Resolução explicada dos exercícios 1, 2 e 3 da folha 4 (resolvidos nas aulas PL dos dias 9, 10 e 11 de dezembro)

exercício 1.a)

```
>> p3=@(x) x^3-3.1*x^2+2.3*x-0.3

p3 =

    @(x)x^3-3.1*x^2+2.3*x-0.3

>> [p3(-0.5), p3(-1), p3(0), p3(3)]

ans =

   -2.3500   -6.7000   -0.3000    5.7000
```

exercício 1.c) Não existe outro polinómio de grau não superior a 3 que interpole f nos 4 pontos dados. Com efeito, dados n+1 pontos $(x_i, y_i),\ i = 0, ...n$, existe e é único o polinómio, digamos p_n, de grau não superior a n, tal que $p_n(x_i) = y_i,\ i = 0, ...n$.

exercício 2.a) Com

$$p_(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

os coeficientes $a_1,\ a_2,\ a_3$ e a_4 são a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

A matriz do sistema, que depende apenas dos nós de interpolação,é designada por matriz de Vandermonde. Usaremos a função **vander** do Matlab para construir a matriz correspondente aos nós dados

```
>> x=[-0.5,-1,0,3]; V=vander(x)

V =

   -0.1250    0.2500   -0.5000    1.0000
   -1.0000    1.0000   -1.0000    1.0000
         0         0         0    1.0000
   27.0000    9.0000    3.0000    1.0000
```

A função **det** calcula o determinante

```
>> det(V)

ans =

  -10.5000
```

Pode mostrar-se que o determinante de uma matriz de Vandermonde é igual ao produto das diferenças dos nós. Verifiquemos que assim acontece neste caso

```
>> prod=1; for i=1:4, for j=i+1:4, prod=prod*(x(i)-x(j)); end, end, prod

prod =

  -10.5000
```

exercício 2.b) A solução do sistema é o vetor dos coeficientes do polinómio p_3 dado antes. No Matlab resolvemos o sistema $Va = y$, onde y é o vetor dos valores nodais, como se indica a seguir

```
>> y=[-2.35; -6.7; -0.3; 5.7]; a=V\y

a =

    1.0000
   -3.1000
    2.3000
   -0.3000
```

exercício 3.a) O polinómio expressa-se na forma

$$1\times\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}-2\times\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}+0\times\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}+3\times\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

exercício 3.b) Dado x, o cálculo do valor da expressão anterior requer exatamente 51 operações aritméticas. Em geral, para $n+1$ pontos, a fórmula interpoladora de Lagrange requer $4n^2+5n$ operações (ver p. 85 das notas das aulas TP).

exercício 3.c) A função **poLagrange** está disponível na área de conteúdo "Matlab"da Blackboard. Devem os estudantes estudar o código que será usado na próxima aula PL.