UNIVERSIDADE DO MINHO	
Geometria	
Curso: M. C. C.	**Segundo teste - 30 Mai 2023**

Nota. Justifique pormenorizadamente todas as respostas.

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno canónico. Seja $\lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$\lambda(x, y, z) = (x, z, y + 1)$$

   a) (3 val) Mostre que λ é uma isometria.

   b) (3 val) Determine o ponto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e o isomorfismo ortogonal $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lambda = T_{(a,b,c)} \circ \varphi$$

   em que $T_{(a,b,c)} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ designa a translação associada ao ponto (a, b, c).

2. Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e a, b dois vetores de E. Designe por Z o subconjunto de E constituído por todos os vetores de E que sejam simultaneamente ortogonais ao vetor a e ao vetor b. Simbolicamente,

$$Z = \{x \in E : \quad x \mid a = 0 \quad \wedge \quad x \mid b = 0\}$$

   a) (2 val) Mostre que Z é um subespaço vetorial de E.

   Denote por F o subespaço vetorial de E gerado pelos vetores a e b.

   b) (2 val) Mostre que cada vetor de Z é ortogonal a cada vetor de F, isto é,

$$x \in Z \quad \wedge \quad u \in F \quad \Longrightarrow \quad x \mid u = 0$$

   c) (3 val) Mostre que $Z \cap F = \{0_E\}$

3. Considere a cónica definida pela equação

$$x^2 + 2y^2 + 6xy + x + 2y + 1 = 0$$

   a) (1 val) Mostre que a cónica é não degenerada.

   b) (2 val) Classifique a cónica.

4. Considere a cónica definida pela equação

$$x^2 + y^2 - 2xy + x - y - 2 = 0$$

   a) (1 val) Mostre que a cónica é degenerada.

   b) (1 val) Usando o caso notável da multiplicação mais apropriado, escreva a expressão

$$x^2 + y^2 - 2xy$$

   na forma de um quadrado de uma diferença.

c) (2 val) Seja z um número real qualquer. Notando que

$$z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1)$$

e considerando $z = x - y$, mostre que a cónica é uma reta.

$* * *$ **FIM** $* * *$

Sugestão para o exercício 2-c)

Deverá verificar que $Z \cap F \subset \{0_E\}$ e que $\{0_E\} \subset Z \cap F$. A verificação da inclusão $\{0_E\} \subset Z \cap F$ é simples. Para verificar a inclusão $Z \cap F \subset \{0_E\}$, fixe $x \in Z \cap F$. Como $x \in Z$, o vetor x verifica as condições que definem o conjunto Z. Mas, x pertence também a F. Fixe agora a sua atenção na alínea 2-b) e conclua o resultado.

Notas

Seja E um espaço vetorial.

a) Um subconjunto Z de E diz-se um subespaço vetorial de E se

   i) $0_E \in Z$

   ii) $x, y \in Z \implies x + y \in Z$

   iii) $x \in Z$, $\alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha x \in Z$

b) Seja $X = \{e_1, \cdots, e_n\}$ um subconjunto de vetores de E. O subespaço vetorial F gerado por X é o subconjunto de E constituído por todas as combinações lineares dos vetores de X, isto é,

$$F = \{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n : \ \alpha_j \in \mathbb{R}, \ \forall\, j \in \{1, \cdots, n\}\}$$