Álgebra Universal e Categorias

3. Teoria de Categorias

3.1. Dá-se a designação de *monóide* a uma estrutura $\mathcal{M} = (M; *, 1_{\mathcal{M}})$, onde M é um conjunto não vazio, $* : M \times M \to M$ é uma operação binária associativa e $1_{\mathcal{M}}$ é um elemento de M tal que, para qualquer $x \in M$, $x * 1_{\mathcal{M}} = x = 1_{\mathcal{M}} * x$.

Para cada monóide $\mathcal{M} = (M; *, 1_{\mathcal{M}})$, considere a estrutura $\mathbf{M} = (\{\mathcal{M}\}, M, dom, cod, \circ, id)$, onde:

- $dom : M \to \{\mathcal{M}\}$ é a função que a cada elemento de M associa $\mathcal{M}$;
- $cod : M \to \{\mathcal{M}\}$ é a função que a cada elemento de M associa $\mathcal{M}$;
- $\circ$ é a operação binária do monóide;
- $id : \{\mathcal{M}\} \to M$ é a função definida por $id(\mathcal{M}) = id_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}}$.

Mostre que $\mathbf{M}$ é uma categoria.

Da definição de $\mathbf{M}$ segue que:

- dom e cod são funções bem definidas de M em $\{\mathcal{M}\}$, pois
  - a cada elemento de M é associado um elemento de $\{\mathcal{M}\}$,
  - para quaisquer $a, b \in M$ tais que $a = b$, tem-se $dom(a) = \mathcal{M} = dom(b)$ e $cod(a) = \mathcal{M} = cod(b)$;
- $\circ$ é uma função bem definida de $\{(s, r) \in M \times M \mid cod(s) = dom(r)\}$ em M, pois $*$ é uma função de $M \times M$ em M;
- para quaisquer $r, s \in M$, tem-se $r * s \in M$ (pois $*$ é uma operação binária em M), logo

$$dom(r \circ s) = dom(r * s) = \mathcal{M} = dom(s) \text{ e } cod(r \circ s) = cod(r * s) = \mathcal{M} = cod(r);$$

- para quaisquer $r, s, t \in M$, tem-se

$$(r \circ s) \circ t = (r * s) * t = r * (s * t) = r \circ (s * t),$$

  pois a operação binária $*$ é associativa;
- id é uma função bem definida de $\{\mathcal{M}\}$ em M, pois ao único elemento de $\{\mathcal{M}\}$ é associado o elemento $1_{\mathcal{M}}$, o qual é um elemento de M;
- para quaisquer $r, s \in M$,

$$id_{\mathcal{M}} \circ r = 1_{\mathcal{M}} * r = r \quad \text{e} \quad s \circ id_{\mathcal{M}} = s * 1_{\mathcal{M}} = s,$$

  pois $1_{\mathcal{M}}$ é o elemento neutro de $\mathcal{M}$.

Logo, por definição de categoria, a estrutura $\mathbf{M}$ é uma categoria.

3.2. Sejam P um conjunto e $\leq$ uma relação binária em P. A relação $\leq$ diz-se uma *pré-ordem em* P se são satisfeitas as seguintes condições:

(i) para todo $a \in P$, $(a, a) \in \leq$, (reflexividade)

(iii) para quaisquer $a, b, c \in P$, $((a, b) \in \leq$ e $(b, c) \in \leq) \Rightarrow (a, c) \in \leq$. (transitividade)

Dá-se a designação de *conjunto preordenado* a um par $(P, \leq)$, onde P é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma pré-ordem.

Dados conjuntos preordenados $(P, \leq_1)$ e $(Q, \leq_2)$, uma *função isótona* de P em Q é uma função $f : P \to Q$ tal que

$$x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y),$$

para quaisquer $x, y \in P$.

(a) Considere a estrutura **Preset** $= (\mathrm{Obj}(\textbf{Preset}), \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}), dom, cod, \circ, id)$, onde:

- $\mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ é a classe de todos os conjuntos preordenados;

- $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ é a classe de todas as aplicações isótonas entre conjuntos preordenados;
- $dom : \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ é a função que a cada função isótona de $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ associa o seu domínio;
- $cod : \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ é a função que a cada função isótona de $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ associa o seu codomínio;
- $\circ : \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \times \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ é a função parcial que a cada par de funções (f, g) tais que $dom(g) = cod(f)$ associa a composição de g e f;
- $id : \mathrm{Obj}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ é a função que a cada conjunto preordenado $(P, \leq)$ associa a função identidade id_P;

Mostre que **Preset** é uma categoria.

Da definição de **Preset** segue que:

- dom e cod são funções bem definidas de $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ em $\mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$, pois a cada elemento de $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$, dom e cod associam um e um só elemento de $\mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ (cada função tem um e um só conjunto como domínio e um e um só conjunto como codomínio);
- $\circ$ é uma função bem definida de $M = \{(f, g) \,|\, f, g \in \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}), dom(g) = cod(f)\}$ em $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$, pois
  - a cada $(f, g) \in M$, a correspondência $\circ$ associa $g \circ f$ que é uma função isótona,
  - para quaisquer $(f, g), (f', g') \in M$ tais que $(f, g) = (f', g')$ tem-se $f = f'$ e $g = g'$, pelo que $g \circ f = g' \circ f'$, pois a composição de funções é uma função;
- para qualquer $(f, g) \in M$, $dom(g \circ f) = dom(f)$, $cod(g \circ f) = cod(g)$;
- para quaisquer $f, g, h \in \mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$, tais que $dom(h) = cod(g)$ e $dom(g) = cod(f)$, tem-se

  $$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

  pois a composição de funções é associativa;
- id é uma função bem definida de $\mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ em $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$, pois
  - a cada $P \in \mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ é associada a função identidade id_P, a qual é uma função isótona de P em P,
  - para quaisquer $P, P' \in \mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$, se $(P, \leq) = (P', \leq')$, tem-se $P = P'$, pelo que

    $$id((P, \leq)) = id_P = id_{P'} = id((P', \leq'));$$

- para quaisquer $P, P' \in \mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ tais que $dom(f) = cod(id_P)$ e $cod(g) = dom(id_P)$, tem-se

  $$id_P \circ g = g \quad \text{e} \quad f \circ id_P = f.$$

Logo, por definição de categoria, a estrutura **Preset** é uma categoria.

(b) Para cada conjunto preordenado $(P, \leq)$, considere a estrutura $\mathbf{P} = (P, \leq, dom, cod, \circ, id)$, onde:

- $dom : \leq \to P$ é a função que a cada par $(a, b) \in \leq$ associa o elemento a;
- $cod : \leq \to P$ é a função que cada par $(a, b) \in \leq$ associa o elemento b;
- $id : P \to \leq$ é a função definida por $id(a) = (a, a)$;
- $\circ : \{((a, b), (b, c)) \,|\, (a, b), (b, c) \in \leq\} \to \leq$ é a função definida por $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$, para quaisquer $(a, b), (b, c) \in \leq$.

Mostre que $\mathbf{P}$ é uma categoria.

Da definição de $\mathbf{P}$ segue que:

- dom e cod são funções bem definidas de $\leq$ em P, pois
  - a cada $(a, b) \in \leq$, a correspondência dom (respetivamente, cod) associa o elemento $a \in P$ (respetivamente, o elemento $b \in P$),
  - para quaisquer $(a, b), (a', b') \in \leq$, se $(a, b) = (a', b')$, tem-se $a = a'$ ($b = b'$), pelo que $dom(a, b) = dom(a', b')$ (respetivamente, $cod(a, b) = cod(a', b')$);
- $\circ$ é uma função bem definida de $C = \{((a, b), (b, c)) \,|\, (a, b), (b, c) \in \leq\}$ em $\leq$, pois:
  - a cada $((a, b), (b, c)) \in C$, a correspondência $\circ$ associa o par (a, c) , o qual é um elemento de $\leq$, uma vez que a relação $\leq$ é transitiva;
  - para quaisquer $((a, b), (b, c)) \in C$, $((a', b'), (b', c')) \in C$, se $((a, b), (b, c)) = ((a', b'), (b', c'))$, tem-se $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, pelo que $(b, c) \circ (a, b) = (a, c) = (a', c') = (b', c') \circ (a', b')$;
- para quaisquer $(a, b), (b, c) \in \leq$,

  $$dom((b, c) \circ (a, b)) = dom((a, c)) = a = dom((a, b))$$

  e

  $$cod((b, c) \circ (a, b)) = cod((a, c)) = c = cod((b, c));$$

- para quaisquer $(a,b),(b,c),(c,d) \in \leq$, tem-se

$$((c,d)\circ(b,c))\circ(a,b) = (b,d)\circ(a,b) = (a,d) = (c,d)\circ(a,c) = (c,d)\circ((b,c)\circ(a,b));$$

- a função id está bem definida, pois
  - a cada $a \in P$, a correspondência id associa o par (a,a), o qual é um elemento de $\leq$, uma vez que a relação $\leq$ é reflexiva,
  - para quaisquer $a, a' \in P$, se $a = a'$, tem-se $id(a) = (a,a) = (a',a') = id(a')$;
- para quaisquer $(a,b),(c,a) \in \leq$,

$$id_a \circ (c,a) = (a,a)\circ(c,a) = (c,a) \quad \text{e} \quad (a,b)\circ id_a = (a,b)\circ(a,a) = (a,b).$$

Logo, por definição de categoria, a estrutura $\mathbf{P}$ é uma categoria.

3.3. Dados $m,n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes reais do tipo $n \times m$.
Considere a estrutura $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), dom, cod, \circ, id)$, onde:

- $dom : \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ associa o natural n;
- $cod : \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ associa o natural m;
- $\circ : \{(B,A) \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) \,|\, p,q,r \in \mathbb{N}\} \to \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a função definida por $A \circ B = A \cdot B$, onde $\cdot$ é a multiplicação usual de matrizes;
- $id : \mathbb{N} \to \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a função que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa a matriz real I_n.

Mostre que $\mathbf{N}$ é uma categoria.

Da definição de $\mathbf{N}$ segue que:

- dom e cod são funções bem definidas de $\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{N}$, pois a cada matriz $M \in \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, as correspondências dom e cod associam um e um só elemento de $\mathbb{N}$;
- $\circ$ é uma função bem definida de $M = \{(B,A) \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) \,|\, p,q,r \in \mathbb{N}\}$ em $\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, pois:
  - a cada $(B,A) \in M$, a correspondência $\circ$ associa um elemento de $\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, pois o produto de matrizes $A \cdot B$ está definido e $A \cdot B$ é uma matriz real do tipo $p \times r$,
  - para quaisquer $(B,A),(B',A') \in M$ tais que $(B,A) = (B',A')$, tem-se $A = A'$ e $B = B'$, pelo que $A \circ B = AB = A'B' = A' \circ B'$;
- para qualquer $(B,A) \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, tem-se

$$dom(A\circ B) = dom(A\cdot B) = r = dom(B), \text{ pois } A\cdot B \in \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{R})$$

  e

$$cod(A\circ B) = cod(A\cdot B) = p = cod(A), \text{ pois } A\cdot B \in \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{R});$$

- para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{s\times r}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r\times p}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, tem-se

$$(A\circ B)\circ C = (A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C) = A\circ(B\circ C),$$

  pois a multiplicação usual de matrizes é associativa;
- a função id está bem definida, pois
  - a cada $p \in \mathbb{N}$ é associado um elemento de $\bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, uma vez que $I_p \in \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$,
  - para quaisquer $p, p' \in \mathbb{N}$ tais que $p = p'$, tem-se $id(p) = I_p = I_{p'} = id(p')$;
- para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$,

$$id_q \circ A = I_q \cdot A = A \quad \text{e} \quad B \circ id_q = B \cdot I_q = B;$$

Logo, por definição de categoria, a estrutura $\mathbf{N}$ é uma categoria.

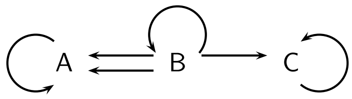
3.4. Diga qual dos diagramas seguintes pode representar uma categoria:

Para que um diagrama represente uma categoria $\mathbf{C}$, é necessário que se verifiquem as seguintes condições:

- para cada objeto A de $\mathbf{C}$, o diagrama tem de ter uma aresta de A em A que represente o morfismo id_A;
- sempre que exista, no diagrama, uma aresta de um vértice A para um vértice B e uma aresta do vértice B num vértice C, que representem $\mathbf{C}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$, respetivamente, o diagrama também tem de ter uma aresta de A em C que represente o morfismo $g \circ f$.

Além disso, os morfismos da categoria devem ser representados por arestas do diagrama de tal forma que as seguintes condições sejam respeitadas:

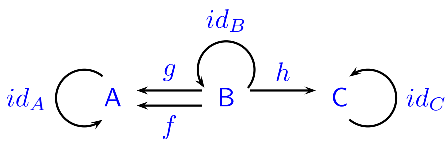
- para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : C \to D$,
$$f \circ id_A = f, \quad id_D \circ g = g,$$
- para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$,
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

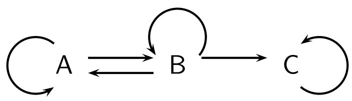
(a) 

O diagrama indicado pode representar uma categoria. De facto, a estrutura
$$\mathbf{C} = (\mathbf{Obj}(\mathbf{C}), \mathbf{Mor}(\mathbf{C}), dom, cod, \circ, id)$$
onde

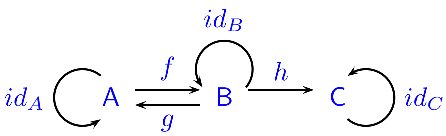
- $\mathbf{Obj}(\mathbf{C}) = \{A, B, C\}$,
- $\mathbf{Mor}(\mathbf{C}) = \{id_A, id_B, id_C, f, g, h\}$,
- $dom : \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$ é a função definida por $dom(id_X) = X$, para cada $X \in \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$, $dom(f) = dom(g) = B$, $dom(h) = B$,
- $cod : \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$ é a função definida por $cod(id_X) = X$, para cada $X \in \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$, $cod(f) = cod(g) = A$, $cod(h) = C$,
- $circ : \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \times \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ é a função parcial definida por $id_A \circ f = f$, $f \circ id_B = f$, $id_A \circ g = g$, $g \circ id_B = g$, $h \circ id_B = h$, $id_C \circ h = h$ e $id_X \circ id_X = id_X$, para todo $X \in \{A, B, C\}$,
- $id : \mathbf{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ é a função definida por $id(X) = id_X$, para todo $X \in \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$,

é uma categoria (fica ao cuidado do leitor a verificação de que é válida a associatividade para a operação $\circ$).
Esta categoria pode ser representada pelo diagrama

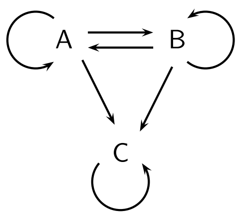


(b) 

O diagrama não pode representar uma categoria. Se admitirmos que o diagrama representa uma categoria, a categoria tem um morfismo $f : A \to B$ e um morfismo $h : B \to C$, de acordo o indicado no diagrama seguinte



porém, o diagrama não tem qualquer aresta de A em C que represente o morfismo $h \circ f : A \to C$ e, portanto, não pode representar uma categoria.

(c) 

O diagrama indicado pode representar uma categoria. De facto, a estrutura
$$\mathbf{C} = (\mathbf{Obj}(\mathbf{C}), \mathbf{Mor}(\mathbf{C}), dom, cod, \circ, id)$$
onde

- $\mathbf{Obj}(\mathbf{C}) = \{A, B, C\}$,
- $\mathbf{Mor}(\mathbf{C}) = \{id_A, id_B, id_C, f, g, h, k\}$,
- $dom : \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$ é a função definida por $dom(id_X) = X$, para cada $X \in \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$, $dom(f) = A$, $dom(g) = B$, $dom(h) = B$, $dom(k) = A$,
- $cod : \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$ é a função definida por $cod(id_X) = X$, para cada $X \in \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$, $cod(f) = B$, $cod(g) = A$, $cod(h) = C$, $cod(k) = C$,
- $circ : \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \times \mathbf{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ é a função parcial definida por:
  - $id_X \circ p = p$, para todo $p \in \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ tal que $cod(p) = X$,
  - $q \circ id_X = q$, para todo $q \in \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ tal que $dom(q) = X$,
  - $g \circ f = id_A$, $f \circ g = id_B$, $h \circ f = k$, $k \circ g = h$,
- $id : \mathbf{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ é a função definida por $id(X) = id_X$, para todo $X \in \mathbf{Obj}(\mathbf{C})$,

é uma categoria (fica ao cuidado do leitor a verificação de que é válida a associatividade para a operação $\circ$).
Esta categoria pode ser representada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{A} \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, "k"'] & & \mathsf{B} \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[loop right, "id_B"] \arrow[dl, "h"] \\
& \mathsf{C} \arrow[loop below, "id_C"] &
\end{tikzcd}$$

(d) $$\begin{tikzcd}
\mathsf{A} \arrow[loop left] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift right=2] & \mathsf{B} \arrow[l] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

O diagrama não pode representar uma categoria. Se admitirmos que o diagrama representa uma categoria, para cada $X \in \{A, B\}$, as arestas de X em X têm de corresponder aos morfismos identidade id_X. Além disso, a categoria teria de ter morfismos $f : A \to B$, $g : B \to A$ e $h : A \to B$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{A} \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, shift left=2, "f"] \arrow[r, shift right=2, "h"'] & \mathsf{B} \arrow[l, "g"] \arrow[loop right, "id_B"]
\end{tikzcd}$$

Considerando que o diagrama de uma categoria também tem de ter as arestas que representam a composição de dois morfismos, sempre que a composição faça sentido, resultaria que:

- $id_X \circ p = p$, para todo $p \in \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ tal que $cod(p) = X$,
- $q \circ id_X = q$, para todo $q \in \mathbf{Mor}(\mathbf{C})$ tal que $dom(q) = X$,
- $f \circ g = id_B$, $g \circ f = id_A$, $h \circ g = id_B$, $g \circ h = id_A$.

Das igualdades anteriores segue que

$$(f \circ g) \circ h = id_B \circ h = h \quad \text{e} \quad f \circ (g \circ h) = f \circ id_A = f,$$

o que contraria a associatividade da composição de morfismos. Logo, o diagrama indicado não pode representar uma categoria.

3.5. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o diagrama a seguir representado

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr, "h"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr] \arrow[drr, "k"'] & & \bullet \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bullet \\
& & \bullet \arrow[urr, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mostre que se os quatro triângulos internos do diagrama comutam, então $h \circ g \circ f = l \circ k$.

Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "s"] & & \bullet \arrow[dr, "h"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "p"'] \arrow[drr, "k"'] & & \bullet \arrow[ur, "r"] \arrow[rr, "q"'] & & \bullet \\
& & \bullet \arrow[urr, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

e admitamos que os quatro triângulos internos do diagrama comutam. Então temos:

$$p = s \circ f, \quad q = h \circ r, \quad g = r \circ s, \quad l \circ k = q \circ p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} h \circ g \circ f &= h \circ (r \circ s) \circ f \\ &= (h \circ r) \circ (s \circ f) \\ &= q \circ p \\ &= l \circ k. \end{aligned}$$

3.6. Mostre que uma categoria é discreta se e só se todas as suas subcategorias são plenas.

Uma categoria $\mathbf{C}$ diz-se discreta se os únicos morfismos de $\mathbf{C}$ são os morfismos identidade; assim, para qualquer $\mathbf{C}$-objeto X, tem-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,X) = \{id_X\}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-objetos X e Y tais que $X \neq Y$, temos $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y) = \emptyset$.
Uma subcategoria $\mathbf{S}$ de $\mathbf{C}$ diz-se uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$ se, para quaisquer $\mathbf{S}$-objetos X e Y, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y)$.

Admitamos que $\mathbf{C}$ é uma categoria discreta e que $\mathbf{S}$ é uma subcategoria de $\mathbf{C}$. Considerando que $\mathbf{S}$ é uma subcategoria de $\mathbf{C}$, tem-se $id_X^{\mathbf{S}} = id_X^{\mathcal{C}}$ e $id_X^{\mathcal{C}} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,X)$, para todo $X \in \mathbf{S}$. Também se tem $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y)$, para quaisquer $\mathbf{S}$-objetos X e Y. Logo, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})$, tem-se $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,X) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,X) = \{id_X^{\mathbf{C}}\}$ e, portanto, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,X) = \{id_X^{\mathbf{C}}\}$. Além disso, para quaisquer $\mathbf{S}$-objetos X e Y tais que $X \neq Y$, temos $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,Y) = \emptyset$, uma vez que $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ e $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y) = \emptyset$. Assim, para quaisquer $\mathbf{S}$-objetos X e Y, temos $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y)$ e, portanto, $\mathbf{S}$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$.

Reciprocamente, admitamos que todas as subcategorias de $\mathbf{C}$ são plenas. Seja $\mathbf{S}$ a subategoria de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathbf{S}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $\mathrm{Mor}(\mathbf{S}) = \{id_X^{\mathbf{C}} \,|\, X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})\}$. Como, por hipótese, $\mathbf{S}$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$, segue que, para quaisquer objetos X e Y de $\mathbf{S}$, isto é, para quaisquer objetos X e Y de $\mathbf{C}$, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{S}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(X,Y)$, donde resulta que $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{S}) = \{id_X^{\mathbf{C}} \,|\, X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})\}$. Portanto, $\mathbf{C}$ é uma categoria discreta.

3.7. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "q"] \arrow[drr, bend right=70, "l"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "m"] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
D \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "t"'] & E \arrow[r, "s"] & F
\end{tikzcd}$$

Construa:

(a) A subcategoria plena $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$.

Comecemos por observar que se o diagrama representa uma categoria $\mathbf{C}$, então

- $j \circ i = k, \quad r \circ u = q, \quad p \circ i = q,$
- $s \circ p = m, \quad g \circ j = f \circ j = m, \quad g \circ k = f \circ k = l,$
- $s \circ r = t, \quad t \circ u = l, \quad g \circ i = l.$

Uma categoria

$$\mathbf{C}' = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}'), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}'), dom_{\mathbf{C}'}, cod_{\mathbf{C}'}, \circ_{\mathbf{C}'}, id^{\mathbf{C}'})$$

diz-se uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$ se:

(1) $\mathbf{C}'$ é uma subcategoria de $\mathbf{C}$, ou seja, se:
  - $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') \subseteq \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$;
  - $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}') \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$;
  - para qualquer $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}')$, $dom_{\mathbf{C}'}(f) = dom_{\mathbf{C}}(f)$ e $cod_{\mathbf{C}'}(f) = cod_{\mathbf{C}}(f)$;
  - para quaisquer $\mathbf{C}'$-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to D$, $g \circ_{\mathbf{C}'} f = g \circ_{\mathbf{C}} f$;
  - para qualquer objeto S de $\mathbf{S}$, $\mathrm{id}_S^{\mathbf{C}}$ é um morfismo de $\mathbf{S}$ e $\mathrm{id}_S^{\mathbf{S}} = \mathrm{id}_S^{\mathbf{C}}$,

(2) para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}')$, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}'}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$.

Assim, a subcategoria plena $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$ é a categoria representada pelo diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[drr, "l"'] & B \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "m"] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
& & F
\end{tikzcd}$$

(b) A categoria dos objetos sobre E.

A categoria dos objetos sobre E, é a categoria

$$\mathbf{C}/\mathbf{E} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}/\mathbf{E}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}/\mathbf{E}), dom_{\mathbf{C}/\mathbf{E}}, cod_{\mathbf{C}/\mathbf{E}}, \circ_{\mathbf{C}/\mathbf{E}}, id^{\mathbf{C}/\mathbf{E}})$$

definida do seguinte modo:

- os objetos de $\mathbf{C}/\mathbf{E}$ são todos os morfismos de $\mathbf{C}$ com codomínio E;
- dados objetos f e g de $\mathbf{C}/\mathbf{E}$, isto é, dados $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to E$ e $g : Y \to E$, um $\mathbf{C}/\mathbf{E}$-morfismo de f em g é um triplo de morfismos (f, j, g), onde j é um $\mathbf{C}$-morfismo de X em Y tal que $g \circ_{\mathbf{C}} j = f$;
- para cada objeto $f : X \to E$ de $\mathbf{C}/\mathbf{E}$, o morfismo identidade $id_f^{\mathbf{C}/\mathbf{E}}$ é o triplo de $\mathbf{C}$-morfismos (f, id_X, f);
- a composição $(f_2, h, f_3) \circ_{\mathbf{C}/\mathbf{E}} (f_1, g, f_2)$ dos morfismos $(f_1, g, f_2) : f_1 \to f_2$ e $(f_2, h, f_3) : f_2 \to f_3$ de $\mathbf{C}/\mathbf{E}$ é o morfismo $(f_1, h \circ_{\mathbf{C}} g, f_3) : f_1 \to f_3$.

Assim, a categoria dos objetos sobre E é a categoria representada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
q \arrow[loop left, "{(q,id_A,q)}"] \arrow[r, "{(q,i,p)}"] \arrow[d, "{(q,u,r)}"'] \arrow[dr, "{(q,q,id_E)}"'] & p \arrow[loop right, "{(p,id_B,p)}"] \arrow[d, "{(p,p,id_E)}"] \\
r \arrow[loop left, "{(r,id_D,r)}"] \arrow[r, "{(r,r,id_E)}"'] & id_E \arrow[loop right, "{(id_E,id_E,id_E)}"]
\end{tikzcd}$$

3.8. Considere um conjunto preordenado $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$. Para cada objeto s de $\mathbf{P}$, determine os objetos das categorias $\mathbf{P}/s$ e $s/\mathbf{P}$.

Seja $(P, \leq)$ um conjunto preordenado e $\mathbf{P}$ a categoria correspondente. Seja s um objeto de $\mathbf{P}$. Por definição de $\mathbf{P}/s$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Obj}(\mathbf{P}/s) &= \{f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}) \,|\, cod(f) = s\} \\
&= \{(a, s) \in P \times P \,|\, (a, s) \in \leq\} \\
&= \{(a, s) \in P \times P \,|\, a \leq s\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Obj}(s/\mathbf{P}) &= \{f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}) \,|\, dom(f) = s\} \\
&= \{(s, a) \in P \times P \,|\, (s, a) \in \leq\} \\
&= \{(s, a) \in P \times P \,|\, s \leq a\}.
\end{aligned}$$

3.9. (a) Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ as categorias definidas, respetivamente, pelos diagramas seguintes

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "i"] & V
\end{tikzcd}$$

Defina por meio de um diagrama a categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

Dadas categorias

$$\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), dom_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}) \text{ e } \mathbf{D} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{D}), \mathrm{Mor}(\mathbf{D}), dom_{\mathbf{D}}, cod_{\mathbf{D}}, \circ_{\mathbf{D}}, id^{\mathbf{D}}),$$

designa-se por categoria produto de $\mathbf{C}$ por $\mathbf{D}$, e representa-se por $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, a categoria

$$\mathbf{C} \times \mathbf{D} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D}), dom_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}, cod_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}, \circ_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}, id^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}})$$

definida do seguinte modo:

- os objetos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ são todos os pares (A, B), onde A é um objeto de $\mathbf{C}$ e B é um objecto de $\mathbf{D}$;
- os morfismos de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ são todos os pares (f, g), onde f é um morfismo de $\mathbf{C}$ e g é um morfismo de $\mathbf{D}$;
- para qualquer $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, $dom_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}(f, g) = (dom_{\mathbf{C}}(f), dom_{\mathbf{D}}(g))$ e $cod_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}(f, g) = (cod_{\mathbf{C}}(f), cod_{\mathbf{D}}(g))$;
- para cada objeto (A, B) de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, o morfismo identidade $id^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}_{(A,B)}$ é o par $(id^{\mathbf{C}}_A, id^{\mathbf{D}}_B)$;
- a composição $(f, g) \circ (f', g')$ dos morfismos (f, g) e (f', g') de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é definida componente a componente, isto é, $(f, g) \circ_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}} (f', g') = (f \circ_{\mathbf{C}} f', g \circ_{\mathbf{D}} g')$.

Por conseguinte, a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é a categoria definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A,U) \arrow[r, "(id_A,i)"] \arrow[d, "(f,id_U)"'] \arrow[dr, "(f,i)"] \arrow[dd, bend right=60, "(g,id_U)"'] \arrow[ddr, bend right=90, "(g,i)"'] & (A,V) \arrow[d, "(f,id_V)"] \arrow[dd, bend left=60, "(g,id_V)"] \\
(B,U) \arrow[r, "(id_B,i)"] \arrow[d, "(h,id_U)"'] \arrow[dr, "(h,i)"] & (B,V) \arrow[d, "(h,id_V)"] \\
(C,U) \arrow[r, "(id_C,i)"'] & (C,V)
\end{tikzcd}$$

3.10. Sejam $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}}, 1^{\mathcal{S}})$ monóides vistos como categorias $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$. O que é a categoria produto $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$?

Consideremos os monóides $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}}, 1^{\mathcal{S}})$ vistos como categorias

$$\mathbf{R} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R}), dom_{\mathbf{R}}, cod_{\mathbf{R}}, \circ_{\mathbf{R}}, id^{\mathbf{R}}) \text{ e } \mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{S}), \mathrm{Mor}(\mathbf{S}), dom_{\mathbf{S}}, cod_{\mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{S}}, id^{\mathbf{S}}),$$

respetivamente.

Então, considerando as categorias $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ definidas de acordo com o indicado em 3.1.(a), a categoria produto de $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ é a categoria

$$\mathbf{R} \times \mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}), dom_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}, cod_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}, id^{\mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{S}}),$$

onde

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) = \{(A, B) \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{R}) \text{ e } B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})\} = \{(\mathcal{R}, \mathcal{S})\}$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S}) = \{(f, g) \mid f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}) \text{ e } g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{S})\} = R \times S$;
- para qualquer $(r, s) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R} \times \mathbf{S})$, $dom_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}(r, s) = (\mathcal{R}, \mathcal{S})$ e $cod_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}(r, s) = (\mathcal{R}, \mathcal{S})$;
- $id^{\mathbf{R}\times\mathbf{S}}_{(\mathcal{R},\mathcal{S})} = (id^{\mathbf{R}}_{\mathcal{R}}, id^{\mathbf{S}}_{\mathcal{S}}) = (1_R, 1_S)$;
- para quaisquer $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in R \times S$, $(r_1, s_2) \circ_{\mathbf{R}\times\mathbf{S}} (r_2, s_2) = (r_1 \circ_{\mathbf{R}} s_1, r_2 \circ_{\mathbf{S}} s_2) = (r_1 \cdot^{\mathcal{R}} s_1, r_2 \cdot^{\mathcal{S}} s_2)$.

Logo, $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$ é a categoria correspondente ao produto direto dos monóides $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

3.11. (a) Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria $\mathbf{P}$. O que é a categoria dual $\mathbf{P}^{op}$?

Sejam $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e

$$\mathbf{P} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{P}), \mathrm{Mor}(\mathbf{P}), dom_{\mathbf{P}}, cod_{\mathbf{P}}, \circ_{\mathbf{P}}, id^{\mathbf{P}})$$

a categoria correspondente a $(P, \leq)$, onde:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{P}) = P$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}) = \leq$;
- $dom_{\mathbf{P}} : \leq \to P$ é a função que a cada par $(a,b) \in \leq$ associa o elemento a;
- $cod_{\mathbf{P}} : \leq \to P$ é a função que cada par $(a,b) \in \leq$ associa o elemento b;
- $id^{\mathbf{P}} : P \to \leq$ é a função definida por $id^{\mathbf{P}}(a) = (a,a)$;
- $\circ_{\mathbf{P}} : \{((a,b),(b,c)) \mid (a,b),(b,c) \in \leq\} \to \leq$ é a função definida por $(b,c) \circ_{\mathbf{P}} (a,b) = (a,c)$, para quaisquer $(a,b),(b,c) \in \leq$.

A categorial dual de $\mathbf{P}$ é a categoria

$$\mathbf{P}^{op} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}), \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}), dom_{\mathbf{P}^{op}}, cod_{\mathbf{P}^{op}}, \circ_{\mathbf{P}^{op}}, id^{\mathbf{P^{op}}}),$$

onde:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{P}) = P$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{P}) = \leq$;
- $dom_{\mathbf{P}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op})$ e $cod_{\mathbf{P}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op})$ são as funções definidas por $dom_{\mathbf{P}^{op}}(f) = cod_{\mathbf{P}}(f)$ e $cod_{\mathbf{P}^{op}}(f) = dom_{\mathbf{P}}(f)$, para qualquer $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{P})$;
- $\circ^{op}_{\mathbf{P}}$ é a função de $\{(f,g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \times \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op}) \mid cod(f) = dom(g)\}$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op})$ definida por $g \circ_{\mathbf{P}^{op}} f = f \circ_{\mathbf{P}} g$, para quaisquer $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P}^{op})$ tais que $cod(f) = dom(g)\}$;
- para qualquer $a \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, $id_a^{\mathbf{P}^{op}} = id_a^{\mathbf{P}} = (a,a)$.

Na sequência da definição anterior segue que, para quaisquer $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$,

$$\hom_{\mathbf{P}^{op}}(a,b) = \hom_{\mathbf{P}}(b,a) = \{(b,a)\} \cap \leq .$$

Logo, a categoria $\mathbf{P}^{op}$ é a categoria correspondente ao c.p.o dual de $(P, \leq)$, ou seja, é a categoria referente ao c.p.o. $(P, \leq^d)$, onde $\leq^d$ é a relação de ordem dual da relação $\leq$.

(b) Seja $\mathcal{R}$ um monóide visto como uma categoria $\mathbf{R}$. O que é a categoria dual $\mathbf{R}^{op}$?

Consideremos o monóide $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ visto como uma categoria

$$\mathbf{R} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R}), dom_{\mathbf{R}}, cod_{\mathbf{R}}, \circ_{\mathbf{R}}, id^{\mathbf{R}}).$$

Considerando a categoria $\mathbf{R}$ definida de acordo com o indicado em 3.1.(a), a categorial dual de $\mathbf{R}$ é a categoria $\mathbf{R}^{op} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op}), \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}), dom_{\mathbf{R}^{op}}, cod_{\mathbf{R}^{op}}, \circ_{\mathbf{R}^{op}}, id^{\mathbf{R^{op}}})$, onde:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{R}) = \{\mathcal{R}\}$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{R}) = R$;
- $dom_{\mathbf{R}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op})$ e $cod_{\mathbf{R}^{op}} : \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{R}^{op})$ são as funções definidas por $dom_{\mathbf{R}^{op}}(r) = cod_{\mathbf{R}}(r)$ e $cod_{\mathbf{R}^{op}}(r) = dom_{\mathbf{R}}(r)$, para qualquer $r \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{R})$;
- $\circ^{op}_{\mathbf{R}}$ é a função de $\{(r,s) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \times \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op}) \mid cod(r) = dom(s)\}$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op})$ definida por $s \circ_{\mathbf{R}^{op}} r = r \circ_{\mathbf{R}} s = r \cdot^{\mathcal{R}} s$, para quaisquer $r, s \in \mathrm{Mor}(\mathbf{R}^{op})$ tais que $cod(r) = dom(s)$;
- $id_{\mathcal{R}}^{\mathbf{R}^{op}} = id_{\mathcal{R}}^{\mathbf{R}} = 1_{\mathcal{R}}$.

Por conseguinte, a categoria $\mathbf{R}^{op}$ é a categoria correspondente ao monóide $\mathcal{R}' = (R; *; 1^{\mathcal{R}'})$ onde, $1^{\mathcal{R}'} = 1^{\mathcal{R}}$ e, para quaisquer $r, s \in R$, $s * r = r \cdot^{\mathcal{R}} s$.

3.12. Considere a categoria $\mathbf{C}$ representada ao lado.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "r"] \arrow[ddrr, bend right, "j"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[ddr, "i"'] & C \arrow[dd, shift right, "g"'] \arrow[dd, shift left, "f"] \\
& & \\
& & F
\end{tikzcd}$$

Indique, caso exista:

(a) Um monomorfismo de $\mathbf{C}$.

Comecemos por observar que se o diagrama representa uma categoria, então $q \circ p = r$, $i = g \circ q = f \circ q$, $j = i \circ p = g \circ r = f \circ r$.

Um $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to Y$ diz-se um monomorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Z \to X$,

$$h \circ s = h \circ t \Rightarrow s = t.$$

O morfismo $p : A \to B$ é um monomorfismo, pois, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Z \to A$,

$$p \circ s = p \circ t \Rightarrow s = t.$$

Note-se que o único $\mathbf{C}$-morfismo com codomínio A é o morfismo id_A. Logo, sendo s e t morfismos com codomínio A, tem-se $s = id_A$ e $t = id_A$.

(b) Um morfismo que não seja um epimorfismo de $\mathbf{C}$.

Um $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to Y$ diz-se um epimorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Y \to Z$,

$$s \circ h = t \circ h \Rightarrow s = t.$$

O morfismo q não é um epimorfismo, pois existem $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ tais que $f \neq g$ e $f \circ q = g \circ q$.

(c) Um bimorfismo de $\mathbf{C}$.

O morfismo j é um bimorfismo, pois é simultaneamente um monomorfismo e um epimorfismo.

O morfismo j é um monomorfismo, uma vez que, para quaisquer morfismos $s, t : Z \to A$

$$j \circ s = j \circ t \Rightarrow s = t.$$

De facto, se s e t são morfismos com codomínio A, tem-se $s = id_A = t$, pois id_A é o único morfismo com codomínio A.

O morfismo j também é um epimorfismo, uma vez que, para quaisquer morfismos $s, t : F \to Z$,

$$s \circ j = t \circ j \Rightarrow s = t.$$

Com efeito, se s e t são morfismos com domínio F, então $s = id_F = t$, pois id_F é o único morfismo com domínio F.

(d) Um isomorfismo de $\mathbf{C}$.

Um morfirmo $h : X \to Y$ diz-se um isomorfismo se existe um morfismo $h' : Y \to X$ tal que $h \circ h' = id_Y$ e $h' \circ h = id_X$.

Para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_X é um isomorfismo, uma vez que $id_X \circ id_X = id_X$.

3.13. Considere o semigrupo $\mathcal{N} = (\mathbb{N}_0, +)$ visto como uma categoria $\mathbf{N}$. Mostre que nesta categoria todo o morfismo é um bimorfismo e que 0 é o único isomorfismo.

Seja $\mathbf{C}$ uma categoria. Um $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to Y$ diz-se um:

- bimorfismo se for simultaneamente um monomorfismo e um epimorfismo.
- monomorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Z \to X$,

$$h \circ s = h \circ t \Rightarrow s = t.$$

- epimorfismo se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $s, t : Y \to Z$,

$$s \circ h = t \circ h \Rightarrow s = t.$$

- isomorfismo se existe $h' : Y \to X$ tal que $h \circ h' = id_Y$ e $h' \circ h = id_X$.

Considerando o semigrupo $\mathcal{N} = (\mathbb{N}_0, +)$ visto como uma categoria

$$\mathbf{N} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{N}), \mathrm{Mor}(\mathbf{N}), dom_{\mathbf{N}}, cod_{\mathbf{N}}, \circ_{\mathbf{N}}, id^{\mathbf{N}}),$$

o único objeto de $\mathbf{N}$ é $\mathcal{N}$; os morfismos de $\mathbf{N}$ são os elementos de $\mathbb{N}_0$ e cada um dos morfismos tem domínio e codomínio $\mathcal{N}$; a composição de morfismos é a operação binária do monóide; o morfismo identidade $id_{\mathcal{N}}$ é o inteiro 0.

Como, para quaisquer $n, i, j \in \mathbb{N}_0$,

$$n \circ_{\mathbf{N}} i = n \circ_{\mathbf{N}} j \Rightarrow n + i = n + j \Rightarrow i = j$$

e

$$i \circ_{\mathbf{N}} n = j \circ_{\mathbf{N}} n \Rightarrow i + n = j + n \Rightarrow i = j,$$

concluímos que todo o morfismo n é um monomorfismo e um epimorfismo. Portanto, todo o morfismo n de $\mathbf{N}$ é um bimorfismo.

Dado $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$, não existe $n' \in \mathbb{N}_0$ tal que $n \circ_{\mathbf{N}} n = id^{\mathbf{N}}$, uma vez que, para todo $n' \in \mathbb{N}_0$, $n + n' \neq 0$, logo n não é um isomorfismo. Uma vez que $0 \circ_{\mathbf{N}} 0 = 0 + 0 = 0 = id_{\mathbf{N}}$, então 0 é um isomorfismo. Assim, 0 é o único isomorfismo de $\mathbf{N}$.

3.14. Considere o seguinte diagrama numa categoria $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
A_7 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A_8 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& A_5 \arrow[rr, crossing over] & & A_6 \arrow[dd] \\
A_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_4 \arrow[dr] & \\
& A_1 \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over] & & A_2
\end{tikzcd}$$

Suponha que todas as faces do "cubo", com excepção da face superior, são comutativas. Mostre que se o morfismo $A_6 \to A_2$ é um monomorfismo, então a face superior também é comutativa.

Sejam

$$\begin{array}{llll}
f : A_7 \to A_8, & g : A_5 \to A_6, & h : A_7 \to A_5, & i : A_8 \to A_6, \\
k : A_7 \to A_3, & l : A_8 \to A_4, & m : A_3 \to A_1, & n : A_4 \to A_2, \\
p : A_5 \to A_1, & q : A_6 \to A_2, & r : A_1 \to A_2, & s : A_3 \to A_4.
\end{array}$$

Então temos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_7 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "k"'] & & A_8 \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "l"] & \\
& A_5 \arrow[rr, crossing over, "g"'] & & A_6 \arrow[dd] \\
A_3 \arrow[rr] \arrow[dr, "m"'] & & A_4 \arrow[dr, "n"] & \\
& A_1 \arrow[rr] \arrow[from=uu, crossing over, "p"] & & A_2
\end{tikzcd}$$

Admitindo que todas as faces do "cubo", com excepção da face superior, são comutativas, temos

$$\begin{array}{lll}
p \circ h = m \circ k, & s \circ k = l \circ f, & q \circ i = n \circ l \\
q \circ g = r \circ p, & r \circ m = n \circ s. &
\end{array}$$

Então, atendendo a que

$$\begin{aligned}
r \circ m = n \circ s \quad & \Rightarrow r \circ m \circ k = n \circ s \circ k \\
& \Rightarrow r \circ p \circ h = n \circ l \circ f \\
& \Rightarrow q \circ g \circ h = q \circ i \circ f \\
& \Rightarrow g \circ h = i \circ f \qquad\qquad (q \text{ é um monomorfismo})
\end{aligned}$$

concluímos que $g \circ h = i \circ f$ e, portanto, a face superior do "cubo" também é comutativa.

3.15. Considere um conjunto preordenado $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$. Justifique que todos os morfismos de $\mathbf{P}$ são bimorfismos. Indique que condições devem ser satisfeitas pela relação binária do conjunto preordenado $(P, \leq)$ de forma a que categoria $\mathbf{P}$ seja balanceada?

Considerando um conjunto preordenado $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$, os objetos de $\mathbf{P}$ são os elementos de P e os morfismos desta categoria são os elementos de $\leq$. Dados $(a,b),(b,c) \in \leq$, a composição de (b,c) e (a,b) é definida por $(b,c) \circ (a,b) = (a,c)$. Para cada $a \in P$, o morfismo identidade id_a é o par (a,a).

Um morfismo de $\mathbf{P}$ é um bimorfismo se é simultaneamente um monomofismo e um epimorfismo.

Um morfismo $f : a \to b$ de $\mathbf{P}$ é:

- um monomorfismo se, para quaisquer morfismos $g, g' : c \to a$

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'.$$

- um epimorfismo se, para quaisquer morfismos $g, g' : b \to c$

$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g'.$$

Seja $f : a \to b$ um morfismo de $\mathbf{P}$. Considerando que, para todo $a, c \in P$, existe no máximo um morfismo $c \to a$, o morfismo $f : a \to b$ é claramente um monomorfismo. Para todo $b, c \in P$ também existe no máximo um morfismo $b \to c$, pelo que o morfismo $f : a \to b$ é um epimofimo. Logo, $f : a \to b$ é um bimorfismo.

Dado um c.p.o. $(P\ \leq)$, a categoria $\mathbf{P}$ é balanceada se todo o bimorfismo é um isomorfismo. Um morfismo $f : a \to b$ é um isomorfismo se existe um morfismo $g : b \to a$ tal que $f \circ g = id_b$ e $g \circ f = id_a$.

Então, considerando que todo o morfismo de $\mathbf{P}$ é um bimorfismo, a categoria $\mathbf{P}$ é balanceada se todo o seu morfismo é um isomorfismo. Assim, $\mathbf{P}$ é balanceada se, para quaisquer $(a,b) \in \leq$, existe $(b,a) \in \leq$ tal que

$$(a,b) \circ (b,a) = id_b \text{ e } (b,a) \circ (a,b) = id_a.$$

Considerando que, para quaisquer $a, b \in P$,

$$(a,b) \circ (b,a) = (b,b) = id_b \text{ e } (b,a) \circ (a,b) = (a,a) = id_a,$$

das condições anteriores resulta que a categoria $\mathbf{P}$ é balanceada se e só se, para quaisquer $a, b \in P$,

$$(a,b) \in \leq \Rightarrow (b,a) \in \leq,$$

i.e., se e só se a relação $\leq$ é uma relação de equivalência.

3.16. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se f e g são invertíveis à esquerda (respetivamente, direita), então $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita).

Admitamos que f e g são invertíveis à esquerda. Então existem $i : B \to A$ e $j : C \to B$ tais que $i \circ f = id_A$ e $j \circ g = id_B$. Pretendemos mostrar que $g \circ f : A \to C$ é invertível à esquerda, ou seja, pretendemos mostrar que existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Seja $h = i \circ j$. Considerando que $i \circ j \in \hom(C, A)$ e

$$(i \circ j) \circ (g \circ f) = i \circ (j \circ g) \circ f = i \circ id_B \circ f = i \circ f = id_A,$$

concluímos que $g \circ f$ é invertível à esquerda.

Por dualidade segue que se f e g são invertíveis à direita, então $g \circ f$ também é invertível à direita.

(b) Se $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita), então f é invertível à esquerda (respetivamente, g é invertivel à direita).

Admitamos que $g \circ f : A \to C$ é invertível à esquerda. Então existe um morfismo $i : C \to A$ tal que $i \circ (g \circ f) = id_A$. Então $(i \circ g) \circ f = id_A$. Logo f é invertível à esquerda, pois existe $h = i \circ g : B \to A$ tal que $h \circ f = id_A$.

Por dualidade segue que se $g \circ f$ é invertível à direita, então g é invertivel à direita.

3.17. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.

Admitamos que f é invertível à direita. Então existe $h : B \to A$ tal que $f \circ h = id_B$. Então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : C \to A$,

$$\begin{aligned} i \circ f = j \circ f \quad &\Rightarrow \quad (i \circ f) \circ h = h \circ (j \circ f) \circ h \\ &\Rightarrow \quad i \circ (f \circ h) = j \circ (f \circ h) \\ &\Rightarrow \quad j \circ id_B = i \circ id_B \\ &\Rightarrow \quad i = j. \end{aligned}$$

Logo, f é um epimorfismo.

3.18. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então g é um monomorfismo.

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$ tais que $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita. Uma vez que f é invertível à direita existe $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = id_B$. Então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i : D \to B$ e $j : D \to B$,

$$\begin{aligned} g \circ i = g \circ j \quad &\Rightarrow \quad g \circ id_B \circ i = g \circ id_B \circ j && (id_B \circ h = h, \text{ para qualquer morfismo } h : D \to B) \\ &\Rightarrow \quad g \circ (f \circ f') \circ i = g \circ (f \circ f') \circ j && (f' \text{ é o inverso direito de } f) \\ &\Rightarrow \quad (g \circ f) \circ f' \circ i = (g \circ f) \circ f' \circ j && (\text{associatividade}) \\ &\Rightarrow \quad f' \circ i = f' \circ j && (g \circ f \text{ é um monomorfismo}) \\ &\Rightarrow \quad f \circ f' \circ i = f \circ f' \circ j && (\circ \text{ é uma função}) \\ &\Rightarrow \quad id_B \circ i = id_B \circ j && (f' \text{ é o inverso direito de } f) \\ &\Rightarrow \quad i = j && (id_B \circ h = h, \text{ para qualquer morfismo } h : D \to B). \end{aligned}$$

3.19. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo.

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$ tais que f e g são isomorfismos. Então existem $f^{-1} : B \to A$ e $g^{-1} : C \to B$ tais que $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$, $g \circ g^{-1} = id_C$, $g^{-1} \circ g = id_B$. Pretendemos mostrar que $g \circ f : A \to C$ é um isomorfismo, ou seja, temos de mostrar que existe $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$ e $(g \circ f) \circ h = id_C$.

Seja $h = f^{-1} \circ g^{-1}$. Então $h \in \hom(C, A)$ e

$$\begin{aligned} &h \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_B \circ f = f^{-1} \circ f = id_A, \\ &(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_C \end{aligned}$$

Logo, $g \circ f$ é invertível à direita e à esquerda, ou seja, $g \circ f$ é um isomorfismo.

3.20. Mostre que as seguintes condições sobre uma categoria $\mathbf{C}$ são equivalentes:

(I1) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à direita;

(I2) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à esquerda;

(I3) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível.

(I1) $\Rightarrow$ (I2) Admitamos que todo o morfismo de $\mathbf{C}$ é invertível à direita. Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo. Mostremos que f é invertível à esquerda. Por hipótese, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f' : B \to A$ tal que $f \circ f' = id_B$. Considerando que f' também é invertível à direita existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f'' : A \to B$ tal que $f' \circ f'' = id_A$. Logo $f' \circ f \circ f' \circ f'' = f' \circ id_B \circ f''$, donde resulta $f' \circ f = id_A$. Portanto, f é invertível à esquerda.

(I2) $\Rightarrow$ (I3) Admitamos que todo o morfismo de $\mathbf{C}$ é invertível à esquerda. Por dualidade da prova anterior segue que todo o morfismo de $\mathbf{C}$ também é invertível à direita. Logo, todo o morfismo é invertível.

(I3) $\Rightarrow$ (I1) Imediato, pois todo o morfismo invertível é um morfismo invertível à direita (e à esquerda).

3.21. Seja $f : A \to B$ um isomorfismo numa categoria $\mathbf{C}$. Para cada objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, mostre que a função $f_C : \hom(B, C) \to \hom(A, C)$ definida por $f_C(g) = g \circ f$ é uma bijeção.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um isomorfismo em $\mathbf{C}$. Considerando que f é um isomorfismo, existe $f^{-1} : B \to A \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ tal que $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$. Pretendemos mostrar que, para cada objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, a função $f_C : \hom(B,C) \to \hom(A,C)$ definida por $f_C(g) = g \circ f$ é injetiva e sobrejetiva.

- f_C injetiva

Para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_1 : B \to C$ e $g_2 : B \to C$,

$$\begin{aligned}
f_C(g_1) = f_C(g_2) \quad &\Rightarrow \quad g_1 \circ f = g_2 \circ f \\
&\Rightarrow \quad (g_1 \circ f) \circ f^{-1} = (g_2 \circ f) \circ f^{-1} \\
&\Rightarrow \quad g_1 \circ (f \circ f^{-1}) = g_2 \circ (f \circ f^{-1}) \\
&\Rightarrow \quad g_1 \circ id_B = g_2 \circ id_B \\
&\Rightarrow \quad g_1 = g_2.
\end{aligned}$$

Logo f_C é injetiva.

- f_C sobrejetiva

Também é simples verificar que f_C é sobrejetiva. De facto, para qualquer $h \in \hom(A,C)$, existe $g = h \circ f^{-1} \in \hom(B,C)$ tal que

$$f_C(g) = f_C(h \circ f^{-1}) = (h \circ f^{-1}) \circ f = h \circ (f \circ f^{-1}) = h \circ id_B = h.$$

Portanto, f_C é sobrejetiva.

3.22. Mostre que se $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ são duas categorias com objetos terminais (iniciais), então $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ também tem objetos terminais (iniciais).

Sejam $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ categorias e T_1 e T_2 são objetos terminais de $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$, respetivamente. Mostremos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

Uma vez que T_1 é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1$, então $T_1 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$, existe um e um só $\mathbf{C}_1$-morfismo $f : X \to T_1$. Como T_2 é um objeto terminal de $\mathbf{C}_2$, então $T_2 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$ e, para cada $Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$, existe um e um só $\mathbf{C}_2$-morfismo $g : Y \to T_2$.

Como $T_1 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1)$ e $T_2 \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_2)$, então $(T_1, T_2) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$. Mostremos que, para todo para $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$, existe um e um só $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). Como $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2)$, então X é um objeto de $\mathbf{C}_1$ e Y é um objeto de $\mathbf{C}_2$. Logo, existe um $\mathbf{C}_1$-morfismo $f : X \to T_1$ e existe um $\mathbf{C}_2$-morfismo $g : Y \to T_2$. Assim, (f, g) é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). Além disso, é simples verificar que (f, g) é o único $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). De facto, se (f', g') é um $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2), então f' é um $\mathbf{C}_1$-morfismo de X em T_1 e g' é um $\mathbf{C}_2$-morfismo de Y em T_2. Logo, atendendo a que existe um único morfismo de X em T_1 e existe um único morfismo de Y em T_2, segue que $f' = f$ e $g' = g$. Portanto, $(f', g') = (f, g)$. Desta forma, provámos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$.

3.23. Mostre que se uma categoria $\mathbf{C}$ tem objeto zero, então todo o objeto inicial (terminal) de $\mathbf{C}$ é objeto zero. Deduza que a categoria **Set** não tem objetos zero.

Seja 0 um objeto zero de $\mathbf{C}$. Por definição de objeto zero, 0 é um objeto inicial e terminal. Seja I um objeto inicial de $\mathbf{C}$. Pretendemos mostrar que I é um objeto zero, ou seja, pretendemos mostrar que é um objeto inicial e terminal. Uma vez que I é um objeto inicial, resta provar que I é um objeto terminal, ou seja, temos de provar que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $X \to I$.
Seja X um objeto de $\mathbf{C}$. Uma vez que 0 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo $f : X \to 0$. Considerando que 0 é um objeto inicial, existe um e um só morfismo $g : 0 \to I$. Logo $g \circ f : X \to I$ é um $\mathbf{C}$-morfismo

$$X \xrightarrow{f} O \xrightarrow{g} I$$

e, portanto, existe um $\mathbf{C}$-morfismo de X em I.
Mostremos, agora, que $g \circ f$ é o único $\mathbf{C}$-morfismo de X em I. Seja $h : X \to I$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Pretendemos mostar que $h = g \circ f$. Uma vez que I é um objeto inicial, existe um e um só morfismo $g' : I \to O$. Assim, temos o diagrama seguinte na categoria $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h"] & O \arrow[r, "g"] & I \arrow[l, bend left, "g'"]
\end{tikzcd}$$

e $g \circ g' : I \to I$ é um $\mathbf{C}$-morfismo. Uma vez que $g \circ g' : I \to I$ e $id_I : I \to I$ são $\mathbf{C}$-morfismos com domínio I, com o mesmo codomínio e I é um objeto inicial, tem-se $g \circ g' = id_I$. Por outro lado, como $g' \circ g \circ f : X \to 0$ e $g' \circ h : X \to 0$ são $\mathbf{C}$-morfismos com o mesmo domínio, com codomínio 0 e 0 é um objeto terminal, temos $g' \circ g \circ f = g' \circ h$. Desta igualdade segue que $g \circ g' \circ g \circ f = g \circ g' \circ h$, donde resulta $g \circ f = h$. Desta forma, provámos que existe um único morfismo de X em I. Por conseguinte, I é também um objeto terminal.
Logo I é um objeto zero.

Por dualidade conclui-se que se uma categoria $\mathbf{C}$ tem objeto zero, então todo o objeto terminal de $\mathbf{C}$ é um objeto zero.

Na categoria **Set**, o conjunto $\emptyset$ é um objeto inicial mas não é um objeto terminal (por exemplo, não existe qualquer morfismo de $\{1\}$ em $\emptyset$). Logo, a categoria **Set** não tem objetos zero (caso contrário, $\emptyset$ também seria um objeto zero).

3.24. Seja $\mathbf{K}$ a categoria cujos objetos são os triplos (X, e, f), onde X é um conjunto, $e \in X$ e $f : X \to X$ é uma função; dados objetos (X, e, f), (X', e', f') de $\mathbf{K}$, um morfismo de (X, e, f) em (X', e', f') é uma função $\sigma : X \to X'$ tal que $\sigma(e) = e'$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ X \arrow[r, "\sigma"'] & X' \end{tikzcd}$$

é comutativo. Seja $s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida por $s(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{N}_0$. Mostre que $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ é um objeto inicial de $\mathbf{K}$.

No sentido de provar que $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ é um objeto inicial de $\mathbf{K}$, temos de mostar que, para todo o objeto (X, e, f) de $\mathbf{K}$, existe um e um só morfismo de $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ em (X, e, f).

Ora, dado um objeto (X, e, f) de $\mathbf{K}$, $\sigma : \mathbb{N}_0 \to X$ é um morfismo de $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ em (X, e, f) se e só se $\sigma(0) = e$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{N}_0 \arrow[r, "\sigma"'] & X \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., se e só se $\sigma(0) = e$ e, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\sigma(n+1) = \sigma(s(n)) = f(\sigma(n)).$$

Se considerarmos a correspondência σ de $\mathbb{N}_0$ em X definida por

$$\begin{array}{l} \sigma(0) = e, \\ \sigma(n+1) = f(\sigma(n)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0, \end{array}$$

prova-se que σ é uma função bem definida de $\mathbb{N}_0$ em X. Logo, existe um morfismo de $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ em (X, e, f).
Resta provar a unicidade deste morfismo. Se admitirmos que existe um outro morfismo δ de $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ em (X, e, f), temos $\delta(0) = e$ e, para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\delta(n+1) = f(\sigma(n)) = f(\delta(n)).$$

Por indução sobre n, prova-se que, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma(n) = \delta(n)$ e, portanto, $\sigma = \delta$.
Assim, $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ é um objeto inicial da categoria $\mathbf{K}$.

3.25. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Mostre que se $f : T \to I$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.

Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Seja $f : T \to I$ um $\mathbf{C}$-morfismo. Uma vez que I é um objeto inicial, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $f' : I \to T$.

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, bend left, "f"] & I \arrow[l, bend left, "f'"]
\end{tikzcd}
$$

Logo $f \circ f' : I \to I$ e $f' \circ f : T \to T$ são $\mathbf{C}$-morfismos. Considerando que $f \circ f' : I \to I$ e $id_I : I \to I$ são $\mathbf{C}$-morfismos com domínio I, com o mesmo codomínio e I é um objeto inicial, segue que $f \circ f' = id_I$. Por outro lado, como $f' \circ f : T \to T$ e $id_T : T \to T$ são $\mathbf{C}$-morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, temos $f' \circ f = id_T$. Logo, f é um isomorfismo.

Uma vez que T é um objeto terminal e $I \cong T$, então I também é um objeto terminal. Logo I é um objeto zero. Como I é um objeto inicial e $T \cong I$, então T também é um objeto inicial e, portanto, T é um objeto zero.

3.26. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte

$$
\mathbf{C} \quad
\begin{tikzcd}
& R \arrow[loop above, "\mathrm{id}_R"] & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_P"] & & Q \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "j"] \arrow[ll, shift right, "v"'] \arrow[ll, shift left, "u"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Q"] \\
& S \arrow[loop below, "\mathrm{id}_S"] &
\end{tikzcd}
$$

Diga, justificando, se:

(a) A categoria $\mathbf{C}$ tem objetos iniciais e objetos terminais.

Considerando que o diagrama representa uma categoria, temos $i = f \circ u = f \circ v$, $j = g \circ u = g \circ v$.

Nenhum dos objetos de $\mathbf{C}$ é um objeto inicial ou terminal.

O objeto R não é inicial, pois não existe morfismo de R em S. O objeto S não é inicial, pois não existe morfismo de S em R. O objeto P não é inicial, pois não existe morfismo de P em Q. O objeto Q não é inicial, pois existe mais do que um morfismo de Q em P.

O objeto R não é terminal, pois não existe morfismo de S em R. O objeto S não é terminal, pois não existe morfismo de R em S. O objeto P não é terminal, pois existe mais do que um morfismo de Q em P. O objeto Q não é terminal, pois não existe morfismo de P em Q.

(b) $(P, (f, g))$ é um produto de R e S.

O par $(P, (f, g)$ é um produto de R e S se:

i. $f \in \hom_{\mathbf{C}}(P, R)$, $g \in \hom_{\mathbf{C}}(P, S)$;

ii. para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f_1 : X \to R$ e $f_2 : X \to S$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $u : X \to P$ tal que $f \circ u = f_1$ e $g \circ u = f_2$.

Por definição de $\mathbf{C}$, a condição i. verifica-se. Porém, a condição ii. não é satisfeita, pois $i : Q \to R$, $j : Q \to S$ são $\mathbf{C}$-morfismos e existem $u : Q \to P, v : Q \to P \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ tais que $u \neq v$, $f \circ u = i$, $g \circ u = j$, $f \circ v = i$ e $g \circ v = j$.

Logo, o par $(P, (f, g))$ não é um produto de R e S.

(c) $(S, (g, j))$ é um coproduto de P e Q.

O par $(S, (g, j)$ é um coproduto de P e Q se:

i. $g \in \hom_{\mathbf{C}}(P, S)$ e $j \in \hom_{\mathbf{C}}(Q, S)$;

ii. para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f_1 : P \to X$ e $f_2 : Q \to X$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $k : S \to X$ tal que $k \circ g = f_1$ e $k \circ j = f_2$.

Por definição de $\mathbf{C}$, a condição i. é imediata. No entanto, existem $P \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $\mathbf{C}$-morfismos $id_P : P \to P$ e $u : Q \to P$ para os quais não existe qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k : S \to P$ tal que $k \circ g = id_P$ e $k \circ j = u$.

3.27. Dados objetos A e B da categoria **Set**, seja $A \times B = \{(a,b) \,|\, a \in A, b \in B\}$ e sejam p_A e p_B as funções definidas por

$$\begin{array}{rcl} p_A : A \times B & \to & A \\ (a,b) & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} p_B : A \times B & \to & B \\ (a,b) & \mapsto & b \end{array}.$$

Mostre que $(A \times B, (p_A, p_B))$ é um produto dos objetos A e B.

O par $(A \times B, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B se:

(i) p_A é um **Set**-morfismo de $A \times B$ em A, p_B é um **Set**-morfismo de $A \times B$ em B;

(ii) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\textbf{Set})$ e para quaisquer **Set**-morfismos $f_A : X \to A$ e $f_B : X \to B$, existe um e um só morfismo $u : X \to A \times B$ tal que $p_A \circ u = f_A$ e $p_B \circ u = f_B$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Considerando que p_A é uma função de $A \times B$ em A e p_B é uma função de $A \times B$ em B, então, pela definição da categoria **Set**, $p_A \in \hom_{\textbf{Set}}(A \times B, A)$ e $p_B \in \hom_{\textbf{Set}}(A \times B, B)$.

(ii) Admitamos que existem $X \in \mathrm{Obj}(\textbf{Set})$ e **Set**-morfismos f_A e f_B tais que $f_A \in \hom_{\textbf{Set}}(X, A)$ e $f_B \in \hom_{\textbf{Set}}(X, B)$.

Por definição da categoria **Set**, f_A e f_B são funções e, por conseguinte, a correspondência u de X em $A \times B$ definida por $u(x) = (f_A(x), f_B(x))$ é uma função de X em $A \times B$. De facto, como f_A e f_B são funções, para todo $x \in X$, temos $f_A(x) \in A$ e $f_B(x) \in B$ e, portanto, $(f_A(x), f_B(x)) \in A \times B$. Além disso, para quaisquer $x, y \in X$,

$$\begin{array}{rcll} x = y & \Rightarrow & f_A(x) = f_A(y) \text{ e } f_B(x) = f_B(y) & (f_A \text{ e } f_B \text{ são funções}) \\ & \Rightarrow & (f_A(x), f_B(x)) = (f_A(y), f_B(y)) & \\ & \Rightarrow & u(x) = u(y). & \end{array}$$

É simples verificar que, considerando a função u definida desta forma, o diagrama anterior é comutativo. Com efeito, como $p_A \circ u$ e f_A são funções com o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e, para todo $x \in X$, $(p_A \circ u)(x) = p_A(f_A(x), f_B(x)) = f_A(x)$, temos $p_A \circ u = f_A$. De modo anólogo, prova-se que $p_B \circ u = f_B$.
O morfismo u é o único morfismo de X em $A \times B$ tal que $p_A \circ u = f_A$ e $p_B \circ u = f_B$. De facto, se admitirmos que $v : X \to A \times B$ é um morfismo tal que $p_A \circ v = f_A$ e $p_B \circ v = f_B$, segue que, para todo $x \in X$, $p_A(v(x)) = f_A(x)$ e $p_B(v(x)) = f_B(x)$, pelo que $v(x) = (f_A(x), f_B(x)) = u(x)$. Então, considerando que u e v são funções com o mesmo domínio e conjunto de chegada, concluímos que $u = v$.

De (i) e (ii) conclui-se que $A \times B$ é um produto de A e B.

3.28. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto terminal T. Para qualquer objeto A de $\mathbf{C}$, mostre que:

(a) o par $(A, (\xi^A, id_A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \to T$, é um produto de T e A.

O par $(A, (\xi^A, id_A))$ é um produto de T e A se:

(i) ξ^A é um morfismo de A em T, id_A é um morfismo de A em A;

(ii) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to T$ e $g : X \to A$, existe um e um só morfismo $u : X \to A$ tal que $\xi^A \circ u = f$ e $id_A \circ u = g$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g"] & \\ T & A \arrow[l, "\xi^A"] \arrow[r, "id_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Provemos as condições (i) e (ii).

(i) Imediato pela definição de ξ^A e de id_A.

(ii) Considerando $u = g$, é imediato que $id_A \circ u = g$. Também se tem $\xi^A \circ u = f$. De facto, como $\xi^A \circ u$ e f são morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é objeto terminal, segue que

$\xi^A \circ u = f$.
O morfismo u é o único morfismo tal que $id_A \circ u = g$ e $\xi^A \circ u = f$; se assumirmos que $v : X \to A$ é um morfismo tal que $id_A \circ v = g$ e $\xi^A \circ v = f$, então temos $v = g = u$.

De (i) e (ii) concluímos que $(A, (\xi^A, \mathrm{id}_A))$ é um produto de T e A.

(b) o par $(A, (\mathrm{id}_A, \xi^A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \to T$, é um produto de A e T.

A prova é similar à da alínea anterior.

(c) Se $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A e $(A \times T, ({p'}_1, {p'}_2))$ é um produto de A e T, então $T \times A \cong A \cong A \times T$.

Consideremos que $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A. Então

(1) p_1 é um morfismo de $T \times A$ em T, p_2 é um morfismo de $T \times A$ em A;

(2) para qualquer objeto Y de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : Y \to T$ e $g : Y \to A$, existe um e um só morfismo $u : Y \to T \times A$ tal que $p_1 \circ u = f$ e $p_2 \circ u = g$.

Da alínea (a) também sabemos que $(A, (\xi^A, \mathrm{id}_A))$ é um produto de T e A, pelo que são satisfeitas as condições seguintes:

(i) ξ^A é um morfismo de A em T, id_A é um morfismo de A em A;

(ii) para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to T$ e $g : X \to A$, existe um e um só morfismo $v : X \to A$ tal que $\xi^A \circ v = f$ e $id_A \circ v = g$.

De (ii), e considerando $X = T \times A$, $f = p_1$ e $g = p_2$, sabe-se que existe um e um só morfismo $v : T \times A \to A$ tal que $\xi^A \circ v = p_1$ e $id_A \circ v = p_2$. De (2), e considerando $Y = A$, $f = \xi^A$ e $g = id_A$, sabe-se que existe um e um só morfismo $u : A \to T \times A$ tal que $p_1 \circ u = \xi^A$ e $p_2 \circ u = id_A$.

Das igualdades anteriores resulta que $p_1 \circ u \circ v = p_1$ e $p_2 \circ u \circ v = p_2$.

$$\begin{tikzcd}
& T \times A \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
T & A \arrow[l, "\xi^A"'] \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "u"] & A \\
& T \times A \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Então, considerando que também temos $p_1 \circ id_{A\times T} = p_1$ e $p_2 \circ id_{A\times T} = p_2$, segue que $u \circ v = id_{A\times T}$, pois $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A, .

Das igualdades $\xi^A \circ v = p_1$, $id_A \circ v = p_2$, $p_1 \circ u = \xi^A$ e $p_2 \circ u = id_A$ também resulta que $id_A \circ v \circ u = id_A$ e $\xi^A \circ v \circ u = \xi^A$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\xi^A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "id_A"] & \\
T & T \times A \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "v"] & A \\
& A \arrow[ul, "\xi^A"] \arrow[ur, "id_A"'] &
\end{tikzcd}$$

Então, considerando que também temos $id_A \circ id_A = id_A$, $\xi^A \circ id_A = \xi^A$ e $(A, (\xi^A, \mathrm{id}_A))$ é um produto de T e A, segue que $v \circ u = id_A$.

Como $u \circ v = id_{T\times A}$ e $v \circ u = id_A$, então $u : A \to T \times A$ é um isomorfismo e, portanto, $A \cong T \times A$.

3.29. Na categoria **Set**, sejam A_1, A_2 conjuntos, $A_1 + A_2$ o conjunto definido por

$$A_1 + A_2 = \{(a, 1) : a \in A_1\} \cup \{(b, 2) \,|\, b \in A_2\}$$

e $i_1 : A_1 \to A_1 + A_2$, $i_2 : A_2 \to A_1 + A_2$ as funções definidas por

$$i_1(a) = (a, 1) \quad \text{e} \quad i_2(b) = (b, 2),$$

para quaisquer $a \in A_1$ e $b \in A_2$. Mostre que $(A_1 + A_2, (i_1, i_2)$ é um coproduto de A_1 e A_2.

Para provar que $(A_1+A_2,(i_1,i_2))$ é um coproduto de A_1 e A_2, temos de provar que, para qualquer conjunto Z e quaisquer funções $g_1 : A_1 \to Z$ e $g_2 : A_2 \to Z$, existe uma e uma só função $v : A_1 + A_2 \to Z$ tal que o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"'] & A_1+A_2 \arrow[u, "v"] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

comuta.

Sejam $g_1 : A_1 \to Z$ e $g_2 : A_2 \to Z$ funções e consideremos a função $v : A_1 + A_2 \to Z$ definida por

$$v(x,y) = \begin{cases} g_1(x) \text{ se } y = 1 \\ g_2(x) \text{ se } y = 2 \end{cases}.$$

A função v está bem definida, pois, para qualquer $(x, y) \in A_1 + A_2$, existe $z \in Z$ tal que $v(x, y) = z$. De facto:

- Se $(x, y) \in A_1 + A_2$, temos $((x, y) = (x, 1)$ e $x \in A_1)$ ou $((x, y) = (x, 2)$ e $x \in A_2)$.
  Se $(x, y) = (x, 1)$, temos $g_1(x) \in Z$, pois $x \in A_1$ e g_1 é uma função de A_1 em Z; portanto, existe $z = g_1(x)$ tal que $v(x, y) = z$.
  Se $(x, y) = (x, 2)$, temos $g_2(x) \in Z$, pois $x_2 \in A_2$ e g_2 é uma função de A_2 em Z e, portanto, existe $z = g(x)$ tal que $v(x, y) = z$.
- Para quaisquer $(x, y),(x', y') \in A_1 + A_2$, se $(x, y) = (x', y')$, temos $x = x'$ e $y = y'$.
  Se $y = y' = 1$, então $v(x, y) = g_1(x)$, $v(x', y') = g_1(x')$. Logo, $v(x, y) = v(x', y')$, pois $x = x'$ e g_1 é uma função e, portanto, $g_1(x) = g_1(x')$.
  Se $y = y' = 2$, então $v(x, y) = g_2(x)$, $v(x', y') = g_2(x')$. Logo, $v(x, y) = v(x', y')$, pois $x = x'$ e g_2 é uma função e, portanto, $g_2(x) = g_2(x')$.
  Assim, $v(x, y) = v(x', y')$.

A função $v : A_1+A_2 \to Z$ definida anteriormente satisfaz as igualdades $v\circ i_1 = g_1$ e $v\circ i_2 = g_2$. De facto,

- as funções $v \circ i_1$ e g_1 são iguais, pois têm o mesmo domínio e conjunto de chegada e, para todo $x \in A_1$, $(v \circ i_1)(x) = v((x, 1)) = g_1(x)$;
- as funções $v \circ i_2$ e g_2 são iguais, pois têm o mesmo domínio e conjunto de chegada e, para todo $x \in A_2$, $(v \circ i_2)(x) = v((x, 1)) = g_2(x)$.

Resta mostrar que v é a única função de $A_1 + A_2$ em Z tal que $v \circ i_1 = g_1$ e $v \circ i_2 = g_2$. Ora, se $v' : A_1 + A_2 \to Z$ é uma função tal que $v \circ i_1 = g_1$ e $v \circ i_2 = g_2$, temos $v = v'$, pois

- as funções v e v' têm o mesmo domínio e conjunto de chegada;
- para todo $(x, y) \in A_1 + A_2$, temos $v(x, y) = v'(x, y)$, uma vez que:
  – se $y = 1$, então
$$\begin{aligned} v(x,y) = v(x,1) &= v(i_1(x)) \\ &= (v\circ i_1)(x) \\ &= g_1(x) = (v'\circ i_1)(x) \\ &= v'(i_1(x)) \\ &= v'(x,1) \\ &= v'(x,y); \end{aligned}$$
  – se $y = 2$, então
$$\begin{aligned} v(x,y) = v(x,2) &= v(i_2(x)) \\ &= (v\circ i_1)(x) \\ &= g_2(x) = (v'\circ i_2)(x) \\ &= v'(i_2(x)) \\ &= v'(x,2) \\ &= v'(x,y). \end{aligned}$$

Desta forma, provámos que $(A_1 + A_2,(i_1, i_2))$ é um coproduto de A_1 e A_2.

3.30. Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$, admitindo coproduto $(A + B,(i_A, i_B))$ e tais que $\hom_{\mathbf{C}}(B, A) \neq \emptyset$. Mostre que i_A é invertível à esquerda e, portanto, é um monomorfismo.

Admitamos que A e B são objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $(A+B,(i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B e $\hom_{\mathbf{C}}(B, A) \neq \emptyset$.

Considerando que $\hom_{\mathbf{C}}(B, A) \neq \emptyset$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : B \to A$. Atendendo a que $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $\mathbf{C}$ é uma categoria, $id_A : A \to A$ também é um morfismo de $\mathbf{C}$. Então, atendendo a que $(A+B, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, existe um e um só morfismo $u : A+B \to A$ tal que $u \circ i_A = id_A$ e $u \circ i_B = f$.

$$\begin{tikzcd} & A & \\ A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[r, "i_A"'] & A+B \arrow[u, "u"] & B \arrow[ul, "f"'] \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

Uma vez que $u \circ i_A = id_A$, concluímos que i_A é invertível à esquerda. Todo o morfismo invertível à esquerda é um monomorfismo e, portanto, i_A é um monomorfismo.

3.31. Na categoria $\mathbf{Set}$, sejam $f, g : A \to B$ funções e seja $I = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$. Mostre que o par (I, i), onde i é a função inclusão de I em A

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f e g.

O par (I, i) é um igualizador de f e g se:

(1) i é um **Set**-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

(2) para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer morfismo $j : X \to A$ tal que $f \circ j = g \circ j$, existe um, e um só, morfismo, $u : X \to I$ tal que $i \circ u = j$.

Mostremos as confições (1) e (2).

(1) A coleção de morfismos de **Set** é a classe de todas as funções entre conjuntos. Então, uma vez que i é uma função de I em A, i é um **Set**-morfismo de I em A. Considerando a definição do conjunto I, a prova de $f \circ i = g \circ i$ é imediata, pois $f \circ i$ e $g \circ i$ são funções com o mesmo domínio e conjunto de chegada e, para qualquer $x \in I$, tem-se

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) = g(x) = g(i(x)) = (g \circ i)(x).$$

(2) Note-se que se X é um objeto de $\mathbf{C}$ e $j : X \to A$ é um C-morfismo tal que $f \circ j = g \circ j$, então, para todo $x \in X$, tem-se $f(j(x)) = g(j(x))$, pelo que $j(x) \in I$. Assim, pode-se definir a função

$$\begin{array}{rcl} u : X & \to & I \\ x & \mapsto & j(x) \end{array}$$

A respeito desta função, é simples verificar que $i \circ u = j$, pois tratam-se de funções com o mesmo domínio e conjunto de chegada e, para todo $x \in X$, $(i \circ u)(x) = i(u(x)) = i(j(x)) = j(x)$. Além disso, a função u é a única função $u' : X \to I$ que satisfaz $i \circ u' = j$; de facto, se admitirmos que existe uma outra função $v : X \to I$ tal que $i \circ v = j$, tem-se $(i \circ v)(x) = j(x)$, para todo $x \in X$, donde $v(x) = i(v(x)) = j(x) = i(u(x)) = u(x)$ e, portanto, as funções u e v são a mesma.

3.32. Seja $\mathbf{Set}_0$ a subcategoria plena de **Set** cujos objetos são os conjuntos não vazios. Mostre que na categoria $\mathbf{Set}_0$ há pares de morfismos que não têm igualizador.

Seja $\mathbf{C}$ a subcategoria plena de **Set** constituída pelos conjuntos não vazios.

As funções

$$\begin{array}{rcl} f : \{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g : \{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

são morfismos de $\mathbf{C}$ e não admitem igualizador, pois, para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $i : X \to \{1\}$, tem-se $f \circ i \neq g \circ i$. Note-se que se $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, então $X \neq \emptyset$, pelo que existe $x \in X$ e, para qualquer $i : X \to \{1\}$, $(f \circ i)(x) = 2 \neq 3 = (g \circ i)(x)$, pelo que $f \circ i \neq g \circ i$.

3.33. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto zero 0. Mostre que se $f : A \to B$ é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo), então o igualizador (respetivamente, co-igualizador) de f e do morfismo nulo de A em B é o par $(0, 0_{0,A})$ (respetivamente, o par $(0, 0_{B,0})$).

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto zero 0 e $f : A \to B$ um monomorfismo de $\mathbf{C}$. Pretendemos provar que $(0, 0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$, ou seja, temos de mostrar que

(i) $0_{0,A}$ é um $\mathbf{C}$-morfismo de 0 em A tal que $f \circ 0_{0,A} = 0_{A,B} \circ 0_{0,A}$;

(ii) para qualquer $C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $g : C \to A$ tal que $f \circ g = 0_{A,B} \circ g$, existe um e um só morfismo $u : C \to 0$ tal que $i \circ u = g$.

Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Por definição dos morfismos $0_{0,A}$ e $0_{A,B}$, temos $0_{0,A} \in \hom_{\mathbf{C}}(0, A)$ e $0_{A,B} \in \hom_{\mathbf{C}}(A, B)$. Logo

$$f \circ 0_{0,A} : 0 \to B \quad \text{e} \quad 0_{A,B} \circ 0_{0,A} : 0 \to B$$

são $\mathbf{C}$-morfismos. Considerando que $f \circ 0_{0,A}$ e $0_{A,B} \circ 0_{0,A}$ são morfismos com domínio 0, com o mesmo codomínio e que 0 é um objeto inicial, segue que

$$f \circ 0_{0,A} = 0_{A,B} \circ 0_{0,A}.$$

(ii) Sejam $C \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $g : C \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $f \circ g = 0_{A,B} \circ g$. Nestas condições prova-se que existe um e um só morfismo $u : C \to 0$ tal que $0_{0,A} \circ u = g$. De facto, como 0 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo de C em 0; esse morfismo é o morfismo $0_{C,0}$. Além disso, tem-se $0_{0,A} \circ 0_{C,0} = g$. Com efeito, como

$$f \circ g = 0_{A,B} \circ g = 0_{C,B} = f \circ (0_{0,A} \circ 0_{C,0})$$

e f é monomorfismo, segue que

$$g = 0_{0,A} \circ 0_{C,0}.$$

Assim, de (i) e (ii) resulta que $(0, 0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$.

3.34. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$ e (I, i) um igualizador de f e g. Mostre que se $\alpha : B \to C$ é um monomorfismo, então (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$ e (I, i) um igualizador de f e g. Admitamos que $\alpha : B \to C$ é um monomorfismo de $\mathbf{C}$.

Uma vez que (I, i) é um igualizador de f e g, sabe-se que:

(1) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

(2) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to A$ tal que $f \circ k = g \circ k$, existe um e um só morfismo $u : K \to I$ tal que $i \circ u = k$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ K \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

Pretendemos mostar que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$, ou seja, pretende-se provar que:

(i) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $(\alpha \circ f) \circ i = (\alpha \circ g) \circ i$;

(ii) para qualquer $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $z : Z \to A$ tal que $(\alpha \circ f) \circ z = (\alpha \circ g) \circ z$, existe um e um só morfismo $v : Z \to I$ tal que $i \circ v = z$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha \circ f"] \arrow[r, shift right, "\alpha \circ g"'] & C \\ Z \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

Mostremos as condições (i) e (ii).

(i) Esta condição é imediata a partir de (1), pois i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A e

$$(\alpha \circ f) \circ i = \alpha \circ (f \circ i) = \alpha \circ (g \circ i) = (\alpha \circ g) \circ i.$$

(ii) Sejam $Z \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $z : Z \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $(\alpha \circ f) \circ z = (\alpha \circ g) \circ z$. Então, como $\alpha \circ (f \circ z) = \alpha \circ (g \circ z)$ e α é um monomorfismo, temos $f \circ z = g \circ z$. Então, por (2), existe um e um só morfismo $v : Z \to I$ tal que $i \circ v = z$.

De (i) e (ii) conclui-se que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

3.35. Sejam $f, g : A \to B$ e $i : I \to A$ morfismos numa categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g), então (I, i) é um igualizador de f e g .

Admitamos que $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g). Então:

(i) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f' : K \to A$, $g' : K \to A$ tais que $f \circ f' = g \circ g'$, existe um e um só morfismo $k : K \to I$ tal que $i \circ k = f'$ e $i \circ k = g'$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "g'"] \arrow[ddr, "f'"'] & & \\
& I \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "i"] & A \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Pretendemos mostrar que (I, i) é um igualizador de f e g, ou seja, pretendemos provar que:

(1) i é um $\mathbf{C}$-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

(2) para qualquer $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $z : Z \to A$ tal que $f \circ z = g \circ z$, existe um e um só morfismo $u : Z \to I$ tal que $i \circ u = z$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
Z \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "z"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mostremos as condições (1) e (2).

(1) Imediato a partir (i).

(2) Sejam $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $z : Z \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $f \circ z = g \circ z$. Então, a partir de (ii), considerando $K = Z$, $f' = z$ e $g' = z$, concluímos que existe um e um só morfismo $u : Z \to I$ tal que $i \circ u = f' = z$ e $i \circ u = g' = z$.

Portanto (I, i) é um igualizador de f e g.

3.36. Na categoria $\mathbf{Set}$, sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ funções. Considere o par $(P, (f', g'))$, onde

$$P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

e $f' : P \to A$ e $g' : P \to B$ são as funções definidas por

$$f'(a, b) = a \text{ e } g'(a, b) = b,$$

para todo $(a, b) \in P$. Mostre que o par $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g).

Pretendemos mostrar que $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g), ou seja, pretende-se provar que

(i) f' e g' são **Set**-morfismos tais que $f' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P, A)$, $g' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P, B)$ e $f \circ f' = g \circ g'$;

(ii) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ e para quaisquer **Set**-morfismos $f'' : X \to A$, $g'' : X \to B$ tais que $f \circ f'' = g \circ g''$, existe um e um só **Set**-morfismo $u : X \to P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "g''"] \arrow[ddr, "f''"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Mostremos as condições (i) e (ii):

(i) Considerando que $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ é a classe de todas as funções, então, pela definição de f' e de g', é imediato que $f' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P, A)$ e $g' \in \hom_{\mathbf{Set}}(P, B)$. Além disso, as funções $f \circ f'$ e $g \circ g'$ são iguais, pois têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e, para todo $(x, y) \in P$,

$$(f \circ f')(x, y) = f(f'(x, y)) = f(x) = g(y) = g(g'(x, y)) = (g \circ g')(x, y).$$

(ii) Sejam $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ e $f'' : X \to A$, $g'' : X \to B$ morfismos de $\mathbf{Set}$ tais que $f \circ f'' = g \circ g''$. Então existe um e um só $\mathbf{Set}$-morfismo $u : X \to P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$. De facto, se considerarmos a correspondência $u : X \to P$ definida por $u(x) = (f''(x), g''(x))$, prova-se que:

- u é uma função de X em P e, portanto, u é um $\mathbf{Set}$-morfismo de X em P;
- $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$;
- se $v : X \to P$ é um $\mathbf{Set}$-morfismo tal que $f' \circ v = f''$ e $g' \circ v = g''$, então $v = u$.

De (i) e (ii) conclui-se que $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g).

3.37. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes:

(A1) f é um monomorfismo.

(A2) $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f).

(A1) $\Rightarrow$ (A2) Admitamos que f é um monomorfismo. Pretendemos mostrar que $(A, (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A))$ é um produto fibrado de (f, f), ou seja, temos de provar que:

(i) id_A é um $\mathbf{C}$-morfismo de A em A tal que $f \circ id_A = f \circ id_A$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : K \to A$, $q : K \to A$ tais que $f \circ p = f \circ q$, existe um e um só morfismo $k : K \to A$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q"] \arrow[ddr, "p"'] & & \\ & A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "id_A"] & A \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

A prova das condições (i) e (ii) é simples.

(i) Imediato.

(ii) Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $p : K \to A$ e $q : K \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ p = f \circ q$. Então, como f é monomorfismo segue que $p = q$. Logo existe $k = p = q \in \hom_{\mathbf{C}}(K, A)$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

(A2) $\Rightarrow$ (A1) Admitamos que $(A, (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A))$ é um produto fibrado de (f, f). Então

(i) id_A é um $\mathbf{C}$-morfismo de A em A tal que $f \circ id_A = f \circ id_A$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p : K \to A$, $q : K \to A$ tais que $f \circ p = f \circ q$, existe um e um só morfismo $k : K \to A$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q"] \arrow[ddr, "p"'] & & \\ & A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "id_A"] & A \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Pretendemos provar f é um monomorfismo. Sejam $i : X \to A$ e $j : X \to A$ $\mathbf{C}$-morfismos tais que $f \circ i = f \circ j$. Então de (ii), considerando $K = X$, $p = i$ e $q = j$, segue que existe um e um só morfismo

$k : X \to A$ tal que $id_A \circ k = p = i$ e $id_A \circ k = q = j$. Logo $i = k = j$ e, portanto, f é um mononomorfismo.

3.38. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto terminal T e A e B objetos de $\mathbf{C}$. Mostre que

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\ A \arrow[r, "f_A"'] & T \end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano se e só se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B.

Admitamos que

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\ A \arrow[r, "f_A"'] & T \end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano. Então

(i) p_A e p_B são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$ e $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$;

(ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $q_A : K \to A$, $q_B : K \to B$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to P$ tal que $p_A \circ k = q_A$ e $p_B \circ k = q_B$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q_B"] \arrow[ddr, "q_A"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_B"'] \arrow[d, "p_A"] & B \arrow[d, "f_B"] \\ & A \arrow[r, "f_A"'] & T \end{tikzcd}$$

Pretendemos provar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, ou seja, pretende-se provar que

(1) $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$;

(2) para qualquer $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_A : Z \to A$, $g_B : Z \to B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : Z \to P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "g_A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g_B"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

A condição (1) é imediata pela definição de p_A e p_B.

Mostremos a condição (2). Sejam $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $g_A : Z \to A$, $g_B : Z \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Considerando que $f_A \circ g_A$ e $f_B \circ g_B$ são morfimos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, temos $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$. Então, atendendo a (ii), existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : Z \to A$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

Reciprocamente, admitindo que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, prova-se que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B). De facto, se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, então:

(c.1) $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$;

(c.2) para qualquer $Z \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_A : Z \to A$, $g_B : Z \to B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : Z \to P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "g_A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Pretendemos mostrar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B), ou seja, temos de mostrar que

(c.i) p_A e p_B são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$, $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$ e $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$;

(c.ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $q_A : K \to A$, $q_B : K \to B$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to P$ tal que $p_A \circ k = q_A$ e $p_B \circ k = q_B$.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "q_B"] \arrow[ddr, "q_A"'] & & \\
 & P \arrow[r, "p_B"'] \arrow[d, "p_A"] & B \arrow[d, "f_B"] \\
 & A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}
$$

Considerando que T é um objeto terminal e $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, as condições (c.i) e (c.ii) provam-se facilmente.

(c.i) Por definição de p_A e de p_B, tem-se $p_A \in \hom_{\mathbf{C}}(P, A)$ e $p_B \in \hom_{\mathbf{C}}(P, B)$. Além disso, como $f_A \circ p_A$ e $f_B \circ p_B$ são $\mathbf{C}$-morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal, tem-se $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$.

(c.ii) Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $q_A : K \to A$, $q_B : K \to B$ mofismos de $\mathbf{C}$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$. Então, por (c.2), existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : K \to P$ tal que $p_A \circ u = q_A$ e $p_B \circ u = q_B$.

De (c.i) e (c.ii) resulta que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B).

3.39. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dr, "h"] \arrow[dd, "h_1"'] & & B_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
 & C \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dl, "g_1"] & \\
B_1 \arrow[rr, "f_1"'] & & D
\end{tikzcd}
$$

Mostre que se o diagrama anterior é comutativo e $(D, (f_1, f_2))$ é uma soma amalgamada de (h_1, h_2), então $(D, (f_1, f_2))$ é uma soma amalgamada de (g_1, g_2).

Admitamos que o quadrado anterior é comutativo e que $(D, (f_1, f_2))$ é uma soma amalgamada de (h_1, h_2). Considerando que $(D, (f_1, f_2))$ é uma soma amalgamada de (h_1, h_2), então:

1) $f_1 \circ h_1 = f_2 \circ h_2$;
2) para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $j_1 : B_1 \to X$ e $j_2 : B_2 \to X$ tais que $j_1 \circ h_1 = j_2 \circ h_2$, existe um e um só morfismo $u : D \to X$ tal que $u \circ f_1 = j_1$ e $u \circ f_2 = j_2$.

Pretende-se provar que $(D, (f_1, f_2))$ é uma soma amalgamada de (g_1, g_2), ou seja, que:

3) $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$;
4) para qualquer objeto Y de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $k_1 : B_1 \to Y$ e $k_2 : B_2 \to Y$ tais que $k_1 \circ g_1 = k_2 \circ g_2$, existe um e um só morfismo $v : D \to Y$ tal que $v \circ f_1 = k_1$ e $v \circ f_2 = k_2$.

Mostremos 3) e 4):

3) Imediato, tendo em conta que $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são morfismos com o mesmo domínio e codomínio e o diagrama é comutativo.

4) Sejam $k_1 : B_1 \to Y$ e $k_2 : B_2 \to Y$ morfismos tais que $k_1 \circ g_1 = k_2 \circ g_2$. Daqui resulta que $k_1 \circ g_1 \circ h = k_2 \circ g_2 \circ h$. Como o diagrama é comutativo, tem-se $g_1 \circ h = h_1$ e $g_2 \circ h = h_2$ e, portanto, $k_1 \circ h_1 = k_2 \circ h_2$. Assim, de 3) segue que existe um e um só morfismo $v : D \to Y$ tal que $v \circ f_1 = k_1$ e $v \circ f_2 = k_2$.

3.40. Considere um c.p.o. $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$. Sejam $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{P}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ a função que a cada objeto a de $\mathbf{P}$ associa o conjunto $\{a\}$ e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{P}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ a função que a cada $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$ associa a função

$$F_{hom}(f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \to & \{b\} \\ a & \mapsto & b \end{array}.$$

(a) Mostre que o par de funções $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Set}$.

Comecemos por recordar que $\mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ é a classe formada por todos os conjuntos e que, dados conjuntos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, $\mathrm{hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$ é o conjunto de todas as funções de A em B.
Relativamente à categoria $\mathbf{P}$, tem-se $\mathrm{Obj}(\mathbf{P}) = P$ e, dados $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, $\mathrm{hom}_{\mathbf{P}}(a, b) = \{(a, b)\} \cap \leq$.

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Set}$ se:

(1) F_{Ob} é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{P})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$;

(2) F_{hom} é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{P})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ que a cada $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$ associa um $\mathbf{Set}$-morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(a) \to F_{Ob}(b)$;

(3) para cada $a \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, $F_{hom}(id_a) = id_{F_{Ob}(a)}$;

(4) para quaisquer $\mathbf{P}$-morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F.

(3) Para cada $a \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, tem-se $id_a : a \to a \in \mathrm{Mor}(\mathbf{P})$ e, por definição de F, $F(id_a)$ é a função

$$F(id_a) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \to & \{a\} \\ a & \to & a \end{array}.$$

Por outro lado, a função $id_F(a)$ é a função definida por

$$id_{F(a)} : \begin{array}{ccc} F(a) & \to & F(a) \\ a & \to & a \end{array}.$$

Considerando que as funções $F(id_a)$ e $id_{F(a)}$ têm o mesmo domínio ($F(a) = \{a\}$), o mesmo conjunto de chegada ($F(a) = \{a\}$) e $F(id_a)(a) = id_{F(a)}(a)$, temos $F(id_a) = id_{F(a)}$.

(4) Sejam $f : a \to b$ e $g : b \to c$ morfismos de $\mathbf{P}$. Então $g \circ f : a \to c$ é um morfismo de $\mathbf{P}$ e, por definição de F, $F(g \circ f)$ é a função

$$F(g \circ f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \to & \{c\} \\ a & \mapsto & c \end{array}.$$

Por outro lado, tem-se

$$F(f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \to & \{b\} \\ a & \mapsto & b \end{array}, \qquad F(g) : \begin{array}{ccc} \{b\} & \to & \{c\} \\ b & \mapsto & c \end{array}$$

donde, por definição de composição de funções, segue que

$$F(g) \circ F(f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \to & \{c\} \\ a & \mapsto & (F(g) \circ F(f))(a), \end{array}$$

onde $(F(g) \circ F(f))(a) = F(g)(F(f)(a)) = F(g)(b) = c$.

Uma vez que as funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e

$$(F(g) \circ F(f))(a) = c = F(g \circ f)(a),$$

tem-se $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de $\mathbf{P}$ em $\mathbf{Set}$.

(b) Diga se o funtor F é fiel e se é pleno.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $\mathbf{P}$-morfismos $f, g : a \to b$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Considerando que, para quaisquer $a, b \in \mathrm{Obj}(\mathbf{P})$, existe no máximo um morfismo de a em b, o funtor F é fiel.

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $a, b \in P$ e para qualquer **Set**-morfismo $g : F(a) \to F(b)$, existe um $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$, tal que $F(f) = g$.

Considerando que, para quaisquer $a, b \in P$,

$$\begin{array}{rcl} g : \{a\} & \to & \{b\} \\ a & \to & b \end{array}$$

é um **Set**-morfismo e $F(a) = \{a\}$, $F(b) = \{b\}$, então, para quaisquer $a, b \in P$,

$$\begin{array}{rcl} g : F(a) & \to & F(b) \\ a & \to & b \end{array}$$

é um **Set**-morfismo. Logo, o funtor F é pleno se e só se, para quaisquer $a, b \in P$, existe um $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$, isto é, se e só se, para quaisquer $a, b \in P$, $(a, b) \in \leq$. Assim, F é pleno se e só se, para quaisquer $x, y \in P$, $(x, y), (y, x) \in \leq$. Considerando que $\leq$ é uma ordem parcial, então F é pleno se e só se, para quaisquer $x, y \in P$, tem-se $x = y$.

3.41. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e A um objeto de $\mathbf{D}$. Sejam $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ a função que a cada objeto X de $\mathbf{C}$ associa o objeto A e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ a função que a cada C-morfismo $f : X \to Y$ associa o morfismo $F(f) = \mathrm{id}_A$.

(a) Mostre que o par de funções $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$.

O par (F_{Ob}, F_{hom}) é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ se:

(1) F_{Ob} é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{D})$;

(2) F_{hom} é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ que a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$ associa um $\mathbf{D}$-morfismo $F_{hom}(f) : F_{Ob}(X) \to F_{Ob}(Y)$;

(3) para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, $F_{hom}(id_X) = id_{F_{Ob}(X)}$;

(4) para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$.

De acordo com o enunciado, F_{Ob} e F_{hom} são funções nas condições indicadas em (1) e (2), pelo que resta verificar (3) e (4). Na prova de (3) e (4) as funções F_{Ob} e F_{hom} são representadas pelo mesmo símbolo F.

(3) Por definição de F, tem-se $F(id_X) = id_A$, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$. Por outro lado, considerando que, para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, $F(X) = A$, temos $id_{F(X)} = id_A$. Logo $F(id_X) = id_{F(X)}$.

(4) Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos de $\mathbf{C}$. Então $g \circ f : X \to Z$ é um $\mathbf{C}$-morfismo e, por definição de F, $F(g \circ f) = id_A$. Por outro lado, tem-se $F(f) = id_A$ e $F(g) = id_A$, donde $F(f) \circ F(g) = id_A \circ id_A = id_A$. Portanto, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$.

(b) Diga se o funtor F é fiel e se é pleno para quaisquer categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ e para qualquer objeto A de $\mathbf{D}$.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : X \to Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Considerando que, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : X \to Y$, tem-se $F(f) = id_A = F(g)$, o funtor é fiel se e só se, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe no máximo um morfismo de X em Y.

- O funtor F é pleno se, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo $g : F(X) \to F(Y)$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$, tal que $F(f) = g$.

Atendendo a que $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, então $id_A : A \to A$ é um $\mathbf{D}$-morfismo. Logo, considerando que, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, temos $F(X) = F(Y) = A$, $id_A : F(X) \to F(Y)$ é um $\mathbf{D}$-morfismo. Assim, F é pleno se e só se, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo de X em Y e id_A é o único $\mathbf{D}$-morfismo de A em A.

3.42. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria localmente pequena, A um objeto de $\mathbf{C}$ e considere as funções

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) & \to & \mathrm{Obj}(\mathbf{Set}) \\ X & \mapsto & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) & \to & \mathrm{Mor}(\mathbf{Set}) \\ f : X \to Y & \mapsto & \begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A,f) : \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,Y) \\ h & \mapsto & f \circ h. \end{array} \end{array}$$

(a) Mostre que o par $Mor_{\mathbf{C}}(A,-) = (Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}, Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{C}$ em **Set**.

O par $Mor_{\mathbf{C}}(A,-) = (Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}, Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{C}$ em **Set**, pois

(1) $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}$ é uma função bem definida de $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$;

(2) $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}$ é uma função bem definida de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$;

(3) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$, tem-se $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(id_X) = id_{Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(X)}$, pois

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(id_X) = Mor_{\mathbf{C}}(A,id_X),$$

$$id_{Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(X)} = id_{Mor_{\mathbf{C}}(A,X)}$$

e $Mor_{\mathbf{C}}(A,id_X)$ e $id_{Mor_{\mathbf{C}}(A,X)}$ são as funções definidas por

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A,id_X) : \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X) \\ h & \mapsto & id_X \circ h \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} id_{Mor_{\mathbf{C}}(A,X)} : \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X) \\ h & \mapsto & h \end{array},$$

as quais têm o mesmo domínio e conjunto de chegada e, para todo $h \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,X)$,

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,id_X)(h) = id_X \circ h = h = id_{Mor_{\mathbf{C}}(A,X)}(h).$$

(4) para quaisquer $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$,

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g \circ f) = Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g) \circ Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f),$$

pois $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g \circ f)$ e $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g) \circ Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f)$ são funções com o mesmo domínio ($Mor_{\mathbf{C}}(A,X)$), o mesmo conjunto de chegada ($Mor_{\mathbf{C}}(A,Y)$) e, para qualquer $h \in Mor_{\mathbf{C}}(A,X)$,

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g \circ f) & = & Mor_{\mathbf{C}}(A,g \circ f)(h) \\ & = & (g \circ f) \circ h \\ & = & g \circ (f \circ h) \\ & = & Mor_{\mathbf{C}}(A,g)(f \circ h) \\ & = & Mor_{\mathbf{C}}(A,g)((Mor_{\mathbf{C}}(A,f)(h)) \\ & = & (Mor_{\mathbf{C}}(A,g) \circ Mor_{\mathbf{C}}(A,f))(h) \\ & = & (Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g) \circ Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f))(h). \end{array}$$

(b) Diga se o funtor $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)$ é fiel e se é pleno para qualquer categoria $\mathbf{C}$ localmente pequena e para qualquer objeto A de $\mathbf{C}$.

O funtor $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)$ é fiel se, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f,g : X \to Y$,

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f) = Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g) \Rightarrow f = g.$$

É simples verificar que o funtor $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)$ não é necessariamente fiel para toda a categoria $\mathbf{C}$ e para todo o objeto A de $\mathbf{C}$. Por exemplo, se $\mathbf{C}$ for a categoria **Set**, $A = \emptyset$ e considerarmos as funções $f : \{1\} \to \{2,3\}$ e $g : \{1\} \to \{2,3\}$ tais que $f(1) = 2$ e $g(1) = 3$, verifica-se que as funções

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f) : Mor_{\mathbf{C}}(\emptyset,\{1\}) \to Mor_{\mathbf{C}}(\emptyset,\{2,3\})$$

e

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(g) : Mor_{\mathbf{C}}(\emptyset,\{1\}) \to Mor_{\mathbf{C}}(\emptyset,\{2,3\})$$

são iguais, mas $f \neq g$.

O funtor $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)$ é pleno se, para quaisquer objetos X e Y da categoria $\mathbf{C}$ e para qualquer **Set**-morfismo $g : Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(X) \to Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(Y)$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$, tal que $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f) = g$.

Como se verifica a seguir, o funtor $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)$ também não é necessariamente pleno para toda a categoria $\mathbf{C}$ e para todo o objeto $\mathbf{C}$. Por exemplo, consideremos que $\mathbf{C}$ é a categoria **Set**, $A = \{1,2\}$, $X = \{3,4\}$ e $Y = \{5,6\}$. Consideremos também as funções a seguir definidas

$$\begin{array}{rcl} g_1 : A & \to & X \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 4 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g_2 : A & \to & X \\ 1 & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & 3 \end{array},$$

$$\begin{array}{rcl} h_1 : A & \to & Y \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} h_2 : A & \to & Y \\ 1 & \mapsto & 6 \\ 2 & \mapsto & 6 \end{array}.$$

Tem-se $g_1, g_2 \in Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(X)$ e $h_1, h_2 \in Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(Y)$.
Seja

$$h : Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(X) \to Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Obj}(Y)$$

uma função tal que $h(g_1) = h_1$ e $h(g_2) = h_2$.
Neste caso não existe qualquer função $f : X \to Y$ tal que $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f) = h$. De facto, se admitirmos que existe uma função $f : X \to Y$ nestas condições, da definição de $Mor_{\mathbf{C}}(A,-)_{Mor}(f)$ e da última igualdade resulta que

$$Mor_{\mathbf{C}}(A,f)(g_1) = h(g_1) \text{ e } Mor_{\mathbf{C}}(A,f)(g_2) = h(g_2),$$

donde se obtem

$$f \circ g_1 = h_1 \text{ e } f \circ g_2 = h_2.$$

Então

$$f(g_1(1)) = h_1(1), f(g_1(2)) = h_1(2), f(g_2(1)) = h_2(1), f(g_2(2)) = h_2(2),$$

pelo que

$$f(3) = 5, f(4) = 5, f(4) = 6, f(3) = 6,$$

o que contradiz a definição de função.

3.43. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias.

(a) Defina os funtores projeção $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

Seja $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ onde

- F_{Ob} é a função de $\text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ em $\text{Obj}(\mathbf{C})$ que a cada $(X,Y) \in \text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ associa o objeto X;
- F_{hom} é a função de $\text{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ em $\text{Mor}(\mathbf{C})$ que a cada $(f,g) \in \text{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ associa o morfismo f.

O par $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ é um funtor de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ em $\mathbf{C}$, pois

- para cada $(A,B) \in \text{Obj}(C) \times \text{Obj}(D)$, $F_{id_{(A,B)}} = F((id_A, id_B)) = id_A = id_{F((A,B))}$;
- para quasiquer $(f,g), (f',g') \in \text{MorMor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$,

$$F((f,g) \circ (f',g')) = F((f \circ f, f' \circ g')) = f \circ f' = F((f,g) \circ F((f',g')).$$

De forma análoga define-se o funtor projeção $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

(b) Diga se os funtores definidos na alínea anterior são fieis e se são plenos para quaisquer categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$.

Consideremos o funtor projeção $F : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{C}$.

- O funtor F é fiel se, para quaisquer $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismos $(f,g), (f',g') : (X,Y) \to (Z,W)$,

$$F((f,g)) = F((f',g')) \Rightarrow (f,g) = (f',g').$$

Se uma das categorias $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{D}$ é a categoria zero, o funtor F é fiel. Se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ não são a categoria zero, o funtor F é fiel se e só se, para quaisquer $Y, W \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, existe no máximo um $\mathbf{D}$-mofismo de $Y \to W$.
- Se a categoria $\mathbf{C}$ for a categoria zero, o funtor é pleno. Se categoria $\mathbf{C}$ não for a categoria zero, o funtor F é pleno se e só se, para quaisquer $(X,Y), (Z,W) \in \text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $h : F(X,Y) \to F(Z,W)$, existe um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo $(f,g) : (X,Y) \to (Z,W)$, tal que $F((f,g)) = h$. Considerando que, para quaisquer $(X,Y), (Z,W) \in \text{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, $F(X,Y) = X$ e $F(Z,W) = Z$, o funtor F é pleno se, para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to Y$, existe um $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$-morfismo $(f,g) : (X,Y) \to (Z,W)$, tal que $F((f,g)) = h$. Portanto, considerando que $\text{Mor}(\mathbf{C}) \neq \emptyset$, F é pleno se e só se, para quaisquer $Y, W \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, existe um $\mathbf{D}$-morfismo $g : Y \to W$.

3.44. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ categorias e F : $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, G : $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ funtores. Mostre que o par $(G_{Obj} \circ F_{Obj}, G_{Mor} \circ F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{C}$.
A este funtor dá-se a designação de *funtor composição de G com F* e representa-se por $G \circ F$.

Admitamos que F : $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e G : $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ são funtores. Então, sendo F um funtor, tem-se que:

- F_{Obj} é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{A})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{B})$,
- F_{Mor} é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{A})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{B})$,
- para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{A})$, $F_{Mor}(id_X) = id_{F_{Obj}(X)}$,
- para quaisquer $f : X \to Y, g : Y \to Z \in \mathrm{Mor}(\mathbf{A})$, $F_{Mor}(g \circ f) = F_{Mor}(g) \circ F_{Mor}(f)$.

Analogamente, como G é funtor, temos:

- G_{Obj} é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{B})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$,
- G_{Mor} é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{B})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$,
- para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{B})$, $G_{Mor}(id_X) = id_{G_{Obj}(X)}$,
- para quaisquer $f : X \to Y, g : Y \to Z \in \mathrm{Mor}(\mathbf{B})$, $G_{Mor}(g \circ f) = G_{Mor}(g) \circ G_{Mor}(f)$.

Então

- $G_{Obj} \circ F_{Obj}$ é uma função de $\mathrm{Obj}(\mathbf{A})$ em $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$,
- $G_{Mor} \circ F_{Mor}$ é uma função de $\mathrm{Mor}(\mathbf{A})$ em $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$,
- para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{A})$,

$$\begin{array}{rcl} (G_{Mor} \circ F_{Mor})(id_X) & = & G_{Mor}(F_{Mor}(id_X)) \\ & = & G_{Mor}(id_{F_{Obj}(X)}) \\ & = & id_{G_{Obj}(F_{Obj}(X))} \\ & = & id_{(G_{Obj} \circ F_{Obj})(X)} \end{array}$$

- para quaisquer $f : X \to Y, g : Y \to Z \in \mathrm{Mor}(\mathbf{A})$,

$$\begin{array}{rcl} (G_{Mor} \circ F_{Mor})(g \circ f) & = & G_{Mor}(F_{Mor}(g \circ f)) \\ & = & G_{Mor}(F_{Mor}(g) \circ F_{Mor}(f)) \\ & = & G_{Mor}(F_{Mor}(g)) \circ G_{Mor}(F_{Mor}(f)) \\ & = & (G_{Mor} \circ F_{Mor})(g) \circ (G_{Mor} \circ F_{Mor})(f) \end{array}.$$

Logo, o par $(G_{Obj} \circ F_{Obj}, G_{Mor} \circ F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{C}$.

3.45. Mostre que se T é um objeto terminal de uma categoria $\mathbf{C}$, então as categorias $\mathbf{C}/T$ e $\mathbf{C}$ são isomorfas.

Se T é um objeto terminal de uma categoria $\mathbf{C}$, então, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, existe um e um só morfismo de X em T.

Na categoria $\mathbf{C}/T$, os objetos são os $\mathbf{C}$-morfismos com codomínio T e, dados dois objetos $f : X \to T$ e $g : Y \to T$ da categoria $\mathbf{C}/T$, um $\mathbf{C}/T$-morfismo de f em g é um triplo de $\mathbf{C}$-morfismos (f, h, g) onde $h : X \to Y$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $g \circ h = f$.

O par $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$, onde $F_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}/T) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}/T) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ são as funções definidas por

- $F_{Obj}(f : X \to T) = X$, para todo $f : X \to T \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}/T)$;
- $F_{Mor}((f, h, g)) = h$, para todo $(f, h, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}/T)$.

é um funtor de $\mathbf{C}/T$ em $\mathbf{C}$.

O par $G = (G_{Obj}, G_{Mor})$, onde $G_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}/T)$ e $G_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}/T)$ são as funções definidas por

- $G_{Obj}(X) = f : X \to T$, onde f é o único $\mathbf{C}$-morfismo de X em T;
- $G_{Mor}(h : X \to Y) = (f : X \to T, h, g : Y \to T)$, para todo $h \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}/T}(X, Y)$.

é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{C}/T$.

A respeito da definição de G, observe-se que, dados morfismos $h: X \to Y$, $f: X \to T$ e $g: Y \to T$, tem-se $g \circ h = f$, uma vez que $g \circ h$ e f são morfismos com o mesmo domínio, com codomínio T e T é um objeto terminal.

Os funtores F e G são inversos um do outro, isto é, $F \circ G = Id_{\mathbf{C}}$ e $G \circ F = Id_{\mathbf{C}/T}$.

Fica ao cuidado do leitor, fazer a verificação de que F e G são funtores e são inversos um do outro.

Assim, $\mathbf{C} \cong \mathbf{C}/T$.

3.46. Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ e $\mathbf{C}''$ categorias. Mostre que são isomorfas as categorias:

(a) $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ e $\mathbf{C}' \times \mathbf{C}$.

As categorias $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ e $\mathbf{C}' \times \mathbf{C}$ são isomorfas, uma vez que existe um funtor $F: \mathbf{C} \times \mathbf{C}' \to \mathbf{C}' \times \mathbf{C}$ que é um isomorfismo.

De facto, o par $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ onde

$$F_{Obj}: \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}' \times \mathbf{C})$$

e

$$F_{Mor}: \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}' \times \mathbf{C})$$

são as funções definidas por

- $F_{Obj}(X, Y) = (Y, X)$, para todo $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}')$;
- $F_{Mor}(f, g) = (g, f)$, para todo $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}')$,

é um funtor de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ em $\mathbf{C}' \times \mathbf{C}$ e é um isomorfismo.

O par $G = (G_{Obj}, G_{Mor})$ onde

$$G_{Obj}: \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C}' \times \mathbf{C})$$

e

$$G_{Mor}: \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}' \times \mathbf{C})$$

são as funções definidas por

- $G(X, Y) = (Y, X)$, para todo $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}' \times \mathbf{C})$;
- $G(f, g) = (g, f)$, para todo $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}' \times \mathbf{C})$,

é um funtor de $\mathbf{C}' \times \mathbf{C}$ em $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$.

Os funtores F e G são inversos um do outro, isto é, $F \circ G = Id_{\mathbf{C} \times \mathbf{C}'}$ e $G \circ F = Id_{\mathbf{C}' \times \mathbf{C}}$.

Logo, $\mathbf{C} \times \mathbf{C}' \cong \mathbf{C}' \times \mathbf{C}$.

Fica ao cuidado do leitor a verificação de que F e G são funtores e são inversos um do outro.

(b) $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'')$ e $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$.

As categorias $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'')$ e $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$ são isomorfas, uma vez que existe um funtor

$$F: \mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'') \to (\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$$

que é um isomorfismo.

De facto, o par $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ onde

$$F_{Obj}: \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'')) \to \mathrm{Obj}((\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$$

e

$$F_{Mor}: \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'')) \to \mathrm{Mor}((\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$$

são as funções definidas por

- $F_{Obj}(X, (Y, Z)) = ((X, Y), Z)$, para todo $(X, (Y, Z)) \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''))$;
- $F_{Mor}(f, (g, h)) = ((f, g), h)$, para todo $(f, (g, h)) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''))$,

é um funtor de $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'')$ em $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$ e é um isomorfismo.

O par $G = (G_{Obj}, G_{Mor})$ onde

$$G_{Obj} : \mathrm{Obj}((\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}'') \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''))$$

e

$$G_{Mor} : \mathrm{Mor}((\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}'') \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''))$$

são as funções definidas por

- $G((X, Y), Z) = (X, (Y, Z))$, para todo $((X, Y), Z) \in \mathrm{Obj}((\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}'')$;
- $G((f, g), h) = (f, (g, h))$, para todo $((f, g), h) \in \mathrm{Mor}((\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}'')$,

é um funtor de $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$ em $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''))$.

Os funtores F e G são inversos um do outro, isto é, $F \circ G = Id_{(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''}$ e $G \circ F = Id_{\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''))}$.

Logo, $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}'' \cong \mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}''))$.

Fica ao cuidado do leitor a verificação de que F e G são funtores e são inversos um do outro.

3.47. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{C}$ um functor. Mostre que:

(a) Se f é um monomorfismo com domínio não vazio em **Set**, então $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathbf{C}$.

Seja $f : X \to Y$ um monomorfismo de **Set** com domínio não vazio. Pretende-se mostrar que $F(f)$ é um monomorfismo.

Como f é um monomorfismo de **Set** com domínio não vazio, então f é invertível à esquerda. Atendendo a que todo o funtor preserva morfismos invertíveis à esquerda, então $F(f)$ é inverível à esquerda. Uma vez que todo o morfismo invertível à esquerda é um monomorfismo, concluimos que $F(f)$ é um monomorfismo.

(b) Se f é um epimorfismo em **Set**, então $F(f)$ é um epimorfismo em $\mathbf{C}$.

Seja f um epimorfismo de **Set**. Então, considerando que todo o epimorfismo de **Set** é invertível à direita e que todo o funtor preserva morfismos invertíveis à direita, $F(f)$ é invertível à direita. Uma vez que todo o morfismo invertível à direita é um epimorfismo, concluímos que $F(f)$ é um epimorfismo.

3.48. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ categorias e F : $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, G : $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ funtores. Mostre que:

(a) Se $G \circ F$ é fiel, então F é fiel.

Admitamos que o funtor $G \circ F$ é fiel. Então, para quaisquer $\mathbf{A}$-morfismos $f, g : X \to Y$,

$$(G \circ F)(f) = (G \circ F)(g) \Rightarrow f = g.$$

Pretendemos mostrar que F é fiel, ou seja pretendemos mostrar que, para quaisquer $\mathbf{A}$-morfismos $f, g : X \to Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

De facto, para quaisquer $\mathbf{A}$-morfismos $f, g : X \to Y$,

$$\begin{array}{rcll} F(f) = F(g) & \Rightarrow & G(F(f)) = G(F(g)) & \\ & \Rightarrow & (G \circ F)(f) = (G \circ F)(g) & \\ & \Rightarrow & f = g & (G \circ F \text{ é fiel}). \end{array}$$

(b) Se G e F são plenos plenos, então $G \circ F$ é pleno.

Admitamos que F e G são plenos. Como F é pleno, para qualquer $\mathbf{B}$-morfismo $g : F(X) \to F(Y)$, existe um $\mathbf{A}$-morfismo $f : X \to Y$ tal que $F(f) = g$. Considerando que G é pleno, para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $h : G(Z) \to G(W)$, existe um $\mathbf{B}$-morfismo $k : Z \to W$ tal que $G(k) = h$.

Mostremos que $G \circ F$ é pleno.

Seja $h : (G \circ F)(X) \to (G \circ F)(Y)$ um $\mathbf{C}$-morfismo. Considerando que G é pleno, existe um $\mathbf{B}$-morfismo $g : F(X) \to F(Y)$ tal que $G(g) = h$. Como F é pleno, existe um $\mathbf{A}$-morfismo $f : X \to Y$ tal que $F(f) = g$. Por conseguinte, para todo o $\mathbf{C}$-morfismo $h : (G \circ F)(X) \to (G \circ F)(Y)$, existe um $\mathbf{A}$-morfismo $f : X \to Y$ tal que $G(F(f)) = h$, isto é, tal que $(G \circ F)(f) = h$. Portanto, $G \circ F$ é pleno.

3.49. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se F é fiel, então F preserva e reflete triângulos comutativos.

Admitamos que o diagrama em $\mathbf{C}$ a seguir indicado é comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Pretendemos mostrar que o diagrama anterior é comutativo se e só se o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & & F(B) \arrow[dl, "F(g)"] \\ & F(C) & \end{tikzcd}$$

Considerando que F é um funtor e é fiel, a prova é imediata. De facto, se o primeiro diagrama é comutativo, o segundo diagrama também é, pois

$$\begin{aligned} g \circ f = h \quad &\Rightarrow \quad F(g \circ f) = F(h) \\ &\Rightarrow \quad F(g) \circ F(f) = F(h) \quad (F \text{ é funtor}). \end{aligned}$$

Reciprocamente, se o segundo diagrama é comutativo, o primeiro diagrama também é, uma vez que

$$\begin{aligned} F(g) \circ F(f) = F(h) \quad &\Rightarrow \quad F(g \circ f) = F(h) \quad (F \text{ é funtor}) \\ &\Rightarrow \quad g \circ f = h \qquad\qquad (F \text{ é fiel}). \end{aligned}$$

(b) Se F é fiel, então $F(f)$ é um inverso direito (esquerdo) de $F(g)$ se e só se f é um inverso direito (esquerdo) de g.

Admitamos que $F(f)$ é um inverso direito de $F(g)$. Então $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$. Como F é um funtor, segue que $F(g \circ f) = F(id_A)$. Dado que F é fiel, tem-se $g \circ f = id_A$. Portanto, f é um inverso difeito de g.

(c) Se F é fiel e pleno, então f tem um inverso direito (esquerdo) se e só se $F(f)$ tem um inverso direito (esquerdo).

Seja F um funtor fiel e pleno.

Admitamos que f tem um inverso direito. Então existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : B \to A$ tal que $f \circ h = id_B$. Logo $F(f \circ h) = F(id_B)$ e, considerando que F é um funtor, tem-se $F(f) \circ F(h) = id_{F(B)}$. Assim, $F(h)$ é um inverso direito de $F(f)$.
Reciprocamente, admitamos que $F(f) : F(A) \to F(B)$ tem um inverso direito. Então existe um $\mathbf{C}'$-morfismo $h' : F(B) \to F(A)$ tal que $F(f) \circ h' = id_{F(B)}$. Como F é pleno, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : B \to A$ tal que $F(h) = h'$. Logo $F(f) \circ F(h) = id_{F(B)}$ e, atendendo a que F é funtor, temos $F(f \circ h) = F(id_B)$. Como F é fiel, resulta que $f \circ h = id_B$ e, portanto, f tem um inverso direito.