

# Derivadas

## Definição

Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **derivável em  $x_0 \in X \cap X'$**  se existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d.$$

Ao valor real  $d$  chama-se **derivada de  $f$  em  $x_0$**  e escreve-se  $f'(x_0) = d$  ou  $Df(x_0) = d$ .

## Nota

Observe-se que, considerando  $h$  tal que  $x_0 + h \in \text{Dom } f$ , e fazendo a mudança de variável  $x = x_0 + h$ , obtemos que

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

### Definição

Dada uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $c \in X \cap X'$ , a reta de equação  $y - f(c) = f'(c)(x - c)$  designa-se por **reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(c, f(c))$** .

### Definição

Dada uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $c \in X \cap X'$ , chama-se **reta normal ao gráfico de  $f$  em  $(c, f(c))$**  à reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de  $f$  nesse ponto.

## Definição

Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **derivável** se  $f$  for derivável em todos os pontos de  $X$ .

A função  $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se a **função derivada de  $f$** .  
$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

## Teorema

Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $x_0 \in X \cap X'$ . Se  $f$  é derivável em  $x_0$  então  $f$  é contínua em  $x_0$ .

## Corolário

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Então  $f$  é contínua.

## Definição

Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se

- **derivável à direita em  $x_0 \in X \cap X'_+$**  se existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$ .

Ao valor real  $d$  chama-se **derivada à direita de  $f$  em  $x_0$**  e escreve-se  $f'(x_0^+) = d$ ;

- **derivável à esquerda em  $x_0 \in X \cap X'_-$**  se existe  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = d$ .

Ao valor real  $d$  chama-se **derivada à esquerda de  $f$  em  $x_0$**  e escreve-se  $f'(x_0^-) = d$ .

## Proposição

Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $x_0 \in X \cap X'_+ \cap X'_-$ . Então

$$f \text{ derivável em } x_0 \iff \begin{array}{l} \text{existem } f'(x_0^+) \text{ e } f'(x_0^-) \\ \text{e} \\ f'(x_0^+) = f'(x_0^-). \end{array}$$

# Regras de derivação

## Proposição

Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis em  $x_0 \in X \cap X'$ . Então:

- $f + g$  é derivável em  $x_0$  e  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ;
- dado  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  é derivável em  $x_0$  e  $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ ;
- $fg$  é derivável em  $x_0$  e  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ ;
- se  $g(x_0) \neq 0$  então  $\frac{f}{g}$  é derivável em  $x_0$  e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

## Teorema

Sejam  $X, Y$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  funções,  $c \in X \cap X'$ ,  $f(c) \in Y'$ . Suponhamos que  $f$  é derivável em  $c$  e que  $g$  é derivável em  $f(c)$ . Então  $g \circ f$  é derivável em  $c$  e

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

## Teorema

Sejam  $X$  e  $Y$  subconjuntos não vazios de  $\mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  uma função bijetiva e suponhamos que:

- $f$  é derivável em  $c \in X \cap X'$ ;
- $f'(c) \neq 0$ ;
- $f^{-1}$  é contínua em  $f(c)$ .

Então  $f^{-1}$  é derivável em  $f(c)$ . Além disso,  $(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$ .

# Derivadas das funções exponenciais e logaritmos

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

Para  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$$

# Derivadas das funções trigonométricas e das funções hiperbólicas

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$

$$\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$$

$$\sec' x = \sec x \operatorname{tg} x$$

$$\cos' x = -\operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cotg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}' x = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{th}' x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{sech}' x = -\operatorname{sech} x \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{coth}' x = -\operatorname{cosech}^2 x$$

$$\operatorname{cosech}' x = -\operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x$$

# Derivadas das funções trigonométricas inversas e das funções hiperbólicas inversas

$$\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcsec}' x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argsech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arcotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arcosec}' x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{argcosech}' x = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

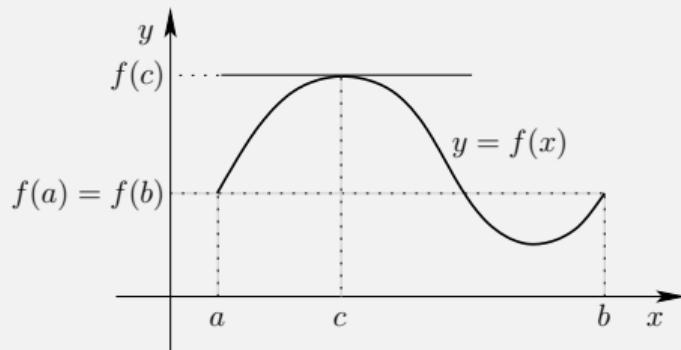
# Alguns teoremas envolvendo derivadas

## Teorema

Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em  $c \in X \cap X'_- \cap X'_+$ . Se  $c$  é um ponto de extremo de  $f$  então  $f'(c) = 0$ .

## Teorema (de Rolle)

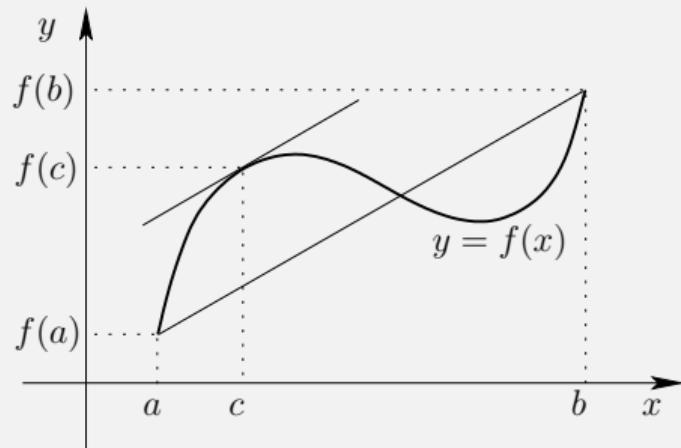
Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$  e tal que  $f(a) = f(b)$ . Então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .



## Teorema (de Lagrange)

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$ . Então

$$\exists c \in ]a, b[ \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



## Corolário

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$ . Se  $f'(x) = 0$  para todo o  $x \in ]a, b[$  então  $f$  é constante.

## Corolário

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, derivável em  $]a, b[$ .

- Se  $f'(x) > 0$  para todo o  $x \in ]a, b[$  então  $f$  é estritamente crescente.
- Se  $f'(x) < 0$  para todo o  $x \in ]a, b[$  então  $f$  é estritamente decrescente.

## Teorema (de Cauchy)

Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas, deriváveis em  $]a, b[$ . Então

$$\exists c \in ]a, b[ \quad [f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c).$$

## Teorema (de Darboux)

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Então

$f'([a, b])$  contém o intervalo fechado de extremos  $f'(a)$  e  $f'(b)$ .

## Corolário

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável tal que  $f'(a)f'(b) < 0$ . Então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ .

## Corolário

Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Então  $f'(I)$  é um intervalo.

## Teorema (Regra de l'Hôpital)

Sejam  $a, b$  números reais,  $a < b$ ,  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  funções deriváveis. Seja  $c \in \{a, b\}$  e suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  e que existe  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Então existe  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  e  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

### Nota

A Regra de l'Hôpital é também válida:

- quando se calcula o limite quando  $x \rightarrow +\infty$  ou quando  $x \rightarrow -\infty$ ;
- considerando, no teorema anterior,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$$

e tomando  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

# Derivadas de ordem superior

## Definição

Sejam  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $c \in X' \cap X$ . Diz-se que  $f$  é **duas vezes derivável em  $c$** , ou que  $f$  tem **derivada de 2<sup>a</sup> ordem em  $c$**  ou que  $f$  tem **segunda derivada em  $c$**  se

$$\exists \delta > 0 \ g = f'_{|X \cap [c-\delta, c+\delta]} \text{ é derivável em } c.$$

Representa-se a segunda derivada de  $f$  em  $c$  por  $f''(c)$  ou  $f^{(2)}(c)$ .

Diz-se que  $f$  tem **derivada de 2<sup>a</sup> ordem** se  $f$  é duas vezes derivável em qualquer ponto do seu domínio (note-se que, em particular, temos que  $X \subseteq X'$ ).

À função  $f'' : X \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **função segunda derivada de  $f$** .

$$x \mapsto f''(x)$$

## Nota

*Indutivamente define-se derivada de ordem  $n$  de  $f$  em  $c$  e a função derivada de ordem  $n$  de  $f$ .*

*Denota-se a derivada de  $f$  de ordem  $n$  por  $f^{(n)}$  ou  $D^n f$ .*

*Convenciona-se que  $f^{(0)} = f$ .*

## Teorema

*Seja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que admite segunda derivada em  $c \in X \cap X'$ . Suponhamos que  $f'(c) = 0$ . Então, se  $f''(c) > 0$ ,  $c$  é um ponto de mínimo local de  $f$  e se  $f''(c) < 0$ ,  $c$  é um ponto de máximo local de  $f$ .*