Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Cálculo
2022/23

# Funções trigonométricas inversas

Considerando restrições adequadas das funções trigonométricas, obtemos funções contínuas e bijetivas definidas em intervalos. A injetividade será conseguida excluindo do domínio todos os pontos onde a função se repete. A sobrejetividade será obtida eliminado do conjunto de chegada todos os pontos que a função não assume. As inversas das restrições assim definidas serão também contínuas.

## Arco-seno

Relativamente à função **seno**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{sen}: & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \operatorname{sen} x. \end{array} \tag{1}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-seno* – lê-se *arco (cujo) seno* – é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsen}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arcsen} y \end{array} \tag{2}$$

onde $\operatorname{arcsen} y$ indica o único arco do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é igual a $y$. Assim

$$x = \operatorname{arcsen} y,\ \ y \in [-1,1] \iff y = \operatorname{sen} x,\ \ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pelo facto da as funções (1) e (2) serem inversas uma da outra, tem-se

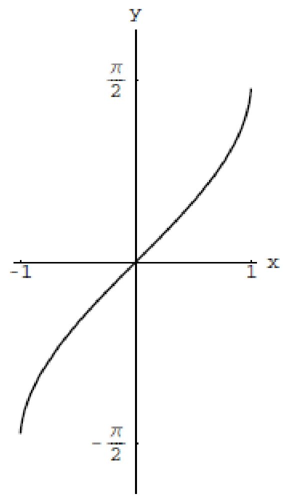
$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) = x,\ \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} y) = y,\ \ \forall y \in [-1,1].$$

No entanto, apesar de fazer sentido calcular $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z)$, para $z \in \mathbb{R} \backslash \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} z) \neq z,\ \ \forall z \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

uma vez que $\mathrm{CD}_{\operatorname{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.




**Exemplos**

1. $\operatorname{arcsen} 1 = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

   De facto, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}$ e $-\dfrac{\pi}{3}$ são os únicos arcos do intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cujo seno é, respetivamente, igual a 1, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Tem-se que, por exemplo, $\operatorname{sen}(3\pi) = 0$ e $\operatorname{sen}(8\pi) = 0$ mas $\operatorname{arcsen} 0 = 0$.

   Porque 0 é o único arco do intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ onde o seno é igual a 0.

## Arco-cosseno

Relativamente à função **cosseno**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{aligned} \cos: \quad [0,\pi] &\longrightarrow [-1,1] \\ x &\longmapsto \cos x. \end{aligned} \tag{3}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cosseno* − lê-se *arco (cujo) cosseno* − é a função

$$\begin{aligned} \arccos: \quad [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ y &\longmapsto \arccos y \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\arccos y$ indica o único arco do intervalo $[0,\pi]$ cujo cosseno é igual a $y$. Assim

$$x = \arccos y,\ y \in [-1,1] \iff y = \cos x,\ x \in [0,\pi].$$

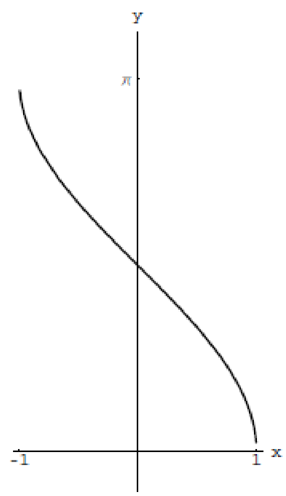
Pelo facto da as funções (3) e (4) serem inversas uma da outra, tem-se

$$\arccos(\cos x) = x, \quad \forall x \in [0, \pi],$$

$$\cos(\arccos y) = y, \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Por outro lado, uma vez que $\mathrm{CD}_{\text{arccos}} = [0, \pi]$, tem-se

$$\arccos(\cos z) \neq z, \quad \forall z \notin [0, \pi].$$




**Exemplos**

1. $\arccos 1 = 0, \quad \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}.$

2. $\arccos(\cos 5\pi) = \arccos(-1) = \pi, \quad \arccos\left(\cos\dfrac{25\pi}{4}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

## Arco-tangente

Relativamente à função **tangente**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

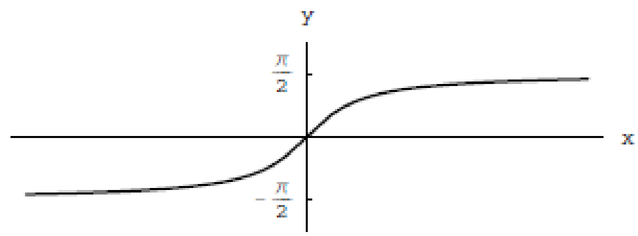
$$\begin{array}{rccl} \mathrm{tg}: & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{tg}\, x. \end{array} \tag{5}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-tangente* − lê-se *arco (cujo) tangente* − é a função

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{arctg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arctg} y \end{array} \tag{6}$$

onde $\operatorname{arctg} y$ indica o único arco do intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja tangente é igual a $y$. Assim

$$x = \operatorname{arctg} y,\ \ y \in \mathbb{R} \iff y = \operatorname{tg} x,\ \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$




## Arco-cotangente

Relativamente à função **cotangente**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

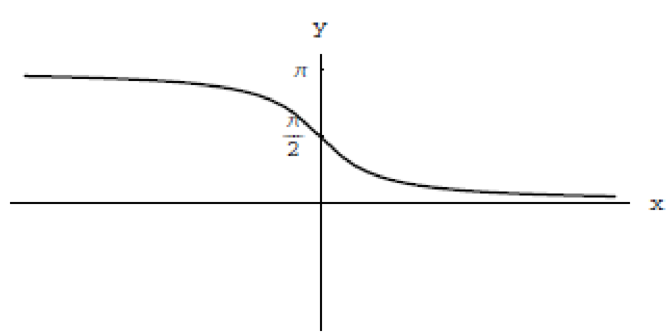
$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{cotg}: & ]0, \pi[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cotg} x. \end{array} \tag{7}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cotangente* − lê-se *arco (cujo) cotangente* − é a função

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{arcotg}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & ]0, \pi[ \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccotg} y \end{array} \tag{8}$$

onde $\operatorname{arccotg} y$ indica o único arco do intervalo $]0, \pi[$ cuja cotangente é igual a $y$. Assim

$$x = \operatorname{arccotg} y,\ \ y \in \mathbb{R} \iff y = \operatorname{cotg} x,\ \ x \in ]0, \pi[\,.$$



## Arco-secante

Relativamente à função **secante**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \sec: & \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ & \longrightarrow & [1, +\infty[ \\ \\ & x & \longmapsto & \sec x. \end{array} \tag{9}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-secante* − lê-se *arco (cuja) secante* − é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arcsec}: & [1, +\infty[ & \longrightarrow & \left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \\ \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arcsec} y \end{array} \tag{10}$$

onde $\operatorname{arcsec} y$ indica o único arco do intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ cuja secante é igual a $y$. Assim

$$x = \operatorname{arcsec} y, \ \ y \in [1, +\infty[ \iff y = \sec x, \ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

## Arco-cossecante

Relativamente à função **cossecante**, convencionamos considerar a restrição bijetiva

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{cosec}: & \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [1, +\infty[ \\ \\ & x & \longmapsto & \operatorname{cosec} x. \end{array} \tag{11}$$

A sua inversa, que se designa por *arco-cossecante* − lê-se *arco (cuja) cossecante* − é a função

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{arccosec}: & [1, +\infty[ & \longrightarrow & \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \\ & y & \longmapsto & \operatorname{arccosec} y \end{array} \tag{12}$$

onde $\operatorname{arccosec} y$ indica o único arco do intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ cuja cossecante é igual a $y$. Assim

$$x = \operatorname{arccosec} y, \ \ y \in [1, +\infty[ \iff y = \operatorname{cosec} x, \ \ x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$