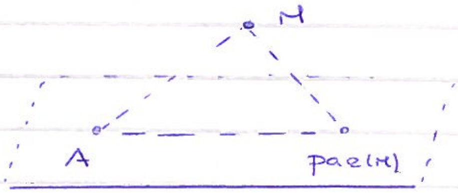
Geometria

Resolução do terceiro teste — 16/01/2012

1. $\vec{v} = (1,2,0)$ $\qquad \pi : x - 2y + z - 2 = 0$

a) Seja $M = (x, y$ um ponto genérico do espaço afim A.
Temos que $A = (2,0,0) \in \pi$.
Se $par(M)$ é a projecção paralela de M segundo $\vec{v}$ em π, temos



$$\vec{AM} = \overrightarrow{A\,par(M)} + \overrightarrow{par(M)\,M}$$

Note-se que, por definição de projecção, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{par(M)M} = \lambda \vec{v}$

Por outro lado: $\overrightarrow{A\,par(M)}$ é um vector de π logo como $\vec{n} = (1,-2,1)$ é um vector normal a π
$\overrightarrow{A\,par(M)} \cdot \vec{n} = 0$

Assim: $\vec{AM} = \overrightarrow{A\,par(M)} + \overrightarrow{par(M)\,M}$

$$\Rightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{v} \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} = \frac{(x-2, y, z)(1,-2,1)}{(1,2,0).(1,-2,1)}$$

$$= \frac{x - 2 - 2y + z}{-3}$$

Finalmente:

$$par(M) = M + \overrightarrow{M\,par(M)} =$$

$$= (x,y,z) - \lambda \vec{v} = (x,y,z) + \frac{x-2-2y+z}{3}(1,2,0)$$

$$= \left(x + \frac{x-2-2y+z}{3},\ y + 2\frac{(x-2-2y+z)}{3},\ z\right)$$

$$= \left(\frac{4x-2-2y+z}{3},\ \frac{2x-4-y+2z}{3},\ z\right)$$

b) Existem várias formas de justificar que $par(M)$ não é uma semelhança. Por exemplo:

- Como $par(M)$ é uma projecção então não é bijectiva logo não pode ser uma semelhança.

- Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Como $\det \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ então a aplicação não é bijectiva logo não é uma semelhança.

- Usando a definição: se par é uma semelhança então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $d(\text{par}(A), \text{par}(B)) = \lambda\, d(A,B)$, $\forall A, B \in A_0$.

Considerando $O = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$
$C = (0,1,0)$

temos $\text{par}(O) = (-2/3, -4/3, 0)$

$\text{par}(B) = (-2/3, -4/3, 0) + (4/3, 2/3, 0) =$
$= (2/3, -2/3, 0)$

$\text{par}(C) = (-2/3, -4/3, 0) + (-2/3, -1/3, 0) =$
$= (-4/3, -5/3, 0)$

$d(O,B) = 1$

$d(\text{par}(O), \text{par}(B)) = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{20} = \frac{2}{3}\sqrt{5}$

$d(O,C) = 1$

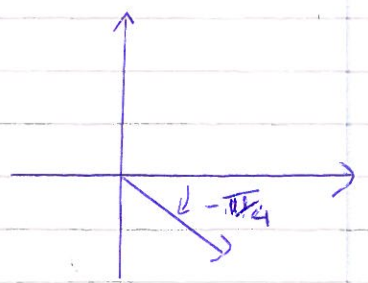
$d(\text{par}(O), \text{par}(C)) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$

Assim, por um lado $\lambda = \frac{2}{3}\sqrt{5}$, por outro $\lambda = \frac{1}{3}\sqrt{5}$.
Absurdo. A aplicação par não é uma semelhança.

$\underline{\underline{2}}$ A plano afim

A transformação shear directa (no ponto $(0,0)$ segundo $\vec{e_1} = (1,0)$) é dada por: $(\lambda = 3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



A rotação ρ que envia o vector $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ em $\vec{e_1}$ é a rotação de ângulo $\pi/4$ definida por: $\begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\operatorname{sen} \pi/4 \\ \operatorname{sen} \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Então a transformação shear em O segundo $\vec{v}$ é dada matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(observe que matrizes de rotação são ortogonais)

Sendo S a transformação anterior e t a translação que envia A em O, temos finalmente que a transformação pedida é definida por:

$$t^{-1} \circ S \circ t$$

Matricialmente temos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

Desenvolvendo os cálculos temos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 + 4/2 & -1/2 + 4/2 \\ -1/2 - 2/2 & 1/2 - 2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$f(x_1, x_2) = \left(1 + \tfrac{5}{2}(x_1 - 1) + \tfrac{3}{2}(x_2 - 1),\ 1 - \tfrac{3}{2}(x_1 - 1) - \tfrac{1}{2}(x_2 - 1)\right)$$

$$= \left(\frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 3,\ -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + 3\right)$$

3. A plano afim.

$S(x, y) = (1 - y, 1 - x)$

A representação matricial de S é dada por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Considerando $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, a matriz da aplicação linear associada a s, facilmente se verifica que $XX^T = I$, logo X é ortogonal, ou seja s é uma isometria.

Vamos classificar s através dos seus pontos fixos.

$$s(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y = x \\ 1-x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ 1-x = y \end{cases}$$

Do sistema resulta que $Fix(s) = \{(x,y) \in A : y = 1-x\}$ que é uma recta.

Logo s é a reflexão na recta $y = 1-x$.

4. A espaço afim tridimensional

$\rho_{\theta, O'}$ é dada matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\operatorname{sen} \pi/6 & 0 \\ \operatorname{sen} \pi/6 & \cos \pi/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

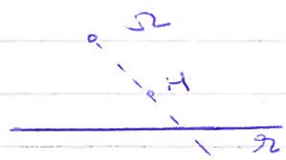
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 + 1 \\ x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Big(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x_1 - 1) - \tfrac{1}{2}(x_2 + 1),\ -1 + \tfrac{1}{2}(x_1 - 1) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}(x_2 + 1),\ x_3 \Big)$$

5. A plano afim. $\Omega = (0,1)$ $R: x + y = 0$

a) A recta excepcional é a recta paralela a R que incide em Ω, ou seja, a recta de equação cartesiana $x + y = 1$



b) Seja $M = (x,y)$ um ponto genérico não incidente na recta excepcional

Seja $per(M)$ a projecção perspectiva de M desde Ω à recta R.

Temos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$per(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$

ou seja, $per(x,y) = (0,1) + \lambda(x, y-1)$

$$= (\lambda x, 1 + \lambda(y-1))$$

uma vez que $per(M)$ pertence à recta que incide em Ω e em M.

Por outro lado, $per(M) \in r$ logo satisfaz a equação cartesiana de r. Assim

$$\lambda x + 1 + \lambda(y-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda(x+y-1) + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-x-y}$$

Portanto:

$$Per(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} =$$
$$= \left(\frac{x}{1-x-y}, 1 + \frac{y-1}{1-x-y} \right)$$
$$= \left(\frac{x}{1-x-y}, \frac{-x}{1-x-y} \right)$$

c) Coordenadas homogéneas de M: $[x : y : 1]$

$$Per([x : y : 1]) = \left[\frac{x}{1-x-y} : \frac{-x}{1-x-y} : \frac{1}{} \right]$$
$$= [x : -x : 1-x-y]$$

Matricialmente, $per(M)$ representa-se então por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \end{pmatrix}$$

observe que qualquer múltiplo não nulo da matriz acima é também uma matriz da projecção perspectiva pretendida.