Geometria
LMat & LCC

Época especial
22/07/2019

Proposta de resolução

1.

a. A reta r está dirigida pelo vetor $\vec{AB} = B - A = (1,2,3) - (1,-1,0) = (0,3,3)$ e portanto também está dirigida pelo vetor $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{AB} = (0,1,1)$.
Sendo π o plano perpendicular a r incidente no ponto $P = (1,1,2)$ então π tem equação cartesiana $0(x-1) + 1(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow y + z = 3$.

b. Sendo σ o plano de equação cartesiana $-x+z-1=0$ então $\vec{n} = (-1,0,1)$ é vetor normal a σ. Sendo s a reta perpendicular a σ incidente no ponto $Q = (2,0,-1)$, s tem equação vetorial $s = (2,0,-1) + \langle(-1,0,1)\rangle$.
Logo as equações paramétricas de s podem ser dadas pelo sistema

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2. $r = A + \langle \vec{v} \rangle = (0,0,-1) + \langle (0,1,0) \rangle$, $s = B + \langle \vec{w} \rangle = (1,1,-1) + \langle (0,1,1) \rangle$

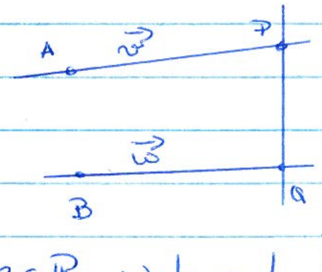
a. Para mostrar que r e s são enviesadas vemos que $\dim(r+s) = 3$

$r + s = A + \langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = (0,0,-1) + \langle (1,1,0), (0,1,0), (0,1,1) \rangle$

$$\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Logo $\dim(r+s) = 3$ e r e s são enviesadas.

b. Seja t a perpendicular comum a r e s.



Sejam P e Q os pés de t em r e s, respetivamente. Temos:

$\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QB}$

Note-se que $\vec{AP} = \alpha \vec{v}$, $\vec{QB} = \beta \vec{w}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Note-se também que $\vec{PQ} \perp \vec{v}$ e $\vec{PQ} \perp \vec{w}$.

Temos então:
$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{v} = (\vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QB}) \cdot \vec{v} \\ \vec{AB} \cdot \vec{w} = (\vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QB}) \cdot \vec{w} \end{cases} = \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{v} = \alpha\, \vec{v} \cdot \vec{v} + \beta\, \vec{w} \cdot \vec{v} \\ \vec{AB} \cdot \vec{w} = \alpha\, \vec{v} \cdot \vec{w} + \beta\, \vec{w} \cdot \vec{w} \end{cases}$$

$\vec{AB} = (1,1,0)$ $\quad \vec{AB} \cdot \vec{v} = 1$ $\quad \vec{AB} \cdot \vec{w} = 1$

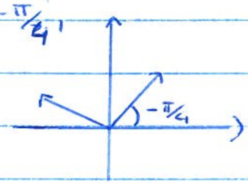
$\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$ $\quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 1$ $\quad \vec{w} \cdot \vec{w} = 2$

Logo: $\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = \alpha + 2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Assim: $P = A + \alpha \vec{v} = (0,0,-1) + (0,1,0) = (0,1,-1)$

$Q = B - \beta \vec{w} = B = (1,1,-1)$

3. Seja f o redimensionamento de parâmetros 1 e 2 centrado na origem nas direcções principais. Sejam $\rho_{\pi/4}$, $\rho_{-\pi/4}$ as Rotações centradas na origem e de ângulos $\pi/4$ e $-\pi/4$, respetivamente.



Sendo g a transformação pretendida, temos $g = \rho_{\frac{\pi}{4}} \circ f \circ \rho_{-\frac{\pi}{4}}$.

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

4. $\pi: x + y + z = 1$

a. Sendo π o plano apresentado temos que $\vec{n} = (1,1,1)$ é um vetor normal a π e $A = (1,0,0)$ é um ponto de π.

A simetria paralela no plano π segundo o vetor $\vec{v}$ é dada por

$$\rho(M) = M - 2 \frac{\vec{AM} \cdot \vec{n}}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \vec{v}$$

Em coordenadas, vem:

$$\rho(x,y,z) = (x,y,z) - \cancel{2} \frac{(x-1+y+z)}{\cancel{2}} (1,0,1) =$$

$$= (x,y,z) - (x+y+z-1,\ 0,\ x+y+z-1) =$$

$$= (1-y-z,\ y,\ 1-x-z)$$

b. Basta exibir dois pontos A e B tais que $d(A,B) \neq d(\rho(A), \rho(B))$

Consideramos: $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,0)$

Temos $d(A,B) = 1$, $\rho(A) = (1,0,1)$, $\rho(B) = (0,1,1)$

$d(\rho(A), \rho(B)) = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

5

a A rotação ρ de ângulo θ em torno do eixo dirigido por $\vec{u}$ (vetor unitário) e que incide na origem é dada por:

$$\rho(M) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + \cos\theta\left(\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u}\right) + \sin\theta\,(\vec{u}\wedge\vec{OM})$$

No caso do exercício $\theta = \pi/2$ e $\cos\theta = 0$, $\operatorname{sen}\theta = 1$.

$$\rho(M) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + \vec{u}\wedge\vec{OM}, \quad \text{com } \vec{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

$$(\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, 0\right)$$

$$\vec{u}\wedge\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}z, -\frac{1}{\sqrt{2}}z, \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$$

Logo: $\rho(x,y,z) = \left(\dfrac{x+y+\sqrt{2}z}{2}, \dfrac{x+y-\sqrt{2}z}{2}, \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$

b Seja ρ_Ω a rotação de ângulo $\pi/2$ em torno do eixo dirigido por $\vec{u}$ e que incide no ponto Ω.

Temos que $\rho_\Omega = t_{\vec{O\Omega}} \circ \rho \circ t_{-\vec{O\Omega}}$

Portanto

$$\rho(x,y,z) = (0,0,1) + \rho(x,y,z-1) =$$
$$= \left(\frac{x+y+\sqrt{2}(z-1)}{2}, \frac{x+y-\sqrt{2}(z-1)}{2}, \frac{x+y}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

c Sejam $r = A + \langle\vec{v}\rangle$ e $s = B + \langle\vec{v}\rangle$ duas retas paralelas. Como $P_1, P_2 \in r$ então $P_1 = A + \lambda_1\vec{v}$ e $P_2 = A + \lambda_2\vec{v}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Usando a fórmula da projeção ortogonal em retas

$$Q_1 = B + (\vec{BP_1}\cdot\vec{v})\vec{v} \quad \text{e} \quad Q_2 = B + (\vec{BP_2}\cdot\vec{v})\vec{v}$$

assumindo, sem perda de generalidade, que $\vec{v}$ é unitário

Temos:

$$\vec{P_1Q_1} = Q_1 - P_1 = B + (\vec{BP_1}\cdot\vec{v})\vec{v} - P_1 = (\cdots)$$
$$= \vec{AB} - (\vec{AB}\cdot\vec{v})\vec{v}.$$

$$\vec{P_2Q_2} = Q_2 - P_2 = B + (\vec{BP_2}\cdot\vec{v})\vec{v} - P_2 =$$
$$= \vec{AB} - \lambda_1\vec{v} + \left[(\vec{BA} + \lambda_1\vec{v})\cdot\vec{v}\right]\vec{v} =$$
$$= \vec{AB} - \lambda_1\vec{v} - (\vec{AB}\cdot\vec{v})\vec{v} + \lambda_1\vec{v} = \vec{AB} - (\vec{AB}\cdot\vec{v})\vec{v}$$

Como $\vec{P_1Q_1} = \vec{P_2Q_2}$, em particular, $d(P_1,Q_1) = d(P_2,Q_2)$

NOTA: Outra demonstração pode ser encontrada na página 36, parte I.