2.2 Semântica do Cálculo de Predicados

1. Considere o tipo de linguagem $ARIT$ e a estrutura *standard* para este tipo de linguagem E_{Arit}. Sejam a_1 e a_2 as atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

   Para cada um dos $ARIT$-termos t que se seguem, calcule $t[a_1]_{E_{Arit}}$ e $t[a_2]_{E_{Arit}}$.

   i) 0. ii) x_5. iii) $s(x_2)$. iv) $+(s(0), x_3)$. v) $s(0 + (x_2 \times x_3))$.

2. Considere de novo o tipo de linguagem $ARIT$.

   a) Defina uma estrutura de tipo $ARIT$ E_0 cujo domínio seja o conjunto $\{0,1\}$ e, para essa estrutura, defina uma atribuição a_0.

   b) Para a estrutura E_0 e atribuição a_0 definidas na alínea anterior, calcule $t[a_0]_{E_0}$ para cada um dos termos t do exercício anterior.

3. Seja $L = (\{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(f_1) = \mathcal{N}(f_2) = 0$, $\mathcal{N}(f_3) = 1$, $\mathcal{N}(f_4) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$ e seja D o conjunto $\{d_1, d_2\}$.

   a) Indique uma L-estrutura de domínio D.

   b) Quantas L-estruturas de domínio D existem?

4. Seja $L = (\{0, -\}, \{<, \mathsf{P}\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(<) = 2$ e $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$. Seja $E = (\mathbb{Z}, \overline{})$ a L-estrutura tal que:

   - $\overline{0}$ é o número inteiro *zero*;
   - $\overline{-}$ é a função *subtração* em inteiros;
   - $\overline{<}$ é a relação *menor do que* em inteiros;
   - $\overline{\mathsf{P}} = \{z \in \mathbb{Z} : z = 2z' \text{ para algum } z' \in \mathbb{Z}\}$.

   Seja $a : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}$ a atribuição, em E, tal que: $a(x_i) = i$ se i é par e $a(x_i) = -2i$ se i é ímpar.

   a) Para cada um dos seguintes L-termos t, calcule $t[a]_E$.

      i) $0 - x_2$. ii) $0 - (x_2 - x_1)$.

   b) Prove, por indução em L-termos, que, para todo o L-termo t, existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $t[a]_E = 2z$.

5. Considere o tipo de linguagem $ARIT$ e a estrutura *standard* para este tipo de linguagem E_{Arit}. Sejam a_1 e a_2 as atribuições em E_{Arit} tais que $a_1(x_i) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e $a_2(x_i) = i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$.

   a) Para cada uma das $ARIT$-fórmulas φ que se seguem, calcule $\varphi[a_1]_{E_{Arit}}$ e $\varphi[a_2]_{E_{Arit}}$.

      i) $\neg\bot$. iii) $\neg(x_1 = x_1)$.

      ii) $x_1 = x_2$. iv) $(x_1 < x_2) \to (s(x_1) < s(x_2))$.

   b) Para cada uma das fórmulas φ da alínea a), indique $(\forall x_1\, \varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$, $(\forall x_1\, \varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$, $(\exists x_1\, \varphi)[a_1]_{E_{Arit}}$ e $(\exists x_1\, \varphi)[a_2]_{E_{Arit}}$.

   c) Indique se alguma das fórmulas da alínea a) é válida na estrutura E_{Arit}.

   d) Indique se alguma das fórmulas da alínea a) é universalmente válida.

6. Sejam L, E e a a linguagem, a estrutura e a atribuição, respetivamente, definidas no Exercício 4. Para cada uma das seguintes fórmulas de tipo L

i)	$\mathsf{P}(x_2)$	iii)	$x_0 < 0 \vee \neg(x_0 < 0)$
ii)	$\forall x_2 \mathsf{P}(x_2)$	iv)	$\forall x_1 \forall x_2((x_1 < x_2) \to (0 < x_2 - x_1))$

diga se a fórmula:

a) é satisfeita na estrutura E para a atribuição a;

b) é válida em E;

c) é universalmente válida.

7. Seja φ a seguinte fórmula de tipo $ARIT$:

$$\neg(\exists x_1(x_1 = 0) \vee (x_2 = 0)) \to (\neg\exists x_1(x_1 = 0) \wedge \neg(x_2 = 0)).$$

a) φ é instância de alguma tautologia?

b) φ é válida em todas as estruturas de tipo $ARIT$?

8. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira para quaisquer tipo de linguagem L, L-fórmulas φ e ψ e variável x.

a) $\exists x \varphi \Leftrightarrow \forall x \varphi$.

b) $\models \exists x(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi)$.

c) $\models (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$.

d) $\forall x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\forall x \varphi \vee \forall x \psi)$.

e) $\models \exists x \forall y \varphi \to \forall y \exists x \varphi$.

f) $\exists x \varphi \to \psi \Leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$, se $x \notin LIV(\psi)$.

9. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{f}\}, \{\mathsf{P}, =\}, \mathcal{N})$, em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, e considere a L-estrutura $E = (\mathbb{N}_0, \bar{\ })$, onde $\bar{0} = 0$, $\bar{\mathsf{f}} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é a função dada por $\bar{\mathsf{f}}(n) = n + 3$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e $\bar{\mathsf{P}} = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ é múltiplo de } 3\}$.

a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:

(i) $\mathsf{f}(\mathsf{f}(x_4))[a]$.

(ii) $(\exists x_1 \mathsf{f}(x_1) = 0) \vee \neg\mathsf{P}(\mathsf{f}(x_2))[a]$.

b) Seja φ a L–fórmula $(\mathsf{f}(x_1) = x_2 \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_2)$. Prove que:

(i) φ é válida em E.

(ii) φ não é universalmente válida.

c) Represente as afirmações seguintes através de L-fórmulas válidas em E.

(i) Existe um número que é múltiplo de 3 mas não é zero.

(ii) Para todo o número que seja múltiplo de 3, esse número mais 3 é múltiplo de 3.

10. Seja $L = (\{\mathsf{f}\}, \{=\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem, em que $\mathcal{N}(\mathsf{f}) = 1$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e seja $E = (D, \bar{\ })$ uma estrutura de tipo L.

a) Indique uma fórmula de tipo L que seja válida em E sse $\bar{\mathsf{f}}$ é injetiva.

b) Indique uma fórmula de tipo L que seja válida em E sse D tem dois elementos.

11. Seja $L = (\{c_1, c_2\}, \{R\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c_1) = \mathcal{N}(c_2) = 0$ e $\mathcal{N}(R) = 2$, um tipo de linguagem. Seja $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, onde:

    - $\varphi_1 = \forall x_0 R(x_0, x_0)$;
    - $\varphi_2 = \forall x_0 \forall x_1 (R(x_0, x_1) \to R(x_1, x_0))$;
    - $\varphi_3 = \forall x_0 \forall x_1 \forall x_2 ((R(x_0, x_1) \land R(x_1, x_2)) \to R(x_0, x_2))$.

    a) Indique modelos de:
        (i) Γ.
        (ii) $\Gamma \cup \{R(c_1, c_2)\}$.
        (iii) $\Gamma \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$.

    b) Mostre que:
        (i) $\Gamma \models R(c_1, c_1)$.
        (ii) $\Gamma, R(c_1, c_2) \models R(c_2, c_1)$.

12. Sejam L um tipo de linguagem, φ uma L-fórmula e x uma variável. Mostre que:

    a) $\{\exists x \neg \varphi, \forall x \varphi\}$ não é satisfazível.
    b) $\neg \exists x \varphi, \varphi \models \bot$.
    c) $\forall x \varphi, \forall x \psi \models \forall x (\varphi \land \psi)$.
    d) $\exists x \varphi, \forall x (\varphi \to \psi) \models \exists x \psi$.

13. Considere as três afirmações:

    (i) "Todos os homens são mortais";
    (ii) "Camões é um homem";
    (iii) "Camões é mortal".

    a) Represente (i), (ii) e (iii) por L-fórmulas φ_1, φ_2 e φ_3 respetivamente. Explicite L.
    b) Mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$.