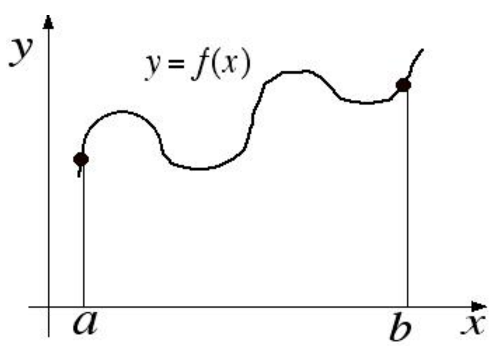
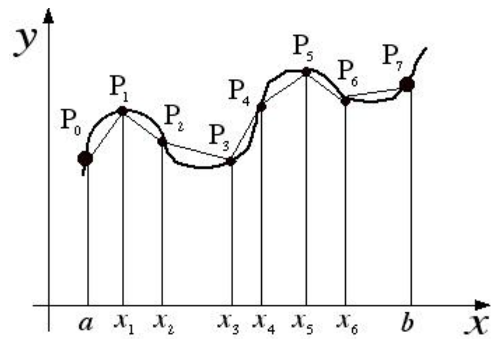
Cálculo

Comprimentos de curvas

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1([a, b])$. Designemos por $\mathcal{C}$ o arco de curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$ (cf. a figura em baixo à esquerda). Vamos dar uma definição para o comprimento do arco $\mathcal{C}$, recorrendo à definição alternativa de integral, em termos das somas de Riemann.





Para tal, consideremos uma partição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ definida por pontos $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$. Sejam P_0, P_1, …, P_n os pontos correspondentes sobre a curva $\mathcal{C}$ e consideremos a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$, figura em cima à direita, definida pelos segmentos de reta $P_{i-1}P_1$, com $i = 1, 2, \cdots, n$. Quando os pontos P_i são considerados cada vez mais próximos uns dos outros, ou seja, quando o diâmetro $|\mathcal{P}|$ da partição tende para zero, a linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ tende a confundir-se com o arco $\mathcal{C}$. Então, por definição, pomos

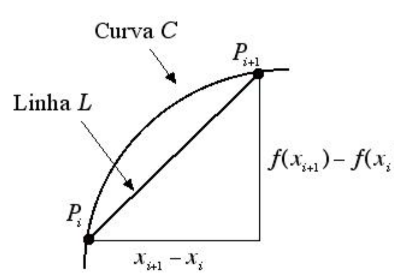
$$\operatorname{comp} \mathcal{C} = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \operatorname{comp} L_{\mathcal{P}}. \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\operatorname{comp} L_{\mathcal{P}} = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$$

e, para cada segmento de reta $\overline{P_{i-1}P_1}$, tem-se

$$\overline{P_iP_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}.$$



No entanto, como f é derivável, o teorema de Lagrange dá

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_{i+1})$$

para algum $c_{i+1} \in]x_i, x_{i+1}[$, resultado

$$\overline{P_i P_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f'(c_{i+1}))^2 (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(c_{i+1}))^2}(x_{i+1} - x_i).$$

Consequentemente, o comprimento da linha poligonal $L_{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\operatorname{comp} L_{\mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(c_{i+1}))^2}(x_{i+1} - x_i), \tag{2}$$

onde, no segundo membro, mais não temos do que uma soma de Riemann para a função $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$, que é integrável. Logo, tomando o limite quando $|\mathcal{P}| \to 0$ na equação (2) vem

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \operatorname{comp} L_{\mathcal{P}} = \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Da definição expressa pela equação (1), sai

$$\operatorname{comp} \mathcal{C} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$