Universidade do Minho
Departamento de Matemática

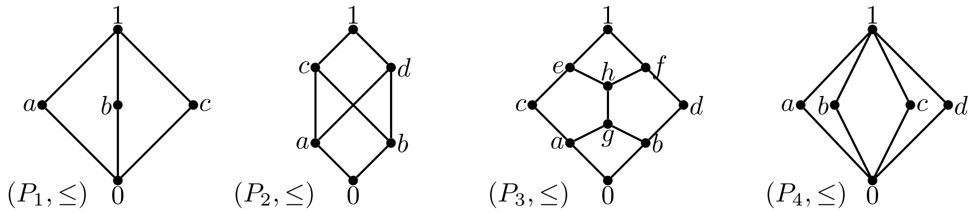
Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2024/2025

Álgebra Universal e Categorias
Exercícios

---

1. Reticulados

1.1. Diga, justificando, quais dos c.p.o.s a seguir representados são reticulados:



Um c.p.o. $(P, \leq)$ diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

O c.p.o. $(P_1, \leq)$ é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in P_1$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$:
- se $x, y \in \{0, a, b, c, 1\}$ e $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$;
- se $x, y \in \{a, b, c\}$ e $x \neq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = 1$ e $\inf\{x, y\} = 0$.

O c.p.o. $(P_2, \leq)$ não é um reticulado, pois existem $a, b \in P_2$ tais que não existe $\sup\{a, b\}$ (tem-se $\mathrm{Maj}\{a, b\} = \{c, d, 1\}$ e o conjunto $\{c, d, 1\}$ não tem elemento mínimo).

O c.p.o. $(P_3, \leq)$ é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in P_3$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$:
- se $x, y \in \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, 1\}$ e $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$;
- se $x, y \in \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e x e y não são comparáveis, também existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$, tendo-se:
  - $\sup\{a, b\} = g$ e $\inf\{a, b\} = 0$;
  - $\sup\{a, d\} = f$ e $\inf\{a, d\} = 0$;
  - $\sup\{b, c\} = e$ e $\inf\{b, c\} = 0$;
  - $\sup\{c, d\} = 1$ e $\inf\{c, d\} = 0$;
  - $\sup\{c, f\} = 1$ e $\inf\{c, f\} = a$;
  - $\sup\{c, h\} = e$ e $\inf\{c, h\} = a$;
  - $\sup\{d, e\} = 1$ e $\inf\{d, e\} = b$;
  - $\sup\{d, h\} = f$ e $\inf\{d, h\} = b$;
  - $\sup\{e, f\} = 1$ e $\inf\{e, f\} = h$.

O c.p.o. $(P_4, \leq)$ é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in P_4$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$:
- se $x, y \in \{0, a, b, c, d, 1\}$ e $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$;
- se $x, y \in \{a, b, c, d\}$ e $x \neq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = 1$ e $\inf\{x, y\} = 0$.

1.2. Mostre que cada um dos c.p.o.s a seguir indicados é um reticulado.

(a) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação *divide* definida em $\mathbb{N}$.

Um c.p.o. $(P, \leq)$ diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

O c.p.o. $(\mathbb{N}, |)$ é um reticulado, pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$, tendo-se $\inf\{x, y\} = \mathrm{m.d.c.}(x, y)$ e $\sup\{x, y\} = \mathrm{m.m.c.}(x, y)$.

É simples verificar que $\inf\{x, y\} = \mathrm{m.d.c.}(x, y)$. De facto,

- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{m.d.c.}(x, y) \in \mathbb{N}$;
- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{m.d.c.}(x, y) \,|\, x$ e $\mathrm{m.d.c.}(x, y) \,|\, y$ e, portanto, $\mathrm{m.d.c.}(x, y)$ é um minorante de $\{x, y\}$;
- para todo $z \in \mathbb{N}$, se $z \,|\, x$ e $z \,|\, y$, então $z \,|\, \mathrm{m.d.c.}(x, y)$, pelo que $\mathrm{m.d.c.}(x, y)$ é o maior minorante de $\{x, y\}$.

De modo análogo, conclui-se que $\sup\{x, y\} = \mathrm{m.m.c.}(x, y)$, pois:

- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{m.m.c.}(x, y) \in \mathbb{N}$;
- para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, $x \,|\, \mathrm{m.m.c.}(x, y)$ e $y \,|\, \mathrm{m.m.c.}(x, y)$ e, portanto, $\mathrm{m.m.c.}(x, y)$ é um majorante de $\{x, y\}$;
- para todo $z \in \mathbb{N}$, se $x \,|\, z$ e $y \,|\, z$, então $\mathrm{m.m.c.}(x, y) \,|\, z$, pelo que $\mathrm{m.m.c.}(x, y)$ é o menor majorante de $\{x, y\}$.

(b) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto A e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

Um c.p.o. $(P, \leq)$ diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, existe $\sup\{X, Y\}$. Tem-se $\sup\{X, Y\} = X \cup Y$, pois:

- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \cup Y \in \mathcal{P}(A)$;
- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$ e, portanto, $X \cup Y$ é um majorante de $\{X, Y\}$;
- para todo $Z \in \mathcal{P}(A)$, se $X \subseteq Z$ e $Y \subseteq Z$, então $X \cup Y \subseteq Z$, pelo que $X \cup Y$ é o menor dos majorantes de $\{X, Y\}$.

Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, também existe $\inf\{X, Y\}$, tendo-se $\inf\{X, Y\} = X \cap Y$. De facto,

- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \cap Y \in \mathcal{P}(A)$;
- para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$ e, portanto, $X \cap Y$ é um minorante de $\{X, Y\}$;
- para todo $Z \in \mathcal{P}(A)$, se $Z \subseteq X$ e $Z \subseteq Y$, então $Z \subseteq X \cap Y$, pelo que $X \cap Y$ é o maior dos minorantes de $\{X, Y\}$.

Portanto, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é um reticulado.

(c) $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\mathrm{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

Um c.p.o. $(P, \leq)$ diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Para quaisquer $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$, existem $\sup\{G_1, G_2\}$ e $\inf\{G_1, G_2\}$. É simples verificar que $\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2$ e $\sup\{G_1, G_2\} =< G_1 \cup G_2 >$, onde $< G_1 \cup G_2 >$ representa o subgrupo de G gerado por $G_1 \cup G_2$.

É imediato que $\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2$, pois:

- para quaisquer $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$, $G_1 \cap G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$;
- para quaisquer $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$, tem-se $G_1 \cap G_2 \subseteq G_1$ e $G_1 \cap G_2 \subseteq G_2$ e, portanto, $G_1 \cap G_2$ é um minorante de $\{G_1, G_2\}$;
- para todo $Z \in \mathrm{Subg}(G)$, se $Z \subseteq G_1$ e $Z \subseteq G_2$, tem-se $Z \subseteq G_1 \cap G_2$, pelo que $G_1 \cap G_2$ é o maior minorante de $\{G_1, G_2\}$.

Também é simples provar que $\sup\{G_1, G_2\} =< G_1 \cup G_2 >$, uma vez que

- para quaisquer $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$, $< G_1 \cup G_2 >\in \mathrm{Subg}(G)$;
- para quaisquer $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$, temos $G_1 \subseteq< G_1 \cup G_2 >$ e $G_2 \subseteq< G_1 \cup G_2 >$ e, portanto, $< G_1 \cup G_2 >$ é um majorante de $\{G_1, G_2\}$;
- para todo $Z \in \mathrm{Subg}(G)$, se $G_1 \subseteq Z$ e $G_2 \subseteq Z$, tem-se $G_1 \cup G_2 \subseteq Z$ e, portanto, $< G_1 \cup G_2 >\subseteq Z$ (uma vez que $< G_1 \cup G_2 >$ é o menor subgrupo de G que contém $G_1 \cup G_2$). Assim, $< G_1 \cup G_2 >$ é o menor dos majorantes de $G_1 \cup G_2$.

Portanto, $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ é um reticulado.

1.3. Prove que toda a cadeia é um reticulado.

Um c.p.o. $(P, \leq)$ diz-se um reticulado se, para quaisquer $x, y \in P$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Seja $(R, \leq)$ uma cadeia. Então, para quaisquer $x, y \in R$, temos $x \leq y$ ou $y \leq x$. Se $x \leq y$, tem-se $\sup\{x, y\} = y$ e $\inf\{x, y\} = x$; se $y \leq x$, temos $\sup\{x, y\} = x$ e $\inf\{x, y\} = y$. Logo, para quaisquer $x, y \in R$, existem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ e, portanto, $(R, \leq)$ é um reticulado.

1.4. Seja $(R; \wedge, \vee)$ o reticulado cujas operações $\wedge$ e $\vee$ são as descritas através das tabelas seguintes

$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

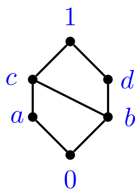
$\vee$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	b	c	d	1
c	c	c	c	c	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

Considere o reticulado interpretado como um conjunto parcialmente ordenado e represente-o através de um diagrama de Hasse.

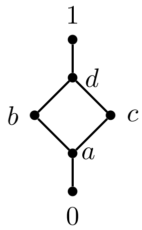
O reticulado $(R; \wedge, \vee)$, interpretado como um conjunto parcialmente ordenado, corresponde ao reticulado $(R, \leq)$ onde $\leq$ é a relação de ordem parcial definida por

$$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y, \ \forall_{x,y \in R}.$$

O reticulado $(R; \leq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



1.5. Seja $(R, \leq)$ o reticulado representado ao lado.



Considere este reticulado interpretado como uma estrutura algébrica $(R; \wedge, \vee)$ e indique as tabelas das operações $\wedge$ e $\vee$.

O reticulado $(R, \leq)$, interpretado como uma estrutura algébrica, corresponde ao reticulado $(R; \wedge, \vee)$ onde $\wedge$ e $\vee$ são as operações definidas por

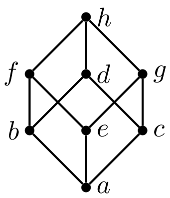
$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad \forall_{x,y \in R}.$$

As operações do reticulado $(R; \wedge, \vee)$ podem ser descritas pelas tabelas seguintes

$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b	b
c	0	a	a	c	c	c
d	0	a	b	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\vee$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	b	c	d	1
b	b	b	b	d	d	1
c	c	c	d	c	d	1
d	d	d	d	d	d	1
1	1	1	1	1	1	1

1.6. Considere o reticulado $(R, \leq)$ a seguir representado.



Para cada um dos conjuntos R' a seguir indicados, diga se $(R', \leq_{|_{R'}})$ é um sub-reticulado de $(R, \leq)$.

(a) $R' = \{a, b, c, d\}$.

Seja S um subconjunto não vazio de R. Um c.p.o. $(S, \leq')$ diz-se um sub-reticulado de $(R, \leq)$ se $\leq' = \leq_{|_S}$ e, para quaisquer $x, y \in S$, $\inf\{x, y\} \in S$ e $\sup\{x, y\} \in S$.

O c.p.o. $(R', \leq_{|_{R'}})$ é um sub-reticulado de $(R, \leq)$, pois:

- para quaisquer $x, y \in R'$ tais que $x \leq y$, $\inf\{x, y\} = x \in R'$ e $\sup\{x, y\} = y \in R'$;
- $\inf\{b, c\} = a \in R'$ e $\sup\{b, c\} = d \in R'$.

(b) $R' = \{b, c, f, g\}$.

Seja S um subconjunto não vazio de R. Um c.p.o. $(S, \leq')$ diz-se um sub-reticulado de $(R, \leq)$ se $\leq' = \leq_{|_S}$ e, para quaisquer $x, y \in S$, $\inf\{x, y\} \in S$ e $\sup\{x, y\} \in S$.

O c.p.o. $(R', \leq_{|_{R'}})$ não é um sub-reticulado de $(R, \leq)$, pois $\sup\{b, c\} = d$ e $d \notin R'$.

(c) $R' = \{a, b, f, g, h\}$.

Seja S um subconjunto não vazio de R. Um c.p.o. $(S, \leq')$ diz-se um sub-reticulado de $(R, \leq)$ se $\leq' = \leq_{|_S}$ e, para quaisquer $x, y \in S$, $\inf\{x, y\} \in S$ e $\sup\{x, y\} \in S$.

O c.p.o. $(R', \leq_{|_{R'}})$ não é um sub-reticulado de $(R, \leq)$, pois $\inf\{f, g\} = e$ e $e \notin R'$.

1.7. Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Um subconjunto não vazio I de R diz-se um *ideal de* $\mathcal{R}$ se

1. $(\forall x, y \in R)\ \ x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$;
2. $(\forall x \in I)(\forall y \in R)\ \ y \wedge x = y \Rightarrow y \in I$.

Mostre que $\mathcal{I} = (I; \wedge_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{I}})$, onde I é um ideal de $\mathcal{R}$ e $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ são as correspondências de I^2 em R definidas por

$$x \wedge_{\mathcal{I}} y = x \wedge y, \quad x \vee_{\mathcal{I}} y = x \vee y, \ \forall x, y \in I,$$

é um sub-reticulado de $\mathcal{R}$.

Seja R' um subconjunto de R. Um triplo $(R'; \wedge', \vee')$ diz-se um sub-reticulado de $(R; \wedge, \vee)$ se:

i) $R' \neq \emptyset$;

ii) para quaisquer $x, y \in R'$, $x \wedge' y = x \wedge y \in R'$ e $x \vee' y = x \vee y \in R'$;

iii) $\wedge'$ e $\vee'$ são operações binárias em R',

Mostremos que $\mathcal{I} = (I; \wedge_{\mathcal{I}}, \vee_{\mathcal{I}})$ satisfaz as três condições indicadas.

i) Uma vez que $\mathcal{I}$ é um ideal de $\mathcal{R}$, tem-se $I \neq \emptyset$.

ii) Pela definição de $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ é imediato que, para quaisquer $x, y \in I$,

$$x \wedge_{\mathcal{I}} y = x \wedge y, \quad x \vee_{\mathcal{I}} y = x \vee y.$$

Resta provar que I é fechado para as operações $\wedge$ e $\vee$. Por 1., é imediato que, para quaisquer $x, y \in I$, $x \vee y \in I$. Por outro lado, considerando que, para quaisquer $x, y \in I$, $x \wedge y \in R$ e $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge y$, de 2. resulta que $x \wedge y \in I$.

iii) Atendendo a ii) e considerando que $\wedge$ e $\vee$ são operações binárias em R, resulta que $\wedge_{\mathcal{I}}$ e $\vee_{\mathcal{I}}$ são operações binárias em I.

Logo $\mathcal{I}$ é um sub-reticulado de $\mathcal{R}$.

1.8. (a) Sejam $(R_1, \leq_1)$ e $(R_2, \leq_2)$ reticulados. Mostre que o par $(R_1 \times R_2, \leq)$, onde $\leq$ é a relação binária em $R_1 \times R_2$ definida por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ sse } a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2,$$

é um reticulado.

Comecemos por mostrar que a relação $\leq$ é uma relação de ordem parcial.

i) Para qualquer $(x, y) \in R_1 \times R_2$, tem-se $x \leq_1 x$ e $y \leq_2 y$, pois $\leq_1$ e $\leq_2$ são relações reflexivas. Logo, para qualquer $(x, y) \in R_1 \times R_2$, $(x, y) \leq (x, y)$. Portanto, $\leq$ é reflexiva.

ii) Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$ tais que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (x_1, x_2)$. Então $x_1 \leq_1 y_1$, $x_2 \leq_2 y_2$, $y_1 \leq_1 x_1$ e $y_2 \leq_2 x_2$. Considerando que $\leq_1$ e $\leq_2$ são relações antissimétricas, segue que $x_1 = y_1$ e $x_2 = y_2$. Logo $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Portanto, a relação $\leq$ é antissimétrica.

iii) Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in R_1 \times R_2$ tais que $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (z_1, z_2)$. Então $x_1 \leq_1 y_1$, $x_2 \leq_2 y_2$, $y_1 \leq_1 z_1$ e $y_2 \leq_2 z_2$. Considerando que $\leq_1$ e $\leq_2$ são relações transitivas, segue que $x_1 \leq_1 z_1$ e $x_2 \leq_2 z_2$. Logo $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$. Portanto, a relação $\leq$ é transitiva.
De i), ii) e iii) conclui-se que a relação $\leq$ é uma ordem parcial.

Resta mostrar que, para quaisquer $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$, existem $\sup\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ e $\inf\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$.
Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$. Uma vez que $(R_1, \leq_1)$ é um reticulado e $x_1, y_1 \in R_1$, existe $\sup\{x_1, y_1\}$. Como $(R_2, \leq_2)$ é um reticulado e $x_2, y_2 \in R_2$, também existe $\sup\{x_2, y_2\}$. Sejam $s_1 = \sup\{x_1, y_1\}$ e $s_2 = \sup\{x_2, y_2\}$. É simples verificar que $\sup\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = (s_1, s_2)$, pois:

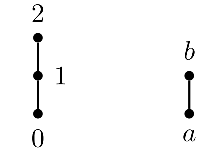
- $(s_1, s_2) \in R_1 \times R_2$;
- $x_1, y_1 \leq_1 s_1$ e $x_2, y_2 \leq_2 s_2$, pelo que $(x_1, x_2) \leq (s_1, s_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (s_1, s_2)$;
- para qualquer $(z_1, z_2) \in R_1 \times R_2$, se $(x_1, x_2) \leq (z_1, z_2)$ e $(y_1, y_2) \leq (z_1, z_2)$, tem-se $x_1, y_1 \leq_1 z_1$ e $x_2, y_2 \leq_2 z_2$, donde segue que $s_1 \leq z_1$ e $s_2 \leq z_2$. Portanto, $(s_1, s_2) \leq (z_1, z_2)$.

De forma análoga prova-se que, para quaisquer $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R_1 \times R_2$, existe $\inf\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$. De facto, como $(R_1, \leq_1)$ é um reticulado e $x_1, y_1 \in R_1$, existe $\inf\{x_1, y_1\}$. Como $(R_2, \leq_2)$ é um reticulado e $x_2, y_2 \in R_2$, também existe $\inf\{x_2, y_2\}$. Sejam $i_1 = \inf\{x_1, y_1\}$ e $i_2 = \inf\{x_2, y_2\}$. Daqui segue que $\inf\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = (i_1, i_2)$, pois:

- $(i_1, i_2) \in R_1 \times R_2$;
- $i_1 \leq_1 x_1, y_1$ e $i_2 \leq_2 x_2, y_2$, pelo que $(i_1, i_2) \leq (x_1, x_2)$ e $(i_1, i_2) \leq (y_1, y_2)$;
- para qualquer $(z_1, z_2) \in R_1 \times R_2$, se $(z_1, z_2) \leq (x_1, x_2)$ e $(z_1, z_2) \leq (y_1, y_2)$, tem-se $z_1 \leq_1 x_1, y_1$ e $z_2 \leq x_2, y_2$, donde resulta $z_1 \leq_1 i_1$ e $i_2 \leq_2 s_2$. Portanto, $(z_1, z_2) \leq (i_1, i_2)$.

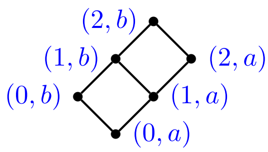
Logo $(R_1 \times R_2, \leq)$ é um reticulado.

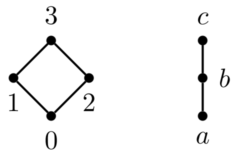
(b) Considerando que $(R_1, \leq_1)$ e $(R_2, \leq_2)$ representam os reticulados a seguir indicados, desenhe o diagrama de Hasse do reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$:

i. 

$(R_1, \leq_1)$ $(R_2, \leq_2)$

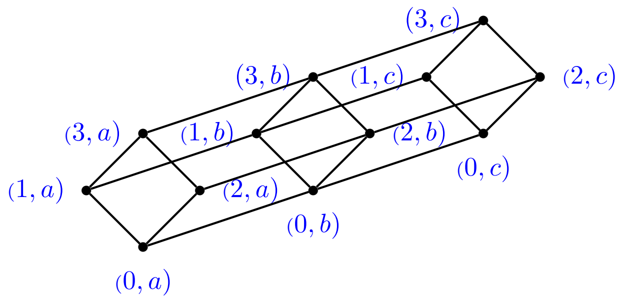
O reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$ é o reticulado representado pelo diagrama de Hasse seguinte



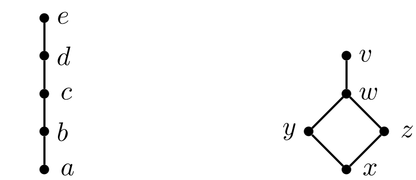
ii. 

$(R_1, \leq_1)$ $(R_2, \leq_2)$

O reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$ é o reticulado representado pelo diagrama de Hasse seguinte



1.9. Considere os reticulados $(R_1, \leq_1)$ e $(R_2, \leq_2)$ a seguir representados



$(R_1, \leq_1)$ $(R_2, \leq_2)$

Para cada uma das aplicações h seguintes, diga se: i. h é isótona; ii. h é um isomorfismo.

(a) $h : R_1 \to R_1$, definida por $h(a) = a$, $h(b) = c$, $h(c) = d$, $h(d) = e$, $h(e) = e$.

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \to P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h é uma aplicação isótona de $(R_1, \leq_1)$ em $(R_1, \leq_1)$, pois, para quaisquer $s, t \in P_1$,

$$s \leq_1 t \Rightarrow h(s) \leq_1 h(t).$$

A aplicação h não é um isomorfismo de $(R_1, \leq_1)$ em $(R_1, \leq_1)$, uma vez que h não é sobrejetiva ($b \in R_1$ e $b \neq h(s)$, para todo $s \in R_1$).

(b) $h : R_1 \to R_2$, definida por $h(a) = x$, $h(b) = y$, $h(c) = z$, $h(d) = w$, $h(e) = v$.

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \to P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h não é uma aplicação isótona de $(R_1, \leq_1)$ em $(R_2, \leq_2)$, pois, $b, c \in R_1$, $b \leq_1 c$ e $h(b) = y \not\leq_2 z = h(c)$.

Todo o isomorfismo é uma aplicação isótona. Uma vez que h não é isótona, então h não é um isomorfismo de $(R_1, \leq_1)$ em $(R_2, \leq_2)$.

(c) $h : R_2 \to R_1$, definida por $h(x) = a$, $h(y) = b$, $h(z) = c$, $h(w) = d$, $h(v) = e$.

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \to P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h é uma aplicação isótona de $(R_2, \leq_2)$ em $(R_1, \leq_1)$, pois, para quaisquer $s, t \in R_2$,

$$s \leq_2 t \Rightarrow h(s) \leq_1 h(t).$$

(Note-se que:
- $y \leq_2 z \Rightarrow h(y) \leq_1 h(z)$ é verdadeiro, pois $y \leq_2 z$ é falso;
- $z \leq_2 y \Rightarrow h(z) \leq_1 h(y)$ é verdadeiro, pois $z \leq_2 y$ é falso.)

A aplicação h não é um isomorfismo de $(R_2, \leq_2)$ em $(R_1, \leq_1)$, uma vez que h não é um mergulho de ordem: tem-se $y, z \in R_2$, $h(y) = b \leq_1 c = h(z)$ e $y \not\leq_2 z$.

(d) $h : R_2 \to R_2$, definida por $h(x) = x$, $h(y) = z$, $h(z) = y$, $h(w) = w$, $h(v) = v$.

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \to P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α é um isomorfismo de c.p.o.s se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h é uma aplicação isótona de $(R_2, \leq_2)$ em $(R_2, \leq_2)$, pois, para quaisquer $s, t \in R_2$,

$$s \leq_2 t \Rightarrow h(s) \leq_2 h(t).$$

(Note-se que:
- $y \leq_2 z \Rightarrow h(y) \leq_2 h(z)$ é verdadeiro, pois $y \leq_2 z$ é falso;
- $z \leq_2 y \Rightarrow h(z) \leq_2 h(y)$ é verdadeiro, pois $z \leq_2 y$ é falso.)

A aplicação h é um mergulho de ordem de $(R_2, \leq_2)$ em $(R_2, \leq_2)$, uma vez que, para quaisquer $s, t \in R_2$,

$$h(s) \leq_2 h(t) \Rightarrow s \leq_2 t.$$

Além disso, a aplicação h é sobjetiva, pois, $h(R_2) = R_2$. Logo, h é um isomorfismo de $(R_2, \leq_2)$ em $(R_2, \leq_2)$.

1.10. Considerando os reticulados $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$ e $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, diga se cada uma das aplicações a seguir definidas é um homomorfismo.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = nx$, para todo $x \in \mathbb{N}$ (com $n \in \mathbb{N}$ fixo).

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \to R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

Então, atendendo a que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se

- $f(m.d.c.(a, b)) = n \times m.d.c.(a, b) = m.d.c.(na, nb) = m.d.c.(f(a), f(b))$,
- $f(m.m.c.(a, b)) = n \times m.m.c.(a, b) = m.m.c.(na, nb) = m.m.c.(f(a), f(b))$,

concluímos que f é um homomorfismo de $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$ em $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$.

(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x + 2$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \to R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

A aplicação g não é um homomorfismo de $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$ em $(\mathbb{N}, m.d.c, m.m.c)$, pois existem $2, 4 \in \mathbb{N}$ tais que

$$g(m.m.c.(2, 4)) = m.m.c.(2, 4) + 2 = 6 \neq 12 = m.m.c.(2 + 2, 4 + 2) = m.m.c.(g(2), g(4)).$$

(c) $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $h(\emptyset) = \emptyset$ e $h(A) = \mathbb{N}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \to R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

A aplicação h não é um homomorfismo de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$ em $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, pois existem $A = \{1\}$ e $B = \{2\} \in \mathbb{N}$ tais que

$$h(A \cap B) = h(\emptyset) = \emptyset \neq \mathbb{N} = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = h(A) \cap h(B).$$

(d) $k : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $k(A) = A \cap \{1,2\}$, para todo $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \to R_2$ uma aplicação. Diz-se que α é um homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b).$$

A aplicação k é um homomorfismo de $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$ em $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$, pois:

- para quaisquer $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\begin{array}{rcll} h(A \cap B) & = & (A \cap B) & \\ & = & (A \cap B) \cap \{1,2\} & \\ & = & (A \cap \{1,2\}) \cap (B \cap \{1,2\}) & \text{(associatividade, comutatividade, idempotência da operação } \cap) \\ & = & h(A) \cap h(B); & \end{array}$$

- para quaisquer $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\begin{array}{rcll} h(A \cup B) & = & (A \cup B) & \\ & = & (A \cup B) \cap \{1,2\} & \\ & = & (A \cap \{1,2\}) \cup (B \cap \{1,2\}) & \text{(distributividade da operação } \cap \text{ relativamente a } \cup) \\ & = & h(A) \cap h(B). & \end{array}$$

1.11. Mostre que se $(P, \leq)$ é um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$, então $(P, \leq)$ é um reticulado completo.

Seja $(P, \leq)$ um c.p.o. tal que, para todo $H \subseteq P$, existe $\inf H$. Para mostrar que $(P, \leq)$ é um reticulado completo, resta mostrar que, para qualquer $H \subseteq P$, existe $\sup H$. Sejam $H \subseteq P$ e $M = \mathrm{Maj} H$. Por hipótese, existe $\inf M$; seja $s = \inf M$. Prova-se que $s = \sup H$. De facto, como $M = \mathrm{Maj} H$, para quaisquer $h \in H$ e $m \in M$, temos $h \leq m$. Logo, para todo $h \in H$, h é um minorante de H. Então, considerando que s é o maior dos minorantes de M, segue que, para todo $h \in H$, $h \leq s$. Assim, s é um majorante de H. Além disso, prova-se que s é o menor dos majorantes de H. De facto, se admitirmos que s' é um majorante de H, tem-se $s' \in M$ donde segue que $s \leq s'$, pois s é minorante de M. Portanto $s = \sup H$. Para qualquer $H \subseteq P$, existem $\inf H$ e $\sup H$, logo $(P, \leq)$ é um reticulado completo.

1.12. Justifique que cada um dos reticulados a seguir indicados é um reticulado algébrico:

(a) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto A e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os subconjuntos finitos de A).

Seja $(P, \leq)$ um reticulado. Um elemento a de P diz-se compacto se sempre que existe $\bigvee S$ e $a \leq \bigvee S$, para algum $S \subseteq P$, tem-se $a \leq \bigvee S'$ para algum conjunto finito S' tal que $S' \subseteq S$.

O reticulado $(P, \leq)$ diz-se:

- um reticulado completo sse, para qualquer $S \subseteq P$, existe $\bigvee S$.
- compactamente gerado se, para todo $a \in P$, $a = \bigvee S$, onde S é um conjunto de elementos compactos de P.
- um reticulado algébrico se é um reticulado completo e compactamente gerado.

Seja A um conjunto. O reticulado $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é completo, pois, para qualquer $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, existe $\bigvee S$. De facto, se $S = (A_i)_{i \in I}$ é uma família de subconjuntos de A, então:

- $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$;
- $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, para todo $j \in I$;
- se Z é um subconjunto de A tal que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq Z$, tem-se $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq Z$.

Logo existe $\bigvee S$ e $\bigvee S = \bigcup_{i \in I} A_i$.

No sentido de mostrar que o reticulado $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é compactamente gerado, comecemos por mostrar que os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os conjuntos finitos.

Seja X um subconjunto finito de A e admitamos que $X \subseteq \bigvee S$, para algum $S \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Então $X \subseteq \bigcup_{Y \in S} Y$. Como X é finito, existe $S' \subseteq S$ tal que S' é finito e $X \subseteq \bigcup_{Y \in S'} Y = \bigvee S'$. Portanto, X é compacto. Reciprocamente, admitamos que X é compacto e mostremos que X é finito. Uma vez que $X \subseteq \bigvee_{x \in X} \{x\} = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ e X é compacto, existe $Y \subseteq X$ tal que Y é finito e $X \subseteq \bigvee_{x \in Y} \{x\} = \bigcup_{x \in Y} \{x\}$; portanto, X é finito. Por conseguinte, os elementos compactos de $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ são os conjuntos finitos.

Consequentemente, $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$ é compactamente gerado, pois, para todo $X \in \mathcal{P}(A)$, tem-se $X = \bigcup_{x \in X} \{x\} = \bigvee_{x \in X} \{x\}$ e, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é um elemento compacto.

(b) $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\mathrm{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual (os elementos compactos de $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados).

Seja $(P, \leq)$ um reticulado.
Um elemento a de P diz-se compacto se sempre que existe $\bigvee S$ e $a \leq \bigvee S$, para algum $S \subseteq P$, tem-se $a \leq \bigvee S'$ para algum conjunto finito S' tal que $S' \subseteq S$.
O reticulado $(P, \leq)$ diz-se:

- um reticulado completo sse, para qualquer $S \subseteq P$, existe $\bigvee S$.
- compactamente gerado se, para todo $a \in P$, $a = \bigvee S$, onde S é um conjunto de elementos compactos de P.
- um reticulado algébrico se é um reticulado completo e compactamente gerado.

Seja G um grupo. O reticulado $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ é completo, pois, para qualquer $S \subseteq \mathrm{Subg}(G)$, existe $\bigvee S$. De facto, se $S = \{G_i\}_{i \in I}$ é uma família de subgrupos de G, então:

- $< \bigcup_{i \in I} G_i > \in \mathrm{Subg}(G)$;
- $G_j \subseteq < \bigcup_{i \in I} G_i >$, para todo $j \in I$;
- se Z é um elemento de $\mathrm{Subg}(G)$ tal que, para todo $i \in I$, $G_i \subseteq Z$, tem-se $< \bigcup_{i \in I} G_i > \subseteq Z$.

Logo existe $\bigvee S$ e $\bigvee S = < \bigcup_{i \in I} G_i >$.

No sentido de mostrar que o reticulado $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ é compactamente gerado, comecemos por mostrar que os elementos compactos de $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados.
Seja H um subgrupo de G finitamente gerado e admitamos que $H \subseteq \bigvee S$, para algum $S \subseteq \mathrm{Subg}(G)$. Como $H \subseteq \bigvee S$, para algum $S \subseteq \mathrm{Subg}(G)$, temos $H \subseteq \bigvee_{i \in I} S_i = < \bigcup_{i \in I} S_i >$ para alguma família $\{S_i\}_{i \in I}$ de subgrupos de G. Como H é finitamente gerado, temos $H = < h_1, \ldots, h_n >$, para alguns $n \in \mathbb{N}$ e $h_1, \ldots, h_n \in G$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $h_k \in H$, pelo que $h_k \in < \bigcup_{i \in I} S_i >$. Daqui segue que $h_k \in < F_k >$, para algum conjunto finito F_k tal que $F_k \subseteq \bigcup_{i \in I} S_i$, ou seja, $h_k \in < \bigcup_{i \in I_k} S_i >$, para algum conjunto finito $I_k \subseteq I$. Então $h_1, \ldots, h_n \in < \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i \in I_k} S_i >$, onde, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, I_k é finito. Sendo H o menor subgrupo de G que contém $\{h_1, \ldots, h_n\}$ segue que $H \subseteq < \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i \in I_k} S_i >$. Logo $H \subseteq \bigvee S'$, para algum conjunto finito $S' \subseteq S$. Portanto, H é compacto.
Reciprocamente, admitamos que H é compacto e mostremos que H é finitamente gerado. Uma vez que

$$H \subseteq < \bigcup_{h \in H} < h > > = \bigvee_{h \in H} < h >$$

e H é compacto, existe $H' \subseteq H$ tal que H' é finito e

$$H \subseteq \bigvee_{h \in H'} < h > = < \bigcup_{h \in H'} < h > > .$$

Considerando que $< \bigcup_{h \in H'} < h > > = < H' >$, conclui-se que H é finitamente gerado.
Assim, os elementos compactos de $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ são os subgrupos de G finitamente gerados.
Consequentemente, $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$ é compactamente gerado, pois, para todo $H \in \mathrm{Subg}(G)$, tem-se $H = \bigvee_{h \in H} < h >$ e, para todo $h \in H$, $< h >$ é um elemento compacto.

1.13. Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ reticulados. Mostre que:

(a) Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular), então qualquer sub-reticulado de $\mathcal{R}$ é distributivo (modular).

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge_{\mathcal{R}}, \vee_{\mathcal{R}})$ um reticulado distributivo e $\mathcal{S} = (S; \wedge_{\mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{S}})$ um sub-reticulado de $\mathcal{R}$. Então $S \subseteq R$ e, para quaisquer $x, y \in S$,

$$x \wedge_{\mathcal{S}} y = x \wedge_{\mathcal{R}} y,$$

$$x \vee_{\mathcal{S}} y = x \vee_{\mathcal{R}} y.$$

Logo, para quaisquer $x, y, z \in S$, tem-se,

$$\begin{aligned} x \wedge_{\mathcal{S}} (y \vee_{\mathcal{S}} z) &= x \wedge_{\mathcal{R}} (y \vee_{\mathcal{R}} z) \\ &= (x \wedge_{\mathcal{R}} y) \vee_{\mathcal{R}} (x \wedge_{\mathcal{R}} z) \quad (\mathcal{R} \text{ é distribuivo}) \\ &= (x \wedge_{\mathcal{S}} y) \vee_{\mathcal{S}} (x \wedge_{\mathcal{S}} z). \end{aligned}$$

Logo S é distributivo.

De modo análogo prova-se que todo o sub-reticulado de um reticulado modular também é um reticulado modular.

(b) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge_{\mathcal{R}}, \vee_{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \wedge_{\mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{S}})$ reticulados distributivos. Então

$$\mathcal{R} \times \mathcal{S} = (R \times S; \wedge_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}}),$$

onde $\wedge_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}}$ e $\vee_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}}$ são as operações binárias em $R \times S$ definidas por

$$(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} (b_1, b_2) = (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{S}} b_2),$$
$$(a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} (b_1, b_2) = (a_1 \vee_{\mathcal{R}} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{S}} b_2),$$

é um reticulado.

Considerando, que $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são distributivos, para quaisquer $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in R \times S$, tem-se

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} ((b_1, b_2) \vee_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} (c_1, c_2)) &= (a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} (b_1 \vee_{\mathcal{R}} c_1, b_2 \vee_{\mathcal{S}} c_2) \\
&= (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} (b_1 \vee_{\mathcal{R}} c_1), a_2 \wedge_{\mathcal{S}} (b_2 \vee_{\mathcal{S}} c_2)) \\
&= ((a_1 \wedge_{\mathcal{R}} b_1) \vee_{\mathcal{R}} (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} c_1), (a_2 \wedge_{\mathcal{S}} b_2) \vee_{\mathcal{S}} (a_2 \wedge_{\mathcal{S}} c_2)) \quad (1) \\
&= (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{S}} b_2) \vee_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} (a_1 \wedge_{\mathcal{R}} c_1, a_2 \wedge_{\mathcal{S}} c_2) \\
&= ((a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} (b_1, b_2)) \vee_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} ((a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}\times\mathcal{S}} (c_1, c_2))
\end{aligned}$$

(1) $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são distributivos

Logo $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo.

De modo similar prova-se que se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são modulares, então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é modular.

(c) Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular) e $\mathcal{S}$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}$, então $\mathcal{S}$ é distributivo (modular).

Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge_{\mathcal{R}}, \vee_{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \wedge_{\mathcal{S}}, \vee_{\mathcal{S}})$ reticulados tais que $\mathcal{S}$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}$. Então existe um homomorfismo $h : R \to S$ tal que h é sobrejetivo.

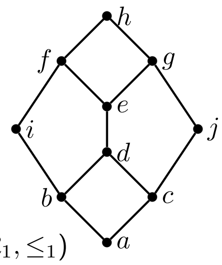
Sendo $\mathcal{R}$ um reticulado distributivo (modular), prova-se que $\mathcal{S} = h(\mathcal{R})$ também é um reticulado distributivo (modular), uma vez que, para qualquer $y \in S$, existe $x \in R$ tal que $y = h(x)$ e, para quaisquer $a, b \in R$,

$$h(a \wedge_{\mathcal{R}} b) = h(a) \wedge_{\mathcal{S}} h(b),$$

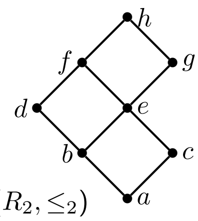
$$h(a \vee_{\mathcal{R}} b) = h(a) \vee_{\mathcal{S}} h(b).$$

Fica ao cuidado do aluno a verificação de que $\mathcal{S}$ é um reticulado distributivo (modular).

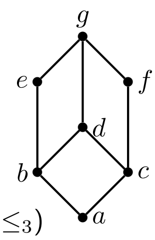
1.14. Diga, justificando, quais dos seguintes reticulados são distributivos e quais são modulares.



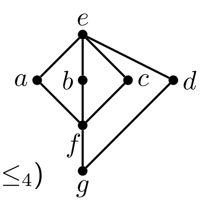
$(R_1, \leq_1)$



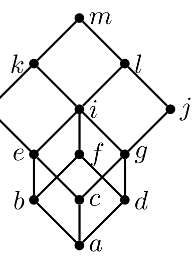
$(R_2, \leq_2)$



$(R_3, \leq_3)$



$(R_4, \leq_4)$

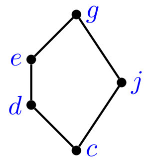


$(R_5, \leq_5)$

Um reticulado $(R, \leq)$ é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5 ou a M_3. Um reticulado $(R, \leq)$ é modular se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5.

- $(R_1, \leq_1)$

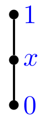
O reticulado $(R_1, \leq_1)$ não é modular, pois tem um sub-reticulado isomorfo a N_5. O reticulado a seguir indicado é um sub-reticulado de $(R_1, \leq_1)$ e é isomorfo a N_5.



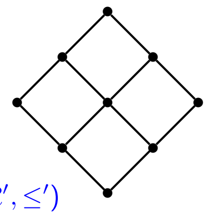
Todo o reticulado distributivo é um reticulado modular. Por conseguinte, $(R_1, \leq_1)$ não é distributivo.

- $(R_2, \leq_2)$

Seja $\mathcal{R}$ a cadeia com 3 elementos a seguir representada

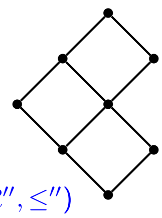


Então o reticulado $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ é isomorfo ao reticulado seguinte



$(R', \leq')$

Todas as cadeias são reticulados distributivos. O produto de reticulados distributivos é ainda um reticulado distributivo e toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distrbutivo. Logo $(R', \leq')$ é um reticulado distributivo. Todo o sub-reticulado de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo. Então o reticulado seguinte (o qual é um sub-reticulado de $(R', \leq')$)

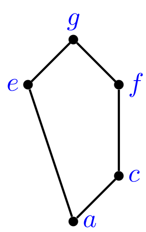


$(R'', \leq'')$

é um reticulado distributivo. O reticulado $(R_2, \leq_2)$ é uma imagem homomorfa do reticulado $(R'', \leq'')$. Considerando que toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é um reticulado distributivo, conclui-se que $(R_2, \leq_2)$ é um reticulado distributivo.

- $(R_3, \leq_3)$

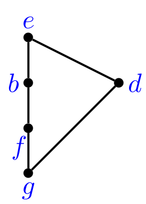
O reticulado a seguir representado



é um sub-reticulado de $(R_3, \leq_3)$ e é isomorfo a N_5. Logo $(R_3, \leq_3)$ não é modular. Como todo o reticulado distributivo é um reticulado modular, então $(R_3, \leq_3)$ não é distributivo.

- $(R_4, \leq_4)$

O reticulado seguinte

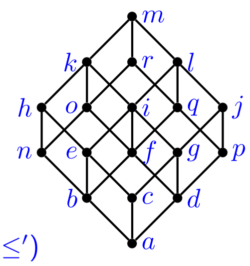


é um subreticulado de $(R_4, \leq_4)$ e é isomorfo a N_5, logo $(R_4, \leq_4)$ não é modular e, por conseguinte, também não é distributivo.

- $(R_5, \leq_5)$

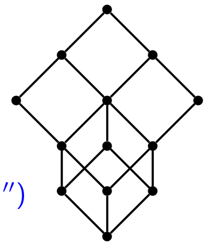
O reticulado $(\mathcal{R} \times \mathcal{R}) \times \mathcal{S}$, onde $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são, respetivamente, as cadeias com 3 e 2 elementos a seguir representadas

é isomorfo ao reticulado seguinte



$(R', \leq')$

Todas as cadeias são reticulados distributivos. O produto de reticulados distributivos é ainda um reticulado distributivo e toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distrbutivo. Logo $(R', \leq')$ é um reticulado distributivo. Todo o sub-reticulado de um reticulado distributivo é um reticulado distributivo. Então o reticulado seguinte (o qual é um sub-reticulado de $(R', \leq')$)



$(R'', \leq'')$

é um reticulado distributivo. O reticulado $(R_5, \leq_5)$ é uma imagem homomorfa do reticulado $(R'', \leq'')$. Considerando que toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo, conclui-se que $(R_5, \leq_5)$ é um reticulado distributivo.