Tópicos Fundamentais de Matemática

(Licenciatura em Ciências da Computação)

2. Indução nos Naturais

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

2025/2026

2.1 Introdução

exemplo:

Consideremos a afirmação "Para qualquer natural n, $n^2 - n + 41$ *é primo".*

Atribuindo valores a n, podemos verificar a veracidade das proposições correspondentes obtidas a partir do predicado $p(n)$: *"o número* $n^2 - n + 41$ *é primo".*

n	1	2	3	4	5	6	...	40	41	...
$n^2 - n + 41$	41	43	47	53	61	71	...	1601	41^2	...

41 *é um número primo, pelo que* $p(1)$ *é verdadeira.*
43 *é um número primo, pelo que* $p(2)$ *é verdadeira.*
47 *é um número primo, pelo que* $p(3)$ *é verdadeira.*
53 *é um número primo, pelo que* $p(4)$ *é verdadeira.*
61 *é um número primo, pelo que* $p(5)$ *é verdadeira.*
71 *é um número primo, pelo que* $p(6)$ *é verdadeira.*
(...)
1601 *é um número primo, pelo que* $p(40)$ *é verdadeira.*

Poderemos, assim, concluir que $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$?

41^2 *não é um número primo, pelo que $p(41)$ é falsa!*

Para provarmos que uma determinada propriedade é válida para todo o número natural, precisamos de um método de prova adequado. Como o exemplo anterior o ilustra, não basta verificar a veracidade da propriedade para um número finito de naturais para podermos concluir a validade da propriedade em $\mathbb{N}$.

A definição indutiva de $\mathbb{N}$ através das seguintes regras

i) $1 \in \mathbb{N}$;
ii) se $n \in \mathbb{N}$, então $n + 1 \in \mathbb{N}$,

justifica a adoção do método de prova que iremos estudar.

Comecemos por apresentar o conceito de predicado hereditário.

definição:

Um predicado $p(n)$, com $\mathbb{N}$ como universo de variação da variável n, diz-se **hereditário** quando, para todo $k \in \mathbb{N}$, se a proposição $p(k)$ é verdadeira, então a proposição $p(k + 1)$ é verdadeira.

exemplo:

1) *"2n é par" é um predicado hereditário pois se* $2k$ *é par para algum* $k \in \mathbb{N}$*, então* $2(k+1) = 2k+2$ *também é par (por ser a soma de 2 números pares).*

2) *"n é par" não é um predicado hereditário pois se* k *é par para algum* $k \in \mathbb{N}$*, então* $k+1$ *é ímpar.*

3) *"*$2n+1$ *é par" é um predicado hereditário pois se* $2k+1$ *é par para algum* $k \in \mathbb{N}$*, então*

$$2(k+1)+1 = 2k+2+1 = (2k+1)+2$$

também é par (por ser a soma de dois números pares).

Consideremos os predicados em 1) e 3) do exemplo anterior, denotando por $p(n)$ o predicado "$2n$ é par" e por $q(n)$ o predicado "$2n + 1$ é par" . Ambos são hereditários, mas apenas um é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

É claro que $p(1)$ é verdadeira pois $2 \times 1 = 2$ é par. A hereditariedade de $p(n)$ permite-nos induzir que a propriedade é válida para todo o número natural.

Por outro lado, a hereditariedade de $q(n)$ não é suficiente para concluir que a propriedade é verdadeira para todo o número natural, uma vez que nos falta um ponto de partida.

2.2 Indução simples nos naturais

teorema [princípio de indução (simples para $\mathbb{N}$)]:

Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$.
Se

1) $p(1)$ é verdadeira e

2) $p(n)$ é hereditário, ou seja,
para todo $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

demonstração: Admitamos que as condições 1) e 2) são satisfeitas para o predicado $p(n)$ e mostremos que, para qualquer natural n, $p(n)$ é verdadeira. Nesse sentido, consideremos o conjunto X dos números naturais que não satisfazem $p(n)$, ou seja,

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \neg p(n)\}.$$

Suponhamos, no intuito de uma redução ao absurdo, que $X \neq \emptyset$. Seja m o menor número natural que pertence a X. Por 1), $1 \notin X$ e, portanto, $m > 1$. Logo, $m = k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Uma vez que m é o menor natural que pertence a X, sabemos que $m - 1$ não pertence a X. Assim, como $m - 1 = (k + 1) - 1 = k$, k não pertence a X, isto é, k satisfaz o predicado $p(n)$. Ora, por 2), $p(n)$ é hereditário e, portanto, $k + 1$ também satisfaz o predicado $p(n)$, ou seja, m satisfaz $p(n)$, o que contradiz o facto de m pertencer a X. Logo, X tem de ser vazio e, assim, $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

A condição 1) do teorema anterior é designada por **base de indução** e a condição 2) por **passo de indução**.

Na aplicação da condição 2), chamamos **hipótese de indução** a "$p(k)$ é verdadeira".

Dado um predicado $p(n)$ sobre $\mathbb{N}$, uma aplicação deste princípio para provar que a proposição $\forall n\ p(n)$ é verdadeira diz-se uma **prova por indução nos naturais**.

exemplo:

Mostremos que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$n^3 - n$ é divisível por 3".

i) base de indução: Para $n = 1$, temos $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$.

Como 0 é divisível por 3, $p(1)$ é verdadeira.

ii) passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $k^3 - k$ é divisível por 3.

Então, existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que $k^3 - k = 3q$.

Assim,

$$\begin{aligned}(k+1)^3-(k+1) &= (k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)\\ &= k^3+3k^2+3k-k\\ &= (k^3-k)+(3k^2+3k)\\ &= 3q+(3k^2+3k)\\ &= 3(q+k^2+k).\end{aligned}$$

Logo, $(k+1)^3-(k+1)=3(q+k^2+k)$, pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por i) e ii), podemos concluir que

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ n^3-n \text{ é divisível por } 3.$$

exemplo:

Mostremos que a soma dos n primeiros números naturais ímpares é igual a n^2, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$, pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $q(n)$ o predicado "$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$".

i) base de indução: Para $n=1$, temos $1=1^2$, pelo que $q(1)$ é verdadeira.

ii) passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $q(k)$ é verdadeira, ou seja, $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$. Então,

$$\begin{aligned}
& 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) \\
= \ & (1+3+5+\cdots+(2k-1))+(2k+1) \\
= \ & k^2+(2k+1) \\
= \ & k^2+2k+1 \\
= \ & (k+1)^2,
\end{aligned}$$

pelo que $q(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por i) e ii), podemos concluir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

exemplo:

Mostremos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3},$$

pelo método de indução nos naturais.

Representemos por $h(n)$ o predicado "$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}$".

i) base de indução: Para $n = 1$, temos $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^1 = 1 + \frac{1}{3} \geq 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{n}{3}$, pelo que $h(1)$ é verdadeira.

ii) passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $h(k)$ é verdadeira, ou seja,

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^k \geq 1+\frac{k}{3}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left(1+\tfrac{1}{3}\right)^{(k+1)} &= \left(1+\tfrac{1}{3}\right)^k\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\\
&\geq \left(1+\tfrac{k}{3}\right)\left(1+\tfrac{1}{3}\right)\\
&= 1+\tfrac{k}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{k}{9}\\
&= 1+\tfrac{k+1}{3}+\tfrac{k}{9}\\
&\geq 1+\tfrac{k+1}{3}.
\end{aligned}$$

Assim, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^{(k+1)} \geq 1+\frac{k+1}{3}$, pelo que $h(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ e por i) e ii), podemos concluir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^n \geq 1+\frac{n}{3}$.

Como já referimos, é necessário que se verifiquem simultaneamente a base e o passo de indução para que se possa induzir a validade da propriedade em causa para todo o número natural.

Consideremos o predicado $p(n)$: "$n^2 > 2n + 1$".

Facilmente se verifica que $p(1)$ é falsa: $1^2 = 1 \not> 3 = 2 \times 1 + 1$.

No entanto, o passo de indução verifica-se, ou seja, o predicado $p(n)$ é hereditário. De facto, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k^2 > 2k + 1$,

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&= k^2 + (2k+1) \\
&> (2k+1) + (2k+1) \\
&= 2k + 2 + 2k \\
&> 2k + 2 + 1 \\
&= 2(k+1) + 1.
\end{aligned}$$

Na verdade, $p(n)$ é válida para todos os naturais maiores ou iguais a 3.

A prova deste resultado pode ser feita recorrendo a uma variante do Princípio de Indução, considerando para base de indução o elemento de $\mathbb{N}$ a partir do qual se pode provar a validade da propriedade:

teorema [princípio de indução (simples para $\mathbb{N}$) de base n_0]:

Sejam $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$.
Se

1) $p(n_0)$ é verdadeira e

2) para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

exemplo:

Verifiquemos, então, que para todo $n \geq 3, n^2 > 2n + 1$.

i) base de indução: Para $n = 3$, temos $n^2 = 3^2 = 9 > 7 = 2 \times 3 + 1$, pelo que $p(3)$ é verdadeira.

ii) passo de indução: Mostrámos há pouco que $p(n)$ é hereditário. Assim, dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 3$, $p(k+1)$ é verdadeira sempre que $p(k)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 3 e por i) e ii), podemos concluir que: para todo $n \geq 3, n^2 > 2n + 1$.

exemplo:

Mostremos que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$, pelo método de indução para $\mathbb{N}$ de base 5.

Representemos por $p(n)$ o predicado "$2^n > n^2$".

i) base de indução: Para $n = 5$, temos $2^n = 2^5 = 32 > 25 = 5^2$, pelo que $p(5)$ é verdadeira.

ii) passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 5$ e $p(k)$ é verdadeira, ou seja, $2^k > k^2$. Então,

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \times 2^k \\ &> 2 \times k^2 \\ &= k^2 + k^2 \\ &> k^2 + 2k + 1 \qquad \text{(pelo exemplo anterior; note-se que } n \geq 5\text{)} \\ &= (k+1)^2, \end{aligned}$$

pelo que $p(k+1)$ é verdadeira.

Pelo Princípio de Indução para $\mathbb{N}$ de base 5 e por i) e ii), podemos concluir que para todo $n \geq 5$, $2^n > n^2$.

2.3 Indução completa nos naturais

Na prova de certas propriedades sobre os naturais, a aplicação do Princípio de Indução Simples não é fácil. Nestes casos, pode tornar-se mais conveniente optar por um outro método de prova, o chamado **Princípio de Indução Completa** (ou **Princípio de Indução Forte**).

teorema [princípio de indução completa (para $\mathbb{N}$)]:

Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$.
Se

1) $p(1)$ é verdadeira e

2) para todo $k \in \mathbb{N}$, se, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este princípio parece ser mais geral do que o Princípio de Indução Simples, mas prova-se serem equivalentes: toda a prova que possa ser feita pelo Princípio de Indução Simples pode ser feita pelo Princípio de Indução Completa e vice-versa.

À semelhança do que acontece com o Princípio de Indução Simples, podemos enunciar o **Princípio de Indução Completa de base** n_0.

teorema [princípio de indução completa (para $\mathbb{N}$) de base n_0]:

Sejam $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$.
Se

1) $p(n_0)$ é verdadeira e

2) para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$, se, para todo $j \in \{n_0, \ldots, k\}$, $p(j)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$.

exemplo:

Recorrendo ao **Princípio de Indução Completa de base 2**, mostremos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de números primos.

Representemos por $p(n)$ o predicado "n é primo ou n é um produto de primos".

i) base de indução: 2 é primo e, portanto, $p(2)$ é verdadeira.

ii) passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$ e admitamos que $p(j)$ é verdadeira para todo $j \in \{2, \ldots, k\}$. Queremos provar que $p(k+1)$ é verdadeira. Faremos a prova por casos.

Se $k+1$ é primo, então $p(k+1)$ é verdadeira.

Se $k+1$ não é primo, então existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $1 < a, b < k+1$ e $k+1 = ab$.

Por hipótese de indução, como $a, b \in \{2, \ldots, k\}$, sabemos que a é primo ou um produto de primos e b é primo ou um produto de primos.

Logo, $k + 1 = ab$ é um produto de primos, pelo que $p(k + 1)$ é verdadeira.

Por 1) e 2) e pelo Princípio de Indução Completa de base 2, mostrámos que todo o número natural diferente de 1 é primo ou é um produto de primos.

observação:

Os vários princípios de indução para $\mathbb{N}$ estudados ao longo deste capítulo têm versões análogas para $\mathbb{N}_0$.

Por exemplo, o princípio de indução simples para $\mathbb{N}_0$ tem a seguinte formulação:

teorema [princípio de indução (simples) para $\mathbb{N}_0$)]:

Seja $p(n)$ um predicado sobre $\mathbb{N}_0$.
Se

1) $p(0)$ é verdadeira e

2) para todo $k \in \mathbb{N}_0$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ é verdadeira,

então $p(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}_0$.