Ficha de Trabalho 5

1. $r(t) = (3\,\text{sen}\, t^2, 3\cos t^2)$, $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$

↳ parametrização da circunferência de centro $(0,0)$ e raio 3

(a) Sejam $f(t) = 3\,\text{sen}\, t^2$ e $g(t) = 3\cos t^2$, temos que

$$\|r'(t)\| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

$f'(t) = 6t\cos t^2$
$g'(t) = -6t\,\text{sen}\, t^2$

logo, $\|r'(t)\| = \sqrt{(6t\cos t^2)^2 + (-6t\,\text{sen}\, t^2)^2}$

$$= \sqrt{36t^2\cos^2 t^2 + 36t^2\,\text{sen}^2 t^2}$$

$$= \sqrt{36t^2(\cos^2 t^2 + \text{sen}^2 t^2)}$$

Pela fórmula trigonométrica:
$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$,
sendo $x = t^2$

$$= \sqrt{36t^2} = 6t$$

Logo, verificamos que $\|r'(t)\| = 6t$.

(b) $r(t) = (f(t), g(t)) = (3\,\text{sen}\, t^2, 3\cos t^2)$

Comprimento da curva $= \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.

Da alínea anterior, sabemos que $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = 6t$, pelo que o comprimento da curva é dado por:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 6t\, dt = \left[3t^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 3 \times (\sqrt{\pi})^2 = 3\pi$$

Logo, o comprimento da curva entre 0 e $\sqrt{\pi}$ é 3π. Como a circunferência varia para $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$, o comprimento total da curva é dado por:

$$\left[3t^2\right]_0^{\sqrt{2\pi}} = 3 \times (\sqrt{2\pi})^2 = 3 \times 2 \times \pi = 6\pi.$$

(c) Como $s/3 = t^2$, então temos que:

$$r(s/3) = \left(3\,\text{sen}\left(\frac{s}{3}\right), 3\cos\left(\frac{s}{3}\right)\right).$$

logo a reparametrização v da curva é igual a $\left(3\sin\left(\frac{s}{3}\right), 3\cos\left(\frac{s}{3}\right)\right)$.

$$v'(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{3}\right), -\text{sen}\left(\frac{s}{3}\right)\right)$$

$$\|v'(s)\| = \sqrt{\left(\cos\left(\frac{s}{3}\right)\right)^2 + \left(-\text{sen}\left(\frac{s}{3}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\left(\frac{s}{3}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{s}{3}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

logo, verificamos que $\|v'(s)\|$ é 1.

2. $r(t) = (t, t^2, e^t)$

Temos que $r'(t) = (1, 2t, e^t)$ e $r''(t) = (0, 2, e^t)$. Logo:

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2t & e^t \\ 0 & 2 & e^t \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2te^t - 2e^t) - \vec{j}\,(e^t) + \vec{k}\,(2)$$

$$= \vec{i}\,(2e^t(t-1)) - \vec{j}\,e^t + 2\vec{k} = (2te^t - 2e^t, e^t, 2) + (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$
$$= (2te^t - 2e^t, -e^t, 2).$$

Iremos agora determinar a função curvatura:

$$k(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{(2e^t(t-1))^2 + (-e^t)^2 + 4}}{\left(\sqrt{1 + 4t^2 + (e^t)^2}\right)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{4e^{2t}(t-1)^2 + e^{2t} + 4}}{(1 + 4t^2 + e^{2t})^{3/2}}$$

$$= \frac{\sqrt{e^{2t}(4(t-1)^2 + 1) + 4}}{(1 + 4t^2 + e^{2t})^{3/2}} = \frac{\sqrt{e^{2t}(4t^2 - 8t + 4) + 1) + 4}}{(1 + 4t^2 + e^{2t})^{3/2}}$$

logo $k(t) = \dfrac{\sqrt{e^{2t}(4t^2 - 8t + 5) + 4}}{(1 + 4t^2 + e^{2t})^{3/2}}$

Vamos, agora, qual o valor da curvatura para $t=0$.

$$K(0) = \frac{\sqrt{e^0(0+5)+4}}{(1+4\times 0+e^0)^{3/2}} = \frac{\sqrt{5+4}}{2^{3/2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Logo, em $t=0$ o valor da curvatura é $K(0) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. (a) $r(t) = (2\operatorname{sen} t, \sqrt{5}t+1, 2\cos t)$

$$\|r'(t)\| = \|(2\cos t, \sqrt{5}, -2\operatorname{sen} t)\| = \sqrt{(2\cos t)^2+(\sqrt{5})^2+(-2\operatorname{sen} t)^2}$$

$$= \sqrt{4\cos^2 t+5+4\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{5+4(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)}$$

$$= \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

Verificamos, assim que $\|r'(t)\| = 3$.

(b) O vetor tangente T é dado por: $\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$.

Do exercício anterior, sabemos que: $\|r'(t)\| = 3$, logo:

$$T(t) = \frac{1}{3}(2\cos t, \sqrt{5}, -2\operatorname{sen} t)$$

O vetor normal, $N(t)$, é dado por: $\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$, logo:

$$T'(t) = \left(-\frac{2}{3}\operatorname{sen} t, 0, -\frac{2}{3}\cos t\right) = \frac{1}{3}(-2\operatorname{sen} t, 0, -2\cos t)$$

$$\|T'(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\operatorname{sen} t\right)^2+(0)^2+\left(-\frac{2}{3}\cos t\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9}\operatorname{sen}^2 t+\frac{4}{9}\cos^2 t} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Logo } N(t) = \frac{\left(-\frac{2}{3}\operatorname{sen} t, 0, -\frac{2}{3}\cos t\right)}{\frac{2}{3}} = (-\operatorname{sen} t, 0, -\cos t)$$

O binormal é dado pelo produto de $T(t)$ por $N(t)$, ou seja,

$$B(t) = T(t)\times N(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{2}{3}\cos t & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3}\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & 0 & -\cos t \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$B(t) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\cos t, -\frac{2}{3}\cos^2 t - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2 t, \frac{\sqrt{5}}{3}\operatorname{sen} t\right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\cos t, -\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\operatorname{sen} t\right)$

Veremos agora estes vetores no ponto $P=(0,1,2)$. Como as coordenadas do ponto P são dadas para $t=0$, ou seja

$$\begin{cases} 2\operatorname{sen} t = 0 \\ \sqrt{5}t+1 = 1 \\ 2\cos t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} t = 0 \\ \sqrt{5}t = 0 \\ \cos t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=0 \\ t=0 \end{cases}$$

Logo, veremos as coordenadas dos vetores $T(t)$, $N(t)$ e $B(t)$ para $t=0$.

$T(0) = \frac{1}{3}(2\cos 0, \sqrt{5}, -2\operatorname{sen} 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, 0\right)$

$N(0) = (-\operatorname{sen} 0, 0, -\cos 0) = (0,0,-1)$

$B(0) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\cos 0, -\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\operatorname{sen} 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)$

(c) A equação do plano osculador em P é dado por:

$$B(0)\cdot(x, y-1, z-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)\cdot(x, y-1, z-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow -\sqrt{5}x - 2y + 2 = 0$$

A91640 Beatriz Oliveira