## Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC (Universidade do Minho) Ano Lectivo de 2022/23

Teste — 2 de Junho de 2023, 10h00–12h00 Salas E1-0.04 + E1-0.20

## PROVA PRESENCIAL INDIVIDUAL SEM CONSULTA (2h)

**Importante** — Ler antes de iniciar a prova:

- Esta prova consta de 8 questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.
- Recomenda-se que os alunos leiam a prova antes de decidirem por que ordem querem responder às questões que são colocadas.

## Questão 1 Recorde o isomorfismo

$$Maybe \ B = 1 + B$$

$$\text{in=[Nothing ,Just]}$$

e considere a função:

fromMaybe ::  $a \rightarrow Maybe \ a \rightarrow a$  fromMaybe  $a = [\underline{a}, id] \cdot \text{out}$ 

Derive a versão *pointwise* de fromMaybe por forma a não recorrer ao combinador de alternativa (vulg. 'either') de funções.

**Questão 2** Suponha que apenas sabe a seguinte propriedade de uma dada função  $\alpha$ ,

$$\alpha \cdot \langle f, \langle g, h \rangle \rangle = \langle h, f \rangle \tag{E1}$$

válida para quaisquer f, g e h que a tipem correctamente.

Deduza a definição de  $\alpha$  e, a partir do seu tipo mais geral, a respectiva propriedade *natural* (também chamada *grátis*) usando o habitual diagrama.

## Questão 3 Considere a função:

$$x \ominus y = \mathbf{if} \ x \leqslant y \ \mathbf{then} \ 0 \ \mathbf{else} \ 1 + x \ominus (y+1)$$

Use o condicional de McCarthy para identificar o gene de  $\widehat{\ominus}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$  escrita como um anamorfismo de naturais, fazendo o respectivo diagrama.

Questão 4 Considere o combinador comb f definido por:

$$comb \ f = [id, f] \cdot (i_1 + i_2) \cdot f \tag{E2}$$

Mostre que o tipo mais geral de comb é

$$comb: (C+B)^{A+B} \rightarrow (C+B)^{A+B}$$

e demonstre analiticamente que

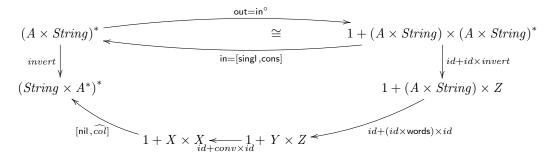
$$comb \ id = id$$

**Questão 5** Na estratégia algorítmica conhecida por *Google map-reduce* abordada nas aulas teóricas ocorre o catamorfismo de listas seguinte,

$$\begin{array}{l} invert :: Eq \ a \Rightarrow [(a, String)] \rightarrow [(String, [a])] \\ invert = \{[\mathsf{nil}, \widehat{col}] \cdot (id + (conv \cdot (id \times \mathsf{words})) \times id)\} \end{array}$$

onde words :  $String o String^*$  é a função que separa um string na lista das suas palavras.

Identifique os tipos X, Y e Z no diagrama abaixo e, assim, os das funções auxiliares conv e col (cuja definição se omite). Justifique a sua resposta.



**Questão 6** Considere o catamorfismo LTree  $(A \times B) \xrightarrow{unzp} (LTree \ A) \times (LTree \ B)$  que divide uma árvore de pares num par de árvores

$$\begin{array}{l} unzp = \langle\!\langle \operatorname{in}_1 \cdot (\mathsf{F} \, \pi_1), \operatorname{in}_2 \cdot (\mathsf{F} \, \pi_2) \rangle \rangle\!\rangle \text{ where} \\ \operatorname{in}_1 = \operatorname{in} \cdot \mathsf{B} \, (\pi_1, id) \\ \operatorname{in}_2 = \operatorname{in} \cdot \mathsf{B} \, (\pi_2, id) \end{array}$$

onde, como sabe, B  $(f,g)=f+g\times g$ . Recorra a uma lei que conhece (e cujo nome é bastante sugestivo) para demonstrar a seguinte propriedade de cancelamento:

$$\pi_1 \cdot unzp = \mathsf{LTree} \ \pi_1$$
 (E3)

**Questão 7** O conceito genérico de catamorfismo (g) gerado pelo gene g é captado pela propriedade universal

$$k = (g) \equiv k \cdot in = g \cdot (\mathsf{F} \, k)$$

Mostre que:

$$(f \cdot g) = f \cdot (g \cdot \mathsf{F} f) \tag{E4}$$

Questão 8 Considere, definido em Haskell, o tipo

data RTree 
$$a = Ros \ a \ [RTree \ a]$$

das habitualmente designadas "rose trees", que tem bifunctor de base B $(X,Y)=X\times Y^*$  e

$$in = \widehat{Ros} 
out (Ros a x) = (a, x)$$

Considere  $fmap\ f$  definida por

$$fmap \ f \ (Ros \ a \ xs) = Ros \ (f \ a) \ (map \ (fmap \ f) \ xs)$$
 (E5)

e mostre que  $fmap\ f=(g)$  identificando g. Mostre ainda que esse catamorfismo se pode definir como um anamorfismo, calculando-o.