



Nome:

Número:

**Justifique, convenientemente, todas as respostas.**

Exercício 1. (1 valor) Represente o número racional  $2,3(4)$  sob a forma de quociente de dois números inteiros.

Exercício 2. (1 valor) Resolva a inequação  $|x - 3| \geq |x + 1|$ , com  $x \in \mathbb{R}$ .

Exercício 3. (2.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \left\{ -2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left( [\sqrt{2}, 2] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \right).$$

- (a) Indique, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo do conjunto  $A$ .
- (b) Determine o derivado ( $A'$ ) do conjunto  $A$ .

Exercício 4. (3 valores) Considere o conjunto  $S = ]2, 3[ \cup ]4, +\infty[$ . Em cada alínea apresente um exemplo, justificando, de uma sucessão de termos em  $S$  que seja:

- (a) não monótona e convergente para 6;
- (b) estritamente crescente e convergente para 3;
- (c) não majorada e admita uma subsucessão convergente.

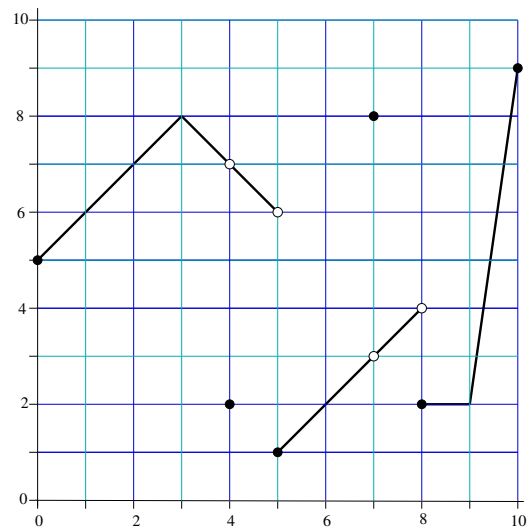
Exercício 5.

1. (1.5 valores) Calcule a soma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \frac{3^{n-1}}{4^{n+1}} \right)$ .

2. (2 valores) Estude a natureza de uma e uma só das seguintes séries: I.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1 + \sin n}{n^2 + 1}$ ; II.  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n \cos n}{n!}$ .

Exercício 6. (3 valores) Considere a função  $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

- (a) Determine  $f([5, 8])$ .
- (b) Determine  $f^{-1}(]2, 9[)$ .
- (c) Indique os pontos de máximo local de  $f$ , mencionando os respectivos máximos locais.
- (d) Determine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{5x^2 - 1}{x^2}\right)$ .



- (e) Determine, justificando, o maior valor positivo para  $\delta$  de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 8| < 2.$$

Exercício 7. (3 valores) Considere a função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ -x^2 + 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z} \\ |x - 1| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Determine, justificando, o domínio de continuidade da função  $f$ .

Exercício 8. (3 valores) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é **verdadeira** ou **falsa**:

(a) A sucessão  $(u_n)_n$  de termo geral  $u_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \leq 20 \\ \frac{\cos n}{n^2} & \text{se } n > 20 \end{cases}$  é divergente.

(b) A série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{4n^3}$  é absolutamente convergente.

(c) Existe uma função  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  contínua que nunca se anula e que toma valores positivos e negativos.

FIM