



Nome:

Número:

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional $2,0(37)$ sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação $|x - 2| < |x + 4|$, com $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \left\{ -2 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left([\sqrt{2}, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \right).$$

- (a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto A .
- (b) Determine os seguintes conjuntos: o interior ($\overset{\circ}{A}$), a aderência (\bar{A}) e o derivado (A') do conjunto A .
- (c) Diga, justificando, se o conjunto A é fechado.

Exercício 4. (2 valores) Considere o conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R} : |2 - x^2| < 2\}.$$

- (a) Mostre que $S =]-2, 2[\setminus \{0\}$.
- (b) Apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em S que seja não monótona e convergente para 2.

Exercício 5.

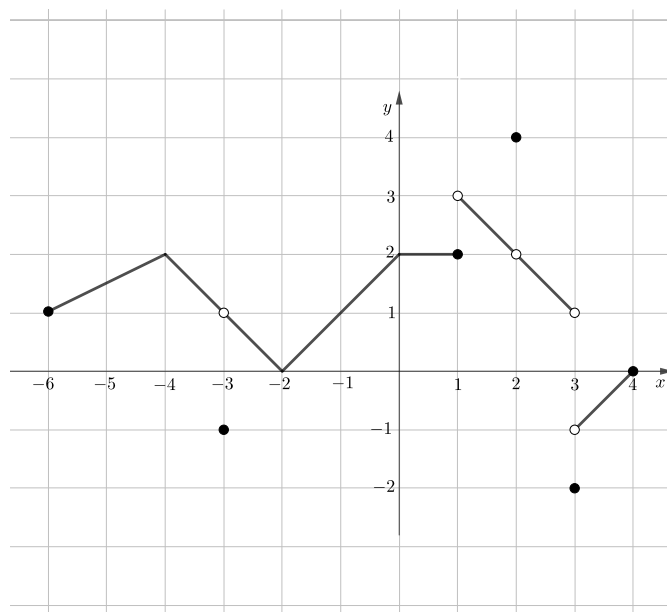
1. (1.5 valores) Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{5^n} + \frac{5^{n-1}}{7^{n+1}} \right)$.

2. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Estude a natureza da série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \sin n}{(n+1)!}$.

II. Verifique se a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{n^5 + 1}$ é absolutamente convergente.

Exercício 6. (3 valores) Considere a função $f : [-6, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.



- (a) Determine $f([-3, 2])$.
- (b) Determine $f^{-1}([0, 2])$.
- (c) Indique os pontos de mínimo local de f , mencionando os respectivos mínimos locais.
- (d) Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{3x^2 + 1}{x^2}\right)$.

- (e) Determine, **justificando**, o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x + 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < 2.$$

Exercício 7. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N} \\ |x-1| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

- (a) Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e determine o seu valor.
- (b) Determine, justificando, o domínio de continuidade da função f .

Exercício 8. (4 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

- (a) A sucessão $(u_n)_n$ de termo geral $u_n = \begin{cases} 3n & \text{se } n \leq 50 \\ \frac{n \sin n}{3n^4 + 1} & \text{se } n > 50 \end{cases}$ é divergente.
- (b) Existe uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(X) = \{-1, 2\}$.
- (c) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Então o conjunto $f(\mathbb{R})$ tem mínimo.
- (d) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g(x) = f(|x|)$, com $x \in \mathbb{R}$, é contínua. Então f é contínua.

FIM