0. Indução e recursão

1. Seja S o subconjunto de $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ definido indutivamente pelas 3 regras apresentadas de seguida: (1) $1 \in S$; (2) $2 \in S$; (3) $q \in S \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} \in S$.

   a) Dê exemplos de elementos de S.

   b) Mostre que o conjunto $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ é fechado para a operação $f : \mathbb{Q}\setminus\{0\} \to \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ tal que $f(q) = \frac{1}{q}$, para qualquer $q \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

   c) Determine o conjunto S.

2. Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e seja $f : A \times A \to A$ a operação em A definida pela tabela

f	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	c	b	c
c	a	c	b	b
d	a	c	b	a

   Seja B o subconjunto de A definido indutivamente pelas duas condições: (1) $b \in B$; (2) se $x, x' \in B$ então $f(x, x') \in B$.

   a) Prove que $c \in B$.

   b) Determine os subconjuntos de A que têm o elemento b e são fechados para f.

   c) Determine B.

3. Apresente definições indutivas de cada um dos conjuntos que se seguem:

   a) Conjunto dos naturais múltiplos de 5.

   b) Conjunto dos números inteiros.

   c) Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{0, 1\}$ cujo comprimento é ímpar.

   d) Conjunto das palavras sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$ que têm um número par de ocorrências do símbolo a.

4. Seja $A = \{1, 2, 3\}$ e seja G o subconjunto de A^* dado pela seguinte definição indutiva:

   (1) $1 \in G$;

   (2) se $x \in G$ então $2x \in G$, para todo $x \in A^*$;

   (3) se $x, y \in G$ então $3xy \in G$, para todos $x, y \in A^*$.

   Considere ainda a função $S : G \longrightarrow \mathbb{N}$ definida, por recursão estrutural, do seguinte modo:

   - $S(1) = 1$;
   - para todo $x \in G$, $S(2x) = 2 + S(x)$;
   - para todos $x, y \in G$, $S(3xy) = 3 + S(x) + S(y)$.

   a) Para cada letra $a \in A$, indique uma palavra $u \in G$ cuja primeira letra seja a.

   b) Mostre que $v = 3213211 \in G$.

   c) Defina por recursão estrutural a função $C : G \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in G$, $C(x)$ é o comprimento da palavra x.

   d) Calcule $S(3211)$ e $C(3211)$.

   e) Enuncie o Princípio de Indução Estrutural para G.

   f) Mostre que, para todo $x \in G$,

      i) $S(x)$ é ímpar;

      ii) $C(x) \leq S(x)$.