2.2. Semântica do Cálculo de Predicados clássico

Observação 169: As fórmulas do Cálculo de Predicados são construídas a partir das fórmulas atómicas (símbolos de relação “aplicados” a termos) e, por esta razão, as fórmulas atómicas desempenham papel semelhante ao das variáveis proposicionais no Cálculo Proposicional. Contudo, ao passo que no Cálculo Proposicional podemos atribuir “diretamente” um valor lógico a uma variável proposicional, a atribuição de valores lógicos às fórmulas atómicas é mais complexa.

Para atribuirmos valores lógicos a fórmulas atómicas, em particular, será necessário fixar previamente a **interpretação dos termos**.

Tal requer que indiquemos qual o **universo** de objetos (**domínio de discurso**) pretendido para a denotação dos termos (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.), bem como a **interpretação** pretendida quer para os **símbolos de função** do tipo de linguagem em questão (por exemplo, para indicar que, tomando $\mathbb{N}_0$ por universo, o símbolo de função binário $+$ denotará a **operação** de adição) quer para as **variáveis** de primeira ordem.

Para a **interpretação das fórmulas atómicas**, será ainda necessário fixar a **interpretação dos símbolos de relação** como **relações** entre objetos do domínio de discurso.

A indicação de qual o domínio de discurso pretendido e de quais as interpretações que deverão ser dadas aos diversos símbolos será efetuada através daquilo que designaremos por **estrutura para um tipo de linguagem**.

A interpretação de variáveis de primeira ordem será feita no contexto de um domínio de discurso, através daquilo a que chamaremos **atribuições numa estrutura**.

Um **par (estrutura, atribuição)** permitirá fixar o valor lógico de qualquer fórmula e, portanto, pode ser pensado como uma **valoração**, uma vez que estes pares desempenharão papel semelhante ao das valorações do Cálculo Proposicional.

Definição 170: Seja $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ um tipo de linguagem. Uma *estrutura de tipo L* é um par $(D, \overline{})$ tal que:

a) D é um conjunto não vazio, chamado o *domínio da estrutura*;

b) $\overline{}$ é uma função com domínio $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$, chamada a *(função de) interpretação da estrutura*, tal que:

- para cada constante c de L, $\overline{c}$ é um elemento de D;
- para cada símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$, $\overline{f}$ é uma função de tipo $D^n \longrightarrow D$;
- para cada símbolo de relação R de L, de aridade n, $\overline{R}$ é uma relação n-ária em D (i.e. $\overline{R} \subseteq D^n$).

Notação 171:

- Usaremos a letra E (possivelmente indexada) para denotar estruturas.
- Dada uma estrutura E, $dom(E)$ denotará o domínio de E.

Exemplo 172:

a) Seja $E_{Arit} = (\mathbb{N}_0, \overline{})$, onde:

- $\overline{0}$ é o número *zero*;
- $\overline{s}$ é a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$, i. e., $\begin{array}{rccc} \overline{s} : \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 & ; \\ n & \mapsto & n+1 & \end{array}$
- $\overline{+}$ é a função *adição* em $\mathbb{N}_0$, i. e.,
  $$\begin{array}{rccc} \overline{+} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 & ; \\ (m,n) & \mapsto & m+n & \end{array}$$
- $\overline{\times}$ é a função *multiplicação* em $\mathbb{N}_0$, i. e.,
  $$\begin{array}{rccc} \overline{\times} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 & ; \\ (m,n) & \mapsto & m \times n & \end{array}$$
- $\overline{=}$ é a relação de *igualdade* em $\mathbb{N}_0$, i. e.,
  $\overline{=} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m = n\}$;
- $\overline{<}$ é a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, i. e.,
  $\overline{<} = \{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : m < n\}$.

Então, E_{Arit} é uma estrutura de tipo *ARIT*. Designaremos, por vezes, esta estrutura por *estrutura standard* de tipo *ARIT*.

b) O par $E_0 = (\{a,b\}, \overline{})$, onde:

- $\overline{0} = a$;
- $\bar{s}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ x & \mapsto & x \end{array}$;
- $\overline{+}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\}\times\{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ (x,y) & \mapsto & b \end{array}$;
- $\overline{\times}$ é a função $\begin{array}{ccc} \{a,b\}\times\{a,b\} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} a & \text{se } x = y \\ b & \text{se } x \neq y \end{cases} \end{array}$;
- $\overline{=} = \{(a,a),(b,b)\}$;
- $\overline{<} = \{(a,b)\}$,

é também uma estrutura de tipo *ARIT*.

c) Existem $2\times4\times16\times16\times16\times16$ estruturas de tipo *ARIT* cujo domínio é $\{a,b\}$. (Porquê?)

Definição 173: Seja E uma estrutura de tipo L. Uma função $a : \mathcal{V} \to dom(E)$ diz-se uma *atribuição* em E e o par (E, a) diz-se uma *valoração de tipo L*.

(Recorde que $\mathcal{V}$ é o conjunto das variáveis de primeira ordem.)

Exemplo 174: São atribuições em E_{Arit} as funções

- $$\begin{array}{rcl} a_0 : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} a_{ind} : \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ x_i & \longmapsto & i \end{array}$$

Definição 175: O *valor de um L-termo t numa L-estrutura* $E = (D, \overline{\ })$ *para uma atribuição a* em E é notado por $t[a]_E$ ou, simplesmente, por $t[a]$ quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada, e é o elemento de D definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $x[a]_E = a(x)$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
b) $c[a]_E = \overline{c}$, para todo $c \in \mathcal{F}$ de aridade 0;
c) $(f(t_1, \ldots, t_n))[a]_E = \overline{f}\,(t_1[a]_E, \ldots t_n[a]_E)$ para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todos $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_L$.

Observação 176:

- A alínea a) da def. anterior diz que a função que a cada termo faz corresponder o seu valor é uma extensão da função atribuição a.
- As alíneas b) e c) dizem, em particular, que as interpretações dos símbolos de função também contribuem essencialmente para o valor de t.

Exemplo 177: Seja t o termo $s(0) \times (x_0 + x_2)$ de tipo *ARIT*. Recorde as atribuições a_{ind} e a_0 em E_{Arit} definidas no Exemplo 174.

1. O valor de t determinado pela atribuição a_{ind} é

$$
\begin{array}{lll}
 & (s(0) \times (x_0 + x_2))[a_{ind}] & \\
= & (\times(s(0), +(x_0, x_2)))[a_{ind}] & \\
= & \overline{\times}(\overline{s}(\overline{0}), \overline{+}(a_{ind}(x_0), a_{ind}(x_2))) & \text{(pela def. de valor de termo)} \\
= & \overline{\times}(\overline{s}(\overline{0}), \overline{+}(0, 2)) & \text{(pela def. de } a_{ind}\text{)} \\
= & (0+1) \times (0+2) & \text{(pela def. de } E_{Arit}\text{)} \\
= & 2 &
\end{array}
$$

2. Já para a atribuição a_0, o valor de t é 0. (Porquê?)

3. Considere-se agora a estrutura E_0 do Exemplo 172 e considere-se a seguinte atribuição nesta estrutura:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathcal{V} & \longrightarrow & \{a,b\} \\ x & \mapsto & b \end{array}$$

O valor de t determinado por α é:

$$\begin{array}{cll} & (s(0)\times(x_0+x_2))[\alpha] & \\ = & (\times(s(0),+(x_0,x_2)))[\alpha] & \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(\overline{0}),\overline{+}(\alpha(x_0),\alpha(x_2))) & \text{(pela def. de valor de termo)} \\ = & \overline{\times}(\overline{s}(\overline{0}),\overline{+}(b,b)) & \text{(pela def. de } \alpha\text{)} \\ = & \overline{\times}(a,b) & \text{(pelas def. de } \overline{0},\overline{s},\overline{+}\text{)} \\ = & b & \text{(pela def. de } \overline{\times}\text{)} \end{array}$$

Notação 178: Sejam a uma atribuição numa estrutura E, $d \in dom(E)$ e x uma variável. Denotamos por $a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ a atribuição em E definida por:

$$a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}(y) = \begin{cases} d & \text{se } y = x \\ a(y) & \text{se } y \neq x \end{cases}.$$

Se $v = (E, a)$ então $v\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ denota $\left(E, a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}\right)$.

Observação: a e $a\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}$ diferem, no máximo, no valor que dão a x.

Exemplo 179: Recorde a atribuição a_{ind} em E_{Arit} definida no Exemplo 174.

$a_{ind}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}$ denota a atribuição em E_{Arit} definida por

$$a_{ind}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix}(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = 0 \\ \\ i \text{ se } i \neq 0 \end{cases} .$$

Definição 180: O *valor lógico de uma L-fórmula φ numa L-estrutura $E = (D, \overline{})$ para uma atribuição a em E* é notado por $\varphi[a]_E$ ou, simplesmente, por $\varphi[a]$ quando é claro qual a estrutura que deve ser considerada e é o elemento do conjunto dos valores lógicos $\{0,1\}$ definido, por recursão em φ, do seguinte modo:

a) $(R(t_1,\dots,t_n))[a]_E = \begin{cases} 1 & \text{se } (t_1[a]_E,\dots,t_n[a]_E) \in \overline{R} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$,
para todo símbolo de relação n-ário R, para todos $t_1,\dots,t_n \in \mathcal{T}_L$;

b) $\perp[a]_E = 0$;

c) $(\neg\varphi)[a]_E = v_\neg(\varphi[a]_E)$;

d) $(\varphi \square \psi)[a]_E = v_\square(\varphi[a]_E, \psi[a]_E)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$;

e) $(\forall x\varphi)[a]_E = \begin{cases} 1 & \text{se, para todo } d \in D,\ \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$;

f) $(\exists x\varphi)[a]_E = \begin{cases} 1 & \text{se existe } d \in D \text{ t.q. } \varphi\left[a\binom{x}{d}\right]_E = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Exemplo 181: Consideremos a estrutura *ARIT* e a atribuição a_{ind} em E_{Arit} definida no Exemplo 174. Consideremos as fórmulas

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1 & = & s(0) < x_2 \\ \varphi_3 & = & \forall x_2 (s(0) < x_2) \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \varphi_2 & = & \exists x_2 (s(0) < x_2) \\ \varphi_4 & = & \forall x_1 \exists x_2 (s(x_1) < x_2) \end{array}$$

Vamos determinar $\varphi_i[a_{ind}]$, para $i = 1, 2, 3, 4$. A melhor forma de usar a Def. 180 é verificar se $\varphi_i[a_{ind}] = 1$.

1.

$$\begin{array}{lll} & \varphi_1[a_{ind}] = 1 & \\ \text{sse} & (s(0)[a_{ind}], x_2[a_{ind}]) \in \overline{<} & \text{(por def. de valor de fórmula)} \\ \text{sse} & (1, 2) \in \overline{<} & \text{(por def. de valor de termo)} \\ \text{sse} & 1 < 2 & \text{(por def. de } \overline{<}\text{)} \end{array}$$

Ora, $1 < 2$. Logo, $\varphi_1[a_{ind}] = 1$.

2.

$$
\begin{array}{lll}
& \varphi_2[a_{ind}] = 1 & \\
\text{sse} & \text{existe } n \in \mathbb{N}_0 \text{ t.q. } (s(0)[a_{ind}\binom{x_2}{n}], x_2[a_{ind}\binom{x_2}{n}]) \in \overline{<} & \text{(por def. valor de fórm.)} \\
\text{sse} & \text{existe } n \in \mathbb{N}_0 \text{ t.q. } (1, n) \in \overline{<} & \text{(por def. valor de termo)} \\
\text{sse} & \text{existe } n \in \mathbb{N}_0 \text{ t.q. } 1 < n & \text{(por def. de } \overline{<}\text{)}
\end{array}
$$

Ora, existe $n \in \mathbb{N}_0$ t.q. $1 < n$. Logo, $\varphi_2[a_{ind}] = 1$.

3. $\varphi_3[a_{ind}] = 0$ porque a proposição “para todo $n \in \mathbb{N}_0, 1 < n$” é falsa.

4.

$$
\begin{array}{ll}
& \varphi_4[a_{ind}] = 1 \\
\text{sse} & \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0, \text{ existe } m \in \mathbb{N}_0 \text{ t. q. } (s(x_1)[a'], x_2[a']) \in \overline{<} \\
\text{sse} & \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0, \text{ existe } m \in \mathbb{N}_0 \text{ t. q. } (n+1, m) \in \overline{<} \\
\text{sse} & \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0, \text{ existe } m \in \mathbb{N}_0 \text{ t. q. } n+1 < m
\end{array}
$$

onde $a' = a_{ind}\binom{x_1}{n}\binom{x_2}{m}$. Logo $\varphi_4[a_{ind}] = 1$.

- Vamos a seguir observar que, uma vez fixada uma estrutura, o valor de um termo depende apenas dos valores das suas variáveis e o valor de uma fórmula depende apenas dos valores das suas variáveis livres.
- Vamos ainda estabelecer como se relacionam os valores de $t'[t/x]$ e de t', e como se relacionam os valores lógicos de $\varphi[t/x]$ e de φ.

Proposição 182: Seja t um termo de tipo L e sejam a_1 e a_2 duas atribuições numa estrutura $E = (D, \bar{\ })$ do tipo L. Se, para todo $x \in VAR(t)$, $a_1(x) = a_2(x)$, então $t[a_1] = t[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em t. Exercício. □

Proposição 183: Seja φ uma fórmula de tipo L e sejam a_1 e a_2 atribuições numa estrutura E do tipo L. Se, para todo $x \in LIV(\varphi)$, $a_1(x) = a_2(x)$, então $\varphi[a_1] = \varphi[a_2]$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. (Exercício.) □

Observação 184: Se φ é uma sentença, E determina o valor lógico de φ.

Exemplo 185: Considere as seguintes fórmulas de tipo *ARIT*.

$$\varphi = \forall x_0\, 0 = x_0 \qquad \psi = \forall x_0 (0 = x_0 \vee 0 < x_0)$$

- Para toda a atribuição a em E_{Arit}, $\varphi[a] = 0$
- Para toda a atribuição a em E_{Arit}, $\psi[a] = 1$

Proposição 186: Sejam t e t' termos de tipo L e seja a uma atribuição numa estrutura de tipo L. Então, $t'[t/x][a] = t'\left[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)\right]$.

Dem.: Por indução estrutural em t'. (Exercício.) □

Proposição 187: Sejam φ uma fórmula de tipo L, t um termo de tipo L, $E = (D, \overline{})$ uma estrutura de tipo L, a uma atribuição em E e x uma variável substituível por t em φ. Então, $\varphi[t/x][a] = \varphi\left[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)\right]$.

Dem.: Por indução estrutural em φ. Exercício. □

Definição 188: Seja $v = (E, a)$ uma valoração de tipo L e seja φ uma fórmula de tipo L. Se $\varphi[a] = 1$, dizemos que *a satisfaz φ em E*, ou que *v satisfaz φ*. Notação: v sat. φ ou (E, a) sat. φ.
Se $\varphi[a] = 0$, dizemos que *a não satisfaz φ em E*, ou que *v não satisfaz φ*. Notação: v não sat. φ.

A proposição seguinte estabelece as *condições de satisfação*.

Proposição 189: Seja $L = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ um tipo de linguagem. Seja $R \in \mathcal{R}$ de aridade n. Sejam $v = (E, a)$ uma valoração, φ, ψ fórmulas, $t_1, \ldots, t_n$ termos, todos de tipo L. Então:

a) v sat. $R(t_1, \cdots, t_n)$ sse $(t_1[a], \cdots, t_n[a]) \in \overline{R}$.

b) v não sat. $\perp$

c) v sat. $\neg\varphi$ sse v não sat. φ

d) v sat. $(\varphi \square \psi)$ sse (...) — ver Cálculo Proposicional

e) v sat. $\forall x \varphi$ sse, para todo $d \in dom(E)$, $v\binom{x}{d}$ sat. φ;

f) v sat. $\exists x \varphi$ sse existe $d \in dom(E)$ tal que $v\binom{x}{d}$ sat. φ;

Dem.: Consequência imediata das definições. $\square$

As condições de satisfação são uma alternativa conveniente à Def. 180.

Exemplo 190: Consideremos a estrutura E_0 de tipo *ARIT* do Exemplo 172 , com domínio $D = \{a, b\}$, e a atribuição α em E_0 tal que $\alpha(x) = b$, para todo x. Seja $v = (E_0, \alpha)$.

	v sat. $\exists x_2\, s(0) < x_2$	
sse	existe $d \in D$ t.q. $\left(s(0)[\alpha\binom{x_2}{d}], x_2[\alpha\binom{x_2}{d}]\right) \in \overline{<}$	(pelas condições de satisfação)
sse	existe $d \in D$ t.q. $(a, d) \in \overline{<}$	(por def. de valor de termo)
sse	existe $d \in D$ t.q. $d = b$	(por def. de $\overline{<}$)

Logo v sat. $\exists x_2\, s(0) < x_2$, donde $(\exists x_2\, s(0) < x_2)[\alpha] = 1$.

Definição 191: Seja L um tipo de linguagem. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_L$.

- Seja $v = (E, a)$ uma valoração de tipo L.
  - Recordar que v *satisfaz* φ (Notação: v sat. φ) se $\varphi[a]_E = 1$.
  - Dizemos que v *satisfaz* Γ se, para todo $\psi \in \Gamma$, v sat. ψ.
    Notação: v sat. Γ.
- Dizemos que
  - φ é *satisfazível* se existe valoração v de tipo L que satisfaz φ;
  - Γ é *satisfazível* se existe valoração v de tipo L que satisfaz Γ (ou seja, que satisfaz todas as fórmulas que pertencem a Γ).

Exemplo 192: Consideremos a atribuição a em E_{Arit} tal que $a(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{V}$. Seja $v = (E_{Arit}, a)$. Sejam

$$\begin{array}{rcl} \varphi & = & 0 = x_0 \\ \psi & = & 0 < x_0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \Gamma & = & \{0 < x_0, x_0 < 0\} \\ \Delta & = & \{0 < x_0, \neg\, 0 < x_0\} \end{array}$$

- v sat. $\varphi \vee \psi$ e v sat. $\forall x_0 (\varphi \vee \psi)$.
- v não sat. ψ, mas ψ é satisfazível.
- v não sat. $\forall x_0\, \psi$, mas $\forall x_0\, \psi$ é satisfazível.
- v não sat. Γ, mas Γ é satisfazível.
- v não sat. Δ, aliás Δ não é satisfazível.

Exemplo 193: Consideremos o tipo de linguagem *ARIT*.

a) Os conjuntos de fórmulas
   - $\{\forall x_0\,(x_0 \times x_1 = x_0), \forall x_1\,(x_1 \times s(x_0) = x_1)\}$
   - $\{\forall x_0\,(x_0 \times x_1 = x_1), \exists x_2\,(x_2 + x_0 = x_0)\}$

   são satisfazíveis.

b) O conjunto $\{\forall x_0\,(x_0 = x_0), \neg(0 = 0)\}$ não é satisfazível.

Definição 194: Seja L um tipo de linguagem. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\Gamma \subseteq \mathcal{F}_L$ e E uma estrutura de tipo L.

- Dizemos que *E é modelo de φ*, ou que *φ é verdadeira em E*, ou ainda que *φ é válida em E*, se: para toda a atribuição a em E, (E, a) sat. φ.
  <u>Notação:</u> E mod. φ.
- Dizemos que *E é modelo de* Γ se, para todo $\psi \in \Gamma$, E mod. ψ.
  <u>Notação:</u> E mod. Γ.

Exemplo 195: Consideremos o tipo de linguagem *ARIT*. Sejam

$$\begin{array}{lcl} \varphi & = & 0 = x_0 \\ \psi & = & 0 < x_0 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \Gamma & = & \{0 < x_0, x_0 < 0\} \\ \Delta & = & \{0 < x_0, \neg\, 0 < x_0\} \end{array}$$

- E_{Arit} mod. $\varphi \vee \psi$ e E_{Arit} mod. $\forall x_0(\varphi \vee \psi)$.
  Ou seja: $\varphi \vee \psi$ e $\forall x_0(\varphi \vee \psi)$ são verdadeiras em E_{Arit}.
- E_{Arit} não mod. ψ, mas existe modelo de ψ.
  Ou seja: ψ é falsa em E_{Arit}, mas existe estrutura onde ψ é verdadeira.
- E_{Arit} não mod. $\forall x_0 \psi$, mas existe modelo de $\forall x_0 \psi$.
- E_{Arit} não mod. Γ, mas existe modelo de Γ.
- E_{Arit} não mod. Δ, aliás Δ não tem modelo.

Exemplo 196: Seja Γ o conjunto formado pelas seguintes sentenças:

$$\forall x_0 \neg(0 = s(x_0));$$
$$\forall x_0 \forall x_1 ((s(x_0) = s(x_1)) \rightarrow (x_0 = x_1));$$
$$\forall x_0 \neg(s(x_0) < 0);$$
$$\forall x_0 \forall x_1 ((x_0 = s(x_1)) \rightarrow ((x_0 < x_1) \vee (x_0 = x_1)));$$
$$\forall x_0 (x_0 + 0 = x_0);$$
$$\forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) + x_1 = s(x_0 + x_1));$$
$$\forall x_0 (x_0 \times 0 = 0);$$
$$\forall x_0 \forall x_1 (s(x_0) \times x_1 = (x_0 \times x_1) + x_1).$$

E_{Arit} é um modelo de Γ.
(A *axiomática de Peano* para a Aritmética é constituída pelas fórmulas de Γ juntamente com um princípio de indução para $\mathbb{N}_0$.)

Proposição 197: Seja L um tipo de linguagem. Sejam $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e E uma estrutura de tipo L. As seguintes condições são equivalentes:

1. $E \bmod . \varphi$.
2. $E \bmod . \forall x \varphi$.
3. $E \bmod . \varphi[t/x]$, para todo $t \in \mathcal{T}_L$.

Dem.: $1 \Rightarrow 2$: Fácil. $2 \Rightarrow 3$: usa a Proposição 187. $3 \Rightarrow 1$: Trivial. □

Definição 198: Seja $\varphi \in \mathcal{F}_L$ tal que $LIV(\varphi) = \{y_1, \cdots, y_n\}$. Então, $\forall y_1 \cdots \forall y_n \varphi$ é uma fórmula fechada e diz-se um *fecho universal* de φ.

Observação: Os vários fechos de φ diferem na ordem escolhida para o prefixo de quantificadores universais. Veremos que essa ordem é irrelevante a menos de equivalência lógica.

Corolário 199:Seja $\forall y_1 \cdots \forall y_n \varphi$ um fecho universal de φ. Então

$$E \bmod . \varphi \text{ sse } E \bmod . \forall y_1 \cdots \forall y_n \varphi \quad .$$

Observação 200: Podemos explorar a relação entre estruturas e fórmulas e considerar

- O conjunto das fórmulas que são verdadeiras numa estrutura;
- A classe dos modelos de um conjunto de fórmulas.

Definição 201: Sejam L um tipo de linguagem e E uma estrutura de tipo L. A *teoria de E* é o conjunto $\{\varphi \in \mathcal{F}_L \mid E \text{ mod. } \varphi\}$, denotado $TEO(E)$.

Exemplo 202: Seja $\Gamma = TEO(E_{Arit})$.

- São elementos de Γ, por exemplo, as fórmulas
  - $s(0) + s(0) = s(s(0))$
  - $\neg \exists x_0\, 0 = s(x_0)$
  - $\exists x_0 \exists x_1 \exists x_2\, (x_0 \times x_0 + x_1 \times x_1 = x_2 \times x_2)$
- Pergunta difícil: será E_{Arit} o único modelo de Γ?

Observação 203: A partir do momento em que dispomos do conceito de valoração, os seguintes conceitos têm em Lógica de 1.ª Ordem a mesma definição que em Lógica Proposicional.

Definição 204: Sejam φ e ψ fórmulas de tipo L e seja Γ um conjunto de fórmulas de tipo L.

1. φ diz-se (*universalmente*) *válida* (notação: $\models \varphi$) se, para toda a valoração v de tipo L, v satisfaz φ.
2. φ e ψ dizem-se *logicamente equivalentes* (notação: $\varphi \Leftrightarrow \psi$) se, para toda a valoração v de tipo L, v satisfaz φ se e só se v satisfaz ψ.
3. φ diz-se *consequência semântica* de Γ (notação: $\Gamma \models \varphi$) se, para toda a valoração v de tipo L, se v satisfaz Γ então v satisfaz φ.

Observação 205: Uma fórmula de tipo L é universalmente válida sse é válida em todas as estruturas de tipo L.

Exemplo 206: Consideremos o tipo de linguagem $ARIT$.

1. A fórmula $x_0 = x_1$ não é válida, pois não é válida na estrutura E_{Arit}.
2. A fórmula $x_0 = x_0$ é válida na estrutura E_{Arit}. No entanto, esta fórmula não é válida em todas as estruturas de tipo $ARIT$. Por exemplo, se considerarmos uma estrutura $E_1 = (\{a, b\}, \overline{=})$ em que $\overline{=}$ seja a relação $\{(a, a)\}$, E_1 não é modelo de $x_0 = x_0$.
3. A fórmula $\forall x_0\,(x_0 = x_1 \vee \neg(x_0 = x_1))$ é válida.

Observação 207:

1. As propriedades enunciadas para a equivalência lógica no capítulo sobre Cálculo Proposicional (clássico) mantêm-se verdadeiras no contexto do Cálculo de Predicados. Por exemplo, $\Leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{F}_L$.
2. As equivalências lógicas notáveis desse capítulo continuam verdadeiras no contexto do Cálculo de Predicados.
3. Naturalmente, há um conjunto de novas equivalências lógicas notáveis.

Proposição 208: Sejam $x, y \in \mathcal{V}$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$. As seguintes afirmações são verdadeiras.

a) $\neg\forall x\,\varphi \Leftrightarrow \exists x\,\neg\varphi$

b) $\neg\exists x\,\varphi \Leftrightarrow \forall x\,\neg\varphi$

c) $\forall x\,\varphi \Leftrightarrow \neg\exists x\,\neg\varphi$

d) $\exists x\,\varphi \Leftrightarrow \neg\forall x\,\neg\varphi$

e) $\forall x\,(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi$

f) $\exists x\,(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \exists x\,\varphi \vee \exists x\,\psi$

g) $\forall x\,\forall y\,\varphi \Leftrightarrow \forall y\,\forall x\,\varphi$

h) $\exists x\,\exists y\,\varphi \Leftrightarrow \exists y\,\exists x\,\varphi$

i) $Qx\,\varphi \Leftrightarrow \varphi$ se $x \notin LIV(\varphi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

j) $Qx\,\varphi \Leftrightarrow Qy\,\varphi[y/x]$ se $y \notin LIV(\varphi)$ e x é substituível por y em φ, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$

Notação 209: A seguir usaremos a notação $LIV(\Gamma)$, onde Γ é um conjunto de L-fórmulas, para representar o conjunto $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} LIV(\varphi)$.

Proposição 210: Sejam φ e ψ fórmulas de tipo L, seja Γ um conjunto de fórmulas de tipo L, sejam x e y variáveis e seja t um termo de tipo L.

a) Se $\Gamma \models \forall x \varphi$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \varphi[t/x]$.
b) Se $\Gamma \models \varphi$ e $x \notin LIV(\Gamma)$, então $\Gamma \models \forall x \varphi$.
c) Se $\Gamma \models \varphi[t/x]$ e x é substituível por t em φ, então $\Gamma \models \exists x \varphi$.
d) Se $\Gamma \models \exists x \varphi$, $\Gamma, \varphi \models \psi$, e $x \notin LIV(\Gamma \cup \{\psi\})$, então $\Gamma \models \psi$.

Dem.:

a) Suponhamos que (E, a) satisfaz Γ. (Queremos demonstrar que: $\varphi[t/x][a]_E = 1$.) Então, pela hipótese, $(\forall x \varphi)[a]_E = 1$. Assim, por definição,
$$\varphi\left[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ d \end{smallmatrix}\right)\right]_E = 1, \text{ para todo } d \in dom(E)$$
e daqui, em particular, $\varphi\left[a\left(\begin{smallmatrix} x \\ t[a] \end{smallmatrix}\right)\right]_E = 1$, pois $t[a] \in dom(E)$. Logo, como por hipótese x é substituível por t em φ, aplicando a Proposição 187 tem-se que $\varphi[t/x][a]_E = 1$.

c-d) Exercício.

□