Tópico 1 — Erros e estabilidade

- Teorema: Seja $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Seja, ainda, $x \in I_x = [x^* - \varepsilon_x, x^* + \varepsilon_x]$, em que x^* representa um valor aproximado do valor exato x, sendo ε_x um limite superior do erro absoluto. Então, quando se calcula $y^* = f(x^*)$ em vez de $y = f(x)$, tem-se

$$\varepsilon_y \leqslant \varepsilon_x M_x, \varepsilon'_y \leqslant \frac{\varepsilon_x M_x}{|y|}, \text{ com } M_x \geqslant \max_{x\in I_x} \left|f'(x)\right|.$$

- Teorema: Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Sejam, ainda, $x \in I_x = [x^* - \varepsilon_x, x^* + \varepsilon_x]$ e $y \in I_y = [y^* - \varepsilon_y, y^* + \varepsilon_y]$, em que x^* e y^* representam valores aproximados dos valores exatos x e y, respetivamente, sendo ε_x e ε_y limites superiores do erro absoluto. Então, quando se calcula $z^* = f(x^*, y^*)$ em vez de $z = f(x, y)$, tem-se

$$\varepsilon_z \leqslant \varepsilon_x M_x + \varepsilon_y M_y, \varepsilon'_z \leqslant \frac{\varepsilon_x M_x + \varepsilon_y M_y}{|z|}, \text{ com } M_x \geqslant \max_{x\in I_x, y\in I_y} \left|f'_x(x,y)\right| \text{ e } M_y \geqslant \max_{x\in I_x, y\in I_y} \left|f'_y(x,y)\right|.$$

Tópico 2 — Equações não lineares

- Teorema de Bolzano: Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, então f admite pelo menos um zero em $]a, b[$.
- Corolário do Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $f'(x) \neq 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então f admite no máximo um zero em $]a, b[$.
- Teorema do valor médio de Lagrange: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Então, existe $\xi \in]a, b[$ tal que $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.
- Teorema de Taylor (que é uma extensão do Teorema do valor médio de Lagrange): Seja $f \in C^n([a, b];\mathbb{R})$ e $f^{(n+1)}$ definida em $]a, b[$. Seja, ainda, $c \in [a, b]$. Então, existe $\xi \in]a, b[$ tal que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x - c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - c)^{n+1}$.
- Método das bisseções sucessivas
  - Algoritmo

Input: $f \in C([a, b];\mathbb{R})$, CP, $k_{\max} \in \mathbb{N}$
Output: $x_* \in \mathbb{R}$ ou "não convergiu"

$a_0 \leftarrow a$, $b_0 \leftarrow b$;
for $k \leftarrow 0$ **to** $k_{\max} - 1$ **do**
  $x_{k+1} \leftarrow (a_k + b_k)/2$;
  if $f(x_{k+1}) = 0 \vee CP = V$ **then**
    $x_* \leftarrow x_{k+1}$;
    return x_*;
  else
    if $f(a_k)f(x_{k+1}) < 0$ **then**
      $[a_{k+1}, b_{k+1}] \leftarrow [a_k, x_{k+1}]$;
    else
      $[a_{k+1}, b_{k+1}] \leftarrow [x_{k+1}, b_k]$;
    $k \leftarrow k + 1$;
return *"não convergiu"*;

  - Teorema: Seja f uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) \leqslant 0$ e seja x^* o único zero de f em $[a, b]$. Então:
    (a) A sucessão (x_k) gerada pelo método das bisseções sucessivas converge para x^*.
    (b) O valor $\varepsilon_{k+1} = \frac{b-a}{2^{k+1}}$ constitui um majorante do erro absoluto de x_{k+1}.

- Método iterativo simples
  - Algoritmo

Input: $\varphi \in C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, CP, $k_{\max} \in \mathbb{N}$
Output: $x_* \in \mathbb{R}$ ou "não convergiu"

for $k \leftarrow 0$ **to** $k_{\max} - 1$ **do**
  $x_{k+1} \leftarrow \varphi(x_k)$;
  if $CP{=}V$ **then**
    $x_* \leftarrow x_{k+1}$;
    return x_*;
  else
    $k \leftarrow k + 1$;
return *"não convergiu"*;

  - Teorema: Seja φ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ tal que $L = \max_{x\in[a,b]} |\varphi'(x)| < 1$ e seja x^* o único zero de f em $[a, b]$. Então:

(a) Para qualquer valor inicial $x_0 \in [a,b]$, a sucessão (x_k) gerada pelo método iterativo simples converge para x^*.

(b) O valor $\varepsilon_{k+1} = \frac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$ constitui um majorante do erro absoluto de x_{k+1}.

- Método de Newton

  – Algoritmo

  Input: $f \in C^1([a,b];\mathbb{R})$, $x_0 \in [a,b]$, CP, $k_{\max} \in \mathbb{N}$
  Output: $x_* \in \mathbb{R}$ ou "não convergiu"

  for $k \leftarrow 0$ **to** $k_{\max} - 1$ **do**
      $x_{k+1} \leftarrow x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$;
      if $CP{=}V$ **then**
          $x_* \leftarrow x_{k+1}$;
          return x_*;
      else
          $k \leftarrow k+1$;
  return *"não convergiu"*;

  – Teorema: Seja $f \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ tal que x^* é o único zero de f em $[a,b]$.

  (a) Se (i) $\forall x \in [a,b]\ [f'(x) \neq 0]$, (ii) $\forall x \in [a,b]\ [f''(x) \leq 0 \vee f''(x) \geq 0]$, e (iii) $\exists x_0 \in [a,b]\ [f(x_0)f''(x_0) \geq 0]$, então a sucessão gerada pelo método de Newton com aproximação inicial x_0 converge monotonamente para x^*.

  (b) Seja (x_k) uma sucessão gerada pelo método de Newton convergente para x^* com $x_k \in [a,b]$, $k = 0, 1, \ldots$. Sejam, ainda,

  $$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \text{ e } m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

  Então, se $m_1 > 0$, o valor $\varepsilon_{k+1} = \frac{M_2}{2m_1}|x_{k+1} - x_k|^2$ constitui um majorante do erro absoluto de x_{k+1}.

Tópico 3 — Sistemas de equações lineares

- "Algoritmo Transformação em Escada — v2" (ATEsc-v2)

  Input: matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$
  Output: uma matriz em escada equivalente à matriz A

Passo 1 [inicializar o algoritmo]
$i \leftarrow 1$, $j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz A

Passo 2 [selecionar o elemento pivô]
$k \leftarrow \underset{\bar{k}\in\{i,\ldots,m\}}{\arg\max} |a_{\bar{k}i}|$
se $i \neq k$ **então** $\ell_i \leftrightarrow \ell_k$

Passo 3 [anular os elementos abaixo do pivô]
para $p \leftarrow i+1$ **até** m **fazer**
    $m_{pj} \leftarrow \frac{a_{pj}}{a_{ij}}, \quad \ell_p \leftarrow \ell_p - m_{pj}\ell_i$

Passo 4 [terminar?]
se já se obteve uma matriz em escada **então** terminar
senão
    $i \leftarrow i+1$, $j \leftarrow$ índice da coluna não-nula mais à esquerda da matriz $A(i:\mathrm{end},:)$
    ir para o Passo 2

- "Algoritmo Fatorização PLU de Doolittle" (AFaPLUD)

  Input: matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$
  Output: matrizes $P = [p_{ij}], L = [\ell_{ij}], U = [u_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

  $P \leftarrow I_n, L \leftarrow I_n, U \leftarrow A$;
  for $k \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
      $i \leftarrow \underset{\bar{i}\in\{k,\ldots,n\}}{\arg\max} |u_{\bar{i}k}|$;
      if $k \neq i$ **then**
          $p_{k,:} \leftrightarrow p_{i,:}, \quad \ell_{k,1:k-1} \leftrightarrow \ell_{i,1:k-1}, \quad u_{k,k:n} \leftrightarrow u_{i,k:n}$;
      for $j \leftarrow k+1$ **to** n **do**
          $\ell_{jk} \leftarrow \frac{u_{jk}}{u_{kk}}, \quad u_{j,k:n} \leftarrow u_{j,k:n} - \ell_{jk}u_{k,k:n}$;

- Teorema: Seja $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. As seguintes funções são normas de $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 \overset{\text{def}}{=} |x_1| + \cdots + |x_n|, \quad \|x\|_2 \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \quad \|x\|_\infty \overset{\text{def}}{=} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|.$$

- Teorema: Seja a matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. As seguintes funções são normas de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$:
$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} \|c_{j,A}\|_1, \quad \|A\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \rho(A^\top A), \quad \|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \|\ell_{i,A}\|_1.$$
- Definição: Seja A uma matriz quadrada invertível. Chama-se número de condição da matriz A na norma p, que se representa por $\operatorname{cond}_p(A)$, a $\operatorname{cond}_p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \|A\|_p\, \|A^{-1}\|_p$.
- Teorema: Sejam $\bar{x}$ a solução do sistema de Cramer não-homogéneo $Ax = b$ e $\tilde{x}$ a solução do sistema de Cramer não-homogéneo (perturbado) $Ax = \tilde{b}$. Então, tem-se que $\frac{\|\bar{x}-\tilde{x}\|_p}{\|\bar{x}\|_p} \leqslant \operatorname{cond}_p(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|_p}{\|b\|_p}$.
- Teorema: Sejam $\bar{x}$ a solução do sistema de Cramer não-homogéneo $Ax = b$ e $\tilde{x}$ a solução do sistema de Cramer não-homogéneo (perturbado) $\tilde{A}x = b$. Então, tem-se que $\frac{\|\bar{x}-\tilde{x}\|_p}{\|\bar{x}\|_p} \leqslant \operatorname{cond}_p(A)\frac{\|A-\tilde{A}\|_p}{\|A\|_p}$.
- Teorema: Seja $X = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então, $X^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left[\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a\end{smallmatrix}\right]$.

Tópico 4 — Interpolação

- Teorema: (Forma de Lagrange) O polinómio interpolador da tabela matemática (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) é
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x) y_k L_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$
- Teorema: (Forma de Newton) O polinómio interpolador da tabela matemática (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) é
$$\begin{aligned} p(x) = {} & y_0 + (x-x_0)[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2] + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0,x_1,x_2,x_3] \\ & + \cdots + (x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})[x_0,\ldots,x_n], \end{aligned}$$
  com
  - diferença dividida de primeira ordem: $[x_i, x_{i+1}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$.
  - diferença dividida de segunda ordem: $[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{[x_i,x_{i+1}]-[x_{i+1},x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$.
  - …
  - diferença dividida de ordem n: $[x_i, \ldots, x_{i+n}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{[x_i,\ldots,x_{i+n-1}]-[x_{i+1},\ldots,x_{i+n}]}{x_i - x_{i+n}}$.
- Teorema: Sejam $f \in C^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ e p o polinómio de grau menor ou igual a n que interpola f nos nós de interpolação x_0, x_1, …, x_n pertencentes a $[a,b]$. Seja, ainda, $\bar{x} \in [a,b]$. Então:
$$|f(\bar{x}) - p(\bar{x})| \leqslant \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} M, \text{ com } M \geqslant \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)|, h = \max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$
- Definição: Uma função $s_\ell : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ diz-se um *spline* de grau ℓ interpolador da tabela matemática (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) se:
  - $s_\ell(x_i) = y_i, i = 0, \ldots, n,$
  - em cada um dos intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ s_ℓ é um polinómio de grau menor ou igual a ℓ (representaremos s_ℓ no sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ por $s_\ell^{(i)}$) e
  - $s_\ell \in C^{\ell-1}([a,b];\mathbb{R})$.
- Teorema: O *spline* linear interpolador da tabela matemática (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) é
$$s_1^{(i)}(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n.$$
- Teorema: Sejam $f \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ e s_1 o *spline* linear que interpola f nos nós de colocação $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Seja, ainda, $\bar{x} \in [a,b]$. Então,
$$|f(\bar{x}) - s_1(\bar{x})| \leqslant \frac{1}{8} h^2 M, \text{ com } M \geqslant \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|, \quad h = \max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$
- Teorema: O *spline* cúbico interpolador da tabela matemática (x_0, y_0), …, (x_n, y_n) é
$$\begin{aligned} s_3^{(i)}(x) = {} & \frac{M_{i-1}}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{M_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \left(\frac{y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_{i-1}(x_i - x_{i-1})}{6}\right)(x_i - x) + \\ & + \left(\frac{y_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{M_i(x_i - x_{i-1})}{6}\right)(x - x_{i-1}), x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$
  em que M_0, …, M_n se obtêm a partir da resolução do sistema linear tridiagonal
  - ponto inicial: $M_0 = 0$
  - pontos interiores $(i = 1, \ldots, n-1)$:
$$(x_i - x_{i-1})M_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1})M_i + (x_{i+1} - x_i)M_{i+1} = \frac{6}{x_{i+1} - x_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{x_i - x_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$
  - ponto final: $M_n = 0$

Tópico 5 — Integração Numárica

- Teorema: Fórmula simples do trapézio: Seja $f \in C^2([a,b];\mathbb{R})$. Então:

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{\mathrm{ts}} + ET_{\mathrm{ts}},$$
$$I_{\mathrm{ts}} = \frac{(b-a)}{2}\left(f(a)+f(b)\right), ET_{\mathrm{ts}} = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}(\xi).$$

- Teorema: Fórmula simples de Simpson: Seja $f \in C^4([a,b];\mathbb{R})$. Então:

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{\mathrm{Ss}} + ET_{\mathrm{Ss}},$$
$$I_{\mathrm{Ss}} = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right), ET_{\mathrm{Ss}} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

- Teorema: Fórmula simples dos três oitavos: Seja $f \in C^4([a,b];\mathbb{R})$. Então:

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{3/8\mathrm{s}} + ET_{3/8\mathrm{s}},$$
$$I_{3/8\mathrm{s}} = \frac{(b-a)}{8}\left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right), ET_{3/8\mathrm{s}} = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi).$$

- Teorema: Fórmula composta do trapézio — qualquer número de subintervalos igualmente espaçados: Sejam $f \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ e a tabela matemática $(a = x_0, y_0)$, …, $(b = x_n, y_n)$, tal que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \ldots, n-1$, e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Então:

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{\mathrm{tc}} + ET_{\mathrm{tc}},$$
$$I_{\mathrm{tc}} = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right), ET_{\mathrm{tc}} = -\frac{(b-a)h^2}{12} f^{(2)}(\xi).$$

- Teorema: Fórmula composta de Simpson — número par de subintervalos igualmente espaçados: Sejam $f \in C^4([a,b];\mathbb{R})$ e a tabela matemática $(a = x_0, y_0)$, …, $(x_n, b = y_n)$, tal que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \ldots, n-1$, e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Então:

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{\mathrm{Sc}} + ET_{\mathrm{Sc}},$$
$$I_{\mathrm{Sc}} = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right), ET_{\mathrm{Sc}} = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi).$$

- Teorema: Fórmula composta dos três oitavos — número múltiplo de três de subintervalos igualmente espaçados: Sejam $f \in C^4([a,b];\mathbb{R})$ e a tabela matemática $(a = x_0, y_0)$, …, $(b = x_n, y_n)$, tal que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \ldots, n-1$, e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Então:

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_{3/8\mathrm{c}} + ET_{3/8\mathrm{c}},$$
$$I_{3/8\mathrm{c}} = \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n\right), ET_{3/8\mathrm{c}} = -\frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi).$$