



Todas as respostas devem ser justificadas e os cálculos devem ser apresentados.

1. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)\}$ dois referenciais num plano afim \mathcal{A} tais que:

- $O = (0, 2)_{\mathcal{R}'}$
- $\begin{cases} \vec{v}'_1 &= \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{v}'_2 &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases}$

- (a) Determine uma expressão matricial para a mudança de coordenadas entre os referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' e as coordenadas do ponto $M = (2, 1)_{\mathcal{R}}$ no referencial \mathcal{R}' .
- (b) Suponha que \mathcal{R} é um referencial ortonormado.
 - i. Será também \mathcal{R}' um referencial ortonormado? É ortogonal?
 - ii. Determine a distância entre O e O' .

2. Seja \mathcal{A} um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

- (a) Seja r a reta que passa pelos pontos $A = (0, -1, 2)$ e $B = (3, 2, 1)$. Determine a equação cartesiana do plano π perpendicular a r que passa pelo ponto $M = (1, 1, 0)$.
- (b) Seja π' o plano definido pela equação cartesiana $-y + z - 1 = 0$. Determine as equações paramétricas da reta r' perpendicular a π' que passa pelo ponto $M' = (1, 2, 3)$.

3. Seja \mathcal{A} um espaço afim de dimensão 4. Considere os subespaços afins:

$$\pi_1 = (2, 0, 0, 1) + \langle (1, 2, 0, 1), (-1, 0, 1, 0) \rangle$$

$$\pi_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{A} : x + z + t = 1, x - 2y - z + t = 3\}$$

- (a) Apresente um sistema de equações cartesianas de π_1 .
- (b) Apresente uma equação vetorial de π_2 .
- (c) Determine o subespaço afim $\pi_1 + \pi_2$ e indique a sua dimensão.

4. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional. Considere o plano π definido pela equação cartesiana $2x - 2y - z - 1 = 0$.

- (a) Determine a projecção ortogonal de um ponto $M = (x, y, z)$ no plano π .
- (b) Determine a representação matricial da reflexão no plano π .

5. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional. Considere a reta $r = \langle (1, -1, 0) \rangle$ e o plano $\pi = \langle (1, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle$.
- Determine a projeção paralela no plano π dirigida por r .
 - Determine a projeção paralela na reta r dirigida por π .
6. Seja \mathcal{A} um espaço afim tridimensional.
- Determine a expressão analítica da rotação de ângulo π segundo o eixo que incide na origem e está dirigido pelo vetor $\vec{v} = (1, 0, -1)$.
 - Determine a expressão analítica da rotação de ângulo π segundo o eixo que incide em $A = (0, 1, 0)$ e está dirigido pelo vetor $\vec{v} = (1, 0, -1)$.
7. Seja \mathcal{A} um plano afim. Considere o ponto $\Omega = (2, -1)$ e a reta r definida pela equação cartesiana $y + x = 0$. Seja f a projeção perspectiva desde o ponto Ω à reta r .
- Determine a reta excecional desta projeção perspectiva.
 - Determine a expressão analítica de f .

- Cotações:**
- (a) 1 valor, (b) 1 valor;
 - (a) 1 valor, (b) 1 valor;
 - (a) 1.5 valores, (b) 1.5 valores, (c) 2 valores;
 - (a) 1.5 valores, (b) 1.5 valores;
 - (a) 1.5 valores, (b) 1.5 valores;
 - (a) 1.5 valores, (b) 1 valor;
 - (a) 1 valor, (b) 1.5 valores.