

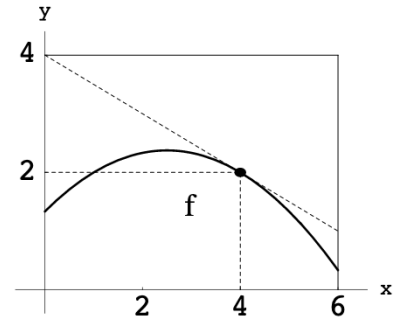


Nome:

Número:

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2 valores) A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (4, 2)$. Sendo $g(x) = (f(x) + 1)^3$, qual o valor da derivada $g'(4)$?



Exercício 2. (2.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5 + 2x - e^{2x}$.

- (a) Determine os limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (b) Determine o número de zeros de f .

Exercício 3. (2 valores) Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = \operatorname{sh} \sqrt{x}$.
Mostre que $f^{-1}(x) = \ln^2(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Exercício 4. (1.5 valores) Calcule $\int \frac{5 \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + 2 \cos x}} dx$.

Exercício 5. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x \, dx$.

II. Calcule $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) dx$.

Exercício 6. (2 valores) Calcule o integral $\int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$, efetuando a substituição $x = \sin^2 t$.

Exercício 7. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x-1)^2(x+2)} dx$.

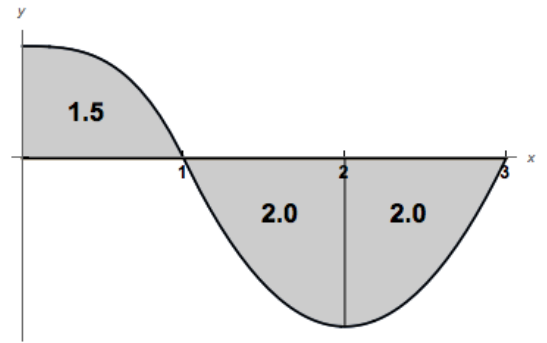
II. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x - e^x}{\ln(1+x^2)}$.

Exercício 8. (2 valores) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$, fazendo previamente um esboço da região \mathcal{R} .

Exercício 9. (3 valores) Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, derivável, e o eixo das abscissas, que correspondem às abscissas dos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$, respetivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Nestas condições, considere a função $F : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_1^{\frac{3+x}{2}} f(t) dt$.

- Determine os valores de $F(-3)$, $F(-1)$, $F(1)$ e $F(3)$.
- Determine expressões para $F'(x)$ e $F''(x)$.
- Represente F graficamente.



Exercício 10. (1 valor) Diga, justificando, se a seguinte proposição é **verdadeira** ou **falsa**: Existem duas funções $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis, tais que $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in [-1, 1]$ e $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 g(x) dx$.