Resolução explicada dos exercícios 5, 6, 7 e 8 da folha 3 (resolvidos nas aulas PL dos dias 2, 3 e 4 de dezembro)

exercício 5) Uma vez que

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)},$$

de (1) resulta

$$r - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\left(r - x^{(k)}\right)^2$$

que relaciona o erro numa iteração com o quadrado do erro na iteração anterior. Por exemplo, se $|r - x^{(k)}| \approx 10^{-3}$ e $\left|\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\right|$ (este valor varia de iteração para iteração uma vez que o ponto θ não é sempre o mesmo) não for muito maior do que 1, então será $|r - x^{(k+1)}| \approx 10^{-6}$, isto é, o número de algarimos corretos praticamente duplica de uma iteração para a seguinte. Em termos mais formais, um método iterativo tem convergência quadrática (ver p. 55 das notas das aulas) se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|r - x^{(k+1)}\right|}{\left|r - x^{(k)}\right|^2} = C > 0$$

Ora, no caso do método de Newton-Raphson tem-se

$$\frac{\left|r - x^{(k+1)}\right|}{\left|r - x^{(k)}\right|^2} = \left|\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\right|,$$

donde, tomando limites, resulta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|r - x^{(k+1)}\right|}{\left|r - x^{(k)}\right|^2} = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

exercício 6.a) Com

$$f(x) = b - \frac{1}{x}$$

a fórmula iterativa

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}$$

dá

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{b - 1/x^{(k)}}{1/\left(x^{(k)}\right)^2} = x^{(k)} - \left(x^{(k)}\right)^2\left(b - 1/x^{(k)}\right) = x^{(k)}\left(2 - bx^{(k)}\right)$$

exercício 6.b) Partindo da aproximação inicial, repetimos o comando $x = x * (2 - 7 * x)$ até que duas iteradas sucessivas coincidam em todos os algarismos no format long.

```
>> format long, x=0.1;

>> x=x*(2-7*x)

x =
```

```
   0.130000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.141700000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142847770000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142857142242190

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142857142857143

>> x=x*(2-7*x)

x =

   0.142857142857143
```

exercício 6.c) Com $e^{(k)} = r - x^{(k)}$ e $x^{(k)}$ próximo de r a expressão

$$r - x^{(k+1)} = -\frac{f''(\theta)}{2f'\left(x^{(k)}\right)}\left(r - x^{(k)}\right)^2$$

dá

$$e^{(k+1)} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)}\left(e^{(k)}\right)^2$$

e para $f(x) = b - 1/x$ é

$$-\frac{f''(r)}{2f'(r)} = 1/r = b.$$

exercício 6.d) O método diverge como se pode concluir de

```
>> x=0.3;
>> x=x*(2-7*x)

x =
```

```
  -0.030000000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -0.066300000000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -0.163369830000000

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -0.513567569479603

>> x=x*(2-7*x)

x =

  -2.873396677907512
....
```

exercício 7.a) Tem-se

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)} - a\right)^m}{m\left(x^{(k)} - a\right)^{m-1}} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)} - a\right)}{m}$$

e subtraindo a em ambos os membros

$$x^{(k+1)} - a = x^{(k)} - a - \frac{\left(x^{(k)} - a\right)}{m} = \left(x^{(k)} - a\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Isto mostra que a ordem de convergência do método é $p = 1$ (veja-se de novo a definição), isto é, a convergência é linear.

exercício 7.b) Em cada iteração do método da bisseção, a amplitude do intervalo que contem a raiz é reduzida para metade. Por outro lado, para $m = 2$ tem-se $e^{(k+1)} = e^{(k)}/2$ e é neste sentido que podemos dizer, neste caso, que o método de Newton-Raphson não converge mais rapidamente do que o método da bisseção. Para $m > 2$ a convergência é mais lenta uma vez que $1 - 1/m > 1/2$. Observe-se que $1 - 1/m$ aproxima-se de 1 quando m cresce e a convergência é, portanto, tanto mais lenta quanto maior for a multiplicidade m da raiz a. Em conclusão, é preferível usar o método da bisseção que converge mais rapidamente e não requer o cálculo de derivadas.

exercício 8) A função poly dá os coeficientes do polinómio mónico cujos zeros são dados. Por exemplo,

```
>> p=poly([1 2])

p =

     1    -3     2
```

uma vez que $(x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$.

A função roots calcula os zeros de um polinómio a partir dos respetivos coeficientes:

```
>> roots(p)

ans =

     2
     1
```

Neste caso, a função roots dá exatamente as raizes iniciais. Mas isto nem sempre acontece.

```
>> p=poly([2 2 2 2 2 2 2 2 2])

p =

           1         -18         144        -672        2016       -4032        5376

>> r= roots(p)

r=

   2.0689 + 0.0000i
   2.0518 + 0.0449i
   2.0518 - 0.0449i
   2.0100 + 0.0668i
   2.0100 - 0.0668i
   1.9655 + 0.0566i
   1.9655 - 0.0566i
   1.9383 + 0.0218i
   1.9383 - 0.0218i
```

Neste caso, as raízes têm erros importantes e a razão é o mau condicionamento da raiz igual a 2 que tem multiplicidade nove. Com efeito, as raizes múltiplas são sempre mal-condicionadas e quanto maior for a multiplicidade de uma raiz mais mal condicionada ela é.