Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação

1º Trabalho de Grupo de Análise - 27 Fev

Nome: ______________________ Número: ________

Nome: Proposta de Resolução Número: ________

---

1. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2}.$$

   (a) Calcule a imagem do ponto $(-2, 1)$;

   (b) Indentifique e esboce o domínio D da função f;

   (c) Identifique o interior, o derivado e a fronteira do domínio D;

   (d) Identifique e esboce as curvas de nível -1,0,1,2 da função f;

   (e) Partindo do ponto $(-2, 1)$ indique:

      i. um vector de $\mathbb{R}^2$ que indica uma direcção e um sentido em que a função cresce;

      ii. um vector de $\mathbb{R}^2$ que indica uma direcção e um sentido em que a função decresce.

2. Calcule, ou justifique que não existe, o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{2x^2 + y^2}}.$$

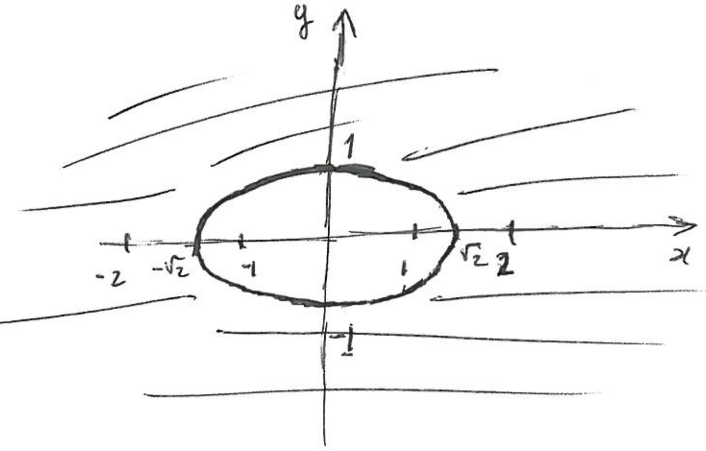
$\boxed{1}$ $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+2y^2-2}$

(a) $f(-2,1) = \sqrt{(-2)^2+2\times1^2-2} = \sqrt{4} = 2$

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2-2 \geq 0\}$

c) $x^2+2y^2 \geq 2$



$\mathring{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 > 2\}$

$fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 = 2\}$

$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \geq 2\}$

(d) $\mathcal{N}_c = \{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}$

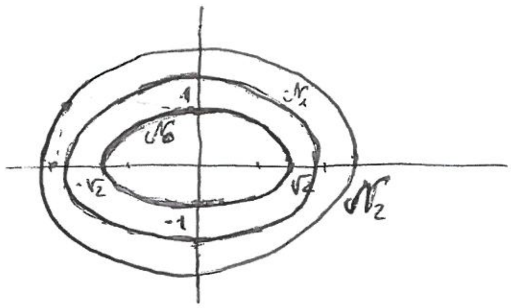
$\mathcal{N}_{-1} = \{(x,y) \in D : \sqrt{x^2+2y^2-2} = -1\} = \emptyset$

elipse

$\mathcal{N}_0 = \{(x,y) \in D : \sqrt{x^2+2y^2-2} = 0\} = \{(x,y) \in D : x^2+2y^2 = 2\}$

$\mathcal{N}_1 = \{(x,y) \in D : \sqrt{x^2+2y^2-2} = 1\} = \{(x,y) \in D : x^2+2y^2 = 3\}$ elipse

$\mathcal{N}_2 = \{(x,y) \in D : \sqrt{x^2+2y^2-2} = 2\} = \{(x,y) \in D : x^2+2y^2 = 6\}$ elipse



c (i) $\vec{v} = (-1, 0)$

(ii) $\vec{v} = (1, 0)$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{2x^2+y^2}}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \boxed{y=0}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2}\,|x|}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Logo $\displaystyle\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{2x^2+y^2}}$