Matemática Discreta — LCC

Ana Cristina Ferreira — Dept. Matemática — Escola de Ciências
Email: anaferreira@math.uminho.pt

Horário de atendimento: quarta-feira 14h–16h (ou por marcação)
Gabinete: 3.12 do Edif 6 ECUM

Carga Horária: 5 ECTS — 140 horas de trabalho
T — 30 horas
TP — 30 horas
Trabalho autónomo: 80 horas

Programa:
Teoria de Grafos → Teste 1 (22 de abril)
Teoria de Números → Teste 2 (20 de maio)

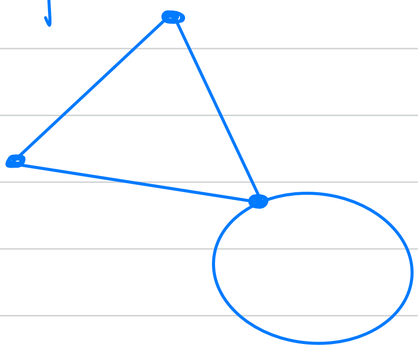
Avaliação:
Teste 1 : 10 valores
Teste 2 : 10 valores
nota mínima: 3 valores (em 10)

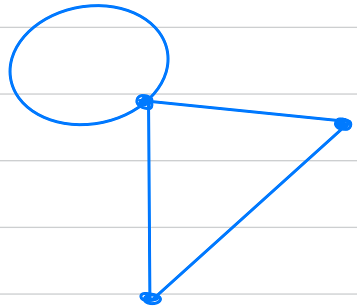
Bibliografia: P. Smith & P. Mendes: Matemática Discreta (RepositoriUM)

Teoria de Grafos

Intuitivamente: um grafo é uma coleção de vértices e de arestas tal que cada aresta liga dois vértices.

Por exemplo:

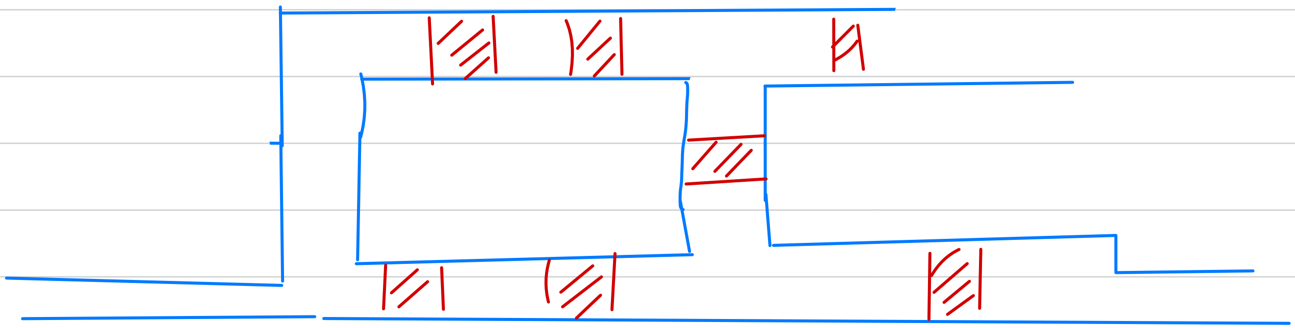




Representam o mesmo grafo.

(deslocações e deformações não alteram o grafo)

As sete pontes de Könisberg



É possível fazer este percurso passando por cada uma destas pontes uma e uma só vez?

Resposta: Não

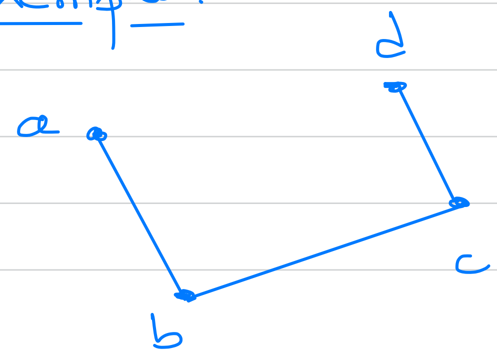
Euler no séc $\underline{\overline{XVIII}}$

Conceitos básicos

Definição: Um grafo (simples) é um par ordenado $G = (V, E)$ no qual V é um conjunto não vazio e E é um conjunto de subconjunto de V que possuem exatamente dois elementos.

Aos elementos de V chamamos vértices e aos elementos de E chamamos arestas (edges).

Exemplo:



Este grafo é simples

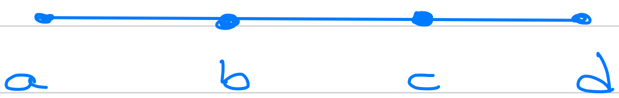
$V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}$

Observações

1) Existem representações "aparentemente" diferentes do mesmo grafo

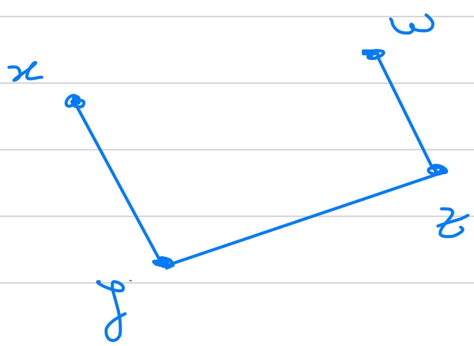
O grafo do exemplo acima também se pode desenhar como:



2) Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são iguais sse

$V = V'$ e $E = E'$.

3) Uma mesma representação pode descrever grafos que, por definição, são distintos. Por exemplo:

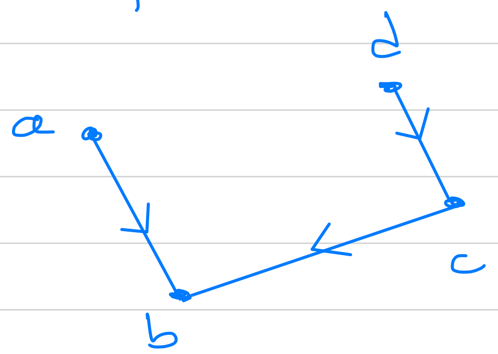


é um grafo distinto do grafo do exemplo acima.

Definição

Chama-se digrafo a um par $G = (V, E)$ onde V é um conjunto não vazio e E é um subconjunto de $V \times V$. Aos elementos de V chamamos vértices e aos elementos de E chamamos arestas (edges).

Exemplo



$$G = (V, E)$$

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{(a,b), (c,b), (d,c)\}$$

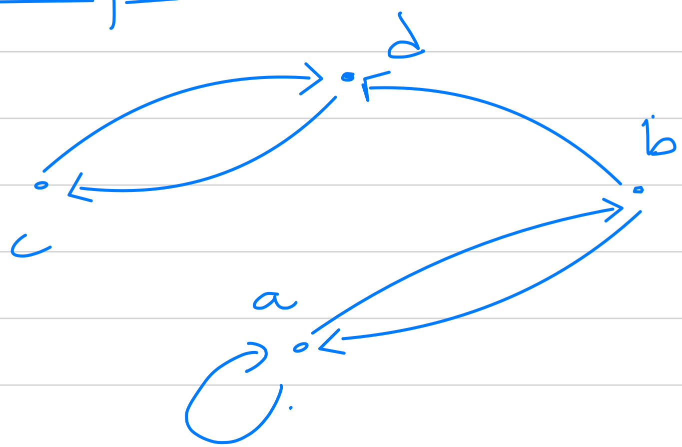
Observações

1) Um digrafo é um grafo no qual se considera a orientação das arestas

2) Dados dois vértices distintos a e b, as arestas (a,b) e (b,a) são arestas distintas

3) O par (a,a) pode ser uma aresta

Exemplo



$G = (V, E)$

$V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,d), (c,d), (d,c)\}$

Nota:

Um multigrafo (resp. multidigrafo) é um grafo no qual se admite a existência de múltiplas arestas (resp. arestas orientadas) entre dois grafos.

Nesta UC: Vamos estudar essencialmente grafos simples.

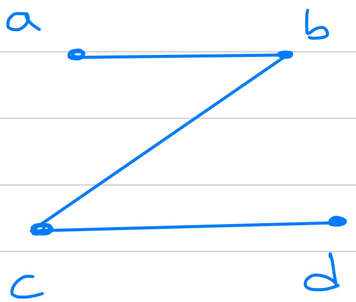
Incidência e adjacência

Seja $G = (V, E)$ um grafo (simples) com n vértices e m arestas ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$). Consideremos $V = \{ v_i : 1 \leq i \leq n \}$ e $E = \{ e_j : 1 \leq j \leq m \}$

Definição Dizemos que $e_j \in E$ é incidente a um vértice $v_i \in V$ se existe $v_k \in V$ tal que a aresta e_j liga os vértices v_i e v_k.

Definição Uma matriz $[a_{ij}] \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ diz-se uma matriz de incidência de G se $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } e_j \text{ não é incidente a } v_i \\ 1 & \text{se } e_j \text{ é incidente a } v_i \end{cases}$

Exemplo Seja $G = (V, E)$ o grafo onde $V = \{a, b, c, d\}$ e
$E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}$.



Considerando $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$, $v_4 = d$
$e_1 = \{a,b\}$, $e_2 = \{b,c\}$, $e_3 = \{c,d\}$

$$M = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que temos 4 linhas, pois existem 4 vértices e temos 3 colunas pois existem 3 arestas.

Definição

Dois vértices v_i e v_j de G dizem-se adjacentes se existe uma aresta em G incidente a ambos.

Definição

Diz-se que uma matriz $[a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ é uma matriz de adjacência de G se

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ não são adjacentes} \\ 1 & \text{se } v_i \text{ e } v_j \text{ são adjacentes} \end{cases}$$

Exemplo: A matriz $N = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz de adjacência do grafo do exemplo anterior.

Observações

1) Para grafos simples a matriz de adjacência é simétrica e a diagonal é constituída por zeros (não existem arestas $\{a, a\}$ pois $\{a, a\} = \{a\}$ que só tem um elemento)

2) As matrizes de incidência e adjacência não são únicas, uma vez que dependem da ordem que se dá os vértices e às arestas.

No entanto, tais matrizes são semelhantes pois podem ser obtidas uma da outra por troca de linhas e/ou colunas.