Universidade do Minho | **Curso: LMAT**

DMAT | **Probabilidades e Aplicações** | **2022/2023**

Teste I - 15 de novembro 2022

Nome: **Nº**

Responda às questões 3 e 4 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do R que utilizar. Duração: 2h.

---

1. Suponha que tem um dado equilibrado.

   (a) Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar um lançamento deste dado e seja $X : \{1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

   $$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad \omega \leq 2 \\ 1 & \text{se} \quad \omega > 2 \end{cases}.$$

   Prove que X é uma variável aleatória real e determine a sua função de distribuição.

   (b) Considere agora a experiência aleatória que consiste em efectuar efetuar um lançamento do dado seguido de dois lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada.

   i. Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória.

   ii. Indique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis (mas não impossíveis) decorrentes desta experiência. Na justificação, identifique claramente o subconjunto do espaço amostral a que corresponde cada um dos acontecimentos que indicou.

   iii. Sabendo que saiu uma face ímpar e pelo menos uma cara, qual a probabilidade de ter saído a face 1 e uma coroa? Justifique.

   iv. Diga, usando a definição, se os acontecimentos A, B e C seguintes formam uma família de acontecimentos independentes:

   A: "saiu a face 1 no lançamento do dado",
   B: "saiu cara no primeiro lançamento da moeda",
   C: "saiu uma cara e uma coroa nos lançamentos da moeda".

   v. Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se A, B e C formam uma família de acontecimentos independentes então A e $B \cup C$ também são independentes."

2. Num lote de 10 espingardas existem 5 espingardas de boa precisão, 3 de precisão média e 2 de má precisão. As espingardas aparentam ser todas iguais pelo que não é possível distinguir, a olho, as 10 espingardas. No entanto, sabe-se que as espingardas de boa precisão acertam no alvo com probabilidade 0.95, as de precisão média acertam no alvo com probabilidade 0.7 e as de má precisão erram sempre o alvo.

   (a) Escolheu-se, ao acaso, uma espingarda neste lote e efectuou-se um disparo.

   i. Determine a probabilidade de se acertar no alvo.

   ii. Sabendo que se acertou no alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda boa precisão? Justifique.

   iii. Sabendo que se errou o alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda de média ou má precisão? Justifique.

   (b) Escolheram-se, ao acaso e sucessivamente, seis espingardas deste lote. Determine a probabilidade de se ter escolhido pelo menos 5 espingardas de boa precisão se:

   i. a escolha foi efetuada com reposição.

   ii. a escolha foi efetuada sem reposição.

(*v.s.f.f.*)

Cotações: **1)** a) 1.5; b) 7.5 [1.5 + 1.0 + 1.5 + 2.0 + 1.5] **2)** a) 4.5; b)3.0 **3)** 2.0 **4)** 1.5

3. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade.

   (a) Considere n acontecimentos, $E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$ fixo. Mostre que, se $P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} E_k\right) > 0$, então

   $$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)\ldots P\left(E_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right).$$

   (b) Considere $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de elementos de $\mathcal{A}$ tais que

   $$\lim_{n\to\infty} P(G_n) = 1 \text{ e } \lim_{n\to\infty} P(F_n) = p.$$

   Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} P(G_n \cap F_n) = p$.

4. O número de artigos fabricados diariamente numa certa empresa é uma v.a.r., X, discreta e é tal que $X \sim Poisson(\lambda)$, com $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alguns dos artigos aqui fabricados têm defeito e sabe-se que cada artigo tem, independentemente dos outros, probabilidade $0 < p < 1$ de ser defeituoso.

   (a) Se, num dia escolhido ao acaso, a empresa fabricar n produtos (com $n \in \mathbb{N}$), qual é a probabilidade de k destes serem defeituosos (com $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$)? Justifique.

   (b) Seja agora Z a v.a.r. que representa o número de artigos defeituosos fabricados diariamente nesta empresa. Mostre que $Z \sim Poisson(\lambda\, p)$, i.e., que $C_Z = \mathbb{N}_0$ e que

   $$P(Z = k) = \frac{(\lambda\, p)^k}{k!} e^{-\lambda\, p},\ k \in \mathbb{N}_0.$$

   <u>Nota</u>: Em b), pode usar o seguinte resultado: $e^x = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}$.