Tópicos de Matemática

Licenciatura em Matemática - 1º ano

exame de recurso - 30 jan 2018 Duração: 2h30mn

1. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Sejam p, q e r proposições. Se as proposições $r \Rightarrow (p \vee q)$ e $r \wedge q$ são verdadeiras, então, a proposição p é falsa.

   (b) Sejam A e B conjuntos não vazios. Então, $R = \omega_{A\setminus B} \cup \omega_{B\setminus A} \cup \omega_{A\cap B}$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$.

   (c) Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Se existe $\sup X$ e $\sup A\setminus X$, então, existe $\sup A$.

   (d) Sejam A, B e C conjuntos. Se $A \not\sim B$ então $A \times C \not\sim B \times C$.

2. Dê exemplo de, ou justifique que não existe:

   (a) de conjuntos A e B tais que $\{1, \emptyset\} \cap A \in B$ e $\{1, \emptyset\} \cup A \subseteq B$;

   (b) um conjunto A e uma função $f : A \to \mathcal{P}(A)$ sobrejetiva;

   (c) uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $\{(1, 3), (2, 4)\} \in \mathcal{R} \neq \omega_A$;

   (d) um conjunto A tal que $A \times \{1, 2\} \subseteq \{1, 2\}$.

3. Usando indução matemática, prove que, para todo o natural $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

4. Considere a aplicação $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(n, x) = n + x$, para todos $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$.

   (a) Determine $f(A)$, sabendo que $A = \{(|x|, x) \mid x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$.

   (b) Se $B = \{7\}$, determine $f^{\leftarrow}(B)$. Justifique.

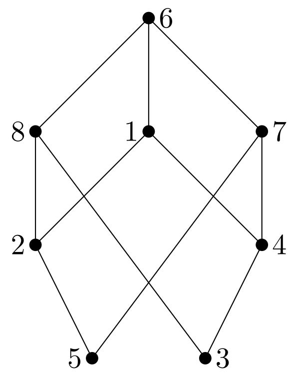
   (c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou é injetiva.

   (d) Seja θ a relação binária em $\mathbb{N}$ definida por

   $$n\ \theta\ m \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{Z})\ f(n, 1) = f(m, x).$$

   Prove que θ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$ e determine $[1]_\theta$.

5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:



   (a) Indique, caso exista:

      i. Maj $\{5, 4\}$ e $\sup\{5, 4\}$;

      ii. $\inf \emptyset$ e $\sup \emptyset$;

      iii. um subconjunto X de A tal que $(X, \leq_X)$ admite 3 elementos maximais e 3 elementos minimais.

   (b) Justifique que $(A, \leq)$ não é um reticulado.

Cotação: 1. 4 × 1.0 **2.** 4 × 1.0 **3.** 1.5 **4.** 3 × 1.5 + 2.0 **5.** 4 × 1.0