

Nome:

Nº

Responda à questão 3 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do R que utilizar. Duração: 2h30m.

1. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua, com função de distribuição dada por

$$F(c) = \begin{cases} d & \text{se } c < k \\ 1 - e^{-4(c-k)} & \text{se } c \geq k \end{cases},$$

com d e k constantes reais.

- (a) Mostre que $d = 0$ e $k = 2$.
 - (b) Determine uma função densidade de probabilidade de X .
 - (c) Identifique a lei de probabilidade da v.a.r. W definida por $W = 2X - 4$. Justifique.
 - (d) Suponha agora que X é a v.a.r. que representa o tempo, em horas, que um cliente espera para ser atendido numa repartição pública.
 - i) Qual a probabilidade de um cliente esperar mais de 4 horas para ser atendido?
 - ii) Sabendo que um cliente já está à espera há mais 4 horas, qual a probabilidade de ele ser atendido durante os próximos 30 minutos?
2. Seja Y a v.a.r. que representa a quantidade vendida diariamente (em kg) de um certo produto numa determinada empresa. Sabe-se que Y é uma v.a.r. absolutamente contínua, que segue uma lei Uniforme e que:
- a probabilidade de, num dia, se vender no máximo 3 kg do produto é igual a $\frac{1}{2}$.
 - a probabilidade de, num dia, se vender pelo menos 4 kg deste produto é igual a $\frac{1}{4}$.
- (a) Mostre que $Y \sim U([1, 5])$.
 - (b) Mostre, usando a definição, que $E[Y]$ e $Var[Y]$ existem. Mostre ainda que
$$E[Y] = 3 \text{ e } Var[Y] = \frac{4}{3}.$$
 - (c) Determine a probabilidade de, em 10 dias de vendas, haver um dia em que se vende menos de 1.5kg e de haver pelo menos 9 dias em que se vende mais de 3kg.
 - (d) Determine a probabilidade de, em 100 dias de vendas, se vender no total mais de 325 kg.
 - (e) Sabe-se que, por cada kg vendido, esta empresa tem um lucro de 5 Euros. Seja L a v.a.r. que representa o lucro diário que a empresa obtém com a venda deste produto.
 - i) Determine $E[L]$ e $Var[L]$.
 - ii) Obtenha, usando a definição, os quantis de L .
 - iii) Determine $E[T]$ e $Var[T]$, em que T é agora a v.a.r. que representa o lucro total obtido com a venda deste produto ao fim de 10 dias de vendas.
 - (f) Calcule $P(Y \geq X)$, em que X é uma v.a.r. tal que $X \sim Exp(1)$ e X e Y são v.a.r's independentes.

(v.s.f.f.)

Cotações:

- 1. **6** [a) 1.0; b) 1.5; c) 2.0; d) 1.5]
- 2. **10** [a) 1.5; b) 2.0; c) 1.0; d) 1.5; e) 3.0; f) 1.0]
- 3. **4** [a) 1.0; b) 3.0]

3. Considere Z uma v.a.r. discreta tal que $Z \sim \text{Bernoulli}(p)$, com $0 < p < 1$.
- (a) Determine, usando a definição, a transformada de Laplace de Z .
 - (b) Considere agora duas v.a.r.'s, Z_1 e Z_2 , i.i.d.'s com a lei de Z .
 - i. Identifique, justificando, a lei da v.a.r. $Z_1 + Z_2$.
 - ii. Determine, em função de p , o valor de $P(Z_1 - Z_2 \geq 0)$.
 - iii. Determine, em função de p , a função de probabilidade conjunta do par aleatório (Z_1, Y) , em que Y é a v.a.r. definida por $Y = Z_1 Z_2$. Diga, justificando, se Z_1 e Y são independentes.