

ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Aplicações lineares

Lic. Ciências da Computação

2025/2026

4.1. Diga quais das aplicações seguintes, entre espaços vetoriais reais, são aplicações lineares:

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2x + y, x, y - x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (b) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (y^2, y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (c) $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(a, b) = 5a - 2b$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.
- (d) $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $s(a, b, c) = (1, a + b)$, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

4.2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $g_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$g_k(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - k, 0, 2a_1 + a_3), \forall (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Determine os valores de k para os quais g_k é aplicação linear.

4.3. Diga, justificando, se existe:

- (a) uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $f(7, 0, 14) = (0, 0, 7)$.
- (b) uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $g(-1, 2) = (0, 1, 2, 3)$, $g(2, -1) = (0, -1, -2, -3)$.

4.4. Para cada uma das aplicações lineares a seguir indicadas, determine o seu núcleo, o espaço imagem e uma base de cada um destes espaços vetoriais. Diga, justificando, se cada uma das aplicações lineares é injetiva e se é sobrejetiva.

- (a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (y, x),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

- (b) $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y, z, w) = (x + y, 0, y - z),$$

para qualquer $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

- (c) $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$h(a, b, c, d) = (2a + b, b, d - b),$$

para qualquer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

4.5. Sejam $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ uma base do espaço vetorial real \mathbb{R}^5 , (v'_1, v'_2, v'_3) uma base do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 e $f : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 + x_5v_5) = (x_2 - x_3)v'_1 + (x_3 - x_2)v'_2 + (x_1 + x_4 + x_5)v'_3,$$

$$\forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

- (a) Diga, justificando, se f é sobrejetiva.

- (b) Dê exemplo de um vetor $u \in \mathbb{R}^5$ tal que $u \notin \text{Nuc } f$. Justifique.

- (c) Verifique que $v_1 - v_4 \in \text{Nuc } f$.

- (d) Dê exemplo de um subespaço W de \mathbb{R}^5 tal que

$$W \cap \text{Nuc } f = \langle v_1 - v_4 \rangle \text{ e } \dim(W + \text{Nuc } f) = 4.$$

4.6. Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$g(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0), \quad g(0, 1, 0) = (0, 1, -2, 0), \quad g(0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0).$$

- (a) Determine: i. $g(2, 3, 1)$. ii. $g(-1, 2, 0)$.
- (b) Determine uma base de $\text{Img } g$ e indique a característica de g .
- (c) Diga, justificando, se g é injetiva.

4.7. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer espaços vetoriais reais \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , $n, m \in \mathbb{N}$, e para quaisquer aplicações lineares $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- (a) Se (v_1, \dots, v_n) é uma base de \mathbb{R}^n , então $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ é base de \mathbb{R}^n .
- (b) Se g é sobrejetiva, então $n \geq m$.
- (c) Se $n \geq m$, então g é sobrejetiva.
- (d) Se (v_1, \dots, v_n) é uma base de \mathbb{R}^n e $g(v_i) \neq g(v_j)$ sempre que $i \neq j$ ($i, j \in \{1, \dots, n\}$), então g é injetiva.
- (e) Se g é sobrejetiva, então g é injetiva.
- (f) Se g é injetiva, então g é sobrejetiva.
- (g) f é injetiva se e só f é sobrejetiva.

4.8. Considere as aplicações lineares

$$f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definida por } f(x, y, z, w) = (x - y, x + w, y + z), \forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;$$

$$g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ definida por } g(x, y, z, w) = (x, x + z, -w, 2y + z), \forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4;$$

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definida por } h(1, 1, 1) = (2, 0, 1), h(1, 1, 0) = (1, 0, -1), h(1, 0, 0) = (0, 0, 2);$$

$$t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ definida por } t(x, y, z) = (x - y, 0, 0, x + y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

e as bases

$$B_1 = ((0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)) \text{ e}$$

$$B_2 = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) \text{ de } \mathbb{R}^4;$$

$$B'_1 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \text{ e}$$

$$B'_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

Determine:

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| (a) $M(f; B_1, B'_1)$. | (b) $M(f; B_1, B'_2)$. | (c) $M(g; B_2, B_1)$. | (d) $M(g; B_1, B_2)$. |
| (e) $M(h; B'_1, B'_1)$. | (f) $M(h; B'_2, B'_1)$. | (g) $M(t; B'_2, B_2)$. | (h) $M(t; B'_1, B_1)$. |

4.9. Considere as bases $B = (v_1, v_2)$ de \mathbb{R}^2 e $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ de \mathbb{R}^3 em que $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (1, 1)$ e $v'_1 = (1, 1, 1)$, $v'_2 = (0, 1, 1)$, $v'_3 = (0, 0, 1)$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- | | | | |
|---|------------------|-----------------|-----------------|
| (a) $f(2, 3)$. | (b) $f(-1, 1)$. | (c) $f(0, 0)$. | (d) $f(0, 2)$. |
| (e) $f(a, b)$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. | | | |

- 4.10. Sejam $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 e $B' = (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4)$ uma base do espaço vetorial real \mathbb{R}^4 . Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ as aplicações lineares definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2v'_1 + v'_3 + v'_4, & f(v_2) &= v'_2 + 2v'_3, & f(v_3) &= 2v'_1 - 2v'_2 - 3v'_3 + v'_4; \\ g(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) &= x_1v'_1 - (x_1 + x_3)v'_2 + (x_2 - x_3)v'_3 + x_2v'_4, & \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

$$M(h; B, B') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine:
 i. $M(f; B, B')$. ii. $M(g; B, B')$.
- (b) Determine:
 i. $h(v_3)$. ii. $h(v_1 + 2v_2 - v_3)$.
- (c) Diga, justificando, se h é monomorfismo.

- 4.11. Considere, no espaço vetorial real \mathbb{R}^3 , a base $B = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ e o endomorfismo f definido por $f(1, 0, 1) = (1, -1, 1)$, $f(1, 1, 0) = (2, 1, 1)$, $f(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$.

- (a) Determine $M(f; B, B)$.
 (b) Determine $f(a, b, c)$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
 (c) Mostre que f é um automorfismo de \mathbb{R}^3 e determine f^{-1} .

- 4.12. Considere o espaço vetorial real \mathbb{R}^3 e seja B base canónica de \mathbb{R}^3 .

Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$M(g; B, B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine $g(-1, 1, 4)$ e $g(1, 1, 0)$.
 (b) Mostre que:
 i. $\dim \text{Img } g = 2$.
 ii. $\text{Nuc}(g) = \langle (0, 1, 2) \rangle$.
 (c) Indique um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \neq (1, 1, 0)$ e $g(v) = (0, 0, 1)$. Justifique.

- 4.13. Sejam $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de \mathbb{R}^3 , $B' = (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4)$ uma base de \mathbb{R}^4 e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- (a) $\text{Im } f$. (b) $\text{Nuc } f$.

- 4.14. Considere as aplicações lineares $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (2x + z, x + 2z), & g(x, y, z) &= (x, x - y - z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \\ h(a, b) &= (2a, a - b, a + b), \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Sendo B a base canónica de \mathbb{R}^3 e B' a base canónica de \mathbb{R}^2 , determine:

- (a) $M(f + g; B, B')$. (b) $M(h \circ f; B, B)$. (c) $M((f + g) \circ (3h); B', B')$.

4.15. Considere, em \mathbb{R}^3 , as bases $B = (v_1, v_2, v_3)$ e $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ em que

$$v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 1 - 1), v_3 = (1, 0, 0)$$

e

$$v'_1 = (0, 0, 1), v'_2 = (0, 1, 1), v'_3 = (1, 1, 1).$$

- (a) Determine $M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B')$.
- (b) Escreva $3v_1 + 2v_2 - v_3$ como combinação linear de v'_1, v'_2, v'_3 .

4.16. Sejam $B = ((1, 1), (1, 0))$ uma base de \mathbb{R}^2 , $B' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ uma base de \mathbb{R}^3 e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(g; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine:

- (a) $M(g; B_1, B'_1)$ onde B_1 é a base canónica de \mathbb{R}^2 e B'_1 é a base canónica de \mathbb{R}^3 .
- (b) $M(g; B_2, B')$ onde $B_2 = ((0, 1), (2, 1))$.

4.17. Sejam B e B' bases de \mathbb{R}^3 . Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique que f é um isomorfismo.
- (b) Determine $M(f^{-1}; B', B)$.

4.18. Sejam $B = (u_1, u_2, u_3)$, $B' = (v_1, v_2, v_3)$ bases de \mathbb{R}^3 e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine $f(u_1)$ e $f(2u_2 + 2u_3)$.
- (b) Determine $\dim \text{Nuc } f$. Justifique.
- (c) Determine $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = v_1 + v_3\}$.

$$(d) \text{ Sendo } M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ determine } M(f; B', B).$$