Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

— prova escrita 1 — duas horas — 2022'23 —

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (2 valores) Considere o conjunto A definido por
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ ou } x < 0\}.$$
   (a) Faça um esboço do conjunto A;
   (b) Identifique o interior, o derivado e a fronteira do conjunto A.

2. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$
   (a) Mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$;
   (b) Determine e identifique a curva de nível 1 da função f;
   (c) A função f é derivável em $(0, 0)$? Justifique.

3. (5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = xy^3 + \ln(x - 1).$$
   (a) Identifique o domínio da função f;
   (b) Calcule as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;
   (c) Justifique que f é derivável em $(2, -1)$;
   (d) Determine $f'(2, -1)$;
   (e) Justifique que a recta tangente à curva de nível -2 da função f no ponto $(2, -1)$ é horizontal.

4. (4 valores) Considere a seguinte equação de três variáveis reais
$$zx^3 y + z^3 \ln(x) + e^{xz-2} - y^2 = 1.$$
   (a) Determine uma equação do plano tangente à superfície, definida pela equação dada, no ponto $(1, 2, 2)$;
   (b) Mostre que a equação dada define z como uma função de (x, y) para pontos "próximos" de $(1, 2, 2)$;
   (c) Determine $z'(1, 2)$, sendo $z(x, y)$ a função implícita cuja existência foi provada no exercício anterior;
   (d) Determine a derivada direcional de z no ponto $(1, 2)$ e na direção e sentido do vector $\vec{u} = (-1, -2)$.

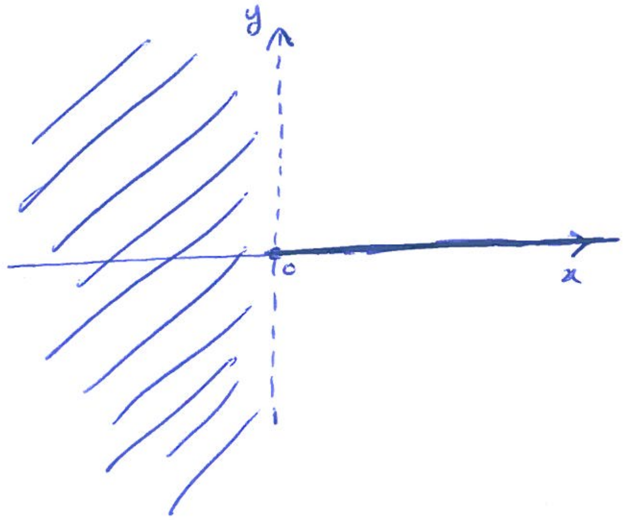
5. (2 valores) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funções deriváveis tais que
$$f(x, y) = (e^{xy}, x + y, x^2 y) \quad \text{e} \quad Jg(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine $Jf(0, 1)$;
   (b) Determine $J(g \circ f)(0, 1)$.

Fim

1º teste; Análise; LCC 2022-2023

$\boxed{1}$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ ou } x < 0\}$

a)



b) $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$

$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ ou } y = 0\}$

$fr(A) = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup ([0, +\infty[\times \{0\})$

$\boxed{2}$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{2 \cdot 0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} = \lim_{y \to 0} 0 = 0$

$\neq$

$\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^4}{2x^4} = 1$

Pela unicidade do limite conclui-se que $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

b) $\mathcal{N}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\right\}$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = 1\right\}$$

Mas $\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} = 1 \Leftrightarrow 2x^2y = x^4+y^2 \Leftrightarrow (x^2)^2 + y^2 - 2x^2y = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2+y=0 \Leftrightarrow y = -x^2$$

Assim $\mathcal{N}_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2\right\}$ é uma parábola

c) A função f não é derivável em $(0,0)$.
Como $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, então f não é contínua em $(0,0)$, donde se conclui que f não é derivável em $(0,0)$.

$\boxed{3}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^3 + \ln(x-1)$

a) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-1>0\right\} =]1,+\infty[\times \mathbb{R}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 + \dfrac{1}{x-1}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} :]1,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto y^3 + \frac{1}{x-1}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y} :]1,+\infty[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto 3xy^2$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínua numa bola de centro em $(2,-1)$, logo a função f é derivável em $(2,-1)$. (3)

d) $f'(2,-1): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(u,v) \longmapsto 6v$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = -1+1=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 6$

e) $\nabla f(2,-1) = (0,6)$ é perpendicular à recta tangente à curva de nível -2 de f. Tendo o vector $(0,6)$ uma direcção vertical, a recta tangente é horizontal.

$\boxed{4}$ $zx^3y + z^3\ln(x) + e^{xz-2} - y^2 = 1$

a) Definindo $f(x,y,z) = zx^3y + z^3\ln(x) + e^{xz-2} - y^2$, a superfície corresponde à superfície de nível 1 de $f(x,y,z)$.

Assim o plano tangente no ponto $(1,2,2)$ é

$$\left((x,y,z)-(1,2,2)\right)\cdot\nabla f(1,2,2) = 0$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(3zx^2y + \frac{z^3}{x} + ze^{xz-2},\ zx^3 - 2y,\ x^3y + 3z^2\ln(x) + xe^{xz-2}\right)$$

$$\nabla f(1,2,2) = (12+8+2,\ 2-4,\ 2+1) = (22,-2,3)$$

Conclusão: O plano tangente à superfície no ponto $(1,2,2)$ é dado pela equação:

$$(x-1, y-2, z-2).(22,-2,3)=0$$

$$\Leftrightarrow 22(x-1)-2(y-2)+3(z-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 22x-2y+3z=24$$

b) Defina-se $F(x,y,z)= zx^3y+z^3\ln(x)+e^{xz-2}-y^2$

- $F(1,2,2)=4+0+1-4=1$ ok

- F é de classe C^1 pois admite derivadas parciais contínuas. Note que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=3zx^2y+\frac{z^3}{x}+ze^{xz-2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=zx^3-2y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=x^3y+3z^2\ln(x)+xe^{xz-2}$$

- $\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,2)=2+0+1=3\neq 0$

Pelo T. da função implícita conclui-se que a equação dada define z como função de (x,y).

c) $$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,2)} = -\frac{22}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,2,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,2)} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

Assim

$$z'(1,2): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longmapsto -\frac{22}{3}u + \frac{2}{3}v$$

d) Sendo z derivável em $(1,2)$, então

$$\frac{\partial z}{\partial(-1,-2)}(1,2) = \nabla z(1,2) \cdot \frac{(-1,-2)}{\|(-1,-2)\|} = \left(-\frac{22}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\|(-1,-2)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$= \left(\frac{22}{3} - \frac{4}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{18}{3}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$\boxed{5}$ $$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \longmapsto (e^{xy}, x+y, x^2y)$$

a) $$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix}$$ logo $$Jf(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$J(g\circ f)(0,1) = Jg\left(f(0,1)\right)\cdot Jf(0,1)$$

$$= Jg(1,1,0)\cdot Jf(0,1)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$