Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	9 de novembro de 2022

Teste de Álgebra Linear CC

duração: 2 horas

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

V F

1. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $A + B$ é uma matriz triangular superior, então A e B são matrizes triangulares superiores. ☐ ☐
2. Existem $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $(2AB)^2 \neq 4A^2B^2$. ☐ ☐
3. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se A e B são simétricas, então $AB - BA$ é antissimétrica. ☐ ☐
4. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $car(A) + car(B) = 2n$, então A e B são invertíveis. ☐ ☐
5. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(A) + \det(-A) = 0$. ☐ ☐
6. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se A^2 é invertível, então A^3 é invertível. ☐ ☐
7. Seja $Ax = b$ um sistema de 5 equações lineares em 4 incógnitas e coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $car([A|b]) = 5$, então o sistema $Ax = b$ é possível. ☐ ☐
8. Seja $Ax = 0$ um sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas e coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $|A| \neq 0$, então o sistema $Ax = b$ é possível, para todo $b \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$. ☐ ☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $C = [c_{ij}]$ a matriz real do tipo 2×3 tal que, para quaisquer $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Determine a matriz $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $X + I_2 = 2(X - BC^T)$.

(b) Calcule $\det(A)$ utilizando o Teorema de Laplace.

(c) Justifique que a matriz A é invertível e determine a sua inversa utilizando o método de Gauss-Jordan.

$\overrightarrow{\text{v.s.f.f.}}$

2. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se A e AB são matrizes ortogonais, então B é ortogonal.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais correspondente à equação matricial $A_\alpha x = b_\beta$, onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha^2 - 2 \\ -1 & 3 & \alpha \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta - 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Discuta o sistema $A_\alpha x = b_\beta$ em função dos parâmetros α e β.

   (b) Resolva o sistema $A_\alpha x = 0$ para $\alpha = 1$.

   (c) Verifique que $(1, 0, 0)$ é solução do sistema correspondente a $A_1 x = b_1$ e, sem efetuar cálculos, indique o conjunto de soluções deste sistema. Justifique.

4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrizes tais que $\det(A) = 7$, $\det(B) = 3$ e $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

   Seja $D = \begin{bmatrix} \times & 2 \\ \times & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz real quadrada de ordem 2 cuja primeira coluna é desconhecida e tal que $\det(D) = 3$.

   (a) Calcule $\det(2A^{-1}B^T)$.

   (b) Sabendo que $|C| = 5$, calcule $\begin{vmatrix} 3a + c & c & b - c \\ 6d + 2f & 2f & 2e - 2f \\ 3g + i & i & h - i \end{vmatrix}$.

   (c) Justifique que D é invertível. Para toda a matriz D nas condições indicadas, determine a primeira linha da matriz D^{-1}, isto é, determine os elementos $(D^{-1})_{11}$ e $(D^{-1})_{12}$.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: 1.$(1,5 + 1,5 + 1,5)$; 2.(1,75); 3.$(1,75 + 1,5 + 0,75)$; 4.$(1,0 + 1,5 + 1,25)$.