Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
18 de janeiro de 2016

Álgebra Linear CC

Exame de recurso — duração: 2h15min

1. Considere as matrizes reais

$$A_= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} d & 2e & f \\ -2a & -4b & -2c \\ g & 2h & i \end{bmatrix}$$

e sejam $E, F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Determine a matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $X^T + 2A = BB^T$.

   (b) Sabendo que $|C| = 5$, calcule $|C^T DC^{-1}|$.

   (c) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte: "Se E e F são matrizes simétricas, então $EF - FE$ é antissimétrica.".

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere as matrizes reais

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \beta+1 \\ 1 & -\alpha & 1 \end{bmatrix} \text{ e } b_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -\beta \end{bmatrix}.$$

   (a) Discuta, em função dos parâmetros α e β, o sistema $A_{\alpha,\beta} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = b_\beta$.

   (b) Justifique que a matriz $A_{0,-1}$ é invertível e, utilizando o algoritmo de Gauss-Jordan, determine a sua inversa.

3. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (1,1,0)$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$ e os subespaços vetoriais $U =< u_1, u_2 >$ e $V =< v_1, v_2 >$.

   (a) Dê exemplo de, ou justifique que não existe, um vetor $v \in V$, tal que:

      i. v_1, v_2, v são linearmente independentes.

      ii. $< v_1, v_2, v >$ não é um subespaço vetorial de V.

   (b) Determine a dimensão de $U + V$. Diga se $\mathbb{R}^3 = U \bigoplus V$.

   (c) Determine um suplementar de V relativamente a $\mathbb{R}^3$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por

$$f(x,y,z) = (x - y + 2z, y - 2z, x, x), \ \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Determine uma base de $\text{Im} f$.

   (b) Classifique f quanto à injetividade e sobrejetividade.

   (c) Determine $M(f; B_1, B_2)$, onde B_1 e B_2 são as bases de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^4$ dadas, respetivamente, por $B_1 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e $B_2 = ((1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0))$.

5. Sejam B a base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ dada por $B = ((1,1,0),(0,1,0),(0,1,1))$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$M(g; B, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que $(0,0,1)$ é um vetor próprio de g.

   (b) Mostre que 1 e 2 são os únicos valores próprios de g.

   (c) Determine a multiplicidade geométrica de cada um dos valores próprios de g. Diga, justificando, se g é diagonalizável.

Cotação: **1** - (1.25 + 1.5 + 1.25); **2** - (1.75 + 1.75); **3** - (1.5 + 1.75 + 1.5). **4** - (1.5 + 1.0 + 1.25) **5** - (1.25 + 1.25 + 1.5)