

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

**Grupo I**

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

V F

1. A aplicação  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y, z) = xyz$ , para todo  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , é uma aplicação linear. ☐ ☒

A aplicação  $f$  não é uma aplicação linear, uma vez que existem  $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$  e  $2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$f(2(1, 1, 1)) = f(2, 2, 2) = 2^3 \neq 2 \times 1^3 = 2f(1, 1, 1).$$

2. Existe uma aplicação linear  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $f(2, 2) = (1, 2, 3)$  e  $f(3, 3) = (0, 1, 0)$ . ☐ ☒

Se admitirmos que  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação linear e que  $f(2, 2) = (1, 2, 3)$ , então

$$f(3, 3) = f\left(\frac{3}{2}(2, 2)\right) = \frac{3}{2}f(2, 2) = \frac{3}{2}(1, 2, 3) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}\right) \neq (0, 1, 0).$$

Logo, não existe qualquer aplicação linear nas condições indicadas.

3. Para quaisquer espaços vetoriais reais  $V$  e  $V'$  de dimensão finita, se existe uma aplicação linear injetiva  $f : V \rightarrow V'$ , então  $\dim V \leq \dim V'$ . ☒ ☐

Sejam  $V$  e  $V'$  espaços vetoriais reais de dimensão finita e admitamos que existe uma aplicação linear injetiva  $f : V \rightarrow V'$ . Considerando que  $f$  é injetiva, tem-se  $\text{Nuc } f = \{0_V\}$ . Por conseguinte, como  $\dim V = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f$ , segue que  $\dim V = \dim \text{Im } f$ . Atendendo a que  $\dim \text{Im } f \leq \dim V'$  (pois  $\text{Im } f$  é um subespaço de  $V'$ ), conclui-se que  $\dim V \leq \dim V'$ .

4. Para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $A$  é invertível, tem-se  $\det(2A^T A^{-1}) = 2$ . ☐ ☒

Considerando as propriedades relativas a determinantes, temos

$$\det(2A^T A^{-1}) = 2^n \det(A^T) \det(A^{-1}) = 2^n \det(A) (\det(A))^{-1} = 2^n.$$

Assim, se  $n \neq 1$ , tem-se  $\det(2A^T A^{-1}) \neq 2$ .

5. Para quaisquer  $n \in \mathbb{N}$  e  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $\det(A^T B) = \det(B^T A)$ . ☒ ☐

Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Considerando que  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas,  $A^T$  e  $B^T$  também são matrizes quadradas. Assim,

$$\det(A^T B) = \det(A^T) \det(B) = \det(B) \det(A^T) = \det(B^T) \det(A) = \det(B^T A).$$

- |  | V                        | F                                   |
|--|--------------------------|-------------------------------------|
| 6. Para qualquer matriz $A$ do tipo $5 \times 5$ , se $\det A = 1$ , então $\text{car}(A) \neq 4$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Se $A$ é uma matriz do tipo $5 \times 5$ tal que $\det A = 1$ , então $A$ é invertível. Logo $\text{car}(A) = 5$ e, portanto, $\text{car}(A) \neq 4$ .   |                          |                                     |
| 7. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , se $(A - 3I_2)x = 0_{2 \times 2}$ é um sistema de Cramer, então 3 não é um valor próprio de $A$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| Se $(A - 3I_2)x = 0_{2 \times 2}$ é um sistema de Cramer, então a matriz $A - 3I_2$ é invertível. Logo $ A - 3I_2  \neq 0$ e, portanto, 3 não é um valor próprio de $A$ .  |                          |                                     |
| 8. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , se $y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ é um vetor próprio de $A$ associado ao valor próprio 2, então $7y$ é um vetor próprio de $A$ associado ao valor próprio 14.  | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| Se $y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ é um vetor próprio de $A$ associado ao valor próprio 2, tem-se $y \neq 0_{n \times 1}$ e $Ay = 2y$ . Logo, $A(7y) = 7(Ay) = 7(2y) = 2(7y)$ . Então, como $7y \neq 0_{n \times 1}$ e $A(7y) = 2(7y)$ , $7y$ é um vetor próprio de $A$ associado ao valor próprio 2. |                          |                                     |

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Considere as bases de  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)), \\ \mathcal{B}' &= ((-1, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 0))\end{aligned}$$

e a base de  $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}'' = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)).$$

Seja  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a aplicação linear definida por

$$M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que, para todo  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ ,

$$g(a, b, c, d) = (3a + 2b - c - 2d, 2a + b - c - d, 2a - 2c).$$

Temos

$$(a, b, c, d) = a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(0, 0, 1, 0) + d(0, 0, 0, 1),$$

logo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de  $(a, b, c, d)$  relativamente à base  $\mathcal{B}''$ . Por conseguinte,

$$M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a - 2c \\ b + c - d \\ a + b - d \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de  $g(a, b, c, d)$  relativamente à base  $\mathcal{B}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} g(a, b, c, d) &= (2a - 2c)(1, 1, 1) + (b + c - d)(1, 1, 0) + (a + b - d)(1, 0, 0) \\ &= (3a + 2b - c - 2d, 2a + b - c - d, 2a - 2c). \end{aligned}$$

- (b) Determine uma base de  $\text{Nuc } g$  e a dimensão de  $\text{Im } g$ . Diga se  $g$  é injetiva e se é sobrejetiva.

Por definição de  $\text{Nuc } g$ , temos

$$\begin{aligned} \text{Nuc } g &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid g(a, b, c, d) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid 3a + 2b - c - 2d = 0, 2a + b - c - d = 0, 2a - 2c = 0\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = -c + d\} \\ &= \{(c, -c + d, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(1, -1, 1, 0) + d(0, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid c, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

A sequência  $((1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$  é linearmente independente, pois, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(1, -1, 1, 0) + \beta(0, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo, a sequência  $((1, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$  é uma base de  $\text{Nuc } g$  e, por conseguinte,  $\dim \text{Nuc } g = 2$ .

Uma vez que  $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Nuc } g + \dim \text{Im } g$ ,  $\dim \mathbb{R}^4 = 4$  e  $\dim \text{Nuc } g = 2$ , concluímos que  $\dim \text{Im } g = 2$ .

A aplicação  $g$  não é injetiva, pois  $\text{Nuc } g \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ . A aplicação  $g$  também não é sobrejetiva, pois  $\text{Im } g \neq \mathbb{R}^3$  ( $\dim \text{Im } g = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ).

- (c) Determine as matrizes  $M(id_{\mathbb{R}}^3; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$  e  $M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$ .

Temos

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}}^3(1, 1, 1) &= (1, 1, 1) = 1(-1, 1, 1) + 0(0, 2, 0) + 2(1, 0, 0) \\ id_{\mathbb{R}}^3(1, 1, 0) &= (1, 1, 0) = 0(-1, 1, 1) + \frac{1}{2}(0, 2, 0) + 1(1, 0, 0) \\ id_{\mathbb{R}}^3(1, 0, 0) &= (1, 0, 0) = 0(-1, 1, 1) + 0(0, 1, 0) + 1(1, 0, 0), \end{aligned}$$

logo

$$M(id_{\mathbb{R}}^3; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}') &= M(id_{\mathbb{R}}^3; \mathcal{B}, \mathcal{B}') M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule  $\det A$ .

Calculando o  $\det A$  recorrendo ao Teorema de Laplace, temos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+4} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2 \times 2 - 2 \times 1) - 2 \times ((-1) \times 2 - 1 \times 1) \\ &= 8. \end{aligned}$$

(b) Justifique que  $B$  é invertível e calcule  $\det(2B^{-2}B^TA^2)$ .

Uma vez que  $B$  é uma matriz quadrada e

$$\det B = (-1) \times 1 \times 1 \times 2 = -2 \neq 0,$$

então  $B$  é invertível.

Considerando que as matrizes  $B^{-2}$ ,  $B^T$  e  $A^2$  são matrizes quadradas e  $B^{-2}B^TA^2$  é uma matriz do tipo  $4 \times 4$ , temos

$$\begin{aligned} \det(2B^{-2}B^TA^2) &= 2^4 \times \det(B^{-2}) \times \det B^T \times \det(A^2) \\ &= 2^4 \times (\det(B))^{-2} \times \det B \times (\det(A))^2 \\ &= 2^4 \times (-2)^{-2} \times (-2) \times 2^{16} \\ &= -2^{19}. \end{aligned}$$

3. Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Mostre que se  $\det A = 1$  e todas as entradas de  $A$  são números inteiros, então  $A$  é invertível e todas as entradas de  $A^{-1}$  são números inteiros.

Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ , com  $n \in \mathbb{N}$ . Admitamos que  $\det A = 1$  e que todas as entradas de  $A$  são números inteiros. Como  $A$  é uma matriz quadrada e  $\det A \neq 0$ , então  $A$  é invertível e tem-se  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A) = \text{Adj}(A)$ . Considerando que  $\text{Adj}(A) = [\hat{a}_{ij}]^T$ , onde  $\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i|j))$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , e todas as entradas de  $A$  são números inteiros, segue que todas as entradas de  $\text{Adj}(A)$  são também números inteiros. De facto, se todas as entradas de  $A$  são números inteiros, então, as entradas de  $A(i|j)$  também são números inteiros, para todos  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Além disso, como o determinante de uma matriz é obtido a partir das suas entradas recorrendo apenas às operações de adição e multiplicação, o determinante de uma matriz cujas entradas são números inteiros é um número inteiro. Logo, todas as entradas de  $A^{-1}$  são números inteiros.

4. Sejam  $\mathcal{B}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^3$  e  $h$  o endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$M(h, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique que  $(-1, 0, 1)$  é um vetor próprio de  $h$  e indique a que valor próprio está associado.

Tem-se

$$(-1, 0, 1) = -1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1),$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de  $(-1, 0, 1)$  relativamente à base  $\mathcal{B}$ . Logo

$$M(h; \mathcal{B}, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de  $h(-1, 0, 1)$  relativamente à base  $\mathcal{B}$ . Portanto,

$$h(-1, 0, 1) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Uma vez que  $(-1, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$  e  $h(-1, 0, 1) = 0(-1, 0, 1)$ , concluímos que  $(-1, 0, 1)$  é um vetor próprio de  $h$  associado ao valor próprio 0.

- (b) Justifique que  $-2$  é um valor próprio de  $h$  e determine uma base do subespaço próprio de  $h$  associado a este valor próprio.

Dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  é valor próprio de  $h$  se e só se  $|M(h; \mathcal{B}, \mathcal{B}) - \lambda I_3| = 0$ .

Então, como

$$|M(h; \mathcal{B}, \mathcal{B}) - (-2)I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pois a matriz tem uma linha nula),}$$

concluimos que  $-2$  é um valor próprio de  $h$ .

Por definição de subespaço próprio de  $h$  associado ao valor próprio  $-2$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{[h, -2]}^3 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid h(a, b, c) = -2(a, b, c)\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid h(a, b, c) + 2(a, b, c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (h + 2id_{\mathbb{R}^3})(a, b, c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \quad (*) \\ &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid (A + 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} a + b - c \\ 0 \\ -a - b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = -b + c\} \\ &= \{(-b + c, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(-1, 1, 0) + c(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

(\*) Uma vez que  $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$ , o vetor coluna de  $(a, b, c)$

relativamente à base  $\mathcal{B}$  é  $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ .

A sequência  $((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$  é linearmente independente, pois, para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(-1, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo,  $((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$  é uma base de  $\mathbb{R}_{[h, -2]}^3$ .

- (c) Justifique que  $h$  é diagonalizável. Dê exemplo de uma base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $M(h; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$  seja diagonal.

Da alínea (a) sabe-se que  $(-1, 0, 1)$  é um vetor próprio de  $h$  associado ao valor próprio 0. A sequência  $((-1, 0, 1))$  é linearmente independente, pois  $(-1, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ . Da alínea (b) sabemos que a sequência  $((-1, 1, 0), (1, 0, 1))$  é linearmente independente e é formada por vetores próprios de  $h$  associados ao valor próprio  $-2$ . Como as duas sequências anteriores são sequências linearmente independentes formadas por vetores próprios associados a valores próprios distintos, a sequência  $\mathcal{B}' = ((-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, 1))$  é linearmente independente. Como a sequência  $\mathcal{B}'$  tem 3 vetores e  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ , então  $\mathcal{B}'$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ . Considerando que  $h$  é um endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  e existe uma base de  $\mathbb{R}^3$  formada por vetores próprios de  $h$ , concluímos que  $h$  é diagonalizável. A base  $\mathcal{B}' = ((-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, 1))$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $M(h; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$  é diagonal, pois

$$M(h; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Cotação - Grupo I:  $8 \times 0,75$ .

Grupo II: 1.(1, 25 + 2, 25 + 1, 5); 2.(1, 5 + 1, 25); 3.(1, 75); 4.(1, 25 + 2, 0 + 1, 25).