Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2025/2026

Departamento de Matemática

Valores e Vetores Próprios

Definição e propriedades

Neste capítulo estudamos os conceitos de vetor próprio e valor próprio de aplicações lineares que sejam endomorfismos de um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ e estudamos também os conceitos de vetor próprio e de valor próprio de matrizes quadradas. O interesse no estudo destes conceitos deve-se às suas diversas aplicações práticas. No contexto do estudo matricial, os valores e vetores próprios aplicam-se no processo de diagonalização de matrizes quadradas.

Valores e Vetores Próprios

Definição

*Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ e $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Diz-se que $v \in V$ é **vetor próprio** de f se são satisfeitas as duas condições seguintes:*

i) $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$;

ii) *existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(v) = \lambda v$.

*O escalar λ diz-se um **valor próprio de** f. Ao conjunto de valores próprios de f dá-se a designação de **espectro de** f.*

O conceito anterior pode ser generalizado a endomorfismos de espaços vetoriais em geral, mas, no âmbito deste curso, restringimos o estudo a endomorfismos de subespaços vetorias de $\mathbb{R}^n$.

Observação: Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$.

1) Se $v \in V$ é um vetor próprio de f, então existe um único valor próprio associado a v, i.e., existe um único escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda v$.

De facto, se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ são escalares tais que

$$f(v) = \lambda_1 v \text{ e } f(v) = \lambda_2 v,$$

tem-se

$$\lambda_1 v - \lambda_2 v = 0_{\mathbb{R}^n},$$

pelo que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_{\mathbb{R}^n}$$

e, como $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, segue que $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, donde $\lambda_1 = \lambda_2$.

Assim, diz-se que v **é vetor próprio de** f **associado ao valor próprio** λ.

Valores e Vetores Próprios

2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio de f, prova-se que existem vetores próprios distintos associados ao mesmo valor próprio λ. Com efeito, se v é um vetor próprio associado a λ, então, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v).$$

Logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αv é vetor próprio de f associado a λ, uma vez que $\alpha v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ e $f(\alpha v) = \lambda(\alpha v)$.

Valores e Vetores Próprios

Exemplo

Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, o endomorfismo* f *definido por* $f(a,b,c) = (3a, 3b, b)$*, para todo* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*, e os vetores* $(0,3,1)$*,* $(1,6,2)$*,* $(2,0,0)$*. Tem-se*

$$\begin{array}{rcccl} f(0,3,1) & = & (0,9,3) & = & 3(0,3,1), \\ f(1,6,2) & = & (3,18,6) & = & 3(1,6,2), \\ f(2,0,0) & = & (6,0,0) & = & 3(2,0,0), \end{array}$$

logo $(0,3,1)$*,* $(1,6,2)$*,* $(2,0,0)$ *são vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* 3*. Temos também*

$$\begin{array}{rcccl} f(0,0,5) & = & (0,0,0) & = & 0(0,0,5), \\ f(0,0,-2) & = & (0,0,0) & = & 0(0,0,-2), \end{array}$$

e, portanto, $(0,0,5)$*,* $(0,0,-2)$ *são vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* 0*.*

Valores e Vetores Próprios

Exemplo

Sejam V *um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^n$, (v_1, v_2) *uma base de* V *e* $f : V \to V$ *uma aplicação linear definida por*

$$f(v_1) = v_1 - v_2 \text{ e } f(v_2) = -v_1 + v_2.$$

Se considerarmos os vetores

$$v_1' = v_1 + v_2 \text{ e } v_2' = v_1 - v_2,$$

tem-se $v_1' \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, $v_2' \neq 0_{\mathbb{R}^n}$,

$$f(v_1') = 0v_1' \text{ e } f(v_2') = 2v_2'.$$

Logo, v_1' *e* v_2' *são vetores próprios de* f *associados aos valores próprios* 0 *e* 2, *respetivamente.*

Exemplo

Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e f o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Então $(0,2)$ é vetor próprio de f associado ao valor próprio 2, pois $(0,2) \neq (0,0)$ e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

pelo que $f(0,2) = (0,4) = 2(0,2)$.

Sendo V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão finita $r \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, $v \in V$ e $[v]_{(v_i)}$ o vetor coluna de v de V na base $\mathcal{B}$, tem-se

$$v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \text{ se e só se } [v]_{(v_i)} \neq 0_{r\times 1}$$

e

$$f(v) = \lambda v \text{ se e só se } A[v]_{(v_i)} = \lambda [v]_{(v_i)},$$

o que motiva as definições seguintes.

Definição

*Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Diz-se que $y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$ é **vetor próprio** de A se são satisfeitas as duas condições seguintes:*

i) $y \neq 0_{r\times 1}$;

ii) *existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $Ay = \lambda y$.

*O escalar λ diz-se um **um valor próprio de** A. Ao conjunto de valores próprios de A dá-se a designação de **espectro de** A.*

Os conceitos anteriores estendem-se naturalmente a matrizes complexas. Seja $A \in \mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{C})$. Diz-se que um vetor $y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{C})$ é um vetor próprio de A se $y \neq 0_{r\times 1}$ e existe um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Ay = \lambda y$. Neste caso, o número λ é denominado valor próprio de A.
Observe-se que toda matriz $A \in \mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$ pode ser vista também como uma matriz complexa. Assim, ao estudar uma matriz quadradra $r \times r$ com entradas reais, é necessário explicitar se a consideramos como elemento de $\mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{R})$, restringindo-nos a valores próprios reais e vetores próprios em $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$, ou como elemento de $\mathcal{M}_{r\times r}(\mathbb{C})$, admitindo também valores próprios complexos e vetores próprios em $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{C})$.
Neste curso, a não ser que algo seja dito em contrário, dada uma matriz quadrada real, estaremos apenas interessados no estudo de valores próprios reais e de vetores próprios de elementos reais.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \lambda = 2.$$

Uma vez que

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda x.$$

concluímos que $\lambda = 2$ *é valor próprio de* A *e* $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é um vetor próprio de* A *associado a* $\lambda = 2$.

Observação: 1) De modo análogo ao que sucede com os vetores próprios de um endomorfismo, um vetor próprio de uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ está associado a um único valor próprio de A. De facto, para quaisquer $y \in \mathcal{M}_{r\times 1} \setminus \{0_{r\times 1}\}$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} (Ay = \lambda y \quad \text{e} \quad Ay = \mu y) & \Rightarrow & \lambda y = \mu y \\ & \Rightarrow & (\lambda - \mu)\, y = 0_{n\times 1} \\ & \Rightarrow & \lambda - \mu = 0 \\ & \Rightarrow & \lambda = \mu. \end{array}$$

Diz-se, então, que y **é vetor próprio de** A **associado ao valor próprio** λ.

Valores e Vetores Próprios

2) A cada valor próprio λ de A está associada uma infinidade de vetores próprios de A. Com efeito, se $y \in \mathcal{M}_{r\times 1} \setminus \{0_{r\times 1}\}$ é um vetor próprio de A, então, para todo $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = \alpha y$ é também um vetor próprio de A, uma vez que $x \neq 0_{r\times 1}$ e

$$Ax = A(\alpha y) = \alpha (Ay) = \alpha (\lambda y) = \lambda (\alpha y) = \lambda x.$$

Valores e Vetores Próprios

Como já foi observado anteriormente, as noções de valor e vetor próprio de endomorfismos e de valor e vetor próprio de matrizes quadradas estão relacionadas.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão finita $r \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Então

1) *$v \in V$ é vetor próprio de f se e só se o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é vetor próprio de A.*
2) *$\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de f se e só se λ é valor próprio de A.*

Demonstração.

1) Sejam $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \in V$ e $[v]_{(v_i)} = \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \ldots \alpha_r \end{array} \right]^T$ o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$.

Se v é vetor próprio de f tem-se $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Então $[v]_{(v_i)} \neq 0_{r\times 1}$ e

$$A[v]_{(v_i)} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_r \end{bmatrix} = \lambda[v]_{(v_i)}.$$

Logo, $[v]_{(v_i)}$ é vetor próprio de A.
Reciprocamente, se admitirmos que $[v]_{(v_i)}$ é vetor próprio de A, temos $[v]_{(v_i)} \neq 0_{r\times 1}$ e $A[v]_{(v_i)} = \lambda[v]_{(v_i)}$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ e

$$f(v) = (\lambda\alpha_1)v_1 + \ldots + (\lambda\alpha_r)v_r = \lambda(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r) = \lambda v;$$

portanto v é vetor próprio de f.

Exemplo

Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sendo $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, tem-se

$$A \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, considerando que $(3,3,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ e

$$f(3,3,0) = (-6,-6,0) = -2(3,3,0),$$

o vetor $(3,3,0)$ é vetor próprio de f associado ao valor próprio -2.

Exemplo (continuação).

Atendendo a que

$$A\begin{bmatrix}0\\5\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\20\\20\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}0\\5\\5\end{bmatrix},$$

conclui-se que o vetor $(0,5,5)$ *também é um vetor próprio de* f*, pois* $(0,5,5)\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ *e temos*

$$f(0,5,5)=(0,20,20)=4(0,5,5);$$

neste caso, $(0,5,5)$ *é um vetor próprio de* f *associado ao valor próprio* 4.

Valores e Vetores Próprios

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Seja

$$V_{[f,\lambda]} = \{v \in V : f(v) = \lambda v\} = \text{Nuc}(f - \lambda id_V).$$

Então

1) $V_{[f,\lambda]}$ *é subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$.
2) *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *é um valor próprio de* f*, os vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* λ *são os elementos de* $V_{[f,\lambda]} \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Demonstração.

1) Imediato, pois todo o núcleo de uma aplicação linear entre espaços vetoriais V e V' é um subespaço vetorial de V.

2) Imediato pela definição de $V_{[f,\lambda]}$ e pela definição de vetor próprio de f associado a λ.

$\square$

Observação: Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se λ não é valor próprio de f, tem-se $V_{[f,\lambda]} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Definição

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de f. Ao subespaço

$$V_{[f,\lambda]} = \{v \in V : f(v) = \lambda v\} = \mathrm{Nuc}(f - \lambda id_V)$$

*dá-se a designação de **subespaço próprio de f associado ao valor próprio** λ. À dimensão do subespaço $V_{[f,\lambda]}$ dá-se a designação de **multiplicidade geométrica do valor próprio** λ e representa-se por* m.g.(λ).

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *e*

$$\begin{aligned} M_{[A,\lambda]} &= \{y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R}) : Ay = \lambda y\} \\ &= \{y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R}) : (A - \lambda I_r)y = 0_{r\times 1}\}. \end{aligned}$$

Então

1) $M_{[A,\lambda]}$ *é um subespaço vetorial de* $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$.
2) *Se* λ *é um valor próprio de* A*, o conjunto dos vetores próprios de* A *associados ao valor próprio* λ *é* $M_{[A,\lambda]} \setminus \{0_{r\times 1}\}$.

Definição

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de A. Ao subespaço

$$\begin{aligned} M_{[A,\lambda]} &= \{y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R}) : Ay = \lambda y\} \\ &= \{y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R}) : (A - \lambda I_r)y = 0_{r\times 1}\}. \end{aligned}$$

dá-se a designação de ***subespaço próprio de*** A ***associado ao valor próprio*** λ*. À dimensão do subespaço* $M_{[A,\lambda]}$ *dá-se a designação de* ***multiplicidade geométrica do valor próprio*** λ *e representa-se por* m.g.(λ).

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, λ um valor próprio de f e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Então existe uma bijeção entre $V_{[f,\lambda]}$ e $M_{[A,\lambda]}$.

Demonstração.

A aplicação $\mu : V_{[f,\lambda]} \to M_{[A,\lambda]}$ definida por $\mu(v) = [v]_{\mathcal{B}}$, para todo $v \in V_{[f,\lambda]}$, é bijetiva. $\square$

Seguidamente estudamos processos para determinar os valores próprios e os vetores próprios de um endomorfismo dum subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão ≥ 1. Começamos por estudar como determinar os valores próprios de um dado endomorfismo e seguidamente veremos como determinar os vetores próprios associados a uma determinado valor próprio.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão finita $r \geq 1$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então λ é valor próprio de f se e só se

$$|A - \lambda I_r| = 0.$$

Demonstração.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de f se e só se λ é um valor próprio de A. Por definição, λ é valor próprio de A se e só se existe $y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{r\times 1}\}$ tal que $Ay = \lambda y$. Então, considerando que

$$\begin{aligned} Ay = \lambda y \quad &\Leftrightarrow \quad Ay - \lambda y = 0_{r\times 1} \\ &\Leftrightarrow \quad Ay - \lambda I_r y = 0_{r\times 1} \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda I_r) y = 0_{r\times 1}, \end{aligned}$$

λ é valor próprio de f se e se só o sistema $(A - \lambda I_r)x = 0_{r\times 1}$ é indeterminado, ou seja, se e só se $|A - \lambda I_r| = 0$. $\square$

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Então λ é valor próprio de A se e só se

$$|A - \lambda \mathrm{I}_r| = 0.$$

Demonstração.

Sejam $\mathcal{B}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^r$ e f o endomorfismo de $\mathbb{R}^r$ tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = A.$$

Então, pelo teorema anterior, o resultado é imediato. $\square$

Definição

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Chama-se **polinómio característico de** *A, e representa-se por $p_A(x)$, o polinómio na variável x e com coeficientes em $\mathbb{R}$, definido por*

$$p_A(x) = |A - x\mathrm{I}_r| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} - x \end{vmatrix}.$$

Chama-se ***raiz característica de*** *A a qualquer raiz do polinómio $p_A(x)$ em $\mathbb{R}$.*

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$*. O polinómio característico de A é*

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI_3| \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 1 \\ 2 & -x & -2 \\ -1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= -x^3 + 4x^2 - 4x \\ &= -x(x-2)^2. \end{aligned}$$

As raízes características de A são 0 e 2.

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ e $p_A(x)$ o polinómio característico de A. Então $p_A(x)$ tem grau igual a r e se $p_A = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_0$, tem-se $a_r = (-1)^r$, $a_{r-1} = -\sum_{i=1}^{r} a_{ii}$ e $a_0 = |A|$.

Demonstração.

A prova pode ser realizada por indução sobre r. $\square$

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *São equivalentes as afirmações seguintes:*

1) λ *é valor próprio de* A.
2) λ *é um zero do polinómio característico de* A, *isto é,* $p_A(\lambda) = |A - \lambda I_r| = 0$.

Demonstração.

O resultado é imediato pelo teorema enunciado na página 27. $\square$

Valores e Vetores Próprios

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, qualquer equação na variável x da forma

$$a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_r \neq 0$, $r \geq 1$, e $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, r$ tem exactamente r raízes em $\mathbb{C}$.

Assim, considerando que os valores próprios de uma matriz $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ são as raízes características de A, é válido o resultado seguinte.

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Então A tem, no máximo, r valores próprios distintos.

Definição

Sejam $r \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. *Se* λ *é valor próprio de* A, *designa-se por* ***multiplicidade algébrica de*** λ, *e representa-se por* $\mathrm{m.a.}(\lambda)$, *a multiplicidade de* λ *como raiz do polinómio* $p_A(x)$. *Se* $\mathrm{m.a.}(\lambda)=k$, *diz-se que* λ *tem multiplicidade algébrica* k; *no caso particular de* $k = 1$, *diz-se que* λ *é valor próprio simples.*

Atendendo ao teorema enunciado na página 14, o problema da determinação dos valores próprios de um endomorfismo f de um subespaço vectorial V de $\mathbb{R}^n$ pode ser reduzido ao problema da determinação dos valores próprios de uma matriz A onde A é a matriz de f em relação a uma dada base de V. Porém, considerando que a matriz de um dado endomorfismo depende da base fixada para a definir, coloca-se a questão se matrizes do mesmo endomorfismo relativas a bases distintas poderão ter polinómios característicos distintos. Seguidamente prova-se que todas as matrizes de um mesmo endomorfismo f têm o mesmo polinómio característico.

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$.
Se A *e* B *são semelhantes, então têm o mesmo polinómio característico.*

Demonstração.

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ matrizes semelhantes. Então $B = PAP^{-1}$, para alguma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Logo, atendendo às propriedades de determinantes, tem-se

$$\begin{aligned} p_B(x) &= |B - x\mathrm{I}_r| \\ &= |PAP^{-1} - P(x\mathrm{I}_r)P^{-1}| \\ &= |P(A - x\mathrm{I}_r)P^{-1}| \\ &= |P||A - x\mathrm{I}_r||P^{-1}| \\ &= |A - x\mathrm{I}_r||P||P^{-1}| \\ &= |A - x\mathrm{I}_r| \\ &= p_A(x). \end{aligned}$$

$\square$

Corolário

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bases de V, $A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ e $B = M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$. Então $p_A(x) = p_B(x)$.

Demonstração.

Nas condições do enunciado, as matrizes A e B são semelhantes e, portanto, o resultado segue do teorema anterior. $\square$

Definição

Sejam V *um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensão* $r \geq 1$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V)$*. Chama-se* ***polinómio característico*** *de* f*, e representa-se por* $p_f(x)$*, o polinómio característico de qualquer matriz de* f *em relação a uma base de* V*.*

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. São equivalentes as afirmações seguintes

1) *λ é valor próprio de f.*
2) *λ é zero do polinómio característico de f.*

Demonstração.

Imediato pelo teorema enunciado na página 25. $\square$

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de $r \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Então f tem, no máximo, r valores próprios distintos.

Demonstração.

Segue dos teoremas enunciados nas páginas 38 e 32. $\square$

Definição

*Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Se λ é valor próprio de f, designa-se por **multiplicidade algébrica de** λ, e representa-se por $\mathrm{m.a.}(\lambda)$, a multiplicidade de λ como raiz do polinómio $p_f(x)$. Se $\mathrm{m.a.}(\lambda)=k$, diz-se que λ tem multiplicidade algébrica k; no caso particular de $k = 1$, diz-se que λ é valor próprio simples.*

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão ≥ 1 e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Uma vez conhecidos os valores próprios de f podemos também determinar os vetores próprios de f associados aos valores próprios recorrendo a matrizes.

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para cada $v \in V$, seja $[v]_{(v_i)}$ o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$. Então

$$V_{[f,\lambda]} = \{v \in V : (A - \lambda I_r)[v]_{(v_i)} = 0_{r \times 1}\}.$$

Demonstração.

Temos $V_{[f,\lambda]} = \mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$. Por outro lado, sendo $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, tem-se $M(f - \lambda \mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = A - \lambda \mathrm{I}_r$. Assim, uma vez que, para cada $v \in V$,

$$v \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V) \Leftrightarrow (f - \lambda \mathrm{id}_V)v = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow (A - \lambda I_r)[v]_{(v_i)} = 0_{r\times 1},$$

segue que

$$V_\lambda = \{v \in V : (A - \lambda I_r)[v]_{(v_i)} = 0_{n\times 1}\}.$$

$\square$

Nas condições do teorema anterior, os vetores próprios de f associados a λ são os vetores de V cujos vetores coluna na base $\mathcal{B}$ são as soluções não nulas do sistema homogéneo $(A - \lambda I_r)x = 0_{r\times 1}$.

Exemplo

Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e a base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, onde $v_1 = (1,0,0)$,$v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (1,1,1)$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o endomorfismo definido por

$$f(v_1) = (0,-2,-1), \quad f(v_2) = (0,0,-1), \quad f(v_3) = (0,0,1).$$

Recorrendo à matriz de f em relação à base $\mathcal{B}$, vamos determinar os valores próprios e os vetores próprios de f.

Sendo $A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação).

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ *é valor próprio de* f *se e só se* $|A - \lambda \mathrm{I}_3| = 0$. *Uma vez que*

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda \mathrm{I}_3| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1]
\end{aligned}
$$

então $|A - \lambda \mathrm{I}_3| = 0$ *se e só se* $\lambda = 2$ *ou* $\lambda = 0$, *i.e., os valores próprios de* f *são* 0 *e* 2.

Exemplo (continuação).

Relativamente ao subespaço próprio de f associado ao valor próprio 0, tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^3_{[f,0]} = \mathrm{Nuc}(f - 0\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \\
&= \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : M(f - 0\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : (A - 0I_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação).

Resolvendo o sistema $(A - 0\mathrm{I}_3)x = 0$, *i.e.*, $Ax = 0$,

$$[A|0] \;=\; \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação).

temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3_{[f,0]} &= \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 = 0, \alpha_2 - \alpha_3 = 0\right\} \\
&= \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3\right\} \\
&= \left\{0 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_2 v_3 \in \mathbb{R}^3 : \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\alpha_2 (v_2 + v_3) \in \mathbb{R}^3 : \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\alpha_2 (2,2,1) \in \mathbb{R}^3 : \alpha_2 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= < (2,2,1) > .
\end{aligned}$$

Os vetores próprios de f associados ao valor próprio 0 são os elementos de $\mathbb{R}^3_{[f,0]} \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Exemplo (continuação).

Vamos, agora, determinar o subespaço próprio associado ao valor próprio 2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3_{[f,2]} &= \mathrm{Nuc}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \\
&= \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : M(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : (A - 2\mathrm{I}_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema $(A - 2\mathrm{I}_3)x = 0$,

$$[A - 2\mathrm{I}_3|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação).

temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3_{[f,2]} &= \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\right\} \\
&= \left\{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : \alpha_1 = -\alpha_2 - \alpha_3\right\} \\
&= \left\{(-\alpha_2 - \alpha_3) v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in \mathbb{R}^3 : \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\alpha_2(-v_1 + v_2) + \alpha_3(-v_1 + v_3)\mathbb{R}^3 : \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\alpha_2((0,1,0)) + \alpha_3((0,1,1))\mathbb{R}^3 : \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= < (0,1,0), (0,1,1) > .
\end{aligned}$$

Os vetores próprios de f associados ao valor próprio 2 são os elementos de $\mathbb{R}^3_{[f,2]} \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Embora o resultado anterior nos dê um processo para determinar o subespaço próprio de um endomorfismo associado a um determinado valor próprio, o resultado seguinte permite-nos determinar a multiplicidade geométrica de um valor próprio sem determinar o subespaço próprio que lhe está associado.

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de f. Então

$$\text{m.g.}(\lambda) = r - car(A - \lambda I_r).$$

Demonstração.

Tem-se $V_{[f,\lambda]} = \text{Nuc}(f - \lambda id_V)$. Então, considerando que

$$\dim V = \dim \text{Nuc}(f - \lambda id_V) + \dim Im(f - \lambda id_V)$$

e

$$\dim Im(f - \lambda id_V) = car(A - \lambda I_r),$$

segue que

$$m.g.(\lambda) = \dim V_{[f,\lambda]} = r - car(A - \lambda I_r).$$

□

Um resultado similar ao anterior pode ser estabelecido para matrizes quadradas.

Corolário

Sejam $r \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *um valor próprio de* A. *Então*

$$\text{m.g.}(\lambda) = r - car(A - \lambda I_r).$$

Conhecida a multiplicidade algébrica de cada valor próprio de um endomorfismo f, podemos também obter alguma informação sobre a multiplicidade geométrica do valor próprio, uma vez que estas mutliplicidades estão relacionadas da forma estabelecida no resultado seguinte.

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de f, então

$$\text{m.g}(\lambda) \leq \text{m.a}(\lambda).$$

Corolário

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de A, então $\text{m.g.}(\lambda) \leq \text{m.a.}(\lambda)$.

Teorema

Sejam V *um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensão* $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ *e* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *valores próprios de* f, *distintos dois a dois. Se, para cada* $i \in \{1, \ldots, p\}$, $(v_{i1}, \ldots, v_{is_i})$ *é uma sequência linearmente independente formada por vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* λ_i, *então a sequência*

$$(v_{11}, \ldots, v_{1s_1}, \ldots, v_{p1}, \ldots v_{ps_p})$$

é linearmente independente.

Corolário

Sejam V *um subespaço vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensão* $r \geq 1$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V)$. *Se* $v_1, \ldots, v_m$ *são vetores próprios de* f *associados, respetivamente, a valores próprios* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *distintos dois a dois, então a sequência* $(v_1, \ldots, v_m)$ *é linearmente independente.*

Valores e Vetores Próprios

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ valores próprios de A, distintos dois a dois. Se, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, $(y_{i1}, \ldots, y_{is_i})$ é uma sequência linearmente independente formada por vetores próprios de A associados ao valor próprio λ_i, então a sequência

$$(y_{11}, \ldots, y_{1s_1}, \ldots, y_{p1}, \ldots y_{ps_p})$$

é linearmente independente.

Corolário

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Se $y_1, \ldots, y_m$ são vetores próprios de A associados, respetivamente, a valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distintos dois a dois, então a sequência $(y_1, \ldots, y_m)$ é linearmente independente.

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
São equivalentes as afirmações seguintes:

1) λ *é valor próprio de* f.
2) $f - \lambda \mathrm{id}_V$ *não é automorfismo de* V.
3) $A - \lambda \mathrm{I}_r$ *não é invertível.*

Demonstração.

Sejam $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) ⇒ 2) Se λ é valor próprio de f, tem-se $V_{[f,\lambda]} \neq \{0_V\}$, ou seja $\mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Logo $f - \lambda \mathrm{id}_V$ não é injetiva e, portanto, não é um automorfismo de V.

2) ⇒ 1) Uma vez que V tem dimensão finita, se $f - \lambda \mathrm{id}_V$ não é automorfismo de V, então $f - \lambda \mathrm{id}_V$ não é injetiva. Logo $\mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, i.e., $V_{[f,\lambda]} \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Portanto, λ é valor próprio de f.

2) ⇔ 3) Uma vez que $A - \lambda \mathrm{I}_r = M(f - \lambda \mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, o resultado é imediato atendendo a que uma aplicação linear entre espaços vetoriais finitos é um isomorfismo se e só se uma matriz da aplicação linear (relativamente a certas bases) é invertível.

$\square$

Corolário

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *São equivalentes as afirmações seguintes:*

1) λ *é valor próprio de* A.
2) $A - \lambda \mathrm{I}_r$ *não é invertível.*

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ um valor próprio de f e $v \in V$ um vetor próprio de f associado ao valor próprio λ. Então:

1) *Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\lambda$ é valor próprio de αf e v é vetor próprio de αf associado a $\alpha\lambda$;*
2) *Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda - \alpha$ é valor próprio de $f - \alpha id_V$ e v é vetor próprio de $f - \alpha id_V$ associado a $\lambda - \alpha$;*
3) *λ^2 é valor próprio de f^2 e v é vetor próprio de f^2 associado a λ^2;*
4) *f é um automorfismo se e só se $\lambda \neq 0$. Se f é um automorfismo, então λ^{-1} é valor próprio de f^{-1} e v é vetor próprio de f^{-1} associado a λ^{-1}.*

Demonstração.

1) Considerando que $v \in V$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio λ segue que

$$(\alpha f)(v) = \alpha(f(v)) = \alpha(\lambda v) = (\alpha\lambda)v,$$

e, portanto, $\alpha\lambda$ é valor próprio de αf e v é vetor próprio de αf associado a $\alpha\lambda$.

2) Sendo $v \in V$ um vetor próprio de f associado ao valor próprio λ, temos

$$(f - \alpha id_V)(v) = f(v) - (\alpha id_v)(v) = f(v) - \alpha(id_V(v)) = \lambda v - \alpha v = (\lambda - \alpha)(v).$$

Logo, $\lambda - \alpha$ é valor próprio de $f - \alpha id_V$ e v é vetor próprio de $f - \alpha id_V$ associado a $\lambda - \alpha$.

Demonstração (continuação).

3) Atendendo a que $v \in V$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio λ, temos,

$$f^2(v) = f(f(v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v.$$

Assim, $v \in V$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio λ.

Demonstração (continuação).

4) Pelo teorema enunciado na página 56, é imediato que f é um automorfismo se e só se $\lambda \neq 0$.

Assumindo que f é um automorfismo, prova-se que λ^{-1} é valor próprio de f^{-1} e v é vetor próprio de f^{-1} associado a λ^{-1}. No sentido de fazer esta prova, consideremos $\mathcal{B}$ uma base de V e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Uma vez que f é um automorfismo, pelo teorema referido anteriormente, A é invertível. Então, considerando que $\lambda \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
A[v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}} \quad &\Longrightarrow \quad A^{-1}\left(A[v]_{\mathcal{B}}\right) = A^{-1}\left(\lambda[v]_{\mathcal{B}}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(A^{-1}A\right)[v]_{\mathcal{B}} = \lambda\left(A^{-1}[v]_{\mathcal{B}}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad I_n[v]_{\mathcal{B}} = \lambda\left(A^{-1}[v]_{\mathcal{B}}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad [v]_{\mathcal{B}} = \lambda\left(A^{-1}[v]_{\mathcal{B}}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda^{-1}[v]_{\mathcal{B}} = A^{-1}[v]_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

Demonstração (continuação).

e, portanto, $[v]_{\mathcal{B}}$ é vetor próprio de A^{-1} associado ao valor próprio λ^{-1}. Assim, considerando o teorema enuncuciado na página 14 e que $M(f^{-1};\mathcal{B},\mathcal{B}) = A^{-1}$, concluimos que λ^{-1} é valor próprio de f^{-1} e v é vetor próprio de f^{-1} associado a λ^{-1}.

Corolário

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *um valor próprio de* A, *e* $y \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$ *um vetor próprio de* A *associado ao valor próprio* λ. *Então:*

1) *Para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\lambda$ *é valor próprio de* αA *e* y *é vetor próprio de* αA *associado a* $\alpha\lambda$;
2) *Para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda - \alpha$ *é valor próprio de* $A - \alpha I_r$ *e* y *é vetor próprio de* $A - \alpha I_r$ *associado a* $\lambda - \alpha$;
3) λ^2 *é valor próprio de* A^2 *e* y *é vetor próprio de* A^2 *associado a* λ^2;
4) A *é invertível se e só se* $\lambda \neq 0$. *Se* A *é invertível, então* λ^{-1} *é valor próprio de* A^{-1} *e* y *é vetor próprio de* A^{-1} *associado a* λ^{-1}.

Teorema

Sejam $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, λ é valor próprio de A se e só se λ é valor próprio de A^T.

Demonstração.

Imediato tendo em conta que $(A - \lambda I_r)^T = A^T - \lambda I_r$ e que

$$\det (A - \lambda I_r)^T = \det (A - \lambda I_r).$$

$\square$

Teorema

Seja A uma matriz triangular de ordem r. Então os valores próprios de A são os elementos da sua diagonal principal.

Demonstração.

Se $A = [a_{ij}]_r$ é uma matriz triangular, então $A - \lambda I_r$ é também uma matriz triangular, pelo que

$$\det(A - \lambda I_r) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{rr} - \lambda).$$

Logo os valores próprios de A são os elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$. $\square$

Diagonalização

As matrizes diagonais, para muitos propósitos, são os tipos mais simples de matrizes com as quais podemos trabalhar. No que respeita ao estudo de endomorfismos já vimos que um endomorfismo f de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ pode ser estudado através de qualquer matriz que o represente, mas há vantagem em considerar matrizes diagonais. Nesta secção, determinamos condições sob as quais um endomorfismo pode ser representado por uma matriz diagonal.

Definição

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Diz-se que f é ***diagonalizável*** *se existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal.*

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$. Dado um endomorfismo f de V, é evidente que f é representável por uma matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{bmatrix}$$

se e só se existe uma base $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ de V tal que $f(v_i) = \lambda_i v_i$, para qualquer $i \in \{1, \dots, r\}$, ou seja, se e só se existir uma base de V formada por vetores próprios de f. Podemos, então, estabelecer o resultado seguinte.

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Então f é diagonalizável se e só se existe uma base de $\mathcal{B}'$ de V formada por vetores próprios de f.

Corolário

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Então f é diagonalizável se e só se f tem r vetores próprios linearmente independentes.

Observação: Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Se f é diagonalizável, então, pelo teorema referido na página 70, existe uma base de $\mathcal{B}'$ de V formada por vetores próprios de f. Neste caso, $M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ é uma matriz diagonal e os seus elementos principais são valores próprios de f. Além disso, para qualquer base $\mathcal{B}$ de V, tem-se

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(id_V; \mathcal{B}', \mathcal{B}) M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}') M(id_V; \mathcal{B}', \mathcal{B})^{-1}.$$

Exemplo

Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ *e a base* $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ *de* $\mathbb{R}^3$*, onde* $v_1 = (1, 0, 0)$,$v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. *Seja* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *o endomorfismo definido por*

$$f(v_1) = (0, -2, -1), \quad f(v_2) = (0, 0, -1), \quad f(v_3) = (0, 0, 1).$$

Este endomorfismo é diagonalizável, uma vez que $\mathcal{B}' = ((2, 2, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por vetores próprios de* f*;* $(2, 2, 1)$ *é um vetor próprio de* f *associado ao valor próprio* 0 *e* $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ *são vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* 2. *Logo* $M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \mathrm{diag}(0, 2, 2)$.

Valores e Vetores Próprios

Do teorema enunciado na página 54 resulta uma condição suficiente para que um endomorfismo f seja diagonalizável.

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Se f admite r valores próprios distintos, então f é diagonalizável.

Demonstração.

Suponha-se que f admite r valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ distintos dois a dois. Para $i \in \{1, \ldots, r\}$, seja $v_i \in V$ um vetor próprio de f associado a λ_i. Pelo teorema enunciado na página 54, a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente independente. Logo $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de V, pois $\dim V = r$. Assim, V admite uma base formada por vetores próprios de f e, portanto, f é diagonalizável. $\square$

Seguidamente estudamos mais algumas condições que permitem a caracterização de endomorfismos diagonalizáveis, sendo estas condições estabelecidas com base nas multiplicidades geométricas e algébricas dos valores próprios de um endomorfismo.

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de f, distintos dois a dois. Então f é diagonalizável se e só se $\sum_{i=1}^{p} m.g.(\lambda_i) = r$.

Demonstração.

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de f (distintos dois a dois) e, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, sejam $s_i = \text{m.g.}(\lambda_i)$ e $\mathcal{B}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{is_i})$ uma base de $V_{[f,\lambda_i]}$. Pelo teorema referido na página 54, a sequência

$$\mathcal{B} = (v_{11}, \ldots, v_{1s_1}, \ldots, v_{p1}, \ldots, v_{ps_p})$$

é linearmente independente. Então, se admitirmos que $\sum_{i=1}^{p} \text{m.g.}(\lambda_i) = r$, a sequência $\mathcal{B}$ é uma base de V, pois $\dim V = r$. Logo, pelo teorema estabelecido na página 70, f é diagonalizável.

Reciprocamente, admitamos que f é diagonalizável. Então, pelo teorema referido na página 70, existe uma base de V formada por vetores próprios de f. Por conseguinte, $\sum_{i=1}^{p} \text{m.g.}(\lambda_i) \geq r$. Por outro lado, como para cada $i \in \{1 \ldots p\}$, $\text{m.g.}(\lambda_i) \leq \text{m.a.}(\lambda_i)$ e $\sum_{i=1}^{p} \text{m.a.}(\lambda_i) \leq \text{grau}(p_f) = r$, conclui-se que $\sum_{i=1}^{p} \text{m.g.}(\lambda_i) \leq r$. Logo, $\sum_{i=1}^{p} \text{m.g.}(\lambda_i) = r$. $\square$

Corolário

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de f, distintos dois a dois. Então f é diagonalizável se e só se $\sum_{i=1}^{p} m.a.(\lambda_i) = r$ e, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\text{m.g.}(\lambda_i) = \text{m.a.}(\lambda_i)$.

Demonstração.

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de f, distintos dois a dois.

Admitamos que f é diagonalizável. Então, pelo teorema anterior, segue que $\sum_{i=1}^{p} \text{m.g.}(\lambda_i) = r$. Agora, como $\sum_{i=1}^{p} \text{m.a.}(\lambda_i) \leq \text{grau}(p_f) = r$ e, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, temos $\text{m.g.}(\lambda_i) \leq \text{m.a.}(\lambda_i)$, resulta que $\sum_{i=1}^{p} \text{m.a.}(\lambda_i) = r$ e $\text{m.g.}(\lambda_i) = \text{m.a.}(\lambda_i)$.

Reciprocamente, admitamos que $\sum_{i=1}^{p} \text{m.a.}(\lambda_i) = r$ e que, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\text{m.g.}(\lambda_i) = \text{m.a.}(\lambda_i)$. Então, $\sum_{i=1}^{p} \text{m.g.}(\lambda_i) = r$ e, pelo teorema anterior, f é diagonalizável. $\square$

Considerando que toda a matriz quadrada é matriz de um enfomorfismo de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$, em relação a uma certa base de V, a definição de endomorfismo diagonalizável motiva a definição seguinte.

Definição

Sejam $r \geq 1$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Diz-se que A é ***diagonalizável*** *se A é semelhante a uma matriz diagonal.*

Teorema

Sejam V um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Então f é diagonalizável se e só se A é diagonalizável.

Demonstração.

Atendendo a que matrizes do endomorfismo f em relação a bases diferentes são semelhantes, é imediato que f é diagonalizável se e só se A é diagonalizável. $\square$

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Então A é diagonalizável se e só se existe uma base de $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$ formada por vetores próprios de A.

Demonstração.

Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^r$ e f o endomorfismo de $\mathbb{R}^r$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é A. Então o resultado é imediato pelos teoremas indicados nas páginas 14 e 31 e considerando que uma sequência $(v_1, \ldots, v_r)$ de vetores de V é uma base de V se e só se $([v_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [v_r]_{\mathcal{B}})$ é uma base de $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$. $\square$

Corolário

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Então A é diagonalizável se e só se A tem r vetores próprios linearmente independentes.

Observação: Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Se A é diagonalizável, então existe uma base de $\mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ formada por vetores próprios de A. Se $p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$ são vetores próprios de A, associados aos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respetivamente, e $(p_1, \ldots, p_r)$ é uma base de $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$, tem-se

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix} P^{-1}$$

onde, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, a coluna j de P é p_j.

De facto, se $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de $\mathbb{R}^r$ e f é o endomorfismo de $\mathbb{R}^r$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é A, então f é diagonalizável. Além disso, se, para cada $j \in \{1, \ldots, r\}$, p_j é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ_j, então o vetor $v_j' \in V$, cujo vetor coluna relativamente à base $\mathcal{B}$ é p_j, é um vetor próprio de f associado ao valor próprio λ_j. Assim, sendo $(p_1, \ldots, p_r)$ uma base de $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$ formada por vetores próprios de f associados aos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, a sequência $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_r')$ é uma base de V formada por vetores próprios de f e tem-se

$$A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(id_{\mathbb{R}^r}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}') M(id_{\mathbb{R}^r}; \mathcal{B}', \mathcal{B})^{-1},$$

onde

$$M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix}$$

e $M(id_{\mathbb{R}^r}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$ é uma invertível tal que a coluna j é p_j, $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. Se A admite r valores próprios distintos, então A é diagonalizável.

Demonstração.

Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^r$ e f o endomorfismo de $\mathbb{R}^r$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é A. Como A e f têm os mesmos valores próprios, e A é diagonalizável se e só se f é diagonalizável, do teorema indicado na página 73 obtemos o resultado enunciado. $\square$

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de A, distintos dois a dois. Então A é diagonalizável se e só se $\sum_{i=1}^{p} m.g.(\lambda_i) = r$.

Demonstração.

Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^r$ e f o endomorfismo de $\mathbb{R}^r$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é A. Como A e f têm os mesmos valores próprios, e A é diagonalizável se e só se f é diagonalizável, do Teorema 75 obtemos o resultado enunciado. $\square$

Corolário

Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ os valores próprios de A, distintos dois a dois. Então A é diagonalizável se e só se $\sum_{i=1}^{p} m.a.(\lambda_i) = r$ e, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{m.g.}(\lambda_i) = \mathrm{m.a.}(\lambda_i)$.

Demonstração.

Sejam $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^r$ e f o endomorfismo de $\mathbb{R}^r$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é A. Como A e f têm os mesmos valores próprios, e A é diagonalizável se e só se f é diagonalizável, do Teorema 77 obtemos o resultado enunciado. $\square$

Exemplo

Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 2 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (-1)(x-1)^2(x-3). \end{aligned}$$

Logo o polinómio característico de f decompõe-se em fatores lineares sobre $\mathbb{R}$, e os valores próprios de f são 1 e 3.

Exemplo (continuação).

Como m.a(3)=1, também m.g.(3)=1.

Tem-se m.a.(1)=2 e m.g.(1)=$\dim \mathbb{R}^3_{[f,1]} = 3 - car(A - 1\mathrm{I}_3)$*. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz* $A - 1\mathrm{I}_3$

$$A - \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

concluímos que $car(A - 1\mathrm{I}_3) = 2$*, pelo que m.g.(1)=3-2=1.*

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *e* $\mathrm{m.g.}(1) + \mathrm{m.g.}(3) \neq 3$*, o endomorfismo* f *não é diagonalizável.*

Exemplo

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$ de dimensão 4, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ uma base de V e $f \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} p_f(x) &= \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -x & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-x)\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & -1 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (-x)(-x)\begin{vmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} = x^3(x+2). \end{aligned}$$

Exemplo (continuação).

Logo os valores próprios de f são 0 e -2.

Como m.a.$(-2) = 1$, *também* m.g.$(-2) = 1$.

Tem-se m.a.$(0) = 3$ *e*
m.g.$(0) = \dim V_{[f,0]} = 4 - car(A - 0\mathrm{I}_4) = 4 - car(A)$. *Uma vez que*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

segue que m.g.$(0) = 4 - 1 = 3 =$ m.a.(0).

Então, como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ *e m.g.*$(0) +$ *m.g.*$(-2) = 4$, *f é diagonalizável.*

Exemplo (continuação).

No sentido de determinarmos uma base $\mathcal{B}'$ *de* V *tal que* $M(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ *seja diagonal, comecemos por determinar os subespaços próprios de* f *associados aos valores próprios* 0 *e* -2*.*

Exemplo (continuação).

Calculando o subespaço próprio de f associado ao valor próprio 0, temos

$$\begin{aligned}
V_{[f,0]} &= \{v \in V \mid f(v) = 0 \cdot v\} \\
&= \{v \in V \mid f(v) - 0 \cdot v = 0_{\mathbb{R}^5}\} \\
&= \{v \in V \mid (f - 0id_V)(v) = 0_{\mathbb{R}^5}\} \\
&= \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in V \mid (A - 0I_4) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in V \mid \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_4\} \\
&= \{(\alpha_2 + \alpha_4) v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in V \mid \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha_2(v_1 + v_2) + \alpha_3 v_3 + \alpha_4(v_1 + v_4) \in V \mid \alpha_2, \alpha_3 \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\
&= < v_1 + v_2, v_3, v_1 + v_4 > .
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação).

A sequência de vetores $(v_1 + v_2, v_3, v_1 + v_4)$ *é linearmente independente, pois, para quaisquer* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rl} & \alpha(v_1 + v_2) + \beta v_3 + \gamma(v_1 + v_4) = 0_{\mathbb{R}^5} \\ \Rightarrow & (\alpha + \gamma)v_1 + \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4 = 0_{\mathbb{R}^5} \\ \Rightarrow & \alpha + \gamma = 0 \text{ e } \alpha = 0 \text{ e } \beta = 0 \text{ e } \gamma = 0 \quad \textit{(} (v_1, v_2, v_3, v_4) \textit{ é linearmente independente)} \\ \Rightarrow & \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{array}$$

Assim, $(v_1 + v_2, v_3, v_1 + v_4)$ *é uma base de* $V_{[f,0]}$ *formada por vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* 0.

Exemplo (continuação).

Determinemos o subespaço próprio de f associado ao valor próprio -2.

Tem-se

$$
\begin{aligned}
V_{[f,-2]} &= \{v \in V \mid f(v) = -2 \cdot v\} \\
&= \{v \in V \mid f(v) + 2 \cdot v = 0_{\mathbb{R}^5}\} \\
&= \{v \in V \mid (f + 2id_V)(v) = 0_{\mathbb{R}^5}\} \\
&= \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in V \,\middle|\, (A + 2I_4) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 \in V \mid \alpha_1 = -\alpha_4, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2\alpha_4\} \\
&= \{(-\alpha_4) v_1 + 0 v_2 + 2\alpha_4 v_3 + \alpha_4 v_4 \in V \mid \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\
&= \{\alpha_4(-v_1 + 2v_3 + v_4) \in V \mid \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\
&= < -v_1 + 2v_3 + v_4 > .
\end{aligned}
$$

Exemplo (continuação).

A sequência $(-v_1 + 2v_3 + v_4)$ *é linearmente independente, pois para qualquer* $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(-v_1 + 2v_3 + v_4) = 0_{\mathbb{R}^5} \Rightarrow (-\alpha)v_1 + \alpha v_3 + \alpha v_4 = 0_{\mathbb{R}^5} \Rightarrow \alpha = 0.$$

Logo $(-v_1 + 2v_3 + v_4)$ *é uma base de* $V_{[f,-2]}$ *formada por um vetor próprio de* f *associado ao valor próprio* -2.

Exemplo (continuação).

Por último, verifica-se que a sequência

$$(-v_1 + 2v_3 + v_4, v_1 + v_2, v_3, v_1 + v_4)$$

é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rl} & \alpha(-v_1 + 2v_3 + v_4) + \beta(v_1 + v_2) + \gamma v_3 + \delta(v_1 + v_4) = 0_{\mathbb{R}^5} \\ \Rightarrow & (-\alpha + \beta + \gamma)v_1 + \beta v_2 + (\gamma + 2\alpha)v_3 + (\alpha + \delta)v_4 = 0_{\mathbb{R}^5} \\ \Rightarrow & -\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ e } \beta = 0 \text{ e } \gamma + 2\alpha = 0 \text{ e } \alpha + \delta = 0 \quad \scriptstyle{((v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ é linearmente indep}} \\ \Rightarrow & \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0. \end{array}$$

Então, como $\dim V = 4$*, a sequência anterior é uma base de* V *formada por vetores próprios de* f*; designemos esta base por* $\mathcal{B}'$.

Exemplo (continuação).

Uma vez que $-v_1 + 2v_3 + v_4$ *é um vetor próprio de* f *associado ao valor próprio* -2 *e que* $v_1 + v_2$, v_3, $v_1 + v_4$ *são vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* 0, *tem-se*

$$M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, provámos também que a matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ *é diagonalizável, pois é semelhante à matriz* $M(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$. *Note-se que*

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = PM(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')P^{-1},$$

onde $P = M(id_V; \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Diagonalização de matrizes simétricas e de matrizes hermíticas

Apresentamos seguidamente alguns resultados sobre a diagonalização de matrizes simétricas e de matrizes hermíticas.

Para simplificar a escrita, no texto que se segue identificamos uma matriz $[a_{11}] \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{K})$ com o elemento a_{11}, sempre que nos referimos a operações e afirmações envolvendo o único elemento da matriz.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Então o polinómio característico de A, $p_A(x)$, tem n raízes em $\mathbb{R}$, isto é, A tem n valores próprios (não necessariamente distintos).

Demonstração.

Consideremos A como uma matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Como $p_A(x)$ tem grau n, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, possui n raízes em $\mathbb{C}$, ou seja, a matriz A (enquanto matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) tem n valores próprios em $\mathbb{C}$. Resta mostrar que tais valores próprios são reais.

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um valor próprio de A, e $v \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n\times 1}\}$ tal que $Av = \lambda v$. Multiplicando esta igualdade à esquerda por v^*, obtém-se:

$$v^* A v = \lambda v^* v.$$

Demonstração (continuação).

Note-se que $v^* v = \sum_{i=1}^{n} |v_i|^2 > 0$ é real e positivo para $v \neq 0$. Além disso, como A é real e simétrica, tem-se $A^* = A^T = A$, logo:

$$\overline{v^* A v} = v^* A v,$$

isto é, $v^* A v$ é real. Assim,

$$\lambda = \frac{v^* A v}{v^* v} \in \mathbb{R}.$$

Logo, todo valor próprio de uma matriz real e simétrica é real.

Teorema (Teorema de Schur)

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se A tem n valores próprios (não necessariamente distintos), então existe Q ortogonal tal que $Q^T AQ$ é triangular superior.

Demonstração.

Prova por indução sobre n. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Então A é diagonalizável com uma matriz diagonalizante ortogonal, isto é, existe Q ortogonal tal que $Q^T AQ$ é diagonal.

Demonstração.

Pelo teorema estabelecido na página 101, existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonal tal que $Q^T AQ = W$, onde W é triangular superior. Transpondo ambos os membros, e considerando que $A^T = A$, obtemos $Q^T AQ = W^T$. Logo $W^T = W$. Como W é triangular superior, então W é necessariamente uma matriz diagonal. $\square$

Se A for uma matriz complexa, têm-se resultados similares aos anteriores, sendo as respetivas provas análogas às anteriores.

Teorema (Teorema de Schur para matrizes complexas)

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Então existe Q unitária tal que $Q^T AQ$ é triangular superior.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz hermítica. Então A é diagonalizável com uma matriz diagonalizante unitária, isto é, existe Q unitária tal que $Q^T AQ$ é diagonal.

Propriedades espectrais das matrizes definidas positivas

As matrizes simétricas definidas positivas, bem como as matrizes semidefinidas positivas, podem ser classificadas em função dos seus valores próprios.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *uma matriz simétrica. Então:*

1. *A matriz A é simétrica definida positiva se e só se todos os seus valores próprios são positivos.*
2. *A matriz A é simétrica semidefinida positiva se e só se todos os seus valores próprios são maiores ou iguais a zero.*

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

O resultado anterior também é válido para matrizes hermíticas definidas (resp. semidefinidas) positivas.