Calcule, ou mostre que não existe, cada limite que se segue: (1)

2. c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{1}{x^2+y^2} = -\infty$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{2x^2+4y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}y \cdot \frac{x^2}{x^2+2y^2}$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{2}y = 0$ e $0 \leq \frac{x^2}{x^2+2y^2} \leq 1$, então

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{2x^2+4y^2} = 0$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \boxed{x=0}}} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3} = \lim\limits_{y\to0} \frac{0y^4}{(0^4+y^2)^3} = \lim\limits_{y\to0} \frac{0}{y^6} = 0$

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^4(x^2)^4}{(x^4+(x^2)^2)^3} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x^{12}}{8x^{12}} = \frac{1}{8}$

Pela unicidade de limite conclui-se que

$\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$

p) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+3y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x\right)\cdot \dfrac{3y^2}{x^2+3y^2}$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} x = 0$ e $1 \leq \dfrac{3y^2}{x^2+3y^2} \leq 1$ (limitada),

então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2 \operatorname{sen} x}{x^2+3y^2} = 0.$

q) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \cos\left(\dfrac{\log(x^6)}{y^2-x+1}\right)$

. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ \boxed{x=1}}} \cos\left(\dfrac{\log(x^6)}{y^2-x+1}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \cos\left(\dfrac{\log(1)}{y^2}\right)$

$= \lim\limits_{y\to 0} \cos(0) = 1$

. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ y=0}} \cos\left(\dfrac{\log(x^6)}{y^2-x+1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \cos\left(\dfrac{\log(x^6)}{-x+1}\right)$

$= \cos\left(\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x^6)}{-x+1}\right) \underset{(\text{ver } \circledast)}{=} \cos(-6) \neq 1$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x^6)}{-x+1}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Pela regra de L'Hopital

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\log x^6)'}{(-x+1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{6x^5}{x^6}}{-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} -\dfrac{6}{x} = -6$, donde $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x^6)}{-x+1} = -6$

$\circledast$

Conclusão: $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\dfrac{\log(x^6)}{y^2-x+1}\right)$

Estude a continuidade das funções

3

5.

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- Para $(x,y) \neq (0,0)$ f é contínua pois é uma função racional

→ Para $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \overset{?}{=} f(0,0)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \boxed{y=x^3}}} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 x^3}{x^6+(x^3)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$$

logo f não é contínua em $(0,0)$

k) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0 \end{cases}$

· Para $(x,y) \neq (0,0)$, f é contínua porque é o quociente entre duas funções contínuas

· Para $(x,y) = (0,0)$. A função f é contínua em $(0,0)$ se e só se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \boxed{x=0}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(y^2)}{0+y^2} = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

Logo f é descontínua em $(0,0)$.

4

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y} & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases} = \begin{cases} x+y & , x \neq y \\ 0 & , x = y \end{cases}$

porque $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$

– Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \neq y$ tem-se que f é contínua pois é dada por um polinómio

→ Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = y$, ou seja para $(a,a) \in \mathbb{R}^2$ com $a \in \mathbb{R}$

f é contínua em (a,a) se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} f(x,y) = f(a,a)$$

• $f(a,a) = 0$

• $\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a) \\ \boxed{x=a}}} f(x,y) = \lim_{y\to a} (a+y) = 2a$

Se $a \neq 0$, então f é descontínua em (a,a)

Caso $a=0$, isto é $(0,0)$

• $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \boxed{x\neq y}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x+y = 0 = f(0,0)$

• $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=y}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0 = f(0,0)$

Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ logo f é contínua em $(0,0)$.