Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2025/2026

Departamento de Matemática

Espaços Vetoriais $\mathbb{R}^n$

Espaços Vetoriais $\mathbb{R}^n$

Muitas estruturas matemáticas têm propriedades em comum que podem ser generalizadas através de um estudo mais abstrato. Um dos principais objetos de estudo da Álgebra Linear são os *Espaços Vetoriais*.

Esta noção é uma generalização da estrutura associada ao conjunto formado por todos os segmentos orientados com origem num determinado ponto, munido das operações de adição de segmentos orientados e multiplicação de um escalar por um segmento. Os elementos deste conjunto são conhecidos por vetores, termo que que dá origem à denominação *espaço vetorial*.

Espaços Vetoriais $\mathbb{R}^n$

Os pontos e segmentos orientados no plano são geralmente identificados com elementos de $\mathbb{R}^2$, onde a adição de vetores de $\mathbb{R}^2$ e a multiplicação de números reais por vetores de $\mathbb{R}^2$ possuem uma interpretação geométrica natural. De modo análogo, no espaço tridimensional, os pontos e segmentos orientados correspondem a elementos de $\mathbb{R}^3$, e as operações de adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores também têm significado geométrico. Estas duas estruturas servem de motivação para o estudo dos chamados espaços vetorias $\mathbb{R}^n$.

Espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^n$

Dado $n \in \mathbb{N}$, representamos por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, ..., n\},$$

o conjunto dos n-úplos ordenados de elementos de $\mathbb{R}$. Este conjunto pode ser dotado de operações adequadas de adição de vetores e multiplicação de escalares por vetores, de modo a constituir um espaço vetorial.

Teorema

Sejam $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *as operações definidas, respetivamente, por*

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,
  para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,
- $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$,
  para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Então, são válidas as seguintes propriedades:

Teorema (continuação)

(1) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n} \quad x+y=y+x;$

(2) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}^n} \quad x+(y+z)=(x+y)+z;$

(3) $\forall_{x\in\mathbb{R}^n} \quad x+0_{\mathbb{R}^n}=x=0_{\mathbb{R}^n}+x;$

(4) $\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\,\exists_{x'\in\mathbb{R}^n} \quad x+x'=0_{\mathbb{R}^n}=x'+x;$

(5) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n}\,\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y;$

(6) $\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\,\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \quad (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x;$

(7) $\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\,\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \quad (\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x);$

(8) $\forall_{x\in\mathbb{R}^n} \quad 1\cdot x=x.$

Definição

Ao quádruplo $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$*, onde* $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *e* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *são as operações definidas, respetivamente, por*

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,
  para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)\,, y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,
- $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$,
  para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

dá-se a designação de ***espaço vetorial real*** $\mathbb{R}^n$ *(ou* ***espaço vetorial*** $\mathbb{R}^n$*).*
Os elementos de $\mathbb{R}^n$ *são designados por* ***vetores*** *e os elementos de* $\mathbb{R}$ *designam-se por* ***escalares****.*

Espaços Vetoriais $\mathbb{R}^n$

Terminologia e notação: Consideremos o quádruplo $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ definido anteriormente.

- Não havendo ambiguidade, o espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ será referido apenas por $\mathbb{R}^n$.
- A operação $+$ definida em $\mathbb{R}^n$ designa-se por ***adição de vetores*** e a operação $\cdot$ por ***multiplicação de um escalar por um vetor***.
- Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, é usual escrever αx para representar $\alpha \cdot x$.
- Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, ao elemento x' determinado na condição (4), chama-se ***simétrico de*** x e representa-se por $-x$.
- Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, representa-se por $x - y$ o vetor $x + (-y)$.

Subespaços vetoriais

Definição

*Um subconjunto V de $\mathbb{R}^n$ diz-se um **subespaço vetorial** do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, e escreve-se $V \leq \mathbb{R}^n$, se:*

i) $V \neq \emptyset$;

ii) $\forall_{x,y \in V}, \; x + y \in V$;

iii) $\forall_{x \in V}, \; \forall_{\alpha \in \mathbb{R}}, \; \alpha \cdot x \in V$.

Terminologia: Um suconjunto de $\mathbb{R}^n$ que satisfaça a condição ii) diz-se *fechado para a adição de vetores*. A condição iii) descreve-se dizendo que o conjunto V é *fechado para a multiplicação de números reais por vetores*.

Teorema

Seja V um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Então $0_{\mathbb{R}^n} \in V$.

Demonstração.

Se V é um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, então existe $x \in V$, pelo que, pelas condições *ii)* e *iii)*, $x + (-x) = 0_{\mathbb{R}^n} \in V$. $\square$

Observação: Caso um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ não contenha o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$, ele não poderá ser um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Assim, a definição anterior pode ser enunciada de forma equivalente substituindo a condição $V \neq \emptyset$ por $0_{\mathbb{R}^n} \in V$.

Exemplo

O conjunto $V = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\right\}$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$*. De facto,* V *é um subconjunto de* $\mathbb{R}^2$ *e*

i) $V \neq \emptyset$*, pois* $(0, 0) \in V$*;*

ii) para quaisquer $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V$*, temos* $x + y \in V$*, uma vez que* $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$*,* $x_2 = 0$ *e* $y_2 = 0$*, pelo que*
$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$*;*

iii) para quaisquer $x = (x_1, x_2) \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, temos* $\alpha \cdot x \in V$*, pois* $x \in \mathbb{R}$ *e* $x_2 = 0$*, pelo que* $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \cdot x_2 = \alpha \cdot 0 = 0$*.*

Exemplo

O conjunto $V = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2\right\}$ *não é subespaço vetorial do espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$*, pois existem* $x = (1, 2)$ *e* $y = (0, 2)$ *tais que* $x, y \in V$ *e* $x + y = (1, 4) \notin V$*.*

Seguidamente, vamos estudar formas de construir subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ a partir de outros subsespaços vetoriais dados.

Exemplo

No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços vetoriais

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad e \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}.$$

Então

$$\begin{aligned} V \cap W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in V \ e \ (x, y, z) \in W\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \ e \ y = 2z\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3z \ e \ y = 2z\} \\ &= \{(-3z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e é simples verificar que $V \cap W$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

De forma geral, a interseção de quaisquer dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é também um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Sejam V e W subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Então $V \cap W$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração.

Sejam V, W subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Como V e W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, tem-se $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$, pelo que $V \cap W \subseteq \mathbb{R}^n$. Além disso, verifica-se que:

i) $V \cap W \neq \varnothing$, pois V e W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, pelo que $0_{\mathbb{R}^n} \in V$ e $0_{\mathbb{R}^n} \in W$ e, portanto, $0_{\mathbb{R}^n} \in V \cap W$.

Demonstração.

ii) Para quaisquer $x, y \in V \cap W$, tem-se $x + y \in V \cap W$. De facto, se $x, y \in V \cap W$, então $x, y \in V$ e $x, y \in W$. Logo, $x + y \in V$ e $x + y \in W$, uma vez que V e W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $x + y \in V \cap W$.

iii) Para quaisquer $x \in V \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha x \in V \cap W$. Se $x \in V \cap W$, então $x \in V$ e $x \in W$. Logo, atendendo a que V e W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, tem-se $\alpha x \in V$ e $\alpha x \in W$. Assim, $\alpha x \in V \cap W$.

De *i)*, *ii)* e *iii)* conclui-se que $V \cap W$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. $\square$

Teorema

Seja I um conjunto. Se $\{V_i : i \in I\}$ é uma família não vazia de subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, então $\bigcap_{i \in I} V_i$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Na sequência dos resultados anteriores, coloca-se a questão se a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ também será um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Considerando, novamente, os subespaços vetoriais

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}, \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, *tem-se*

$$V \cup W \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in V \text{ ou } (x, y, z) \in W\}$$

Facilmente se verifica que $V \cup W$ *não é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$, *uma vez que* $(2, 0, -2) \in V \subseteq V \cup W$, $(0, 4, 2) \in W \subseteq V \cup W$, *mas* $(2, 0, -2) + (0, 4, 2) = (2, 4, 0) \notin V \cup W$.

Como mostra o exemplo anterior, a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ nem sempre é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. De facto, tal só se verifica nas condições seguintes.

Teorema

Sejam V, W subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Então $V \cup W$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ se e só se $V \subseteq W$ ou $W \subseteq V$.

Definição

*Sejam V, W subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Designa-se por **soma dos subespaços** V e W, e representa-se por $V + W$, o conjunto $\{v + w \in \mathbb{R}^n : v \in V \text{ e } w \in W\}$.*

Observação:

- Se V e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, então $V \subseteq V + W$.
  De facto, se W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, tem-se $0_{\mathbb{R}^n} \in W$. Então, considerando que, para todo $v \in V$, $v = v + 0_{\mathbb{R}^n}$, temos $v \in V + W$. Assim, fica provado que $V \subseteq V + W$. De modo análogo, prova-se que $W \subseteq V + W$.
- Da definição de soma de subespaços vetoriais e da comutatividade da adição de vetores também é imediato que, sendo V e W subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, temos $V + W = W + V$.

Exemplo

Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

$$\begin{aligned} U &= \{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 : s = 0, u = 0\}, \\ V &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + d = 0 \text{ e } b - d = 0\}, \\ W &= \{(x,0,y,2x) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Então

$$U = \{(0,t,0,v) \in \mathbb{R}^4 : t, v \in \mathbb{R}\} \quad e \quad V = \{(a,0,c,0) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} V + U &= \{(a,t,c,v) \in \mathbb{R}^4 : a, c, t, v \in \mathbb{R}\}, \\ V + W &= \{(a+x, 0, c+y, 2x) \in \mathbb{R}^4 : a, c, x, y \in \mathbb{R}\}, \\ U + W &= \{(x, t, y, v + 2x) \in \mathbb{R}^4 : x, t, v, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que qualquer um destes conjuntos é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Teorema

Sejam V *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$. *Então* $V+W$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$.

Definição

Sejam V, W *subespaços vetoriais do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$.
Diz-se que $V+W$ *é uma* ***soma direta*** *se* $V \cap W = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Diz-se que $\mathbb{R}^n$ ***é soma direta de*** V ***e*** W, *e escreve-se* $\mathbb{R}^n = V \oplus W$, *se* $\mathbb{R}^n = V+W$ *e a soma* $V+W$ *é direta. Caso* $\mathbb{R}^n$ *seja soma direta de* V *e* W, *diz-se que* V *é* ***suplementar*** *de* W *relativamente a* $\mathbb{R}^n$ *(e que* W *é suplementar de* V *relativamente a* $\mathbb{R}^n$ *ou que* V *e* W *são suplementares).*

Exemplo

Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ *e os subespaços*

$$\begin{aligned} U &= \{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 : s = 0, u = 0\}, \\ V &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + d = 0 \text{ e } b - d = 0\}, \\ W &= \{(x,0,y,2x) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, z = 0, y - w = 0, y + w = 0\} \\ &= \{(0,0,0,0)\}, \\ V \cap W &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + d = 0, b - d = 0, b = 0, d = 2a\} \\ &= \{(0,0,c,0) \mid c \in \mathbb{R}\}, \\ U \cap W &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = 0, c = 0, b = 0, d = 2a\} \\ &= \{(0,0,0,0)\}. \end{aligned}$$

Exemplo (continuação).

Logo, $V+W$ não é uma soma direta e $U+V$ e $U+W$ são somas diretas. Uma vez que $U+W=\mathbb{R}^4$ e $U\cap W=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, então $\mathbb{R}^4$ é soma direta de U e W; o espaço W é um suplementar de U relativamente a $\mathbb{R}^4$. Atendendo a que $\mathbb{R}^4 \subsetneqq V+W$, pois $(0,1,0,0)\notin V+W$, concluímos que $\mathbb{R}^4$ não é soma direta de V e W.

Como podemos verificar no exemplo que se segue, existem subespaços do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ que admitem mais do que um suplementar relativamente a $\mathbb{R}^n$.

Exemplo

Consideremos no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, os subespaços*

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : b = c = 0\}, \\ V_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}, \\ V_3 &= \{(s, t, u) \in \mathbb{R}^3 : s = t\}. \end{aligned}$$

Tem-se $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ *e* $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_3$ *e* $V_2 \neq V_3$.

Teorema

Sejam V e W subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Então:

1. *$\mathbb{R}^n$ é soma direta de V e W se e só se cada vetor de $\mathbb{R}^n$ se escreve, de modo único, na forma $v + w$ com $v \in V$ e $w \in W$.*
2. *$\mathbb{R}^n$ é soma direta de V e W se e só se $\mathbb{R}^n = V + W$ e $0_{\mathbb{R}^n}$ se escreve, de modo único, na forma $v + w$ com $v \in V$ e $w \in W$.*

Definição

Sejam $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e V_1, V_2, ..., V_r subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$.
Designa-se por ***soma dos subespaços*** *V_1, V_2, ..., V_r, e representa-se por $V_1 + V_2 + \ldots + V_r$, o conjunto*

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_r : x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \ldots, x_r \in V_n\}.$$

Diz-se que $V_1 + V_2 + \ldots + V_r$ é uma ***soma direta*** *se*

$$V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_r) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Diz-se que $\mathbb{R}^n$ ***é soma direta de*** *$V_1, V_2, \ldots, V_r$, e escreve-se $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r$, se*

i) $\mathbb{R}^n = V_1 + V_2 + \ldots + V_r$;

ii) $V_1 + V_2 + \ldots + V_r$ *é uma soma direta.*

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *e* $V_1, V_2, \ldots, V_r$ *subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$*. Então* $V_1 + V_2 + \ldots + V_r$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$*.*

Teorema

Sejam $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *e* $V_1, V_2, \ldots, V_r$ *subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$*. Então são equivalentes as três afirmações seguintes:*

i) $\mathbb{R}^n$ *é soma direta de* $V_1, V_2, \ldots, V_r$*.*

ii) $\mathbb{R}^n = V_1 + V_2 + \ldots + V_r$ *e cada elemento de* $\mathbb{R}^n$ *escreve-se, de modo único, na forma* $v_1 + v_2 + \ldots + v_r$ *com* $v_1 \in V_1$*,* $v_2 \in V_2$*, ...,* $v_r \in V_r$*.*

iii) $\mathbb{R}^n = V_1 + V_2 + \ldots + V_r$ *e o vetor* $0_{\mathbb{R}^n}$ *escreve-se, de modo único, na forma* $v_1 + v_2 + \ldots + v_r$ *com* $v_1 \in V_1$*,* $v_2 \in V_2$*, ...,* $v_r \in V_r$*.*

Combinação linear de vetores

Definição

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que:

- *$v \in \mathbb{R}^n$ é **combinação linear dos elementos** $v_1, v_2, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que*

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k.$$

  *Neste caso, aos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ dá-se a designação de **coeficientes** da combinação linear.*

- *$v \in \mathbb{R}^n$ é **combinação linear de elementos de S** se existem v_1, v_2, ..., $v_k \in S$ tais que v é combinação linear destes elementos.*

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores* $v_1 = (1, 2, 0)$*,* $v_2 = (-2, 3, 4)$ *e* $v_3 = (-1, 12, 8)$*. O vetor* v_3 *é combinação linear de* v_1 *e* v_2*, pois*

$$(-1, 12, 8) = 3(1, 2, 0) + 2(-2, 3, 4).$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores* $v_1 = (1, 2, 0)$*,* $v_2 = (-2, 3, 0)$ *e* $v_3 = (-1, 2, 2)$*. O vetor* v_3 *não é combinação linear de* v_1 *e* v_2*, pois*

$$(-1, 2, 2) \neq \alpha(1, 2, 0) + \beta(-2, 3, 0), \text{ para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$*, temos*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 (1, 0, ..., 0) + x_2 (0, 1, 0, ..., 0) + \cdots + x_n (0, ..., 0, 1),$$

para qualquer $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Assim, qualquer vetor de* $\mathbb{R}^n$ *é combinação linear dos vetores*

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \ldots, e_n = (0, 0, ..., 0, 1).$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$*, todo o vetor* (x, y) *é combinação linear dos vetores* $(1, 0)$, $(0, 1)$ *e* $(1, 1)$*, uma vez que*

$$(x, y) = (x - 1)(1, 0) + (y - 1)(0, 1) + 1(1, 1).$$

Subespaço gerado por um conjunto de vetores

Teorema

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Então,

1. *o conjunto*

$$V = \{x : x \text{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

   é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$;

2. $S \subseteq V$;
3. *V é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ que contém S.*

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Definição

Seja S um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Ao subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ definido por

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : x \textit{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

*chama-se **subespaço de** $\mathbb{R}^n$ **gerado por** S, e representa-se por $\langle S \rangle$. Ao conjunto S chamamos **conjunto gerador** de V.*

Convenciona-se que $\langle \emptyset \rangle = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Notação: Se S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ tal que $S = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, onde $k \in \mathbb{N}$, pode-se representar o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado por S por $\langle x_1, x_2, ..., x_k \rangle$ em vez de $\langle \{x_1, x_2, ..., x_k\} \rangle$.

Exemplo

Na sequência do exemplo indicado na página 32, tem-se

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1), (1,1) \rangle .$$

Exemplo

Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ *e sejam*

$$e_1 = (1,0,0,...,0), e_2 = (0,1,0,...,0), \dots, e_n = (0,0,...,0,1).$$

Com base no exemplo apresentado na página 31, podemos afirmar que

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle .$$

Exemplo

Considere-se, em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\right\}$. Verifica-se facilmente que V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que

$$
\begin{aligned}
V &= \left\{(x, y, x - y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (0, 1, -1) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \langle (1, 0, 1), (0, 1, -1) \rangle ,
\end{aligned}
$$

conclui-se que $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ é um conjunto gerador de V.

Teorema

Sejam $k \in \mathbb{N}$, $v_1, ..., v_k, v \in \mathbb{R}^n$ *tais que* v *é combinação linear de* $v_1, ..., v_k$. *Então,*

$$\langle v_1, ..., v_k, v \rangle = \langle v_1, ..., v_k \rangle .$$

Demonstração.

Sejam $V = \langle v_1, ..., v_k \rangle$ e $W = \langle v_1, ..., v_k, v \rangle$. Para provar a igualdade $V = W$, vamos mostrar que $V \subseteq W$ e $W \subseteq V$.

($V \subseteq W$): Do teorema anterior segue que $\{v_1, ..., v_k, v\} \subseteq W$. Logo, como V é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém $\{v_1, ..., v_k\}$ e W é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ que também contém este conjunto, temos $V \subseteq W$.

($W \subseteq V$): Por hipótese, v é combinação linear de $v_1, ..., v_k$, pelo que $v \in V$. Logo, como $\{v_1, ..., v_k, v\} \subseteq V$ e W é o menor subespaço de $\mathbb{R}^n$ que contém este conjunto, temos $W \subseteq V$. $\square$

Teorema

Sejam $k \in \mathbb{N}$, $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Então*

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k \rangle.$$

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Teorema

Todo subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ admite um conjunto gerador finito.

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Dependência e independência linear

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Uma sequência $(v_1, ..., v_k)$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ diz-se ***linearmente independente*** *se, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Caso contrário, isto é, se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ não todos nulos tais que $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$, a sequência $(v_1, ..., v_k)$ diz-se ***linearmente dependente****.*

Observação:

- Note-se que se $v_1, \ldots, v_k$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, então é sempre possível escrever $0_{\mathbb{R}^n}$ como combinação linear destes vetores, pois $0_{\mathbb{R}^n} = 0v_1 + \ldots + 0v_k$. Logo, a sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente independente se e só se $0v_1 + \ldots + 0v_k$ é a única forma de escrever $0_{\mathbb{R}^n}$ como combinação linear de $v_1, \ldots, v_k$.
- Se $v = 0_{\mathbb{R}^n}$, então (v) é linearmente dependente pois $0_{\mathbb{R}^n} = 1 \cdot 0_{\mathbb{R}^n}$ e $1 \neq 0$.
- Se $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, é simples verificar que (v) é linearmente independente. De facto, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se $\alpha v = 0_{\mathbb{R}^n}$, então $\alpha = 0$ ou $v = 0_{\mathbb{R}^n}$. Como, por hipótese, $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, então $\alpha = 0$. Logo, (v) é linearmente independente.

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, a sequência de vetores

$$((1,0,0,0),(1,0,-1,1),(2,1,0,1))$$

é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\alpha(1,0,0,0)+\beta(1,0,-1,1)+\gamma(2,1,0,1)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow (\alpha+\beta+2\gamma,\gamma,-\beta,\beta+\gamma)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow \alpha+\beta+2\gamma=0,\gamma=0,-\beta=0,\beta+\gamma=0\\
&\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$*, a sequência de vetores*

$$((1,0),(0,1),(1,1))$$

é linearmente dependente, pois

$$1\,(1,0)+1\,(0,1)+(-1)\,(1,1)=(0,0)\,.$$

Note-se que o vetor nulo pode ser escrito como combinação linear dos três vetores indicados utilizando escalares não nulos.

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$*, a sequência de vetores* $(e_1, \ldots, e_n)$*, onde cada* e_i *é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, é linearmente independente. De facto,*

$$\begin{aligned} & \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \Rightarrow \quad & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0) \ . \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Teorema

Sejam $k \in \mathbb{N}$ *e* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. *A sequência de vetores* $(v_1, \ldots, v_k)$ *é linearmente independente se e só se qualquer combinação linear de* $v_1, \ldots, v_k$ *tem coeficientes únicos, i.e., se e só se, para quaisquer* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_k = \beta_k.$$

Demonstração.

$\Rightarrow$) Admitamos que $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente independente e que $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k.$$

Então

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = 0_{\mathbb{R}^n}$$

e, uma vez que a sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente independente, da igualdade anterior resulta que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ \ldots, \ \alpha_k - \beta_k = 0$$

i.e.

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_k = \beta_k.$$

Demonstração (continuação).

$\Leftarrow$) Suponhamos que qualquer combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_k$ tem coeficientes únicos, i.e., para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_k = \beta_k.$$

Então a sequência $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente independente, pois, dados escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n},$$

temos

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0 v_1 + \cdots + 0 v_k,$$

donde segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Teorema

Sejam $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *e* $v_1, \ldots, v_k$ *elementos de* $\mathbb{R}^n$. *A sequência* $(v_1, \ldots, v_k)$ *é linearmente dependente se e só se existe* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *tal que* v_i *é combinação linear de* $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k$.

Demonstração.

$\Rightarrow$) Sejam $v_1, ..., v_k$, com $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente dependente. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, e

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Como $\alpha_i \neq 0$, existe $\alpha_i^{-1} \in \mathbb{R}$ e da igualdade anterior resulta que

$$\alpha_i^{-1}\left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k\right) = \alpha_i^{-1} 0_{\mathbb{R}^n},$$

i.e.,

$$\left(\alpha_i^{-1}\alpha_1\right) v_1 + \cdots + \left(\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\right) v_{i-1} + v_i + \left(\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}\right) v_{i+1} + \cdots + \left(\alpha_i^{-1}\alpha_k\right) v_k = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Assim,

$$v_i = \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_1\right) v_1 + \cdots + \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\right) v_{i-1} + \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}\right) v_{i+1} + \cdots + \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_k\right) v_k,$$

e portanto, v_i é combinação linear dos restantes vetores.

Demonstração (continuação).

$\Leftarrow$) Suponhamos que existem $i \in \{1, \ldots, k\}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Então,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + (-1)\, v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n},$$

i.e.,

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_k v_k = 0_{\mathbb{R}^n},$$

com $\alpha_i = -1 \neq 0$. Logo, $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente dependente.

Corolário

Seja $k \in \mathbb{N}$. Se $v_1, \ldots, v_k$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $v_i = 0_{\mathbb{R}^n}$, para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, então a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente dependente.

Teorema

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_k, v$ vetores de $\mathbb{R}^n$. São válidas as propriedades seguintes:

1. *se a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)$ é linearmente independente, então a sequência $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_k)$ também é linearmente independente;*
2. *se a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente dependente, então a sequência $(v_1, \ldots, v_k, v)$ também é linearmente dependente.*
3. *se a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_k)$ é linearmente independente e a sequência $(v_1, \ldots, v_k, v)$ é linearmente dependente, então v é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_k$.*

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Teorema (Teorema de Steinitz)

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $r, p \in \mathbb{N}$, e $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ e $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ com, respetivamente, r e p vetores.
Se $V =< S >$ e $w_1, \ldots, w_p$ são vetores de V tais que $(w_1, ..., w_p)$ é linearmente independente, então $p \leq r$ e é possível substituir p dos vetores de S por $w_1, ..., w_p$ de forma a obter um subconjunto S' de $\mathbb{R}^n$ tal que $V =< S' >$.

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Observação: Do teorema anterior, resulta que se um subespaço vetorial V do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ é gerado por r vetores, então qualquer sequência de vetores de V que seja linearmente independente nunca pode ter mais do que r vetores. Em particular, qualquer sequência de vetores de $\mathbb{R}^n$ que seja linearmente independente não pode ter mais do que n vetores.

Exemplo

No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, consideremos os vetores $w_1 = (-2, 0, 0, 2)$, $w_2 = (1, 0, 2, -1)$, $u_1 = (0, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0, 0)$. Seja U o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado por $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, i.e., $U =< u_1, u_2, u_3 >$.

Tem-se

$$\begin{aligned} w_1 &= 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3, \\ w_2 &= (-1)u_1 + 2u_2 + 1u_3 \end{aligned}$$

e, portanto, w_1 e w_2 são vetores de U. Além disso, é simples verificar que a sequência (w_1, w_2) é linearmente independente. Logo, pelo teorema anterior, é possível substituir dois dos vetores de $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ por w_1 e w_2 de forma a obter um conjunto S' tal que $U = \langle S' \rangle$.

Exemplo (continuação).

A substituição faz-se vetor a vetor seguindo o processo descrito na demonstração do referido teorema. Note-se, no entanto, que pode haver mais de uma maneira de efectuar a substituição e o conjunto S' obtido no final do processo pode não ser único. Porém, todo o conjunto S' obtido pelo processo indicado no teorema anterior gera o mesmo subespaço que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$. Vamos ver duas formas de efectuar essa substituição.

Exemplo (continuação).

1) Temos $w_1 = 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3$ e $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo, pelo Teorema 38,

$$< u_1, u_2, u_3 > = < w_1, u_2, u_3 > .$$

Como w_2 é combinação linear de u_1, u_2, u_3, então também é combinação linear de w_1, u_2, u_3. De facto, tem-se

$$u_1 = \frac{1}{2}w_1 + 0u_2 + 1u_3,$$

pelo que

$$w_2 = (-1)u_1 + 2u_2 + 1u_3 = -\frac{1}{2}w_1 + 2u_2 + 0u_3$$

onde $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então, novamente pelo Teorema 38, segue que

$$< w_1, u_2, u_3 > = < w_1, w_2, u_3 > .$$

Logo $U = < u_1, u_2, u_3 > = < w_1, w_2, u_3 >$.

Exemplo (continuação).

2) Uma vez que $w_1 = 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3$ e $-2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então, pelo teorema indicado na página 38, tem-se

$$< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, u_2, w_1 > .$$

Como w_2 é combinação linear de u_1, u_2, u_3, então também é combinação linear de u_1, u_2, w_1. De facto, como

$$u_3 = 1u_1 + 0u_2 - \frac{1}{2}w_1,$$

segue que

$$w_2 = 0u_1 + 2u_2 - \frac{1}{2}w_1,$$

com $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, pelo teorema indicado na página 38,

$$< u_1, u_2, w_1 >=< u_1, w_2, w_1 >$$

e, portanto, $U =< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, w_2, w_1 >$.

Teorema

Sejam $r, p \in \mathbb{N}$ *tais que* $p \leq r$ *e* $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ *e* $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ *subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *com, respetivamente,* r *e* p *vetores e tais que as sequências* $(v_1, \ldots, v_r)$ *e* $(w_1, \ldots, w_p)$ *são linearmente independentes. Se* S' *é um conjunto que se obtém de* S *substituindo* p *dos vetores de* S *por* $w_1, \ldots, w_p$ *e* $< S' >=< S >$*, então uma sequência formada pelos vetores de* S' *é linearmente independente.*

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Bases e dimensão

Como foi referido anteriormente, qualquer subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ é gerado por algum conjunto finito de vetores de $\mathbb{R}^n$. Além disso, qualquer sequência de vetores de $\mathbb{R}^n$ que seja linearmente independente pode ter, no máximo, n vetores. Assim, qualquer sequência de vetores que gere um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e que seja linearmente independente tem de ser finita. Tal motiva a definição seguinte.

Definição

Sejam $r \in \mathbb{N}$, $(v_1, \ldots, v_r)$ *uma sequência de vetores de* $\mathbb{R}^n$ *e* V *um subespaço vetorial não nulo de* $\mathbb{R}^n$. *Diz-se que a sequência* $(v_1, \ldots, v_r)$ *é uma* ***base*** *de* V *se:*

i) *a sequência* $(v_1, \ldots, v_r)$ *é linearmente independente;*

ii) $\{v_1, \ldots, v_r\}$ *é um conjunto gerador de* V.

Convenciona-se que $(v_i)_{i\in\emptyset}$ *é a única base do espaço* $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Observação: Uma vez que uma base é definida como sendo uma sequência, duas bases com os mesmos elementos ordenados de forma diferente são distintas.

Definição

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V e $v \in V$. Chamam-se ***componentes*** *ou* ***coordenadas*** *de v na base $(v_1, \ldots, v_r)$ aos coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ da combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r$.*

Exemplo

Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$*, a sequência* $(e_1, \ldots, e_n)$*, onde cada* e_i *é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, é uma base de* $\mathbb{R}^n$*. De facto, de exemplos anteriores sabemos que a sequência* $(e_1, \ldots, e_n)$ *é linearmente independente e que* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *é um conjunto gerador de* $\mathbb{R}^n$*. À base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *dá-se a designação de* **base canónica** *de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemplo

A sequência $((1,0), (0,1), (1,1))$ *não é uma base do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, pois, embora* $\{((1,0), (0,1), (1,1)\}$ *seja um conjunto gerador de* $\mathbb{R}^2$*, a sequência* $((1,0), (0,1), (1,1))$ *é linearmente dependente.*

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{N}$ e $(v_1, \ldots, v_r)$ uma sequência de vetores de V. Então $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de V se e só se todo o elemento de V se escreve, de modo único, como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_r$.

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Teorema

Sejam $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e $v_1, \ldots, v_p$ vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $V = < v_1, \ldots, v_p >$. Então existem $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, p\}$, tais que $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ é uma base de V.

Demonstração.

Sejam $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e $v_1, \dots, v_p$ vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que $V =< v_1, \dots, v_p >$. Se a sequência $(v_1, \dots, v_p)$ é linearmente independente, então ela é, por definição, uma base de V. Caso contrário, pelo teorema indicado na página 48, sabe-se que existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que v_i é combinação linear de $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p$. Consequentemente, pelo teorema referido na página 37,

$$\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p\}$$

é um conjunto gerador de V. Se $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p)$ é linearmente independente, então esta sequência é uma base de V.

Demonstração (continuação).

Caso contrário, repete-se o procedimento, removendo vetores dependentes, até se obter uma sequência linearmente independente que ainda gera V. Como $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, existe pelo menos um vetor não nulo entre $v_1, \ldots, v_p$, garantindo que o processo não elimina todos os vetores. Além disso, como o número de vetores é finito, o processo termina após um número finito de passos. Portanto, existem $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, p\}$, tais que $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_r})$ é uma base de V.

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores*

$u_1 = (-1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 0, 2), u_4 = (1, -1, 1), u_5 = (1, 1, 0).$

É simples verificar que $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ *é um conjunto gerador de* $\mathbb{R}^3$.

De facto, dados $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$*, tem-se*

$(a, b, c) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 + \alpha_5 u_5$

$$\text{se e só se} \begin{cases} \alpha_1 &= -a + b + \alpha_2 + 2\alpha_4 \\ \alpha_3 &= (c - \alpha_2 - \alpha_4)/2 \\ \alpha_5 &= b + \alpha_4 \end{cases}.$$

Exemplo (continuação).

Assim,

$$(a, b, c) = (-a+b+\alpha_2+2\alpha_4)u_1+\alpha_2 u_2+((c-\alpha_2-\alpha_4)/2)u_3+\alpha_4 u_4+(b+\alpha_4)u_5.$$

Em particular,

$$(0, 0, 0) = (\alpha_2 + 2\alpha_4)u_1 + \alpha_2 u_2 + ((-\alpha_2 - \alpha_4)/2)u_3 + \alpha_4 u_4 + \alpha_4 u_5,$$

para quaisquer $\alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ e, portanto, a sequência $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ é linearmente dependente. Tomando, por exemplo, $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_4 = 1$, tem-se

$$u_4 = -u_1 + u_2 + 0u_3 - u_5,$$

pelo que $< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >=< u_1, u_2, u_3, u_5 >$.

Exemplo (continuação).

Agora, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_5 u_5 = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = & \alpha_2 \\ \alpha_3 & = & -(\alpha_2/2) \\ \alpha_5 & = & 0 \end{cases}$$

e, portanto,

$$(0,0,0) = \alpha_2 u_1 + \alpha_2 u_2 + (-\alpha_2/2) u_3 + 0 u_5,$$

para todo $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Logo, (u_1, u_2, u_3, u_5) é linearmente dependente.

Exemplo (continuação).

Tomando, por exemplo, $\alpha_2 = 1$, segue que

$$u_1 = -u_2 + (1/2)u_3 + 0u_5,$$

pelo que $< u_1, u_2, u_3, u_5 >=< u_2, u_3, u_5 >$.

Para quaisquer $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_5 u_5 = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0.$$

Assim, a sequência (u_2, u_3, u_5) é linearmente independente. Portanto, (u_2, u_3, u_5) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Todo subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ *admite uma base.*

Demonstração.

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Se $V = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, então, por convenção, a sequência vazia ( ) é uma base de V.

Se $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, o resultado segue dos teoremas indicados nas páginas 39 e 64. $\square$

Teorema

Sejam $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$ *e* $(w_1, \ldots, w_p)$, $p \in \mathbb{N}$, *uma sequência de vetores de* V *linearmente independente. Então existe uma base de* V *da qual fazem parte os vetores* $w_1, \ldots, w_p$.

Demonstração.

Sejam $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $(w_1, \ldots, w_p)$ uma sequência de vetores de V linearmente independente.
Pelo teorema anterior, V admite uma base; seja $(v_1, \ldots, v_r)$, $r \in \mathbb{N}$, uma dessas bases. Então $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ é um conjunto gerador de V com r elementos distintos. Logo, pelo teorema indicado na página 53, temos $p \leq r$ e é possível substituir p dos elementos de S pelos vetores $w_1, \ldots, w_p$ de forma a obter um conjunto S' gerador de V.

Demonstração.

Se $p = r$, temos $S' = \{w_1, \ldots, w_p\}$ e, portanto, $(w_1, \ldots, w_p)$ é uma base de V.

Se $p < r$, suponhamos, sem perda de generalidade que $S' = \{w_1, \ldots, w_p, v_{p+1}, \ldots, v_r\}$. Uma vez que as sequências $(v_1, \ldots, v_r)$ e $(w_1, \ldots, w_p)$ são linearmente independentes e $< S > = < S' >$, do teorema indicado na página 59 conclui-se que $(w_1, \ldots, w_p, v_{p+1}, \ldots, v_r)$ é linearmente independente. Logo $(w_1, \ldots, w_p, v_{p+1}, \ldots, v_r)$ é uma base de V.

Exemplo

Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, os vetores

$$w_1 = (0,1,-1) \text{ e } w_2 = (1,-1,-1).$$

A sequência (w_1, w_2) é linearmente independente, logo existe uma base de $\mathbb{R}^3$ da qual fazem parte estes vetores. Vamos determinar uma dessas bases seguindo o processo descrito na demonstração anterior.

Sendo

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1),$$

a sequência (e_1, e_2, e_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Uma vez que $w_1 = e_2 - e_3$, tem-se

$$< e_1, e_2, e_3 >=< e_1, w_1, e_3 > .$$

Exemplo (continuação)

Agora, como

$$w_2 = e_1 - e_2 - e_3 \quad \text{e} \quad e_2 = w_1 + e_3,$$

vem

$$w_2 = e_1 - w_1 - 2e_3,$$

pelo que

$$< e_1, w_1, e_3 >=< e_1, w_1, w_2 > .$$

Logo, $< e_1, e_2, e_3 >=< e_1, w_1, w_2 >$.

Pelo teorema indicado na página 59, conclui-se que a sequência (e_1, w_1, w_2) é linearmente independente e, portanto, (e_1, w_1, w_2) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Sejam V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e $(v_1, ..., v_r)$ uma base de V. Então qualquer base de V tem exatamente r vetores.

Demonstração.

O resultado é imediato a partir do teorema indicado na página 53. $\square$

O resultado anterior fundamenta a definição que se segue.

Definição

Seja V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$. *Chama-se* ***dimensão*** *de* V, *e representa-se por* $\dim V$, *ao número de elementos de uma sua qualquer base. Por convenção, diz-se ainda que* $\dim \{0_{\mathbb{R}^n}\} = 0$.

Exemplo

Para $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Teorema

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $r \geq 1$. Então:

1. *se $v_1, ..., v_p$ são p vetores de V com $p > r$, então $(v_1, ..., v_p)$ é linearmente dependente;*
2. *se $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma sequência de vetores de V linearmente independente, então $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de V;*
3. *se $v_1, \ldots, v_r$ são r vetores de V, distintos dois a dois, e $\{v_1, \ldots, v_r\}$ é um conjunto gerador de V, então $(v_1, \ldots, v_r)$ é uma base de V.*

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. □

Teorema

Sejam V e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ tais que $W \subseteq V$. Então

1. $\dim W \leq \dim V$;
2. *se* $\dim W = \dim V$, *então* $W = V$.

Demonstração.

1. A prova é feita com base no teorema indicado na página 53.

2. Resulta do teorema anterior. $\square$

Teorema

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Então existe um suplementar de V relativamente a $\mathbb{R}^n$.

Demonstração.

Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.
Se $V = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, então $\mathbb{R}^n$ é um suplementar de V relativamente a $\mathbb{R}^n$.
Se $V = \mathbb{R}^n$, então $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ é um suplementar de V relativamente a $\mathbb{R}^n$.
Se $V \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ e $V \neq \mathbb{R}^n$, seja $r = \dim V$ e $(v_1, \ldots, v_r)$ uma base de V.
Uma vez que $V \neq \mathbb{R}^n$, temos $r < n$. Por outro lado, como $(v_1, \ldots, v_r)$ é linearmente independente, segue, pelo teorema indicado na página 72, que existe uma base de $\mathbb{R}^n$ da qual fazem parte os vetores $v_1, \ldots, v_r$.
Suponha-se, sem perda de generalidade, que $(v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_{n-r})$ é essa base. Seja $U =< u_1, \ldots, u_{n-r} >$. Fica ao cuidado do leitor a verificação de que $\mathbb{R}^n = V \oplus U$. $\square$

Exemplo

Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, *o subespaço* $V =< (0,1,-1),(1,-1,-1) >$. *A sequência* $((0,1,-1),(1,-1,-1))$ *é linearmente independente e* $((1,0,0),(0,1,-1),(1,-1,-1))$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *que inclui os vetores* $(0,1,-1)$, $(1,-1,-1)$ *(ver exemplo da página 75). Por conseguinte,* $U =< (1,0,0) >$ *é um espaço suplementar de* V *relativamente a* $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Sejam V e W subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Então

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular. $\square$

Dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ aos espaços vetoriais abstratos

As operações de adição de vetores de $\mathbb{R}^n$ e de multiplicação de um escalar por um vetor de $\mathbb{R}^n$, tal como definidas na secção anterior, satisfazem um conjunto de propriedades fundamentais: a adição é comutativa e associativa, existe um vetor nulo que atua como elemento neutro para a adição de vetores, cada vetor tem um oposto aditivo, a multiplicação por escalares distribui-se em relação à adição, entre outras. Estas propriedades não dependem da dimensão do espaço considerado, nem da interpretação geométrica, mas apenas da forma como as operações estão definidas. Por essa razão, é natural considerar mais abstratamente quaisquer conjuntos de objetos em que se possam definir operações de adição e multiplicação por escalares que satisfaçam as mesmas regras.

Definição

Sejam V um conjunto não vazio, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{+} : V \times V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & x \widetilde{+} y \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} \widetilde{\cdot} : \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \widetilde{\cdot} x \end{array}$$

funções. Diz-se que $(V, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot}, \mathbb{K})$ é um ***espaço vetorial sobre*** $\mathbb{K}$ *ou que V* ***juntamente com as aplicações $\widetilde{+}$ e $\widetilde{\cdot}$ é um espaço vetorial sobre*** $\mathbb{K}$ *se são satisfeitas as condições seguintes:*

Definição (continuação).

(1) $\forall_{x,y\in V} \quad x\widetilde{+}y = y\widetilde{+}x;$

(2) $\forall_{x,y,z\in V} \quad x\widetilde{+}\left(y\widetilde{+}z\right) = \left(x\widetilde{+}y\right)\widetilde{+}z;$

(3) $\exists_{0_V\in V}\,\forall_{x\in V} \quad x\widetilde{+}0_V = x = 0_V\widetilde{+}x;$

(4) $\forall_{x\in V}\,\exists_{x'\in V} \quad x\widetilde{+}x' = 0_V = x'\widetilde{+}x;$

(5) $\forall_{x,y\in V}\,\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \quad \alpha\widetilde{\cdot}\left(x\widetilde{+}y\right) = \alpha\widetilde{\cdot}x\widetilde{+}\alpha\widetilde{\cdot}y;$

(6) $\forall_{x\in V}\,\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}} \quad (\alpha+\beta)\widetilde{\cdot}x = \alpha\widetilde{\cdot}x\widetilde{+}\beta\widetilde{\cdot}x;$

(7) $\forall_{x\in V}\,\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}} \quad (\alpha\cdot\beta)\widetilde{\cdot}x = \alpha\widetilde{\cdot}(\beta\widetilde{\cdot}x);$

(8) $\forall_{x\in V} \quad 1\widetilde{\cdot}x = x.$

Notação e terminologia:

- Seja $(V, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot}, \mathbb{K})$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Para simplificar a linguagem, em vez de dizermos que um conjunto V juntamente com as aplicações $\widetilde{+}$ e $\widetilde{\cdot}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, dizemos apenas que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (subentendendo as operações envolvidas).
- Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ diz-se um ***espaço vetorial real*** e a um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dá-se a designação de ***espaço vetorial complexo***.
- Aos elementos de V dá-se o nome de ***vetores*** e aos elementos de $\mathbb{K}$ o de ***escalares***. O elemento 0_V indicado na propriedade (V_3) da definição de espaço vetorial é único. Ao elemento 0_V dá-se a designação de ***vetor nulo*** e ao zero de $\mathbb{K}$ damos o nome de ***escalar nulo***. Desde que não exista ambiguidade podemos representar tanto o vetor nulo como o escalar nulo por 0.

- A operação $\widetilde{+}$ designa-se por ***adição de vetores*** e a operação $\widetilde{\cdot}$ por ***multiplicação de um escalar por um vetor***. Simplificamos também a notação, escrevendo $+$ quer se trate da adição em $\mathbb{K}$ quer se trate da adição de vetores e escrevemos $\cdot$ quer seja a multiplicação em $\mathbb{K}$ quer o produto de um escalar por um vetor.
- Para cada $x \in V$ e para cada $\alpha \in \mathbb{K}$, é usual escrever αx para representar $\alpha \cdot x$.
- Para cada $x \in V$, ao elemento x' determinado na condição (4), chama-se ***simétrico de*** x e representa-se por $-x$.
- Dados $x, y \in V$, representa-se por $x - y$ o elemento $x + (-y)$.

Exemplo

O espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *dos polinómios, na indeterminada* x *e com coeficientes reais, que têm grau menor ou igual a* 2*, algebrizado com as operações* $+ : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *e* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, *definidas, respetivamente, por*

- $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x_2 + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$, *para quaisquer* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
- $\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c$, *para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

é um espaço vetorial real.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{R}[x]$ *de todos os polinómios na ideterminada* x *e de coeficientes reais, com a adição usual de polinómios e a multiplicação de um número real por um polinómio, é um espaço vetorial real.*

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. *O conjunto* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *das matrizes reais de ordem* $m \times n$, *algebrizado com a adição de matrizes e a multiplicação de um real por uma matriz, é um espaço vetorial real.*

No contexto de $\mathbb{R}^n$, estudámos noções tais como subespaço vetorial, conjunto gerador de um subespaço, sequências de vetores linearmente independentes, etc. Na apresentação de tais conceitos e dos teoremas e demonstrações a eles associados, só utilizámos as propriedades da adição de vetores e da mutiplicação de escalares por vetores, não sendo feita referência à natureza dos elementos de $\mathbb{R}^n$. Tal sugere que no estudo dos espaços vetoriais arbitrários podem ser definidos conceitos análogos. Porém, como o estudo de espaços vetoriais arbitrários não faz parte do âmbito do programa deste curso, ficará ao cuidado do leitor um estudo mais geral sobre espaços vetoriais.

Relação entre $\mathbb{R}^n$ e os espaços vetoriais de matrizes

Nesta secção, destacamos a relação existente entre os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e os espaços vetoriais de matrizes.

Do que foi estudado no primeiro capítulo, é simples concluir que o quádruplo $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, onde $+$ representa a adição de matrizes e $\cdot$ a multiplicação de um escalar por uma matriz, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Em particular, $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ são espaços vetoriais. Estes espaços são naturalmente identificados com $\mathbb{R}^n$. De facto, um vetor de $\mathbb{R}^n$ pode ser representado de diferentes formas: como matriz coluna, matriz linha ou n-uplo ordenado. Todas essas representações descrevem a mesma estrutura algébrica, pois as operações de adição e multiplicação por escalar atuam componente a componente.

Por exemplo, na forma de matriz coluna:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix},$$

sendo o raciocínio análogo para matrizes linha ou n-uplos.

Dessa forma, identificamos os espaços $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^n$, escolhendo a forma mais conveniente conforme o contexto. Ao longo deste texto, usaremos a notação $\mathbb{R}^n$ para qualquer uma dessas representações, salvo quando a forma exata do vetor for relevante, como no produto de matrizes.

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, também podemos associar cada linha i de A ao vetor $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ e cada coluna j ao vetor $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{R}^m$.

O subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas de A é chamado **espaço das linhas** de A e denotado por $\mathcal{L}(A)$. O subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerado pelas colunas de A é chamado **espaço das colunas** de A e denotado por $\mathcal{C}(A)$.

As dimensões de $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ são, respectivamente, chamadas **característica linha** e **característica coluna** de A, representadas por $car_l(A)$ e $car_c(A)$.

Do teorema estabelecido na página 79 conclui-se de imediato que a característica linha de uma matriz A é igual ao número máximo de linhas de A que são linearmente independentes e, analogamente, a característica coluna de A é igual ao número máximo de colunas de A que são linearmente independentes.

Exemplo

Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\mathcal{L}(A) =< (2,0,0), (0,0,1), (0,0,0) >,$$

$$\mathcal{L}(B) =< (2,0,0), (0,1,0), (0,0,0) >,$$

$$\mathcal{C}(A) =< (2,0,0), (0,0,0), (0,1,0) >,$$

$$\mathcal{C}(B) =< (2,0,0), (0,1,0), (0,0,0) > .$$

Facilmente se verifica que que $\mathcal{L}(A) \neq \mathcal{L}(B)$, $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$, $car_l(A) = car_c(A)$ *e* $car_l(B) = car_c(B)$.

Observação: Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tem-se $\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T)$.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A por meio de uma operação elementar sobre linhas, então $car_l(A) = car_l(B)$.

Demonstração.

Se B é uma matriz obtida de A por meio de uma operação elementar sobre linhas, então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$. Logo, $car_l(A) = car_l(B)$. $\square$

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se* B *é uma matriz obtida de* A *por meio de uma operação elementar sobre linhas, então* $car_c(A) = car_c(B)$.

Demonstração. Consultar notas da unidade curricular.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é equivalente por linhas à matriz A, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ *e, portanto,* $car_l(A) = car_l(B)$. *Embora* $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(B)$ *(pois* $(1,2) \in \mathcal{C}(A)$, *mas* $(1,2) \notin \mathcal{C}(B)$*), também temos* $car_c(A) = car_c(B)$.

A noção de caracteristica linha e de caracaterística coluna estão relacionadas com a noção de característica de uma matriz.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. *Se* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é uma matriz em forma de escada, então a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de* A, *isto é,*

$$car_l(A) = car_c(A) = car(A).$$

Demonstração. Consultar notas da unidade curricular.

O resultado anterior pode ser generalizado para qualquer matriz.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de A, isto é,

$$car_l(A) = car_c(A) = car(A).$$

Demonstração.

Por definição de característica de uma matriz, tem-se $car(A) = car(U)$ onde U é uma matriz em escada obtida de A por meio de operações elementares sobre linhas. Então, na sequência de resultados anteriores, tem-se

$$car(A) = car(U) = car_l(U) = car_l(A).$$

Facilmente também se prova que $car_c(A) = car(A)$. Com efeito, sabemos que $car_c(U) = car(U)$ e $car_c(A) = car_c(U)$. Logo, como $car(A) = car(U)$, temos $car_c(A) = car(A)$. □

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, tem-se

$$car(A) = car(A^T).$$

Demonstração.

O resultado segue de imediato, uma vez que

$$car(A) = car_l(A) = car_c(A) = car_l(A^T) = car(A^T).$$

$\square$