Proposta de Correção

Pergunta 11

Uma partícula em movimento encontra-se no instante $t = 2$ na posição $\mathbf{r}(2) = (14, 5, 2)$ e a sua velocidade é dada por $\mathbf{v}(t) = (6t, 2t, t)$, em cada instante $t \geq 0$.

(a) Determine a posição $\mathbf{r}(t)$ em cada instante t e a posição inicial da partícula.

(b) Calcule o comprimento da curva percorrida entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.

(c) Calcule a curvatura em cada instante t.

(d) Determine as equações da reta tangente e do plano normal à curva no instante $t = 1$.

Resolução.

a) $\mathbf{r}(t) = \displaystyle\int \mathbf{r}'(t)\,dt = \int \mathbf{v}(t)\,dt = \int (6t, 2t, t) = \left(3t^2, t^2, \frac{t^2}{2}\right) + C$

Dado que $\mathbf{r}(2) = (14, 5, 2)$, deve ter-se $\left(3t^2, t^2, \frac{t^2}{2}\right) + C = (14, 5, 2)$ quando $t = 2$, ou seja,

$$(12, 4, 2) + C = (14, 5, 2) \iff C = (2, 1, 0).$$

Assim,

$$\mathbf{r}(t) = \left(3t^2 + 2, t^2 + 1, \frac{t^2}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

e a posição inicial da partícula é $\mathbf{r}(0) = (2, 1, 0)$.

b) Comprimento da curva entre $t = 0$ e $t = 2$:

$$\int_0^2 \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt = \int_0^2 \|(6t, 2t, t)\|\,dt = \int_0^2 \sqrt{36t^2 + 4t^2 + t^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{41}t\,dt = \left[\sqrt{41}\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2\sqrt{41}$$

c) $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6t & 2t & t \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2t & t \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 6t & t \\ 6 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6t & 2t \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 0)$

$\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \dfrac{0}{\sqrt{41}t} = 0, \quad t > 0$

d) Plano normal em $P = \mathbf{r}(1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(1) \cdot ((x, y, z) - P) = 0 &\iff (6, 2, 1) \cdot ((x, y, z) - (5, 2, 1/2)) = 0 \\ &\iff (6, 2, 1) \cdot (x - 5, y - 2, z - 1/2) = 0 \\ &\iff 6(x - 5) + 2(y - 2) + 1\,(z - 1/2) = 0 \\ &\iff 6x + 2y + z = 30 + 4 + 1/2 \iff 6x + 2y + z = 69/2 \end{aligned}$$

Reta tangente em P:

$(x, y, x) = P + t\mathbf{r}'(1) = (5, 2, 1/2) + t(6, 2, 1) = (5 + 6t, 2 + 2t, 1/2 + t), \quad t \in \mathbb{R}$