Tópicos Fundamentais de Matemática

(Licenciatura em Ciências da Computação)

4. Funções

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

2025/2026

4.1 Conceitos básicos

definição:

Sejam A e B conjuntos. Uma **função** (ou **aplicação**) de A em B é uma correspondência de A para B que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

Em geral, representamos as funções por letras minúsculas f, g, h,...

Escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B.

Para cada objeto $a \in A$, o único elemento b de B que f faz corresponder ao elemento a chama-se **imagem de** a **por** f e representa-se por $f(a)$.

Sinteticamente, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f: \quad & A \to B \\ & a \mapsto f(a) \end{aligned}$$

Dada uma função $f : A \to B$, designamos por

1) **domínio** ou **conjunto de partida** de f o conjunto A;

2) **codomínio** ou **conjunto de chegada** de f o conjunto B;

3) **imagem** ou **contradomínio** de f o conjunto $\mathrm{Im}(f)$ das imagens por f de todos os elementos de A, ou seja,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}.$$

O conjunto de todas as funções de A para B representa-se por B^A.

Dado um conjunto A, chama-se **aplicação vazia** em A à única aplicação de $\emptyset$ em A, que notaremos por $\emptyset_A$. Como $\emptyset_A$ é a única aplicação de $\emptyset$ em A, tem-se $A^\emptyset = \{\emptyset_A\}$.

Se A é não vazio, não existem funções de A em $\emptyset$, pelo que $\emptyset^A = \emptyset$.

exemplo:

1) A correspondência de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ que a cada elemento x de $\mathbb{Z}$ faz corresponder o elemento $y = x^2$ é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$.

2) Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e sejam f, g, h e ℓ as correspondências definidas por

$$\begin{array}{rl} f: & A \to A \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rl} g: & A \to A \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 2 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rl} h: & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 1 \mapsto 2 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{rl} \ell: & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array} \quad .$$

Então, f e g são funções de A em A. Por outro lado, h não é uma função de A em A, uma vez que a 1 faz corresponder duas imagens: 1 e 2. Também ℓ não é uma função de A em A, uma vez que a 2 não faz corresponder qualquer imagem.

3) Sejam A e B conjuntos, com $B \neq \emptyset$. Seja $b \in B$. A correspondência de A em B que a cada elemento de A faz corresponder o elemento b é uma função de A em B.

definição:

Sejam A e B conjuntos.

Uma função $f : A \to B$ diz-se uma **função constante** quando existe $b \in B$ tal que, para todo $a \in A$, $f(a) = b$.

A função de A em A que a cada elemento $a \in A$ faz corresponder a diz-se a **função identidade de** A e representa-se por id_A, ou seja,

$$\begin{array}{rl} \mathrm{id}_A : & A \to A \\ & a \mapsto a \end{array}$$

exemplo:

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. Então,

$$\begin{array}{rl} \mathrm{id}_A : & A \to A \\ & 1 \mapsto 1 \\ & 2 \mapsto 2 \\ & 3 \mapsto 3 \end{array} , \quad \begin{array}{rl} \mathrm{id}_B : & B \to B \\ & 4 \mapsto 4 \\ & 5 \mapsto 5 \end{array} \quad \text{e a correspondência} \quad \begin{array}{rl} f : & A \to B \\ & 1 \mapsto 4 \\ & 2 \mapsto 4 \\ & 3 \mapsto 4 \end{array}$$

é uma função constante.

definição:

Sejam A_1, A_2, B_1, B_2 conjuntos e sejam $f : A_1 \to B_1$, $g : A_2 \to B_2$ funções. Dizemos que as funções f e g são **iguais**, e escrevemos $f = g$, quando

1) $A_1 = A_2$;
2) $B_1 = B_2$;
3) para todo $x \in A_1$, $f(x) = g(x)$.

exemplo:

Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ e $k : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ funções definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Z}, \quad h(x) = k(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Como os domínios de g e de h são distintos, $g \neq h$. De igual modo, $g \neq k$. Como os codomínios de h e de k são distintos, $h \neq k$. Por outro lado, como os domínios e os codomínios de f e g são iguais e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que $f = g$.

4.2 Imagem e imagem inversa de conjuntos

definição:

Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função de A em B, X um subconjunto de A e Y um subconjunto de B. Designamos por

1) **imagem de X por f** o conjunto

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\};$$

2) **imagem inversa** (ou **pré-imagem**) **de Y por f** o conjunto

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Por vezes, a imagem inversa de Y por f é também notada por $f^{\leftarrow}(Y)$.

exemplo:

1) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $f : A \to B$ a função definida por $f(1) = f(2) = 4$ e $f(3) = 5$.

Então:
i) $f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{4, 4\} = \{4\}$;
ii) $f^{-1}(\{4, 5\}) = \{x \in A : f(x) = 4 \vee f(x) = 5\} = \{1, 2, 3\} = A$;
iii) $f^{-1}(\{6\}) = \{x \in A : f(x) = 6\} = \emptyset$.

2) Sejam $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq 0 \\ 3-x & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

$X = \{-4, 0, 1, 2\}$ e $Y = \{-5, 0, 5\}$. Então,

$$f(X) = \{f(-4), f(0), f(1), f(2)\} = \{7, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$$

$$\begin{array}{rl} f^{-1}(Y) = & \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = -5 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 5\} \\ = & \{x \in \mathbb{Z} : (2x+3 = -5 \wedge x \geq 0) \vee (3-x = -5 \wedge x < 0) \vee \\ \vee & (2x+3 = 0 \wedge x \geq 0) \vee (3-x = 0 \wedge x < 0) \vee \\ \vee & (2x+3 = 5 \wedge x \geq 0) \vee (3-x = 5 \wedge x < 0)\} \\ = & \{1, -2\} \end{array}$$

3) Consideremos a função

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

Então,

i) $f(\{-1,0,1\}) = \{0,1\}$; $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$; $f(]-2,3]) = [0,3]$;

ii) $f^{-1}(\{1\}) = \{-1,1\}$; $f^{-1}(\mathbb{R}^-) = \emptyset$; $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

proposição:

Sejam A, B conjuntos, $f : A \to B$ uma função, $A_1, A_2 \subseteq A$ e $B_1, B_2 \subseteq B$. Então,

1) $f(\emptyset) = \emptyset$;

2) $f(A) \subseteq B$;

3) se $A_1 \subseteq A_2$, então $f(A_1) \subseteq f(A_2)$;

4) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

5) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;

6) $f^{-1}(B) = A$;

7) Se $B_1 \subseteq B_2$, então $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$;

8) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

9) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

demonstração

Iremos demonstrar as propriedades 1, 3, 4, 7 e 8. As restantes são deixadas como exercício.

1) Por definição, $f(\emptyset) = \{f(x) : x \in \emptyset\}$. Ora, $\emptyset$ não tem elementos, pelo que $x \in \emptyset$ é uma *condição impossível* — uma proposição falsa para qualquer objeto x. Portanto, $f(\emptyset) = \emptyset$.

3) Suponhamos que $A_1 \subseteq A_2$. Então,

$$\forall_x \ (x \in A_1 \to x \in A_2).$$

Pretendemos mostrar que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$, ou seja, $\forall_y \ (y \in f(A_1) \to y \in f(A_2))$.

Seja $y \in f(A_1)$. Então, existe $x \in A_1$ tal que $y = f(x)$.

Por hipótese, $x \in A_1 \to x \in A_2$. Logo, $x \in A_2$ e, assim, $y = f(x)$ com $x \in A_2$. Portanto, $y \in f(A_2)$.

Vimos, então, que $y \in f(A_1) \to y \in f(A_2)$, pelo que $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

4) Pretendemos mostrar que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

$(\subseteq)$ Comecemos por mostrar que $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.

Seja $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Então, existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $y = f(x)$.

Ora,

$$x \in A_1 \cup A_2 \leftrightarrow (x \in A_1 \vee x \in A_2).$$

Se $x \in A_1$, então $y = f(x) \in f(A_1)$. Se $x \in A_2$, então $y = f(x) \in f(A_2)$. Logo, $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$ e, portanto, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

($\supseteq$) Mostremos, agora, que $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$.

Seja $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Então, $y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2)$. Se $y \in f(A_1)$, então existe $x \in A_1$ tal que $y = f(x)$. Se $y \in f(A_2)$, então existe $x \in A_2$ tal que $y = f(x)$. Em ambos os casos, $x \in A_1 \cup A_2$, pelo que $y = f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$.

Logo, $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$ e $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$, pelo que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

7) Suponhamos que $B_1 \subseteq B_2$, ou seja,

$$\forall_y \ (y \in B_1 \rightarrow y \in B_2).$$

Queremos mostrar que $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. Dado $x \in f^{-1}(B_1)$, sabemos que $x \in A$ e $f(x) \in B_1$, por definição de imagem inversa. Ora, $B_1 \subseteq B_2$, pelo que $f(x) \in B_2$. Assim, $x \in f^{-1}(B_2)$.

8) Verifiquemos, agora, que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Dado um objeto x:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \quad & \Leftrightarrow x \in A \wedge f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ & \Leftrightarrow x \in A \wedge (f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \wedge f(x) \in B_1) \vee (x \in A \wedge f(x) \in B_2) \\ & \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)) \\ & \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \ . \end{aligned}$$

Logo, $\forall_x \ (x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2))$, donde segue a igualdade pretendida.

4.3 Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

definição:

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **injetiva** quando quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas por f, ou seja:

$$\forall_{x,y \in A} \, (x \neq y \to f(x) \neq f(y)) \; .$$

Equivalentemente, f é injetiva quando:

$$\forall_{x,y \in A} \, (f(x) = f(y) \to x = y) \; .$$

Ainda equivalentemente, f é injetiva quando:

$$\neg \exists_{x,y \in A} \, (x \neq y \wedge f(x) = f(y)) \; .$$

exemplo:

1) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$ e seja $f : A \to B$ a função definida por $f(1) = 6$, $f(2) = 7$ e $f(3) = 4$. Então, f é injetiva pois não existem objetos distintos com a mesma imagem.

2) Sejam $C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $D = \{5, 6, 7\}$ e seja $g : C \to D$ a função definida por $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$ e $g(4) = 7$. Então, g não é injetiva pois $3 \neq 4$ e $g(3) = 7 = g(4)$.

3) Seja $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a função definida por $h(n) = 2n + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A função h é injetiva pois, dados $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$h(n) = h(m) \Rightarrow 2n + 1 = 2m + 1 \Rightarrow 2n = 2m \Rightarrow n = m.$$

4) Seja $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $k(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função k não é injetiva pois $-2 \neq 2$ e $k(-2) = 4 = k(2)$.

definição:

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **sobrejetiva** quando todo o elemento de B é imagem de algum elemento de A, ou seja:

$$\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} \; f(x) = y \quad .$$

Equivalentemente, f é sobrejetiva quando o contradomínio de f coincide com o seu conjunto de chegada, ou seja, $f(A) = B$.

exemplo:

Consideremos as funções definidas no exemplo anterior.

1) A função $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6, 7\}$ definida por $f(1) = 6$, $f(2) = 7$ e $f(3) = 4$ não é sobrejetiva pois 5 não é imagem de qualquer elemento de A.

2) A função $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \{5, 6, 7\}$ definida por $g(1) = 5$, $g(2) = 6$, $g(3) = 7$ e $g(4) = 7$ é sobrejetiva pois todo o elemento de $\{5, 6, 7\}$ é imagem de algum elemento de A.

3) A função $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $h(n) = 2n + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, não é sobrejetiva pois, por exemplo, 0 não é imagem por f de nenhum inteiro n, dado que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $2n + 1 \neq 0$.

4) A função $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $k(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, não é sobrejetiva pois o seu contradomínio é $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$, e $\mathbb{R}_0^+$ não coincide com o conjunto de chegada de k (que é $\mathbb{R}$).

definição:

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Diz-se que f é **bijetiva** quando f é injetiva e sobrejetiva, ou equivalentemente,

$$\forall_{y \in B} \exists^1_{x \in A} \ f(x) = y.$$

exemplo:

1) A função $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$ definida por $f(1) = 5$, $f(2) = 4$ e $f(3) = 6$ é bijetiva, uma vez que elementos distintos têm imagens distintas e todo o elemento do conjunto de chegada é imagem de algum objeto do domínio.

2) A função $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $g(n) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ é bijetiva. De facto, dados $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$g(n) = g(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m.$$

Portanto, g é injetiva. Por outro lado, dado $m \in \mathbb{Z}$, $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ e

$$g(n) = g(m - 1) = (m - 1) + 1 = m,$$

pelo que g é sobrejetiva. Como g é injetiva e sobrejetiva, podemos concluir que é bijetiva.

4.4 Função composta

É possível definir novas funções a partir de funções dadas.

proposição:

Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Então, a correspondência de A para C que a cada elemento x de A faz corresponder o elemento $g(f(x))$ de C é uma função de A para C.

demonstração:

Como f é uma função de A para B, dado $x \in A$, existe um único elemento y em B tal que $f(x) = y$. Por sua vez, como g é uma função de B para C e y é um elemento de B, existe um único elemento z de C tal que $g(y) = z$. Assim, para cada elemento x de A, existe um único elemento z de C tal que $g(f(x)) = g(y) = z$. Logo, a correspondência em causa é uma função. $\square$

definição:

Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Designa-se por **função composta de** g **com** f, e representa-se por $g \circ f$, a função de A para C que a cada elemento x de A faz corresponder o elemento $g(f(x))$ de C,ou seja, $g \circ f$ é a função

$$\begin{aligned} g \circ f : \quad & A \to C \\ & x \mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Muitas vezes, a notação $g \circ f$ é lida como g **após** f.

exemplo:

1) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ e $C = \{8, 9\}$ conjuntos e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ as funções definidas por $f(1) = 4$, $f(2) = 6$ e $f(3) = 7$ e $g(4) = g(6) = 8$, $g(5) = g(7) = 9$. Então, a função $g \circ f : A \to C$ define-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) \quad &= g(f(1)) = g(4) = 8 \\ (g \circ f)(2) \quad &= g(f(2)) = g(6) = 8 \\ (g \circ f)(3) \quad &= g(f(3)) = g(7) = 9 \end{aligned}$$

2) Dadas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ e $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 0 \\ -3x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = -x^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{N}_0,$$

podemos considerar as funções $g \circ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $f \circ g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definidas por

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -4x^2, & \text{se } x > 0 \\ -9x^2, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (f \circ g)(x) = 3x^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{N}_0.$$

Como podemos verificar no exemplo anterior, a composição de funções não é, em geral, comutativa. Prova-se, no entanto, ser válida a propriedade associativa para a composição de funções.

proposição:

Sejam A, B, C, D conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$ funções. Então,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

demonstração Por um lado, as funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ têm ambas A como conjunto de partida e D como conjunto de chegada. (Porquê?) Além disso, dado $x \in A$,

$$\begin{aligned} ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))(x). \end{aligned}$$

proposição:

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Então, $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

proposição:

Sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções. Então,

1) Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.

2) Se f e g são sobrejetivas, então $g \circ f$ é sobrejetiva.

3) Se f e g são bijetivas, então $g \circ f$ é bijetiva.

demonstração:

1) Suponhamos que f e g são injetivas. Então, dados $x, y \in A$,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \quad & \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) & \\ & \Rightarrow f(x) = f(y) & (g \text{ é injetiva}) \\ & \Rightarrow x = y & (f \text{ é injetiva}).\end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é injetiva.

2) Suponhamos agora que f e g são sobrejetivas. Seja $z \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetiva, existe $y \in B$ tal que $z = g(y)$. Ora, $y \in B$ e $f : A \to B$ é sobrejetiva. Logo, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Assim, existe $x \in A$ tal que

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

Mostrámos que, para todo o $z \in C$, existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$, ou seja, $g \circ f$ é sobrejetiva.

3) Suponhamos que f e g são bijetivas. Então, f e g são injetivas e, por 1) , $g \circ f$ também o é. Mais, f e g são sobrejetivas e, por 2) , $g \circ f$ também o é. Logo, $g \circ f$ é bijetiva.

4.5 Função inversa

proposição:

Sejam A, B conjuntos e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções.

1) Se $g \circ f = \mathrm{id}_A$, então f é injetiva.

2) Se $f \circ g = \mathrm{id}_B$, então f é sobrejetiva.

teorema:

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Então, f é bijetiva se e só se existe uma única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

definição:

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função bijetiva. À única função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$ chamamos **função inversa de** f, que denotaremos por f^{-1}.

observação:

Habitualmente, diz-se que uma função é **invertível** quando a função admite função inversa. Decorre do que foi dito anteriormente que as funções invertíveis são exatamente as funções bijetivas.

exemplo:

Seja $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ e seja $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ tal que $f(n) = 2n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

A função f é bijetiva.

Por um lado, para cada $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f(m) = f(n) \Rightarrow 2m = 2n \Rightarrow m = n \ ,$$

pelo que f é injetiva.

Por outro lado, para cada $x \in 2\mathbb{N}$, existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $f(y) = x$. De facto, dado $x \in 2\mathbb{N}$, $y = \dfrac{x}{2} \in \mathbb{N}$ e $f(y) = 2(\dfrac{x}{2}) = x$.

Sendo f bijetiva, f é invertível. A função $g : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, $g(n) = \dfrac{n}{2}$ é a função inversa de f, ou seja $g = f^{-1}$, pois:

(i) g é uma função de $2\mathbb{N}$ (o codomínio de f) em $\mathbb{N}$ (o domínio de f);

(ii) $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ $\quad (g \circ f(n) = g(2n) = \dfrac{2n}{2} = n$, para cada $n \in \mathbb{N})$;

(iii) $f \circ g = \mathrm{id}_{2\mathbb{N}}$ $\quad (f \circ g(n) = f(\dfrac{n}{2}) = 2(\dfrac{n}{2}) = n$, para cada $n \in 2\mathbb{N})$.

proposição:

Sejam A, B conjuntos e seja $f : A \to B$ uma função bijetiva. Então,

1) f^{-1} é bijetiva.

2) $(f^{-1})^{-1} = f$.

demonstração:

1) Por definição de função inversa, $f^{-1} : B \to A$, i) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e ii) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Assim, de i) e da proposição anterior concluimos que f^{-1} é sobrejetiva. De ii), usando novamente a proposição anterior, podemos também concluir que f^{-1} é injetiva. Das duas conclusões anteriores segue que f^{-1} é bijetiva.

2) Por definição, $(f^{-1})^{-1}$ é a única função $g : A \to B$ tal que $g \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ e $f^{-1} \circ g = \mathrm{id}_A$. Assim, como f também verifica as condições satisfeitas por g, f tem que ser igual a $(f^{-1})^{-1}$.

proposição:

Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$, $g : B \to C$ funções bijetivas. Então,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \quad .$$

demonstração: Como f e g são bijetivas, segue de uma proposição anterior que $g \circ f$ também é bijetiva, sendo $(g \circ f)^{-1}$ uma função de C em A.

Por outro lado, f^{-1} é uma função de B em A e g^{-1} é uma função de C em B, pelo que $f^{-1} \circ g^{-1}$ é também uma função de C em A.

Além disso, dado $x \in C$ e atendendo às propriedades da função identidade, tem-se:

$$\begin{array}{rcl}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) & = & (f^{-1} \circ g^{-1})(\mathrm{id}_C(x)) \\
& = & ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ \mathrm{id}_C)(x) \\
& = & ((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ ((g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1}))(x) \\
& = & ((f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f) \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
& = & ((f^{-1} \circ \mathrm{id}_B \circ f) \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
& = & ((f^{-1} \circ f) \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
& = & (\mathrm{id}_A \circ (g \circ f)^{-1})(x) \\
& = & (g \circ f)^{-1}(x).
\end{array}$$

Portanto, as funções $f^{-1} \circ g^{-1}$ e $(g \circ f)^{-1}$ são iguais.