Departamento de Matemática — Universidade do Minho

Tópicos de Matemática — 3º teste – 15 dez 2023

Lic. em Ciências de Computação - 1º ano — duração: duas horas

Proposta de resolução

**Grupo I.** Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Dado um conjunto $A$, para todas as funções $f$ e $g$ de $A$ em $A$, se $g \circ f$ é injetiva, então $f$ e $g$ são injetivas. V☐ F☒
2. Dados $A$ e $B$ conjuntos e $f$ função de $A$ em $B$, para todos os subconjuntos $X$ e $Y$ de $A$, $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ V☐ F☒
3. Se $\theta$ é uma relação de equivalência num conjunto $A$ e $a, b \in A$, então $[a]_\theta$ e $[b]_\theta$ têm o mesmo número de elementos. V☐ F☒
4. O conjunto $\{\{\{1\},\{2\}\},\{3\},\{\{4,5\}\}\}$ é uma partição de $B = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$. V☐ F☒
5. Para $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{1,2\}$, $\omega_{\{1,4\}} \cup \omega_{\{2,3\}}$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$. V☒ F☐
6. Se $R$ é uma relação de ordem parcial num conjunto $A$ e $a, b, c \in A$ são tais que $(c,b), (a,c), (b,a) \in R$, então $a = b = c$. V☒ F☐
7. Para qualquer c.p.o. $(A, \leq)$ e qualquer subconjunto não vazio $X$ de $A$, se $X$ admite um elemento maximal, então $A \backslash X$ admite um elemento minimal. V☐ F☒
8. Para quaisquer c.p.o.'s $A$ e $B$ e qualquer função isótona $f : A \to B$, se $x, y \in A$ são tais que $f(x) || f(y)$, então $x || y$. V☒ F☐

**Grupo II.** Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

1. uma relação binária cujo fecho de equivalência é $\theta = \omega_{\{1,2,3\}} \cup \omega_{\{4,5\}} \cup \omega_{\{6\}}$ em $A$;

   Seja $R = \{(1,2),(1,3),(4,5)\}$. Então, $R$ é uma relação binária em $A$ cujo fecho de equivalência é $\theta$.

2. uma função $f$ de $A$ em $A$ injetiva mas não sobrejetiva;

   Não existe. Como $A$ é um conjunto finito, qualquer função $f : A \to A$ é injetiva se e só se é sobrejetiva.

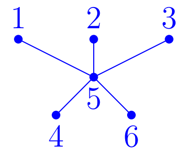
3. uma função $f$ de $A$ em $A \times A$ tal que $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(X)) = X$, para todo $X \subseteq A$;

   Basta considerar uma função injetiva, como, por exemplo,

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & A \times A \\ & x & \mapsto & (x,x) \end{array}$$

4. uma relação de ordem parcial $\leq$ em $A$ tal que 1, 2 e 3 são os únicos elementos maximais de $A$ e 4 e 6 são os únicos elementos minimais de $A$.

$\leq = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(6,5),(6,3),$
$(6,2),(6,1),(4,5),(4,3),(4,2),(4,1),(5,3),(5,2),(5,1)\}$, que pode ser representado pelo diagrama de Hasse




**Grupo III.** Sejam $A$ um conjunto não vazio, $a \in A$ e $\rho$ a relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ por

$$X \ \rho \ Y \Leftrightarrow X \backslash \{a\} = Y \backslash \{a\} \qquad (X, Y \subseteq A).$$

1. Mostre que $\rho$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

   - A relação binária $\rho$ é reflexiva pois, para todo $X \in \mathcal{P}(A)$, $X \ \rho \ X$, uma vez que $X \backslash \{a\} = X \backslash \{a\}$;
   - A relação binária $\rho$ é simétrica pois, para todos $X, Y \in \mathcal{P}(A)$,

   $$X \ \rho \ Y \Leftrightarrow X \backslash \{a\} = Y \backslash \{a\} \Leftrightarrow Y \backslash \{a\} = X \backslash \{a\} \Leftrightarrow Y \ \rho \ X;$$

   - A relação binária $\rho$ é transitiva pois, para todos $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$,

   $$\begin{aligned} X \ \rho \ Y \ \wedge \ Y \ \rho \ Z \ &\Leftrightarrow X \backslash \{a\} = Y \backslash \{a\} \ \wedge \ Y \backslash \{a\} = Z \backslash \{a\} \\ &\Rightarrow X \backslash \{a\} = Z \backslash \{a\} \\ &\Leftrightarrow X \ \rho \ Z. \end{aligned}$$

   Estamos em condições de concluir que $\rho$ é uma relação de equivalência.

2. Determine as classes $[\emptyset]_\rho$ e $[A]_\rho$.

   Seja $X \in \mathcal{P}(A)$. Então,

   - $X \ \rho \ \emptyset \Leftrightarrow X \backslash \{a\} = \emptyset \backslash \{a\} \Leftrightarrow X \backslash \{a\} = \emptyset \Leftrightarrow X = \emptyset \vee X = \{a\}$. Logo,

   $$[\emptyset]_\rho = \{\emptyset, \{a\}\};$$

   - $X \ \rho \ A \Leftrightarrow X \backslash \{a\} = A \backslash \{a\} \Leftrightarrow X = A \vee X = A \backslash \{a\}$. Logo,

   $$[A]_\rho = \{A, A \backslash \{a\}\}.$$

3. Considere a função $f : A \to \mathcal{P}(A)/\rho$ definida por $f(x) = [\{x\}]_\rho$, para todo $x \in A$. Mostre que se $f$ é sobrejetiva então $A$ tem, no máximo, 2 elementos.

   Suponhamos que $A$ tem pelo menos 3 elementos. Então, como $[A]_\rho = \{A, A \backslash \{a\}\}$, podemos concluir que nenhum dos dois elementos desta classe é um conjunto singular ($A$ tem pelo menos 3 elementos e $A \backslash \{a\}$ tem pelo menos 2 elementos). Assim, pela definição de $f$, podemos concluir que $[A]_\rho$ não é imagem por $f$ de qualquer elemento de $A$. Logo, a função não é sobrejetiva.

4. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $a = 2$, indique o conjunto quociente definido por $\rho$.

   Se $A = \{1, 2, 3\}$ então $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$. Para determinarmos o conjunto quociente, começamos por identificar as classes dos 8 elementos de $\mathcal{P}(A)$:

   - $[\emptyset]_\rho = \{\emptyset, \{2\}\} = [\{2\}]_\rho$; (visto em 2.)

- $[A]_\rho = \{A, \{1,3\}\} = [\{1,3\}]_\rho$; (visto em 2.)
- $[\{1\}]_\rho = \{X \in \mathcal{P}(A) : X\backslash\{2\} = \{1\}\backslash\{2\}\} = \{\{1\}, \{1,2\}\} = [\{1,2\}]_\rho$;
- $[\{3\}]_\rho = \{X \in \mathcal{P}(A) : X\backslash\{2\} = \{3\}\backslash\{2\}\} = \{\{3\}, \{3,2\}\} = [\{3,2\}]_\rho$;

Logo,

$$\mathcal{P}(A)/\rho = \{\{\emptyset, \{2\}\}, \{A, \{1,3\}\}, \{\{1\}, \{1,2\}\}, \{\{3\}, \{3,2\}\}\}.$$

**Grupo IV.** Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse apresentado. Indique, caso exista:

1. Maj $\{2,5,8,10\}$;

   Maj $\{2,5,8,10\} = \emptyset$.

2. inf$\{2,8\}$:

   inf$\{2,8\}$ não existe pois não existe o máximo do conjunto Min $\{4,5,11\}$.

3. $\inf\emptyset$ e $\sup\emptyset$;

   Nem $\inf\emptyset$ nem $\sup\emptyset$ existem pois $A$ não tem máximo nem mínimo.

4. Um subconjunto $X$ de $A$ com cinco elementos maximais;

   $X = \{10,3,2,1,8\}$.

5. Um subconjunto $X$ de $A$ com 6 elementos que é um reticulado para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. $A$;

   $X = \{5,3,7,9,6,8\}$.

6. Um subconjunto $X$ de $A$ tal que Maj $X =$ Min $X$.

   $X = \emptyset$ (Maj $X =$ Min $X = A$) ou qualquer conjunto $X$ tal que $1,2 \in X$ (Maj $X =$ Min $X = \emptyset$).