Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2025/2026

Departamento de Matemática

Álgebra Vetorial

Álgebra Vetorial

Neste capítulo, iremos estudar conceitos ligados à noção intuitiva de vetor no plano e no espaço, nomeadamente os conceitos de comprimento de um vetor, ângulo entre dois vetores e ortogonalidade de vetores. Em particular, pretendemos dar um sentido em $\mathbb{R}^n$ a estas noções. Para tal, é necessário introduzir a noção de *produto escalar* (também designado por *produto interno euclidiano*), que permitirá definir e estudar estas noções de forma rigorosa.

Produto escalar, norma e distância em $\mathbb{R}^n$

Para dar sentido, em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, às noções de distância e ângulo entre vetores do plano ou do espaço, a estrutura do espaço vetorial real é enriquecida com um novo conceito: o *produto escalar*. Embora o objetivo deste capítulo seja estudar a álgebra vetorial no plano e no espaço, apresentaremos essas noções de forma mais geral.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $u = (a_1, \dots, a_n), v = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$*. Chama-se* ***produto escalar*** *(ou* ***produto interno euclidiano****) de* u *e* v*, e representa-se por* $u \mid v$ *ao número real*

$$u \mid v = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Exemplo

Dados $u = (1, -2, 3), v = (4, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$*, tem-se*

$$u \mid v = 1 \times 4 + (-2) \times 0 + 3 \times 1 = 7.$$

Álgebra Vetorial

A prova das propriedades seguintes, relativas ao produto escalar, é deixada como exercício.

Teorema

Para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *tem-se:*

1. $u \mid v = v \mid u$;
2. $u \mid (v + w) = u \mid v + u \mid w$;
3. $u \mid \alpha v = \alpha(u \mid v)$;
4. $0_{\mathbb{R}^n} \mid u = 0 = u \mid 0_{\mathbb{R}^n}$;
5. $u \mid u \geq 0$, *e* $u \mid u = 0$ *se e só se* $u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Recorrendo à noção de produto escalar, definimos a noção que corresponde ao conceito intuitivo de comprimento de um vetor.

Definição

Seja $v \in \mathbb{R}^n$*. Chama-se* ***norma de*** v*, e representa-se por* $\|v\|$*, o número real não negativo* $\|v\| = \sqrt{v \mid v}$*. Se* $\|v\| = 1$*, diz-se que* x *é um* ***vector unitário****.*

Exemplo

Seja $v = (1, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$*. Então*

$$\|v\| = \sqrt{v \mid v} = \sqrt{(1, 3, 1) \mid (1, 3, 1)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1} = \sqrt{11}.$$

Da definição anterior, seguem de imediato as propriedades seguintes.

Teorema

Para quaisquer $v \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *tem-se:*

1. $\|v\| = 0$ *se e só se* $v = 0_{\mathbb{R}^n}$;
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.

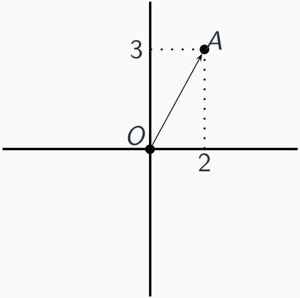
Definição

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. *Designa-se por* ***distância*** *entre* u *e* v, *e representa-se por* $d(u, v)$, *o real* $\|v - u\|$.

Exemplo

Considerem-se, no plano, os pontos O e A, com coordenadas $u = (0, 0)$ e $v = (2, 3)$, respetivamente. A distância do ponto O ao ponto A é

$$\|v - u\| = \|(2, 3) - (0, 0)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$



Teorema

Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *tem-se:*

1. $d(u, v) \geq 0$;
2. $d(u, v) = 0$ *se e só se* $u = v$;
3. $d(u, v) = d(v, u)$.

Demonstração.

Exercício. $\square$

A definição de norma a partir da noção de produto interno permite estabelecer uma relação entre o produto interno de dois vectores e as suas normas.

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)
Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se:

1. $|u \mid v| \leq \|u\|\|v\|$;
2. $|u \mid v| = \|u\|\|v\|$ *se e só se a sequência* (u, v) *é linearmente dependente.*

Demonstração.

1. Dados $u, v \in \mathbb{R}^n$, sejam $\alpha = v \mid v$ e $\beta = -(u \mid v)$. Então

$$\begin{array}{rcl} (\alpha u + \beta v) \mid (\alpha u + \beta v) & = & \alpha^2 (u \mid u) + 2\alpha\beta (u \mid v) + \beta^2 (v \mid v) \\ & = & (v \mid v)^2 (u \mid u) - 2(v \mid v)(u \mid v)^2 + (u \mid v)^2 (v \mid v) \\ & = & (v \mid v)^2 (u \mid u) - (v \mid v)(u \mid v)^2. \end{array}$$

Pelo teorema indicado na página 4, tem-se $(\alpha u + \beta v) \mid (\alpha u + \beta v) \geq 0$, logo

$$(v \mid v)(u \mid v)^2 \leq (v \mid v)^2 (u \mid u).$$

Se $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, tem-se $v \mid v > 0$ e, portanto,

$$(u \mid v)^2 \leq (v \mid v)(u \mid u) = \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Assim, $|u \mid v| \leq \|u\| \|v\|$.

Se $v = 0_{\mathbb{R}^n}$, tem-se $u \mid v = 0$ e $\|v\| = 0$, pelo que $|u \mid v| \leq \|u\| \|v\| = 0$.

Demonstração (continuação).

2. $\Leftarrow$) Suponha-se que a sequência (u, v) é linearmente dependente. Admita-se, sem perda de generalidade, que $v = \lambda u$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então

$$|u \mid v| = |u \mid (\lambda u)| = |\lambda (u \mid u)| = |\lambda| \|u\|^2$$

e

$$\|v\| = \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|.$$

Logo $|u \mid v| = \|u\| \|v\|$.

Demonstração (continuação).

$\Rightarrow$) Se $|u \mid v| = \|u\|\|v\|$, então

$$(v \mid v)(u \mid v)^2 = (v \mid v)^2(u \mid u).$$

Sendo $\alpha = (v \mid v)$ e $\beta = -(u \mid v)$, tem-se

$$(\alpha u + \beta v) \mid (\alpha u + \beta v) = (v \mid v)^2(u \mid u) - (v \mid v)(u \mid v)^2 = 0.$$

Logo $\alpha u + \beta v = 0$ e, portanto, (u, v) é linearmente dependente (pois ou $v = 0_{\mathbb{R}^n}$ ou $\alpha = v \mid v \neq 0$).

Corolário (Desigualdade Triangular)

Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Demonstração.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= (u+v) \mid (u+v) = u \mid u + 2(u \mid v) + v \mid v \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

temos $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. $\square$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$-1 \leq \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Assim, sendo a restrição da função cosseno ao intervalo $[0, \pi]$ injetiva e tendo contradomínio $[-1, 1]$, existe um número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{u|v}{\|u\|\|v\|}$. Tal motiva a definição seguinte.

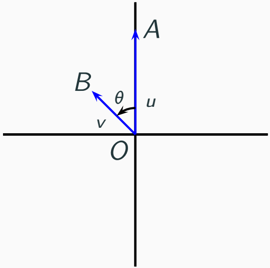
Definição

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Chama-se ângulo dos vectores u e v, e representa-se por $\angle(u, v)$, o número real $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|}.$$

Exemplo

No plano, sejam O, A e B os pontos de coordenadas $(0,0)$, $(0,2)$ e $(-1,1)$, respetivamente. Consideremos os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, representados em $\mathbb{R}^2$ por $u=(0,2)$ e $v=(-1,1)$.



O ângulo entre u e v é o real $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{(0,2) \mid (-1,1)}{\|(0,2)\|\|(-1,1)\|} = \frac{0\times(-1)+2\times 1}{\sqrt{0^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, $\theta = \pi/4$.

Exemplo

Sejam $u = (1, -1, 0), v = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$*. O ângulo entre os vectores* u *e* v *é o número real* $\theta \in [0, \pi]$ *tal que*

$$\cos\theta = \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{3}$*.*

Ortogonalidade

Relacionado com a noção de ângulo de dois vectores temos o conceito de ortogonalidade.

Definição

Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que os vetores u e v são ***ortogonais*** *(ou* ***perpendiculares****), e escreve-se $u \perp v$, se $u \mid v = 0$.*

Observações: Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$:

- se $u \perp v$, então $u \mid v = 0$, pelo que $v \mid u = 0$ e, portanto, também se tem $v \perp u$;
- $v \perp 0_{\mathbb{R}^n}$.

Exemplo

Sejam $u = (1,3,1), v = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$. *Tem-se*

$$u \mid v = 1 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times (-1) = 0,$$

pelo que os vectores u *e* v *são ortogonais.*

Teorema (Teorema de Pitágoras)

Para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^n$, *se* u *e* v *são ortogonais, tem-se* $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Demonstração.

Exercício. $\square$

Definição

Uma sequência $(v_1, \ldots, v_r)$ *de vetores de* $\mathbb{R}^n$ *diz-se* ***ortogonal*** *se os vetores* $v_1, \ldots, v_r$ *são ortogonais dois a dois, i.e., se* $v_i \mid v_j = 0$*, para quaisquer* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *tais que* $i \neq j$*.*
Uma base $(v_1, \ldots, v_r)$ *de um subespaço vetorial* V *de* $\mathbb{R}^n$ *diz-se uma* ***base ortogonal*** *se a sequência* $(v_1, \ldots, v_r)$ *é ortogonal.*

Observação: Para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$, (v) é ortogonal.

Podemos relacionar os conceitos de ortogonalidade e independência linear, através do seguinte resultado.

Teorema

Para quaisquer $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, *se* $(v_1, \ldots, v_r)$ *é ortogonal, então* $(v_1, \ldots, v_r)$ *é linearmente independente.*

Demonstração.

Sejam $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tais que $(v_1, \dots, v_r)$ é ortogonal. Consideremos $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0_{\mathbb{R}^n}$. Então, para qualquer $i \in \{1, \dots, r\}$,

$$(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) \mid v_i = 0_{\mathbb{R}^n} \mid v_i,$$

donde

$$\alpha_1(v_1 \mid v_i) + \cdots + \alpha_i(v_i \mid v_i) + \cdots + \alpha_r(v_r \mid v_i) = 0.$$

Como $(v_1, \dots, v_r)$ é ortogonal, temos $v_i \mid v_j = 0$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tais que $i \neq j$ e, portanto, $\alpha_i(v_i \mid v_j) = 0$. Além disso, dado que $v_i \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, tem-se $v_i \mid v_i \neq 0$. Logo, como $\alpha_i(v_i \mid v_i) = 0$, resulta que $\alpha_i = 0$. Portanto, $(v_1, \dots, v_r)$ é linearmente independente. $\square$

Teorema (Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt)
Sejam $(v_1, v_2, ..., v_r)$ *uma base de um subespaço vetorial* V *de* $\mathbb{R}^n$ *e*

$$
\begin{aligned}
u_1 &= v_1, \\
u_2 &= v_2 - \frac{v_2 \mid u_1}{u_1 \mid u_1} u_1, \\
u_3 &= v_3 - \frac{v_3 \mid u_1}{u_1 \mid u_1} u_1 - \frac{v_3 \mid u_2}{u_2 \mid u_2} u_2, \\
&\vdots \\
u_r &= v_r - \frac{v_n \mid u_1}{u_1 \mid u_1} u_1 - \ldots - \frac{v_r \mid u_{r-1}}{u_{r-1} \mid u_{r-1}} u_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Então $(u_1, u_2, ..., u_r)$ *é uma base ortogonal de* V*.*

Exemplo

Sejam $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,0,1), v_3 = (0,1,1) \in \mathbb{R}^3$. *A sequência* (v_1, v_2, v_3) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$. *Consideremos*

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = (1,0,1),\\
u_2 &= v_2 - \frac{v_2 \mid u_1}{u_1 \mid u_1} u_1 = (0,0,1) - \frac{(0,0,1) \mid (1,0,1)}{(1,0,1) \mid (1,0,1)}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),\\
u_3 &= v_3 - \frac{v_3 \mid u_1}{u_1 \mid u_1} u_1 - \frac{v_3 \mid u_2}{u_2 \mid u_2} u_2\\
&= (0,1,1) - \frac{(0,1,1) \mid (1,0,1)}{(1,0,1) \mid (1,0,1)}(1,0,1) - \frac{(0,1,1) \mid (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})}{(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \mid (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})}\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\\
&= (0,1,0).
\end{aligned}$$

Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt podemos afirmar que (u_1, u_2, u_3) *é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$.

Definição

Uma sequência $(v_1, ..., v_r)$ *de vetores de* $\mathbb{R}^n$ *diz-se* ***ortonormada*** *se é ortogonal e cada um dos vetores* v_i*,* $i \in \{1, \ldots, r\}$*, é unitário.*
Uma base $(v_1, \ldots, v_r)$ *de um subespaço vetorial* V *de* $\mathbb{R}^n$ *diz-se uma* ***base ortonormada*** *se a sequência* $(v_1, \ldots, v_r)$ *é ortonormada.*

Observação: Para qualquer $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, tem-se $\|v\| \neq 0$ e, sendo $u = \frac{1}{\|v\|} v$, segue que $\|u\| = 1$.

Da observação anterior e do teorema indicado na página 22 é imediato o resultado seguinte.

Teorema

Todo o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão ≥ 1 admite uma base ortonormada.

Exemplo

Sejam u_1, u_2, u_3 os vectores obtidos no exemplo anterior. Então (w_1, w_2, w_3), onde

$$w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot u_2 = (-1, 0, 1), w_3 = \frac{1}{\|u_3\|} \cdot u_3 = (0, 1, 0),$$

é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$ e $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base ortogonal de V. Então, para todo $v \in V$, tem-se

$$v = \frac{v \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{v \mid v_r}{\|v_r\|^2} v_r .$$

Em particular, se $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base ortonormada de V, temos

$$v = (v \mid v_1) v_1 + \cdots + (v \mid v_r) v_r .$$

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. □

Dado um subconjunto V de $\mathbb{R}^n$, representa-se por $V^\perp$ o conjunto

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : u \mid v = 0, \forall v \in V\}.$$

No caso particular em que V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, prova-se o seguinte.

Teorema

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Então $V^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração.

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Pela definição de $V^\perp$, tem-se $V^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$.

Uma vez que, para todo $v \in V$, $0_{\mathbb{R}^n} \mid v = 0$, então $0_{\mathbb{R}^n} \in V^\perp$.

Dados $u, w \in V^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se, para todo $v \in V$, $u \mid v = 0$, $w \mid v = 0$, pelo que

$$(u + w) \mid v = u \mid v + w \mid v = 0 + 0 = 0,$$

$$(\alpha u) \mid v = \alpha(u \mid v) = 0,$$

e, portanto, $u + w \in V^\perp$, $\alpha u \in V^\perp$. Logo, $V^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Definição

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. O subespaço

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : u \mid v = 0, \forall v \in V\}$$

*designa-se por **complemento ortogonal de** V.*

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão ≥ 1 e $(v_1, ..., v_r)$ uma base de V. Então

$$V^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n : u \mid v_i = 0, \forall i \in \{1, ..., r\}\}.$$

Demonstração.

Exercício. $\square$

Exemplo

Consideremos o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ *definido por* $V =< (-1,1,0),(0,1,1) >$. *A sequência* $((-1,1,0),(0,1,1))$ *é linearmente independente e, portanto, é uma base de* W. *O complemento ortogonal de* V *é*

$$\begin{aligned} V^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y,z) \,|\, (-1,1,0) = 0, (x,y,z) \,|\, (0,1,1) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x+y=0, y+z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x=y, z=-y\} \\ &= \{(y,y,-y) \in \mathbb{R}^3 \ \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1,1,-1) > . \end{aligned}$$

Álgebra Vetorial

A prova das propriedades seguintes é deixada ao cuidado do leitor.

Teorema

Sejam U e V subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Então

1. *Se $U \subseteq V$, então $V^\perp \subseteq U^\perp$.*
2. $V = (V^\perp)^\perp$.
3. $U^\perp + V^\perp \subseteq (U \cap V)^\perp$.

Teorema

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Então $\mathbb{R}^n$ é soma direta de V e V^T.

Do teorema anterior resulta que todo o vetor u de $\mathbb{R}^n$ escreve-se de modo único na forma $u_1 + u_2$, com $u_1 \in V$ e $u_2 \in V^{\perp}$.

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$ e u_1, u_2 os únicos vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $u_1 \in V$, $u_2 \in V^\perp$ e $u = u_1 + u_2$. Ao vetor u_1 dá-se a designação de ***projeção ortogonal de*** u ***sobre*** V *e representa-se por* $\mathrm{proj}_V u$.

No caso particular em que $V =< v >$, com $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, o vetor $\mathrm{proj}_V u$ *é designado por* ***projeção ortogonal de*** u ***sobre*** v *ao e representa-se por* $\mathrm{proj}_v u$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de $\dim \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^n$ *e* $(v_1, \ldots, v_r)$ *uma base ortogonal de V. Então*

$$\operatorname{proj}_V u = \frac{u \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \cdots + \frac{u \mid v_r}{\|v_r\|^2} v_r.$$

No caso em que $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base ortonormada, tem-se

$$\operatorname{proj}_V u = (u \mid v_1) v_1 + \cdots + (u \mid v_r) v_r.$$

Corolário

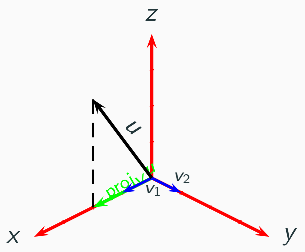
Sejam u e v vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Então

$$\operatorname{proj}_v u = \frac{u \mid v}{\|v\|^2} v.$$

Exemplo

Sejam $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ e V o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{v_1, v_2\}$. Vamos determinar a projeção ortogonal de $u = (2,0,3)$ sobre V. Os vetores v_1 e v_2 são ortogonais entre si e não são nulos. Logo (v_1, v_2) é uma base ortogonal de V. Pelo teorema anterior, tem-se

$$\mathrm{proj}_V u = \frac{u \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{u \mid v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = 2v_1 + 0v_2 = (2,0,0).$$



Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$. Então o vetor $\operatorname{proj}_V u$ *satisfaz a propriedade de minimizar a distância a u de entre os elementos de V, isto é,*

$$\|u - \operatorname{proj}_V u\| = \min\{\|u - v\| \,:\, v \in V\}.$$

Demonstração.

Sejam $p = \text{proj}_V u$ e $v \in V$ arbitrário. Como $u - p$ é ortogonal a todos os vetores de V, então u é ortogonal a $v - p$. Pelo Teorema de Pitágoras segue que

$$\|u - p\|^2 + \|v - p\|^2 = \|(u - p) - (v - p)\|^2 = \|u - v\|^2.$$

Logo, para qualquer $v \in V$, tem-se

$$\|u - p\| \leq \|u - v\|,$$

e a igualdade verifica-se se e só se $v = p$. $\square$