
Nome:	Nº	Curso:
-------	----	--------

*Responda à questão 3 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste.
Justifique todas as respostas e indique os cálculos intermédios. O teste tem a duração de 1h50m.*

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar dois lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.
 - (a) Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória.
 - (b) Sabendo que nos 2 lançamentos saiu pelo menos uma face ímpar, qual a probabilidade de ter saído pelo menos uma vez a face 1? Justifique.
 - (c) Diga, justificando, se os seguintes acontecimentos A e B
 A : "saiu pelo menos uma face par"
 B : "a face 1 saiu pelo menos uma vez"
são independentes.
 - (d) Seja Y a v.a.r. que representa o número de vezes que saiu face 1 nesta experiência. Determine a função de distribuição de Y .
 - (e) Considere agora que numa caixa estão 3 dados: dois equilibrados e um outro falso que tem todas as faces iguais a 1. Escolheu-se, ao acaso e com os olhos vendados, um dado desta caixa, efectuaram-se dois lançamentos consecutivos com ele e observou-se que só saíram faces 1. Qual a probabilidade de se ter escolhido o dado falso? Justifique.
2. Uma empresa tem três fornecedores de artigos de matéria prima, F_1 , F_2 e F_3 . Os fornecedores F_1 e F_2 fornecem, cada um, 30% dos artigos e F_3 fornece os restantes 40%. Infelizmente para a empresa, qualquer um destes três fornecedores entregam artigos com defeito. Sabe-se que 20% dos artigos fornecidos por F_1 são defeituosos, que 10% dos artigos fornecidos por F_2 são defeituosos e que 5% dos artigos fornecidos por F_3 são defeituosos. Escolheu-se, ao acaso, um artigo de matéria prima desta empresa.
 - (a) Calcule a probabilidade de o artigo escolhido não ter defeito e ter sido fornecido por F_1 .
 - (b) Mostre que a probabilidade de o artigo escolhido ter defeito é de 0.11.
 - (c) Sabendo que o artigo escolhido tem defeito, qual a probabilidade de ter sido fornecido por F_2 ? Justifique.
 - (d) Sabendo que o artigo escolhido não tem defeito, qual a probabilidade de ter sido fornecido por F_3 ? Justifique.

Observação: Se necessário, use o resultado indicado em (b) na resolução das alíneas seguintes, mesmo que não tenha chegado a esse resultado.

(v.s.f.f.)

3. Sejam Ω e Ψ dois conjuntos, \mathcal{A} e \mathcal{F} σ -álgebras sobre Ω e Ψ , respectivamente, e $f : \Omega \rightarrow \Psi$ uma função.

(a) Mostre que a família de subconjuntos de Ω , denotada por $f^{-1}(\mathcal{F})$ e dada por

$$f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(F), F \in \mathcal{F}\},$$

é uma σ -álgebra sobre Ω .

(b) Considere agora que (Ω, \mathcal{A}, P) é um espaço de probabilidade. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma v.a.r. tal que a sua função de distribuição F satisfaz $F(0) = \frac{1}{2}$.

i. Mostre que $\phi(X)$ é uma v.a.r., sendo $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(a) = \begin{cases} -1 & \text{se } a \leq 0 \\ 1 & \text{se } a > 0 \end{cases}.$$

ii. Determine a função de distribuição da v.a.r. $\phi(X)$.