 é $\{\varphi \to \psi\}$;
   (iii) a conclusão de D_1 é $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$;
   (iv) D_1 é uma derivação de $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ a partir de $\{\varphi \to \psi\}$.

2. Seja D_2 a seguinte derivação de DNP.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\varphi}\,\wedge_1 E \qquad \dfrac{\cancel{\varphi \wedge \neg\varphi}^{(1)}}{\neg\varphi}\,\wedge_2 E}{\perp}\,\neg E}{\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)}\,\neg I^{(1)}$$

Então:

(i) o conjunto de hipóteses de D_2 é $\{\varphi \wedge \neg\varphi\}$;

(ii) o conjunto de hipóteses não canceladas de D_2 é vazio;

(iii) a conclusão de D_2 é $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$;

(iv) D_2 é uma derivação (ou uma demonstração) de $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Definição 101: Uma fórmula φ diz-se *derivável a partir de* um conjunto de fórmulas Γ ou uma *consequência sintática* de Γ quando existe uma derivação de DNP cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Escreveremos $\Gamma \vdash \varphi$ para denotar que φ é derivável a partir de Γ
e $\Gamma \nvdash \varphi$ para denotar que φ não é derivável a partir de Γ.

Definição 102: Uma fórmula φ diz-se um *teorema* de DNP quando existe uma demonstração de φ. Escreveremos $\vdash \varphi$ para denotar que φ é um teorema de DNP
e $\nvdash \varphi$ para denotar que φ não é teorema de DNP.

Exemplo 103: Atendendo ao exemplo anterior:

1. $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ (i. e., $(\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma)$ é derivável a partir de $\{\varphi \to \psi\}$).
2. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (i. e., $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ é um teorema de DNP).

Definição 104: Um conjunto de fórmulas Γ diz-se (*sintaticamente*) *inconsistente* quando $\Gamma \vdash \bot$ e diz-se (*sintaticamente*) *consistente* no caso contrário (i. e. quando $\Gamma \nvdash \bot$, ou seja, quando não existem derivações de $\bot$ a partir de Γ).

Exemplo 105: O conjunto $\Gamma = \{p_0, p_0 \to \neg p_0\}$ é inconsistente. Uma derivação de $\bot$ a partir de Γ é:

$$\dfrac{p_0 \qquad \dfrac{p_0 \quad p_0 \to \neg p_0}{\neg p_0} \to E}{\bot} \neg E$$

Proposição 106: Seja Γ um conjunto de fórmulas. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) Γ é inconsistente;
b) para alguma fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$;
c) para toda a fórmula φ, $\Gamma \vdash \varphi$.

Dem.: É suficiente provar, por exemplo, as implicações **a)⇒b)**, **b)⇒c)** e **c)⇒a)**.

a)⇒b): admitindo que Γ é inconsistente, existe uma derivação D de $\perp$ a partir de Γ. Assim, fixando uma (qualquer) fórmula φ, tem-se que

$$D_1 = \cfrac{\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}}{\varphi}\ (\perp) \qquad\qquad D_2 = \cfrac{\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi}\ (\perp)$$

são, respetivamente, derivações de φ a partir de Γ (a conclusão de D_1 é φ e as hipóteses não canceladas de D_1 são as mesmas que em D) e de $\neg\varphi$ a partir de Γ (a conclusão de D_2 é $\neg\varphi$ e as hipóteses não canceladas de D_2 são as mesmas que em D). Por conseguinte, $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$. (Exercício: prove as outras duas implicações.) □

Notação 107: Na representação de consequências sintáticas utilizaremos abreviaturas análogas às utilizadas para representação de consequências semânticas. Por exemplo, dadas fórmulas $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e dados conjuntos de fórmulas Γ e Δ, escreveremos $\Gamma, \Delta, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ em vez de $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Proposição 108: Para toda a fórmula φ, $\vdash \varphi$ se e só se $\emptyset \vdash \varphi$.

Dem.: Imediata a partir das definições. $\square$

Proposição 109: Sejam φ e ψ fórmulas e Γ e Δ conjuntos de fórmulas. Então:

a) se $\varphi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \varphi$;

b) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\Delta \vdash \varphi$;

c) se $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Delta, \varphi \vdash \psi$, então $\Delta, \Gamma \vdash \psi$;

d) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ se e só se $\Gamma, \varphi \vdash \psi$;

e) se $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ e $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que $\varphi \in \Gamma$. Então, a árvore cuja única fórmula é φ é uma derivação cuja conclusão é φ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é $\{\varphi\}$, que é um subconjunto de Γ, pois $\varphi \in \Gamma$. Assim, por definição de consequência sintática, $\Gamma \vdash \varphi$.

b), **c)** e **e)**: Exercício.

d) Suponhamos que $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, i.e. suponhamos que existe uma derivação D de $\varphi \to \psi$ a partir de Γ. Então,

$$\dfrac{\varphi \qquad \overset{D}{\varphi \to \psi}}{\psi} \to E$$

é uma derivação de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$, pois: i) ψ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por φ e pelas hipóteses não canceladas de D, que formam um subconjunto de Γ, sendo portanto Δ um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Suponhamos agora que $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, i.e. suponhamos que existe uma derivação D de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Então, a derivação

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi}^{(1)} \\ D \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I^{(1)},$$

é uma derivação de $\varphi \rightarrow \psi$ a partir de Γ, pois: i) $\varphi \rightarrow \psi$ é a conclusão desta derivação; e ii) o conjunto Δ de hipóteses não canceladas desta derivação é constituído por todas as hipóteses não canceladas de D (um subconjunto de $\Gamma \cup \{\varphi\}$), exceto φ, sendo portanto Δ um subconjunto de Γ. $\square$

Teorema 110 (*Correção*): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \vdash \varphi, \text{ então } \Gamma \models \varphi.$$

Suponhamos $\Gamma \vdash \varphi$, i. e., suponhamos que existe uma derivação D de φ a partir de Γ. Aplicando o lema que se segue, conclui-se de imediato o resultado pretendido.

Lema: Para todo $D \in \mathcal{D}^{DNP}$, se D é uma derivação de φ a partir de Γ, então $\Gamma \models \varphi$.

Dem. do Lema: Por indução estrutural em derivações.

a) Suponhamos que D é uma derivação de φ a partir de Γ com um único nodo. Então, o conjunto de hipóteses não canceladas de D é $\{\varphi\}$ e, assim, $\varphi \in \Gamma$. Donde, pela Proposição 86(a), $\Gamma \models \varphi$.

b) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\psi}\\ D_1\\ \sigma\end{array}}{\psi \to \sigma} \to I,$$

então $\varphi = \psi \to \sigma$ e D_1 é uma derivação de σ a partir de $\Gamma \cup \{\psi\}$. Assim, aplicando a hipótese de indução relativa à subderivação D_1, $\Gamma, \psi \models \sigma$. Donde, pela Proposição 86(d), $\Gamma \models \psi \to \sigma$.

c) Caso D seja uma derivação de φ a partir de Γ da forma

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \sigma \end{matrix} \quad \begin{matrix} D_2 \\ \sigma \to \psi \end{matrix}}{\psi} \to E,$$

então $\varphi = \psi$ D_1 é uma derivação de σ a partir de Γ e D_2 é uma derivação de $\sigma \to \psi$ a partir de Γ. Assim, aplicando as hipóteses de indução relativas às subderivações D_1 e D_2, segue $\Gamma \models \sigma$ e $\Gamma \models \sigma \to \psi$, respetivamente. Daqui, pela Proposição 86(e), conclui-se $\Gamma \models \psi$.

d) Os restantes casos, correspondentes às outras formas possíveis de D, são deixados como exercício.

$\square$

Observação 111: O Teorema da Correção constitui uma ferramenta para provar a não derivabilidade de fórmulas a partir de conjuntos de fórmulas. De facto, do Teorema da Correção segue que

$$\Gamma \not\models \varphi \Longrightarrow \Gamma \nvdash \varphi,$$

o que significa que, para mostrar que não existem derivações em DNP de uma fórmula φ a partir de um conjunto de fórmulas Γ, basta mostrar que φ não é consequência semântica de Γ.

Exemplo 112: Seja $\Gamma = \{p_1 \vee p_2, p_1 \to p_0\}$.

1. Em DNP não existem derivações de $p_0 \vee p_1$ a partir de Γ. Se existisse uma tal derivação, pelo Teorema da Correção, teríamos $\Gamma \models p_0 \vee p_1$, mas esta consequência semântica não é válida (tome-se, por exemplo, a valoração que atribui valor 1 a p_2 e valor 0 às restantes variáveis proposicionais).
2. De forma análoga, pode verificar-se que Γ é satisfazível e, então, concluir que Γ é consistente (proposição seguinte).

Proposição 113: Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Se Γ é satisfazível, então Γ é consistente.

Dem.: Suponhamos que Γ é satisfazível e $\Gamma \vdash \perp$. Então, pelo Teorema da Correção, $\Gamma \models \perp$. Assim, existe alguma valoração v que satisfaz Γ e tem-se $v(\perp) = 1$, o que é absurdo. Concluímos que se Γ é satisfazível, tem de ser $\Gamma \nvdash \perp$. □

Definição 114: Um conjunto $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$ diz-se *maximalmente consistente* se

1. Γ é consistente; e
2. se $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e Γ' é consistente, então $\Gamma = \Gamma'$.

(A condição 2. pode ser substituída por: para todo $\psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que $\psi \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\psi\}$ é inconsistente.)

Exemplo 115: Seja v uma valoração qualquer e seja $\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{F}^{CP} : v(\varphi) = 1\}$. Então Γ é maximalmente consistente: 1 - Γ é consistente por ser satisfazível; 2 - se $\psi \notin \Gamma$, então $v(\psi) = 0$, pelo que $v(\neg\psi) = 1$, donde $\neg\psi \in \Gamma$; assim, $\{\psi, \neg\psi\} \subseteq \Gamma \cup \{\psi\}$, logo $\Gamma \cup \{\psi\}$ é inconsistente.

Proposição 116: Todo o conjunto de fórmulas consistente está contido num conjunto maximalmente consistente.

Dem.: Seja Γ um conjunto de fórmulas consistente. O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ é numerável, pelo que podemos considerar uma sucessão de fórmulas $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ que o esgota. Vamos definir uma sucessão de conjuntos de fórmulas da seguinte forma:

$$\Gamma_0 = \Gamma;$$

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} & \text{se } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ é consistente} \\ \Gamma_i & \text{se } \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \text{ é inconsistente} \end{cases}$$

Prova-se que $\Gamma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \Gamma_i$ é maximalmente consistente. $\square$

Proposição 117: Se Γ é um conjunto maximalmente consistente, então é fechado para a derivabilidade (i. e., $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.)

Dem.: Seja Γ maximalmente consistente e suponhamos que $\varphi \notin \Gamma$; então $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente. Daqui concluímos facilmente (v. abaixo) que $\Gamma \vdash \neg\varphi$. Isto significa que $\Gamma \nvdash \varphi$, porque caso contrário Γ seria inconsistente.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \cancel{\varphi} \\ D \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\ \neg I$$

□

Proposição 118: Seja Γ um conjunto maximalmente consistente.

1. Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, ou $\varphi \in \Gamma$ ou $\neg\varphi \in \Gamma$.
2. Para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, $\varphi \to \psi \in \Gamma$ se e só se $\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$.

Dem.: Exercício. □

Proposição 119: Seja $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Se Γ é consistente, então Γ é satisfazível.

Dem.: Suponhamos que Γ é consistente e seja Γ^* um conjunto maximalmente consistente que contenha Γ. Seja v a única valoração tal que

$$v(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } p_i \in \Gamma^* \\ 0 & \text{se } p_i \notin \Gamma^* \end{cases}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0.$$

Prova-se, por indução sobre $\mathcal{F}^{CP}$, que $v(\varphi) = 1$ se e só se $\varphi \in \Gamma^*$ (exercício). Em particular, v sat. Γ. □

Teorema 120 (Completude): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subseteq \mathcal{F}^{CP}$,

$$\text{se } \Gamma \models \varphi, \text{ então } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Se $\Gamma \nvdash \varphi$, então $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente (porquê?) logo, pela proposição anterior, é satisfazível, i. e., existe uma valoração v tal que v sat. Γ e $v(\varphi) = 0$, ou seja, $\Gamma \not\models \varphi$. □

Teorema 121 (Adequação): Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ e para todo $\Gamma \subset \mathcal{F}^{CP}$,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se e só se } \Gamma \models \varphi.$$

Dem.: Consequência imediata dos teoremas da Correção e da Completude. $\square$

Corolário 122: Para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$, φ é um teorema de DNP se e só se φ é uma tautologia.
Dem.: Exercício. $\square$