49. Determine o algarismo final de 93^{203}.

Queremos determinar $r \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ tal que

$$93^{203} \equiv r \pmod{10}$$

Temos $93 \equiv 3 \pmod{10}$

$$93^2 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow 93^2 \equiv -1 \pmod{10}$$

$$203 = 2 \times 101 + 1$$

Logo $(93^2)^{101} \equiv (-1)^{101} \pmod{10}$

$$93^{202} \equiv -1 \pmod{10}$$

$$93^{203} \equiv -93 \pmod{10}$$

$$\equiv -3 \pmod{10}$$

$$\equiv 7 \pmod{10}$$

O resto da divisão de 93^{203} por 10 é 7.

50. Prove que

(a) dado um inteiro a, o dígito das unidades de a^2 é 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

Vamos trabalhar por casos:

Se $a \equiv 0 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 0 \pmod{10}$

Se $a \equiv 1 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 1 \pmod{10}$

Se $a \equiv 2 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 4 \pmod{10}$

Se $a \equiv 3 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 9 \pmod{10}$

Se $a \equiv 4 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 16 \pmod{10}$
$\equiv 6 \pmod{10}$

Se $a \equiv 5 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 25 \pmod{10}$
$\equiv 5 \pmod{10}$

Se $a \equiv 6 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 36 \pmod{10}$
$\equiv 6 \pmod{10}$

Se $a \equiv 7 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 49 \pmod{10}$
$\equiv 9 \pmod{10}$

Se $a \equiv 8 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 64 \pmod{10}$
$\equiv 4 \pmod{10}$

Se $a \equiv 9 \pmod{10}$ então $a^2 \equiv 81 \pmod{10}$
$\equiv 1 \pmod{10}$

Portanto, o último algarismo de a^2 terá que pertencer ao conjunto $\{0, 1, 4, 9, 6, 5\}$.

51. Trabalhando módulo 9 ou 11, indique os dígitos que faltam nos cálculos apresentados:

(a) $51840 \times 273581 = \overline{1418243x040}$;

(b) $512 \times \overline{1x53125} = 1000000000$.

Recordar : $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$

- Critério de divisibilidade por 9:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \pmod 9$$

- Critério de divisibilidade por 11

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n \pmod{11}$$

a)

$$273581 \equiv 2+7+3+5+8+1 \pmod 9$$
$$\equiv 8 \pmod 9$$

$$51840 \equiv 5+1+8+4 \pmod 9$$
$$\equiv 0 \pmod 9$$

$$51840 \times 273581 \equiv 8 \times 0 \pmod 9$$
$$\equiv 0 \pmod 9$$

$$\overline{1418243x040} \equiv 1+4+\underline{1+8}+\underline{2+4+3}+x+4 \pmod 9$$
$$\equiv x \pmod 9$$

Logo $x \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow x = 0 \vee x = 9$

inconclusivo

$$273581 \equiv 1-8+5-3+7-2 \pmod{11}$$
$$\equiv 0 \pmod{11}$$

Logo $273581 \times 51840 \equiv 0 \pmod{11}$

$$\overline{1418243x040} \equiv 0-4+0-x+3-4+2-8+1-4+1 \pmod{11}$$
$$\equiv -13-x \pmod{11}$$
$$\equiv 9-x \pmod{11}$$

Portanto: $9-x \equiv 0 \pmod{11} \Leftrightarrow x \equiv 9 \pmod{11}$

$$\Rightarrow x = 9$$

b) $512 \times \overline{1x53125} = 10^9$

NOTA: Usando $\equiv \pmod{9}$ o resultado é inconclusivo.

$$10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^9 \equiv -1 \pmod{11}$$

$$\begin{aligned} 512 &\equiv 2-1+5 \pmod{11} \\ &\equiv 6 \pmod{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{1x53125} &\equiv 5-2+1-3+5-x+1 \pmod{11} \\ &\equiv -4-x \pmod{11} \end{aligned}$$

Logo
$$\begin{aligned} 512 \times \overline{1x53125} &\equiv 6(-4-x) \pmod{11} \\ &\equiv -24-6x \pmod{11} \\ &\equiv -2-6x \pmod{11} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} -2-6x &\equiv -1 \pmod{11} \\ -6x &\equiv 1 \pmod{11} \\ 6x &\equiv -1 \pmod{11} \\ 12x &\equiv -2 \pmod{11} \\ 11x+x &\equiv -2 \pmod{11} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \equiv -2 \pmod{11}$$
$$x \equiv 9 \pmod{11}$$

Logo $x = 9$.

54. Resolva as seguintes congruências lineares:

(a) $25x \equiv_{29} 15$;

(b) $5x \equiv_{26} 2$;

(c) $140x \equiv_{301} 133$;

<u>Recordar</u>: Dado $ax \equiv b \pmod{n}$ então existe solução <u>sse</u> m.d.c $(a, n) = d$ é tal que $d \mid b$

Além disso se x_0 é uma solução então existem d soluções módulo n: $x_0, \; x_0 + \frac{n}{d}, \; \dots, \; x_0 + \frac{(d-1)n}{d}$

Em particular se m.d.c $(a, n) = 1$ $ax \equiv b \pmod{n}$ tem uma e uma só solução módulo n.

<u>Def</u>: Dizemos que x_0 é solução módulo n de uma congruência se $x_0 + tn$ é solução da congruência $\forall t \in \mathbb{Z}$.

a) $25x \equiv 15 \pmod{29}$

$m.d.c(25, 29) = 1 \Rightarrow m.d.c(25, 29) \mid 15$

Logo a congruência tem uma única solução mod 29.

$m.d.c.(25, 29) = 1 \Rightarrow \exists\, x', y' \in \mathbb{Z}$ tais que $25x' + 29y' = 1$

$\Rightarrow \exists\, x', y' \in \mathbb{Z}$ tais que $25(15x') + 29(15y') = 15$

$\Rightarrow \exists\, x', y' \in \mathbb{Z}$ tais que $25(15x') - 15 = 29(-15y')$

$\Rightarrow \exists\, x' \in \mathbb{Z}$ tal que $29 \mid 25\underbrace{(15x')}_{x_0} - 15$

Portanto $x_0 = 15x'$ é solução de $25x \equiv 15 \pmod{29}$

Vamos determinar x' através do algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned} 29 &= 1 \times 25 + 4 \\ 25 &= 6 \times 4 + 1 \\ 4 &= 4 \times 1 + 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &= 25 - 6 \times 4 \\ &= 25 - 6 \times (29 - 25) \\ &= -6 \times 29 + 7 \times 25 \end{aligned}$$

Temos: $1 = 7 \times 25 - 6 \times 29$

Logo: $15 = (7 \times 15)\, 25 - (6 \times 15) \times 29$

Portanto $x_0 = 7 \times 15$ é uma solução de $25x \equiv 15 \mod 29$
$= 105$

$105 \equiv 18 \pmod{29}$

Logo $x_0 = 18$ é a única solução módulo 29 da congruência $25x \equiv 15 \pmod{29}$

c) $140x \equiv 133 \pmod{301}$

m.d.c $(140, 301) = ?$

$$
\begin{aligned}
301 &= 2 \times 140 + 21 \\
140 &= 6 \times 21 + 14 \\
21 &= 1 \times 14 + 7 \\
14 &= 2 \times 7 + \underline{0}
\end{aligned}
$$

m.d.c $(140, 301) = 7$

Método 1:

Como $7 \mid 133$ $(133 = 7 \times 19)$ então existem 7 soluções módulo 301.

$$\begin{aligned}
7 &= 21 - 14 \\
&= 21 - (140 - 6 \times 21) \\
&= 7 \times 21 - 140 \\
&= 7 \times (301 - 2 \times 140) - 140 \\
&= 7 \times 301 - 15 \times 140
\end{aligned}$$

Logo como $133 = 7 \times 19$ vem

$$133 = (7 \times 19) \times 301 - (15 \times 19) \times 140$$

$$140 \underbrace{(-15 \times 19)}_{x_0} = 133 - (7 \times 19) \times 301$$

$$140 x_0 \equiv 133 \pmod{301}$$

Portanto $-15 \times 19 = -285$ é uma solução da congruência

Temos $-285 \equiv 16 \pmod{301}$

Assim: $16, \quad 16 + \frac{301}{7}, \quad 16 + 2 \times \frac{301}{7}, \quad 16 + 3 \times \frac{301}{7},$

$16 + 4 \times \frac{301}{7}, \quad 16 + 5 \times \frac{301}{7}, \quad 16 + 6 \times \frac{301}{7}$

ou seja, 16, 59, 102, 145, 182, 231, 274 são as 7 soluções módulo 301.

Método 2

$140x \equiv 133 \pmod{301}$

Como $7 \mid 140$, $7 \mid 133$ e $7 \mid 301$ usando a lei do corte

$140x \equiv 133 \pmod{301} \iff 20x \equiv 19 \pmod{43}$

$m.d.c(20, 43) = 1 \implies$ temos uma única solução módulo 43

Fazendo as contas concluimos que $x = 16$ é a única solução da congruência módulo 43.

56. Usando congruências, resolva a seguinte equação diofantina: $4x + 51y = 9$.

$$4x + 51y = 9 \implies 51y - 9 = -4x \implies 4 \mid 51y - 9$$

$$\implies 51y \equiv 9 \pmod 4$$

$$4x + 51y = 9 \implies 4x - 9 = -51y \implies 51 \mid 4x - 9$$

$$\implies 4x \equiv 9 \pmod{51}$$

- $51y \equiv 9 \pmod 4 \iff 52y - y \equiv 1 \pmod 4$

$$\iff -y \equiv 1 \pmod 4$$

$$\iff y \equiv -1 \pmod 4$$

$$\iff y \equiv 3 \pmod 4$$

$y = 3 + 4t, \quad t \in \mathbb{Z}.$

- $4x \equiv 9 \pmod{51}$ (multiplicando por 13)

$52x \equiv 117 \pmod{51}$

$51x + x \equiv 15 \pmod{51} \iff x \equiv 15 \pmod{51}$

$x = 15 + 51s \quad , \quad s \in \mathbb{Z}.$

NOTA: $t = 0$, $s = 0$, ou seja, $y = 3$ e $x = 15$

$4 \times 15 + 51 \times 3 \neq 9$

Substituindo na equação diofantina:

$4(15 + 51s) + 51(3 + 4t) = 9$

$\iff 60 + 204s + 153 + 204t = 9$

$\iff 204(s + t) = 9 - 213 \iff s + t = -1$

Assim $s = -1 - t$ e

$$\begin{cases} x = 15 + 51(-1-t) \\ y = 3 + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -36 - 51t \\ y = 3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

é solução geral da equação diofantina.

<u>NOTA:</u> $4(-36 - 51t) + 51(3 + 4t) = -4 \times 36 + 3 \times 51 = 9$ ✓