Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

— exame de recurso — duas horas — 2023'24 —

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (a) Estude a continuidade de f;

   (b) Calcule, ou justifique que não existe, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

   (c) A função f é derivável em $(0,0)$? Justifique.

2. (6 valores) Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = x^3 y + \ln\left(z + \mathrm{e}^{xz}\right) + \cos\left(zy\right).$$

   (a) Identifique o domínio D;

   (b) Calcule as funções derivadas parciais de 1ª ordem de f, isto é, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z}$;

   (c) Justifique que f é derivável;

   (d) Calcule $f'\,(1,1,0)$;

   (e) Mostre que a equação

$$f(x,y,z) = 2$$

   define z como função de (x,y) para pontos "próximos"de $(1,1,0)$;

   (f) Para $z = z(x,y)$ definida na alínea anterior, obtenha uma equação do plano tangente ao gráfico de $z(x,y)$ no ponto $(1,1,0)$.

3. (3 valores) Determine, ou justifique que não existem, os extremos locais da função:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & 2x^2+y^2+4z^2+x \end{array}.$$

4. (4 valores) Considere o seguinte integral duplo

$$\int_0^1 \int_0^{2x^2} f(x,y)\, dydx,$$

   onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

   (a) Identifique a região de integração definida pelo integral duplo dado;

   (b) Apresente um esboço da região de integração do integral duplo apresentado;

   (c) Inverta a ordem de integração no integral apresentado.

5. (3 valores) Calcule o valor do integral duplo que se segue:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2+y^2\, dydx.$$

   Sugestão: Usar coordenadas polares.

Fim
(formulário no verso)

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen (α)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos (α)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg (α)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$s.s.$

$(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$
$\text{sen}\,(2\alpha) = 2\text{sen}\,(\alpha)\cos\,(\alpha)$
$\cos\,(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\text{sen}\,\alpha)^2$

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}, \qquad (r,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$