Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Tópicos de Matemática | 1º teste – 12 out 2023

Lic. em Ciências de Computação - 1º ano | duração: 1h45m

Nome ______________________ Número ____________

Grupo 1. [10 valores] Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1.1. $453 \times 43x = 197951 \vee 2 + 3 = 5$ é uma proposição. V☐ F☒

1.1. $453 \times 437 = 197961 \vee 2 + x = 6$ é uma proposição. V☐ F☒

1.1. $453 \times 437 = 197951 \vee 2 + 3 = 6$ é uma proposição. V☒ F☐

1.2. Se hoje é dia 11 de outubro, amanhã é dia 13 de outubro. V☒ F☐

1.2. Amanhã é dia 13 de outubro, se hoje é dia 11 de outubro. V☒ F☐

1.2. Se hoje é dia 11 de outubro, ontem foi dia 9 de outubro. V☒ F☐

Observação: O teste foi no dia 12 e, por isso, a proposição "hoje é dia 11 de outubro" é falsa.

1.3. Há proposições p e q para as quais $(p\vee \sim p) \Rightarrow (q\wedge \sim q)$ é verdadeira. V☐ F☒

1.3. Há proposições p e q para as quais $(p\wedge \sim p) \Rightarrow (q\vee \sim q)$ é falsa. V☐ F☒

1.3. Há proposições p e q para as quais $(p\wedge \sim p) \Rightarrow (q\vee \sim q)$ é verdadeira. V☒ F☐

1.4. Para quaisquer proposições p e q, se $p \Rightarrow q$ é uma tautologia, o seu contrarrecíproco é uma contradição. V☐ F☒

1.4. Para quaisquer proposições p e q, se $p \wedge q$ é uma contradição então $p \Leftrightarrow \sim q$ é uma tautologia. V☐ F☒

1.4. Para quaisquer proposições p e q, se $p \Rightarrow q$ é uma tautologia, o seu recíproco é uma contradição. V☐ F☒

1.5. Dada a condição $p(x, y)$, com o conjunto D como domínio de variação de x e y, negar que "$\forall x \in D, \exists y \in D : p(x, y)$" é o mesmo que afirmar que "$\exists x \in D : \forall y \in D, \sim p(x, y)$". V☒ F☐

1.5. Dada a condição $p(x, y)$, com o conjunto D como domínio de variação de x e y, negar que "$\exists x \in D : \forall y \in D, p(x, y)$" é o mesmo que afirmar que "$\exists y \in D : \forall x \in D, \sim p(x, y)$". V☐ F☒

1.5. Dada a condição $p(x, y)$, com o conjunto D como domínio de variação de x e y, negar que "$\exists x \in D : \forall y \in D, p(x, y)$" é o mesmo que afirmar que "$\exists y \in D : \forall x \in D, p(y, x)$". V☐ F☒

1.6. Se $t(x)$ é uma condição universal e $i(x)$ é uma condição impossível no domínio de variação de x, então, $(p(x) \wedge t(x)) \Rightarrow i(x)$ é uma condição universal no mesmo domínio. V☐ F☒

1.6. Se $t(x)$ é uma condição universal e $i(x)$ é uma condição impossível no domínio de variação de x, então, $(p(x) \wedge i(x)) \Rightarrow t(x)$ é uma condição universal no mesmo domínio. V☒ F☐

1.6. Se $t(x)$ é uma condição universal e $i(x)$ é uma condição impossível no domínio de variação de x, então, $(p(x) \vee i(x)) \Rightarrow t(x)$ é uma condição universal no mesmo domínio. V☒ F☐

1.7. O argumento "Alguns alunos aprovaram à unidade curricular. Todos os alunos estudaram. Logo, todos os alunos que aprovaram à unidade curricular estudaram." é válido. V☒ F☐

1.7. O argumento "Alguns alunos estudaram. Alguns alunos aprovaram à unidade curricular. Logo, alguns alunos que estudaram aprovaram à unidade curricular." é válido. V☐ F☒

1.7. O argumento "Alguns alunos estudaram. Alguns alunos passaram à unidade curricular. Logo, todos os alunos que estudaram passaram à unidade curricular." é válido. V☐ F☒

1.8. O argumento $\begin{array}{c} p \vee q \\ q \Rightarrow r \\ r \\ \hline p \end{array}$ é válido. V☐ F☒

1.8. O argumento $\begin{array}{c} p \vee q \\ q \Rightarrow \sim r \\ r \\ \hline p \end{array}$ é válido. V☒ F☐

1.8. O argumento $\begin{array}{c} p \vee \sim q \\ q \Rightarrow r \\ r \\ \hline p \end{array}$ é válido. V☐ F☒

1.9. Afirmar que $3 + 5^2 \neq 0$ é suficiente para provar que "$\exists x \in \mathbb{R}, 3 + x^2 \neq 0$" é uma proposição verdadeira. V☒ F☐

1.9. Afirmar que $3 + 5^2 \neq 0$ é suficiente para provar que "$\forall x \in \mathbb{R}, 3 + x^2 = 0$" é uma proposição falsa. V☒ F☐

1.9. Afirmar que $3 + 5^2 \neq 0$ é suficiente para provar que "$\forall x \in \mathbb{R}, 3 + x^2 \neq 0$" é uma proposição verdadeira. V☐ F☒

1.10. Para qualquer condição $p(n)$, em $\mathbb{N}$, se $p(n)$ é hereditária, então, $p(n)$ é universal. V☐ F☒

1.10. Para qualquer condição $p(n)$, em $\mathbb{N}$, se $p(n)$ é universal, então, $p(n)$ é hereditária. V☒ F☐

1.10. Para qualquer condição $p(n)$, em $\mathbb{N}$, se $p(n)$ não é hereditária, então, $p(n)$ não é universal. V☒ F☐

Grupo 2. [5 valores] Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):

2.1. Suponha que o Joaquim gosta de cerveja, não gosta de vinho, gosta de sangria e não gosta de gin. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?
☒ Se gosta de gin, o Joaquim gosta de sangria e de gin.
☒ O Joaquim só gosta de vinho se gosta de cerveja.
☐ O Joaquim gosta de cerveja e de gin ou o Joaquim gosta de vinho e de sangria.
☐ O Joaquim gosta de vinho se e só se gosta de sangria.

2.1. Suponha que o Joaquim gosta de cerveja, não gosta de vinho, gosta de sangria e não gosta de gin. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?
☐ O Joaquim gosta de cerveja e de gin ou o Joaquim gosta de vinho e de sangria.
☒ O Joaquim só gosta de gin se gosta de cerveja.
☒ O Joaquim gosta de cerveja se e só se gosta de sangria.
☒ Se gosta de vinho, o Joaquim gosta de sangria e de vinho.

2.1. Suponha que o Joaquim gosta de cerveja, não gosta de vinho, gosta de sangria e não gosta de gin. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?
☐ O Joaquim gosta de cerveja e de gin ou o Joaquim gosta de vinho e de sangria.
☒ O Joaquim gosta de vinho se e só se gosta de gin.
☒ Se gosta de gin, o Joaquim gosta de sangria e de gin.
☒ O Joaquim só gosta de vinho se gosta de cerveja.

2.2. Se $a \Rightarrow b$ é uma proposição falsa, então são verdadeiras as proposições:

☒ $a \wedge \sim b$ ☒ $a \vee \sim b$ ☐ $\sim b \wedge \sim a$ ☒ $b \Rightarrow a$

2.2. Se $a \Leftrightarrow b$ é uma proposição verdadeira, então são verdadeiras as proposições:

☐ $a \wedge \sim b$ ☒ $a \vee \sim b$ ☐ $\sim b \wedge \sim a$ ☒ $b \Rightarrow a$

2.2. Se $a \Leftrightarrow b$ é uma proposição verdadeira, então são falsas as proposições:

☒ $a \wedge \sim b$ ☐ $a \vee \sim b$ ☐ $\sim b \vee \sim a$ ☐ $b \Rightarrow a$

2.3. Negar que "todos os animais não falam" é o mesmo que afirmar que:

☐ Todos os animais falam. ☐ Existe pelo menos um animal que não fala.
☒ Há animais que falam. ☐ Existem pelo menos dois animais que falam.

2.3. Negar que "todos os animais falam" é o mesmo que afirmar que:

☐ Existem pelo menos dois animais que não falam. ☐ Existe pelo menos um animal que fala.
☒ Há animais que não falam. ☐ Todos os animais não falam.

2.3. Negar que "todos os animais não falam" é o mesmo que afirmar que:

☒ Há animais que falam. ☐ Existem pelo menos dois animais que falam.
☐ Todos os animais falam. ☐ Existe pelo menos um animal que não fala.

2.4. Considere as condições $p(x)$: "x tem cor verde" e $q(x)$: "x está maduro", onde o conjunto de variação de x é o conjunto dos frutos. A proposição "Uma condição necessária para o fruto estar maduro é não ter cor verde" pode ser traduzida por:

☐ $p(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$. ☐ $p(x) \Rightarrow q(x)$. ☐ $\sim q(x) \Rightarrow p(x)$. ☒ $p(x) \Rightarrow \sim q(x)$.

2.4. Considere as condições $p(x)$: "x tem cor verde" e $q(x)$: "x está maduro", onde o conjunto de variação de x é o conjunto dos frutos. A proposição "Uma condição necessária para o fruto não estar maduro é ter cor verde" pode ser traduzida por:

☐ $p(x) \Rightarrow q(x)$. ☒ $\sim q(x) \Rightarrow p(x)$. ☐ $p(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$. ☐ $p(x) \Rightarrow \sim q(x)$.

2.4. Considere as condições $p(x)$: "x tem cor verde" e $q(x)$: "x está maduro", onde o conjunto de variação de x é o conjunto dos frutos. A proposição "Uma condição suficiente para o fruto não estar maduro é ter cor verde" pode ser traduzida por:

☐ $p(x) \Rightarrow q(x)$. ☒ $p(x) \Rightarrow \sim q(x)$. ☐ $p(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$. ☐ $\sim q(x) \Rightarrow p(x)$.

2.5. Sobre uma condição heriditária $p(n)$, em $\mathbb{N}$, sabe-se que $p(6)$ é uma proposição falsa. Pode-se afirmar que:

☒ $p(5)$ é uma proposição falsa. ☐ $p(5)$ pode ser uma proposição verdadeira.
☐ $p(7)$ é uma proposição falsa. ☒ $p(k)$ é uma proposição falsa, para todo $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2.5. Sobre uma condição heriditária $p(n)$, em $\mathbb{N}$, sabe-se que $p(8)$ é uma proposição falsa. Pode-se afirmar que:

☐ $p(7)$ é uma proposição verdadeira. ☒ $p(7)$ é uma proposição falsa.
☐ $p(9)$ é uma proposição falsa. ☒ $p(k)$ é uma proposição falsa, para todo o natural k tal que $k \leq 8$.

Grupo 3. [5 valores] Responda a cada uma das questões, de forma detalhada e justificada.

3.1. Sejam p, q e r proposições. Prove, por redução ao absurdo, que

$$[(p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (q \implies r)] \implies r$$

é uma tautologia.

Para provarmos por redução ao absurdo que a implicação é verdadeira para todos os valores de verdade de p, q e r, começamos por supor que a implicação é falsa para algum desses valores, ou seja, começamos por supor que temos

$$[(p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (q \implies r)] \wedge \sim r.$$

Mas,

$$[(p \vee q) \wedge (p \implies r) \wedge (q \implies r)] \wedge \sim r$$

é logicamente equivalente a

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge \sim r,$$

que é logicamente equivalente a

$$(p \vee q) \wedge [(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \wedge \sim r,$$

que é logicamente equivalente a

$$(p \vee q) \wedge [(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim r)],$$

que é logicamente equivalente a

$$(p \vee q) \wedge \sim (p \vee q) \wedge \sim r,$$

que é uma contradição (absurdo). A contradição resulta de supormos que a implicação dada é falsa para alguns valores de verdade de p, q e r, pelo que podemos concluir que a implicação dada é verdadeira para todos os valores de verdade de p, q e r, ou seja, é uma tautologia.

3.1. Sejam p, q e r proposições. Prove, por redução ao absurdo, que

$$[p \implies (q \implies r)] \implies [(p \implies q) \implies (p \implies r)]$$

é uma tautologia.

Para provarmos por redução ao absurdo que a implicação é verdadeira para todos os valores de verdade de p, q e r, começamos por supor que a implicação é falsa para algum desses valores, ou seja, começamos por supor que temos

$$[p \implies (q \implies r)] \wedge \sim [(p \implies q) \implies (p \implies r)].$$

Mas,

$$[p \implies (q \implies r)] \wedge \sim [(p \implies q) \implies (p \implies r)]$$

é logicamente equivalente a

$$[p \implies (q \implies r)] \wedge [(p \implies q) \wedge \sim (p \implies r)],$$

que é logicamente equivalente a

$$[\sim p \vee (\sim q \vee r)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim r)],$$

que é logicamente equivalente a

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge [(\sim p \wedge p \wedge \sim r) \vee (q \wedge p \wedge \sim r)],$$

que é logicamente equivalente a

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (q \wedge p \wedge \sim r),$$

que é logicamente equivalente a

$$(\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge \sim (\sim q \vee \sim p \vee r),$$

que é uma contradição (absurdo). A contradição resulta de supormos que a implicação dada é falsa para alguns valores de verdade de p, q e r, pelo que podemos concluir que a implicação dada é verdadeira para todos os valores de verdade de p, q e r, ou seja, é uma tautologia.

3.2. Usando indução matemática, prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2 \cdot 3^k) = 3^{n+1} - 1$.

Começamos por verificar o caso base: para $n = 1$ temos que

$$\sum_{k=0}^{1}(2 \cdot 3^k) = (2 \times 3^0) + (2 \times 3^1) = 2 + 6 = 8 = 3^2 - 1$$

Podemos, por isso, concluir que a igualdade é verdadeira para $n = 1$.

De seguida, supondo que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2 \cdot 3^k) = 3^{n+1} - 1$, queremos provar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}(2 \cdot 3^k) = 3^{n+2} - 1$.

De facto, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(2 \cdot 3^k) &= \sum_{k=0}^{n}(2 \cdot 3^k) + 2 \times 3^{n+1} \\ &= 3^{n+1} - 1 + 2 \times 3^{n+1} \\ &= 3 \times 3^{n+1} - 1 \\ &= 3^{n+2} - 1\end{aligned}$$

Aplicando o princípio de indução matemática, concluímos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2 \cdot 3^k) = 3^{n+1} - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Usando indução matemática, prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$.

Começamos por verificar o caso base: para $n = 1$ temos que

$$\sum_{k=1}^{1}(k \cdot k!) = 1 \times 1! = 1 = 2! - 1$$

Podemos, por isso, concluir que a igualdade é verdadeira para $n = 1$.

De seguida, supondo que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$, queremos provar que $\sum_{k=1}^{n+1}(k \cdot k!) = (n+2)! - 1$.

De facto, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) &= \sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (1+n+1)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

Aplicando o princípio de indução matemática, concluímos que $\sum_{k=1}^{n}(k \cdot k!) = (n+1)! - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2. Usando indução matemática, prove que, para todo o natural $n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = n(n-2)$.

Começamos por verificar o caso base: para $n = 2$ temos que

$$\sum_{k=1}^{2}(2k-3) = (2 \times 1 - 3) + (2 \times 2 - 3) = -1 + 1 = 0 = 2(2-2)$$

Podemos, por isso, concluir que a igualdade é verdadeira para $n = 2$.

De seguida, supondo que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n \geq 2$ e $\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = n(n-2)$, queremos provar que $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-3) = (n+1)(n-1)$.

De facto, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-3) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-3) + (2(n+1)-3) \\ &= n(n-2) + (2n-1) \\ &= 3 \times n^2 - 1 \\ &= (n+1)(n-1) \end{aligned}$$

Aplicando o princípio de indução matemática, concluímos que $\sum_{k=1}^{n}(2k-3) = n(n-2)$, para todo o natural $n \geq 2$.