Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

Folha de exercícios 6 — 2022'23

1. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

(a) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$; (b) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$;

(c) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$; (d) $f(x,y,z) = y^2 \log x + xe^{xz}$;

(e) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2)$; (f) $f(x,y,z) = xy^2 + zy$;

(g) $f(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}$; (h) $f(x,y,z) = xy^{\frac{3}{2}} + xe^{xy}$.

2. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \operatorname{sen} y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \operatorname{sen} x$.

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

(c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

4. Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

(a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (x\mathrm{e}^{\,y} + \cos y, x, x + \mathrm{e}^{\,y}).$$

de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos onde está definida:

(a) Justifique que f é derivável em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(b) Calcule a matriz Jacobiana de f para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(c) Calcule $Jf(2,0)$ e $f'(2,0)$.

6. Calcule a derivada de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos (x, y) onde está definida:
   (a) $f(x,y) = (x\mathrm{e}^{\,y} + \cos y, x, x + \mathrm{e}^{\,y})$;
   (b) $f(x,y) = (x\sqrt[3]{y}, \mathrm{e}^{x+2y})$;
   (c) $f(x,y) = (\ln(x^2+y^2), \cos(xy))$;
   (d) $f(x,y,z) = (zx^2, -ye^z)$.
7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(x,y) = (3x-2y, -y, \pi x + y).$$
   (a) Calcule $f'(x,y)$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
   (b) Observe e comente o resultado obtido na alínea anterior;
   (c) O mesmo acontece em todas as aplicaçãoes lineares? Justifique.
8. Calcule a derivada de $f \circ g$ em (x,y,z), sendo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções definidas por
$$g(x,y,z) = (xz, yz + x) \qquad \text{e} \qquad f(x,y) = 2x + y^2.$$
9. Use a "regra da cadeia" de várias variáveis para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sendo
   (a) $f(u,v) = 2uv, \quad \text{com} \quad u = u(x,y) = x^2 + y^2 \text{ e } v = v(x,y) = \dfrac{x}{y}$;
   (b) $f(s,t) = 2s^2 - st^2, \quad \text{com} \quad s = s(x,y) = y^2 \text{ e } t = t(x,y) = x\cos y$;
10. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla F(2,3) = (-1,2)$. Determine:
    (a) $f'(2)$, sendo $f(x) = F(x, x+1)$;
    (b) $f'(1)$, sendo $f(x) = F(2x, -x^2+4)$.
11. Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla G(2,3,0) = (-1,2,3)$. Determine:
    (a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,2)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,2)$, sendo $g(x,y) = G\left(yx, x+y, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$;
    (b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,-1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,-1)$, sendo $g(x,y) = G\left(-2ye^x, -3y + y^3x^2, x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$.
12. Considere a seguinte equação
$$xyz^3 + x^2yz^2 - x + 2y + z = 0.$$
    (a) Mostre que a equação apresentada define implicitamente z como função de (x,y) para pontos "próximos" de $(1,1,-1)$.
    (b) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$.
13. Considere a seguinte equação de três variáveis reais
$$xz^2 + xy^2z = yz^2 + 5.$$
    (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x,y) para pontos "próximos" de $(3,1,1)$;
    (b) Determine $z'(3,1)$;
    (c) Para $z(x,y)$, definida na alínea (a), determine $H'(3,1)$, onde $H(x,y) = G(x,y,z(x,y))$ para (x,y) "próximo" de $(3,1)$, com $G(x,y,z) = e^{xy} + xyz$.
14. Considere a seguinte equação de três variáveis reais
$$xe^{yz} + z\log y = 1$$
    (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x,y) para pontos "próximos" de $(1,1,0)$;
    (b) Determine $z'(1,1)$.