Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2023/24

Sucessões

1. (a) Sucessão constante (portanto, monótona).

   Sucessão limitada.

   Sucessão convergente para 1.

   (b) Sucessão alternada (portanto, não monótona). Uma sucessão diz-se *alternada* quando os seus termos são alternadamente positivos e negativos.

   Sucessão limitada. Com efeito, $-1 \leq u_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   A sucessão é divergente porque $\lim\limits_n u_{2n} = 1$ e $\lim\limits_n u_{2n-1} = -1$.

   (c) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{2}{n}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

   Tem-se que $u_1 = 0 < 1 = u_2$ mas $u_2 = 1 > 0 = u_3$. Logo a sucessão não é monótona.

   Sucessão limitada. Com efeito, $0 \leq u_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Sucessão convergente para 0 porque $\lim\limits_n u_{2n} = \lim\limits_n u_{2n-1} = 0$.

   (d) Tem-se que $u_1 = -1 < \frac{1}{4} = u_2$ mas $u_2 = \frac{1}{4} > -\frac{1}{9} = u_3$. Logo a sucessão não é monótona.

   Sucessão limitada. Com efeito, $-1 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Sucessão convergente para 0. Tem-se que:

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Como

$$\lim_n \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_n \frac{1}{n^2} = 0,$$

   concluímos, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, que $\lim\limits_n \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.
   Em alternativa, podemos justificar a convergência da sucessão $(u_n)_n$ para 0 notando que a sucessão $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, pode ser vista como a sucessão produto de duas sucessões em que uma é limitada e a outra é convergente para 0. Com efeito, tem-se que:

   - a sucessão $((-1)^n)_n$ é limitada;
   - $\lim\limits_n \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Então, por um teorema da aula, podemos concluir que $\lim_n \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

(e) Uma vez que

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é monótona (estritamente) crescente.

Sucessão não limitada porque o conjunto dos termos da sucessão é um conjunto não majorado.

Sucessão divergente porque $\lim_n u_n = +\infty$.

(f) $u_n = [1 + (-1)^n]n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2n, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

Tem-se que $u_1 = 0 < 4 = u_2$ mas $u_2 = 4 > 0 = u_3$. Logo a sucessão não é monótona.

Sucessão não limitada porque o conjunto dos termos da sucessão é um conjunto não majorado.

Sucessão divergente porque a subsucessão dos termos de ordem par é divergente.

(g) Tem-se que

$$u_1 = 1,\ u_2 = 0,\ u_3 = -1,\ u_4 = 0,\ u_5 = 1,\ u_6 = 0,\ u_7 = -1,\ u_8 = 0,\ \ldots$$

Em particular, $u_2 = 0 > -1 = u_3$ mas $u_3 = -1 < 0 = u_4$. Logo a sucessão não é monótona.

A sucessão é limitada porque

$$|u_n| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão é divergente. Com efeito, a sucessão $(u_n)_n$ admite subsucessões convergentes para limites diferentes:

$$\lim_n u_{2n} = 0, \ \ \lim_n u_{4n-3} = 1, \ \ \lim_n u_{4n-1} = -1.$$

(h) Uma vez que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{(n+1)+2} - \frac{n}{n+2} = \frac{(n+1)(n+2) - n(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+3)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

ou seja, $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é monótona (estritamente) crescente.

Como

$$|u_n| = \left|\frac{n}{n+2}\right| = \frac{n}{n+2} \leq \frac{n}{n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

a sucessão é limitada.

A sucessão é convergente para 1. Com efeito,

$$\lim_n \frac{n}{n+2} = \lim_n \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = 1.$$

(i) A sucessão é monótona (estritamente) decrescente, uma vez que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{(n+1)+5} - \frac{3}{n+5} = \frac{-3}{(n+6)(n+3)} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão é limitada porque

$$|u_n| = \left|\frac{3}{n+5}\right| = \frac{3}{n+5} \leq \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em alternativa podemos justificar que a sucessão $(u_n)_n$ é limitada do seguinte modo. Tem-se que

- $0 < u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- $u_n \leq u_1 = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (porque a sucessão é decrescente).

Consequentemente, $0 < u_n \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, a sucessão é limitada.

A sucessão é convergente para zero. Com efeito,

$$\lim_n \frac{3}{n+5} = \lim_n \frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

(j) Tem-se que:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 2^4,\ u_3 = 3^4,\ u_4 = 4^4,\ \ldots,\ u_{10} = 10^4,\ u_{11} = 2,\ u_{12} = 2,\ u_{13} = 2,\ \ldots$$

A sucessão não é monótona. Justifique.

A sucessão é limitada porque

$$|u_n| \leq 10^4, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão é convergente para 2.

(k) A sucessão é monótona (estritamente) decrescente. Com efeito,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão é limitada porque

$$|u_n| = \left|\frac{n+1}{n}\right| = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão é convergente para 1. Com efeito,

$$\lim_n \frac{n+1}{n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

(l) A sucessão é monótona (estritamente) crescente. Com efeito,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{(n^2+n)^2} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão é limitada porque

$$|u_n| = \left|\frac{n^2-1}{n^2}\right| = 1 - \frac{1}{n^2} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão é convergente para 1. Com efeito,

$$\lim_n \frac{n^2-1}{n^2} = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1.$$

(m) Tem-se que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3^n} = (-1)^n \dfrac{1}{3^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão é limitada, pois

$$|u_n| = \left|(-1)^n \frac{1}{3^n}\right| = |(-1)^n| \cdot \left|\frac{1}{3^n}\right| = \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e alternada (logo, não monótona).

A sucessão é convergente para zero. Com efeito, tem-se que

- a sucessão $((-1)^n)_n$ é limitada (Justifique);
- $\lim\limits_n \dfrac{1}{3^n} = 0$.

Então, por um teorema da aula, podemos concluir que $\lim\limits_n \dfrac{(-1)^n}{3^n} = 0$.

(n) $u_n = (-1)^n \cos(n\pi) = (-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sucessão monótona constante, limitada e convergente para 1.

2. Fixe-se $\epsilon > 0$. Querermos encontrar um $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq p \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon. \tag{1}$$

Observemos que

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$;
- $n \geq p \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p}$.

Das observações anteriores decorre que, se escolhermos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \epsilon$, provamos o que pretendemos. Tomemos então $p = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, em que $[x]$ significa o maior inteiro menor ou igual a x, normalmente desigando por parte inteira ou característica de x.

Note-se que a escolha de p não é única. Se a implicação (1) é verificada para uma certa escolha de p, ela é também verificada para uma qualquer escolha superior a p.

A escolha efectuada neste exemplo é, para cada ϵ, a menor possível.

3. (b)

i. $u_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 1 \\ 7 & \text{se } n = 2 \\ 5 & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$

ii. $u_n = \dfrac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

iii. $u_n = \begin{cases} 3 & \text{se n é par} \\ 4 & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$

iv. Não existe. Toda a sucessão convergente é limitada.

v. $u_n = \begin{cases} 2n & \text{se n é par} \\ 3 & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$

4. (b) Conjunto dos majorantes: $\emptyset$; não existe supremo nem máximo.
Conjunto dos minorantes: $]-\infty, 0]$; $\inf S = 0$; $\min S = 0$.

(c) $u_n = -\dfrac{1}{n} + 1,\, n \in \mathbb{N}$

5. (b)

i. $u_n = -2 + \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$

ii. $u_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$

iii. $u_n = -n,\, n \in \mathbb{N}$

iv. $u_n = \begin{cases} 1/3 & \text{se } n = 1 \\ 1/2 & \text{se } n = 2 \\ 1/n & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$

6. (a) Vamos usar o teorema das sucessões enquadradas para mostrar que

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0\,.$$

Comecemos por mostrar que

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \qquad (*)$$

A primeira condição em $(*)$ é óbvia, porque $n \in \mathbb{N}$. Quanto à segunda condição observemos que

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \frac{\overbrace{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \times n}^{\text{n fatores}}}{\underbrace{n \times n \times n \times \cdots \times n}_{\text{n fatores}}} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n}\,. \end{aligned}$$

Como $\lim_n 0 = \lim_n \frac{1}{n} = 0$, pelo teorema das sucessões enquadradas concluímos que $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$.

(b) Vamos usar o teorema das sucessões enquadradas para mostrar que

$$\lim_n \frac{10^n}{n!} = 0\,.$$

Comecemos por mostrar que

$$0 \leq \frac{10^n}{n!} \leq \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{1}{n}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,. \qquad (**)$$

A primeira condição em $(**)$ é óbvia, porque $n \in \mathbb{N}$. Quanto à segunda condição observemos que

$$\frac{10^n}{n!} = \left(\frac{10}{1} \times \frac{10}{2} \times \cdots \times \frac{10}{10}\right) \times \left(\underbrace{\frac{10}{11} \times \frac{10}{12} \times \cdots \times \frac{10}{n-1}}_{\leq 1} \times \frac{10}{n}\right) \leq \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{10}{n}\,.$$

Como $\lim_n 0 = \lim_n \frac{10^{10}}{10!} \times \frac{10}{n} = 0$, pelo teorema das sucessões enquadradas concluímos que $\lim_n \frac{10^n}{n!} = 0$.

(c) Vamos usar o teorema das sucessões enquadradas para mostrar que

$$\lim_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0\,.$$

Se chamarmos u_n à soma de parcelas dentro de parentesis, podemos afirmar que u_n é uma soma de $n+1$ parcelas, em que a maior é a primeira e a menor é a última. Está assim justificado o enquadramento

$$\frac{n+1}{(2n)^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{n+1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Como $\lim_n \frac{n+1}{(2n)^2} = \lim_n \frac{n+1}{n^2} = 0$ (justifique), pelo teorema das sucessões enquadradas concluímos que $\lim_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$.

(d) Vamos usar o teorema das sucessões enquadradas para mostrar que

$$\lim_n \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right) = 1\,.$$

Se chamarmos u_n à soma de parcelas dentro de parentesis, podemos afirmar que u_n é uma soma de n parcelas, em que a maior é a primeira e a menor é a última. Está assim justificado o enquadramento

$$n.\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq n.\frac{n}{\sqrt{n^4+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Como $\lim_n n.\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} = \lim_n n.\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} = 1$ (justifique), pelo teorema das sucessões enquadradas concluímos que $\lim_n \left(\frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right) = 1\,.$

7. (a) $+\infty$ (b) $\dfrac{1}{e}$ (c) $\dfrac{1}{3}$

(d) 0 (e) 0 (f) 0

(g) $\dfrac{1}{e^3}$ (h) 0 (i) 1

(j) 1 (k) 1 (l) $\dfrac{1}{e^2}$

(m) e^2 (n) 1 (o) 0

(a) $\displaystyle \lim_n \frac{1+n^3}{n^2+2n-1} = \lim_n \frac{\frac{1+n^3}{n^3}}{\frac{n^2+2n-1}{n^3}} = \lim_n \frac{\frac{1}{n^3}+1}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}} = +\infty\,.$

(c) $\displaystyle \lim_n \frac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4} = \lim_n \frac{\frac{2^n+3^n}{3^n}}{\frac{3^{n+1}+4}{3^n}} = \lim_n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{3+\frac{4}{3^n}} = \frac{1}{3}\,.$

(d) $\displaystyle \lim_n(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}) = \lim_n \frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} = \lim_n \frac{5}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}} = 0\,.$

(f) sugestão: calcule separadamente os limites: $\displaystyle \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ e $\displaystyle \lim_n \frac{\operatorname{sen} n}{n+2}$.

(g) $\displaystyle \lim_n \left(1-\frac{3}{n+2}\right)^n = \lim_n \left(\left(1-\frac{1}{\frac{n+2}{3}}\right)^{\frac{n+2}{3}}\right)^3 . \left(1-\frac{3}{n+2}\right)^{-2} = e^{-3}.1 = \frac{1}{e^3}\,.$

(h) Seja $u_n = \dfrac{\cos(n\pi)+\cos(2n\pi)}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Observemos que $u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{2}{n} & \text{se } n \text{ é par}\,. \end{cases}$
Como $\lim_n u_{2n-1} = 0$ e $\lim_n u_{2n} = 0$, concluímos que $\lim_n u_n = 0$.

(i) $\displaystyle \lim_n \frac{(n+1)\,!-n\,!}{n\,!(n+2)} = \lim_n \frac{(n+1)n!-n!}{n!(n+2)} = \lim_n \frac{n+1-1}{n+2} = \lim_n \frac{n}{n+2} = 1\,.$

(j) $\displaystyle \lim_n \sqrt{n^2+2n}-n = \lim_n \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_n \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$
$\displaystyle \lim_n \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_n \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{n}} = \lim_n \frac{2}{\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}+\frac{n}{n}} = \lim_n \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1\,.$

(k) $\displaystyle \lim_n \frac{3^n+4^n+5^n}{5^n} = \lim_n \left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n + 1 = 1\,.$

(l) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_n \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_n \left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-1} = e^{-2}\,.$

(m) $\displaystyle \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right) =$
$e^2\,.$

(n) $\displaystyle \lim_n \frac{2^{n+1}+(-3)^n+6^n}{6^n+1} = \lim_n \frac{\frac{2^{n+1}+(-3)^n+6^n}{6^n}}{\frac{6^n+1}{6^n}} = \lim_n \frac{2.\left(\frac{2}{6}\right)^n+\left(\frac{-1}{2}\right)^n+1}{1+\left(\frac{1}{6}\right)^n} = 1\,.$

(o) $\displaystyle \lim_n \frac{e^n-1}{5^n} = \lim_n \left(\left(\frac{e}{5}\right)^n - \frac{1}{5^n}\right) = 0\,.$

8. A sucessão $(u_n)_n$ está definida por recorrência. Tem-se que

$$u_1 = -\frac{1}{2},\ u_2 = 1,\ u_3 = -2,\ u_4 = 4,\ u_5 = -8,\ u_6 = 16, \dots.$$

O termo de ordem n da sucessão é: $u_n = (-2)^{n-2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Afirmação falsa. Tem-se que $u_1 = -\frac{1}{2} < 1 = u_2$ mas $u_2 = 1 > -2 = u_3$. Logo a sucessão não é monótona.

(b) Afirmação falsa porque o conjunto dos termos da sucessão não é majorado (nem minorado).

(c) Afirmação falsa porque não existe $\lim_n u_n$. Com efeito, $\lim_n u_n = \lim_n (-2)^{n-2} = \lim_n \dfrac{(-2)^n}{4}$ e este limite não existe.

9. A sucessão $(u_n)_n$ está definida por recorrência.

O termo de ordem n da sucessão é: $u_n = 5(-2)^{-n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Afirmação falsa. Tem-se que $u_1 = 5 > -\frac{5}{2} = u_2$ mas $u_2 = -\frac{5}{2} < \frac{5}{4} = u_3$. Logo a sucessão não é monótona.

(b) Afirmação verdadeira. Tem-se que $-\frac{5}{2} \le u_n \le 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Afirmação verdadeira porque $\lim_n u_n = 0$.

10. (a) Afirmação verdadeira. Ver aulas.

(b) Afirmação falsa.
A sucessão $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ é divergente e, no entanto, a sua subsucessão dos termos de ordem par converge para 1 ($\lim_n u_{2n} = 1$).

(c) Afirmação falsa.
Consideremos a sucessão $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tem-se que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ e, no entanto, a sucessão é divergente.

(d) Afirmação falsa. Consideremos a sucessão

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ 5 & \text{se } n \ge 2. \end{cases}$$

Tem-se que $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 5\}$ e, no entanto, $(u_n)_n$ é convergente para 5.

(e) Afirmação falsa. Consideremos as sucessões

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se n é par} \\ 0 & \text{se n é ímpar} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} -1 & \text{se n é par} \\ 0 & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

Tem-se que $u_n + v_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
As sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes (porque admitem subsucessões convergentes para limites diferentes) e, no entanto, a sucessão $(u_n + v_n)_n$ é convergente para 0.

(f) Afirmação verdadeira. É suficiente observar que a sucessão $(v_n)_n$ pode ser vista como a diferença de duas sucessões convergentes:

$$v_n = (u_n + v_n) - u_n.$$

(g) Afirmação falsa. Consideremos as sucessões

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se n é par} \\ 0 & \text{se n é ímpar} \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} 0 & \text{se n é par} \\ 1 & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

Tem-se que $u_n v_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

A sucessão $(u_n v_n)_n$ é convergente para 0 e, no entanto, nenhuma das sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ é convergente para zero (são ambas sucessões divergentes porque admitem subsucessões convergentes para limites diferentes).

(h) Afirmação falsa. A sucessão $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, é tal que $|u_n| = |(-1)^n| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $\lim\limits_n |u_n| = 1$ e, no entanto, $\nexists \lim\limits_n u_n$.

(i) Afirmação falsa. A sucessão $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, é limitada $(-1 \leq u_n \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N})$ e não é convergente (porque admite subsucessões convergentes para limites diferentes).

(j) Afirmação verdadeira. Como a sucessão é crescente, então é monótona. Como os termos estão em $]-1, 1[$, então a sucessão é limitada. Como a sucessão é monótona e limitada, então é convergente.

(k) Afirmação falsa. Consideremos a sucessão

$$u_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n+1} & \text{se n é par} \\ \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{se n é ímpar} \end{cases}$$

Tem-se que: $u_{2n} \in]0, 1[$, $u_{2n-1} \in]1, 2[$ e, no entanto, $\lim\limits_n u_n = 1$.

(l) Afirmação verdadeira. Como a sucessão é decrescente, então é monótona. Como os termos são positivos e a sucessão é decrescente podemos concluir que $0 < u_n \leq u_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo a sucessão é limitada. Como a sucessão é monótona e limitada, então é convergente.

11. (a) $\nexists \lim\limits_n u_n$;

(b) $\lim\limits_n u_n = a$;

(c) $\exists \lim\limits_n u_n$;

sendo $(u_n)_n$ decrescente, temos

$$u_n \leq u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e, assim,

$$2 \leq u_n \leq u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(u_n)_n$ é monótona e limitada e, portanto, convergente.

(d) $\exists \lim\limits_n u_n$;

$(u_n)_n$ é uma sucessão limitada e monótona, logo convergente.

(e) $\exists \lim\limits_n u_n$;

sendo $(u_n)_n$ crescente, temos

$$u_n \geq u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e, como é também uma sucessão de termos negativos,

$$u_n < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$u_1 \leq u_n < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(u_n)_n$ é monótona e limitada e, portanto, convergente.

(f) $\exists \lim_n u_n$;
$(u_n)_n$ é limitada porque

$$0 < u_n \leq u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e, sendo também monótona, é convergente.

12. (a) $u_n = \frac{1}{n}, \quad v_n = n, \quad n \in \mathbb{N}$

(b) $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}, \quad v_n = n, \quad n \in \mathbb{N}$

(c) $u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 3 & \text{se } n = 2 \\ 2 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$

(d) $u_n = \begin{cases} 1, & \text{se n é par} \\ n, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$

(e) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$

(f) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(g) $u_n = -\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(h) $u_n = (-1)^n n \quad n \in \mathbb{N}$

(i) $u_n = \pi + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(j) $u_n = \begin{cases} n & \text{se n é par} \\ 0 & \text{se n é ímpar} \end{cases}$

(k) não existe

(l) $u_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n = 1 \\ 1 & \text{se } n = 2 \\ 2 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$

(m) $u_n = (-1)^n \quad n \in \mathbb{N}$

(n) $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad n \in \mathbb{N}$

(o) $u_n = 2 + \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$