Nome PROPOSTA DE RESOLUÇÃO Número ________

GRUPO I. Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Para todo o conjunto A, existe uma relação binária definida em A que é simétrica mas não é transitiva. V☐ F☒
2. Para qualquer relação de equivalência R em $A = \{1, 2, 3, 4\}$, se $3 \in [2]_R \cap [1]_R$, então, $(1, 2) \in R$. V☒ F☐
3. O conjunto $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, 5\}$ é uma partição de $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. V☐ F☒
4. Para quaisquer dois conjuntos não vazios e disjuntos A e B, $\omega_A \cup \omega_B$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$. V☒ F☐
5. A relação binária $\theta = \{(1, 2), (3, 1), (2, 2)\}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é uma relação antissimétrica. V☒ F☐
6. A relação $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$ é uma relação de ordem total em $A = \{1, 2, 3\}$. V☐ F☒
7. Para qualquer c.p.o. $(A, \leq)$ e qualquer subconjunto não vazio X de A, se X admite elemento mínimo, então, $A \backslash X$ admite elemento máximo. V☐ F☒
8. Para quaisquer c.p.o.'s A e B e qualquer função isótona $f : A \to B$, se m é elemento máximo de A então $f(m)$ é elemento máximo de B. V☐ F☒

GRUPO II. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

1. Uma relação binária θ em A que seja simétrica mas não transitiva;

$\theta = \{(1,2), (2,1)\}$ é simétrica pois $\theta^{-1} = \theta$

não é transitiva pois $(1,2), (2,1) \in \theta \wedge (1,1) \notin \theta$

2. Uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em A com 6 elementos;

Não existe. Se $\mathcal{R}$ é de equivalência, $A/\mathcal{R}$ é uma partição de $A = \{1,2,3\}$, ou seja, $A/\mathcal{R} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ ou $A/\mathcal{R} = \{\{1,2\},\{3\}\}$ ou $A/\mathcal{R} = \{\{1,3\},\{2\}\}$ ou $A/\mathcal{R} = \{\{1\},\{2,3\}\}$ ou $A/\mathcal{R} = \{\{1,2,3\}\}$. No 1º caso, $\mathcal{R}$ tem 3 elementos, nos 2º, 3º e 4º caso, $\mathcal{R}$ tem 5 elementos e, no último caso, $\mathcal{R}$ tem 9 elementos.

3. Uma relação de ordem parcial $\leq$ em A tal que $\leq = \leq_d$;

$$\leq = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} \longrightarrow$$ é uma relação de ordem parcial

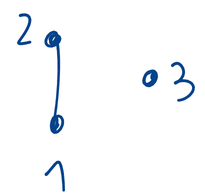
$$\leq_d = \{(1,1),(2,2),(3,3)\} = \leq$$

↳ ordem dual

4. Uma relação de ordem parcial $\leq$ em A tal que no c.p.o. A não existe $\inf \varnothing$ nem $\sup \varnothing$.

$\inf \emptyset = \max A$

$\sup \emptyset = \min A$



← neste c.p.o. não existe $\max A$ e $\min A$

GRUPO III. Sejam A um conjunto e θ a relação binária definida em $A \times \mathcal{P}(A)$ por

$$(a, X)\ \theta\ (b, Y) \Leftrightarrow X \cup \{a\} = Y \cup \{b\} \qquad (a, b \in A,\ X, Y \subseteq A).$$

1. Mostre que θ é uma relação de equivalência em $A \times \mathcal{P}(A)$.

1. θ é reflexiva pois $\forall (a,X) \in A\times\mathcal{P}(A)$, $X\cup\{a\} = X \cup\{a\}$

Logo, $\forall (a,X)\in A\times\mathcal{P}(A)$, $(a,X)\,\theta\,(a,X)$

2. θ é simétrica: para $(a,X),(b,Y) \in A\times\mathcal{P}(A)$,

$$(a,X)\,\theta\,(b,Y) \Leftrightarrow X\cup\{a\} = Y\cup\{b\}$$
$$\Leftrightarrow Y\cup\{b\} = X\cup\{a\} \Leftrightarrow (b,Y)\,\theta\,(a,X)$$

3. θ é transitiva: para $(a,X),(b,Y),(c,Z) \in A\times\mathcal{P}(A)$,

$$(a,X)\,\theta\,(b,Y) \wedge (b,Y)\,\theta\,(c,Z) \Leftrightarrow X\cup\{a\} = Y\cup\{b\} \text{ e } Y\cup\{b\} = Z\cup\{c\}$$
$$\Rightarrow X\cup\{a\} = Z\cup\{c\} \Leftrightarrow (a,X)\,\theta\,(c,Z)$$

Por 1., 2. e 3., θ é uma relação de equivalência

2. Dado $a \in A$, determine as classes $[(a,\emptyset)]_\theta$ e $[(a,A)]_\theta$.

- $(b,Y)\,\theta\,(a,\emptyset) \Leftrightarrow Y \cup \{b\} = \emptyset \cup \{a\} \Leftrightarrow Y \cup \{b\} = \{a\}$

  $\Leftrightarrow b = a \wedge (Y = \emptyset \vee Y = \{a\})$

Logo, $[(a,\emptyset)]_\theta = \{(b,Y) \in A \times \mathcal{P}(A) : (b,Y)\,\theta\,(a,\emptyset)\}$

$= \{(a,\emptyset), (a,\{a\})\}$

- $(b,Y)\,\theta\,(a,A) \Leftrightarrow Y \cup \{b\} = A \cup \{a\} \Leftrightarrow Y \cup \{b\} = A$

  $\Rightarrow (Y = A \vee Y = A \setminus \{b\}) \wedge b$ qq

Logo, $[(a,A)]_\theta = \{(b,Y) \in A \times \mathcal{P}(A) : (b,Y)\,\theta\,(a,A)\}$

$= \{(b,A) : b \in A\} \cup \{(b, A\setminus\{b\}) : b \in A\}$

3. Determine em que condições se tem $[(a,\emptyset)]_\theta \cap [(a,A)]_\theta \neq \emptyset$.

$[(a,\emptyset)]_\theta \cap [(a,A)_\theta] \neq \emptyset \Leftrightarrow (a,\emptyset)\,\theta\,(a,A)$

$\Leftrightarrow \emptyset \cup \{a\} = A \cup \{a\} \Leftrightarrow A = \emptyset \vee A = \{a\}$

↳ não interessa pois neste caso, a não existe

$\Leftrightarrow A = \{a\}$

4. Para $A = \{1,2\}$, indique o conjunto quociente definido por θ.

$A = \{1,2\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$

$A \times \mathcal{P}(A) = \{(1,\emptyset), (2,\emptyset), (1,\{1\}), (2,\{1\}), (1,\{2\}), (2,\{2\}),$
$(1,A), (2,A)\}$

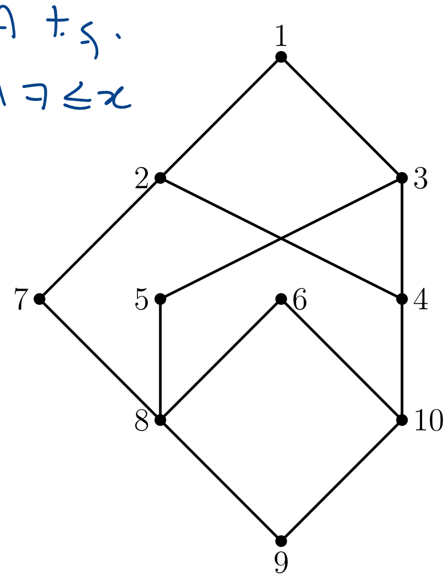
- $[(1,\emptyset)]_\theta \underset{\text{por 2.}}{=} \{(1,\emptyset), (1,\{1\})\} = [(1,\{1\})]_\theta$
- $[(2,\emptyset)]_\theta = \{(2,\emptyset), (2,\{2\})\} = [(2,\{2\})]_\theta$
- $[(1,\{2\})]_\theta \underset{\text{por 2.}}{=} \{(1,\{2\}), (2,\{1\}), (1,A), (2,A)\}$

  $= [(2,\{1\})]_\theta = [(1,A)]_\theta = [(2,A)]_\theta$

Logo,

$A \times \mathcal{P}(A)/\theta = \{[(1,\emptyset)]_\theta, [(2,\emptyset)]_\theta, [(1,\{2\})]_\theta\}$

GRUPO IV. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse apresentado. Indique, caso exista:



1. Maj $\{2, 4, 5, 7\}$;

   $\{1\}$

   1 é o único elemento $x \in A$ t.q. $2 \leq x \wedge 4 \leq x \wedge 5 \leq x \wedge 7 \leq x$

2. inf$\{2, 6\}$: não existe

   $\text{Min}\{2,6\} = \{8, 10, 9\}$ → não tem máximo

3. $\inf \emptyset$ e $\sup \emptyset$;

   $\inf \emptyset = \max A$ → não existe

   $\sup \emptyset = \min A = 9$

4. Um subconjunto X de A que não admita supremo;

   $X = \{2, 6\}$

   6 é maximal e $2 \not\leq 6$

   Logo, $\{2,6\}$ não tem majorantes

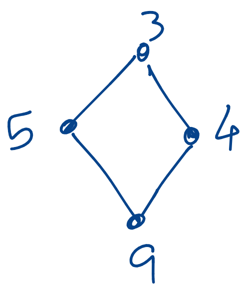
5. Um subconjunto X de A com 3 elementos maximais e 3 elementos minimais;

   $X = \{7, 5, 6\}$

6. um elemento x de A tal que $\{3, 5, 9, x\}$ seja um reticulado para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. A.

   $x = 4$

   é um reticulado

[Cotação:] **GRUPO I.** $8 \times 1.0 = 8.0$ **GRUPO II.** $4 \times 1.0 = 4.0$ **GRUPO III.** $1.5 + 1.0 + 1.0 + 1.5 = 5.0$ **GRUPO IV.** $6 \times 0.5 = 3.0$.