Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Primitivação de funções racionais

A primitivação de funções definidas como quociente de polinómios (funções racionais),

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\},$$

é feita com uma técnica muito própria que se baseia na decomposição da fração $P(x)/Q(x)$ em frações mais simples, ditas *elementares*. Para obter uma tal decomposição, é crucial a determinação dos zeros do polinómio Q, bem como a especificação da natureza e da multiplicidade de cada zero.

Passo 1 Divisão dos polinómios (nem sempre é necessário).

Se $\operatorname{grau} P \geq \operatorname{grau} Q$ então efetua-se a divisão dos dois polinómios. Resulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

onde S e R são polinómios e $\operatorname{grau} R < \operatorname{grau} Q$. A fração $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ deve agora ser decomposta, como virá explicado nos passos seguintes.

Passo 2 Decomposição de $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ em frações simples.

(a) Determinam-se os zeros de Q, atendendo a que:

- se Q é um polinómio de grau n então Q possui exatamente n zeros, que podem ser reais ou complexos;
- os zeros complexos ocorrem sempre aos pares de conjugados, isto é, se $a+bi$ é um zero de Q então $a-bi$ também é um zero de Q;
- cada zero de Q pode ser *simples* ou de *multiplicidade um*, quando anula Q mas não anula a sua derivada Q', e pode ser *múltiplo* com *multiplicidade* $k > 1$, quando anula Q e todas as suas derivadas até à ordem $k-1$ mas não anula a derivada de ordem k;
- o polinómio Q possui o zero real $x = a$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na fatorização de Q, o fator $(x-a)$ ocorre exatamente k vezes;
- o polinómio Q possui o par de zeros complexos $x = a \pm bi$ com multiplicidade $k \geq 1$ se, na fatorização de Q, o fator $[(x-a)^2 + b^2]$ ocorre exatamente k vezes.

(b) Decompõe-se $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ numa soma de frações simples, com base nos zeros de Q encontrados em (a), atendendo a que:

- cada zero real $x = a$, com multiplicidade k, contribui para aquela soma com k frações simples da forma

$$\frac{A_1}{(x-a)^k},\ \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}},\ \cdots,\ \frac{A_k}{(x-a)}, \tag{2}$$

  onde A_1, A_2, ..., A_k são constantes reais a determinar;

- cada par de zeros complexos conjugados $x = a \pm bi$, com multiplicidade k, contribui para aquela soma com k frações simples da forma

$$\frac{P_1x+Q_1}{[(x-a)^2+b^2]^k},\ \frac{P_2x+Q_2}{[(x-a)^2+b^2]^{k-1}},\ \cdots,\ \frac{P_kx+Q_k}{(x-a)^2+b^2} \tag{3}$$

  onde P_1, Q_1, P_2, Q_2, ..., P_k, Q_k são constantes reais a determinar.

(c) Calculam-se as constantes A_i, P_i, Q_i que figuram nos numeradores das frações simples (2) e (3), recorrendo ao chamado método dos *coeficientes indeterminados*. Na prática, recorre-se muitas vezes a outras regras bastante simples que, conjugadas com o método anterior, simplificam significativamente os cálculos a efetuar.

Passo 3 Cálculo das primitivas.

O cálculo da primitiva inicial é efetuado a partir do que se viu nos passos anteriores, nomeadamente, a partir da expressão (1), onde $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ se escreve como uma soma de parcelas dos tipos (2) e (3). Então

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx\ +\ \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx,$$

onde a primeira primitiva no segundo membro é imediata, por se tratar de um polinómio, e a segunda primitiva é a soma das primitivas das frações simples envolvidas na decomposição. Todas as frações da forma (2) têm primitiva imediata (regra da potência e regra do logarítmo). As frações da forma (3) podem ser primitivadas através de uma substituição de variável. A última, em particular, pode ser tratada como primitiva imediata, depois de algumas manipulações algébricas (regra do arco-tangente).