

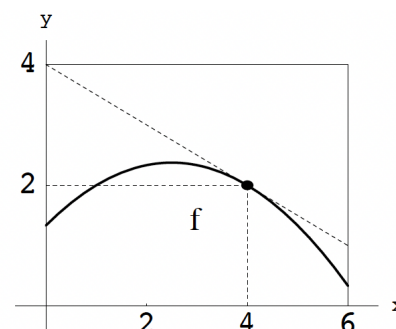


Nome:

Número:

**Justifique, convenientemente, todas as respostas.**

Exercício 1. (2 valores) A figura seguinte representa o gráfico de uma função  $f$  e da reta tangente a esse gráfico no ponto  $(x, y) = (4, 2)$ . Sendo  $g(x) = (f(2x) - 3)^2$ , qual o valor da derivada  $g'(2)$ ?



Exercício 2. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule  $\int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx$ .

II. Calcule  $\int \frac{4x^2 - 3x + 5}{(x - 1)^2(x + 1)} dx$ .

Exercício 3. (2.5 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

I. Calcule  $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsen x \, dx$ .

II. Calcule  $\int_{-1}^0 x \operatorname{arctg}(x^2) \, dx$ .

Exercício 4. (2.5 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

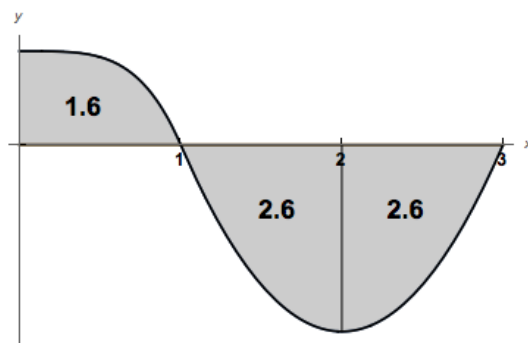
I. Calcule o integral  $\int_{1/4}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} \, dx$ , efetuando a substituição  $x = \sin^2 t$ .

II. Calcule o integral  $\int_1^2 x \sqrt{x-1} \, dx$ , efetuando a substituição  $x-1 = t^2$ .

Exercício 5. (3 valores) Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, e o eixo das abcissas, que correspondem às abcissas dos intervalos  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$  e  $[2, 3]$ , respectivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Nestas condições, considere a função  $F : [-3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \int_1^{\frac{x+3}{3}} f(t) dt$ .

- Determine os valores de  $F(-3)$ ,  $F(0)$ ,  $F(3)$  e  $F(6)$ .
- Determine expressões para  $F'(x)$  e  $F''(x)$ .
- Represente  $F$  graficamente.

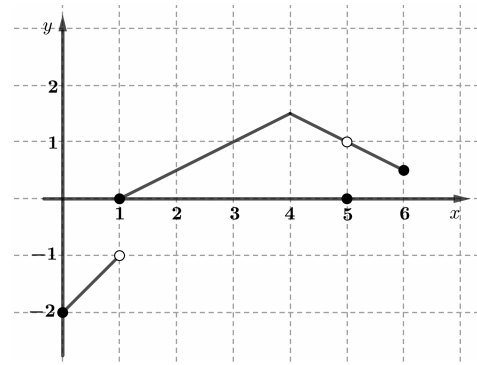


Exercício 6. (2 valores) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq -2 \wedge 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$ , fazendo previamente um esboço da região  $R$ .

Exercício 7. (2.5 valores) Considere a função  $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico se apresenta na figura seguinte e seja  $F : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

(a) Determine  $a \in ]0, 6]$  tal que  $F(a) = 0$ .

(b) A função  $f$  é primitivável? \_\_\_\_\_,  
porque \_\_\_\_\_.



Exercício 8. (3 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $f(x) = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f$  é estritamente decrescente.

(b) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável tal que  $f'(x) = (\sin^2 x + 2)(x - 3)(x + 5)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f$  tem no máximo três zeros.

(c) Existem duas funções  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis, tais que  $f(x) \neq g(x)$ , para todo  $x \in [-1, 1]$  e  $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 g(x) dx$ .