

---

Nome: \_\_\_\_\_ N.º \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

*Responda às questões 1, 2 e 3 na folha de teste. Responda à questão 4 neste enunciado.  
Justifique todas as respostas e indique cálculos intermédios. O teste tem a duração de 2 horas.*

---

1. Suponha que tem um dado equilibrado.
  - (a) Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar um lançamento deste dado e seja  $X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação definida por
$$X(\omega) = \begin{cases} -2 & \text{se } \omega \text{ é ímpar} \\ 2 & \text{se } \omega \text{ é par} \end{cases}.$$
    - i. Diga em que condições  $X$  é uma variável aleatória real.
    - ii. Prove que  $X$  é uma variável aleatória real e determine a sua função de distribuição.
  - (b) Considere agora a experiência aleatória que consiste em efectuar dois lançamentos consecutivos deste dado.
    - i. Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória.
    - ii. Indique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis decorrentes desta experiência.
    - iii. Sabendo que, nos 2 lançamentos, saiu pelo menos uma face par, qual a probabilidade de ter saído pelo menos uma vez a face 6? Justifique.
    - iv. Indique, justificando, dois acontecimentos independentes decorrentes da experiência.
    - v. Seja  $Y$  a v.a.r. que representa o número ases observados nesta experiência. Diga se  $Y$  é discreta e, em caso afirmativo, determine a sua função de probabilidade.
2. Os trabalhadores de uma empresa podem usar três *softwares* de tratamento estatístico: SPSS, SPlus e R. No entanto, existem trabalhadores na empresa que não usam qualquer *software* estatístico. Sabe-se que a probabilidade de um trabalhador, escolhido ao acaso, nesta empresa
  - usar o SPSS é igual a 0.5; usar o SPlus é igual a 0.7; usar o R é igual a 0.5;
  - usar o SPSS e o SPlus é igual a 0.3; usar o SPSS e o R é igual a 0.2; usar o SPlus e o R é igual a 0.4;
  - usar o SPSS, o SPlus e o R é igual a 0.1.Escolheu-se, ao acaso, um trabalhador desta empresa.
  - (a) Mostre que a probabilidade de o trabalhador usar pelo menos um dos *softwares* de tratamento estatístico é igual a 0.9.
  - (b) Calcule a probabilidade de o trabalhador não usar qualquer *software* estatístico.
  - (c) Calcule a probabilidade de o trabalhador usar o SPSS e o SPlus, mas não o R.
  - (d) Calcule a probabilidade de o trabalhador usar o SPlus, mas não o SPSS nem o R.
3. Um determinado hospital está fechado em 10% dos dias, por motivos de greve dos seus funcionários. Mesmo quando está aberto, nem todos os serviços estão disponíveis. Em particular sabe-se que, quando o hospital está aberto, em 20% dos dias o serviço de pediatria está fechado. Num certo dia, escolhido ao acaso, uma mãe vai ao hospital com o seu filho.
  - (a) Qual a probabilidade de encontrar o hospital aberto e o serviço de pediatria fechado? Justifique.
  - (b) Mostre que a probabilidade de encontrar o serviço de pediatria aberto é igual a 0.72.
  - (c) Sabendo que encontrou o serviço de pediatria fechado, qual a probabilidade de o hospital estar fechado? Justifique. (v.s.f.f.)

4. Considere  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade.

(a) Mostre que, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são elementos de  $\mathcal{F}$  tais que  $P(A \cap B) > 0$ , então

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B | A)P(C | A \cap B).$$

(b) Mostre que, se  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma qualquer sucessão de elementos de  $\mathcal{F}$ , então

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P(E_n).$$