Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC | LMAT
25 de março de 2023

Álgebra Universal e Categorias

1º teste

duração: 1h30min

Nome:	Número:

Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, indique a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra do tipo $(2,1)$, onde $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	1	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	4	2	5

Indique, sem justificar, todos os subuniversos de $\mathcal{A}$. Represente o reticulado $(\mathrm{Sub}, \subseteq)$ por um diagrama de Hasse.

Resposta:

2. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) Para qualquer álgebra $\mathcal{A}$ e para quaisquer $X, Y \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

Resposta:

(b) Para qualquer álgebra $\mathcal{A}$ e para quaisquer $X, Y \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X \cap Y) \subsetneqq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cap Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

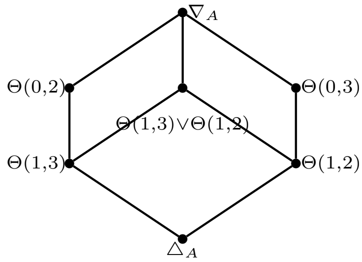
Resposta:

3. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$, onde $A = \{0,1,2,3\}$, $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	0	1	2	3
$f^{\mathcal{A}}(x)$	2	1	2	1

x	0	1	2	3
$g^{\mathcal{A}}(x)$	1	3	3	1

e cujo reticulado de congruências pode ser representado pelo diagrama indicado ao lado.



(a) Sem apresentar os cálculos, indique $\Theta(2,3)$ e $\Theta(0,3)$. Diga, justificando, se $\Theta(2,3) \cup \Theta(0,3)$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

Resposta:

(b) Determine a álgebra quociente $\mathcal{A}/\Theta(2,3)$.

Resposta:

(c) Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é congruente-distributiva.

Resposta:

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária. Mostre que se S_1 e S_2 são subniversos de $\mathcal{A}$, então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

2. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária, B um subuniverso de $\mathcal{A}$ e θ uma relação binária em A definida por

$$a\theta b \text{ se e só se } a = b \text{ ou } \{a,b\} \subseteq B.$$

Mostre que θ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

3. Justifique que, para qualquer álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$, se $|A| \leq 2$, então $\mathrm{Eq}(A) = \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$. Dê exemplo de uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ tal que $|A| > 2$ e $\mathrm{Eq}(A) = \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$.

Cotações: Grupo I: $1.(2,0); 2.(1,5+1,5); 3.(2,25+2,0+1,5)$. Grupo II: $1.(2,75); 2.(3,5); 3.(3,0)$.