Teste 23/24

1. Considere as linguagens $L_1 = A^*aA^*aA^*$, $L_2 = A^*aaA^*$ e $L_3 = L_1 \setminus A^*abA^*$ sobre o alfabeto $A = \{a,b\}$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) $L_1 = L_2$.

b) $L_3 \subseteq L_2$.

a) Temos o exemplo da palavra aba que pertence a $L_1$ mas não pertence a $L_2$. Logo Falso.

b) Verdadeira. Consideremos uma palavra $u \in L_3$, ou seja, $w \in L_1$ e $u \notin A^*abA^*$. Deve mostrar que $u \in L_2$. Ora, de $w \in L_1$, resulta que $u = u_1 a u_2 a u_3$ $u_i \in A^*$. Se $u_2$ tivesse alguma ocorrência da letra b, u teria o fator ab, o que não pode acontecer, pois $u \notin A^*abA^*$. Logo $u_2 = a^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. $w = A^*aa^kaA^* = A^*aaa^kA^*$. tem o fator aa. Logo $\subseteq L_2$

2. Seja $L$ a linguagem representada pela expressão regular $(a^* + b)^*c^*a(b^* + c)a(b + c)^*(abc)^*$ sobre o alfabeto $A = \{a,b,c\}$.

$\overset{11}{(a+b)^*}$

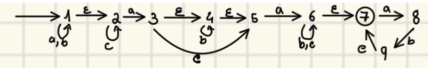
a) Indique um autómato finito com transições vazias que reconheça $L$.

b) Indique todas as palavras de $L$ de comprimento $\leq 4$.

c) É verdade que $L \cap A^*abcaA^* = \emptyset$? Justifique.

d) Indique uma palavra $u$ de $L \cap bcaA^*$ de comprimento 8 tal que $u = u^I$.

$(a^* + b^*) \neq (a+b)^*$

a) 

b) $a^2, a^3, ba^2, ca^2, aba, aca, a^2b, a^2c, a^4, aba^2, ba^3, b^2a^2, \ldots$

c) Falso, a palavra $abaca^2 \in L$ e tem o fator abca

d) bcabbacb

3. Seja $L$ a linguagem sobre o alfabeto $A = \{a,b,c\}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

i) $c \in L$;

ii) Se $w \in L$, então $bw \in L$;

iii) Se $w \in L$, então $awaa \in L$.

Seja ainda $K = \{xca^{2n} : x \in \{a,b\}^*, n \in \mathbb{N}_0, |x|_a = n\}$.

a) Mostre que a palavra $u = ab^2abca^4$ pertence a $L$ e a $K$.

b) Prove que $L = K$.

c) Mostre que a linguagem $M = \{a^mca^{2m} : m \in \mathbb{N}_0\}$ não é regular.

d) Indique uma linguagem regular $R$ tal que $L \cap R = M$.

e) Apresente uma definição indutiva de $R$.

a) 1) $c \in L$ (regra i)); 2) $bc \in L$ (regra ii) e 1)); 3) $abca^2$ (regra iii) e 2)); 4) $b^2abca^2$ (regra ii) 2x e 3); 5) $ab^2abca^4 \in L$ (regra iii) e 4)). $u = xca^{2n}$ com $x = ab^2ab$ e $n = 2$. Dado que $|u|_a = 2$; $u \in K$

b) $L \subseteq K$

i) Suponhamos primeiro que $v = c$. Neste caso tem-se $v = xca^{2n}$ com $x \equiv \varepsilon$ e $n = 0$. Como $|\varepsilon|_a = 0$ é imediato que $v \in K$.

ii) Suponhamos agora que $v = bw$, com $w \in L$. Suponhamos ainda, por H.I, que $w \in K$. Então $w$ é do tipo $w = xca^{2n}$ com $x \in \{a,b\}^*$ e $|x|_a = n$. Daí resulta que $v = bxca^{2n}$ e que $|bx|_a = n$. Portanto $v \in K$.

iii) Por fim, $v = awa^2$, com $w \in L$. Assume-se também, por H.I, que $w \in K$. Logo $w = xca^{2n}$ com $x \in \{a,b\}^*$ e $|x|_a = n$. Assim $v = axca^{2(n+1)}$ com $|ax|_a = n+1$. $V \in K$

$K \subseteq L$

i) Suponhamos primeiro que $n = 0$. Então $v = b^mc$ para algum $m \in \mathbb{N}_0$. Por i), $c \in L$. Se $m = 0$, então $v = c \in L$. Senão $m > 0$ e aplicando m vezes consecutivas a regra ii) deduz-se que $v = b^mc \in L$.

ii) Suponhamos agora que $n > 0$. Suponhamos ainda, por H.I, que para cada elemento $z \in K$ da forma $z = yca^{2(n-1)}$ com $y \in \{a,b\}^*$ e $|y|_a = n-1$, tem-se $z \in L$. De $|w|_a = n$, resulta que $x$ é da forma $x = b^may$ com $y \in \{a,b\}^*$ e $|y|_a = n-1$. Logo, $v = b^maza^2$ onde $z = yca^{2(n-1)}$. Por definição de $K$, $z \in K$.

Logo, pela H.I, $z \in L$. Pela regra iii) deduz-se, por conseguinte, que a palavra $aza^2 \in L$. Para concluir que $v \in L$ basta agora aplicar m vezes a regra ii).

c) Pelo Teorema de Kleene, mostrar que M não é regular equivalente a mostrar que não é reconhecível. Suponhamos que M é reconhecível. Então, pelo Lema da Iteração, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $u \in M$, com $|u| \geq n$, existe palavras $x,y,z \in A^*$ tais que:

i) $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$;

ii) $u = xyz$;

iii) $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $xy^kz \in M$

Consideremos, em particular, a palavra $u = a^nca^{2n}$. Como $u \in M$ e $|u| \geq n$, deduz-se de i a iii que $u = xyz$ para alguns $x,y,z \in A^*$ tais que $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^2z \in M$. Como $|xy| \leq n$, $xy$ é um prefixo de $a^n$, donde $x = a^r$, $y = a^s$ e $z = a^tca^{2n}$ com $r,s,t \in \mathbb{N}_0$, $s \neq 0$ e $r+s+t = n$, como se ilustra na seguinte figura

| $a^n$ | | $ca^{2n}$ |
|---|---|---|
| x | y | z |

Portanto, $xy^2z = a^r(a^s)^2a^tca^{2n} = a^{n+s}ca^{2n}$.

Como $s \neq 0$, $2(n+s) \neq 2n$ e, por isso, $xy^2z \notin M$, em contradição com (1). Consequentemente, M não é reconhecível donde, pelo Teorema de Kleene, não é regular.

d) É claro que $M \subseteq L \cap R$ pois toda a palavra da forma $a^mca^{2m}$, com $m \in \mathbb{N}_0$, pertence a $L (= K)$ e a $R$. Verifiquemos, para concluir, que $L \cap R \subseteq M$. Seja $v \in L \cap R$. Então $v \in L$ e $v \in R$. De $v \in R$, deduz-se que $v = a^mca^n$ para alguns $m,n \in \mathbb{N}_0$. Agora, de $v \in L$, e do facto de $L = K$ por b), resulta que $n = 2m$. Logo, $v \in M$. c.q.m.

e) i) $c \in R$; ii) Se $w \in R$, então $aw \in R$; iii) Se $w \in R$, então $wa \in R$.

Características dos automatos: Determinista - Só pode sair uma ocorrência de cada letra

Completo - tem de existir pelo menos uma transição de cada letra em cada estado.

Acessível - Se todos os estados são acessíveis a partir do estado inicial.

CO-Acessível - Se de qualquer estado consegues chegar ao estado final.

4. Seja $L$ a linguagem sobre o alfabeto $\{a,b\}$ constituída pelas palavras que começam por $a$ e não têm o fator $b^2$.

a) Indique um autómato finito que reconheça $L$.

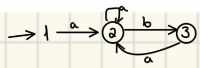
b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa $L$ ou não.

i) $a(ba)^* + a(ab)^*$.

ii) $a(a + ba)^*$.

iii) $a(a + ba)^*(\epsilon + b)$.

c) Indique todas as palavras de $L$ de comprimento $\leq 4$.

a) 

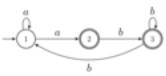
b) i) $aba^2 \in L$, mas $\notin L(R)$

ii) $ab \in L$, mas $\notin L(R)$

iii) r é a expressão regular que representa a linguagem reconhecida pelo automato da alínea a)

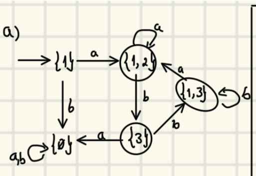
c) $\{u \in L : |u| \leq 4\} = \{a, a^2, ab, a^3, a^2b, aba, a^4, a^3b, a^2ba, aba^2, (ab)^2\}$

5. Seja $\mathscr{A}$ o autómato finito representado pelo seguinte grafo:



a) Construa um autómato finito determinista completo acessível equivalente a $\mathscr{A}$.

b) Indique palavras $u, v \in A^*$ tais que $|u| = |v| = 6$, $u \in L(\mathscr{A})$ e $v \notin L(\mathscr{A})$.

a) 

b) $u = a^2b^2a^2$ $v = ba^3ba$

**Lema da Iteração (ou da Bombagem)**

Seja $L$ uma linguagem reconhecível infinita, sobre um alfabeto $A$. Então existe uma constante $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda a palavra $u \in L$ de comprimento superior ou igual a $n$, existem palavras $x, y, z \in A^*$ tais que:

i) $|xy| \leq n$ e $y \neq \epsilon$;

ii) $u = xyz$;

iii) $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $xy^kz \in L$.

**Exemplo 3**

A linguagem $L = \{a^mb^m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ sobre o alfabeto $A = \{a,b\}$ não é reconhecível.

**Demonstração:** Suponhamos que $L$ é reconhecível. Então, pelo Lema da Iteração, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $u \in L$, com $|u| \geq n$, existem palavras $x, y, z \in A^*$ tais que:

i) $|xy| \leq n$ e $y \neq \epsilon$;

ii) $u = xyz$;

iii) $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $xy^kz \in L$.

Consideremos, em particular, a palavra $u = a^nb^n$. Como $u \in L$ e $|u| \geq n$, deduz-se de i)-iii) que $u = xyz$ para alguns $x, y, z \in A^*$ tais que $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ e

$$xy^2z \in L. \quad (1)$$





Como $|xy| \leq n$, $xy$ é um prefixo de $a^n$, donde

$$x = a^r, \quad y = a^s \quad e \quad z = a^tb^n$$

onde $r, s, t \in \mathbb{N}_0$, com $s \neq 0$ (pois $y \neq \epsilon$) e $r + s + t = n$, como se ilustra na seguinte figura.

| $a^n$ | | | $b^n$ |
|---|---|---|---|
| $aa \cdots a \cdots aa$ | | | $bb \cdots b \cdots bb$ |
| $a^r$ | $a^s$ | $a^t$ | $b^n$ |
| $x$ | $y$ | $z$ | |

Portanto

$$xy^2z = a^r(a^s)^2a^tb^n = a^{r+2s+t}b^n = a^{n+s}b^n.$$

Ora, como $s \neq 0$, tem-se $n + s \neq n$ e, por isso, $xy^2z \notin L$. Isto contradiz (1) e, consequentemente, $L$ não é reconhecível.

Exemplo para capiencos:

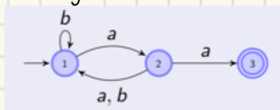
iremos considerar $x = a^r$, $y = a^p$, $z = a^tba^n$ $r+p+t = n$

$xyz = a^ra^pa^tba^n$

| $a^r$ | $a^p$ | $a^tba^n$ |
|---|---|---|
| x | y | z |

$xy^2z = a^r(a^p)^2a^tba^n = a^ra^{2p}a^tba^n = a^{n+p}ba^n \neq a^nba^n$

expressão regular a partir de um automato



$$\begin{cases} x_1 = bx_1 + ax_2 + \emptyset x_3 + \emptyset \\ x_2 = (a+b)x_1 + \emptyset x_2 + ax_3 + \emptyset \\ x_3 = \emptyset x_1 + \emptyset x_2 + \emptyset x_3 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + aX_3 \\ X_3 = \varepsilon \end{cases}$$

resolvendo o sistema

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b+a^2+ab)^*a^2 \\ X_2 = (a+b)(b+a^2+ab)^*a^2 + a \\ X_3 = \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + aX_3 \\ X_3 = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + a\epsilon \\ X_3 = \epsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = bX_1 + a((a+b)X_1 + a) \\ X_2 = (a+b)X_1 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b + a^2 + ab)X_1 + a^2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b + a^2 + ab)^*a^2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b + a^2 + ab)^*a^2 \\ X_2 = (a+b)(b+a^2+ab)^*a^2 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases}$$

Todo o automato com transições vazias é equivalente a um automato sem transições vazias

1.11 Considere as linguagens $L_1 = A^*aA^*bA^*$, $L_2 = A^*bA^*aA^*$ e $L = A^*aA^*bA^*aA^*$ sobre o alfabeto $A = \{a,b\}$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) $L_1 \cap L_2 = L$.

b) $L_1L_2 \subseteq L$.

c) $L \subseteq L_1L_2$.

a) $L_1 = \{u_1au_2bu_3 : u_1, u_2, u_3 \in A^*\}$

$L_2 = \{v_1bv_2av_3 : v_1, v_2, v_3 \in A^*\}$

$L = \{w_1aw_2bw_3aw_4 : w_1, w_2, w_3, w_4 \in A^*\}$

Se em L, a $w_3aw_4$ chamarmos $u_3$ ($u_3 = w_3aw_4$), então temos $L_1$;

Se a $w_1aw_2$ chamarmos $v_3$ ($v_3 = w_1aw_3$), então temos $L_2$.

→ $L \subseteq L_1 \cap L_2$ verdade

→ $w \in L \Rightarrow w = w_1aw_2bw_3aw_4$ com $w_i \in A^*$

$\Rightarrow w = w_1au_2bu_3 \in L_1$ e $w = v_1bw_3aw_4 \in L_2$.

$L_1 \cap L_2 \subseteq L$ é falso. Por exemplo, a palavra $bab \in L_1 \cap L_2$ e $bab \notin L$

Para $L_1 \cap L_2 = L$, $L \subseteq L_1 \cap L_2$ e $L_1 \cap L_2 \subseteq L$ tinham de ser verdade. Logo $L_1 \cap L_2 \neq L$.

b) $L_1L_2 \subseteq L$

$x \in L_1L_2 \Rightarrow x = uv$ com $u \in L_1$ e $v \in L_2$

Verdade, porque $\Rightarrow x = u_1au_2bwav_3$ com $u_1, u_2, w, v_3 \in A^*$

$\Rightarrow x \in L$.

c) $L \subseteq L_1L_2$. Falso, porque $aba \in L \setminus L_1L_2$

1.17 Para cada uma das seguintes expressões regulares $r$ sobre o alfabeto $\{0,1\}$, determine $\mathcal{L}(r)$:

a) $0(0+1)^*1$;

b) $(\epsilon + 0)^*$;

c) $0^*1^*0^*$;

d) $(0+1)^40(0+1)^*$.

a) $\mathcal{L}(r) = \{w \in A^* : w$ começa com 0 e termina com 1$\} = 0A^* \cap A^*1$

b) $\mathcal{L}(r) = \{0^n : n \in \mathbb{N}_0\} = \mathcal{L}(0^*)$

c) $\mathcal{L}(r)$ é a linguagem das palavras sobre A em que as ocorrências da letra 1 são todos consecutivas ou seja, $\mathcal{L}(r) = A^* \setminus A^*1A^*0A^*1A^*$

d) $\mathcal{L}(r) = \{u0v : u, v \in A^*, |u| = 4\}$ e a linguagem das palavras sobre o Alfabeto A de comprimento $\geq 5$ cuja posição 5 é uo

2.10 Sejam $A = \{a,b\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Recorde que, dados $x, y \in \mathbb{N}_0$, diz-se que $x$ é congruente com $y$ módulo $n$, e escreve-se $x \equiv y \pmod{n}$, se $x$ e $y$ têm o mesmo resto na divisão inteira por $n$ (ou seja, se $x - y$ é um múltiplo de $n$).

a) Mostre que a linguagem $\{u \in A^* : |u|_a = |u|_b\}$ não é reconhecível.

b) Mostre que a linguagem $L_n = \{u \in A^* : |u|_a \equiv |u|_b \pmod{n}\}$ é reconhecível.

a) Consideremos, em particular, a palavra $u = a^nb^n$. Como $u \in L$ e $|u| \geq n$, deduz-se de i)-iii) que $u = xyz$ para alguns $x, y, z \in A^*$ tais que $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^2z \in L$.

Como $|xy| \leq n$, $xy$ é um prefixo de $a^n$, donde

$x = a^r$, $y = a^s$, $z = a^tb^n$

com $r, t \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$ e $r+s+t = n$, como se ilustra na seguinte figura:

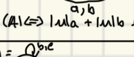
| $a^n$ | | $b^n$ |
|---|---|---|
| x | y | z |

Portanto, $xy^2z = a^r(a^s)^2a^tb^n = a^{r+2s+t}b^n$.

Ora, como $s \neq 0$, tem-se $r+2s+t \neq r+s+t = n$ e por isso, $xy^2z \notin L$. Isto contradiz (1) e, consequentemente, L não é reconhecível

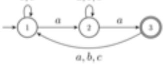
b) Para $n = 2$, vem que:

$L_2 = \{u \in A^* : |u|_a$ e $|u|_b$ são ambos impares ou pares$\}$



$u \in L(A) \Leftrightarrow |u|_a + |u|_b$ é par $\Leftrightarrow u \in L_2$. ∴ $L(A) = L_2$.

2.12 Considere o autómato $\mathcal{A}$ representado graficamente por

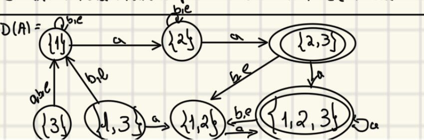


a) Mostre que $acba$ é uma palavra aceite por $\mathcal{A}$ e que $acbab$ é uma palavra rejeitada por este autómato.

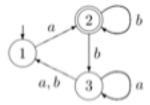
b) Descreva a linguagem $L(\mathcal{A})$ reconhecida por $\mathcal{A}$.

c) Determine o autómato $D(\mathcal{A})$ equivalente a $\mathcal{A}$.

c) D(A) =



**5.** Seja $\mathcal{A}$ o autómato finito representado pelo seguinte grafo:




**a)** Indique o sistema de equações lineares associado ao autómato $\mathcal{A}$. Resolva este sistema e indique uma expressão regular que represente $L(\mathcal{A})$.

a) $\begin{cases} x_1 = \emptyset x_1 + a x_2 + \emptyset x_3 \\ x_2 = \emptyset x_1 + b x_2 + b x_3 + \varepsilon \\ x_3 = (a+b) x_1 + \emptyset x_2 + a x_3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = a x_2 \\ x_2 = b x_2 + b x_3 \\ x_3 = (a+b) x_1 + a x_3 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = a x_2 \\ x_2 = b^* b x_3 \\ x_3 = (a+b) x_1 a^* \end{cases}$

$\equiv \begin{cases} x_1 = a x_2 \\ x_2 = b^* b (a+b) a x_2 a^* \\ x_3 = (a+b) a x_2 a^* \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = b^* b (a+b) a a^* a^* a \\ x_2 = b^* b (a+b) a a^* a^* \\ x_3 = (a+b) a b^* b (a+b) a a^* a^* a^* \end{cases}$