

Derivadas

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **derivável em** $x_0 \in X \cap X'$ se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d.$$

Ao valor real d chama-se **derivada de f em x_0** e escreve-se $f'(x_0) = d$ ou $Df(x_0) = d$.

Nota

Observe-se que, considerando h tal que $x_0 + h \in \text{Dom } f$, e fazendo a mudança de variável $x = x_0 + h$, obtemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em $c \in X \cap X'$, a reta de equação $y - f(c) = f'(c)(x - c)$ designa-se por **reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$** .

Definição

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em $c \in X \cap X'$, chama-se **reta normal ao gráfico de f em $(c, f(c))$** à reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f nesse ponto.

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **derivável** se f for derivável em todos os pontos de X .

A função $f' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se a **função derivada de f** .

$$x \longmapsto f'(x)$$

Teorema

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in X \cap X'$. Se f é derivável em x_0 então f é contínua em x_0 .

Corolário

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então f é contínua.

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se

- **derivável à direita em $x_0 \in X \cap X'_+$** se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$.

Ao valor real d chama-se **derivada à direita de f em x_0** e escreve-se $f'(x_0^+) = d$;

- **derivável à esquerda em $x_0 \in X \cap X'_-$** se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$.

Ao valor real d chama-se **derivada à esquerda de f em x_0** e escreve-se $f'(x_0^-) = d$.

Proposição

Sejam $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Então

$$f \text{ derivável em } x_0 \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{existem } f'(x_0^+) \text{ e } f'(x_0^-) \\ \text{e} \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-). \end{array} \right.$$

Regras de derivação

Proposição

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in X \cap X'$. Então:

- $f + g$ é derivável em x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λf é derivável em x_0 e $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$;
- fg é derivável em x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- se $g(x_0) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Teorema

Sejam X, Y subconjuntos de \mathbb{R} , $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funções, $c \in X \cap X'$, $f(c) \in Y'$. Suponhamos que f é derivável em c e que g é derivável em $f(c)$. Então $g \circ f$ é derivável em c e

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Teorema

Sejam X e Y subconjuntos não vazios de \mathbb{R} , $f : X \rightarrow Y$ uma função bijetiva e suponhamos que:

- f é derivável em $c \in X \cap X'$;
- $f'(c) \neq 0$;
- f^{-1} é contínua em $f(c)$.

Então f^{-1} é derivável em $f(c)$. Além disso, $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$.

Derivadas das funções exponenciais e logaritmos

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

Para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\log'_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

Derivadas das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$$

$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x$$

Derivadas das funções trigonométricas inversas e das funções hiperbólicas inversas

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctg' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argsech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arccotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcosec}' x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argcosech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

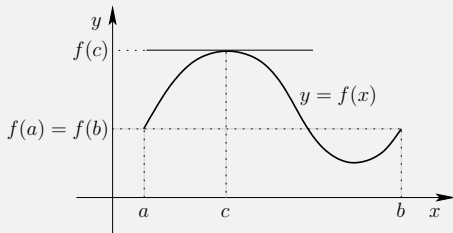
Alguns teoremas envolvendo derivadas

Teorema

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $c \in X \cap X'_- \cap X'_+$. Se c é um ponto de extremo de f então $f'(c) = 0$.

Teorema (de Rolle)

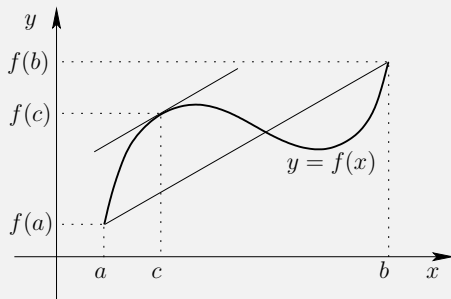
Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.



Teorema (de Lagrange)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$. Então

$$\exists c \in]a, b[\quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Corolário

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$. Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é constante.

Corolário

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente crescente.
- Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente decrescente.

Teorema (de Cauchy)

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, deriváveis em $]a, b[$. Então

$$\exists c \in]a, b[\quad [f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c).$$

Teorema (de Darboux)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então

$f'([a, b])$ contém o intervalo fechado de extremos $f'(a)$ e $f'(b)$.

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f'(a)f'(b) < 0$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário

Sejam I um intervalo de \mathbb{R} e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então $f'(I)$ é um intervalo.

Teorema (Regra de l'Hôpital)

Sejam a, b números reais, $a < b$, $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis. Seja $c \in \{a, b\}$ e suponhamos que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ e que existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Então existe $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Nota

A Regra de l'Hôpital é também válida:

- quando se calcula o limite quando $x \rightarrow +\infty$ ou quando $x \rightarrow -\infty$;
- considerando, no teorema anterior,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$$

e tomando $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Derivadas de ordem superior

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $c \in X' \cap X$. Diz-se que f é **duas vezes derivável em c** , ou que f tem **derivada de 2ª ordem em c** ou que f tem **segunda derivada em c** se

$$\exists \delta > 0 \text{ } g = f'_{|_{X \cap]c-\delta, c+\delta[}} \text{ é derivável em } c.$$

Representa-se a segunda derivada de f em c por $f''(c)$ ou $f^{(2)}(c)$.

Diz-se que f **tem derivada de 2ª ordem** se f é duas vezes derivável em qualquer ponto do seu domínio (note-se que, em particular, temos que $X \subseteq X'$).

À função $f'' : X \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se **função segunda derivada de f** .

$$x \longmapsto f''(x)$$

Nota

Indutivamente define-se derivada de ordem n de f em c e a função derivada de ordem n de f .

Denota-se a derivada de f de ordem n por $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

Convenciona-se que $f^{(0)} = f$.

Teorema

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite segunda derivada em $c \in X \cap X'$. Suponhamos que $f'(c) = 0$. Então, se $f''(c) > 0$, c é um ponto de mínimo local de f e se $f''(c) < 0$, c é um ponto de máximo local de f .