Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2022/23

Funções: limite e continuidade

1. Verifique se as seguintes funções são limitadas ou monótonas e indique, quando possível, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos seus contradomínios:

   (a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{|x|}{x} \end{array}$

   (b) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x^2}-1 \end{array}$

   (c) $\begin{array}{rccc} f: &]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}$

2. Considere as seguintes funções:

   (a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$

   (b) $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -x \end{array}$

   (c) $\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 0 \end{array}$

   (d) $\begin{array}{rccc} i: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{lll} x & \text{se} & x\in\,]-1,2] \\ 2 & \text{se} & x\in\mathbb{R}\setminus\,]-1,2] \end{array}\right. \end{array}$

   (i) Classifique cada uma delas quanto à injetividade e sobrejetividade.

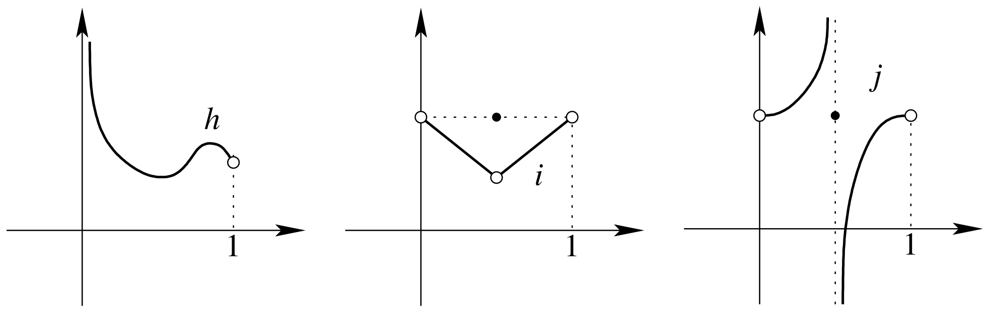
   (ii) Determine $f([-1,1])$, $i([-1,0])$, $i(]-1,3])$, $f^{-1}(\{1\})$, $h^{-1}(\{0\})$ e $g^{-1}(]-1,3])$.

3. Defina a função composta $g\circ f$ para:

   (a) $g(x)=\operatorname{sen} 2x$ e $f(x)=x^2+\pi/4$, $x\in\mathbb{R}$;

   (b) $g(x)=\left\{\begin{array}{ll} 3 & \text{se } x\neq 1 \\ 0 & \text{se } x=1 \end{array}\right.$ e $f(x)=x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

4. Relativamente a cada uma das seguintes funções $h, i, j :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, diga se:



   (a) possui extremos locais ou absolutos;
   (b) é limitada (se não, especifique se é minorada ou majorada).

5. Considere a função $f : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se} \quad -3 \leq x < -1 \\ x^2+1 & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 4-2x & \text{se} \quad 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

   Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $f([0,3]) = [-2,1]$;
   (b) existe $x \in [1,3]$ tal que $f(x) = -1$;
   (c) não existe $x \in [-3,0]$ tal que $f(x) = 2$.

6. Considere a função $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$. Esboce o gráfico da função g definida por:

   (a) $g(x) = f(x) + 2, \ x \in \mathbb{R}$;

   (b) $g(x) = f(x+2), \ x \in \mathbb{R}$;

   (c) $g(x) = 2f(x), \ x \in \mathbb{R}$;

   (d) $g(x) = f(2x), \ x \in \mathbb{R}$;

   (e) $g(x) = \max\{f(x), 2\}, \ x \in \mathbb{R}$;

   (f) $g(x) = \min\{f(x), 1\}, \ x \in \mathbb{R}$.

7. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

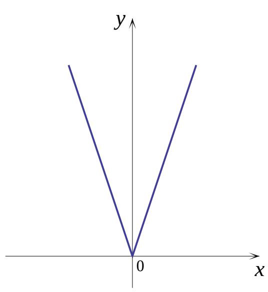
(a) a função $f : [0,1] \cup [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ é estritamente crescente;

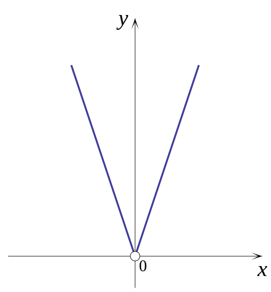
(b) a função $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen}(4x) \end{array}$ é periódica de período $\dfrac{\pi}{2}$;

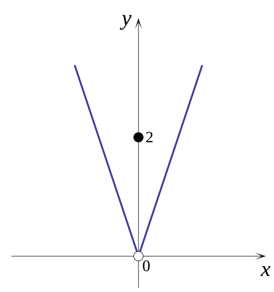
(c) a função $\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ é minorada mas não é majorada.

8. Estude, intuitivamente, a existência de limite na origem para as seguintes funções:

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & 3|x| \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & 3|x| \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ & x \neq 0 & \longmapsto & 3|x| \\ & x = 0 & \longmapsto & 2 \end{array}$$



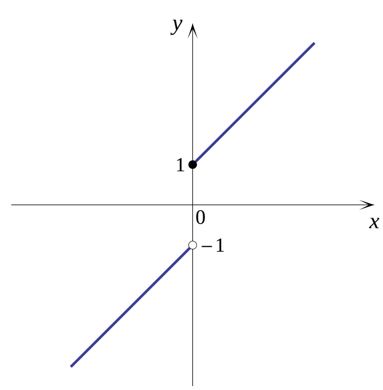




9. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x < 0 \\ x+1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, cujo gráfico se apresenta.

Da observação do gráfico o que pode concluir quanto aos limites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x), \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} f(x)?$$



10. Uma função g satisfaz as condições indicadas; esboce um gráfico possível de g, em cada um dos seguintes casos:

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to-1^-} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$

   (b) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to2^+} g(x) = 4, \quad D_g = [-1,4]$

   (c) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = 3, \quad \lim\limits_{x\to2^+} g(x) = 4, \quad D_g =]-1,4[, \quad \lim\limits_{x\to-1} g(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to4} g(x) = -\infty$

11. Calcule os limites que se seguem:

   (a) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{3}{x+2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{|x+3|}{x+3}$

   (f) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{|x|}{x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

   (h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

   (i) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$

   (j) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|}$

   (k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} 3x}$

   (l) $\lim\limits_{x\to0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x^2}$

   (m) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+x^2+x-3}{x-1}$

   (n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$

   (o) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

   (p) $\lim\limits_{x\to0} \pi x \cos\left(\dfrac{1}{3\pi x}\right)$

   (q) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x\cos x)$

   (r) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x+3}{2x-7}$

   (s) $\lim\limits_{x\to0} (\operatorname{sen}(2x) + x^2\cos(5x))$

   (t) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7x^4-2x+1}{-3x+1}$

   (u) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x+10}{x^4-2x+4}$

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$

   Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e determine o seu valor.

13. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$

   (a) Diga, justificando, se f é contínua em π.

   (b) Indique dois pontos do domínio onde f seja descontínua.

14. Determine o domínio de continuidade de cada uma das funções definidas por:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N} \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N} \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$ (d) $k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

(e) $j(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 1 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$ (f) $m(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

15. Em cada alínea, apresente uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo domínio de continuidade seja o conjunto A definido por:

(a) $A = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ (b) $A = \emptyset$ (c) $A = [0, 1]$ (d) $A = \mathbb{Z}$ (e) $A = \{0\}$ (f) $A =]0, 1[$

16. Estude a continuidade das funções definidas por:

(a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(1/x) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{|x|}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 5 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$ (d) $i(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

(e) $j(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N} \\ |x| - 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$ (f) $k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{N} \\ |x| & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

(g) $m(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se} \quad x \in [-4, 2[\\ 10 & \text{se} \quad x = 2 \\ x - 7 & \text{se} \quad x \in]2, 5] \end{cases}$ (h) $n(x) = \begin{cases} (x^2-1)^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$

17. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + a & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 1 - ax & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}.$$

Determine o valor de a de modo que f seja contínua em 1.

18. Defina funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ nas condições indicadas:

    (a) f contínua, g descontínua, $g \circ f$ contínua;

    (b) f descontínua, g contínua, $g \circ f$ contínua;

    (c) f e g descontínuas, $g \circ f$ e $f \circ g$ contínuas.

    Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

19. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

    e $f(x) = x + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Verifique que

$$\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0).$$

    Haverá alguma contradição com o teorema sobre a continuidade da função composta? Justifique.

20. Para cada uma das funções polinomiais definidas a seguir, encontre um $z \in \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 0$ para algum $x \in]z, z+1[$:

    (a) $f(x) = x^3 - x + 3$ (b) $f(x) = x^5 + x + 1$ (c) $f(x) = -2x^3 + 10x - 1$

21. Mostre que as seguintes equações têm soluções nos intervalos indicados:

    (a) $x = \cos x, \quad x \in [0, \pi/2]$

    (b) $x = -\log x, \quad x \in]0, 1]$

    (c) $2 + x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$

22. (a) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Mostre que f possui um *ponto fixo*, isto é, $\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = x_0$.

    (b) Dê exemplo de uma função contínua, $f : [0, 1[\longrightarrow [0, 1[$, sem ponto fixo.

23. Dê exemplo, justificando, ou mostre porque não existe uma função:

    (a) $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua que nunca se anula e que toma valores negativos e positivos;

    (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ descontínua tal que a função $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + \operatorname{sen} x \end{array}$ é contínua.

24. Considere a função $g :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x|$. Verifique que g possui um mínimo mas não possui máximo. Confronte o resultado com o teorema de Weierstrass.

25. Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

    (a) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ não é contínua então $g \circ f$ não é contínua;

    (b) se $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f é limitada;

    (c) existe $x \in]1, e[$ tal que $\log(x^3) = x$;

    (d) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada, então f atinge um máximo e um mínimo;

    (e) uma função $f : [0, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e limitada possui máximo;

    (f) se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua num ponto a, então f também é contínua em a.

26. Em cada uma das alíneas esboce o gráfico, se possível, de uma função f definida em $[0, 1]$ e satisfazendo as condições dadas:

    (a) f contínua em $[0, 1]$ com valor mínimo 0 e valor máximo 1;

    (b) f contínua em $[0, 1[$ com valor mínimo 0 e sem valor máximo;

    (c) f contínua em $]0, 1[$ assume os valores 0 e 1 mas não assume o valor $\frac{1}{2}$;

    (d) f contínua em $[0, 1]$ assume os valores -1 e 1 mas não assume o valor 0;

    (e) f contínua em $[0, 1]$ com valor mínimo 1 e valor máximo 1;

    (f) f contínua em $[0, 1]$, não constante, não assume valores inteiros;

    (g) f contínua em $[0, 1]$ não assume valores racionais;

    (h) f contínua em $[0, 1]$ assume um valor máximo, um valor mínimo e todos os valores intermédios;

    (i) f contínua em $[0, 1]$ assume apenas dois valores distintos;

    (j) f contínua em $]0, 1[$ assume apenas três valores distintos;

    (k) f não contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo aberto e limitado;

    (l) f não contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado;

    (m) f contínua em $]0, 1[$ tem por imagem um intervalo não limitado;

    (n) f não contínua em $[0, 1]$ tem por imagem o intervalo $[0, +\infty[$;

    (o) f não contínua em $[0, 1[$ tem por imagem um intervalo fechado e limitado.