1. Autómatos de Pilha
    - Autómatos de pilha e linguagens independentes de contexto

O objetivo desta secção é estabelecer a correspondência entre autómatos de pilha e linguagens independentes de contexto, respondendo às questões:

O objetivo desta secção é estabelecer a correspondência entre autómatos de pilha e linguagens independentes de contexto, respondendo às questões:

Será possível construir um autómato de pilha que reconheça uma dada linguagem L independente de contexto?

O objetivo desta secção é estabelecer a correspondência entre autómatos de pilha e linguagens independentes de contexto, respondendo às questões:

Será possível construir um autómato de pilha que reconheça uma dada linguagem L independente de contexto?

Será possível construir uma gramática que gere a linguagem aceite por um dado autómato de pilha?

O objetivo desta secção é estabelecer a correspondência entre autómatos de pilha e linguagens independentes de contexto, respondendo às questões:

Será possível construir um autómato de pilha que reconheça uma dada linguagem L independente de contexto?

Será possível construir uma gramática que gere a linguagem aceite por um dado autómato de pilha?

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$.

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

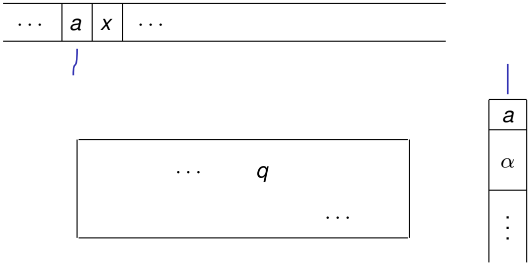
Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

1. comparar o símbolo do topo da pilha com o símbolo da fita de leitura e, se forem iguais, apagar o topo da pilha e avançar na fita de leitura.

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

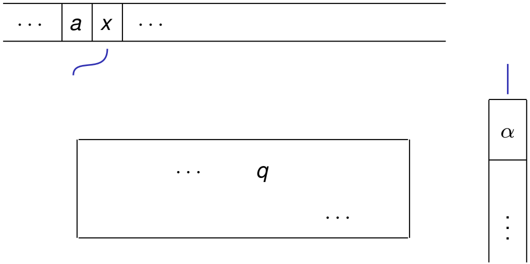
1. comparar o símbolo do topo da pilha com o símbolo da fita de leitura e, se forem iguais, apagar o topo da pilha e avançar na fita de leitura.



Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

1. comparar o símbolo do topo da pilha com o símbolo da fita de leitura e, se forem iguais, apagar o topo da pilha e avançar na fita de leitura.



Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

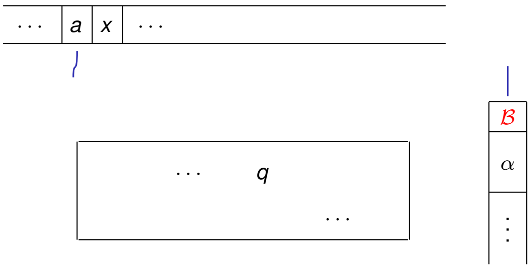
Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

1. comparar o símbolo do topo da pilha com o símbolo da fita de leitura e, se forem iguais, apagar o topo da pilha e avançar na fita de leitura.
2. senão, caso o símbolo do topo da pilha seja $\mathcal{B}$ e exista uma produção do tipo $\mathcal{B} \to \gamma$, substituir $\mathcal{B}$ por γ sem avançar na fita de leitura,

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

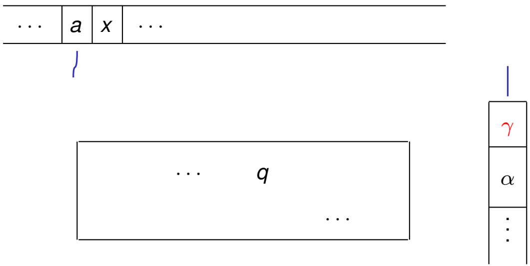
1. comparar o símbolo do topo da pilha com o símbolo da fita de leitura e, se forem iguais, apagar o topo da pilha e avançar na fita de leitura.
2. senão, caso o símbolo do topo da pilha seja $\mathcal{B}$ e exista uma produção do tipo $\mathcal{B} \to \gamma$, substituir $\mathcal{B}$ por γ sem avançar na fita de leitura,



Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC que gera L.

Pretende-se definir um autómato em que as transições correspondam a derivações em $\mathcal{G}$. Para isso, devem existir dois tipos de transições:

1. comparar o símbolo do topo da pilha com o símbolo da fita de leitura e, se forem iguais, apagar o topo da pilha e avançar na fita de leitura.
2. senão, caso o símbolo do topo da pilha seja $\mathcal{B}$ e exista uma produção do tipo $\mathcal{B} \to \gamma$, substituir $\mathcal{B}$ por γ sem avançar na fita de leitura,



EXEMPLO 10

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $\mathcal{S} \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B}$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \end{array}$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{D} \end{aligned}$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S})$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:
$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B})$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:
$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C})$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C})$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C})$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D})$$

EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

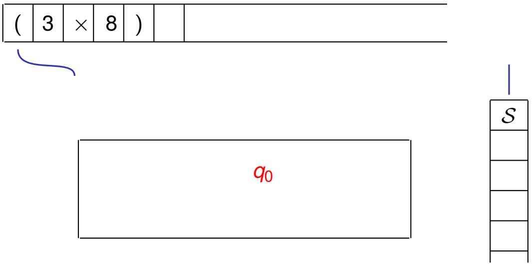
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



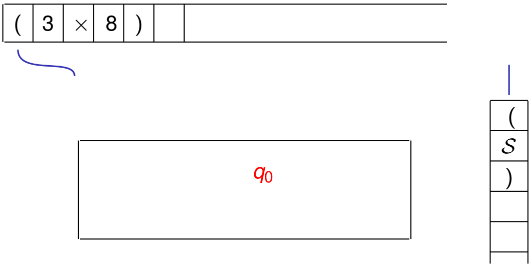
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



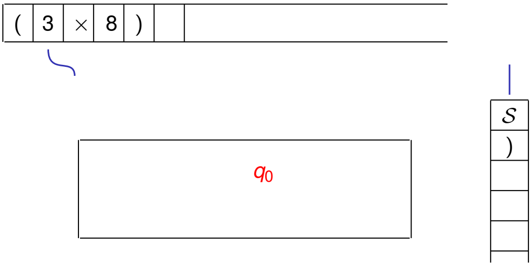
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



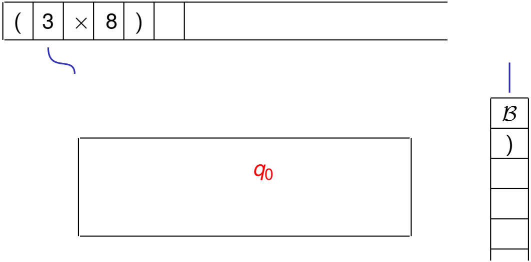
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



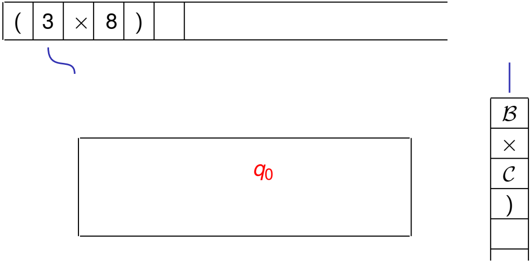
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

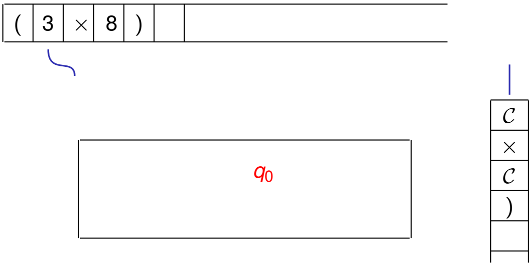


EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

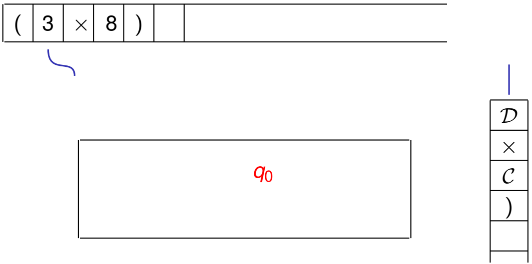


EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:
$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} {\color{red}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C})} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



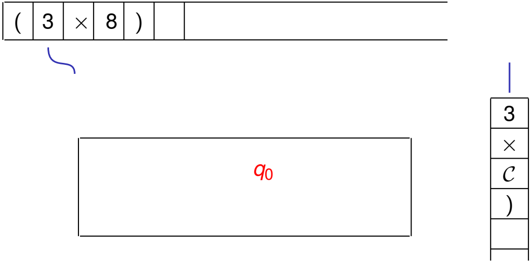
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

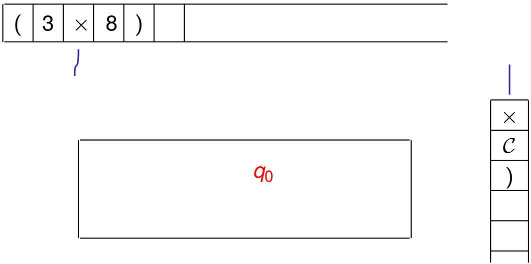


EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



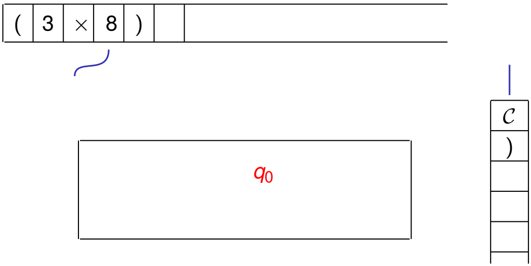
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

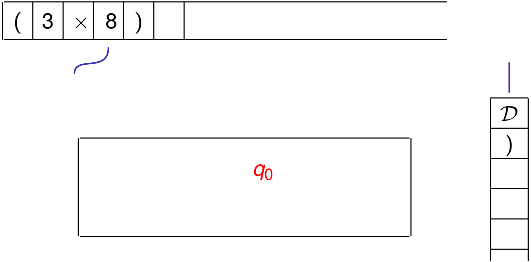


EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P: $$\begin{array}{lcl} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

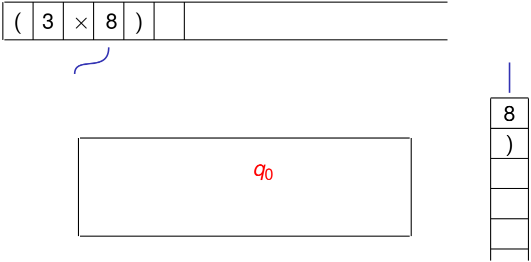


EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:
$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



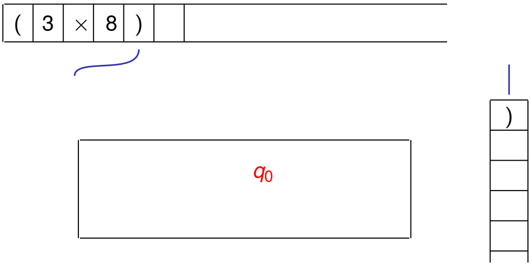
EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

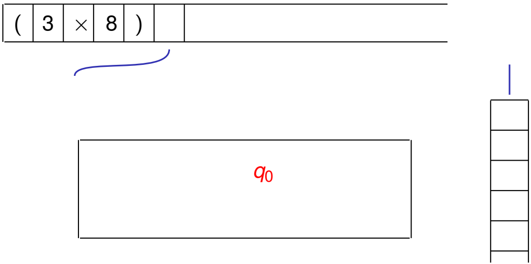


EXEMPLO 10

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$$

- $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$,
- $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$
- P:
$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & \longrightarrow & (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow & 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$



Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \to \gamma \in P\}$$

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \to \gamma \in P\}$$
$$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } a \in A$$

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \to \gamma \in P\} \\
\delta(q_0, a, a) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \ \text{ para qualquer } a \in A \\
\delta(q_0, a, Z) &= \emptyset \ \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}
$$

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{array}{l} \delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \to \gamma \in P\} \\ \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } a \in A \\ \delta(q_0, a, Z) = \emptyset \text{ nos restantes casos} \end{array}$$

Para $\mathcal{B} \in V$ e $w \in A^*$, usando o Princípio de Indução Matemática, prova-se que:

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{array}{l} \delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \to \gamma \in P\} \\ \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } a \in A \\ \delta(q_0, a, Z) = \emptyset \text{ nos restantes casos} \end{array}$$

Para $\mathcal{B} \in V$ e $w \in A^*$, usando o Princípio de Indução Matemática, prova-se que:

(i) para $m \in \mathbb{N}$, se $\mathcal{B} \overset{m}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(q_0, w, \mathcal{B}) \overset{n}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$;

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{array}{l} \delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \to \gamma \in P\} \\ \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } a \in A \\ \delta(q_0, a, Z) = \emptyset \text{ nos restantes casos} \end{array}$$

Para $\mathcal{B} \in V$ e $w \in A^*$, usando o Princípio de Indução Matemática, prova-se que:

(i) para $m \in \mathbb{N}$, se $\mathcal{B} \overset{m}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(q_0, w, \mathcal{B}) \overset{n}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$;

(ii) para $n \in \mathbb{N}$, se $(q_0, w, \mathcal{B}) \overset{n}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B} \overset{m}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$.

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{array}{l} \delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \to \gamma \in P\} \\ \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } a \in A \\ \delta(q_0, a, Z) = \emptyset \text{ nos restantes casos} \end{array}$$

Para $\mathcal{B} \in V$ e $w \in A^*$, usando o Princípio de Indução Matemática, prova-se que:

(i) para $m \in \mathbb{N}$, se $\mathcal{B} \overset{m}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(q_0, w, \mathcal{B}) \overset{n}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$;

(ii) para $n \in \mathbb{N}$, se $(q_0, w, \mathcal{B}) \overset{n}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B} \overset{m}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$.

Em particular, $\mathcal{S} \overset{+}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$ se e só se $(q_0, w, \mathcal{S}) \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$,

Proposição

Seja $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma GIC. Então existe um autómato de pilha $\mathcal{M}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ tal que:

- $Q = \{q_0\}$;
- $\Sigma = V \cup A$;
- $Z_0 = \mathcal{S}$;
- $\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{array}{l} \delta(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \gamma) \mid \mathcal{B} \rightarrow \gamma \in P\} \\ \delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } a \in A \\ \delta(q_0, a, Z) = \emptyset \text{ nos restantes casos} \end{array}$$

Para $\mathcal{B} \in V$ e $w \in A^*$, usando o Princípio de Indução Matemática, prova-se que:

(i) para $m \in \mathbb{N}$, se $\mathcal{B} \overset{m}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(q_0, w, \mathcal{B}) \overset{n}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$;

(ii) para $n \in \mathbb{N}$, se $(q_0, w, \mathcal{B}) \overset{n}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{B} \overset{m}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$.

Em particular, $\mathcal{S} \overset{+}{\underset{\mathcal{G}}{\Rightarrow}} w$ se e só se $(q_0, w, \mathcal{S}) \overset{+}{\underset{\mathcal{M}}{\vdash}} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)$, ou seja, $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

EXEMPLO 11

$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$

$$
\begin{array}{lll}
P: & \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\
 & \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\
 & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\
 & \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9
\end{array}
$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$P: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$P: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$P: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$\begin{array}{lll} P: & \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ & \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ & \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

EXEMPLO 11

$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P)$ em que $V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\}$, $A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$

$$
\begin{array}{lll}
P: & \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\
 & \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\
 & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\
 & \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9
\end{array}
$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) = \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$\begin{array}{lll} P: & \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ & \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ & \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) = \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$P: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ldots \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) = \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) = \{(q_0, \mathcal{D})\}$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \dots, 9, (,), +, \times\}$$

$$
\begin{array}{lll}
P: & \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\
 & \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\
 & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\
 & \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9
\end{array}
$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \dots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) = \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) = \{(q_0, \mathcal{D})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) = \{(q_0, 0),\ \dots\ , (q_0, 9)\}$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$P: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) = \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) = \{(q_0, \mathcal{D})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) = \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\}$$

$$\delta_o(q_0, x, x) = \{(q_0, \varepsilon)\} \ \text{ para qualquer } x \in A$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$P: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) = \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) = \{(q_0, \mathcal{D})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) = \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\}$$

$$\delta_o(q_0, x, x) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A$$

$$\delta_o(q_0, x, Z) = \emptyset \text{ nos restantes casos}$$

EXEMPLO 11

$$\mathcal{G}_o = (V, A, \mathcal{S}, P) \text{ em que } V = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}\},\ A = \{0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$$

$$\begin{array}{lll} P: & \mathcal{S} & \longrightarrow (\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} + \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \\ & \mathcal{B} & \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \\ & \mathcal{C} & \longrightarrow \mathcal{D} \\ & \mathcal{D} & \longrightarrow 0 \mid 1 \mid \ \ldots \ \mid 9 \end{array}$$

Um autómato de pilha que reconhece $L(\mathcal{G}_o)$ pelo critério de pilha vazia é

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) = \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) = \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) = \{(q_0, \mathcal{D})\}$$

$$\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) = \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\}$$

$$\delta_o(q_0, x, x) = \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A$$

$$\delta_o(q_0, x, Z) = \emptyset \text{ nos restantes casos}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\};$
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}\\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}\\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\}\\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\}\\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\}\ \text{ para qualquer } x \in A\\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset\ \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$(q_0, (3 \times 8), \mathcal{S})$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$(q_0, (3 \times 8), \mathcal{S}) \quad \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3 \times 8), (\mathcal{S}))$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$(q_0, (3 \times 8), \mathcal{S}) \ \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3 \times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3 \times 8), \mathcal{S}))$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}))$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{B}\times\mathcal{C}))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C}))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{D}\times\mathcal{C}))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\};$
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\}\\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\}\\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\}\\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\}\\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A\\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}))\\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C}))\\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{D}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), 3\times\mathcal{C}))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\};$
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{D}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), 3\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, \times 8), \times\mathcal{C}))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{D}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), 3\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, \times 8), \times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{C}))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{D}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), 3\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, \times 8), \times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{D}))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{D}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), 3\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, \times 8), \times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{D})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), 8))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{C}\times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), \mathcal{D}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times8), 3\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, \times8), \times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{D})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), 8)) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0,),))
\end{aligned}$$

EXEMPLO 11 - continuação

$$\mathcal{M}_o = (\{q_0\}, A, \Sigma, \delta_o, q_0, \mathcal{S}, \emptyset)$$

- $\Sigma = \{\mathcal{S}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, 0, \ldots, 9, (,), +, \times\}$;
- $\delta_o : \{q_0\} \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_{fin}(Q \times \Sigma^*)$ é definida por:

$$\begin{aligned}
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{S}) &= \{(q_0, (\mathcal{S})),\ (q_0, \mathcal{S} + \mathcal{B}),\ (q_0, \mathcal{B})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{B}) &= \{(q_0, \mathcal{B} \times \mathcal{C}),\ (q_0, \mathcal{C})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{C}) &= \{(q_0, \mathcal{D})\} \\
\delta_o(q_0, \varepsilon, \mathcal{D}) &= \{(q_0, 0),\ \ldots\ , (q_0, 9)\} \\
\delta_o(q_0, x, x) &= \{(q_0, \varepsilon)\} \text{ para qualquer } x \in A \\
\delta_o(q_0, x, Z) &= \emptyset \text{ nos restantes casos}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{S}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (\mathcal{D} \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{C}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times \mathcal{D}) \underset{\mathcal{G}_o}{\Rightarrow} (3 \times 8)$$

$$\begin{aligned}
(q_0, (3\times 8), \mathcal{S}) \quad & \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, (3\times 8), (\mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{S})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{B}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{C}\times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), \mathcal{D}\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 3\times 8), 3\times\mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, \times 8), \times\mathcal{C})) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{C})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), \mathcal{D})) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, 8), 8)) \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0,),)) \\
& \underset{\mathcal{M}_o}{\vdash} (q_0, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

1. $\mathcal{S}$ é um novo símbolo;

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

1. $\mathcal{S}$ é um novo símbolo;
2. $V = \{\mathcal{S}\} \cup \{[p, X, q] \mid X \in \Sigma,\ p, q \in Q\}$;

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

1. $\mathcal{S}$ é um novo símbolo;
2. $V = \{\mathcal{S}\} \cup \{[p, X, q] \mid X \in \Sigma,\ p, q \in Q\}$;
3. P é constituído pelas produções :

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

1. $\mathcal{S}$ é um novo símbolo;
2. $V = \{\mathcal{S}\} \cup \{[p, X, q] \mid X \in \Sigma,\ p, q \in Q\}$;
3. P é constituído pelas produções :

$$\mathcal{S} \longrightarrow [q_0, Z_0, q], \quad \text{para qualquer } q \in Q$$

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

1. $\mathcal{S}$ é um novo símbolo;
2. $V = \{\mathcal{S}\} \cup \{[p, X, q] \mid X \in \Sigma,\ p, q \in Q\}$;
3. P é constituído pelas produções :

$$\begin{array}{rl} \mathcal{S} & \longrightarrow [q_0, Z_0, q], \quad \text{para qualquer } q \in Q \\ [p, X, q] & \longrightarrow a, \quad p, q \in Q,\ X \in \Sigma,\ a \in A \cup \{\varepsilon\},\ (q, \varepsilon) \in \delta(p, a, X) \end{array}$$

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

1. $\mathcal{S}$ é um novo símbolo;
2. $V = \{\mathcal{S}\} \cup \{[p, X, q] \mid X \in \Sigma,\ p, q \in Q\}$;
3. P é constituído pelas produções :

$$
\begin{array}{rl}
\mathcal{S} & \longrightarrow [q_0, Z_0, q], \quad \text{para qualquer } q \in Q \\
{[p, X, q]} & \longrightarrow a, \quad p, q \in Q,\ X \in \Sigma,\ a \in A \cup \{\varepsilon\},\ (q, \varepsilon) \in \delta(p, a, X) \\
{[p, X, q]} & \longrightarrow a[p_1, X_1, p_2][p_2, X_2, p_3] \ldots [p_m, X_m, q], \quad m \geq 1,\ p, q \in Q, \\
& \qquad a \in A \cup \{\varepsilon\}, X_1, \ldots X_m \in \Sigma, p_1, p_2, \ldots, p_m \in Q \\
& \qquad \text{tal que } (p_1, X_1 \ldots X_m) \in \delta(p, a, X)
\end{array}
$$

Proposição

Seja $\mathcal{M} = (Q, A, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ um autómato de pilha. Então existe uma GIC $\mathcal{G}$ tal que $L_{PV}(\mathcal{M}) = L(\mathcal{G})$.

PROVA

Considere-se $\mathcal{G} = (V, A, \mathcal{S}, P)$ uma gramática definida por:

1. $\mathcal{S}$ é um novo símbolo;
2. $V = \{\mathcal{S}\} \cup \{[p, X, q] \mid X \in \Sigma,\ p, q \in Q\}$;
3. P é constituído pelas produções :

$$\begin{array}{rll}
\mathcal{S} & \longrightarrow [q_0, Z_0, q], & \text{para qualquer } q \in Q \\
{[p, X, q]} & \longrightarrow a, & p, q \in Q,\ X \in \Sigma,\ a \in A \cup \{\varepsilon\},\ (q, \varepsilon) \in \delta(p, a, X) \\
{[p, X, q]} & \longrightarrow a[p_1, X_1, p_2][p_2, X_2, p_3] \ldots [p_m, X_m, q], & m \geq 1,\ p, q \in Q, \\
 & & a \in A \cup \{\varepsilon\}, X_1, \ldots X_m \in \Sigma, p_1, p_2, \ldots, p_m \in Q \\
 & & \text{tal que } (p_1, X_1 \ldots X_m) \in \delta(p, a, X)
\end{array}$$

A demonstração ficaria concluída com a verificação de que $\mathcal{G}$ gera a linguagem reconhecida pelo autómato.