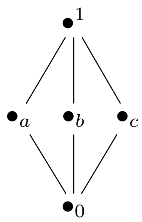
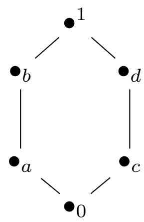
Lic. em Ciências da Computação e Lic. em Matemática 2023/2024
Teste de Álgebra Universal e Categorias
22 Maio 2024

Este teste é constituído por 3 grupos. O grupo I é para responder no enunciado. Os grupos II e III devem ser respondidos na folha de teste providenciada. Duração: 100 minutos.

Em todo este teste: M_3 denota o conjunto $\{0, a, b, c, 1\}$ e O_6 denota o conjunto $\{0, a, b, c, d, 1\}$; e $\mathcal{M}_3 = (M_3; \wedge, \vee)$ e $\mathcal{O}_6 = (O_6; \wedge', \vee')$ são os reticulados dados respectivamente pelos dois diagramas seguintes.





I

1. Diga se cada uma das seguintes 6 afirmação é verdadeira ou falsa. Cada resposta correcta vale 1 valor, cada resposta errada vale -0.25 valores, a ausência de resposta vale 0 valores.

		V	F
a)	Toda a congruência na álgebra $\mathcal{O}_6$ é núcleo de um homomorfismo com domínio igual a $\mathcal{O}_6$.	☐	☐
b)	A álgebra $\mathcal{O}_6 \times \mathcal{O}_6$ é directamente indecomponível.	☐	☐
c)	Se (θ, θ') é um par de congruências-factor de $\mathcal{M}_3$, então $\theta = \Delta_{M_3}$ ou $\theta' = \Delta_{M_3}$.	☐	☐
d)	Toda a álgebra directamente indecomponível é subdirectamente irredutível.	☐	☐
e)	Existe um homomorfismo $\alpha : \mathcal{O}_6 \to \mathcal{M}_3$ tal que $ker(\alpha) = \Delta_{O_6}$.	☐	☐
f)	Seja $\mathcal{N}$ o monóide $(\mathbb{N}_0, \times, 1)$, onde $\times$ denota a multiplicação de números naturais. Em $\mathcal{N}$, visto como uma categoria, 0 é um monomorfismo.	☐	☐

II

Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira (2 valores cada).

2. Seja $\theta = \Theta(a, d) \in Con(\mathcal{O}_6)$. A álgebra $\mathcal{O}_6/\theta$ é trivial.

3. Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ o reticulado dado pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & 1 & \\
a \arrow[ur, dash] & & b \arrow[ul, dash] \\
 & 0 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

   Sejam θ e θ' relações de equivalência em R dadas pelas partições $\{\{a, 0\}, \{b, 1\}\}$ e $\{\{b, 0\}, \{a, 1\}\}$, respectivamente. As relações θ e θ' formam um par de congruências-factor de $\mathcal{R}$.

4. Existe mergulho subdirecto de $\mathcal{O}_6$ em $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$, onde $\mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$ são as cadeias com 2 e 3 elementos, respectivamente.

5. Seja $\mathcal{C}$ a categoria definida pelos diagramas seguinte:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\
 & C \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

   Todos os morfismos de $\mathcal{C}$ são epimorfismos.

III

Demonstre as seguintes afirmações (2 valores cada).

6. Sejam $\mathcal{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado e θ uma congruência em $\mathcal{R}$. Para cada $x \in R$, a classe de equivalência $[x]_\theta$ é um sub-álgebra de $\mathcal{R}$.

7. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. $\Delta_\mathcal{A}$ é produto sub-directo de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

8. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos em $\mathcal{C}$. Se $g \circ f$ é invertível à esquerda, então f é invertível à esquerda.