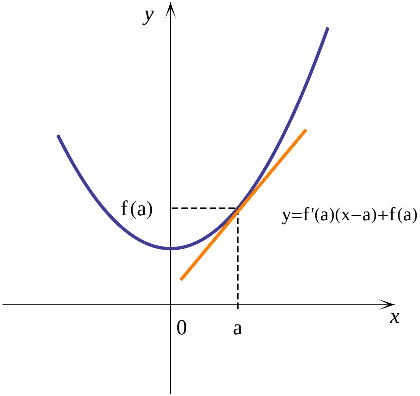
1.3 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

Diferenciablidade ($n = 1$)

Em torno de $x = a$, a curva $y = f(x)$ de uma função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável* confunde-se com a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$, ou seja, é uma curva "suave" ou localmente linearizável, e não apresenta um bico em $x = a$.

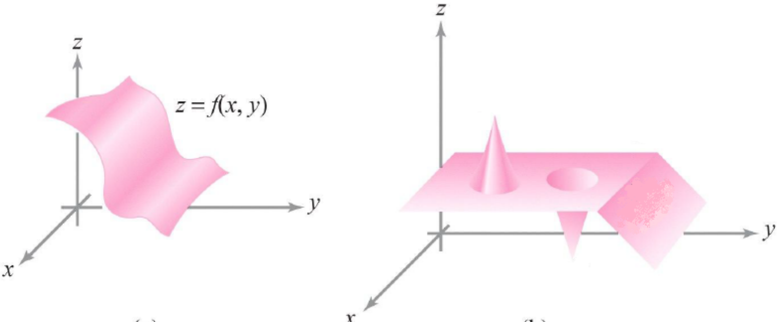
$$f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

- Declive da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$
- Taxa de variação instantânea de $f$em $x = a$



Superfícies suaves

Em torno de $(x, y) = (a, b)$, a superfície $z = f(x, y)$ de uma função $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciável* confunde-se com o *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $\big(a, b, f(a, b)\big)$, ou seja, é uma superfície "suave" que não apresenta bicos.



(a) (b)

Figura 1: (a) Superfície suave (b) Superfície não suave

Derivadas parciais num ponto ($n = 2$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a,b+t) - f(a,b)}{t}$$

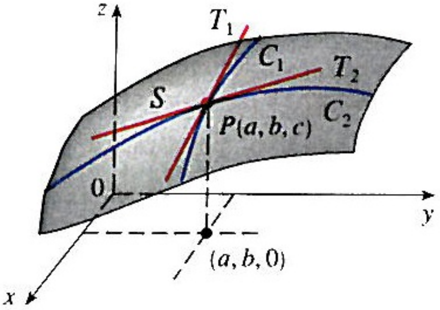


Figura 2: Interpretação geométrica das derivadas parciais

Interpretação geométrica das derivadas parciais ($n = 2$)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ z = f(x, y)$ e

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = f(x, y) \text{ com } (x, y) \in D\}$$

Suponha-se que existem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

- Sejam
  - $\alpha : \ y = b$ o plano paralelo ao plano XZ e que passa em $(a, b, f(a, b)) \in \mathcal{S}$;
  - C_1 a curva definida pela interseção de α e de $\mathcal{S}$

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = b \end{cases} \Longrightarrow z = f(x, b) = \varphi(x);$$

  - $\varphi'(a)$ é o declive da reta tangente a C_1 em $(a, b, f(a, b))$

- Mas

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t}, \qquad \text{pois } \ f(x,b)=\varphi(x)\\ &= \varphi'(a)\end{aligned}$$

- Conclusão
  - $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

    é o declive da reta tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$ à curva C_1 obtida pela intersecção do plano $y = b$ e da superfície $\mathcal{S}$.
  - De modo análogo,

    $$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

    é o declive da reta tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$ à curva C_2 obtida pela interseção do plano $x = a$ e da superfície $\mathcal{S}$.

Exercício

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = 3x^2y + y^2x.$$

(a) *Determine* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ *para cada ponto* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*.*

(b) *Considere o ponto* $P = (a, b, f(a, b)) = (1, 2, 10)$*. Determine a equação da reta tangente no ponto* P *à curva de interseção da superfície* $z = f(x, y)$ *com o plano*

   i) $y = 2$.   ii) $x = 1$.

Solução.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 6ab + b^2$; $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 3a^2 + 2ab$

b.i) $\begin{cases} z = 16(x-1) + 10 \\ y = 2 \end{cases}$; $\quad$ b.ii) $\begin{cases} z = 7(y-2) + 10 \\ x = 1 \end{cases}$

Derivadas parciais ($n = 2$)

Fazendo (a, b) variar, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ tornam-se funções de duas variáveis definidas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}.$$

Podem também ser interpretadas como taxas de variação instantânea de $z = f(x, y)$ com respeito a x e a y, respetivamente.

[Obs:] ∂ lê-se "dê curvo"

Notações para derivadas parciais

Escrevemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_x, \quad f'_x, \quad D_x f, \quad D_1 f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y, \quad f'_y, \quad D_y f, \quad D_2 f$$

Como calcular derivadas parciais?

Exemplo

Sejam $f(x,y) = 2x + y$ *e* $g(x,y) = 2xy$.

- *Para derivar em ordem a* x *"encara-se"* y *como uma constante e deriva-se* $f(x,y)$ *com respeito a* x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x+y) = 2, \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$$

- *Para derivar em ordem a* y *"encara-se"* x *como uma constante e deriva-se* $f(x,y)$ *com respeito a* y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+y) = 1, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$$

Exercício

Determine as derivadas parciais de f *para*

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 1$;

(b) $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$;

(c) $f(x,y) = \cos\left(x^2 + y\right)$.

(d) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$.

Derivadas parciais (caso geral)

Em geral, se f é uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a derivada parcial de f com respeito à variável x_i no ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + t, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{t},$$

$$i = 1, \ldots, n$$

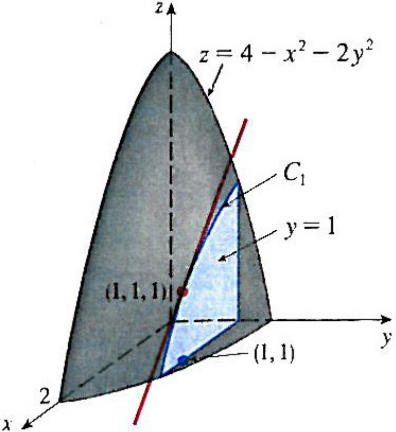
- As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ são funções de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.
- Para a derivada parcial usam-se também as notações
  - $f_{x_k}(\mathbf{a})$,
  - $f'_{x_k}(\mathbf{a})$,
  - $D_{x_k} f(\mathbf{a})$,
  - $D_k f(\mathbf{a})$.
- Diz-se que f é de classe C^1 se todas as derivadas parciais de f existirem e forem contínuas.

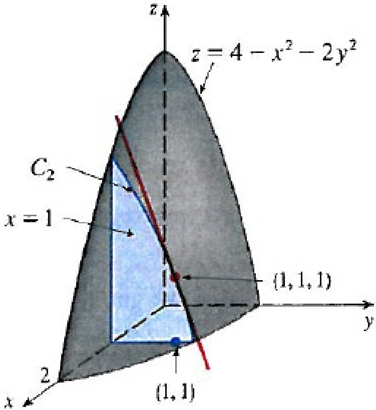
Exercício

Calcule as deriadas parciais de f definida por $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.

Exercício

Para f definida por $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ e interprete estes valores geometricamente.





Resolução.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4 - x^2 - 2y^2) = -2x$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(4 - x^2 - 2y^2) = -4y.$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4.$$

Estes são os declives, respetivamente, das retas tangentes T_1 e T_2 às curvas C_1 e C_2 no ponto $(1,1,f(1,1)) = (1,1,1)$, curvas de interseção dos planos $y = 1$ e $x = 1$ com a superfície $z = f(x,y)$, gráfico de f.

Equações das retas tangentes:

$$T_1 : \begin{cases} z = -2(x-1) + 1 \\ y = 1 \end{cases} ; \qquad T_2 : \begin{cases} z = -4(y-1) + 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Plano tangente

Se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existem, uma equação do plano tangente à superfície S de equação $z = f(x,y)$ no ponto $P = (a,b,f(a,b))$ é dada por

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

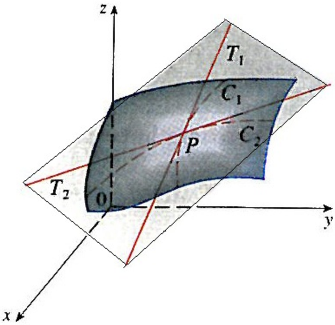


Figura 3: Plano tangente à superfície S em P

Plano tangente

O plano tangente ao gráfico de f em P é definido como o plano que contém as duas retas tangentes T_1 e T_2 e dizemos que é uma linearização de f em torno de (a, b),

$$f(x,y) \approx f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

O plano tangente é o plano que melhor aproxima a superfície S *perto* do ponto P.

As equações das retas tangentes T_1 e T_2 são, respetivamente,

$$\begin{cases} y = b \\ z - f(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = a \\ z - f(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \end{cases}.$$

Exercício

Determine o plano tangente ao parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ *no ponto* $(1, 1, 3)$.

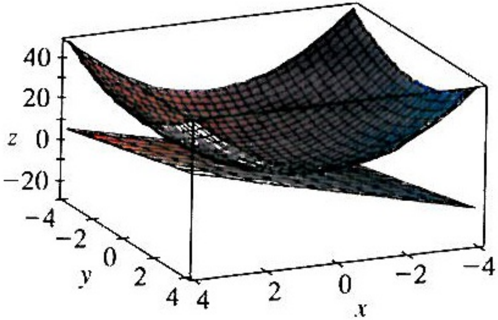


Figura 4: Plano tangente no ponto $(1, 1, 3)$

Solução: $z - 4x - 2y = -3$.

Diferenciais ($n = 1$)

$$dx = \Delta x, \qquad \Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

$$dy = f'(a)dx, \qquad \boxed{\Delta y \approx dy} \qquad (\Delta x \text{ *próximo de zero*})$$

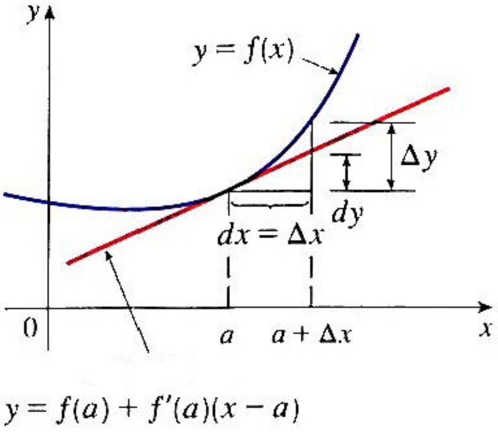


Figura 5: Comparação entre Δy e dy

Diferenciais ($n = 2$)

$$(a, b) \longrightarrow (a + \Delta x, b + \Delta y)$$

$$dx = \Delta x, \qquad dy = \Delta y, \qquad \Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$$

Definimos o *diferencial* dz como sendo

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy.$$

Quando as derivadas parciais são contínuas em (a, b) e Δx e Δy se aproximam de zero,

$$\boxed{\Delta z \approx dz}$$

ou seja,

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \approx dz.$$

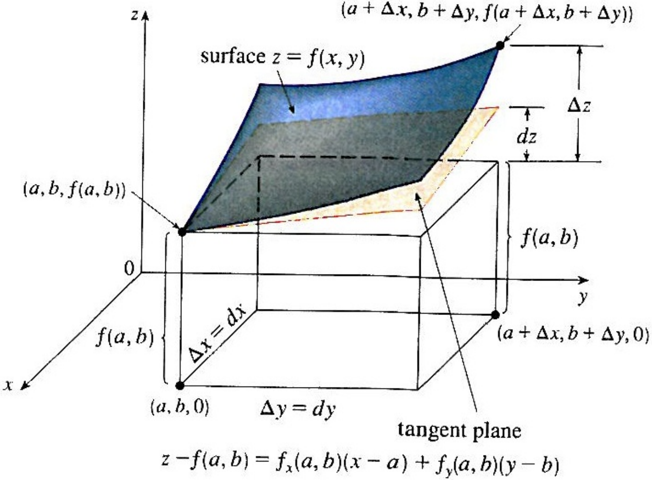


Figura 6: Comparação entre Δz e dz

Exemplo

Sendo $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$,

a) determine o diferencial dz;

b) compare os valores de Δz e dz se x varia de 2 para 2.05 e y de 3 para 2.96.

Resolução.

a) $dz = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$;

Observação: dado (x, y), dz é uma função de dx e dy; em notação completa, escrevemos

$$dz = dz_{(x,y)}(dx, dy).$$

b) $(x, y) = (2, 3)$; $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (2.05, 2.96)$;
$dx = \Delta x = 2.05 - 2 = 0.05$; $\quad dy = \Delta y = 2.96 - 3 = -0.04$;

$dz = (2x + 3y)|_{(2,3)} \times 0.05 + (3x - 2y)|_{(2,3)} \times (-0.04) = 0.65$;

$\Delta z = f(2.05, 2.96) - f(2, 3) = 0.6449 \simeq dz$.

Exemplo

Mediu-se um cone circular e obteve-se $10cm$ para a medida do raio da base e $25cm$ para a medida da altura, com possível erro de $0.1cm$ em cada uma das medidas. Use diferenciais para estimar o erro máximo ao calcular o volume do cone.

- O volume de um cone é dado por $V(x,y) = \dfrac{1}{3}\pi x^2 y$,
  onde x e y representam o raio da base e a altura do cone, respetivamente.
- Queremos $|\Delta V| = |V(10+\Delta x, 25+\Delta y) - V(10,25)|$ sabendo que $|\Delta x| \leq 0.1$ e $|\Delta y| \leq 0.1$.
- Temos
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}\pi xy \qquad\qquad \frac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2$$
- Logo, usando diferenciais (fórmula da propagação dos erros), vem
$$|\Delta V| \approx |dV| = \left|\frac{\partial V}{\partial x}(10,25)\cdot\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(10,25)\cdot\Delta y\right| \leq 62.83cm^3.$$

Função diferenciável

Definição

Se $z = f(x, y)$, *então* f *é diferenciável no ponto* (a, b) *desde que* $\Delta z = f(x, y) - f(a, b) = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ *se possa expressar na forma*

$$\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$
$$\Delta x = x - a, \quad \Delta y = y - b$$

onde $\varepsilon_1 \longrightarrow 0$ *e* $\varepsilon_2 \longrightarrow 0$ *quando* $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0, 0)$.

Por outras palavras, o diferencial $dz = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y$ é uma boa aproximação para o acréscimo Δz, ou ainda, a função linear

$$l(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

é uma boa aproximação para a função f perto do ponto (a, b).

Diferenciais e diferenciabilidade podem ser definidos de forma análoga para funções com mais do que duas variáveis.

Por exemplo, se $w = f(x, y, z)$ então o acréscimo Δw é dado por

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

e o diferencial dw é definido em termos dos diferenciais $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ e $dz = \Delta z$ das variáveis independentes por

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz.$$

- Se f é diferenciável, então f é contínua.
- Se f tem derivadas parciais contínuas, então f é diferenciável.

Exercício

Mostre, usando a definição, que

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

é diferenciável em qualquer ponto (a, b) do seu domńio.

Resolução.

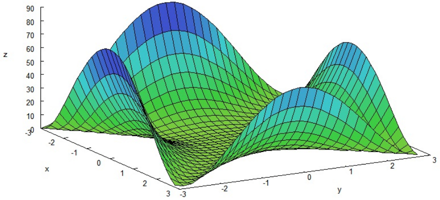
Temos

$$\begin{aligned} f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) &= (a + \Delta x)^2 + (b + \Delta y)^2 - f(a, b) \\ &= 2a\Delta x + 2b\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= f_x(a, b) \cdot \Delta x + f_y(a, b) \cdot \Delta y + \Delta x \cdot \Delta x + \Delta y \cdot \Delta y \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon_1 = \Delta x$ e $\varepsilon_2 = \Delta y$, temos que $\varepsilon_1 \longrightarrow 0$ e $\varepsilon_2 \longrightarrow 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \longrightarrow (0, 0)$.

Logo, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo



A função

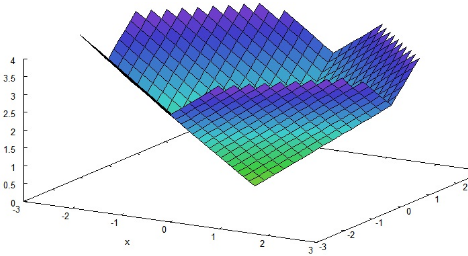
$$g(x,y) = (x^2 - y^2)^2$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

A função

$$f(x,y) = |x| + |y|$$

não é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.



Derivadas parciais de ordem superior

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

- Se a função
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
admitir derivada em ordem a x_k no ponto $\mathbf{a} \in D$ a essa derivada chama-se derivada parcial de 2.ª ordem de f em ordem a x_i e x_k no ponto $\mathbf{a}$ e denota-se por
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{a})$$

Notação

- Para as derivadas de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{a}) \qquad \text{ou} \quad f''_{x_i x_k}(\mathbf{a}) \qquad \text{ou} \quad f_{x_i x_k}(\mathbf{a})$$

  - Se $i = k$ escreve-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{a});$$

  - Se $i \neq k$, a derivada

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{a})$$

    diz-se derivada cruzada ou derivada mista.

Exemplo ($n = 2$)

- Segunda derivada parcial de f em ordem a x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f''_{xx}$$

- Segunda derivada parcial de f em ordem a y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f''_{yy}$$

- Derivadas mistas de f

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = f''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = f''_{yx}$$

Nota

Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ quantas são as derivadas de 2.ª ordem de f?

- [Teorema de Schwarz]

  Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que existem, em todos os pontos de D, as derivadas parciais

  $$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}.$$

  Se as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$ são contínuas em D então também existe a derivada parcial

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

  em todos os pontos de D e tem-se, para todo o $\mathbf{x} \in D$

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Exercício

Calcular as derivadas parciais de 2.ª ordem da função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Solução:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x.$$

Regra da cadeia

Em muitas situações colocadas por problemas diversos, quando estamos a trabalhar com uma função de n variáveis reais, frequentemente algumas destas variáveis dependem de outras, ditas variáveis independentes, pelo que faz sentido derivar a função em ordem a tais variáveis.

Para funções de mais do que uma variável, a Regra da cadeia tem várias versões, cada uma dando lugar a uma regra para derivar uma função composta.

Regra da cadeia

- Se $z = f(x, y)$ mas $x = g(t)$ e $y = h(t)$ então
$$z = f\big(g(t), h(t)\big) = z(t),$$
isto é, z é uma função composta.

- Faz, então, sentido pensar na variação de z com t, isto é, $\dfrac{dz}{dt}$.

- Tem-se
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

- E no caso geral? Se $x = g(t_1, \ldots, t_m)$ e $y = h(t_1, \ldots, t_m)$?

Regra da cadeia

Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, conjuntos abertos. Se as funções

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x_1, \ldots, x_n : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

são diferenciáveis, então para a função composta z dada por

$$z(t_1, \ldots, t_m) = f(x_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_m))$$

tem-se, para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}.$$

Ou seja, a derivada parcial de uma função composta com várias variáveis intermédias é uma soma de produtos.

Nota: Quando $m = 1$, ou seja, quando as funções x_i são funções de apenas uma variável, escrevemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Caso particular: funções de uma variável

Se $z = f(x)$ e $x = g(t)$, onde f e g são funções diferenciáveis, então z é indiretamente uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Em notação mais familiar, realizada a composição, temos $z(t) = (f \circ g)(t) = f(g(t))$ e

$$z'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t),$$

ou seja,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx}(g(t)) \cdot \frac{dg}{dt}.$$

Simplificamos, escrevendo

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dt} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Exercício

Seja

$$z(x,y) = x \operatorname{sen} y.$$

1. Calcular
$$\frac{dz}{dt}$$
quando $x = t^2$ e $y = 2t + 1$.

2. Calcular
$$\frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial s}$$
quando $x = t^2 + \cos s$ e $y = 2t + 1 + e^{-s}$.

Resolução.

1. Caso particular em que $n = 2$ e $m = 1$ (no resultado da pg.33). Se realizarmos a composição das funções, obtemos

$$z(t) = z(x, y) = z(x(t), y(t)) = t^2 \operatorname{sen}(2t),$$

ou seja, uma função de uma única variável.

Sem usar a regra da cadeia, tem-se

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = 2t \operatorname{sen}(2t) + 2t^2 \cos(2t).$$

Usando a regra da cadeia, vem

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \operatorname{sen} y \cdot 2t + x \cos y \cdot 2 \\ &= 2t \operatorname{sen} y + 2x \cos y. \end{aligned}$$

Substituindo nesta expressão $x = t^2$ e $y = 2t+1$, obtemos, com não podería deixar de ser, o mesmo resultado que anteriormente.

Resolução. (cont.)

2. Caso particular em que $n = 2$ e $m = 2$ (no resultado da pg.33). Quando fazemos a substituição temos $z = z(t, s)$.

   Usando a regra da cadeia, vem

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \operatorname{sen} y \cdot 2t + x \cos y \cdot 2 \\ &= 2t \operatorname{sen} y + 2x \cos y\end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{ds} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= \operatorname{sen} y \cdot (-\operatorname{sen} s) + x \cos y \cdot (-e^{-s}) \\ &= -\operatorname{sen} y \operatorname{sen} s - xe^{-s} \cos y\end{aligned}$$

   e podemos deixar ficar a expressão nesta forma, sem fazer as substituições $x = t^2 + \cos s$ e $y = 2t + 1 + e^{-s}$.

Diagrama em árvore

Para lembrar a regra da cadeia é útil desenhar um diagrama em árvore que traduza a dependência das variáveis.

Por exemplo, para o caso 2 do exercício na página 35, existem três tipos de variáveis: s e t, que são **variáveis independentes**; x e y, chamadas **variáveis intermédias**; e z, que é a variável **dependente**.

Desenhamos os ramos da árvore saindo da variável dependente z para as variáveis intermédias x e y a fim de indicar que z é uma função de x e y. E desenhamos os ramos saindo de x e y para as variáveis independentes s e t.

Para determinar, por exemplo, $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ determinamos o produto das derivadas parciais ao longo de cada caminho de z a s e somamos esses produtos.

Da mesma forma, para determinar $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ usamos os caminhos de z a t.

Diagrama em árvore

$$z = z(x, y), \qquad x = x(s, t), \qquad y = y(s, t)$$

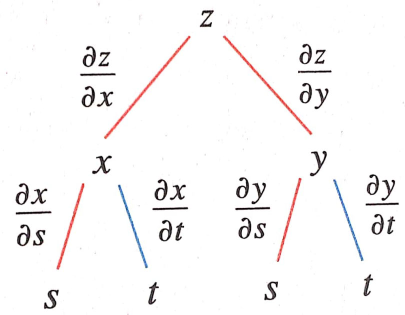


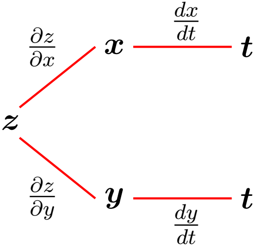
Figura 7: Regra da Cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Diagrama em árvore

Para o caso 1 do exercício na página 35, existe apenas uma variável independente, a variável t, duas **variáveis intermédias**, x e y, e a variável **dependente**, z.

$$z = z(x, y), \qquad x = x(t), \qquad y = y(t)$$



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Derivação implícita (caso de 2 variáveis)

Vamos considerar primeiro os casos de equações com duas e três variáveis.

Certas equações em x e y, tais como,

$$x^2y^3 - 6 = 5y^2 + x \qquad \text{ou} \qquad x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$$

não se podem resolver explicitamente para y em função de x, ou sendo possível, é muito difícil fazê-lo.

Por vezes, uma tal equação pode ser usada para definir implicitamente uma ou mais funções, impondo restrições nas variáveis. Por exemplo, a equação $x^2 + y^2 = 16$ define implicitamente duas funções,

$$y = \sqrt{16 - x^2}, \text{ para } y \geq 0, \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{16 - x^2}, \text{ para } y < 0.$$

No caso de equações em que não é fácil explicitar y como função de x, a derivada $\frac{dy}{dx}(x) = y'(x)$ pode obter-se usando um método chamado de derivação implícita.

Este método consiste em derivar ambos os membros da equação com respeito a x, sem esquecer que y é uma função de x, usando a regra da cadeia, e em resolver depois algebricamente em ordem a $\frac{dy}{dx}$.

Exemplo

Considere que $y = f(x)$ é uma função diferenciável que satisfaz a equação

$$x^2 y + y^2 = x^3$$

e que se pretende calcular $\frac{dy}{dx}$.

Exemplo

Derivando ambos os membros da equação com respeito a x, vem

$$\frac{d}{dx}(x^2y + y^2) = \frac{d}{dx}(x^3),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^3). \tag{1}$$

Derivando termo a termo, sem esquecer que $y = f(x)$, temos

$$\frac{d}{dx}(x^2y) = 2xy + x^2\frac{dy}{dx} \qquad \text{[regra do produto e regra da potência]}$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = 2y\frac{dy}{dx} \qquad \text{[regra da potência]}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \qquad \text{[regra da potência]}$$

Assim, substituindo em (1), obtemos

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Exemplo

A equação anterior é equivalente a

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 2y) = 3x^2 - 2xy$$

e, por último,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y}, \quad \text{desde que } x^2 + 2y \neq 0.$$

Observação: se, a partir da equação inicial $x^2y + y^2 = x^3$, definirmos a função $F(x, y) = x^2y + y^2 - x^3$, de forma que a equação equivale a $F(x, y) = 0$, temos

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y}.} \tag{2}$$

Esta fórmula permite-nos obter $\frac{dy}{dx}$ sem resolver a equação $F(x, y) = 0$ em ordem a y.

Derivação implícita (caso de 2 variáveis)

Para derivar uma equação da forma $F(x,y)=0$ assumimos que a equação define y implicitamente como uma função diferenciável de x, ou seja, $y=f(x)$, onde $F\big(x,f(x)\big)=0$ para todo o x no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos aplicar a regra da cadeia para derivar ambos os membros da equação com respeito a x. Como x e y são ambas funções de x, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0.$$

No entanto, $\dfrac{dx}{dx}=1$ e, se $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$, resolvendo em ordem a $\dfrac{dy}{dx}$, obtemos (2).

Podemos estabelecer (**Teorema da função implícita**) que se F está definida numa bola aberta contendo (a,b), onde $F(a,b)=0$, $F_y(a,b)\neq 0$ e F_x e F_y são funções contínuas nessa bola, então a equação $F(x,y)=0$ define y como uma função de x perto do ponto (a,b) e, sendo assim, a derivada dessa função é dada por (2).

Exemplo

Consideremos de novo a equação

$$x^2 + y^2 = 16$$

que define implicitamente y como função de x (duas funções):

1. $y = \sqrt{16 - x^2}$, para $y \geq 0$, com derivada

$$\begin{aligned} y\prime = \frac{dy}{dx} &= \left(\sqrt{16 - x^2}\right)' = \left((16 - x^2)^{1/2}\right)' \\ &= \frac{1}{2}(-2x)(16 - x^2)^{-1/2} \\ &= \frac{-x}{(16 - x^2)^{1/2}} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}, \quad x \neq \pm 4. \end{aligned} \tag{3}$$

2. $y = -\sqrt{16 - x^2}$, para $y < 0$, com derivada

$$y\prime = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} \quad x \neq \pm 4. \tag{4}$$

Exemplo (cont.)

Usando o Terema da função implícita para a equação

$$x^2 + y^2 = 16 \iff x^2 + y^2 - 16 = 0,$$

obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^2 + y^2 - 16)'_x}{(x^2 + y^2 - 16)'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Para o caso 1, se nesta expressão fizermos $y = \sqrt{16 - x^2}$, obtemos (3), e se fizermos $y = -\sqrt{16 - x^2}$ obtemos (4). Temos, assim, uma expressão para a derivada de y em função de x e y, sem que y esteja definido explicitamente.

Exemplo (cont.)

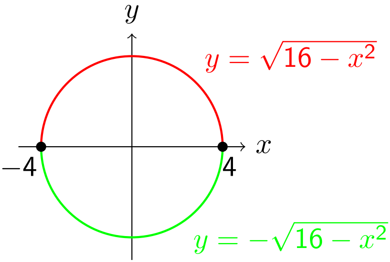


Figura 8: $x^2 + y^2 = 16$

A equação $x^2 + y^2 = 16$ não define y como função de x perto dos pontos $(-4, 0)$ e $(4, 0)$.

Derivação implícita (caso de 3 variáveis)

Suponhamos agora que z é definido implicitamente como uma função diferenciável das variáveis x e y por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isto significa que $z = f(x, y)$ e $F\big(x, y, f(x, y)\big) = 0$ para todo o (x, y) no domínio de f. Se F é diferenciável, podemos usar a regra da cadeia para derivar parcialmente a equação $F(x, y, z) = 0$ em ordem a x como segue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Uma vez que

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

se, $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, resolvendo em ordem a $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ obtemos

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}.}$$

Derivação implícita (caso de 3 variáveis)

A fórmula para $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ é obtida de modo semelhante:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}.}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da função implícita** dá-nos as condições sob as quais a hipótese de que $z = f(x, y)$ é válida. Se F é definida dentro de uma bola aberta contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro dessa bola, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto de (a, b, c) e as derivadas parciais dessa função são dadas pelas fórmulas apresentadas acima.

Derivação implícita (caso geral)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ com $D = U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto.

- Dizemos que a equação

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$$

define y implicitamente como função das n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ se existe uma função

$$\begin{array}{rccc} f : & U \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

tal que para todo o $(x_1, \ldots, x_n, y) \in D$

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \iff y = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Derivação implícita (caso geral)

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto e $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável.
Se a equação

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$$

define uma função implícita diferenciável

$$y = f(x_1, \ldots, x_n)$$

então, para $i = 1, \ldots, n$ tem-se

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, y)}$$

desde que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0$.

Casos particulares

– $F(x, y) = 0$

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

– $F(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$$

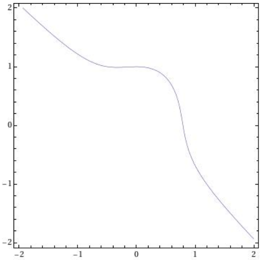
Exercício

Calcular

$$\frac{dy}{dx}$$

quando y é definido implicitamente por

$$2x^3 + x^2y + y^3 = 1.$$



Resolução.

Considere-se a função F definida por $F(x, y) = 2x^3 + x^2y + y^3 - 1$.

Temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{6x^2 + 2xy}{x^2 + 3y^2}, \text{ para } (x, y) \neq (0, 0).$$

Exercício

Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ quando z é definido implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1.$$

Resolução.

Seja F definida por $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy},$$

desde que $z^2 + 2xy \neq 0$.