Tópicos Fundamentais de Matemática

(Licenciatura em Ciências da Computação)

5. Relações binárias

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

2025/2026

5.1 Conceitos básicos

A noção de relação entre dois objetos baseia-se na ideia de que esses dois objetos estão associados de alguma forma. Uma relação binária será, então, um conjunto de pares ordenados e os seus elementos serão os pares ordenados (a, b) tais que a está associado a b.

definição:

Dados dois conjuntos A e B, chamamos **relação binária de A em B** (ou **correspondência de A para B**) a qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$.

Os conjuntos A e B dizem-se, respetivamente, o **conjunto de partida** e o **conjunto de chegada** de R.

Quando $A = B$, dizemos simplesmente que R é uma **relação binária em A**.

Quando $(a, b) \in R$, dizemos que a **está relacionado com** b **por R** e escrevemos $a \, R \, b$.

Quando $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not R \, b$ e dizemos que a **não está relacionado com** b **por** R.

exemplo:

1) Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$. São exemplos de relações binárias de A em B os conjuntos:

i. $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 7)\}$;

ii. $S = \{(2, 3)\}$;

iii. $\emptyset$;

iv. $A \times B$.

Já o conjunto $T = \{(1, 1), (2, 2)\}$ não é uma relação binária de A em B, pois $T \not\subseteq A \times B$.

2) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 4, 8, 9\}$ e seja R a relação binária de A em B definida por:

$$a\, R\, b \quad \leftrightarrow \quad b = a^2 \quad (a \in A, b \in B).$$

Então, $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.

Por exemplo:

i. $4 \not R 4$ pois $4 \neq 4^2$ (embora $4 \in A \times B$);

ii. $4 \not R 16$ pois $(4, 16) \notin A \times B$ (embora $16 = 4^2$) .

3) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0 : |x| = y\}$ é uma relação binária de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{N}_0$. Por exemplo,

i. $1\,R\,1$ e $-1\,R\,1$;

ii. $1 \not R\, 0$ e $1 \not R\, -1$.

4) Seja $A = \{1, 2\}$ e R a relação binária de A em $\mathcal{P}(A)$ definida por:

$$x\,R\,X \quad \leftrightarrow \quad x \in X \quad (x \in A, X \in P(A)).$$

Por exemplo: $1\,R\,\{1\}$; $\{1\} \not R\, 1$; $1\,R\,\{1, 2\}$; $1 \not R\, \emptyset$; $1 \not R\, \{2\}$.

5) Seja A o conjunto $\{1, 2, 3\}$. São exemplos de relações binárias em A:

$R_1 = \{(1, 2), (2, 3)\}$; $R_2 = \{(3, 2), (2, 1)\}$; $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$; $R_4 = \emptyset$; $R_5 = A^2$.

6) Seja R a relação binária em $\mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y)\,R\,(x', y') \quad \leftrightarrow \quad x = x' \quad (x, y, x', y' \in \mathbb{R}).$$

Por exemplo: $(0, 0)\,R\,(0, 1)$; $(0, 1)\,R\,(0, 0)$; $(0, 1) \not R\, (1, 1)$; $(0, 1)\,R\,(0, \sqrt{2})$.

observação:

Dados dois conjuntos A e B, o conjunto de todas as relações binárias de A em B é o conjunto $\mathcal{P}(A \times B)$.

Se os conjuntos A e B forem finitos e tiverem n e m elementos, respetivamente, então $A \times B$ tem $n \times m$ elementos, pelo que $\mathcal{P}(A \times B)$ tem $2^{n \times m}$ elementos. Assim, **existem $2^{n \times m}$ relações binárias de A em B**.

Consequentemente, se A é um conjunto finito com n elementos, **existem 2^{n^2} relações binárias em A**.

Os conjuntos $\emptyset$ e $A \times B$ são relações binárias de A em B, designadas, respetivamente, por **relação vazia** e **relação universal**.

definição:

Seja A um conjunto não vazio. Então,

$$\mathrm{id}_A = \{(a,a) : a \in A\} \text{ e } \omega_A = A^2 = \{(x,y) : x,y \in A\}$$

são relações binárias em A. A id_A chamamos **relação identidade em A** e a ω_A chamamos **relação universal em A**.

Muitas vezes, a relação id_A é também chamada **relação diagonal em A** e denotada por Δ_A.

definição:

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chamamos **domínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Dom}(R) = \{a \in A \ : \exists_{b \in B} \ (a, b) \in R\}.$$

Chamamos **imagem** ou **contradomínio de** R ao conjunto

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B \ : \exists_{a \in A} \ (a, b) \in R\}.$$

exemplo:

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a relação R de A em B definida por:

$$(a, b) \in R \leftrightarrow a < b \ .$$

Então.
i. $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$;
ii. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\}$;
iii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\}$.

observação:

Duas relações binárias R e S de um conjunto A num conjunto B são iguais quando os conjuntos R e S são iguais. Em particular, $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

Note-se, no entanto, que não é necessariamente verdade que $R = S$ sempre que $\mathrm{Dom}(R) = \mathrm{Dom}(S)$ e $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Im}(S)$.

exemplo:

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

Seja R a relação de A em B definida por:

$$(a, b) \in R \leftrightarrow a < b \ .$$

Seja $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$.

Então:

i. $\mathrm{Dom}(R) = \{2, 4\} = \mathrm{Dom}(S)$;
ii. $\mathrm{Im}(R) = \{3, 4, 5\} = \mathrm{Im}(S)$;
iii. $(2, 5) \in R$ mas $(2, 5) \notin S$, pelo que $R \neq S$.

definição: Uma relação binária R de um conjunto A num conjunto B diz-se **total** quando $\mathrm{Dom}(R) = A$.

exemplo: Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações binárias de A em B:

$$R = \{(1,3), (1,4), (2,3), (3,4)\}; \quad S = \{(1,4), (2,3), (3,4)\}; \quad T = \{(2,3), (3,4)\}\ .$$

Então:

i. R e S são totais, dado que $\mathrm{Dom}(R) = \{1, 2, 3\}$ e $\mathrm{Dom}(S) = \{1, 2, 3\}$;

ii. T não é total, uma vez que $1 \notin \mathrm{Dom}(T)$.

definição: Uma relação binária R de um conjunto A num conjunto B diz-se **unívoca** ou **funcional** ou ainda uma **função parcial** quando

$$\forall_{a \in A} \forall_{b_1, b_2 \in B} \big(\big((a, b_1) \in R \land (a, b_2) \in R \big) \rightarrow b_1 = b_2 \big)\ .$$

exemplo: Consideremos de novo as relações binárias R, S e T do exemplo anterior. Então:

i. R não é unívoca, pois $(1, 2) \in R$, $(1, 4) \in R$ e, no entanto, $2 \neq 4$;

ii. as relações S e T são ambas unívocas.

definição: Uma relação binária R de um conjunto A num conjunto B diz-se uma **função** ou **aplicação** quando R é total e unívoca.

exemplo: Para as relações R, S e T dos dois exemplos anteriores, tem-se que S é uma função, mas R e T não são funções (R não é unívoca e T não é total).

observacão:
1) A designação função para uma relação binária R de A em B que seja total e unívoca assenta no facto de uma tal relação determinar uma função $\mathcal{F}_R$ de A em B dada por: para cada $a \in A$, $\mathcal{F}_R(a) = b$, onde b é o único elemento de B tal que $(a, b) \in R$.
2) Reciprocamente, dados conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$ determina uma relação binária de A em B que é total e unívoca, designada por **gráfico de f**, notada por $\mathcal{G}_f$ e dada por $\mathcal{G}_f = \{(a, f(a)) \ : \ a \in A\}$.

3) Mais, os processos $\mathcal{F}_R$ e $\mathcal{G}_f$ são inversos (para R e f nas condições anteriores), tendo-se:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}_R} = R \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{\mathcal{G}_f} = f.$$

4) Na verdade, no âmbito da Teoria de Conjuntos, o conceito de função não é primitivo: o conceito de função surge do conceito de relação —como indicado na definição anterior.

exemplo: A função $\mathcal{F}_S$ determinada pela relação S dos três exemplos anteriores é $\mathcal{F}_S : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $\mathcal{F}_S(1) = 4$, $\mathcal{F}_S(2) = 3$ e $\mathcal{F}_S(3) = 4$. Verifique que o gráfico $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_S}$ desta função é, de facto, S.

observação:

Como uma relação binária é um conjunto, podemos considerar processos estudados anteriormente para obter novos conjuntos a partir de conjuntos e verificar se tais processos também permitem obter novas relações a partir de relações dadas.

Em particular, tal é possível para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos.

De facto, se R e S são relações binárias de A em B, o mesmo acontece com $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, pois cada um destes conjuntos é ainda um subconjunto de $A \times B$.

exemplo:

Consideremos os conjuntos $A = \{2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e as seguintes relações binárias de A em B: $R = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ e $S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$. Então:

i. $R \cup S = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

ii. $R \cap S = \{(2, 3), (2, 4), (4, 5)\}$ é uma relação binária de A em B;

iii. $R \setminus S = \{(2, 5)\}$ é uma relação binária de A em B.

observação:

Na secção seguinte estudaremos outros processos para obter novas relações binárias a partir de relações binárias dadas.

5.2 Relação inversa e composição de relações

definição:

Sejam A, B conjuntos e R uma relação binária de A em B. Chama-se **relação inversa de** R, e representa-se por R^{-1}, a relação de B em A definida por

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \ : \ (a, b) \in R\}.$$

exemplo:

1) Consideremos os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e a seguinte relação binária de A em B:

$$R = \{(1, 4), (2, 2), (3, 2), (2, 5)\} \ .$$

Então,

$$R^{-1} = \{(4, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 2)\} \ .$$

2) Seja $<_{\mathbb{R}}$ a usual relação *menor* em $\mathbb{R}$, ou seja:

$$<_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \ .$$

Seja $>_{\mathbb{R}}$ a usual relação *maior* em $\mathbb{R}$, ou seja:

$$>_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\} \ .$$

Verifique que $<_{\mathbb{R}}$ é a relação inversa de $>_{\mathbb{R}}$ e vice-versa.

proposição:

Sejam A e B conjuntos e sejam R e S relações binárias de A em B. Então,

1) $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$ e $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$.

2) $(R^{-1})^{-1} = R$.

3) Se $R \subseteq S$, então $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

demonstração: Exercício. $\square$

observação:

É de notar que para uma função $f : A \to B$ invertível, a relação inversa do grafo de f é precisamente o grafo da função inversa de f.

De facto:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{G}_f)^{-1} \\ = \; & \{(a, f(a)) \in A \times B \; : \; a \in A\}^{-1} \\ = \; & \{(f(a), a) \in B \times A \; : \; a \in A\} \\ = \; & \{(b, f^{-1}(b)) \in B \times A \; : \; b \in B\} \\ = \; & \mathcal{G}_{f^{-1}} \end{aligned}$$

definição:

Sejam A, B, C, D conjuntos, R uma relação binária de A em B e S uma relação binária de C em D.

Chama-se **relação composta de S com R**, e representa-se por $S \circ R$, à relação binária de A em D definida por:

$$S \circ R = \{(x, y) \in A \times D \ : \exists_{z \in B \cap C} \ \ ((x, z) \in R \wedge (z, y) \in S)\}.$$

observação:

É de notar que, nas condições da definição anterior, se $B \cap C = \emptyset$, então $S \circ R = \emptyset$.

exemplo:

Sejam $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$, $C=\{0,2,3,4\}$ e $D=\{0,1,3,5\}$.
Consideremos as relações binárias

$$R=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,4)\}\subseteq A\times B$$

e

$$S=\{(0,1),(3,0),(3,3),(3,5),(4,0)\}\subseteq C\times D.$$

Tem-se

$$S\circ R=\{(1,0),(1,3),(1,5),(2,0)\}$$

e

$$R\circ S=\{(0,2),(0,3)\}.$$

observação:

Do exemplo anterior, podemos concluir que a composição de relações binárias não é necessariamente comutativa.

proposição:

Sejam R, S e T relações binárias. Então,

1) $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$ e $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

3) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

demonstração:

1) Comecemos por mostrar que $\mathrm{Dom}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Dom}(R)$.

Dado $x \in \mathrm{Dom}(S \circ R)$, existe y tal que $(x, y) \in S \circ R$. Por definição de relação composta, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in S$ para algum z.

Em particular, $(x, z) \in R$, pelo que $x \in \mathrm{Dom}(R)$.

De forma semelhante prova-se que $\mathrm{Im}(S \circ R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

2) Seja $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$. Então, $(x, z) \in R$ e $(z, y) \in T \circ S$ para algum z.

De $(z, y) \in T \circ S$ segue que $(z, w) \in S$ e $(w, y) \in T$ para algum w.

Ora, como $(x, z) \in R$ e $(z, w) \in S$, temos que $(x, w) \in S \circ R$.

Assim, $(x, w) \in S \circ R$ e $(w, y) \in T$, pelo que $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$. Logo, $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$.

De modo análogo prova-se que $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$.

3) Para todo o objeto (x, y),

$$
\begin{aligned}
(x, y) \in (S \circ R)^{-1} &\Leftrightarrow (y, x) \in S \circ R \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ ((y, z) \in R \wedge (z, x) \in S) \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ ((z, y) \in R^{-1} \wedge (x, z) \in S^{-1}) \\
&\Leftrightarrow \exists_z \ ((x, z) \in S^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}.
\end{aligned}
$$

□

observação:

É de notar que dadas funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$, a relação composta do grafo de f com o grafo de g é a relação binária de A em C dada precisamente pelo grafo da função $g \circ f$, ou seja:

$$\mathcal{G}_g \circ \mathcal{G}_f = \mathcal{G}_{g \circ f} \quad .$$

5.3 Classes fundamentais de relações binárias

Em seguida, definiremos algumas classes fundamentais de relações binárias, que, mais adiante, serão usadas para definir outras classes especiais de relações binárias.

definição:

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Dizemos que

1) R é **reflexiva** quando $\forall_{a \in A}\,(a, a) \in R$;

2) R é **simétrica** quando $\forall_{a,b \in A}\,((a, b) \in R \to (b, a) \in R)$;

3) R é **antissimétrica** quando $\forall_{a,b \in A}\,(((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \to a = b)$;

4) R é **transitiva** quando $\forall_{a,b,c \in A}\,(((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \to (a, c) \in R)$.

Note-se que uma relação binária R em A é antissimétrica se e só se

$$\forall_{a,b \in A}\,(((a, b) \in R \wedge a \neq b) \to (b, a) \notin R).$$

exemplo:

Seja A um conjunto.

1) A relação id_A é reflexiva, simétrica, transitiva e antissimétrica em A.

2) A relação ω_A é reflexiva, simétrica e transitiva em A. Esta relação é antissimétrica se e só se A tem no máximo um elemento.

3) A relação $\emptyset$ é simétrica, transitiva e antissimétrica em A. Esta relação é reflexiva se e só se $A = \emptyset$.

4) Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$, então:

i. uma vez que $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \in R$, a relação R é reflexiva;

ii. o par $(1,2)$ é elemento de R, mas $(2,1) \notin R$, pelo que R não é simétrica;

iii. como não existem elementos distintos $a, b \in A$ tais que $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$, podemos afirmar que a relação R é antissimétrica;

iv. R é transitiva, visto que

$$\begin{array}{c}
((1,1) \in R \wedge (1,1) \in R) \rightarrow (1,1) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,2) \in R) \rightarrow (1,2) \in R \\
((1,1) \in R \wedge (1,3) \in R) \rightarrow (1,3) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \rightarrow (1,2) \in R \\
((1,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \rightarrow (1,3) \in R \\
((1,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \rightarrow (1,3) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,2) \in R) \rightarrow (2,2) \in R \\
((2,2) \in R \wedge (2,3) \in R) \rightarrow (2,3) \in R \\
((2,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \rightarrow (2,3) \in R \\
((3,3) \in R \wedge (3,3) \in R) \rightarrow (3,3) \in R \\
((4,4) \in R \wedge (4,4) \in R) \rightarrow (4,4) \in R
\end{array}$$

e o antecedente da implicação $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \rightarrow (a,c) \in R$ é falso para as restantes combinações de valores para a, b e c.

proposição:

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então

1) R é reflexiva se e só se $id_A \subseteq R$;

2) R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$;

3) R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$;

4) R é antissimétrica se e só se $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$.

demonstração: exercício. $\square$

O **fecho de uma relação binária** R **para um dada propriedade** P corresponderá a uma relação que *estende minimalmente* R com novos pares ordenados, de modo a garantir a propriedade P.

No que se seguirá, concretizaremos este conceito para as propriedades P caracterizadoras da reflexividade, simetria e transitividade de relações binárias.

definição:

Dada uma relação binária R num conjunto A, chamamos **fecho reflexivo** de R à menor relação reflexiva que contém R,ou seja, à relação binária S que satisfaz as seguintes condições:

1) S é reflexiva;

2) $R \subseteq S$;

3) se T é uma relação binária em A que é reflexiva e contém R, então $S \subseteq T$.

O fecho reflexivo de R será denotado por R^rou por $R^=$.

proposição:

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então:

1) R é reflexiva se e só se $R = R^r$;

2) $R^r = R \cup id_A$.

demonstração: exercício. $\square$

exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$. Então:

1) R não é reflexiva (porquê?);

2) atendendo à proposição anterior, o fecho reflexivo de R é:

$$R^r = R \cup id_A = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \ .$$

definição:

Dada uma relação binária R num conjunto A, chamamos **fecho simétrico** de R à menor relação simétrica que contém R, ou seja, à relação binária S que satisfaz as seguintes condições:

1) S é simétrica;

2) $R \subseteq S$;

3) se T é uma relação binária em A que é simétrica e contém R, então $S \subseteq T$.

O fecho simétrico de R será denotado por R^s.

proposição:

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então:

1) R é simétrica se e só se $R = R^s$;

2) $R^s = R \cup R^{-1}$.

demonstração: exercício. $\square$

exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$. Então:

1) R não é simétrica (porquê?);

2) atendendo à proposição anterior, o fecho simétrico de R é:

$$R^s = R \cup R^{-1} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\} \ .$$

definição:

Dada uma relação binária R num conjunto A, chamamos **fecho transitivo** de R à menor relação transitiva que contém R, ou seja, à relação binária S que satisfaz as seguintes condições:

1) S é transitiva;

2) $R \subseteq S$;

3) se T é uma relação binária em A que é transitiva e contém R, então $S \subseteq T$.

O fecho transitivo de R será denotado por R^t ou por R^+.

exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4)\}$. Então:

1) R não é transitiva (porquê?);

2) o fecho transitivo de R é a relação

$$S = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (2, 2), (3, 3), (2, 4)\} \ .$$

Mostremos 2), a partir da definição de fecho transitivo.

i. S é transitiva. (Porquê?)

ii. É imediato verificar que $R \subseteq S$.

iii. Falta apenas mostrar que se T é transitiva e contém R, então $S \subseteq T$:

a) os quatro primeiros pares de S têm que pertencer a T, dado que pertencem a R e, por hipótese, $R \subseteq T$;
b) o par $(2, 2)$ terá que pertencer a T, dado que $(2, 3)$ e $(3, 2)$ pertencem a T —estes dois pares pertencem a R e, por hipótese, $R \subseteq T$— e, por hipótese, T é transitiva; por razões análogas, conclui-se que também os pares $(3, 3)$ e $(2, 4)$ têm que pertencer a T;
c) assim, de a) e b), segue que $S \subseteq T$ (como pretendíamos mostrar).

À semelhança do que sucede com o fecho reflexivo e o fecho simétrico de uma relaçao binária, prova-se facilmente que:

proposição:

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então: R é transitiva se e só se $R = R^t$.

No entanto, a obtenção de caracterizações alternativas do fecho transitivo de uma relação é mais complexa.

definição:

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a **potência** n de R é a relação binária em A, notada por R^n, dada (recursivamente) por:

$$R^1 = R; \qquad R^{i+1} = R \circ R^i \quad (i \in \mathbb{N}) \ .$$

proposição:

Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Então:

1) $R^t = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} R^i$;

2) se A é um conjunto finito com n elementos, $R^t = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

observação:

O item 2) da proposição anterior oferece um método para calcular o fecho transitivo de uma relação binária num conjunto finito.

5.4 Relações de equivalência

definição:

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de equivalência em** A quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

exemplo:

1) Dado um conjunto A não vazio, as relações id_A e ω_A são relações de equivalência em A.

2) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e
$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$. Então,
i. R é reflexiva uma vez que

$$\mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\} \subseteq R;$$

ii. R é simétrica pois

$$R^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} = R;$$

iii. R é transitiva porque

$$R \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4)\} \subseteq R.$$

Por i.-iii., R é uma relação de equivalência em A.

3) Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. A relação binária definida em A por

$$x\, R_f\, y \quad \leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

é uma relação de equivalência em A. De facto,

i. R_f é reflexiva: $\forall_{x \in A}\ f(x) = f(x)$;

ii. R_f é simétrica: $\forall_{x,y \in A}\ (f(x) = f(y) \to f(y) = f(x))$;

iii. R_f é transitiva: $\forall_{x,y,z \in A}\ ((f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \to f(x) = f(z))$.

4) Seja R a relação binária em $\mathbb{Z}$ definida por

$$a\,R\,b \quad \leftrightarrow \quad a-b \ \text{ é divisível por 3.}$$

Verifiquemos que R é uma relação de equivalência. Com efeito,

i. para todo o $a \in \mathbb{Z}$, $a - a = 0$ é divisível por 3, pelo que $a\,R\,a$. Portanto, R é reflexiva;

ii. para todos os $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, pelo que $b - a = -(a - b) = -(3k) = 3(-k)$, com $-k \in \mathbb{Z}$. Logo, $b\,R\,a$ e, assim, R é simétrica;

iii. para todos os $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a\,R\,b$ e $b\,R\,c$, então $a - b = 3k$, para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $b - c = 3k'$, para algum $k' \in \mathbb{Z}$. Logo, $a - c = (a - b) + (b - c) = 3(k + k')$, com $k + k' \in \mathbb{Z}$, pelo que $a\,R\,c$. Logo, R é transitiva.

Notemos que, dado $a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 1\,R\,a \quad &\leftrightarrow \quad 1 - a = 3k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\leftrightarrow \quad a = 3k + 1, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{Z} \\ &\leftrightarrow \quad a \text{ tem resto 1 na divisão inteira por 3.} \end{aligned}$$

De modo análogo se prova que $2\,R\,a$ se e só se a tem resto 2 na divisão inteira por 3 e $0\,R\,a$ se e só se a tem resto 0 na divisão inteira por 3.

Assim, uma vez que 0, 1, 2 são os únicos restos possíveis na divisão inteira por 3 e R é uma relação de equivalência, os elementos de $\mathbb{Z}$ podem ser agrupados nos seguintes três subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{a \in \mathbb{Z} \;:\; 0\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \;:\; \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k\} \\ X_1 &= \{a \in \mathbb{Z} \;:\; 1\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \;:\; \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 1\} \\ X_2 &= \{a \in \mathbb{Z} \;:\; 2\,R\,a\} = \{a \in \mathbb{Z} \;:\; \exists_{k \in \mathbb{Z}}\ a = 3k + 2\} \end{aligned}$$

definição:

Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $x \in A$. Chama-se **classe de equivalência de** x **módulo** Rou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de** x, ao conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \ : \ x \, R \, y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de** A **módulo** R e representamo-lo por A/R, ou seja,

$$A/R = \{[x]_R \ : \ x \in A\}.$$

exemplo:

1) Consideremos a relação de equivalência R definida no exemplo anterior. Então,

$$\begin{aligned}
[0]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 0 \, R \, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ \exists_{k \in \mathbb{Z}} \ a = 3k\} \\
[1]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 1 \, R \, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ \exists_{k \in \mathbb{Z}} \ a = 3k + 1\} \\
[2]_R &= \{a \in \mathbb{Z} \ : \ 2 \, R \, a\} = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ \exists_{k \in \mathbb{Z}} \ a = 3k + 2\}
\end{aligned}$$

e $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$.

2) Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência id_A.Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\mathrm{id}_A} = \{y \in A \ : \ y \,\mathrm{id}_A\, x\} = \{y \in A \ : \ y = x\} = \{x\}$$

e, portanto,

$$A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \ : \ x \in A\}.$$

3) Seja $A \neq \emptyset$. Consideremos a relação de equivalência ω_A. Para $x \in A$, temos que

$$[x]_{\omega_A} = \{y \in A \ : \ y \,\omega_A\, x\} = A,$$

pelo que

$$A/\omega_A = \{A\}.$$

4) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideremos a relação de equivalência $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$. Então,

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

exemplo:

Observe-se que em cada um dos quatro casos do exemplo anterior, as classes de equivalência são não vazias, são disjuntas duas a duas e a sua união é o conjunto no qual a relação está definida e que, por isso, os respetivos conjuntos quociente constituem partições desse conjunto.

1) O conjunto quociente $\mathbb{Z}/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$, onde R é a relação de equivalência definida por $a\,R\,b \;\leftrightarrow\; a - b$ é divisível por 3, é uma partição de $\mathbb{Z}$.

2) Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\mathrm{id}_A = \{\{x\} \;:\; x \in A\}$. É claro que A/id_A é uma partição de A.

3) Dado $A \neq \emptyset$, temos que $A/\omega_A = \{A\}$ e $\{A\}$ é uma partição de A.

4) Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$, então $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Facilmente se verifica que A/R é uma partição de $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

proposição:

Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A.

i. Para todo $x \in A$, a) $x \in [x]_R$; b) $[x]_R \neq \emptyset$; e c) $[x]_R \subseteq A$.

ii. Para quaisquer $x, y \in A$, $y \in [x]_R$ se e só se $[x]_R = [y]_R$.

iii. Para quaisquer $x, y \in A$, se $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$, então $[x]_R = [y]_R$.

iv. $\bigcup\limits_{x \in A} [x]_R = A$.

demonstração:

Mostremos ii. (A prova das restantes propriedades é deixada como exercício.)

Sejam $x, y \in A$.

$\Leftarrow$) Suponhamos que $[x]_R = [y]_R$. Queremos provar que $y \in [x]_R$.

De i., temos que $y \in [y]_R$. Assim, como da suposição sabemos que $[y]_R = [x]_R$, segue que $y \in [x]_R$.

$\Rightarrow$) Suponhamos, agora, que $y \in [x]_R$. Queremos provar que $[x]_R = [y]_R$.

De $y \in [x]_R$ temos que $x\ R\ y$. Como R é simétrica, concluímos que $y\ R\ x$. Então, dado $a \in A$:

$$\begin{aligned} a \in [y]_R \quad &\Leftrightarrow y\ R\ a \\ &\Rightarrow x\ R\ a \qquad \text{(porque } x\ R\ y \text{ e } R \text{ é transitiva)} \\ &\Leftrightarrow a \in [x]_R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a \in [x]_R \quad &\Leftrightarrow x\ R\ a \\ &\Rightarrow y\ R\ a \qquad \text{(porque } y\ R\ x \text{ e } R \text{ é transitiva)} \\ &\Leftrightarrow a \in [y]_R \end{aligned}$$

Logo, $[y]_R \subseteq [x]_R$ e $[x]_R \subseteq [y]_R$, pelo que $[x]_R = [y]_R$. □

proposição:

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Então, A/R é uma partição de A.

demonstração:

Segue imediatamente da proposição anterior (exercício). □

exemplo:

Consideremos de novo o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e a relação de equivalência $R = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$. Já observámos que:

$$[1]_R = \{1, 2\} = [2]_R, \quad [3]_R = \{3\}, \quad [4]_R = \{4\}.$$

Assim, $A/R = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$ e facilmente se comprova que, de facto, o conjunto quociente A/R é uma partição do conjunto A.

definição:

Seja A um conjunto e Π uma partição de A. A **relação em A induzida por Π** é a relação binária em A, que notaremos por $\mathcal{R}_\Pi$, e que é dada por:

$$x \,\mathcal{R}_\Pi\, y \;\text{ se e só se }\; \text{existe } X \in \Pi \text{ tal que } \{x, y\} \subseteq X \quad (x, y \in A).$$

exemplo:

1) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e seja Π a seguinte partição de A: $\Pi = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Comprova-se facilmente que a relação induzida por Π em A é:

$$\mathcal{R}_\Pi = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$$

É de notar que $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência, cujas respetivas classes de equivalência são:

$$[1]_{\mathcal{R}_\Pi} = \{1, 2\} = [2]_{\mathcal{R}_\Pi}, \quad [3]_{\mathcal{R}_\Pi} = \{3\}, \quad [4]_{\mathcal{R}_\Pi} = \{4\}.$$

2) Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $\Pi = \{X_0, X_1, X_2\}$, onde

$$X_0 = \{3k \ : \ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_1 = \{3k + 1 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}, \qquad X_2 = \{3k + 2 \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Então,

$$x \, \mathcal{R}_\Pi \, y \quad \leftrightarrow \quad x - y \text{ é divisível por 3.}$$

Note-se que já observámos que esta relação é também uma relação de equivalência.

proposição:

Seja Π uma partição de um conjunto A. Então, $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A.

demonstração: exercício. $\square$

proposição:

Seja A um conjunto.

1) Se R é uma relação de equivalência em A, então $\mathcal{R}_{(A/R)} = R$.

2) Se Π é uma partição de A, então $A/(\mathcal{R}_{\Pi}) = \Pi$.

A proposição anterior permite estabelecer que os processos

i. de construção de uma partição de um conjunto A a partir de uma relação de equivalência em A e

ii. de construção de uma relação de equivalência a partir de uma partição

são inversos:

proposição:

Sejam A um conjunto, X o conjunto das relações de equivalência em A e Y o conjunto das partições de A. Seja ainda $f : X \to Y$ a função tal que $f(R) = A/R$, para cada $R \in X$, e $g : Y \to X$ a função tal que $g(\Pi) = \mathcal{R}_{\Pi}$, para cada $\Pi \in Y$. Então:

i. f é bijetiva e $f^{-1} = g$;

ii. equivalentemente, g é bijetiva e $g^{-1} = f$.