Geometria
Lic. Ciências da Computação

Exame de Recurso
20 junho de 2016

Proposta de Resolução

1. $A=(1,2,0)$, $B=(1,3,-1)$

$\Pi: x+2y-z=3$

a $\vec{AB} = B-A = (0,1,-1)$

$r = A + \langle \vec{AB} \rangle = (1,2,0) + \langle (0,1,-1) \rangle$

Eq. paramétricas: $(x,y,z) = (1,2,0) + \lambda(0,1,-1)$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases}$$ Eq. cartesianas de r

b $\Pi: x+2y-z=3$

Eq. paramétricas: $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=\alpha+2\beta-3 \end{cases}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,-3) + \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,2)$

$\Pi = (0,0,-3) + \langle (1,0,1), (0,1,2) \rangle$ eq. vetorial de Π

c $\vec{u} = (0,1,-1)$ é vetor diretor de r

$\vec{v} = (1,0,1)$ e $\vec{w} = (0,1,2)$ são vetores diretores de Π

Temos que $r \parallel \Pi$ se $\vec{u} \in \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, isto é, se $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependentes, ou ainda, se $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$.

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -(2+1) = -3 \neq 0$$

Portanto r não é paralelo a Π.

Temos que $r \perp \Pi$ se $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ e $\vec{u}\cdot\vec{w}=0$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -1 \neq 0$

Logo r não é perpendicular a Π.

2

a Temos que $r+s = A + \langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ e que as retas $r+s$ são enviesadas sse $\dim(r+s)=3$

Temos $\dim(r+s)=3 \Leftrightarrow \dim(\langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle)=3$

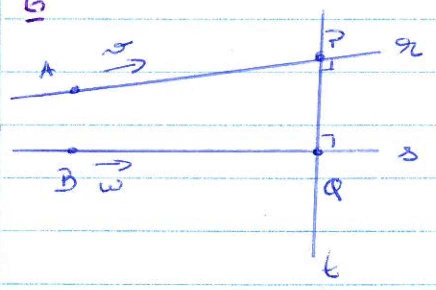
$\Leftrightarrow \det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

$\vec{AB} = B-A = (0,1,0)-(1,0,1) = (-1,1,-1)$

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = -(-1-1) + (1-1) = 2 \neq 0$$

Logo $\{\overrightarrow{AB}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são linearmente independentes e, portanto, r e s são enviesadas

b



Seja t a perpendicular comum a r e a s e sejam P e Q os pés da perpendicular de r e s, resp.

Temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$ (regra de Chasles)

Como $A, P \in r$ e $B, Q \in s$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\vec{v} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{QB} = \beta\vec{w}$$

Além disso como $t \perp r$ e $t \perp s$ temos

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ}\cdot\vec{w} = 0$$

Obtemos assim o sistema:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v} = \alpha\,\vec{v}\cdot\vec{v} + \beta\,\vec{v}\cdot\vec{w}\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{w} = \alpha\,\vec{v}\cdot\vec{w} + \beta\,\vec{w}\cdot\vec{w}\end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases}-2 = 2\alpha\\ -1 = \quad +3\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha = -1\\ \beta = -1/3\end{cases}$$

Temos: $P = A + \overrightarrow{AP} = A + \alpha\vec{v} = (1,0,1) - (0,-1,1) = (1,1,0)$

$Q = B + \overrightarrow{BQ} = B - \beta\vec{w} = (0,1,0) + \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Uma eq. vetorial de t é: $t = P + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$

$t = (1,1,0) + \langle (-2/3, 1/3, 1/3) \rangle$

c Sabemos que $d(r,s) = d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$

$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = 4/9 + 1/9 + 1/9 = 6/9 = 2/3$

Logo $d(r,s) = \sqrt{2/3}$

d A medida do ângulo formado por r e s é $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} = 0$. Logo $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

3 Seja s a simetria central de centro Ω. Para $M \in A$, temos $s(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M}$. Assim: $s(M) = \Omega - (M - \Omega) = 2\Omega - M$.
Portanto, em coordenadas $s(x,y,z) = (4-x, 2-y, -2-z)$.

4 $\delta(x,y) = (3-y, 1-x)$

a Expressão matricial: $\delta: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Seja $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz de $\vec{\delta}$

Temos que $M \cdot M^T = I_2$ logo M é uma matriz ortogonal e, portanto, δ é uma isometria.

b Temos $\det(\vec{\delta}) = -1$, logo, δ ou é uma reflexão ou é uma reflexão deslizante. Calculemos $Fix(\delta)$

Temos $\delta(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} 3-y = x \\ 1-x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$ ∤

O conjunto dos pontos fixos de δ é o conjunto vazio, logo, δ é uma reflexão deslizante

c Seja θ a reflexão deslizante proposta. Temos que $\theta = \sigma \circ t$, onde σ é a reflexão na reta $r: x+y=2$ e t é a translação segundo $\vec{v} = (1,-1)$. De notar que $\vec{v} \parallel r$.

Temos $A = (2,0) \in r$ e $\vec{n} = (1,1)$ é vetor normal a r

Logo $\sigma(M) = M - 2\dfrac{\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \Rightarrow$

$$\sigma(x,y) = (x,y) - \cancel{2}\frac{(x-2,y)\cdot(1,1)}{\cancel{2}}(1,1) = (x,y) - (x+y-2)(1,1)$$
$$= (-y+2, -x+2)$$

Portanto $\theta(x,y) = \sigma \circ t(x,y) = \sigma(x+1, y-1) =$
$= (-y+1+2, -x-1+2) = (3-y, 1-x)$

De facto: $\theta = \delta$.

5 Sabemos que $\rho = t \circ \tilde{\rho} \circ t^{-1}$ onde $\tilde{\rho}$ é a rotação vetorial de ângulo $\theta = \pi/3$ segundo $\vec{e_3} = (0,0,1)$ e t é segundo o vetor $\overrightarrow{OA} = (1,1,0)$

Sabemos também que a matriz de $\tilde{\rho}$ é

$$\begin{bmatrix} \cos\pi/3 & -\operatorname{sen}\pi/3 & 0 \\ \operatorname{sen}\pi/3 & \cos\pi/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $\tilde{\rho}(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, z\right)$

Além disso $t(x,y,z) = (x+1, y+1, z)$

e $t^{-1}(x,y,z) = (x-1, y-1, z)$

Logo: $\rho(x,y,z) = t \circ \rho \circ t^{-1} = t(\rho(x-1, y-1, z))$

$$= t\left(\frac{1}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1), z\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}(x-1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y-1) + 1, \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + 1, z\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, z\right)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + \sqrt{3}/2 \\ 1/2 - \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

6 $x^2 + y^2 + 2xy - 12x + 4y - 4 = 0$

a Sejam $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $F = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \end{pmatrix}$

e $h = -4$

A equação dada é equivalente a $X^T A X + F^T X + h = 0$

Valores próprios de A: $\det(A - \lambda I) = 0$

$(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff 1 - \lambda = \pm 1$

$\lambda = 0 \vee \lambda = 2$

Vetores próprios:

$\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0$

$\vec{v} = (1, -1)$ $\hat{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$\lambda = 2$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff -x + y = 0$ $\vec{u} = (1, 1)$ $\hat{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

Consideramos a matriz $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Fazemos a mudança de variáveis $X = PX'$

A equação dada é equivalente a $(X')^T (P^T A P) X' + (F^T P) X' + h = 0$

Temos $P^T A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $F^T P = \left(-\frac{16}{\sqrt{2}} \quad -\frac{8}{\sqrt{2}}\right)$

$= (-8\sqrt{2} \quad -4\sqrt{2})$

Portanto:

$$2y'^2 - 8\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' - 4 = 0 \iff y'^2 - 2\sqrt{2}y' - 4\sqrt{2}x' - 2 = 0$$

$$\iff (y' - \sqrt{2})^2 - 2 - 4\sqrt{2}x' - 2 = 0 \iff (y' - \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}x' - 4$$

$$\iff (y' - \sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}(x' - \sqrt{2}/2)$$

Fazemos a seguinte mudança $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - \sqrt{2}/2 \\ y' - \sqrt{2} \end{pmatrix}$

e obtemos $y''^2 = 4\sqrt{2}\, x''$

que é a equação reduzida de uma parábola.

b) Para $a = \sqrt{2}$ temos $y''^2 = 4a x''$

Logo nas coordenadas (x'', y'') temos:

vértice: $(0,0)$ foco: $(\sqrt{2}, 0)$ eixo: $y'' = 0$

Nas coordenadas (x', y') temos

vértice: $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ foco $\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ eixo: $y' = \sqrt{2}$

Nas coordenadas (x, y)

vértice: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 + 1 \\ -1/2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Foco: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} + 1 \\ -1 - \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

Eixo: $X = PX' \iff X' = P^T X$

Logo $\begin{cases} x' = 1/\sqrt{2}\, x - 1/\sqrt{2}\, y \\ y' = 1/\sqrt{2}\, x + 1/\sqrt{2}\, y \end{cases}$

Assim $y' = \sqrt{2} \iff x + y = 2$

Esboço: