Universidade do Minho **Curso: LCC**
Departamento de Matemática **2024/2025**

Probabilidades e Aplicações

Soluções da Folha Prática 1

---

1. (h) e (j) são falsas. Restantes são verdadeiras.
2. (a) $\{4,5\} \in A$; (b) $6 \in A$; (c) $\{\{2,3\}\} \subseteq A$; (d) $\emptyset \subseteq A$; (e) $A \subseteq A$.
3. —
4. a) $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \Omega\}$, $\#\Omega = 8$; b) $\#\Omega = 2^n$.
5. i) Sim, é igual a 1; ii) Sim, é igual a $\frac{7}{4}$; iii) Não existe; iv) Sim, é igual a 1;
   v) Sim, é igual a 1; vi) Sim, é igual a 1; vii) Sim, é igual a 2; viii) Sim, é igual a $\frac{1}{2}$.
6. —
7. —
8. —
9. —
10. $\sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \{i,s,e\}, \{s,e\}, \{g\}, \{i,g\}, \{s,e,g\}, \{i\}, \Omega\}$

Soluções da Folha Prática 2

---

1. —
2. —
3. Não é.
4. —
5. —
6. (a) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ em que $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \{C_a, C_o\},\ x_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ e P é a medida de probabilidade de Laplace, i.e.,
$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \to & P(A) = \frac{\#A}{2\times 6} \end{array}$$
   (b) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ em que $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{C_a, C_o\},\ i \in \{1,2,3\}\}$ e P é a medida de probabilidade de Laplace, i.e.,
$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \to & P(A) = \frac{\#A}{2^3} \end{array}$$
   (c) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ em que $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1,2,3,4,5,6\},\ i \in \{1,2,3\}\}$ e P é a medida de probabilidade de Laplace, i.e.,
$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \to & P(A) = \frac{\#A}{6^3} \end{array}$$
   $P(\text{“soma 9”}) = \frac{25}{6^3}$; $P(\text{“soma 10”}) = \frac{27}{6^3}$.

(d) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ em que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ e P é a medida de probabilidade dada por

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \to & P(A) = \sum\limits_{i \in A \cap \{1,2,3,4,5,6\}} \frac{2^{i-1}}{63} \end{array}$$

7. $1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-(n-1))}{365^n}$; $n = 23$

Soluções da Folha Prática 3

---

1. (a) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ em que $\Omega = \{C_a, C_o\}^{n-1}$ e P é a medida de probabilidade de Laplace, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \to & P(A) = \frac{\#A}{2^{n-1}} \end{array}$$

(b) `i.` $P(E_i) = \frac{1}{2},\ i \in \{1, \ldots, n\}$, e $P(E_i \cap E_j) = \frac{1}{4},\ i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$
(b) `ii.` $P(\emptyset) = 0$
(b) `iii.` Afirmação é falsa. $E_1, E_2, \ldots, E_n$ é uma família finita de acontecimentos independentes 2 a 2, mas não é uma família de acontecimentos independentes.

2. —

3. (a) $\frac{(n-1)!}{n!}$
(b) $\frac{(n-2)!}{n!}$
(c) $\frac{(n-k)!}{n!}$
(d) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$: "pelo menos uma bola ficou colocada na caixa com o número correspondente";

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n = 0) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}$

4. $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2})^n}$

5. (a) 0.176 (b) 0.398 (c) 0.5 (d) 0.039 (e) Não.

6. (a) 0.855 (b) 0.345 ; (c) Não

7. (a) $\frac{6}{216}$ (b) $\frac{\binom{3}{2}6\times1\times5}{216}$ (c) $\frac{6\times5\times4}{216}$ (d) $\frac{15}{216}$ (e) $\frac{\binom{6}{3}}{216}$

8. a) 0.1; 0.6; 0.3; 0.36; 0.42; 0.54. (b) 0.8125

9. (a) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ em que $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \in \{1,2,3,4,5,6\},\ i \in \{1,2\}\}$ e P é a medida de probabilidade de Laplace, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \to & P(A) = \frac{\#A}{36} \end{array}$$

(b) —
(c) —
(d) $\frac{3}{9}$ (e) $\frac{3}{27}$ (f) $\frac{6}{27}$

10. (a) 0.1
    (b) —; 0.323; 0.928

11. (a) —
    (b) —
    (c) 0.43 (d) 0.07 (e) Não

Soluções da Folha Prática 4

---

1. —

2. (a) —
   (b) $F_{M_1}(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 2 \\ 1/3 & se & 2 \leq c < 3 \\ 1 & se & c \geq 3 \end{cases}$, $F_{M_2}(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 3 \\ 1 & se & c \geq 3 \end{cases}$. M_2 é quase certa.

3. (a) $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ em que $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_i \in \{C_a, C_o\}, i \in \{1, 2\}\}$ e P é a medida de probabilidade de Laplace, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ A & \rightarrow & P(A) = \frac{\#A}{4} \end{array}$$

   (b) i. X e Y não são iguais.
   (b) ii. $F_X(c) = F_Y(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 0 \\ 1/4 & se & 0 \leq c < 1 \\ 3/4 & se & 1 \leq c < 2 \\ 1 & se & c \geq 2 \end{cases}$

4. —

5. (a). $f(a) = \begin{cases} 6/36 & se & a \in \{0, 3\} \\ 10/36 & se & a = 1 \\ 8/36 & se & a = 2 \\ 4/36 & se & a = 4 \\ 2/36 & se & a = 5 \\ 0 & se & c.c. \end{cases}$, $F(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 0 \\ 6/36 & se & 0 \leq c < 1 \\ 16/36 & se & 1 \leq c < 2 \\ 24/36 & se & 2 \leq c < 3 \\ 30/36 & se & 3 \leq c < 4 \\ 34/36 & se & 4 \leq c < 5 \\ 1 & se & c \geq 5 \end{cases}$

   (b) $f(a) = \begin{cases} 1/36 & se & a = 1 \\ 3/36 & se & a = 2 \\ 5/36 & se & a = 3 \\ 7/36 & se & a = 4 \\ 9/36 & se & a = 5 \\ 11/36 & se & a = 6 \\ 0 & se & c.c. \end{cases}$, $F(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 1 \\ 1/36 & se & 1 \leq c < 2 \\ 4/36 & se & 2 \leq c < 3 \\ 9/36 & se & 3 \leq c < 4 \\ 16/36 & se & 4 \leq c < 5 \\ 25/36 & se & 5 \leq c < 6 \\ 1 & se & c \geq 6 \end{cases}$

   (c) $f(a) = \begin{cases} 11/36 & se & a = 1 \\ 9/36 & se & a = 2 \\ 7/36 & se & a = 3 \\ 5/36 & se & a = 4 \\ 3/36 & se & a = 5 \\ 1/36 & se & a = 6 \\ 0 & se & c.c. \end{cases}$, $F(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 1 \\ 11/36 & se & 1 \leq c < 2 \\ 20/36 & se & 2 \leq c < 3 \\ 27/36 & se & 3 \leq c < 4 \\ 32/36 & se & 4 \leq c < 5 \\ 35/36 & se & 5 \leq c < 6 \\ 1 & se & c \geq 6 \end{cases}$

(d) $f(a) = \begin{cases} 1/4 & se & a \in \{0,2\} \\ 1/2 & se & a = 1 \\ 0 & se & c.c. \end{cases}$, $F(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 0 \\ 1/4 & se & 0 \leq c < 1 \\ 3/4 & se & 1 \leq c < 2 \\ 1 & se & c \geq 2 \end{cases}$

(e) Igual à alínea (d)

(f) $f(a) = \begin{cases} 1/36 & se & a \in \{2,12\} \\ 2/36 & se & a \in \{3,11\} \\ 3/36 & se & a \in \{4,10\} \\ 4/36 & se & a \in \{5,9\} \\ 5/36 & se & a \in \{6,8\} \\ 6/36 & se & a = 7 \\ 0 & se & c.c. \end{cases}$, $F(c) = \begin{cases} 0 & se & c < 2 \\ 1/36 & se & 2 \leq c < 3 \\ 3/36 & se & 3 \leq c < 4 \\ 6/36 & se & 4 \leq c < 5 \\ 10/36 & se & 5 \leq c < 6 \\ 15/36 & se & 6 \leq c < 7 \\ 21/36 & se & 7 \leq c < 8 \\ 26/36 & se & 8 \leq c < 9 \\ 30/36 & se & 9 \leq c < 10 \\ 33/36 & se & 10 \leq c < 11 \\ 35/36 & se & 11 \leq c < 12 \\ 1 & se & c \geq 12 \end{cases}$

6. (a) $\frac{42}{63}$

   (b) $\binom{10}{1}\frac{42}{63}(\frac{21}{63})^9$; $\sum_{k=0}^{7}\binom{10}{k}(\frac{42}{63})^k(\frac{21}{63})^{10-k}$; $\sum_{k=3}^{7}\binom{10}{k}(\frac{42}{63})^k(\frac{21}{63})^{10-k}$; $\frac{\sum_{k=1}^{9}\binom{10}{k}(\frac{42}{63})^k(\frac{21}{63})^{10-k}}{\sum_{k=0}^{9}\binom{10}{k}(\frac{42}{63})^k(\frac{21}{63})^{10-k}}$

   No R: `dbinom`(1, 10, 42/63);
   `pbinom`(7, 10, 42/63);
   `pbinom`(7, 10, 42/63) `-pbinom`(2, 10, 42/63);
   (`pbinom`(9, 10, 42/63) `-pbinom`(0, 10, 42/63))/`pbinom`(9, 10, 42/63)

7. (a) $\binom{20}{7}(\frac{1}{2})^{20}$; $\sum_{k=0}^{9}\binom{20}{k}(\frac{1}{2})^{20}$; $\sum_{k=15}^{20}\binom{20}{k}(\frac{1}{2})^{20}$.

   No R: `dbinom`(7, 20, 1/2); `pbinom`(9, 20, 1/2); 1- `pbinom`(14, 20, 1/2).

   (b) $\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}(0.2)^k(0.8)^{10-k}$; $\sum_{k=0}^{5}\binom{10}{k}(0.2)^k(0.8)^{10-k}$.

   No R: 1-`pbinom`(5, 10, 0.2); `pbinom`(5, 10, 0.2).

   (c) $\binom{6}{6}(\frac{8}{13})^6$; $\binom{6}{0}(\frac{5}{13})^6$.

   No R: `dbinom`(6, 6, 8/13); `dbinom`(0, 6, 8/13).

8. $\frac{\binom{8}{6}\binom{5}{0}}{\binom{13}{6}}$; 0

   No R: `dhyper`(6, 8, 5, 6); `dhyper`(0, 8, 5, 6)

9. (a) $\binom{6}{3}(\frac{1}{2})^6$. No R: `dbinom`(3, 6, 1/2).

   (b) $\binom{6}{2}(\frac{1}{10})^2(\frac{9}{10})^4$; $\sum_{k=0}^{2}\binom{6}{k}(\frac{1}{10})^k(\frac{9}{10})^{6-k}$; $\sum_{k=2}^{6}\binom{6}{k}(\frac{1}{10})^k(\frac{9}{10})^{6-k}$.

   No R: `dbinom`(2, 6, 1/10); `pbinom`(2, 6, 1/10); 1-`pbinom`(1, 6, 1/10).

10. $n = 22$

11. (a) $\frac{\binom{25}{7}\binom{24}{0}}{\binom{49}{7}}$. No R: `dhyper`(7, 25, 24, 7).

    (b) $\frac{\binom{9}{3}\binom{40}{4}}{\binom{49}{7}}$. No R: `dhyper`(3, 9, 40, 7).

    (c) $\sum_{k=5}^{7} \frac{\binom{9}{k}\binom{40}{7-k}}{\binom{49}{7}}$. No R: `1-phyper`(4, 9, 40, 7).

12. (a) $a = 0$, $b = \frac{3}{4}$, $d = 1$, $f(a) = \begin{cases} 1/2 & se \quad a = 0 \\ 1/4 & se \quad a \in \{1, 2\} \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$.

    (b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\binom{6}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^3$

13. (a) e^{-3} No R: `dpois`(0,3)

    (b) $\sum_{k=0}^{3} \frac{3^k}{k!}e^{-3}$ No R: `ppois`(3,3)

    (c) $\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}e^{-3}$ No R: `1-ppois`(4,3)

    (d) $\frac{\sum_{k=5}^{10} \frac{3^k}{k!}e^{-3}}{\sum_{k=5}^{+\infty} \frac{3^k}{k!}e^{-3}}$ No R: (`ppois`(10,3) - `ppois`(4,3))/ `1-ppois`(4,3)

    (e) $K = 4$

14. Valor exato/Aproximação:

    i) 0.03782949/0.03783327

    ii) 0.9972315/0.9972306

    iii 0.9329235/0.932914

15. (a) 0.099 (b) 0.014

    (c) $f(k) = \begin{cases} e^{-0.6p}\frac{(0.6p)^k}{k!} & se \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

    (d) $Poisson(\lambda p)$

16. (a) 0.081 (b) 0.19 (c) 0.531 (d) 0.81