

## Álgebra Universal e Categorias

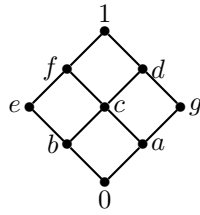
### 2. Álgebra Universal

2.1. Sejam  $A = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$ ,  $B = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$  e  $(A, \leq)$  o c.p.o. correspondente ao diagrama de Hasse a seguir representado. Considere as álgebras  $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}})$  e  $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}})$  de tipo  $(2, 2, 1, 0, 0)$ , onde as operações binárias de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são definidas por

$$x \wedge^{\mathcal{A}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{A}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in A,$$

$$x \wedge^{\mathcal{B}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{B}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in B,$$

as operações unárias são definidas pelas tabelas a seguir indicadas e  $0^{\mathcal{A}} = 0^{\mathcal{B}} = 0$  e  $1^{\mathcal{A}} = 1^{\mathcal{B}} = 1$ .



$x$	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\delta^{\mathcal{A}}(x)$	1	b	a	c	f	g	d	e	0

$x$	0	a	b	c	d	f	1
$\delta^{\mathcal{B}}(x)$	1	b	a	c	f	b	0

(a) Dê exemplo de um reduto de  $\mathcal{A}$  que seja:

i. um semigrupo.

A álgebra  $\mathcal{A}$  é do tipo  $(O_1, \tau_1)$ , onde  $O_1 = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$  e  $\tau_1 : O_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$  é a aplicação definida por  $\tau_1(\wedge) = \tau_1(\vee) = 2$ ,  $\tau_1(\delta) = 1$  e  $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ . Uma álgebra  $\mathcal{C} = (C; F)$  de tipo  $(O_2, \tau_2)$  diz-se um reduto de  $\mathcal{A}$  se  $C = A$ ,  $O_2 \subseteq O_1$  e, para qualquer  $f \in O_2$ ,  $\tau_1(f) = \tau_2(f)$  e  $f^{\mathcal{C}} = f^{\mathcal{A}}$ .

A álgebra  $\mathcal{C} = (C; \{\wedge_{\mathcal{C}}\})$  do tipo  $(\{\wedge\}; \tau_2)$ , onde  $C = A$ ,  $\tau_2 : \{\wedge\} \rightarrow \mathbb{N}_0$  é a função definida por  $\tau_2(\wedge) = 2$  e  $\wedge_{\mathcal{C}}$  é a operação binária em  $C$  definida por

$$x \wedge_{\mathcal{C}} y = x \wedge_{\mathcal{A}} y, \forall x, y \in C,$$

é um reduto de  $\mathcal{A}$ , uma vez que respeita as condições indicadas anteriormente. A álgebra  $\mathcal{C}$  é um semigrupo, pois a operação  $\wedge_{\mathcal{A}}$  é associativa e, portanto, a operação  $\wedge_{\mathcal{C}}$  também é associativa.

ii. um reticulado.

A álgebra  $\mathcal{A}$  é do tipo  $(O_1, \tau_1)$ , onde  $O_1 = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$  e  $\tau_1 : O_1 \rightarrow \mathbb{N}_0$  é a aplicação definida por  $\tau_1(\wedge) = \tau_1(\vee) = 2$ ,  $\tau_1(\delta) = 1$  e  $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ . Uma álgebra  $\mathcal{C} = (C; F)$  de tipo  $(O_2, \tau_2)$  diz-se um reduto de  $\mathcal{A}$  se  $C = A$ ,  $O_2 \subseteq O_1$  e, para qualquer  $f \in O_2$ ,  $\tau_1(f) = \tau_2(f)$  e  $f^{\mathcal{C}} = f^{\mathcal{A}}$ .

A álgebra  $\mathcal{C} = (C; \{\wedge_{\mathcal{C}}, \vee_{\mathcal{C}}\})$  de tipo  $(\{\wedge, \vee\}; \tau_2)$ , onde  $C = A$ ,  $\tau_2 : \{\wedge, \vee\} \rightarrow \mathbb{N}_0$  é a função definida por  $\tau_2(\wedge) = \tau_2(\vee) = 2$  e  $\wedge_{\mathcal{C}}, \vee_{\mathcal{C}}$  são as operações binárias em  $C$  definidas por

$$x \wedge_{\mathcal{C}} y = x \wedge_{\mathcal{A}} y \text{ e } x \vee_{\mathcal{C}} y = x \vee_{\mathcal{A}} y, \forall x, y \in C,$$

é um reduto de  $\mathcal{A}$ , pois respeita as condições indicadas anteriormente. A álgebra  $\mathcal{C}$  é um reticulado, pois as operações  $\wedge_{\mathcal{A}}$  e  $\vee_{\mathcal{A}}$  são associativas, comutativas, idempotentes e satisfazem a lei da absorção e, portanto, as operações  $\wedge_{\mathcal{C}}$  e  $\vee_{\mathcal{C}}$  satisfazem as mesmas propriedades.

(b) Para cada um dos conjuntos  $C$  a seguir indicados, diga se  $C$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ :

i.  $C = \emptyset$ .

Um subconjunto  $S$  de  $A$  diz-se um subuniverso de  $\mathcal{A}$  se, para todo o símbolo de operação  $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$  de aridade  $n$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$ , e para todo  $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$ , temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto  $\emptyset$  não é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , pois  $0^{\mathcal{A}}$  é uma operação nulária de  $\mathcal{A}$  e  $0^{\mathcal{A}} = 0 \notin \emptyset$ .

ii.  $C = \{0, f, d, 1\}$ .

Um subconjunto  $S$  de  $A$  diz-se um subuniverso de  $\mathcal{A}$  se, para todo o símbolo de operação  $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$  de aridade  $n$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$ , e para todo  $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$ , temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto  $C = \{0, f, d, 1\}$  não é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , pois  $f, d \in C$  e  $f \wedge_{\mathcal{A}} d = c \notin C$ .

iii.  $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ .

Um subconjunto  $S$  de  $A$  diz-se um subuniverso de  $\mathcal{A}$  se, para todo o símbolo de operação  $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$  de aridade  $n$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$ , e para todo  $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$ , temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto  $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , pois:

- $0^{\mathcal{A}} = 0, 1^{\mathcal{A}} = 1 \in C$ ;
- para quaisquer  $x, y \in C$ ,  $x \wedge_{\mathcal{A}} y, x \vee_{\mathcal{A}} y \in C$ ;
- para qualquer  $x \in C$ ,  $\delta^{\mathcal{A}}(x) \in C$ .

(c) Diga se  $\mathcal{B}$  é uma subálgebra de  $\mathcal{A}$ .

A álgebra  $\mathcal{A}$  é do tipo  $(O, \tau)$ , onde  $O = \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$  e  $\tau : O \rightarrow \mathbb{N}_0$  é a aplicação definida por  $\tau(\wedge) = \tau(\vee) = 2$ ,  $\tau(\delta) = 1$  e  $\tau(0) = \tau(1) = 0$ . Uma álgebra  $\mathcal{C} = (C; F)$  de tipo  $(O, \tau)$  diz-se uma subálgebra de  $\mathcal{A}$  se  $C$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$  e, para qualquer  $h \in O$  de aridade  $n$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$ ,

$$h^{\mathcal{C}}(a_1, \dots, a_n) = h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in C^n.$$

A álgebra  $\mathcal{B}$  não é uma subálgebra  $\mathcal{A}$ , pois, embora  $\mathcal{B}$  seja do mesmo tipo da álgebra  $\mathcal{A}$  e  $B$  seja um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , tem-se  $\delta^{\mathcal{B}}(f) \neq \delta^{\mathcal{A}}(f)$ .

2.2. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathcal{A}_n = (A_n; (f^{\mathcal{A}_n}, 0^{\mathcal{A}_n}))$  a álgebra de tipo  $(1, 0)$ , onde  $A_n = \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ ,  $0^{\mathcal{A}_n} = 0$  e  $f^{\mathcal{A}_n} : A_n \rightarrow A_n$  é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \in \{0, 1, 2, \dots, 2n-2\} \\ 1 & \text{se } x = 2n-1 \\ 0 & \text{se } x = 2n \end{cases}$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , determine todos os subuniversos de  $\mathcal{A}_n$ .

Seja  $S$  um subuniverso de  $\mathcal{A}_n$ . Então  $S \subseteq A_n$  e  $S$  é fechado para todas as operações de  $\mathcal{A}_n$ . Como  $S$  é fechado para a operação  $0^{\mathcal{A}_n}$ , segue que  $0 \in S$ . O conjunto  $S$  também é fechado para a operação  $f^{\mathcal{A}_n}$ , donde resulta que

$$f^{\mathcal{A}_n}(0) = 2 \in S, f^{\mathcal{A}_n}(2) = 4 \in S, \dots, f^{\mathcal{A}_n}(2n-2) = 2n \in S.$$

Se o conjunto  $S$  não tem inteiros ímpares, temos  $S = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$ . Caso  $S$  tenha um número ímpar, então, atendendo a que  $S$  é fechado para a operação  $f^{\mathcal{A}_n}$ , segue que  $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\} \subseteq S$ , pelo que  $S = A_n$ .

Assim, os únicos subuniversos de  $\mathcal{A}_n$  são  $\{0, 2, 4, \dots, 2n\}$  e  $A_n$ .

2.3. Sejam  $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$  um reticulado e  $a \in R$ . Mostre que  $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{R}$ .

Sejam  $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$  um reticulado e, para cada  $a \in R$ , seja  $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ .

O conjunto  $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{R}$  se  $I_a \subseteq R$  e  $I_a$  é fechado para as duas operações de  $\mathcal{R}$ .

Por definição de  $I_a$ , tem-se  $I_a \subseteq R$ .

Além disso, para quaisquer  $x, y \in I_a$ , tem-se  $x, y \in R$ ,  $x \vee a = a$  e  $y \vee a = a$ , donde segue que  $x \vee y \in I_a$ , pois:

- $x \vee y \in R$  ( $x, y \in R$  e  $R$  é fechado para a operação  $\vee$ );
- $(x \vee y) \vee a = x \vee (y \vee a) = x \vee a = a$ .

Considerando que  $x = x \wedge a$  e  $y = y \wedge a$ , também temos  $x \wedge y \in I_a$ , uma vez que:

- $x \wedge y \in R$  ( $x, y \in R$  e  $R$  é fechado para a operação  $\wedge$ );
- $(x \wedge y) \vee a = ((x \wedge a) \wedge (y \wedge a)) \vee a = ((x \wedge y) \wedge a) \vee a = a$ .

O conjunto  $I_a$  é fechado para as operações  $\wedge$  e  $\vee$  e, portanto,  $S$  é um subuniverso de  $\mathcal{R}$ .

2.4. Uma álgebra  $\mathcal{A} = (A; F)$  diz-se *mono-unária* se  $F$  é formado por uma única operação e essa operação é unária. Uma subálgebra  $\mathcal{B} = (B; G)$  de  $\mathcal{A}$  diz-se uma *subálgebra própria* se  $B \subsetneq A$ .

- (a) Para cada inteiro  $n > 0$ , dê exemplo de uma álgebra mono-unária  $\mathcal{A}_n = (\{0, 1, \dots, n-1\}; f)$  que não admita subálgebras próprias.

Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $\mathcal{A}_n = (A_n; f^{\mathcal{A}_n})$  a álgebra de tipo (1), onde  $f^{\mathcal{A}_n} : A_n \rightarrow A_n$  é a operação unária definida por

$$f^{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in \{0, 1, \dots, n-2\} \\ 0 & \text{se } x = n-1 \end{cases}$$

Seja  $S = (S; f^S)$  uma subálgebra de  $\mathcal{A}_n$ . Então  $S$  é uma álgebra do mesmo tipo de  $\mathcal{A}_n$ ,  $\emptyset \neq S \subseteq A_n$ ,  $S$  é fechado para a operação  $f^{\mathcal{A}_n}$  e, para todo  $x \in S$ ,  $f^S(x) = f^{\mathcal{A}_n}(x)$ .

Como  $S \neq \emptyset$ , consideremos  $s \in S$ . Uma vez que  $S$  é fechado para a operação  $f^{\mathcal{A}_n}$ , segue que, para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $(f^{\mathcal{A}_n})^k(s) \in S$  e, portanto,  $\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq S$ . Logo  $S = A_n$  e, portanto,  $\mathcal{A}_n$  não admite subálgebras próprias.

- (b) Mostre que qualquer álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

Seja  $\mathcal{A} = (A; f)$  uma álgebra mono-unária infinita. No sentido de se fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que  $\mathcal{A}$  não admite subálgebras próprias. Como  $A \neq \emptyset$ , consideremos  $a \in A$  e a subálgebra de  $\mathcal{A}$  gerada por  $\{f(a)\}$ . Uma vez que  $\mathcal{A}$  não admite subálgebras próprias, então  $A = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(\{f(a)\})$ . Logo, para todo  $x \in A$ , tem-se  $x = f^k(a)$ , para algum  $k \in \mathbb{N}$ . Em particular, tem-se  $a = f^r(a)$ , para algum  $r \in \mathbb{N}$ . Logo  $A = \{a, f(a), \dots, f^{r-1}(a)\}$  e, portanto,  $A$  é finito (contradição). Por conseguinte, toda a álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

2.5. Sejam  $\mathcal{A} = (A; F)$  uma álgebra e  $X, Y \subseteq A$ . Mostre que:

- i.  $X \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ .

Imediato, uma vez que  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$  é o menor subuniverso de  $\mathcal{A}$  que contém  $X$ .

- ii.  $X \subseteq Y \Rightarrow \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$ .

Admitamos que  $X \subseteq Y$ . Considerando que  $Y \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$ , segue que  $X \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$ . Então, atendendo a que  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$  é o menor subuniverso de  $\mathcal{A}$  que contém  $X$ , conclui-se que  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$ .

- iii.  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)) = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ .

Por (a), temos  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X))$ . Por outro lado,  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$  e  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ . Então, considerando que  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X))$  é o menor subuniverso de  $\mathcal{A}$  que contém  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ , concluímos que  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ . Portanto  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)) = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ .

- iv.  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$ .

Para cada conjunto finito  $Z$  tal que  $Z \subseteq X$ , tem-se  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ . Por conseguinte,

$$\bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\} \subseteq \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X).$$

A inclusão contária também é válida. De facto, para cada  $x \in A$ , se  $x \in \text{Sg}^{\mathcal{A}}(X)$ , tem-se  $x \in \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z)$ , para algum conjunto finito  $Z \subseteq X$ . Logo,

$$x \in \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}.$$

Portanto,

$$\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) \subseteq \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}.$$

Desta forma, provámos que  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup \{\text{Sg}^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$ .

2.6. Considere a álgebra  $\mathcal{A}$  definida no exercício 2.1.

- (a) Dê exemplo de conjuntos  $X, Y \subseteq A$  tais que:

- i.  $X \neq Y$  e  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(X) = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(Y)$ .

Sejam  $X = \emptyset$  e  $Y = \{0\}$ . Tem-se  $X \neq Y$  e  $\text{Sg}^{\mathcal{A}}(\emptyset) = \{0, 1\} = \text{Sg}^{\mathcal{A}}(\{0\})$ .

ii.  $|X| = 2$  e  $Sg^A(X) = A$ .

Dado  $X \subseteq A$ , tem-se  $Sg^A(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$ , onde

- $X_0 = X$ ;
- $X_{i+1} = X_i \cup \{h^A(x) \mid h^A \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \{0, 1, 2\}\}$ .

Sendo  $X = \{f, g\}$ , tem-se

- $X_0 = \{f, g\}$ ;
- $X_1 = \{f, g\} \cup \{0, f \wedge^A g = a, f \vee^A g = 1, \delta^A(f) = d, \delta^A(g) = e\}$ ;
- $X_2 = \{0, a, d, e, f, g, 1\} \cup \{d \wedge^A f = c, d \wedge^A e = b\}$ ;
- $X_3 = X_2 = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$ ,

e, portanto,  $Sg^A(X) = A$ .

(b) Determine  $Sg^A(\{e\})$  e  $Sg^A(\{f, g\})$ .

•  $Sg^A(\{e\})$

Dado  $X \subseteq A$ , tem-se  $Sg^A(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$ , onde

- $X_0 = X$ ;
- $X_{i+1} = X_i \cup \{h^A(x) \mid h^A \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \{0, 1, 2\}\}$ .

Sendo  $X = \{e\}$ , tem-se

- $X_0 = \{e\}$ ;
- $X_1 = \{e\} \cup \{0, \delta^A(e) = g, 1\}$ ;
- $X_2 = X_1 = \{0, e, g, 1\}$ .

e, portanto,  $Sg^A(\{e\}) = \{0, e, g, 1\}$ .

Logo

$$Sg^A(\{e\}) = (\{0, e, g, 1\}, (f^{Sg^A(\{e\})})_{f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}}),$$

onde, para toda o símbolo de operação  $n$ -ário  $f \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$ , tem-se

$$f^{Sg^A(\{e\})}(a_1, \dots, a_n) = f^A(a_1, \dots, a_n), \forall (a_1, \dots, a_n) \in Sg^A(\{e\})^n.$$

•  $Sg^A(\{f, g\})$

Da alínea anterior, sabe-se que  $Sg^A(\{f, g\}) = A$ . Logo  $Sg^A(\{f, g\}) = A$ .

2.7. Seja  $\mathcal{A} = (\{e, a, b, c, d\}; *^A, c^A)$  a álgebra de tipo  $(2, 0)$ , onde  $A = \{e, a, b, c, d\}$ ,  $c^A = d$  e  $*^A$  é a operação definida por

$f^A$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$d$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$e$	$d$	$e$	$e$
$c$	$c$	$e$	$a$	$e$	$c$
$d$	$d$	$b$	$e$	$c$	$e$

(a) Determine todos os subuniversos de  $\mathcal{A}$ .

Seja  $S$  um subuniverso de  $A$ . Então  $S$  é um subconjunto de  $A$  fechado para as operações de  $\mathcal{A}$ . Em particular,  $S$  é fechado para a operação nulária, pelo que  $c^A = d \in S$ . Considerando que  $S$  é fechado para a operação binária, segue que  $d *^A d = e \in S$ . Assim, se  $S$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , tem-se  $\{d, e\} \subseteq S$ . O conjunto  $\{d, e\}$  é fechado para todas as operações de  $\mathcal{A}$  e, portanto, é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ . São também subuniversos de  $\mathcal{A}$  os conjuntos:  $\{d, e, b\}$ ,  $\{d, e, c\}$ ,  $\{a, d, e, b\}$ ,  $\{a, b, c, d, e\}$ .

(b) Sejam  $X = \{b\}$  e  $Y = \{c\}$ . Diga, justificando, se  $Sg^A(X) \cup Sg^A(Y) = Sg^A(X \cup Y)$ .

Dado  $Z \subseteq A$ , tem-se  $Sg^A(Z) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} Z_k$ , onde

- $Z_0 = Z$ ;
- $Z_{i+1} = Z_i \cup \{h^A(z) \mid h^A \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } z \in (Z_i)^n, n \in \{0, 2\}\}$ .

Sendo  $X = \{b\}$ , tem-se:

$$X_0 = \{b\}; X_1 = \{b\} \cup \{d\}; X_2 = \{b, d\} \cup \{e\}; X_3 = X_2 = \{b, d, e\}.$$

Logo,  $Sg^{\mathcal{A}}(\{b\}) = \{b, d, e\}$ .

Sendo  $Y = \{c\}$ , tem-se:

$$Y_0 = \{c\}; Y_1 = \{c\} \cup \{d, e\}; Y_2 = Y_1 = \{c, d, e\}.$$

Logo,  $Sg^{\mathcal{A}}(\{b\}) = \{c, d, e\}$ .

Sendo  $X \cup Y = \{b, c\}$ , tem-se

$$(X \cup Y)_0 = \{b, c\}; (X \cup Y)_1 = \{b, c\} \cup \{a, d, e\}; (X \cup Y)_2 = X_1.$$

Logo,  $Sg^{\mathcal{A}}(\{b, c\}) = \{a, b, c, d, e\}$ .

Portanto,  $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = \{b, c, d, e\} \neq \{a, b, c, d, e\} = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$ .

2.8. Seja  $\mathcal{A} = (A; F)$  uma álgebra unária. Mostre que:

(a) Se  $S_1$  e  $S_2$  são subuniversos de  $\mathcal{A}$ , então  $S_1 \cup S_2$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ .

Uma vez que  $\mathcal{A}$  é uma álgebra unária, todas as operações de  $\mathcal{A}$  têm aridade 1. Sejam  $S_1$  e  $S_2$  subuniversos de  $\mathcal{A}$ . Então  $S_1, S_2 \subseteq A$  e  $S_1$  e  $S_2$  são fechados para todas as operações de  $\mathcal{A}$ . Nestas condições, o conjunto  $S_1 \cup S_2$  também é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , pois  $S_1 \cup S_2 \subseteq A$  e, para qualquer operação unária  $f^{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$  e para qualquer  $x \in A$ ,

$$\begin{aligned} x \in S_1 \cup S_2 &\Rightarrow x \in S_1 \text{ ou } x \in S_2 \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \text{ ou } f^{\mathcal{A}}(x) \in S_2 \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \cup S_2. \end{aligned}$$

(b) Para quaisquer  $X, Y \subseteq A$ ,  $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$ .

Para quaisquer  $X, Y \subseteq A$ , tem-se  $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$  e  $Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$ , donde segue que

$$Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \text{ e } Sg^{\mathcal{A}}(Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$$

e, portanto,  $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$ .

Para a prova da inclusão contrária, comecemos por observar que, como  $Sg^{\mathcal{A}}(X)$  e  $Sg^{\mathcal{A}}(Y)$  são subuniversos de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{A}$  é uma álgebra unária, o conjunto  $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ . Então, para concluir que  $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$ , basta provar que  $X \cup Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$ , pois  $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$  é o menor subuniverso de  $\mathcal{A}$  que contém  $X \cup Y$ . Ora, para quaisquer  $X, Y \subseteq A$ , temos  $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$  e  $Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$ , pelo que

$$X \cup Y \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y).$$

Por conseguinte, considerando o observado anteriormente, temos  $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$ .

Assim,  $Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y)$ .

2.9. Seja  $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, f)$  a álgebra de tipo (1) onde  $f$  é a operação definida por

$$\begin{array}{c|cccc} x & a & b & c & d \\ \hline f(x) & c & b & a & d \end{array}$$

(a) Determine todas as relações de congruência em  $\mathcal{A}$  e represente  $\text{Cong}(\mathcal{A})$  por meio de um diagrama de Hasse.

Para toda a congruência  $\Theta$  de uma álgebra  $\mathcal{A}$ , tem-se  $\Theta = \bigvee \{\Theta(x, y) \mid (x, y) \in \Theta\}$ . Assim, no sentido de determinarmos todas as congruências de  $\mathcal{A}$ , comecemos por determinar as congruências principais de  $\mathcal{A}$ , obtendo-se:

- $\theta(x, x) = \Delta_A$ , para qualquer  $x \in A$ .
- $\Theta(a, b) = \Theta(b, a) = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$ .
- $\Theta(a, c) = \Theta(c, a) = \Delta_A \cup \{(a, c), (c, a)\}$ ;
- $\Theta(a, d) = \Theta(d, a) = \Delta_A \cup \{(a, d), (d, a), (c, d), (d, c), (a, c), (c, a)\}$ ;
- $\Theta(b, c) = \Theta(c, b) = \Delta_A \cup \{(c, b), (b, c), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a)\} = \Theta(a, b)$ ;
- $\Theta(b, d) = \Theta(d, b) = \Delta_A \cup \{(b, d), (d, b)\}$ ;
- $\Theta(c, d) = \Theta(d, c) = \Delta_A \cup \{(c, d), (d, c), (a, d), (d, a), (a, c), (c, a)\} = \Theta(a, d)$ .

Apresentamos a justificação de que  $\Theta(a, b) = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$ , sendo as restantes justificações semelhantes.

Por definição de  $\Theta(a, b)$ ,  $\Theta(a, b)$  é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\{(a, b)\}$ . Então  $(a, b) \in \Theta(a, b)$ ,  $\Theta(a, b)$  é uma relação de equivalência (é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição (ou seja, para quaisquer  $x, y \in A$ ,  $(x, y) \in \Theta(a, b) \Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x), f^{\mathcal{A}}(y)) \in \Theta(a, b)$ .) Uma vez que  $\Theta(a, b)$  é reflexiva, temos  $\Delta_A \subseteq \Theta(a, b)$ . Como  $(a, b) \in \Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, b)$  é simétrica, também temos  $(b, a) \in \Theta(a, b)$ . Atendendo a que  $(a, b), (b, a) \in \Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, b)$  satisfaz a propriedade de substituição,  $(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(b)) = (c, b) \in \Theta(a, b)$  e  $(f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(a)) = (b, c) \in \Theta(a, b)$ . Dado que  $(c, b), (b, c) \in \Theta(a, b)$ , então, novamente pela propriedade de substituição,  $(f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(c)) = (b, a) \in \Theta(a, b)$  e  $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(b)) = (a, b) \in \Theta(a, b)$ . Considerando que  $(a, b), (b, c) \in \Theta(a, b)$  e  $(c, b), (b, a) \in \Theta(a, b)$ , então, por transitividade,  $(a, c), (c, a) \in \Theta(a, b)$ . Pela propriedade de substituição segue que  $(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(c)) = (c, a) \in \Theta(a, b)$  e  $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(a)) = (a, c) \in \Theta(a, b)$ . A relação  $\Theta = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, b), (b, c), (a, c), (c, a)\}$  é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição, logo  $\Theta$  é uma congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\{(a, b)\}$ ; além disso  $\Theta$  é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\{(a, b)\}$ . Por conseguinte,  $\Theta(a, b) = \Theta$ . Uma relação de congruência é simétrica, pelo que também se tem  $\Theta(b, a) = \Theta$ .

No sentido de determinarmos as restantes congruências, calculamos o supremo das congruências principais duas a duas:

- $\Theta(x, x) \vee \theta = \theta$ , para qualquer  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ .

Imediato, pois  $\Theta(x, x) \subseteq \theta$ .

- $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, c) = \Theta(a, b)$ .

Imediato, pois  $\Theta(a, c) \subseteq \Theta(a, b)$ .

- $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(b, d), (d, b)\} = \nabla_A$ .

A relação  $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$  é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, d)$ ; logo  $\Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \subseteq \Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$ . Uma vez que  $(b, a), (a, d) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d)$  e a relação  $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$  é transitiva, então  $(b, d) \in \Theta(a, b) \vee \Theta(a, d)$ . Considerando que a relação é simétrica também se tem  $(d, b) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d)$ . A relação  $\Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(b, d), (d, b)\}$  é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, d)$ .

- $\Theta(a, b) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (c, d), (c, d)\} = \nabla_A$ .

A relação  $\Theta(a, b) \vee \Theta(b, d)$  é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\Theta(a, b)$  e  $\Theta(b, d)$ ; logo  $\Theta(a, b) \cup \Theta(b, d) \subseteq \Theta(a, b) \vee \Theta(b, d)$ . Uma vez que  $(a, b), (b, d), (c, b), (b, d) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d)$  e a relação  $\Theta(a, b) \vee \Theta(b, d)$  é transitiva, tem-se  $(a, d), (c, d) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d)$ . Considerando que a relação é simétrica também se tem  $(d, a), (d, c) \in \Theta(a, b) \cup \Theta(b, d)$ . A relação  $\Theta(a, b) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (c, d), (c, d)\}$  é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\Theta(a, b)$  e  $\Theta(b, d)$ .

- $\Theta(a, c) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, d)$ .

Imediato, pois  $\Theta(a, c) \subseteq \Theta(a, d)$ .

- $\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, c) \cup \Theta(b, d)$ .

- $\Theta(a, d) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b)\} = \nabla_A$ .

A relação  $\Theta(a, d) \vee \Theta(b, d)$  é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\Theta(a, d)$  e  $\Theta(b, d)$ ; logo  $\Theta(a, d) \cup \Theta(b, d) \subseteq \Theta(a, d) \vee \Theta(b, d)$ . Uma vez que  $(a, d), (d, b), (c, d), (d, b) \in \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d)$  e a relação  $\Theta(a, d) \vee \Theta(b, d)$  é transitiva, tem-se  $(a, b), (c, b) \in \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d)$ . Considerando que a relação é simétrica também se tem  $(b, a), (b, c) \in \Theta(a, d) \cup \Theta(b, d)$ . A relação  $\Theta(a, d) \cup \Theta(b, d) \cup \{(a, d), (d, a), (b, c), (c, b)\}$  é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição; esta relação é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\Theta(a, d)$  e  $\Theta(b, d)$ .

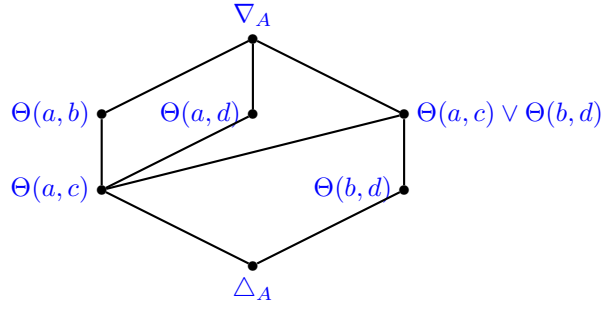
Considerando que  $\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$  e  $\nabla_A$  são distintas das congruências principais, calculemos o supremo de cada uma destas congruências com as congruências já determinadas:

- $\nabla_A \vee \theta = \nabla_A$ , para qualquer  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ ;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Delta_A = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$ ;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(a, b) = \nabla_A$ ;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(a, c) = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$ ;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, c) \cup \Theta(b, d) \cup \Theta(a, d) \cup \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\} = \nabla_A$ ;
- $(\Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)) \vee \Theta(b, d) = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$ .

Considerando os cálculos anteriores, temos

$$\text{Cong}(\mathcal{A}) = \{\triangle_A, \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, d), \Theta(b, d), \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d), \nabla_A\}.$$

O reticulado  $(\text{Cong}(\mathcal{A}), \subseteq)$  pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



(b) Para cada  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ , determine a álgebra quociente  $\mathcal{A}/\theta$ .

Sejam  $\mathcal{A} = (A; F)$  uma álgebra do tipo  $(O, \tau)$  e  $\theta$  uma congruência em  $\mathcal{A}$ . A álgebra quociente  $\mathcal{A}$  módulo  $\theta$  é a álgebra  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, F)$  do tipo  $(O, \tau)$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $f \in O_n$ ,

$$f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)]_\theta.$$

Assim,

- sendo  $\theta = \triangle_A$ , temos  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$  onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta, [c]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a\}, [b]_\theta = \{b\}, [c]_\theta = \{c\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [c]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(c)]_\theta = [a]_\theta \\ [d]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{aligned}$$

- sendo  $\theta = \Theta(a, b)$ , temos  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$  onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = [b]_\theta = [c]_\theta = \{a, b, c\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [d]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{aligned}$$

- sendo  $\theta = \Theta(a, c)$ , temos  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$  onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta, [d]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = [c]_\theta = \{a, c\}, [b]_\theta = \{b\}, [d]_\theta = \{d\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [d]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(d)]_\theta = [d]_\theta \end{aligned}$$

- sendo  $\theta = \Theta(b, d)$ , temos  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$  onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta, [c]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a\}, [b]_\theta = \{b, d\}, [c]_\theta = \{c\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \\ [c]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(c)]_\theta = [a]_\theta \end{aligned}$$

- sendo  $\theta = \Theta(a, d)$ , temos  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$  onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, c, d\} = [c]_\theta = [d]_\theta, [b]_\theta = \{b\},$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [b]_\theta \end{aligned}$$

- sendo  $\theta = \Theta(a, c) \vee \Theta(b, d)$ , temos  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$  onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta, [b]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, c\} = [c]_\theta, [b]_\theta = \{b, d\} = [d]_\theta,$$

e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \\ [b]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(b)]_\theta = [d]_\theta = [b]_\theta \end{aligned}$$

- sendo  $\theta = \nabla_A$ , temos  $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, f^{\mathcal{A}/\theta})$  onde

$$A/\theta = \{[a]_\theta\}, \text{ com } [a]_\theta = \{a, b, c, d\} = [b]_\theta = [c]_\theta = [d]_\theta,$$

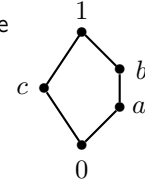
e

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta} : A/\theta &\rightarrow A/\theta \\ [a]_\theta &\mapsto [f^{\mathcal{A}}(a)]_\theta = [c]_\theta = [a]_\theta \end{aligned}$$

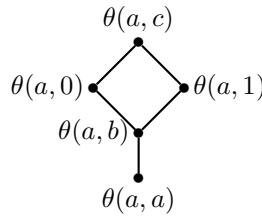
- 2.10. Sejam  $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$  um reticulado e  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{R})$ . Mostre que, para quaisquer  $a, b, c \in R$ , se  $a \leq c \leq b$  e  $(a, b) \in \theta$ , então  $(a, c) \in \theta$  e  $(b, c) \in \theta$ .

Sejam  $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$  um reticulado,  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{R})$  e  $a, b, c \in R$  tais que  $a \leq c \leq b$  e  $(a, b) \in \theta$ . Como  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{R})$ , então  $\theta$  é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição. Uma vez que  $\theta$  é reflexiva, tem-se  $(c, c) \in \theta$ . Considerando que  $(a, b), (c, c) \in \theta$  e  $\theta$  satisfaz a propriedade de substituição segue que  $(a \wedge c, b \wedge c) \in \theta$  e  $(a \vee c, b \vee c) \in \theta$ , ou seja,  $(a, c) \in \theta$  e  $(c, b) \in \theta$ . Atendendo a que  $\theta$  é simétrica e  $(c, b) \in \theta$ , também se tem  $(b, c) \in \theta$ . Portanto,  $(a, c) \in \theta$  e  $(b, c) \in \theta$ .

- 2.11. Considere o reticulado  $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$  representado pelo diagrama de Hasse



Mostre que o reticulado das congruências de  $\mathcal{N}_5$  pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



Dada uma álgebra  $\mathcal{A} = (A; F)$  e  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ , tem-se  $\theta = \bigvee \{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\}$ . Assim sendo, no sentido de determinarmos o reticulado de congruências de  $\mathcal{N}_5$ , comecemos por determinar as congruências principais de  $\mathcal{N}_5$ . Para a determinação de congruências num reticulado recorremos à seguinte caracterização - se  $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$  é um reticulado, então  $\theta \in \text{Eq}(R)$  é uma congruência em  $\mathcal{R}$  se e só se são satisfeitas as condições seguintes:

- (1) cada classe de  $\theta$  é um sub-reticulado de  $\mathcal{R}$ ;
- (2) cada classe de  $\theta$  é um subconjunto convexo de  $R$ ;
- (3) as classes de equivalência de  $\theta$  são fechadas para quadriláteros  
(i.e. sempre que  $a, b, c, d$  são elementos de  $R$  distintos tais que  $a < b, c < d$  e

$$(a \vee d = b \text{ e } a \wedge d = c) \text{ ou } (b \vee c = d \text{ e } b \wedge c = a),$$

então  $a \theta b$  sse  $c \theta d$ ).

Recorrendo à caracterização anterior, concluímos que:

- $\theta(a, a) = \triangle_{N_5}$  uma vez que a menor congruência que identifica um elemento com ele mesmo é a relação identidade.
- $\Theta(a, 1)$  é a congruência tal que  $N_5/\Theta(a, 1) = \{\{a, b, 1\}, \{0, c\}\}$ . Como  $(a, 1) \in \Theta(a, 1)$  e as classes de equivalência de uma congruência são conjuntos convexas, segue que  $(a, b), (1, b) \in \Theta(a, 1)$ . Considerando que  $(1, b) \in \Theta(a, 1)$  e as classes de equivalência de  $\Theta(a, 1)$  são fechadas para quadriláteros, temos  $(c, 0) \in \Theta(a, 1)$ . Na partição  $\{\{a, b, 1\}, \{0, c\}\}$ , as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de  $\mathcal{N}_5$  e são conjuntos convexas, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contém  $\{(a, 1)\}$ , portanto  $\Theta(a, 1)$  é a congruência que define o conjunto quociente indicado.

- $\Theta(a, 0)$  é a congruência tal que  $N_5/\Theta(a, 0) = \{\{a, b, 0\}, \{c, 1\}\}$ . De facto, como  $(a, 0) \in \Theta(a, 0)$  e as classes são fechadas para quadriláteros, segue que  $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$ . Como  $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$ , e novamente porque as classes são fechadas para quadriláteros, temos  $(b, 0) \in \Theta(a, 0)$ . Na partição  $\{\{a, b, 0\}, \{c, 1\}\}$ , as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de  $\mathcal{N}_5$  e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contém  $\{(a, 0)\}$ , portanto  $\Theta(a, 0)$  é a congruência que define o conjunto quociente indicado.
- $\Theta(a, b)$  é a congruência tal que  $N_5/\Theta(a, b) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{0\}, \{1\}\}$ . Na partição  $\{\{a, b\}, \{c\}, \{0\}, \{1\}\}$ , as classes são fechadas para quadriláteros, são sub-reticulados de  $\mathcal{N}_5$  e são conjuntos convexos, logo a relação de equivalência associada a esta partição é uma congruência. Esta é a menor congruência que contém  $\{(a, b)\}$ , portanto  $\Theta(a, b)$  é a congruência que define o conjunto quociente indicado.
- $\Theta(a, c) = \nabla_{N_5}$ . Considerando que  $(a, c) \in \Theta(a, c)$ , tem-se  $\{a, c\} \subseteq [c]_{\Theta(a, c)}$ . Então, considerando que as classes de uma congruência em  $\mathcal{N}_5$  são sub-reticulados de  $\mathcal{N}_5$ , segue que  $0, 1 \in [c]_{\Theta(a, c)}$ . Atendendo a que  $0, 1 \in [c]_{\Theta(a, c)}$  e as classes são conjuntos convexos, conclui-se que todos os elementos de  $N_5$  pertencem à classe  $[c]_{\Theta(a, c)}$ . Portanto,  $\Theta(a, c) = \nabla_{N_5}$ .
- $\Theta(0, b) = \Theta(a, 0)$ . Tem-se  $(0, b) \in \Theta(0, b)$ , pelo que  $0, b \in [b]_{\Theta(0, b)}$ . Então, considerando que as classes de equivalência de  $\Theta(0, b)$  são conjuntos convexos, segue que  $a \in [b]_{\Theta(0, b)}$ . Logo  $(a, 0) \in \Theta(0, b)$ , donde resulta que  $\Theta(a, 0) \subseteq \Theta(0, b)$ . Como  $(0, b) \in \Theta(a, 0)$ , também temos  $\Theta(0, b) \subseteq \Theta(a, 0)$ .
- $\Theta(0, c) = \Theta(a, 1)$ . Como  $(0, c) \in \Theta(0, c)$  e as classes são fechadas para quadriláteros, tem-se  $(a, 1) \in \Theta(0, c)$ . Logo  $\Theta(a, 1) \subseteq \Theta(0, c)$ . Também se tem  $(0, c) \in \Theta(a, 1)$ , pelo que  $\Theta(0, c) \subseteq \Theta(a, 1)$ .
- $\Theta(0, 1) = \nabla_{N_5}$ . Como  $(0, 1) \in \Theta(0, 1)$ , tem-se  $0, 1 \in [1]_{\Theta(0, 1)}$ . Considerando que as classes são conjuntos convexos, resulta que  $[1]_{\Theta(0, 1)} = \{0, a, b, c, 1\}$ . Portanto,  $\Theta(0, 1) = \nabla_{N_5}$ .
- $\Theta(b, c) = \nabla_{N_5}$ . Considerando que  $(b, c) \in \Theta(b, c)$ , tem-se  $\{b, c\} \subseteq [b]_{\Theta(b, c)}$ . Então, considerando que as classes de uma congruência em  $\mathcal{N}_5$  são sub-reticulados de  $\mathcal{N}_5$ , segue que  $0, 1 \in [b]_{\Theta(b, c)}$ . Atendendo a que  $0, 1 \in [b]_{\Theta(b, c)}$  e que as classes são conjuntos convexos, conclui-se que todos os elementos de  $N_5$  pertencem à classe  $[b]_{\Theta(b, c)}$ . Portanto,  $\Theta(b, c) = \nabla_{N_5}$ .
- $\Theta(b, 1) = \Theta(a, 1)$ . Tem-se  $(b, 1) \in \Theta(b, 1)$ . Logo, como as classes são fechadas para quadriláteros, também se tem  $(0, c) \in \Theta(b, 1)$ . Por conseguinte,  $\Theta(a, 1) = \Theta(0, c) \subseteq \Theta(b, 1)$ . Como  $(b, 1) \in \Theta(a, 1)$ , também temos  $\Theta(b, 1) \subseteq \Theta(a, 1)$ .
- $\Theta(c, 1) = \Theta(a, 0)$ . Tem-se  $(c, 1) \in \Theta(c, 1)$ . Então, como as classes são fechadas para quadriláteros,  $(a, 0) \in \Theta(c, 1)$ . Assim,  $\Theta(a, 0) \subseteq \Theta(c, 1)$ . Atendendo a que  $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$ , segue que  $\Theta(c, 1) \subseteq \Theta(a, 0)$ .
- $\theta(x, x) = \triangle_{N_5}$ , para todo  $x \in N_5$ . Uma vez que a menor congruência que identifica um elemento com ele mesmo é a identidade.
- $\Theta(x, y) = \Theta(y, x)$ , para todos  $x, y \in N_5$ . As congruências são relações de equivalência e, portanto, são simétricas.

Considerando que:

- todas as congruências principais são iguais a alguma das congruências de

$$\{\Theta(a, 0), \Theta(a, a), \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, 1)\},$$

- qualquer congruência é supremo de congruências principais,
- qualquer supremo de duas congruências de  $\{\Theta(a, 0), \Theta(a, a), \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, 1)\}$  é uma destas 5 congruências,

concluimos que  $\text{Con}\mathcal{N}_5 = \{\Theta(a, 0), \Theta(a, a), \Theta(a, b), \Theta(a, c), \Theta(a, 1)\}$ . O diagrama de Hasse indicado resulta da comparação entre as classes de congruência.

**Nota:** As congruências podem ser determinadas por um processo alternativo, considerando o facto de se tratarem de relações de equivalência que satisfazem a propriedade de substituição.

A título de exemplo, calculemos  $\Theta(a, 0)$  seguindo esse outro processo. Atendendo a que  $\Theta(a, 0)$  é a menor congruência que contém  $\{a, 0\}$ , tem-se  $(a, 0) \in \Theta(a, 0)$ . Como  $\Theta(a, 0)$  é reflexiva,  $\triangle_{N_5} \subseteq \Theta(a, 0)$ . Uma vez que  $(a, 0) \in \Theta(a, 0)$  e  $\Theta(a, 0)$  é simétrica, também se tem  $(0, a) \in \Theta(a, 0)$ . Como  $(a, 0), (c, c) \in \Theta(a, 0)$  e  $\Theta(a, 0)$  satisfaz a propriedade de substituição, segue que

$$(a \wedge c, 0 \wedge c) = (0, 0) \in \Theta(a, 0) \text{ e } (a \vee c, 0 \vee c) = (1, c) \in \Theta(a, 0).$$

Como  $(1, c) \in \Theta(a, 0)$  e  $\Theta(a, 0)$  é simétrica, tem-se  $(c, 1) \in \Theta(a, 0)$ . Dado que  $(c, 1), (b, b) \in \Theta(a, 0)$ , então, pela propriedade de substituição, temos

$$(c \wedge b, 1 \wedge b) = (0, b) \in \Theta(a, 0) \text{ e } (c \vee b, 1 \vee b) = (1, 1) \in \Theta(a, 0).$$

Dado que  $(0, b) \in \Theta(a, 0)$ , também temos  $(b, 0) \in \Theta(a, 0)$ , uma vez que a relação é simétrica. Considerando que

$$(a, 0), (0, b), (b, 0), (0, a) \in \Theta(a, 0),$$

então, por transitividade, temos  $(a, b), (b, a) \in \Theta(a, 0)$ . A relação

$$\Theta = \Delta_{N_5} \cup \{(a, 0), (0, a), (c, 1), (1, c), (0, b), (b, 0), (a, b), (b, a)\}$$

é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição (verificar), logo é uma congruência em  $N_5$  que contém  $\{(a, 0)\}$ ; além disso  $\Theta$  é a menor congruência em  $N_5$  que contém  $\{(a, 0)\}$ . Assim,  $\Theta(a, 0) = \Theta$  e, portanto,  $N_5/\Theta(a, 0) = \{\{0, a, b\}, \{c, 1\}\}$ .

2.12. Considere o anel  $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$ . Para cada  $q \in \mathbb{Z}$ , seja  $\equiv_q$  a relação de equivalência definida em  $\mathbb{Z}$  por

$$r \equiv_q s \text{ sse } r - s = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que, para cada  $q \in \mathbb{Z}$ , a relação  $\equiv_q$  é uma congruência em  $\mathcal{Z}$ .

A relação  $\equiv_q$  é uma congruência em  $\mathcal{Z}$  se é uma relação de equivalência e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que já é referido que  $\equiv_q$  é uma relação de equivalência, resta provar que a relação  $\equiv_q$  satisfaz a propriedade de substituição, ou seja, temos de provar que, para qualquer operação  $n$ -ária  $f \in \{+, \cdot, -, 0\}$ ,  $n \in \{0, 1, 2\}$ , é satisfeita a seguinte propriedade

$$(\forall_{i \in \{1, \dots, n\}} a_i \equiv_q b_i) \Rightarrow f(a_1, \dots, a_n) \equiv_q f(b_1, \dots, b_n).$$

(1) A relação  $\equiv_q$  é uma relação reflexiva e  $0 \in \mathbb{Z}$ , pelo que  $0 \equiv_q 0$ .

(2) Para quaisquer  $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} a_1 \equiv_q b_1 &\Rightarrow a_1 - b_1 = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow -a_1 - (-b_1) = q(-k), \text{ com } -k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow -a_1 \equiv_q -b_1. \end{aligned}$$

(3) Para quaisquer  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} (a_1 \equiv_q b_1 \text{ e } a_2 \equiv_q b_2) &\Rightarrow a_1 - b_1 = qk \text{ e } a_2 - b_2 = qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = q(k + k'), \text{ com } k + k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 + a_2) \equiv_q (b_1 + b_2). \end{aligned}$$

(4) Para quaisquer  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} (a_1 \equiv_q b_1 \text{ e } a_2 \equiv_q b_2) &\Rightarrow a_1 - b_1 = qk \text{ e } a_2 - b_2 = qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a_1 = b_1 + qk \text{ e } a_2 = b_2 + qk', \text{ para alguns } k, k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 a_2) = b_1 b_2 + q(b_1 k' + b_2 k + qk k'), \text{ com } b_1 k' + b_2 k + qk k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow a_1 a_2 - b_1 b_2 = q(b_1 k' + b_2 k + qk k'), \text{ com } b_1 k' + b_2 k + qk k' \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a_1 a_2) \equiv_q (b_1 b_2). \end{aligned}$$

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que  $\equiv_q$  satisfaz a propriedade de substituição. Logo  $\equiv_q$  é uma congruência em  $\mathcal{Z}$ .

2.13. Seja  $\mathcal{S} = (S; \cdot)$  um semigrupo. Um subconjunto não vazio  $I$  de  $S$  diz-se um *ideal* de  $S$  se, para quaisquer  $s \in S$  e  $i \in I$ , tem-se  $is \in I$  e  $si \in I$ . Mostre que, para qualquer ideal  $I$ ,  $I^2 \cup \Delta_S$  é uma congruência em  $S$ , designada a *congruência de Rees induzida por I*.

Representemos  $I^2 \cup \Delta_S$  por  $\theta$ . Pretende-se provar que  $\theta$  é uma congruência em  $\mathcal{S}$ , ou seja, que  $\theta$  é uma relação de equivalência em  $S$  que satisfaz a propriedade de substituição.

(i)  $\theta$  é reflexiva

Uma vez que  $\Delta_S \subseteq \theta$ , é imediato que  $\theta$  é reflexiva.

(ii)  $\theta$  é simétrica

Para quaisquer  $x, y \in S$ ,

$$\begin{aligned}(x, y) \in \theta &\Rightarrow (x, y) \in I^2 \text{ ou } (x, y) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (x \in I \text{ e } y \in I) \text{ ou } (x = y) \\ &\Rightarrow (y \in I \text{ e } x \in I) \text{ ou } (y, x) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (y, x) \in I^2 \text{ ou } (y, x) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (y, x) \in \theta\end{aligned}$$

(iii)  $\theta$  é transitiva

Para quaisquer  $x, y, z \in S$

$$\begin{aligned}(x, y) \in \theta \wedge (y, z) \in \theta &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ ou } (x, y) \in \Delta_S) \text{ e } ((y, z) \in I^2 \text{ ou } (y, z) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ e } (y, z) \in I^2) \text{ ou } ((x, y) \in I^2 \text{ e } (y, z) \in \Delta_S) \\ &\quad \text{ou } ((x, y) \in \Delta_S \text{ e } (y, z) \in I^2) \text{ ou } ((x, y) \in \Delta_S \text{ e } (y, z) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow (x, y, z \in I) \text{ ou } (x, y \in I \text{ e } y = z) \text{ ou } (x = y \text{ e } y, z \in I) \\ &\quad \text{ou } (x = y \text{ e } y = z) \\ &\Rightarrow (x, z \in I) \text{ ou } (x, z \in I) \text{ ou } (x, z \in I) \text{ ou } (x = z) \\ &\Rightarrow (x, z) \in I^2 \text{ ou } (x, z) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (x, z) \in \theta.\end{aligned}$$

(iv)  $\theta$  satisfaz a propriedade de substituição

Para quaisquer  $x, y, z, w \in S$ ,

$$\begin{aligned}(x, y) \in \theta \text{ e } (z, w) \in \theta &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ ou } (x, y) \in \Delta_S) \text{ e } ((z, w) \in I^2 \vee (z, w) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow ((x, y) \in I^2 \text{ e } (z, w) \in I^2) \text{ ou } ((x, y) \in I^2 \text{ e } (z, w) \in \Delta_S) \\ &\quad \vee ((x, y) \in \Delta_S \wedge (z, w) \in I^2) \vee ((x, y) \in \Delta_S \text{ e } (z, w) \in \Delta_S) \\ &\Rightarrow (x, y, z, w \in I) \text{ ou } (x, y \in I \text{ e } z = w) \text{ ou } (x = y \text{ e } z, w \in I) \\ &\quad \text{ou } (x = y \text{ e } z = w) \\ &\Rightarrow (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \text{ ou } (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \text{ ou } (x \cdot z \in I \text{ e } y \cdot w \in I) \\ &\quad \text{ou } (x \cdot z = y \cdot w) \\ &\Rightarrow (x \cdot z, y \cdot w) \in I^2 \text{ ou } (x \cdot z, y \cdot w) \in \Delta_S \\ &\Rightarrow (x \cdot z, y \cdot w) \in \theta.\end{aligned}$$

De (i), (ii), (iii), (iv) conclui-se que  $\theta$  é uma congruência em  $S$ .

2.14. Seja  $\mathcal{A} = (A; F)$  uma álgebra de tipo  $(O; \tau)$ . Mostre que  $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$  e  $\nabla_A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$  são congruências em  $\mathcal{A}$ .

A relação  $\Delta_A$  é uma relação de equivalência. Assim sendo, resta provar que  $\Delta_A$  satisfaz a propriedade de substituição.

Seja  $f \in O_n$ . Para quaisquer  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ ,

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) \in \Delta_A \text{ e } \dots \text{ e } (a_n, b_n) \in \Delta_A &\Rightarrow a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A \text{ e } a_1 = b_1 \text{ e } \dots \text{ e } a_n = b_n \\ &\Rightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) \in A \\ &\quad \text{e } f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n) \text{ (} f^{\mathcal{A}} \text{ é uma operação em } A) \\ &\Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n)) \in \Delta_A.\end{aligned}$$

Logo  $\Delta_A$  satisfaz a propriedade de substituição e, portanto,  $\Delta_A$  é uma congruência em  $\mathcal{A}$ .

A relação  $\nabla_A$  é uma relação de equivalência. Resta provar que  $\nabla_A$  satisfaz a propriedade de substituição.

Seja  $f \in O_n$ . Para quaisquer  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ ,

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \in \nabla_A \text{ e } \dots \text{ e } (a_n, b_n) \in \nabla_A &\Rightarrow a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A \\ &\Rightarrow f^A(a_1, \dots, a_n), f^A(b_1, \dots, b_n) \in A \text{ (} f^A \text{ é uma operação em } A \text{)} \\ &\Rightarrow (f^A(a_1, \dots, a_n), f^A(b_1, \dots, b_n)) \in \nabla_A \text{ (definição de } \nabla_A \text{)}. \end{aligned}$$

Logo  $\nabla_A$  satisfaz a propriedade de substituição e, portanto,  $\nabla_A$  é uma congruência em  $A$ .

- 2.15. Sejam  $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3, 4, 5\}; *^A, c^A)$  e  $\mathcal{B} = (\{1, 2\}; *^B, c^B)$  as álgebras de tipo  $(2, 0)$  cujas operações nulárias são dadas por  $c^A = 2$ ,  $c^B = 1$  e cujas operações binárias são definidas por

$*^A$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	5	2
2	2	3	3	2	2
3	2	3	2	2	2
4	5	2	2	4	2
5	2	2	2	2	2

$*^B$	1	2
1	2	2
2	2	1

Seja  $\alpha : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  a aplicação definida por  $\alpha(1) = 2$  e  $\alpha(2) = 3$ . Mostre que a aplicação  $\alpha$  é um monomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ . Justifique que  $\mathcal{B}$  é isomorfa a uma subálgebra de  $\mathcal{A}$ .

A aplicação  $\alpha$  é:

- um monomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$  se  $\alpha$  é um homomorfismo e se é injetiva;
- um homomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$  se é compatível com todos os símbolos de operação, ou seja, se para todo o símbolo de operação  $f \in \{0, *\}$  de aridade  $n$ ,  $n \in \{0, 2\}$ ,

$$\alpha(f^B(a_1, \dots, a_n)) = f^A(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n));$$

- injetiva se, para quaisquer  $a, b \in \{1, 2\}$ ,

$$\alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow a = b.$$

Facilmente verificamos que  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ , pois:

- $\alpha(c^B) = \alpha(1) = 2 = c^A$ ;
- $\alpha(1 *^B 1) = \alpha(2) = 3 = 2 *^A 2 = \alpha(1) *^A \alpha(1)$ ;
- $\alpha(1 *^B 2) = \alpha(2) = 3 = 2 *^A 3 = \alpha(1) *^A \alpha(2)$ ;
- $\alpha(2 *^B 2) = \alpha(1) = 2 = 3 *^A 3 = \alpha(2) *^A \alpha(2)$ ;
- $\alpha(2 *^B 1) = \alpha(2) = 3 = 3 *^A 2 = \alpha(2) *^A \alpha(1)$ .

A aplicação também é injetiva, uma vez que, para quaisquer  $x, y \in B$ , tem-se  $\alpha(x) \neq \alpha(y)$  sempre que  $x \neq y$  ( $1 \neq 2$  e  $\alpha(1) \neq \alpha(2)$ ).

Uma vez que  $\alpha$  é um monomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ , tem-se  $\mathcal{B} \cong \alpha(\mathcal{B})$ ; de facto, como  $\alpha$  é um monomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ , a aplicação  $\beta : B \rightarrow \alpha(B)$  definida por  $\beta(x) = \alpha(x)$ , para todo  $x \in B$ , é um isomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\alpha(\mathcal{B})$ . Por outro lado, como a álgebra  $\mathcal{B}$  é uma subálgebra de si mesma e  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ ,  $\alpha(\mathcal{B})$  é uma subálgebra de  $\mathcal{A}$ . Portanto, a álgebra  $\mathcal{B}$  é isomorfa a uma subálgebra de  $\mathcal{A}$ .

- 2.16. Sejam  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  álgebras do mesmo tipo. Mostre que se  $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ , então  $\beta \circ \alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ .

Sejam  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  álgebras de tipo  $(O, \tau)$ ,  $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $\beta \in \text{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ . Pretendemos mostrar que  $\beta \circ \alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{C}$ .

Uma vez que  $\alpha$  é uma função de  $A$  em  $B$  e  $\beta$  é uma função de  $B$  em  $C$ , então, por definição de composição de funções,  $\beta \circ \alpha$  é uma função de  $A$  em  $C$ . Além disso, prova-se que  $\beta \circ \alpha$  é compatível com todos os símbolos de operação. De facto, para quaisquer  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in O_n$  e  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ,

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(f^A(a_1, \dots, a_n)) &= \beta(\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n))) \\ &= \beta(f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))) && (\alpha \text{ é homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{B}) \\ &= f^C(\beta(\alpha(a_1)), \dots, \beta(\alpha(a_n))) && (\beta \text{ é homomorfismo de } \mathcal{B} \text{ em } \mathcal{C}) \\ &= f^C((\beta \circ \alpha)(a_1), \dots, (\beta \circ \alpha)(a_n)). \end{aligned}$$

Logo  $\beta \circ \alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{C}$ .

2.17. Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  álgebras do mesmo tipo. Mostre que se  $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  é um isomorfismo, então  $\alpha^{-1}$  é um isomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ .

Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  álgebras de tipo  $(O, \tau)$  e  $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  um isomorfismo.

Como  $\alpha$  é um isomorfismo, então  $\alpha$  é uma aplicação bijetiva e, portanto, admite inversa  $\alpha^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . A função  $\alpha^{-1}$  também é bijetiva, pelo que, para provar que  $\alpha^{-1}$  é um isomorfismo, resta mostrar que  $\alpha^{-1}$  é um homomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ .

Para quaisquer  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in O_n$  e  $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$ , tem-se

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)) &= \alpha^{-1}(f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))) && (\alpha \text{ é sobrejetiva, logo } \forall b_i \in B \exists a_i \in A, b_i = \alpha(a_i)) \\ &= \alpha^{-1}(\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n))) && (\alpha \text{ é um homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{B}) \\ &= (\alpha^{-1} \circ \alpha)(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \\ &= f^{\mathcal{A}}(\alpha^{-1}(b_1), \dots, \alpha^{-1}(b_n)). \end{aligned}$$

Logo  $\alpha^{-1}$  é um homomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ .

Uma vez que  $\alpha^{-1}$  é um homomorfismo e bijetiva, então  $\alpha^{-1}$  é um isomorfismo de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{A}$ .

2.18. Sejam  $\mathcal{A} = (A; F)$ ,  $\mathcal{B} = (B; G)$  álgebras do mesmo tipo e  $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Mostre que:

(a) Se  $A_1$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , então  $\alpha(A_1)$  é um subuniverso de  $\mathcal{B}$ .

Seja  $A_1$  um subuniverso de  $\mathcal{A}$ . Então

- (1)  $A_1 \subseteq A$ ;
- (2) para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $(a_1, \dots, a_n) \in (A_1)^n$ ,  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in A_1$ .

Pretende-se provar que  $\alpha(A_1)$  é um subuniverso de  $\mathcal{B}$ , ou seja, pretende-se mostrar que as seguintes condições são satisfeitas:

- (i)  $\alpha(A_1) \subseteq B$ ;
- (ii) para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $(b_1, \dots, b_n) \in (\alpha(A_1))^n$ ,  $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) \in \alpha(A_1)$ .

Prova de (i): uma vez que  $A_1 \subseteq A$  e  $\alpha$  é uma função de  $A$  em  $B$ , é imediato que  $\alpha(A_1) \subseteq B$ .

Prova de (ii): Sejam  $f$  um símbolo de operação de aridade  $n$  e  $(b_1, \dots, b_n) \in (\alpha(A_1))^n$ .

Como  $b_1, \dots, b_n \in \alpha(A_1)$ , tem-se

$$b_1 = \alpha(a_1), \dots, b_n = \alpha(a_n), \text{ para alguns } a_1, \dots, a_n \in A_1.$$

Então

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) &= f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \\ &= \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)). \quad (\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{aligned}$$

Atendendo a que  $a_1, \dots, a_n \in A_1$ ,  $f^{\mathcal{A}}$  é uma operação  $n$ -ária em  $A$  e  $A_1$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , tem-se  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in A_1$ ; logo  $\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \in \alpha(A_1)$ ; portanto,  $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) \in \alpha(A_1)$ .

Da prova de (i) e de (ii), conclui-se que  $\alpha(A_1)$  é um subuniverso de  $\mathcal{B}$ .

(b) Se  $B_1$  é um subuniverso de  $\mathcal{B}$ , então  $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ .

Seja  $B_1$  um subuniverso de  $\mathcal{B}$ . Então

- (1)  $B_1 \subseteq B$ ;
- (2) para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $(b_1, \dots, b_n) \in (B_1)^n$ ,  $f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) \in B_1$ .

Pretendemos mostrar que  $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , ou seja, temos de provar que

- (i)  $\alpha^{\leftarrow}(B_1) \subseteq A$ ;
- (ii) para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $(a_1, \dots, a_n) \in (\alpha^{\leftarrow}(B_1))^n$ ,  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in \alpha^{\leftarrow}(B_1)$ .

Prova de (i): Por definição de  $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ , tem-se  $\alpha^{\leftarrow}(B_1) = \{a \in A \mid \alpha(a) \in B_1\}$ . Logo  $\alpha^{\leftarrow}(B_1) \subseteq A$ .

Prova de (ii): Para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e qualquer  $(a_1, \dots, a_n) \in (\alpha^{\leftarrow}(B_1))^n$ , tem-se

$$\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \quad \text{e} \quad (\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in (B_1)^n.$$

Então, como  $B_1$  é subuniverso de  $\mathcal{B}$ , temos  $f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in B_1$ .

Logo  $\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) \in B_1$  e, portanto,  $f^A(a_1, \dots, a_n) \in \alpha^{\leftarrow}(B_1)$ .

De (i) e (ii) conclui-se que  $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ .

2.19. Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  álgebras do mesmo tipo e  $\alpha, \beta \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Mostre que

$$\text{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$$

é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ . A este subuniverso chama-se *igualizador de  $\alpha$  e  $\beta$* .

O conjunto  $\text{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$  se:

- (i)  $\text{Eq}(\alpha, \beta) \subseteq A$ ;
- (ii) para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)^n$ ,  $f^A(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)$ .

Prova de (i): Imediato, pela definição de  $\text{Eq}(\alpha, \beta)$ .

Prova de (ii): para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)^n$ , tem-se  $f^A(a_1, \dots, a_n) \in A$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) &= f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) & (\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \\ &= f^B(\beta(a_1), \dots, \beta(a_n)) & (a_1, \dots, a_n \in \text{Eq}(\alpha, \beta)) \\ &= \beta(f^A(a_1, \dots, a_n)) & (\beta \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})) \end{aligned}$$

Logo  $f^A(a_1, \dots, a_n) \in \text{Eq}(\alpha, \beta)$ .

2.20. Sejam  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  álgebras do mesmo tipo e  $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . Mostre que  $\alpha$  é injetiva se e só se  $\ker \alpha = \Delta_A$ .

$\Rightarrow$ ) Admitamos que  $\alpha$  é injetiva.

A relação  $\ker \alpha$  é uma relação de equivalência em  $A$ , logo  $\Delta_A \subseteq \ker \alpha$ . Por outro lado, para quaisquer  $x, y \in A$ ,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker \alpha &\Rightarrow \alpha(x) = \alpha(y) \\ &\Rightarrow x = y & (\alpha \text{ é injetiva}) \\ &\Rightarrow (x, y) \in \Delta_A. \end{aligned}$$

Assim,  $\ker \alpha \subseteq \Delta_A$ . Portanto,  $\ker \alpha = \Delta_A$ .

$\Leftarrow$ ) Consideremos, por hipótese, que  $\ker \alpha = \Delta_A$ . Então, para quaisquer  $x, y \in A$ ,

$$\alpha(x) = \alpha(y) \Rightarrow (x, y) \in \ker \alpha \Rightarrow (x, y) \in \Delta_A \Rightarrow x = y.$$

Logo  $\alpha$  é injetiva.

2.21. Sejam  $\mathcal{A} = (A; F)$ ,  $\mathcal{B} = (B; G)$  álgebras do mesmo tipo e  $\alpha : A \rightarrow B$  uma função. Mostre que  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$  se e só se  $\{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

Admitamos que  $S = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Mostremos que  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$ . Uma vez que  $\alpha$  é uma função de  $A$  em  $B$ , resta mostrar que  $\alpha$  é compatível com todos os símbolos de operação. Considerando que, por hipótese,  $S$  é um subuniverso de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , segue que, para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$  e para qualquer  $((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) \in S^n$ ,

$$f^{A \times B}((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) \in S,$$

ou seja

$$(f^A(x_1, \dots, x_n), f^B(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))) \in S.$$

Por conseguinte, por definição de  $S$ , temos  $f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) \in A$  e  $f^{\mathcal{B}}(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)) = \alpha(f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n))$ . Portanto, para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$  e para qualquer  $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ ,

$$\alpha(f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)).$$

Logo,  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$ .

Reciprocamente, admitamos que  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B}$  e mostremos que o conjunto  $S = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Uma vez que  $\alpha$  é um homomorfismo, para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$  e para qualquer  $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ , tem-se

$$\alpha(f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n)).$$

Então, para qualquer  $((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) \in S^n$ ,

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((x_1, \alpha(x_1)), \dots, (x_n, \alpha(x_n))) &= (f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n), f^{\mathcal{B}}(\alpha(x_1), \dots, \alpha(x_n))) \\ &= (f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n), \alpha(f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n))) \end{aligned}$$

e  $(f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n), \alpha(f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n))) \in S$ , uma vez que  $f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) \in A$ .

Portanto,  $S$  é um subuniverso de  $\mathcal{A}$ , pois é fechado para todas as operações de  $\mathcal{A}$ .

2.22. Sejam  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  álgebras do mesmo tipo. Mostre que  $S = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$  é um subuniverso de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ .

(a)  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$ .

Seja  $\alpha : A \times B \rightarrow B \times A$  a aplicação definida por  $\alpha(a, b) = (b, a)$ , para qualquer  $(a, b) \in A \times B$ . Mostremos que  $\alpha$  é um isomorfismo.

1) A aplicação  $\alpha$  está bem definida. De facto, para qualquer  $(a, b) \in A \times B$ , tem-se  $a \in A$  e  $b \in B$ , pelo que  $\alpha(a, b) = (b, a) \in B \times A$ . Além disso, para quaisquer  $(a, b), (a', b') \in A \times B$ ,

$$(a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow (b, a) = (b', a') \Rightarrow \alpha(a, b) = \alpha(a', b').$$

2) A aplicação  $\alpha$  é injetiva, pois, para quaisquer  $(a, b), (a', b') \in A \times B$ ,

$$\alpha(a, b) = \alpha(a', b') \Rightarrow (b, a) = (b', a') \Rightarrow a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow (a, b) = (a', b').$$

3) Claramente, a aplicação  $\alpha$  também é sobrejetiva, pois, para todo  $(b, a) \in B \times A$ , existe  $(a, b) \in A \times B$  tal que  $\alpha(a, b) = (b, a)$ .

4) A aplicação  $\alpha$  é compatível com todos os símbolos de operação, pois, para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \in (A \times B)^n$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(f^{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n))) &= \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n)) \\ &= (f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n), f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= f^{\mathcal{B} \times \mathcal{A}}((b_1, a_1), \dots, (b_n, a_n)) \\ &= f^{\mathcal{B} \times \mathcal{A}}(\alpha(a_1, b_1), \dots, \alpha(a_n, b_n)). \end{aligned}$$

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que  $\alpha$  é um isomorfismo de  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  em  $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$  e, portanto,  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$ .

(b)  $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$ .

Seja  $\alpha : A \times (B \times C) \rightarrow (A \times B) \times C$  a aplicação definida por  $\alpha(a, (b, c)) = ((a, b), c)$ , para qualquer  $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ . Mostremos que  $\alpha$  é um isomorfismo.

1) A aplicação  $\alpha$  está bem definida. De facto, para qualquer  $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ , tem-se  $a \in A$ ,  $b \in B$ ,  $c \in C$ , pelo que  $\alpha(a, (b, c)) = ((a, b), c) \in (A \times B) \times C$ . Além disso, para quaisquer  $(a, (b, c)), (a', (b', c')) \in A \times (B \times C)$ ,

$$\begin{aligned} (a, (b, c)) = (a', (b', c')) &\Rightarrow a = a', (b, c) = (b', c') \\ &\Rightarrow a = a', b = b', c = c' \\ &\Rightarrow (a, b) = (a', b'), c = c' \\ &\Rightarrow ((a, b), c) = ((a', b'), c') \\ &\Rightarrow \alpha(a, (b, c)) = \alpha(a', (b', c')). \end{aligned}$$

2) A aplicação  $\alpha$  é injetiva, pois, para quaisquer  $(a, (b, c)), (a', (b', c')) \in A \times (B \times C)$ ,

$$\begin{aligned}\alpha(a, (b, c)) = \alpha(a', (b', c')) &\Rightarrow ((a, b), c) = ((a', b'), c') \\ &\Rightarrow (a, b) = (a', b'), c = c' \\ &\Rightarrow a = a', b = b', c = c' \\ &\Rightarrow a = a', (b, c) = (b', c') \\ &\Rightarrow (a, (b, c)) = (a', (b', c')).\end{aligned}$$

3) Claramente, a aplicação também é sobrejetiva, pois, para todo  $((a, b), c) \in (A \times B) \times C$ , existe  $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$  tal que  $\alpha(a, (b, c)) = ((a, b), c)$ .

4) A aplicação é compatível com todos os símbolos de operação, pois, para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para qualquer  $((a_1, (b_1, c_1)), \dots, (a_n, (b_n, c_n))) \in (A \times (B \times C))^n$ ,

$$\begin{aligned}&\alpha(f^{A \times (B \times C)}((a_1, (b_1, c_1)), \dots, (a_n, (b_n, c_n)))) \\ &= \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n), f^{B \times C}((b_1, c_1), \dots, (b_n, c_n))) \\ &= \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n), (f^B(b_1, \dots, b_n), f^C(c_1, \dots, c_n))) \\ &= ((f^A(a_1, \dots, a_n), f^B(b_1, \dots, b_n)), f^C(c_1, \dots, c_n)) \\ &= (f^{A \times B}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)), f^C(c_1, \dots, c_n)) \\ &= f^{(A \times B) \times C}(((a_1, b_1), c_1), \dots, ((a_n, b_n), c_n)) \\ &= f^{(A \times B) \times C}(\alpha(a_1, (b_1, c_1)), \dots, \alpha(a_n, (b_n, c_n))).\end{aligned}$$

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que  $\alpha$  é um isomorfismo de  $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$  em  $(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$  e, portanto,  $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$ .

2.23. Sejam  $\mathcal{A}$  uma álgebra e  $\theta, \rho \in \text{Con}\mathcal{A}$ .

(a) Mostre que a aplicação  $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$  definida por  $\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_\rho)$  é um homomorfismo.

Para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , e para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,

$$\begin{aligned}\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) &= ([f^A(a_1, \dots, a_n)]_\theta, [f^A(a_1, \dots, a_n)]_\rho) \\ &= (f^{A/\theta}([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta), f^{A/\rho}([a_1]_\rho, \dots, [a_n]_\rho)) \\ &= f^{A/\theta \times A/\rho}([a_1]_\theta, [a_1]_\rho, \dots, [a_n]_\theta, [a_n]_\rho) \\ &= f^{A/\theta \times A/\rho}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)).\end{aligned}$$

Logo  $\alpha$  é compatível com qualquer operação e, portanto,  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$ .

(b) Mostre que  $\ker \alpha = \theta \cap \rho$ . Conclua que  $\alpha$  é injetiva se e só se  $\theta \cap \rho = \Delta_A$ .

Para quaisquer  $a, b \in A$ ,

$$\begin{aligned}(a, b) \in \ker \alpha &\Leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \\ &\Leftrightarrow ([a]_\theta, [a]_\rho) = ([b]_\theta, [b]_\rho) \\ &\Leftrightarrow [a]_\theta = [b]_\theta \text{ e } [a]_\rho = [b]_\rho \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in \theta \text{ e } (a, b) \in \rho \\ &\Leftrightarrow (a, b) \in \theta \cap \rho.\end{aligned}$$

Logo  $\ker \alpha = \theta \cap \rho$ .

A função  $\alpha$  é injetiva se e só se  $\ker \alpha = \Delta_A$ . Considerando o que foi provado em 2.20 segue que  $\alpha$  é injetiva se e só se  $\theta \cap \rho = \Delta_A$ .

(c) Mostre que  $\alpha$  é sobrejetiva se e só se  $\theta \circ \rho = \nabla_A$ .

$\Rightarrow$ ) Admitamos que  $\alpha$  é sobrejetiva. Pretendemos provar que  $\theta \circ \rho = \nabla_A$ .

Uma vez que  $\theta$  e  $\rho$  são relações binárias em  $A$ ,  $\theta \circ \rho$  é uma relação binária em  $A$  e, portanto,  $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$ .

Sejam  $a, b \in A$ . Então  $([a]_\theta, [b]_\rho) \in \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$ . Considerando que  $\alpha$  é sobrejetiva, existe  $c \in A$  tal que  $\alpha(c) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$ , donde segue que  $([c]_\theta, [c]_\rho) = ([a]_\theta, [b]_\rho)$  e, por conseguinte,  $[c]_\theta = [a]_\theta$  e  $[c]_\rho = [b]_\rho$ . Assim,  $(c, a) \in \theta$  e  $(b, c) \in \rho$ , pelo que  $(b, a) \in \theta \circ \rho$ . Logo, para quaisquer  $a, b \in A$ , tem-se  $(b, a) \in \theta \circ \rho$  e, portanto,  $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$ .

Considerando que  $\theta \circ \rho \subseteq \nabla_A$  e  $\nabla_A \subseteq \theta \circ \rho$ , concluímos que  $\nabla_A = \theta \circ \rho$ .

$\Leftarrow$ ) Admitamos que  $\nabla_A = \theta \circ \rho$ .

Pretende-se provar que  $\alpha$  é sobrejetiva.

Seja  $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$ . Para quaisquer  $a, b \in A$ , tem-se  $(b, a) \in \nabla_A$  e, uma vez que  $\nabla_A = \theta \circ \rho$ ,  $(b, a) \in \theta \circ \rho$ . Então existe  $c \in A$  tal que  $(b, c) \in \rho$  e  $(c, a) \in \theta$ . Assim,  $[a]_\theta = [c]_\theta$ ,  $[b]_\rho = [c]_\rho$  e, portanto,  $([a]_\theta, [b]_\rho) = ([c]_\theta, [c]_\rho)$ . Logo, para qualquer  $([a]_\theta, [b]_\rho) \in A/\theta \times A/\rho$ , existe  $c \in A$  tal que  $([a]_\theta, [b]_\rho) = \alpha(c)$ , ou seja,  $\alpha$  é sobrejetiva.

2.24. Sejam  $\mathcal{A} = (A; (f^A)_{f \in O})$ ,  $\mathcal{B} = (B; (f^B)_{f \in O})$  e  $\mathcal{C} = (C; (f^C)_{f \in O})$  álgebras de tipo  $(O, \tau)$ ,  $\alpha_1 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $\alpha_2 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ . Seja  $\alpha : A \rightarrow B \times C$  a aplicação definida por  $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$ , para todo  $a \in A$ .

(a) Mostre que  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ .

Para qualquer símbolo de operação  $f$  de aridade  $n$  e para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,

$$\begin{aligned} \alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) &= (\alpha_1(f^A(a_1, \dots, a_n)), \alpha_2(f^A(a_1, \dots, a_n))) \\ &\stackrel{*}{=} (f^B(\alpha_1(a_1), \dots, \alpha_1(a_n)), f^C(\alpha_2(a_1), \dots, \alpha_2(a_n))) \\ &= f^{B \times C}((\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_1)), \dots, (\alpha_1(a_n), \alpha_2(a_n))) \\ &= f^{B \times C}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)). \end{aligned}$$

A aplicação  $\alpha$  é compatível com todos os símbolos de operação, logo  $\alpha$  é um homomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ .

(\*)  $\alpha_1 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  e  $\alpha_2 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ .

(b) Mostre que  $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$ .

Para quaisquer  $x, y$ ,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \ker \alpha &\Leftrightarrow x, y \in A \text{ e } \alpha(x) = \alpha(y) \\ &\Leftrightarrow x, y \in A \text{ e } (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\alpha_1(y), \alpha_2(y)) \\ &\Leftrightarrow x, y \in A \text{ e } \alpha_1(x) = \alpha_1(y) \text{ e } \alpha_2(x) = \alpha_2(y) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \ker \alpha_1 \text{ e } (x, y) \in \ker \alpha_2 \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2. \end{aligned}$$

Logo  $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$ .

(c) Mostre que se  $\alpha$  é um epimorfismo, então  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são epimorfismos e

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

Começamos por mostrar que se  $\alpha$  é um epimorfismo, então  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são epimorfismos. Uma vez que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são homomorfismos, resta provar que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são funções sobrejetivas.

Seja  $b \in B$ . Como  $C \neq \emptyset$ , existe  $c \in C$ . Logo  $(b, c) \in B \times C$ . Considerando que  $\alpha$  é um epimorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ , existe  $a \in A$  tal que  $\alpha(a) = (b, c)$ , i.e., existe  $a \in A$  tal que  $(\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (b, c)$ . Logo, para todo  $b \in B$ , existe  $a \in A$  tal que  $\alpha_1(a) = b$ . Assim,  $\alpha_1$  é sobrejetiva. De modo análogo, prova-se que  $\alpha_2$  é sobrejetiva.

Pelo 1º Teorema do Isomorfismo, tem-se

$$\mathcal{A}/\ker \alpha \cong \alpha(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \cong \alpha_1(\mathcal{A}) \text{ e } \mathcal{A}/\ker \alpha_2 \cong \alpha_2(\mathcal{A}).$$

Uma vez que  $\alpha$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são sobrejetivas, então

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha) \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \quad \mathcal{A}/(\ker \alpha_1) \cong \mathcal{B} \text{ e } \mathcal{A}/(\ker \alpha_2) \cong \mathcal{C}.$$

Assim,

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha) \cong \mathcal{A}/(\ker \alpha_1) \times \mathcal{A}/(\ker \alpha_2).$$

Considerando o que foi provado na alínea anterior segue que

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/(\ker \alpha_1) \times \mathcal{A}/(\ker \alpha_2).$$

2.25. Sejam  $\mathcal{A}$  uma álgebra e  $\theta, \theta^* \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ . Mostre que  $(\theta, \theta^*)$  é um par de congruências fator em  $\mathcal{A}$  se e só se  $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$  e  $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$ .

$\Rightarrow$ ) Sejam  $\theta, \theta^* \in \text{Cong}(\mathcal{A})$  tais que  $(\theta, \theta^*)$  é um par de congruências fator em  $\mathcal{A}$ . Então:

$$(1) \theta \cap \theta^* = \triangle_A; \quad (2) \theta \vee \theta^* = \nabla_A; \quad (3) \theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta.$$

Pretende-se provar que:

$$(i) \theta \cap \theta^* = \triangle_A; \quad (ii) \theta \circ \theta^* = \nabla_A.$$

De (1) é imediato (i). De (3) segue que  $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$  (Teorema 2.3.15). Então, por (2), tem-se (ii).

$\Leftarrow$ ) Reciprocamente, admitamos que  $\theta$  e  $\theta^*$  são congruências em  $\mathcal{A}$  tais que:

$$(i) \theta \cap \theta^* = \triangle_A; \quad (ii) \theta \circ \theta^* = \nabla_A.$$

Pretende-se mostrar que:

$$(1) \theta \cap \theta^* = \triangle_A; \quad (2) \theta \vee \theta^* = \nabla_A; \quad (3) \theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta.$$

De (i) é imediato (1). Uma vez que  $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$ , tem-se  $\theta^* \circ \theta \subseteq \theta \circ \theta^*$ , pelo que  $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$  e  $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$  (Teorema 2.3.15). Assim, tem-se (3). De  $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$  e de (ii) segue (2).

2.26. Seja  $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; f^{\mathcal{A}})$  a álgebra de tipo (1) onde  $f^{\mathcal{A}} : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$  é a operação definida por

$x$	$a$	$b$	$c$	$d$
$f^{\mathcal{A}}(x)$	$c$	$d$	$a$	$b$

(a) Determine  $\Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, d)$ . Justifique que  $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$  é um par de congruências fator.

Começamos por determinar  $\Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, d)$ .

A relação  $\Theta(a, b)$  é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\{(a, b)\}$ . Então  $(a, b) \in \Theta(a, b)$ ,  $\Theta(a, b)$  é uma relação de equivalência (i.e., é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que  $\Theta(a, b)$  é reflexiva, tem-se  $\triangle_A \subseteq \Theta(a, b)$ . Uma vez que  $(a, b) \in \Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, b)$  é simétrica segue que  $(b, a) \in \Theta(a, b)$ . Como  $(a, b), (b, a) \in \Theta(a, b)$  e  $\Theta(a, b)$  satisfaz a propriedade de substituição, tem-se

$$(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(b)) = (c, d) \in \Theta(a, b), (f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(a)) = (d, c) \in \Theta(a, b).$$

Considerando que  $(c, d), (d, c) \in \Theta(a, b)$ , então, novamente pela propriedade de substituição, temos

$$(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(d)) = (a, b) \in \Theta(a, b), (f^{\mathcal{A}}(d), f^{\mathcal{A}}(c)) = (b, a) \in \Theta(a, b).$$

Então,  $\triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \subseteq \Theta(a, b)$ . A relação  $\triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$  é uma congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\{(a, b)\}$  e é a menor congruência nestas condições. Assim,  $\Theta(a, b) = \triangle_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$ .

De modo análogo, obtem-se  $\Theta(a, d) = \triangle_A \cup \{(a, d), (d, a), (c, b), (b, c)\}$ .

Um par  $(\theta_1, \theta_2)$  de congruências em  $\mathcal{A}$  diz-se um par de congruências fator se satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A; \quad (ii) \theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A; \quad (iii) \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1.$$

Então, atendendo a que:

- $\Theta(a, b) \cap \Theta(a, d) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\} = \triangle_A;$
- $\Theta(a, b) \vee \Theta(a, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\} = \nabla_A;$
- $\Theta(a, b) \circ \Theta(a, d) = \Theta(a, b) \cup \Theta(a, d) \cup \{(a, c), (d, b), (c, a), (b, d)\} = \Theta(a, d) \circ \Theta(a, b),$

conclui-se que  $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$  é um par de congruências fator.

(Em alternativa pode-se mostrar que  $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$  é um par de congruências fator recorrendo à caracterização referida no exercício 2.24.)

- (b) Justifique que existem álgebras  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  não triviais tais que  $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ . Dê exemplo de álgebras  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  nas condições indicadas e determine a álgebra  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ .

Sejam  $\theta_1 = \Theta(a, b)$ ,  $\theta_2 = \Theta(a, d)$ ,  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1$  e  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2$ . Uma vez que  $\mathcal{A}$  é não trivial e  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\nabla_{\mathcal{A}}\}$ , então  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são álgebras não triviais. Como  $(\theta_1, \theta_2)$  é um par de congruências fator, tem-se  $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  (Teorema 2.5.5).

Tem-se  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1 = (A/\theta_1; f^{\mathcal{A}/\theta_1})$ , onde  $A/\theta_1 = \{[a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_1}\}$  (pois  $\theta_1 = \Theta(a, b) = \Delta_A \cup \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\}$  e, portanto,  $[a]_{\theta_1} = [b]_{\theta_1}$  e  $[c]_{\theta_1} = [d]_{\theta_1}$ ), e  $f^{\mathcal{A}/\theta_1} : A/\theta_1 \rightarrow A/\theta_1$  é a operação definida por

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}) &= [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_1} = [c]_{\theta_1}, \\ f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}) &= [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_1} = [a]_{\theta_1}. \end{aligned}$$

No caso da álgebra  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2 = (A/\theta_2; f^{\mathcal{A}/\theta_2})$ , tem-se  $A/\theta_2 = \{[a]_{\theta_2}, [c]_{\theta_2}\}$  (pois  $\theta_2 = \Theta(a, d) = \Delta_A \cup \{(a, d), (d, a), (c, b), (b, c)\}$  e, portanto,  $[a]_{\theta_2} = [d]_{\theta_2}$  e  $[c]_{\theta_2} = [b]_{\theta_2}$ ), e  $f^{\mathcal{A}/\theta_2} : A/\theta_2 \rightarrow A/\theta_2$  é a operação definida por

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2}) &= [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_2} = [c]_{\theta_2}, \\ f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2}) &= [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_2} = [a]_{\theta_2}. \end{aligned}$$

Assim,  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (A/\theta_1 \times A/\theta_2; f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2})$ , onde

$$A/\theta_1 \times A/\theta_2 = \{([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2})\}$$

e  $f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} : (A/\theta_1 \times A/\theta_2) \rightarrow (A/\theta_1 \times A/\theta_2)$  é a operação definida por

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([a]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), \\ f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([c]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), \\ f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([a]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), \\ f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) &= (f^{\mathcal{A}_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}_2}([c]_{\theta_2})) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}). \end{aligned}$$

- 2.27. (a) Mostre que toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível.

Seja  $\mathcal{A} = (A; F)$  uma álgebra de tipo  $(O, \tau)$ , onde  $|A| = n$ , com  $n \in \mathbb{N}$  e  $n$  primo. Sejam  $\mathcal{A}_1 = (A_1; G)$  e  $\mathcal{A}_2 = (A_2; H)$  álgebras de tipo  $(O, \tau)$  tais que  $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ . Como  $\mathcal{A}$  é finita, então  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  são finitas e tem-se  $|A| = |A_1 \times A_2| = |A_1| \times |A_2|$ . Como  $|A| = n$  e  $n$  é primo, segue que  $|A_1| = 1$  ou  $|A_2| = 1$ ; logo  $\mathcal{A}_1$  é a álgebra trivial ou  $\mathcal{A}_2$  é a álgebra trivial. Portanto, a álgebra  $\mathcal{A}$  é diretamente indecomponível.

- (b) Seja  $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$  a álgebra tal que  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$  e  $f^{\mathcal{A}}$  é a operação unária em  $A$  definida por

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{2, 4\} \\ 2 & \text{se } x \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

- i. Sejam  $\theta_1$  e  $\theta_2$  as congruências de  $\mathcal{A}$  definidas por  $\theta_1 = \Theta(1, 2)$  e  $\theta_2 = \Theta(3, 5)$ . Determine  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Verifique que  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_{\mathcal{A}}\}$  e  $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_{\mathcal{A}}$ .

A relação  $\theta_1 = \Theta(1, 2)$  é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\{(1, 2)\}$ . Então  $(1, 2) \in \theta_1$ ,  $\theta_1$  é uma relação de equivalência (i.e.  $\theta_1$  é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição. Considerando que  $\theta_1$  é reflexiva, tem-se  $\Delta_{\mathcal{A}} \subseteq \theta_1$ . Como  $(1, 2) \in \theta_1$  e  $\theta_1$  é simétrica, também se tem  $(2, 1) \in \theta_1$ . Uma vez que  $(1, 2), (2, 1) \in \theta_1$  e  $\theta_1$  satisfaz a propriedade de substituição, segue que

$$(f^{\mathcal{A}}(1), f^{\mathcal{A}}(2)) = (2, 1), (f^{\mathcal{A}}(2), f^{\mathcal{A}}(1)) = (1, 2) \in \theta_1.$$

Assim,  $\Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(1, 2), (2, 1)\} \subseteq \theta_1$ . A relação  $\Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(1, 2), (2, 1)\}$  é uma congruência em  $\mathcal{A}$  e é a menor congruência em  $\mathcal{A}$  que contém  $\{(1, 2)\}$ ; portanto  $\theta_1 = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(1, 2), (2, 1)\}$ .

De modo análogo, determina-se  $\theta_2 = \Theta(3, 5)$  e obtem-se  $\theta_2 = \Delta_{\mathcal{A}} \cup \{(3, 5), (5, 3)\}$ .

Claramente, tem-se  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_{\mathcal{A}}\}$ , pois  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A})$ ,  $\theta_1 \neq \Delta_{\mathcal{A}}$  ( $(1, 2) \in \theta_1$  e  $(1, 2) \notin \Delta_{\mathcal{A}}$ ) e  $\theta_2 \neq \Delta_{\mathcal{A}}$  ( $(3, 5) \in \theta_2$  e  $(3, 5) \notin \Delta_{\mathcal{A}}$ ). Também é imediato que

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} = \Delta_{\mathcal{A}}.$$

- ii. Justifique que se  $\theta$  e  $\phi$  são congruências de  $\mathcal{A}$  tais que  $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$ , então  $\theta = \nabla_A$  ou  $\phi = \nabla_A$ .

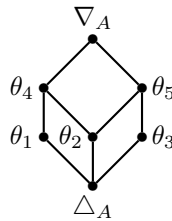
A álgebra  $\mathcal{A}$  tem um número primo de elementos ( $|A| = 5$ ). Logo, por (a), conclui-se que  $\mathcal{A}$  é diretamente indecomponível. Então, se  $\theta$  e  $\phi$  são congruências de  $\mathcal{A}$  tais que  $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$ ,  $\mathcal{A}/\theta$  é a álgebra trivial ou  $\mathcal{A}/\phi$  é a álgebra trivial. No primeiro caso, tem-se  $\theta = \nabla_A$ ; no segundo caso tem-se  $\phi = \nabla_A$ .

- iii. Diga, justificando, se a álgebra  $\mathcal{A}$  é subdiretamente irredutível.

A álgebra  $\mathcal{A}$  é subdiretamente irredutível se e só se  $\mathcal{A}$  é a álgebra trivial ou  $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$  tem elemento mínimo.

A álgebra  $\mathcal{A}$  não é trivial ( $|A| = 5$ ). Por outro lado, da alínea (b) i., sabe-se que existem  $\theta_1, \theta_2 \in \text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$  tais que  $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$  e, portanto,  $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$  não tem elemento mínimo. Logo  $\mathcal{A}$  não é subdiretamente irredutível.

2.28. Seja  $\mathcal{A} = (A; F)$  uma álgebra cujo reticulando das congruências é representado pelo diagrama de Hasse seguinte

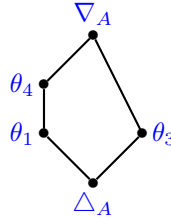


Justifique que:

- (a) A álgebra  $\mathcal{A}$  não é congruente-distributiva.

A álgebra  $\mathcal{A}$  é congruente-distributiva se e só se  $\text{Cong}(\mathcal{A})$  é um reticulando distributivo. Um reticulando é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulando isomorfo a  $M_3$  ou a  $N_5$ .

O reticulando

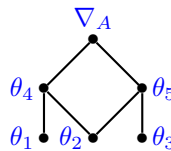


é um sub-reticulando de  $\text{Cong} \mathcal{A}$  e é isomorfo a  $N_5$ . Logo a álgebra  $\mathcal{A}$  não é congruente-distributiva.

- (b) A álgebra  $\mathcal{A}$  não é subdiretamente irredutível.

A álgebra  $\mathcal{A}$  é subdiretamente irredutível se e só se  $\mathcal{A}$  é a álgebra trivial ou  $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$  tem elemento mínimo.

A álgebra  $\mathcal{A}$  não é trivial, pois  $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\} \neq \emptyset$ . Além disso, o c.p.o.  $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$

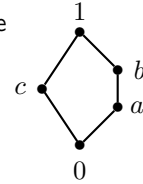


não tem elemento mínimo. Logo, a álgebra  $\mathcal{A}$  não é subdiretamente irredutível.

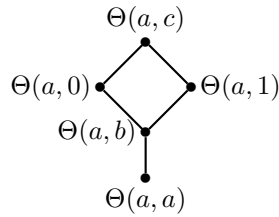
- (c) Os reticulados  $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_1)$  e  $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_3)$  são isomorfos.

Pelo Teorema da Correspondência, tem-se  $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_1) \cong [\theta_1, \nabla_A]$  e  $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_3) \cong [\theta_3, \nabla_A]$ . Como  $[\theta_1, \nabla_A] \cong [\theta_3, \nabla_A]$  (pois a aplicação  $\varphi : [\theta_1, \nabla_A] \rightarrow [\theta_3, \nabla_A]$ , definida por  $\varphi(\theta_1) = \theta_3$ ,  $\varphi(\theta_4) = \theta_5$  e  $\varphi(\nabla_A) = \nabla_A$ , é um isomorfismo de c.p.o.'s), então  $\text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_1) \cong \text{Cong}(\mathcal{A}/\theta_3)$ .

2.29. Considere o reticulado  $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$  representado pelo diagrama de Hasse



Sabendo que o reticulado das congruências de  $\mathcal{N}_5$  pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



diga, justificando, se a álgebra  $\mathcal{N}_5$  é:

(a) Congruente-modular.

Uma álgebra  $\mathcal{A}$  diz-se congruente-modular se o reticulado  $\text{Cong}(\mathcal{A})$  é modular.

O reticulado  $\text{Con}\mathcal{N}_5$  é modular. De facto, um reticulado é modular se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a  $N_5$ . Então, como o único sub-reticulado de  $\text{Con}\mathcal{N}_5$  com 5 elementos é o próprio reticulado e este não é isomorfo a  $N_5$ , concluímos que  $\text{Con}\mathcal{N}_5$  é modular.

(b) Diretamente indecomponível.

Uma álgebra  $\mathcal{A} = (A; F)$  é diretamente indecomponível se e só se as únicas congruências fator de  $\mathcal{A}$  são  $\Delta_A$  e  $\nabla_A$ . Uma congruência  $\theta \in \text{Cong}(\mathcal{A})$  diz-se uma congruência fator se existe  $\theta' \in \text{Cong}(\mathcal{A})$  tal que  $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$ ,  $\theta \vee \theta' = \nabla_A$  e  $\theta \cap \theta' = \Delta_A$ .

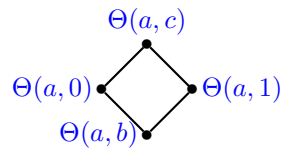
Considerando o reticulado de congruências de  $\mathcal{N}_5$ , conclui-se que  $\Delta_{N_5}$  e  $\nabla_{N_5}$  são as únicas congruências fator de  $\mathcal{N}_5$ . De facto, se  $\theta_1 \in \text{Con}\mathcal{N}_5$  é uma congruência fator, então existe  $\theta_2 \in \text{Con}\mathcal{N}_5$  tal que:  $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_{N_5}$ ;  $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{N_5}$ ;  $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ . Então de  $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_{N_5}$  segue que  $\theta_1 = \Delta_{N_5}$  ou  $\theta_2 = \Delta_{N_5}$ . Se  $\theta_1 = \Delta_{N_5}$ , de  $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{N_5}$  resulta que  $\theta_2 = \nabla_{N_5}$ ; se  $\theta_2 = \Delta_{N_5}$ , conclui-se de modo análogo que  $\theta_1 = \nabla_{N_5}$ .

Logo a álgebra  $\mathcal{A}$  é diretamente indecomponível.

(c) Subdiretamente irredutível.

Uma álgebra  $\mathcal{A} = (A; F)$  é subdiretamente irredutível se e só se  $\text{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta_A\}$  tem elemento mínimo.

Considerando que  $\text{Con}\mathcal{N}_5 \setminus \{\Delta_A\}$  é o c.p.o. a seguir representado



conclui-se que  $\text{Con}\mathcal{N}_5 \setminus \{\Delta_A\}$  tem elemento mínimo (sendo esse elemento mínimo a congruência  $\Theta(a,b)$ ). Logo o reticulado  $\mathcal{N}_5$  é subdiretamente irredutível.

2.30. Mostre que toda a cadeia é um reticulado diretamente indecomponível.

Uma  $\mathcal{A}$  uma álgebra diz-se diretamente indecomponível se sempre que  $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ , então uma das álgebras  $\mathcal{A}_1$  ou  $\mathcal{A}_2$  é uma álgebra trivial.

Sejam  $\mathcal{R} = (R; \wedge^{\mathcal{R}}, \vee^{\mathcal{R}})$  uma cadeia e  $\mathcal{A}_1 = (A_1; \wedge^{A_1}, \vee^{A_1})$ ,  $\mathcal{A}_2 = (A_2; \wedge^{A_2}, \vee^{A_2})$  álgebras do tipo  $(2, 2)$  tais que  $\mathcal{R} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ . Então existe um isomorfismo  $\alpha : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ . Uma vez que  $\mathcal{R}$  é um reticulado e  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  é uma imagem homomorfa de  $\mathcal{R}$ , a álgebra  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  é um reticulado. Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , tem-se  $\mathcal{A}_i = p_i(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ , onde  $p_i : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_i$  é o homomorfismo projeção. Logo as álgebras  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  também são reticulados. No sentido de provarmos, por redução ao absurdo, que  $\mathcal{R}$  é subdiretamente irredutível, admitamos que nenhuma das álgebras  $\mathcal{A}_1$  e  $\mathcal{A}_2$  é uma álgebra trivial. Então  $|A_1|, |A_2| \geq 2$  e, portanto, existem  $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  tais que  $(a_1, a_2)$  e  $(b_1, b_2)$  são incomparáveis em  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ . Logo  $(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} (b_1, b_2) \notin \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ . Considerando que  $\alpha$  é um epimorfismo, existem  $x_1, x_2 \in R$

tais que  $\alpha(x_1) = (a_1, a_2)$  e  $\alpha(x_2) = (b_1, b_2)$ . Como  $\mathcal{R}$  é uma cadeia, os elementos  $x_1, x_2$  são comparáveis. Admitamos, sem perda de generalidade, que  $x_1 \leq x_2$ . Então  $x_1 \wedge^{\mathcal{R}} x_2 = x_1$ , donde segue que

$$\alpha(x_1 \wedge^{\mathcal{R}} x_2) = \alpha(x_1) = (a_1, a_2) \neq (a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} (b_1, b_2),$$

o que contradiz a hipótese de que  $\alpha$  é um homomorfismo. Por conseguinte, uma das álgebras  $\mathcal{A}_1$  ou  $\mathcal{A}_2$  tem de ser uma álgebra trivial, ficando provado que  $\mathcal{R}$  é diretamente indecomponível.

2.31. Mostre que, para cada operador  $O \in \{H, S\}$ ,  $IO = OI$ .

$$[SI = IS]$$

Pretende-se provar que, para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}$ ,  $SI(\mathbf{K}) = IS(\mathbf{K})$ .

Seja  $\mathbf{K}$  uma classe de álgebras.

Começemos por mostrar  $SI(\mathbf{K}) \subseteq IS(\mathbf{K})$ . Seja  $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$ . Então  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ , para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in \mathbf{I}(\mathbf{K})$ . Uma vez que  $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{B} = \alpha(\mathcal{C})$ , para alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$  e algum isomorfismo  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ . Atendendo a que  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  é um isomorfismo,  $\alpha^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  é também um isomorfismo. Como  $\mathcal{A}$  é uma subálgebra de  $\mathcal{B}$ ,  $\alpha^{-1}(\mathcal{A})$  é uma subálgebra de  $\mathcal{C}$ . Então, como  $\alpha(\alpha^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$ , tem-se  $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$ .

Mostremos que também temos  $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$ . Seja  $\mathcal{A} = (A; F)$  uma álgebra de tipo  $(O, \tau)$  tal que  $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$ . Então  $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ , para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$  e algum isomorfismo  $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$ , para alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ . Pretendemos mostrar que  $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$ . Admitamos, sem perda de generalidade, que  $A \cap C = \emptyset$  (se  $A \cap C \neq \emptyset$ , considera-se uma álgebra  $\mathcal{C}' = (C'; G)$  isomorfa a  $\mathcal{C}$  e tal que  $C' \cap A = \emptyset$ ). Consideremos  $D = A \cup (C \setminus B)$  e a aplicação  $\delta : C \rightarrow D$  definida por

$$\delta(c) = \begin{cases} \alpha(c) & \text{se } c \in B \\ c & \text{se } c \in C \setminus B \end{cases}$$

A aplicação  $\delta$  é uma bijeção. Seja  $\mathcal{D} = (D; (f^{\mathcal{D}})_{f \in O})$  a álgebra de tipo  $(O, \tau)$  onde, para cada símbolo  $f \in O_n$ ,  $f^{\mathcal{D}} : D^n \rightarrow D$  é a função definida por

$$f^{\mathcal{D}}(d_1, \dots, d_n) = \delta(f^{\mathcal{C}}(\delta^{-1}(d_1), \dots, \delta^{-1}(d_n))).$$

A aplicação  $\delta$  é um isomorfismo de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{D}$ . Além disso, a álgebra  $\alpha(\mathcal{B})$  é uma subálgebra de  $\mathcal{D}$ . Assim, uma vez que  $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ ,  $\alpha(\mathcal{B}) \leq \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \cong \mathcal{C}$  e  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ , concluímos que  $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$ . Logo,  $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$ .

Desta forma, provámos que  $SI = IS$ .

$$[HI = IH]$$

Seja  $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K})$ . Então  $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ , para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$  e algum isomorfismo  $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$ , então  $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$ , para alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$  e algum epimorfismo  $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ . Assim,  $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$ . Como  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$  e  $\alpha \circ \delta$  é um homomorfismo, então  $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$ . Uma vez que  $id_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ , segue que  $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta)(id_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}))$ . Assim, considerando que  $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  é um isomorfismo de  $\mathcal{C}$  em  $\mathcal{C}$ , tem-se  $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K})$ . Logo  $IH(\mathbf{K}) \subseteq HI(\mathbf{K})$ .

Mostremos que também temos  $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$ . Seja  $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K})$ . Então  $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ , para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$  e algum epimorfismo  $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$ , então  $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$ , para alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$  e algum isomorfismo  $\delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ . Assim,  $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$ . Como  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$  e  $\alpha \circ \delta$  é um homomorfismo, tem-se  $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$ . Como  $id_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ , segue que  $\mathcal{A} = id_{\mathcal{A}}((\alpha \circ \delta)(\mathcal{C}))$ . Então, considerando que  $id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  é um isomorfismo de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{A}$ , conclui-se que  $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K})$ . Logo  $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$ .

2.32. Mostre que os operadores  $S$ ,  $I$ ,  $H$  e  $IP$  são idempotentes.

$$[S^2 = S]$$

Pretendemos provar que  $S^2 = S$ , ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras  $\mathbf{K}$ ,  $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$ .

Seja  $\mathbf{K}$  uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador  $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$  e para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}'$ , tem-se  $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$ , vem que  $S(\mathbf{K}) \subseteq S(S(\mathbf{K})) = SS(\mathbf{K})$ .

Resta provar que  $SS(\mathbf{K}) \subseteq S(\mathbf{K})$ . Seja  $\mathcal{A} \in SS(\mathbf{K}) = S(S(\mathbf{K}))$ . Então  $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ , para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$ . Como  $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$ , para alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ . Por conseguinte,  $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$ , para

alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ . Assim,  $\mathcal{A} \in S(\mathbf{K})$ .  
Desta forma, provámos que  $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$ .

$$[I^2 = I]$$

Pretendemos provar que  $I^2 = I$ , ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras  $\mathbf{K}$ ,  $II(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K})$ .

Seja  $\mathbf{K}$  uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador  $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$  e para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}'$ , tem-se  $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$ , vem que  $I(\mathbf{K}) \subseteq I(I(\mathbf{K})) = II(\mathbf{K})$ .

Resta provar que  $II(\mathbf{K}) \subseteq I(\mathbf{K})$ . Seja  $\mathcal{A} \in II(\mathbf{K}) = I(I(\mathbf{K}))$ . Então  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ , para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$ . Logo  $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$  para algum isomorfismo  $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$ , para alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ . Por conseguinte,  $\mathcal{B} = \beta(\mathcal{C})$  para algum isomorfismo  $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ . A composição de isomorfismos, desde que esteja definida, é um isomorfismo. Assim,  $\alpha \circ \beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  é um isomorfismo. Logo, como  $\mathcal{A} = (\alpha \circ \beta)(\mathcal{C})$ , tem-se  $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$  e, portanto,  $\mathcal{A} \in I(\mathbf{K})$ .

Desta forma, provámos que  $II(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K})$ .

$$[H^2 = H]$$

Pretendemos provar que  $H^2 = H$ , ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras  $\mathbf{K}$ ,  $HH(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$ .

Seja  $\mathbf{K}$  uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador  $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$  e para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}'$ , tem-se  $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$ , vem que  $H(\mathbf{K}) \subseteq H(H(\mathbf{K})) = HH(\mathbf{K})$ .

Resta provar que  $HH(\mathbf{K}) \subseteq H(\mathbf{K})$ . Seja  $\mathcal{A} \in HH(\mathbf{K}) = H(H(\mathbf{K}))$ . Então  $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$  para algum epimorfismo  $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  e para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$ . Como  $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{B} = \beta(\mathcal{C})$  para algum epimorfismo  $\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$  e para alguma álgebra  $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ . A composição de epimorfismos, desde que esteja definida, é um epimorfismo. Assim,  $\alpha \circ \beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$  é um epimorfismo. Logo, como  $\mathcal{A} = (\alpha \circ \beta)(\mathcal{C})$ , tem-se  $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$ .

Desta forma, provámos que  $HH(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$ .

$$[(IP)^2 = IP]$$

Pretendemos mostrar que, para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}$ ,  $IPIP(\mathbf{K}) = IP(\mathbf{K})$ .

Seja  $\mathbf{K}$  uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador  $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$  e para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}'$ , tem-se  $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$ , vem que  $IP(\mathbf{K}) \subseteq IPIP(\mathbf{K})$ .

Resta mostrar que  $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$ . Considerando que  $PI \leq IP$ , tem-se  $IPIP \leq IIPP$ . Então, como  $I$  é idempotente, segue que  $IPIP \leq IPP$ . Assim, para provar que  $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$ , basta mostrar que  $IPP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$ .

Seja  $\mathbf{K}$  uma classe de álgebras. Se  $\mathcal{A} \in IPP(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$  para alguma álgebra  $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$  e algum isomorfismo  $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ . Como  $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$  onde, para todo  $i \in I$ ,  $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$ . Considerando que  $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{C}_i = \prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j}$  onde, para todo  $i \in I$  e  $j \in J_i$ ,  $\mathcal{D}_{i,j} \in \mathbf{K}$ . Assim,

$$\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \left( \prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j} \right).$$

A correspondência

$$\delta : \prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s \rightarrow \prod_{i \in I} \left( \prod_{j \in J_i} D_{i,j} \right)$$

definida por

$$\delta(d) = ((d(i,j) \mid j \in J_i) \mid i \in I)$$

é um isomorfismo de  $\prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s$  em  $\prod_{i \in I} \left( \prod_{j \in J_i} \mathcal{D}_{i,j} \right)$ .

Assim,  $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta) \left( \prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s \right)$ . Como  $\alpha$  e  $\delta$  são isomorfismos,  $\alpha \circ \delta$  é um isomorfismo. Então, como  $\prod_{s \in \bigcup_{i \in I} (\bigcup_{j \in J_i} \{(i,j)\})} D_s \in P(\mathbf{K})$ , tem-se  $\mathcal{A} \in IP(\mathbf{K})$ .

Logo,  $IPP \leq IP$ . Portanto,  $IPIP \leq IP$ .

2.33. Mostre que  $HS$ ,  $HIP$  e  $SIP$  são operadores de fecho em classes de álgebras do mesmo tipo.

Mostremos que  $HIP$  é um operador de fecho. Pretendemos mostrar que, para quaisquer classes de álgebras  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$ :

- (1)  $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$ ;
- (2)  $(HIP)^2(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$ ;
- (3)  $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2)$ .

Prova de (1): Para qualquer operador  $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$  e para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}'$ , tem-se  $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$ . Logo, para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}_1$ , tem-se  $\mathbf{K}_1 \subseteq P(\mathbf{K}_1)$ ,  $P(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_1)$  e  $IP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$ . Assim,  $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$ .

Prova de (2): Para qualquer classe de álgebras  $\mathbf{K}_1$ , tem-se

$$HIPHIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(i)}{\subseteq} HIHIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(ii)}{=} HHIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(iii)}{=} HIIP(\mathbf{K}_1) \stackrel{(iv)}{=} HIP(\mathbf{K}_1).$$

(i)  $PH \leq HP$ ; (ii)  $HI = IH$ ; (iii)  $H^2 = H$ ; (iv)  $(IP)^2 = IP$ .

Prova de (3): Para qualquer operador  $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$  e para quaisquer classes de álgebras  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}'$ ,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim, para quaisquer classes de álgebras  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$ , tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 &\Rightarrow P(\mathbf{K}_1) \subseteq P(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow IP(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2). \end{aligned}$$

De (1), (2) e (3), conclui-se que  $HIP$  é um operador de fecho.

De modo semelhante prova-se que  $HS$  e  $SIP$  são operadores de fecho.

2.34. Mostre que  $SH \neq HS$ ,  $PS \neq SP$ ,  $PH \neq HP$ .

$$[SH \neq HS]$$

Como  $SH \leq HS$ , temos de provar que  $HS \not\leq SH$ . Sendo assim, tem de se provar que existe uma classe de álgebras  $\mathbf{K}$  tal que  $HS(\mathbf{K}) \not\subseteq SH(\mathbf{K})$ .

Seja  $\mathbf{K} = \{Q\}$  com  $Q = (\mathbb{Q}; +^Q, \cdot^Q, -^Q, 0^Q, 1^Q)$ , onde  $+^Q, \cdot^Q, -^Q$  são as operações usuais em  $\mathbb{Q}$ ,  $0^Q = 0$  e  $1^Q = 1$ . Se  $\mathcal{B}$  é uma álgebra homomorfa de  $Q$ , então  $\mathcal{B}$  é uma álgebra isomorfa a  $Q$  ou é uma álgebra trivial. Assim,

$$H(\{Q\}) = I(\{Q\}) \cup \{\mathcal{B} = (B; F) \mid \mathcal{B} \text{ é uma álgebra do mesmo tipo da álgebra } Q \text{ e } |B| = 1\}.$$

Consideremos as álgebras

$$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +^{\mathcal{Z}}, \cdot^{\mathcal{Z}}, -^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}}), \text{ onde } +^{\mathcal{Z}}, \cdot^{\mathcal{Z}}, -^{\mathcal{Z}} \text{ são as operações usuais em } \mathbb{Z}, 0^{\mathcal{Z}} = 0 \text{ e } 1^{\mathcal{Z}} = 1$$

e

$$\mathcal{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2; +^{\mathcal{Z}_2}, \cdot^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2}, 0^{\mathcal{Z}_2}, 1^{\mathcal{Z}_2}), \text{ onde } +^{\mathcal{Z}_2}, \cdot^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2} \text{ são as operações usuais em } \mathbb{Z}_2, 0^{\mathcal{Z}_2} = \bar{0} \text{ e } 1^{\mathcal{Z}_2} = \bar{1}.$$

Uma vez que  $\mathcal{Z} \in S(\{Q\})$  e  $\mathcal{Z}_2 \in H(\{\mathcal{Z}\})$ , tem-se  $\mathcal{Z}_2 \in HS(\{Q\})$ . No entanto,  $\mathcal{Z}_2 \notin SH(\{Q\})$  (se  $\mathcal{C} \in SH(\{Q\})$ , então  $\mathcal{C}$  é uma álgebra trivial ou é uma álgebra infinita).

Logo  $HS(\mathbf{K}) \not\subseteq SH(\mathbf{K})$ .

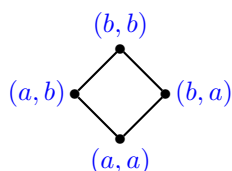
$$[PS \neq SP]$$

Uma vez que  $PS \leq SP$ , temos de provar que  $SP \not\leq PS$ , ou seja, é necessário mostrar que existe uma classe de álgebras  $\mathbf{K}$  tal que  $SP(\mathbf{K}) \not\subseteq PS(\mathbf{K})$ .

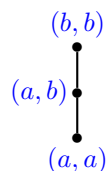
Seja  $\mathbf{K} = \{\mathbf{2}\}$  onde  $\mathbf{2} = (\{a, b\}; \wedge, \vee)$  é o reticulado representado por



O reticulado  $R_1 = 2 \times 2$  a seguir representado



é um elemento de  $P(\mathbf{K})$ . Assim, o reticulado  $R_2$  representado por



é um elemento de  $SP(\mathbf{K})$ .

O reticulado  $R_2$  não é um elemento de  $PS(\mathbf{K})$ . De facto, se  $R' = (R'; \wedge^{R'}, \vee^{R'})$  é um elemento de  $S(\mathbf{K})$ , então  $|R'| \in \{1, 2\}$ . Logo, para todo  $R'' = (R''; \wedge^{R''}, \vee^{R''}) \in PS(\mathbf{K})$ , tem-se  $|R''| \neq 3$ .

Portanto,  $SP(\mathbf{K}) \not\subseteq PS(\mathbf{K})$ .

$[PH \neq HP]$

Uma vez que  $PH \leq HP$ , temos de provar que  $HP \not\leq PH$ , ou seja, é necessário mostrar que existe uma classe de álgebras  $\mathbf{K}$  tal que  $HP(\mathbf{K}) \not\subseteq PH(\mathbf{K})$ .

Consideremos as álgebras

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2 &= (\mathbb{Z}_2; +^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2}, 0^{\mathcal{Z}_2}), \\ \mathcal{Z}_3 &= (\mathbb{Z}_3; +^{\mathcal{Z}_3}, -^{\mathcal{Z}_3}, 0^{\mathcal{Z}_3}), \\ \mathcal{Z}_6 &= (\mathbb{Z}_6; +^{\mathcal{Z}_6}, -^{\mathcal{Z}_6}, 0^{\mathcal{Z}_6}) \end{aligned}$$

do tipo  $(2, 1, 0)$ , onde, para cada  $p \in \{2, 3, 6\}$ ,  $+^{\mathcal{Z}_p}, -^{\mathcal{Z}_p}, 0^{\mathcal{Z}_p}$  representam as operações usuais em  $\mathbb{Z}_p$ .

Seja  $\mathbf{K} = \{\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3\}$ . Tem-se

$$H(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K}) \cup \{A = (A; F) \mid A \text{ é uma álgebra do mesmo tipo da álgebra } \mathcal{A} \text{ e } |A| = 1\}.$$

Como  $\mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3 \in P(\mathbf{K})$  e  $\mathcal{Z}_6 \cong \mathcal{Z}_2 \times \mathcal{Z}_3$ ,  $\mathcal{Z}_6 \in HP(\mathbf{K})$ . No entanto,  $\mathcal{Z}_6 \notin PH(\mathbf{K})$ .

Logo  $HP(\mathbf{K}) \not\subseteq PH(\mathbf{K})$ .

- 2.35. Mostre que, se  $\mathbf{G}$  é a classe dos grupos abelianos (vistos como álgebras do tipo  $(2, 1, 0)$ ), então  $HS(\mathbf{G}) = SH(\mathbf{G})$ .

Toda a subálgebra de um grupo abeliano é um grupo abeliano e todo o grupo é uma subálgebra de si mesmo. Assim,  $S(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ .

Todo o grupo abeliano é imagem epimorfa de si mesmo e toda a imagem epimorfa de um grupo abeliano é um grupo abeliano. Logo  $H(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ .

Portanto,

$$HS(\mathbf{G}) = H(S(\mathbf{G})) = H(\mathbf{G}) = \mathbf{G} = S(\mathbf{G}) = (S(H(\mathbf{G})) = SH(\mathbf{G}).$$

- 2.36. Sejam  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$  álgebras do mesmo tipo. Prove que  $V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n) = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$ .

Sejam  $V_1 = V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n)$  e  $V_2 = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n)$ .

Por definição,  $V_1$  é a menor variedade que contém  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$ . Então, como  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \in V_1$  e  $V_1$  é fechada para a formação de produtos diretos, tem-se  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n \in V_1$ . Mas  $V_2$  é a menor variedade que contém  $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n\}$ , pelo que  $V_2 \subseteq V_1$ .

Por outro lado,  $V_2$  é a menor variedade que contém  $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n\}$ . Então, como  $V_2$  é fechada para a formação de imagens homomorfas vem que, para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $p_i(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \dots \times \mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_i \in V_2$ . Como  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\} \subseteq V_2$  e  $V_1$  é a menor variedade que contém  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$ , conclui-se que  $V_1 \subseteq V_2$ .

Logo  $V_1 = V_2$ .