

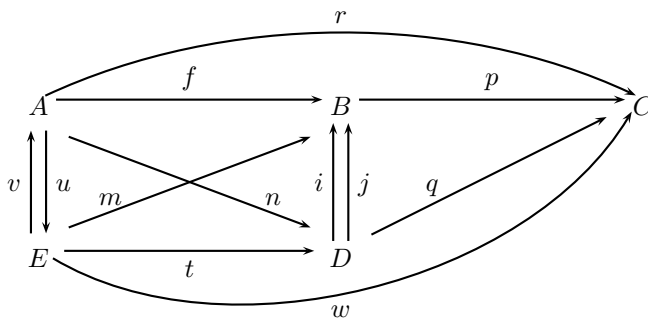
Álgebra Universal e Categorias

2º teste

duração: 1h45min

**Justifique todas as suas respostas, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.**

1. Considere a categoria  $\mathbf{C}$  representada pelo diagrama seguinte



Sem apresentar justificações, indique se existem, na categoria  $\mathbf{C}$ , morfismos e objetos nas condições a seguir indicadas. Caso existam, forneça um exemplo correspondente:

- Um morfismo que não seja um monomorfismo.
  - Um bimorfismo que não seja um isomorfismo.
  - Um isomorfismo que não seja um bimorfismo.
  - Objetos distintos e isomorfos.
- Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  morfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $f$  e  $g$  são epimorfismos, então  $g \circ f$  é um epimorfismo.
    - Dê exemplo de uma categoria  $\mathbf{C}$  na qual existam objetos  $A, B, C$  e morfismos  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$  tais que  $g \circ f$  é um epimorfismo, mas  $f$  não é um epimorfismo.
  - Sejam  $\mathbf{C}_1$  e  $\mathbf{C}_2$  categorias. Mostre que se  $\mathbf{C}_1$  e  $\mathbf{C}_2$  têm objetos iniciais, então a categoria produto  $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$  tem objeto inicial.
  - Na categoria **Set**, considere os conjuntos  $\{1\}$  e  $\mathbb{Z}$  e as funções  $i, f$  e  $g$  definidas por

$$\begin{array}{ccc} i : \{1\} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 3 + x \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 5 - x \end{array}.$$

Mostre que  $(\{1\}, i)$  é um igualizador de  $f$  e  $g$ .

- Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $A, B, C, I$  objetos de  $\mathbf{C}$  tais que  $I$  é um objeto inicial. Considere os morfismos  $f_A : I \rightarrow A$ ,  $f_B : I \rightarrow B$ ,  $i_A : A \rightarrow C$ ,  $i_B : B \rightarrow C$  em  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $(C, (i_A, i_B))$  é uma soma amalgamada de  $(f_A, f_B)$ , então  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ .
- Seja  $S = \{0, 1\}$ . Considere o funtor  $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$  da categoria **Set** nela própria tal que:
  - $F_{Obj} : \text{Obj}(\mathbf{Set}) \rightarrow \text{Obj}(\mathbf{Set})$  é a função que a cada conjunto  $A$  associa o conjunto  $A \times S$ ,
  - $F_{Mor} : \text{Mor}(\mathbf{Set}) \rightarrow \text{Mor}(\mathbf{Set})$  é a função que a cada **Set**-morfismo  $f : A \rightarrow B$  associa a função

$$F_{Mor}(f) : \begin{array}{ccc} F(A) & \rightarrow & F(B) \\ (x, y) & \mapsto & (f(x), y) \end{array}.$$

- Diga se o funtor  $F$  é fiel.
- Justifique que o funtor  $F$  não é pleno.
- Diga se o funtor  $F$  preserva objetos terminais.