

Capítulo IV:

Transformada de Laplace, Propriedades da Lei Normal e Convergências Estocásticas

Probabilidades e Aplicações
Licenciatura em Ciências da Computação
Universidade do Minho
Ano Letivo 2024/2025

Neste capítulo iremos

- definir a transformada de Laplace de uma v.a.r. e apresentar algumas das suas propriedades mais importantes;
- enunciar mais propriedades da lei Normal, que serão extremamente importantes em problemas de inferência estatística;
- apresentar resultados relativos a convergências estocásticas, com particular destaque para o Teorema do Limite Central.

1. Transformada de Laplace

Seja X uma v.a.r. e considere-se a função

$$L_X(t) = E[e^{-tX}], \quad t \in D \subseteq \mathbb{R}.$$

Se $E[e^{-tX}]$ existir, a $L_X(t)$ chamamos *transformada de Laplace* da v.a.r. X (ou da correspondente lei de probabilidade ou da correspondente função de distribuição) em $t \in \mathbb{R}$.

A transformada de Laplace caracteriza a lei de probabilidade da v.a.r., ou seja, a cada lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (que admite transformada de Laplace) corresponde uma e uma só transformada de Laplace e, se duas v.a.r.'s têm a mesma transformada de Laplace, então têm a mesma lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Transformada de Laplace

A transformada de Laplace permite obter os momentos de uma v.a.r..

De facto, pode-se provar a seguinte relação entre os momentos de uma v.a.r. X (quando estes existem) e as derivadas de L_X na origem:

$$E[X^k] = (-1)^k L_X^{(k)}(0).$$

Esta igualdade é especialmente útil quando o cálculo dos momentos, usando a definição, é muito complicado ou moroso.

1. Transformada de Laplace

Uma das propriedades mais importantes da transformada de Laplace é a seguinte:

Propriedade: Sejam X_1, X_2, \dots, X_n v.a.r.'s independentes que admitem transformadas de Laplace L_1, L_2, \dots, L_n , respectivamente. Então a transformada de Laplace da v.a.r. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, denotada por L_{S_n} , é dada por

$$L_{S_n}(t) = L_1(t)L_2(t) \dots L_n(t).$$

[Demonstração]: (TPC - usar a independência das v.a.r.'s.)

A utilização desta propriedade permite ainda obter o seguinte resultado: se as v.a.r.'s forem **identicamente distribuídas** (e, consequentemente, tiverem a mesma transformada de Laplace $L_1 = L_2 = \dots = L_n = L$) e **independentes**, então a transformada de Laplace de S_n é dada por

$$L_{S_n}(t) = [L(t)]^n.$$

1. Transformada de Laplace

Usando a propriedade anterior da transformada de Laplace, é possível mostrar que a soma de v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) com lei

- i) Poisson é ainda uma v.a.r. com lei de Poisson;
- ii) Binomial é ainda uma v.a.r. com lei Binomial;
- iii) Normal é ainda uma v.a.r. com lei Normal.

[Demonstração]: TPC (Exercícios da Folha Prática 8)

Nota Importante: Do item iii), deduz-se que, se X_1, X_2, \dots, X_n são v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s) com a lei $N(\mu, \sigma^2)$ então

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \quad (1)$$

1. Transformada de Laplace

Existem outras transformadas importantes em teoria de probabilidades. Destacam-se aqui:

- a função geradora de momentos:

$$M(t) = E[e^{tX}], \quad t \in \mathbb{R}$$

- a função geradora de probabilidades (só para X v.a.r. discreta):

$$P(t) = E[t^X], \quad |t| \leq 1$$

- a função característica:

$$\phi(t) = E[e^{itX}], \quad t \in \mathbb{R}$$

Todas estas transformadas caracterizam a lei de probabilidade da v.a.r. X correspondente.

2. Propriedades da Lei Normal

A lei Normal tem propriedades muito especiais relativas à distribuição da soma de um número finito de v.a.r.'s independentes, todas com lei normal. Mais concretamente, tem-se o seguinte resultado:

- i) Sejam X_1, \dots, X_n v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$. A v.a. $Y = X_1 + \dots + X_n$ segue uma lei normal:

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim N \left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right).$$

- ii) O resultado i) estende-se a combinações lineares de X_1, \dots, X_n . Se X_1, \dots, X_n são v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$, então, quaisquer que sejam as constantes reais a_1, \dots, a_n , não todas nulas, a v.a.r. $Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ segue uma lei normal:

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i \sim N \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 \right).$$

2. Propriedades da Lei Normal

[Demonstração]: É só fazer uso da Transformada de Laplace da lei $N(\mu, \sigma^2)$ e que tem a seguinte expressão:

$$L(t) = \exp \left\{ -t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 \right\}, t \in \mathbb{R}.$$

2. Propriedades da Lei Normal

Observação: Da propriedade anterior deduz-se o seguinte resultado, que é particularmente útil em problemas de inferência estatística:

*Dada uma **amostra aleatória**, X_1, X_2, \dots, X_n , proveniente de uma v.a.r. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (i.e., dadas X_1, X_2, \dots, X_n v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com a mesma lei de X), a v.a.r. **média amostral***

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

segue uma lei Normal. De facto, tem-se

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Nos problemas de inferência estatística em que μ é desconhecido, \bar{X}_n é um estimador de μ e tem boas propriedades (em particular, \bar{X}_n é um estimador centrado para μ pois $E[\bar{X}_n] = \mu$).

3. Teorema do Limite Central

Um dos resultados mais importantes em inferência estatística, e que envolve a lei Normal, é o **Teorema do Limite Central (TLC)** que diz o seguinte:

Teorema do Limite Central (TLC)

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.'s), com valor médio μ e variância $0 < \sigma^2 < +\infty$, e considere-se a v.a.r. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. A função de distribuição da v.a.r.

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

converge, quando $n \rightarrow +\infty$, para a função de distribuição da lei $N(0, 1)$, i.e.,

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{N(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

[Sem demonstração]

3. Teorema do Limite Central

Em palavras, o TLC diz-nos que, independentemente da distribuição subjacente às v.a.r.'s X_i e desde que estas tenham variância finita, a v.a.r. S_n tem distribuição aproximadamente $N(n\mu, n\sigma^2)$. Daqui podemos também concluir que

$$\bar{X}_n \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

tem distribuição aproximadamente $N(\mu, \sigma^2/n)$.

Na prática, isto significa que, desde que n seja suficientemente grande, podemos aproximar o valor de probabilidades relativas à v.a.r. S_n (ou à v.a.r. \bar{X}_n) por probabilidades calculadas a partir da lei Normal.

De um modo geral, basta $n \geq 30$ para obtermos uma boa aproximação.