Nome: **Número:**

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2.5 valores) Considere o conjunto $A = \left\{ x \in \mathbb{R}^+ : \left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \geq 1 \right\}$.

(a) Represente o conjunto A na forma de intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique, caso existam, o mínimo e o supremo do conjunto A.

(c) Apresente, caso exista, um ponto de acumulação de A que não pertença a A.

Exercício 2.

1. (1 valor) Considere o conjunto $S = [0,1[\cup]2,+\infty[$. Apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja não monótona, convergente, com limite em $\mathbb{R} \backslash S$.

2. (1 valor) Estude a natureza da sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} n+2 & \text{se} \quad n \leq 70 \\ \dfrac{n \cos n}{2\,n^2+7} & \text{se} \quad n > 70 \end{cases}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{5^n}+\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}}\right)$.

II. Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n\frac{n}{n^4+2}$ é absolutamente convergente.

Exercício 4. (3 valores) Considere as funções $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad x\leq 0\\ 1-x & \text{se} \quad x>0\end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se} \quad x\in\mathbb{Z}\\ 1-x & \text{se} \quad x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\end{cases}.$$

(a) Determine, justificando, o domínio de continuidade de cada uma das funções f e g.

(b) Determine, caso existam, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercício 5. (2 valores) Considere a equação

$$e^x = a - 2x^3.$$

(a) Mostre que para todo $a \in \mathbb{R}$, esta equação tem no máximo uma raiz real.

(b) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se pode afirmar que esta equação tem exatamente uma raiz no intervalo $[0,2]$?

Exercício 6. (1.5 valores) Responda a **<u>uma e uma só</u>** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int \frac{(1-3\operatorname{sen} x)^2}{2} \cos x \, dx.$

II. Calcule $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)} \, dx.$

Exercício 7. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{arcsen} x \, dx$. II. Calcule o integral $\displaystyle\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{1-x}}\, dx$, efetuando a substituição $x = \operatorname{sen}^2 t$.

Exercício 8. (1.5 valores) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq -2 \wedge 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$, fazendo previamente um esboço da região $\mathcal{R}$.

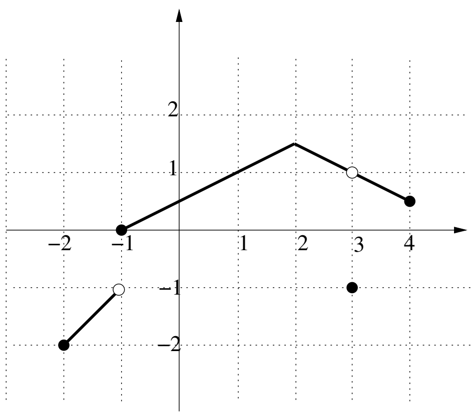
Exercício 9. (3 valores) Considere a função $f : [-2,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte e seja $F : [-2,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\, dt$.

(a) Determine, caso exista, $F'(2)$.

(b) Determine $a \in]-2,4]$ tal que $F(a) = 0$.

(c) A função f é primitivável? ____________,

porque ____________________________________.



FIM