Departamento de Matemática — Universidade do Minho

Tópicos de Matemática — 2º teste – 16 nov 2023

Lic. em Ciências de Computação - 1º ano — duração: 1h45m

Nome ______________________________ Número ______________

**Grupo 1.** [10 valores] Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1.1. Se $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☐

1.1. Se $A = \{\emptyset\}$ e $B = \{\{\emptyset\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☐

1.1. Se $A = \{\{\emptyset\}\}$ e $B = \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, então, $A \in B$ e $A \subseteq B$. V☐ F☐

1.2. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então $(A \backslash B) \cap A = \{1, 3, 5\}$. V☐ F☐

1.2. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$. V☐ F☐

1.2. Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, então $(A \backslash B) \cap B = \{1, 3, 5\}$. V☐ F☐

1.3. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, se $A \subseteq B$, então $A \backslash C \subseteq B \backslash C$. V☐ F☐

1.3. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, se $A \subseteq B$, então $C \backslash B \subseteq C \backslash A$. V☐ F☐

1.3. Para todos os conjuntos $A$, $B$ e $C$, se $A \subseteq B$, então $C \backslash A \subseteq C \backslash B$. V☐ F☐

1.4. Para todo o conjunto $A$, se $(A \times \{1, 2\}) \cap (A \times \{1, 3\}) = \emptyset$, então $A = \emptyset$. V☐ F☐

1.4. Para todo o conjunto $A$, se $A \neq \emptyset$, então $(A \times \{1, 2\}) \cap (A \times \{1, 3\}) \neq \emptyset$. V☐ F☐

1.4. Para todo o conjunto $A$, se $(A \times \{1, 2\}) \cap (A \times \{2, 4\}) = \emptyset$, então $A = \emptyset$. V☐ F☐

1.5. $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\} \times \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\} = \{(2n, 2n-1) : n \in \mathbb{N}\}$ V☐ F☐

1.5. $\mathbb{N} \times \{3n : n \in \mathbb{N}\} = \{(n, 3n) : n \in \mathbb{N}\}$. V☐ F☐

1.5. $\{x : x \in \mathbb{R}\} \times \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. V☐ F☐

1.6. Existe um conjunto $A$ para o qual $\mathcal{P}(A)$ tem exatamente 72 elementos. V☐ F☐

1.6. Existe um conjunto $A$ para o qual $\mathcal{P}(A)$ tem exatamente 64 elementos. V☐ F☐

1.6. Existe um conjunto $A$ para o qual $\mathcal{P}(A)$ tem exatamente 68 elementos. V☐ F☐

1.7. Para qualquer conjunto $A$, $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. V☐ F☐

1.7. Para qualquer conjunto $A$, $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \neq \emptyset$. V☐ F☐

1.7. Para qualquer conjunto $A$, $\emptyset \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. V☐ F☐

1.8. Se $S = \{(1, 2)\}$ e $R = \{(2, 3)\}$ são relações binárias em $\mathbb{N}$, $R \circ S = \{(1, 3)\}$. V☐ F☐

1.8. Se $S = \{(1, 2)\}$ e $R = \{(2, 3)\}$ são relações binárias em $\mathbb{N}$, $S \circ R = \{(1, 3)\}$. V☐ F☐

1.8. Se $S = \{(1, 2)\}$ e $R = \{(2, 3)\}$ são relações binárias em $\mathbb{N}$, $R \circ S = \emptyset$. V☐ F☐

1.9. Existem $256$ relações binárias diferentes de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ em $B = \{9\}$. V☐ F☐

1.9. Existem $256$ relações binárias diferentes de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{5, 6, 7, 8\}$. V☐ F☐

1.9. Existem $256$ relações binárias diferentes de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{5, 6\}$. V☐ F☐

1.10. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, existe uma relação binária $R$ de $A$ em $B$ tal que $R^{-1} \circ R = \mathrm{id}_A$. V☐ F☐

1.10. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, existe uma relação binária $R$ de $A$ em $B$ tal que $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_B$. V☐ F☐

1.10. Para $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4,5\}$, existe uma relação binária $R$ de $A$ em $B$ tal que $R^{-1} \circ R = \mathrm{id}_A$. V☐ F☐

**Grupo 2.** [5 valores] Em cada uma das questões seguintes, assinale a(s) opção(ões) correta(s):

2.1. Seja $A$ um conjunto qualquer. Então:

☐ $\emptyset \subseteq A$ ☐ $\emptyset \subseteq \{A\}$ ☐ $\{\emptyset, A\} \in \{A, \{\emptyset\}\}$ ☐ $\{\emptyset, A\} \in \{A, \{\emptyset, A\}\}$

2.1. Seja $A$ um conjunto qualquer. Então:

☐ $\emptyset \subseteq \{A, \{\emptyset, A, \{A\}\}\}$ ☐ $\emptyset \in \{\emptyset, A\}$ ☐ $\{\emptyset\} \in \{A, \{\emptyset, A, \{A\}\}\}$ ☐ $\{\emptyset\} \in \{A, \{\emptyset\}\}$

2.1. Seja $A$ um conjunto qualquer. Então:

☐ $\emptyset \in \{A\}$ ☐ $\emptyset \subseteq \{A, \emptyset\}$ ☐ $\{\emptyset, A\} \in \{\emptyset, A, \{\emptyset, A\}\}$ ☐ $\{\emptyset, A\} \in \{A, \{\emptyset, A, \{A\}\}\}$

2.2. Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{\{1\}, 2\}$. Então:

☐ $A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ ☐ $A \times B = \{(1,\{1\}),(1,2),(2,\{1\}),(2,2)\}$

☐ $A \times B = \{\{(1,1)\},(1,2),\{(2,1)\},(2,2)\}$ ☐ $A \times B = \{(1,\{1\}),(2,2)\}$

2.2. Sejam $A = \{1,2\}$ e $B = \{1, \{2\}\}$. Então:

☐ $A \times B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ ☐ $A \times B = \{(1,1),\{(1,2)\},(2,1),\{(2,2)\}\}$

☐ $A \times B = \{(1,1),(1,\{2\}),(2,1),(2,\{2\})\}$ ☐ $A \times B = \{(1,1),(2,\{2\})\}$

2.3. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Então:

☐ $A \backslash (B \cap C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☐ $A \backslash (B \cup C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☐ $A \cup (B \cap C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

☐ $A \cap (B \cup C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

2.3. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Então:

☐ $A \backslash (B \cup C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☐ $A \backslash (B \cap C)$ é o menor conjunto que contém $A \backslash B$ e $A \backslash C$.

☐ $A \cup (B \cap C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

☐ $A \cap (B \cup C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \cup B$ e em $A \cup C$.

2.3. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Então:

☐ $A \backslash (B \cap C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \backslash B$ e em $A \backslash C$.

☐ $A \backslash (B \cup C)$ é o maior conjunto simultaneamente contido em $A \backslash B$ e em $A \backslash C$.

☐ $A \cup (B \cap C)$ é o menor conjunto que contém $A \cup B$ e $A \cup C$.

☐ $A \cap (B \cup C)$ é o menor conjunto que contém $A \cup B$ e $A \cup C$.

2.4. Sejam $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $R$ a relação binária em $X$ definida por

$$R = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,4),(4,5),(4,6),(6,3)\}.$$

Então,

☐ $R(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$.

☐ $R(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$.

☐ $(R \circ R)(\{2,4\}) = \{3,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})^{\leftarrow}(\{2,4\}) = \{3,5,6\}$.

☐ $(R \circ R)(\{2,4\}) = \{3,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})(\{3,5,6\}) = \{2,4\}$.

2.4. Sejam $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $R$ a relação binária em $X$ definida por

$$R = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,4),(4,5),(4,6),(6,3)\}.$$

Então,

☐ $R(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$.

☐ $R(\{2,3,4\}) = \{1,2,6\}$ e $R^{\leftarrow}(\{2,3,4\}) = \{4,5,6\}$.

☐ $(R \circ R)(\{1,4\}) = \{3,4,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})(\{3,4,5,6\}) = \{1,2,4\}$.

☐ $(R \circ R)(\{1,4\}) = \{3,4,5,6\}$ e $(R^{-1} \circ R^{-1})^{\leftarrow}(\{3,4,5,6\}) = \{1,4\}$.

2.5. Sejam $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$. Então,

$\square\ R \circ R = R$ $\square\ R \circ S = R$ $\square\ S \circ R = S$ $\square\ S \circ S = S$

2.5. Sejam $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$. Então,

$\square\ R \circ R = S$ $\square\ R \circ S = R$ $\square\ S \circ R = S$ $\square\ S \circ S = S$

2.5. Sejam $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ e $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$. Então,

$\square\ R \circ R = R$ $\square\ R \circ S = S$ $\square\ S \circ R = R$ $\square\ S \circ S = S$

**Grupo 3.** [5 valores] Responda a cada uma das questões, de forma detalhada e justificada.

3.1. Seja $A = \{1, 2, \{1\}, \{1, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}$. Determine
(a) $A \cap \mathcal{P}(A)$;
(b) $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;
(c) O número de elementos de $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$.

3.1. Seja $A = \{1, 2, \{2\}, \{1\}, \{1, \{2\}\}, \{\{2\}\}\}$. Determine
(a) $A \cap \mathcal{P}(A)$;
(b) $A \cap \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;
(c) O número de elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \times A^2)$.

3.2. Sejam $A$ um conjunto qualquer e $R$, $S$ e $T$ relações binárias em $A$.
(a) Mostre que, se $T^{-1} \circ S \subseteq S$, então $S \cap (T \circ R) \subseteq T \circ (S \cap R)$.
(b) Dê exemplo de um conjunto $A$ e relações binárias $R$, $S$ e $T$ em $A$ tais que $T^{-1} \circ S \subseteq S$ e $S \cap (T \circ R) \neq T \circ (S \cap R)$.

3.2. Sejam $A$ um conjunto qualquer e $R$, $S$ e $T$ relações binárias em $A$.
(a) Mostre que $T \cap (S \circ R) \subseteq T \circ (R^{-1} \circ R)$.
(b) Dê exemplo de um conjunto $A$ e relações binárias $R$, $S$ e $T$ em $A$ tais que $T \cap (S \circ R) \neq T \circ (R^{-1} \circ R)$.