Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática

Análise

—— prova escrita 2 — duas horas —————————— 2023'24 ——

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (3 valores) Justifique que a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = xy^3 + 3x$, não tem extremos locais.

2. (3 valores) Determine a distância mínima entre a origem $(0,0,0)$ e a superfície definida pela equação $2xy + 3z^2 = 4$.

3. (4 valores) Considere o seguinte integral duplo

$$\int_0^1 \int_{-2x+2}^{-2x^2+2} x \, dydx.$$

   (a) Identifique a região de integração;
   (b) Esboce a região de integração;
   (c) Inverta a ordem de integração do integral apresentado;
   (d) Calcule o valor do integral.

4. (2 valores) Passe para coordenadas polares o integral

$$\iint_R (x^2 + y) d(x,y),$$

   quando (não é para calcular o integral)

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \leq 0,\ -\sqrt{3}x \leq y \right\}.$$

5. (4 valores) Considere o sólido $\mathcal{S}$ definido pelo conjunto

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

   (a) Apresente um integral(ou soma de integrais) triplo, em coordenadas cilíndricas, que permita calcular o volume do sólido $\mathcal{S}$.
   (b) Apresente um integral(ou soma de integrais) triplo, em coordenadas esféricas, que permita calcular o volume do sólido $\mathcal{S}$.

Fim

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen (α)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos (α)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg (α)	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$(\mathrm{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$
$$\mathrm{sen}\,(2\alpha) = 2\mathrm{sen}\,(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\mathrm{sen}\,\alpha)^2$$

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}, \qquad (r,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}, \qquad (r,\theta,z) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}, \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \qquad (\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi], \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\mathrm{sen}\,\varphi.$$