Proposta de Correção

Pergunta 9

Para uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, seja

$$\mathcal{I} = \int_{-1}^{0}\int_{-2x}^{2} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{0}^{4}\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy\,dx.$$

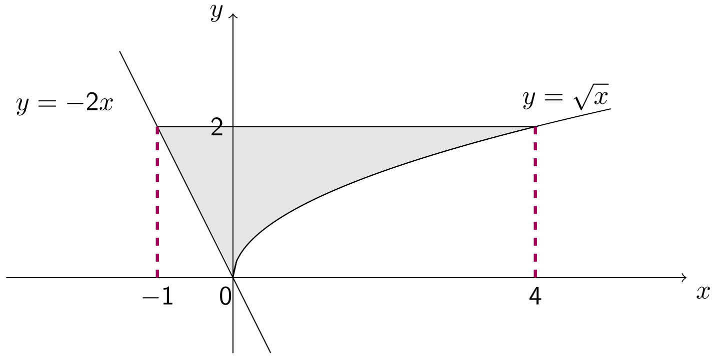
a) Esboce os domínios de integração dos dois integrais num mesmo sistema de eixos coordenados.

b) Invertendo a ordem de integração, escreva $\mathcal{I}$ sob a forma de um único integral.

c) Calcule o valor de $\mathcal{I}$ para $f(x,y) = x + y$.

Resolução.

a)



b) $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^2 \int_{-y/2}^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$

c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^2 \int_{-y/2}^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{-y/2}^{y^2} (x+y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_{x=-y/2}^{y^2} dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{y^4}{2} + y^3 - \left(\frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2}\right)\right] dy = \int_0^2 \left(\frac{y^4}{2} + y^3 + \frac{3y^2}{8}\right) dy \\
&= \left[\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{8}\right]_{y=0}^{2} = \frac{32}{10} + 4 + 1 = \frac{82}{10} = \frac{41}{5}
\end{aligned}$$

Pergunta 10

Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x + x\,\mathrm{e}^y$.

a) Calcule $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} f\,ds$, onde $\mathcal{C}$ é a curva no plano parametrizada por $\mathbf{r}_1(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $t \in [0, \pi/2]$, e $\mathbf{r}_2(t) = (1, 2t)$, $t \in [0,1]$.

b) Que interpretação geométrica pode ser atribuída ao integral da alínea anterior?

Resolução.

a)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} f\,ds &= \int_0^{\pi/2} f\big(\mathbf{r}_1(t)\big)\|\mathbf{r}_1'(t)\|\,dt + \int_0^1 f\big(\mathbf{r}_2(t)\big)\|\mathbf{r}_2'(t)\|\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} t, \cos t)\|(\operatorname{sen} t, \cos t)'\|\,dt + \int_0^1 f(1,2t)\|(1,2t)'\|\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} t, \cos t)\|(\cos t, -\operatorname{sen} t)\|\,dt + \int_0^1 f(1,2t)\|(0,2)\|\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \big(3\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{\cos t}\big)\sqrt{\cos^2 t + (-\operatorname{sen} t)^2}\,dt + \int_0^1 \big(3+\mathrm{e}^{2t}\big)\sqrt{4}\,dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \big(3\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{\cos t}\big)\cdot 1\,dt + \int_0^1 \big(6+2\,\mathrm{e}^{2t}\big)\,dt \\
&= \big[-3\cos t - \mathrm{e}^{\cos t}\big]_0^{\pi/2} + \big[6t + \mathrm{e}^{2t}\big]_0^1 \\
&= -3\cos\frac{\pi}{2} - \mathrm{e}^{\cos\frac{\pi}{2}} - \big(-3\cos 0 - \mathrm{e}^{\cos 0}\big) + 6 + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^0 \\
&= -\mathrm{e}^0 + 3 + \mathrm{e}^1 + 6 + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e} + 7.
\end{aligned}$$

b) Se $f(x(t),y(t)) \geq 0$, para $(x(t),y(t)) \in \mathcal{C}$, então o valor do integral calculado na alínea anterior pode ser interpretado geometricamente como sendo a área da fita (um dos lados) cuja base é a curva $\mathcal{C}$ e cuja altura é dada por $f(x(t),y(t))$.

De facto, $f\big(\mathbf{r}_1(t)\big) = f(\operatorname{sen} t, \cos t) = 3\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\,\mathrm{e}^{\cos t} \geq 0$, para $t \in [0,\pi/2]$, pois $\operatorname{sen} t \geq 0$ e $\mathrm{e}^{\cos t} > 0$. Também se tem $f\big(\mathbf{r}_2(t)\big) = f(1,2t) = 3 + 3\,\mathrm{e}^{2t} \geq 0$, para $t \in [0,1]$. Ou seja, $f(x(t),y(t)) \geq 0$, para $(x(t),y(t)) \in \mathcal{C}$.