



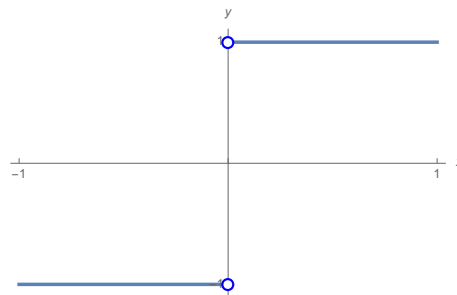
---

Funções: limite e continuidade

---

1. (a) Começemos por observar que a função  $f$  pode ser representada da seguinte forma:

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$



$f$  é crescente. Com efeito, tem-se que  $f(x) \leq f(y)$  para todos os pontos  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tais que  $x < y$ .

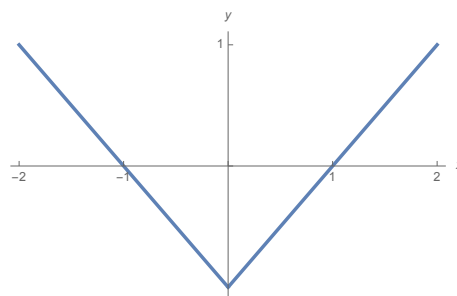
$\text{CD}(f) = \text{Im}(f) = \{-1, 1\}$ . Logo  $f$  é limitada.

$\sup \text{CD}(f) = \max \text{CD}(f) = 1$ .

$\inf \text{CD}(f) = \min \text{CD}(f) = -1$ .

- (b) Começemos por observar que:  $f(x) = \sqrt{x^2} - 1 = |x| - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Assim, a função  $f$  pode ser representada da seguinte forma:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases} .$$



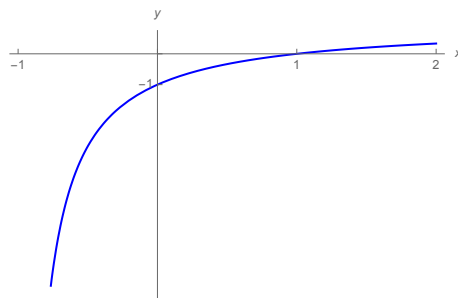
$f$  não é monótona. Por exemplo,  $f(-1) = 0 > -1 = f(0)$  mas  $f(0) = -1 < 0 = f(1)$ .

$\text{CD}(f) = [-1, +\infty[$ . Logo  $f$  não é limitada.

Não existe supremo nem máximo do contradomínio de  $f$ .

$\inf \text{CD}(f) = \min \text{CD}(f) = -1$ .

- (c) Começemos por observar que:  $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ ,  $x \in ]-1, +\infty[$ . A função  $f$  pode ser representada graficamente da seguinte forma:



$f$  é estritamente crescente. Com efeito, tem-se que  $f(x) < f(y)$  para todos os pontos  $x, y \in ]-1, +\infty[$  tais que  $x < y$ .

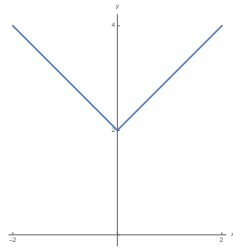
$\text{CD}(f) = ]-\infty, 1[$ . Logo  $f$  não é limitada.

$\sup \text{CD}(f) = 1$ . Não existe máximo do contradomínio de  $f$ .

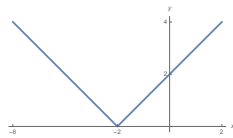
Não existe ínfimo nem mínimo do contradomínio de  $f$ .

2. (i)  $f$  não é injetiva nem sobrejetiva  
 $g$  é injetiva e sobrejetiva. Logo  $g$  é bijetiva  
 $h$  não é injetiva nem sobrejetiva.  
 $i$  não é injetiva nem sobrejetiva.
- (ii)  $f([-1, 1]) = [0, 1]$   
 $i([-1, 0]) = ]-1, 0] \cup \{2\}$   
 $i([-1, 3]) = ]-1, 2]$   
 $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$   
 $h^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$   
 $g^{-1}([-1, 3]) = [-3, 1[$
3. (a)  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + \pi/4) = \sin(2x^2 + \pi/2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- (b)  $(g \circ f)(x) = g(x-2) = \begin{cases} 3 & \text{se } x-2 \neq 1 \\ 0 & \text{se } x-2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ ,  $x \in \mathbb{R}$
4. (a)  $h$ : possui um mínimo absoluto e um máximo local; não possui máximo absoluto;  
 $i$ : possui máximo absoluto; não possui mínimos (nem locais nem absolutos);  
 $j$ : não possui extremos.
- (b) Apenas  $i$  é limitada;  $h$  é minorada;  $j$  não é minorada nem majorada.
5. (a) Afirmação falsa. Com efeito,  $f([0, 3]) = [-2, 2] \neq [-2, 1]$ .
- (b) Tem-se que  $f(\frac{5}{2}) = -1$ . Logo a afirmação é verdadeira.
- (c) Tem-se que  $f(-1) = 2$ . Logo a afirmação é falsa.

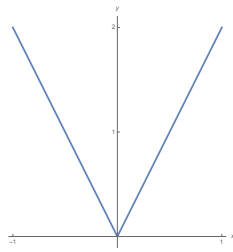
6. (a)



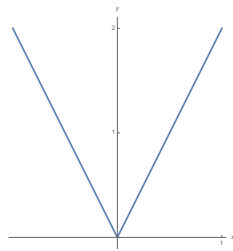
(b)



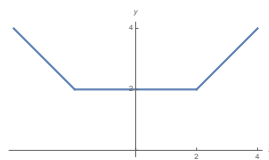
(c)



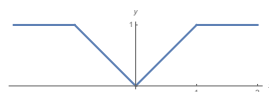
(d)



(e)



(f)



7. (a) Afirmação falsa. Com efeito, tem-se que  $1 < 2$  mas  $f(1) = 1 > 0 = f(2)$ .
- (b) Afirmação verdadeira. Com efeito, tem-se que, para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$  e
- $$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(4x + 2\pi) = \sin(4x) = f(x).$$
- (c) Afirmação verdadeira. Com efeito,  $\text{Im}(f) = ]0, +\infty[$  e, consequentemente, o conjunto  $\text{Im}(f)$  é minorado mas não é majorado.

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0.$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ ; não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , uma vez que os limites laterais são distintos.

11. (a)  $-\infty$       (b)  $+\infty$       (c) 2
- (d)  $-1$       (e) 1      (f)  $-1$
- (g)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$       (h) 0      (i)  $\frac{1}{1-\sqrt{2}/2}$
- (j) 1      (k)  $\frac{4}{3}$       (l) 0
- (m) 6      (n) 1      (o)  $\frac{1}{2}$
- (p) 0      (q)  $+\infty$       (r)  $\frac{5}{2}$
- (s) 0      (t)  $-\infty$       (u) 0

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1.$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|x + 3|}{x + 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{x + 3}{x + 3} = 1.$

(g)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

(h) Tem-se que:

- $-1 \leq \sin x \leq 1$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ . Logo a função  $\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é limitada;

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Então, por um teorema da aula, podemos concluir que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\operatorname{sen} x|}{|\operatorname{sen} x|} = 1.$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 4x} \frac{1}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x} \frac{4}{\cos 4x} \frac{3x}{3 \operatorname{sen} 3x} = \frac{4}{3}.$$

(l) Resolvido na aula.

(m) Usando a regra de Ruffini tem-se que:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x^2 + 2x + 3)(x - 1).$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 2x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x + 3) = 6.$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

(o)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(p) Análogo ao exercício (l).

$$(q) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x \cos x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x + \cos x) = +\infty.$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 3}{2x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{7}{x}} = \frac{5}{2}.$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - 2x + 1}{-3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = -\infty.$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 10}{x^4 - 2x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{3}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4}} = 0.$$

12. O limite existe apenas para  $a = 0$ . Além disso,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

13. (a)  $f$  é contínua em  $\pi$  porque  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) = -1$ .

(b) Por exemplo,  $x = 0$  e  $x = 1$ .

14. (a)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$       (b)  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$       (c)  $\emptyset$       (d)  $\{0\}$       (e)  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$       (f)  $\{1\}$

15. (a) Resolvido na aula

(b) Resolvido na aula

(c) Resolvido na aula

(d) Por exemplo,  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin(\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

(e) Resolvido na aula

(f) Resolvido na aula

16. (a) O domínio de continuidade da função  $f$  é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(b) O domínio de continuidade da função  $g$  é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

(c) O domínio de continuidade da função  $h$  é  $\{0\}$ .

(d) O domínio de continuidade da função  $i$  é  $\{-1, 1\}$ .

(e) O domínio de continuidade da função  $j$  é  $\{-1\}$ .

(f) O domínio de continuidade da função  $k$  é  $\{-1\}$ .

(g) O domínio de continuidade da função  $m$  é  $[-4, 5] \setminus \{2\}$ .

(h) O domínio de continuidade da função  $n$  é  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

17.  $a = 0$

18.

(a) Por exemplo,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$        $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2$        $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(b) Por exemplo,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$        $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2$        $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(c) Resolvido na aula

19.  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$

Temos que  $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = 2$  e  $(g \circ f)(0) = 0$ .

Consequentemente,  $g \circ f$  não é contínua em  $x = 0$ .

Não há qualquer contradição com o teorema da função composta, uma vez que, embora  $f$  seja contínua em  $x = 0$ ,  $g$  não é contínua em  $f(0) = 1$ .

20. (a) Por exemplo,  $z = -2$ .  
 (b) Por exemplo,  $z = -1$ .  
 (c) Por exemplo,  $z = 0$ .

21. (a) Consideremos a função  $f(x) = x - \cos x$ ,  $x \in [0, \pi/2]$ . Temos que:

- $f$  é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
- $f(0) = -1 < 0$ ;
- $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$ .

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe  $x \in ]0, \pi/2[$  tal que  $f(x) = 0$ , isto é, tal que  $x = \cos x$ .

- (b) Consideremos a função  $f(x) = x + \ln x$ ,  $x \in ]0, 1]$ . Temos que:

- $f$  é contínua por ser a soma de duas funções contínuas. Em particular,  $f$  é contínua em  $[1/4, 1]$ .
- $f(1/4) < 0$ ;
- $f(1) = 1 > 0$ .

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe  $x \in ]1/4, 1[$  tal que  $f(x) = 0$ , isto é, tal que  $x = -\ln x$ .

- (c) Consideremos a função  $f(x) = 2 + x - e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Temos que:

- $f$  é contínua por ser a soma de duas funções contínuas. Em particular,  $f$  é contínua em  $[0, 2]$ .
- $f(0) = 1 > 0$ ;
- $f(2) = 4 - e^2 < 0$ .

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe  $x \in ]0, 2[$  tal que  $f(x) = 0$ , isto é, tal que  $2 + x = e^x$ .

22. Consideremos os seguintes dois casos:

(i) Se  $f(a) = a$  ou  $f(b) = b$  está encontrado o ponto fixo.

(ii) Suponhamos que  $f(a) \neq a$  e que  $f(b) \neq b$ . Então, como  $f([a, b]) \subseteq [a, b]$  temos que  $f(a) > a$  e que  $f(b) < b$ .

Consideremos a função  $g(x) = f(x) - x$ ,  $x \in [a, b]$ . Temos que:

- $g$  é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
- $g(a) = f(a) - a > 0$ ;
- $g(b) = f(b) - b < 0$ .

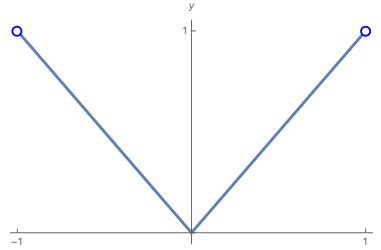
Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe  $x_0 \in ]a, b[$  tal que  $g(x_0) = 0$ , isto é, tal que  $f(x_0) = x_0$ .

23. (a)  $f : [-2, -1] \cup [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$   

$$x \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-2, -1] \\ 1 & \text{se } x \in [1, 3] \end{cases}$$

- (b) Não existe. Se a função  $g(x) = f(x) + \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é contínua então a função  $f(x) = g(x) - \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é também contínua (por ser a diferença de duas funções contínuas).

24. A função  $g$  pode ser representada graficamente da seguinte forma:



Temos que  $\text{CD}(g) = \text{Im}(g) = [0, 1[$ . O contradomínio de  $g$  tem mínimo igual a 0 mas não tem máximo. Não há contradição com o Teorema de Weierstrass porque o conjunto  $] - 1, 1[$  apesar de limitado, não é fechado.

25. (a) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, as funções:

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2 & x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

Temos que  $f$  é contínua e  $g$  não é contínua. Mas a função composta  $g \circ f$ :

$$\begin{array}{ll} g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 \end{array}$$

é contínua.

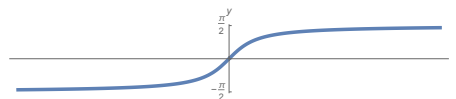
(b) Afirmação verdadeira. Pelo Teorema de Weierstrass, toda a função contínua definida num intervalo fechado e limitado  $[a, b]$  tem máximo e mínimo nesse intervalo. Consequentemente,  $f$  é limitada.

(c) Afirmação verdadeira. Consideremos a função  $f(x) = \ln(x^3) - x$ ,  $x \in [1, e]$ . Temos que:

- $f$  é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
- $f(1) = -1 < 0$ ;
- $f(e) = 3 - e > 0$ .

Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe  $x \in ]1, e[$  tal que  $f(x) = 0$ , isto é, tal que  $\ln(x^3) = x$ .

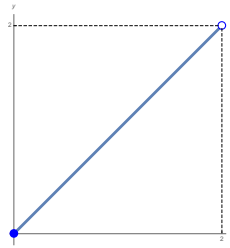
(d) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, a função representada graficamente do seguinte modo:



Tem-se que a função tem domínio  $\mathbb{R}$ , é contínua e é limitada (o contradomínio da função é o conjunto  $] - \pi/2, \pi/2[$ , o qual é um conjunto limitado). No entanto, a função não atinge máximo nem mínimo.



- (e) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, a função representada graficamente do seguinte modo:



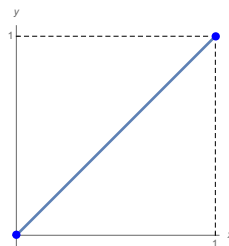
Tem-se que a função tem domínio  $[0, 2[$ , é contínua e é limitada (o contradomínio da função é o conjunto  $[0, 2]$ , o qual é um conjunto limitado). No entanto, a função não atinge máximo.

- (f) Afirmação falsa. Por exemplo, consideremos a função

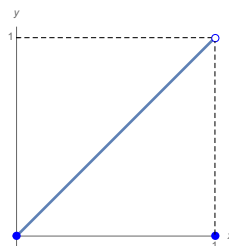
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

A função  $|f|$  é tal que:  $|f(x)| = 1, x \in \mathbb{R}$ . Consequentemente, a função  $|f|$  é contínua, mas a função  $f$  não é contínua em ponto algum.

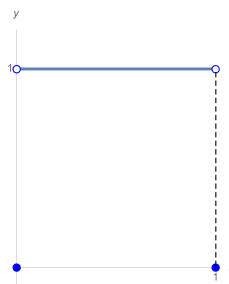
26. (a)



(b)

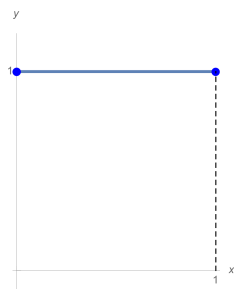


(c)

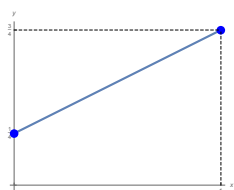


(d) Não existe (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy).

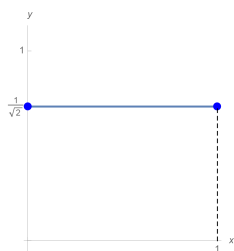
(e)



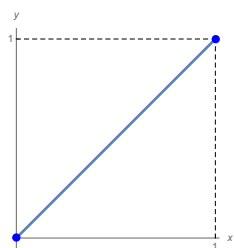
(f)



(g)

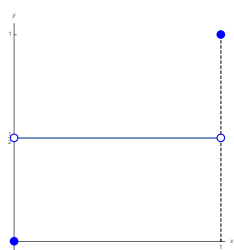


(h)

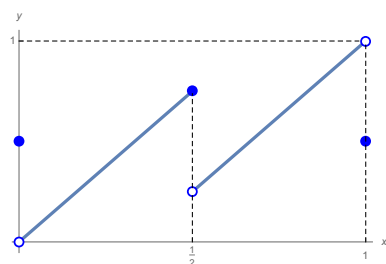


(i) Não existe (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy).

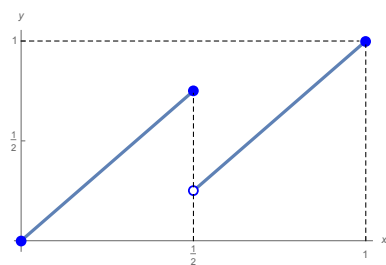
(j)



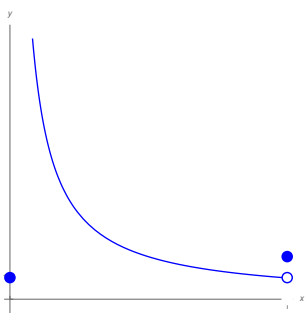
(k)



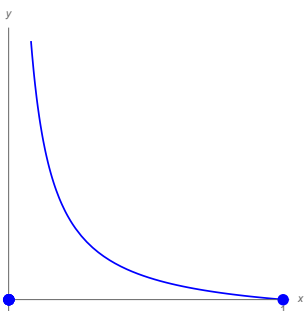
(l)



(m)



(n)



(o)

