Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Licenciatura em Ciências da Computação
22/04/2023
Primeiro Teste

Nome: Proposta de resolução

1. Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

   (a) Num grafo, qualquer caminho elementar é um caminho simples.

   (b) Existe um grafo com 5 vértices em que todos os vértices têm grau diferente.

   (c) Se um grafo é semi-Euleriano então não pode ser Hamiltoniano.

   (d) Se G é um grafo com 6 vértices todos eles de grau 3 e tal que não existem ciclos de comprimento 3 então $G = K_{3,3}$.

a Verdadeiro.

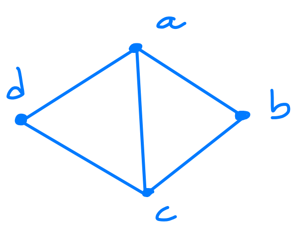
Se um caminho é elementar então não repete vértices, se não repete vértices então também não repete arestas, logo é um caminho simples.

b Falso.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que tal grafo G existe. Como G tem 5 vértices e os graus são todos distintos então os graus são: 4, 3, 2, 1 e 0. Mas num grafo com 5 vértices não podemos ter um vértice de grau 4 e outro de grau 0. Logo tal grafo não existe.

c Falso.

O seguinte grafo



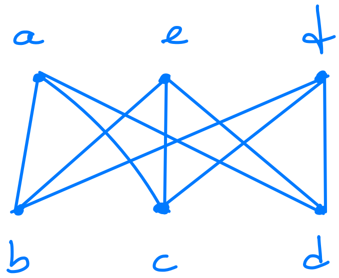
é semi-Euleriano e é Hamiltoniano.

O grafo é semi-Euleriano pois tem exatamente dois vértices de grau ímpar, a e c. Note-se que o caminho ⟨a, d, c, a, b, c⟩ é um caminho semi-Euleriano. Por outro lado, ⟨a, b, c, d, a⟩ é um ciclo Hamiltoniano.

d Verdadeiro

Seja G um grafo nas condições apresentadas.

Consideremos um vértice a de G. Como grau(a) = 3, então existem 3 vértices que lhe são adjacentes, digamos os vértices b, c, d.

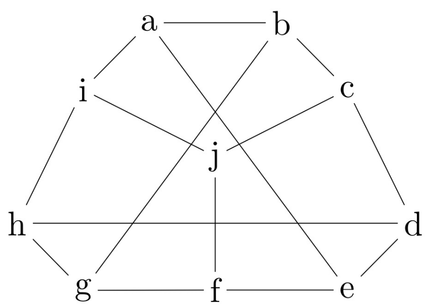


Considerando o vértice b, temos também grau(b) = 3. Como não podem existir ciclos de comprimento 3 então b não é adjacente nem a c nem a d, pelo que b é adjacente a outros dois vértices, digamos e, f.

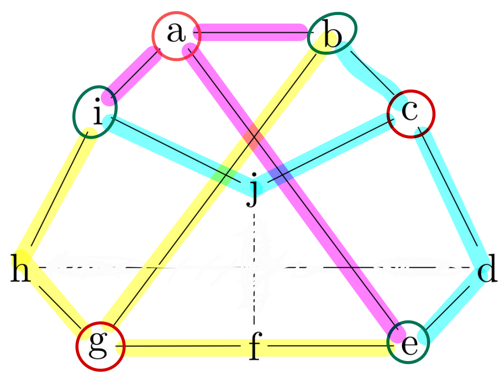
O mesmo raciocínio se aplica a c e a d, os vértices c e d são adjacentes a a, e, f.

Portanto, o grafo G é, de facto, o grafo $K_{3,3}$

2. Use o teorema de Kuratowski para mostrar que o seguinte grafo não é planar.

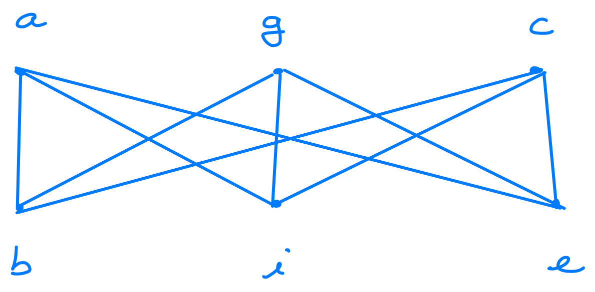


Esquematicamente podemos ver um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ da seguinte forma



Mais detalhadamente, podemos considerar o subgrafo que se obtem do grafo proposto eliminando as arestas $\{h,d\}$ e $\{j,f\}$.

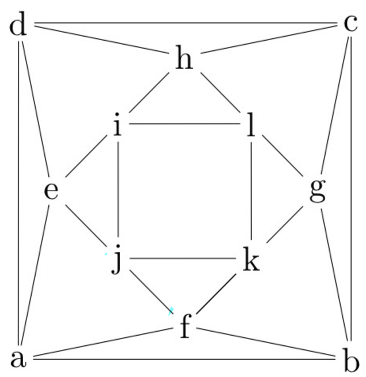
Os vértices h, f e j são, neste subgrafo, vértices de grau 2. Portanto tal subgrafo é homeomorfo a



que é o grafo $K_{3,3}$.

Pelo Teorema de Kuratowski, o grafo proposto não é planar.

3. Considere o grafo $G = (V, E)$ representado por



(a) Justifique que G é conexo e planar e mostre que G verifica a fórmula de Euler.

(b) Indique, justificando, se:

i. G é um grafo platónico; ii. G é bipartido; iii. G é Euleriano.

(c) Verifique se G é Hamiltoniano.

(d) Determine, justificando, qual o número cromático de G.

a) Por observação de G verificamos que G é conexo pois quaisquer dois vértices estão ligados por um caminho.

O grafo G é planar pois na representação apresentada não existe cruzamento entre arestas a não ser nos vértices.

O grafo G tem $v = 12$ vértices, $a = 24$ arestas e $f = 14$ faces. Logo $v - a + f = 2$ e G satisfaz a fórmula de Euler.

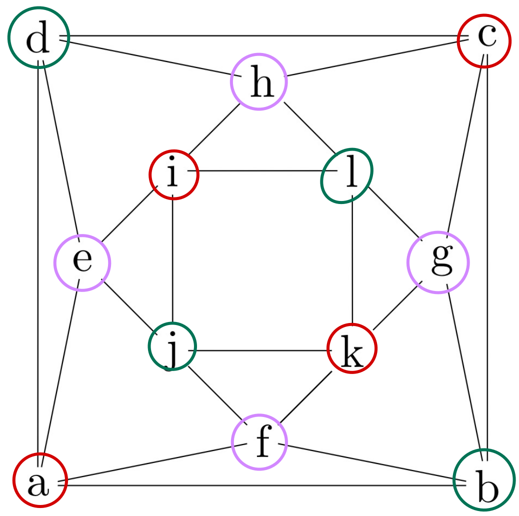
b. i) G não é planar uma vez que o número de arestas a que cada face é incidente não é constante. Por exemplo, a face delimitada pelo ciclo $\langle i, l, k, j, i \rangle$ é incidente a 4 arestas e a face incidente pelo ciclo $\langle a, f, b, a \rangle$ é incidente a 3 arestas.

ii) G não é bipartido pois tem ciclos de comprimento ímpar, por exemplo $\langle a, f, b, a \rangle$ é um ciclo de comprimento 3.

iii) G é Euleriano pois todos os vértices têm grau 4, em particular, todos os vértices têm grau par.

c. G é Hamiltoniano. Por exemplo, o caminho $\langle a, d, c, b, g, k, l, h, i, j, f, a \rangle$ é um ciclo de G que percorre todos os vértices.

d. A seguinte coloração de G apresenta 3 cores:



Então $\chi(G) \leq 3$.
Como K_3 é subgrafo de G, então $\chi(G) \geq 3$.

Concluímos assim que $\chi(G) = 3$.