Proposta de resolução do 2º teste individual escrito.

1 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^3 + 3x$

Sendo f uma função derivável, os extremos locais apenas podem ocorrer nos pontos críticos, isto é, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Pontos críticos de f:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + 3 = 0 \\ 3xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt[3]{3} \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^3 = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{(impossível)}$$

Assim $(0, -\sqrt[3]{3})$ é o único ponto crítico de f, donde é o único ponto onde podem ocorrer extremos locais.

$$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6xy \end{bmatrix}, \text{ logo } \text{Hess} f(0, -\sqrt[3]{3}) = \begin{bmatrix} 0 & 3\sqrt[3]{9} \\ 3\sqrt[3]{9} & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se $\det \text{Hess} f(0, -\sqrt[3]{3}) = -9\sqrt[3]{81} \neq 0$

$\det \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -\sqrt[3]{3}) \right] = \det[0] = 0$, logo $(0, -\sqrt[3]{3})$ é um ponto de sela.

Consequentemente, f não tem extremos locais.

2 A distância entre $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e $(0,0,0)$ é dada pela função

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Para encontrar um ponto da superfície que está mais próximo de $(0,0,0)$, é suficiente considerar a função

$$d^*(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

A superfície $2xy + 3z^2 = 4$ pode ser escrita na forma $g(x,y,z) = 0$, onde $g(x,y,z) = 2xy + 3z^2$.

Pelo método dos multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \nabla d^*(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ 2xy + 3z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda 2y \\ 2y = \lambda 2x \\ 2z = \lambda 6z \\ 2xy + 3z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda y \\ y = \lambda x \\ (1 - 3\lambda) z = 0 \\ 2xy + 3z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda y \\ y = \lambda x \\ z = 0 \\ 2xy + 3z^2 = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda y \\ y=\lambda x \\ z=0 \\ 2xy=4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \lambda=\frac{1}{3} \\ z^2=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda y \\ y=\lambda^2 y \\ z=0 \\ xy=2 \end{cases} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \lambda=\frac{1}{3} \\ z=\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda y \\ (1-\lambda^2)y=0 \\ z=0 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ xy=2 \end{cases}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \left(0,0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ \left(0,0,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda y \\ 1-\lambda^2=0 \\ z=0 \\ xy=2 \end{cases} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ xy=2 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \\ x^2=2 \end{cases} \text{ ou } \boxed{\begin{cases} x=-y \\ z=0 \\ -x^2=2 \end{cases}}$$

impossível   impossível

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=y \\ z=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{cases}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} (\sqrt{2},\sqrt{2},0) \\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2},0) \end{array}}$$

$$d\left(0,0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = d\left(0,0,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$d(\sqrt{2},\sqrt{2},0) = d(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0) = \sqrt{4} = 2$$

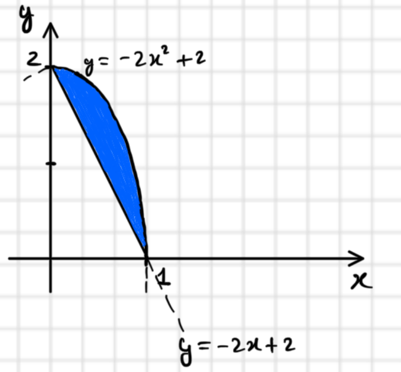
Conclusão: A distância mínima entre $(0,0,0)$ e a superfície, $2xy+3z^2=4$, é $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

$\boxed{3}$

$$\int_0^1 \int_{-2x+2}^{-2x^2+2} x \, dy \, dx$$

a) Região de integração: $R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ -2x+2 \leq y \leq -2x^2+2 \right\}$

b)



c)

$$\int_0^1 \int_{-2x+2}^{-2x^2+2} x \, dy \, dx = \int_0^2 \int_{-\frac{1}{2}y+1}^{\sqrt{-\frac{1}{2}y+1}} x \, dx \, dy.$$

$$y=-2x+2 \Leftrightarrow 2x=-y+2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}y+1$$

$$y=-2x^2+2 \Leftrightarrow 2x^2=-y+2 \Leftrightarrow x^2=-\frac{1}{2}y+1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}y+1}$$

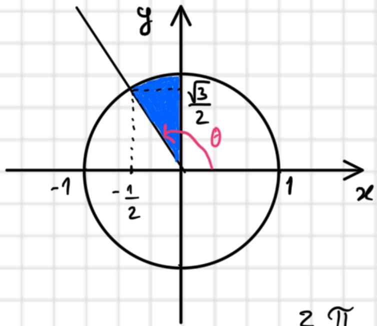
d)

$$\int_0^1 \int_{-2x+2}^{-2x^2+2} x \, dy \, dx = \int_0^1 \Big[xy \Big]_{y=-2x+2}^{-2x^2+2} dx = \int_0^1 x(-2x^2+2) - x(-2x+2) \, dx = \int_0^1 -2x^3+2x^2 \, dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = -\frac{1^4}{2} + \frac{2}{3}\cdot 1^3 - 0 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

$\boxed{4}$

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1, \ x \leq 0, \ -\sqrt{3}\,x \leq y \right\}$$



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iint_R (x^2+y)\, d(x,y) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \int_0^1 (r^2\cos^2\theta + r\operatorname{sen}\theta)\, r \; dr\, d\theta$$

$\boxed{5}$

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

a) Escrevendo S em coordenadas cilíndricas tem-se

$$S^* = \left\{ (r,\theta,z) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[\times \mathbb{R} : \ 0 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}, \quad r^2 \leq 1 \right\}$$

pois $x^2+y^2 \longleftrightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\operatorname{sen}\theta)^2 = r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2$.

Assim,

$$\text{volume}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r \; dz\, dr\, d\theta.$$

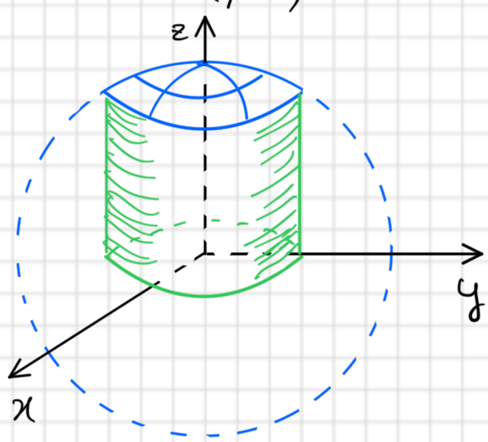
b) $$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{0 \leq z}_{} \leq \underbrace{\sqrt{4-x^2-y^2}}_{}, \quad \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{} \right\}$$

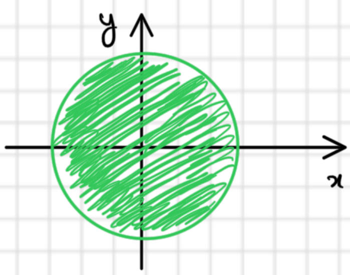
$z = 0$ (plano)

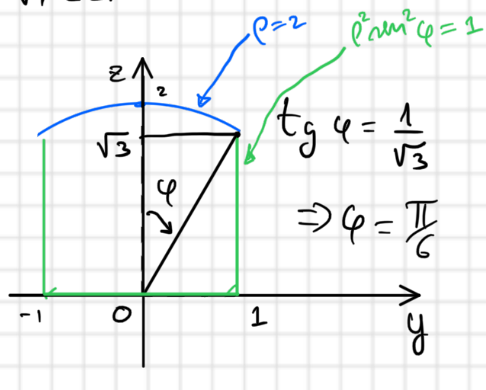
$z = \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow z^2 = 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow \underline{x^2+y^2+z^2 = 4}$

superfície da esfera de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{4} = 2$.

$\boxed{x^2+y^2=1}$ é um cilindro com eixo $z=0$







$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

$$x^2+y^2=1 \longleftrightarrow (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta)^2+(\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta)^2=1 \Leftrightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=1 \Leftrightarrow \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi=1$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2\varphi = 1 \Leftrightarrow \rho^2=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi} \Leftrightarrow \rho=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi}} \Leftrightarrow \rho=\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$$

$$\text{Volume}(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$