Universidade do Minho
Dep. de Matemática e Aplicações

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2023/24

Números Reais

1. Qual é o erro do seguinte argumento?

   Sejam x e y dois números reais quaisquer tais que $x = y$. Então

   $$\begin{aligned} x^2 = xy \quad &\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = xy - y^2 \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x-y) = y(x-y) \\ &\Rightarrow \quad x + y = y \quad \Rightarrow \quad 2y = y \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 \end{aligned}$$

2. Nos exercícios seguintes substitua o símbolo $*$ por $<$, $>$ ou $=$ de modo a obter afirmações corretas:

   (a) $\frac{3}{8} * 0,37$ (b) $0,33 * \frac{1}{3}$ (c) $\sqrt{2} * 1,414$

   (d) $5 * \sqrt{25}$ (e) $\frac{3}{7} * 0.428571$ (f) $\frac{22}{7} * \pi$

3. Represente os seguintes números racionais sob a forma de quociente de números inteiros:

   (a) $2,25$ (b) $3,721$ (c) $5,(4)$ (d) $0,(17)$ (e) $3,2(7)$ (f) $3,66(087)$

4. Apresente um exemplo de:

   (a) um número irracional pertencente ao intervalo $\left[\frac{3}{100}, \frac{4}{100}\right]$;

   (b) um número racional pertencente ao intervalo $\left[\frac{\pi}{11}, \frac{\pi}{10}\right]$.

5. Sejam x e y dois números reais tais que $x < y$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes relações é verdadeira ou falsa:

   (a) $|x| < |y|$ (b) $x^2 < y^2$ (c) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ $(x, y \neq 0)$

   (d) $x^3 < y^3$ (e) $x < \frac{x+y}{2} < y$ (f) $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{|y|}$ $(x, y \neq 0)$

6. Em cada uma das alíneas seguintes encontre uma desigualdade da forma $|x - a| < \epsilon$ cuja solução seja o intervalo dado:

   (a) $]-2, 2[$ (b) $]-4, 0[$ (c) $]0, 4[$ (d) $]-3, 7[$ (e) $]-7, 3[$

7. Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2 - 1) \geq 0\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} : |5x + 2| \leq 1\}$
(f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$
(g) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$
(h) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$
(i) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$
(j) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1 - x}{2x + 3} > 0\}$
(k) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 1\}$
(l) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$
(m) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$
(n) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x - 2} \leq 0\}$
(o) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 2|x|\}$
(p) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 1| > |x - 3|\}$

8. Indique em extensão os seguintes conjuntos:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 4| = 3\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x + 1)^2} = 3\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x + 2|\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 7)^2 = 0\}$

9. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

(a) $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
(b) $(x + y)^n = x^n + y^n$
(c) $(xy)^n = x^n y^n$

10. Verifique se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ são majorados, minorados, limitados. Indique ainda se têm supremo, ínfimo, máximo ou mínimo:

(a) $A = [0, 2] \cup]3, 5[\cup \{6, 7\}$
(b) $B =]-\infty, 2[$
(c) $C =]1, 2] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
(d) $D = [1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$
(e) $E = [1, +\infty[$
(f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 5\}$
(g) $G = \left\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < \frac{16}{25}\right\}$
(h) $H = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
(i) $I = \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

11. Determine o interior, o fecho (ou aderência) e o derivado de cada um dos seguintes conjuntos e indique quais são abertos e quais são fechados:

(a) $\mathbb{N}$
(b) $\mathbb{R}$
(c) $\mathbb{Z}$
(d) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$
(e) $\mathbb{Q}$
(f) $[0, 2[$
(g) $[0, 3]$
(h) $]5, 10[$
(i) $\mathbb{Q} \cap [-2, 0[$
(j) $(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \cap [0, 2]$
(k) $]0, 3[\backslash \{1\} \cup \{4, 5\}$
(l) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

12. Quando possível, apresente um subconjunto A de $\mathbb{R}$ que:

    (a) não seja aberto nem fechado;

    (b) seja simultaneamente aberto e fechado;

    (c) seja aberto e limitado;

    (d) seja fechado e não limitado;

    (e) tenha o interior vazio e seja não limitado;

    (f) seja limitado mas não seja aberto nem fechado;

    (g) não contenha o seu derivado;

    (h) coincida com o seu derivado;

    (i) tenha um único ponto de acumulação;

    (j) seja fechado e tal que $\overline{\operatorname{int} A} \neq A$;

    (k) seja aberto e tal que $\operatorname{int} \overline{A} \neq A$;

    (l) tenha apenas dois pontos de acumulação.

13. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

    (a) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto então A não é limitado;

    (b) se $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto e $B \subseteq \mathbb{R}$ é fechado então $A \cup B$ não é aberto nem fechado;

    (c) se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não são abertos nem fechados então $A \cap B$ não é aberto nem fechado;

    (d) o conjunto $A =]0,4[\cap \mathbb{Q}$ é aberto;

    (e) o conjunto $A = [0,7] \cap \mathbb{Q}$ é fechado;

    (f) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 6 - x^2 < 1\}$ é limitado superiormente;

    (g) o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 7\}$ é fechado e limitado.

14. Para cada um dos seguintes conjuntos determine o interior, a aderência, o derivado, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam).

    (a) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

    (b) $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$

    (c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 < 50\right\}$

    (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < |x|\}$

    (e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} : x^5 > x^3\right\}$

    (f) $F = \{x \in \mathbb{Q} : |x| < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \pi\}$

    (g) $G = \{x \in \mathbb{Q} : |x+4| < 3\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 - 3 < 0\right\}$

    (h) $H = [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$