

Análise

— Folha de exercícios 4 — 2022'23 —

1. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2y$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calcule, usando a definição de derivada parcial:

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$;

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$;

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$;

(d) $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

2. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

(a) $f(x, y) = 5y^3 + 2xy - x^2$;

(b) $f(x, y) = ye^x + x \cos(x^2y)$;

(c) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy^3}$;

(d) $f(x, y) = \log(\cos(xy))$;

(e) $f(x, y, z) = \sin x + \log x + e^{xz}$;

(f) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2yz^3}$;

(g) $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$.

3. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por

(a) $f(x, y) = 1$ se $(x = 0 \text{ ou } y = 0)$, e $f(x, y) = 0$ se $xy \neq 0$;

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$;

(c) $f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$;

(d) $f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$ se $x + y \neq 0$, e $f(x, y) = x$ se $x + y = 0$;

4. Mostre que:

(a) se $f(x, y) = e^{xy}$, então $x \frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial f}{\partial y}$;

(b) se $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + xy)$, então $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2$;

(c) se $f(x, y, z) = x + \frac{x-y}{y-z}$, então $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1$.

5. Usando a definição, calcule a derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ da função f no ponto A na direcção e sentido do vector \vec{v} , para:

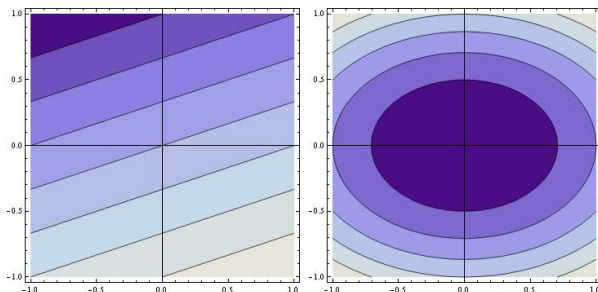
(a) $f(x, y) = xy$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (1, 0)$;

(b) $f(x, y) = x^2y + x$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (1, 0)$;

(c) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, $\vec{v} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (1, 1)$;

- (d) $f(x, y) = 3x + y^2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (0, 0)$;
- (e) $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (0, 0)$;
- (f) $f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $A = (1, 2, -1)$.

6. As curvas de nível de uma função f , nas quais os níveis mais elevados têm a cor mais clara, são apresentadas em cada uma das seguintes figuras. Qual o sinal de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e de $\frac{\partial f}{\partial y}$ (para uma série de pontos à sua escolha)?



7. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, onde:

(a) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$;

(b) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$.

8. Mostre que não são deriváveis em $(0, 0)$ cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$;

(b) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$;

(c) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$.

9. Calcule o gradiente de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x, y, z) = xe^{y^2+z^2}$;

(b) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2+2}$;

(c) $f(x, y, z, w) = z^2 \cos(xy) \ln(xy)$.

10. Para cada uma das seguintes funções:

$$f(x, y, z) = x + y + \sin(xy^2), \quad g(x, y, z) = e^{xy} + 4z, \quad h(x, y, z) = \sin x + 3\sin y + z,$$

- (a) justifique que são diferenciáveis na origem;
- (b) determine a derivada direccional na origem segundo o vector $\vec{v} = (1, 3, -1)$.

11. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

- (a) Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem de f .
- (b) Verifique se f é diferenciável em $(0, 0)$. Justifique.

12. Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^3$ no ponto de coordenadas $(3, 1, 10)$.
13. Mostre que os gráficos das funções $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ têm o mesmo plano tangente em $(0, 0)$.
14. Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = e^{x-y}$ no ponto $(1, 1, 1)$ com o eixo de zz .
15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
- (a) Mostre que existe $Df(A, \vec{u})$, $\forall A, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$;
- (b) Verifique se f é derivável em $(0, 0)$.
16. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$
- (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e verifique quando não são contínuas em $(0, 0)$;
- (c) Verifique se f é derivável em $(0, 0)$.
17. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
- Mostre que:
- (a) f é contínua;
- (b) $Df((0, 0), (a, b)) = f(a, b)$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$;
- (c) Verifique se f é derivável em $(0, 0)$.
18. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$.
- (a) Obtenha o vector gradiente $\nabla f(x, y, z)$;
- (b) Justifique que f é derivável em todos os pontos de \mathbb{R}^3 ;
- (c) Determine $f'(0, \frac{\pi}{3}, 1)$;
- (d) Determine $\frac{\partial f}{\partial (4, 0, 3)}(0, \frac{\pi}{3}, 1)$;
- (e) Determine a taxa de variação de f no ponto $(0, \frac{\pi}{3}, 1)$ e na direcção e sentido de $\vec{v} = (4, 0, 3)$.
19. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = 3xy + y^2$.
- (a) Justifique que f é derivável em todos os pontos de \mathbb{R}^2 ;
- (b) Determine $f'(2, 3)$;
- (c) Determine a taxa de variação de f no ponto $(2, 3)$ e na direcção de $\vec{v} = (3, 4)$;
- (d) Qual o sentido e direcção a seguir, partindo de $(2, 3)$, para que a taxa de variação de f seja máxima?
- (e) Qual a taxa de variação máxima de f no ponto $(2, 3)$?
- (f) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 3, 27)$.