



Soluções da Folha 4 - Noções elementares sobre funções reais de variável real

Exercício 1

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$; c) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$;
b) $\text{Dom}(g) = [0, 2/3]$; d) $\text{Dom}(i) = [3/4, 2] \cup [2, +\infty[$.

Exercício 2

- a) $\text{Im}(f) = [-7, 5]$; b) $\text{Im}(g) = [0, 9]$.

Exercício 3 $f^{-1}([-1, 3]) =]-\infty, 2[$; $f^{-1}([-1, 0]) =]1, +\infty[$; $f^{-1}(\{2\}) =]-\infty, 1]$.

Exercício 4

- a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; não limitada; não monótona;
b) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; não limitada; não monótona;
c) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\text{Im}(f) = \{-1, 1\}$; limitada; monótona crescente;
d) $\text{Dom}(i) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [-1, +\infty[$; não limitada; não monótona.

Exercício 5

- a) verdadeira; b) falsa; c) verdadeira; d) falsa.

Exercício 6

- a) a função f é ímpar; d) a função i é par;
b) a função g é par; e) a função j é ímpar;
c) a função h não é par nem ímpar; f) a função k é par.

Exercício 7

- a) $\text{Dom}(f) = [-4, 4]$; $\text{Dom}(g) = [-2, 0] \cup [2, 3]$;
b) $\text{Im}(f) = [-1, 4]$; a função f não é injetiva; $\text{Im}(g) =]-\infty, 1/2] \cup [1, 2]$; a função g é injetiva.

Exercício 8

- a) a função f não é injetiva nem sobrejetiva;
b) a função g é injetiva e sobrejetiva (bijetiva);
c) a função h não é injetiva nem sobrejetiva;
d) a função i não é injetiva nem sobrejetiva.

Exercício 9

a)

$$\begin{aligned} f \circ g : [-2, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \circ g)(x) = x + 2 - 3\sqrt{x+2} ; \quad g \circ f \text{ não está definida;} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g \circ f : [15, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = x - 15 + 2\sqrt{x-15} ; \quad f \circ g \text{ não está definida;} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} g \circ f : [2, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x-2}+5} ; \quad f \circ g \text{ não está definida;} \end{aligned}$$

d)

$f \circ g$ não está definida; $g \circ f$ não está definida.

Exercício 10

a)

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = \cos(2x^2) ; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ f)(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases} . \end{aligned}$$

Exercício 11

a) $\text{Im}(f)=\mathbb{R}_0^+; \text{Im}(g)=\mathbb{R}_0^+; \text{Im}(k)=\mathbb{R}_0^+; \text{Im}(h)=\mathbb{R}_0^+;$

b)

c)

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R} & f \circ h : \mathbb{R}_0^- &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \circ g)(x) = x ; & x &\mapsto (f \circ h)(x) = -x ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ k : \mathbb{R}_0^- &\rightarrow \mathbb{R} & g \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (g \circ k)(x) = -x ; & x &\mapsto (g \circ f)(x) = |x| . \end{aligned}$$

Exercício 12

a) $\text{Dom}(h)=[0, 9];$

$$\begin{aligned} g : [0, 9] &\rightarrow \mathbb{R} & f : \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = 9x - x^2 & x &\mapsto f(x) = \sqrt{x} , \text{ por exemplo;} \end{aligned}$$

b) $\text{Dom}(h)=\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\};$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} &\rightarrow \mathbb{R} & f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) = x^2 - 1 & x &\mapsto f(x) = 2/x^3 , \text{ por exem-} \\ && &\text{plo.} \end{aligned}$$

Exercício 13

a) $\text{Im}(f)=\mathbb{R}^+; \text{Im}(g)=]1, +\infty[.$

b)

c)

Exercício 14

a)

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} ; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} ; \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\} \\ x &\mapsto h^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 2 ; \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} i^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto i^{-1}(x) = x^2 ; \end{aligned}$$

Exercício 15

a) Se $A = [-1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f|_A : [-1, +\infty[&\rightarrow [2, +\infty[\\ x &\mapsto f|_A(x) = x^2 + 2x + 3 ; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f|_A^{-1} : [2, +\infty[&\rightarrow [-1, +\infty[\\ x &\mapsto f|_A(x) = \sqrt{x-2} - 1 ; \end{aligned}$$

c)

Exercício 16

- a) A função h possui um mínimo absoluto (ou global) e um máximo relativo (ou local); a função i possui um máximo absoluto (ou global) e não possui nenhum mínimo; a função j não tem extremos;
- b) A função h não é limitada mas é minorada; a função i é limitada; a função j não é limitada, não sendo nem majorada nem minorada.
-