Álgebra Universal e Categorias

Carla Mendes

2024/2025

Departamento de Matemática

Reticulados

Reticulados

Certas classes de conjuntos parcialmente ordenados são caracterizadas considerando a existência de supremo e ínfimo de certos subconjuntos. Uma classe de conjuntos parcialmente ordenados caracterizada desta forma é a classe dos reticulados.

Duas definições de reticulados

Os reticulados podem ser definidos de duas formas equivalentes: como conjuntos parcialmente ordenados e como estruturas algébricas. Apresentamos seguidamente estas definições e verificamos a equivalência das duas.

Definição

Um conjunto parcialmente ordenado $(R, \leq)$ *diz-se um* ***reticulado*** *se, para quaisquer* $a, b \in R$*, existem* $\inf\{a, b\}$ *e* $\sup\{a, b\}$.

Reticulados

Exemplo

1) Todas as cadeias são reticulados.

2) Dado um conjunto A, o c.p.o. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado, tendo-se, para quaisquer $X, Y \subseteq A$,

$$\inf\{X, Y\} = X \cap Y \text{ e } \sup\{X, Y\} = X \cup Y.$$

Exemplo

3) Sendo $\text{Subg}(G)$ *o conjunto dos subgrupos de um grupo* G *e* $\subseteq$ *a relação de inclusão usual entre conjuntos, o par* $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ *é um reticulado, tendo-se, para quaisquer* $G_1, G_2 \in \text{Subg}(G)$,

$$\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2 \text{ e } \sup\{G_1, G_2\} =< G_1 \cup G_2 >,$$

onde $< G_1 \cup G_2 >$ *representa o subgrupo de* G *gerado por* $G_1 \cup G_2$.

Reticulados

Se $(R, \leq)$ é um reticulado, então o seu c.p.o. dual $(R, \leq_d)$ é também um reticulado. Além disso, é válido o princípio seguinte.

Princípio de Dualidade para Reticulados Uma afirmação é verdadeira em qualquer reticulado se e só se o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Reticulados

Observe-se que o supremo e o ínfimo de dois elementos de um conjunto parcialmente ordenado $(R, \leq)$, caso existam, são únicos. Assim, se $(R, \leq)$ é um reticulado, podem definir-se em R as operações binárias $\wedge$ e $\vee$ da seguinte forma:

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad \forall\, x, y \in R.$$

A respeito destas operações é simples verificar que, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\begin{array}{lll}
x \wedge y = y \wedge x, & x \vee y = y \vee x & \text{(leis comutativas);} \\
x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, & x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z & \text{(leis associativas);} \\
x \wedge x = x, & x \vee x = x & \text{(leis de idempotência);} \\
x \wedge (x \vee y) = x, & x \vee (x \wedge y) = x & \text{(leis de absorção).}
\end{array}$$

A possibilidade de se definir as operaçoes binárias $\wedge$ e $\vee$ num reticulado R motivou a definição de reticulado enquanto estrutura algébrica.

Definição

*Um triplo $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$, onde R é um conjunto não vazio e $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias em R, diz-se um **reticulado** se, para quaisquer $x, y, z \in R$,*

R1: $x \wedge y = y \wedge x$, R1$_d$: $x \vee y = y \vee x$

(leis comutativas);

R2: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, R2$_d$: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(leis associativas);

R3: $x \wedge x = x$, R3$_d$: $x \vee x = x$

(leis de idempotência);

R4: $x \wedge (x \vee y) = x$, R4$_d$: $x \vee (x \wedge y) = x$

(leis de absorção).

Exemplo

(1) Considerando que P representa o conjunto das proposições, que $\wedge$ representa o conetivo conjunção e $\vee$ representa o conetivo disjunção, $(P; \wedge, \vee)$ é um reticulado.

(2) Sendo m.d.c. a operação máximo divisor comum em $\mathbb{N}$ e m.m.c. a operação mínimo múltiplo comum, $(\mathbb{N}, m.d.c., m.m.c.)$ é um reticulado.

Teorema

Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ *é um reticulado, então a relação* $\leq$ *definida em* R *por*

$$x \leq y \ \ \textit{se} \ \ x = x \wedge y$$

é uma relação de ordem parcial tal que, para quaisquer $x, y \in R$*, existem* $\inf\{x, y\}$ *e* $\sup\{x, y\}$ *e*

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y \ \textit{e} \ \sup\{x, y\} = x \vee y.$$

Se $(R, \leq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado tal que, para quaisquer* $x, y \in R$*, existem* $\inf\{x, y\}$ *e* $\sup\{x, y\}$*, então* $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$*, onde* $\wedge$ *e* $\vee$ *são as operações binárias em* R *definidas por*

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \ \textit{e} \ x \vee y = \sup\{x, y\},$$

é um reticulado. Além disso, para quaisquer $x, y \in R$*,*

$$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow y = x \vee y.$$

Reticulados

Do resultado anterior segue que os reticulados podem ser completamente caracterizados em termos das operações supremo ($\vee$) e ínfimo ($\wedge$).

Se Φ é uma afirmação sobre reticulados expressa em termos de $\wedge$ e $\vee$, então a afirmação dual de Φ é obtida trocando as ocorrências de $\wedge$ e $\vee$, respetivamente, por $\vee$ e $\wedge$.

Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então o seu reticulado dual é $\mathcal{R}^d = (R; \vee, \wedge)$.

Descrição de reticulados

Para ilustrar certos resultados ou para refutar conjeturas a respeito de reticulados pode ser conveniente descrever exemplos de reticulados.

Atendendo a que os reticulados são casos particulares de conjuntos parcialmente ordenados, a descrição de reticulados finitos pode ser feita por meio de diagramas de Hasse.

Alternativamente, considerando um reticulado como uma estrutura algébrica $(R; \wedge, \vee)$, um reticulado pode ser descrito recorrendo às tabelas das operações $\wedge$ e $\vee$.

Exemplo

Sendo $R = \{0, a, b, 1\}$ e $\wedge$, $\vee$ as operações binárias em R definidas pelas tabelas seguintes

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

verifica-se que $(R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, o qual corresponde ao reticulado representado pelo diagrama de Hasse a seguir indicado

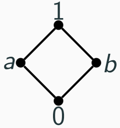


Figura 1

Sub-reticulados

Definição

*Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e R' um subconjunto não vazio de R. Um triplo $\mathcal{R}' = (R'; \wedge', \vee')$, onde $\wedge'$ e $\vee'$ são operações binárias em R', diz-se um **sub-reticulado** de $\mathcal{R}$ se, para quaisquer $a, b \in R'$,*

$$a \wedge b \in R', a \vee b \in R'$$

e

$$a \wedge' b = a \wedge b, a \vee' b = a \vee b.$$

Nas condições da definição anterior segue que se $\mathcal{R}' = (R'; \wedge', \vee')$ é um sub-reticulado de $\mathcal{R}$, então $\mathcal{R}'$ é um reticulado.

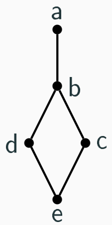
Reticulados

Note-se que se $\leq$ é a relação de ordem parcial associada a um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ e R' é um subconjunto não vazio de R, não é suficiente que $(R', \leq_{|_{R'}})$ seja um reticulado para que o reticulado $(R'; \wedge', \vee')$ correspondente a $(R', \leq_{|_{R'}})$ seja um sub-reticulado de $(R, \wedge, \vee)$.

De facto, é possivel encontrar reticulados $(R, \leq)$ e subconjuntos R' de R tais que $(R', \leq_{|_{R'}})$ é um reticulado mas $(R'; \wedge', \vee')$ não é um sub-reticulado do reticulado $(R; \wedge, \vee)$ correspondente a $(R, \leq)$. O exemplo seguinte ilustra este tipo de situação.

Reticulados

Considerando o reticulado $(\{a, b, c, d, e\}, \wedge, \vee)$ correspondentente ao c.p.o. $(\{a, b, c, d, e\}, \leq)$ a seguir representado e sendo $R' = \{a, c, d, e\}$, verifica-se que $(R', \leq_{|_{R'}})$ é um reticulado, mas $(R'; \wedge', \vee')$ não é sub-reticulado do reticulado $(\{a, b, c, d, e\}, \wedge, \vee)$.



Dados um reticulado $(R, \leq)$ e um subconjunto não vazio R' de R, um c.p.o. $(R', \leq')$ diz-se um sub-reticulado de $(R, \leq)$ se $\leq' = \leq_{|_{R'}}$ e, para quaisquer $a, b \in R'$, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$ (determinados em $(R, \leq)$) pertencem a R'.

Produtos

A partir de reticulados $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ define-se naturalmente um reticulado que tem como conjunto suporte o conjunto $R_1 \times R_2$.

Teorema

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$, $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e sejam $\wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ e $\vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ as operações binárias definidas em $R_1 \times R_2$ por

$$(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2),$$
$$(a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \vee_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{R}_2} b_2).$$

Então $(R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$ é um reticulado.

Definição

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$*,* $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *reticulados e sejam* $\wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ *e* $\vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ *as operações binárias definidas em* $R_1 \times R_2$ *por*

$$(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2),$$
$$(a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \vee_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{R}_2} b_2).$$

Designa-se por ***reticulado produto de*** $\mathcal{R}_1$ *e* $\mathcal{R}_2$*, e representa-se por* $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$*, o reticulado* $(R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados, $\leq_1$ e $\leq_2$ as relações de ordem associadas, respetivamente, a $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ e seja $\leq$ a relação de ordem definida em $R_1 \times R_2$ por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2.$$

Então $(R_1 \times R_2, \leq)$ é um reticulado. Além disso,

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1, a_2) \quad & \Leftrightarrow \quad a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1 = a_1 \text{ e } a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2 = a_2 \\ & \Leftrightarrow \quad a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2 \\ & \Leftrightarrow \quad (a_1, a_2) \leq (b_1, b_2). \end{aligned}$$

Por conseguinte, o reticulado produto

$$\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 = (R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$$

coincide com o reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$.

Homomorfismos, isomorfismos

Definição

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ *e* $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *reticulados e* $\alpha : R_1 \to R_2$ *uma aplicação. Diz-se que:*

- α *é um* ***homomorfismo de*** $\mathcal{R}_1$ *em* $\mathcal{R}_2$ *se, para quaisquer* $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b);$$

- α *é um* ***isomorfismo de*** $\mathcal{R}_1$ *em* $\mathcal{R}_2$ *se* α *é bijetiva e é um homomorfismo.*

Caso exista um isomorfismo de reticulados de $\mathcal{R}_1$ *em* $\mathcal{R}_2$*, o reticulado* $\mathcal{R}_1$ *diz-se* ***isomorfo*** *ao reticulado* $\mathcal{R}_2$.

Reticulados

Note-se que se α é um isomorfismo de um reticulado $\mathcal{R}_1$ para um reticulado $\mathcal{R}_2$, então α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{R}_2$ para $\mathcal{R}_1$.

Assim, caso exista um isomorfismo de um reticulado noutro, diz-se somente que os reticulados são isomorfos.

A noção de isomorfismo entre reticulados pode ser estabelecida recorrendo às relações de ordem associadas aos mesmos reticulados.

Teorema

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ *e* $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *reticulados e* $\leq_1$ *e* $\leq_2$ *as relações de ordem definidas, respetivamente, em* R_1 *e* R_2 *por*

$$a \leq_1 b \text{ sse } a = a \wedge_{\mathcal{R}_1} b, \text{ para quaisquer } a, b \in R_1,$$

$$a \leq_2 b \text{ sse } a = a \wedge_{\mathcal{R}_2} b, \text{ para quaisquer } a, b \in R_2.$$

Então os reticulados $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ *e* $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ *são isomorfos se e só se os c.p.o.s* $(R_1, \leq_1)$ *e* $(R_2, \leq_2)$ *são isomorfos.*

Reticulados completos, reticulados algébricos

Apresentam-se seguidamente duas classes de reticulados que desempenham um papel relevante no estudo de álgebra universal.

Definição

Um reticulado $(R, \leq)$ *diz-se um* ***reticulado completo*** *se, para qualquer subconjunto* S *de* R*, existem* $\bigwedge S$ *e* $\bigvee S$*.*

Exemplo

1) O reticulado $(\mathbb{R}, \leq)$ *não é completo.*

2) O reticulado $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$ *é completo.*

3) O reticulado $(\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \cup \{-2, 2\}, \leq)$ *é completo.*

4) Para qualquer conjunto A, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um reticulado completo.*

5) Para qualquer grupo G, o reticulado $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$*, onde* $\mathrm{Subg}(G)$ *é o conjunto dos subgrupos de G, é completo.*

Reticulados

Teorema

Seja $(R, \leq)$ um reticulado. As condições seguintes são equivalentes:

(i) *$(R, \leq)$ é um reticulado completo.*

(ii) *Para qualquer subconjunto S de R, existe $\bigwedge S$.*

(iii) *Para qualquer suconjunto S de R, existe $\bigvee S$.*

Observe-se que se $(R, \leq)$ é um reticulado completo, então R tem elemento máximo 1 e elemento mínimo 0 e tem-se $\bigvee \emptyset = 0$ e $\bigwedge \emptyset = 1$.

Reticulados

Assim, o teorema anterior pode ser formulado de forma equivalente, substituindo as condições (i) e (ii) pelas condições (1) e (2) a seguir indicadas, respetivamente:

(1) R tem elemento máximo e existe ínfimo de qualquer subconjunto não vazio de R;

(2) R tem elemento mínimo e existe supremo de qualquer subconjunto não vazio de R.

Definição

*Seja $(R, \leq)$ um reticulado. Um elemento $a \in R$ diz-se **compacto** se sempre que existe $\bigvee A$ e $a \leq \bigvee A$, para algum $A \subseteq R$, então $a \leq \bigvee B$, para algum conjunto finito $B \subseteq A$.*

*Um reticulado R diz-se **compactamente gerado** se, para todo $a \in R$, $a = \bigvee S$, onde S é um subconjunto de R formado por elementos compactos de R.*

*Um reticulado R diz-se um **reticulado algébrico** se é um reticulado completo e compactamente gerado.*

Exemplo

1) Todos os elementos de um reticulado finito são compactos.

2) Dado um conjunto A, o reticulado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é algébrico; os elementos compactos deste reticulado são os subconjuntos finitos de A.

3) O reticulado $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, dos subgrupos de um grupo G, é algébrico; os elementos compactos deste reticulado são os subgrupos de G finitamente gerados.

Dados um conjunto A e um operador fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, facilmente se verifica que o conjunto parcialmente ordenado dos subconjuntos de A fechados para f, $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$, é um reticulado completo.

Teorema

Sejam A um conjunto e f um operador de fecho em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Então $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado completo, onde, para qualquer família não vazia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de A,

$$\bigwedge_{i \in I} f(A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i) \quad e \quad \bigvee_{i \in I} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

Reticulados

Reciprocamente, prova-se que todo o reticulado completo pode ser visto como o reticulado dos subconjuntos de algum conjunto fechados para um operador de fecho.

Teorema

Seja $(R, \leq)$ *um reticulado completo. Então* $(R, \leq)$ *é isomorfo ao reticulado* $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$, *para algum conjunto* A *e algum operador de fecho* f *em* A.

Teorema

Seja A um conjunto. Se f é um operador de fecho algébrico em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, então $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado algébrico e os elementos compactos de $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ são os conjuntos fechados $f(X)$, onde X é um subconjunto finito de A.

Teorema

Seja $(R, \leq)$ um reticulado algébrico. Então $(R, \leq)$ é isomorfo ao reticulado $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$, para algum conjunto A e algum operador de fecho algébrico f em A.

Reticulados distributivos e reticulados modulares

As classes de reticulados mais estudadas são as classes de reticulados distributivos e as classes de reticulados modulares.

Definição

Um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ *diz-se um* ***reticulado distributivo*** *se satisfaz uma das seguintes condições:*

D1: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall x, y, z \in R,$

D2: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \forall x, y, z \in R.$

As condições D1 e D2 referidas na definição anterior, designadas por ***leis distributivas***, são equivalentes.

Teorema

Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então $\mathcal{R}$ satisfaz D1 se e só se $\mathcal{R}$ satisfaz D2.

Definição

Um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ diz-se um ***reticulado modular*** *se, para quaisquer $x, y, z \in R$,*

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

A condição da definição anterior, designada por ***lei modular***, é equivalente a

$$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z),$$

uma vez que $x \leq y$ se e só se $x = x \wedge y$.

Reticulados

Anteriormente vimos que pela formação de sub-reticulados, produtos e imagens homomorfas podem ser construídos novos reticulados a partir de reticulados dados. A modularidade e a distributividade são preservadas por estas construções.

Teorema

Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ reticulados. Então:

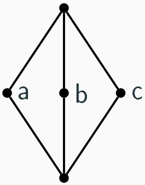
(1) *Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular), então qualquer sub-reticulado de $\mathcal{R}$ é distributivo (modular).*

(2) *Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).*

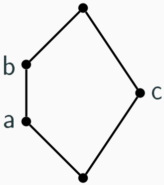
(3) *Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular) e $\mathcal{S}$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}$, i.e., se $\mathcal{S} = \alpha(\mathcal{R})$ para algum homomorfismo $\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$, então $\mathcal{S}$ é distributivo (modular).*

Reticulados

Os dois próximos teoremas dão-nos uma caracterização dos reticulados distributivos e dos reticulados modulares recorrendo aos reticulados M_3 e N_5 a seguir apresentados



M_3



N_5

Observe-se que nenhum dos reticulados anteriores é distributivo, pois em nenhum dos casos se tem $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

No que respeita à modularidade, o reticulado M_3 é modular, mas no reticulado N_5 tem-se $a \leq b$ e $a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$, pelo que N_5 não é modular.

Teorema

Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então $\mathcal{R}$ é modular se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5.

Teorema

Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então $\mathcal{R}$ é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5 ou a M_3.