Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC

Análise

Formulário 2 — 2019/2020

- **Funções escalares - extremos livres e extremos condicionados**
  - *Critério do discriminante*
    Sendo $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, b) \in D$ um ponto crítico de f e

    $$\Delta_f(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \big[f_{xy}(a,b)\big]^2,$$

    * se $\Delta_f > 0$ e
      - $f_{xx}(a,b) > 0$, então (a,b) é um minimizante local de f;
      - $f_{xx}(a,b) < 0$, então (a,b) é um maximizante local de f;
    * se $\Delta_f(a,b) < 0$, então (a,b) é um ponto de sela de f;
    * se $\Delta_f(a,b) = 0$, nada se pode concluir.
  - *Método dos multiplicadores de Lagrange*
    Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função objetivo e $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k$ uma equação de restrição.
    Determinar $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (e $\lambda \in \mathbb{R}$) tal que

    $$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \lambda \, \vec{\nabla} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= k \end{aligned}$$

    e calcular o valor de f em todos os pontos encontrados.

- **Funções vetoriais**

  Seja $\mathcal{C}$ a curva parametrizada por $\mathbf{r} \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $P = \mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a $\mathcal{C}$.

  - *Comprimento de arco*

    $$L(\mathcal{C}) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| \, dt$$

  - *Triedro de Frenet-Serret*

    $$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

  - *Curvatura*

    $$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

  - *Plano osculador* a $\mathcal{C}$ em P

    $$\mathbf{B}(t_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

  - *Plano normal* a $\mathcal{C}$ em P

    $$\mathbf{r}'(t_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

  - *Reta tangente* a $\mathcal{C}$ em P

    $$(x, y, z) = \mathbf{r}(t_0) + t\,\mathbf{r}'(t_0), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Regras de primitivação

Na lista de primitivas que se segue, $u\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função derivável no intervalo I e C denota uma constante real arbitrária. Escreve-se u no lugar de $u(x)$.

1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + C \quad (a \in \mathbb{R})$

2. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$

3. $\displaystyle\int u'u^n\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$

4. $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

5. $\displaystyle\int u'\,e^u\,dx = e^u + C$

6. $\displaystyle\int u'\,a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

7. $\displaystyle\int u'\cos u\,dx = \operatorname{sen} u + C$

8. $\displaystyle\int u'\operatorname{sen} u\,dx = -\cos u + C$

9. $\displaystyle\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u + C$

10. $\displaystyle\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u}\,dx = -\operatorname{cotg} u + C$

11. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} u + C$

12. $\displaystyle\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arccos u + C$

13. $\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arctg} u + C$

14. $\displaystyle\int \frac{-u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arccotg} u + C$

15. $\displaystyle\int u'\operatorname{ch} u\,dx = \operatorname{sh} u + C$

16. $\displaystyle\int u'\operatorname{sh} u\,dx = \operatorname{ch} u + C$

17. $\displaystyle\int \frac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}\,dx = \operatorname{th} u + C$

18. $\displaystyle\int \frac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}\,dx = -\coth u + C$

- **Integrais múltiplos**
  - *Integral duplo*
    Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $U \subset D$ uma região descrita em coordenadas cartesianas.
    * *Mudança para coordenadas polares*

$$\iint_U f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{U^*} r f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta$$

  - *Integral triplo*
    Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $U \subset D$ uma região descrita em coordenadas cartesianas.
    * *Mudança para coordenadas cilíndricas*

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{U^*} r f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\,dr\,d\theta\,dz$$

    * *Mudança para coordenadas esféricas*

$$\iiint_U f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{U^*} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\operatorname{sen}\phi\;d\rho\,d\theta\,d\phi$$

- **Campos vetoriais**
  Sejam $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial e $\mathcal{C}$ uma curva em $\mathbb{R}^n$ parametrizada por $\mathbf{r}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
  - $\mathbf{F}$ diz-se um *campo vetorial conservativo* ou *campo gradiente* se existir uma função escalar diferenciável $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F} = \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

  - *Integral de linha* de $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (campo escalar) ao longo da curva $\mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_a^b f\big(\mathbf{r}(t)\big)\,\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt; \qquad \int_{\mathcal{C}} f\,dx_i = \int_a^b f\big(\mathbf{r}(t)\big)x_i'(t)\,dt$$

  - *Integral de linha* de $\mathbf{F}$ ao longo da curva $\mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}\big(\mathbf{r}(t)\big)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$