Tópicos Fundamentais de Matemática

(Licenciatura em Ciências da Computação)

1. Preliminares de Lógica

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

2025/2026

1.1 Introdução

A palavra **lógica** tem raíz no grego clássico: *logos* significa *razão*.

A lógica ocupa-se do estudo dos princípios e das técnicas de raciocínio, procurando definir linguagens formais que permitam representar de forma precisa e sem ambiguidade a linguagem natural e definindo regras que permitam a construção rigorosa e sistemática de argumentos válidos.

Desempenha, pois, um papel fundamental em qualquer área do saber, em particular na Matemática e nas Ciências da Computação.

Nas Ciências da Computação a lógica é usada em múltiplos contextos, tais como: modelação de problemas computacionais, desenvolvimento de linguagens de programação ou verificação de propriedades de programas.

exemplo:

raciocínio 1: Todos os coelhos gostam de cenouras. Este animal é um coelho. Então, este animal gosta de cenouras.

raciocínio 2: Todos os que estão nesta sala gostam de Matemática. Tu estás nesta sala. Então, tu gostas de Matemática.

Em abstrato, ambos os casos correspondem ao mesmo raciocínio.

problema 1:

"O Ernesto tem mais de mil livros", diz o Alberto.

"Não tem", diz o Jorge, "tem menos que isso."

"Certamente, tem pelo menos um livro", diz a Henriqueta.

Se apenas uma das afirmações é verdadeira, quantos livros tem o Ernesto?

problema 2:

Um crime foi cometido por uma e apenas uma pessoa de um grupo de cinco suspeitos: Armando, Bernardo, Carlos, Daniel e Eduardo.

Questionados sobre quem era o culpado, cada um deles respondeu:

Armando: "Sou inocente."
Bernardo: "O Armando disse a verdade."
Carlos: "O Eduardo é o culpado."
Daniel: "O Carlos mentiu."
Eduardo: "O Daniel é o culpado."

Sabendo que apenas um dos suspeitos mentiu e que todos os outros disseram a verdade, quem é o culpado?

Para exprimir argumentos precisos e rigorosos sobre afirmações é indispensável uma linguagem simples e clara, na qual as afirmações efetuadas não tenham significado ambíguo.

A linguagem corrente não cumpre estes requisitos.

Torna-se necessário utilizar **linguagens formais**, com **significado** claro e com **poder expressivo** adequado para descrever e analisar problemas no domínio em causa.

Ao longo dos anos têm sido desenvolvidos diversos sistemas lógicos. Tipicamente, um sistema lógico compreende três aspetos:

- **sintático**: estabelece o conjunto de símbolos e regras de formação que definem as expressões, designadas por **fórmulas**, que podem ser utilizadas para representar linguagem natural de forma precisa, concisa e sem ambiguidade;
- **semântico**: fixa o conjunto de regras que permitem associar um **significado** às fórmulas;
- **sistema dedutivo**: identifica o conjunto de fórmulas, designadas por **axiomas**, e de regras, designadas por **regras de inferência**, permitidos na construção de **argumentos/demonstrações (formais)**.

Nesta unidade curricular, estudaremos algumas noções básicas associadas ao **Cálculo Proposicional** e ao **Cálculo de Predicados** da **lógica clássica**.

1.2 Cálculo Proposicional

Na linguagem natural, podemos encontrar diversos tipos de frase – declarativas, exclamativas, interrogativas, imperativas. Na construção de um argumento, recorremos apenas a **frases declarativas**.

As frases podem ser **simples** ou **compostas**.

Uma **frase (declarativa) simples** tem, gramaticalmente falando, um sujeito e um predicado.

exemplo [frases simples]:

O Município de Braga possui 201 583 habitantes.
O António gosta de Lógica.
Todo o número inteiro é par.

No Cálculo Proposicional, cada frase simples é encarada como um elemento indivisível, não se diferenciando partes da afirmação como o nome ou o verbo.

Representaremos simbolicamente as frases simples por $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ (com $n \in \mathbb{N}_0$).

A estes símbolos chamamos **variáveis proposicionais**. O conjunto das variáveis proposicionais é denotado por $\mathcal{V}^{CP}$.

A partir de frases simples e recorrendo a expressões como "não", "e", "ou", "se... então", "... se e só se...", obtêm-se frases mais complexas, designadas por **frases compostas**.

exemplo [frases compostas]:

[1] *O Município de Braga possui 201 583 habitantes e 183,40 km*^{2} *de área.*

[2] *Se o António gosta de Lógica, então é bom aluno a Tópicos Fundamentais de Matemática e a Lógica Computacional.*

[3] *Se todo o número inteiro é par, então 7 é divisível por 2.*

No Cálculo Proposicional, as frases compostas são representadas usando:

- variáveis proposicionais;
- símbolos $\perp$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$, chamados **conetivos proposicionais**, e designados, respetivamente, por **absurdo**, **negação**, **conjunção**, **disjunção**, **implicação** e **equivalência**;
- símbolos auxiliares "(" e ")".

Representemos por p_n e p_m duas frases declarativas $(n, m \in \mathbb{N}_0)$.

$\neg p_n$

A frase "não p_n" designa-se por **negação de** p_n e é representada por $\neg p_n$. A $\neg p_n$ também podemos associar as leituras "é falso p_n" e "não é verdade p_n".

$p_n \wedge p_m$

A frase "p_n e p_m" designa-se por **conjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $p_n \wedge p_m$.

$p_n \vee p_m$

A frase "p_n ou p_m" designa-se por **disjunção de** p_n **e** p_m e é representada por $p_n \vee p_m$.

$p_n \rightarrow p_m$

A frase "Se p_n, então p_m" designa-se por **implicação de p_n, p_m** e é representada por $p_n \rightarrow p_m$.

A $p_n \rightarrow p_m$ também podemos associar as leituras "p_n implica p_m", "p_n é suficiente para p_m", "p_m é necessário para p_n", "p_m se p_n", "p_m sempre que p_n", "p_n só se p_m" e "p_n somente se p_m".

A p_n chamamos **antecedente** ou **hipótese** ou **premissa** da implicação e a p_m chamamos **consequente** ou **tese** ou **conclusão**.

$p_n \leftrightarrow p_m$

A frase "p_n se e só se p_m", que resulta da conjunção das implicações "Se p_n, então p_m" e "Se p_m, então p_n", designa-se por **equivalência de p_n e p_m** e é representada por $p_n \leftrightarrow p_m$.

A $p_n \leftrightarrow p_m$ também se associam as leituras "p_n é equivalente a p_m" e "p_n é necessário e suficiente para p_m".

Ao representarmos frases compostas, podemos recorrer aos símbolos auxiliares "(" e ")", de modo a evitar ambiguidades.

exemplo:

Consideremos as seguintes frases e as variáveis proposicionais que as representam:

p_0 : *O Município de Braga possui 201 583 habitantes.*
p_1 : *O Município de Braga possui 183,40 km^2 de área.*
p_2 : *O António gosta de Lógica.*
p_3 : *O António é bom aluno a Tópicos Fundamentais de Matemática.*
p_4 : *O António é bom aluno a Lógica Computacional.*
p_5 : *Todo o número inteiro é par.*
p_6 : *7 é divisível por 2.*

exemplo:

As frases compostas referidas no exemplo do slide 9 podem ser representadas, respetivamente, por:

[1] $p_0 \wedge p_1$ *ou* $(p_0 \wedge p_1)$
[2] $p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_4)$ *ou* $(p_2 \rightarrow (p_3 \wedge p_4))$
[3] $p_5 \rightarrow p_6$ *ou* $(p_5 \rightarrow p_6)$

Estipulados os símbolos que definem o **alfabeto** da linguagem do Cálculo Proposicional e, inerentemente, o conjunto das suas **palavras** (sequências finitas de símbolos do alfabeto), podemos, agora, definir as **expressões**/**fórmulas** (bem-formadas) desta linguagem.

definição:

O conjunto $\mathcal{F}^{CP}$ das **fórmulas do Cálculo Proposicional** é o conjunto definido **indutivamente** pelas seguintes regras:

(F_1) $\perp$ é uma fórmula;

(F_2) toda a variável proposicional é uma fórmula;

(F_3) se φ é uma fórmula, então $(\neg\varphi)$ é uma fórmula;

(F_4) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \wedge \psi)$ é uma fórmula;

(F_5) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \vee \psi)$ é uma fórmula;

(F_6) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \to \psi)$ é uma fórmula;

(F_7) se φ, ψ são fórmulas, então $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ é uma fórmula.

exemplo:

[1] *A palavra* $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula do Cálculo Proposicional, uma vez que:*

i. Pela regra (F_2)*, as variáveis proposicionais* p_0, p_1 *e* p_2 *são fórmulas;*

ii. Por i. e pela regra (F_3), $(\neg p_0)$ *é uma fórmula;*

iii. Por i. e pela regra (F_4), $(p_1 \wedge p_2)$ *é uma fórmula;*

iv. Por ii., iii. e pela regra (F_6), $((\neg p_0) \rightarrow (p_1 \wedge p_2))$ *é uma fórmula;*

[2] *As palavras* $\neg p_0 \wedge$, $\rightarrow p_0$, $(p_0 \vee p_1$ *não são fórmulas do Cálculo Proposicional.*

Para que uma palavra seja considerada uma fórmula do Cálculo Proposicional, em particular, é necessário que os parênteses ocorram de acordo com as regras que definem o conjunto de fórmulas.

No entanto, é habitual omitirmos os parênteses extremos e os parênteses à volta da negação.

exemplo:

A fórmula $(((\neg p_0) \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge (\neg p_0)))$ *pode ser representada pela palavra* $(\neg p_0 \vee p_1) \leftrightarrow (p_2 \wedge \neg p_0)$*.*

A palavra $\neg(p_0 \vee \neg p_1)$ *é uma representação da fórmula* $(\neg(p_0 \vee (\neg p_1)))$*, ao passo que* $\neg p_0 \vee \neg p_1$ *não o é.*

A fórmula $(p_0 \wedge (p_1 \vee p_2))$ *pode ser representada por* $p_0 \wedge (p_1 \vee p_2)$ *mas não pode ser representada por* $p_0 \wedge p_1 \vee p_2$*.*

A sintaxe do Cálculo Proposicional não nos permite atribuir qualquer significado às fórmulas. De facto, em geral, uma fórmula, por si só, não tem significado – este depende da interpretação associada aos diversos símbolos (incluindo as variáveis proposicionais).

exemplo:

Se p_0 *representar a afirmação* "$2 \times 7 = 14$" *e* p_1 *representar a afirmação* "$1 + 2 \times 7 = 15$", *então a fórmula* $(p_0 \land p_1)$ *representa a afirmação* "$2 \times 7 = 14$ *e* $1 + 2 \times 7 = 15$", *que é verdadeira.*

Por outro lado, se p_0 *representar a afirmação* "$2 \times 7 = 14$" *e* p_1 *representar a afirmação* "$1 + 2 \times 7 = 16$", *então a fórmula* $(p_0 \land p_1)$ *representa a afirmação* "$2 \times 7 = 14$ *e* $1 + 2 \times 7 = 16$", *que é falsa.*

O modo usual de definir a semântica do Cálculo Proposicional baseia-se na atribuição às suas fórmulas de **valores de verdade**, também designados por **valores lógicos**.

Em lógica clássica são considerados **dois valores lógicos**.

definição:

Os valores lógicos (ou valores de verdade) do Cálculo Proposicional são **verdadeiro** (**V** ou **1**) e **falso** (**F** ou **0**).

Como já referido, interessa-nos considerar frases declarativas. Em particular, interessar-nos-ão as frases declarativas passíveis de associação de um e apenas um valor lógico (ainda que possamos não o conseguir determinar). Chamaremos **proposições** a tais frases.

exemplo:

Consideremos as seguintes frases:

[1] *Lisboa é a capital de Portugal.*

[2] $2 + 3 = 6$.

[3] *Quando é que vamos almoçar?*

[4] *Toma um café.*

[5] *2+x=6.*

[6] *Todo o número maior ou igual a 4 pode ser escrito como a soma de dois números primos.*

[7] *2 é um número par.*

As frases 1, 2, 6 e 7 são proposições:

as afirmações 1 e 7 são verdadeiras, enquanto que a afirmação 2 é falsa;

a afirmação 6 é conhecida como a *Conjetura de Goldbach* – até ao momento, não existe uma prova da sua veracidade ou da sua falsidade, mas será possível associar-lhe um e um só dos dois valores lógicos.

As restantes frases não são proposições:

as frases 3 e 4 não são do tipo declarativo e, portanto, não é possível associar-lhes um dos valores lógicos;

a frase 5 não é passível de atribuição de um valor lógico, visto que o valor de x é desconhecido.

Uma proposição diz-se uma **proposição simples** se se tratar de uma frase declarativa simples. Diz-se uma **proposição composta** se for uma frase declarativa composta.

A veracidade de uma frase simples pode depender do contexto em que esta é considerada.

Por exemplo, a afirmação "Este livro tem uma capa vermelha." pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do livro em causa.

Também a decisão sobre o valor lógico de uma frase composta pode depender do contexto em que se insere. No entanto, para saber se uma frase composta é verdadeira ou falsa, basta saber o que acontece com as frases simples que a compõem.

:

Consideremos as seguintes proposições:

[1] *2 é um número par.*

[2] *Todo o número primo é ímpar.*

[3] *2 é um número par e todo o número primo é ímpar.*

A proposição 1 é uma proposição simples que assume o valor lógico verdadeiro, enquanto que a proposição 2 é uma proposição simples que assume o valor lógico falso.

A proposição 3 é composta: obtém-se a partir da conjunção de duas proposições simples. Como já sabemos que uma das proposições simples que a compõem é falsa, podemos concluir que a proposição 3 assume também o valor lógico falso.

Como já referido por outras palavras, o valor lógico de uma proposição obtida por aplicação de um conetivo é determinado pelo conetivo e pelo valor lógico das proposições às quais o conetivo é aplicado.

Estudaremos de seguida o significado associado a cada um dos conetivos proposicionais referidos anteriormente.

A cada **conetivo** será associada uma **função de verdade** (também designada por **função booleana**), a qual pode ser apresentada sob a forma de uma tabela, chamada a **tabela de verdade** do conetivo.

O conetivo $\neg$ (**negação**) tem associada uma função de verdade unária e a sua tabela de verdade é a seguinte, onde φ representa uma proposição arbitrária (o argumento da função):

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1

exemplo:

A proposição "Todo o número primo é ímpar." é falsa. A sua negação, "Nem todo o número primo é ímpar.", é verdadeira – basta considerar o número primo 2.

A proposição "24 é divisível por 8." é verdadeira, uma vez que $24 = 8 \times 3$. *A sua negação, "24 não é divisível por 8." é falsa.*

Dadas duas proposições φ e ψ, a conjunção de φ e ψ é verdadeira se e somente se ambas as proposições que a compõem são verdadeiras. Assim, o conetivo $\wedge$ (**conjunção**) está associado a uma função de verdade binária que pode ser descrita pela tabela de verdade seguinte:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

exemplo:

As proposições "24 é divisível por 8." e "56 é divisível por 8." são verdadeiras. Por outro lado, a proposição "28 é divisível por 8." é falsa.

A proposição "24 e 56 são divisíveis por 8.", que resulta da conjunção das duas primeiras proposições atrás referidas, é verdadeira. A proposição "28 e 56 são divisíveis por 8." é falsa.

Dadas duas proposições φ e ψ, a disjunção de φ e ψ é falsa se e somente se ambas as proposições que a compõem são falsas. Assim, o conetivo $\vee$ (**disjunção**) tem associada a função de verdade binária descrita na tabela de verdade seguinte:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

exemplo:

A proposição "24 não é divisível por 8 ou 5 não é um número primo." é falsa pois é a disjunção de duas proposições falsas. A proposição "24 não é divisível por 8 ou 100 não é divisível por 4." é verdadeira, pois uma das proposições que a compõem é verdadeira.

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \to \psi$ é verdadeira se e só se ψ é verdadeira sempre que φ é verdadeira. Equivalentemente, a proposição $\varphi \to \psi$ é falsa se e só se φ é verdadeira e ψ é falsa. Assim, o conetivo $\to$ (**implicação**) está associado à função de verdade binária:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

exemplo: consideremos as seguintes proposições:

[1] Se $3 > 1$, *então* $2 > 1$.

[2] Se $3 > 1$, *então* $1 > 2$.

[3] Se $1 > 3$, *então* $2 > 1$.

[4] Se $1 > 3$, *então* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

Dadas duas proposições φ e ψ, $\varphi \leftrightarrow \psi$ é verdadeira se e só se ψ e φ são simultaneamente verdadeiras ou simultaneamente falsas. O significado do conetivo $\leftrightarrow$ (**equivalência**) é, assim, dado pela função de verdade binária:

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

exemplo:

Consideremos as seguintes proposições:

[1] $3 > 1$ *se e só se* $2 > 1$.

[2] $3 > 1$ *é equivalente a* $1 > 2$.

[3] $1 > 3$ *é necessário e suficiente para* $1 > 2$.

A proposição 2 é falsa, ao passo que as restantes são verdadeiras.

De entre os conetivos que estamos a considerar no Cálculo Proposicional, falta apenas estabelecer o significado do conetivo $\perp$ (**absurdo**).

Recorde-se que o conetivo $\perp$ não requer argumentos para produzir uma fórmula, constituindo, por si só, uma fórmula do Cálculo Proposicional.

O significado do conetivo $\perp$ é dado por uma função de verdade 0-ária no conjunto dos valores lógicos, designadamente, a função que fixa o valor lógico 0, à qual corresponde a seguinte tabela de verdade:

$\perp$
0

Conhecidos os valores lógicos das variáveis proposicionais que ocorrem numa fórmula, esta tem associado um e um só **valor lógico**. Na análise de qual será o valor lógico de uma fórmula, relacionado-o com os valores lógicos das variáveis que nela ocorrem, é útil o recurso a **tabelas de verdade**.

exemplo: *queremos estudar o valor lógico da fórmula* $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$.

Esta fórmula tem duas variáveis, p_0 *e* p_1*, pelo que se torna necessário considerar todas as combinações possíveis dos valores lógicos de* p_0 *e* p_1.

Como cada variável pode assumir um de dois valores lógicos (0 ou 1), existem 2^2 *combinações possíveis. Logo, a tabela de verdade terá 4 linhas.*

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1			
1	0			
0	1			
0	0			

Para cada caso, determinamos primeiro o valor lógico de $\neg p_0$ *e de* $p_1 \vee p_0$*, para podermos, depois, determinar o valor lógico de* $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$*.*

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	
1	0	0	1	
0	1	1	1	
0	0	1	0	

Da análise da seguinte tabela de verdade,

p_0	p_1	$\neg p_0$	$p_1 \vee p_0$	$\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

podemos concluir que a fórmula $\neg p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$ *é verdadeira apenas quando* p_0 *é falsa e* p_1 *é verdadeira.*

exemplo: *estudemos, agora, o valor lógico da fórmula* $\neg(p_0 \vee p_1) \to p_2$.

Esta fórmula tem três variáveis, p_0, p_1 *e* p_2, *pelo que existem* 2^3 *combinações dos valores lógicos de* p_0, p_1 *e* p_2.

Logo, a tabela de verdade terá 8 linhas:

p_0	p_1	p_2	$p_0 \vee p_1$	$\neg(p_0 \vee p_1)$	$\neg(p_0 \vee p_1) \to p_2$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

Analisando a tabela, podemos concluir que a fórmula $\neg(p_0 \vee p_1) \to p_2$ *é falsa exactamente quando as três variáveis proposicionais,* p_0, p_1 *e* p_2, *são falsas.*

observação:

Se φ é uma fórmula com n variáveis proposicionais, então existem 2^n combinações possíveis para os valores lógicos das variáveis que ocorrem na fórmula φ.

Assim, a tabela de verdade de φ terá 2^n linhas.

Existem fórmulas que assumem sempre o valor lógico verdadeiro qualquer que seja a combinação dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

definição:

Uma **tautologia** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico verdadeiro, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo:

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$*, as fórmulas* $p_n \vee \neg p_n$ *e* $p_n \to p_n$ *são tautologias.*

p_n	$\neg p_n$	$p_n \vee \neg p_n$
1	0	1
0	1	1

p_n	$p_n \to p_n$
1	1
0	1

No resultado que se segue, listam-se tautologias que são utilizadas com frequência.

proposição:

Dadas fórmulas proposicionais φ, ψ e σ (arbitrárias), as seguintes fórmulas são tautologias:

[Modus Ponens]
$(\varphi \wedge (\varphi \to \psi)) \to \psi$

[Modus Tollens]
$((\varphi \to \psi) \wedge \neg\psi) \to \neg\varphi$

[transitividade]
$((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)$

[lei do terceiro excluído]
$\varphi \vee \neg\varphi$

demonstração: verifiquemos que a fórmula que expressa a transitividade é de facto uma tautologia.

Construindo a tabela de verdade de $\tau : ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma)$, podemos concluir que esta fórmula é uma tautologia se o seu valor lógico for sempre verdadeiro.

φ	ψ	σ	$\varphi \to \psi$	$\psi \to \sigma$	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \sigma)$	$\varphi \to \sigma$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

De modo análogo, verifica-se que as outras três fórmulas são tautologias. Observe-se que, no caso da lei do terceiro excluído, a tabela de verdade pode ser obtida da tabela de verdade da fórmula $p_n \vee \neg p_n$, exibida no slide 37, substituindo p_n por φ.

A negação de uma tautologia é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso.

definição:

Uma **contradição** é uma fórmula que assume sempre o valor lógico falso, independentemente dos valores lógicos das variáveis proposicionais que a compõem.

exemplo:

As fórmulas $p_n \wedge \neg p_n$ e $p_n \leftrightarrow \neg p_n$ são contradições para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

p_n	$\neg p_n$	$p_n \wedge \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

p_n	$\neg p_n$	$p_n \leftrightarrow \neg p_n$
1	0	0
0	1	0

Existem fórmulas que, embora distintas, assumem o mesmo valor lógico para cada uma das combinações possíveis dos valores lógicos das variáveis proposicionais que nelas ocorrem.

Se φ e ψ foram duas fórmulas nessas condições, facilmente concluímos que $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

definição:

Sejam φ e ψ duas fórmulas proposicionais. Dizemos que φ e ψ são **logicamente equivalentes** se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso, escrevemos $\varphi \Leftrightarrow \psi$.

exemplo:

As fórmulas $\varphi : (p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \rightarrow \neg p_1$ *e* $\psi : \neg(p_0 \wedge p_1)$ *são logicamente equivalentes, pois*

$$\varphi \leftrightarrow \psi : ((p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)) \rightarrow \neg p_1) \leftrightarrow (\neg(p_0 \wedge p_1))$$

é uma tautologia.

p_0	p_1	$p_1 \vee p_0$	$p_0 \wedge (p_1 \vee p_0)$	$\neg p_1$	φ	$p_0 \wedge p_1$	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
1	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

Em seguida, listamos algumas das equivalências lógicas mais conhecidas e frequentemente utilizadas.

proposição:

Dadas fórmulas proposicionais φ, ψ e σ, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

[associatividade]

$((\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \wedge (\psi \wedge \sigma))$
$((\varphi \vee \psi) \vee \sigma) \Leftrightarrow (\varphi \vee (\psi \vee \sigma))$

[comutatividade]

$(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$
$(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$
$(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$

[idempotência]

$(\varphi \wedge \varphi) \Leftrightarrow \varphi$
$(\varphi \vee \varphi) \Leftrightarrow \varphi$

[elemento neutro]

$(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$
$(\varphi \vee (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow \varphi$

[elemento absorvente]

$(\varphi \wedge (\psi \wedge \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$
$(\varphi \vee (\psi \vee \neg\psi)) \Leftrightarrow (\psi \vee \neg\psi)$

[leis de De Morgan]

$(\neg(\varphi \wedge \psi)) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
$(\neg(\varphi \vee \psi)) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

[distributividade]

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$$
$$(\varphi \vee (\psi \wedge \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma))$$

[dupla negação]

$$(\neg\neg\varphi) \Leftrightarrow \varphi$$

[lei do contra-recíproco]

$$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$$

$$(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

demonstração: comecemos por mostrar a equivalência lógica da dupla negação.

Construindo a tabela de verdade de $(\neg\neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$, concluimos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$(\neg\neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$
1	0	1	1
0	1	0	1

Logo, as fórmulas $\neg\neg\varphi$ e φ são logicamente equivalentes.

Verifiquemos, agora, a equivalência lógica

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)).$$

(as restantes provas ficam como exercício)

À semelhança do que foi feito no caso da dupla negação, construindo a tabela de verdade de $\tau : (\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma))$, concluímos que esta fórmula é uma tautologia:

φ	ψ	σ	$\psi \vee \sigma$	$\varphi \wedge (\psi \vee \sigma)$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \wedge \sigma$	$(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$	τ
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

exemplo:

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos mostrar que a fórmula

$$(p_0 \land p_1) \lor (p_0 \land (\neg p_1)),$$

é logicamente equivalente à fórmula p_0.

De facto,

$$\begin{aligned} (p_0 \land p_1) \lor (p_0 \land (\neg p_1)) &\Leftrightarrow p_0 \land (p_1 \lor \neg p_1) && [\textit{distributividade}] \\ &\Leftrightarrow p_0 && [\textit{elemento neutro}] \end{aligned}$$

Poderíamos, também, mostrar que a fórmula $(p_0 \land p_1) \lor (p_0 \land (\neg p_1))$ *é logicamente equivalente a* p_0 *provando que a fórmula* $((p_0 \land p_1) \lor (p_0 \land (\neg p_1))) \leftrightarrow p_0$ *é uma tautologia.*

exemplo:

Usando uma sequência de equivalências lógicas, podemos provar que as fórmulas $p_0 \to (p_1 \to p_2)$ *e* $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$ *são logicamente equivalentes.*

Pela lei do contra-recíproco,

$$(p_1 \to p_2) \Leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1),$$

pelo que

$$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \Leftrightarrow (p_0 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)).$$

De novo pela lei do contra-recíproco, temos

$$(p_0 \to (\neg p_2 \to \neg p_1)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0).$$

Assim,

$$(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \Leftrightarrow (\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0).$$

1.3 Cálculo de Predicados

Frases como "*x é um inteiro par*" ou "$x + y = 2$" não são proposições, visto que os seus valores lógicos dependem dos valores atribuídos às variáveis x e y.

No entanto, é frequente encontrarmos, no estudo de qualquer teoria matemática, frases que fazem referência a objetos genéricos, representados por **variáveis**.

Frases como estas são objeto de estudo de um ramo da lógica denominado Cálculo de Predicados.

Nesta Unidade Curricular, não pretendemos aprofundar o estudo do Cálculo de Predicados, mas iremos estudar algumas das suas noções elementares que permitem familiarização com o seu simbolismo e uso.

Em frases que envolvam variáveis, está implícito um domínio de discurso, designado por **universo** ou **domínio de variação** das variáveis.

exemplo:

Na frase "x é um inteiro par", a variável x refere-se a um inteiro, pelo que o universo de x é o conjunto $\mathbb{Z}$.

A frase "*x é um inteiro par*" não é uma proposição. No entanto, se substituirmos x por valores do seu universo, obtemos frases às quais já é possível associar um valor de verdade. Por exemplo, "*2 é um inteiro par*" e "*3 é um inteiro par*" são proposições que assumem o valor lógico verdadeiro e falso, respetivamente.

Um **predicado na variável** x é uma frase declarativa que faz referência à variável x e cujo valor lógico depende da substituição desta variável por valores do seu domínio de variação, tornando-se numa proposição sempre que a variável é substituída por qualquer um desses valores.

Representamos um predicado nas variável x por uma letra minúscula p, q, r,... seguida da variável x colocada entre parênteses.

Facilmente generalizamos estas ideias para **predicados em várias variáveis**, usando, para a representação, uma letra minúscula seguida das variáveis que ocorrem no predicado colocadas entre parêntesis e separadas por vírgulas.

exemplo:

Os predicados "x é um inteiro par" e "x é maior do que y" podem ser representados, respetivamente, por $p(x)$ *e por* $q(x, y)$.

Dados um predicado $p(x)$ na variável x e a um elemento do domínio de variação de x, representamos por $p(a)$ a proposição obtida de $p(x)$ pela substituição da variável x pelo elemento a.

Usamos notação idêntica no caso de predicados em várias variáveis.

exemplo:

Considerando os predicados do exemplo anterior com universo $\mathbb{Z}$, $p(8)$ *representa a proposição "8 é um inteiro par" e* $q(2,3)$ *representa a proposição "2 é maior do que 3".*

Os conetivos lógicos que definimos na sintaxe do Cálculo Proposicional Clássico estendem-se ao Cálculo de Predicados de um modo natural.

Assim, se $p(x)$ e $q(x)$ são predicados na variável x, então

$$\neg p(x), \quad p(x) \wedge q(x),$$

$$p(x) \vee q(x), \quad p(x) \to q(x) \quad \text{e} \quad p(x) \leftrightarrow q(x)$$

são também predicados na variável x.

Note-se que a regra anterior pode ser aplicada repetidamente, obtendo, por exemplo,

$$(p(x) \wedge q(x)) \to r(x)$$

que é também um predicado na variável x, no pressuposto de que $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são predicados na variável x.

As ideias anteriores podem ser estendidas naturalmente ao caso de predicados em várias variáveis.

exemplo:

Sejam $p(x)$ o predicado "x é um natural par", $q(x)$ o predicado "x é um número primo" e $r(x)$ o predicado "$x = 2$". Então,

$$(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow r(x)$$

representa o predicado "se x é um natural par e é um número primo, então x é o natural 2".

A substituição das variáveis de um predicado por valores concretos dos seus domínios de variação não é a única forma de obter uma proposição a partir de um predicado. Também o podemos fazer recorrendo aos chamados **quantificadores**.

Dado um predicado $p(x)$ na variável x, frases da forma "Para todo x, $p(x)$.", "Qualquer que seja x, $p(x)$." ou "Para cada x, $p(x)$." são designadas **quantificações universais**.

Estas frases podem ser representadas por $\forall_x \; p(x)$.

Se o domínio de variação de x é U, então U será designado o **universo de quantificação** de x e podemos também escrever $\forall_{x \in U} \, p(x)$.

Ao símbolo $\forall$ chamamos **quantificador universal** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "todo", "para todo", "qualquer que seja" ou "para cada".

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a frase representada por $\forall_x\ p(x)$ **é uma proposição**.

A proposição $\forall_x\ p(x)$ **é verdadeira** se e só se $p(a)$ for verdadeira para **todo** o elemento a do universo de quantificação de x.

Consequentemente, a proposição $\forall_x\ p(x)$ **é falsa** se e só se $p(a)$ for falsa para **algum** elemento a do universo de quantificação de x.

exemplo:

Se $p(x)$ representar o predicado $x^2 \geq 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ p(x)$ é verdadeira, uma vez que a afirmação em causa é verdadeira para qualquer real.

exemplo:

Se $q(x)$ representar o predicado $x^2 > 0$ e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos reais, a proposição $\forall_x\ q(x)$ é falsa, pois 0 é um número real e $q(0)$ é falsa.

Dado um predicado $p(x)$ na variável x, frases da forma "Existe x tal que $p(x)$.", "Para algum x, $p(x)$." são designadas **quantificacões existenciais**.

Estas frases podem ser representadas por $\exists_x \; p(x)$.

Se o domínio de variação de x é U, podemos também escrever $\exists_{x \in U} \; p(x)$.

Ao símbolo $\exists$ chamamos **quantificador existencial** e é usual associarmos-lhe uma das seguintes leituras: "existe" ou "para algum".

A proposição $\exists_x \; p(x)$ **é verdadeira** se e só se $p(a)$ for verdadeira para **algum** elemento a do universo de quantificação de x.

Consequentemente, $\exists_x \; p(x)$ **é falsa** se e só se $p(a)$ for falsa para **todo** elemento a do do universo de quantificação de x.

exemplo:

Se $p(x)$ representar o predicado "$x + 3 = 2$" e se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números inteiros, a proposição $\exists_x \; p(x)$ é verdadeira, pois $-1 \in \mathbb{Z}$ e $p(-1)$ é verdadeira.

Por outro lado, se o universo de quantificação de x for o conjunto dos números naturais, a proposição $\exists_x \; p(x)$ é falsa, uma vez que a equação não tem solução em $\mathbb{N}$.

Se $p(x)$ é um predicado na variável x, a existência de um único objeto no universo que satisfaça o predicado $p(x)$ pode ser representada pela expressão $\exists_x^1\ p(x)$ ou, se o domínio de variação de x é U, $\exists_{x\in U}^1\ p(x)$.

Às expressões anteriores é usual associar uma das leituras "Existe um e um só x (em U) tal que $p(x)$" ou "Existe um único x (em U) tal que $p(x)$".

exemplo:

A proposição "$\exists_{x\in\mathbb{Z}}^1\ x+3=2$" é verdadeira, ao passo que "$\exists_{x\in\mathbb{Z}}^1\ x^2-1=0$" é falsa (tanto 1 como -1 satisfazem o predicado "$x^2-1=0$", contradizendo a unicidade de um objeto que o satisfaça).

Quando consideramos predicados em várias variáveis, os quantificadores universal e existencial podem ser combinados (consecutivamente ou mesmo em combinações mais amplas, com conetivos proposicionais).

exemplo:

Sejam $p(x,y)$ o predicado $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e $q(x,y)$ o predicado $x + y = 0$.

Dados dois números reais quaisquer a e b, sabemos que $p(a,b)$ é verdadeira. Logo, a proposição $\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{y \in \mathbb{R}}\ p(x,y)$ é verdadeira.

Todo o número inteiro admite um simétrico em $\mathbb{Z}$, pelo que a proposição $\forall_{x \in \mathbb{Z}} \exists_{y \in \mathbb{Z}}\ q(x,y)$ é verdadeira.

No entanto, a proposição $\forall_{x \in \mathbb{N}_0} \exists_{y \in \mathbb{N}_0}\ q(x,y)$ é falsa.

Quando temos um predicado em duas ou mais variáveis, o valor lógico da proposição obtida pela quantificação de todas as variáveis pode depender da ordem dessas quantificações.

exemplo:

Consideremos o predicado "$x + y = 5$" nas variáveis x e y.

A proposição "$\forall_{x\in\mathbb{Z}}\, \exists_{y\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$" é verdadeira. Note-se que considerando que $p(x)$ representa o predicado (na variável x) "$\exists_{y\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$", $p(a)$ é verdadeira para todo o inteiro a –escolha-se para y o inteiro $5 - a$.

Já a proposição "$\exists_{y\in\mathbb{Z}}\, \forall_{x\in\mathbb{Z}}\; x + y = 5$" é falsa. (Porquê?)

Referimos já que a proposição $\exists_x\ p(x)$ é falsa se e só se $p(a)$ é falsa para todo o elemento a do domínio de quantificação de x.

Equivalentemente, podemos afirmar que $\neg p(a)$ é verdadeira para todo o elemento a do domínio de quantificação de x, isto é, a proposição $\forall_x\ (\neg p(x))$ é verdadeira.

Logo, $\neg(\exists_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\forall_x\ (\neg p(x))$, o que podemos simbolizar por:

$$\neg(\exists_x\ p(x)) \Leftrightarrow \forall_x\ (\neg p(x))\ .$$

De modo análogo, concluímos que $\neg(\forall_x\ p(x))$ é logicamente equivalente a $\exists_x\ (\neg p(x))$, simbolicamente:

$$\neg(\forall_x\ p(x)) \Leftrightarrow \exists_x\ (\neg p(x))\ .$$

exemplo:

Dizer que “nem todo o número natural é par” é equivalente a dizer que “existem naturais que não são pares”.

Dizer que “não existem soluções inteiras da equação 2x=3” é equivalente a dizer que “qualquer que seja o número inteiro z, z não é solução da equação 2x=3”.

1.4 Métodos de prova

Uma **prova** ou **demonstração** de uma proposição p constitui um meio de estabelecer a veracidade de p, alternativo ao cálculo direto do valor lógico de p.

Genericamente, uma prova de uma proposição corresponde a uma sequência de inferências logicamente válidas, construída com base em princípios lógicos – regras e axiomas – e outras proposições já estabelecidas como verdadeiras, cuja conclusão é a proposição em causa.

exemplo: consideremos a seguinte sequência de inferências, onde a e b são inteiros **arbitrários**:

$$\begin{aligned} a = b \quad & \Rightarrow \quad aa = ab \\ & \Rightarrow \quad a^2 = ab \\ & \Rightarrow \quad a^2 - b^2 = ab - b^2 \\ & \Rightarrow \quad (a+b)(a-b) = b(a-b) \\ & \Rightarrow \quad a + b = b \\ & \Rightarrow \quad b + b = b \\ & \Rightarrow \quad 2b = b \\ & \Rightarrow \quad 2 = 1 \end{aligned}$$

Caso a anterior sequência de inferências correspondesse efetivamente a uma prova, poderíamos concluir a veracidade da seguinte proposição:

$$\forall_{a\in\mathbb{Z}}\forall_{b\in\mathbb{Z}}\ (a = b \rightarrow 2 = 1)$$

No entanto, a proposição anterior é falsa. (Porquê?)

Qual é a falácia do argumento?

Uma vez que estamos a assumir que $a = b$, facilmente concluímos que $a - b = 0$, pelo que a aplicação da "lei do corte" na quinta inferência não é logicamente válida.

A sequência de inferências anterior não corresponde portanto a uma prova da referida proposição.

prova direta de uma conjunção: na prova direta de $p \wedge q$, procura-se uma prova de p e uma prova de q.

exemplo:

proposição: -1 *é raíz do polinómio* $x^2 - 1$ *e o polinómio* $x^2 + 2x + 2 = 0$ *não tem soluções reais e*

demonstração: *Por um lado,*

$$(-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \ ,$$

pelo que -1 *é efetivamente uma raíz do polinómio* $x^2 - 1$*.*
Por outro lado, usando a fórmula resolvente para equações polinomiais de 2.º *grau, temos que*

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Portanto, $x^2 + 2x + 2 = 0$ *não tem soluções reais.*

prova direta de uma disjunção: na prova direta de $p \vee q$ basta fazer prova de uma das proposições p ou q.

exemplo:

proposição: *A soma de dois números naturais consecutivos é ímpar ou o seu produto é maior do que 3.*

demonstração: *Sejam* n *e* m *dois números naturais consecutivos, com* $n > m$. *Então,* $n = m + 1$*, pelo que*

$$n + m = (m + 1) + m = 2m + 1.$$

Assim, $n + m$ *é um número ímpar. Logo, a soma de quaisquer dois números naturais consecutivos é ímpar e, portanto, a proposição é verdadeira.*

prova direta de uma implicação: para provar diretamente uma implicação $p \to q$, como **hipótese**, é assumida a veracidade de p e, com esta hipótese adicional, constrói-se então uma prova de q.

exemplo:

proposição: *Todo o inteiro ímpar pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que, para $n \in \mathbb{Z}$ arbitrário, a seguinte implicação é verdadeira: se n é ímpar, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $n = a^2 - b^2$.*
Suponhamos, então, que n é um número ímpar.
Então, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.
Ora,

$$n = 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k + 1)^2 - k^2,$$

com $k + 1$ e k inteiros. Logo, n escreve-se como a diferença de dois quadrados perfeitos. $\square$

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$, a prova de uma afirmação do tipo $p \leftrightarrow q$ passa pela prova de duas implicações.

prova direta de uma equivalência: na prova direta de $p \leftrightarrow q$, constrói-se uma prova de $p \rightarrow q$ e uma prova de $q \rightarrow p$.

prova direta de uma negação: na prova direta de $\neg p$, como **hipótese** assume-se a veracidade de p e procura-se então uma **contradição**.

exemplo:

proposição: *Não existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $2n + 16m = 13$.*

demonstração: *Suponhamos que existem números naturais n e m tais que* $2n + 16m = 13$. *Então,*

$$13 = 2n + 16m = 2(n + 8m),$$

pelo que 13 é divisível por 2, o que contradiz o facto de 13 ser um número ímpar.
Assim, não existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $2n + 16m = 13$.

Atendendo a que, dada uma proposição p, se tem $p \Leftrightarrow \neg\neg p$, a proposição p pode ser demonstrada indiretamente através da demonstração de $\neg\neg p$, o que conduz ao método de prova que se segue.

prova por redução ao absurdo ou contradição: para provar uma proposição p, como **hipótese** é assumida a veracidade de $\neg p$ e procura-se então uma **contradição**.

exemplo:

proposição: *Existe uma infinidade de números primos.*

demonstração: *No sentido de provarmos por redução ao absurdo este resultado, admitamos que existe um número finito de primos, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, com $n \in \mathbb{N}$.*
Considere-se, agora, o número

$$x = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

É óbvio que o número x não é divisível por nenhum dos números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (pois o resto da divisão é sempre 1).

Logo, x é um número primo distinto de cada um dos p_i (com $i \in \{1, \ldots, n\}$), o que contradiz a hipótese inicial de que existem apenas n números primos.

Então, a proposição assumida inicialmente como hipótese não pode ser verdadeira e, portanto, existe um número infinito de primos. $\square$

À semelhança do método de prova anterior, vários outros métodos de prova assentam em equivalências lógicas. De seguida, ilustraremos outros **métodos de prova indireta** de uso frequente na construção de provas.

Atendendo a que as proposições $p \to q$ e $\neg q \to \neg p$ são logicamente equivalentes, a demonstração de uma implicação $p \to q$ pode ser feita indiretamente apresentando uma prova da implicação $\neg q \to \neg p$.

prova de uma implicação por contra-recíproco ou por contraposição: para demonstrar uma implicação $p \to q$, como hipótese assume-se $\neg q$ e, então, constrói-se uma prova de $\neg p$.

exemplo:

proposição: *Se x é um natural tal que x^2 é ímpar, então x é ímpar.*

demonstração: *Dado um natural x arbitrário, iremos demonstrar a implicação subjacente por contraposição. Nesse sentido, suponhamos que x não é ímpar, tendo em vista demonstrar que x^2 é par.*
Assim, da suposição concluímos que x é par, pelo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x = 2k.$$

Daqui segue:

$$x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Logo, x^2 é par. $\square$

Uma vez que $p \vee q$ é logicamente equivalente a $\neg p \rightarrow q$, a $\neg q \rightarrow p$ e a $\neg(\neg p \wedge \neg q)$, a prova de uma disjunção $p \vee q$ pode ser obtida indiretamente através da prova de $\neg p \rightarrow q$, ou de $\neg q \rightarrow p$, ou ainda de $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

prova indireta de uma disjunção: na prova de $p \vee q$, assume-se $\neg p$ e procura-se uma prova de q ou, equivalentemente, assume-se $\neg q$ e procura-se uma prova de p, ou ainda assume-se $\neg p$ e $\neg q$ e procura-se uma contradição.

exemplo:

proposição: *Dados dois números reais x e y tais que $xy = 0$, temos $x = 0$ ou $y = 0$.*

demonstração: *Assumindo que $x, y \in \mathbb{R}$ e $xy = 0$, pretendemos mostrar que $x = 0$ ou $y = 0$. Iremos demonstrar esta disjunção recorrendo a uma prova indireta. Nesse sentido, começamos por supor que $x \neq 0$ e procuraremos concluir que $y = 0$.*
Sendo x um número real não nulo, $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$xy = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(xy) = \frac{1}{x}.0 \Leftrightarrow (\frac{1}{x}x)y = 0 \Leftrightarrow 1.y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

$\square$

Na prova de uma dada proposição q, pode tornar-se útil desdobrar a prova em vários **casos** $p_1, \ldots, p_n$, provando-se para cada um dos casos a implicação $p_i \rightarrow q$.

prova por casos: para provar $(p_1 \vee \cdots \vee p_n) \rightarrow q$, basta provar cada uma das implicações $p_i \rightarrow q$ (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$); note-se que, se soubermos já que a proposição $p_1 \vee \cdots \vee p_n$ é verdadeira, dito por outras palavras, se pelo menos um dos casos p_i é necessariamente verdadeiro, este método de prova permite adicionalmente estabelecer a veracidade de q.

exemplo:

proposição: *Para todo o número natural n, $2n^2 + 2n$ é divisível por 4.*

observação: *Pretende-se mostrar que, dado um natural n arbitrário, $2n^2 + 2n$ é divisível por 4.*
Para demonstrar este resultado, é útil considerar 2 casos distintos: quando n é par e quando n é ímpar –obviamente, para cada n, um destes casos é necessariamente verdadeiro.
A prova da proposição inicial passa, portanto, por mostrar que se n é par ou n é ímpar, então $2n^2 + 2n$ é divisível por 4.

exemplo:

proposição: *Se a e b são números reais tais que* $0 \leq a < b$, *então* $a^2 < b^2$.

demonstração: *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $0 \leq a < b$. *Pretendemos mostrar que* $a^2 < b^2$. *Uma vez que* $0 \leq a$, *tem-se que* $a > 0$ *ou* $a = 0$. *A prova prosseguirá considerando cada um destes dois casos.*

[i] *Se* $a > 0$, *então* $a < b$ *implica que*

$$a \times a < a \times b \text{ ou, equivalentemente, } a^2 < ab.$$

Como $b > 0$, *também* $a < b$ *implica que*

$$a \times b < b \times b \text{ ou, equivalentemente, } ab < b^2.$$

Logo, $a^2 < ab < b^2$.

cont. demonstração:

[ii] Se $a = 0$, então $a^2 = 0^2 = 0$ e $ab = 0 \times b = 0$.

Como $b > 0$, de $a < b$ concluímos que

$$a \times b < b \times b \quad \text{ou, equivalentemente,}$$

$$ab < b^2 \ .$$

Assim, $a^2 = 0 = ab < b^2$. $\square$

prova direta de uma quantificação universal: na prova direta de uma proposição do tipo "$\forall_x\ p(x)$", admitimos que a representa um **elemento arbitrário do universo de quantificação** U da variável x e mostramos então que $p(a)$ é verdadeira.

Deve salientar-se que este método foi já usado implicitamente na generalidade das exemplificações anteriores relativas a provas de proposições quantificadas universalmente (por exemplo, nas provas das três últimas proposições). No entanto, é comum não assinalar explicitamente o uso deste método na construção de provas.

No caso em que U é um conjunto finito, podemos optar por uma **prova por exaustão**, provando que $p(a)$ é verdadeira, individualmente, para cada $a \in U$.

prova direta de uma quantificação existencial: na prova direta de uma proposição do tipo "$\exists_x \; p(x)$", basta exibir um elemento específico a do universo de quantificação U da variável x tal que $p(a)$ seja verdadeira.

Este tipo de prova diz-se uma **prova construtiva**.

exemplo:

proposição: *A equação* $x^5 - x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ *admite uma solução inteira.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que* $\exists_{x\in\mathbb{Z}}\ x^5 - x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x^2 + 2x - 2 = 0.$

Consideremos $a = 1 \in \mathbb{Z}$. *Então,*

$$\begin{array}{rl} & a^5 - a^4 - 2\sqrt{2}a^3 + 2\sqrt{2}a^2 + 2a - 2 \\ = & 1 - 1 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 - 2 \\ = & 0, \end{array}$$

pelo que 1 é solução da equação em causa. □

Em certos casos, a prova construtiva de uma quantificação existencial não é simples ou não é possível, podendo-se optar por uma prova indireta por redução ao absurdo. Nesta situação, a prova diz-se **não construtiva**.

prova de existência e unicidade: a prova direta de uma proposição do tipo "$\exists_x^1 \; p(x)$" pode ser dividida em duas partes:

[prova de existência] prova-se que existe, pelo menos, um elemento a do universo de quantificação de x tal que $p(a)$ é verdade;

[prova de unicidade] supõe-se que a e b são dois elementos do universo de quantificação de x tais que $p(a)$ e $p(b)$ são verdadeiras e mostra-se que $a = b$.

proposição: *Existe um e um só elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{R}$.*

demonstração: *Pretendemos mostrar que $\exists^1_{u\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in\mathbb{R}}\ xu = ux = x$.*

[prova de existência] *Consideremos $u = 1 \in \mathbb{R}$. Pretendemos mostrar que $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ xu = ux = x$. Ora, dado $x \in \mathbb{R}$,*

$$x \times 1 = x = 1 \times x.$$

Logo, $u = 1$ é elemento neutro para a multiplicação.

cont. demonstração:

[prova de unicidade] Suponhamos agora que $u' \in \mathbb{R}$ é também elemento neutro para a multiplicação, tendo em vista mostrar que $u' = 1$. Então, em particular, tem-se:

$$1 \times u' = 1.$$

Como 1 é elemento neutro para a multiplicação,

$$1 \times u' = u' \ .$$

Das duas igualdades anteriores concluimos, então, que u' tem que ser igual a 1. $\square$

prova de falsidade de uma proposição

Note-se que provar a falsidade de uma proposição é equivalente a provar a veracidade da negação dessa proposição. No entanto, o mais comum é procurar-se provar diretamente a falsidade da proposição:

para provar a falsidade de $\neg p$, prova-se a veracidade de p;

para provar a falsidade de $p \wedge q$, basta provar a falsidade de p ou de q;

para provar a falsidade de $p \vee q$, prova-se a falsidade quer de p quer de q;

para provar a falsidade de $p \rightarrow q$, prova-se a veracidade de p e a falsidade de q;

para provar a falsidade de $p \leftrightarrow q$, basta provar a falsidade de $p \rightarrow q$ ou de $q \rightarrow p$;

para provar a falsidade de $\forall_x \ p(x)$, basta provar a falsidade de $p(a)$ para algum elemento específico a do universo de quantificação; tal a diz-se um **contra-exemplo** para a proposição;

para provar a falsidade de $\exists_x \ p(x)$, prova-se a falsidade de $p(a)$ para um elemento arbitrário a do universo de quantificação.

exemplo:

proposição: *Todo o número real admite inverso para a multiplicação.*

refutação (demonstração de falsidade) da proposição: *É afirmado que*

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ xy = 1.$$

Consideremos $a = 0 \in \mathbb{R}$ *e mostremos que a proposição "*$\exists_{y\in\mathbb{R}}\ ay = 1$*" é falsa.*
Temos, pois, de mostrar que, para cada $b \in \mathbb{R}$*, "*$ab = 1$*" é uma proposição falsa.*
De facto,

$$ab = 0 \times b = 0\ ,$$

pelo que "$ab = 1$*" é falsa.*
Assim, 0 é efetivamente um contra-exemplo para a proposição considerada. □