Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
2 de fevereiro de 2015

Álgebra Linear CC

Exame de recurso — duração: 2h15min

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e

$$B_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} -2 & \alpha+1 & -2\beta \\ 1 & 0 & \beta \\ -1 & -\alpha-1 & \beta \end{bmatrix}, b_\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -\beta \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -p^2 & p & pq \\ p & -1 & q \\ pq & q & -q^2 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha, \beta, p, q \in \mathbb{R}$.

(a) Determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $(b_0 b_0^T)B_{0,0} + X = I_3$.

(b) Discuta, em função dos parâmetros α e β, o sistema $B_{\alpha,\beta}x = b_\beta$. Para $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ indique o conjunto de soluções do sistema $B_{\alpha,\beta} = b_\beta$.

(c) Recorrendo às propriedades dos determinantes e sem utilizar o Teorema de Laplace, mostre que $|C| = 4p^2q^2$.

(d) Mostre que se $A^2 = 0_{n\times n}$, então $I_n - A$ é invertível.

2. No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, considere os vetores $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (0,0,1,0)$, $u_3 = (2,2,2,2)$, $u_4 = (0,1,0,0)$ e seja $U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$.
Sejam B_1 e B_2 as bases dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ dadas, respetivamente, por $B_1 = ((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ e $B_2 = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)$ e sejam $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ as transformações lineares tais que

$$f(x,y,z,w) = (2x - z, 2y - w, 2y + w), \text{ para todo } (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4,$$

e

$$M(g; B_1, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base e a dimensão de U.

(b) Dê exemplo de, ou justifique que não existe:

i. um conjunto gerador de U com 5 vetores;

ii. um subconjunto de U com 5 vetores linearmente independentes.

(c) Mostre que $\mathrm{Nuc}f =< (-1,0,-1,0) >$ e que $(-1,0,-1,0) \notin U$.

(d) Determine $\dim(U + \mathrm{Nuc}f)$. Diga se U é um suplementar de $\mathrm{Nuc}f$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(e) Indique a característica de f. Diga se f é sobrejetiva.

(f) Determine $M(f, B_2, B_1)$ e $M(g \circ f; B_2, B_1)$.

(g) Determine $g(1,2,2)$. Diga se $(1,2,2)$ é um vetor próprio de g.

(h) Prove que 1 e 5 são os únicos valores próprios de g e indique as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas. Diga se g é diagonalizável.

Cotação: **1** - (1.5 + 2.5 + 1.5 + 1.5); **2** - (1.75 + 1.5 + 1.75 + 1.75 + 1.0 + 1.5 + 1.25 + 2.5);