Universidade do Minho **Cursos: LCC & LMAT**

Departamento de Matemática **Folha 7** **2025/2026**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Mostre que
   (a) se $X \sim Bin(n,p)$ então $E[X] = np$ e $Va[X] = np(1-p)$;
   (b) se $X \sim Poisson(\lambda)$ então $E[X] = Var[X] = \lambda$;
   (c) se $X \sim Geom(p)$ então $E[X] = \frac{1}{p}$ e $Var[X] = (1-p)/p^2$;
   (d) se $X \sim U([a,b])$ então $E[X] = (a+b)/2$ e $Var[X] = (b-a)^2/12$;
   (e) se $X \sim Exp(\lambda)$ então $E[X] = 1/\lambda$ e $Var[X] = 1/\lambda^2$;
   (f) se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então $E[X] = \mu$ e $Var[X] = \sigma^2$.
   Nota: Antes de avançar para o cálculo de $E[X]$ e de $Var[X]$ mostre que estas existem.

2. Averigue se existem e, se sim, determine a esperança matemática, a variância e o desvio-padrão:
   (a) das v.a.r.'s discretas referidas nos exercícios 5 e 12 da Folha Prática 4;
   (b) das v.a.r.'s absolutamente contínuas referidas nos exercícios 1, 2 e 9 da Folha Prática 6.
   Determine ainda os quartis de cada uma das v.a.r.'s indicadas.

3. Sejam $X \sim Poisson(\lambda)$ e $Y = \frac{1}{1+X}$. Averigue se existe e, em caso afirmativo, calcule $E[Y]$.

4. Sejam $X \sim Exp(1)$ uma v.a.r. e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por
   $$\phi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & se \quad x \geq 0 \\ 0 & se \quad x < 0 \end{cases}.$$
   (a) Mostre que a v.a.r. $Y = \phi(X)$ tem esperança matemática e determine-a.
   (b) Em alternativa a a), identifique a lei de Y e obtenha $E[Y]$. Obtenha também $Var[Y]$.

5. A proporção de álcool num certo composto é uma v.a.r. absolutamente contínua, X, com função densidade de probabilidade dada por
   $$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & se \quad 0 < x < 1 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases}.$$
   (a) Determine a função de distribuição de X e, caso existam, calcule $E[X]$ e $Var[X]$.
   (b) O preço de venda, em €, deste composto depende da proporção de álcool: se a proporção de álcool é inferior a $1/3$, o preço é v_1€ por litro; se é superior ou igual a $1/3$ e inferior a $2/3$, o preço é v_2€ por litro; caso contrário, o preço é v_3€ por litro. O custo de produção é sempre de k€ por litro. Qual o lucro médio, por litro? E o desvio-padrão? Expresse os resultados em função das constantes reais v_1, v_2, v_3 e k.

6. (*) Para diferentes valores dos parâmetros das respectivas leis, esboce os gráficos das funções de probabilidade (caso discreto) e das funções densidade de probabilidade (no caso absolutamente contínuo) das v.a.r.'s referidas no Ex. 1. Comente sobre o efeito que esses parâmetros têm na forma dos gráficos [veja, por exemplo, https://imedil2023-statistics.streamlit.app/].

7. (*) Seja U uma v.a.r. tal que $U \sim \text{U}([0,1])$ e seja F a função de distribuição de uma qualquer v.a.r.. Define-se a *inversa generalizada* de F como sendo a função
   $$\begin{array}{rccl} \mathbb{F}^{-1}: &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & v & \to & \mathbb{F}^{-1}(v) = \inf\{u \in \mathbb{R} : F(u) \geq v\} \end{array}.$$
   Mostre que a função de distribuição da v.a.r. $X = \mathbb{F}^{-1}(U)$ é F.
   Nota: $\mathbb{F}^{-1}$ também é conhecida como *função quantil de F*. Esta designação é óbvia. Porquê?

(*) Exercícios desafio