Teste 23/24

1. Considere as linguagens $L_1 = A^*aA^*aA^*$, $L_2 = A^*aaA^*$ e $L_3 = L_1 \setminus A^*abA^*$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) $L_1 = L_2$.

b) $L_3 \subseteq L_2$.

a) Temos o exemplo da palavra aba que pertence a $L_1$ mas não pertence a $L_2$. Logo falso.

b) Verdadeira. Consideremos uma palavra $u \in L_3$, ou seja, $u \in L_1$ e $u \notin A^*abA^*$. Deve mostrar que $u \in L_2$. Ora, de $u \in L_1$, resulta que $u = u_1 a u_2 a u_3$ $u_i \in A^*$. Se $u_2$ tivesse alguma ocorrência da letra b, $u$ teria o factor ab, o que não pode acontecer, pois $u \notin A^*abA^*$. Logo $u_2 = a^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. $u = A^*aa^kaA^* = A^*aaa^kA^*$. tem o factor aa. Logo $\subseteq L_2$

2. Seja $L$ a linguagem representada pela expressão regular $(a^* + b)^*c^*a(b^* + c)a(b + c)^*(abc)^*$ sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.

$(a+b)^*$

a) Indique um autómato finito com transições vazias que reconheça $L$.

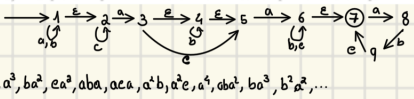
b) Indique todas as palavras de $L$ de comprimento $\leq 4$.

c) É verdade que $L \cap A^*abcaA^* = \emptyset$? Justifique.

$(a^* + b^*) \neq (a+b)^*$

d) Indique uma palavra $u$ de $L \cap bcaA^*$ de comprimento 8 tal que $u = u^t$.

a)



b) $a^2, a^3, ba^2, ea^2, aba, aca, a^4b, a^3e, a^4, aba^2, ba^3, b^2a^2, \ldots$

c) Falso, a palavra abaea$^3$ $\in L$ e tem o factor abea

d) beaabbaeb

3. Seja $L$ a linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

i) $c \in L$;

ii) Se $w \in L$, então $bw \in L$;

iii) Se $w \in L$, então $awaa \in L$.

Seja ainda $K = \{xca^{2n} : x \in \{a, b\}^*, n \in \mathbb{N}_0, |x|_a = n\}$.

a) Mostre que a palavra $u = ab^2abca^4$ pertence a $L$ e a $K$.

b) Prove que $L = K$.

c) Mostre que a linguagem $M = \{a^m ca^{2m} : m \in \mathbb{N}_0\}$ não é regular.

d) Indique uma linguagem regular $R$ tal que $L \cap R = M$.

e) Apresente uma definição indutiva de $R$.

a) 1) $c \in L$ (regra i); 2) $bc \in L$ (regra ii) e 1)); 3) $abca^2$ (regra iii e 2)); 4) $b^2abca^2$ (regra ii e 3);

5) $ab^2abca^4 \in L$ (regra iii) e 4)). $u = xca^{2n}$ com $x = ab^2ab$ e $n = 2$. Dado que $|u|_a = 2$; $u \in K$

b) $L \subseteq K$

i) Suponhamos primeiro que $v = c$. Neste caso tem-se $v = xca^{2n}$ com $x \equiv \varepsilon$ e $n = 0$. Como $|\varepsilon|_a = 0$ é imediato que $v \in K$.

ii) Suponhamos agora que $v = bw$, com $w \in L$. Suponhamos ainda, por H.I, que $w \in K$. Então $w$ é do tipo $w = xca^{2n}$ com $x \in \{a,b\}^*$ e $|x|_a = n$. Daí resulta que $v = bxca^{2n}$ e que $|bx|_a = n$. Portanto $v \in K$.

iii) Por fim, $v = awa^2$, com $w \in L$. Assume-se também, por H.I, que $w \in K$. Logo $w = xca^{2n}$ com $x \in \{a,b\}^*$ e $|x|_a = n$. Assim $v = axca^{2(n+1)}$ com $|ax|_a = n+1$. $v \in K$

$K \subseteq L$

i) Suponhamos primeiro que $n = 0$. Então $v = b^m c$ para algum $m \in \mathbb{N}_0$. Por i), $c \in L$. Se $m = 0$, então $v = c \in L$. Senão $m > 0$ e aplicando $m$ vezes consecutivas a regra ii) deduz-se que $v = b^m c \in L$.

ii) Suponhamos agora que $n > 0$. Suponhamos ainda, por H.I, que para cada elemento $z \in K$ da forma $z = yca^{2(n-1)}$ com $y \in \{a,b\}^*$ e $|y|_a = n-1$, tem-se $z \in L$. Da $|u|_a = n$, resulta que $u$ é da forma $u = b^m ay$ com $y \in \{a,b\}^*$ e $|y|_a = n-1$. Logo, $v = b^m aza^2$ onde $z = yca^{2(n-1)}$. Por definição de $K$, $z \in K$. Logo, pelo H.I, $z \in L$. Pela regra iii) deduz-se, por consequinte, que a palavra $aza^2 \in L$. Para concluir que $v \in L$ basta agora aplicar $m$ vezes a regra ii).

c) Pelo Teorema de Kleene, mostrar que $M$ não é regular equivalente a mostrar que não é reconhecível. Suponhamos que $M$ é reconhecível. Então, pelo Lema da Iteração, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $u \in M$, com $|u| \geq n$, existe palavras $x, y, z \in A^*$ tais que:

i) $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$;

ii) $u = xyz$;

iii) $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $xy^kz \in M$

Consideremos, em particular, a palavra $u = a^n ca^{2n}$. Como $u \in M$ e $|u| \geq n$, deduz-se de i e iii que $u = xyz$ para alguns $x, y, z \in A^*$ tais que $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^2z \in M$. Como $|xy| \leq n$, $xy$ é um prefixo de $a^n$, donde $x = a^r$, $y = a^s$ e $z = a^t ca^{2n}$ com $r, s, t \in \mathbb{N}_0$, $s \neq 0$ e $r + s + t = n$, como se ilustra na seguinte figura

| $a^n$ | | $ca^{2n}$ |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ |

Portanto, $xy^2z = a^r(a^s)^2a^t ca^{2n} = a^{n+s} ca^{2n}$.

Como $s \neq 0$, $2(n+s) \neq 2n$ e, por isso, $xy^2z \notin M$, em contradição com (1). Consequentemente, $M$ não é reconhecível donde, pelo Teorema de Kleene, não é regular.

d) É claro que $M \subseteq L \cap R$ pois toda a palavra da forma $a^m ca^{2m}$, com $m \in \mathbb{N}_0$, pertence a $L$ (K) e a $R$. Verifiquemos, para concluir, que $L \cap R \subseteq M$. Seja $v \in L \cap R$. Então $v \in L$ e $v \in R$. De $v \in R$, deduz-se que $v = a^m ca^n$ para alguns $m, n \in \mathbb{N}_0$. Agora, de $v \in L$, e do facto de $L = K$ por b), resulta que $n = 2m$. Logo, $v \in M$. c.q.m.

e) i) $c \in R$; ii) se $w \in R$, então $awa \in R$; iii) Se $w \in R$, então $wa \in R$.

4. Seja $L$ a linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$ constituída pelas palavras que começam por $a$ e não têm o factor $b^2$.

a) Indique um autómato finito que reconheça $L$.

b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa $L$ ou não.

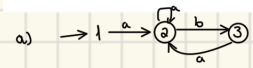
i) $a(ba)^* + a(ab)^*$.

ii) $a(a + ba)^*$.

iii) $a(a + ba)^*(\varepsilon + b)$.

c) Indique todas as palavras de $L$ de comprimento $\leq 4$.

a)



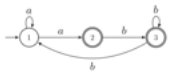
b) i) $aba^2 \in L$, mas $\notin L(R)$

ii) $ab \in L$, mas $\notin L(R)$

iii) r é a expressão regular que representa a linguagem reconhecida pelo automato da alínea a)

c) $\{u \in L : |u| \leq 4\} = \{a, a^2, ab, a^3, a^2b, aba, a^4, a^3b, a^2ba, aba^2, (ab)^2\}$

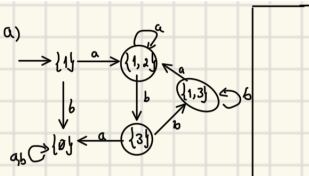
5. Seja $\mathscr{A}$ o autómato finito representado pelo seguinte grafo:



a) Construa um autómato finito determinista completo acessível equivalente a $\mathscr{A}$.

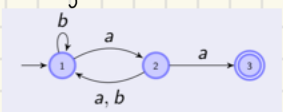
b) Indique palavras $u, v \in A^*$ tais que $|u| = |v| = 6$, $u \in L(\mathscr{A})$ e $v \notin L(\mathscr{A})$.

a)



b) $u = a^2b^2a^2$ $v = ba^3ba$

expressão regular a partir de um automato



$$\begin{cases} x_1 = bx_1 + ax_2 + \emptyset x_3 + \emptyset \\ x_2 = (a+b)x_1 + \emptyset x_2 + ax_3 + \emptyset \\ x_3 = \emptyset x_1 + \emptyset x_2 + \emptyset x_3 + \varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = bx_1 + ax_2 \\ x_2 = (a+b)x_1 + ax_3 \\ x_3 = \varepsilon \end{cases}$$

resolvendo o sistema

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (b+a^2+ab)^*a^2 \\ x_2 = (a+b)(b+a^2+ab)^*a^2 + a \\ x_3 = \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + aX_3 \\ X_3 = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = bX_1 + aX_2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + a\epsilon \\ X_3 = \epsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = bX_1 + a((a+b)X_1 + a) \\ X_2 = (a+b)X_1 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b+a^2+ab)X_1 + a^2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b+a^2+ab)^*a^2 \\ X_2 = (a+b)X_1 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = (b+a^2+ab)^*a^2 \\ X_2 = (a+b)(b+a^2+ab)^*a^2 + a \\ X_3 = \epsilon \end{cases}$$

Todo o automato com transições vazias é equivalente a um automato sem transições vazias

1.11 Considere as linguagens $L_1 = A^*aA^*bA^*$, $L_2 = A^*bA^*aA^*$ e $L = A^*aA^*bA^*aA^*$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) $L_1 \cap L_2 = L$.

b) $L_1L_2 \subseteq L$.

c) $L \subseteq L_1L_2$.

a) $L_1 = \{u_1 a u_2 b u_3 : u_1, u_2, u_3 \in A^*\}$

$L_2 = \{v_1 b v_2 a v_3 : v_1, v_2, v_3 \in A^*\}$

$L = \{w_1 a w_2 b w_3 a w_4 : w_1, w_2, w_3, w_4 \in A^*\}$

Se um $L$, a $w_3 a w_4$ chamarmos $u_3$ ($u_3 = w_3 a w_4$), então temos $L_1$;

Se a $w_1 a w_2$ chamarmos $v_3$ ($v_3 = w_1 a w_2$), então temos $L_2$.

$\rightarrow L \subseteq L_1 \cap L_2$ Verdade

$\rightarrow w \in L \Rightarrow w = w_1 a w_2 b w_3 a w_4$ com $w_i \in A^*$

$\Rightarrow w = w_1 a w_2 b w_3 \in L_1$ e $w = v_1 b w_3 a w_4 \in L_2$.

$L_1 \cap L_2 \subseteq L$ é falso. Por exemplo, a palavra $bab \in L_1 \cap L_2$ e $bab \notin L$

Para $L_1 \cap L_2 = L$, $L \subseteq L_1 \cap L_2$ e $L_1 \cap L_2 \subseteq L$ tinham de ser verdade. Logo $L_1 \cap L_2 \neq L$.

b) $L_1L_2 \subseteq L$

$u \in L_1L_2 \Rightarrow u = uv$ com $u \in L_1$ e $v \in L_2$

Verdade, porque $\Rightarrow u = u_1 a u_2 b u_3 a v_3$ com $u_1, u_2, u_3, v_3 \in A^*$

$\Rightarrow u \in L$.

c) $L \subseteq L_1L_2$. Falso, porque $aba \in L \setminus L_1L_2$

### Lema da Iteração (ou da Bombagem)

Seja $L$ uma linguagem reconhecível infinita, sobre um alfabeto $A$. Então existe uma constante $n \in \mathbb{N}$ tal que, para toda a palavra $u \in L$ de comprimento superior ou igual a $n$, existem palavras $x, y, z \in A^*$ tais que:

i) $|xy| \leq n$ e $y \neq \epsilon$;

ii) $u = xyz$;

iii) $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $xy^kz \in L$.

### Exemplo 3

A linguagem $L = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}_0\}$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ não é reconhecível.

**Demonstração:** Suponhamos que $L$ é reconhecível. Então, pelo Lema da Iteração, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $u \in L$, com $|u| \geq n$, existem palavras $x, y, z \in A^*$ tais que:

i) $|xy| \leq n$ e $y \neq \epsilon$;

ii) $u = xyz$;

iii) $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $xy^kz \in L$.

Consideremos, em particular, a palavra $u = a^n b^n$. Como $u \in L$ e $|u| \geq n$, deduz-se de i)-iii) que $u = xyz$ para alguns $x, y, z \in A^*$ tais que $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ e

$$xy^2z \in L. \quad (1)$$





Como $|xy| \leq n$, $xy$ é um prefixo de $a^n$, donde

$$x = a^r, \quad y = a^s \quad \text{e} \quad z = a^t b^n$$

onde $r, s, t \in \mathbb{N}_0$, com $s \neq 0$ (pois $y \neq \epsilon$) e $r + s + t = n$, como se ilustra na seguinte figura.

| $a^n$ | | | $b^n$ |
|---|---|---|---|
| $aa \cdots a \cdots aa$ | | | $bb \cdots b \cdots bb$ |
| $a^r$ | $a^s$ | $a^t$ | $b^n$ |
| $x$ | $y$ | | $z$ |

Portanto

$$xy^2z = a^r(a^s)^2a^tb^n = a^{r+2s+t}b^n = a^{n+s}b^n.$$

Ora, como $s \neq 0$, tem-se $n + s \neq n$ e, por isso, $xy^2z \notin L$.

Isto contradiz (1) e, consequentemente, $L$ não é reconhecível.

Exemplo para capicuas:

iremos considerar $u = a^r$, $y = a^p$, $z = a^t b^n a^n$ $r+p+t=n$

$uyz = a^r a^p a^t b^n a^n$

| $a^r$ | $a^p$ | $a^t b^n a^n$ |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ |

$xy^2z = a^r a^p a^p a^t b^n a^n = a^r a^{2p} a^t b^n a^n = a^{n+p} b^n a^n \neq a^n b^n a^n$

com $r, t \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$ e $r+s+t=n$, como se ilustra na seguinte figura:

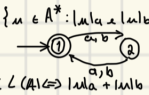
| $a^n$ | | $b^n$ |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ |

Portanto, $uy^2z = a^r(a^s)^2a^t b^n = a^{r+2s+t} b^n$.

Ora, como $s \neq 0$, tem-se $r+2s+t \neq r+s+t=n$ e por isso, $uy^2z \notin L$. Isto contradiz (1) e, consequentemente, $L$ não é reconhecível.

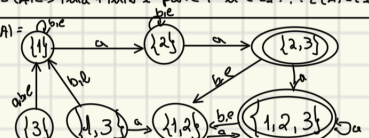
b) Para $n=2$, vem que:

$L_2 = \{u \in A^* : |u|_a$ e $|u|_b$ são ambos impares ou pares$\}$



$u \in L(A) \Leftrightarrow |u|_a + |u|_b$ é par $\Leftrightarrow u \in L_2$. $\therefore L(A) = L_2$.

c) $D(A) =$



1.17 Para cada uma das seguintes expressões regulares $r$ sobre o alfabeto $\{0, 1\}$, determine $\mathcal{L}(r)$:

a) $0(0 + 1)^*1$;

b) $(\varepsilon + 0)^*$;

c) $0^*1^*0^*$;

d) $(0 + 1)^40(0 + 1)^*$.

a) $L(r) = \{w \in A^* : w$ começa com 0 e termina com $1\} = 0A^*nA^*1$

b) $L(r) = \{0^n : n \in \mathbb{N}_0\} = L(0^*)$

c) $L(r)$ é a linguagem das palavras sobre A em que as ocorrencias da letra 1 são todas consecutivas ou seja, $L(r) = A^*1^*1A^*1A^*0A^*1A^*$

d) $L(r) = \{u\,0\,v : u, v \in A^*, |u| = 4\}$ e a linguagem das palavras sobre o Alfabeto A de comprimento $\geq 5$ cuja posição 5 é uno

2.10 Sejam $A = \{a, b\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Recorde que, dados $x, y \in \mathbb{N}_0$, diz-se que $x$ é congruente com $y$ módulo $n$, e escreve-se $x \equiv y (\text{mod } n)$, se $x$ e $y$ têm o mesmo resto na divisão inteira por $n$ (ou seja , se $x - y$ é um múltiplo de $n$).

a) Mostre que a linguagem $\{u \in A^* : |u|_a = |u|_b\}$ não é reconhecível.

b) Mostre que a linguagem $L_n = \{u \in A^* : |u|_a \equiv |u|_b (\text{mod } n)\}$ é reconhecível.

a) Consideremos, em particular, a palavra $u = a^n b^n$. Como $u \in L$ e $|u| \geq n$, deduz-se de i)-iii) que $u = xyz$ para alguns $x, y, z \in A^*$ tais que $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^2z \in L$.

Como $|xy| \leq n$, $xy$ é um prefixo de $a^n$, donde

$x = a^r$, $y = a^s$ e $z = a^t b^n$

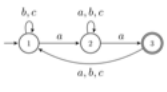
com $r, s, t \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$ e $r+s+t=n$, como se ilustra na seguinte figura:

| $a^n$ | | $b^n$ |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | $z$ |

Portanto, $xy^2z = a^r(a^s)^2a^t b^n = a^{r+2s+t} b^n$.

Ora, como $s \neq 0$, tem-se $r+2s+t \neq r+s+t=n$ e por isso, $xy^2z \notin L$. Isto contradiz (1) e, consequentemente, L não é reconhecível

2.12 Considere o autómato $\mathcal{A}$ representado graficamente por



a) Mostre que $acba$ é uma palavra aceite por $\mathcal{A}$ e que $acbab$ é uma palavra rejeitada por este autómato.

b) Descreva a linguagem $L(\mathcal{A})$ reconhecida por $\mathcal{A}$.

c) Determine o autómato $D(\mathcal{A})$ equivalente a $\mathcal{A}$.

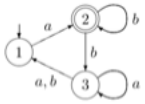
Caracteristicas dos automatos: Deterministo - só pode sair uma ocorrencia de cada letra

Completo - tem de existir pelo menos uma transição de cada letra em cada estado.

Acessivel - se todos os estados são acessiveis a partir do estado inicial.

Co-Acessivel - se de qualquer estado consegues chegar ao estado final.

**5.** Seja $\mathcal{A}$ o autómato finito representado pelo seguinte grafo:



*

a) Indique o sistema de equações lineares associado ao autómato $\mathcal{A}$. Resolva este sistema e indique uma expressão regular que represente $L(\mathcal{A})$.

a)

* Aula

$$\begin{cases} x_1 = a\,x_2 \\ x_2 = b\,x_2 + b\,x_3 + \varepsilon \\ x_3 = (a+b)\,x_1 + a\,x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ x_3 = (a+b)a\,x_2 + a\,x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x_2 = b\,x_2 + ba^*(a+b)a\,x_2 + \varepsilon \\ x_3 = a^*(a+b)a\,x_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

**2.23** Considere o alfabeto $A = \{0,1\}$. Para cada linguagem $L_0$ a seguir indicada:

i) $L_0 = \{x \in A^* : |x| \equiv 1 \pmod 3\}$;

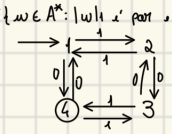
ii) $L_0$ é o conjunto das palavras sobre $A$ que têm pelo menos um algarismo repetido;

iii) $L_0$ é o conjunto das palavras sobre $A$ que têm um número par de ocorrências do símbolo 1 e um número ímpar de ocorrências do símbolo 0.

a) Construa um autómato que reconheça $L_0$;

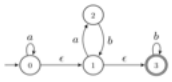
b) Recorrendo ao método das equações lineares, determine uma expressão regular $r$ tal que $\mathcal{L}(r) = L_0$.

iii) $L_0 = \{w \in A^* : |w|_1$ é par e $|w|_0$ é impar$\}$



$$\begin{cases} x_1 = \emptyset x_1 + 1 x_2 + \emptyset x_3 + 0 x_4 \\ x_2 = 1 x_1 + \emptyset x_2 + 0 x_3 + \emptyset x_4 \\ x_3 = \emptyset x_1 + 0 x_2 + \emptyset x_3 + 1 x_4 \\ x_4 = 0 x_1 + \emptyset x_2 + 1 x_3 + \emptyset x_4 + \varepsilon \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = 1 x_2 + 0 x_4 \\ x_2 = 1 x_1 + 0 x_3 \\ x_3 = 0 x_2 + 1 x_4 \\ x_4 = 0 x_1 + 1 x_3 + \varepsilon \end{cases}$$

**2.17** Seja $A = \{a, b\}$ e seja $\mathcal{A}$ o autómato com transições-$\epsilon$ dado pelo seguinte



a) Para cada um dos estados $q$ de $\mathcal{A}$, calcule $\text{fecho}_\epsilon(q)$.

a)

$\text{fecho}_\epsilon(0) = \{0, 1, 3\}$

$\text{fecho}_\epsilon(1) = \{1, 3\}$

$\text{fecho}_\epsilon(2) = \{2\}$

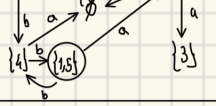
$\text{fecho}_\epsilon(3) = \{3\}$

**2.13** Considere o autómato $\mathcal{A}$ representado pelo seguinte grafo.

a) Descreva a linguagem $L(\mathcal{A})$ reconhecida por $\mathcal{A}$.

b) Determine um autómato determinista, completo e acessível que seja equivalente a $\mathcal{A}$.

b) DA(A):



O sistema de equação associado a A é

$$\begin{cases} x_1 = a\,x_1 + a\,x_2 + \emptyset \\ x_2 = b\,x_1 + b\,x_2 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow$$

↳ Para codificar estados finais

$$\begin{cases} x_1 = a\,x_1 + a\,x_2 \\ x_2 = b\,x_1 + b\,x_2 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a^* a\,x_2 \\ x_2 = b a^* a\,x_2 + b\,x_2 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x_2 = (b a^* a + b)x_2 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a a^* (b a^* a + b)^* \\ x_2 = (b a^* a + b)^* + \varepsilon \end{cases}$$

Portanto a solução mínima do sistema é $(a^* a\,(b\,a^* a + b)^*, (b a^* a + b)^*)$

Como 1 é o estado inicial de A, deduz-se que $L(A) = a^* a\,(b\,a^* a + b)^*$.

B

$$\begin{cases} x_1 = a x_1 + a x_2 + \emptyset x_3 + \emptyset \\ x_2 = b x_1 + \emptyset x_2 + b x_3 + \varepsilon \\ x_3 = \emptyset x_1 + b x_2 + b x_3 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a x_1 + a x_2 \\ x_2 = b x_1 + b x_3 + \varepsilon \\ x_3 = b x_2 + b x_3 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a^* a x_2 \\ x_2 = b x_1 + b(b^*(b x_2 + \varepsilon)) \\ x_3 = b^*(b x_2 + \varepsilon) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x_2 = b x_1 + b b^*(b x_2 + \varepsilon) + \varepsilon \\ x_3 = b^*(b x_2 + \varepsilon) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x_2 = b b^* b x_2 + b b + b x_1 + \varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a x_1 + a(b b^* b)^*(b x_1 + b b^* + \varepsilon) \\ x_2 = (b b^* b)^*(b x_1 + b b^* + \varepsilon) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (a + a)\,b b^* b)^* b)\,x_1 + a(b b^* b)^*(b b^* + \varepsilon) \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = (a + a(b b^* b)^* b)^* a\,(b b^* a)^*(b b^* + \varepsilon) \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases}$$

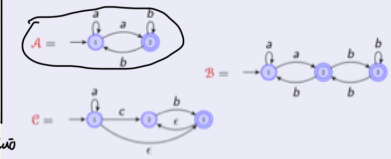
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x_2 = (b + b^*(a+b)a)\,x_2 + \varepsilon \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a(b + b a^*(a+b)a)^* \\ x_2 = (b + b^*(a+b)a)^* \\ x_3 = a^*(a+b)a\,(b + b a^*(a+b)a)^* \end{cases}$$

o unico que interessa é o do estado inicial logo $L(A) = x_1$

$a^+ = a a^*$

**Problema 2.8**

Para cada um dos autómatos seguintes, indique o sistema de equações lineares que lhe está associado. Resolva esse sistema e indique uma expressão regular que represente a linguagem reconhecida pelo autómato.



Note-se que $\mathcal{C}$ é um autómato com transições vazias. Nestes casos deve-se adaptar o sistema associado fazendo $s_j = \begin{cases} \epsilon & \text{se } \text{fecho}_\epsilon(j) \cap F \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{senão} \end{cases}$.

**Definição**

Seja $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ um autómato finito. Pode-se supôr que $Q = \{1, \ldots, n\}$. Associa-se a $\mathcal{A}$ um *sistema de equações lineares à direita*

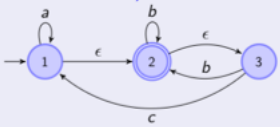
$$\begin{cases} X_1 = r_{11}X_1 + r_{12}X_2 + \cdots + r_{1n}X_n + s_1 \\ \vdots \\ X_n = r_{n1}X_1 + r_{n2}X_2 + \cdots + r_{nn}X_n + s_n \end{cases}$$

onde, para cada $j, k \in Q$,

- $r_{jk}$ é uma expressão regular que representa a linguagem $R_{jk} = \{a \in A \mid \text{existe uma transição } j \xrightarrow{a} k\}$;
- $s_j = \begin{cases} \epsilon & \text{se } j \in F \\ \emptyset & \text{se } j \notin F \end{cases}$

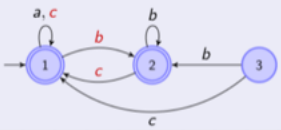
**Exemplo 12**

Consideremos o autómato com transições vazias $\mathcal{A}$ do exemplo anterior.



Vimos já que $\text{fecho}_\epsilon(1) = \{1, 2, 3\}$, $\text{fecho}_\epsilon(2) = \{2, 3\}$ e $\text{fecho}_\epsilon(3) = \{3\}$.

O autómato síncrono $\mathcal{A}'$ descrito na demonstração do teorema anterior é

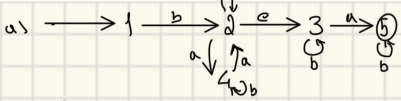


**4.** Seja $L$ a linguagem sobre o alfabeto $\{a, b, c\}$ constituída pelas palavras que:

- começam por $b$;
- têm exatamente uma ocorrência de $c$;
- têm um número par de ocorrências de $a$ antes da ocorrência de $c$;
- têm exatamente uma ocorrência de $a$ depois da ocorrência de $c$.

a) Indique um autómato finito que reconheça $L$.

a)



b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa $L$ ou não.

i) $b(aa)^*b^*cab^*$. Não Pois pode ter b no meio de aa

ii) $ba(a+b)^*cb^*ab^*$. Não tá correta pois não é necessario ter um a logo a seguir não b

iii) $b(ab^*a+b)^*cb^*ab^*$. Está correta Pois representa o automato

**1.** Considere a linguagem $L = \{a, aba\}^*$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) Entre duas ocorrências da letra $b$ numa palavra de $L$, existem pelo menos duas ocorrências da letra $a$.

b) $L \setminus A^*aA^*aA^* = \emptyset$.

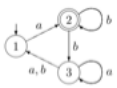
a)

$L = \{a, aba\}^+$ verdade abooba palavra menor com 2b

$= \{u_1 u_2 \ldots u_n : n > 1$ e $u_i \in \{a, aba\}^*\}$

b) falso, aba

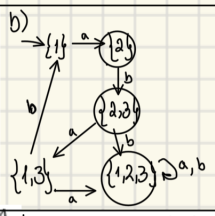
**5.** Seja $\mathcal{A}$ o autómato finito representado pelo seguinte grafo:



a) Indique o sistema de equações lineares associado ao autómato $\mathcal{A}$. Resolva este sistema e indique uma expressão regular que represente $L(\mathcal{A})$.

b) Construa um autómato finito determinista que reconheça $L(\mathcal{A})$.

b)



$x = rx + s$

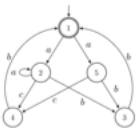
$x = r^* s$

Alternativamente, o conjunto $\mathcal{R}eg(A)$ das linguagens regulares sobre $A$ pode ser definido indutivamente por:

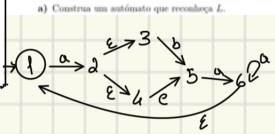
- $\emptyset, \{\epsilon\} \in \mathcal{R}eg(A)$;
- $\{a\} \in \mathcal{R}eg(A)$ para todo o $a \in A$;
- $\mathcal{R}eg(A)$ é fechado para as operações de união, produto e fecho de Kleene.
  Ou seja, se $L, K \in \mathcal{R}eg(A)$ então $L \cup K$, $LK$, $L^* \in \mathcal{R}eg(A)$.

Note-se que, se $L$ é uma linguagem regular sobre um alfabeto $A$, então $L^+ = L^*L$ também é uma linguagem regular sobre $A$.

**2.20** Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$, a linguagem $L = (a(b + c)a^*)^*$ e o autómat descrito na figura abaixo.



a) Construa um autómato que reconheça $L$.



**Problema 2.4**

Use o Lema da Iteração para provar que as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ não são reconhecíveis.

a) $\{a^m b^{2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

b) $\{w \in A^* \mid w^I = w\}$, a linguagem das palavras *capicua* sobre $A$.

a)

$u = a^m b^{2m} \in L$, $|u| \geq n$

$u = xyz$, se $xy^2z \in L$

$x = a^r$, $y = a^s$, $z = a^t b^{2m}$

$xy^2z = a^r(a^s)^2 a^t b^{2m} = a^{r+2s+t} b^{2m}$

como $s \neq 0$, tem-se $r + 2s + t \neq r + s + t = n$

então $xy^2z \notin L$. $L$ não é reconhecível

b) $u = a^n b^n a^n$, $|u| \geq n$

$u = xyz$, se $xy^2z \in L$

$x = a^r$, $y = a^s$, $z = a^t b^n$

$xy^2z = a^r(a^s)^2 a^t b^n = a^{n+s} b^n a^n \notin L$

O resultado seguinte mostra que os autómatos com transições vazias reconhecem exatamente as mesmas linguagens que os autómatos sem transições vazias.

**Teorema**

Todo o autómato assíncrono $\mathcal{A}$ é equivalente a um autómato síncrono $\mathcal{A}'$.

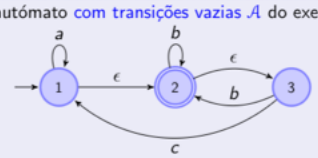
**Demonstração:** Sendo $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ um autómato assíncrono qualquer, seja $\mathcal{A}' = (Q, A, \delta', i, F')$ o autómato tal que:

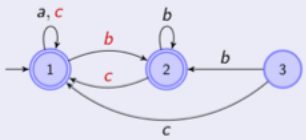
- $\delta' : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ é a função definida, para cada $(q, a) \in Q \times A$, por
$$\delta'(q, a) = \bigcup_{p \in \text{fecho}_\epsilon(q)} \delta(p, a).$$
- $F' = \{q \in Q \mid \text{fecho}_\epsilon(q) \cap F \neq \emptyset\}$.

Como se pode verificar, $\mathcal{A}'$ é um autómato síncrono equivalente a $\mathcal{A}$. □

**Exemplo 12**

Consideremos o autómato com transições vazias $\mathcal{A}$ do exemplo anterior.



Vimos já que $\text{fecho}_\epsilon(1) = \{1, 2, 3\}$, $\text{fecho}_\epsilon(2) = \{2, 3\}$ e $\text{fecho}_\epsilon(3) = \{3\}$.

O autómato síncrono $\mathcal{A}'$ descrito na demonstração do teorema anterior é