Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação

2º Trabalho de Grupo de Análise - 8 Mai

Nome: ______________________ Número: ________

Nome: Proposta de Resolução Número: ________

---

1. Calcule o valor de $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y)$, onde:

   (a) $f(x,y) = x^3 y$ e $\mathcal{R} = [1,2] \times [-1,2]$;

   (b) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$ e $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

2. Considere a seguinte some de integrais

$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1} f(x,y)\, dydx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x^2} f(x,y)\, dydx.$$

   (a) Faça um esboço da região de cada um dos integrais;

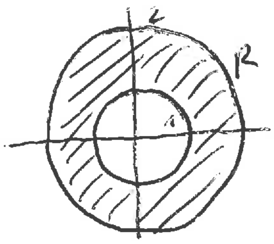
   (b) Invertendo a ordem de integração, escreva a soma dos dois integrais num só integral duplo.

$\boxed{1}$

a) $$\iint_{[1,2]\times[-1,2]} x^3 y \, d(x,y) = \int_1^2 \int_{-1}^2 x^3 y \, dy \, dx = \int_1^2 \left[\frac{x^3 y^2}{2} \right]_{y=-1}^{2} dx$$

$$= \int_1^2 2x^3 - \frac{x^3}{2} \, dx = \int_1^2 \frac{3}{2} x^3 \, dx = \left[\frac{3x^4}{8} \right]_1^2 = 3 \times \frac{16}{8} - \frac{3}{8} = \frac{45}{8}$$

b) $$\iint_R (x^2+y^2)^2 \, d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2)^2 r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^5 \, dr \, d\theta$$

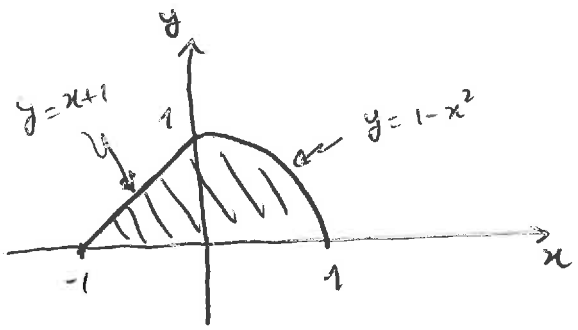


$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^6}{6} \right]_{r=1}^{2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2^6}{6} - \frac{1}{6} \, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\frac{63}{6} \right) = \frac{63}{3}\pi = 21\pi.$$

$\boxed{2}$

a)



$y = 1 - x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - y$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-y}$

b) $$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1} f(x,y) \, dy \, dx + \int_0^1 \int_0^{1-x^2} f(x,y) \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y}} f(x,y) \, dx \, dy$$

Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação

2º Trabalho de Grupo de Análise - 8 Mai

Nome: ______________________ Número: __________

Nome: Proposta de Resolução Número: __________

---

1. Calcule o valor de $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\, d(x,y)$, onde:

   (a) $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\, y$ e $\mathcal{R} = [1,2] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   (b) $f(x,y) = x$ e $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$.

2. Considere o integral $\displaystyle\int_{-1}^{2} \int_{-3}^{1-x^2} f(x,y)\, dydx$.

   (a) Faça um esboço da região de integração;

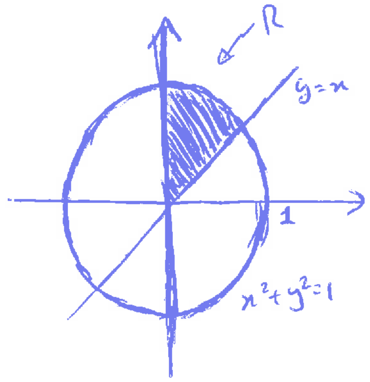
   (b) Inverta a ordem de integração.

$\boxed{1}$

a) $\displaystyle\iint_{[1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]} x\,\text{sen}\,y\;d(x,y) = \int_1^2\int_0^{\pi/2} x\,\text{sen}\,y\,dy\,dx = \int_1^2 \Big[-x\cos y\Big]_{y=0}^{\pi/2} dx$

$\displaystyle = \int_1^2 -x\cos\tfrac{\pi}{2} + x\cos 0\,dx = \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $\displaystyle\iint_R x\,d(x,y) = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 r\cos\theta\cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

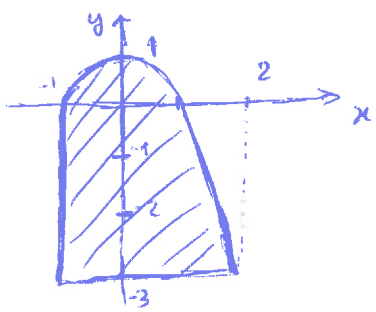


$\displaystyle = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_{r=0}^{1} d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{3}\,d\theta$

$\displaystyle = \left[\frac{\text{sen}\,\theta}{3}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{2}}{3} - \frac{\text{sen}\,\frac{\pi}{4}}{3} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{-3}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$

(a)



(b)

$\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{-3}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-3}^{0}\int_{-1}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\,dy$

$y = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1-y$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-y}$