

# Sucessões

## Definição

Uma função  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se uma **sucessão real**. À regra de correspondência  $n \mapsto a(n)$  chamamos **termo geral da sucessão** e ao elemento  $a(n)$  chamamos **termo de ordem n**.

- Dada uma sucessão  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , denotando  $a(n)$  por  $a_n$ , representamos a sucessão de uma das seguintes formas:
  - $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$
  - $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
  - $(a_n)_n$  simplesmente, se daí não advier confusão.
- Dada uma sucessão, o seu contradomínio designa-se por **conjunto dos termos da sucessão**.

## Definição

Uma sucessão  $(a_n)_n$  diz-se:

- **estritamente crescente** (respetivamente **crescente**) se  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$  (respetivamente  $a_n \leq a_{n+1}$ );
- **estritamente decrescente** (respetivamente **decrescente**) se  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$  (respetivamente  $a_{n+1} \leq a_n$ );
- **estritamente monótona** (respetivamente **monótona**) se for estritamente crescente ou estritamente decrescente (respetivamente, crescente ou decrescente);
- **majorada** (respetivamente **minorada, limitada**) se  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  for um conjunto majorado (respetivamente minorado, limitado).

## Exemplo

- A sucessão  $(\frac{1}{n})_n$  é estritamente decrescente e limitada.
- A sucessão  $(1 + (-1)^n)_n$  não é monótona mas é limitada.

## Definição

Uma sucessão  $(x_n)_n$  diz-se **enquadrada** pelas sucessões  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  se

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq x_n \leq b_n \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq x_n \leq a_n.$$

## Exemplo

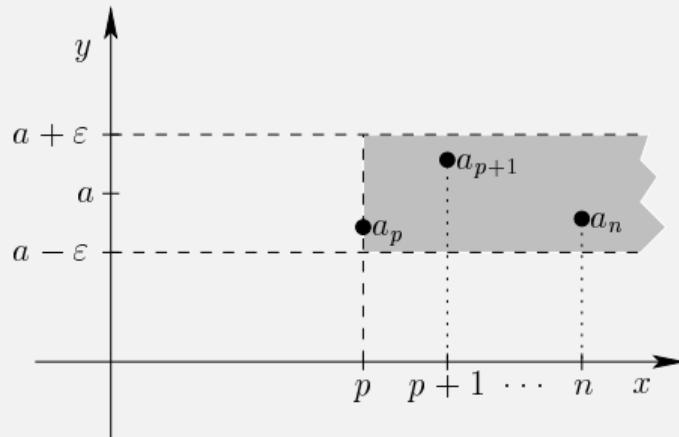
A sucessão  $(\frac{1}{n})_n$  está enquadrada pela sucessão constante igual a zero e pela sucessão constante igual a 1.

## Definição

Dado  $a \in \mathbb{R}$ , diz-se que uma **sucessão**  $(a_n)_n$  é **convergente para  $a$** , que **tende para  $a$**  ou que **tem limite  $a$** , se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists p \in \mathbb{N} \forall n \geq p \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Escreve-se  $(a_n)_n \xrightarrow{n} a$ ,  $a_n \xrightarrow{n} a$  ou  $\lim_n a_n = a$ .



## Definição

Uma sucessão  $(a_n)_n$  diz-se **convergente** se existir um número real  $a$  tal que  $\lim_n a_n = a$ . Uma sucessão que não é convergente diz-se **divergente**.

## Teorema

Uma sucessão não pode convergir para dois limites diferentes.

## Proposição

Toda a sucessão convergente é limitada.

## Proposição

Sejam  $(a_n)_n$  uma sucessão convergente para zero e  $(b_n)_n$  uma sucessão limitada. Então  $(a_n b_n)_n$  é uma sucessão convergente para zero.

## Proposição

Sejam  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  duas sucessões convergentes respectivamente para  $a$  e para  $b$ . Então:

- $(a_n + b_n)_n$  é uma sucessão convergente para  $a + b$ ;
- $(a_n b_n)_n$  é uma sucessão convergente para  $ab$ ;
- se  $b_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $b \neq 0$ , então  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$  é uma sucessão convergente para  $\frac{a}{b}$ .

## Teorema

Sejam  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  duas sucessões convergentes para  $c \in \mathbb{R}$ . Seja  $(c_n)_n$  uma sucessão enquadrada por  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$ .

Então  $(c_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ .

## Teorema

Seja  $(a_n)_n$  uma sucessão monótona e limitada. Então  $(a_n)_n$  é convergente e:

- se  $(a_n)_n$  é crescente,  $\lim_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ;
- se  $(a_n)_n$  é decrescente,  $\lim_n a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

## Exemplo

A sucessão  $(a_n)_n$  definida por recorrência por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é crescente e majorada logo é convergente.

$$\lim_n a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

# Subsucessões

## Definição

Dada uma sucessão  $(a_n)_n$ , diz-se que  $(b_n)_n$  é uma **subsucessão ou sucessão parcial** de  $(a_n)_n$ , se existir uma função  $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$  estritamente crescente tal que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad b_n = a_{\varphi(n)}$ .

## Proposição

Se  $(a_n)_n$  é uma sucessão convergente para  $a$ , qualquer sua subsucessão é convergente para  $a$ .

## Corolário

Se uma sucessão  $(a_n)_n$  possuir uma subsucessão divergente ou admitir subsucessões convergentes para limites diferentes então  $(a_n)_n$  é divergente.

# Limites infinitos

## Definição

Diz-se que uma **sucessão**  $(a_n)_n$  **tende para**  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ) se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad a_n > M \quad (\text{resp. } a_n < M).$$

Escreve-se  $\lim_n a_n = +\infty$  ou  $a_n \xrightarrow{n} +\infty$

(resp.  $\lim_n a_n = -\infty$  ou  $a_n \xrightarrow{n} -\infty$ ).

## Exemplo

A sucessão  $(n^2)_n$  tende para  $+\infty$ .

# Infinitésimos vs infinitamente grandes

## Proposição

Se  $(a_n)_n$  é uma sucessão tal que  $a_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então  $\lim_n a_n = 0$  se e só se  $\lim_n \frac{1}{|a_n|} = +\infty$ .

## Nota

A proposição anterior diz-nos que o inverso de um infinitésimo (sucessão convergente para zero) é, em módulo, um infinitamente grande e que o inverso de um infinitamente grande em módulo é um infinitésimo.

## Definição (i+-i)

Dada uma sucessão real  $(a_n)_n$ , chama-se **série real** ao par de sucessões  $((a_n)_n, (s_n)_n)$  tais que  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

- $(a_n)_n$  diz-se a **sucessão geradora** da série.
- $(s_n)_n$  diz-se a **sucessão das somas parciais** da série.

Chamamos termo de ordem  $n$  de uma série ao termo  $a_n$  da sucessão geradora.

## Nota

Para conhecer uma série  $((a_n)_n, (s_n)_n)$ :

- basta conhecer a sucessão geradora  $(a_n)_n$ , pois  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- basta conhecer a sucessão das somas parciais, pois

$$\begin{cases} a_1 = s_1, \\ a_n = s_n - s_{n-1}, \text{ se } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

## Definição

A **série** gerada por uma sucessão  $(a_n)_n$  diz-se **convergente** se a sucessão das somas parciais,  $(s_n)_n$ , convergir. Nesse caso, a  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  chama-se **soma da série** e representa-se

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Uma série não convergente diz-se **divergente**.

## Nota

Por abuso de notação, escreveremos  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ou  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  para designar a série gerada por  $(a_n)_n$ , quer se trate de uma série convergente ou de uma série divergente.

## Nota

Frequentemente, por conveniência, consideramos séries em que a sucessão geradora tem domínio  $\mathbb{N}_0$  ou domínio  $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ , sendo  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Escrevemos então  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  ou  $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n$  e  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  ou  $\sum_{n \geq n_0} a_n$ .

## Exemplo

Série harmónica  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ . É uma série divergente.

Série geométrica de termo inicial  $a$  e razão  $r$  com  $a, r \in \mathbb{R}$   $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} a r^n$ . Convergente sse  $|r| < 1$  ou  $a = 0$ .

Série de Riemann  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$  com  $\alpha > 0$ . Convergente sse  $\alpha > 1$ .

## Proposição

Sejam  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  duas séries convergentes, de soma  $S$  e  $T$ , respectivamente e seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Então:

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n)_n$  é uma série convergente de soma  $S + T$ ;
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda a_n)_n$  é uma série convergente de soma  $\lambda S$ .

## Definição

Duas séries  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  dizem-se **da mesma natureza** se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.

## Teorema

Seja  $(a_n)_n$  uma sucessão real. Se a série gerada por  $(a_n)_n$  converge, então  $(a_n)_n$  converge para zero.

## Definição

A uma série do tipo  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$  ou  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n+1} a_n$ , em que  $(a_n)_n$  é uma sucessão de termos positivos, chamamos **série alternada**.

## Teorema (critério de Leibniz)

Seja  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$  uma série alternada tal que:

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é decrescente;
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge para zero.

Então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$  é convergente.

## Definição

Uma série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  diz-se **absolutamente convergente** se a série gerada pela sucessão dos módulos,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ , for convergente.

## Teorema

Se a série gerada por  $(a_n)_n$  for absolutamente convergente então é convergente. Além disso,

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| .$$

## Teorema (primeiro critério de comparação)

Sejam  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  sucessões de termos não negativos tais que

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq p \quad a_n \leq b_n.$$

Se a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  é convergente então a série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  também é convergente.

## Teorema (segundo critério de comparação)

Sejam  $(a_n)_n$  uma sucessão de termos não negativos e  $(b_n)_n$  uma sucessão de termos positivos tais que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ .

- Se  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ,  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  e  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  são séries da mesma natureza.
- Se  $\alpha = 0$ , a convergência de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$  implica a convergência de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ .
- Se  $\alpha = +\infty$ , a convergência de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  implica a convergência de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ .

## Teorema (critério de Cauchy)

Seja  $(a_n)_n$  uma sucessão de termos não negativos tal que  $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \alpha$ .

- Se  $\alpha < 1$ , então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  é convergente.
- Se  $\alpha > 1$ , então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  é divergente.

## Teorema (critério de d'Alembert)

Seja  $(a_n)_n$  uma sucessão de termos positivos tal que  $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ .

- Se  $\alpha < 1$ , então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  é convergente.
- Se  $\alpha > 1$ , então  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$  é divergente.