Proposta de resolução do exame de recurso.

$\boxed{1}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Para $(x,y)\neq(0,0)$, a função f é contínua pois é uma função racional.

Em $(x,y)=(0,0)$

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}$ não existe porque

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{0}{y^2}=0$

$\neq$

- $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{y^2+y^2}=\frac{1}{2}$

Como $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, então f não é contínua em $(0,0)$.

b) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}=\infty$, logo não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$

c) Como f não é contínua em $(0,0)$, então f não é derivável em $(0,0)$.

$\boxed{2}$ $\quad f(x,y,z)=x^3y+\ln(z+e^{xz})+\cos(zy)$

a) $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \ z+e^{xy}>0\}$

b) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=3x^2y+\frac{ze^{xz}}{z+e^{xz}}$

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=x^3-z\,\mathrm{sen}(zy)$

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{1+xe^{xz}}{z+e^{xz}}-y\,\mathrm{sen}(zy)$

c) Como $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}$ existem e são contínuas em D, então f é derivável.

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) = 3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = \frac{1+1}{1} - 0 = 2$

$$f'(1,1,0) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v,w) \longmapsto 3u + v + 2w$$

e)

$$\underbrace{x^3 y + \ln(z+e^{xz}) + \cos(zy)}_{f(x,y,z)} = 2$$

$f(1,1,0) = 0 + \ln(0+e^0) + \cos(0) = \ln(1) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$ OK!

$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0) = 2 \neq 0$

f é de classe C^1.

Pelo teorema da função implícita, a equação $f(x,y,z)=2$ define z como função de (x,y).

f) $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)} = -\frac{3}{2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)} = -\frac{1}{2}$$

Assim

$$z = z(1,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$\Leftrightarrow z = 0 - \frac{3}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) \Leftrightarrow \boxed{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 2}$$

$\boxed{3}$ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto 2x^2+y^2+4z^2+x$

Pontos críticos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1=0 \\ 2y=0 \\ 8z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{4} \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{Hess } f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hess } f(-1/4,0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Os valores próprios de Hess $f(-1/4,0,0)$ são $4, 2, 8$ (todos positivos), logo

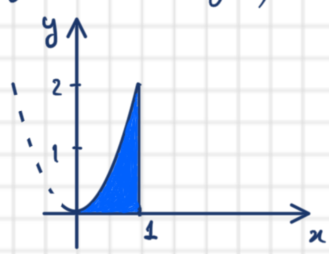
$f(-1/4,0,0)$ é mínimo local.

$$f(-1/4,0,0) = \frac{1}{8}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

$\boxed{4}$ $$\int_0^1 \int_0^{2x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

a) Região de integração: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 2x^2\}$

b)

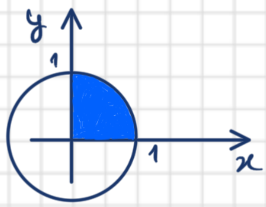


$y=2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$

c) $$\int_0^1 \int_0^{2x^2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

$\boxed{5}$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2+y^2 \, dy\, dx = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 \cdot r \, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 \, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta$$



$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{8} .$$

$$y = \sqrt{1-x^2} \implies y^2 = 1-x^2 \iff x^2+y^2=1$$