## 2.3 Dedução Natural para o Cálculo de Predicados

1. Seja $L = (\{c\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem onde $\mathcal{N}(c) = 0$ e $\mathcal{N}(R) = 1$. Encontre demonstrações em DN das seguintes fórmulas.

   **a)** $R(c) \to \exists x_0\, R(x_0)$

   **b)** $\forall x_0\, R(x_0) \to R(c)$

2. Prove que as seguintes $L$-fórmulas são teoremas de DN.

   **a)** $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$

   **b)** $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi)$

   **c)** $(\forall x\, \varphi \vee \forall x\, \psi) \to \forall x\, (\varphi \vee \psi)$

3. Seja $L$ um tipo de linguagem que inclua $R$ como símbolo de relação unário. Diga se:

   **a)** $R(x_0) \vdash \exists x_0\, R(x_0)$.

   **b)** $R(x_0) \vdash \forall x_0\, R(x_0)$.

   **c)** $\exists x_0 R(x_0) \vdash R(x_0)$.

   **d)** $\forall x_0\, R(x_0) \vdash R(x_0)$.

4. Considere as fórmulas de tipo *ARIT* $\varphi_1$ e $\varphi_2$ dadas, respetivamente, por:

   - $\forall x_0\, (0 + x_0 = x_0)$;
   - $\forall x_0 \forall x_1 \forall x_2\, (x_0 + x_1 = x_2 \to s(x_0) + x_1 = s(x_2))$.

   Considere ainda o conjunto $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Mostre que:

   **a)** $\Gamma \vdash 0 + s(0) = s(0)$.

   **b)** $\Gamma \vdash \exists x_3\, (s(0) + 0 = x_3)$.

   **c)** $\Gamma \nvdash \exists x_3\, (s(0) + x_3 = 0)$.

   **d)** $\Gamma \cup \{\neg(0 + s(0) = s(0))\}$ não é satisfazível.

5. Apresente resoluções alternativas para os exercícios 11.b), 12. e 13.b) da secção 2.2, recorrendo a derivações em DN.