Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
9 de abril de 2025

Álgebra Universal e Categorias

1º teste

duração: 1h45min

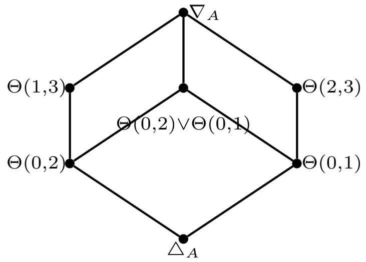
Justifique todas as suas respostas, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$, onde $A = \{0,1,2,3\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	0	1	2	3
	2	3	0	1

$g^{\mathcal{A}}$	0	1	2	3
	2	2	0	0

O reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ é representado pelo diagrama de Hasse seguinte



(a) Indique, sem justificar, todos os subuniversos de $\mathcal{A}$.

Resposta:

$\emptyset$, $\{0,2\}$, $\{0,1,2,3\}$.

(b) Determine, sem justificar, $\Theta(1,3)$ e $\Theta(2,3)$. Diga se $(\Theta(1,3), \Theta(2,3))$ é um par de congruências fator.

Resposta:

Tem-se:

- $\Theta(1,3) = \triangle_A \cup \{(1,3),(3,1),(2,0),(0,2)\}$;
- $\Theta(2,3) = \triangle_A \cup \{(2,3),(3,2),(0,1),(1,0)\}$.

Sejam $\theta, \theta' \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$. O par (θ, θ') diz-se um par de congruências fator se:

i. $\theta \cap \theta' = \triangle_A$; ii. $\theta \vee \theta' = \nabla_A$; iii. $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$.

Então, considerando que, de acordo com o diagrama anterior, temos

$$\Theta(1,3) \cap \Theta(2,3) = \triangle_A \quad \text{e} \quad \Theta(1,3) \vee \Theta(2,3) = \nabla_A$$

e também se tem

$$\Theta(1,3) \circ \Theta(2,3) = \Theta(1,3) \cup \Theta(2,3) \cup \{(2,1),(3,0),(0,3),(1,2)\} = \Theta(2,3) \circ \Theta(1,3),$$

conclui-se que $(\Theta(1,3), \Theta(2,3))$ é um par de congruências fator.

(c) Diga se a álgebra $\mathcal{A}$ é:

i. diretamente indecomponível.

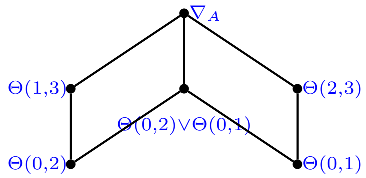
Resposta:

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível se e só se $\triangle_A$ e ∇_A são as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$. Então, como $\Theta(1,3), \Theta(2,3) \notin \{\triangle_A, \nabla_A\}$ e $\Theta(1,3)$ e $\Theta(2,3)$ são congruências fator da álgebra $\mathcal{A}$ indicada, conclui-se que a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível.

ii. subdiretamente irredutível.

Resposta:

A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é trivial ou o conjunto parcialmente ordenado $\mathrm{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo. Então, como a álgebra indicada não é trivial ($|A| = 4 > 1$) e o conjunto parcialmente ordenado $\mathrm{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\triangle_A\}$



não tem elemento mínimo, conclui-se que a álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

2. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $\theta \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$ e B um subuniverso de $\mathcal{A}$. Mostre que o conjunto

$$S = \{a \in A \,|\, a\theta b, \text{ para algum } b \in B\}$$

é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

Resposta:

Admitamos que $\theta \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$ e que B é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

Como θ é uma congruência em $\mathcal{A}$, então θ é compatível com todas as operações de $\mathcal{A}$, isto é, para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e, para quaisquer $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots b_n) \in A^n$

$$(\forall 1 \leq i \leq n, a_i\theta b_i) \Rightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)\theta f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Como B é um subuniverso de $\mathcal{A}$, então, para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e, para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, se $(a_1, \ldots, a_n) \in B^n$, então $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in B$.

Nestas condições, prova-se que S é um subuniverso de $\mathcal{A}$, ou seja, prova-se que, para qualquer símbolo de operação f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, e, para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, se $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$, então $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in S$. De facto, para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in A$, pois $f^{\mathcal{A}}$ é uma operação em A. Além disso, se $(a_1, \ldots, a_n) \in S^n$, para cada $1 \leq i \leq n$, existe $b_i \in B$ tal que $a_i\theta b_i$. Como θ é uma congruência em $\mathcal{A}$, segue que $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)\theta f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)$. Considerando que $(b_1, \ldots, b_n) \in B^n$ e B é um subuniverso de $\mathcal{A}$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$. Logo, $f(a_1, \ldots, a_n)\theta b$, com $b = f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$. Por conseguinte, $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in S$.

3. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha_1 : A \to B$, $\alpha_2 : A \to C$ funções. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a função definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.

(a) Mostre que se α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, então:

i. α_1 é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ e α_2 é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.

Resposta:

Admitamos que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Então, para qualquer símbolo f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$ e, para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, tem-se

$$\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).$$

Por definição de α e de $f^{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}$, segue que

$$(\alpha_1(f(a_1, \ldots, a_n)), \alpha_2(f(a_1, \ldots, a_n)) = (f^{\mathcal{B}}(\alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_1(a_n)), f^{\mathcal{C}}(\alpha_2(a_1), \ldots, \alpha_2(a_n))),$$

donde resulta que, para qualquer símbolo f de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$ e, para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$\alpha_1(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha_1(a_1), \ldots, \alpha_1(a_n)),$$
$$\alpha_2(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{C}}(\alpha_2(a_1), \ldots, \alpha_2(a_n)).$$

Assim, α_1 e α_2 preservam todas as operações e, portanto, α_1 e α_2 são homomorfismos.

ii. $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

Resposta:

Por definição de α, $\ker \alpha$, $\ker \alpha_1$ e $\ker \alpha_2$, temos

$$\begin{array}{rcl} \ker \alpha & = & \{(a,b) \in A^2 \mid \alpha(a) = \alpha(b)\} \\ & = & \{(a,b) \in A^2 \mid (\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (\alpha_1(b), \alpha_2(b))\} \\ & = & \{(a,b) \in A^2 \mid \alpha_1(a) = \alpha_1(b) \text{ e } \alpha_2(a) = \alpha_2(b)\} \\ & = & \{(a,b) \in A^2 \mid \alpha_1(a) = \alpha_1(b)\} \cap \{(a,b) \in A^2 \mid \alpha_2(a) = \alpha_2(b)\} \\ & = & \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2. \end{array}$$

(b) Mostre que se α_1, α_2 e α são epimorfismos, então

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

Resposta:

Admitamos que α_1, α_2 e α são epimorfismos.

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos

$$\mathcal{A}/\ker \alpha \cong \alpha(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \cong \alpha_1(\mathcal{A}), \quad \mathcal{A}/\ker \alpha_2 \cong \alpha_2(\mathcal{A}).$$

Uma vez que α_1, α_2 e α são sobrejetivas, também temos

$$\alpha(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \quad \alpha_1(\mathcal{A}) = \mathcal{B}, \quad \alpha_2(\mathcal{A}) = \mathcal{C}.$$

Logo,

$$\mathcal{A}/\ker \alpha \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}, \quad \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \cong \mathcal{B}, \quad \mathcal{A}/\ker \alpha_2 \cong \mathcal{C},$$

donde segue

$$\mathcal{A}/\ker \alpha \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

Da alínea anterior, resulta que

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

4. Considere os operadores de classes de álgebras H, I e S. Mostre que HSI é um operador de fecho.

Resposta:

Mostremos que HSI é um operador de fecho. Pretendemos mostrar que, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$:

(1) $\mathbf{K}_1 \subseteq HSI(\mathbf{K}_1)$;
(2) $(HSI)^2(\mathbf{K}_1) \subseteq HSI(\mathbf{K}_1)$;
(3) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow HSI(\mathbf{K}_1) \subseteq HSI(\mathbf{K}_2)$.

As condições (1), (2) e (3) seguem facilmente das propriedades dos operadores I, H e S.

(1) Para qualquer operador $O \in \{I, S, H\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$. Logo, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se $\mathbf{K}_1 \subseteq I(\mathbf{K}_1)$, $I(\mathbf{K}_1) \subseteq SI(\mathbf{K}_1)$ e $SI(\mathbf{K}_1) \subseteq HSI(\mathbf{K}_1)$. Assim, $\mathbf{K}_1 \subseteq HSI(\mathbf{K}_1)$.

(2) Para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se

$$HSIHSI(\mathbf{K}_1) \overset{(i)}{=} HSHISI(\mathbf{K}_1) \overset{(ii)}{=} HSHSII(\mathbf{K}_1) \overset{(iii)}{\subseteq} HHSSII(\mathbf{K}_1) \overset{(iv)}{=} HSI(\mathbf{K}_1).$$

(i) $IH = HI$; (ii) $IS = SI$; (iii) $SH \leq HS$; (iv) $I^2 = I$; $H^2 = H$; $S^2 = S$.

(3) Para qualquer operador $O \in \{I, S, H\}$ e para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$,

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 & \Rightarrow & I(\mathbf{K}_1) \subseteq I(\mathbf{K}_2) \\ & \Rightarrow & SI(\mathbf{K}_1) \subseteq SI(\mathbf{K}_2) \\ & \Rightarrow & HSI(\mathbf{K}_1) \subseteq HSI(\mathbf{K}_2). \end{array}$$

De (1), (2) e (3), conclui-se que HSI é um operador de fecho.

Cotações: $1.(1,75 + 2,25 + 2,0 + 1,25)$; $2.(3,0)$; $3.(3,0 + 2,0 + 2,0)$; $4.(2,75)$.