

Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2025/2026

Departamento de Matemática

Determinantes

Determinantes

Definição e propriedades

O determinante de uma matriz quadrada sobre \mathbb{K} , $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, é um elemento de \mathbb{K} que, entre outras aplicações, pode ser usado na resolução de certos sistemas de equações lineares e para decidir sobre a invertibilidade de uma matriz.

O determinante de uma matriz pode ser definido de diversas formas. Neste curso optamos por uma definição indutiva deste conceito.

Para uma matriz de ordem 1×1

$$A = [a]$$

é fácil concluir que a matriz é invertível se e só se $a \neq 0$.

Determinantes

Dada uma matriz quadrada de ordem 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é também simples concluir em que condições a matriz é invertível; aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A , conclui-se que A é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$.

Como iremos ver, a qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, podemos associar um elemento de \mathbb{K} com a propriedade de A ser invertível se e só se esse escalar for não nulo. A este elemento de \mathbb{K} chamaremos o *determinante* de A .

Determinantes

Para matrizes de ordem superior apresentamos uma definição indutiva para o determinante de uma matriz, i.e., define-se o determinante de uma matriz 2×2 em função do determinante de matrizes de ordem 1×1 , define-se o determinante de uma matriz 3×3 em função do determinante de matrizes de ordem 2×2 , e assim sucessivamente.

Determinantes

Dada uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$, representa-se por $A(i|j)$ a matriz quadrada de ordem $n - 1$, obtida de A retirando a linha i e a coluna j .

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ então $A(2|3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Determinantes

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante de A** , e representa-se por $\det A$ ou $|A|$, ao elemento de \mathbb{K} obtido da seguinte forma:

- i) Se $n = 1$, então $\det A = a_{11}$;
- ii) Se $n > 1$, então $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A(1|j)$.

Determinantes

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1} \times 2 \times \det [-5] + (-1)^{1+2} \times 1 \times \det [1] \\ &= 1 \times 2 \times (-5) + (-1) \times 1 \times 1 \\ &= -10 - 1 \\ &= -11.\end{aligned}$$

Determinantes

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Então

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1} \times a \times \det [d] + (-1)^{1+2} \times b \times \det [c] \\ &= a \times d - b \times c.\end{aligned}$$

Determinantes

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+2} \times 1 \times \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + (-1)^{1+3} \times (-1) \times \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \\ &= 1 \times 1 \times (1 \times 1 - (-5) \times 3) \\ &\quad - 1 \times 1 \times (2 \times 1 - 1 \times 3) \\ &\quad + 1 \times (-1) \times (2 \times (-5) - 1 \times 1) \\ &= 28.\end{aligned}$$

Determinantes

Dada uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e dados $i, j \in \{1, \dots, n\}$, designa-se por **complemento algébrico** do elemento a_{ij} , e representa-se por \hat{a}_{ij} , o elemento de \mathbb{K} definido por $(-1)^{i+j} \det A(i|j)$.

Determinantes

De acordo com a definição que apresentámos para o determinante de uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, o determinante de A é igual à soma dos elementos da linha 1 multiplicados pelos respectivos complementos algébricos, ou seja,

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{1j} \hat{a}_{1j}.$$

O resultado seguinte, que não será aqui demonstrado, estabelece que se procedermos de forma análoga para uma qualquer linha ou uma qualquer coluna de A obtemos também o determinante de A .

Determinantes

Teorema (Teorema de Laplace)

Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então, para qualquer $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A(k|j)$$

ou

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A(i|k) \quad \square$$

Relativamente à primeira expressão do teorema de Laplace, dizemos que estamos a *desenvolver o determinante ao longo da linha k de A*, relativamente à segunda expressão, dizemos que estamos a *desenvolver o determinante ao longo da coluna k de A*.

Determinantes

Exemplo

$$Seja A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por definição, temos

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -5 & 1 \end{array} \right| - 1 \left| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right| + 1 \left| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 1 & -5 \end{array} \right| \\ &= 1(0 - 0) - 1(2 - 0) + 1(-10 - 0) \\ &= -12.\end{aligned}$$

Determinantes

Exemplo (continuação).

Aplicando o teorema de Laplace, desenvolvendo o determinante ao longo da linha $k = 2$, vem

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{2+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1 + 5) \\ &= -12.\end{aligned}$$

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Então, $\det A^T = \det A$.

Demonstração.

A prova segue por indução sobre a ordem n da matriz. □

Observação. Do teorema anterior resulta que, dada uma propriedade sobre determinantes expressa em termos de linhas (respectivamente, colunas), podemos sempre enunciar uma propriedade análoga expressa em termos de colunas (respectivamente, linhas).

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz triangular superior (respectivamente, inferior). Então $\det A = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn}$.

Demonstração.

A prova segue por indução sobre a ordem n da matriz.

□

Determinantes

Teorema

Para $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-11} & a_{k-22} & \cdots & a_{k-1n} \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \cdots & a_{kn} + b_{kn} \\ a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-11} & a_{k-22} & \cdots & a_{k-1n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-11} & a_{k-22} & \cdots & a_{k-1n} \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \\ a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Demonstração.

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$\text{e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \cdots & b_{k,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Demonstração (continuação).

Então, se $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k1} + b_{k1} & a_{k2} + b_{k2} & \cdots & a_{kn} + b_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned}\det C &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} (a_{kj} + b_{kj}) \det C(k|j) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det C(k|j) + \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_{kj} \det C(k|j) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A(k|j) + \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} b_{kj} \det B(k|j) \\ &= \det A + \det B. \quad \square\end{aligned}$$

Determinantes

Corolário

Para $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k} + b_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k} + b_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{k-1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} + b_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{k-1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$+ \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & b_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & b_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{k-1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & b_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Imediato pelo teorema da página 14

□

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A , multiplicando uma sua linha por $\alpha \in \mathbb{K}$. Então,

$$\det B = \alpha \det A.$$

Demonstração.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ \alpha \cdot a_{k1} & \alpha \cdot a_{k2} & \cdots & \alpha \cdot a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Demonstração.

Então, desenvolvendo o determinante de B ao longo da sua linha k , temos que

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} (\alpha \cdot a_{kj}) \det B(k|j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det A(k|j) \\ &= \alpha \det A.\end{aligned}$$

Determinantes

Corolário

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A , multiplicando uma sua coluna por $\alpha \in \mathbb{K}$. Então,

$$\det B = \alpha \det A. \quad \square$$

Demonstração. Imediato pelo teorema da página 14



Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se A tem uma linha ou coluna só com zeros, então $\det A = 0$. \square

Demonstração.

Se A tem uma linha ou coluna só com zeros, então A tem uma linha ou uma coluna multiplicada por $\alpha = 0$. Logo, o resultado é imediato pelo teorema anterior. \square

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então,

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Demonstração.

A prova é realizada por indução sobre n .

□

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$ e seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A trocando duas das suas linhas, então

$$\det B = -\det A.$$

Demonstração.

A prova é realizada por indução sobre a ordem n da matriz. □

Corolário

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A trocando duas das suas colunas, então

$$\det B = -\det A.$$

Corolário

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se A tem duas linhas iguais, então $\det A = 0$.

Demonstração.

Se trocarmos as duas linhas iguais da matriz A , obtemos a mesma matriz A . Mas, pelo teorema anterior, $\det A = -\det A$, pelo que $\det A = 0$. \square

Corolário

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se A tem duas colunas iguais, então $\det A = 0$.

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A , substituindo uma sua linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha, então

$$\det B = \det A.$$

Demonstração.

Sejam $n, k, p \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq k < p \leq n$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} + \alpha \cdot a_{k1} & a_{p2} + \alpha \cdot a_{k2} & \cdots & a_{pn} + \alpha \cdot a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Demonstração.

Então

$$\begin{aligned} \det B &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} + \alpha \cdot a_{k1} & a_{p2} + \alpha \cdot a_{k2} & \cdots & a_{pn} + \alpha \cdot a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \det A + \alpha \cdot 0 = \det A. \end{aligned}$$

Determinantes

Corolário

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A , substituindo uma sua coluna pela sua soma com um múltiplo de outra coluna, então

$$\det B = \det A. \quad \square$$

Considerando algumas das propriedades dos determinantes referidas anteriormente, o cálculo do determinante de uma matriz pode ser realizado recorrendo ao método de eliminação de Gauss.

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se U é uma matriz em escada obtida de A por aplicação do método de eliminação de Gauss, então $\det A = \det U$ ou $\det A = -\det U$.

Demonstração.

Verificámos atrás que o determinante de uma matriz A não se altera se substituirmos uma das suas linhas pela sua soma com outra multiplicada por um escalar. Assim, se U é uma matriz em escada obtida de A por aplicação de transformações lineares que sejam troca de linhas (colunas) ou substituição de uma das suas linhas (colunas) pela sua soma com outra linha (coluna) multiplicada por um escalar, tem-se $\det A = (-1)^l \det U$, onde l é o número de trocas de linhas efetuadas até à obtenção da matriz U . Se o número de trocas de linhas realizadas for par, tem-se $\det A = \det U$; se o número de trocas de linhas for ímpar, então $\det A = -\det U$. □

Determinantes

De um modo geral, se $U = [u_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz triangular superior (inferior) obtida de uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ efectuando operações elementares sobre as linhas (ou colunas) de A , tem-se

$$\det A = (-1)^l \times \beta \times u_{11} \times u_{22} \times \cdots \times u_{nn},$$

onde l é o número de vezes que trocamos duas linhas ou duas colunas e β é o inverso do produto dos escalares pelos quais multiplicamos as linhas ou colunas.

Determinantes

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \\ 2 & 2 & 2 & 5 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \end{array} \right| \xrightarrow{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \\ 0 & 0 & -2 & 1 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \end{array} \right| \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} - \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & -2 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \end{array} \right|$$

$$\xrightarrow{l_3 \rightarrow \frac{1}{2}l_3} -2 \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \end{array} \right| \xrightarrow{l_4 \rightarrow l_4 + l_3} -2 \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \end{array} \right|$$

$$= -2 \times \left(1 \times 1 \times (-1) \times \frac{5}{2} \right) = 5 .$$

Determinantes

Facilmente se encontram exemplos de matrizes quadradas A e B tais que $\det(A + B) \neq \det A + \det B$. No entanto, como iremos verificar mais à frente, o determinante do produto de matrizes quadradas é sempre igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ e E_1, \dots, E_s matrizes elementares de $M_n(\mathbb{K})$.

Então

$$\det(E_1 \dots E_s A) = \det(E_1 \dots E_s) \det A.$$

Demonstração.

A prova é feita por indução sobre s .

□

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então,

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Demonstração.

Consultar as notas da unidade curricular.



Cálculo da inversa a partir da adjunta

No capítulo anterior foram apresentadas várias condições para a caracterização de matrizes invertíveis e apresentou-se um processo para o cálculo da inversa de matrizes invertíveis. Seguidamente apresentamos mais uma caracterização de matrizes invertíveis e um processo para o cálculo da inversa de uma matriz invertível, mas neste caso recorrendo a determinantes.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz adjunta de A**, e representa-se por $\text{Adj } A$, à matriz

$$\text{Adj } A = [\hat{a}_{ij}]^T.$$

Determinantes

Exemplo

$$Seja A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\hat{a}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 35, \quad \hat{a}_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\hat{a}_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20, \quad \hat{a}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\hat{a}_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -5, \quad \hat{a}_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Determinantes

Exemplo (continuação).

$$\hat{a}_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15, \quad \hat{a}_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\hat{a}_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5,$$

temos

$$AdjA = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -20 \\ 0 & -5 & 0 \\ -15 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 \\ -20 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}]_n$ uma matriz quadrada de ordem n sobre \mathbb{K} .

Então, se $i \neq j$,

$$\text{i) } a_{i1}\hat{a}_{j1} + a_{i2}\hat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{jn} = 0.$$

$$\text{ii) } a_{1i}\hat{a}_{1j} + a_{2i}\hat{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\hat{a}_{nj} = 0.$$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz quadrada de ordem n sobre \mathbb{K} . Então

i) A é invertível se e só se $\det A \neq 0$.

ii) Se A é invertível, então $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

iii) $A\text{Adj}A = (\det A)I_n$.

iv) Se A é invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}A.$$

Determinantes

Demonstração.

i) Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que A não é invertível. Então $c(A) < n$. Seja $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz em escada equivalente por linhas à matriz A . Então $A = E_1 \dots E_s F$, onde E_1, \dots, E_s são matrizes elementares de ordem n . Logo,

$$\det A = \det(E_1 \dots E_s) \det F.$$

Uma vez que $c(A) < n$, a matriz F tem, pelo menos, uma linha nula. Assim, $\det F = 0$ e, portanto $\det A = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível. Então, existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Logo, como A e A^{-1} são ambas matrizes quadradas de ordem n , tem-se $\det A \cdot \det A^{-1} = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$, pelo que $\det A \neq 0$.

ii) Segue da prova de i).

Determinantes

Demonstração.

iii) Pela definição de produto de matrizes, o elemento na linha i e coluna j da matriz $A\text{Adj}A$ é o elemento $a_{i1}\hat{a}_{j1} + a_{i2}\hat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{jn}$.

Se $i = j$, tem-se

$$a_{i1}\hat{a}_{i1} + a_{i2}\hat{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{in} = \det A.$$

Se $i \neq j$,

$$a_{i1}\hat{a}_{j1} + a_{i2}\hat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{jn} = 0.$$

Por conseguinte,

$$A\text{Adj}A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I_n$$

Determinantes

Demonstração.

iv) Se A é invertível, então, por iii), tem-se

$$A^{-1}A\text{Adj}A = A^{-1}(\det A)I_n,$$

pelo que

$$\text{Adj}A = (\det A)A^{-1}.$$

Como $\det A \neq 0$, segue que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{Adj}A.$$

□

Determinantes

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Como $\det A = -25$ e

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -15 \\ 0 & -5 & 0 \\ -20 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{35}{25} & 0 & \frac{15}{25} \\ 0 & \frac{5}{25} & 0 \\ \frac{20}{25} & 0 & -\frac{5}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Como $\det A = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$, então a matriz A não é invertível.

Determinantes

Regra de Cramer

Um sistema de n equações lineares em n incógnitas que seja possível e determinado diz-se um *sistema de Cramer*. O resultado seguinte estabelece como calcular a única solução de um sistema de Cramer recorrendo a determinantes.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{K})$. Um sistema de equações lineares (S) com equação matricial $Ax = b$ diz-se um **sistema de Cramer** se A é uma matriz invertível.

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ e (S) um sistema de equações lineares com equação matricial $Ax = b$. Se A é invertível, então o sistema é possível e determinado e a única solução do sistema (S) é o n -uplo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, onde

$$\alpha_i = \frac{\det(A^{(i)})}{\det A}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e $A^{(i)}$ é a matriz quadrada de ordem n obtida de A substituindo a sua coluna i pela coluna b .

Determinantes

Demonstração.

Seja $A = [a_{ij}]_n$ uma matriz invertível. Então $c(A) = n$. Como $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $c(A) = c(A|b) = n$, o sistema é possível e determinado. Sendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ a única solução do sistema, tem-se

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = b.$$

Da igualdade anterior obtem-se

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^{-1}b.$$

Determinantes

Demonstração (continuação).

Considerando que $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}A$, segue que

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{21} & \cdots & \hat{a}_{n1} \\ \hat{a}_{12} & \hat{a}_{22} & \cdots & \hat{a}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{a}_{1n} & \hat{a}_{2n} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11}b_1 + \hat{a}_{21}b_2 + \cdots + \hat{a}_{n1}b_n \\ \hat{a}_{12}b_1 + \hat{a}_{22}b_2 + \cdots + \hat{a}_{n2}b_n \\ \vdots \\ \hat{a}_{1n}b_1 + \hat{a}_{2n}b_2 + \cdots + \hat{a}_{nn}b_n \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Demonstração (continuação).

Assim, para cada $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{\det A} (\hat{a}_{1i} b_1 + \hat{a}_{2i} b_2 + \cdots + \hat{a}_{ni} b_n) \\ &= \frac{1}{\det A} \left| \begin{array}{ccccccc} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|.\end{aligned}$$

Determinantes

Exemplo

Consideremos o sistema de equações lineares a seguir indicado

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 = -5 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 = 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 = 4 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 = 1 \end{array} \right.$$

O sistema pode ser representado matricialmente por $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Determinantes

Exemplo (continuação).

Uma vez que $|A| = 20 \neq 0$, a matriz A é invertível e o sistema indicado é um sistema de Cramer. A única solução deste sistema é $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, onde

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{0}{20} = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{20}{20} = 1,$$

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{40}{20} = 2, \quad \alpha_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{20} = \frac{-20}{20} = -1.$$

Determinantes

Determinantes e Positividade de Matrizes

As matrizes simétricas definidas positivas podem ser caracterizadas recorrendo ao cálculo de determinantes.

No sentido de estabelecermos tal caracterização, começamos por introduzir alguma terminologia.

Determinantes

Definição

Sejam $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $k \in \{1, \dots, n\}$. Ao determinante de uma submatriz principal de A de ordem k dá-se a designação de **menor principal de A de ordem k** e ao determinante de uma submatriz principal primária de A de ordem k dá-se a designação de **menor principal primário de A de ordem k** .

Determinantes

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Então os menores principais primários de A são os seguintes:

- menor principal primário de ordem 1: $|A_1| = |1| = 1$;
- menor principal primário de ordem 2: $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$;
- menor principal primário de ordem 3: $|A_3| = |A| = -1$.

Determinantes

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. A matriz A é simétrica definida positiva se e só se todos os seus menores principais primários são positivos, ou seja, se e só se, para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, $|A_k| > 0$.

Demonstração.

Prova por indução sobre a ordem n da matriz.

□

Determinantes

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Como A é simétrica,

$$|A_1| = \det [2] = 2 > 0,$$

$$|A_2| = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 \times 2 - 0 \times 0 = 4 > 0$$

e

$$|A_3| = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = 2 > 0,$$

a matriz A é simétrica definida positiva.

Determinantes

Corolário

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Se a matriz A é simétrica definida positiva, então A é invertível.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. A matriz A é simétrica semidefinida positiva se e só se todas as submatrizes principais de A têm determinantes não negativos, ou seja, se e só se todos os menores principais de A são positivos ou nulos.

Determinantes

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Calculando os menores principais de A , obtemos:

- Menores de ordem 1: $\det([2]) = 2$, $\det([1]) = 1$, $\det([0]) = 0$;
- Menores de ordem 2:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

- Menor de ordem 3: $\det(A) = 0$.

Todos os menores principais de A são positivos ou nulos, pelo que a matriz é simétrica semidefinida positiva (mas não é simétrica definida positiva, pois o menor principal de ordem 3 é nulo).

Determinantes

Exemplo

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Calculando os menores principais de A , obtemos:

- Menores de ordem 1: $\det([-5]) = -5$, $\det([0]) = 0$;
- Menores de ordem 2: $\det A = (-5) \times 0 - 3 \times 3 = -9$.

A matriz tem menores principais negativos, logo a matriz não é semidefinida positiva. Portanto, a matriz também não é definida positiva.

Determinantes

Todos os resultados anteriores, a respeito de matrizes simétricas definidas (resp. semidefinidas) positivas, podem também ser estabelecidos para matrizes hermíticas definidas (resp. semidefinidas) positivas.