Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC | LMAT
15 de junho de 2023

Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso

duração: 2h30min

Grupo I

Justifique convenientemente todas as respostas.

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra do tipo $(2,1)$, onde $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	1	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	4	2	5

Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$. Diga se $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$. Justifique.

2. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ onde $A = \{a,b,c,d\}$ e $f^{\mathcal{A}}$, $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	a	a	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a	b

   (a) Considere as congruências $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c,d)$.
   Determine θ_2. Justifique que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.

   (b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Indique álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ nas condições indicadas.

   (c) A álgebra $\mathcal{A}$ é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.

3. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um morfismo invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

Grupo II

Relativamente às questões deste grupo, responda a quatro, e apenas quatro, das questões a seguir indicadas. Caso responda às cinco questões, apenas serão consideradas as respostas às questões 4., 6., 7. e 8. Justifique todas as respostas.

4. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Seja $\beta : A/\ker\alpha \to B$ a aplicação definida por $\beta([a]_{\ker\alpha}) = \alpha(a)$, para todo $[a]_{\ker\alpha} \in A/\ker\alpha$.
Mostre que β é um monomorfismo de $\mathcal{A}/\ker\alpha$ em $\mathcal{B}$.

5. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que SHS é um operador de fecho.

6. Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ e $k : C \to D$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se g é um monomorfismo e $(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k, então (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$.

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$, $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, então $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

8. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor. Mostre que se F é um funtor fiel, pleno e sobrejetivo nos objetos, então F preserva monomorfismos.

Cotações:
Grupo I: $1.(1,5); 2.(2,0+1,25+1,25); 3.(2,0)$;
Grupo II: cada questão deste grupo tem a cotação de 3,0 valores.