Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações | 6 de dezembro de 2013

Álgebra Linear CC

primeiro teste — duração: 2 horas

1. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $E = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, onde $e_{ij} = i \times j - 1$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, e

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) A expressão matricial $(C^T + D)^T C$ só está definida se C e D são matrizes quadradas.

(b) As matrizes E e $F^2 - 2F^T$ são iguais.

(c) Se A é simétrica e invertível, então A^{-1} é simétrica.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares $A_\alpha x = b$, onde:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & \alpha+1 \\ -2 & -2\alpha & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta o sistema $A_\alpha x = b$, em função do parâmetro α.

(b) Para $\alpha = -1$, determine o conjunto de soluções do sistema $A_\alpha x = b$.

(c) Justifique que a matriz A_1 é invertível e, utilizando o algoritmo de Gauss-Jordan, calcule a sua inversa.

3. Em $\mathbb{R}^4$, considere os vetores $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 0, 1)$, $u_4 = (-1, -1, 0, 0)$ e, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, seja U_α o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ a seguir indicado

$$U_\alpha = \{(x, x + \alpha^2 - 1, y, z) \in \mathbb{R}^4 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Determine os valores de α para os quais U_α é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Considere o subespaço vetorial U_1 de $\mathbb{R}^4$.

i. Mostre que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é um conjunto gerador de U_1.

ii. Diga, justificando, se (u_1, u_2, u_3, u_4) é uma base de U_1 e, em caso negativo, indique uma base de U_1 formada por elementos de $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

iii. Justifique que existe uma base de U_1 da qual fazem parte os vetores $v = (1, 1, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 1, 1)$ e determine uma base de U_1 nessas condições. Indique um suplementar do espaço vetorial $< v, w >$ relativamente a U_1.

4. Sejam V um espaço vetorial real e $u, v \in V \backslash \{0_V\}$. Mostre que se $< u > \cap < v > = \{0_V\}$, então u e v são linearmente independentes.

Cotação: **1** - (1.5 + 1.5 + 1.5); **2** - (2.0 + 1.5 + 2.0); **3** - (2.0 + 2.0 + 2.0 + 2.0);
4 - (2.0).