Geometria
LMat & LCC

Segundo teste
24/05/2019

Proposta de Resolução

GRUPO I

1 A homotetia de centro Ω e razão λ é dada pela expressão
$h(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Logo $h(M) = \Omega + \lambda(M - \Omega) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$.

Portanto a expressão matricial de tal homotetia é:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

onde $(1-\lambda)\Omega = (\omega_1, \omega_2)$.

a f: homotetia de centro $(1,3)$ e razão -2

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

g: homotetia de centro $(1,1)$ e razão $1/2$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b Para obter $g \circ f$ podemos usar coordenadas homogéneas

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ou seja: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Observamos assim que $g \circ f$ é uma homotetia de razão -1 isto é, uma simetria central. O seu centro Ω é tal que $2\Omega = (2,5)$, logo, $\Omega = (1, 5/2)$.

2 Expressão matricial de ρ

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Temos que $\det(\vec{\rho}) = 1/2 + 1/2 = 1$

Logo, pelo teorema da classificação das isometrias do plano, ρ ou é uma translação ou é uma rotação.

Claramente ρ não é uma translação pois a matriz de $\vec{\rho}$ não é a matriz identidade. Logo ρ é rotação.

Temos que $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

onde $\theta = -\pi/4$. Logo o ângulo de rotação é $-\pi/4$.

Para determinar o centro da rotação é necessário determinar o ponto fixo de ρ.

$$\rho(x,y) = (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1/\sqrt{2}\, x + 1/\sqrt{2}\, y + 1 - 1/\sqrt{2} = x \\ -1/\sqrt{2}\, x + 1/\sqrt{2}\, y + 1/\sqrt{2} = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y + \sqrt{2} - 1 = 0 \\ -x + (1-\sqrt{2})y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x = (1-\sqrt{2})y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})y + 1 - \sqrt{2} + y + \sqrt{2} - 1 = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-2\sqrt{2}+2)y + y = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-2\sqrt{2})y = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Logo o centro da rotação ρ é $\Omega = (1,0)$.

3 Seja f_O a transvecção de razão $R = -2$ segundo $\vec{e_1} = (1,0)$ e centrada na origem $O = (0,0)$.

Sendo f a transvecção de razão $R = -2$ segundo $\vec{e_1} = (1,0)$ e centrada no ponto $\Omega = (2,1)$, temos que:

$$f = t_{\vec{O\Omega}} \circ f_O \circ t_{-\vec{O\Omega}}$$

onde $t_{\vec{O\Omega}}$ e $t_{-\vec{O\Omega}}$ denotam as translações segundo os vetores $\vec{O\Omega} = (2,1)$ e $-\vec{O\Omega} = (-2,-1)$, respetivamente.

Temos: $f_O(x,y) = (x-2y, y)$

$t_{\vec{O\Omega}} = (x+2, y+1)$ $\quad t_{-\vec{O\Omega}} = (x-2, y-1)$

Logo: $f(x,y) = (t_{\vec{O\Omega}} \circ f_O \circ t_{-\vec{O\Omega}})(x,y) =$

$= t_{\vec{O\Omega}}(f_O(x-2, y-1)) = f_O(x-2, y-1) + (2,1)$

$= (x-2-2(y-1), y-1) + (2,1) = (x-2y+2, y)$

Em alternativa, pode usar coordenadas homogeneas e obter a expressão matricial $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Grupo II

4 Sendo σ a reflexão no plano π, sabemos que:

$$\sigma(M) = M - \frac{2(\vec{AM} \cdot \vec{n})}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$$

onde A é um ponto de Π e $\vec{n}$ é vetor normal a Π.

Podemos tomar $A=(1,0,0)$ e $\vec{n}=(1,0,1)$

Temos: $\vec{AM} = M-A = (x-1, y, z)$

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = x-1+z$

Logo: $\sigma(x,y,z) = (x,y,z) - 2\dfrac{(x-1+z)}{2}(1,0,1)$

$= (x,y,z) - (x-1+z, 0, x-1+z) =$

$= (1-z, y, 1-x).$

5. Sendo ρ a Rotação de ângulo $\theta = -\pi/2$ segundo o eixo que incide na origem e está dirigido por $\vec{u} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ sabemos que:

$\rho(x,y,z) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} + \cos\theta\left(\vec{OM} - (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u}\right) + \operatorname{sen}\theta\,(\vec{u}\times\vec{OM})$

Como $\theta = -\pi/2$, $\cos\theta = 0$, $\operatorname{sen}\theta = -1$ e, assim sendo,

$\rho(x,y,z) = O + (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} - (\vec{u}\times\vec{OM})$

- $\vec{OM}\cdot\vec{u} = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}$ $\qquad (\vec{OM}\cdot\vec{u})\vec{u} = \left(\dfrac{x+y+z}{3}, \dfrac{x+y+z}{3}, \dfrac{x+y+z}{3}\right)$

- $\vec{u}\times\vec{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\dfrac{z}{\sqrt{3}} - \dfrac{y}{\sqrt{3}}, -\dfrac{z}{\sqrt{3}} + \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \dfrac{y}{\sqrt{3}} - \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$

Logo: $\rho(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{3}(1,1,1) - \dfrac{\sqrt{3}}{3}(z-y, x-z, y-x)$

$= \left(\dfrac{x+(1+\sqrt{3})y+(1-\sqrt{3})z}{3}, \dfrac{(1-\sqrt{3})x+y+(1+\sqrt{3})z}{3}, \dfrac{(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y+z}{3}\right)$

6. $\mathcal{C}: x^2+y^2-6x-2y-15=0$

a Basta completar os quadrados:

$x^2+y^2-6x-2y-15=0 \Leftrightarrow (x-3)^2-9+(y-1)^2-1-15=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=25$

Logo $\mathcal{C}$ é a circunferência de centro $(3,1)$ e raio 5.

b Uma translação é uma isometria (preserva distâncias) logo a imagem de uma circunferência de raio R é uma circunferência de raio R. Quanto ao centro, se a circunferência dada tem centro Ω então a circunferência imagem tem como centro a imagem de Ω.

Neste caso, a imagem de $\mathcal{C}$ através de $t_{\vec{v}}$, $\vec{v}=(-1,1)$ é a circunferência de raio 5 e centro $t_{\vec{v}}(3,1)=(2,2)$.