Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Álgebra Linear LCC Exame de recurso 29/01/2020 Duração: 2h30

Proposta de resolução

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$ uma matriz real. Para quaisquer valores de a, b e c,

   - [X] $A + A^T$ é simétrica.
   - [ ] $A^T A = AA^T$.
   - [ ] A comuta com $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.
   - [ ] $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & c^2 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   - [ ] O sistema $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é impossível.
   - [ ] $A - 2I_3$ é invertível.
   - [X] O sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem solução única para qualquer $\boldsymbol{b}$.
   - [ ] $(A - 2I_3)^T$ é invertível.

3. Se A é uma matriz de ordem 4 tal que $\det(A) = 3$, então

   - [ ] $\det(-A) = -3$.
   - [ ] $\det\left(A^T A\right) = 1$
   - [ ] $\det(A^T) = \dfrac{1}{3}$.
   - [X] $\det(A^{-1}A^2) = 3$.

4. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 e $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$ três vetores de V linearmente independentes. Então

   - [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - [X] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto gerador de V.
   - [ ] $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, 2\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente independente.

5. Seja $S = \langle (1,1,0), (0,2,0), (4,3,0) \rangle$. Então

   - [ ] $\dim(S) = 3$.
   - [X] $(3,3,0) \in S$.
   - [ ] $(0,0,0) \notin S$.
   - [ ] $S = \mathbb{R}^3$.

6. Seja G uma aplicação linear cuja representação matricial é $A_G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

- ☐ $G(x,y,z) = (x-y, y, -y+z)$, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
- ☒ Tem-se $H(1,1,1) = (-1,1,-3)$ para $H = G \circ G$.
- ☐ $(0,0,3) \notin \mathsf{Im}(G)$.
- ☐ $(1,1,1) \in \mathsf{Nuc}(G)$.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todas as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ (sem calcular A^{-1}).

   (b) Determine a matriz X que satisfaz a equação

   $$AX - 2A = 3I + A,$$

   onde I é a matriz identidade de ordem 3.

Resolução.

(a) Temos

$$A \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -2+3 & 2-2 & 2-2 \\ 3-3 & -2+3 & -2+2 \\ -3+3 & 3-3 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$.

(b)

$$AX - 2A = 3I + A \iff AX = 3I + 3A \iff X = A^{-1}(3I + 3A)$$
$$\iff X = 3A^{-1} + 3A^{-1}A \iff X = 3A^{-1} + 3I$$
$$\iff X = 3\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 9 & -3 & -6 \\ 9 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

2. [2.5 valores] Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, seja $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & \beta \\ -1 & 1 & \alpha & -\beta \end{array}\right]$ a matriz ampliada de um sistema com 3 incógnitas e 3 equações.

(a) Discuta a existência e unicidade de soluções do sistema, em função dos parâmetros α e β.

(b) Use o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema quando

i. $\alpha = 0$ e $\beta = 0$; ii. $\alpha = -5$ e $\beta = 2$.

<u>Resolução.</u>

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & \beta \\ -1 & 1 & \alpha & -\beta \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \beta - 2 \\ 0 & 2 & 1+\alpha & 2-\beta \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & 5+\alpha & \beta-2 \end{array}\right]$$

- Se $\alpha = -5$ e $\beta = 2$, obtemos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que corresponde a um sistema possível e indeterminado. Se A é a matriz simples do sistema e $\boldsymbol{b}$ o vetor dos termos independentes, temos $c(A) = c(A|\boldsymbol{b}) = 2 < n = 3$.

- Se $\alpha = -5$ e $\beta \neq 2$, a matriz ampliada é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-2 \end{array}\right]$$

e o sistema correspondente é impossível, uma vez que, sendo $\beta - 2 \neq 0$, $c(A) = 2 \neq c(A|\boldsymbol{b}) = 3$.

- Se $\alpha \neq -5$ e $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema tem uma única solução, pois $c(A) = c(A|\boldsymbol{b}) = n = 3$.

(b) i. Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, temos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{array}\right]$$

correspondente ao sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 2 \\ & -y & +2z & = -2 \\ & & 5z & = -2 \end{array}\right. .$$

Por substituição inversa, obtemos a solução única $(x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right)$,

$$\begin{cases} x = 2 - y - z = 2 - \frac{6}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \\ y = 2 + 2z = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \\ z = -\frac{2}{5} = 2 \end{cases}.$$

ii. Se $\alpha = -5$ e $\beta = 2$, como já observado, temos a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema possível e indeterminado

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 2 \\ & -y & +2z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{cases} x = 2 - y - z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - 3z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Ou seja, o conjunto-solução é o conjunto

$$\{(2 - 3z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

3. [1.5 valores] Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\det(A)$.
Dada uma matriz invertível P, qual o valor de $\det(PA^{-1}P^{-1})$?

Resolução.

Temos

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 4 \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \times 16 + 4 \times 4 = 32,$$

uma vez que

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 1 \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2(2+3) - (0-6) = 16$$

e

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -2 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -2(4-6) = 4.$$

Uma vez que, sendo P invertível, $\det(P) \neq 0$, vem

$$\det(PA^{-1}P^{-1}) = \det(P)\det(A^{-1})\det(P^{-1}) = \det(P) \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \frac{1}{\det(P)} = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{32}.$$

4. [1.5 valor] Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o conjunto de vetores

$$W = \{(1,0,2), (-1,2,-3), (1,4,k)\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determine os valores de k para os quais W é uma base de $\mathbb{R}^3$.

<u>Resolução.</u>

Como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, para que W seja uma base de $\mathbb{R}^3$, os vetores $(1,0,2), (-1,2,-3)$ e $(1,4,k)$ têm de ser linearmente independentes, ou seja, a característica da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \longleftarrow l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & k-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - 2l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

deve ser 3. Para tal terá de ser $k \neq 0$.

5. [2 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$T(x,y,z,w) = (x + 2y - w, -x + 3y + z + w).$$

(a) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.

(b) Determine uma base para $\mathsf{Im}(T)$.

<u>Resolução.</u>

(a) Consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^4$,

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4) = \big((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\big).$$

Temos

$$T(\boldsymbol{e}_1) = (1,-1), \;\; T(\boldsymbol{e}_2) = (2,3), \;\; T(\boldsymbol{e}_3) = (0,1), \;\; T(\boldsymbol{e}_4) = (-1,1)$$

e

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa T.

(b)

$$\begin{aligned} \mathsf{Im}(T) &= \big\{T(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4\big\} \\ &= \{(x + 2y - w, -x + 3y + z + w) : x,y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-1) + y(2,3) + z(0,1) + w(-1,1) : x,y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,-1), (2,3), (0,1), (-1,1) \rangle \end{aligned}$$

Vejamos sobre a independência linear dos vetores geradores de $\mathsf{Im}(T)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \longleftarrow l_2 - 2l_1 \\ l_4 \longleftarrow l_4 + l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \longleftarrow l_3 - \frac{1}{5}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Concluímos, assim, que dois vetores do conjunto gerador são linearmente independentes e constituem, portanto, uma base de $\mathsf{Im}(T)$,

$$\mathsf{Im}(T) = \langle (1,-1), (2,3) \rangle = \mathbb{R}^2.$$

6. [2 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Quais os valores próprios da matriz $A - I_3$?

(c) Verifique que $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ é um vetor próprio de A e diga a que valor próprio está associado.

Resolução.

(a) Os valores próprios de A são as soluções da equação $\det(A - \lambda I) = 0$. Temos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\ &\iff (3-\lambda)\big[(2-\lambda)^2 - 4\big] = 0 \iff 3-\lambda = 0 \ \vee\ (2-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda = 3 \ \vee\ (2-\lambda)^2 = 4 \iff \lambda = 3 \ \vee\ 2-\lambda = 2 \ \vee\ 2-\lambda = -2 \\ &\iff \lambda = 3 \ \vee\ \lambda = 0 \ \vee\ \lambda = 4 \end{aligned}$$

Logo, os valores próprios de A são 0, 3 e 4 (com multiplicidade algébrica 1).

(b) Os valores próprios de $A - I_3$ são $0 - 1 = -1$, $3 - 1 = 2$ e $4 - 1 = 3$.

(c) Temos

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\boldsymbol{x},$$

ou seja, $\boldsymbol{x}$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio 4.

7. [1.5 valores] Uma matriz $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se de rotação se $R^{-1} = R^T$ e $\det(R) = 1$, onde R^T denota a matriz transposta de R.

Dada uma matriz de rotação $R \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, prove que existem vetores não nulos $v \in \mathbb{R}^3$ que são fixados por R, ou seja, tais que $Rv = v$.

Sugestão: Observe que v será um vetor próprio de R e use a relação de valores e vetores próprios com o conceito de determinante.

Resolução.

A existência de uma vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $Rv = v$ equivale a afirmar que 1 é valor próprio de R, ou ainda, que $\det(R - I) = 0$. De facto, usando as condições sobre $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e as propriedades dos determinantes, temos

$$\begin{aligned} \det(R - I_n) &= \det(R - RR^T) = \det\big(R(I_n - R^T)\big) = \det(R)\det(I_n - R^T) \\ &= 1 \cdot \det\big((I_n - R)^T\big) = \det(I_n - R) = (-1)^n \cdot \det(R - I_n) \end{aligned}$$

Para uma matriz R de ordem $n = 3$, vem

$$\det(R - I_n) = -\det(R - I_n) \iff 2\det(R - I_n) = 0 \iff \det(R - I_n) = 0,$$

como pretendíamos verificar.