Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Nome: **Número:**

Exercício 1. (3.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}.$$

(a) Faça um esboço dos seguintes conjuntos: (i) A; (ii) $\overset{\circ}{A}$; (iii) $\overline{A}$; (iv) fr(A).

(b) Diga, justificando, se o conjunto A é compacto.

Exercício 2. (2 valores) Faça um esboço do domínio da função $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{(x+2)^2 + y^2}$.

Exercício 3. (2 valores) Estude a existência do seguinte limite: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Exercício 4. (4.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} y-x & \text{se} \quad xy \neq 0, \\ 2 & \text{se} \quad xy = 0. \end{cases}$

(a) Estude a existência dos seguintes limites: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,0)} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,4)} f(x,y)$.

(b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos onde a função f é contínua.

Exercício 5. (7 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua no ponto $(0,0)$.

(b) Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ segundo qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

(d) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

Exercício 6. (1 valor) Diga, justificando, se a seguinte proposição é **verdadeira** ou **falsa**:

Se $f\colon X \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais nulas em todos os pontos $(x, y) \in X$, então f é uma função constante.

FIM