Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação - 1º ano

1º teste - 6 nov 2015 Duração: 2 horas

---

1. Sejam p, q, r e s proposições. Sabendo que são verdadeiras as proposições $p \Rightarrow (q \Rightarrow \sim r)$, $r \Rightarrow p$, $(\sim s \vee \sim p) \Rightarrow r$ e $\sim s$, podemos afirmar que a proposição $\sim q$ é verdadeira?

2. Seja $s(X, Y) =$"X é subconjunto de Y.", onde o conjunto de variação de X e Y é $\mathcal{P}(A)$, para um dado conjunto A.

   (a) Utilizando a condição dada, exprima, por meio de uma proposição lógica, a afirmação

   "Todos os elementos de $\mathcal{P}(A)$ admitem pelo menos dois subconjuntos distintos."

   (b) Formule a negação da proposição dada e indique a valoração da proposição obtida.

3. Usando indução matemática, prove que:

   (a) para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 2$ é par;

   (b) para todo o natural $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

4. Dê, ou justifique que não existe, um exemplo de:

   (a) conjuntos A, B e C tais que $A \times B = A \times C$ e $B \neq C$;

   (b) conjuntos A e B tais que $A \cup B = A \cap B$ e $A \neq B$;

   (c) uma família de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\displaystyle\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Z}$ e $\displaystyle\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{-1, 1\}$;

   (d) um conjunto A e uma relação binária R em A tais que $R \neq \omega_A$ e $R \circ R = \omega_A$.

5. Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $C \subseteq A$ e $A \cap B = \emptyset$. Prove que

$$A \cup B \subseteq C \cup D \Rightarrow B \subseteq D:$$

   (a) fazendo uma prova direta;

   (b) fazendo uma prova por redução ao absurdo.

6. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $R = \{(1,2), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3)\}$ uma relação binária em A.

   (a) Mostre que $\mathrm{id}_A \subseteq R \circ R$ mas que $\mathrm{id}_A \neq R \circ R$.

   (b) Justifique que $(1, 2) \in R^{-1} \circ R$ e que $(1, 2) \notin R \circ R^{-1}$.

   (c) Determine $R \cup R^{-1}$ e $R \cap R^{-1}$.

   (d) Considere, em $\mathcal{P}(A)$, a relação binária S definida por

$$(X, Y) \in S \Leftrightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in Y)\ (x, y) \in R.$$

   Determine $S(\{2\})$ e $S^{-1}(\{2\})$.

Cotação: **1.** 2.0 **2.** 2×1.5 **3.** 2×1.5 **4.** 4×1.0 **5.** 2×1.5 **6.** $1.0 + 1.0 + 1.0 + 2.0$.