Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2024/2025

Álgebra Universal e Categorias

folha 4

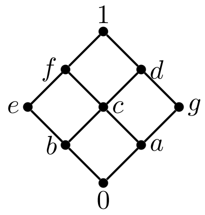
2. Álgebra Universal

2.1. Sejam $A = \{0, a, b, c, d, e, f, g, 1\}$, $B = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ e $(A, \leq)$ o c.p.o. correspondente ao diagrama de Hasse a seguir representado. Considere as álgebras $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in \{\wedge,\vee,\delta,0,1\}})$ e $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in \{\wedge,\vee,\delta,0,1\}})$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$, onde as operações binárias de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são definidas por

$$x \wedge^{\mathcal{A}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{A}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in A,$$

$$x \wedge^{\mathcal{B}} y = \inf\{x, y\} \text{ e } x \vee^{\mathcal{B}} y = \sup\{x, y\}, \forall x, y \in B,$$

as operações unárias são definidas pelas tabelas a seguir indicadas e $0^{\mathcal{A}} = 0^{\mathcal{B}} = 0$ e $1^{\mathcal{A}} = 1^{\mathcal{B}} = 1$.



x	0	a	b	c	d	e	f	g	1
$\delta^{\mathcal{A}}(x)$	1	b	a	c	f	g	d	e	0

x	0	a	b	c	d	f	1
$\delta^{\mathcal{B}}(x)$	1	b	a	c	f	b	0

(a) Dê exemplo de um reduto de $\mathcal{A}$ que seja:
 i. um semigrupo. ii. um reticulado.

(b) Para cada um dos conjuntos C a seguir indicados, diga se C é um subuniverso de $\mathcal{A}$:
 i. $C = \emptyset$. ii. $C = \{0, f, d, 1\}$. iii. $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$.

(c) Diga se $\mathcal{B}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

2.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{A}_n = (A_n; (f^{\mathcal{A}_n}, 0^{\mathcal{A}_n}))$ a álgebra de tipo $(1, 0)$, onde $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, $0^{\mathcal{A}_n} = 0$ e $f^{\mathcal{A}_n} : A_n \to A_n$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}_n}(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se} \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n-2\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 2n-1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2n \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine todos os subuniversos de $\mathcal{A}_n$.

2.3. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $a \in R$. Mostre que $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ é um subuniverso de $\mathcal{R}$.

2.4. Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ diz-se *mono-unária* se F é formado por uma única operação e essa operação é unária. Uma subálgebra $\mathcal{B} = (B; G)$ de $\mathcal{A}$ diz-se uma *subálgebra própria* se $B \subsetneq A$.

(a) Para cada inteiro $n > 0$, dê exemplo de uma álgebra mono-unária $\mathcal{A}_n = (\{0, 1, ..., n-1\}; f)$ que não admita subálgebras próprias.

(b) Mostre que qualquer álgebra mono-unária infinita tem subálgebras próprias.

2.5. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A$. Mostre que:

(a) $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

(b) $X \subseteq Y \Rightarrow Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

(c) $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X)) = Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

(d) $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z \text{ é subconjunto finito de } X\}$.

2.6. Considere a álgebra $\mathcal{A}$ definida no exercício 2.1.

(a) Determine $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{e\})$ e $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(\{f, g\})$.

(b) Dê exemplo de conjuntos $X, Y \subseteq A$ tais que:
 i. $X \neq Y$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) = Sg^{\mathcal{A}}(Y)$. ii. $|X| = 2$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X) = A$.

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2024/2025

Álgebra Universal e Categorias

folha 5

2.7. Seja $\mathcal{A} = (\{e, a, b, c, d\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(2, 0)$, onde $A = \{e, a, b, c, d\}$, $c^{\mathcal{A}} = d$ e $*^{\mathcal{A}}$ é a operação definida por

$f^{\mathcal{A}}$	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	d	e	c	b
b	b	e	d	e	e
c	c	e	a	e	c
d	d	b	e	c	e

(a) Determine todos os subuniversos de $\mathcal{A}$.

(b) Sejam $X = \{b\}$ e $Y = \{c\}$. Diga, justificando, se $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

2.8. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária. Mostre que:

(a) Se S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

(b) Para quaisquer $X, Y \subseteq A$, $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) = Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

2.9. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, f)$ a álgebra de tipo (1) onde f é a operação definida por

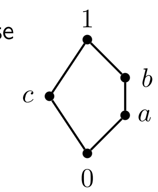
x	a	b	c	d
$f(x)$	c	b	a	d

(a) Determine todas as relações de congruência em $\mathcal{A}$ e represente $\mathrm{Cong}(\mathcal{A})$ por meio de um diagrama de Hasse.

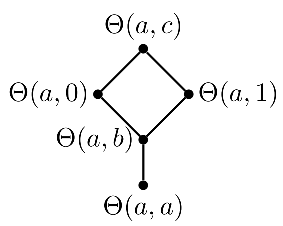
(b) Para cada $\theta \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$, determine a álgebra quociente $\mathcal{A}/\theta$.

2.10. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $\theta \in \mathrm{Cong}(\mathcal{R})$. Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in R$, se $a \leq c \leq b$ e $(a, b) \in \theta$, então $(a, c) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta$.

2.11. Considere o reticulado $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$ representado pelo diagrama de Hasse



Mostre que o reticulado das congruências de $\mathcal{N}_5$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



2.12. Considere o anel $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$. Para cada $q \in \mathbb{Z}$, seja $\equiv_q$ a relação de equivalência definida em $\mathbb{Z}$ por

$$r \equiv_q s \text{ sse } r - s = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Mostre que, para cada $q \in \mathbb{Z}$, a relação $\equiv_q$ é uma congruência em $\mathcal{Z}$.

2.13. Seja $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ um semigrupo. Um subconjunto não vazio I de S diz-se um *ideal* de $\mathcal{S}$ se, para quaisquer $s \in S$ e $i \in I$, tem-se $is \in I$ e $si \in I$. Mostre que, para qualquer ideal I, $I^2 \cup \triangle_S$ é uma congruência em $\mathcal{S}$, designada a *congruência de Rees induzida por* I.

2.14. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo $(O; \tau)$. Mostre que $\triangle_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ e $\nabla_A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$ são congruências em $\mathcal{A}$.

Álgebra Universal e Categorias

folha 6

2.15. Sejam $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; *^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{1,2\}; *^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo $(2,0)$ cujas operações nulárias são dadas por $c^{\mathcal{A}} = 2$, $c^{\mathcal{B}} = 1$ e cujas operações binárias são definidas por

$*^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	5	2
2	2	3	3	2	2
3	2	3	2	2	2
4	5	2	2	4	2
5	2	2	2	2	2

$*^{\mathcal{B}}$	1	2
1	2	2
2	2	1

Seja $\alpha : \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5\}$ a aplicação definida por $\alpha(1) = 2$ e $\alpha(2) = 3$. Mostre que a aplicação α é um monomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Justifique que $\mathcal{B}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

2.16. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, então $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$.

2.17. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo, então α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$.

2.18. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que:

(a) Se A_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$, então $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

(b) Se B_1 é um subuniverso de $\mathcal{B}$, então $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

2.19. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que

$$\mathrm{Eq}(\alpha, \beta) = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\}$$

é um subuniverso de $\mathcal{A}$. A este subuniverso chama-se *igualizador de* α *e* β.

2.20. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Mostre que α é injetiva se e só se $\ker \alpha = \triangle_A$.

2.21. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : A \to B$ uma função. Mostre que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ se e só se $\{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

2.22. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que:

(a) $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \simeq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$.

(b) $\mathcal{A} \times (\mathcal{B} \times \mathcal{C}) \simeq (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times \mathcal{C}$.

2.23. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \rho \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.

(a) Mostre que a aplicação $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\rho$ definida por $\alpha(a) = ([a]_\theta, [a]_\rho)$ é um homomorfismo.

(b) Mostre que $\ker \alpha = \theta \cap \rho$. Conclua que α é injetiva se e só se $\theta \cap \rho = \triangle_A$.

(c) Mostre que α é sobrejetiva se e só se $\theta \circ \rho = \nabla_A$.

2.24. Sejam $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in O})$, $\mathcal{B} = (B; (f^{\mathcal{B}})_{f \in O})$ e $\mathcal{C} = (C; (f^{\mathcal{C}})_{f \in O})$ álgebras de tipo (O, τ), $\alpha_1 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a aplicação definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.

(a) Mostre que α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

(b) Mostre que $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

(c) Mostre que se α é um epimorfismo, então α_1 e α_2 são epimorfismos e

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2024/2025

Álgebra Universal e Categorias

folha 7

2.25. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \theta^* \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$. Mostre que (θ, θ^*) é um par de congruências fator em $\mathcal{A}$ se e só se $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.

2.26. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $f^{\mathcal{A}} : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$ é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

(a) Determine $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$. Justifique que $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$ é um par de congruências fator.

(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Dê exemplo de álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ nas condições indicadas e determine a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

2.27. (a) Mostre que toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível.

(b) Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra tal que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ é a operação unária em A definida por

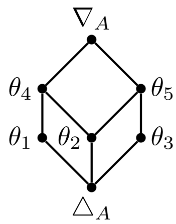
$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \{2, 4\} \\ 2 & \text{se} \quad x \in \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

i. Sejam θ_1 e θ_2 as congruências de $\mathcal{A}$ definidas por $\theta_1 = \Theta(1, 2)$ e $\theta_2 = \Theta(3, 5)$. Determine θ_1 e θ_2. Verifique que $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A}) \setminus \{\triangle_A\}$ e $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$.

ii. Justifique que se θ e ϕ são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, então $\theta = \nabla_A$ ou $\phi = \nabla_A$.

iii. Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível.

2.28. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra cujo reticulado das congruências é representado pelo diagrama de Hasse seguinte



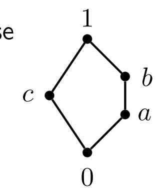
Justifique que:

(a) A álgebra $\mathcal{A}$ não é congruente-distributiva.

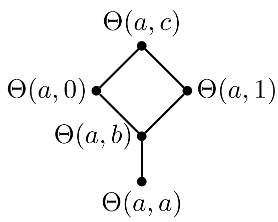
(b) A álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

(c) Os reticulados $Cong(\mathcal{A}/\theta_1)$ e $Cong(\mathcal{A}/\theta_3)$ são isomorfos.

2.29. Considere o reticulado $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$ representado pelo diagrama de Hasse



Sabendo que o reticulado das congruências de $\mathcal{N}_5$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse seguinte



diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{N}_5$ é:

(a) congruente-modular. ii. diretamente indecomponível. iii. subdiretamente irredutível.

2.30. Mostre que toda a cadeia é um reticulado diretamente indecomponível.

Álgebra Universal e Categorias

folha 8

2.31. Mostre que, para cada operador $O \in \{H, S\}$, $IO = OI$.

2.32. Mostre que os operadores S, I, H e IP são idempotentes.

2.33. Mostre que HS, HIP e SIP são operadores de fecho em classes de álgebras do mesmo tipo.

2.34. Mostre que $SH \neq HS$, $PS \neq SP$, $PH \neq HP$.

2.35. Mostre que, se $\mathbf{G}$ é a classe dos grupos abelianos (vistos como álgebras do tipo $(2, 1, 0)$), então $HS(\mathbf{G}) = SH(\mathbf{G})$.

2.36. Sejam $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ álgebras do mesmo tipo. Prove que $V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n) = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.