Geometria | Exame de Recurso
Lic. Ciências da Computação | 16 junho 2017

Proposta de Resolução

1

a Se (x_1, x_2) são coordenadas em R e (x_1', x_2') são coordenadas em R' sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

onde (ω_1, ω_2) são as coordenadas de O' no referencial R.

Como $O = (0,2)_{R'}$ e $O = (0,0)_R$ temos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Portanto, a expressão matricial pretendida é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Para $M = (2,1)_R$ obtemos: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$

Cálculos: $\begin{cases} 2 = -2 + x_1' + x_2' \\ 1 = -2 - x_1' + x_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' + x_2' = 4 \\ -x_1' + x_2' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = 1/2 \\ x_2' = 7/2 \end{cases}$

Logo $M = (1/2, 7/2)_{R'}$.

b R ortonormado

i $\vec{v_1}' \cdot \vec{v_1}' = (\vec{v_1} - \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} - \vec{v_2}) = \vec{v_1} \cdot \vec{v_1} - \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} - \vec{v_2} \cdot \vec{v_1} + \vec{v_2} \cdot \vec{v_2}$

$= 1 - 0 - 0 + 1 = 2$

Logo $\|\vec{v_1}'\| = \sqrt{2} \neq 1$ e R' não é ortonormado.

$\vec{v_1}' \cdot \vec{v_2}' = (\vec{v_1} - \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{v_1} \cdot \vec{v_1} + \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} - \vec{v_2} \cdot \vec{v_1} - \vec{v_2} \cdot \vec{v_2} =$

$= 1 + 0 - 0 - 1 = 0$

Portanto, R é um referencial ortogonal.

ii Temos $O = (0,0)_R$ e $O' = (-2,-2)_R$. Como R é ortonormado,

$d(O, O') = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

2

a $A = (0,-1,2)$, $B = (3,2,1)$ $\Rightarrow$ $\vec{AB} = B - A = (3,3,-1)$

$\vec{AB}$ é ortogonal a Π logo Π: $3x + 3y - z + d = 0$, para algum $d \in \mathbb{R}$.

Como $M = (1,1,0) \in \Pi$ $3 + 3 + d = 0 \Rightarrow d = -6$

Logo Π: $3x + 3y - z = 6$.

b $\pi' : -y+z-1=0 \Rightarrow \vec{n} = (0,-1,1)$ é vetor normal a π

Logo $R' : (x,y,z) = (1,2,3) + \alpha(0,-1,1), \ \alpha \in \mathbb{R}$.

3

a $\pi_1 : (x,y,z,t) = (2,0,0,1) + \alpha(1,2,0,1) + \beta(-1,0,1,0), \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 2+\alpha-\beta \\ y = 2\alpha \\ z = \beta \\ t = 1+\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y/2 - z \\ \alpha = y/2 \\ \beta = z \\ t = 1 + y/2 \end{cases}$$

Logo $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ y - 2t = -2 \end{cases}$ é um sistema de equações cartesianas de π_1.

b $\pi_2 : \begin{cases} x+z+t = 1 \\ x - 2y - z + t = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-\alpha-\beta \\ 1-\alpha-\cancel{\beta} - 2y - \alpha + \cancel{\beta} = 3 \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\alpha-\beta \\ -2y = 2+2\alpha \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y,z,t) = (1,-1,0,0) + \alpha(-1,-1,1,0) + \beta(-1,0,0,1)$

$\alpha,\beta \in \mathbb{R} \rightarrow$ equações paramétricas de π_2.

c Temos: $\pi_1 = (2,0,0,1) + \langle (1,2,0,1), (-1,0,1,0) \rangle = A_1 + \langle \vec{u_1}, \vec{v_1} \rangle$

$\pi_2 = (1,-1,0,0) + \langle (-1,-1,1,0), (-1,0,0,1) \rangle = A_2 + \langle \vec{u_2}, \vec{v_2} \rangle$

Logo $\pi_1 + \pi_2 = A_1 + \langle \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2} \rangle$

Como $\dim A = 4$ então $\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u_1}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2} \rangle$ é um sistema de vetores linearmente dependente.

$\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (-1,-1,0,-1)$

Vejamos se $\langle \overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2} \rangle$ é linearmente independente:

$$\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2}) = \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$= -1-1+1 = 1$

Como $\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1}, \vec{u_2}, \vec{v_2}) \neq 0$ então $\dim(\pi_1 + \pi_2) = 4$ e assim podemos concluir que $\Pi_1 + \Pi_2 = t$.

4. $\Pi: 2x-2y-z-1=0$

a) $p(M) = M - \frac{\vec{AM}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$, onde A é um ponto de Π

$\vec{n}$ é um vetor normal a Π

Tomamos $A=(0,0,-1)$ e $\vec{n}=(2,-2,-1)$. Para $M=(x,y,z)$

$$p(M) = (x,y,z) - \frac{(x,y,z+1)\cdot(2,-2,-1)}{\|(2,-2,-1)\|^2}(2,-2,-1) =$$

$$= (x,y,z) - \frac{2x-2y-z-1}{9}(2,-2,-1) =$$

$$= \left(\frac{9x-2(2x-2y-z-1)}{9}, \frac{9y+2(2x-2y-z-1)}{9}, \frac{9z+2x-2y-z-1}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{5x+4y+2z+2}{9}, \frac{4x+5y-2z-2}{9}, \frac{2x-2y+8z-1}{9}\right)$$

b) $\sigma(M) = M + 2\vec{MP(M)} = M + 2(P(M)-M) = 2P(M) - M$

Para $M=(x,y,z)$, temos

$$\sigma(M) = \left(\frac{x+8y+4z+4}{9}, \frac{8x+y-4z-4}{9}, \frac{4x-4y+7z-2}{9}\right)$$

Matricialmente temos:

$$\sigma: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/9 \\ -4/9 \\ -2/9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & 4/9 \\ 8/9 & 1/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & 7/9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

5. $r = \langle(1,-1,0)\rangle$, $\Pi = \langle(1,1,1),(0,0,1)\rangle$

a) Seja P a projeção paralela em Π dirigida por r.

Temos que $P(M) = r_M \cap \Pi$ onde $r_M = M + \langle(1,-1,0)\rangle$

(a reta paralela a r incidente em M)

Para Π: vamos determinar a equação cartesiana

$$\Pi: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y = 0$$

Seja $M=(x,y,z)$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P(M) = (x,y,z) + \lambda(1,-1,0)$

e como $P(M) \in \Pi$ temos $x+\lambda-(y-\lambda)=0 \Rightarrow x-y+2\lambda=0$

$\Rightarrow \lambda = (y-x)/2$

Logo $P(M) = (x,y,z) + \frac{y-x}{2}(1,-1,0) = (x,y,z) + \left(\frac{y-x}{2}, \frac{x-y}{2}, 0\right)$

$$= \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z\right)$$

b Seja ϕ a projeção paralela em r dirigida por π.

Temos que $\phi(M) = \pi_M \cap r$ onde π_M é o plano paralelo a π que incide em M.

Vamos determinar um sistema de equações cartesianas de r

$$(x,y,z) = \lambda(1,-1,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

Como $\phi(M) = \pi_M \cap r$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) + \alpha(1,1,1) + \beta(0,0,1) \in r$$

$$(x+\alpha, y+\alpha, z+\alpha+\beta) \in r$$

Assim: $\begin{cases} x+\alpha = -(y+\alpha) \\ z+\alpha+\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = -x-y \\ \beta = -z-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = (-x-y)/2 \\ \beta = -z + \frac{x+y}{2} \end{cases}$

Logo: $\phi(x,y,z) = (x,y,z) + \frac{(-x-y)}{2}(1,1,1) + \frac{y+x}{2} - z \, (0,0,1)$

$$= \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, 0\right)$$

6

a Seja σ a rotação pretendida

Temos $\sigma(M) = O + (\vec{OM}\cdot\hat{v})\hat{v} + \cos\theta\left(\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\hat{v})\hat{v}\right) + \operatorname{sen}\theta\left(\hat{v}\wedge\vec{OM}\right)$

onde $\theta = \pi$ e $\hat{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ vetor unitário associado a $\vec{v}$.

Para $M=(x,y,z)$ temos

$$(\vec{OM}\cdot\hat{v})\hat{v} = \frac{x-z}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{x-z}{2}, 0, \frac{z-x}{2}\right)$$

Como $\cos\theta = -1$ e $\operatorname{sen}\theta = 0$ vem

$$\sigma(x,y,z) = \left(\frac{x-z}{2}, 0, \frac{z-x}{2}\right) - (x,y,z) + \left(\frac{x-z}{2}, 0, \frac{z-x}{2}\right)$$

$$= (x-z, 0, z-x) - (x,y,z) = (-z, -y, -x)$$

b Seja ρ a rotação pretendida

Sabemos que $\rho = t_{\vec{w}} \circ \sigma \circ t_{-\vec{w}}$, onde σ é a rotação da alínea anterior e $t_{\vec{w}}$ é a translação segundo $\vec{w} = \vec{OA}$

Assim:

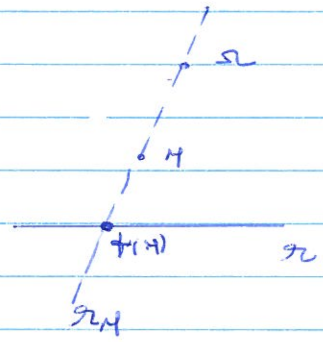
$$\rho(x,y,z) = t_{\vec{w}} \circ \sigma \circ t_{-\vec{w}}(x,y,z) = t_{\vec{w}}\left(\sigma(x, y-1, z)\right) =$$

$$= t_{\vec{w}}(-z, -y+1, -x) = (-z, -y+2, -x)$$

7

a) A reta excecional desta projeção perspetiva é a reta paralela a r que incide em Ω, ou seja, a reta de equação cartesiana $y+x=1$.

b) Temos que $f(M) = r_M \cap r$, onde r_M é a reta que está definida por Ω e M.



$r_M: \quad \Omega + \langle \overrightarrow{\Omega M} \rangle$

Como $f(M) = r_M \cap r$ então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(2,-1) + \lambda(x-2, y+1) \in r$, ou seja, $(2+\lambda(x-2), -1+\lambda(y+1)) \in r$

Logo: $-1 + \lambda(y+1) + \lambda(x-2) + 2 = 0$

$$\lambda(y+x-1) = -1 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{y+x-1}$$

Assim: $f(x,y,z) = (2,-1) - \dfrac{1}{y+x-1}(x-2, y+1) =$

$$= \left(\frac{2(y+x-1)-(x-2)}{y+x-1}, \frac{-(y+x-1)-(y+1)}{y+x-1} \right) = \left(\frac{2y+x}{y+x-1}, \frac{-2y-x}{y+x-1} \right)$$