## Matrizes

## Exercícios (continuação)

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

são comutáveis.

35. Mostre que $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$ para o caso em que $A$ e $B$ são matrizes de ordem 2.

36. Sejam $A$ e $B$ matrizes quadradas de ordem $n$. Mostre que $\left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1} = A(A+B)^{-1}B$, admitindo que todas as inversas existem.

37. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz real. Mostre $A$ é invertível e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

quando $ad - cb \neq 0$.

38. Considere as matrizes $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva a equação matricial

$$\left( \left(XA^{-1}\right)^{-1} + ACB \right)^T = A^T,$$

em ordem à variável $X$, sabendo que $A$ é uma matriz invertível de ordem 2.

39. Mostre que, para $A$ e $B$ matrizes de ordem $n$, se $\left( \left(A^{-1}\right)^T B \right)^{-1} = I_n$, então $B = A^T$.

40. Seja $\boldsymbol{x}$ uma matriz de ordem $n \times 1$ (vetor coluna) tal que $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = 1$. Mostre que $I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ é uma matriz simétrica e ortogonal.

41. Justifique que a matriz

$$V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

é invertível e que a sua inversa é $V_{-\alpha}$.

42. Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$. Justifique que

    (a) se $A$ tem uma linha (ou coluna) nula, então $A$ não é invertível.

    (b) se $A$ tem as linhas $i$ e $j$ iguais, com $i \neq j$, então $A$ não é invertível.

43. Dê exemplo de matrizes quadradas $A$ e $B$ tais que

   (a) $A$ e $B$ são invertíveis e $A + B$ não é invertível.

   (b) $A + B$ é invertível e nem $A$ nem $B$ são invertíveis.

44. Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $n$ tal que $A^2 = I_n$. Mostre que $A$ é invertível e indique a sua inversa.

45. Seja $A$ uma matriz invertível com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que

   (a) existe uma, e uma só, matriz $B$ tal que $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e determine-a.

   (b) existe uma, e uma só, matriz $C$ tal que $AC = A^2 + A$ e determine-a.

46. Mostre que para quaisquer duas matrizes quadradas $A$ e $B$ se tem que

   (a) se $A$ e $B$ são simétricas, então $A + B$ é simétrica.

   (b) se $A$ e $B$ são simétricas, então $AB$ é simétrica se e só se $A$ e $B$ comutam.

   (c) se $A$ é invertível e simétrica, então $A^{-1}$ é simétrica.

47. Indique quais das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) são simétricas;

   (b) são anti-simétricas.

48. Seja $A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Verifique que

   (a) para qualquer matriz da forma $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 1-a \\ d & -1 & d \end{bmatrix}$, com $a, d \in \mathbb{R}$, se tem $BA = I_2$.

   (b) qualquer que seja $B = [b_{ij}]_{2\times 3}$ se tem $AB \neq I_3$.

49. Verifique, usando a definição, que

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & -\gamma & 1 \end{bmatrix}$ não é a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix}$.

50. Indique, se existir, uma matriz $A$ de ordem 3, sob a forma de um produto de matrizes elementares, tal que, quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, se verifique

(a) $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ c \end{bmatrix}$. (b) $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ c \\ -b \end{bmatrix}$. (c) $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ b+3c \\ -a \end{bmatrix}$.

51. Para cada uma das alíneas do exercício anterior, calcule a inversa da matriz $A$, observando que esta se pode escrever como produto de matrizes elementares.

52. Considere as matrizes elementares

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique as respetivas matrizes inversas.

(b) Considere a matriz

$$S = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{com } \alpha \neq 0.$$

Represente $S$ através de um produto de matrizes elementares, conclua que $S$ é invertível e determine $S^{-1}$.

53. Uma **matriz de permutação** de ordem $n$ é qualquer matriz que resulta de $I_n$ efetuando uma sequência finita com $k \in \mathbb{N}_0$ transformações elementares do tipo I.

Justifique que se $P$ é uma matriz de permutação de ordem $n$ então

$$PP^T = I_n.$$

Sugestão: Atenda a que se $E$ é uma matiz elementar de tipo I então $E^T = E$.

54. Indique uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

55. Para cada das seguintes matrizes obtenha uma matriz equivalente por linhas em forma de escada (não reduzida) e a matriz equivalente por linhas em forma de escada reduzida:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_n.$$

56. Considere as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a característica de $A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

57. Discuta, segundo o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$, a característica da matriz

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

58. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Mostre que $A$ é invertível e determine $A^{-1}$.

    (b) Exprima $A$ e $A^{-1}$ como produto de matrizes elementares.

59. Determine se cada uma das matrizes seguintes é invertível e, em caso afirmativo, determine a sua inversa.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

    (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

    (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

    (e) $E = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

    (f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

60. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & b_2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ b_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

com $b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$. Justifique que $B$ é invertível e indique $B^{-1}$.

61. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \beta \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para que valores de $\alpha$ e $\beta$ é a matriz $A$ invertível?

62. Justifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível para qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$ e determine $A^{-1}$.

63. Um matriz $A$ de ordem $n$ diz-se **involutiva** se $A^2 = I_n$ e **idempotente** se $A^2 = A$. Mostre que

    (a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é involutiva, quaisquer que sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

    (b) se $N$ é involutiva, então

$$\frac{1}{2}(I_n + N) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(I_n - N)$$

    são idempotentes e

$$(I_n + N)(I_n - N) = O.$$

    (c) toda a matriz involutiva se pode escrever como a diferença de duas matrizes idempotentes, cujo produto é a matriz nula.

## Soluções

36. Usando a definição de inversa,

$$\begin{aligned}
&\left(A^{-1}+B^{-1}\right)\Big(A(A+B)^{-1}B\Big) = \left(\left(A^{-1}+B^{-1}\right)A\right)(A+B)^{-1}B\\
&= \left(I_n + B^{-1}A\right)(A+B)^{-1}B = \left(B^{-1}B + B^{-1}A\right)(A+B)^{-1}B\\
&= B^{-1}\left(B+A\right)(A+B)^{-1}B = B^{-1}I_nB = I_n
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\Big(A(A+B)^{-1}B\Big)\left(A^{-1}+B^{-1}\right) = A(A+B)^{-1}\left(B\left(A^{-1}+B^{-1}\right)\right)\\
&= A(A+B)^{-1}\left(BA^{-1}+I_n\right) = A(A+B)^{-1}\left(BA^{-1}+AA^{-1}\right)\\
&= A(A+B)^{-1}(B+A)\,A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n.
\end{aligned}$$

38. $X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

39. $\Big((A^{-1})^T B\Big)^{-1} = I_n \Longrightarrow \Big((A^T)^{-1}B\Big)^{-1} = I_n \Longrightarrow B^{-1}A^T = I_n \Longrightarrow A^T = B$

40. $\left(I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right)^T = I_n - \left(2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right)^T = I_n - 2\left(\boldsymbol{x}^T\right)^T \boldsymbol{x}^T = I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$, logo é simétrica.

$\left(I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right)\left(I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right)^T = \left(I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right)\left(I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right) = I_n - 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T + 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T = I_n$ e

$\left(I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right)^T\left(I_n - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\right) = I_n$, logo é ortogonal.

41. Comece por observar que $V_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ e verifique que $V_\alpha V_{-\alpha} = V_{-\alpha}V_\alpha = I_2$.

43. (a) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

44. $A^{-1} = A$

45. (a) $B = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$ (b) $C = A + I_3$

47. (a) $A$ e $C$ (b) $A$ e $E$

50. Por exemplo,

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

51. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

52. (a)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) $S = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha & -\beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

54.

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ por exemplo}$$

55.

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.)}; \quad A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo}$$

$$B \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.)}; \quad B \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo}$$

$$C \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.)}; \quad C \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo}$$

$$D \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e.r.)}; \quad D \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (f.e), por exemplo}$$

$$I_n \text{ (f.e.r)}; \quad 5I_n \text{ (f.e), por exemplo}$$

56. $\text{car}(A_1) = 3,\ \text{car}(A_2) = 3,\ \text{car}(A_3) = 2,\ \text{car}(A_4) = 3.$

57. $\text{car}(B_\alpha) = \begin{cases} 3 \text{ se } \alpha = 2 \\ 4 \text{ se } \alpha \neq 2 \end{cases}$

58. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

59. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

(b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

(c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

(d) Não existe.

(e) Não existe.

(f) $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$

60. $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b_n^{-1} \\ 0 & \dots & b_{n-1}^{-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ b_1^{-1} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

61. $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \alpha$.

62. $\text{car}(A) = n = 4$ para qualquer valor de $a \in \mathbb{R}$, logo $A$ é invertível.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$