Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

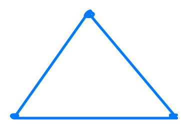
Licenciatura em Ciências da Computação
12/06/2024
Exame

Nome: Número:

1. Apresente, justificando, um exemplo de:

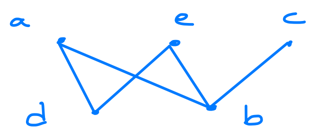
(a) um grafo platónico com 3 arestas.
(b) um grafo conexo bipartido não completo, com 5 vértices e um ciclo de comprimento 4.
(c) um grafo conexo que seja Euleriano mas não Hamiltoniano.

a) Considere-se o grafo $C_3 = K_3$.



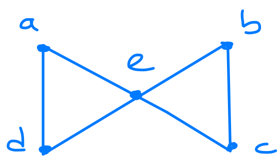
Este grafo claramente tem 3 arestas. Trata-se de um grafo conexo e planar. Cada vértice tem grau 2 e cada face (a interior e a exterior) é adjacente a 3 arestas. Logo é um grafo platónico.

b) Por exemplo, o grafo



Este grafo é conexo e tem 5 vértices. Tem um ciclo de comprimento 4: $\langle a, b, e, d, a \rangle$. É bipartido e não completo: tem partições $\{a, e, c\}$ e $\{d, b\}$ e c e d não são adjacentes.

d) Por exemplo, o grafo



Este grafo é Euleriano pois é conexo e todos os vértices têm grau par: $grau(a) = grau(b) = grau(c) = grau(d) = 2$ e $grau(e) = 4$.

O grafo não é Hamiltoniano. Como $grau(a) = grau(d) = 2$ então as arestas $\{a, d\}$, $\{a, e\}$ e $\{d, e\}$ teriam que fazer parte de um ciclo Hamiltoniano, mas estas arestas formam um ciclo que não percorre b nem c. Logo não existe um ciclo Hamiltoniano.

2. Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Existe um grafo conexo e planar com 5 vértices todos eles de grau 2 e tal que a sua representação planar tem 3 faces.

(b) O número cromático de um grafo semi-Euleriano é ímpar.

a) Falso

Se um grafo é conexo e planar então satisfaz a fórmula de Euler:

$$v - a + f = 2$$

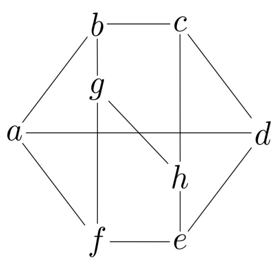
Neste caso $v = 5$ e $f = 3$. Além disso $2a = \sum_v \text{grau}(v) =$
$= 2 \times 5 = 10$. Logo $a = 5$

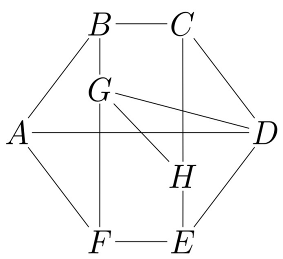
Mas $v - a + f = 5 - 5 + 3 = 3 \neq 2$ logo tal grafo não existe.

b) Falso.

O grafo é semi-Euleriano, pois é conexo e tem exatamente dois vértices de grau ímpar, e claramente tem número cromático 2 (par).

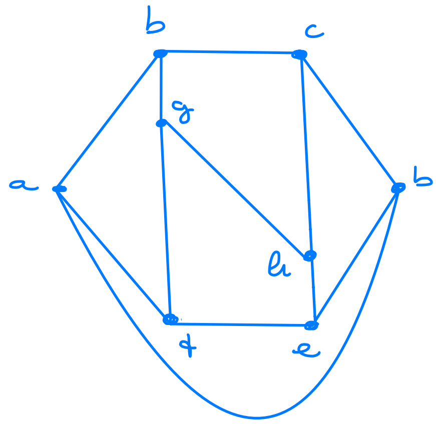
3. Justifique se cada um dos seguintes grafos (conexos) é ou não planar.



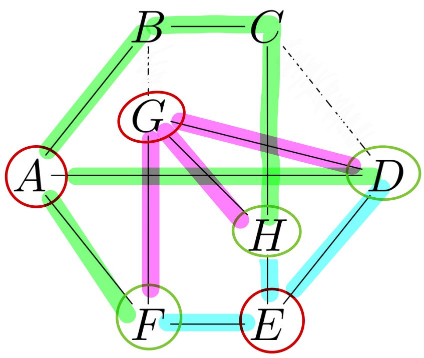


O grafo da esquerda é planar

A representação aqui apresentada é uma representação planar deste grafo.



Vejamos que o grafo da direita não é planar, usando o teorema de Kuratowski:



Eliminando as arestas $\{B,G\}$ e $\{C,D\}$ os vértices B e C passam a ter grau 2 pelo que o grafo apresentado tem um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$, como se vê na figura.

4. Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Como $-311 = (-15) \times 20 - 11$, o resto da divisão de -311 por 20 é 11.

(b) Se a, b e c são inteiros tais que $a|c$ e $b|c$ então $ab|c^2$.

(c) $7^{4782312} \equiv -2 \pmod 5$.

a) Falso

Temos $-311 = -15 \times 20 - 11 = -15 \times 20 - 11 - 20 + 20 = -16 \times 20 + 9$

O resto da divisão de -311 por 20 é então 9 e não 11.

b) Verdadeiro.

Como $a|c$ então existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $c = ax$

$b|c$ então existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $c = by$

Logo $c^2 = (ax)(by) = (ab)(xy)$ e, portanto, $ab|c^2$.

c) Falso.

Temos que $7^2 \equiv -1 \pmod 5$ e $4782312 = 2 \times 2391156$.

Logo $7^{4782312} \equiv (-1)^{2391156} \pmod 5$, ou seja, $7^{4782312} \equiv 1 \pmod 5$

pelo que $7^{4782312} \not\equiv -2 \pmod 5$, uma vez que $1 \not\equiv -2 \pmod 5$.

5. Considere a equação diofantina $102x + 27y = 6$. Determine a solução geral e verifique se existe alguma solução positiva (isto é, uma solução tal que $x > 0$ e $y > 0$) desta equação.

Temos que $102x + 27y = 6 \iff 34x + 9y = 2$ $(*)$

Começamos por determinar uma solução particular da equação $(*)$

$34 = 3 \times 9 + 7$ $\qquad 1 = 7 - 2 \times 3 =$

$9 = 7 + 2$ $\qquad = 7 - (9 - 7) \times 3 = -3 \times 9 + 4 \times 7$

$7 = 2 \times 3 + 1$ $\qquad = -3 \times 9 + 4 \times (34 - 3 \times 9) = 4 \times 34 - 15 \times 9$

Logo $2 = 8 \times 34 - 30 \times 9$ e $(8, -30)$ é solução de $(*)$.

A solução geral é então dada por $\begin{cases} x' = 8 + 9t \\ y' = -30 - 34t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

Vejamos se existe uma solução positiva.

$$\begin{cases} x' > 0 \\ y' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 9t > 0 \\ -30 - 34t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t > -8 \\ -34t > 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -8/9 \\ t < -30/34 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq -1 \end{cases}$$

Impossível. Logo não existe nenhuma solução positiva.

6. Determine solução geral do seguinte sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} 3x & \equiv & 6 \pmod 2 \\ 6x & \equiv & 4 \pmod 5 \\ -x & \equiv & 2 \pmod 7 \end{cases} \quad (S)$$

Verifique que a menor solução positiva que encontrou é de facto solução do sistema apresentado.

O TCR não pode ser aplicado ao sistema tal como está apresentado.

Temos: $3x \equiv 6 \pmod 2 \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod 2 \Leftrightarrow x \equiv 0 \pmod 2$

lei do corte

$6x \equiv 4 \pmod 5 \Leftrightarrow 5x + x \equiv 4 \pmod 5 \Leftrightarrow x \equiv 4 \pmod 5$

$-x \equiv 2 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv -2 \pmod 7$

Assim: $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0 \pmod 2 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv -2 \pmod 7 \end{cases}$

Como 2, 5 e 7 são primos, logo primos entre si, o TCR garante que o sistema tem uma única solução módulo $N = 2 \times 5 \times 7$

$n_1 = 2$ $\quad a_1 = 0$ $\quad N_1 = 15$ $\quad 15x_1 \equiv 1 \pmod 2$

$n_2 = 5$ $\quad a_2 = 4$ $\quad N_2 = 14$ $\quad 14x_2 \equiv 1 \pmod 5$

$n_3 = 7$ $\quad a_3 = -2$ $\quad N_3 = 10$ $\quad 10x_3 \equiv 1 \pmod 7$

Claramente podemos tomar: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ e $x_3 = -2$

Logo, pelo TCR, $x_0 = N_1 a_1 x_1 + N_2 a_2 x_2 + N_3 a_3 x_3 = 14 \times 4 \times (-1) + 10 \times (-2) \times (-2)$

$= -56 + 40 = -16$ é solução do sistema

Solução geral $\{-16 + 70t \mid t \in \mathbb{Z}\}$

Menor solução positiva: $(t=1)$ $\quad -16 + 70 = 54$

De facto: $54 \equiv 0 \pmod 2$ pois $2 \mid 54$

$54 \equiv 4 \pmod 5$ pois $5 \mid 50$

$54 \equiv -2 \pmod 7$ pois $7 \mid 56$

7. Seja $a \in \mathbb{Z}$ tal que m.d.c.$(a, 30)=1$. Mostre que $a^{17} \equiv a \pmod{30}$.

Como m.d.c. $(a, 30) = 1$, pelo teorema de Euler, $a^{\phi(30)} \equiv 1 \pmod{30}$.

Temos $\phi(30) = \phi(2)\phi(3)\phi(5) = 1 \times 2 \times 4 = 8$

Logo $a^8 \equiv 1 \pmod{30} \Rightarrow a^{16} \equiv 1 \pmod{30} \Rightarrow a^{17} \equiv a \pmod{30}$.

Cotações: 1) a) 1 valor, b) 1.5 valores, c) 1.5 valores;
2) a) 1.5 valores, b) 1.5 valores
3) 3 valores.

Cotações: 4) a) 1.5 valores, b) 1.5 valores, c) 1.5 valores;
5) 2 valores;
6) 2 valores;
7) 1.5 valores.