

## Espaços Vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

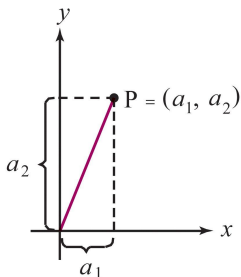
Revisão de alguns conceitos preliminares para o cálculo com funções de várias variáveis:

- vetores em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ ;
- produto escalar, norma e distância;
- matrizes, determinantes e produto vetorial.

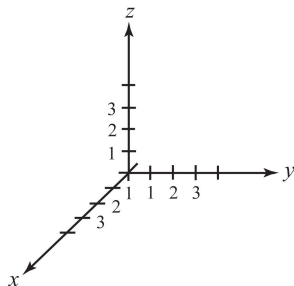
## Vetores em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$

1. Pontos no plano são representados por **pares ordenados** de números reais  $(a_1, a_2)$ . Os números  $a_1$  e  $a_2$  designam-se as coordenadas cartesianas.

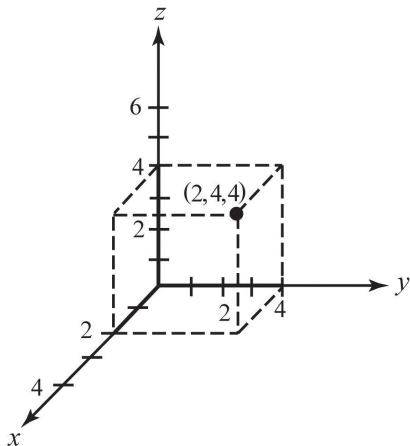
Pontos no espaço são representados como **triplos ordenados** de números reais  $(a_1, a_2, a_3)$ .



(a) Coordenadas cartesianas no plano



(b) Coordenadas cartesianas no espaço



**Figura 1:** Representação geométrica do ponto  $(2, 4, 4)$  em coordenadas cartesianas.

2. Adição e multiplicação escalar são definidas por

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

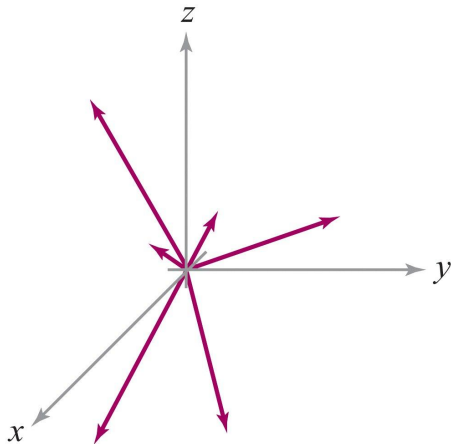
$$\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

e

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

3. Um vetor é um segmento de reta orientado com uma extremidade inicial (por defeito, a origem do referencial) e uma extremidade final (indicada por uma seta).



**Figura 2:** Geometricamente, pensamos em vetores com a base na origem do referencial.

4. Os vetores são adicionados usando a *regra do paralelogramo* e a multiplicação pelo escalar  $\lambda$  *estende* o comprimento do vetor por  $\lambda$  (na direção oposta se  $\lambda < 0$ ).
5. A adição e multiplicação escalar de vetores (geométrica) correspondem às mesmas operações nas coordenadas (algébricas).

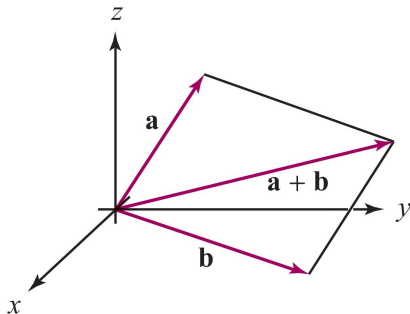


Figura 3: Geometria da adição de vetores.

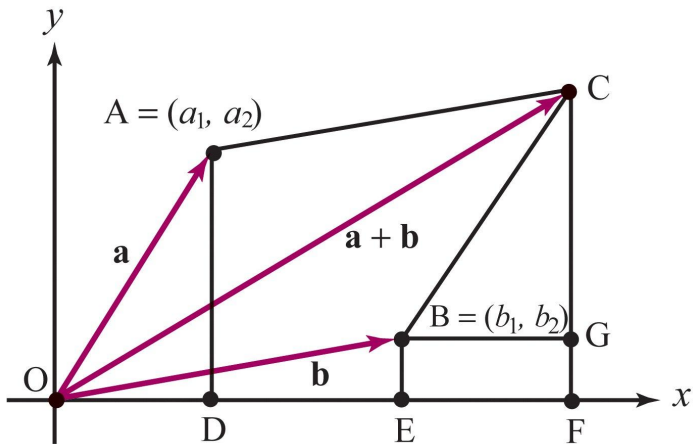
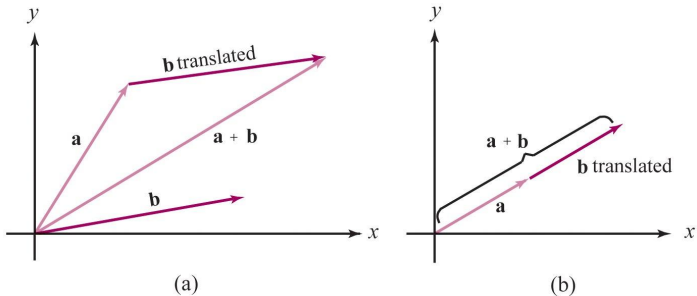


Figura 4: Construção geométrica que mostra que a regra do paralelogramo (definição geométrica) coincide com a definição algébrica  $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ .



**Figura 5:** A adição pode ser vista não só em termos de paralelogramos como também em termos de triângulos.



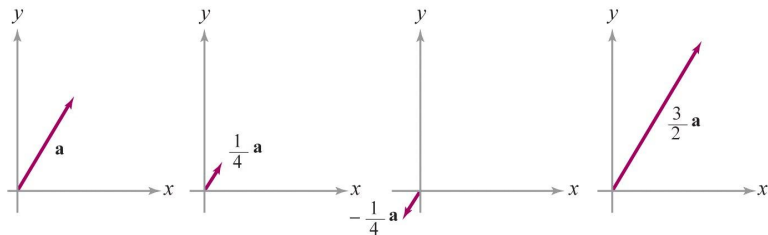


Figura 6: Alguns múltiplos escalares do vetor  $\vec{a}$ .

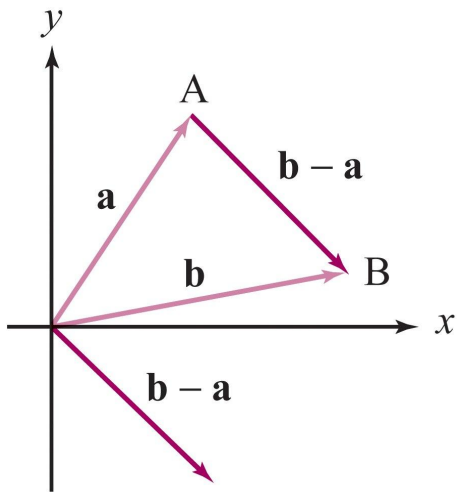


Figura 7: Geometria da subtração de vetores.

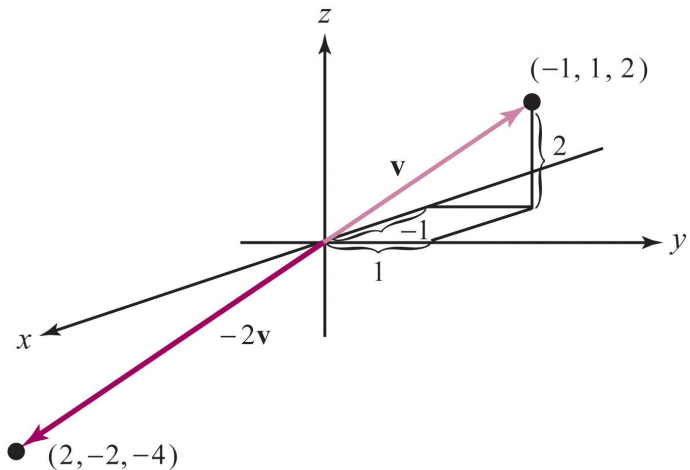


Figura 8: Multiplicação de  $(-1, 1, 2)$  por  $-2$ .

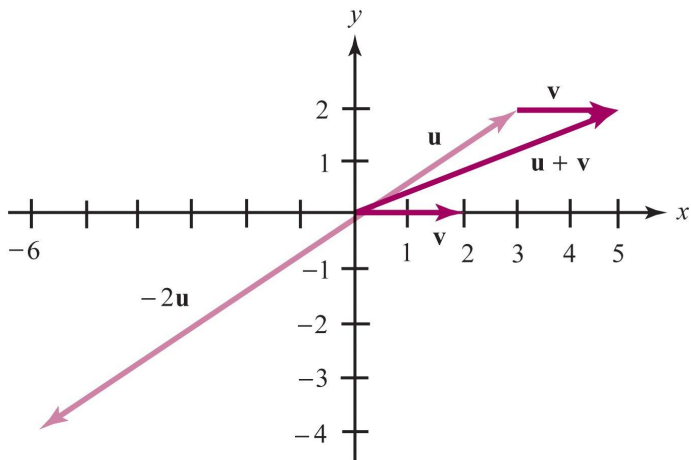


Figura 9: Determinação de  $\vec{u} + \vec{v}$  e de  $-2\vec{u}$ .

6. Base canónica de  $\mathbb{R}^2$ :

vetores unitários  $\vec{i} = (1, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1)$

$\vec{a} = (a_1, a_2)$  escreve-se

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$$

Base canónica de  $\mathbb{R}^3$ :

vetores unitários  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  escreve-se

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

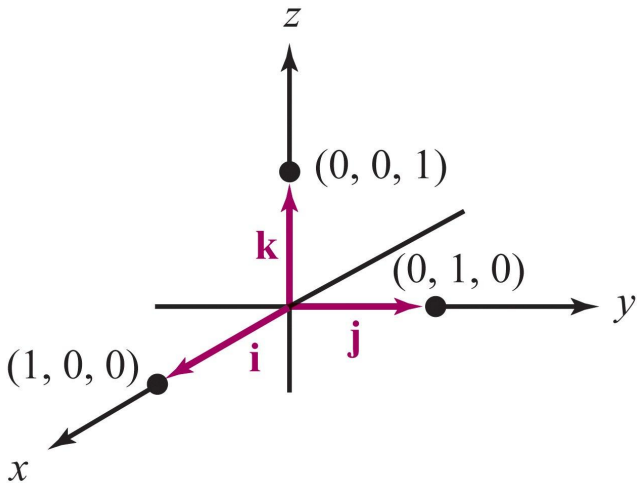


Figura 10: Base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

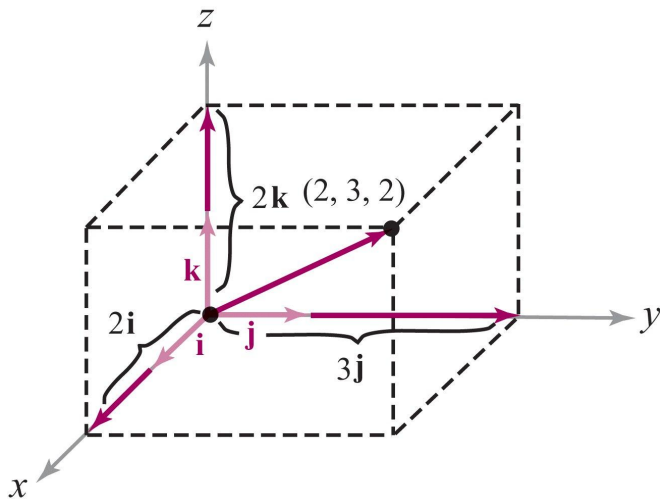


Figura 11: Representação de  $(2, 3, 2)$  em termos da base canónica.

7. O vetor que une dois pontos  $P = (x, y)$  e  $P' = (x', y')$  é o vetor  $\overrightarrow{PP'}$ , vetor de  $P$  para  $P'$ , e tem coordenadas

$$\overrightarrow{PP'} = (x' - x, y' - y).$$

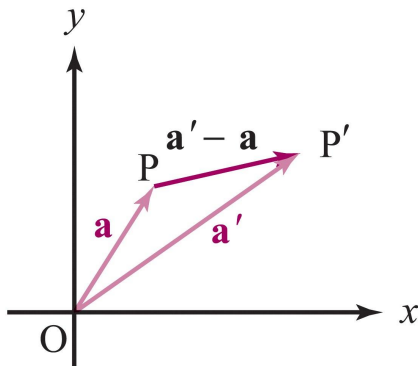


Figura 12:  $\overrightarrow{PP'} = \vec{a'} - \vec{a}$ .



8. A equação da **reta** que passa **pelo ponto**  $a$  (visto como um vetor com base na origem) e com direção do **vetor**  $\vec{v}$  (visto como um vetor com base em  $a$ ) é

$$\ell(t) = a + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em  $\mathbb{R}^3$ , para  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , as **equações paramétricas** da reta  $\ell$  são

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2, \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

onde  $(x, y, z)$  é um ponto genérico da reta.

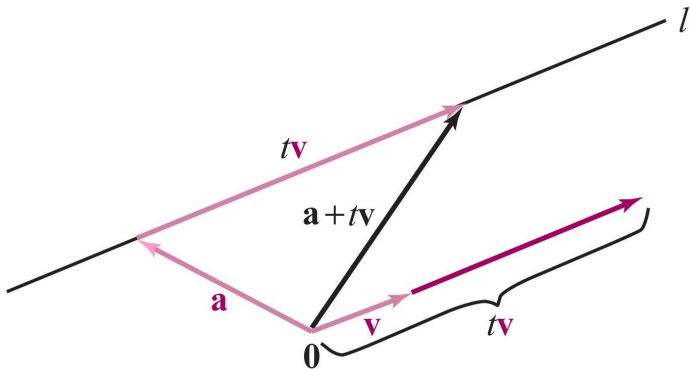


Figura 13: A reta  $\ell$  tem a direção de  $\vec{v}$  e passa por  $a$ .

9. Em  $\mathbb{R}^3$ , as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  são

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

onde  $(x, y, z)$  é um ponto genérico da reta.

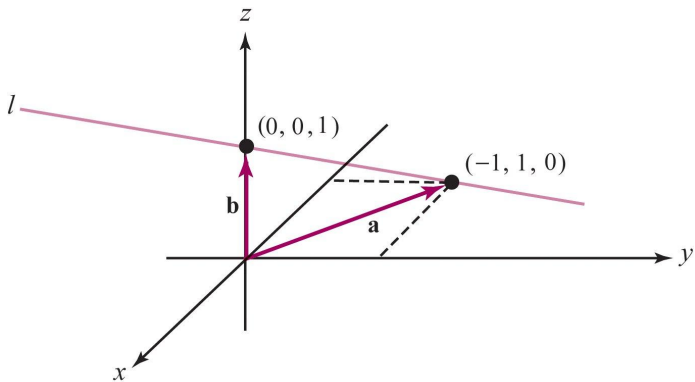


Figura 14: Reta que contém os pontos  $(0, 0, 1)$  e  $(-1, 1, 0)$ .

10. O plano que passa pela origem e contém os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  consiste em todos os pontos da forma

$$s\vec{v} + t\vec{w}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

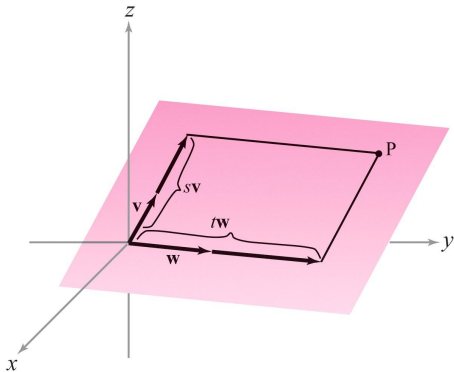


Figura 15: Plano gerado pelos vetores  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$  e que contém a origem.

O plano paralelo que passa pelo ponto  $a$  tem equação

$$a + s\vec{v} + t\vec{w}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

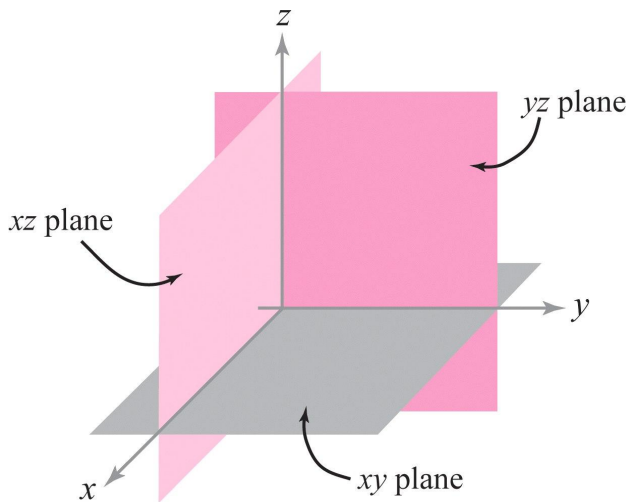


Figura 16: Os três planos coordenados.

# Produto escalar, norma e distância

1. O **produto escalar (ou interno)** entre os vetores  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  é definido por
- $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

A notação  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  é também usual.

Permite-nos calcular o ângulo  $\theta$  entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

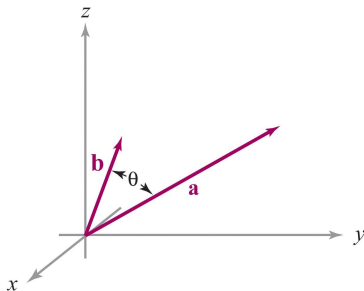


Figura 17:  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

2. A **norma ou comprimento** de  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  é definida por

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

3. Para normalizar um vetor não nulo  $\vec{a}$ , formamos o **vetor unitário (ou versor)**

$$\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$



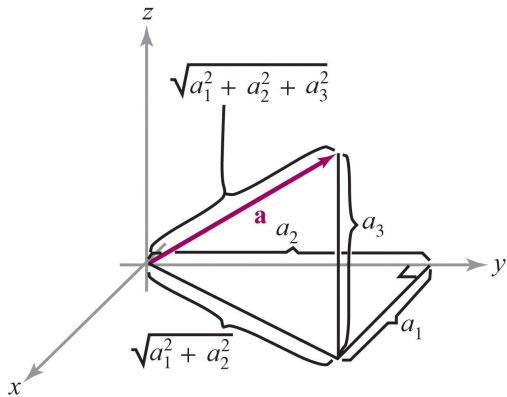


Figura 18: Comprimento do vetor  $\vec{a}$  é dado por  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ .

## 7. Propriedades algébricas

Se  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são vetores em  $\mathbb{R}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então

a.  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

b.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

c.  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

d.  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$

e.  $\|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$

Facilmente se provam estas propriedades usando a definição de produto escalar e norma.

4. A **distância** entre dois pontos  $P$  e  $Q$  é dada por  $\|\overrightarrow{PQ}\|$ .

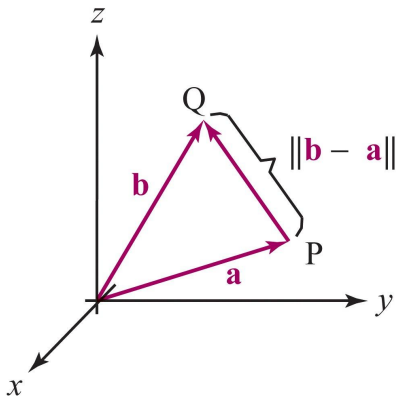


Figura 19: Distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ .

5. No plano definimos o vetor  $\vec{i}_\theta = (\cos \theta) \vec{i} + (\sin \theta) \vec{j}$ , vetor unitário formando um ângulo  $\theta$  com o eixo do  $xx$ .

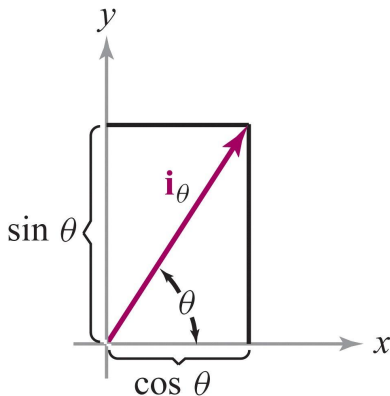


Figura 20: Vetor unitário porque  $\|\mathbf{i}_\theta\| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ .

6. O ângulo  $0 \leq \theta \leq \pi$  entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  satisfaz
- $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta.$$

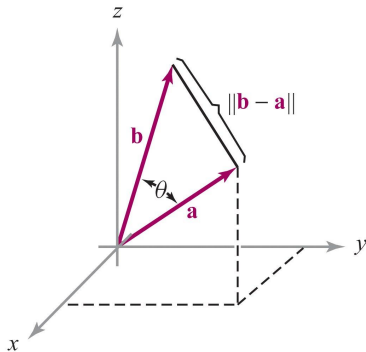


Figura 21: Ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

Segue que se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são não nulos,  $\theta = \arccos \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right)$ .

## 7. Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para quaisquer vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  temos

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|,$$

verificando-se a igualdade se  $\vec{a}$  é um múltiplo escalar de  $\vec{b}$  ou um dos vetores é nulo.

8. Dizemos que dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são **ortogonais** quando  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

## 9. Desigualdade triangular

Para vetores  $\vec{a}$  em  $\vec{b}$  tem-se

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

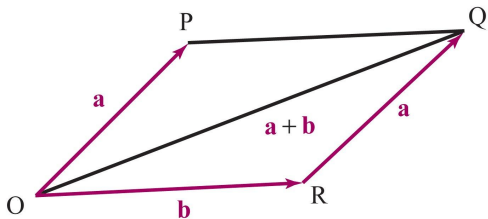


Figura 22: Desigualdade triangular.

# Matrizes, determinantes e produto vetorial

1. Chama-se **matriz do tipo  $m \times n$**  sobre  $\mathbb{R}$  a um quadro que se obtém dispondo  $mn$  números segundo  $m$  linhas e  $n$  colunas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, matrizes do tipo  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$  têm, respetivamente, a forma geral

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$



2. O **determinante** de uma matrix  $2 \times 2$  é o número real dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e de uma matriz  $3 \times 3$ ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

3. Trocar linhas ou colunas resulta numa troca de sinal no determinante; se multiplicarmos uma linha (ou coluna) por um escalar, o determinante é também multiplicado por esse escalar; substituir uma linha (ou coluna) pela soma com um múltiplo escalar de outra linha (ou coluna) não altera o determinante.

#### 4. Produto vetorial (ou produto externo)

Dados  $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$  e  $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$  dois vetores de  $\mathbb{R}^3$ , o **produto vetorial** de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , denotado por  $\vec{a} \times \vec{b}$ , é definido como sendo o vetor

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}\end{aligned}$$

ou, simbolicamente (mnemónica),

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

5. O vetor  $\vec{a} \times \vec{b}$  é ortogonal a qualquer vetor do plano gerado por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , em particular a  $\vec{a}$  e a  $\vec{b}$ .

Ou seja, se  $\vec{c}$  é combinação linear de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , temos

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Chamamos a um produto destes um **produto misto**.

6. O comprimento de  $\vec{a} \times \vec{b}$  é

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta,$$

onde  $0 \leq \theta \leq \pi$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , e é igual à área do paralelogramo definido por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

Como consequência, podemos concluir que os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são paralelos se e somente se  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

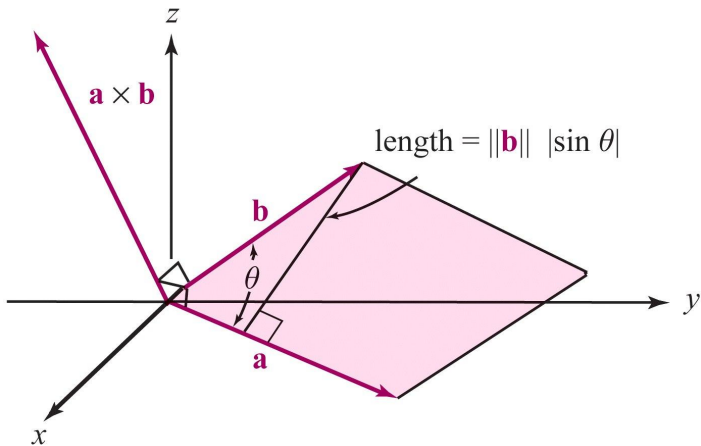


Figura 23:  $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$  é a área do paralelogramo gerado por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

## 7. Propriedades algébricas

- a.  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  se e só se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são paralelos ou um dos vetores é o vetor nulo.
- b.  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- c.  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- d.  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
- e.  $(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$

8.

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

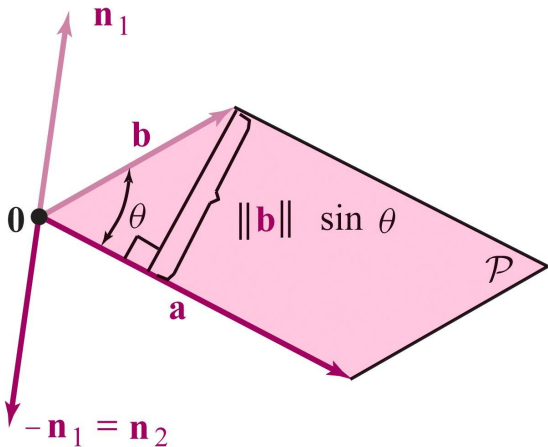


Figura 24:  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  são dois possíveis vetores ortogonais a  $\vec{a}$  e a  $\vec{b}$  e com norma  $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$ .

O triplo  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$  obedece à regra de mão direita

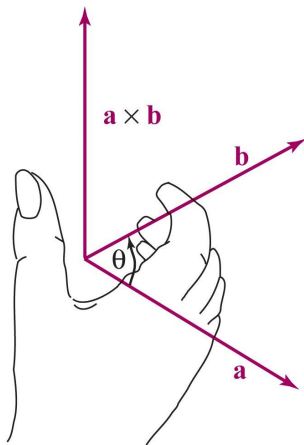


Figura 25: Regra da mão direita para determinar em que direção aponta o vetor  $\vec{a} \times \vec{b}$ .



9. A **equação do plano** que passa no ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e é perpendicular ao vetor  $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$  é dada por

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

ou seja,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

onde  $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ .

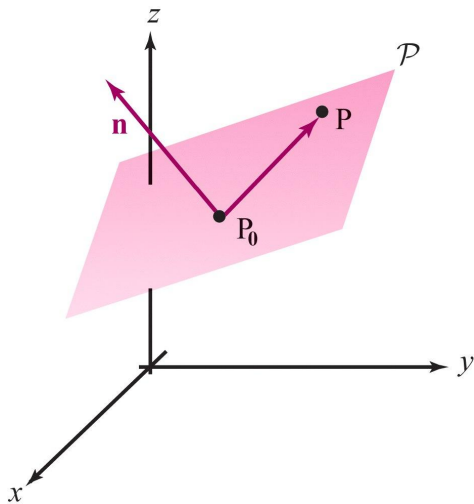


Figura 26:  $\overrightarrow{P_0P}$  e  $\vec{n}$  são perpendiculares e satisfazem  $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$ .