Universidade do Minho **Cursos: CC & MAT**
DMA **Probabilidades e Aplicações** **2016/2017**
Teste II - 4/Janeiro/2017 - Versão A

Nome: **Nº** **Curso:**

Responda às questões 1, 2 *e* 3 *na folha de teste e responda à questão* 4 *neste enunciado. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do R que utilizar. Duração*: 2 *horas.*

1. Seja X a v.a.r. que representa o consumo diário (em kg) de um determinado produto numa certa fábrica A. Sabe-se que X é uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < a \vee x > b \\ \frac{1}{4} & se \quad a \le x \le b \end{cases},$$

em que a e b são constantes reais, com $a < b$, e que $P_X(\,]-\infty\,,\,2]\,) = \frac{1}{2}$.

(a) Mostre que $a = 0$ e $b = 4$.

(b) Determine, usando a definição, a função de distribuição de X.

(c) Determine a probabilidade de, em 10 dias, haver pelo menos dois dias em que o consumo deste produto nesta fábrica é superior a 2 kg.

(d) Determine a probabilidade de, ao fim de 100 dias, o consumo total deste produto nesta fábrica ser superior a 190kg.

(e) Sabe-se que numa outra fábrica B, o consumo diário deste produto (em kg) é uma outra v.a.r., Y, absolutamente contínua e tal que $Y \sim U([0,2])$. Assumindo que as quantidades consumidas nas duas fábricas são independentes, determine a probabilidade de

i) num dia, se consumir, em cada uma das fábricas, mais do que 1kg deste produto.

ii) num dia, o consumo deste produto na fábrica A ser superior ao da fábrica B.

Observações: 1) Pode usar, sem demonstrar, que $E[X] = 2$ e que $Var[X] = \frac{4}{3}$.
2) Assuma que as quantidades consumidas em dias diferentes são v.a.r.'s independentes.

2. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} d & se \quad x < k \\ 1 - e^{-2(x-1)} & se \quad x \ge k \end{cases},$$

com d e k constantes reais.

(a) Mostre que $d = 0$ e $k = 1$.

(b) Identifique os quartis de X.

(c) Identifique a lei de probabilidade da v.a.r. W definida por $W = 2X - 2$.

(d) Suponha agora que X é a v.a.r. que representa o tempo, em horas, que um cliente espera para ser atendido numa repartição pública.

i) Qual a probabilidade de um cliente esperar mais de 2 horas para ser atendido?

i) Sabendo que um cliente já está à espera há mais 2 horas, qual a probabilidade de ele ter que esperar pelo menos mais 15 minutos?

3. Considere uma v.a.r. $Z \sim Bin(m,p)$.

(a) Mostre que a transformada de Laplace de Z é $L_Z(t) = \left(1 - p + pe^{-t}\right)^m$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sejam $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ v.a.r.'s independentes e tais que $Z_i \sim Bin(n_i,p)$, $i \in \{1,\ldots,k\}$. Identifique a lei da v.a.r. $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_k$.

(v.s.f.f.)

4. Seja m o verdadeiro valor de uma certa quantidade física e sejam $X_i = m + \psi_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, n medições independentes sujeitas a erros, ψ_i, em que as v.a.r.'s ψ_i são i.i.d.'s e seguem a lei Uniforme no intervalo $[-1, 1]$.

   (a) Mostre, usando a definição, que $E[X_i]$ e $Var[X_i]$ existem. Conclua ainda que $E[X_i] = m$ e que $Var[X_i] = \frac{1}{3}$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

   Observação: Pode usar o seguinte: se $Z \sim U([a, b])$ então $E[Z] = \frac{a+b}{2}$ e $Var[Z] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

   (b) Quantas medições devem ser feitas de modo a que seja de pelo menos 0.99 a probabilidade de a média das medições não se afastar do verdadeiro valor, m, em mais do que $\frac{1}{10}$? Justifique.