Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação - 1º ano

teste global - 18 dez 2015 Duração: 2 horas

1. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Sejam p, q e r proposições. Se as proposições $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ e $\sim q$ são verdadeiras, então, a proposição r é verdadeira.

   (b) Sejam A e B conjuntos disjuntos. Então, $R = \omega_A \cup \omega_B$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$.

   (c) Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. Se existe ínfimo de $\emptyset$ em A então A admite um elemento maximal.

   (d) Sejam A, B e C conjuntos. Então, se $A \cup C \sim B \cup C$ então $A \sim B$.

2. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

   (a) um conjunto A tal que $\emptyset \in A$ e $\emptyset \subseteq A$;

   (b) uma família de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$;

   (c) Uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $(1, 3), (1, 4) \in \mathcal{R}$ e $[4]_{\mathcal{R}} = \{1, 4\}$;

   (d) Uma função $f : \{1, 2\} \to \mathcal{P}(\{1, 2\})$ sobrejetiva.

3. Usando indução matemática, prove que, para todo o natural n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

4. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, definida por $f(m, n) = (mn, m^2)$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

   (a) Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x| = |y| = 1\}$, determine $f(A)$.

   (b) Se $B = \{0, 2\} \times \{2, 0\}$, determine $f^{\leftarrow}(B)$.

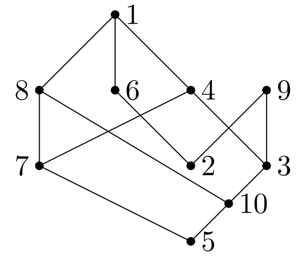
   (c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou é injetiva.

   (d) Considere a relação de equivalência associada à igualdade de imagem por f, definida por

   $$(x, y)\ \mathcal{R}_f\ (a, b) \Leftrightarrow f(x, y) = f(a, b).$$

   Determine $[(2, 0)]_{\mathcal{R}_f}$ e $[(0, 2)]_{\mathcal{R}_f}$.

5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:



   (a) Indique, caso exista:

      i. Maj $\{7, 10\}$;

      ii. $\sup \emptyset$;

      iii. um subconjunto de A com 5 elementos que admita máximo e mínimo.

   (b) Será $(A, \leq)$ um reticulado? Justifique.

Cotação: **1.** 4 × 1.0 **2.** 4 × 1.0 **3.** 1.5 **4.** 3 × 1.5 + 2.0 **5.** 4 × 1.0