Universidade do Minho
Dep. Matemática e Aplicações

# Geometria

Lic. Ciências da Computação
06/02/2012
Exame de Recurso

Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

1. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de dois referenciais $\mathcal{R} = \{O, \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', \{\overrightarrow{v_1}', \overrightarrow{v_2}'\}\}$ tais que:

   - $O' = (0, 1)_{\mathcal{R}}$
   - $\left\{ \begin{array}{rcl} \overrightarrow{v_1}' & = & 3\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} \\ \overrightarrow{v_2}' & = & - \overrightarrow{v_2} \end{array} \right.$

   (a) Determine uma expressão matricial para a mudança de coordenadas entre os referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$.

   (b) Suponha agora que o referencial $\mathcal{R}$ é ortonormado.

   i. Determine a distância entre os pontos $O$ e $O'$.

   ii. Verifique se $\mathcal{R}'$ é ortonormado.

2. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

   (a) Seja $r$ a recta que passa pelos pontos $A = (2, 0, 2)$ e $B = (0, 2, 2)$. Determine a equação cartesiana e as equações paramétricas do plano $\pi$ perpendicular a $r$ que passa pela origem do referencial.

   (b) Seja $\pi'$ o plano definido pela equação cartesiana $-x + z + 1 = 0$. Determine as equações paramétricas e cartesianas da recta $r'$ perpendicular a $\pi'$ que passa pelo ponto $M = (0, 1, 0)$.

3. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial ortonormado. Considere as rectas $r = A+ < \overrightarrow{v} >$ e $s = B+ < \overrightarrow{w} >$, onde $A = (1, 0, 0), B = (1, 1, 1), \overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (1, 1, -1)$.

   (a) Mostre que as rectas $r$ e $s$ são enviesadas.

   (b) Se $t$ é a perpendicular comum de $r$ e $s$, determine os pés da perpendicular $t$, $P$ e $Q$, em $r$ e $s$ (respectivamente).

   (c) Determine a distância entre $r$ e $s$.

   (d) Determine a medida do ângulo formado por $r$ e $s$.

4. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considere as seguintes transformações do plano $\mathcal{A}$:

   - a translação $t$ segundo o vector (-1,-3);
   - a homotetia $h$ de centro (0,2) e razão 3.

   (a) Determine expressões matriciais para $t$, $h$ e $t \circ h$.

   (b) Justifique que $t \circ h$ é uma homotetia e indique o seu centro e razão.

5. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional. Considere o plano $\pi$ definido pela equação cartesiana $x + 2y - z + 1 = 0$.

   (a) Determine a projecção ortogonal de um ponto $M = (x, y, z)$ no plano $\pi$.

   (b) Determine a representação matricial da reflexão no plano $\pi$.

6. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim. Considere o ponto $\Omega = (1, 1)$ e a recta $r$ definida pela equação cartesiana $x - y = 1$. Seja $f$ a projecção perspectiva desde o ponto $\Omega$ à recta $r$.

   (a) Determine a recta excepcional desta projecção perspectiva.

   (b) Determine a expressão analítica de $f$.

   (c) Determine a expressão matricial de $f$ em coordenadas homogéneas.

**Cotações:** 1) 3 valores; 2) 4 valores; 3) 5 valores; 4) 3 valores; 5) 2 valores; 6) 3 valores.