Álgebra Linear

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

2019/2020 LCC

Determinantes Exercícios

1. Calcule $\det(A)$ para

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Usando as propriedades dos determinantes, calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Seja P uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando as propriedades dos determinantes, calcule:

(a) $\det(A)$; (e) $\det(2A)$; (i) $\det(A^T A^{-1} B^T)$;
(b) $\det(B)$; (f) $-2\det(A)$; (j) $\det(A^{-1} D A)$;
(c) $\det(C)$; (g) $\det(A^3)$; (k) $\det(ABCD)$;
(d) $\det(D)$; (h) $\det(2A^T A A^T)$; (l) $\det(P^{-1} A P)$.

4. Diga quais das matrizes A, B, C e D do exercício anterior são invertíveis.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Calcule $\det(A)$ e diga para que valores de a e b a matriz A tem inversa.

6. Verifique que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ se tem $\det \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

7. Suponha que uma dada matriz A de ordem 3 se pode decompor num produto da forma $A = LU$, onde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}.$$

Determine uma expressão para o determinante de A.

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)+\det(B)$ e $\det(A+B)$. Compare os resultados.

9. Usando operações elementares sobre as linhas da matriz por forma a obter a forma em escada equivalente por linhas, calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

e seja B uma matriz de ordem 4 tal que $\det(B) = 12$.

Use eliminação de Gauss para calcular $\det(A)$ e calcule também $\det\left(AB^{-1}\right)$.

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$ por aplicação do Teorema de Laplace à terceira coluna (ou seja, usando a expansão em cofatores segundo a terceira coluna).

12. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

13. Considere o sistema de equações lineares $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
    (a) Mostre que o sistema é possível e determinado.
    (b) Determine o conjunto solução usando a regra de Cramer.

14. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
    (a) Verifique que A é invertível.
    (b) Determine a inversa de A usando a regra de Cramer.

15. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2ax_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

    (a) Discuta o sistema em função dos parâmetros a e b.
    (b) Para $a = 2$ e $b = 1$, resolva o sistema usando a regra de Cramer.

16. Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

    e seja A a sua matriz dos coeficientes.
    (a) Calcule $\det(A)$.
    (b) Justifique que o sistema é possível e determinado e determine o valor da incógnita x_1 (sem resolver totalmente o sistema).

17. Para cada um dos sistemas seguintes, comece por verificar que a matriz do sistema é invertível e de seguida determine o conjunto das soluções do sistema usando a regra de Cramer.

    (a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x + 2y = 0 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

18. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

    Justifique que são matrizes invertíveis e calcule as suas inversas usando as respetivas matrizes adjuntas.

19. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB^T = 2I_n$. Mostre que A, B e B^2 são invertíveis e indique as respetivas matrizes inversas.

20. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz idempotente, isto é, tal que $A^2 = A$. Mostre que $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

21. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ quaisquer. Mostre que:

    (a) $\det(AB) = \det(BA)$;

    (b) se AB é invertível, então o mesmo sucede a A e a B.

22. Sem calcular o determinante, verifique que

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

23. Considere a matriz de Vandermond de ordem 3,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}, \qquad \text{com } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

    (a) Mostre que $\det(V) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$, usando transformações elementares sobre as linhas de V.

    (b) Que condições os escalares x_1, x_2 e x_3 têm que satisfazer para que V seja invertível?

24. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \delta & \varepsilon \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

    Mostre que se $\alpha\varepsilon \neq 0$, então A é invertível e determine A^{-1} a partir da matriz adjunta.

25. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

    Determine o elemento $(2,3)$ de A^{-1} calculando o quociente entre dois determinantes.

26. Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

    (a) Mostre que C é invertível.

    (b) Sem calcular $\mathrm{adj}(C)$ nem C^{-1}, determine o elemento da posição $(4,4)$ e o elemento da posição $(2,3)$ de cada uma destas matrizes.

27. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal, isto é, tal que $AA^T = A^TA = I_n$. Justifique que se $n \geq 2$, então

$$\operatorname{adj}(A) = A^T \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{adj}(A) = -A^T.$$

28. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ b & 0 & d & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule $\operatorname{adj}(A)$.

(b) Para que valores de a, b, c e d a matriz A é invertível?

(c) Nos casos em que A é invertível, determine A^{-1}.

29. Averigue se existe alguma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \quad \det(A) = 2.$$

Em caso afirmativo, determine uma matriz nessas condições e indique se essa matriz é única.

30. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, matrizes invertíveis. Mostre que

(a) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B) \cdot \operatorname{adj}(A)$.

(b) $\operatorname{adj}(A^k) = \big(\operatorname{adj}(A)\big)^k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

31. Seja A a matriz do exercício 25. Calcule a terceira coluna de A^{-1} usando a regra de Cramer para resolver o sistema $A\boldsymbol{x} = [0\ 0\ 1]^T$.

32. Seja $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e seja

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big)$. Qual o valor de $\det(A)$?

(b) Determine A.

Soluções

1. (a) $\det(A) = -2$; (b) $\det(A) = 24$; (c) $\det(A) = -27$; (d) $\det(A) = 0$.

2. (a) $\det(A) = 0$ (1^{a} e 3^{a} linhas iguais);
   (b) $\det(A) = 0$ (1^{a} e 3^{a} colunas iguais) ;
   (c) $\det(A) = 2 \times 4 \times 2 = 16$ (matriz diagonal) ;
   (d) $\det(A) = 2 \times 4 \times 2 = 16$ (matriz triangular superior) ;
   (e) $\det(A) = 2 \times 4 \times 2 = 16$ (matriz triangular inferior) ;
   (f) $\det(A) = 0$ (1^{a} linha nula).

3. (a) $\det(A) = 6$;
   (b) $\det(B) = 0$;
   (c) $\det(C) = 0$;
   (d) $\det(D) = -1$;
   (e) $\det(2A) = 2^3 \det(A) = 48$;
   (f) $-2\det(A) = -12$;
   (g) $\det(A^3) = \big(\det(A)\big)^3 = 6^3 = 216$;
   (h) $\det(2A^TAA^T) = 2^3 \det(A^T)\det(A)\det(A^T) = 2^3\big(\det(A)\big)^3 = 8 \times 6^3 = 1728$;
   (i) $\det(A^TA^{-1}B^T) = \det(A^T)\det(A^{-1})\det(B^T) = 6 \times \frac{1}{6} \times 0 = 0$;
   (j) $\det(A^{-1}DA) = \det(A)\det(D)\det(A^{-1}) = \det(D) = -1$;
   (k) $\det(ABCD) = 0$;
   (l)
   $$\begin{aligned}\det(P^{-1}AP) &= \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \tfrac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P) = \tfrac{1}{\det(P)}\det(P)\det(A)\\ &= \tfrac{\det(P)}{\det(P)}\det(A) = \det(A) = 6.\end{aligned}$$

4. A e D são invertíveis.
   (Uma matriz é invertível se e só se o seu determinante for não nulo).

5. $\det(A) = ab - 3$.
   A é invertível quando $\det(A) \neq 0$, ou seja, quando $ab \neq 3$.

6.
$$\det\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x \times 0 = 0.$$

7. $\det(A) = \det(L)\det(U) = 1 \cdot u_{11}u_{22}u_{33} = u_{11}u_{22}u_{33}$.

8. $\det(A) + \det(B) = 5 - 9 = -4$; $\det(A+B) = -6$; $\det(A) + \det(B) \neq \det(A+B)$.

9. (a) -18 (b) -10; (c) 0; (d) -1.

10. $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A)\frac{1}{\det(B)} = -\frac{60}{12} = -5$

11. $\det(A) = -14$.

12. $\det(A) = 15$; $\det(B) = 1$; $\det(C) = 0$; $\det(D) = 0$; $\det(E) = 1$;
    $\det(F) = 2$; $\det(G) = 1$; $\det(H) = 0$; $\det(I) = -1$.

13. (a) Como $\det(A) = 12 \neq 0$, o sistema é possível e determinado.

(b) $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{12} = \frac{1}{6}$; $\quad x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{12} = \frac{5}{12}$.

14. (a) Dado que $\det(A) = 2 \neq 0$, A é invertível.

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$

15. (a) Se $a = 1$ e $b = 1$, o sistema é possível e indeterminado. A característica da matriz simples do sistema é igual à característica da matriz ampliada e igual a 2, inferior ao número de incógnitas que é 3.

Se $a = 1$ e $b \neq 1$, o sistema é impossível. A caracterísica da matriz simples do sistema é inferior à característica da matriz ampliada.

Se $a \neq 1$, o sistema é possível e determinado. A característica da matriz simples do sistema é igual à característica da matriz ampliada e igual ao número de incógnitas.

(b) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

16. (a) $\det(A) = -10$.

(b) O sistema é possível e determinado porque $\det(A) \neq 0$.

$$x_1 = \frac{1}{-10} \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

17. (a) $x_1 = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}$; $\quad x_2 = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$; $\quad x_3 = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$

(b) $x_1 = -\frac{2}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{9}{5}$.

(c) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.

18. (a) $A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $F^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $G^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -8 & -5 \end{bmatrix}$

19. Temos

$$\det(AB^T) = \det(A)\det(B^T) = \det(A)\det(B) = \det(2I_n) = 2^n \neq 0.$$

Logo, tem-se $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$ e, portanto, A e B são invertíveis. Uma vez que $\det(B^2) = \det(B)\det(B) = \big(\det(B)\big)^2 \neq 0$, B^2 também é invertível.

De $AB^T = 2I_n$ podemos obter $A\left(\frac{1}{2}B^T\right) = I_n$ e $B\left(\frac{1}{2}A^T\right) = I_n$, ou seja, $\frac{1}{2}B^T$ é a inversa de A e $\frac{1}{2}A^T$ é a inversa de B. A inversa de B^2 é $\frac{1}{4}\left(A^T\right)^2 = \frac{1}{4}\left(A^2\right)^T$.

20. Temos

$$\det(A^2) = \det(A)\det(A) = \big(\det(A)\big)^2 = \det(A).$$

A condição $\big(\det(A)\big)^2 = \det(A)$ é equivalente a

$$\det(A)\big(\det(A) - 1\big) = 0,$$

ou seja, $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

21. (a) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

    (b) Se AB é invertível, então $\det(AB) \neq 0$. Como $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, então terá de ser $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$. Ou seja, A e B são também invertíveis.

22.

$$A = \begin{bmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \longleftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - cl_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - (a+b)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & c-a & c-b \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 + l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Uma vez que B tem uma linha de zeros, $\det(B) = 0$ e como $\det(A) = -\det(B)$, segue que $\det(A) = 0$.

23. (a)

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} = V_1$$

Se $x_2 - x_1 = 0$ ou $x_3 - x_1 = 0$, V_1 tem uma linha de zeros e, portanto, $\det(V_1) = 0 = \det(V)$. A igualdade $\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ verifica-se trivialmente.

Admitindo que $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, temos

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow 1/(x_2 - x_1) \\ l_3 \longleftarrow 1/(x_3 - x_1)}]{} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 1 & x_3 + x_1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & 1 & x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{bmatrix} = V_2.$$

Assim,

$$\det(V_2) = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_3 - x_1} \det(V),$$

ou seja,

$$\det(V) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

    (b) Para que V seja invertível deve ter-se $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ e $x_2 \neq x_3$.

24. Como $\det(A) = \alpha^2\varepsilon$, temos que $\det(A) \neq 0$ se e só se $\alpha\varepsilon \neq 0$, sendo, portanto, A invertível neste caso.

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2\varepsilon}\begin{bmatrix} \alpha\varepsilon & \delta\gamma - \beta\varepsilon & \alpha\gamma \\ 0 & \alpha\varepsilon & 0 \\ 0 & -\alpha\delta & \alpha^2 \end{bmatrix}$$

25.

$$\left(A^{-1}\right)_{2,3} = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -\frac{3}{4}$$

26. (a) Como $\det(C) = 4 \neq 0$, C é uma matriz invertível.
    (b) $\big(\operatorname{adj}(C)\big)_{4,4} = 2$; $\left(C^{-1}\right)_{4,4} = \frac{1}{2}$; $\big(\operatorname{adj}(C)\big)_{2,3} = 4$; $\left(C^{-1}\right)_{2,3} = 1$.

27. Sendo A uma matriz ortogonal, por definição, $A^{-1} = A^T$. Temos também $\det(A) = \pm 1$, pois

$$\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)\det(A) = \big(\det(A)\big)^2 = \det(I_n) = 1.$$

Como $\operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$, temos então que $\operatorname{adj}(A) = \pm A^T$.

28. (a)

$$\operatorname{adj}(A) = (ad - bc)\begin{bmatrix} 0 & d & 0 & -c \\ d & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ -c & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

    (b) A é invertível quando $ad \neq bc$.
    (c)

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} 0 & d & 0 & -c \\ d & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & a \\ -c & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

29. Como $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$, então

$$\det(A) \cdot \det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \big(\det(A)\big)^n,$$

donde, sendo $\det(A) \neq 0$,

$$\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \big(\det(A)\big)^{n-1}.$$

Devemos, assim, neste caso, ter $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = 2^2 = 4$, o que se confirma.

Assim,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = \det(A) \cdot \big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

30. (a)

$$\begin{aligned}\operatorname{adj}(AB) &= (AB)^{-1}\cdot\det(AB) = B^{-1}A^{-1}\cdot\det(A)\cdot\det(B)\\ &= \big(B^{-1}\cdot\det(B)\big)\big(A^{-1}\cdot\det(A)\big) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A).\end{aligned}$$

(b) Segue da alínea anterior.

31.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{4} = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{4} = 1.$$

32. (a) $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = 8$ e $\det(A) = 2$.

Observe que $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \big(\det(A)\big)^3$ (ver exercício 29).

(b)

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 1\\ 0 & -6 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$