Tópicos Fundamentais de Matemática

(Licenciatura em Ciências da Computação)

7. Cardinalidade

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

2025/2026

7.1 Conceitos básicos

definição:

Dizemos que um conjunto A é **equipotente** ou **equipolente** a um conjunto B, e escrevemos $A \sim B$, quando existe uma aplicação bijetiva de A em B.
Escreveremos $A \not\sim B$ quando A não é equipotente a B, ou seja, quando não existem aplicações bijetivas de A em B.

exemplo:

1) O conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ é equipotente ao conjunto $B = \{a, b, c\}$. Já para o conjunto $C = \{a, b, c, d\}$ tem-se: $A \not\sim C$ e $B \not\sim C$. De facto, existem aplicações bijetivas de A em B, mas não existem aplicações bijetivas nem de A em C, nem de B em C (porquê?).

2) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \mathcal{P}(\{0, 1\})$, e $C = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Então, $A \sim A$, $A \sim B$, $A \sim C$, $B \sim C$ (porquê?).

3) Os conjuntos $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ são equipotentes. Por exemplo, a aplicação $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ tal que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = -x$ é bijetiva.

4) O conjunto $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ é equipotente a $\mathbb{N}$ (porquê?).

5) O conjunto $\mathbb{N}_0$ é equipotente ao conjunto dos naturais ímpares (porquê?).

6) $[0, 1] \sim [0, 3]$. (A aplicação $f : [0, 1] \to [0, 3]$ tal que, para cada $x \in [0, 1]$, $f(x) = 3x$ é bijetiva.)

proposição: Sejam A, B e C conjuntos.

1) $A \sim A$.
2) Se $A \sim B$, então $B \sim A$.
3) Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

demonstração: exercício. $\square$

observação: Decorre da proposição anterior que, quando X é um conjunto de conjuntos, **a relação de equipotência em** X, ou seja a relação

$$\sim_X = \{(X_1, X_2) \in X \times X : X_1 \sim X_2\}$$

é uma relação de equivalência.

proposição: Sejam A, B, C e D conjuntos tais que $A \sim B$ e $C \sim D$. Então:

1) $A \times C \sim B \times D$;
2) se A e C são disjuntos e B e D são disjuntos, então $A \cup C \sim B \cup D$;
3) $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

demonstração: Consideremos 1). Das hipóteses $A \sim B$ e $C \sim D$, segue que existem aplicações $f : A \to B$ e $g : C \to D$ bijetivas. Prova-se que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} f \times g : & A \times C & \to & B \times D \\ & (x, y) & \mapsto & (f(x), g(y)) \end{array}$$

é bijetiva, donde segue $A \times C \sim B \times D$. $\square$

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein):

Sejam A e B conjuntos. Se existem aplicações injetivas $f : A \to B$ e $g : B \to A$, então existe uma aplicação bijetiva $h : A \to B$.

observação:

O teorema anterior oferece a possibilidade de concluir que dois conjuntos A e B são equipotentes através de demonstração da existência de uma aplicação injetiva de A em B e de uma aplicação injetiva de B em A.

Em particular, se um dos conjuntos está contido no outro, por exemplo se $A \subseteq B$, para mostrar $A \sim B$ bastará encontrar uma aplicação injetiva de B em A, dado que a aplicação $f : A \to B$ tal que, para cada $x \in A$, $f(x) = x$ é injetiva.

exemplo:

Sejam $X = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{3n : n \in \mathbb{N}\}$ e $Z = X \cup Y$. Então: 1) $X \sim \mathbb{N}$; 2) $Y \sim \mathbb{N}$; 3) $Z \sim \mathbb{N}$.

Provemos 3). Atendendo a que $Z \subseteq \mathbb{N}$, pela observação anterior, basta encontrar uma aplicação injetiva de $\mathbb{N}$ em Z.

Por exemplo, $f : \mathbb{N} \to Z$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ é uma aplicação injetiva.

Note que esta aplicação não é sobrejetiva. (Porquê?)

definição:

Dado $n \in \mathbb{N}$, designaremos o conjunto constituído pelos primeiros n naturais por **segmento inicial dos naturais de ordem** n, denotado-o por $[n]$, ou seja:

$$[n] = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$$

proposição:

Para todo $m, n \in \mathbb{N}$,

1) existe $f : [m] \to [n]$ injetiva se e só se $m \leq n$.
2) existe $f : [m] \to [n]$ sobrejetiva se e só se $n \leq m$.
3) existe $f : [m] \to [n]$ bijetiva se e só se $m = n$.
4) $[m] \sim [n]$ se e só se $m = n$.

demonstração: exercício. $\square$

definição:

Um conjunto X diz-se **finito** quando X é o conjunto vazio ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X \sim [n]$. Caso contrário, X diz-se **infinito**.

observação:

Atendendo a 4) da proposição anterior, caso X seja um conjunto finito não vazio, existe um único n tal que $X \sim [n]$.

Esta observação legitima a definição que se segue.

definição: Dado um conjunto finito X, o **cardinal de** X será notado por $\#X$ ou $|X|$, sendo dado por: caso $X = \emptyset$, $\#X = 0$; caso $X \sim [n]$, $\#X = n$.

observação: Quando X é um conjunto finito, $\#X \in \mathbb{N}_0$ e $\#X$ corresponde ao número de elementos de X.

exemplo:

1) Já observámos que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ é equipotente a A, a $B = \mathcal{P}(\{0, 1\})$ e a $C = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$. Assim, como $A = [4]$, A, B e C são finitos e o seu cardinal é 4.

2) O conjunto $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito, pois o contrário exigiria a existência de aplicações bijetivas de $\mathbb{N}$ no conjunto vazio ou num segmento inicial $[n]$ (com $n \in \mathbb{N}$), o que é falso, pois não existem aplicações injetivas de $\mathbb{N}$ em nenhum destes conjuntos.

proposição: Sejam X e Y conjuntos.

1) Se X é finito e $X \sim Y$, então Y é finito.
2) Se X é infinito e $X \sim Y$, então Y é infinito.

demonstração: exercício. $\square$

proposição: Sejam X e Y conjuntos finitos. Então:

1) $\#X = \#Y$ se e só se $X \sim Y$;
2) $\#X \leq \#Y$ se e só se existem aplicações injetivas de X em Y.

demonstração: exercício. $\square$

proposição: Sejam X e Y conjuntos.

1) Se X é finito e $Y \subseteq X$, então Y é finito e $\#Y \leq \#X$.
2) Se X é infinito e $X \subseteq Y$, então Y é infinito.

demonstração: exercício. $\square$

observação:

Decorre da proposição anterior que, para qualquer conjunto Y: se X é um conjunto finito, então $X \cap Y$ é um conjunto finito; e se X é um conjunto infinito, então $X \cup Y$ é um conjunto infinito (porquê?).

Naturalmente, outras propriedades esperadas sobre a cardinalidade de conjuntos obtidos através das operações em conjuntos que estudámos, aplicadas a conjuntos finitos, são válidas. Enunciemos algumas das propriedades fundamentais:

proposição: Sejam X e Y conjuntos finitos. Então:

1) $X \cap Y$ é finito, $\#(X \cap Y) \leq \#X$ e $\#(X \cap Y) \leq \#Y$;
2) $X \cup Y$ é finito, $\#X \leq \#(X \cup Y)$, $\#Y \leq \#(X \cup Y)$,
   $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y - \#(X \cap Y)$ e
   quando X e Y são disjuntos, $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$;
3) $X \setminus Y$ é finito, $X \setminus Y \leq X$, $\#(X \setminus Y) = \#X - \#(X \cap Y)$;
4) $X \times Y$ é finito e $\#(X \times Y) = \#X \times \#Y$;
5) $\mathcal{P}(X)$ é finito e $\#(\mathcal{P}(X)) = 2^{\#X}$.

definição: Sejam A e B conjuntos. Dizemos que:

1) **a cardinalidade de** A **é igual à cardinalidade de** B ou que **o cardinal de** A **é igual ao cardinal de** B, escrevendo $\#A = \#B$, quando $A \sim B$;

2) **a cardinalidade de** A **é menor ou igual à cardinalidade de** B ou que **o cardinal de** A **é menor ou igual que o cardinal de** B, escrevendo $\#A \leq \#B$, quando existem aplicações injetivas de A em B;

3) **a cardinalidade de** A **é menor que a cardinalidade de** B ou que **o cardinal de** A **é menor que o cardinal de** B, escrevendo $\#A < \#B$, quando $A \leq B$ e $A \neq B$.

Escreveremos $\#A \neq \#B$, $\#A \not\leq \#B$ e $\#A \not< \#B$ quando não se tem, respetivamente, $\#A = \#B$, $\#A \leq \#B$ e $\#A < \#B$.

Atendendo ao Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein, é fácil provar que:

proposição: Dados conjuntos A e B (finitos ou infinitos),

$$\#A = \#B \text{ se e só se } \#A \leq \#B \text{ e } \#B \leq \#A.$$

observação: Note-se que no caso de A e B serem conjuntos finitos, as notações $\#A$ e $\#B$ também podem ser interpretadas como números em $\mathbb{N}_0$. Contudo, esta interpretação é coerente com a definição anterior, dado que, como já observámos: a igualdade $\#A = \#B$ em $\mathbb{N}_0$ é verdadeira se e só se $A \sim B$; e a desigualdade $\#A \leq \#B$ em $\mathbb{N}_0$ é verdadeira se e só se existem aplicações injetivas de A em B.

exemplo: Atendendo a observações já efetuadas anteriormente, podemos afirmar:

1) Para $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \mathcal{P}(\{0, 1\})$, e $C = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$, $\#A = \#B$, $\#B = \#C$, $\#A = \#C$.

2) $\#\mathbb{R}^+ = \#\mathbb{R}^-$, $\#\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = \#\mathbb{N}$, $\#\mathbb{N}_0 = \#\{2n + 1 : n \in \mathbb{N}_0\}$, $\#[0, 1] = \#[0, 3]$.

exemplo:

1) Para $A = [3] = \{1, 2, 3\}$, $B = \mathcal{P}(\{0, 1\})$, tem-se $\#A \leq \#B$, mas $\#B \not\leq \#A$ (porquê?).

2) $\#\mathbb{N}_0 \leq \#\mathbb{Z}$, $\#\mathbb{Z} \leq \#\mathbb{N}_0$ e $\#\mathbb{N}_0 = \#\mathbb{Z}$ (porquê?).

observação: Mostra-se que todos os intervalos reais (fechados, abertos ou semi-abertos) são todos equipotentes entre si (por exemplo, com recurso à construção de funções injetivas e ao Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein).

Mais, cada um dos intervalos reais é equipotente ao próprio conjunto $\mathbb{R}$.

Assim, em particular, tem-se:

$$\#[0, 1] = \#\,]0, 1[\; = \#\,] - \pi/2, \pi/2[\; = \#\mathbb{R} \ .$$

Note-se que a última relação pode ser justificada diretamente com recurso à função tangente (a função $tg :] - \pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa $tg(x)$).

Mostra-se também que o conjunto dos reais é equipotente ao conjunto das funções de $\mathbb{N}$ em $\{0, 1\}$, que, recorde-se, podemos denotar por $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Consequentemente,

$$\#\mathbb{R} = \#(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) \ .$$

proposição: Sejam A e B conjuntos.

1) Se $A \subseteq B$, então $\#A \leq \#B$.

2) $\#(A \times B) = \#(B \times A)$.

3) Se $B \neq \emptyset$, então $\#A \leq \#(A \times B)$.

4) $\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$.

5) $\#\mathcal{P}(A) = \#(\{0,1\}^A)$.

demonstração:
Provemos 3). Consideremos que $B \neq \emptyset$ e fixemos um elemento $b \in B$.
Assim, $f : A \to A \times B$ que, a cada $x \in A$, associa o par (x, b) é uma função.
É fácil mostrar que esta função é injetiva.
De facto, dados $x, y \in A$, se $f(x) = f(y)$, então $(x, b) = (y, b)$, pelo que $x = y$.
Tendo construído um função injetiva de A em $A \times B$, podemos concluir: $A \leq A \times B$.

Provemos 5). Recorde-se que $\{0,1\}^A$ denota o conjunto das aplicações de A em $\{0,1\}$.
Dado $X \subseteq A$, defina-se a **função característica** $\chi_X : A \to \{0,1\}$, que, par a cada $a \in A$, associa 0 se $a \in X$ e 1 caso contrário.
Considere-se agora a função $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A$, que, para cada $X \subseteq A$, associa a respetiva função característica χ_X.
Prova-se que esta função é, de facto, bijetiva.
Assim, $\mathcal{P}(A) \sim (\{0,1\}^A)$ e, consequentemente, $\#\mathcal{P}(A) = \#(\{0,1\}^A)$. $\square$

7.2 Numerabilidade de conjuntos e Teorema de Cantor

definição: Um conjunto A diz-se **numerável** quando $\#A = \#\mathbb{N}$, ou seja, quando $A \sim \mathbb{N}$.

observação: É fácil mostrar, a partir de observações anteriores, que os conjuntos finitos não são numeráveis.

exemplo: Os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathbb{Z}$ são numeráveis (porquê?).

proposição: Sejam A e B conjuntos.

1) Se A é numerável e $B \subseteq A$, então B é finito ou numerável.

2) Se A é numerável e B é numerável ou finito, então $A \cup B$ é numerável .

demonstração: Mostremos 2) no caso em que B é numerável e consideremos que B é disjunto de A, sem perder generalidade (porquê).
Assim, existem aplicações bijetivas $f : A \to \mathbb{N}$ e $g : B \to \mathbb{N}$.
Deste modo, $h : A \cup B \to \mathbb{N}$ tal que $h(x) = 2f(x)$, caso $x \in A$ e $h(x) = 2g(x) + 1$, caso $x \in B$ é uma aplicação bijetiva (porquê?). (Observe-se que, por f e g serem bijetivas, $h(A)$ é o conjunto dos pares e $h(B)$ o conjunto dos ímpares.).
Dado que h é bijetiva, segue, imediatamente, que $A \cup B$ é numerável.

Para mostrar 1) no caso em que B é infinito, é útil recorrer ao facto de que é possível construir aplicações injetivas de $\mathbb{N}$ em B. $\square$

proposição: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é numerável.

demonstração: Da tabela abaixo, seguindo as setas, obtemos uma **enumeração** de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (uma sequência com todos os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sem repetições).

$$
\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[d] & (1,2) \arrow[ddl] & (1,3) \arrow[dddll] & \cdots \\
(2,1) \arrow[ur] & (2,2) \arrow[ur] & (2,3) \arrow[ur] & \cdots \\
(3,1) \arrow[ur] & (3,2) \arrow[ur] & (3,3) & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Designadamente:

$$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4)....$$

Esta enumeração induz a função $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que associa a cada par (m,n) a respetiva posição na lista. Por exemplo, $f(1,1)=1$, $f(2,1)=2$, etc. De facto, esta função é dada por: $f(m,n) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + n$, para cada $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $\square$

observação: Utilizando a ideia da demonstração anterior, é possível obter uma enumeração do conjunto $\mathbb{Q}^+$, pensando num par ordenado (m, n) como o número racional m/n. Para tal, basta seguir a enumeração indicada para $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e omitir elementos repetidos (frações redutíveis), designadamente:

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4}, \ldots$$

Assim, $\mathbb{Q}^+$ é um conjunto númerável. Consequentemente, como $\mathbb{Q}^- \sim \mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ é também um conjunto númerável. Recorrendo à penúltima proposição, podemos então conlcuir que $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ são ainda numeráveis, pelo que $\mathbb{Q}$ é também um conjunto numerável.

proposição: Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam A_1, ..., A_n conjuntos finitos ou numeráveis. Então:

1) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_n$ é finito ou numerável. Mais, este conjunto é numerável se e só se algum A_i é numerável.

2) Para $n \geq 2$, $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ é finito ou numerável. Mais, este conjunto é numerável se e só se algum A_i é numerável e nenhum A_i é vazio.

demonstração: exercício. $\square$

observação: A parte 1) da proposição anterior pode ser generalizada de famílias finitas de conjuntos para famílias numeráveis de conjuntos $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, onde cada um dos conjuntos A_i é numerável ou finito.

Teorema de Cantor:

Para qualquer conjunto A, $\#A < \#\mathcal{P}(A)$.

demonstração:

É necessário mostar que:

1) existe uma aplicação injetiva de A em $\mathcal{P}(A)$;

2) $\#A \neq \#\mathcal{P}(A)$.

A aplicação $f : A \to \mathcal{P}(A)$ tal que $f(a) = \{a\}$, para todo $a \in A$, é injetiva.

Tendo em vista um absurdo, considere-se que existe uma aplicação sobrejetiva $g : A \to \mathcal{P}(A)$.
Defina-se:

$$X = \{a \in A : a \notin g(a)\}.$$

Uma vez que $X \subseteq A$ e g é sobrejetiva, existe $b \in A$ tal que $g(b) = X$.
Mas, assim, podemos concluir: $b \in X$ se e se $b \notin X$! (Porquê?).
Esta conclusão é uma contradição.
Portanto, não pode existir uma aplicação sobrejetiva de A em $\mathcal{P}(A)$, donde $A \not\sim \mathcal{P}(A)$.
Consequentemente, $\#A \neq \#\mathcal{P}(A)$. $\square$

exemplo: Do Teorema de Cantor, decorre imediatamente:

$$\#\mathbb{N} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ .$$

Recorde-se que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Assim, pode concluir-se:

$$\#\mathbb{N} < \#(\{0,1\}^{\mathbb{N}}) \quad \text{e} \quad \#\mathbb{N} < \#\mathbb{R} \ \text{(porquê?)}.$$

observação: Na prova do Teorema de Cantor estabelece-se que, para qualquer conjunto A, não existem aplicações sobrejetivas de A em $\mathcal{P}(A)$. Daqui, é fácil concluir que não existem aplicações sobrejetivas de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ ou em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

observação: O Teorema de Cantor garante a a existência de uma infinidade de conjuntos infinitos de cardinalidade cada vez maior, através da aplicação sucessiva da operação de potenciação, nomeadamente:

$$\#\mathbb{N} < \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) < \#\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \dots$$

Estes tipos/"tamanhos" distintos de conjuntos infinitos estão associados a **cardinais infinitos**, cujo conceito pode formalizar-se à custa do conceito de **ordinal**.

Neste contexto, é habitual denotar-se $\#\mathbb{N}$ por $\aleph_0$ (que se lê: **alef 0**), $\#\mathcal{P}(\mathbb{N})$ por $\aleph_1$, $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ por $\aleph_2$, etc.

$\aleph_1$ é também denotado por $\mathfrak{c}$ (**cardinal do contínuo**), por corresponder ao cardinal de $\mathbb{R}$.

A **Hipótese do Contínuo** estipula que não existem conjuntos de cardinalidade maior que $\mathbb{N}$ e menor que $\mathbb{R}$, sendo um princípio independente da usual axiomática da Teoria de Conjuntos.