Proposta de resolução TG2 - 4 Abr 2024 Análise LCE

$\boxed{1}$ $g:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^5}{4x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^5}{4x^4+y^4}\right) = \frac{5x^4(4x^4+y^4)-16x^3\cdot x^5}{(4x^4+y^4)^2} = \frac{4x^8+5x^4y^4}{(4x^4+y^4)^2}$$

Para $(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{4h^4+0^4}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^5}{4h^5} = \frac{1}{4}$$

Conclusão $\frac{\partial g}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{4x^8+5x^4y^4}{(4x^4+y^4)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ \dfrac{1}{4}, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b) $$Dg((0,0);(u_1,u_2)) = \lim_{h\to 0}\frac{g((0,0)+h(u_1,u_2))-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(hu_1,hu_2)-g(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(hu_1)^5}{4(hu_1)^4+(hu_2)^4}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h^5}\,u_1^5}{\cancel{h^5}(4u_1^4+u_2^4)}$$

$$= \frac{u_1^5}{4u_1^4+u_2^4}$$

c) Como a função

$$(u_1,u_2)\longmapsto Dg((0,0);(u_1,u_2)) = \frac{u_1^5}{4u_1^4+u_2^4}$$

não é linear, então a função g não é derivável em $(0,0)$.

$\boxed{2}$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \operatorname{sen}(xy^2) + y$

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xy^2) \cdot y^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xy^2)\, 2xy + 1$

existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$, então f é derivável em $\mathbb{R}^2$. Em particular f é derivável em $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3} + 1 = \frac{\pi}{3} + 1$

Sendo f derivável em $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$, então

$$f'\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto \frac{1}{2}u + \left(\frac{\pi}{3} + 1\right)v$$

c) A equação do plano tangente ao gráfico da função f em $\left(\frac{\pi}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ é:

$$z = f\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)(y-1)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{3} + 1\right)(y-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi+3}{3}y - z = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Alternativa

$\operatorname{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R} \text{ e } \underbrace{z = \operatorname{sen}(xy^2) + y}_{\Leftrightarrow \operatorname{sen}(xy^2) + y - z = 0}\}$, donde $\operatorname{Graf}(f)$ corresponde à superfície de nível zero da função $h(x,y,z) = \operatorname{sen}(xy^2) + y - z$. Das propriedades do vector gradiente tem-se que o plano tangente à superfície (gráfico de f) em $\left(\frac{\pi}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ é:

$$\left((x,y,z) - \left(\frac{\pi}{3}, 1, \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}+1, -1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} + (y-1)\left(\frac{\pi}{3}+1\right) + \left(z - \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \left(\frac{\pi}{3}+1\right)y - z = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \cancel{1} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi+3}{3} - z = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$