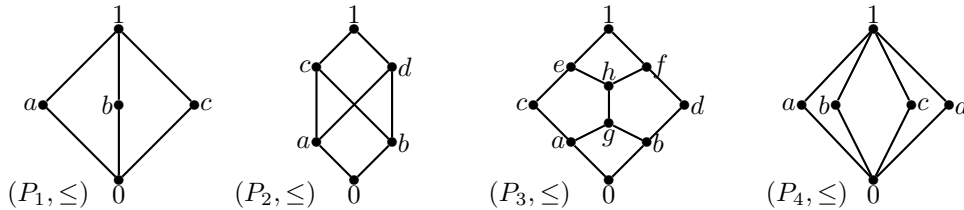


Álgebra Universal e Categorias

folha 1

1. Reticulados

1.1. Diga, justificando, quais dos c.p.o.s a seguir representados são reticulados:



1.2. Mostre que cada um dos c.p.o.s a seguir indicados é um reticulado.

- (a) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação *divide* definida em \mathbb{N} .
- (b) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto \mathcal{A} e \subseteq é a relação de inclusão usual.
- (c) $(\text{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\text{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e \subseteq é a relação de inclusão usual.

1.3. Prove que toda a cadeia é um reticulado.

1.4. Seja $(R; \wedge, \vee)$ o reticulado cujas operações \wedge e \vee são as descritas através das tabelas seguintes

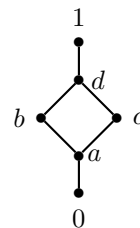
\wedge	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

\vee	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	b	c	d	1
c	c	c	c	c	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

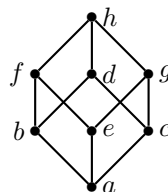
Considere o reticulado interpretado como um conjunto parcialmente ordenado e represente-o através de um diagrama de Hasse.

1.5. Seja (R, \leq) o reticulado representado ao lado.

Considere este reticulado interpretado como uma estrutura algébrica $(R; \wedge, \vee)$ e indique as tabelas das operações \wedge e \vee .



1.6. Considere o reticulado (R, \leq) a seguir representado.



Para cada um dos conjuntos R' a seguir indicados, diga se $(R', \leq|_{R'})$ é um sub-reticulado de (R, \leq) .

- (a) $R' = \{a, b, c, d\}$.
- (b) $R' = \{b, c, f, g\}$.
- (c) $R' = \{a, b, f, g, h\}$.

Álgebra Universal e Categorias

folha 2

1.7. Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Um subconjunto não vazio I de R diz-se um *ideal* de \mathcal{R} se

1. $(\forall x, y \in R) \ x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$;
2. $(\forall x \in I)(\forall y \in R) \ y \wedge x = y \Rightarrow y \in I$.

Mostre que $\mathcal{I} = (I; \wedge_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{I}})$, onde I é um ideal de \mathcal{R} e $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ são as correspondências de I^2 em R definidas por

$$x \wedge_{\mathcal{I}} y = x \wedge y, \quad x \vee_{\mathcal{I}} y = x \vee y, \quad \forall x, y \in I,$$

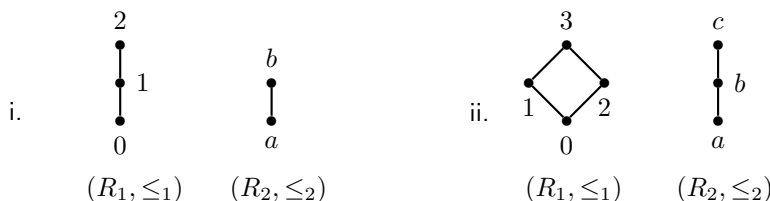
é um sub-reticulado de \mathcal{R} .

1.8. (a) Sejam (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) reticulados. Mostre que o par $(R_1 \times R_2, \leq)$, onde \leq é a relação binária em $R_1 \times R_2$ definida por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ sse } a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2,$$

é um reticulado.

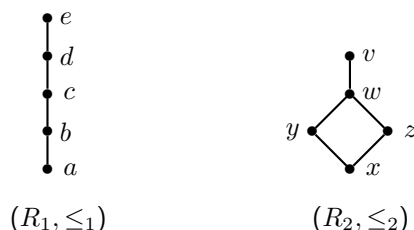
(b) Considerando que (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) representam os reticulados a seguir indicados, desenhe o diagrama de Hasse do reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$:



1.9. Considerando os reticulados $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, diga se cada uma das aplicações a seguir definidas é um homomorfismo.

- (a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = nx$, para todo $x \in \mathbb{N}$ (com $n \in \mathbb{N}$ fixo).
- (b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x + 2$, para todo $x \in \mathbb{N}$.
- (c) $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $h(\emptyset) = \emptyset$ e $h(A) = \mathbb{N}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$.
- (d) $k : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $k(A) = A \cap \{1, 2\}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

1.10. Considere os reticulados (R_1, \leq_1) e (R_2, \leq_2) a seguir representados



Para cada uma das aplicações h seguintes, diga se: i. h é isótona; ii. h é um isomorfismo.

- (a) $h : R_1 \rightarrow R_1$, definida por $h(a) = a$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, $h(d) = e$, $h(e) = e$.
- (b) $h : R_1 \rightarrow R_2$, definida por $h(a) = x$, $h(b) = y$, $h(c) = z$, $h(d) = w$, $h(e) = v$.
- (c) $h : R_2 \rightarrow R_1$, definida por $h(x) = a$, $h(y) = b$, $h(z) = c$, $h(w) = d$, $h(v) = e$.
- (d) $h : R_2 \rightarrow R_2$, definida por $h(x) = x$, $h(y) = z$, $h(z) = y$, $h(w) = w$, $h(v) = v$.

1.11. Mostre que se (P, \leq) é um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$, então (P, \leq) é um reticulado completo.

Álgebra Universal e Categorias

folha 3

1.12. Justifique que cada um dos reticulados a seguir indicados é um reticulado algébrico:

- (a) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto A e \subseteq é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os subconjuntos finitos de A).
- (b) $(\text{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\text{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e \subseteq é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\text{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados).

1.13. Sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} reticulados. Mostre que:

- (a) Se \mathcal{R} é distributivo (modular), então qualquer sub-reticulado de \mathcal{R} é distributivo (modular).
- (b) Se \mathcal{R} e \mathcal{S} são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).
- (c) Se \mathcal{R} é distributivo (modular) e \mathcal{S} é uma imagem homomorfa de \mathcal{R} , então \mathcal{S} é distributivo (modular).

1.14. Diga, justificando, quais dos seguintes reticulados são distributivos e quais são modulares.

