Resolução explicada dos exercícios 4, 5 e 6 da folha 2 (tratados nas aulas PL dos dias 10, 11, 12 e 13 de novembro)

exercício 4 Comecemos por observar que o valor exato é $z = 1$ para quaisquer x e $y \neq 0$. No Matlab tem-se

```
>> format long, x=100; for k=0:10, y=10^-k; z=((x+y)^2-x^2-2*x*y)/y^2, end

z =

     1


z =

   0.999999999839929


z =

   1.000000011117663


z =

   1.000001066120415


z =

   1.000124029773564


z =

   1.004518707797830


z =

   0.404543260869306


z =

 -50.524249497682646


z =

    -1.141917891709900e+04
```

```
z =

     1.522898673993811e+06


z =

   -2.115080133084667e+07
```

Ocorre cancelamento substrativo no cálculo do numerador. Por exemplo, para k=5, o valor exato do numerador é 1e-10 mas

```
>> x=100; y=1e-5; (x+y)^2-x^2-2*x*y

ans =

     1.004518707797830e-10
```

O numerador está assim calculado com um elevado erro relativo (perda de algarismos significativos corretos). Dividindo pelo denominador que é 1e-10, produz-se o resultado 1.004518707797830 que já tem um erro absoluto grande.

O cancelamento subtrativo é tanto mais severo quanto mais pequeno for y, isto é, quanto maior for o valor de k. Para k=10, tem-se

```
>> x=100; y=1e-10; (x+y)^2-x^2-2*x*y

ans =

   -2.115080133084667e-13
```

que não tem qualquer algarismo significativo correto. Dividido pelo valor exato 1e-20, obtem-se -2.115080133084667e+7 (recorde-se que o resultado correto é 1).

exercício 5

```
> S=inline('(1+1/n)^n')

S =

     Inline function:
     S(n) = (1+1/n)^n

>> S(2^52)

ans =

   2.718281828459045

>> S(2^53)
```

```
ans =

     1
```

Uma vez que se tem

```
>> exp(1)

ans =

   2.718281828459046
```

o valor de $S(2^{52})$ é uma boa aproximação do número e mas tal não acontece com $S(2^{53})$. Isto parece estar em contradição com o que se sabe da sucessão que é crescente e convergente. A culpa disto é dos erros de arredondamento. Com efeito, o sucessor de 1 em $\mathcal{F}$ é $1 + 2^{-52}$ e o valor de $1 + 2^{-53}$ é representado (arredondado) por 1.

exercício 6 A sucessão tende para zero porque o factorial $n!$ cresce mais rapidamente do que a exponencial a^n por muito grande que seja a base $a > 1$. No entanto, esta afirmação deve ser clarificada: só a partir de um certo valor de n, que depende de a, é que a sucessão começa a decrescer e a tender para zero. A relação

$$\frac{100^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{100^n}{n!} \times \frac{100}{n+1} \tag{1}$$

mostra que a os termos da sucessão atingem o valor máximo para

$$\frac{100^{99}}{99!} = \frac{100^{100}}{100!}$$

e só a partir deste valor enorme começam a decrescer, no princípio muito lentamente como se percebe de

$$\frac{100^{101}}{101!} = \frac{100^{100}}{100!} \times \frac{100}{101} = \frac{100^{100}}{100!} \times 0.99...$$

$$\frac{100^{102}}{102!} = \frac{100^{101}}{101!} \times \frac{100}{102} = \frac{100^{101}}{101!} \times 0.98...$$

Será assim necessário calcular termos de ordem mais elevada obter valores que se aproximem de zero (o limite da sucessão). O problema é que antes que tal ocorra, produz-se um erro de overflow:

```
>> n=154; 100^n/factorial(n)

ans =

     3.236487262734163e+36

>> n=155; 100^n/factorial(n)

ans =

   Inf
```

Assim, o último termo que se consegue calcular diretamente a partir do termo geral da sucessão é para n=154, porque $100^{155} > realmax$. A relação (1) permite ultrapassar esta dificuldade. No Matlab, partir do primeiro termo u(1)=100, calculamos recursivamente cada um dos primeiros 300 termos a partir do anterior e listamos os últimos 10 termos calculados que já são muito próximos de zero.

```
>> u(1)=100; for n=2:300, u(n)=u(n-1)*100/n; end, u(291:300)'

ans =

   5.6974e-11
   1.9512e-11
   6.6592e-12
   2.2650e-12
   7.6781e-13
   2.5940e-13
   8.7338e-14
   2.9308e-14
   9.8021e-15
   3.2674e-15
```