

**Nome:** \_\_\_\_\_ **Nº** \_\_\_\_\_ **Curso:** \_\_\_\_\_

*Justifique todas as respostas, indique os cálculos intermédios e funções do R que utilizar.  
As questões 1 e 2 valem 60% da nota do exame. As questões 3 e 4 valem os restantes 40%.  
Duração: 2h30m.*

1. Seja  $X$  uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ k & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x < 1 \vee x > 3 \end{cases},$$

em que  $k$  é uma constante real.

- (a) Mostre que  $k = \frac{3}{4}$  e determine a função de distribuição de  $X$ .
  - (b) Averigue se existem e, em caso afirmativo, calcule  $E[X]$  e  $Var[X]$ .
  - (c) Seja  $Y$  uma v.a.r. tal que  $X$  e  $Y$  são i.i.d.'s. Calcule  $P(X \geq Y)$ .
  - (d) Suponha agora que  $X$  é uma v.a.r. que representa o tempo, em horas, que um atleta demora a efetuar uma certa prova desportiva.
    - i. Qual a probabilidade de um atleta demorar pelo menos 1h30m a efectuar a prova? Justifique.
    - ii. Calcule a probabilidade de, numa amostra aleatória de 5 atletas, haver pelo menos 3 atletas que demoram pelo menos 1h30m a efectuar a prova.
2. O Sr. José afirma que o número de defeitos num objecto por ele fabricado é uma v.a.r.  $Z$  tal que  $Z \sim Poisson(3)$ .
- (a) Qual probabilidade de um objecto fabricado pelo Sr. José ter mais do que 2 defeitos? Justifique.
  - (b) Sabendo que um objecto fabricado pelo Sr. José tem pelo menos um defeito, qual a probabilidade de ter mais do que 2 defeitos? Justifique.
  - (c) Qual a probabilidade de, entre 10 objectos fabricados pelo Sr. José, haver 8 objectos com mais do que 2 defeitos e haver 1 objecto sem qualquer defeito? Justifique.
  - (d) Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 50 objectos fabricados pelo Sr. José, a média do número de defeitos ser superior a 3.5? Justifique.
  - (e) O Sr. José aceita a devolução de um objecto por ele fabricado se o número de defeitos for superior a um certo valor  $k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ . Qual é o menor valor de  $k$  que o Sr. José pode indicar de modo a que a probabilidade de um cliente devolver um objecto seja, no máximo, de 0.05? Justifique.
  - (f) Determine os quartis de  $Z$ .

**Observação:** Nas alíneas (c) e (d), assuma que o número de defeitos nos vários objectos são v.a.r.'s independentes.

(v.s.f.f.)

3. Numa certa população, 30% dos indivíduos possuem uma certa doença e os restantes são saudáveis. Dos que têm a doença, 40% possuem a forma contagiosa. Escolheu-se ao acaso um indivíduo nesta população.
- Mostre que a probabilidade de o indivíduo escolhido ter a doença na forma não contagiosa é igual a 0.18.
  - Um teste clínico para detectar a doença dá positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em todos os casos contagiosos, em 50% dos casos doentes não contagiosos e em 10% dos casos saudáveis. Suponha que o indivíduo escolhido vai ser submetido a este teste clínico.
    - Qual a probabilidade de o teste clínico dar negativo? Justifique.
    - Se o teste clínico der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser saudável? Justifique.
    - Diga, justificando, se os seguintes acontecimentos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , são independentes:
- A: "indivíduo escolhido é doente",  
 B: "o teste clínico deu resultado positivo",  
 C: "indivíduo escolhido tem a doença na forma contagiosa".
4. Sejam  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  um espaço de probabilidade,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma v.a.r. e  $F$  a função de distribuição de  $X$ .

- (a) Mostre que, se  $B \in \mathcal{A}$  é tal que  $P(B) > 0$ , então a função  $P_B : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ , definida por

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

é uma medida de probabilidade sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

- (b) Mostre que

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} F(c) = 0.$$

- (c) Considere  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$h(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \leq 0 \\ 2 & \text{se } a > 0 \end{cases}.$$

Prove que  $h(X)$  é v.a.r. e determine, em função de  $F$ , a função de distribuição de  $h(X)$ .