Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Nome: **Número:**

Exercício 1.

1. (1.5 valores) Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (xy^2 - yz, xyz)$. Determine $f'(1,3,1)(1,0,0)$.
2. (1.5 valores) Indique $J_{f^{-1}}(f(1,0))$ para $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x-y, x^3y)$.
3. (1.5 valores) Determine a equação da reta normal e do plano tangente à superfície $y^3 + xyz = 12$ no ponto $(2,2,1)$.

Exercício 2. (2 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) Seja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$. A função $f\colon S \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^2+y^2, x+y)$ é localmente invertível em torno de todo o ponto $(x,y) \in S$.

(b) A equação $y + 2e^{x^2+z^2} = 2 - y^2$ define implicitamente y como função de (x,z) numa vizinhança do ponto $(0,-1,0)$.

Exercício 3. (5.5 valores) Considere a função
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & y^3 + 3x^2y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 \end{array}$$

(a) Determine os pontos estacionários de f.

(b) Verifique se $(0,1)$ é minimizante local de f.

(c) Seja $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$. Calcule $\min f_{|\Sigma}$.

Exercício 4. (2 valores) Mude a ordem de integração e calcule o integral $\displaystyle\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \operatorname{sen}(x^3)\, dx dy$.

Exercício 5. (1.5 valores) Mude para coordenadas polares o integral $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{2-y^2}} y\, dx dy$.

Exercício 6. (2 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule, usando coordenadas polares, o integral $\displaystyle\iint_X x\, dx dy$, onde
$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

II. Calcule, usando coordenadas polares, o integral $\displaystyle\iint_X e^{x^2+y^2}\, dx dy$, onde
$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq x\}.$$

Exercício 7. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Seja $\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \wedge z \geq 1 \right\}$.
Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

II. Seja $\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge 3z \geq x^2 + y^2 \right\}$.
Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

FIM