Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC Exame de recurso Duração: 2h30 [Exame modelo]

Proposta de resolução

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Dadas duas matrizes $A \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, a matriz

   - [ ] $AB + BA$ está bem definida.
   - [ ] $A^T B$ está bem definida.
   - [X] $\left(A + B^T\right)^T$ pode ser calculada.
   - [ ] $AB \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Se A e B são matrizes de ordem $n > 1$ tais que $3AB = I_n$, então

   - [ ] A e B são inversas uma da outra.
   - [ ] A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{3}B$.
   - [X] A é invertível e $A^{-1} = 3B$.
   - [ ] A é invertível e B é não invertível.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   - [X] Para $n \geq 3$, $A^n = \boldsymbol{O}_{3\times 3}$.
   - [ ] O sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ tem solução única.
   - [ ] $\det(A^T) \neq 0$.
   - [ ] $\det(A + 2I_3) = 2$.

4. Os seguintes vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   - [ ] $(1,1,-1), (2,3,4), (1,-2,3), (2,1,1)$.
   - [X] $(1,1,0), (0,2,3), (-2,0,1)$.
   - [ ] $(1,2,0), (0,1,-1)$.
   - [ ] $(-1,2,1), (3,2,2), (2,4,3)$.

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\dim\left(\mathsf{Im}(T)\right) = 2$. Então

   - [ ] $\mathsf{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.
   - [ ] $(0,0,0,0) \notin \mathsf{Nuc}(T)$.
   - [X] $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão 2.
   - [ ] $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1.

6. Seja A uma matriz de ordem 3 cujo polinómio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$. Então

   - [ ] $\det(A - 2I_3) \neq 0$.
   - [X] Os valores próprios da matriz $A^T + 2I_3$ são 0, 3 e 4.
   - [ ] o sistema $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e determinado.
   - [ ] $A^T - I_3$ é invertível.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1 valor] Sejam A e B matrizes invertíveis. Mostre que
$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}.$$

Resolução.

Dado que A e B são matrizes invertíveis, temos $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ e $BB^{-1} = B^{-1}B = I_n$. Assim,

$$\begin{aligned} A^{-1}(A + B)B^{-1} &= (A^{-1}A + A^{-1}B)B^{-1} = (I_n + A^{-1}B)B^{-1} \\ &= (I_nB^{-1} + A^{-1}BB^{-1}) = (I_nB^{-1} + A^{-1}I_n) = B^{-1} + A^{-1} = A^{-1} + B^{-1}. \end{aligned}$$

2. [2.5 valores] Considere, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a matriz
$$M = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2\beta \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \end{array}\right].$$

(a) Escreva o sistema, nas incógnitas x, y e z, cuja matriz ampliada é M.

(b) Discuta o sistema, em função dos parâmetros α e β.

(c) Indique a solução do sistema para $\alpha = \beta = 0$.

Resolução.

(a)
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2z = -2\beta \\ x - y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

(b)
$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2\beta \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2\beta + 3 \\ 0 & -2 & \alpha - 1 & \beta - 3 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2\beta + 3 \\ 0 & 0 & \alpha + 5 & -3\beta + 3 \end{array}\right]$$

- Se $\alpha = -5$ e $\beta = 1$, a característica da matriz simples do sistema é igual a 2 e igual à característica da matriz ampliada, sendo por isso o sistema possível e indeterminado, já que o número de incógnitas é $n = 3 > 2$.
- Se $\alpha = -5$ e $\beta \neq 1$, o sistema é impossível uma vez que a característica da matriz simples do sistema é igual a 2 e diferente da característica da matriz ampliada que é igual a 3.
- Se $\alpha \neq -5$, o sistema é possível e determinado qualquer que seja o valor de β, já que as características da matrizes simples e ampliada do sistema são iguais e iguais a 3 que é o número de incógnitas.

(c) Temos o sistema equivalente ao sistema inicial:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 3 \\ & y & +3z & = 3 \\ & & 5z & = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 3 - y - z \\ y & = 3 - 3z \\ z & = \frac{3}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{6}{5} \\ y & = \frac{6}{5} \\ z & = \frac{3}{5} \end{cases}$$

3. [2 valores] Considere as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$.

(b) Considere o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}^T$. Determine o valor da incógnita x_3 usando a regra de Cramer.

Resolução.

(a) $\det(A) = 2 \times (-1) \times (-2) \times 3 = 12$ (uma vez que A é uma matriz triangular superior o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal).

Para a matriz B temos

$$\det(B) = 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \times 34 - 4 \times 2 = 60,$$

uma vez que

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2(2+9) - (0-12) = 34$$

e

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = -1\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -1(4-6) = 2.$$

(b)

$$x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{2 \times (-1) \times \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}}{12} = \frac{-30}{12} = -\frac{15}{6}.$$

4. [3 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$T(x,y,z) = (x + 2y - z, y + 2z, 2x + 5y, x + 3y + z).$$

(a) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.

(b) Calcule, de duas formas distintas, $T(1,2,3)$.

(c) Determine $\mathsf{Nuc}(T)$ e uma sua base.

(d) Indique uma base para $\mathsf{Im}(T)$.

Resolução.

(a) Como $T(1,0,0) = (1,0,2,1)$, $T(0,1,0) = (2,1,5,3)$ e $T(0,0,1) = (-1,2,0,1)$, a matriz da aplicação linear relativamente às bases canónicas é

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $T(1,2,3) = (1+2\times 2-3, 2+2\times 3, 2\times 1+5\times 2, 1+3\times 2+3) = (2,8,12,10)$

ou

$$T(1,2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

(c) Da definição de $\mathsf{Nuc}(T)$,

$$\mathsf{Nuc}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon T(x,y,z) = (0,0,0,0)\right\},$$

obtemos o sistema

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_1 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - l_2 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_2}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\mathsf{Nuc}(T) = \{(5\alpha, -2\alpha, \alpha) \colon \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (5,-2,1) \rangle$$

e, portanto, $\dim(\mathsf{Nuc}(T)) = 1$, uma vez que $\big((5,-2,1)\big)$ é uma base de $\mathsf{Nuc}(T)$.

(d)

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}(T)) &= \left\{(x+2y-z, y+2z, 2x+5y, x+3y+z) \in \mathbb{R}^4 \colon\ x,y,z \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \{x(1,0,2,1) + y(2,1,5,3) + z(-1,2,0,1) \colon\ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,2,1), (2,1,5,3), (-1,2,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Observe-se que os vetores $(1,0,2,1), (2,1,5,3)$ e $(-1,2,0,1)$ não são linearmente independentes e, portanto, não constituem uma base de $\mathsf{Im}(T))$.

De facto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 + l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a característica desta matriz é 2, temos apenas dois vetores linearmente independentes. Assim,

$$\mathsf{Im}(T)) = \langle (1,0,2,1), (2,1,5,3) \rangle$$

e $\dim\left(\mathsf{Im}(T))\right) = 2$.

5. [2.5 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Determine o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A.

Resolução.

(a) Os valores próprios de A são as soluções da equação $\det(A - \lambda I) = 0$. Temos

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda)\big[(2-\lambda)(2-\lambda) - 4\big] \\ &= (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda(2-\lambda)^2(\lambda-4). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) = 0 &\iff \lambda(2-\lambda)^2(\lambda-4) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \ \vee \ 2-\lambda = 0 \ \vee \ \lambda - 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = 4. \end{aligned}$$

(b) O subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 4$, E_4, é o conjunto-solução do sistema $(A - 4I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, com $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$. Usando o método de eliminação de Gauss para a resolução do sistema, vem

$$\left[\begin{array}{cccc:c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_4 \longleftarrow l_4 + 2l_3]{} \left[\begin{array}{cccc:c} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, x_4 é uma variável livre e, por substituição inversa, obtemos $x_3 = \frac{1}{2}x_4$, $x_2 = \frac{3}{4}x_4$ e $x_1 = 0$. O conjunto-solução do sistema é, então, dado por

$$\left\{ \left(0, \frac{3}{4}x_4, \frac{1}{2}x_4, x_4\right) : x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1\right) : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = E_4.$$

Logo, o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A, $\lambda = 4$, é $E_4 = \langle (0, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1) \rangle = \langle (0, 3, 2, 4) \rangle$.

6. [1.5 valores] Sejam A uma matriz real quadrada de ordem n tal que $A^2 = I_n$ e $\boldsymbol{u}$ um vetor não nulo que não é vetor próprio de A.

(a) Mostre que se λ é um valor próprio de A, então $\lambda \in \{-1, 1\}$.

(b) Mostre que os vetores $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}$ são vetores próprios de A e diga a que valores próprios estão associados.

Resolução.

(a) Seja λ um valor próprio de A. Então, por definição, $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, com $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Sendo λ um valor próprio de A, λ^2 é uma valor próprio de A^2, uma vez que

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow AA\boldsymbol{x} = A\lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow A^2\boldsymbol{x} = \lambda A\boldsymbol{x} \Longrightarrow A^2\boldsymbol{x} = \lambda\lambda\boldsymbol{x} \Longrightarrow A^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}.$$

Como $A^2 = I_n$, segue que $\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$, ou seja, $\lambda^2 = 1$, ou ainda, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

(b) Observe-se que $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ não são vetores nulos. De facto, se se tivesse, por exemplo, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ obteríamos

$$\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow A\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u},$$

ou seja, $\boldsymbol{u}$ seria um vetor próprio de A associado ao valor próprio -1, o que contraria a hipótese de $\boldsymbol{u}$ não ser um vetor próprio de A.

Analogamente, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ implicaria que $\boldsymbol{u}$ seria um vetor próprio de A associado ao valor próprio 1, o que não é possível, por hipótese.

Repare-se, agora, que

$$A\boldsymbol{v} = A(\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} + A^2\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} + I_n\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

e

$$A\boldsymbol{w} = A(\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{u} - A^2\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} - I_n\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{w}.$$

Ou seja, $\boldsymbol{v}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 1 e $\boldsymbol{w}$ é um vetor próprio associado ao valor próprio -1.