Derivadas

Maria Joana Torres

2022/23

Definição:

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **derivável em $\boldsymbol{a}$** $\in X \cap X'$ se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

Ao valor real d chama-se **derivada de f em $\boldsymbol{a}$** e escreve-se $f'(a) = d$ ou $Df(a) = d$.

Nota:

Observe-se que, considerando h tal que $a + h \in \mathrm{Dom\,f}$, e fazendo a mudança de variável $x = a + h$, obtemos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **derivável** se f for derivável em todos os pontos de X.

A função $\begin{array}{rccc} f' : & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$ diz-se a **função derivada de f**.

Dado $A \subseteq X$, dizemos que f é **derivável em A** quando f é derivável em todo $a \in A$.

Definição:

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se

- **derivável à direita em a** $\in X \cap X'_+$ se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

  Ao valor real d chama-se **derivada à direita de f em a** e escreve-se $f'_+(a) = d$;

- **derivável à esquerda em a** $\in X \cap X'_-$ se existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

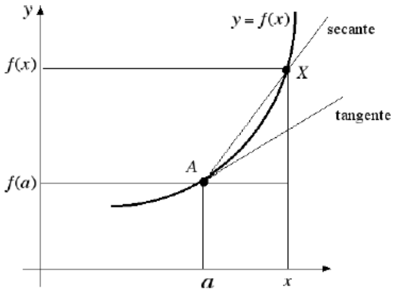
$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = d.$$

  Ao valor real d chama-se **derivada à esquerda de f em a** e escreve-se $f'_-(a) = d$.

Teorema:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Então f é derivável em a se e só se existem e são iguais as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.

Significado geométrico da derivada



$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Definição:

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in X \cap X'$, a reta de equação

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

designa-se por **reta tangente ao gráfico de f** em $(a, f(a))$.

Definição:

Dada uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável em $a \in X \cap X'$, chama-se **reta normal ao gráfico de f** em $(a, f(a))$ à reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f nesse ponto.

Teorema [**Continuidade de funções deriváveis**]:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in X \cap X'$. Se f é derivável em a então f é contínua em a.

Corolário:
Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então f é contínua.

Teorema [**Aritmética da derivação pontual**]:

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $a \in X \cap X'$. Então:

- $f + g$ é derivável em a e
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a);$$
- dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λf é derivável em a e
$$(\lambda f)'(a) = \lambda\, f'(a);$$
- fg é derivável em a e
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a);$$
- se $g(a) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é derivável em a e
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Teorema **[Derivada da função composta / Regra da Cadeia]**:

Sejam X, Y subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ funções, $a \in X \cap X'$, $f(a) \in Y'$. Suponhamos que f é derivável em a e que g é derivável em $f(a)$. Então $g \circ f$ é derivável em a e

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

A fórmula anterior significa que a derivada da composta é o produto das derivadas, com cada uma delas calculada num ponto adequado.

Teorema [**Derivada da função inversa**]:

Sejam X e Y subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$, $f : X \longrightarrow Y$ uma função bijetiva e suponhamos que:

1. f é derivável em $a \in X \cap X'$;
2. $f'(a) \neq 0$;
3. f^{-1} é contínua em $b = f(a)$.

Então f^{-1} é derivável em b. Além disso,

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

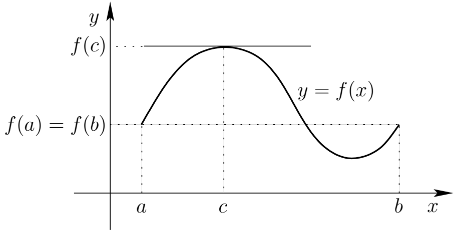
A fórmula anterior estabelece que a derivada da função inversa é o inverso da derivada da função direta, com cada uma delas calculada num ponto adequado.

Teorema:

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se a é um ponto de extremo de f então $f'(a) = 0$.

Teorema **[de Rolle]**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.



Geometricamente, o Teorema de Rolle estabelece que, estando f nas condições indicadas no enunciado, existe algum ponto $c \in]a, b[$ tal que a tangente à curva de equação $y = f(x)$ no ponto de abcissa c é horizontal.

Corolários **[do teorema de Rolle]**:

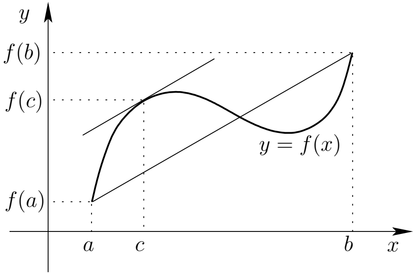
Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que é derivável em $]a, b[$.

1. Entre dois zeros de f existe, pelo menos, um zero de f'.
2. Entre dois zeros consecutivos de f' existe, quando muito, um zero de f.
3. Não há mais do que um zero de f inferior ao menor zero de f', nem mais do que um zero de f superior ao maior zero de f'.

Teorema [de Lagrange]:

Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a,b[$. Então

$$\exists\, c \in\,]a,b[\qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$



Geometricamente, o Teorema de Lagrange estabelece que, estando f nas condições indicadas no enunciado, existe $c \in\,]a,b[$ tal que a tangente à curva de equação $y = f(x)$ no ponto de abcissa c é paralela à secante que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Corolário **[do teorema de Lagrange]**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$. Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é constante.

Corolário **[do teorema de Lagrange]**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$.

1. Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente crescente.
2. Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$ então f é estritamente decrescente.

Teorema **[de Darboux]**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável e tal que $f'(a) \neq f'(b)$. Então, dado $k \in \mathbb{R}$ estritamente compreendido entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = k$.

Teorema **[Regra de l'Hôpital]**:

Sejam $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $I \backslash \{a\}$, com a um ponto do intervalo I. Se $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \backslash \{a\}$ e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \ell,$$

com $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que o segundo limite exista (finito ou infinito).

Nota:

O teorema estende-se aos casos $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, desde que as hipótese sejam formuladas em intervalos $]c, +\infty[$ e $]-\infty, c[$, respetivamente.

<u>Definição</u>:

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $a \in X' \cap X$. Diz-se que f é **duas vezes derivável em a**, ou que f tem **derivada de 2ª ordem em a** ou que f tem **segunda derivada em a** se

$$\exists\, \delta > 0 \;\; g = f'_{|_{X \cap\,]a-\delta, a+\delta[}} \text{ é derivável em } a.$$

Representa-se a segunda derivada de f em a por $f^{''}(a)$ ou $f^{(2)}(a)$.

Diz-se que f **tem derivada de 2ª ordem** se f é duas vezes derivável em qualquer ponto do seu domínio (note-se que, em particular, temos que $X \subseteq X'$).

À função $\begin{array}{rccc} f^{''}: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^{''}(x) \end{array}$ chama-se **função segunda derivada de f**.

Nota:

Indutivamente define-se **derivada de ordem n de f em a** e a **função derivada de ordem n de f**.
Denota-se a derivada de f de ordem n por $f^{(n)}$ ou $D^n f$.
Convenciona-se que $f^{(0)} = f$.

Teorema:

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que admite segunda derivada em $a \in X \cap X'$. Suponhamos que $f'(a) = 0$. Então, se $f''(a) > 0$, a é um ponto de mínimo local de f e se $f''(a) < 0$, a é um ponto de máximo local de f.

$$(e^x)' = e^x$$
$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

Para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\operatorname{sen}' x = \cos x \qquad \cos' x = -\operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x \qquad \operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$$
$$\sec' x = \sec x \ \operatorname{tg} x \qquad \operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$
$$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x \qquad \operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$$
$$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \ \operatorname{th} x \qquad \operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \ \operatorname{coth} x$$

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \operatorname{arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \operatorname{arccotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{arccosec}' x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argsech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \operatorname{argcosech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$