Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
9 de abril de 2025

Álgebra Universal e Categorias

1º teste

duração: 1h45min

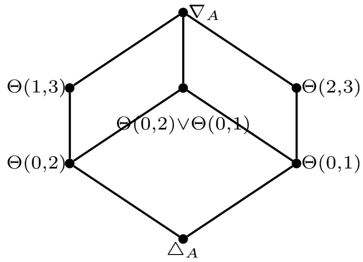
Justifique todas as suas respostas, a não ser que seja explicitamente indicado o contrário.

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$, onde $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	0	1	2	3
	2	3	0	1

$g^{\mathcal{A}}$	0	1	2	3
	2	2	0	0

O reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ é representado pelo diagrama de Hasse seguinte



   (a) Indique, sem justificar, todos os subuniversos de $\mathcal{A}$.

   (b) Determine, sem justificar, $\Theta(1, 3)$ e $\Theta(2, 3)$. Diga se $(\Theta(1, 3), \Theta(2, 3))$ é um par de congruências fator.

   (c) Diga se a álgebra $\mathcal{A}$ é:

      i. diretamente indecomponível.

      ii. subdiretamente irredutível.

2. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $\theta \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A})$ e B um subuniverso de $\mathcal{A}$. Mostre que o conjunto

$$S = \{a \in A \,|\, a\theta b, \text{ para algum } b \in B\}$$

é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

3. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha_1 : A \to B$, $\alpha_2 : A \to C$ funções. Seja $\alpha : A \to B \times C$ a função definida por $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$, para todo $a \in A$.

   (a) Mostre que se α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$, então:

      i. α_1 é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ e α_2 é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.

      ii. $\ker \alpha = \ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2$.

   (b) Mostre que se α_1, α_2 e α são epimorfismos, então

$$\mathcal{A}/(\ker \alpha_1 \cap \ker \alpha_2) \cong \mathcal{A}/\ker \alpha_1 \times \mathcal{A}/\ker \alpha_2.$$

4. Considere os operadores de classes de álgebras H, I e S. Mostre que HSI é um operador de fecho.

Cotações: $1.(1,75 + 2,25 + 2,0 + 1,25)$; $2.(3,0)$; $3.(3,0 + 2,0 + 2,0)$; $4.(2,75)$.