Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação

Departamento de Matemática

Análise

—— prova escrita 1 — duas horas —————————— 2022'23 ——

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (2 valores) Considere o conjunto A definido por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ ou } x < 0\}.$$

   (a) Faça um esboço do conjunto A;

   (b) Identifique o interior, o derivado e a fronteira do conjunto A.

2. (3 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$;

   (b) Determine e identifique a curva de nível 1 da função f;

   (c) A função f é derivável em $(0, 0)$? Justifique.

3. (5 valores) Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = xy^3 + \ln(x - 1).$$

   (a) Identifique o domínio da função f;

   (b) Calcule as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

   (c) Justifique que f é derivável em $(2, -1)$;

   (d) Determine $f'(2, -1)$;

   (e) Justifique que a recta tangente à curva de nível -2 da função f no ponto $(2, -1)$ é horizontal.

4. (4 valores) Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$zx^3y + z^3\ln(x) + \mathrm{e}^{xz-2} - y^2 = 1. \tag{1}$$

   (a) Determine uma equação do plano tangente à superfície, definida pela equação (1), no ponto $(1, 2, 2)$;

   (b) Mostre que a equação (1) define z como uma função de (x, y) para pontos "próximos" de $(1, 2, 2)$;

   (c) Determine $z'(1, 2)$, sendo $z(x, y)$ a função implícita cuja existência foi provada no exercício anterior;

   (d) Determine a derivada direcional de z no ponto $(1, 2)$ e na direção e sentido do vector $\vec{u} = (-1, -2)$.

5. (2 valores) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funções deriváveis tais que

$$f(x, y) = (\mathrm{e}^{xy}, x + y, x^2y) \qquad \text{e} \qquad Jg(1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $Jf(0, 1)$;

   (b) Determine $J(g \circ f)(0, 1)$.

Fim