Matrizes, sistemas de equações lineares, determinantes
Exercícios resolvidos

1. Matrizes

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule os produtos AB e BA e diga se as matrizes são comutáveis.

   (b) Determine a matriz X que satisfaz a equação

$$3X + (A - 2I_2)\,B = BA - (X + B^T).$$

Resolução.

(a) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 1\times 1 & 1\times 1 + 1\times -1) \\ 2\times 1 + 1\times 1 & 2\times 1 + 1\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Uma vez que $AB \neq BA$, as matrizes A e B não são comutáveis.

(b)

$$\begin{aligned}
& 3X + (A - 2I_2)\,B = BA - (X + B^T) \\
\iff & 3X + AB - 2B = BA - X - B^T \\
\iff & 3X + X = -AB + 2B + BA - B^T \\
\iff & 4X = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
\iff & 4X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \iff X = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \\
\iff & X = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ -3/4 & -1/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

2. Sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, encontre todas as matrizes de ordem 2×2 que comutam com a matriz B.

Resolução.

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz real. Devemos ter $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ou seja, $\begin{bmatrix} a & a \\ c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde se conclui que $c = 0$ e $a = b + d$. Logo, as matrizes que comutam com $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ são da forma $\begin{bmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

3. Determine a matriz A sabendo que

$$\frac{1}{2}\left(4A - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2A.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(4A - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2A \iff 2A - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} - 2A \\ \iff 2A + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \iff A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \\ \iff A = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ -9/4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Prove que se A é uma matriz invertível então

   (a) $AB = O \implies B = O$;

   (b) $AX = AY \implies X = Y$.

Resolução.

Sendo A uma matriz invertível de ordem n, existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Assim,

   (a) $AB = O \Longrightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}O \Longrightarrow (A^{-1}A)B = O \Longrightarrow I_nB = O \Longrightarrow B = O$.

   (b) $AX = AY \Longrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY) \Longrightarrow (A^{-1}A)X = (A^{-1}A)Y \Longrightarrow X = Y$.

5. Sendo A uma matriz quadrada de ordem n invertível, verifique que a equação matricial na variável X

$$A + AX = 2I_n$$

tem solução $X = 2A^{-1} - I_n$.

Resolução.

$A + AX = A + A(2A^{-1} - I_n) = A + 2AA^{-1} - AI_n = A + 2I_n - A = 2I_n$

6. (a) Considere a matriz $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. Verifique que D e D^2 são matrizes ortogonais.

   (b) Mostre que o produto de quaisquer duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Resolução.

(a) $DD^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = I_2 = D^TD$;

$D^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$; $D^2\left(D^2\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = I_2 = \left(D^2\right)^T D^2$.

(b) Sejam A e B duas matrizes ortogonais de ordem n, ou seja, matrizes A e B tais que $AA^T = A^TA = I_n$ e $BB^T = B^TB = I_n$. Pretende-se mostrar que AB é também uma matriz ortogonal.
De facto, $(AB)(AB)^T = (AB)(B^TA^T) = A(BB^T)A^T = AI_nA^T = AA^T = I_n$. De forma análoga se verifica que $(AB)^T(AB) = I_n$. Ou seja, AB é uma matriz ortogonal.

7. Determine os valores dos parâmetros reais a, b e c para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

tem característica 3.

Resolução.

Efetuando o produto das duas matrizes, temos

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 4a & 4+2b & 6 \\ 6a & 6+5b & 11+3c \end{bmatrix}.$$

Façamos agora a redução de A a uma forma em escada equivalente.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 4a & 4+2b & 6 \\ 6a & 6+5b & 11+3c \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - 4l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - 6l_1}]{} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 2b & 2 \\ 0 & 5b & 5+3c \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2/2]{} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 5b & 5+3c \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - 5l_2]{} \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 3c \end{bmatrix}$$

Podemos então concluir que a característica de A é igual a 3 se e só se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

8. Determine os valores dos parâmetros reais α, β e γ para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é a inversa da matriz} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}.$$

Resolução.

Efetuando o produto das duas matrizes, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para que as matrizes sejam inversas uma da outra, deve ter-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\gamma & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } -\alpha\gamma = 0.$$

Assim, $\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$ e β pode tomar qualquer valor real.

9. Determine, se possível, os valores dos parâmetros reais a, b e c para os quais as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix}$$

são comutáveis, isto é, tais que $AB = BA$.

Resolução. Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 4a & b & 0 \\ 6a+3 & 2b & 3c \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 4b & b & 0 \\ 6c+1 & 2c & 3c \end{bmatrix}.$$

Para que $AB = BA$ deve ter-se

$$\begin{cases} 4a &= 4b \\ 2b &= 2c \\ 6a+3 &= 1+6c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= b \\ b &= c \\ 6a+3 &= 1+6a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= b \\ b &= c \\ 3 &= 1 \end{cases} \text{(Condição impossível)}$$

Logo, não é possível as matrizes A e B serem comutáveis.

10. (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível tal que $A^3 = A$. Resolva em ordem a X a equação matricial

$$A\big(A^2 + XA^{-1}\big) = A^{-1} - A.$$

(b) Verifique que $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é tal que $A^3 = A$ e apresente a solução da equação matricial anterior para este caso particular.

Resolução.

(a)

$$\begin{aligned} A\big(A^2 + XA^{-1}\big) = A^{-1} - A &\Longleftrightarrow A^3 + AXA^{-1} = A^{-1} - A \\ &\Longleftrightarrow A + AXA^{-1} = A^{-1} - A \\ &\Longleftrightarrow AXA^{-1} = A^{-1} - 2A \\ &\Longleftrightarrow X = A^{-1}\left(A^{-1} - 2A\right)A \\ &\Longleftrightarrow X = A^{-1}A^{-1}A - 2AA^{-1}A \\ &\Longleftrightarrow X = A^{-1} - 2A \end{aligned}$$

(b) $A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$, logo $A^{-1} = A$;

$A^3 = A^2A = I_2A = A$;

$X = A^{-1} - 2A = A - 2A = -A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

11. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule

$$X = I_2 + BC\big(A^{-1}\big)^T.$$

Resolução. Calculemos a inversa de A.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{l_1 \longleftarrow l_1 - l_2}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

12. Sejam A, B e C matrizes reais simétricas de ordem n tais que

- $A - B = I_n$ e
- A e C são invertíveis.

Resolva em ordem a X a equação matricial

$$A(C^{-1}XC + B)^T = A^2.$$

Resolução.

$$\begin{aligned} A(C^{-1}XC + B)^T = A^2 &\iff A^{-1}\left(A(C^{-1}XC + B)^T\right) = A^{-1}(AA) && (A \text{ é invertível}) \\ &\iff (A^{-1}A)(C^{-1}XC + B)^T = (A^{-1}A)A \\ &\iff (C^{-1}XC + B)^T = A && (A^{-1}A = AA^{-1} = I_n) \\ &\iff C^{-1}XC + B = A^T \\ &\iff C^{-1}XC + B = A && (\text{sendo } A \text{ simétrica, } A = A^T) \\ &\iff C^{-1}XC = A - B \\ &\iff C^{-1}XC = I_n && (A - B = I_n) \\ &\iff C\left(C^{-1}XC\right)C^{-1} = CI_nC^{-1} && (C \text{ é invertível}) \\ &\iff (CC^{-1})X(CC^{-1}) = CC^{-1} && (C^{-1}C = CC^{-1} = I_n) \\ &\iff I_nXI_n = I_n \\ &\iff X = I_n. \end{aligned}$$

2. Sistemas de equações lineares

1. Justifique que existe um sistema de equações lineares $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tal que $(1, 2, 3)$ é solução desse sistema. Indique as equações de um sistema nessas condições.

Resolução. O vetor dos termos independentes desse sistema é dado por

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

As equações desse sistema nas incógnitas x, y e z são, então,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - z & = & -2 \\ 2x + y + 3z & = & 13 \\ -x + 2z & = & 5 \\ 3x + y + 2z & = & 11 \end{array} \right. .$$

2. Verifique que a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Use A^{-1} para calcular a solução do sistema $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Resolução.

Tem-se $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Também se tem $A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

Solução do sistema:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ d & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, onde d é um número real.

   (a) Determine o número d de forma que C seja a inversa de A.

   (b) Suponha que o vetor $\boldsymbol{x}$ satisfaz a equação $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   Use a inversa da matriz A para determinar $\boldsymbol{x}$.

   (c) Considere agora a equação $2A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Determine $\boldsymbol{y}$ usando novamente a inversa de A.

Resolução.

(a) De $AC = I_3$, ou seja, de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ d & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6+d & 1 & 0 \\ 12+2d & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} 6+d=0 \\ 12+2d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=-6 \\ 2d=-12 \end{cases} \iff \begin{cases} d=-6 \\ d=-6 \end{cases}.$$

Assim,

$$A^{-1} = C = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ -6 & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Também se tem $CA = I_3$).

(b)

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ -6 & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 72 \\ -66 \\ -14 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2A^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} &\iff A^T\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \iff A^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{y} = \left(A^T\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \boldsymbol{y} = \left(A^{-1}\right)^T\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -5 \\ -6 & -9 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & -1 \\ 10 & -9 & -2 \\ -5 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -12 \\ -17 \\ 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. Considere a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine A^{-1}.

(b) Use a alínea anterior para resolver o sistema de equações lineares $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Resolução.

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \longleftarrow (-1)\cdot l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_3 \\ l_1 \longleftarrow l_1 - l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Temos, então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Uma vez que A é uma matriz invertível, vem

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere a matriz A e o vetor $\boldsymbol{b}$ dados por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Considere $\alpha = \beta = 1$ e resolva o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(b) Considere $\alpha = \beta = 0$ e verifique que o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é um sistema possível e indeterminado. Apresente duas soluções particulares do sistema.

Resolução.

(a) Se $\alpha = \beta = 1$, temos

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \longleftarrow l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Por substituição inversa obtemos a solução única $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$.

(b) Quando $\alpha = \beta = 0$, ficamos com a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e temos um sistema possível e indeterminado pois $c(A) = c(A|b) = 2 < n = 4$.
O conjunto de soluções é dado por

$$C.S. = \{(1, 0, a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Para, por exemplo, $a = 1$ e $b = 1$ temos a solução particular $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 1, 1)$ e para $a = 2$ e $b = 1$ vem $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 2, 1)$.

6. Sendo α e β parâmetros reais, considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x & -y & -z & = 1 \\ -x & +3y & +3z & = -1 \\ x & +3y & +\alpha z & = \beta \end{cases}.$$

(a) Use o método de eliminação de Gauss para determinar os valores dos parâmetros α e β para os quais o sistema não tem solução, tem uma única solução ou um número infinito de soluções. Justifique.

(b) Resolva o sistema para (i) $\alpha = 5$ e $\beta = 5$; (ii) $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.

Resolução.

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & \alpha+1 & \beta-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & \beta-1 \end{array}\right]$$

- Se $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, temos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que corresponde a um sistema possível e indeterminado. Se A é a matriz simples do sistema e $\boldsymbol{b}$ o vetor dos termos independentes, temos $c(A) = c(A|b) = 2 < n = 3$.

- Se $\alpha = 3$ e $\beta \neq 1$, a matriz ampliada é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{array}\right]$$

e o sistema correspondente é impossível uma vez que $c(A) = 2 \neq c(A|b) = 3$. A última equação corresponde à condição impossível $0 = \beta - 1$, pois $\beta \neq 1$.

- Se $\alpha \neq 3$ e $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema tem uma única solução.
Neste caso, $c(A) = c(A|b) = n = 3$.

(b) (i) Se $\alpha = 5$ e $\beta = 5$, temos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

correspondente ao sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{cccl} x & -y & -z & = 1 \\ & 2y & +2z & = 0 \\ & & 2z & = 4 \end{array}\right. .$$

Por substituição inversa obtemos

$$\left\{\begin{array}{l} z = \frac{4}{2} = 2 \\ y = -2z/2 = -z = -2 \\ x = 1 + y + z = 1 \end{array}\right. .$$

Trata-se de um sistema possível e determinado cuja solução única é $(x, y, z) = (1, -2, 2)$.

(ii) Se $\alpha = 3$ e $\beta = 1$, como já observado, temos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema possível e indeterminado

$$\left\{\begin{array}{cccl} x & -y & -z & = 1 \\ & 2y & +2z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right. .$$

Assim,

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + y + z \\ y = -z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -z \end{array}\right. .$$

Ou seja, temos o conjunto de soluções

$$C.S. = \{(1, -\gamma, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\} .$$

7. Use o método de eliminação de Gauss para determinar os valores dos parâmetro α e β para os quais o sistema

$$\left\{\begin{array}{rccl} x & +y & +3z & = -2 \\ x & +2y & +4z & = -3 \\ -x & +3y & +\alpha z & = \beta \end{array}\right.$$

não tem solução, tem uma única solução ou um número infinito de soluções.

Resolva o sistema para (i) $\alpha = 2$ e $\beta = -2$ e para (ii) $\alpha = 1$ e $\beta = -2$.

<u>Resolução.</u>

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ -1 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & \alpha+3 & \beta-2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - 4l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \beta+2 \end{array}\right]$$

- Se $\alpha = 1$ e $\beta = -2$, temos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que corresponde a um sistema possível e indeterminado. Se A é a matriz simples do sistema e $\boldsymbol{b}$ o vetor dos termos independentes, temos $c(A) = c(A|b) = 2 < n = 3$.

- Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq -2$, a matriz ampliada é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta + 2 \end{array}\right]$$

e o sistema correspondente é um sistema impossível, pois a última equação corresponde à condição $0 = \beta + 2$ que é impossível pois $\beta + 2 \neq 0$. O seja, neste caso tem-se $c(A) = 2 \neq c(A|b) = 3$.

- Se $\alpha \neq 1$, o sistema é possível e determinado qualquer que seja o valor de β. Neste caso, $c(A) = c(A|b) = n = 3$.

(i) Para $\alpha = 2$ e $\beta = -2$ temos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x & +y & +3z & = -2 \\ & y & +z & = -1 \\ & & z & = 0 \end{cases}$$

Por substituição inversa obtém-se

$$z = 0, \quad y = -1, \quad x = -2 - 3 \times 0 - (-1) = -1.$$

(ii) Para $\alpha = 1$ e $\beta = -2$, como já observado, temos o sitema possível e indeterminado

$$\begin{cases} x & +y & +3z & = -2 \\ & y & +z & = -1 \\ & & 0 & = 0 \end{cases}$$

A variável z é uma variável livre e, por substituição inversa, obtém-se

$$y = -1 - z, \quad x = -2 - 3z - (-1 - z) = -2z - 1.$$

O conjunto de soluções é, então,

$$C.S. = \{(-2a - 1, -1 - a, a) \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

8. Considere o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = b$ com matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2\alpha & 0 & \beta \end{array}\right],$$

onde α e β são parâmetros reais.

(a) Em função dos parâmetros α e β, classifique o sistema.

(b) Considere $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ e resolva o sistema. Apresente duas soluções particulares.

(c) Considere $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ e verifique, sem resolver o sistema, que $(1, -1, 0, 1)$ é a única solução do sistema.

Resolução.

(a)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2\alpha & 0 & \beta \end{array}\right] \underset{\substack{l_3 \longleftarrow l_3 - l_1 \\ l_4 \longleftarrow l_4 - l_1 \\ l_5 \longleftarrow l_5 - 2l_1}}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\alpha & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right] \underset{l_3 \longleftarrow l_3 - l_2}{\longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right] \underset{l_4 \longleftarrow l_4 - \alpha l_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right]$$

Se

- $\beta \neq 0$, o sistema é impossível uma vez que $c(A) < c(A|b)$;
- $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$, o sistema é possível e determinado uma vez que $c(A) = c(A|b) = 4 = n$;
- $\beta = 0$ e $\alpha = 0$, o sistema é possível e indeterminado pois $c(A) = c(A|b) = 3 < n$.

(b) Quando $\alpha = \beta = 0$, a matriz ampliada do sistema fica reduzida à matriz

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e temos um sistema possível e indeterminado. O conjunto solução é dado por

$$C.S. = \{(\alpha, -\alpha, 1-\alpha, \alpha) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Duas soluções particulares: $(1, -1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1, 0)$.

(c) Quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, de acordo com a alínea (a), o sistema tem solução única ($\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$). Ficamos com o sistema

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

e a única solução é $(1, -1, 0, 1)$ pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Determinantes

1. Seja $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz diagonal.

   (a) Indique uma condição necessária e suficiente para D ser invertível.

   (b) Se D é invertível, determine D^{-1}.

   Resolução.

   (a) Seja $D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$, $d_i \in \mathbb{R}$. D é invertível se e só se $\det(D) \neq 0$, ou seja, se e só se $d_1 d_2 \cdots d_n \neq 0$, ou ainda, se e só se $d_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

   (b)
   $$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & & \\ & 1/d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/d_n \end{bmatrix}, \; d_i \neq 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

2. Considere a matriz
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule o determinante de A e conclua que A é invertível.

   (b) Determine A^{-1}.

   (c) Use a alínea anterior para resolver o sistema de equações lineares $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Resolução.

   (a) Se escolhermos a segunda linha da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem
   $$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1 \cdot (-1) = 1.$$
   Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A é uma matriz invertível.

   (b)
   $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
   $$\xleftrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_2 \longleftarrow (-1)\cdot l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
   $$\xleftrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_3 \\ l_1 \longleftarrow l_1 - l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Temos, então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) Uma vez que A é uma matriz invertível, temos

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Seja A uma matriz de ordem n tal que $\det(A) = 1$. Escreva a que é igual

   (a) $\det(-\mathrm{A})$; (b) $\det(3\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$; (c) $\det(\mathrm{A}^{-1})$; (d) $\det(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})$.

   Resolução.

   (a) $\det(-A) = (-1)^n \det(A) = (-1)^n$;
   (b) $\det(3A^T) = 3^n \det(A^T) = 3^n \det(A) = 3^n$;
   (c) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = 1$;
   (d) $\det(P^{-1}AP) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(P)\det(A)\dfrac{1}{\det(P)} = \det(A) = 1.$

4. Sejam A, B matrizes de ordem 3 tais que $\det(A) = \dfrac{1}{2}$ e $\det(B) = 6$, e sejam E_1, E_2, E_3 matrizes elementares do tipo I, II e III, respetivamente, também de ordem 3. Suponha que E_2 foi obtida multiplicando-se a segunda linha de I_3 por 4. Determine:

   (a) $\det(2A)$; (b) $\det\left(A^2B^T\right)$; (c) $\det\left(A^{-1}B\right)$; (d) $\det\left(PA^TP^{-1}\right)$;

   (e) $\det(E_3A)$; (f) $\det(E_1A)$; (g) $\det\left(E_2^{-1}\right)$; (h) $\det\left(E_2A\right)$.

   Resolução.

   (a) $\det(2A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \times \frac{1}{2} = 4$;
   (b) $\det\left(A^2B^T\right) = \det(A^2) \cdot \det(B^T) = \left(\det(A)\right)^2 \cdot \det(B) = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$;
   (c) $\det\left(A^{-1}B\right) = \det(A^{-1}) \cdot \det(B) = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \det(B) = 12$;
   (d) $\det\left(PA^TP^{-1}\right) = \det(P) \cdot \det(A^T) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \dfrac{1}{\det(P)} = \det(A) = \frac{1}{2}$;
   (e) $\det(E_3A) = \det(A) = \frac{1}{2}$;
   (f) $\det(E_1A) = -\det(A) = -\frac{1}{2}$
   (g) $\det\left(E_2^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(E_2)} = \frac{1}{4}$
   (h) $\det\left(E_2A\right) = 4\det(A) = 2.$

5. Seja A uma matriz de ordem n tal que $\det(A) = 2$. Escreva a que é igual

(a) $\det(-3A)$; (b) $\det\left(\left(A^2\right)^{-1}\right)$; (c) $\det(A^T A^{-1})$; (d) $\det\left(PAP^{-1}\right)$.

Resolução.

(a) $\det(-3A) = (-3)^n \cdot \det(A) = 2 \cdot (-3)^n$;

(b) $\det\left(\left(A^2\right)^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det\left(A^2\right)} = \dfrac{1}{\left(\det(A)\right)^2} = \dfrac{1}{4}$;

(c) $\det(A^T A^{-1}) = \det(A^T) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A) \cdot \dfrac{1}{\det(A)} = 1$;

(d) $\det\left(PAP^{-1}\right) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \dfrac{1}{\det(P)} = \det(A) = 2$.

6. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tais que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = -3$. Determine

(a) $\det(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$; (b) $\det\left(-BA^T\right)$; (c) $\det\left(2AB^{-1}\right)$.

Resolução.

(a) $\det(A^n) = \left[\det(A)\right]^n = 2^n$;

(b) $\det\left(-BA^T\right) = \det(-B)\det(A^T) = (-1)^4 \det(B)\det(A) = 1 \times (-3) \times 2 = -6$;

(c) $\det\left(2AB^{-1}\right) = \det(2A)\det(B^{-1}) = 2^4 \det(A)\det(B^{-1}) = 2^4 \times 2 \times \dfrac{1}{\det(B)} = -\dfrac{32}{3}$.

7. Obtenha uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

Calcule $\det(A)$, usando a forma em escada obtida, e verifique que a matriz é invertível se e só se $a \neq b$.

Resolução.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ a & b & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - al_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & a-b \\ 0 & b-a & 1-ab \end{bmatrix} \xleftrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & b-a & 1-ab \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} = B$$

Temos

$$\det(A) = -\det(B) = -(b-a)(a-b) = (a-b)^2.$$

A é invertível $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow (a-b)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow a - b \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq b$.

8. Considere matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = -BA$. Mostre que

$$\big[\det(A+B)\big]^2 = \det(A^2+B^2).$$

<u>Resolução.</u>

$$\begin{aligned}
\big[\det(A+B)\big]^2 &= \det(A+B)\cdot\det(A+B)\\
&= \det\big((A+B)^2\big)\\
&= \det(A^2+AB+BA+B^2)\\
&= \det(A^2-BA+BA+B^2), \qquad \text{uma vez que } AB=-BA,\\
&= \det(A^2+B^2).
\end{aligned}$$

9. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$. Resolva em ordem a X a equação matricial

$$\big(XA^T - BC\big)^T = A.$$

<u>Resolução.</u>

$$\begin{aligned}
\big(XA^T - BC\big)^T = A &\iff XA^T - BC = A^T\\
&\iff XA^T = A^T + BC\\
&\iff XA^T\big(A^T\big)^{-1} = \big(A^T+BC\big)\big(A^T\big)^{-1}\\
&\iff XI_2 = A^T\big(A^T\big)^{-1} + BC\big(A^T\big)^{-1}\\
&\iff X = I_2 + BC\big(A^{-1}\big)^T
\end{aligned}$$

Calculemos agora a inversa de A.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right] \xleftrightarrow[l_1 \longleftarrow l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Assim,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
X &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz idempotente, isto é, tal que $A^2 = A$. Mostre que $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

    Resolução.

    Temos
$$\det(A^2) = \det(A)\det(A) = \big(\det(A)\big)^2 = \det(A).$$
    A condição $\big(\det(A)\big)^2 = \det(A)$ é equivalente a
$$\det(A)\big(\det(A) - 1\big) = 0,$$
    ou seja, $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

11. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ quaisquer. Mostre que:

    (a) $\det(AB) = \det(BA)$;

    (b) se AB é invertível, então o mesmo sucede a A e a B.

    Resolução.

    (a) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

    (b) Se AB é invertível, então $\det(AB) \neq 0$. Como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, então terá de ser $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$. Ou seja, A e B são também invertíveis.

12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule o determinante de A e conclua que A é invertível.

    (b) Considere o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ onde $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Use a regra de Cramer para determinar o valor da incógnita x_1.

    Resolução.

    (a) Se escolhermos a segunda linha da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -1 \times 3 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1 \times 3 \times (-2) = 6.$$
    Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A é uma matriz invertível.

    (b)
$$x_1 = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\left[-2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{6}.$$

13. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule a terceira coluna de A^{-1} usando a regra de Cramer para resolver o sistema $A\boldsymbol{x} = [0\ 0\ 1]^T$.

Solução.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = 1.$$

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o determinante de A e conclua que A é invertível.

(b) Considere o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ onde $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Use a regra de Cramer para determinar a solução do sistema.

Resolução.

(a) Se escolhermos a segunda coluna da matriz para fazermos o desenvolvimento de Laplace, vem

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -1 \times (-7) = 7.$$

Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A é uma matriz invertível.

(b)

$$x_1 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \left[-1 \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7}\big(-1 \times (-3)\big) = \frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \left[2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7}\big(2 \times (-3) + 2 \times (-2)\big) = -\frac{10}{7}$$

$$x_3 = \frac{1}{7} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \left[-1 \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7}\big(-1 \times (-2)\big) = \frac{2}{7}$$

15. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Determine o elemento $(2,3)$ de A^{-1} calculando o quociente entre dois determinantes.

<u>Resolução.</u>

Sendo

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2 + 2 = 4,$$

vem

$$\left(A^{-1}\right)_{2,3} = \frac{[\mathrm{adj}(A)]_{2,3}}{\det(A)} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{3}{4}.$$

16. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule o determinante de A e conclua que A é invertível.

(b) Verifique que $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A) I_3$ e determine A^{-1}.

(c) Use a matriz A^{-1} para obter a solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

<u>Resolução.</u>

(a) $\det(A) = 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 2$ (desenvolvimento de Laplace segundo a segunda coluna).

Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A é invertível.

(b)

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I_3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

17. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$. Resolva em ordem a X a equação matricial

$$A\big(X + C^T C\big)A^T = \operatorname{adj}(A).$$

Resolução.

$$\begin{aligned} A\big(X + C^T C\big)A^T = \operatorname{adj}(A) &\iff X + C^T C = A^{-1} \cdot \operatorname{adj}(A) \cdot \big(A^T\big)^{-1} \\ &\iff X = A^{-1} \cdot \operatorname{adj}(A) \cdot \big(A^{-1}\big)^T - C^T C. \end{aligned}$$

Temos

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A).$$

Assim,

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

18. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Sabendo que $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$, mostre que $\operatorname{adj}(A)$ também é invertível e

$$\big(\operatorname{adj}(A)\big)^{-1} = \det\big(A^{-1}\big)\, A;$$

Resolução.

Uma vez que A é invertível, temos $\det(A) \neq 0$ e de $A \operatorname{adj}(A) = \det(A) I_n$ obtemos

$$\frac{A}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = I_n,$$

ou seja, $\dfrac{A}{\det(A)}$ é a matriz inversa de $\operatorname{adj}(A)$. Escrevemos, então,

$$\big(\operatorname{adj}(A)\big)^{-1} = \frac{A}{\det(A)} = \det\big(A^{-1}\big)\, A.$$