Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2025/2026

Departamento de Matemática

Aplicações Lineares

Definições e propriedades

Uma aplicação linear é uma aplicação entre espaços vetoriais que satisfaz propriedades relacionadas com a estrutura de espaço vetorial. Embora este conceito possa ser definido para aplicações entre quaisquer espaços vetoriais, neste capítulo estudamos apenas aplicações lineares entre subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ e subespaços vetorias de $\mathbb{R}^m$.

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Uma aplicação $f : V \to V'$ diz-se uma ***aplicação linear*** *(ou* ***transformação linear*** *ou* ***homomorfismo****) de V em V' se*

i) $\forall_{x,y \in V}\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;

ii) $\forall_{x \in V}\ \forall_{\lambda \in \mathbb{R}}\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

O conjunto de todas as aplicações lineares de V em V' é representado por $\mathcal{L}(V, V')$.

Aplicações Lineares

Da definição anterior resulta facilmente a seguinte caracterização para as aplicações lineares.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então uma aplicação $f : V \to V'$ é uma aplicação linear se e só se

$$\forall_{x,y \in V} \, \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \; f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Exemplo

Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$*. A aplicação* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $f(a,b) = (2a, a-b, a+3b)$*, para todo* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, é uma aplicação linear de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}^3$*. De facto, para quaisquer* $(a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2$ *e qualquer* $\lambda \in \mathbb{R}$*, tem-se*

$$\begin{array}{rcl} f((a,b)+(a',b')) & = & f(a+a', b+b') \\ & = & (2(a+a'), (a+a')-(b+b'), (a+a')+3(b+b')) \\ & = & (2a+2a', (a-b)+(a'-b'), (a+3b)+(a'+3b')) \\ & = & (2a, a-b, a+3b)+(2a', a'-b', a'+3b') \\ & = & f(a,b)+f(a',b') \end{array}$$

Exemplo (continuação).

$$\begin{aligned} f(\lambda(a,b)) &= f(\lambda a, \lambda b) \\ &= (2(\lambda a), \lambda a - \lambda b, \lambda a + 3(\lambda b)) \\ &= (\lambda(2a), \lambda(a-b), \lambda(a+3b)) \\ &= \lambda(2a, a-b, a+3b) \\ &= \lambda f(a,b). \end{aligned}$$

Exemplo

A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(a,b) = 2a + 3$*, para todo* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$*, não é uma aplicação linear de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}$*. Dados, por exemplo,* $x = (1,0)$ *e* $y = (2,1) \in \mathbb{R}^2$*, tem-se*

$$\begin{aligned} &f((1,0)+(2,1)) = f(3,1) = 9, \\ &f(1,0) + f(2,1) = (2+3) + (4+3) = 12, \end{aligned}$$

i.e., existem $x, y \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$*.*

Exemplo

Sejam V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *e* V' *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$*. As aplicações*

$$\begin{array}{rccc} 0_{\mathcal{L}(V,V')}: & V & \to & V' \\ & x & \mapsto & 0_{\mathbb{R}^m} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} id_V: & V & \to & V \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

são aplicações lineares designadas, respectivamente, por ***aplicação linear nula*** *de* V *em* V' *e* ***aplicação identidade*** *em* V*.*

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então

1. $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$;
2. *Para todo* $x \in V$, $f(-x) = -f(x)$;
3. *Para todos* $x_1, \ldots, x_k \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_k f(x_k).$$

Aplicações Lineares

Demonstração.

1. $f(0_{\mathbb{R}^n}) = f(0 \cdot 0_{\mathbb{R}^n}) = 0 \cdot f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.

2. Para todo $x \in V$, tem-se

$$f(-x) = f((-1)x) = (-1)f(x) = -f(x).$$

3. A prova é feita por indução em k. $\square$

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. O resultado seguinte estabelece que uma aplicação linear $f : V \to V'$ fica completamente determinada se conhecermos a imagem, por f, dos vetores de uma base de V.

Teorema (Teorema da Extensão Linear)

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v'_1, \ldots, v'_r \in V'$.
Então existe uma e uma só aplicação linear f de V em V' tal que $f(v_i) = v'_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular.

$\square$

Exemplo

Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$ *e a base* $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Pelo teorema anterior, existe uma e uma só aplicaçao linear* f *de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^2$ *tal que*

$$f(1,1,1)=(2,1),\quad f(1,1,0)=(-4,1),\quad f(1,0,0)=(0,3).$$

Com base nas imagens dos vetores da base de $\mathbb{R}^3$*, facilmente determinamos* $f(2,0,1)$*. De facto, como*

$$(2,0,1)=1(1,1,1)+(-1)(1,1,0)+2(1,0,0)$$

tem-se

$$\begin{aligned} f(2,0,1) &= 1f(1,1,1)+(-1)f(1,1,0)+2f(1,0,0) \\ &= 1.(2,1)+(-1).(-4,1)+2.(0,3)=(6,6). \end{aligned}$$

Exemplo (continuação).

Conhecidas as imagens dos vetores de uma base de $\mathbb{R}^3$*, pode-se determinar a imagem de qualquer vetor de* $\mathbb{R}^3$*.*

Dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*, escrevemos* (a, b, c) *como combinação linear dos vetores* $(1, 1, 1)$*,* $(1, 1, 0)$*,* $(1, 0, 0)$ *e determinamos* $f(a, b, c)$*. Uma vez que*

$$(a, b, c) = c(1, 1, 1) + (b - c)(1, 1, 0) + (a - b)(1, 0, 0),$$

segue que

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= cf(1, 1, 1) + (b - c)f(1, 1, 0) + (a - b)f(1, 0, 0) \\ &= c(2, 1) + (b - c)(-4, 1) + (a - b)(0, 3) \\ &= (-4b + 6c, 3a - 2b). \end{aligned}$$

Operações com aplicações lineares

A partir de aplicações lineares dadas podem construir-se outras. Estudamos seguidamente algumas operações envolvendo aplicações lineares.

Começamos por definir as operações de *adição de aplicações lineares* e de *multiplicação de um escalar por uma aplicação linear*, as quais permitem dar a estrutura de espaço vetorial ao conjunto $\mathcal{L}(V, V')$ de todas aplicações lineares de um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$ num subespaço vetorial V' de $\mathbb{R}^m$.

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Designa-se por:

- ***soma de** f **e** g a aplicação $f + g : V \to V'$ definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in V$.*
- ***produto de** λ **por** f a aplicação $\lambda f : V \to V'$ definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para todo $x \in V$.*

Nas condições da definição anterior, é óbvio que $f + g$ e λf são aplicações e é simples provar que estas aplicações também são aplicações lineares.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $f + g \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\lambda f \in \mathcal{L}(V, V')$.

Demonstração:

As aplicações $f + g$ e λf são aplicações lineares de V em V'. De facto, para quaisquer $x, y \in V$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{array}{rcl}
(f+g)(\alpha x + \beta y) & = & f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \\
 & = & (\alpha f(x) + \beta f(y)) + (\alpha g(x) + \beta g(y)) \\
 & = & (\alpha f(x) + \alpha g(x)) + (\beta f(y) + \beta g(y)) \\
 & = & \alpha(f(x) + g(x)) + \beta(f(y) + g(y)) \\
 & = & \alpha((f+g)(x)) + \beta((f+g)(y))
\end{array}$$

o que permite concluir que $f + g$ é aplicação linear de V em V'.

Demonstração:

Relativamente a λf tem-se o seguinte

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\alpha x+\beta y) &= \lambda(f(\alpha x+\beta y))\\ &= \lambda(\alpha f(x)+\beta f(y))\\ &= \lambda(\alpha f(x))+\lambda(\beta f(y))\\ &= \alpha(\lambda f(x))+\beta(\lambda f(y))\\ &= \alpha((\lambda f)(x))+\beta((\lambda f)(y))\end{aligned}$$

e, portanto, λf é uma aplicação linear. $\square$

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, V'' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $g \in \mathcal{L}(V', V'')$. Designa-se por ***composta de g com f*** *a aplicação $g \circ f : V \to V''$ definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

para todo $x \in V$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, V'' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^p$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $g \in \mathcal{L}(V', V'')$. Então $g \circ f \in \mathcal{L}(V, V'')$.

Demonstração.

Considerando que f é uma aplicação de V em V' e g é uma aplicação de V' em V'', então, por definição de composição de funções, $g \circ f$ é uma aplicação de V em V''. Além disso,

$$\begin{array}{rcl} \forall_{x,y \in V}\ (g \circ f)(x+y) & = & g(f(x+y)) \\ & = & g(f(x)+f(y)) \\ & = & g(f(x))+g(f(y)) \\ & = & (g \circ f)(x)+(g \circ f)(y) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \forall_{x \in V}\ \forall_{\lambda \in \mathbb{K}}\ (g \circ f)(\lambda x) & = & g(f(\lambda x)) \\ & = & g(\lambda f(x)) \\ & = & \lambda(g(f(x))) \\ & = & \lambda(g \circ f)(x). \end{array}$$

Portanto, $g \circ f$ é uma aplicação linear. $\square$

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, V'' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^p$, $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$, $h, k \in \mathcal{L}(V', V'')$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então são válidas as seguintes propriedades:

1. $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$;
2. $(h + k) \circ f = h \circ f + k \circ f$;
3. $\lambda(h \circ f) = (\lambda h) \circ f = h \circ (\lambda f)$.

Núcleo e espaço imagem de uma aplicação linear

O estudo dos conceitos de núcleo e espaço imagem tem interesse na sistematização do estudo de problemas que envolvem aplicações lineares.

Aplicações Lineares

Comecemos por recordar algumas noções e notações de teoria de conjuntos.

Dados A e B conjuntos, C um subconjunto de A, D um subconjunto de B e f uma aplicação de A em B, designa-se por:

- ***imagem de*** C ***por*** f o conjunto

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\} = \{y \in B : (\exists x \in C)\ y = f(x)\};$$

- ***imagem inversa de*** D ***por*** f o conjunto

$$f^{\leftarrow}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Se $D = \{y\}$, é usual representar $f^{\leftarrow}(D)$ por $f^{\leftarrow}(y)$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então

1. *$f(V)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.*
2. *$f^{\leftarrow}(V')$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema

Sejam V *um subespaço de* $\mathbb{R}^n$, $v_1, \ldots v_r \in V$, V' *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V')$. *Se* $V =< v_1, \ldots, v_r >$, *então* $f(V) =< f(v_1), \ldots, f(v_r) >$.

Demonstração.

Admita-se que $W = < v_1, \ldots, v_n >$. Então $v_1, \ldots, v_n \in W$ e, portanto, $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in f(W)$. Logo, como $f(W)$ é um subespaço de V', tem-se $< f(v_1), \ldots, f(v_n) > \subseteq f(W)$. Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} y \in f(W) & \Rightarrow & \exists x \in W : y = f(x) \\ & \Rightarrow & \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \text{ e } y = f(x) \\ & \Rightarrow & \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : y = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) \\ & \Rightarrow & \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : y = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \\ & \Rightarrow & y \in < f(v_1), \ldots, f(v_n) >, \end{array}$$

e, portanto, $f(W) \subseteq < f(v_1), \ldots, f(v_n) >$. Logo,

$$f(W) = < f(v_1), \ldots, f(v_n) > .$$

$\square$

Definição

Sejam V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$, V' *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V')$.

- *Chama-se* ***núcleo*** *de* f, *e representa-se por* $\mathrm{Nuc}f$, *ao conjunto*

$$\mathrm{Nuc}f = f^{\leftarrow}(\{0_{\mathbb{R}^m}\}) = \{x \in V : f(x) = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

- *Chama-se* ***espaço imagem*** *de* f, *e representa-se por* $\mathrm{Im}f$ *ou* $f(V)$, *ao conjunto imagem de* V *por* f.

Exemplo

Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$ *e a aplicação linear* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(a, b, c) = (a, a + b + c)$*, para todo* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*. Então*

$$\begin{aligned}
\text{Nuc}f &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = (0, 0)\} \\
&= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, a + b + c) = (0, 0)\} \\
&= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, a + b + c = 0\} \\
&= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b = -c\} \\
&= \{(0, -c, c) \in \mathbb{R}^3 : a, c \in \mathbb{R}\} \\
&= < (0, -1, 1) >
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{Im}f &= \{f(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \\
&= \{(a, a + b + c) \in \mathbb{R}^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Teorema

Sejam V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$, V' *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V')$. *Então*

1. $\mathrm{Nuc} f$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$.
2. $\mathrm{Im} f$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$. $\square$

Definição

Sejam V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$, V' *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V')$. *As dimensões de* $\mathrm{Nuc} f$ *e de* $\mathrm{Im} f$ *são designadas, respectivamente, por* ***nulidade*** *de* f *e* ***característica*** *de* f. *A nulidade de* f *representa-se por* n_f *e a característica de* f *por* c_f.

O resultado seguinte permite relacionar a nulidade e a característica de uma aplicação linear.

Teorema (Teorema da Dimensão)

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então $\dim V = \dim \mathrm{Nuc} f + \dim \mathrm{Im} f$.

Demonstração.

Sejam $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de Nuc$f$ e $(w_1, \ldots, w_s)$ uma base de Imf. Como $w_1, \ldots, w_s \in \mathrm{Im} f$, podemos escolher $u_1, \ldots, u_s \in V$ tais que $f(u_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, s$. Prova-se que $(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_s)$ é uma base de V, donde segue o resultado pretendido. $\square$

De acordo com notação introduzida anteriormente e nas condições desta última proposição, tem-se $\dim V = n_f + c_f$.

Aplicações lineares especiais

Algumas aplicações lineares tomam designações especiais atendendo às suas propriedades enquanto aplicações.

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Uma aplicação linear $f : V \to V'$ diz-se:

- *um* ***monomorfismo*** *se f é injetiva;*
- *um* ***epimorfismo*** *se f é sobrejetiva;*
- *um* ***isomorfismo*** *se f é bijetiva;*
- *um* ***endomorfismo*** *se $V = V'$;*
- *um* ***automorfismo*** *se f é um endomorfismo e é bijetiva.*

As aplicações lineares sobrejetivas e as aplicações lineares injetivas podem ser caracterizadas através do seu espaço imagem e do seu núcleo.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $f : V \to V'$ uma aplicação linear. Então

1. *f é injetiva se e só se* $\mathrm{Nuc} f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
2. *f é sobrejetiva se e só se* $\mathrm{Im} f = V'$.

Demonstração.

i) Seja $f \in \mathcal{L}(V, V')$. É claro que $0_{\mathbb{R}^n} \in \text{Nuc}f$, pois $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^m}$.
Admitindo que f é injetiva, então, para qualquer $x \in V$, tem-se

$$\begin{aligned} x \in \text{Nuc}f \quad &\Rightarrow \quad f(x) = 0_{\mathbb{R}^m} \\ &\Rightarrow \quad f(x) = f(0_{\mathbb{R}^n}) \\ &\Rightarrow \quad x = 0_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Logo $\text{Nuc}f \subseteq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Assim, $\text{Nuc}f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Reciprocamente, admitamos que $\text{Nuc}f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Então, para quaisquer $x, y \in V$,

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Rightarrow \quad f(x) - f(y) = 0_{\mathbb{R}^m} \\ &\Rightarrow \quad f(x - y) = 0_{\mathbb{R}^m} \\ &\Rightarrow \quad x - y \in \text{Nuc}f \\ &\Rightarrow \quad x - y = 0_{\mathbb{R}^n} \\ &\Rightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

Logo, f é injetiva.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $f : V \to V'$ uma aplicação linear, $r \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_r \in V$.

1. *Se a sequência $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ é linearmente independente, então a sequência $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente independente.*
2. *Se f é injetiva e a sequência $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente independente, então $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ é linearmente independente.*
3. *Se f é sobrejetiva e $\{v_1, \ldots, v_r\}$ é um conjunto gerador de V, então $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ é um conjunto gerador de V'.*

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V. Então

1. *f é injetiva se e só se a sequência $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ é linearmente independente.*
2. *f é sobrejetiva se e só se $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ é um conjunto gerador de V'.*
3. *f é bijetiva se e só se $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ é uma base de V'.*

Corolário

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Se $\dim V = \dim V'$, então f é injetiva se e só se f é sobrejetiva. $\square$

Definição

Sejam V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *e* V' *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$*. Diz-se que* V *é* **isomorfo** *a* V'*, e escreve-se* $V \cong V'$*, se existe um isomorfismo de* V *em* V'*.*

Exemplo

Seja V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$*. Então* $V \cong V$*, uma vez que* $id_V : V \to V$ *é um isomorfismo.*

Exemplo

Sejam V e V' os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respetivamente, definidos por

$$V =< (1,0,0),(0,1,0) > \quad e \quad V' =< (0,1,0,0),(0,1,0,1) > .$$

A aplicação $f : V \to V'$ definida por

$$f(1,0,0) = (0,1,0,0) \text{ e } f(0,1,0) = (0,1,0,1)$$

é um isomorfismo.

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. O resultado seguinte permite concluir que se $V \cong V'$, então também se tem $V' \cong V$. Diz-se, então, que os espaços V e V' são isomorfos.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Se $f : V \to V'$ é um isomorfismo, então f^{-1} é um isomorfismo.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então $V \cong V'$ se e só se $\dim V = \dim V'$.

Demonstração:

Se $V = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ ou $V' = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$, o resultado é óbvio.

Consideremos, agora o caso em que $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e $V' \neq \{0_{\mathbb{R}^m}\}$.

Se V e V' são espaços vetoriais isomorfos, então existe um isomorfismo $f : V \to V'$.

Seja $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V. Então $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ é uma base de V'. Logo $\dim V = \dim V'$.

Demonstração (continuação):

Reciprocamente, suponhamos que $\dim V = r = \dim V'$, $r \in \mathbb{N}$.

Sejam $(v_1, \ldots, v_r)$ e $(u_1, \ldots, u_r)$ bases de V e V', respectivamente.

Pelo Teorema da Extensão Linear sabemos que existe uma aplicação linear $f : V \to V'$ tal que $f(v_i) = u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Então, considerando que $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ é uma base de V', podemos concluir que f é um isomorfismo. $\square$

Representação matricial de uma aplicação linear

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Seguidamente iremos verificar que, se fixarmos uma base do espaço vetorial V e uma base do espaço vetorial V', toda aplicação linear de V em V' pode ser representada, em relação a essas bases, por uma única matriz, que a caracteriza completamente.

Aplicações Lineares

Se V é um espaço vetorial de dimensão $r \geq 1$, então, pelo Teorema da Extensão Linear, uma aplicação linear f de V em V' fica completamente definida pelas imagens dos vetores de uma base de V, i.e., sendo $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, uma aplicação linear $f : V \to V'$ fica completamente determinada por $f(v_1), \ldots, f(v_r)$.

Por outro lado, se V' tem dimensão finita $p \geq 1$ e $(v'_1, \ldots, v'_p)$ é uma base de V', cada vetor de V' escreve-se, de modo único, como combinação linear de $v'_1, \ldots, v'_p$. Em particular, cada vetor $f(v_j)$, $j = 1, \ldots, r$, fica perfeitamente determinado se forem conhecidas as suas coordenadas em relação à base $(v'_1, \ldots, v'_p)$. De facto, se $(a_{1j}, \ldots, a_{pj}) \in \mathbb{R}^n$ é a sequência de coordenadas de $f(v_j)$ na base $(v'_1, \ldots, v'_p)$, então

$$f(v_j) = a_{1j}v'_1 + \ldots + a_{pj}v'_p.$$

Aplicações Lineares

Assim, fixadas as bases $(v_1, \ldots, v_r)$ de V e $({v_1}', \ldots, {v_p}')$ de V', a aplicação linear f fica completamente caracterizada pelos escalares a_{ij}, $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots r\}$, e podemos associar a f a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pr} \end{bmatrix}$$

que caracteriza completamente f.

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_p)$ uma base de V' e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Designa-se por ***matriz da aplicação linear*** f ***em relação às bases*** $\mathcal{B}$ ***e*** $\mathcal{B}'$*, e representa-se por $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ou $M(f; (v_j), (v'_i))$, a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{K})$ tal que $f(v_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} v'_i$, $j \in \{1, \ldots, r\}$.*

Terminologia: Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ uma base de V. Se f é endomorfismo de V, à matriz de f em relação a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}$ chama-se apenas matriz de f em relação a $\mathcal{B}$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V e $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_p')$ uma base de V'. Então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{L}(V, V') & \rightarrow & \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \end{array}$$

é bijetiva.

Demonstração.

Imediato pelo Teorema da Extensão Linear. $\square$

Observação: Sendo V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V e $(v'_1, \ldots, v'_p)$ uma base de V', do teorema anterior resulta que toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{p\times r}(\mathbb{K})$ é matriz em relação às bases $(v_1, \ldots, v_r)$ e $(v'_1, \ldots, v'_p)$ de uma e uma só aplicação linear $f : V \to V'$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a aplicação definida por*

$$f(x, y, z) = (2x - 3y + z, 3x - 2y),$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *Consideremos as bases*

$\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ *de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathcal{B}_1{}' = ((1, 1), (1, -1)$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Tem-se

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0) &= (2, 3) = \tfrac{5}{2}(1, 1) - \tfrac{1}{2}(1, -1), \\ f(1, 1, 0) &= (-1, 1) = 0(1, 1) + (-1)(1, -1), \\ f(1, 1, 1) &= (0, 1) = \tfrac{1}{2}(1, 1) - \tfrac{1}{2}(1, -1), \end{aligned}$$

Portanto, $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1{}') = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Exemplo

Sendo V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$, V' *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ *uma base de* V, $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_p)$ *uma base de* V', *tem-se* $M(0_{\mathcal{L}(V,V')}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = 0_{p \times r}$.

Exemplo

Sendo V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ *uma base de* V, *tem-se* $M(id_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_r$.

O resultado seguinte permite determinar a característica de uma aplicação linear, isto é, a dimensão do seu espaço imagem, através da característica de uma qualquer matriz da aplicação linear.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, $(v'_1, \ldots, v'_p)$ uma base de V', $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e

$$A = M(f; (v_j), (v'_i)).$$

Então $c_f = car(A)$.

Sendo V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$, $\mathcal{B}$ uma base de V e $\mathcal{B}'$ uma base de V', vejamos como utilizar a matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ para determinar a imagem por f de qualquer vetor $v \in V$.

Definição

*Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V. Dado $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r \in V$, designa-se por **vetor coluna de** v na base $\mathcal{B}$, e representa-se por $[v]_{(v_j)}$ ou por $[v]_{\mathcal{B}}$, a matriz*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$$

das coordenadas de v relativamente à base $\mathcal{B}$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r)$ uma base de V e $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_p)$ uma base de V'. Sejam $f \in \mathcal{L}(V, V')$, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $v \in V$. Se $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ é a sequência de coordenadas de v na base $\mathcal{B}$, então a sequência de coordenadas de $f(v)$ na base $\mathcal{B}'$ é $(\beta_1, \dots, \beta_p)$ tal que

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}.$$

Demonstração.

Sejam $A = [a_{ij}] = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $v = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$. O vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é

$$[v]_{(v_j)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{R})$$

e tem-se

$$A[v]_{(v_j)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{r} a_{1j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{r} a_{pj}\alpha_j \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{R}).$$

Demonstração (continuação).

O vetor $A[v]_{(v_j)}$ é o vetor coluna de $f(v)$ na base $(v'_1, \ldots, v'_p)$, uma vez que

$$\begin{aligned}
f(v) &= f(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j (\sum_{i=1}^{p} a_{ij} v'_i) \\
&= \sum_{j=1}^{r} (\sum_{i=1}^{p} \alpha_j (a_{ij} v'_i)) = \sum_{j=1}^{r} (\sum_{i=1}^{p} (\alpha_j a_{ij}) v'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{r} (\alpha_j a_{ij}) v'_i) = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{r} \alpha_j a_{ij}) v'_i \\
&= \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{r} a_{ij} \alpha_j) v'_i.
\end{aligned}$$

Observação: De acordo com o teorema anterior, podemos determinar a imagem por f de um vetor v multiplicando a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ pelo vetor coluna de v relativamente à base $\mathcal{B}$. O resultado deste produto é o vetor coluna de $f(v)$ relativamente à base $\mathcal{B}'$.

Exemplo

Consideremos as bases

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B} & = & ((1,1),(1,0)) \text{ de } \mathbb{R}^2, \\ \mathcal{B}' & = & ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)) \text{ de } \mathbb{R}^3, \end{array}$$

e seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *a aplicação linear tal que* $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Vamos determinar $f(2,-1)$ *seguindo o processo descrito anteriormente. Para tal, comecemos por escrever* $(2,-1)$ *como combinação linear dos vetores da base* $\mathcal{B}$*. Tem-se* $(2,-1) = (-1)(1,1) + 3(1,0)$, *pelo que o vetor coluna de* $(2,-1)$ *na base* $\mathcal{B}$ *é* $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Exemplo (continuação)

Logo

$$A\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $f(2,-1)$ na base $\mathcal{B}'$. Logo

$$f(2,-1) = -2(1,1,1) + 4(1,1,0) + 6(1,0,0) = (8,2,-2).$$

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, V'' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^p$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V, $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_s')$ uma base de V' e $\mathcal{B}'' = (v_1'', \ldots, v_p'')$ uma base de V''. Então

1. $\forall f, g \in \mathcal{L}(V, V'),\ \ M(f+g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') + M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$;

2. $\forall f \in \mathcal{L}(V, V'), \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \ M(\alpha f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \alpha M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$;

3. $\forall f \in \mathcal{L}(V, V'), \forall g \in \mathcal{L}(V', V'')$,

$$M(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = M(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

O resultado seguinte permite determinar a aplicação inversa de um isomorfismo f recorrendo à representação matricial de f.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ tais que $\dim V = \dim V' = r$. Sejam $\mathcal{B}$ uma base de V, $\mathcal{B}'$ uma base de V', $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Então

1) *A é invertível se e só se f é um isomorfismo.*
2) *Se f é um isomorfismo, então $A^{-1} = M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$.*

Demonstração.

Sejam $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Admitamos que A é invertível. Então existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ tal que

$$AA^{-1} = I_r = A^{-1}A.$$

Como $f : V \to V'$ é uma aplicação linear, resta mostrar que f é bijetiva, ou seja, que existe uma aplicação $g : V' \to V$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_{V'}$ e $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Demonstração (continuação).

Seja $g : V' \to V$ a aplicação linear tal que $A^{-1} = M(g; \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Pelo teorema anterior, tem-se

$$M(f \circ g; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = AA^{-1} = I_r = M(\mathrm{id}_{V'}; \mathcal{B}', \mathcal{B}');$$

logo $f \circ g = \mathrm{id}_{V'}$. Também se tem

$$M(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(g; \mathcal{B}', \mathcal{B})M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A^{-1}A = \mathrm{I}_r = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}),$$

e, portanto, $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Assim $f : V \to V'$ é aplicação linear bijetiva; i.e., f é isomorfismo de V em V'.

Demonstração (continuação).

Reciprocamente, se $f : V \to V'$ é um isomorfismo, também $f^{-1} : V' \to V$ é um isomorfismo. Seja $B = M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Novamente pelo teorema anterior, tem-se

$$AB = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = M(f \circ f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = M(\mathrm{id}_{V'}; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \mathrm{I}_r,$$

$$BA = M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B})M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M(f^{-1} \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(\mathrm{id}_{V'}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathrm{I}_r,$$

i.e., $AB = \mathrm{I}_r = BA$ e, portanto, A é invertível.

2) Exercício.

□

Exemplo

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ com base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. Seja $f : V \to V$ a aplicação linear tal que $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é invertivel, logo f é um isomorfismo. Pretendemos determinar $f^{-1}(av_1 + bv_2)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$M(f^{-1}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b \\ b \end{bmatrix},$$

então

$$f^{-1}(av_1 + bv_2) = \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b \right) v_1 + bv_2.$$

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$, $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1'$ bases de V, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2'$ bases de V'. A respeito da representação matricial de aplicações lineares, iremos verificar que as matrizes $M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ e $M(f; \mathcal{B}_1', B_2')$, que em geral são distintas, estão relacionadas. Para estabelecer a relação existente entre matrizes de uma mesma aplicação linear relativas a bases distintas, introduzimos a noção de matriz de *mudança de base*.

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de V. Dá-se o nome de ***matriz de mudança de base de*** *$\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ à matriz $M(id_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.*

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de V e $A = M(id_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Então A é invertível e

$$A^{-1} = M(id_V; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Demonstração.

Imediato pelo teorema anterior. $\square$

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, e $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ e $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_r')$ bases de V. Se $v = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$ e $v = \sum_{i=1}^{r} {\alpha_i}' v_j'$, tem-se

$$M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {\alpha_1}' \\ \vdots \\ {\alpha_r}' \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Considerando que $v = \mathrm{id}_V(v)$, o resultado é imediato.

Do teorema anterior conclui-se que conhecida a expressão de v como combinação linear dos vetores de uma base $\mathcal{B}$, a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ permite escrever v como combinação linear de $\mathcal{B}'$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de V, ${\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}'$ bases de V' e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então

$$M(f; \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_2}') = M(\mathrm{id}_V; {\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}')M(f; \mathcal{B}_1, {\mathcal{B}_1}')M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1).$$

Demonstração:

Tem-se $f = \mathrm{id}_{V'} \circ (f \circ \mathrm{id}_V)$. Logo

$$\begin{aligned} M(f; \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_2}') &= M(\mathrm{id}_{V'} \circ (f \circ \mathrm{id}_V); \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_2}') \\ &= M(\mathrm{id}_{V'}; {\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}')M(f \circ \mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_1}') \\ &= M(\mathrm{id}_{V'}; {\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}')M(f; \mathcal{B}_1, {\mathcal{B}_1}')M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1). \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo

Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$. *Sejam* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}'_1$ *as bases de* $\mathbb{R}^3$ *a seguir indicadas*

$$\mathcal{B}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)), \quad \mathcal{B}'_1 = ((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$$

e $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}'_2$ *as bases de* $\mathbb{R}^2$ *definidas por*

$$\mathcal{B}_2 = ((1,1),(0,1)), \quad \mathcal{B}'_2 = ((1,0),(1,2)).$$

Exemplo (continuação):

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (2a + b, c - b),$$

para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\begin{array}{rcccl} f(0,0,1) & = & (0,1) & = & 0(1,1) + 1(0,1), \\ f(0,1,1) & = & (1,0) & = & 1(1,1) + (-1)(0,1), \\ f(1,1,1) & = & (3,0) & = & 3(1,1) + (-3)(0,1). \end{array}$$

Logo $M(f; \mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = A.$

Exemplo (continuação):

Vamos determinar $B = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_2)$. Pelo teorema indicado na página 67, tem-se

$$B = M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) A M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1),$$

pelo que comecemos por determinar $M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$ e $M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)$. Tem-se

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(1,0,0) & = & (1,0,0) & = & 0(0,0,1) + (-1)(0,1,1) + 1(1,1,1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(0,1,0) & = & (0,1,0) & = & (-1)(0,0,1) + 1(0,1,1) + 0(1,1,1) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}(0,0,1) & = & (0,0,1) & = & 1(0,0,1) + 0(0,1,1) + 0(1,1,1) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(1,1) & = & (1,1) & = & \frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(1,2) \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(0,1) & = & (0,1) & = & -\frac{1}{2}(1,0) + \frac{1}{2}(1,2). \end{array}$$

Exemplo (continuação):

Assim,

$$M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1') = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2') = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} B = M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2') &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, V' um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ tais que $\dim V = r$ e $\dim V' = p$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bases de V, $\mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}'_2$ bases de V' e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Se $A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)$ e $B = M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)$, então, pelo teorema anterior, existem matrizes invertíveis $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ e $Q \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ tais que $B = PAQ$.

Considerando que toda a matriz invertível é igual a um produto de matrizes elementares, do último resultado conclui-se que quaisquer duas matrizes de uma mesma aplicação linear são equivalentes por linhas e por colunas.