

Formulário – Probabilidades e Aplicações – 2020/21

Espaço de resultados: Ω ; espaço de acontecimentos: (Ω, \mathcal{A}) , sendo \mathcal{A} uma σ -álgebra de partes de Ω (i.e., inclui \emptyset e é fechada para a complementação e para a união numerável de acontecimentos)

Medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{A}) : (I) $P(A) \geq 0$ (<i>não negatividade</i>) (II) $P(\Omega) = 1$ (III) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$, para A_1, A_2, \dots disjuntos 2 a 2 (<i>aditividade</i>)	Fórmulas: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\emptyset) = 0$; $P(A) \leq 1$ $A \subset B \implies P(B - A) = P(B) - P(A)$ $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$ (<i>monotonia</i>) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (<i>regra da adição</i>)
Probabilidade condicional: $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	Independência: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$
Regra da multiplicação: $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 A_1)P(A_3 A_1 \cap A_2)\dots P(A_n A_1 \cap A_2 \cap \dots A_{n-1})$	
Teorema da Probabilidade Total: $P(A) = \sum_{j \geq 1} P(A B_j)P(B_j)$, em que $\{B_j\}_{j \geq 1}$ é partição de Ω	
Teorema de Bayes: $P(B_i A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A B_i)P(B_i)}{\sum_{j \geq 1} P(A B_j)P(B_j)}$, com $\{B_j\}_{j \geq 1}$ partição de Ω	

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

distribuição	parâm.	$P(X = i)$ ou $f(x)$	μ	σ^2	moda	$\chi_{\frac{1}{2}}$	β_1	β_2
$U\{1, 2, \dots, N\}$	$N \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{N}, \quad i = 1, 2, \dots, n$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	plurimodal	$\left[\frac{N+1}{2}\right]$	0	†
$HG(n, N, p)$	$N \in \mathbb{N},$ $n \in \{1, \dots, N\}$ $0 < p < 1$	$\binom{Np}{i} \binom{N-np}{n-i} / \binom{N}{n},$ $0 \leq i \leq n, i \leq Np,$ $0 \leq n - i \leq N - Np$	np	*
$bi(n, p)$	$n \in \mathbb{N}$ $0 < p < 1$	$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$	np	$np(1-p)$	$[p(n+1)]$ ‡	...	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	††
$geom(p)$	$0 < p < 1$	$(1-p)^{i-1} p,$ $i = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	1	...	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$9 + \frac{p^2}{1-p}$
$Poisson(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!},$ $i = 0, 1, 2, 3, \dots$	λ	λ	$[\lambda]$ **	...	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	$3 + \frac{1}{\lambda}$
$U[a, b]$	$a < b$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{c. contrário} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	plurimodal	$\frac{a+b}{2}$	0	$\frac{9}{5}$
$Exp(\lambda)$	$\lambda > 0$	$\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	0	$\frac{\log 2}{\lambda}$	2	9
$N(\mu, \sigma)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2	μ	μ	0	3

* $np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$ ** modas λ e $\lambda-1$, se $\lambda \in \mathbb{N}$ † $3 - \frac{6}{5} \frac{N^2+1}{N^2-1}$ †† $3 + \frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$ ‡ bimodal se $(n+1)p \in \{1, \dots, n\}$

`sample(x, size, replace = FALSE, prob = ...)` ; `dhyper`, `dbinom`, `dgeom`, `dpois`; `dunif`, `dexp`, `dnorm`;
`d, p, q, r` (prefixos para cada distribuição implementada) ; `dmultinom` ; `rmultinom`
`plot` ; `abline` ; `hist` ; `table` ; `cumsum` ; `colSums` ; `rowSums` ;
`apply(matriz, 2, função)` aplica a função especificada a uma das dimensões da matriz (1-linhas, 2-colunas).
`nomedafuncao <- function(arg1, arg2, ...) {instrucao1; instrucao2; ...}`
`for(variavel in sequencia) {instrucao1; instrucao2; ...}`

$\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$, quando $n \rightarrow \infty$ e $p = \frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$; Processo de Poisson: $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, $N_0 = 0$

$\binom{Np}{i} \binom{N-np}{n-i} / \binom{N}{n} \rightarrow \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$, quando $N \rightarrow \infty$ (n e p fixos)

Distribuição multinomial $M(n; p_1, p_2, \dots, p_{r-1})$, sendo $p_i > 0$ e $p_1 + p_2 + \dots + p_{r-1} < 1$; fmp conjunta:

$$P(X_1 = n_1, \dots, X_{r-1} = n_{r-1}) = \frac{n!}{n_1! \dots n_{r-1}! n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_{r-1}^{n_{r-1}} q^{n_r}, \text{ com } \begin{cases} 0 \leq n_i \leq n, & 0 \leq n_1 + \dots + n_{r-1} \leq n \\ n_r = n - (n_1 + \dots + n_{r-1}) \\ q = 1 - (p_1 + \dots + p_{r-1}) \end{cases}$$

dmultinom; **rmultinom**; $X_i \sim bi(n_i, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, r-1$; $cov(X_i, X_j) = -np_i p_j$, para $i \neq j$

$$X: \begin{matrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{matrix} \quad \begin{cases} \text{fmp} & p_i = P(X = x_i) & p_i \geq 0, \sum p_i = 1 \\ \text{fdp} & f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt & f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1 \end{cases}$$

Função de distribuição (fd): $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$; $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$;

caso discreto: $F(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i$; caso contínuo: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

$E(h(X)) = \sum h(x_i) p_i$, se $\sum |h(x_i)| p_i < +\infty$; $E(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx$, se $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| f(x) dx < +\infty$

$\mu = E(X)$; $\sigma^2 = var(X) = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$; $\mu'_r = E(X^r)$; $\mu_r = E((X - \mu)^r)$

$\beta_1 = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right)$; $\beta_2 = E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right)$; $\chi_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}$; F contínua estrita/ cresc: $\implies \chi_p = F^{-1}(p)$

$$(X, Y): \begin{matrix} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{matrix} \quad \begin{cases} \text{fmp conjunta} & p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j). \\ & p_{ij} \geq 0 \text{ e } \sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \\ \text{fdp conjunta} & f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } F(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right) du. \\ & f(x, y) \geq 0 \text{ e } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dudv = 1 \end{cases}$$

marginais (c. discreto): $p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_j p_{ij}$; $p_{\bullet j} = P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij}$

marginais (c. contínuo): $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$; $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$

$E(h(X, Y)) = \sum h(x_i, y_j) p_{ij}$, se \dots ; $E(h(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy$, se \dots

$cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = E(XY) - \mu_X \mu_Y$; $\rho = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$; $|\rho| \leq 1$; $\rho = \pm 1$ sse $P(Y = aX + b) = 1$

Propriedades: $E(a + bX) = a + bE(X)$; $var(a + bX) = b^2 var(X)$; $E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$;

X_1, \dots, X_n (mutuamente) independentes $\implies h_1(X_1), \dots, h_n(X_n)$ independentes;

X_1, \dots, X_n independentes $\implies var(X_1 + \dots + X_n) = var(X_1) + \dots + var(X_n)$, $cov(X_i, X_j) = 0$ e $\rho = 0$;

$var(X_1 + \dots + X_n) = \sum_i var(X_i) + 2 \sum_{i < j} cov(X_i, X_j)$. X_i i.i.d. $\implies E(\bar{X}) = \mu$ e $var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ independentes $\implies a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \sim N(\mu, \sigma)$, com $\mu = \sum a_i \mu_i$ e $\sigma^2 = \sum a_i^2 \sigma_i^2$

Se $\epsilon > 0$ e h função não negativa, então $P(h(X) \geq \epsilon) \leq E(h(X))/\epsilon$;

desig. Markov: $P(|X| \geq a) \leq E(|X|^r)/a^r$, $a > 0, r > 0$; desig. Chebyshev: $P(|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}$, $t > 0$

TEOREMA LIMITE CENTRAL: $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \left(\text{ou } \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$ [DE MOIVRE-LAPLACE: $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$]

LEI DOS GRANDES NÚMEROS: $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$ (ou seja, para qualquer $\epsilon > 0$, $P(|\bar{X} - \mu| < \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$).

A convergência em probabilidade implica a convergência em lei.

$F(x; \theta)$; θ ($\theta \in \mathbb{R}$) – localização: $Y = X - \theta$ não depende de θ ; θ ($\theta > 0$) – escala: $Y = \frac{X}{\theta}$ não depende de θ

Em famílias com f.d.p. $f(x, \theta)$: (i) localização ($\theta \in \mathbb{R}$): $f(x; \theta) = g(x - \theta)$;

(ii) escala ($\theta > 0$): $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} g\left(\frac{x}{\theta}\right)$;

(iii) $\theta = (\lambda, \delta)$, $\lambda \in \mathbb{R}, \delta > 0$ – localização-escala: $f(x; \lambda, \delta) = \frac{1}{\delta} g\left(\frac{x - \lambda}{\delta}\right)$

Se X tem fd contínua F , então $Y = F(X) \sim U[0, 1]$; se $Y \sim U[0, 1]$, então a v.a. $X = F^{-1}(Y)$ tem fd F

$$L_X(t) = E(e^{-tX}), \text{ se este valor médio existir numa viz. de } t = 0; \quad L_{a+bX}(t) = e^{-at} L_X(bt)$$

$$L_{X_1+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n L_{X_i}(t), \text{ se } X_1, \dots, X_n \text{ mutuamente indep.}; \quad E(X^r) = (-1)^r L_X^{(r)}(0)$$

<i>lei</i>	$U\{1, 2, \dots, N\}$	$bi(n, p)$	$Geom(p)$	$Poisson(\lambda)$	$U[a, b]$	$Exp(\lambda)$	$N(\mu, \sigma)$
$L(t)$	$\frac{1 - e^{-Nt}}{N(e^{-t} - 1)}$	$(q + p e^{-t})^n$	$\frac{pe^{-t}}{1 - qe^{-t}}$	$e^{-\lambda(1-e^{-t})}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t(b-a)}$	$\frac{\lambda}{\lambda + t}$	$e^{-\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
domínio	$t \in \mathbb{R}$	$t \in \mathbb{R}$	$t > \log(q)$	$t \in \mathbb{R}$	$t \in \mathbb{R}$	$t > -\lambda$	$t \in \mathbb{R}$

Nota : $q = 1 - p$

<i>distribuição</i>	<i>parâm.</i>	$f(x)$	μ	σ^2	<i>moda</i>	$\chi_{\frac{1}{2}}$	β_1	β_2	$L(t)$
$Cauchy(\beta, \delta)$	$\beta \in \mathbb{R}$ $\delta > 0$	$\frac{1}{\delta\pi} \frac{1}{1 + (\frac{x-\beta}{\delta})^2}$	\nexists	\nexists	β	β	\nexists	\nexists	\nexists
$Gama(\alpha, \lambda)$	$\alpha > 0$ $\lambda > 0$	$\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} I_{[0, +\infty[}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$*$	\dots	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$	$3 + \frac{6}{\alpha}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+t}\right)^\alpha, t > -\lambda$
$Laplace(\mu, \delta)$	$\mu \in \mathbb{R}$ $\delta > 0$	$\frac{1}{2\delta} e^{-\frac{ x-\mu }{\delta}}$	μ	$2\delta^2$	μ	μ	0	6	$\frac{e^{-\mu t}}{1 - \delta^2 t^2}, t < \lambda$

* $\frac{\alpha-1}{\lambda}$, se $\alpha \geq 1$; c.c. é amodal $Gama(1, \lambda) \equiv Exp(\lambda)$

Função *Gama* de Euler: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$; $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$; $\Gamma(n+1) = n!$; $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$; **gamma**

Passeio aleatório (simétrico):

$S_0 = 0$ (fortuna inicial), S_n (fortuna ao fim do n -ésimo passo) $= X_1 + \dots + X_n$, X_i i.i.d. $U\{-1, 1\}$

Processo de Poisson de taxa (ou intensidade) λ :

Processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ de chegadas ao longo do tempo ($t > 0$), com incrementos independentes e estacionários, tal que $N(0) = 0$ e $N(t)$ representa o n.º de chegadas no intervalo $]0, t]$; $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$; os intervalos de tempo até à 1ª chegada e entre chegadas consecutivas são v.a. i.i.d. $Exp(\lambda)$

$$\sum_{j=1}^n j = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n \frac{n+1}{2}; \quad \sum_{j=0}^n x^j = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}; \quad \sum_{j=0}^{+\infty} x^j = \frac{1}{1 - x}, \text{ se } |x| < 1;$$

$$e^x = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} x^j, x \in \mathbb{R}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x, x \in \mathbb{R}; \quad (a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}; \text{ Stirling: } n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1} e^{-n}$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad f(x) = \sum a_n x^n, |x| < r \implies f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}, |x| < r.$$

$$\int (f'g) = fg - \int (fg'); \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \text{ sse } \alpha > 1; \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \text{ sse } \alpha > 1$$