Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
24 de maio de 2025

Álgebra Universal e Categorias

2º teste

duração: 1h45min

Justifique todas as suas respostas, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.

1. Considere a categoria $\mathbf{C}$ representada pelo diagrama seguinte

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "r"] \arrow[d, shift left, "u"] \arrow[dr, "n" near end] & B \arrow[r, "p"] & C \\
E \arrow[u, shift left, "v"] \arrow[r, "t"'] \arrow[ur, "m" near start] \arrow[urr, bend right, "w"'] & D \arrow[u, shift left, "i"] \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[ur, "q"] &
\end{tikzcd}
$$

Sem apresentar justificacões, indique se existem, na categoria $\mathbf{C}$, morfismos e objetos nas condições a seguir indicadas. Caso existam, forneça um exemplo correspondente:

(a) Um morfismo que não seja um monomorfismo.

Resposta:

O morfismo p não é um monomorfismo.
(Tem-se $p \circ i = q = p \circ j$ e $i \neq j$.)

(b) Um bimorfismo que não seja um isomorfismo.

Resposta:

O morfismo f é um bimorfismo, mas não é um isomorfismo.

(O morfismo f é um epimorfismo e um monomorfismo, logo é um bimorfismo. O morfismo f não é um isomorfismo, pois não existe qualquer morfismo $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = id_B$ e $f' \circ f = id_A$.)

(c) Um isomorfismo que não seja um bimorfismo.

Resposta:

Não existe.

(Todo o isomorfismo é um bimorfismo.)

(d) Objetos distintos e isomorfos.

Resposta:

A e E.
(Os morfismos u e v são isomorfismos, uma vez que $u \circ v = id_E$ e $v \circ u = id_A$.)

2. (a) Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.

Resposta:

Recordemos que um morfismo $h : X \to Y$ é **epimorfismo** se, para quaisquer morfismos $u, v : Y \to Z$,

$$u \circ h = v \circ h \Rightarrow u = v.$$

Então, assumindo que f e g são epimorfismos, segue que, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $u, v : C \to D$,

$$
\begin{array}{rcll}
u \circ (g \circ f) = v \circ (g \circ f) & \Rightarrow & (u \circ g) \circ f = (v \circ g) \circ f & \text{(associatividade)} \\
& \Rightarrow & u \circ g = v \circ g & (f \text{ é epimorfismo}) \\
& \Rightarrow & u = v & (g \text{ é epimorfismo}).
\end{array}
$$

Logo, $g \circ f$ é um epimorfismo.

(b) Dê exemplo de uma categoria $\mathbf{C}$ na qual existam objetos A, B, C e morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$ tais que $g \circ f$ é um epimorfismo, mas f não é um epimorfismo.

Resposta:

Seja $\mathbf{C}$ a categoria representada por

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "r"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

O morfismo f não é um epimorfismo, pois $g \circ f = r = h \circ f$ e $g \neq h$. O morfismo $g \circ f$ é um epimorfismo, pois o único morfismo com domímio C é id_C; assim, para quaisquer morfismos $i, j : C \to D$,

$$i \circ (g \circ f) = j \circ (g \circ f) \Rightarrow i = id_C = j.$$

3. Sejam $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ categorias. Mostre que se $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ têm objetos iniciais, então a categoria produto $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ tem objeto inicial.

Resposta:

Sejam $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ categorias e I_1 e I_2 são objetos iniciais de $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$, respetivamente. Mostremos que (I_1, I_2) é um objeto inicial de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

Uma vez que I_1 é um objeto inicial de $\mathbf{C}_1$, então $I_1 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$, existe um e um só $\mathbf{C}_1$-morfismo $f : I_1 \to X$. Como I_2 é um objeto inicial de $\mathbf{C}_2$, então $I_2 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$ e, para cada $Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$, existe um e um só $\mathbf{C}_2$-morfismo $g : I_2 \to Y$.

Como $I_1 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e $I_2 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$, então $(I_1, I_2) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$. Mostremos que, para todo $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$, existe um e um só $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y). Como $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$, então X é um objeto de $\mathbf{C}_1$ e Y é um objeto de $\mathbf{C}_2$. Logo, existe um $\mathbf{C}_1$-morfismo $f : I_1 \to X$ e existe um $\mathbf{C}_2$-morfismo $g : I_2 \to Y$. Assim, (f, g) é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y). Além disso, é simples verificar que (f, g) é o único $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y). De facto, se (f', g') é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (I_1, I_2) em (X, Y), então f' é um $\mathbf{C}_1$-morfismo de I_1 em X e g' é um $\mathbf{C}_2$-morfismo de I_2 em Y. Logo, atendendo a que f é o único morfismo de I_1 em X e g é o único morfismo de I_2 em Y, segue que $f' = f$ e $g' = g$. Portanto, $(f', g') = (f, g)$. Desta forma, provámos que (I_1, I_2) é um objeto inicial de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos $\{1\}$ e $\mathbb{Z}$ e as funções i, f e g definidas por

$$\begin{array}{rcl} i : \{1\} & \to & \mathbb{Z} \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 3 + x \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 5 - x \end{array}.$$

Mostre que $(\{1\}, i)$ é um igualizador de f e g.

Resposta:

Pretende-se mostrar que $(\{1\}, i)$ é um igualizador de f e g, isto é, que:

(i) $f \circ i = g \circ i$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to A$ tal que $f \circ k = g \circ k$, existe um, e um só, morfismo $u : K \to \{1\}$ tal que $i \circ u = k$.

$$\begin{tikzcd} \{1\} \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ K \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

(i) A prova desta condição é imediata, pois as funções $f \circ i$ e $g \circ i$ têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in \{1\}$,

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(1) = 3 + 1 = 4 = 5 - 1 = g(1) = g(i(x)) = (g \circ i)(x).$$

(ii) Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $k : K \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tais que $f \circ k = g \circ k$. Então, para qualquer $x \in K$,

$$(f \circ k)(x) = (g \circ k)(x),$$

donde resulta

$$3 + k(x) = 5 - k(x)$$

e, portanto, $k(x) = 1$, para todo $x \in K$. Assim, k é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} k : K & \to & A \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

Pretende-se mostrar que existe uma, e uma só, função $u : K \to \{1\}$ tal que $i \circ u = k$. Claramente, existe uma única função de K em $\{1\}$ (pois $\{1\}$ é um objeto terminal) - tal função é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} k : K & \to & \{1\} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$$

As funções $i \circ u$ e k têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in K$, $(i \circ u)(x) = 1 = k(x)$. Logo, $i \circ u = k$.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e A, B, C, I objetos de $\mathbf{C}$ tais que I é um objeto inicial. Considere os morfismos $f_A : I \to A$, $f_B : I \to B$, $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$ em $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B), então $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B.

Resposta:

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e morfismos $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$.

Admitamos que $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B). Então:

(1) $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;

(2) para qualquer objeto K de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $h_A : A \to K$ e $h_B : B \to K$ tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$, existe um, e um só, morfismo $v : C \to K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[d, "i_B"] \arrow[ddr, "h_B"] & \\
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[drr, "h_A"'] & C \arrow[dr, "v"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}$$

Pretendemos mostrar que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, ou seja, temos de provar que:

(3) $i_A \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, C)$ e $i_B \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(B, C)$;

(4) para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_A : A \to X$ e $g_B : B \to X$, existe um, e um só, morfismo $u : C \to X$ tal que $u \circ i_A = g_A$ e $u \circ i_B = g_B$.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "g_A"] \arrow[r, "i_A"'] & C \arrow[u, "u"] & B \arrow[ul, "g_B"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

(3) É imediato pelo enunciado.

(4) Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $g_A : A \to X$ e $g_B : B \to X$ morfismos de $\mathbf{C}$. Como $g_A \circ f_A \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(I, X)$, $g_B \circ f_B \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(I, X)$ e I é um objeto inicial, segue que $g_A \circ f_A = g_B \circ f_B$. Logo, por (2), existe um, e um só, morfismo $u : C \to X$ tal que $u \circ i_A = g_A$ e $u \circ i_B = g_B$.

Logo $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B.

6. Seja $S = \{0, 1\}$. Considere o funtor $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ da categoria **Set** nela própria tal que:

- $F_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{Set}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ é a função que a cada conjunto A associa o conjunto $A \times S$,
- $F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{Set}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ é a função que a cada **Set**-morfismo $f : A \to B$ associa a função

$$F_{Mor}(f) : \begin{array}{ccc} F(A) & \to & F(B) \\ (x, y) & \mapsto & (f(x), y) \end{array}.$$

(a) Diga se o funtor F é fiel.

Resposta:

O funtor F é fiel se, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \to B$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Uma vez que, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \to B$,

$$\begin{array}{rcl} F(f) = F(g) & \Rightarrow & \forall (x, y) \in A \times S, F(f)(x, y) = F(g)(x, y) \\ & \Rightarrow & \forall (x, y) \in A \times S, (f(x), y)) = (g(x), y) \\ & \Rightarrow & \forall (x, y) \in A \times S, f(x) = g(x) \text{ e } y = y \\ & \Rightarrow & \forall x \in A, f(x) = g(x) \\ & \Rightarrow & f = g \quad (\text{ as funções f e g têm o mesmo domínio e codomínio}), \end{array}$$

então o funtor F é fiel.

(b) Justifique que o funtor F não é pleno.

Resposta:

O funtor F é pleno se, para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ e para qualquer **Set**-morfismo $g : F(A) \to F(B)$, existe um **Set**-morfismo $f : A \to B$, tal que $F(f) = g$.

Se consideramos a função g a seguir definida

$$\begin{array}{rcl} g : \{(a, 0), (a, 1)\} & \to & \{(b, 0), (b, 1)\} \\ (a, 0) & \mapsto & (b, 0) \\ (a, 1) & \mapsto & (b, 0) \end{array},$$

a função tem domínio $F(\{a\})$ e codomínio $F(\{b\})$, com $\{a\}, \{b\} \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, e não existe qualquer função $f : \{a\} \to \{b\}$ tal que $F(f) = g$, uma vez que, por definição de F, $F(f)(a, 1) \neq (x, 0)$, para todo $x \in \{b\}$.
Logo, o funtor F não é pleno.

(c) Diga se o funtor F preserva objetos terminais.

Resposta:

O funtor F preserva objetos terminais se, para qualquer $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$,

$$A \text{ é objeto terminal} \Rightarrow F(A) \text{ é objeto terminal}.$$

Na categoria **Set**, os objetos terminais são os conjuntos singulares. Então F não preserva objetos terminais, pois $A = \{a\}$ é um objeto terminal e $F(A) = \{(a, 0), (a, 1)\}$ não é um objeto terminal.

Cotações: $1.(4 \times 0,75)$; $2.(2,25 + 1,25)$; $3.(2,75)$; $4.(3,5)$; $5.(3,5)$; $6.(3 \times 1,25)$.