Universidade do Minho **Cursos: CC & MAT**
DMA **Probabilidades e Aplicações** **2017/2018**
Exame de Recurso - 15/Janeiro/2018

Nome: **Nº**

Responda às questões 1 *e* 2 *na folha de teste e responda à questão* 3 *neste enunciado.*
Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do R *que utilizar.*
O exame tem a duração de 2h30m.

---

1. Considere um dado viciado em que o acontecimento "sair uma face par" é duas vezes mais provável do que o acontecimento "sair uma face ímpar".

   (a) Considere a experiência aleatória que consiste em lançar este dado cinco vezes consecutivas e seja Z a variável aleatória real que representa o número de faces par obtidas.

      i. Determine a função de probabilidade e a transformada de Laplace de Z.

      ii. Sabendo que saiu pelo menos uma face par nos cinco lançamentos, qual a probabilidade de ter saído face ímpar no primeiro lançamento? Justifique.

      iii. Diga, justificando, se os acontecimentos "saíram pelo menos quatro faces par" e "não saiu qualquer face ímpar" são independentes.

      iv. Considere agora W a v.a.r. que representa o número de ases (i.e., faces 1) obtidos nesta experiência. Z e W são independentes? Justifique.

   (b) Considere agora um jogo em que, após um lançamento deste dado, o jogador ganha 10 euros se sair uma face ímpar e perde 5 euros se sair uma face par. Calcule a probabilidade de, ao fim de 100 jogadas, o ganho total do jogador ser superior a 60 Euros. Justifique.

   (c) Suponha agora que este dado é colocado numa caixa juntamente com **outros 3 dados equilibrados** e que não é possível distinguir, a olho, os 4 dados. De seguida escolheu-se, ao acaso, um destes dados da caixa, efectuou-se 10 lançamentos com o dado escolhido e observou-se que tinham saído 6 faces par. Qual a probabilidade de o dado escolhido não ter sido o viciado? Justifique.

2. Seja Y uma variável aleatória real absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} & se \quad 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ k & se \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases} ,$$

   em que k é uma constante real.

   (a) Mostre que $k = \frac{1}{2}$ e determine a função de distribuição de Y.

   (b) Identifique os quartis de Y.

   (c) Mostre, usando a definição, que $E[Y]$ existe e calcule-a.

   (d) Seja X uma v.a.r. tal que X e Y são i.i.d.'s.

      i. Calcule $P\left(X > \frac{3}{4} \cup Y \leq \frac{3}{4}\right)$.

      ii. Determine a função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y).

      iii. Calcule $P\left(Y > X, X > \frac{1}{2}\right)$.

(v.s.f.f.)

3. Sejam Ω um conjunto e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de Ω.

   (a) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se $\mathcal{F}$ é uma π- sistema então $\mathcal{F}$ é uma álgebra sobre Ω.

   (b) Considere agora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma v.a.r..

      i. Mostre que se A e B são acontecimentos independentes então $\overline{A}$ e $\overline{B}$ também são independentes.

      ii. Mostre que se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $\mathcal{F}$ tal que $A_{n+1} \subseteq A_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

      iii. Use a alínea anterior para mostrar que se F é a função de distribuição de X então

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0.$$