Exercício 2.1 Considere as sucessões de termo geral:

$$a_n = 1; \qquad b_n = (-1)^n; \qquad c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}; \qquad d_n = n^2.$$

Indique, justificando, as que são monótonas, as que são limitadas e as que são convergentes.

Exercício 2.2 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_n \dfrac{1+n^3}{n^2+2n-1}$;

b) $\lim_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$;

c) $\lim_n \dfrac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4}$;

d) $\lim_n \left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$;

e) $\lim_n \dfrac{n\cos n}{n^2+24}$;

f) $\lim_n \dfrac{\sqrt{n}-\operatorname{sen} n}{n+2}$;

g) $\lim_n \left(1-\dfrac{3}{n+2}\right)^n$;

h) $\lim_n \dfrac{\cos(n\pi)+\cos(2n\pi)}{n}$;

i) $\lim_n \dfrac{(n+1)!-n!}{n!(n+2)}$;

j) $\lim_n \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$;

k) $\lim_n \dfrac{3^n+4^n+5^n}{5^n}$;

l) $\lim_n \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.

Exercício 2.3 Utilizando o teorema das sucessões enquadradas, calcule os seguintes limites:

a) $\lim_n \dfrac{n!}{n^n}$;

b) $\lim_n \dfrac{10^n}{n!}$;

c) $\lim_n \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)$;

d) $\lim_n \left(\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$.

Exercício 2.4 Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) se $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$ é finito, então $(u_n)_n$ é convergente;

b) se $\{u_n : n\in\mathbb{N}\} = \{0,5\}$, então $(u_n)_n$ é divergente;

c) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões divergentes, então a sucessão $(u_n+v_n)_n$ é divergente;

d) se $(u_n)_n$ e $(v_n+u_n)_n$ são sucessões convergentes, então a sucessão $(v_n)_n$ é convergente;

e) sejam $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ sucessões reais. Se $\lim_n u_n v_n = 0$ então $\lim_n u_n = 0$ ou $\lim_n v_n = 0$;

f) $\lim_n u_n = 0$ se e só se $\lim_n |u_n| = 0$;

g) se $\lim_n |u_n| = 1$, então $\lim_n u_n = 1$;

h) se $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada, então $(u_n)_n$ é convergente;

i) qualquer sucessão crescente de termos em $]-1,1[$ é convergente;

j) se $(u_n)_n$ é uma sucessão tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n-1} \in]1,2[$, então $(u_n)_n$ é divergente;

k) se $(u_n)_n$ é uma sucessão decrescente de termos positivos, então $(u_n)_n$ é convergente.

Exercício 2.5 Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim\limits_n u_n = 0$, $\lim\limits_n v_n = +\infty$ e $\lim\limits_n (u_n v_n) = 1$;

b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\lim\limits_n u_n = 0$, $\lim\limits_n v_n = +\infty$ mas $\lim\limits_n (u_n v_n)$ não exista;

c) uma sucessão convergente e não monótona;

d) uma sucessão não monótona e não limitada;

e) uma sucessão crescente, convergente para zero;

f) uma sucessão não majorada que admite uma subsucessão convergente;

g) uma sucessão convergente para zero e com todos os termos em $\mathbb{R} \backslash]-1,1[$.

Exercício 2.6 Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{2}$.

Exercício 2.7 Estude a natureza das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos\tfrac{1}{n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{e^n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n}\right)^n$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^2+1}$;

f) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n + 5^n}{3^n}$;

g) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2n}$;

h) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+5}$;

i) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n\cos n}{n!}$;

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$;

k) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{10}+7}$;

l) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{n}{1+n^3}$;

m) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{n}$;

n) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

o) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^n\, n!}{n^n}$;

p) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n\,!}$;

q) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln n}{n}$;

r) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^3 n}$.

Exercício 2.8 Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo, ou justifique porque não existe:

a) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja divergente, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente;

b) duas sucessões $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ tais que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja convergente, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ seja divergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ seja convergente;

c) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ seja convergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja divergente;

d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ seja convergente e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ seja divergente;

e) uma série de termos negativos divergente;

f) uma série alternada divergente;

g) uma série alternada absolutamente convergente.

Exercício 2.9 Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões tais que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ é convergente, então $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente;

b) se $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n < 0$ e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente, então $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ é convergente;

c) se $(u_n)_n$é uma sucessão de termos positivos então a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+u_n)$ é divergente;

d) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos então a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2+u_n}$ é convergente;

e) se $(u_n)_n$ é uma sucessão de termos positivos tal que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ é convergente, então a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{1+u_n}$ é também convergente.