Tópicos de Matemática - 1^o ano

exame - época especial jul'16

1. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Sejam p, q e r proposições. Se as proposições $\sim p \Rightarrow q$, $\sim p \vee (\sim q \Rightarrow r)$ e $\sim q$ são verdadeiras, então, a proposição r é verdadeira.

   (b) Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em A. Se $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} \cap [c]_{\mathcal{R}} = \emptyset$ então, $\mathcal{R}$ é a relação identidade.

   (c) Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e X um subconjunto não vazio de A. Se X admite mínimo, então, $A \backslash X$ admite máximo.

   (d) Seja A um conjunto numerável. Então, $A \sim A \times \mathbb{N}$.

2. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

   (a) conjuntos A e B tais que $A \subseteq B$ e $A \in B$;

   (b) uma família de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0, 2]$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{1\}$;

   (c) Uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3\}$ com exatamente 6 elementos;

   (d) Uma função $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ injetiva.

3. Usando indução matemática, prove que:

   (a) $2^n > n$, para todo $n \geq 2$;

   (b) para todo natural n, $n(n^2 + 5)$ é múltiplo de 6.

4. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $f : A \to B$ a aplicação definida por $f(1) = f(2) = a$ e $f(3) = b$. Considere $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ definida por

$$F(X) = \{f(x) : x \in X\} \qquad \text{para todo } X \in \mathcal{P}(A).$$

   (a) Determine:

      i. $F(\{1, 3\})$;

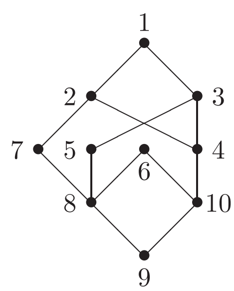
      ii. $F^{-1}(\{a\})$.

   (b) Mostre que F é sobrejetiva.

   (c) Será F injetiva? Justifique.

   (d) Considere, em $\mathcal{P}(A)$, a relação de equivalência igualdade de imagem $\mathcal{R}_F$. Determine $[\{1, 2\}]_{\mathcal{R}_F}$.

5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:



   Indique, caso exista:

   (a) Maj $\{2, 4, 5, 7\}$;

   (b) $\sup \emptyset$;

   (c) $\inf \emptyset$;

   (d) um elemento x de A tal que $\{3, 5, 9, x\}$ seja um reticulado para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. A.

Cotação: **1.** 4×1.0 **2.** 4×1.0 **3.** 2×1.5 **4.** 5×1.0 **5.** 4×1.0