notas para a unidade curricular

Álgebra Universal e Categorias

Carla Mendes

Departamento de Matemática
Universidade do Minho
2022/2023

Conteúdo

Introdução

O presente texto pretende ser um texto de apoio às aulas da unidade curricular Álgebra Universal e Categorias. O programa desta unidade curricular prevê o estudo de conceitos e resultados básicos de álgebra universal e de teoria de categorias, pelo que a escolha dos tópicos abordados ao longo destes apontamentos teve em consideração os conteúdos programáticos referidos.

No Capítulo 1 são apresentados noções e resultados básicos de: teoria de conjuntos, relações, funções, operações, relações de ordem e relações de equivalência. Estes conceitos são essenciais para a compreensão dos conteúdos abordados nos restantes capítulos. Neste capítulo é também feita uma breve introdução à teoria de reticulados. No estudo de álgebra universal são relevantes conceitos e resultados desta teoria. Além de fornecerem exemplos importantes de álgebras, os reticulados são fundamentais no estudo de propriedades comuns a diversas estruturas algébricas e, em certos casos, no estudo de propriedades que permitem distinguir classes de álgebras.

O Capítulo 2 é dedicado à apresentação de conceitos fundamentais e de resultados relevantes de álgebra universal. Com a evolução do estudo na área da matemática foram surgindo ao longo do tempo diversas estruturas algébricas, tais como grupos, anéis, corpos, anéis de Boole, reticulados, etc. Estas estruturas, embora diferentes, partilham várias propriedades. Encontrar e estudar propriedades comuns às diversas estruturas algébricas é o principal objetivo da álgebra universal.

Por último, no Capítulo 3 apresentam-se conceitos e alguns resultados básicos de teoria de categorias. Numa primeira aproximação, podemos considerar a teoria de categorias como o estudo abstrato de álgebras de funções. Inicialmente, esta teoria surgiu com o objetivo de definir um formalismo que permita descrever a relação existente entre estruturas matemáticas. Duas álgebras isomorfas têm essencialmente as mesmas propriedades, espaços métricos isométricos são praticamente equivalentes e espaços homeomorfos são indistinguíveis (excepto nos nomes dos seus pontos). Assim, muitas das propriedades de diversas estruturas matemáticas podem ser formuladas recorrendo às transformações admissíveis entre estas estruturas e à composição destas transformações. A teoria de categorias permite estudar e caracterizar as mais diversas estruturas em função das transformações admissíveis entre elas.

1. Conceitos Preliminares

Neste capítulo recordam-se conceitos básicos de: teoria de conjuntos, relações, funções, operações, relações de ordem e relações de equivalência. Os conceitos e resultados aqui apresentados podem ser encontrados em qualquer livro básico de teoria de conjuntos e de matemática discreta.

1.1 Conjuntos, Relações, Funções, Classes

Para a compreensão dos conteúdos abordados nestes apontamentos é, em geral, suficiente considerar uma teoria intuitiva de conjuntos. Seguidamente apresentam-se alguns conceitos básicos desta teoria.

Um **conjunto** é definido como uma coleção de objetos, designados por **elementos** ou **membros** do conjunto. Escreve-se $a \in A$ se a é um elemento de um conjunto A; caso contrário, escreve-se $a \notin A$.

Se A e B são conjuntos tais que todo o elemento de A é também um elemento de B, diz-se que A **está contido em** B ou que A é um **subconjunto** de B e escreve-se $A \subseteq B$. Se A e B são conjuntos tais que $A \subseteq B$ e existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, diz-se que A é um **subconjunto próprio** de B e escreve-se $A \subset B$. Um conjunto A não está contido num conjunto B caso exista um elemento a tal que $a \in A$ e $a \notin B$; neste caso escreve-se $A \nsubseteq B$.

Dados conjuntos A e B, diz-se que os conjuntos são **iguais**, e escreve-se $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$; caso contrário, os conjuntos dizem-se **diferentes** e escreve-se $A \neq B$.

O **conjunto vazio**, isto é, o conjunto sem elementos, é representado por $\emptyset$ ou por $\{\}$. Para qualquer conjunto A, tem-se $\emptyset \subseteq A$.

As operações de conjuntos representadas por $\cup$, $\cap$ e $\setminus$ têm o significado usual.

Se A é um conjunto, o conjunto das partes de A é representado por $\mathcal{P}(A)$, ou seja, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Um subconjunto Π de $\mathcal{P}(A)$ diz-se uma **partição de** A se $\emptyset \notin \Pi$ e, para qualquer $a \in A$, existe um único $X \in \Pi$ tal que $a \in X$. Note-se que, para qualquer conjunto A, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$.

Dados conjuntos A e B, o **produto cartesiano** de A e B, representado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, isto é,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

O conceito de produto cartesiano pode ser generalizado para uma coleção finita de conjuntos. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos, $n \in \mathbb{N}$, define-se

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, representa-se $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ por A^n. Se $n = 0$, define-se $A^n = \{\emptyset\}$.

Relações

Dados um número natural n e conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, dá-se a designação de **relação n-ária nos conjuntos** A_1, A_2, ..., A_n a um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$; no caso em que $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, a relação n-ária nos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ diz-se uma **relação n-ária em A**. Se ρ é uma relação n-ária nos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são elementos tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$, diz-se que que os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ estão **relacionados por** ρ e escreve-se $\rho(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Uma relação 2-ária nos conjuntos A e B diz-se uma **relação binária de A em B** ou **correspondência de A em B**. Se ρ é uma relação binária de A em B e a e b são elementos tais que $(a, b) \in \rho$, também se escreve $a \,\rho\, b$ em alternativa a $\rho(a, b)$. Se $(a, b) \notin \rho$, escrevemos $a \not\rho\, b$ e dizemos que a **e** b **não estão relacionados por** ρ.

Uma vez que as relações binárias são conjuntos, faz sentido considerar as operações de união, interseção e complementação na construção de novas relações binárias. Além destas operações, existem outros processos que permitem a construção de novas relações binárias.

Se A, B, C e D são conjuntos, ρ é uma relação binária de A em B e ϱ é uma relação binária de C em D, chama-se:

- **relação inversa de** ρ, e representa-se por ρ^{-1}, a relação de B em A definida por
$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\}.$$
- **relação composta de** ϱ **com** ρ, e representa-se por $\varrho \circ \rho$, a relação binária de A em D definida por
$$\varrho \circ \rho = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists_{z \in B \cap C} \quad ((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \varrho)\}.$$

Funções e operações

Uma relação binária f de um conjunto A num conjunto B diz-se uma **função (ou aplicação) de** A **em** B se, para cada $a \in A$, existe um e um só $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B.

Para cada $a \in A$, o único elemento b de B tal que $(a,b) \in f$ representa-se por $f(a)$, a este elemento dá-se a designação de **imagem de a por f**. Pode, então, escrever-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

Em $f : A \to B$, chamamos: **domínio** ou **conjunto de partida** de f ao conjunto A; **codomínio** ou **conjunto de chegada** de f ao conjunto B; **imagem** ou **contradomínio** de f ao conjunto $\mathrm{Im} f = \{f(x) : x \in A\}$.

Se f é uma função de A em B e $C \subseteq A$, então $f \cap (C \times B)$ é uma função de C em B designada por **restrição de f a C** e representada por $f_{|C}$.

O conjunto de todas as funções de A em B representa-se por B^A. Dado um conjunto A, chama-se **aplicação vazia** à aplicação $\emptyset : \emptyset \to A$; esta é a única aplicação de $\emptyset$ em A e, portanto, $A^\emptyset = \{\emptyset\}$. Se A não é um conjunto vazio, não existem aplicações de A em $\emptyset$, pelo que $\emptyset^A = \emptyset$.

Dados conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, designamos por: **imagem de X por f** o conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$; **imagem inversa** (ou **pré-imagem) de Y por f** o conjunto $f^{\leftarrow}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$.

Existem alguns tipos especiais de funções que desempenham um papel relevante no estudo de matemática.

Uma função $f : A \to B$ diz-se:

- **injetiva** se
$$\forall a, b \in A \ \ (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)),$$
ou equivalentemente, se
$$\forall a, b \in A \ \ (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b).$$
- **sobrejetiva** se
$$\forall b \in B \ \exists a \in A \ \ f(a) = b,$$
ou equivalentemente se
$$f(A) = B.$$
- **bijetiva** se f é injetiva e sobrejetiva, i.e., se
$$\forall b \in B \ \exists^1 a \in A \ \ f(a) = b.$$

Uma **família** $(a_i \,|\, i \in I)$ **de elementos de um conjunto** A, que poderá também ser representada por $(a_i)_{i \in I}$, é uma função φ do conjunto I no conjunto A tal que $\varphi(i) = a_i$; o conjunto I é o **conjunto índice** da família $(a_i)_{i \in I}$. A imagem de I por φ é representada por $\{a_i \,|\, i \in I\}$.

Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos de um certo conjunto A, a união e a interseção destes subconjuntos são representadas, respetivamente, por

$$\bigcup(A_i \mid i \in I), \quad \bigcup\{A_i \mid i \in I\} \;\text{ ou }\; \bigcup_{i\in I} A_i$$

e

$$\bigcap(A_i \mid i \in I), \quad \bigcap\{A_i \mid i \in I\} \;\text{ ou }\; \bigcap_{i\in I} A_i$$

e são definidas por

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in A \mid x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\},$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in A \mid x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}.$$

Se $I = \emptyset$, tem-se $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$ e $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = A$.

Sejam I um conjunto e $(A_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos. Designa-se por ***produto cartesiano*** da família $(A_i)_{i\in I}$, e representa-se por $\prod_{i\in I} A_i$, o conjunto de todas as funções f de I em $\bigcup_{i\in I} A_i$ tais que, para todo $i \in I$, $f(i) \in A_i$, i.e.,

$$\prod_{i\in I} A_i = \Big\{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i, \forall i \in I\Big\}.$$

Cada conjunto A_i designa-se por ***fator*** do produto cartesiano. Se $A_i = \emptyset$, para algum $i \in I$, tem-se $\prod_{i\in I} A_i = \emptyset$. No caso em que $I = \emptyset$, o conjunto $\prod_{i\in I} A_i$ tem exatamente um elemento; a função vazia é o único elemento deste conjunto, ou seja, $\prod_{i\in I} A_i = \{\emptyset\}$. Se $A_i = A$, para todo $i \in I$, representa-se $\prod_{i\in I} A_i$ por A^I.
No sentido de relacionar a definição de produto cartesiano da família $(A_i)_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ com a definição de $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$, convenciona-se o uso do n-uplo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de A como uma representação da função $f \in A^{\{1,2,\ldots,n\}}$ tal que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $\ldots$, $a_n = f(n)$. Assim, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} A_i$.
Para cada $j \in I$, designa-se por ***projeção-j*** a aplicação $p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ tal que $p_j(f) = f(j)$, para todo $f \in \prod_{i\in I} A_i$.

Dados um conjunto A e $n \in \mathbb{N}_0$, chama-se ***operação n-ária em A*** a qualquer função f de A^n em A; ao inteiro n dá-se a designação de ***aridade de f***. Uma ***operação finitária*** é uma operação n-ária, para algum $n \in \mathbb{N}_0$. Atendendo a que todas as operações consideradas ao longo do texto são operações finitárias, em geral será omitida a palavra "finitária" e usa-se somente o termo "operação" para significar operação finitária. Se f é uma operação finitária num conjunto A e $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, a imagem de $(a_1, \ldots, a_n)$ por f é representada por $f(a_1, \ldots, a_n)$. Se A é um conjunto não vazio, a aridade de uma operação em A é bem determinada. A uma operação em A de aridade 0 dá-se a designação de ***operação nulária***. Uma operação nulária é uma função $c : \{\emptyset\} \to A$, sendo esta função completamente determinada pelo elemento $c(\emptyset) \in A$ e usualmente identificada com esse elemento; por este motivo, as operações nulárias são também designadas por ***constantes***. Às operações de aridade 1, 2 e 3 é usual dar a designação de operações ***unárias***, ***binárias*** e ***ternárias***, respetivamente.

Classes

No estudo de categorias será necessário fazer referência a "grandes coleções" de objetos tais como "a coleção de todos os conjuntos", "a coleção de todos os grupos", "a coleção de todos os morfismos de grupos", etc, as quais não podem ser encaradas como conjuntos. Note-se que se a "coleção" U de todos os conjuntos for definida como um conjunto, obtem-se uma contradição: considerando o subconjunto $V = \{X \in U \,|\, X \notin X\}$, tem-se $V \in V$ *se e só se* $V \notin V$ (*Paradoxo de Russel*). Assim, no sentido de evitar situações paradoxais como esta, torna-se necessária uma abordagem mais cuidadosa no estudo da teoria de conjuntos. No entanto, não sendo objetivo destes apontamentos a apresentação de um estudo detalhado desta teoria, neste texto será considerada apenas uma extensão da teoria intuitiva de conjuntos, na qual todas as "coleções" de objetos são vistas como *classes* e os conjuntos são considerados como classes "pequenas". Do ponto de vista axiomático, este tipo de abordagem à teoria de conjuntos é formalizado no sistema Neumman-Bernays-Gödel. Neste sistema é feita uma distinção entre conjuntos e classes (em particular, os conjuntos podem ser elementos de classes, mas não o inverso); além disso, é postulado que existe a classe de todos os conjuntos, designada por *universo* e representada por $\mathcal{U}$ (desta forma é evitado o *Paradoxo de Russel*). As classes são as subcoleções de $\mathcal{U}$. Assim, dadas classes A e B, é possível definir as classes $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$ e, consequentemente, não existe problema na definição de funções entre classes, relações, famílias, etc.

1.2 Relações de ordem parcial

Nesta secção recordam-se noções básicas relacionadas com um tipo particular de relações binárias designadas por *relações de ordem*. A noção de ordem pode ser encontrada nas mais diversas situações do dia a dia, e sob variadas formas, quando fazemos referência a expressões tais como: primeiro, segundo, terceiro; maior versus menor; melhor versus pior; precedência; preferência, etc.

Definição 1.2.1. *Sejam P um conjunto e ρ uma relação binária em P. Diz-se que ρ é uma relação de* ***ordem parcial*** *em P se são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) *para todo $a \in P$, $(a, a) \in \rho$.* *(reflexividade)*

(ii) *para quaisquer $a, b \in P$, $((a, b) \in \rho$ e $(b, a) \in \rho) \Rightarrow a = b$.* *(antissimetria)*

(iii) *para quaisquer $a, b, c \in P$, $((a, b) \in \rho$ e $(b, c) \in \rho) \Rightarrow (a, c) \in \rho$.* *(transitividade)*

Se, adicionalmente, para quaisquer $a, b \in P$,

(iv) *$(a, b) \in \rho$ ou $(b, a) \in \rho$,*

a relação ρ diz-se uma relação de ***ordem total****.*
Se P é um conjunto não vazio e ρ é uma relação de ordem parcial em P, ao par (P, ρ) dá-se a designação de ***conjunto parcialmente ordenado*** *(c.p.o.); se ρ é uma relação de ordem total em P, o par (P, ρ) designa-se por* ***conjunto totalmente ordenado*** *ou por* ***cadeia****.*

Exemplo 1.2.2.
(1) *Sendo A um dos conjuntos* $\mathbb{N}$*,* $\mathbb{Z}$*,* $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{R}$ *e* $\leq$ *a relação "menor ou igual" usual em A, o par* $(A, \leq)$ *é um c.p.o..*
(2) *O par* $(\mathbb{N}, |)$*, onde* $|$ *é a relação* divide *em* $\mathbb{N}$*, é um c.p.o..*
(3) *Dado um conjunto A,* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um c.p.o..*
(4) *Os c.p.o.s* $(\mathbb{N}, \leq)$*,* $(\mathbb{Z}, \leq)$*,* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *e* $(\mathbb{R}, \leq)$ *são cadeias.*

Usualmente, representa-se uma ordem parcial definida num conjunto P por $\leq$ e o respetivo conjunto parcialmente ordenado por $(P, \leq)$. Dado um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ e dados elementos $a, b \in P$, escrevemos:

- $a \leq b$, e lemos "a ***é menor ou igual a*** b", para representar $(a, b) \in \leq$;

- $a \not\leq b$, e lemos "a ***não é menor ou igual a*** b", para representar $(a, b) \notin \leq$;

- $a < b$, e lemos "a ***é menor do que*** b", se $a \leq b$ e $a \neq b$;

- $a \prec b$, e lemos "b ***é sucessor de*** a" (ou b ***cobre*** a ou a ***é coberto por*** b), se $a < b$ e $\neg(\exists\, c \in P, a \leq c \leq b)$.

Os elementos a e b dizem-se ***comparáveis*** se $a \leq b$ ou $b \leq a$; caso contrário, ou seja, se $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, diz-se que a e b são ***incomparáveis*** e escreve-se $a \parallel b$.

Um subconjunto A de P diz-se:

- uma ***cadeia em*** $(P, \leq)$ ou um ***conjunto totalmente ordenado em*** $(P, \leq)$ se, para quaisquer $a, b \in A$, a e b são comparáveis;

- uma ***anticadeia em*** $(P, \leq)$ se, para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \neq b$, $a \parallel b$.

O ***intervalo fechado*** $[a, b]$ representa o conjunto $\{c \in P \mid a \leq c \leq b\}$ e o ***intervalo aberto*** (a, b) representa o conjunto $\{c \in P \mid a < c < b\}$. Os intervalos $(a, b]$ e $[a, b)$ representam, respetivamente, os conjuntos $\{c \in P \mid a < c \leq b\}$ e $\{c \in P \mid a \leq c < b\}$.

Dado um subconjunto A de P, diz-se que A é um ***subconjunto convexo de*** P se, para quaisquer $a, b \in A$ e $c \in P$,

$$a \leq c \leq b \Rightarrow c \in A.$$

Claramente, para quaisquer $a, b \in P$, o intervalo fechado $[a, b]$ é um subconjunto convexo de P.

Dado um subconjunto A de P, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a A. Dado $m \in P$, diz-se que m é:

- um ***maximal*** de A se $m \in A$ e $\neg(\exists\, a \in A, m < a)$;

- um ***minimal*** de A se $m \in A$ e $\neg(\exists\, a \in A, a < m)$;

- um ***majorante*** de A se, para todo $a \in A$, $a \leq m$;

- um ***minorante*** de A se, para todo $a \in A$, $m \leq a$;

- um ***supremo*** de A se m é um majorante de A e $m \leq m'$, para qualquer majorante m' de A;

- um ***ínfimo*** de A se m é um minorante de A e $m' \leq m$, para qualquer minorante m' de A;

- um ***máximo*** de A se m é um majorante de A e $m \in A$;

- um ***mínimo*** de A se m é um minorante de A e $m \in A$.

O conjunto dos majorantes de A e o conjunto dos minorantes de A são representados por $\mathrm{Maj}(A)$ e $\mathrm{Min}(A)$, respetivamente. Caso exista, o supremo (ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto A de P é único e representa-se por $\sup A$ ou $\bigvee A$ (respetivamente, $\inf A$ ou $\bigwedge A$, $\max A$, $\min A$). Se $A = \{a, b\}$, é usual escrever $a \vee b$ e $a \wedge b$ para representar $\bigvee A$ e $\bigwedge A$, respetivamente. Um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ pode não ter elemento máximo nem elemento mínimo. O elemento máximo (mínimo) de $(P, \leq)$, caso exista, é representado por 1 (respetivamente, 0). Um conjunto parcialmente ordenado que tenha elemento máximo e elemento mínimo diz-se um ***conjunto parcialmente ordenado limitado***.

Das definições anteriores são imediatos os resultados seguintes, cuja prova fica ao cuidado do leitor.

Teorema 1.2.3. *Num conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in P$:*

(1) $a \leq b$;

(2) $\sup\{a, b\} = b$;

(3) $\inf\{a, b\} = a$.

Teorema 1.2.4. *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e sejam a, b, c, d elementos de P tais que $a \leq b$ e $c \leq d$.*

(1) *Se existem* $\inf\{a, c\}$ *e* $\inf\{b, d\}$, *então* $\inf\{a, c\} \leq \inf\{b, d\}$.

(2) *Se existem* $\sup\{a, c\}$ *e* $\sup\{b, d\}$, *então* $\sup\{a, c\} \leq \sup\{b, d\}$.

Diagramas de Hasse

Os conjuntos parcialmente ordenados finitos podem ser representados por meio de diagramas, designados por ***diagramas de Hasse***. Dado um conjunto parcialmente ordenado finito P, cada elemento de P é representado por um ponto do plano. Se a e b são elementos de P tais que $a \prec b$, o ponto associado ao elemento b é representado acima do ponto associado ao elemento a e unem-se os dois pontos por meio de um segmento de reta. A partir do diagrama de Hasse de um c.p.o. $(P, \leq)$ é possível identificar os elementos (a, b) de $\leq$; note-se que, dados $a, b \in P$, $a < b$

se e só se existe uma sequência finita de elementos $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n \in P$ tais que $a = c_1 \prec c_2 \prec \ldots \prec c_{n-1} \prec c_n = b$. Na figura seguinte apresentam-se alguns exemplos de diagramas de Hasse.

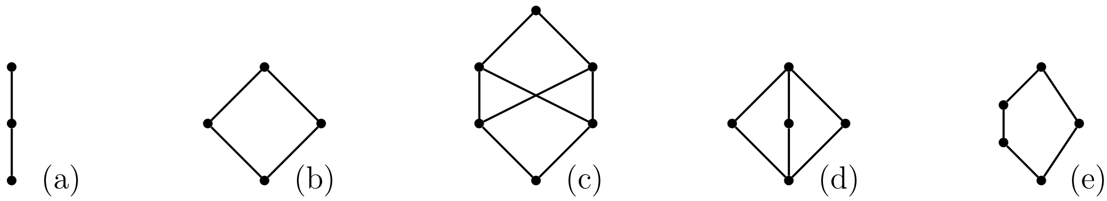


Figura 1.1

Construção de conjuntos parcialmente ordenados

Seguidamente descrevem-se alguns processos de construção de conjuntos parcialmente ordenados a partir de outros conjuntos parcialmente ordenados dados.

Se $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado e A é um subconjunto não vazio de P, a relação $\leq_{|A}$ definida, para quaisquer $a, b \in A$, por

$$a \leq_{|A} b \text{ se e só se } a \leq b$$

é uma relação de ordem parcial em A. A relação $\leq_{|A}$ designa-se por ***ordem parcial induzida por*** $\leq$ em A.

Dado um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, define-se a partir da relação $\leq$ uma outra relação de ordem parcial em P. A relação $\leq_d$ definida em P por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a$$

é também uma relação de ordem parcial em P. A relação $\leq_d$ designa-se por ***relação de ordem dual de*** $\leq$ e o conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq_d)$ designa-se por ***conjunto parcialmente ordenado dual de*** $(P, \leq)$. É simples perceber que $(\leq_d)_d = \leq$ e que o c.p.o. dual de $(P, \leq_d)$ é $(P, \leq)$. Os c.p.o.s $(P, \leq)$ e $(P, \leq_d)$ dizem-se ***conjuntos parcialmente ordenados duais***.

Se Φ é uma afirmação sobre um conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$, a afirmação Φ_d, obtida de Φ substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$, designa-se por ***afirmação dual de*** Φ. Observe-se que os conceitos de majorante, supremo, elemento máximo e elemento maximal são duais dos conceitos de minorante, ínfimo, elemento mínimo e elemento minimal, respetivamente. Assim, se Φ é uma afirmação sobre c.p.o.s envolvendo algum destes conceitos, a afirmação Φ_d é obtida substituindo cada um destes conceitos pelo conceito dual e substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$.

Note-se que se Φ é uma afirmação verdadeira em $(P, \leq)$, então Φ_d é verdadeira em $(P, \leq_d)$, pelo que é válido o princípio a seguir enunciado.

Princípio de dualidade para c.p.o.s Uma afirmação é verdadeira em qualquer conjunto parcialmente ordenado se e só se o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Dados dois conjuntos parcialmente ordenados $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$, existem diferentes processos para construir novos c.p.o.s a partir dos c.p.o.s dados. Por exemplo, a relação binária $\leq$ definida em $P_1 \times P_2$ por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1 \; e \; a_2 \leq_2 b_2$$

é uma relação de ordem parcial e, por conseguinte, $(P_1 \times P_2, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, designado por ***produto de*** $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$. Caso não exista ambiguidade relativamente à relação $\leq$, o c.p.o. $(P_1 \times P_2, \leq)$ pode ser representado apenas por $P_1 \times P_2$.
O processo de construção anterior pode ser generalizado a um número finito de conjuntos parcialmente ordenados: se $(P_1, \leq_1)$, ..., $(P_n, \leq_n)$, $n \in \mathbb{N}$, são conjuntos parcialmente ordenados, então $(P_1 \times \cdots \times P_n, \leq)$, onde $\leq$ é a relação definida em $P_1 \times \cdots \times P_n$ por

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1, \ldots, a_n \leq_n b_n,$$

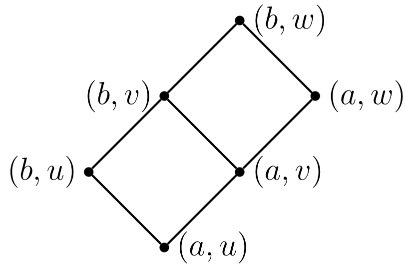
é um conjunto parcialmente ordenado. Se $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P$ e $\leq_1 = \leq_2 = \ldots = \leq_n$, representa-se o c.p.o. $(P_1 \times \cdots \times P_n, \leq)$ por P^n.

Exemplo 1.2.5. *Considerando as cadeias* **2** *e* **3** *a seguir representadas*

2 **3**

Figura 1.2

o c.p.o. $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$*, produto destas duas cadeias, pode ser representado pelo diagrama seguinte*



$\mathbf{2} \times \mathbf{3}$

Figura 1.3

Aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados

No estudo de aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados têm particular interesse aquelas que preservam as ordens definidas nos conjuntos.

Definição 1.2.6. *Sejam* $(P_1, \leq_1)$ *e* $(P_2, \leq_2)$ *dois conjuntos parcialmente ordenados e* $\alpha : P_1 \to P_2$ *uma aplicação. Diz-se que:*

- *a aplicação* α ***preserva a ordem*** *ou que* α *é* ***isótona*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$,
$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- *a aplicação* α *é* ***antítona*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$,
$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(b) \leq_2 \alpha(a).$$

- α *é um* ***mergulho de ordem*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$,
$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α *é um* ***isomorfismo de c.p.o.s*** *se* α *é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.*

Caso exista um isomorfismo de c.p.o.s de $(P_1, \leq_1)$ *em* $(P_2, \leq_2)$*, diz-se que o c.p.o.* $(P_1, \leq_1)$ *é isomorfo ao c.p.o.* $(P_2, \leq_2)$*.*

Um isomorfismo de c.p.o.s é uma aplicação bijetiva. Assim, se α é um isomorfismo de um c.p.o. $(P_1, \leq_1)$ num c.p.o. $(P_2, \leq_2)$, então $\alpha^{-1} : P_2 \to P_1$ é um isomorfismo de $(P_2, \leq_2)$ em $(P_1, \leq_1)$. Caso exista um isomorfismo entre os c.p.o.s $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ diz-se que os c.p.o.s são ***isomorfos*** e escreve-se $(P_1, \leq_1) \cong (P_2, \leq_2)$.

Note-se que, embora um isomorfismo de c.p.o.s seja uma aplicação isótona e bijetiva, uma aplicação bijetiva e isótona não é necessariamente um isomorfismo de c.p.o.s. Por exemplo, sendo α a aplicação entre os c.p.o.'s $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ a seguir representada

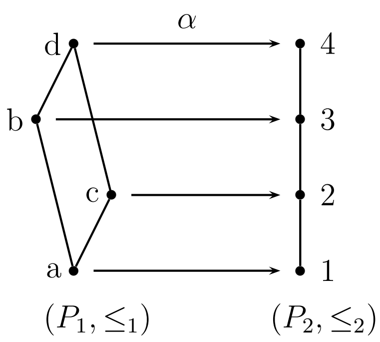


Figura 1.4

ou seja, sendo α a aplicação de P_1 em P_2 definida por $\alpha(a) = 1$, $\alpha(b) = 3$, $\alpha(c) = 2$ e $\alpha(d) = 4$, verifica-se que α é isótona e bijetiva, mas não é um isomorfismo de c.p.o.s.

As aplicações que a seguir se definem são casos especiais de aplicações isótonas.

Definição 1.2.7. *Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma aplicação $f : P \to P$ diz-se um **operador de fecho em** $(P, \leq)$ se, para quaisquer $x, y \in P$, são satisfeitas as seguintes condições:*

F1: $x \leq f(x)$;

F2: $f^2(x) \leq f(x)$;

F3: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

*Dado um operador de fecho $f : P \to P$ e dado $p \in P$, designa-se o elemento $f(p)$ por **fecho de** p. Diz-se que o elemento p **é fechado para** f se $f(p) = p$. O conjunto dos elementos de P fechados para f é representado por $Fc_f(P)$.*

Dado um conjunto A, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Um operador de fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é usualmente designado por ***operador de fecho em*** A. O conjunto parcialmente ordenado definido pelo conjunto $Fc_f(\mathcal{P}(A))$ dos subconjuntos de A fechados para f e pela relação de ordem induzida por $\subseteq$ em $Fc_f(\mathcal{P}(A))$ é representado por $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$. Dados subconjuntos X e Y de A tais que X é fechado para f, diz-se que Y é um ***conjunto gerador de*** X se $f(Y) = X$; caso exista um conjunto gerador de X que seja finito, o conjunto X diz-se ***finitamente gerado***. Um operador de fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ diz-se um ***operador de fecho algébrico*** se, para qualquer $X \subseteq A$,

F4: $f(X) = \bigcup\{f(Y) : Y \subseteq X \text{ e } Y \text{ é finito}\}$.

1.3 Reticulados

Muitas das propriedades de um conjunto parcialmente ordenado são definidas atendendo à existência de supremo e ínfimo de certos subconjuntos. Uma classe de conjuntos parcialmente ordenados que são definidos desta forma é a classe dos reticulados. Os reticulados são importantes no estudo de álgebra universal, não só porque fornecem exemplos de álgebras, mas também porque são relevantes no estudo das álgebras em geral.

Duas definições de reticulados

Os reticulados podem ser definidos de duas formas equivalentes: como conjuntos parcialmente ordenados e como estruturas algébricas.

Definição 1.3.1. *Um conjunto parcialmente ordenado* $(R, \leq)$ *diz-se um* ***reticulado*** *se, para quaisquer* $a, b \in R$, *existem* $\inf\{a, b\}$ *e* $\sup\{a, b\}$.

Exemplo 1.3.2.
(1) *Todos os conjuntos parcialmente ordenados apresentados na figura* 1.1, *com excepção do conjunto parcialmente ordenado apresentado em* (c), *são reticulados.*
(2) *Todas as cadeias são reticulados.*
(3) *Dado um conjunto* A, *o conjunto parcialmente ordenado* $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um reticulado. Para quaisquer* $X, Y \subseteq A$, *tem-se*

$$\inf\{X, Y\} = X \cap Y \ \textit{e} \sup\{X, Y\} = X \cup Y.$$

(4) *Para qualquer grupo* G, *o conjunto parcialmente ordenado* $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, *onde* $\mathrm{Subg}(G)$ *é o conjunto dos subgrupos de* G, *é um reticulado. Para quaisquer* $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$, *tem-se*

$$\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2 \ \textit{e} \sup\{G_1, G_2\} =< G_1 \cup G_2 >,$$

onde $< G_1 \cup G_2 >$ *representa o subgrupo de* G *gerado por* $G_1 \cup G_2$.

Se $(R, \leq)$ é um reticulado, o seu c.p.o. dual $(R, \leq_d)$ também é um reticulado. Além disso, é válido o princípio seguinte.

Princípio de Dualidade para Reticulados Uma afirmação é verdadeira em qualquer reticulado se e só se o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Observe-se que o supremo e o ínfimo de dois elementos de um conjunto parcialmente ordenado $(R, \leq)$, caso existam, são únicos. Assim, se $(R, \leq)$ é um reticulado, podem definir-se em R as operações binárias $\wedge$ e $\vee$ da seguinte forma:

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}, \quad x \vee y = \sup\{x, y\}, \quad \forall\, x, y \in R.$$

A respeito destas operações é simples verificar que, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, tem--se:

$x \wedge y = y \wedge x,$	$x \vee y = y \vee x$	(leis comutativas);
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	(leis associativas);
$x \wedge x = x,$	$x \vee x = x$	(leis de idempotência);
$x \wedge (x \vee y) = x,$	$x \vee (x \wedge y) = x$	(leis de absorção).

A possibilidade de se definir as operaçoes binárias $\wedge$ e $\vee$ num reticulado R motivou a definição de reticulado enquanto estrutura algébrica.

Definição 1.3.3. *Um triplo* $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$, *onde* R *é um conjunto não vazio e* $\wedge$ *e* $\vee$ *são operações binárias em* R, *diz-se um* ***reticulado*** *se, para quaisquer* $x, y, z \in R$,

R1:	$x \wedge y = y \wedge x,$	R1$_d$:	$x \vee y = y \vee x$	*(leis comutativas);*
R2:	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$	R2$_d$:	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	*(leis associativas);*
R3:	$x \wedge x = x,$	R3$_d$:	$x \vee x = x$	*(leis de idempotência);*
R4:	$x \wedge (x \vee y) = x,$	R4$_d$:	$x \vee (x \wedge y) = x$	*(leis de absorção).*

Exemplo 1.3.4. *São reticulados as estruturas seguintes:*

(1) $(P; \wedge, \vee)$, *onde P representa o conjunto das proposições, $\wedge$ representa o conetivo conjunção e $\vee$ representa o conetivo disjunção.*

(2) $(\mathbb{N}; \text{m.d.c.}, \text{m.m.c.})$, *onde* m.d.c. *representa a operação máximo divisor comum em $\mathbb{N}$ e* m.m.c. *representa a operação mínimo múltiplo comum.*

(3) $(\mathcal{P}(A); \cap, \cup)$, onde A é um conjunto e $\cap$ e $\cup$ são, respetivamente, as operações de interseção e união de conjuntos.

As duas definições de reticulado apresentadas anteriormente são equivalentes no seguinte sentido: se é possível definir um reticulado sobre um conjunto R de acordo com uma das definições, então é possível definir um reticulado sobre o mesmo conjunto R considerando a outra definição.

Teorema 1.3.5. *(1) Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então a relação $\leq$ definida em R por*

$$x \leq y \ \text{ se e só se } \ x = x \wedge y$$

é uma relação de ordem parcial tal que, para quaisquer $x, y \in R$, existem $\inf\{x, y\}$ *e* $\sup\{x, y\}$ *e tem-se*

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y \ \text{ e } \sup\{x, y\} = x \vee y.$$

(2) Se $(R, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado tal que, para quaisquer $x, y \in R$, existem $\inf\{x, y\}$ *e* $\sup\{x, y\}$, *então $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$, onde $\wedge$ e $\vee$ são as operações binárias em R definidas por*

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \ \text{ e } x \vee y = \sup\{x, y\},$$

é um reticulado. Além disso, para quaisquer $x, y \in R$,

$$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow y = x \vee y.$$

Demonstração. (1) Suponhamos que $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado. Seja $\leq$ a relação definida por

$$x \leq y \ \text{ se e só se } \ x = x \wedge y.$$

Por R3, tem-se $x \wedge x = x$ e, portanto, $x \leq x$. Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = x \wedge y$ e $y = y \wedge x$ e, por R1, $x = y$. Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x = x \wedge y$ e $y = y \wedge z$, donde, por R2, temos $x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$ e, por conseguinte, $x \leq z$. Logo, a relação $\leq$ é uma ordem parcial em R.
De $x = x \wedge (x \vee y)$ e $y = y \wedge (x \vee y)$, temos $x \leq x \vee y$ e $y \leq x \vee y$, pelo que $x \vee y$ é um majorante de $\{x, y\}$. Além disso, se $x \leq u$ e $y \leq u$, tem-se $x \vee u = (x \wedge u) \vee u = u$ e $y \vee u = (y \wedge u) \vee u = u$, donde $(x \vee u) \vee (y \vee u) = u$. Assim, $(x \vee y) \vee u = u$, pelo que $(x \vee y) \wedge u = (x \vee y) \wedge [(x \vee y) \vee u] = x \vee y$ e, portanto, $x \vee y \leq u$. Logo, $\sup\{x, y\} = x \vee y$. De forma análoga prova-se que $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.
(2) Se $(R, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado tal que, para quaisquer $x, y \in R$, existem $\inf\{x, y\}$ e $\sup\{x, y\}$, é simples verificar que as operações $\wedge$ e $\vee$ definidas por $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ e $x \vee y = \sup\{x, y\}$ satisfazem as condições R1 a R4, R1_d a R4_d e que

$$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow y = x \vee y. \qquad \square$$

Do resultado anterior segue que os reticulados podem ser completamente caracterizados em termos das operações supremo ($\vee$) e ínfimo ($\wedge$). Assim, se Φ é uma afirmação sobre reticulados expressa em termos de $\wedge$ e $\vee$, a afirmação dual de Φ é obtida trocando as ocorrências de $\wedge$ e $\vee$, respetivamente, por $\vee$ e $\wedge$. Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, o seu reticulado dual é $\mathcal{R}^d = (R; \vee, \wedge)$.

Descrição de reticulados

Para ilustrar certos resultados ou para refutar conjeturas a respeito de reticulados pode ser conveniente descrever exemplos de reticulados. Atendendo a que os reticulados são casos particulares de conjuntos parcialmente ordenados, a descrição de reticulados finitos pode ser feita por meio de diagramas de Hasse. Alternativamente, considerando um reticulado como uma estrutura algébrica $(R; \wedge, \vee)$, um reticulado pode ser descrito recorrendo às tabelas das operações $\wedge$ e $\vee$.

Exemplo 1.3.6. *Sendo* $R = \{0, a, b, 1\}$ *e* $\wedge$, $\vee$ *as operações binárias em* R *definidas pelas tabelas seguintes*

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

verifica-se que $(R; \wedge, \vee)$ *é um reticulado, o qual corresponde ao reticulado representado pelo diagrama de Hasse a seguir indicado*

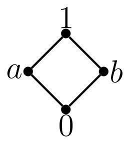


Figura 1.5

Sub-reticulados, produtos, homomorfismos

Existem diversos processos que permitem a construção de novos reticulados a partir de reticulados dados. Nesta secção apresentam-se alguns destes processos.

De entre os subconjuntos de um reticulado têm particular interesse aqueles que são fechados para as operações do reticulado - a estes subconjuntos dá-se a designação de *sub-reticulados.*

Definição 1.3.7. *Sejam* $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ *um reticulado e* R' *um subconjunto não vazio de* R. *Um triplo* $\mathcal{R}' = (R'; \wedge', \vee')$, *onde* $\wedge'$ *e* $\vee'$ *são operações binárias em* R', *diz-se um **sub-reticulado** de* $\mathcal{R}$ *se, para quaisquer* $a, b \in R'$,

$$a \wedge b \in R', a \vee b \in R'$$

e

$$a \wedge' b = a \wedge b, a \vee' b = a \vee b.$$

Nas condições da definição anterior segue que se $\mathcal{R}' = (R'; \wedge', \vee')$ é um sub--reticulado de $\mathcal{R}$, então $\mathcal{R}'$ é um reticulado.

Note-se que se $\leq$ é a relação de ordem parcial associada a um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ e R' é um subconjunto não vazio de R, não é suficiente que $(R', \leq_{|R'})$ seja um reticulado para que o reticulado $(R'; \wedge', \vee')$ correspondente a $(R', \leq_{|R'})$ seja um sub-reticulado de $(R, \wedge, \vee)$. De facto, é possivel encontrar reticulados $(R, \leq)$ e subconjuntos R' de R tais que $(R', \leq_{|R'})$ é um reticulado, mas $(R'; \wedge', \vee')$ não é um sub-reticulado do reticulado $(R; \wedge, \vee)$ correspondente a $(R, \leq)$. O exemplo seguinte ilustra este tipo de situação. Considerando o reticulado $(\{a, b, c, d, e\}, \wedge, \vee)$ correspondente ao c.p.o. $(\{a, b, c, d, e\}, \leq)$ a seguir representado e sendo $R' = \{a, c, d, e\}$, verifica-se que $(R', \leq_{|R'})$ é um reticulado, mas $(R'; \wedge', \vee')$ não é sub-reticulado do reticulado $(\{a, b, c, d, e\}, \wedge, \vee)$.

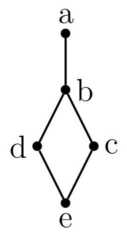


Figura 1.6

Dados um reticulado $(R, \leq)$ e um subconjunto não vazio R' de R, um c.p.o. $(R', \leq')$ diz-se um sub-reticulado de $(R, \leq)$ se $\leq' = \leq_{|R'}$ e, para quaisquer $a, b \in R'$, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$ (determinados em $(R, \leq)$) pertencem a R'.

A partir de reticulados $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ define-se naturalmente um reticulado que tem $R_1 \times R_2$ como conjunto suporte.

Teorema 1.3.8. *Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$, $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ e $\vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ as operações binárias em $R_1 \times R_2$ definidas por*

$$(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2),$$
$$(a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \vee_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{R}_2} b_2).$$

Então $(R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$ é um reticulado.

A prova do teorema anterior é um exercício simples que fica ao cuidado do leitor.

Definição 1.3.9. *Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$, $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ e $\vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}$ as operações binárias em $R_1 \times R_2$ definidas por*

$$(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2),$$
$$(a_1, a_2) \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1 \vee_{\mathcal{R}_1} b_1, a_2 \vee_{\mathcal{R}_2} b_2).$$

*Designa-se por **reticulado produto de** $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, e representa-se por $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$, o reticulado $(R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$.*

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados, $\leq_1$ e $\leq_2$ as relações de ordem associadas, respetivamente, a $\mathcal{R}_1$ e a $\mathcal{R}_2$ e seja $\leq$ a relação de ordem definida em $R_1 \times R_2$ por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2.$$

Então $(R_1 \times R_2, \leq)$ é um reticulado. Além disso,

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2} (b_1, b_2) = (a_1, a_2) &\Leftrightarrow a_1 \wedge_{\mathcal{R}_1} b_1 = a_1 \text{ e } a_2 \wedge_{\mathcal{R}_2} b_2 = a_2 \\ &\Leftrightarrow a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2 \\ &\Leftrightarrow (a_1, a_2) \leq (b_1, b_2).\end{aligned}$$

Por conseguinte, o reticulado produto $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 = (R_1 \times R_2; \wedge_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2})$ coincide com o reticulado $(R_1 \times R_2, \leq)$.

Quando se consideram reticulados como estruturas algébricas, tem interesse considerar aplicações que preservem as operações dos reticulados - os *homomorfismos*.

Definição 1.3.10. *Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \to R_2$ uma aplicação. Diz-se que:*

- *α é um **homomorfismo de** $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se, para quaisquer $a, b \in R_1$,*

$$\alpha(a \wedge_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \wedge_{\mathcal{R}_2} \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \vee_{\mathcal{R}_1} b) = \alpha(a) \vee_{\mathcal{R}_2} \alpha(b);$$

- *α é um **isomorfismo de** $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se α é bijetiva e é um homomorfismo.*

*Caso exista um isomorfismo de reticulados de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$, o reticulado $\mathcal{R}_1$ diz-se **isomorfo** ao reticulado $\mathcal{R}_2$.*

Note-se que se α é um isomorfismo de um reticulado $\mathcal{R}_1$ num reticulado $\mathcal{R}_2$, então α^{-1} é um isomorfismo de $\mathcal{R}_2$ em $\mathcal{R}_1$. Assim, caso exista um isomorfismo de um reticulado noutro, diz-se somente que os reticulados são isomorfos.

Uma vez que os reticulados são estruturas ordenadas, importa perceber qual a relação existente entre os homomorfismos e as aplicações que preservam a ordem. Em particular, a noção de isomorfismo entre reticulados pode ser estabelecida recorrendo às relações de ordem associadas aos reticulados.

Teorema 1.3.11. *Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ reticulados e $\leq_1$ e $\leq_2$ as relações de ordem definidas, respetivamente, em R_1 e R_2 por*

$$a \leq_1 b \text{ sse } a = a \wedge_{\mathcal{R}_1} b, \text{ para quaisquer } a, b \in R_1,$$

$$a \leq_2 b \text{ sse } a = a \wedge_{\mathcal{R}_2} b, \text{ para quaisquer } a, b \in R_2.$$

Então os reticulados $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$ são isomorfos se e só se os c.p.o.s $(R_1, \leq_1)$ e $(R_2, \leq_2)$ são isomorfos.

Demonstração. Suponhamos que $(R_1; \wedge_1, \vee_1)$ e $(R_2; \wedge_2, \vee_2)$ são reticulados isomorfos. Então existe uma aplicação bijetiva $\alpha : R_1 \to R_2$ tal que, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \vee_1 b) = \alpha(a) \vee_2 \alpha(b) \text{ e } \alpha(a \wedge_1 b) = \alpha(a) \wedge_2 \alpha(b). \quad (1)$$

Mostremos que α é um isomorfismo de c.p.o.'s, ou seja, mostremos que a aplicação α é sobrejetiva e que, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b). \quad (2)$$

Atendendo a que α é bijetiva, é imediato que α é sobrejetiva. Considerando (1), a prova de (2) também é simples. De facto, dados $a, b \in R_1$, se $a \leq_1 b$, então $a = a \wedge_1 b$, donde $\alpha(a) = \alpha(a \wedge_1 b) = \alpha(a) \wedge_2 \alpha(b)$. Logo $\alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$. Reciprocamente, se $\alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$ tem-se $\alpha(a) \vee_2 \alpha(b) = \alpha(b)$, pelo que $\alpha(a \vee_1 b) = \alpha(b)$. Uma vez que α é bijetiva, então α é invertível e tem-se $\alpha^{-1}(\alpha(a \vee_1 b)) = \alpha^{-1}(\alpha(b))$, pelo que $a \vee_1 b = b$. Logo $a \leq_1 b$. Assim, provámos que α é uma aplicação sobrejetiva e um mergulho de ordem, ou seja, α é um isomorfismo de c.p.o.'s.
Reciprocamente, admitamos que $(R_1, \leq_1)$ e $(R_2, \leq_2)$ são c.p.o.'s isomorfos. Então existe uma aplicação sobrejetiva $\alpha : R_1 \to R_2$ que satisfaz a condição (2). Pretendemos mostrar que α é um isomorfismo de $(R_1; \wedge_{\mathcal{R}_1}, \vee_{\mathcal{R}_1})$ em $(R_2; \wedge_{\mathcal{R}_2}, \vee_{\mathcal{R}_2})$, isto é, que α é um homomorfismo bijetivo. Para provar que α é bijetiva, resta mostrar que α é injetiva. Se a, b são elementos de R_1 tais que $\alpha(a) = \alpha(b)$, então $\alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$ e $\alpha(b) \leq_2 \alpha(a)$. Logo, atendendo a (2), segue que $a \leq_1 b$ e $b \leq_1 a$ e, por conseguinte, $a = b$. Assim, α é injetiva. Também se prova de forma simples que α é um homomorfismo. De facto, dados $a, b \in R_1$, tem-se $a \leq_1 a \vee_1 b$ e $b \leq_1 a \vee_1 b$. Então, por (2), $\alpha(a) \leq_2 \alpha(a \vee_1 b)$ e $\alpha(b) \leq_2 \alpha(a \vee_1 b)$, pelo que $\alpha(a \vee_1 b)$ é um majorante de $\{\alpha(a), \alpha(b)\}$. Atendendo a que $\alpha(a) \vee_2 \alpha(b)$ é o supremo de $\{\alpha(a), \alpha(b)\}$, resulta que $\alpha(a) \vee_2 \alpha(b) \leq \alpha(a \vee_1 b)$. Provemos, agora, que $\alpha(a \vee_1 b) \leq \alpha(a) \vee_2 \alpha(b)$. Por hipótese, a aplicação α é sobrejetiva, pelo que $\alpha(a) \vee_2 \alpha(b) = \alpha(c)$, para algum $c \in R_1$. Logo $\alpha(a) \leq_2 \alpha(c)$ e $\alpha(b) \leq_2 \alpha(c)$ e por (2) segue que $a \leq_1 c$ e $b \leq_1 c$. Assim, $a \vee_1 b \leq_1 c$ e por (2) tem-se $\alpha(a \vee_1 b) \leq_2 \alpha(c)$. Consequentemente, $\alpha(a \vee_1 b) \leq_2 \alpha(a) \vee_2 \alpha(b)$. Desta forma, provámos que $\alpha(a \vee_1 b) = \alpha(a) \vee_2 \alpha(b)$, para quaisquer $a, b \in R_1$ e, portanto, α é um homomorfismo de $(R_1; \wedge_1, \vee_1)$ em $(R_2; \wedge_2, \vee_2)$. □

Reticulados completos, reticulados algébricos

Existem várias classes de reticulados caracterizados por propriedades especiais, tais como a classe dos *reticulados completos* e a classe dos *reticulados algébricos*. Alguns reticulados com estas propriedades são relevantes no estudo de álgebra universal.

Definição 1.3.12. *Um reticulado $(R, \leq)$ diz-se um **reticulado completo** se, para qualquer subconjunto S de R, existem $\bigwedge S$ e $\bigvee S$.*

Exemplo 1.3.13.
(1) *O reticulado* $(\mathbb{R}, \leq)$ *não é completo.*
(2) *O reticulado* $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$ *é completo.*
(3) *O reticulado* $(\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \cup \{-2, 2\}, \leq)$ *é completo.*
(4) *Para qualquer conjunto* A, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um reticulado completo.*
(5) *Para qualquer grupo* G, *o reticulado* $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, *onde* $\mathrm{Subg}(G)$ *é o conjunto dos subgrupos de* G, *é completo.*

Se $(R, \leq)$ é um reticulado, então, para qualquer subconjunto F de R que seja finito, existem $\bigvee F$ e $\bigwedge F$. Por conseguinte é imediato o resultado seguinte.

Teorema 1.3.14. *Todo o reticulado finito é completo.*

Na definição anterior é possível prescindir de uma das condições que caracterizam os reticulados completos, uma vez que é válido o resultado seguinte.

Teorema 1.3.15. *Seja* $(R, \leq)$ *um reticulado. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) $(R, \leq)$ *é um reticulado completo.*

(ii) Para qualquer subconjunto S *de* R, *existe* $\bigvee S$.

(iii) Para qualquer subconjunto S *de* R, *existe* $\bigwedge S$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) É imediato pela definição de reticulado completo.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponhamos que existe $\bigvee S$ para qualquer subconjunto S de R. Seja M_S o conjunto dos minorantes de S. É um exercício simples verificar que $\bigvee M_S$ é o ínfimo de S. Logo, para qualquer subconjunto S de R, existe $\bigwedge S$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Seguindo um processo análogo ao indicado na prova anterior, mostra-se que caso exista $\bigwedge S$ para qualquer subconjunto S de R, também existe $\bigvee S$. Logo, para qualquer subconjunto S de R, existe $\bigwedge S$ e $\bigvee S$. Portanto, $(R, \leq)$ é um reticulado completo. □

Observe-se que se $(R, \leq)$ é um reticulado completo, então R tem elemento máximo 1 e elemento mínimo 0 e tem-se $\bigvee \emptyset = 0$ e $\bigwedge \emptyset = 1$. Assim, o teorema anterior pode ser formulado de forma equivalente substituindo as condições (i) e (ii) pelas condições (1) e (2) a seguir indicadas, respetivamente:

(1) R tem elemento máximo e existe ínfimo de qualquer subconjunto não vazio de R;

(2) R tem elemento mínimo e existe supremo de qualquer subconjunto não vazio de R.

Um reticulado completo pode ter sub-reticulados que não são completos; por exemplo, $(\mathbb{R}, \leq)$ é um sub-reticulado de $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$. Pode também acontecer que o sub-reticulado de um reticulado completo seja um reticulado completo, mas os supremos e ínfimos de certos subconjuntos quando determinados no sub-reticulado não coincidam com os supremos e os ínfimos no reticulado; é o caso do reticulado $(\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\} \cup \{-2, 2\}, \leq)$ que é um sub-reticulado de $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$.

Definição 1.3.16. *Um sub-reticulado $(R', \leq')$ de um reticulado $(R, \leq)$ diz-se um* ***sub-reticulado completo de*** $(R, \leq)$ *se, para qualquer subconjunto S de R', $\bigvee S$ e $\bigwedge S$ (definidos em $(R, \leq)$) pertencem a R'.*

Uma classe especial de reticulados completos é a classe dos reticulados algébricos.

Definição 1.3.17. *Seja $(R, \leq)$ um reticulado. Um elemento $a \in R$ diz-se* ***compacto*** *se sempre que existe $\bigvee A$ e $a \leq \bigvee A$, para algum $A \subseteq R$, então $a \leq \bigvee B$, para algum conjunto finito $B \subseteq A$. Um reticulado $(R, \leq)$ diz-se* ***compactamente gerado*** *se, para todo $a \in R$, $a = \bigvee S$, para algum subconjunto S de R formado por elementos compactos de R. Um reticulado $(R, \leq)$ diz-se um* ***reticulado algébrico*** *se é um reticulado completo e compactamente gerado.*

Exemplo 1.3.18.
(1) *Todos os elementos de um reticulado finito são compactos.*
(2) *Dado um conjunto A, o reticulado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é algébrico; os elementos compactos deste reticulado são os subconjuntos finitos de A.*
(3) *O reticulado $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, dos subgrupos de um grupo G, é algébrico; os elementos compactos deste reticulado são os subgrupos de G finitamente gerados.*

Dados um conjunto A e um operador fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, facilmente se verifica que o conjunto parcialmente ordenado dos subconjuntos de A fechados para f, $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$, é um reticulado completo.

Teorema 1.3.19. *Sejam A um conjunto e f um operador de fecho em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Então $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado completo e, para qualquer família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos fechados de A, tem-se*

$$\bigwedge_{i \in I} f(A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i) \quad e \quad \bigvee_{i \in I} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

Demonstração. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de subconjuntos fechados de A. Uma vez que, para cada $i \in I$,

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i,$$

tem-se

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq f(A_i) = A_i.$$

Assim,

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i,$$

e, por conseguinte,

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} A_i.$$

Logo $\bigcap_{i\in I} A_i$ é um elemento de $Fc_f(\mathcal{P}(A))$. Atendendo a que A também é um elemento de $Fc_f(\mathcal{P}(A))$, conclui-se que $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado completo. A prova das igualdades indicadas no enunciado é simples. □

Reciprocamente, todo o reticulado completo pode ser visto como o reticulado dos subconjuntos fechados de algum conjunto A com um operador de fecho f.

Teorema 1.3.20. *Seja $(R, \leq)$ um reticulado completo. Então $(R, \leq)$ é isomorfo a $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$, para algum conjunto A e algum operador de fecho f em A.*

Demonstração. Seja $(R, \leq)$ um reticulado completo. Prova-se facilmente que a aplicação $f : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R)$ definida por

$$f(X) = \{a \in R : a \leq \sup X\}$$

é um operador de fecho em $(\mathcal{P}(R), \subseteq)$ e que a aplicação $a \mapsto \{b \in R : b \leq a\}$ é um isomorfismo entre $(R, \leq)$ e $(Fc_f(\mathcal{P}(R)), \subseteq)$. □

Teorema 1.3.21. *Seja A um conjunto. Se f é um operador de fecho algébrico em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, então $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado algébrico e os elementos compactos de $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ são os conjuntos fechados $f(X)$, onde X é um subconjunto finito de A.*

Demonstração. Comecemos por mostrar que se X é um subconjunto finito de A, então $f(X)$ é compacto. Seja $X = \{a_1, \ldots, a_k\}$ e admitamos que

$$f(X) \subseteq \bigvee_{i\in I} f(A_i) = f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right).$$

Atendendo a que $X \subseteq f(X)$ e uma vez que o operador de fecho f é algébrico, segue que, para cada $a_j \in X$, existe um conjunto finito $X_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $a_j \in f(X_j)$. Então, uma vez que existe um número finito de conjuntos A_i, digamos $A_{j1}, \ldots, A_{jn_j}$, tais que

$$X_j \subseteq A_{j1} \cup \ldots \cup A_{jn_j},$$

tem-se

$$a_j \in f(A_{j1} \cup \ldots \cup A_{jn_j}).$$

Assim,

$$X \subseteq \bigcup_{1\leq j\leq k} f\left(A_{j1} \cup \ldots \cup A_{jn_j}\right),$$

pelo que

$$X \subseteq f\left(\bigcup_{\substack{1\leq j\leq k,\\ 1\leq i\leq n_j}} A_{ji}\right)$$

e, portanto,

$$f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{\substack{1\leq j\leq k,\\ 1\leq i\leq n_j}} A_{ji}\right) = \bigvee_{\substack{1\leq j\leq k,\\ 1\leq i\leq n_j}} f\left(A_{ji}\right).$$

Logo $f(X)$ é compacto.

Além disso, prova-se que os únicos elementos compactos de $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ são os conjuntos $f(X)$ onde X é um subconjunto finito de A. De facto, para qualquer conjunto $X \subseteq A$, tem-se

$$f(X) \subseteq \bigcup\{f(Y) : Y \subseteq X \text{ e } Y \text{ é finito}\},$$

uma vez que o operador de fecho é algébrico. Então, admitindo que $f(X)$ é um elemento compacto de $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$, segue que $f(X)$ está contido numa união finita de conjuntos $f(Y)$, donde resulta que $f(X) = f(Z)$ para algum conjunto finito $Z \subseteq A$.
Assim, considerando o Teorema 1.3.19, tendo em conta que o operador de fecho f é algébrico e que, para todo $X \subseteq A$ tal que X é finito, $f(X)$ é compacto, concluímos que $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$ é um reticulado algébrico. □

Corolário 1.3.22. *Seja f um operador de fecho algébrico em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, para algum conjunto A. Então os subconjuntos de A finitamente gerados são precisamente os elementos compactos de $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$.*

Teorema 1.3.23. *Seja $(R, \leq)$ um reticulado algébrico. Então $(R, \leq)$ é isomorfo ao reticulado $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$, para algum conjunto A e algum operador de fecho algébrico f em A.*

Demonstração. Sejam $(R, \leq)$ um reticulado algébrico e A o conjunto dos elementos compactos de $(R, \leq)$. Considere-se a correspondência $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ tal que, para cada $X \subseteq A$,

$$f(X) = \{a \in A : a \leq \sup X\}.$$

Então f é um operador de fecho em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ e da definição de elemento compacto resulta que f é algébrico. Atendendo a que $(R, \leq)$ é compactamente gerado, a aplicação $a \mapsto \{b \in A : b \leq a\}$ é um isomorfismo entre $(R, \leq)$ e $(Fc_f(\mathcal{P}(A)), \subseteq)$. □

Reticulados distributivos e reticulados modulares

Nesta secção estudam-se outras duas classes de reticulados especiais, os *reticulados distributivos* e os *reticulados modulares*, os quais satisfazem identidades adicionais que não resultam das identidades R1-R4 nem de R1$_d$-R4$_d$ e que relacionam as duas operações do reticulado. Tais identidades são satisfeitas por vários dos reticulados mencionados nos exemplos anteriores, como é o caso do reticulado associado ao conjunto das partes de um determinado conjunto.

Antes de se definir formalmente reticulados distributivos e reticulados modulares, estabelecem-se os resultados seguintes, cuja importância será referida mais à frente.

Lema 1.3.24. *Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado e $x, y, z \in R$. Então*

(i) $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$;

(ii) $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

(iii) $x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z)$;

(iv) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$.

Demonstração. A prova de (i), (ii) e (iv) é um exercício simples que fica ao cuidado do leitor. O caso (iii) é um caso particular de (ii), atendendo ao Teorema 1.2.3. □

Lema 1.3.25. *Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) $\forall x, y, z \in R,\ x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$.

(ii) $\forall x, y, z \in R,\ (x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z)$,

Demonstração. A prova é imediata, uma vez que $x \leq y$ se e só se $x = x \wedge y$. □

Teorema 1.3.26. *Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

D1: $\forall x, y, z \in R,\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),\ \forall\, x, y, z \in R$,

D2: $\forall x, y, z \in R,\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),\ \forall\, x, y, z \in R$.

Demonstração. Admitamos que $\mathcal{R}$ satisfaz D1.

$$
\begin{array}{rcll}
x \vee (y \wedge z) & = & (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z) & (\text{por } \mathrm{R4}_d) \\
& = & x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) & (\text{por } \mathrm{R2}_d) \\
& = & x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) & (\text{por R1}) \\
& = & x \vee (z \wedge (x \vee y)) & (\text{por D1}) \\
& = & x \vee ((x \vee y) \wedge z) & (\text{por R1}) \\
& = & (x \wedge (x \vee y)) \vee ((x \vee y) \wedge z) & (\text{por R4}) \\
& = & ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) & (\text{por R1}) \\
& = & (x \vee y) \wedge (x \vee z). & (\text{por D1})
\end{array}
$$

A prova de que D2 implica D1 é análoga. □

As condições D1 e D2 referidas no resultado anterior são designadas por ***leis distributivas***.

Definição 1.3.27. *Um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee,)$ diz-se um **reticulado distributivo** se satisfaz uma das seguintes condições:*

D1: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall\, x, y, z \in R,$

D2: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \forall\, x, y, z \in R.$

Exemplo 1.3.28. *Os reticulados seguintes são distributivos:*

(1) $(P; \wedge, \vee)$*, onde P representa o conjunto das proposições, $\wedge$ representa o conetivo conjunção e $\vee$ representa o conetivo disjunção.*

(2) $(\mathbb{N}; \text{m.d.c.}, \text{m.m.c.})$*, onde* m.d.c. *representa a operação máximo divisor comum em $\mathbb{N}$ e* m.m.c. *representa a operação mínimo múltiplo comum.*

(3) $(\mathcal{P}(A); \cap, \cup)$, onde A é um conjunto e $\cap$ e $\cup$ são, respetivamente, as operações de interseção e união.

Note-se que para mostrar que um determinado reticulado é distributivo basta verificar uma das seguintes desigualdades

$$x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ ou } (x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z),$$

atendendo a que são válidas as condições (i) e (ii) estabelecidas no Lema 1.3.24.

Definição 1.3.29. *Um reticulado $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ diz-se um **reticulado modular** se, para quaisquer $x, y, z \in R$,*

$$x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

A condição referida na definição anterior é designada por ***lei modular***. Para verificar que um determinado reticulado satisfaz esta lei, é suficiente mostrar que, para quaisquer $x, y, z \in R$,

$$x \leq y \Rightarrow y \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z),$$

atendendo ao estabelecido em Lema 1.3.24 (iii).

Teorema 1.3.30. *Todo o reticulado distributivo é um reticulado modular.*

Demonstração. Basta considerar D2 e ter em atenção que $x \vee y = y$ se e só se $x \leq y$. □

A formação de sub-reticulados, produtos diretos e imagens homomorfas permite a construção de novos reticulados a partir de reticulados dados. A modularidade e a distributividade são preservadas por estas construções.

Teorema 1.3.31. *Sejam $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ reticulados. Então:*

(1) Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular), então qualquer sub-reticulado de $\mathcal{R}$ é distributivo (modular).

(2) Se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são distributivos (modulares), então $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$ é distributivo (modular).

(3) Se $\mathcal{R}$ é distributivo (modular) e $\mathcal{S}$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{R}$, i.e., se $\mathcal{S} = \alpha(\mathcal{R})$ para algum homomorfismo $\alpha : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$, então $\mathcal{S}$ é distributivo (modular).

Os dois próximos teoremas caracterizam os reticulados modulares e os reticulados distributivos e permitem identificar de uma forma mais eficiente estes reticulados. Tal caracterização é estabelecida recorrendo aos reticulados M_3 e N_5 a seguir apresentados

Figura 1.7

Observe-se que nenhum dos reticulados anteriores é distributivo, pois em nenhum dos casos se tem $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. No que respeita à modularidade, o reticulado M_3 é modular, mas N_5 não é modular, uma vez que em N_5 tem-se $a \leq b$ e $a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$.

Teorema 1.3.32. *Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então $\mathcal{R}$ é modular se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5.*

Demonstração. Tendo em conta o que foi observado anteriormente, é imediato que se $\mathcal{R}$ tem um sub-reticulado isomorfo a N_5, então $\mathcal{R}$ não é modular. Reciprocamente, se admitirmos que $\mathcal{R}$ não é modular, existem $a, b, c \in R$ tais que $a \leq b$ e $a \vee (b \wedge c) < b \wedge (a \vee c)$. Sejam $a_1 = a \vee (b \wedge c)$ e $b_1 = b \wedge (a \vee c)$.
Então

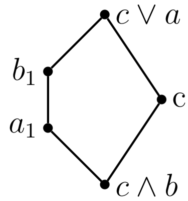
$$\begin{array}{rcll} c \wedge b_1 & = & c \wedge (b \wedge (a \vee c)) & \\ & = & [c \wedge (c \vee a)] \wedge b & \text{(por R1 e R2)} \\ & = & c \wedge b & \text{(por R4)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcll} c \vee a_1 & = & c \vee (a \vee (b \wedge c)) & \\ & = & [c \vee (b \wedge c)] \vee a & \text{(por R1}_d \text{ e R2}_d\text{)} \\ & = & c \vee a & \text{(por R4}_d\text{).} \end{array}$$

Agora, atendendo a que $c \wedge b \leq a_1 \leq b_1$, temos $c \wedge b \leq c \wedge a_1 \leq c \wedge b_1 = c \wedge b$, donde $c \wedge a_1 = c \wedge b_1 = c \wedge b$. De modo análogo, prova-se $c \vee b_1 = c \vee a_1 = c \vee a$.

É simples verificar que os elementos $c \wedge b$, a_1, c, b_1, $c \vee a$ são distintos dois a dois. Logo o reticulado a seguir apresentado



é um sub-reticulado de $\mathcal{R}$ e é isomorfo a N_5. □

Teorema 1.3.33. *Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado. Então $\mathcal{R}$ é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5 ou a M_3.*

Demonstração. Se $\mathcal{R}$ é um reticulado que tem um sub-reticulado isomorfo a M_3 ou a N_5, é imediato que $\mathcal{R}$ não é distributivo.
Reciprocamente, se $\mathcal{R}$ é um reticulado não distributivo, prova-se que $\mathcal{R}$ tem um sub-reticulado isomorfo a M_3 ou a N_5. De facto, se $\mathcal{R}$ não é modular, do teorema anterior segue que $\mathcal{R}$ tem um sub-reticulado isomorfo a N_5. Caso $\mathcal{R}$ seja modular prova-se que $\mathcal{R}$ tem um sub-reticulado isomorfo a M_3. Com efeito, se $\mathcal{R}$ não é distributivo, existem elementos $d, e, f \in R$ tais que $(d \wedge e) \vee (d \wedge f) < d \wedge (e \vee f)$. Sejam

$$\begin{aligned} p = &\quad (d \wedge e) \vee (e \wedge f) \vee (f \wedge d), \\ q = &\quad (d \vee e) \wedge (e \vee f) \wedge (f \vee d), \\ u = &\quad (d \wedge q) \vee p, \\ v = &\quad (e \wedge q) \vee p, \\ w = &\quad (f \wedge q) \vee p. \end{aligned}$$

Claramente, $p \leq u$, $p \leq v$ e $p \leq w$. Considerando o estabelecido em Lema 1.3.24 (iv), também é imediato que $p \leq q$. Assim, $u \leq (d \wedge q) \vee q = q$. De forma análoga, tem-se $v \leq q$ e $w \leq q$. Atendendo às leis associativa, comutativa e de absorção, segue que

$$d \wedge q = d \wedge (e \vee f)$$

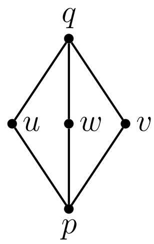
e

$$\begin{aligned} d \wedge p &= d \wedge ((d \wedge e) \vee (e \wedge f) \vee (f \wedge d)) \\ &= (d \wedge (e \wedge f)) \vee ((d \wedge e) \vee (f \wedge d)) \\ &= (d \wedge e) \vee (f \wedge d). \end{aligned}$$

Logo $p = q$ é impossível. Por conseguinte $p < q$. Seguidamente, prova-se que $u \wedge v = p$. De facto,

$$\begin{aligned} u \wedge v &= ((d \wedge q) \vee p) \wedge ((e \wedge q) \vee p) \\ &= (((e \wedge q) \vee p) \wedge (d \wedge q)) \vee p && \text{(R1, R1}_d \text{ e lei modular)} \\ &= ((q \wedge (e \vee p)) \wedge (d \wedge q)) \vee p && \text{(R1, R1}_d \text{ e lei modular)} \\ &= ((e \vee p) \wedge (d \wedge q)) \vee p && \text{(por R1, R2 e R3)} \\ &= ((d \wedge (e \vee f)) \wedge (e \vee (f \wedge d))) \vee p && \text{(por R1,R4 e R4}_d\text{)} \\ &= (d \wedge ((e \vee f) \wedge (e \vee (f \wedge d)))) \vee p && \text{(por R3)} \\ &= (d \wedge (((e \vee f) \wedge (f \wedge d)) \vee e)) \vee p && \text{(lei modular)} \\ &= (d \wedge ((f \wedge d) \vee e)) \vee p && \text{(pois } f \wedge d \leq f \leq e \vee f\text{)} \\ &= ((d \wedge e) \vee (f \wedge d)) \vee p && \text{(lei modular)} \\ &= p \end{aligned}$$

De forma análoga, mostra-se que $v \wedge w = p$ e $w \wedge u = p$. Argumentos semelhantes permitem mostrar que $u \vee v = q$, $v \vee w = q$ e $w \vee u = q$. Finalmente, é simples verificar que os elementos u, v, w, p, q são distintos dois a dois; de facto, se dois destes elementos fossem iguais ter-se-ia $p = q$, o que é impossível. Logo o reticulado



é um sub-reticulado de $\mathcal{R}$ isomorfo a M_3. $\square$

1.4 Relações de equivalência

Nesta secção recorda-se uma outra classe de relações binárias conhecidas por *relações de equivalência*. Este tipo de relações são importantes na definição de estruturas quociente.

Sejam A um conjunto e θ uma relação binária em A. Diz-se que θ é uma ***relação de equivalência*** em A se são satisfeitas as seguintes condições:

(i) para todo $a \in A$, $(a, a) \in \theta$, (reflexividade)

(ii) para quaisquer $a, b \in A$, $(a, b) \in \theta \Rightarrow (b, a) \in \theta$, (simetria)

(iii) para quaisquer $a, b, c \in A$, $(a, b) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta \Rightarrow (a, c) \in \theta$. (transitividade)

Uma relação de equivalência θ definida num conjunto A determina uma partição de A em subconjuntos não vazios e disjuntos. Dado um elemento $x \in A$, chama-se **classe de equivalência de x módulo θ** ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de x**, ao conjunto

$$[x]_\theta = \{y \in A \mid x\,\theta\,y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de A módulo θ** e representamo-lo por A/θ, ou seja,

$$A/\theta = \{[x]_\theta \mid x \in A\}.$$

Do proposição seguinte, cuja prova é um exercício simples, segue que o conjunto A/θ é uma partição de A.

Proposição 1.4.1. *Sejam A um conjunto e θ uma relação de equivalência em A. Então* *(i)* *Para qualquer* $x \in A$, $[x]_\theta \neq \emptyset$.

(ii) *Para quaisquer* $x, y \in A$, $[x]_\theta \cap [y]_\theta = \emptyset$ *se e só se* $[x]_\theta \neq [y]_\theta$.

(iii) *Para qualquer* $x \in A$, $x \in [y]_\theta$, *para algum* $y \in A$.

O conjunto de todas as relações de equivalência definidas num conjunto A é representado por $\mathrm{Eq}(A)$. O conjunto parcialmente ordenado $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$, onde $\subseteq$ é a relação de inclusão usual, é um reticulado, sendo fácil verificar que o ínfimo e o supremo de duas relações de equivalência em A é determinado de acordo com o resultado seguinte.

Teorema 1.4.2. *Seja* A *um conjunto. Então* $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$ *é um reticulado e, para quaisquer* $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Eq}(A)$,

(a) $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$,

(b) $\theta_1 \vee \theta_2 = \{(x, y) \in A^2 \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, z_0, z_1, \ldots, z_n \in A : x = z_0, y = z_n$ *e* $\forall 1 \leq k \leq n, z_{k-1}\, \theta_1\, z_k$ *ou* $z_{k-1}\, \theta_2\, z_k\}$. □

Observe-se que se θ_1 e θ_2 são relações de equivalência num conjunto A, tem-se

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \ldots.$$

Relativamente ao reticulado $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$, prova-se que este é um reticulado completo.

Teorema 1.4.3. *Sejam* A *um conjunto. Então* $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$ *é um reticulado completo e para qualquer conjunto* I *e qualquer família* $(\theta_i \mid i \in I)$ *de relações de equivalência em* A, *tem-se:*

(a) $\displaystyle\bigwedge_{i \in I} \theta_i = \bigcap_{i \in I} \theta_i$,

(b) $\displaystyle\bigvee_{i \in I} \theta_i = \bigcup \{\theta_{i_0} \circ \theta_{i_1} \circ \ldots \circ \theta_{i_k} \mid i_0, i_1, \ldots, i_k \in I, k \in \mathbb{N}_0\}$. □

2. Álgebra universal

O desenvolvimento do estudo na área da matemática levou ao aparecimento de diversas estruturas algébricas, tais como grupos, anéis, reticulados, álgebras de Boole, etc. Tais estruturas, embora distintas, têm propriedades análogas, o que levou ao surgir de uma área da matemática, a álgebra universal, que tem por objetivo o estudo de propriedades que são comuns a estas estruturas.

2.1 Álgebras

Um dos conceitos básicos em álgebra universal, suficientemente abrangente para englobar muitas das estruturas algébricas que nos são familiares, é a noção de álgebra, a qual é definida como um conjunto não vazio equipado com uma família de operações.

No sentido de formalizar o conceito de álgebra, começamos por considerar a noção de *tipo algébrico*.

Definição 2.1.1. *Dá-se a designação de* ***tipo algébrico****, ou simplesmente* ***tipo****, a um par (O, τ), onde O é um conjunto e τ é uma função de O em $\mathbb{N}_0$. Cada elemento f de O é designado por* ***símbolo de operação*** *e $\tau(f)$ diz-se a sua* ***aridade****. O conjunto de todos os símbolos de O de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, é representado por O_n.*

Definição 2.1.2. *Chama-se* ***álgebra*** *a um par $\mathcal{A} = (A; F)$ onde A é um conjunto não vazio e F é uma família $(f^{\mathcal{A}})_{f \in O}$ de operações finitárias em A indexada por um conjunto O. Ao conjunto A dá-se a designação de* ***universo*** *ou* ***conjunto suporte de $\mathcal{A}$****, cada operação $f^{\mathcal{A}}$ é designada por* ***operação fundamental de $\mathcal{A}$*** *ou* ***operação básica*** *de $\mathcal{A}$ e ao conjunto O dá-se a designação de* ***conjunto de símbolos operacionais de $\mathcal{A}$****.*
Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se uma ***álgebra de tipo*** *(O, τ) se O é o conjunto de símbolos operacionais de $\mathcal{A}$ e τ é a função de O em $\mathbb{N}_0$ que a cada símbolo operacional $f \in O$ associa a aridade n_f da operação básica $f^{\mathcal{A}}$.*

Ao longo do texto as álgebras são representadas por letras maiúsculas caligráficas, eventualmente com índices, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., e o conjunto suporte das álgebras é representado pelas letras maiúsculas respetivas, A, B, C, ..., A_1, A_2, ...

Uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ diz-se ***trivial*** se $|A| = 1$ e diz-se ***finita*** ou ***infinita*** caso o seu conjunto suporte A seja finito ou infinito, respetivamente.

Note-se que na definição de álgebra é importante fazer a distinção entre símbolos operacionais e operações, uma vez que em diferentes álgebras o mesmo símbolo operacional pode estar associado a operações distintas. Assim, dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; (f^{\mathcal{A}})_{f \in O})$, usa-se a notação $f^{\mathcal{A}}$ para representar a operação fundamental de $\mathcal{A}$ indexada por f; à operação $f^{\mathcal{A}}$ dá-se a designação de ***interpretação de f em $\mathcal{A}$***. Caso o contexto seja claro pode-se escrever apenas f em vez de $f^{\mathcal{A}}$.
A indexação das operações básicas de uma álgebra $\mathcal{A}$ com o conjunto de símbolos operacionais O permite ter uma sequência ordenada das operações básicas da álgebra, associando a cada símbolo operacional em O uma operação finitária em A. Esta indexação tem a vantagem de permitir diferenciar operações que tenham a mesma aridade. O conjunto de símbolos operacionais O de uma álgebra $\mathcal{A}$ pode ser finito ou infinito. Caso O seja finito e não vazio, digamos $O = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$, é usual escrever $\mathcal{A} = (A; {f_1}^{\mathcal{A}}, {f_2}^{\mathcal{A}}, \ldots, {f_k}^{\mathcal{A}})$ ou apenas $\mathcal{A} = (A; f_1, f_2, \ldots, f_k)$ e representa-se o tipo de $\mathcal{A}$ por $(O, n_{f_1}, n_{f_2}, \ldots, n_{f_k})$ ou abreviadamente por $(n_{f_1}, n_{f_2}, \ldots, n_{f_k})$, onde n_{f_i}, $i \in \{1, \ldots, k\}$, representa a aridade da operação ${f_i}^{\mathcal{A}}$.
Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se ***unária*** se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de tipo (O, τ) onde $\tau(f) = 1$, para todo $f \in O$, ou seja, $\mathcal{A}$ é uma álgebra em que todas as operações fundamentais são unárias. A uma álgebra $\mathcal{A}$ com uma única operação binária, ou seja, a uma álgebra de tipo $(\{f\}, \tau)$ onde $\tau(f) = 2$, dá-se a designação de ***grupóide***.

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos de álgebras bem conhecidas.

(i) Para qualquer conjunto não vazio A, $\mathcal{A} = (A; \emptyset)$ é uma álgebra.

(ii) Um ***semigrupo*** é um grupóide $\mathcal{S} = (S; \cdot)$ tal que, para quaisquer $x, y, z \in S$,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \tag{1.1}$$

ou seja, um semigrupo é uma álgebra definida por um conjunto não vazio munido de uma operação binária associativa.

(iii) Um ***monóide*** é um semigrupo $(M; \cdot)$ com um elemento $1 \in M$ tal que, para todo $x \in M$,

$$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x. \tag{1.2}$$

A um elemento 1 que satisfaça as condições anteriores dá-se a designação de *elemento neutro* ou *identidade* e é simples verificar que num dado semigrupo não existe mais do que um elemento destes. Assim, o elemento neutro pode ser interpretado como uma função constante e um monóide pode ser definido como uma álgebra $\mathcal{M} = (M; \cdot, 1)$ de tipo $(2, 0)$ que satisfaz as condições (1.1) e (1.2).

(iv) Um ***grupo*** pode ser descrito como um tipo especial de semigrupo, ou seja, como uma álgebra $(G; \cdot)$ de tipo (2) que satisfaz as identidades (1.1), (1.2) e tal que, para cada $x \in G$, existe $x^{-1} \in G$ que satisfaz as condições seguintes

$$x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x. \tag{1.3}$$

Atendendo a que um grupo é um monóide, um grupo pode também ser definido como uma álgebra $(G; \cdot, 1)$ de tipo $(2, 0)$ que satisfaz as condições (1.1), (1.2) e (1.3).

Num grupo $(G;\cdot)$, para cada $x \in G$, existe um único elemento $x^{-1} \in G$ que satisfaz (1.3), pelo que faz sentido considerar uma operação unária que a cada elemento $x \in G$ associa o elemento x^{-1}. Por conseguinte um grupo pode ser descrito como uma álgebra $\mathcal{G} = (G;\cdot,{}^{-1},1)$ de tipo $(2,1,0)$ que satisfaz (1.1), (1.2) e (1.3).
Um **grupo abeliano** é um grupo $\mathcal{G} = (G;\cdot,{}^{-1},1)$ tal que, para quaisquer $x, y \in G$,

$$x \cdot y = y \cdot x. \tag{1.4}$$

(v) Um ***anel*** é uma álgebra $\mathcal{A} = (A;+,\cdot,-,0)$ de tipo $(2,2,1,0)$ tal que $(A;+,-,0)$ é um grupo abeliano, $(A;\cdot)$ é um semigrupo e, para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{e} \quad (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Um **anel com identidade** é uma álgebra $\mathcal{A} = (A;+,\cdot,-,0,1)$ de tipo $(2,2,1,0,0)$ tal que $(A;+,\cdot,-,0)$ é um anel e $(A;\cdot,1)$ é um monóide.

(vi) Um ***semirreticulado*** é um semigrupo comutativo $\mathcal{S} = (S;\cdot)$ tal que, para todo $x \in S$,

$$x \cdot x = x.$$

(vii) Um ***reticulado*** é uma álgebra $\mathcal{R} = (R;\wedge,\vee)$ de tipo $(2,2)$ tal que, para quaisquer $x, y, z \in R$,

R1:	$x \wedge y = y \wedge x,$	R1$_d$:	$x \vee y = y \vee x;$
R2:	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,$	R2$_d$:	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z;$
R3:	$x \wedge x = x,$	R3$_d$:	$x \vee x = x;$
R4:	$x \wedge (x \vee y) = x,$	R4$_d$:	$x \vee (x \wedge y) = x.$

(viii) Um ***reticulado limitado*** é uma álgebra $\mathcal{R} = (R;\wedge,\vee,0,1)$ de tipo $(2,2,0,0)$ tal que $(R;\wedge,\vee)$ é um reticulado e, para qualquer $x \in R$,

$$x \wedge 0 = 0 \qquad \text{e} \qquad x \vee 1 = 1.$$

(ix) Um ***reticulado distributivo*** é um reticulado $\mathcal{R} = (R;\wedge,\vee)$ tal que, para quaisquer $x, y, z \in R$,

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad \text{e} \qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

(x) Uma ***álgebra de Boole*** é uma álgebra $\mathcal{B} = (B;\wedge,\vee,{}',0,1)$ de tipo $(2,2,1,0,0)$ tal que $(B;\wedge,\vee)$ é um reticulado distributivo e, para todo $x \in B$,

$$x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1,$$
$$x \wedge x' = 0, \quad x \vee x' = 1.$$

A partir de uma determinada álgebra podem definir-se novas álgebras acrescentando operações fundamentais à álgebra dada.

Definição 2.1.3. *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de tipos (O_1, τ_1) e (O_2, τ_2), respetivamente. Diz-se que a álgebra $\mathcal{A}$ é uma* **extensão** *da álgebra $\mathcal{B}$ ou que $\mathcal{B}$ é um* **reduto** *da álgebra $\mathcal{A}$ se: $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ têm o mesmo universo, $O_2 \subseteq O_1$ e, para todo $f \in O_2$, $\tau_1(f) = \tau_2(f)$ e $f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{B}}$.*

Exemplo 2.1.4. *O semigrupo $(\mathbb{R};+)$ é um reduto do anel $(\mathbb{R};+,\cdot)$.*

2.2 Subálgebras

Em certas situações o estudo de uma álgebra pode ser simplificado recorrendo ao estudo de outras álgebras que estejam relacionadas com a álgebra dada. Por este motivo, é importante considerar processos que permitam construir novas álgebras a partir de uma determinada álgebra. Um desses processos corresponde à formação de subálgebras.

Definição 2.2.1. *Sejam A um conjunto, $n \in \mathbb{N}_0$, f uma operação n-ária em A e $X \subseteq A$. Diz-se que o* ***conjunto X é fechado para a operação f*** *se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) \in X, \text{ para todo } (a_1, \ldots, a_n) \in X^n.$$

Observe-se que se f é uma operação nulária num conjunto A, então um conjunto $X \subseteq A$ é fechado para a operação f se e só se $f \in X$. Por conseguinte, se $X = \emptyset$, o conjunto X não é fechado para qualquer operação nulária. Note-se, no entanto, que $X = \emptyset$ é fechado para toda toda a operação n-ária sempre que $n \geq 1$.

Definição 2.2.2. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra. Um subconjunto B de A diz-se um* ***subuniverso*** *de $\mathcal{A}$ se B é fechado para toda a operação de F.*
Representa-se por Sub$\mathcal{A}$ *o conjunto de todos os subuniversos de $\mathcal{A}$.*

Observe-se que o conjunto vazio é subuniverso de uma álgebra $\mathcal{A}$ se e só se $\mathcal{A}$ não tem operações nulárias.

Exemplo 2.2.3.
(1) Os conjuntos $\{0\}$, $\{2n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathbb{Z}$ são subuniversos do semigrupo $(\mathbb{Z}; +)$ e do anel $(\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$.
(2) O conjunto $\{2n+1 \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ não é subuniverso do semigrupo $(\mathbb{Z}; +)$ nem do anel $(\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$.
(3) O conjunto $\emptyset$ é um subuniverso do semigrupo $(\mathbb{Z}; +)$, mas não é subuniverso do anel $(\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$.

Dados subuniversos de uma determinada álgebra podem definir-se novos subuniversos.

Teorema 2.2.4. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $(S_i \,|\, i \in I)$ uma família de subuniversos de $\mathcal{A}$. Então $\bigcap_{i \in I} S_i$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Para cada $i \in I$, S_i é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pelo que $S_i \subseteq A$. Assim, $\bigcap_{i \in I} S_i \subseteq A$. Além disso, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, para qualquer $f^{\mathcal{A}}$ operação n-ária de $\mathcal{A}$ e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in (\bigcap_{i \in I} S_i)^n$, tem-se $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in S_i$, para cada $i \in I$, uma vez que $(a_1, \ldots, a_n) \in (S_i)^n$ e cada um dos conjuntos S_i é um subuniverso de $\mathcal{A}$. Então $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \bigcap_{i \in I} S_i$ e, portanto, $\bigcap_{i \in I} S_i$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}}$. $\square$

Dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ e dado um subconjunto X de A, existe sempre um subuniverso de $\mathcal{A}$ que contem X, em particular, o conjunto A. Além disso, pode-se determinar o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X.

Teorema 2.2.5. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $X \subseteq A$ e*

$$S = \bigcap \{B \mid B \text{ é subuniverso de } \mathcal{A} \text{ e } X \subseteq B\}.$$

Então S é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X.

Demonstração. Do Teorema 2.2.4 segue que S é um subniverso de $\mathcal{A}$ e da definição de S é imediato que $X \subseteq S$ e que S está contido em qualquer subuniverso de $\mathcal{A}$ que contenha X. □

Definição 2.2.6. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X \subseteq A$. Designa-se por **subuniverso de $\mathcal{A}$ gerado por** X, e representa-se por $Sg^{\mathcal{A}}(X)$, o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X, i.e., o conjunto*

$$Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcap \{B \mid B \text{ é subuniverso de } \mathcal{A} \text{ e } X \subseteq B\}.$$

*Diz-se que um subuniverso S de $\mathcal{A}$ é **finitamente gerado** se $S = Sg^{\mathcal{A}}(X)$, para algum conjunto finito $X \subseteq A$.*

Dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ e dado um conjunto $X \subseteq A$, coloca-se o problema de determinar todos os elementos de $Sg^{\mathcal{A}}(X)$. O resultado seguinte fornece uma descrição indutiva deste conjunto.

Teorema 2.2.7. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X \subseteq A$. Para $i \in \mathbb{N}_0$, define-se*

$$\begin{aligned} X_0 &= X; \\ X_{i+1} &= X_i \cup \{f^{\mathcal{A}}(x) \mid f^{\mathcal{A}} \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Então $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$.

Demonstração. É imediato que $X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i \subseteq A$. Facilmente também se verifica que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$ é fechado para toda a operação de $\mathcal{A}$: se $f^{\mathcal{A}}$ é uma operação n-ária em $\mathcal{A}$ e $a_1, \ldots, a_n$ são elementos de $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$, então $(a_1, \ldots, a_n) \in (X_k)^n$, para algum $k \in \mathbb{N}_0$, donde $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in X_{k+1} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$. Logo $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e contém X. Além disso, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X. De facto, se B é um subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X, mostra-se, por indução em i, que $X_i \subseteq B$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e, portanto, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i \subseteq B$. Assim, $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$. □

Da definição e do teorema anteriores são imediatos os resultados seguintes.

Corolário 2.2.8. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $X \subseteq A$ e $a \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$. Então $a \in Sg^{\mathcal{A}}(Y)$, para algum subconjunto finito Y de X.*

Demonstração. Do teorema anterior sabe-se que $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$, onde X_i são os conjuntos descritos nesse mesmo teorema. Por indução em i, prova-se que se $a \in X_i$, então $a \in Sg^{\mathcal{A}}(Y)$, para algum subconjunto finito Y de X. □

Corolário 2.2.9. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A$. Então*

(i) $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

(ii) $X \subseteq Y \Rightarrow Sg^{\mathcal{A}}(X) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

(iii) $Sg^{\mathcal{A}}(Sg^{\mathcal{A}}(X)) = Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

(iv) $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup\{Sg^{\mathcal{A}}(Z) \mid Z$ *é subconjunto finito de* $X\}$. □

Corolário 2.2.10. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $Sg^{\mathcal{A}} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ a aplicação definida por $X \mapsto Sg^{\mathcal{A}}(X)$, para todo $X \in \mathcal{P}(A)$. Então $Sg^{\mathcal{A}}$ é um operador de fecho algébrico em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.*

Observe-se que os subuniversos de uma álgebra $\mathcal{A}$ são exatamente os subconjuntos X de A para os quais se tem $X = Sg^{\mathcal{A}}(X)$, ou seja, são os subconjuntos de A fechados para o operador de fecho $Sg^{\mathcal{A}}$.

Teorema 2.2.11. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então* $(\mathrm{Sub}\mathcal{A}, \subseteq)$ *é um reticulado algébrico e, para quaisquer $B, C \in \mathrm{Sub}\mathcal{A}$,*

$$B \wedge C = B \cap C, \ \ B \vee C = Sg^{\mathcal{A}}(B \cup C), \ \forall B, C \in \mathrm{Sub}\mathcal{A}.$$

Os elementos compactos de $(\mathrm{Sub}\mathcal{A}, \subseteq)$ *são os subuniversos de $\mathcal{A}$ finitamente gerados.*

Demonstração. A prova de

$$B \wedge C = B \cap C, \ \ B \vee C = Sg^{\mathcal{A}}(B \cup C), \ \forall B, C \in \mathrm{Sub}\mathcal{A}$$

é um exercício simples. Atendendo ao Teorema 1.3.21, a prova restante também é imediata, uma vez que, pelo que foi observado anteriormente, tem-se

$$(Fc_{Sg^{\mathcal{A}}}, \subseteq) = (\mathrm{Sub}\mathcal{A}, \subseteq).$$

□

Definição 2.2.12. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e* $\mathrm{Sub}\mathcal{A}$ *o conjunto dos subuniversos de $\mathcal{A}$. O reticulado* $(\mathrm{Sub}\mathcal{A}, \subseteq)$ *designa-se por* ***reticulado dos subuniversos de $\mathcal{A}$*** *e representa-se por $\mathcal{S}ub\mathcal{A}$.*

Definição 2.2.13. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo (O, τ). Diz-se que $\mathcal{B}$ é uma* ***subálgebra*** *de $\mathcal{A}$, e escreve-se $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, se B é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e para todo o simbolo de operação $f \in O_n$,*

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, \dots, b_n) = f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n),$$

para qualquer $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$.

Se $\mathcal{B} = (B; G)$ é subálgebra de uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$, então B é um subuniverso de $\mathcal{A}$. No entanto, um subuniverso de $\mathcal{A}$ não é necessariamente o universo de uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Observe-se, por exemplo, que o conjunto vazio pode ser subuniverso de uma álgebra $\mathcal{A}$, mas não é universo de qualquer subálgebra de $\mathcal{A}$.

Exemplo 2.2.14.
(1) O anel $(\mathbb{R}; +, \cdot, -, 0)$ *é uma subálgebra do anel* $(\mathbb{C}; +, \cdot, -, 0)$.
(2) Se $(G; \cdot)$ *é um grupo, as suas subálgebras são os subsemigrupos de* G.
(3) Se $(G; \cdot, ^{-1}, 1)$ *é um grupo, as suas subálgebras são os subgrupos de* G.

Definição 2.2.15. *Sejam* $\mathcal{A} = (A; F)$ *uma álgebra e* $X \subseteq A$ *tal que* $X \neq \emptyset$. *Chama--se **subálgebra de*** $\mathcal{A}$ ***gerada por*** X, *e representa-se por* $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(X)$, *a subálgebra de* $\mathcal{A}$ *cujo universo é* $Sg^{\mathcal{A}}(X)$.
Se na álgebra $\mathcal{A}$ *há, pelo menos, uma operação nulária, define-se a **subálgebra de*** $\mathcal{A}$ ***gerada por*** $\emptyset$ *como sendo a subálgebra de* $\mathcal{A}$ *cujo universo é* $Sg^{\mathcal{A}}(\emptyset)$.
Diz-se que a álgebra $\mathcal{A}$ ***é gerada por*** X *ou que* X ***é um conjunto de geradores de*** $\mathcal{A}$ *se* $\mathcal{S}g^{\mathcal{A}}(X) = \mathcal{A}$. *A álgebra* $\mathcal{A}$ *diz-se **finitamente gerada** se* $\mathcal{A}$ *admite um conjunto de geradores finito.*

Exemplo 2.2.16. *O anel* $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$ *é finitamente gerado, tendo-se, por exemplo,* $\mathcal{S}g^{\mathcal{Z}}(\{1\}) = \mathcal{Z}$.

2.3 Congruências e álgebras quociente

Uma congruência numa álgebra é uma relação de equivalência que é compatível com as operações da álgebra. A noção de congruência desempenha um papel relevante no estudo de álgebra universal.

Definição 2.3.1. *Sejam* $\mathcal{A} = (A; F)$ *uma álgebra de tipo* (O, τ) *e* θ *uma relação binária em* A.

(1) Dado um símbolo de operação n*-ário* $f \in O_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, *diz-se que a operação* $f^{\mathcal{A}}$ *é **compatível com*** θ, *ou que **preserva*** θ, *se para quaisquer* $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$,

$$(a_i \,\theta\, b_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}) \Rightarrow f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) \,\theta\, f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Se, para quaisquer $n \in \mathbb{N}_0$ *e* $f \in O_n$, $f^{\mathcal{A}}$ *é compatível com* θ, *diz-se que a relação* θ *satisfaz a **propriedade de substituição**.*

(2) A relação θ *diz-se uma **congruência em*** $\mathcal{A}$ *se* θ *é uma relação de equivalência que satisfaz a propriedade de substituição.*

Exemplo 2.3.2.
(1) Considere o anel $(\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$. *Para cada* $q \in \mathbb{Z}$, *seja* $\equiv_q$ *a relação de equivalência definida em* $\mathbb{Z}$ *por*

$$r \equiv_q s \text{ sse } r - s = qk, \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Facilmente se verifica que: para todo $q \in \mathbb{Z}$, $\equiv_q$ *é uma congruência no anel* $(\mathbb{Z}; +, \cdot, -, 0)$; $\equiv_0$ *é a congruência identidade;* $\equiv_1$ *é a congruência universal.*

(2) Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; f^{\mathcal{A}})$ *a álgebra de tipo* (1), *onde* $f^{\mathcal{A}}$ *é a operação unária definida por*

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	b	a	d	c

Para determinar todas as congruências de $\mathcal{A}$ *pode-se começar por determinar todas as partições de* $\{a, b, c, d\}$ *e seguidamente procurar as partições com a propriedade de que a imagem de uma classe é ainda uma classe. Relativamente à álgebra* $\mathcal{A}$, *conclui-se que as relações de congruência em* $\mathcal{A}$ *são as relações de equivalência associadas às seguintes partições*

$$\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}, \qquad \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}, \qquad \{\{a, b\}, \{c, d\}\},$$

$$\{\{a, c\}, \{b, d\}\}, \qquad \{\{a, d\}, \{b, c\}\}.$$

(3) Dado um grupo $\mathcal{G} = (G; \cdot, ^{-1}, 1)$, *é possível estabelecer uma relação entre as congruências de* $\mathcal{G}$ *e os subgrupos invariantes de* $\mathcal{G}$:

- *(a) se* θ *é uma congruência em* $\mathcal{G}$, *então* $[1]_\theta$ *é o universo de um subgrupo invariante de* $\mathcal{G}$ *e, dados* $a, b \in G$, *tem-se* $a\,\theta\,b$ *se e só se* $a \cdot b^{-1} \in [1]_\theta$;

- *(b) se* $\mathcal{N} = (N; \cdot, ^{-1}, 1)$ *é um subgrupo invariante de* $\mathcal{G}$, *a relação binária* θ *definida em* N *por*

$$a\,\theta\,b \text{ sse } a \cdot b^{-1} \in N$$

  é uma congruência em $\mathcal{G}$ *e tem-se* $[1]_\theta = N$.

  A aplicação $\theta \mapsto [1]_\theta$ *é uma bijeção entre o conjunto das congruências de* $\mathcal{G}$ *e o conjunto dos subgrupos invariantes de* $\mathcal{G}$.

(4) Dado um anel $\mathcal{A} = (A; +, \cdot, -, 0)$, *também existe uma relação entre as congruências e os ideais do anel:*

- *(a) se* θ *é uma congruêcia em* $\mathcal{A}$, *então* $[0]_\theta$ *é o universo de um ideal de* $\mathcal{A}$ *e, dados* $a, b \in A$, *tem-se* $a\,\theta\,b$ *se e só se* $a - b \in [0]_\theta$;

- *(b) se* $\mathcal{I} = (I; \cdot, ^{-1}, 1)$ *é um ideal de* $\mathcal{A}$, *a relação binária* θ *definida em* I *por*

$$a\,\theta\,b \text{ sse } a - b \in I$$

  é uma congruência em $\mathcal{A}$ *e tem-se* $[0]_\theta = I$.

  A aplicação $\theta \mapsto [0]_\theta$ *é uma bijeção entre o conjunto das congruências de* $\mathcal{A}$ *e o conjunto dos ideais de* $\mathcal{A}$.

(5) Se $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ é um reticulado, então $\theta \in \mathrm{Eq}(R)$ é uma congruência em $\mathcal{R}$ se e só se:

(a) cada classe de θ é um sub-reticulado de $\mathcal{R}$;

(b) cada classe de θ é um subconjunto convexo de R;

(c) as classes de equivalência de θ são fechadas para quadriláteros (i.e. sempre que a, b, c, d são elementos de R distintos tais que $a < b$, $c < d$ e

$$(a \vee d = b \text{ e } a \wedge d = c) \text{ ou } (b \vee c = d \text{ e } b \wedge c = a),$$

então $a \,\theta\, b$ sse $c \,\theta\, d$).

O conjunto de todas as congruências de uma álgebra $\mathcal{A}$ é denotado por $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}$. A **relação identidade** $\triangle_A = \{(a, a) \in A^2 \mid a \in A\}$ e a **relação universal** $\nabla_A = A^2$ são elementos de $\mathrm{Con}\mathcal{A}$. O conjunto de congruências de uma álgebra, quando ordenado pela relação de inclusão de conjuntos, define um reticulado.

Lema 2.3.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra. Se θ_1, θ_2 são congruências em $\mathcal{A}$, então:*

(1) $\theta_1 \cap \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$.

(2) $\{(x, y) \in A^2 \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, z_0, z_1, \ldots, z_n \in A : x = z_0, y = z_n$
$\quad e\ \forall 1 \leq k \leq n, z_{k-1}\,\theta_1\, z_k \text{ ou } z_{k-1}\,\theta_2\, z_k\} \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. □

Teorema 2.3.4. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então $(\mathrm{Con}\mathcal{A}, \subseteq)$ é um reticulado, tendo-se, para quaisquer $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$,*

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2,$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \{(x, y) \in A^2 \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, z_0, z_1, \ldots, z_n \in A : x = z_0, y = z_n \text{ e } \forall 1 \leq k \leq n, z_{k-1}\,\theta_1\, z_k \text{ ou } z_{k-1}\,\theta_2\, z_k\}.$$

Demonstração. Imediato a partir do Teorema 1.4.2 e do Lema 2.3.3. □

Definição 2.3.5. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra. Ao reticulado $\mathcal{C}on\mathcal{A} = (\mathrm{Con}\mathcal{A}, \subseteq)$ dá-se a designação de* ***reticulado das congruências em $\mathcal{A}$****.*

O resultado estabelecido na alínea (1) do Lema 2.3.3 pode ser generalizado.

Lema 2.3.6. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $(\theta_i)_{i \in I}$ uma família de congruências em $\mathcal{A}$. Então $\bigcap_{i \in I} \theta_i$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.* □

Como consequência do lema anterior, pode estabelecer-se o seguinte.

Teorema 2.3.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então $\mathcal{C}on\mathcal{A}$ é um reticulado completo, tendo-se, para cada família $(\theta_i)_{i\in I}$ de congruências em $\mathcal{A}$,*

$$\bigwedge_{i\in I}\theta_i = \bigcap_{i\in I}\theta_i \quad e \quad \bigvee_{i\in I}\theta_i = \bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \mid \bigcup_{i\in I}\theta_i \subseteq \theta\}. \qquad \square$$

Teorema 2.3.8. *Para qualquer álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ de tipo (O, τ), existe um operador de fecho algébrico em $A \times A$ tal que os subconjuntos fechados de $A \times A$ são precisamente as congruências em $\mathcal{A}$. Assim, $\mathcal{C}on\mathcal{A}$ é um reticulado algébrico.*

Demonstração. Consideremos a álgebra

$$\mathcal{B} = (A \times A; \{f^{\mathcal{B}}\}_{f\in O} \cup \{c_a : a \in A\} \cup \{s^{\mathcal{B}}, t^{\mathcal{B}}\}),$$

onde

- para cada $f \in O_n$, $f^{\mathcal{B}} : (A \times A)^n \to A \times A$ é a aplicação definida por

$$f^{\mathcal{B}}((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)) = (f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n));$$

- para cada $a \in A$, $c_a : (A \times A)^0 \to A \times A$ é a operação nulária definida por

$$c_a = (a, a);$$

- $s^{\mathcal{B}} : A \times A \to A \times A$ é a operação unária definida por

$$s^{\mathcal{B}}((a, b)) = (b, a);$$

- $t^{\mathcal{B}} : (A \times A)^2 \to A \times A$ é a operação binária definida por

$$s((a, b), (c, d)) = \begin{cases} (a, d) & \text{se } b = c \\ (a, b) & \text{se } b \neq c \end{cases}$$

Relativamente a esta álgebra verifica-se o seguinte: um subconjunto S de $A \times A$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$ se e só se S é uma congruência em $\mathcal{A}$. Do Corolário 2.2.10 e do Teorema 2.2.11 sabe-se que a aplicação $Sg^{\mathcal{B}}(\,) : \mathcal{P}(A \times A) \to \mathcal{P}(A \times A)$ definida por $S \mapsto Sg^{\mathcal{B}}(S)$ é um operador de fecho algébrico e $(Fc_{Sg^{\mathcal{B}}(\,)}, \subseteq)$ é o reticulado algébrico dos subuniversos de $\mathcal{B}$. Assim, do que foi observado anteriormente e do Teorema 1.3.21 segue que $(\mathrm{Con}\mathcal{A}, \subseteq)$ é um reticulado algébrico. $\square$

Dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ e dado $X \subseteq A \times A$, existe pelo menos uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém X, mais precisamente, a congruência universal ∇_A. Assim, a família de congruências $(\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \mid X \subseteq \theta)$ é não vazia. Recorrendo a esta família constroi-se a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém X.

Teorema 2.3.9. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X \subseteq A \times A$. Então*

$$\bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \mid X \subseteq \theta\}$$

é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém X. $\square$

Definição 2.3.10. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $X \subseteq A \times A$ e $a, b \in A$. Designa-se por* ***congruência gerada por** X **em** $\mathcal{A}$*, e representa-se por $\Theta(X)$, a congruência*

$$\Theta(X) = \bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \mid X \subseteq \theta\}.$$

Se $X = \{(a_i, a_j) \in A \times A \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, representa-se $\Theta(X)$ por $\Theta(a_1, \ldots, a_n)$. Em particular, se $X = \{(a, b)\}$, designa-se por ***congruência principal gerada por** a, b **em** $\mathcal{A}$*, e representa-se por $\Theta(a, b)$, a congruência $\bigcap\{\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \mid a\,\theta\,b\}$.*

Dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$, os elementos compactos do reticulado $\mathcal{C}on\mathcal{A}$ são as congruências finitamente geradas $\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$.

Seguidamente estabelecem-se mais alguns resultados a respeito de congruências.

Teorema 2.3.11. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in A$ e $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Então*

(a) $\Theta(a_1, b_1) = \Theta(b_1, a_1)$.

(b) $\Theta((a_1, b_1), \ldots (a_n, b_n)) = \Theta(a_1, b_1) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n)$.

(c) $\Theta(a_1, \ldots, a_n) = \Theta(a_1, a_2) \vee \Theta(a_2, a_3) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$.

(d) $\theta = \bigcup\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\} = \bigvee\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\}$.

(e) $\theta = \bigcup\{\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \mid (a_i, b_i) \in \theta, n \geq 1\}$.

Demonstração. (a) Uma vez que $(b_1, a_1) \in \Theta(a_1, b_1)$, então $\Theta(b_1, a_1) \subseteq \Theta(a_1, b_1)$. Por simetria, também se tem $\Theta(a_1, b_1) \subseteq \Theta(b_1, a_1)$. Logo $\Theta(a_1, b_1) = \Theta(b_1, a_1)$.

(b) Por um lado, tem-se $(a_i, b_i) \in \Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, pelo que

$$\Theta(a_1, b_1) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n) \subseteq \Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)).$$

Por outro lado, para todo $i \in \{1, \ldots n\}$,

$$(a_i, b_i) \in \Theta(a_i, b_i) \subseteq \Theta(a_1, b_1) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n),$$

donde $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} \subseteq \Theta(a_1, b_1) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n)$ e, portanto,

$$\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \subseteq \Theta(a_1, b_1) \vee \ldots \vee \Theta(a_n, b_n).$$

(c) Para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\Theta(a_i, a_{i+1}) \subseteq \Theta(a_1, \ldots, a_n)$, donde

$$\Theta(a_1, a_2) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n) \subseteq \Theta(a_1, \ldots, a_n).$$

Reciprocamente, para $1 \leq i \leq j \leq n$, tem-se

$$(a_i, a_j) \in \Theta(a_i, a_{i+1}) \circ \ldots \circ \Theta(a_{j-1}, a_j),$$

donde, pelo Teorema 1.4.3, segue que

$$(a_i, a_j) \in \Theta(a_i, a_{i+1}) \vee \ldots \vee \Theta(a_{j-1}, a_j);$$

logo
$$(a_i, a_j) \in \Theta(a_1, a_2) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n).$$
Assim,
$$\Theta(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \Theta(a_1, a_2) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$$
e, portanto,
$$\Theta(a_1, \ldots, a_n) = \Theta(a_1, a_2) \vee \ldots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n).$$
(d) Para cada $(a, b) \in \theta$, tem-se
$$(a, b) \in \Theta(a, b) \subseteq \theta.$$
Logo
$$\theta \subseteq \bigcup\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\} \subseteq \bigvee\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\} \subseteq \theta$$
e, portanto,
$$\theta = \bigcup\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\} = \bigvee\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\}.$$
(e) Semelhante à prova de (d). □

Os reticulados das congruências de certas classes de álgebras satisfazem propriedades adicionais que se relacionam com as propriedades das respetivas álgebras.

Definição 2.3.12. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Diz-se que θ_1 e θ_2 são **permutáveis** se $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. Diz-se que a álgebra $\mathcal{A}$ é:*

- ***congruente-permutável** se qualquer par de congruências em $\mathcal{A}$ é permutável;*
- ***congruente-distributiva** (**congruente-modular**) se $Con\mathcal{A}$ é distributivo (modular).*

*Uma classe $\mathbf{K}$ de álgebras diz-se **congruente-permutavel**, **congruente-distributiva**, **congruente-modular** se cada álgebra da classe satisfaz a respetiva propriedade.*

Exemplo 2.3.13. *Todos os grupos e todos os anéis são congruente-permutáveis e todos os reticulados são congruente-distributivos.*

Nos resultados seguintes apresentam-se algumas propriedades a respeito de álgebras congruente-permutáveis.

Teorema 2.3.14. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(a) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$,

(b) $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$,

(c) $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Para quaisquer relações de equivalência θ e σ, tem-se $\theta \circ \theta = \theta$ e $\theta \subseteq \theta \circ \sigma$. Então, admitindo que θ_1 e θ_2 são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ e tendo em conta que

$$\theta_1 \vee \theta_1 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \ldots,$$

tem-se $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Uma vez que $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \vee \theta_2$, de (b) segue que $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$. Então $(\theta_2 \circ \theta_1)^I \subseteq (\theta_1 \circ \theta_2)^I$, donde resulta ${\theta_1}^I \circ {\theta_2}^I \subseteq {\theta_2}^I \circ {\theta_1}^I$. Atendendo a que, para cada relação de equivalência θ, $\theta^I = \theta$, conclui-se que $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$. Então $(\theta_2 \circ \theta_1)^I \subseteq (\theta_1 \circ \theta_2)^I$, donde ${\theta_1}^I \circ {\theta_2}^I \subseteq {\theta_2}^I \circ {\theta_1}^I$. Por conseguinte $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$. Logo $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. □

Teorema 2.3.15. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Se $\mathcal{A}$ é congruente-permutável, então $\mathcal{A}$ é congruente-modular.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra congruente-permutável e $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ congruências em $\mathcal{A}$ tais que $\theta_1 \subseteq \theta_2$. Pretendemos mostrar que

$$\theta_2 \wedge (\theta_1 \vee \theta_3) \subseteq \theta_1 \vee (\theta_2 \wedge \theta_3).$$

Seja $(a, b) \in \theta_2 \wedge (\theta_1 \vee \theta_3)$. Uma vez que $(a, b) \in \theta_1 \vee \theta_3$ e $\theta_1 \vee \theta_3 = \theta_3 \circ \theta_1$, existe um elemento $c \in A$ tal que $(a, c) \in \theta_1$ e $(c, b) \in \theta_3$. Como $(a, c) \in \theta_1$ e θ_1 é simétrica, então $(c, a) \in \theta_1$. Logo $(c, a) \in \theta_2$, pois $\theta_1 \subseteq \theta_2$. Dado que $(c, a) \in \theta_2$ e $(a, b) \in \theta_2$, tem-se $(c, b) \in \theta_2$. Assim, atendendo a que $(a, c) \in \theta_1$ e $(c, b) \in \theta_2 \wedge \theta_3$, resulta que $(a, b) \in (\theta_2 \wedge \theta_3) \circ \theta_1 = \theta_1 \vee (\theta_2 \wedge \theta_3)$. □

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) e θ uma congruência em $\mathcal{A}$. Atendendo à propriedade de substituição satisfeita pela congruência θ, é simples verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e para cada $f \in O_n$, a relação de $(A/\theta)^n$ em A/θ que a cada elemento $([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta)$ de $(A/\theta)^n$ associa o elemento $[f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta$ é independente dos representantes $a_1, \ldots, a_n$ que se escolhem para as classes $[a_1]_\theta$, ..., $[a_n]_\theta$, pelo que esta relação é uma operação n-ária em A/θ. Assim, é possível associar ao conjunto quociente A/θ a estrutura de uma álgebra do mesmo tipo da álgebra $\mathcal{A}$.

Definição 2.3.16. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) e θ uma congruência em $\mathcal{A}$. Chama-se* ***álgebra quociente de $\mathcal{A}$ por*** *θ, e representa-se por $\mathcal{A}/\theta$, a álgebra $(A/\theta; (f^{A/\theta})_{f \in O})$ do mesmo tipo da álgebra $\mathcal{A}$ e tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$ e para qualquer símbolo operacional $f \in O_n$,*

$$f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) = [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta, \ \forall (a_1, \ldots, a_n) \in A^n.$$

2.4 Homomorfismos

No estudo de aplicações entre álgebras do mesmo tipo têm particular interesse aquelas que são compatíveis com as operações das álgebras: os *homomorfismos*. Os homomorfismos de grupos, de anéis e de reticulados são casos particulares deste tipo de aplicações. Nesta secção define-se o conceito de homomorfismo e estabelecem-se alguns teoremas importantes que relacionam homomorfismos com álgebras quociente e com congruências.

Definição 2.4.1. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo (O, τ) e $\alpha : A \to B$ uma função. Dado um símbolo de operação $f \in O_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, diz-se que α* ***é compatível com*** *f ou que α* ***respeita a interpretação de*** *f se*

$$\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)),$$

para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$.
Caso α seja compatível com todo o símbolo de operação de O, i.e., se, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e para cada $f \in O_n$, α ***é compatível com*** *f, diz-se que α* ***é um homomorfismo*** *de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ e escreve-se $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.*
O conjunto dos homomorfismos de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é representado por $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Exemplo 2.4.2.
(1) A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, que a cada real x associa o seu valor absoluto $|x|$, é um homomorfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ em $(\mathbb{R}_0^+, \cdot)$, uma vez que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(2) Dado $n \in \mathbb{N}$, representa-se por $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n e por $\mathcal{M}_n$ a álgebra $(M_n(\mathbb{R}); \cdot^{\mathcal{M}_n})$, onde $\cdot^{\mathcal{M}_n}$ representa a multiplicação usual de matrizes de $M_n(\mathbb{R})$. É simples verificar que a aplicação $h : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, que a cada matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ associa o seu determinante $|A|$, é um homomorfismo de $\mathcal{M}_n$ no semigrupo multiplicativo $\mathcal{R} = (\mathbb{R}; \cdot^{\mathcal{R}})$ (onde $\cdot^{\mathcal{R}}$ representa a multiplicação usual em $\mathbb{R}$).

(3) Consideremos as álgebras

$$\mathcal{A}_3 = (\{(1), (123), (132)\}; \cdot^{\mathcal{A}_3}) \quad e \quad \mathcal{Z}_3 = (\{[1]_3, [2]_3, [3]_3\}; \cdot^{\mathcal{Z}_3}),$$

de tipo (2), onde $\cdot^{\mathcal{A}_3}$ e $\cdot^{\mathcal{Z}_3}$ são, respetivamente, a operação de composição de permutações e a operação de adição usual em $\mathbb{Z}_3$, definidas pelas tabelas seguintes

$\circ$	(1)	(123)	(132)
(1)	(1)	(123)	(132)
(123)	(123)	(132)	(1)
(132)	(132)	(1)	(123)

$+$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[0]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$
$[1]_3$	$[1]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$
$[2]_3$	$[2]_3$	$[0]_3$	$[1]_3$

A partir destas tabelas é simples perceber que a bijeção

$$h : \{(1), (123), (132)\} \to \{[1]_3, [2]_3, [3]_3\},$$

definida por $(1) \mapsto [0]_3$, $(123) \mapsto [1]_3$, $(132) \mapsto [2]_3$, respeita a interpretação do símbolo de operação das álgebras e, portanto, h é um homomorfismo de $\mathcal{A}_3$ em $\mathcal{Z}_3$.

A composição de dois homomorfismos, desde que esteja definida, é ainda um homomorfismo.

Teorema 2.4.3. *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ álgebras do mesmo tipo. Se $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ são homomorfismos (respetivamente, isomorfismos), então $\beta\circ\alpha$ é um homomorfismo (respetivamente, isomorfismo) de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Exercício. □

Dadas álgebras $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ e $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, diz-se que: α é um ***epimorfismo*** se α é uma aplicação sobrejetiva; α é um ***monomorfismo*** ou um ***mergulho*** de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ se α é injetiva. Caso exista um mergulho de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ diz-se que ***a álgebra $\mathcal{A}$ pode ser mergulhada na álgebra $\mathcal{B}$***. A um homomorfismo que seja bijetivo dá-se a designação de ***isomorfismo***. Diz-se que a álgebra ***$\mathcal{A}$ é isomorfa à álgebra $\mathcal{B}$*** se existe um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Caso exista um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, também existe um isomorfismo de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$, pelo que, caso exista um isomorfismo de uma álgebra na outra, diz-se apenas que as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são isomorfas e escreve-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. A um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ dá-se a designação de ***endomorfismo***. Um endomorfismo que seja bijetivo diz-se um ***automorfismo***. Os conjuntos dos endomorfismos e dos automorfismos de uma dada álgebra $\mathcal{A}$ são representados, respetivamente, por $\mathrm{End}\mathcal{A}$ e por $\mathrm{Aut}\mathcal{A}$.
Do teorema anterior segue que, para cada álgebra $\mathcal{A}$, cada um dos conjuntos $\mathrm{End}\mathcal{A}$ e $\mathrm{Aut}\mathcal{A}$ é fechado para a composição de aplicações. Assim, considerando que, para cada álgebra $\mathcal{A}$, a aplicação identidade id_A pertence quer a $\mathrm{End}\mathcal{A}$ quer a $\mathrm{Aut}\mathcal{A}$ e a aplicação inversa de um automorfismo de $\mathcal{A}$ é também um automorfismo de $\mathcal{A}$, segue que;

- $\mathcal{E}nd\mathcal{A} = (\mathrm{End}\mathcal{A}; \circ, \mathrm{id}_A)$ é um monóide;
- $\mathcal{A}ut\mathcal{A} = (\mathrm{Aut}\mathcal{A}; \circ, ^{-1}, \mathrm{id}_A)$, onde $^{-1}$ representa a operação unária que a cada automorfismo de $\mathrm{Aut}\mathcal{A}$ associa a sua aplicação inversa, é um grupo.

Exemplo 2.4.4. *O homomorfismo de $\mathcal{A}_3$ em $\mathcal{Z}_3$ definido no exemplo anterior é um isomorfismo, pelo que as álgebras $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{Z}_3$ são isomorfas.*

Um isomorfismo é uma correspondência bijetiva entre os elementos de duas álgebras do mesmo tipo que respeita a interpretação de cada símbolo operacional. Assim, há certas propriedades, ditas "propriedades algébricas", que sendo satisfeitas por uma dada álgebra são satisfeitas por qualquer álgebra que lhe seja isomorfa, o que torna as álgebras indistinguíveis a respeito destas propriedades. Embora duas álgebras isomorfas possam ser completamente diferentes, em particular no que respeita aos seus elementos, é usual dizer que "as álgebras são a mesma, a menos de isomorfismo".

Seguidamente apresentam-se mais algumas propriedades a respeito de homomorfismos.

Teorema 2.4.5. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo. Se a álgebra $\mathcal{A}$ é gerada por um conjunto X ($X \subseteq A$) e $\alpha, \beta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ são homomorfismos tais que, para todo $x \in X$, $\alpha(x) = \beta(x)$, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Se a álgebra $\mathcal{A}$ é gerada pelo conjunto X, então do Teorema 2.2.7 segue que $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} X_i$, onde

$$\begin{array}{lcl} X_0 & = & X; \\ X_{i+1} & = & X_i \cup \{f(x) \mid f \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \mathbb{N}_0\}. \end{array}$$

Por indução em i, prova-se que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, tem-se $\alpha(x) = \beta(x)$, para qualquer $x \in X_i$. Por conseguinte, para todo $x \in A$, $\alpha(x) = \beta(x)$ e, portanto, $\alpha = \beta$. □

Teorema 2.4.6. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo.*

(i) Se A_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$, então $\alpha(A_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

(ii) Se B_1 é um subuniverso de $\mathcal{B}$, então $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

(iii) Para qualquer $X \subseteq A$, $Sg^{\mathcal{B}}(\alpha(X)) = \alpha(Sg^{\mathcal{A}}(X))$.

Demonstração. A prova de (i) e de (ii) é um exercício simples que fica ao cuidado do leitor.

(iii) Dado $X \subseteq A$, sejam

- $X_0 = X$;
- $X_{k+1} = X_k \cup \{f^{\mathcal{A}}(x) \mid f^{\mathcal{A}}$ é operação n-ária em $\mathcal{A}$ e $x \in (X_k)^n, n \in \mathbb{N}_0\}$;
- $\alpha(X)_0 = \alpha(X)$;
- $\alpha(X)_{k+1} = \alpha(X)_k \cup \{f^{\mathcal{B}}(x) \mid f^{\mathcal{B}}$ é operação n-ária em $\mathcal{B}$ e $x \in (\alpha(X)_k)^n, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Por indução em k, prova-se que, para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha(X)_k = \alpha(X_k)$. Então

$$Sg^{\mathcal{B}}(\alpha(X)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} (\alpha(X))_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \alpha(X_k) = \alpha(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k) = \alpha(Sg^{\mathcal{A}}(\alpha(X))).$$

□

Do teorema anterior é imediato o resultado seguinte.

Corolário 2.4.7. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$, $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras de tipo (O, τ) e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo.*

(i) Se $\mathcal{A}_1 = (A_1; F_1)$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, então o par $(\alpha(A_1); (f^{\alpha(\mathcal{A}_1)})_{f \in O})$, onde, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e para cada $f \in O_n$, $f^{\alpha(\mathcal{A}_1)}$ é a função de $(\alpha(A_1))^n$ em $\alpha(A_1)$ definida por

$$f^{\alpha(\mathcal{A}_1)}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) = f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)),$$

para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in (A_1)^n$, é uma subálgebra de $\mathcal{B}$.

(ii) *Se* $\mathcal{B}_1 = (B_1, G_1)$ *é uma subálgebra de* $\mathcal{B}$ *e* $\alpha^{\leftarrow}(B_1) \neq \emptyset$*, então o par* $(\alpha^{\leftarrow}(B_1); (f^{\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{B}_1)})_{f\in O})$*, onde, para cada* $n \in \mathbb{N}_0$ *e para cada* $f \in O_n$*,* $f^{\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{B}_1)}$ *é a função de* $(\alpha^{\leftarrow}(B_1))^n$ *em* $\alpha^{\leftarrow}(B_1)$ *definida por*

$$f^{\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{B}_1)}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n),$$

para qualquer $(a_1, \dots, a_n) \in (\alpha^{\leftarrow}(B_1))^n$*, é uma subálgebra de* $\mathcal{A}$*.* □

Sendo $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo (O, τ), $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo, $\mathcal{A}_1 = (A_1; F_1)$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_1 = (B_1; G_1)$ uma subálgebra de $\mathcal{B}$ nas condições do corolário anterior: designa-se por ***imagem homomorfa de*** $\mathcal{A}_1$, e representa-se por $\alpha(\mathcal{A}_1)$, a álgebra $(\alpha(A_1); (f^{\alpha(\mathcal{A}_1)})_{f\in O})$; dá-se a designação de ***pré-imagem de*** $\mathcal{B}_1$, e representa-se por $\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{B}_1)$, à álgebra $(\alpha^{\leftarrow}(B_1); (f^{\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{B}_1)})_{f\in O})$. Observe-se que a álgebra $\mathcal{B}$ é uma imagem homomorfa de $\mathcal{A}$ se e só se existe um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

Dado um homomorfismo α entre álgebras $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$, a aplicação $\alpha : A \to B$ não é, em geral, injetiva. Sendo assim, tem interesse estudar a relação binária induzida por α, ou seja, a que relaciona elementos de A que tenham a mesma imagem através da aplicação α.

Definição 2.4.8. *Sejam* $\mathcal{A} = (A; F)$ *e* $\mathcal{B} = (B; G)$ *álgebras do mesmo tipo e* $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *um homomorfismo. Designa-se por* ***kernel de*** α*, e representa-se por* ker α*, a relação binária em* A *definida por*

$$\ker \alpha = \{(a, b) \in A^2 : \alpha(a) = \alpha(b)\}.$$

Teorema 2.4.9. *Sejam* $\mathcal{A} = (A; F)$ *e* $\mathcal{B} = (B; G)$ *álgebras do mesmo tipo e* $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *um homomorfismo. Então a relação* ker α *é uma congruência em* $\mathcal{A}$*.*

Demonstração. É imediato que ker α é uma relação de equivalência em A. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e para cada $f \in O_n$, se $(a_i, b_i) \in \ker \alpha$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\begin{aligned} \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) &= f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \\ &= f^{\mathcal{B}}(\alpha(b_1), \dots, \alpha(b_n)) \\ &= \alpha(f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n)) \end{aligned}$$

e, portanto, $(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n)) \in \ker \alpha$. Logo ker α é uma congruência em $\mathcal{A}$. □

Do teorema anterior segue que a cada homomorfismo é possível associar uma congruência. Reciprocamente, a cada congruência também é possível associar um homomorfismo.

Dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ e dada uma congruência θ em $\mathcal{A}$, é imediato que a relação binária $\pi_\theta = \{(a, [a]_\theta) \in A \times A/\theta \mid a \in A\}$ é uma aplicação de A em A/θ.

Definição 2.4.10. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e θ uma congruência em $\mathcal{A}$. A aplicação $\pi_\theta : A \to A/\theta$, definida por $\pi_\theta(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$, é designada por* ***aplicação natural de** A **em** A/θ.*

Teorema 2.4.11. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e θ uma congruência em $\mathcal{A}$. Então a aplicação $\pi_\theta : A \to A/\theta$ definida por $\pi_\theta(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$, é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\theta$. Além disso, tem-se $\ker \pi_\theta = \theta$.*

Demonstração. Sejam $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ e $\pi_\theta : A \to A/\theta$ a aplicação definida por $\pi_\theta(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, para cada $f \in O_n$ e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, tem-se

$$\begin{aligned} \pi_\theta(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta \\ &= f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) \\ &= f^{\mathcal{A}/\theta}(\pi_\theta(a_1), \ldots, \pi_\theta(a_n)), \end{aligned}$$

pelo que π_θ é um homomorfismo. Claramente, π_θ é sobrejetiva.
A prova da igualdade $\ker \pi_\theta = \theta$ é imediata, pois, para qualquer $(a, b) \in A \times A$,

$$(a, b) \in \ker \pi_\theta \Leftrightarrow \pi_\theta(a) = \pi_\theta(b) \Leftrightarrow [a]_\theta = [b]_\theta \Leftrightarrow (a, b) \in \theta. \qquad \square$$

Definição 2.4.12. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e θ uma congruência em $\mathcal{A}$. Ao epimorfismo $\pi_\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta$, definido por $\pi_\theta(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$, dá-se a designação de* ***homomorfismo natural de** $\mathcal{A}$ **em** $\mathcal{A}/\theta$.*

Sendo $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, θ uma congruência em $\mathcal{A}$ e π_θ o epimorfismo definido anteriormente, tem-se $\ker \pi_\theta = \theta$. Assim, dos teoremas 2.4.9 e 2.4.11 resulta que as congruências de uma álgebra $\mathcal{A}$ são exatamente os kernels dos homomorfismos com domínio $\mathcal{A}$.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Vimos anteriormente que $\ker \alpha$ é uma congruência em $\mathcal{A}$, pelo que faz sentido considerar a álgebra quociente $\mathcal{A}/\ker \alpha$ e o epimorfismo natural $\pi_{\ker \alpha} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\ker \alpha$. Assim, temos duas imagens homomórficas de $\mathcal{A}$: $\alpha(\mathcal{A})$ e $\pi_{\ker \alpha}(\mathcal{A})$. O teorema seguinte estabelece a relação existente entre estas imagens homomórficas de $\mathcal{A}$.

Teorema 2.4.13 (Primeiro Teorema do Isomorfismo)**.** *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo, $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo, $\theta = \ker \alpha$ e $\pi_\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta$ o homomorfismo natural. Então a aplicação β de A/θ em B definida por $\beta([a]_\theta) = \alpha(a)$, para todo $[a]_\theta \in A/\theta$, é um monomorfismo de $\mathcal{A}/\theta$ em $\mathcal{B}$ e tem-se $\beta \circ \pi_\theta = \alpha$. Caso α seja um epimorfismo, então β é um isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi_\theta"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{A}/\theta \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 2.1

Demonstração. A aplicação β está bem definida. Com efeito, para todo $[a]_\theta \in A/\theta$, tem-se $\beta([a]_\theta) \in B$ e, para quaisquer $[a]_\theta, [b]_\theta \in A/\theta$,

$$[a]_\theta = [b]_\theta \Rightarrow a\,\theta\,b \Rightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow \beta([a]_\theta) = \beta([b]_\theta).$$

Facilmente também se prova que β é injetiva, pois, para quaisquer $[a]_\theta, [b]_\theta \in A/\theta$,

$$\beta([a]_\theta) = \beta([b]_\theta) \Rightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow a\,\theta\,b \Rightarrow [a]_\theta = [b]_\theta.$$

A aplicação β é um homomorfismo, uma vez que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, para qualquer símbolo de operação n-ário f e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$\begin{array}{rcl} \beta(f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta)) & = & \beta([f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta) \\ & = & \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ & = & f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \\ & = & f^{\mathcal{B}}(\beta([a_1]_\theta), \ldots, \beta([a_n]_\theta)). \end{array}$$

Assim, β é um monomorfismo.
A prova da igualdade $\beta \circ \pi_\theta = \alpha$ é imediata, pois $\beta \circ \pi_\theta$ e α são ambas aplicações de A em B e, para qualquer $a \in A$,

$$(\beta \circ \pi_\theta)(a) = \beta(\pi_\theta(a)) = \beta([a]_\theta) = \alpha(a).$$

Caso α seja um epimorfismo é simples concluir que β é um isomorfismo. De facto, se α é sobrejetiva, então, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $b = \alpha(a)$ e, por conseguinte, $b = \beta([a]_\theta)$; logo β também é sobrejetiva. $\square$

Do Teorema 2.4.3 e do Primeiro Teorema do Isomorfismo segue que uma álgebra é imagem homomorfa de uma álgebra $\mathcal{A}$ se e só se é isomorfa a uma álgebra quociente de $\mathcal{A}$. Assim, o problema da determinação das imagens homomorfas de $\mathcal{A}$ reduz-se ao problema da determinação das congruências de $\mathcal{A}$.

Definição 2.4.14. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $\theta, \phi \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ tais que $\theta \subseteq \phi$. Define-se a relação ϕ/θ em A/θ por*

$$\phi/\theta = \{([a]_\theta, [b]_\theta) \in (A/\theta)^2 \mid (a, b) \in \phi\}.$$

Lema 2.4.15. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $\theta, \phi \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ tais que $\theta \subseteq \phi$. Então ϕ/θ é uma congruência em $\mathcal{A}/\theta$.*

Demonstração. Atendendo a que ϕ é uma relação de equivalência em A, é imediato que ϕ/θ é uma relação de equivalência em A/θ. A propriedade de substituição para ϕ/θ resulta da propriedade de substituição para ϕ. Seja f um símbolo operacional n-ário de $\mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}_0$, e suponhamos que $([a_i]_\theta, [b_i]_\theta) \in \phi/\theta$, para todo $1 \leq i \leq n$. Então $(a_i, b_i) \in \phi$, para todo $1 \leq i \leq n$, pelo que

$$(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \phi.$$

Logo
$$([f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)]_\theta,[f^{\mathcal{A}}(b_1,\ldots,b_n)]_\theta)\in\phi/\theta$$
e, portanto,
$$(f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta,\ldots,[a_n]_\theta),f^{\mathcal{A}/\theta}([b_1]_\theta,\ldots,[b_n]_\theta))\in\phi/\theta.$$
□

Teorema 2.4.16 (Segundo Teorema do Isomorfismo)**.** *Sejam $\mathcal{A}=(A;F)$ uma álgebra e $\theta,\phi\in\mathrm{Con}\mathcal{A}$ tais que $\theta\subseteq\phi$. Então a aplicação $\alpha:(A/\theta)/(\phi/\theta)\to A/\phi$ definida por $\alpha([[a]_\theta]_{\phi/\theta})=[a]_\phi$, para todo $[[a]_\theta]_{\phi/\theta}\in(A/\theta)/(\phi/\theta)$, é um isomorfismo.*

Demonstração. Para todo $a,b\in A$, tem-se $\alpha([[a]_\theta]_{\phi/\theta})\in A/\phi$ e
$$[[a]_\theta]_{\phi/\theta}=[[b]_\theta]_{\phi/\theta} \text{ sse } [a]_\phi=[b]_\phi,$$
pelo que α é uma aplicação e é injetiva. Claramente, a aplicação α também é sobrejetiva. Além disso, para todo $n\in\mathbb{N}_0$, para todo o símbolo de operacão n-ário f e para qualquer $(a_1,\ldots,a_n)\in A^n$, tem-se
$$\begin{aligned}&\alpha(f^{(\mathcal{A}/\theta)/(\phi/\theta)}([[a_1]_\theta]_{\phi/\theta},\ldots,[[a_n]_\theta]_{\phi/\theta}))\\&\qquad=\alpha([f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta,\ldots,[a_n]_\theta)]_{\phi/\theta})\\&\qquad=\alpha([[f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)]_\theta]_{\phi/\theta})\\&\qquad=[f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)]_\phi\\&\qquad=f^{\mathcal{A}/\phi}([a_1]_\phi,\ldots,[a_n]_\phi)\\&\qquad=f^{\mathcal{A}/\phi}(\alpha([[a_1]_\theta]_{\phi/\theta}),\ldots,\alpha([[a_n]_\theta]_{\phi/\theta}))\end{aligned}$$
e, portanto, α é um isomorfismo. □

Teorema 2.4.17 (Teorema da Correspondência)**.** *Sejam $\mathcal{A}=(A;F)$ uma álgebra e $\theta\in\mathrm{Con}\,\mathcal{A}$. Então o sub-reticulado $([\theta,\nabla_A],\subseteq)$ de $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}$ e o reticulado $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta$ são isomorfos. Mais precisamente, a aplicação α de $[\theta,\nabla_A]$ em $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}/\theta$ definida por $\alpha(\phi)=\phi/\theta$, para todo $\phi\in[\theta,\nabla_A]$, é um isomorfismo de reticulados de $[\theta,\nabla_A]$ em $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}/\theta$.*

Demonstração. Atendendo ao Lema 2.4.15, α é uma aplicação. No sentido de verificar que α é injetiva, consideremos $\phi,\psi\in[\theta,\nabla_A]$ tais que $\phi\neq\psi$. Então, sem perda de generalidade, podemos assumir que existem elementos $a,b\in A$ tais que $(a,b)\in\phi\setminus\psi$. Assim, $([a]_\theta,[b]_\theta)\in(\phi/\theta)\setminus(\psi/\theta)$ e, portanto, $\alpha(\phi)\neq\alpha(\psi)$. Para provar que α é sobrejetiva, consideremos $\psi\in\mathrm{Con}\mathcal{A}/\theta$ e $\phi=\ker(\pi_\psi\circ\pi_\theta)$. Então, para quaisquer $a,b\in A$,
$$\begin{aligned}([a]_\theta,[b]_\theta)\in\phi/\theta &\text{ sse } (a,b)\in\phi\\&\text{ sse } ([a]_\theta,[b]_\theta)\in\psi,\end{aligned}$$
pelo que
$$\phi/\theta=\psi.$$
Por último, prova-se que α é um mergulho de ordem. De facto, dados $\phi,\psi\in[\theta,\nabla_A]$, tem-se
$$\begin{aligned}\phi\subseteq\psi &\text{ sse } \phi/\theta\subseteq\psi/\theta\\&\text{ sse } \alpha(\phi)\subseteq\alpha(\psi).\end{aligned}$$
□

2.5 Produtos diretos e álgebras diretamente indecomponíveis

Com os processos de construção de álgebras apresentados anteriormente, nomeadamente a formação de subálgebras, de álgebras quociente e de imagens homomorfas, não é possível obter álgebras com uma cardinalidade superior à cardinalidade da álgebra inicial, mas com o processo de construção a seguir descrito, que consiste na formação de produtos diretos, torna-se possível obter álgebras de maior complexidade.

Definição 2.5.1. *Sejam I um conjunto e $(\mathcal{A}_i)_{i\in I} = ((A_i; F_i))_{i\in I}$ uma família de álgebras de tipo (O,τ). Designa-se por* ***produto direto*** *da família $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$, e representa-se por $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$, a álgebra $(\prod_{i\in I} A_i, (f^{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i})_{f\in O})$ de tipo (O,τ) tal que, para todo $n\in\mathbb{N}_0$, para todo o símbolo de operação $f\in O_n$ e para qualquer $(f_1,\ldots,f_n)\in(\prod_{i\in I} A_i)^n$,*

$$f^{\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i}(f_1,\ldots,f_n)(i) = f^{\mathcal{A}_i}(f_1(i),\ldots,f_n(i)),\ \textit{para todo } i\in I.$$

Sejam $(A_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras do mesmo tipo. Se $I=\{i_1,\ldots,i_k\}$, o produto direto $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ é representado por $\mathcal{A}_{i_1}\times\ldots\times\mathcal{A}_{i_k}$. No caso em que $\mathcal{A}_i=\mathcal{A}$, para todo $i\in I$, $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ é representado por $\mathcal{A}^I$ e diz-se uma potência direta de $\mathcal{A}$. Se $I=\emptyset$, $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ é a álgebra trivial com universo $\{\emptyset\}$.
Para todo $j\in I$, a projeção $p_j:\prod_{i\in I} A_i\to A_j$ é um epimorfismo de $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ em $\mathcal{A}_j$. Assim, cada uma das álgebras $\mathcal{A}_j$, $j\in I$, é imagem homomorfa de $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

Teorema 2.5.2. *Sejam $(\mathcal{A}_i)_{i\in I} = ((A_i; F_i))_{i\in I}$ uma família de álgebras do mesmo tipo e $\mathcal{A}=(A;F)$ uma subálgebra de $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$. Então $\bigcap_{i\in I}(\ker p_i)_{|A} = \triangle_A$.*

Demonstração. Seja $(a,b)\in\bigcap_{i\in I}(\ker p_i)_{|A}$. Então $a,b\in A\subseteq\prod_{i\in I} A_i$ e, para todo $i\in I$, $p_i(a)=p_i(b)$. Logo $a=b$ e, portanto, $(a,b)\in\triangle_A$. Reciprocamente, é óbvio que $\triangle_A\subseteq(\ker p_i)_{|A}$, para todo $i\in I$. □

Lema 2.5.3. *Sejam $\mathcal{A}_1=(A_1;F_1)$ e $\mathcal{A}_2=(A_2;F_2)$ álgebras do mesmo tipo, $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ e $p_i: A_1\times A_2\to A_i$ a projeção-i, $i\in\{1,2\}$. Em* $\operatorname{Con}\mathcal{A}$*, tem--se*

(i) $\ker p_1\cap\ker p_2 = \triangle_{A_1\times A_2}$.

(ii) $\ker p_1\circ\ker p_2 = \ker p_2\circ\ker p_1$.

(iii) $\ker p_1\vee\ker p_2 = \nabla_{A_1\times A_2}$.

Demonstração. *(i)* Imediato a partir da proposição anterior.

(ii) Para quaisquer $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in A_1\times A_2$, tem-se

$$((a_1,a_2),(b_1,a_2))\in\ker p_2 \text{ e } ((b_1,a_2),(b_1,b_2))\in\ker p_1.$$

pelo que $((a_1,a_2),(b_1,b_2))\in\ker p_1\circ\ker p_2$. Logo $\ker p_1\circ\ker p_2=\nabla_{A_1\times A_2}$. De modo análogo prova-se que $\ker p_2\circ\ker p_1=\nabla_{A_1\times A_2}$. Assim, $\ker p_1\circ\ker p_2=\ker p_2\circ\ker p_1$.

(iii) Uma vez que $\ker p_1$ e $\ker p_2$ são permutáveis, do Teorema 2.3.14 e da prova de (ii) segue que $\ker p_1\vee\ker p_2=\nabla_{A_1\times A_2}$. □

O resultado anterior motiva a definição seguinte.

Definição 2.5.4. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra. Uma congruência θ_1 em $\mathcal{A}$ diz-se uma* ***congruência fator*** *se existe uma congruência θ_2 em $\mathcal{A}$ tal que θ_1 e θ_2 são permutáveis, $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$ e $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A$. Se θ_1 e θ_2 são congruências em $\mathcal{A}$ que satisfazem estas condições, o par (θ_1, θ_2) diz-se um* ***par de congruências fator em $\mathcal{A}$****.*

Do Lema 2.5.3 sabe-se que a álgebra resultante do produto direto de duas álgebras tem sempre duas congruências fator. Reciprocamente, se uma álgebra tem um par de congruências fator, então esta álgebra é isomorfa a um produto direto de duas álgebras.

Teorema 2.5.5. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e (θ_1, θ_2) um par de congruências fator em $\mathcal{A}$. Então a aplicação $\alpha : A \to A/\theta_1 \times A/\theta_2$ definida, para todo $a \in A$, por $\alpha(a) = ([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2})$ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2$.*

Demonstração. Claramente, α é uma aplicação.
De forma simples verifica-se que a aplicação α é injetiva: dados $a, b \in A$ tais que $\alpha(a) = \alpha(b)$, tem-se $[a]_{\theta_1} = [b]_{\theta_1}$ e $[a]_{\theta_2} = [b]_{\theta_2}$. Logo $(a, b) \in \theta_1$ e $(a, b) \in \theta_2$, donde $a = b$.
A aplicação α também é sobrejetiva. De facto, dados $a, b \in A$, existe $c \in A$ tal que $(a, c) \in \theta_1$ e $(c, b) \in \theta_2$. Então $([a]_{\theta_1}, [b]_{\theta_2}) = ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) = \alpha(c)$.
Por último, prova-se que α é um homomorfismo, uma vez que, para todo o símbolo operacional f que seja n-ário e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, tem-se

$$\begin{aligned}
\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= ([f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_{\theta_1}, [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_{\theta_2}) \\
&= (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a_1]_{\theta_1}, \ldots, [a_n]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a_1]_{\theta_2}, \ldots, [a_n]_{\theta_2})) \\
&= f^{\mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2}(([a_1]_{\theta_1}, [a_1]_{\theta_2}), \ldots, ([a_n]_{\theta_1}, [a_n]_{\theta_2})) \\
&= f^{\mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).
\end{aligned}$$

□

O resultado anterior mostra que é possível recorrer a certas congruências de uma álgebra para expressá-la como um produto direto de álgebras possívelmente mais pequenas. Porém, em certos casos só é possível expressar uma álgebra como um produto direto de álgebras se um dos fatores do produto direto for uma álgebra isomorfa à álgebra dada.

Definição 2.5.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Diz-se que $\mathcal{A}$ é* ***diretamente indecomponível*** *se sempre que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, então uma das álgebras $\mathcal{A}_1$ ou $\mathcal{A}_2$ é uma álgebra trivial.*

Exemplo 2.5.7. *Toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível.*

Corolário 2.5.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Então $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível se e só se as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$ são $\triangle_A$ e ∇_A.*

Demonstração. Imediato a partir do Lema 2.5.3 e do Teorema 2.5.5. □

O resultado seguinte estabelece que as álgebras diretamente indecomponíveis funcionam como "blocos de construção" de certas álgebras.

Teorema 2.5.9. *Toda a álgebra finita é isomorfa a um produto direto de álgebras diretamente indecomponíveis.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra finita. A prova segue por indução forte no número de elementos de A. Se $|A| = 1$, ou seja, se $\mathcal{A}$ é trivial, o resultado é imediato, uma vez que $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível. Se $\mathcal{A}$ não é trivial, admita-se, por hipótese de indução, que toda álgebra $\mathcal{B} = (B; G)$ tal que $|B| < |A|$ é isomorfa a um produto direto de álgebras diretamente indecomponíveis. Caso $\mathcal{A}$ seja diretamente indecomponível, a prova termina. Se $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível, então existem álgebras não triviais $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Uma vez que $|A_1|, |A_2| < |A|$ segue, por hipótese de indução, que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_1 & \cong & \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_m \\ \mathcal{A}_2 & \cong & \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_n, \end{array}$$

onde $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ são álgebras diretamente indecomponíveis. Consequentemente,

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_m \times \mathcal{C}_1 \times \ldots \times \mathcal{C}_n.$$

□

Seguidamente estabelecem-se dois processos de obter um homomorfismo a partir de famílias de homomorfismos.

Teorema 2.5.10. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ e $(\mathcal{B}_i)_{i\in I}$ famílias de álgebras do mesmo tipo de $\mathcal{A}$ e $(h_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ e $(g_i : \mathcal{A}_i \to \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ famílias de homomorfismos. Então*

(i) A aplicação $h : A \to \prod_{i\in I} B_i$, definida por $(h(a))(i) = h_i(a)$, para todo $a \in A$ e para todo $i \in I$, é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$.

(ii) A aplicação $g : \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$, definida por $(g(a))(i) = g_i(a(i))$, para todo $a \in \prod_{i\in I} A_i$ e para todo $i \in I$, é um homomorfismo de $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ em $\prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$.

Demonstração. (i) Para cada $i \in I$, h_i é um homomorfismo. Sejam f um símbolo operacional n-ário e $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Então, para cada $i \in I$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} (h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)))(i) & = & h_i(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ & = & f^{\mathcal{B}_i}(h_i(a_1), \ldots, h_i(a_n)) \\ & = & f^{\mathcal{B}_i}((h(a_1))(i), \ldots, (h(a_n))(i)) \\ & = & (f^{\prod_{i\in I} \mathcal{B}_i}(h(a_1), \ldots, h(a_n)))(i). \end{array}$$

Logo $h(f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)) = f^{\prod_{i\in I}\mathcal{B}_i}(h(a_1),\ldots,h(a_n))$ e $h : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I}\mathcal{B}_i$ é um homomorfismo.

(ii) Considerando em (i) $\mathcal{A} = \prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ e $h_i = g_i \circ p_i$, para todo $i \in I$, conclui-se que $g = h : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I}\mathcal{B}_i$ é um homomorfismo. □

2.6 Produtos subdiretos e álgebras subdiretamente irredutíveis

Embora toda a álgebra finita seja isomorfa a um produto direto de álgebras diretamente indecomponíveis, o mesmo não acontece para álgebras infinitas em geral; por exemplo, as álgebras de Boole numeráveis infinitas não são isomorfas a produtos diretos de álgebras de Boole diretamente indecomponíveis. Assim, as álgebras diretamente indecomponíveis não podem ser consideradas como "blocos de construção" de toda a álgebra. A necessidade de obter "blocos de construção" gerais, levou Birkhoff a considerar um tipo de produto de álgebras diferente do produto direto.

Definição 2.6.1. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras do mesmo tipo. Diz-se que a álgebra $\mathcal{A}$ é um* ***produto subdireto da família*** *$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ se $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ e, para cada $i \in I$, $p_i(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_i$.*

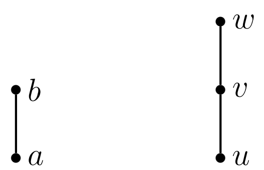
Note-se que se $I = \emptyset$, então $\mathcal{A}$ é produto subdireto de $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial.

Exemplo 2.6.2.

(1) Sejam $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras do mesmo tipo. O produto direto $\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i$ é um produto subdireto de $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$.

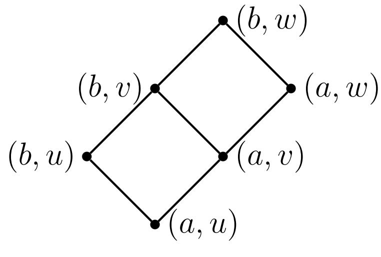
(2) Para qualquer álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ que não tenha operações nulárias, verifica-se que o conjunto $\triangle_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ é um subuniverso de $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$; representemos por $\triangle_{\mathcal{A}}$ a subálgebra de $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ com universo $\triangle_A$. Uma vez que $p_1(\triangle_A) = p_2(\triangle_A) = A$, então $\triangle_{\mathcal{A}}$ é um produto subdireto de $(\mathcal{A}_i)_{i\in\{1,2\}}$, onde $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$.

*(3) Considerando os reticulados **2** e **3**, i.e., as cadeias com dois e três elementos,*

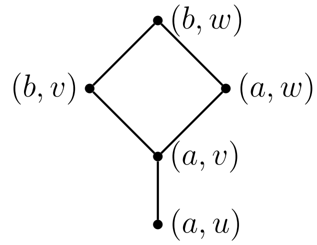


2 **3**

o seu produto direto é o reticulado representado pelo diagrama



O sub-reticulado de $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ *representado por*



é um produto subdireto de $\mathbf{2}$ *e* $\mathbf{3}$.

Definição 2.6.3. *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma álgebra e* $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ *uma família de álgebras do mesmo tipo. A um monomorfismo* $\alpha : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ *tal que* $\alpha(\mathcal{A})$ *é um produto subdireto de* $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ *dá-se a designação de* ***mergulho subdireto***.

Teorema 2.6.4. *Sejam* $\mathcal{A} = (A; F)$ *uma álgebra e* $(\theta_i)_{i\in I}$ *uma família de congruências em* $\mathcal{A}$ *tal que* $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \triangle_A$. *Então a aplicação* $\alpha : A \to \prod_{i\in I} A/\theta_i$, *definida por* $(\alpha(a))(i) = [a]_{\theta_i}$, *para todo* $a \in A$, *é um mergulho subdireto.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.5.10 sabe-se que a correspondência α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\prod_{i\in I} \mathcal{A}/\theta_i$. A aplicação α é também injetiva, pois, para quaisquer $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} \alpha(a) = \alpha(b) &\Rightarrow (\forall i \in I, [a]_{\theta_i} = [b]_{\theta_i}) \\ &\Rightarrow (\forall i \in I, (a, b) \in \theta_i) \\ &\Rightarrow (a, b) \in \textstyle\bigcap_{i\in I} \theta_i = \triangle_A \\ &\Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Então α é um monomorfismo.
A respeito de $\alpha(\mathcal{A})$ verifica-se facilmente que esta álgebra é um produto subdireto de $(\mathcal{A}/\theta_i)_{i\in I}$, uma vez que pelo Teorema 2.4.7 tem-se $\alpha(\mathcal{A}) \leq \prod_{i\in I}(\mathcal{A}/\theta_i)_{i\in I}$ e é óbvio que $p_i(\alpha(A)) = A/\theta_i$, para todo $i \in I$. □

Do teorema anterior é imediato o resultado seguinte.

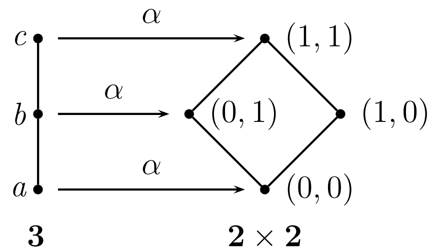
Teorema 2.6.5. *Sejam* $\mathcal{A} = (A; F)$ *uma álgebra e* $(\theta_i)_{i\in I}$ *uma família de congruências em* $\mathcal{A}$ *tal que* $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \triangle_A$. *Então* $\mathcal{A}$ *é isomorfa a um produto subdireto da família de álgebras* $(\mathcal{A}/\theta_i)_{i\in I}$.

Demonstração. Pelo teorema anterior sabe-se que a aplicação $\alpha : A \to \prod_{i\in I} A/\theta_i$, definida por $(\alpha(a))(i) = [a]_{\theta_i}$, para todo $a \in A$, é um monomorfismo. Logo $\mathcal{A} \cong \alpha(\mathcal{A})$. Pelo mesmo teorema sabe-se que $\alpha(\mathcal{A})$ é um produto subdireto da família de álgebras $(\mathcal{A}/\theta_i)_{i\in I}$. □

Em analogia com a definição de álgebras diretamente indecomponíveis, pretendemos considerar álgebras que não possam ser expressas como produto subdireto de álgebras mais pequenas, com excepção dos casos triviais.

Definição 2.6.6. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se* ***subdiretamente irredutível*** *se, para qualquer família $(\mathcal{A})_{i\in I}$ de álgebras do mesmo tipo de $\mathcal{A}$ e para qualquer mergulho subdireto $\alpha : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$, existe $i \in I$ tal que $p_i \circ \alpha$ é um isomorfismo.*

Exemplo 2.6.7. *A cadeia com três elementos $\mathbf{3}$ não é subdiretamente irredutível. De facto, considerando o monomorfismo α de $\mathbf{3}$ em $\mathbf{2}\times\mathbf{2}$ definido da forma a seguir indicada*



verifica-se que este monomorfismo é um mergulho subdireto, pois a sua imagem é um produto subdireto de $(\mathcal{A}_i)_{i\in\{1,2\}}$, onde $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathbf{2}$, mas nem $p_1 \circ \alpha$ nem $p_2 \circ \alpha$ é um monomorfismo.

Uma caracterização útil das álgebras subdiretamente irredutíveis, e que é geralmente usada para identificar estas álgebras, é dada pelo resultado seguinte.

Teorema 2.6.8. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é trivial ou $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo. No segundo caso, o elemento mínimo de $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ é $\bigcap(\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\})$ e é uma congruência principal.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra não trivial tal que $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ não tem elemento mínimo. Então $I = \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\} \neq \emptyset$ e $\bigcap(\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}) = \triangle_A$. Pelo Teorema 2.6.4, a aplicação $\alpha : A \to \prod_{\theta\in I} A/\theta$ definida por $(\alpha(a))(\theta) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$, é um mergulho subdireto. Para cada $\theta \in I$, o epimorfismo canónico $\pi_\theta : A \to A/\theta$ não é injetivo, pelo que, para todo $\theta \in I$, $p_\theta \circ \alpha$ não é um isomorfismo, pois $p_\theta \circ \alpha = \pi_\theta$. Por conseguinte $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.
$(\Leftarrow)$ Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ uma família de álgebras do mesmo tipo de $\mathcal{A}$ e $\alpha : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ um mergulho subdireto. Se $\mathcal{A}$ é trivial, então, para cada $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ é trivial. Logo $p_i \circ \alpha : A \to A_i$ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}_i$, para cada $i \in I$. Caso $\mathcal{A}$ não seja trivial, admitamos que $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo θ. Neste caso tem-se $\theta = \bigcap(\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}) \neq \triangle_A$. Seja $(a, b) \in \theta$ tal que $a \neq b$. Então se $\alpha : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ é um mergulho subdireto, tem-se $(\alpha(a))(i) \neq (\alpha(b))(i)$, para algum $i \in I$, donde $(p_i \circ \alpha)(a) \neq (p_i \circ \alpha)(b)$ e, por conseguinte, $(a, b) \notin \ker(p_i \circ \alpha)$. Assim, $\theta \nsubseteq \ker(p_i \circ \alpha)$ e, atendendo a que θ é o mínimo de $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$, segue que $\ker(p_i \circ \alpha) = \triangle_A$. Então $p_i \circ \alpha$ é um monomorfismo e, uma vez que $p_i \circ \alpha$ também é um epimorfismo, tem-se que $p_i \circ \alpha$ é um isomorfismo.
Logo, se $\mathcal{A}$ é trivial ou $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo, a álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível.

Se $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo θ, então θ é uma congruência principal. De facto, como $\theta \neq \triangle_A$, existem $a, b \in A$ tais que $a \neq b$ e $(a, b) \in \theta$, donde $\theta(a, b) \subseteq \theta$ e, por conseguinte, $\theta = \theta(a, b)$. $\square$

Uma álgebra diretamente indecomponível nem sempre é uma álgebra subdiretamente irredutivel (basta considerar como exemplo as cadeias com exatamente três elementos), mas o recíproco verifica-se necessariamente.

Teorema 2.6.9. *Toda a álgebra subdiretamente irredutível é diretamente indecomponível.*

Demonstração. Do Teorema 2.6.8 segue que as únicas congruências fator de uma álgebra subdiretamente irredutível $\mathcal{A} = (A; F)$ são as congruências $\triangle_A$ e ∇_A. Logo, pelo Corolário 2.5.8, $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível. □

Teorema 2.6.10 (Birkhoff)**.** *Toda a álgebra é isomorfa a um produto subdireto de álgebras subdiretamente irredutíveis.*

Demonstração. Uma vez que as álgebras triviais são subdiretamente irredutíveis, apenas necessitamos de considerar o caso de álgebras não triviais $\mathcal{A} = (A; F)$. Dados $a, b \in A$ tais que $a \neq b$, sabe-se, pelo Lema de Zorn, que existe uma congruência $\theta_{a,b} \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ que é maximal no que respeita à propriedade $(a, b) \notin \theta_{a,b}$. Então $\theta(a, b) \vee \theta_{a,b}$ é a menor congruência de $[\theta_{a,b}, \nabla_A] \setminus \{\theta_{a,b}\}$ e pelos teoremas 2.4.17 e 2.6.8 segue que a álgebra $\mathcal{A}/\theta_{a,b}$ é subdiretamente irredutível. Uma vez que $\bigcap\{\theta_{a,b} \mid a, b \in A, a \neq b\} = \triangle_A$, resulta do Lema 2.6.4 que $\mathcal{A}$ é produto subdireto da família de álgebras subdiretamente irredutíveis $(\mathcal{A}/\theta_{a,b})_{a\neq b}$. □

Como consequência imediata do teorema anterior tem-se o resultado seguinte.

Corolário 2.6.11. *Toda a álgebra finita é produto subdireto de um número finito de álgebras subdiretamente irredutíveis.*

Na definição seguinte consideramos um tipo especial de álgebras subdiretamente irredutíveis.

Definição 2.6.12. *Uma álgebra $\mathcal{A}$ diz-se **simples** se $\mathrm{Con}\mathcal{A} = \{\triangle_A, \nabla_A\}$. Uma congruência θ numa álgebra $\mathcal{A}$ diz-se **maximal** se o intervalo $[\theta, \nabla_A]$ tem exatamente dois elementos.*

Teorema 2.6.13. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Então a álgebra $\mathcal{A}/\theta$ é simples se e só se θ é uma congruência maximal em $\mathcal{A}$ ou $\theta = \nabla_A$.*

Demonstração. O resultado é imediato das definições anteriores, uma vez que pelo Teorema 2.4.17 se tem $\mathrm{Con}\,\mathcal{A}/\theta \cong [\theta, \nabla_A]$. □

2.7 Operadores e variedades

A formação de subálgebras, imagens homomorfas, produtos diretos e produtos subdiretos são as principais ferramentas que usamos na construção de álgebras. Um tema importante em álgebra universal é o estudo de classes de álgebras do mesmo tipo que sejam fechadas para estas construções.

A uma função que associa a uma classe de álgebras (todas do mesmo tipo) uma classe de álgebras (do mesmo tipo) damos a designação de ***operador***.

Dados operadores O_1 e O_2, escreve-se $O_1 \leq O_2$ se $O_1(\mathbf{K}) \subseteq O_2(\mathbf{K})$, para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras. Os operadores podem ser compostos dando origem a novos operadores. Dados operadores O_1 e O_2 e uma classe $\mathbf{K}$ de álgebras, escreve-se $O_1O_2(\mathbf{K})$ em vez de $O_1(O_2(\mathbf{K}))$ e ${O_1}^2(\mathbf{K})$ em vez de $O_1(O_1(\mathbf{K}))$. Um operador O diz-se ***idempotente*** se $O^2 = O$.

Nesta secção o estudo é dedicado a operadores que estão relacionados com as construções de álgebras referidas anteriormente. Dada uma classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, representamos por:

- $S(\mathbf{K})$ a classe de todas as subálgebras de elementos de $\mathbf{K}$;
- $H(\mathbf{K})$ a classe de todas as imagens homomorfas de elementos de $\mathbf{K}$;
- $I(\mathbf{K})$ a classe de todas as imagens isomorfas de elementos de $\mathbf{K}$;
- $P(\mathbf{K})$ a classe de todos os produtos diretos de famílias não vazias de elementos de $\mathbf{K}$;
- $P_S(\mathbf{K})$ a classe de todos os produtos subdiretos de famílias não vazias de elementos de $\mathbf{K}$.

Para cada um dos operadores O definidos anteriormente, assumimos que $O(\emptyset) = \emptyset$ e verifica-se o seguinte:

- $\mathbf{K} \subseteq O(\mathbf{K})$, para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo;
- se $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ são classes de álgebras do mesmo tipo tais que $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2$, então $O(\mathbf{K}_1) \subseteq O(\mathbf{K}_2)$.

O resultado seguinte estabelece mais algumas propriedades a respeito destes operadores.

Teorema 2.7.1. *Seja* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras. Então:*

(i)	$SH(\mathbf{K}) \subseteq HS(\mathbf{K})$;	*(ii)*	$PS(\mathbf{K}) \subseteq SP(\mathbf{K})$;	*(iii)*	$PH(\mathbf{K}) \subseteq HP(\mathbf{K})$;
(iv)	$IS(\mathbf{K}) = SI(\mathbf{K})$;	*(v)*	$IH(\mathbf{K}) = HI(\mathbf{K})$;	*(vi)*	$H^2(\mathbf{K}) = H(\mathbf{K})$;
(vii)	$I^2(\mathbf{K}) = I(\mathbf{K})$;	*(viii)*	$S^2(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$;	*(ix)*	$(IP)^2(\mathbf{K}) = IP(\mathbf{K})$.

Demonstração. Mostramos as alíneas *(i), (ii) e (iii)*, ficando a prova das restantes alíneas ao cuidado do leitor.

(i) Seja $\mathcal{A} = (A; F) \in SH(\mathbf{K})$. Então existe $\mathcal{B} \in \mathbf{K}$ e um epimorfimo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$. Como α é sobrejetiva, então $\alpha^{\leftarrow}(A)$ é um conjunto não vazio. Seja $\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{A})$ a álgebra pré-imagem de $\mathcal{A}$. Uma vez que $\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{A}) \leq \mathcal{B}$ e $\alpha(\alpha^{\leftarrow}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$, então $\mathcal{A} \in HS(\mathbf{K})$.

(ii) Seja $\mathcal{A} = (A; F) \in PS(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$, onde $\mathcal{A}_i \leq \mathcal{B}_i$, para algum $\mathcal{B}_i \in \mathbf{K}$. Uma vez que $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i \leq \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i$, então $\mathcal{A} \in SP(\mathbf{K})$.

(iii) Seja $\mathcal{A} = (A; F) \in PH(\mathbf{K})$. Então existem álgebras $\mathcal{B}_i \in \mathbf{K}$ e epimorfismos $\alpha_i : \mathcal{B}_i \to \mathcal{A}_i$ tais que $\mathcal{A} = \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Facilmente se verifica que a aplicação $\alpha : \prod_{i\in I} \mathcal{B}_i \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ definida por $(\alpha(a))(i) = \alpha_i(b(i))$ é um epimorfismo. Logo $\mathcal{A} \in HP(\mathbf{K})$. □

Definição 2.7.2. *Uma classe* $\mathbf{K}$ *de álgebras do mesmo tipo diz-se **fechada** para um operador* O *se* $O(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{K}$.

Teorema 2.7.3. *Seja* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras. Se a classe* $\mathbf{K}$ *é fechada para um dos operadores* $O \in \{H, I, S, P, P_S\}$*, então* $O(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$.

Demonstração. Para qualquer $O \in \{H, I, S, P, P_S\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, tem-se $\mathbf{K} \subseteq O(\mathbf{K})$. Logo, se $\mathbf{K}$ é fechada para o operador O, é imediato que $O(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$. □

Definição 2.7.4. *Seja* $\mathbf{K}$ *uma classe não vazia de álgebras do mesmo tipo. Diz-se que* $\mathbf{K}$ *é uma **variedade** se é fechada para a formação de imagens homomorfas, subálgebras e produtos diretos.*

Atendendo a que a interseção de uma familia não vazia de variedades de álgebras do mesmo tipo é uma variedade e que a classe formada por todas as álgebras do mesmo tipo é uma variedade, conclui-se que, para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras do mesmo tipo, existe a menor variedade que contém $\mathbf{K}$.

Definição 2.7.5. *Seja* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras do mesmo tipo. Designa-se por **variedade gerada por*** $\mathbf{K}$*, e representa-se por* $V(\mathbf{K})$*, a menor variedade que contém* $\mathbf{K}$.

Teorema 2.7.6 (Teorema de Tarski)**.** *Seja* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras do mesmo tipo. Então* $V(\mathbf{K}) = HSP(\mathbf{K})$.

Demonstração. Por um lado, como $\mathbf{K} \subseteq V(\mathbf{K})$ e $V(\mathbf{K})$ é uma variedade, tem-se

$$HSP(\mathbf{K}) \subseteq HSP(V(\mathbf{K})) = HS(V(\mathbf{K})) = HV(\mathbf{K}) = V(\mathbf{K}).$$

Por outro lado, atendendo ao Teorema 2.7.1, verifica-se que

- $HHSP(\mathbf{K}) = HSP(\mathbf{K})$;
- $SHSP(\mathbf{K}) \subseteq HSSP(\mathbf{K}) = HSP(\mathbf{K})$;
- $PHSP(\mathbf{K}) \subseteq HPSP(\mathbf{K}) \subseteq HSPP(\mathbf{K}) \subseteq HSIPIP(\mathbf{K}) = HSIP(\mathbf{K}) \leq HSHP(\mathbf{K}) \leq HHSP(\mathbf{K}) = HSP(\mathbf{K})$.

Logo $HSP(\mathbf{K})$ é uma variedade. Por conseguinte, como $\mathbf{K} \subseteq HSP(\mathbf{K})$, conclui-se que $V(\mathbf{K}) \subseteq HSP(\mathbf{K})$. □

Considerando o conceito de variedade, o Teorema de Birkhoff (Teorema 2.6.10) pode ser formulado do modo seguinte.

Teorema 2.7.7. *Seja $\mathbf{K}$ uma variedade. Então $\mathbf{K}$ é a classe das álgebras que são isomorfas a algum produto subdireto de álgebras subdiretamente irredutíveis de $\mathbf{K}$.*

Corolário 2.7.8. *Toda a variedade é gerada pelas suas álgebras subdiretamente irredutíveis.*

2.8 Álgebras livres, termos, identidades, Teorema de Birkhoff

A maioria das álgebras que se estudam são definidas por operações que satisfazem determinadas identidades. Assim, torna-se importante averiguar qual a relação existente entre as classes de álgebras caracterizadas por uma coleção de identidades e as classes de álgebras fechadas para os processos de construção mencionados nas secções anteriores, nomeadamente a formação de subálgebras, a formação de imagens homomorfas e a formação de produtos diretos. No sentido de se fazer tal estudo, começamos por introduzir os conceitos de álgebras livres e de termos, conceitos estes que serão posteriormente utilizados para definir identidades e estabelecer a ligação existente entre a abordagem algébrica e a abordagem equacional adotada no estudo das álgebras.

Álgebras livres

Definição 2.8.1. *Sejam $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras de tipo (O, τ), $\mathcal{U} = (U; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) e X um subconjunto de U. Diz-se que a álgebra $\mathcal{U}$ é **livre para $\mathbf{K}$ sobre** X se:*

(i) $\mathcal{U}$ é gerada por X;

(ii) para cada álgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ e para cada aplicação $\alpha : X \to A$, existe um homomorfismo $\overline{\alpha} : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ que estende α (i.e., $\overline{\alpha}(x) = \alpha(x)$, para todo $x \in X$).

*O conjunto X diz-se um conjunto de **geradores livres** de $\mathcal{U}$ e a álgebra $\mathcal{U}$ diz-se **livremente gerada por** X.*

Lema 2.8.2. *Sejam* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O, τ)*,* $\mathcal{U} = (U; F)$ *uma álgebra de tipo* (O, τ) *e* X *um subconjunto de* U*. Se a álgebra* $\mathcal{U}$ *é livre para* $\mathbf{K}$ *sobre* X*, então, para qualquer álgebra* $\mathcal{A} = (A; G) \in \mathbf{K}$ *e para qualquer aplicação* $\alpha : X \to A$*, existe um único homomorfismo* $\overline{\alpha} : \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ *que estende* α*.*

Demonstração. A existência de $\overline{\alpha}$ é garantida pelo facto de $\mathcal{U}$ ser livre para $\mathbf{K}$ sobre X. A unicidade de $\overline{\alpha}$ resulta de $\mathcal{U}$ ser gerada por X. □

Teorema 2.8.3. *Sejam* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O, τ)*,* $\mathcal{U}_1 = (U_1; F)$*,* $\mathcal{U}_2 = (U_2; G)$ *álgebras de* $\mathbf{K}$ *e* X *e* Y *subconjuntos de* U_1 *e* U_2*, respetivamente. Se* $\mathcal{U}_1$ *e* $\mathcal{U}_2$ *são álgebras livres para* $\mathbf{K}$ *sobre* X *e* Y*, respetivamente, e* $|X| = |Y|$*, então* $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$*.*

Demonstração. Assumindo que $|X| = |Y|$, existe uma bijeção $h : X \to Y$. Por conseguinte

$$\begin{array}{rccc} h_1 : & X & \to & U_2 \\ & x & \mapsto & h(x) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} h_2 : & Y & \to & U_1 \\ & y & \mapsto & h^{-1}(y) \end{array}$$

são aplicações. Uma vez que $\mathcal{U}_2 \in \mathbf{K}$ e $\mathcal{U}_1$ é uma álgebra livre para $\mathbf{K}$ sobre X, existe um homomorfismo $\overline{h_1} : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ que estende h_1. De forma análoga, uma vez que $\mathcal{U}_1 \in \mathbf{K}$ e $\mathcal{U}_2$ é uma álgebra livre para $\mathbf{K}$ sobre Y, existe um homomorfismo $\overline{h_2} : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$ que estende h_2. Assim, $\overline{h_2} \circ \overline{h_1}$ é um endomorfismo de $\mathcal{U}_1$ que estende a aplicação identidade id_X. Obviamente, $id_{\mathcal{U}_1}$ também é um homomorfismo que estende id_X. Então, pelo Lema 2.8.2 segue que $\overline{h_2} \circ \overline{h_1} = id_{\mathcal{U}_1}$. De forma análoga, conclui-se que $\overline{h_1} \circ \overline{h_2} = id_{\mathcal{U}_2}$. Por conseguinte $\overline{h_1}$ e $\overline{h_2}$ são isomorfismos e, portanto, $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$. □

Termos

Definição 2.8.4. *Sejam* (O, τ) *um tipo algébrico e* X *um conjunto tal que* $X \cap O = \emptyset$*. Aos objetos de* X *dá-se a designação de* ***variáveis****. O* ***conjunto*** $T(X)$ ***dos termos de tipo*** (O, τ) ***sobre*** X *é o menor conjunto tal que:*

(i) $X \cup O_0 \subseteq T(X)$*.*

(ii) Se $(t_1, \ldots, t_k) \in (T(X))^k$ *e* f *é um símbolo de operação de* O *de aridade* k*, onde* $k \in \mathbb{N}$*, então* $f(t_1, \ldots, t_k) \in T(X)$*.*

Sejam (O, τ) um tipo algébrico e X um conjunto tal que $X \cap O = \emptyset$. Note-se que tem-se $T(X) \neq \emptyset$ se e só se $X \cup O_0 \neq \emptyset$. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $t \in T(X)$, escreve-se $t(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que as variáveis que ocorrem no termo t pertencem a $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$. Um termo $t \in T(X)$ diz-se um **termo** n**-ário de tipo** (O, τ) **sobre** X se o número de variáveis que ocorrem em t é menor ou igual a n.

Exemplo 2.8.5.
(1) Sejam $X = \{x, y, z\}$ e (O, τ) o tipo algébrico tal que O é constituído por um único símbolo de operação binário $+$. Então

$$x,\ y,\ z,\ +(x, y),\ +(y, +(x, z)),\ +(+(x, y), +(y, z))$$

são exemplos de alguns termos sobre X.

(2) Sejam $X = \{x\}$ e (O, τ) o tipo algébrico onde $O = \{+, \cdot, -\} \cup \{r\}_{r \in \mathbb{R}}$ e $\tau : O \to \mathbb{N}_0$ é definida por $\tau(+) = \tau(\cdot) = \tau(-) = 2$ e $\tau(r) = 0$, para cada $r \in \mathbb{R}$. Então o conjunto dos termos de tipo (O, τ) sobre X é

$$R[x] = \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}_0\}.$$

Para um símbolo de operação binário $\cdot$ é usual adotar a notação $t_1 \cdot t_2$ para representar o termo $\cdot(t_1, t_2)$.

Os polinómios reais de grau n, $n \in \mathbb{N}_0$, são usualmente associados a funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. A associação de termos a funções pode ser generalizada a qualquer termo.

Definição 2.8.6. *Sejam (O, τ) um tipo algébrico, X um conjunto tal que $X \cap O = \emptyset$, $X \cup O_0 \neq \emptyset$. Dado um termo n-ário $t(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$, $n \in \mathbb{N}$, e dada uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ de tipo (O, τ), define-se a função $t^{\mathcal{A}} : A^n \to A$, designada por **função termo em $\mathcal{A}$ induzida por** t, da seguinte forma:*

(1) se t é uma variável x_i, então

$$t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i,$$

para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$.

(2) se t é da forma $f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n))$, onde f é um símbolo de operação de O de aridade k, $k \in \mathbb{N}_0$, e $t_1^{\mathcal{A}}$, ..., $t_k^{\mathcal{A}}$ são as funções termo em $\mathcal{A}$ induzidas pelos termos n-ários $t_1, \ldots, t_k \in T(X)$, então

$$t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}({t_1}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, {t_k}^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)),$$

para quaisquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$.

O resultado seguinte, cuja prova fica como exercício, estabelece algumas propriedades importantes relativas a funções termo; em particular, estabelece que as funções termo se comportam de forma análoga às operações fundamentais de uma álgebra no que respeita a congruências e a homomorfismos.

Teorema 2.8.7. *Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ), X um conjunto tal que $X \cap O = \emptyset$ e $X \cup O_0 \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$ e $t^{\mathcal{A}}$ a função termo em $\mathcal{A}$ induzida por um termo n-ário $t \in T(X)$.*

(i) *Se* $\mathcal{B} = (B; G)$ *é uma subálgebra de* $\mathcal{A}$*, então* $t^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$*, para quaisquer* $b_1, \ldots, b_n \in B$.

(ii) *Se* $\theta \in \operatorname{Con} \mathcal{A}$ *e* $(a_i, b_i) \in \theta$*, para qualquer* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, então*

$$t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)\, \theta\, t^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

(iii) *Se* $\mathcal{B} = (B; G)$ *é uma álgebra de tipo* (O, τ) *e* $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *é um homomorfismo, então*

$$\alpha(t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = t^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)),$$

para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$.

Dado um tipo algébrico (O, τ) e um conjunto X tal que $X \cap Y = \emptyset$, define-se de forma natural uma álgebra de tipo (O, τ) que tem como universo o conjunto de termos $T(X)$.

Definição 2.8.8. *Sejam* (O, τ) *um tipo algébrico e* X *um conjunto tal que* $X \cap O = \emptyset$ *e* $X \cup O_0 \neq \emptyset$*. Designa-se por **álgebra dos termos de tipo*** (O, τ) ***sobre*** X*, e representa-se por* $\mathcal{T}(X)$*, a álgebra* $\mathcal{T}(X) = (T(X); (f^{\mathcal{T}(X)})_{f \in O})$ *onde, para qualquer símbolo de operação* $f \in O$ *de aridade* k*,* $k \in \mathbb{N}_0$*,* $f^{\mathcal{T}(X)} : T(X)^k \to T(X)$ *é a operação definida por*

$$f^{\mathcal{T}(X)}(t_1, \ldots, t_k) = f(t_1, \ldots, t_k),$$

para qualquer $(t_1, \ldots, t_k) \in (T(X))^k$.

A álgebra $\mathcal{T}(X)$ dos termos de tipo (O, τ) sobre um conjunto X é gerada por X e é exemplo de uma álgebra livre sobre a classe de todas as álgebras de tipo (O, τ).

Teorema 2.8.9. *Sejam* (O, τ) *um tipo algébrico,* $\mathbf{K}_{(O,\tau)}$ *a classe de todas as álgebras de tipo* (O, τ) *e* X *um conjunto tal que* $X \cap O = \emptyset$ *e* $X \cup O_0 \neq \emptyset$*. Então a álgebra* $\mathcal{T}(X)$ *é livre para* $\mathbf{K}_{(O,\tau)}$ *sobre* X.

Demonstração. Já foi observado anteriormente que X gera $\mathcal{T}(X)$. Também se prova que, para cada álgebra $\mathcal{A} = (A; F) \in \mathbf{K}_{(O,\tau)}$ e para cada função $\alpha : X \to A$, existe um homomorfismo $\overline{\alpha} : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{A}$ que estende α. De facto, é simples verificar que a aplicação $\overline{\alpha} : T(X) \to A$ definida recursivamente por

(i) $\overline{\alpha}(x) = \alpha(x)$, para todo $x \in X$,

(ii) $\overline{\alpha}(f(t_1, \ldots, t_k)) = f^{\mathcal{A}}(\overline{\alpha}(t_1), \ldots, \overline{\alpha}(t_k))$, para qualquer simbolo de operação f de O de aridade $k \in \mathbb{N}_0$ e qualquer $(t_1, \ldots, t_n) \in (T(X))^k$,

é um homomorfismo de $\mathcal{T}(X)$ em $\mathcal{A}$ que estende α. □

Corolário 2.8.10. *Sejam* (O, τ) *um tipo algébrico,* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O, τ) *e* X *um conjunto tal que* $X \cap O = \emptyset$ *e* $X \cup O_0 \neq \emptyset$*. Então a álgebra* $\mathcal{T}(X)$ *é livre para* $\mathbf{K}$ *sobre* X.

A álgebra $\mathcal{T}(X)$ dos termos de tipo (O,τ) sobre um conjunto X é, a menos de isomorfismo, determinada por $|X|$.

Teorema 2.8.11. *Sejam (O,τ) um tipo algébrico e X e Y conjuntos tais que $X\cap O=\emptyset$, $Y\cap O=\emptyset$, $X\cup O_0\neq\emptyset$, $Y\cup O_0\neq\emptyset$ e $|X|=|Y|$. Então $\mathcal{T}(X)\cong\mathcal{T}(Y)$.*

Demonstração. Consequência imediata dos teoremas 2.8.3 e 2.8.9. □

Dada uma classe $\mathbf{K}$ de álgebras de tipo (O,τ) e dado um conjunto X tal que $X\cap O=\emptyset$ e $X\cup O_0\neq\emptyset$, define-se

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathbf{K}}(X) &= \{\phi\in \operatorname{Con}\mathcal{T}(X)\mid \mathcal{T}(X)/\phi\in IS(\mathbf{K})\}\\ &= \{\ker\varphi\mid \varphi:\mathcal{T}(X)\to\mathcal{A} \text{ é um homomorfismo, para algum } \mathcal{A}\in\mathbf{K}\}\end{aligned}$$

e

$$\theta_{\mathbf{K}}(X)=\bigcap\Phi_{\mathbf{K}}(X).$$

Teorema 2.8.12. *Sejam $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras de tipo (O,τ) e X um conjunto tal que $X\cap O=\emptyset$ e $X\cup O_0\neq\emptyset$. Então $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ é uma álgebra livre para $\mathbf{K}$ sobre $X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$.*

Demonstração. Facilmente se verifica que a álgebra $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ é gerada por $X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$. Resta mostrar que, para cada álgebra $\mathcal{A}=(A;F)\in\mathbf{K}$ e para cada aplicação $\alpha: X/\theta_{\mathbf{K}}(X)\to A$, existe um homomorfismo $\overline{\alpha}$ de $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ em $\mathcal{A}$ que estende α. Para tal, considere-se a aplicação natural $\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}: X\to X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$, definida por $\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}(x)=[x]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}$, para cada $x\in X$. Então $\alpha\circ\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}$ é uma aplicação de X em A. Como $\mathcal{T}(X)$ é uma álgebra livre para $\mathbf{K}$ sobre X, existe um homomorfismo $\beta:\mathcal{T}(X)\to\mathcal{A}$ que estende $\alpha\circ\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}$. Atendendo à definição de $\theta_{\mathbf{K}}(X)$, é imediato que $\theta_{\mathbf{K}}(X)\subseteq\ker\beta$ (pois $\ker\beta\in\Phi_{\mathbf{K}}(X)$). A função $\overline{\alpha}: T(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)\to A$ definida por $\overline{\alpha}([t]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)})=\beta(t)$ é um homomorfismo de $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ em $\mathcal{A}$ tal que $\overline{\alpha}\circ\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}=\beta$. Além disso, para todo $[t]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}\in X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$,

$$\begin{aligned}\overline{\alpha}([t]_{\theta_{\mathbf{K}(X)}}) &= \beta(t)\\ &= \alpha\circ\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}(t)\\ &= \alpha([t]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)})\end{aligned}$$

e, portanto, $\overline{\alpha}$ estende α. Desta forma, ficou provado que $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ é uma álgebra livre para $\mathbf{K}$ sobre $X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$. □

Definição 2.8.13. *Sejam $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras de tipo (O,τ), X um conjunto de variáveis tal que $X\cap O=\emptyset$, $X\cup O_0\neq\emptyset$ e $\theta_{\mathbf{K}}(X)$ a congruência em $\mathcal{T}(X)$ dada por*

$$\theta_{\mathbf{K}}(X)=\bigcap\{\phi\in\operatorname{Con}\mathcal{T}(X)\mid T(X)/\phi\in IS(\mathbf{K})\}.$$

*À álgebra $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ dá-se a designação de **álgebra $\mathbf{K}$-livre** sobre $X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$.*

Observe-se que:

(1) Dada uma classe de álgebras $\mathbf{K}$ de tipo (O, τ) e dado um conjunto X tal que $X \cap O = \emptyset$, a álgebra $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ existe se e só se a álgebra $\mathcal{T}(X)$ existe, ou seja, $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ existe se e só se $X \cup O_0 \neq \emptyset$.

(2) Se $\mathbf{K}$ é uma classe de álgebras do mesmo tipo (O, τ) tal que $\mathbf{K} = \emptyset$ ou $\mathbf{K}$ tem apenas álgebras triviais e X é um conjunto tal que a álgebra $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ existe, então a álgebra $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ é uma álgebra trivial, uma vez que $\theta_{\mathbf{K}}(X) = \nabla_{T(X)}$.

(3) Se $\mathbf{K}$ é uma classe de álgebras do tipo (O, τ) que tem uma álgebra não trivial $\mathcal{A}$ e X é um conjunto tal que $\mathcal{T}(X)$ existe, então $X \cap [x]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)} = \{x\}$, uma vez que elementos distintos x, y de X podem ser separados por algum homomorfismo $\alpha : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{A}$; neste caso, tem-se $|X/\theta_{\mathbf{K}}(X)| = |X|$.

(4) Se $\mathbf{K}$ é a classe de todas as álgebras de um dado tipo (O, τ) e X é um conjunto tal que $\mathcal{T}(X)$ existe, então tem-se $\mathcal{T}(X) \cong \mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$, uma vez que $\theta_{\mathbf{K}}(X) = \triangle_{T(X)}$.

Dada uma classe $\mathbf{K}$ de álgebras de tipo (O, τ) e dado um conjunto X tal que $X \cap O = \emptyset$, a álgebra $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ (caso exista) é, a menos de isomorfismo, determinada por $\mathbf{K}$ e por $|X|$.

Teorema 2.8.14. *Sejam $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras de tipo $\tau = (O, \tau)$ e X e Y conjuntos de variáveis tais que $X \cap O = \emptyset$, $Y \cap O = \emptyset$, $X \cup O_0 \neq \emptyset$ e $|X| = |Y|$. Então*

$$\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \cong \mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y).$$

Demonstração. Consequência dos teoremas 2.8.3 e 2.8.12. □

Teorema 2.8.15. *Sejam $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras de tipo (O, τ) e $\mathcal{A} = (A; F) \in \mathbf{K}$. Então, para qualquer conjunto de variáveis X tal que $X \cap O = \emptyset$ e $|X| \geq |A|$, tem-se $\mathcal{A} \in H(\{\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)\})$.*

Demonstração. Seja X um conjunto de variáveis tal que $X \cap O = \emptyset$, $X \cup O_0 \neq \emptyset$ e $|X| \geq |A|$. Então $|X/\theta_{\mathbf{K}}(X)| \geq |A|$, pelo que é possível definir uma aplicação sobrejetiva de $X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ em A; seja $\alpha : X/\theta_{\mathbf{K}}(X) \to A$ uma dessas aplicações. Uma vez que $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ é uma álgebra livre para $\mathbf{K}$ sobre $X/\theta_{\mathbf{K}}(X)$, existe um homomorfismo $\overline{\alpha} : \mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \to \mathcal{A}$ que estende α. Logo $\mathcal{A} \in H(\{\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)\})$. □

Lema 2.8.16. *Sejam $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras de tipo (O, τ) e X um conjunto de variáveis tal que $X \cap O = \emptyset$ e $X \cup O_0 \neq \emptyset$. Então $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \in ISP(\mathbf{K})$.*

Demonstração. Sejam $S = \{\phi \in \operatorname{Con}\mathcal{T}(X) \mid \mathcal{T}(X)/\phi \in IS(\mathbf{K})\}$,

$$\mathcal{B} = \prod_{\phi \in S} \mathcal{T}(X)/\phi$$

e

$$\alpha : T(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \to \prod_{\phi \in S} T(X)/\phi$$

a função definida por

$$\alpha([t]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)})(\phi) = [t]_\phi,$$

para cada $\phi \in S$ e para cada $t \in T(X)$. Facilmente se verifica que α é um monomorfismo de $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$ em $\mathcal{B}$. Logo $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \cong \alpha(\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X))$. Então, uma vez que $\alpha(\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X))$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \in PIS(\mathbf{K})$, tem-se que $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \in ISPIS(\mathbf{K})$. Por conseguinte do Teorema 2.7.1 segue que $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \in ISP(\mathbf{K})$. □

Identidades, Teorema de Birkhoff

Um dos mais conhecidos teoremas de Birkhoff estabelece que as classes de álgebras definidas por identidades são precisamente as classes de álgebras que são fechadas para a formação de imagens homomorfas, subálgebras e produtos diretos. Nesta secção estudamos identidades e a sua relação com álgebras livres, no sentido de se estabelecer o referido teorema.

Definição 2.8.17. *Sejam (O, τ) um tipo algébrico e X um conjunto de variáveis tal que $X \cap O = \emptyset$.*

(1) Uma ***identidade de tipo*** *(O,τ)* ***sobre*** *X é uma expressão da forma $p \approx q$, onde $p, q \in T(X)$. Representa-se por $\operatorname{Id}(X)$ o conjunto de todas as identidades de tipo (O, τ) sobre X.*

(2) Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ de tipo (O,τ), diz-se que ***a álgebra $\mathcal{A}$ satisfaz a identidade*** *$p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$ se, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, $p^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Neste caso, diz-se que a identidade* ***é verdadeira em $\mathcal{A}$*** *ou que se* ***verifica em $\mathcal{A}$****, e escreve-se*

$$A \models p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$$

ou, mais abreviadamente, $A \models p \approx q$.

(3) Se Σ é um conjunto de identidades, diz-se que $\mathcal{A}$ ***satisfaz*** *Σ, e escreve-se $A \models \Sigma$, se $A \models p \approx q$, para qualquer $p \approx q \in \Sigma$.*

(4) Uma classe de álgebras $\mathbf{K}$ ***satisfaz uma identidade*** *$p \approx q$, e escreve-se $\mathbf{K} \models p \approx q$, se cada uma das álgebras de $\mathbf{K}$ satisfaz $p \approx q$. Diz-se que $\mathbf{K}$* ***satisfaz um conjunto de identidades*** *Σ, e escreve-se $\mathbf{K} \models \Sigma$, se $\mathbf{K}$ satisfaz cada uma das identidades de Σ. O conjunto de todas as identidades de tipo (O,τ) sobre X que são satisfeitas por $\mathbf{K}$ é representado por $\operatorname{Id}_{\mathbf{K}}(X)$; i.e., $\operatorname{Id}_{\mathbf{K}}(X) = \{p \approx q \in \operatorname{Id}(X) : \mathbf{K} \models p \approx q\}$.*

Lema 2.8.18. *Sejam* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O,τ) *e* $p \approx q$ *uma identidade de tipo* (O,τ) *sobre um conjunto de variáveis* X *tal que* $X \cap O = \emptyset$ *e* $X \cup O_0 \neq \emptyset$. *Então* $\mathbf{K} \models p \approx q$ *se e só se para cada álgebra* $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ *e cada homomorfismo* $\alpha : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{A}$ *se tem* $\alpha(p) = \alpha(q)$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sejam $p = p(x_1,\ldots,x_n), q = q(x_1,\ldots,x_n) \in T(X)$. Suponhamos que $\mathbf{K} \models p \approx q$. Então, para qualquer álgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ e qualquer homomorfismo $\alpha : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{A}$, tem-se

$$p^{\mathcal{A}}(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) = q^{\mathcal{A}}(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n))$$

e, uma vez que

$$\begin{array}{rl} & p^{\mathcal{A}}(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) = q^{\mathcal{A}}(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) \\ \Rightarrow & \alpha(p^{\mathcal{T}(X)}(x_1,\ldots,x_n)) = \alpha(q^{\mathcal{T}(X)}(x_1,\ldots,x_n)) \\ \Rightarrow & \alpha(p(x_1,\ldots,x_n)) = \alpha(q(x_1,\ldots,x_n)), \\ \Rightarrow & \alpha(p) = \alpha(q), \end{array}$$

segue que $\alpha(p) = \alpha(q)$.

$(\Leftarrow)$ Sejam $p = p(x_1,\ldots,x_n), q = q(x_1,\ldots,x_n) \in T(X)$. Pretende-se mostrar que para qualquer $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ e quaisquer $a_1,\ldots,a_n \in A$, $p^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n) = q^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)$. Ora, considerando uma aplicação $\alpha' : X \to A$ tal que $\alpha'(x_i) = a_i$, para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, sabe-se que existe um homomorfismo $\alpha : \mathcal{T}(X) \to A$ que estende α, uma vez que $\mathcal{T}(X)$ é livre para $\mathbf{K}$ sobre X. Então $\alpha(x_i) = \alpha'(x_i) = a_i$, donde

$$\begin{array}{rcl} p^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n) & = & p^{\mathcal{A}}(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) \\ & = & \alpha(p^{\mathcal{T}(X)}(x_1,\ldots,x_n)) \\ & = & \alpha(p(x_1,\ldots,x_n)) \\ & = & \alpha(p) \\ & = & \alpha(q) \\ & = & \alpha(q(x_1,\ldots,x_n)) \\ & = & \alpha(q^{\mathcal{T}(X)}(x_1,\ldots,x_n)) \\ & = & q^{\mathcal{A}}(\alpha(x_1),\ldots,\alpha(x_n)) \\ & = & q^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n). \end{array}$$

Logo $\mathbf{K} \models p \approx q$. □

Lema 2.8.19. *Para qualquer classe* $\mathbf{K}$ *de álgebras de tipo* (O,τ), *as classes* $\mathbf{K}$, $I(\mathbf{K})$, $S(\mathbf{K})$, $H(\mathbf{K})$, $P(\mathbf{K})$ *e* $HSP(\mathbf{K})$ *satisfazem as mesmas identidades sobre qualquer conjunto de variáveis* X.

Demonstração. Claramente, $\mathbf{K}$ e $I(\mathbf{K})$ satisfazem as mesmas identidades. No que respeita às restantes classes, e uma vez que

$$\mathbf{K} \subseteq S(\mathbf{K}), \quad \mathbf{K} \subseteq H(\mathbf{K}) \quad \text{e} \quad \mathbf{K} \subseteq P(\mathbf{K}),$$

temos $\mathrm{Id}_{S(\mathbf{K})}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X)$, $\mathrm{Id}_{H(\mathbf{K})}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X)$ e $\mathrm{Id}_{P(\mathbf{K})}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X)$. No sentido de provar as inclusões contrárias, suponhamos que

$$\mathbf{K} \models p(x_1,\ldots,x_n) \approx q(x_1,\ldots,x_n).$$

Então, para qualquer álgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ e para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Assim, se $\mathcal{B}$ é subálgebra de alguma álgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$, segue que, para quaisquer $b_1, \ldots, b_n \in B \subseteq A$,

$$p^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_n),$$

donde

$$p^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)$$

e, portanto,

$$\mathcal{B} \models p \approx q.$$

Logo

$$\mathrm{Id}_{S(\mathbf{K})}(X) = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X).$$

Provemos, agora, que $\mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{H(\mathbf{K})}(X)$. Ora, se $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$, então existe um homomorfismo sobrejetivo $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$. Por conseguinte, para quaisquer $b_1, \ldots, b_n \in B$, existem $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que

$$\alpha(a_1) = b_1, \ldots, \alpha(a_n) = b_n.$$

Então, como

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n),$$

tem-se

$$\alpha(p^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \alpha(q^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)),$$

pelo que

$$p^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) = q^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Logo

$$\mathcal{B} \models p \approx q.$$

Assim,

$$\mathrm{Id}_{H(\mathbf{K})}(X) = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X).$$

Por último, consideremos $\mathcal{B} \in P(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$, para alguma família $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ de álgebras de $\mathbf{K}$. Atendendo a que, para cada $i \in I$, $\mathcal{A}_i \in \mathbf{K}$, segue que, para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$p^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)) = q^{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)),$$

donde

$$p^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)(i) = q^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)(i),$$

para todo $i \in I$ e, portanto,

$$p^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Logo

$$\mathcal{B} \models p \approx q.$$

Assim,

$$\mathrm{Id}_{P(\mathbf{K})}(X) = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X).$$

Atendendo ao que foi provado anteriormente, é imediato que $HSP(\mathbf{K})$ satisfaz as mesmas identidades que $\mathbf{K}$. $\square$

Teorema 2.8.20. *Sejam* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O, τ)*,* X *um conjunto de variáveis tal que* $X \cap O = \emptyset$*,* $X \cup O_0 \neq \emptyset$ *e* $p, q \in T(X)$*. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) $\mathbf{K} \models p \approx q$.

(ii) $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \models p \approx q$.

(iii) $(p, q) \in \theta_{\mathbf{K}}(X)$

Demonstração. Sejam $p = p(x_1, \ldots, x_n), q = q(x_1, \ldots, x_n) \in T(X)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Assumindo que $\mathbf{K} \models p \approx q$, então

$$\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \models p \approx q,$$

pois $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \in ISP(\mathbf{K})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponhamos que $\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X) \models p \approx q$. Então, para qualquer homomorfismo $\alpha : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$, $\alpha(p) = \alpha(q)$. Em particular, considerando o homomorfismo natural $\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)} : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)$, temos

$$\pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}(p) = \pi_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}(q)$$

e, portanto,

$$[p]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)} = [q]_{\theta_{\mathbf{K}}(X)}.$$

Logo $(p, q) \in \theta_{\mathbf{K}}(X)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Da definição de $\theta_{\mathbf{K}}(X)$ segue que, para qualquer álgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ e para qualquer homomorfismo $\varphi : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{A}$, $\theta_{\mathbf{K}}(X) \subseteq \ker \varphi$.
Assim, se $(p, q) \in \theta_{\mathbf{K}}(X)$, tem-se $\varphi(p) = \varphi(q)$ para qualquer homomorfismo $\varphi : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{A}$, e pelo Teorema 2.8.18 conclui-se que $\mathbf{K} \models p \approx q$. □

Corolário 2.8.21. *Sejam* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O, τ)*,* X *um conjunto de variáveis tal que* $X \cap O = \emptyset$*,* $X \cup O_0 \neq \emptyset$ *e* $p, q \in T(X)$*. Então, para qualquer conjunto de variáveis* Y *tal que* $|Y| \geq |X|$*, tem-se*

$$\mathbf{K} \models p \approx q \textit{ se e só se } \mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y) \models p \approx q.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Esta implicação é imediata, uma vez que $\mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y) \in ISP(\mathbf{K})$.

($\Leftarrow$) Consideremos um conjunto de variáveis X_0 tal que $X \subseteq X_0$ e $|X_0| = |Y|$. Então $p, q \in T(X_0)$ e

$$\mathcal{T}(X_0)/\theta_{\mathbf{K}}(X_0) \cong \mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y).$$

Consequentemente, atendendo aos teoremas 2.8.19 e 2.8.20,

$$\mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y) \models p \approx q \;\Rightarrow\; \mathcal{T}(X_0)/\theta_{\mathbf{K}}(X_0) \models p \approx q \;\Rightarrow\; \mathbf{K} \models p \approx q.$$

□

Corolário 2.8.22. *Sejam* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O,τ) *e* X *um conjunto de variáveis tal que* $X \cap O = \emptyset$, $X \cup O_0 \neq \emptyset$. *Então, para qualquer conjunto infinito de variáveis* Y, *tem-se*

$$\mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X) = \mathrm{Id}_{\{\mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y)\}}(X).$$

Demonstração. Seja $p \approx q \in \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X)$, onde $p = p(x_1,\dots,x_n)$ e $q = (x_1,\dots,x_n)$. Como $p,q \in T(\{x_1,\dots,x_n\})$ e $|\{x_1,\dots,x_n\}| \leq |Y|$, então pelo Corolário 2.8.21 tem--se que

$$\mathbf{K} \models p \approx q \text{ sse } \mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y) \models p \approx q.$$

□

Definição 2.8.23. *Dado um conjunto* Σ *de identidades de tipo* (O,τ), *define-se* $M(\Sigma)$ *como sendo a classe de todas as álgebras que satisfazem* Σ. *Uma classe* $\mathbf{K}$ *de álgebras de tipo* (O,τ) *diz-se uma* ***classe equacional*** *se existe um conjunto de identidades* Σ *tal que* $\mathbf{K} = M(\Sigma)$. *Neste caso, diz-se que a classe* $\mathbf{K}$ *é* ***definida*** *ou* ***axiomatizada*** *por* Σ.

Lema 2.8.24. *Se* $\mathbf{K}$ *é uma variedade e* X *é um conjunto infinito de variáveis, então* $\mathbf{K} = M(\mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X))$.

Demonstração. Seja $\mathbf{K}' = M(\mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X))$. Então $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}'$, pois $\mathbf{K} \models \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X)$. Logo $\mathrm{Id}_{\mathbf{K}'}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X)$. Da definição de $\mathbf{K}'$ segue a inclusão $\mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathbf{K}'}(X)$. Assim, $\mathrm{Id}_{\mathbf{K}'}(X) = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(X)$. Por conseguinte, pelo Teorema 2.8.20, $\theta_{\mathbf{K}'}(X) = \theta_{\mathbf{K}}(X)$, donde

$$\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}'}(X) = \mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X).$$

Desta última igualdade segue pelo Corolário 2.8.22 que, para qualquer conjunto de variáveis Y,

$$\mathrm{Id}_{\mathbf{K}'}(Y) = \mathrm{Id}_{\{\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}'}(X)\}}(Y) = \mathrm{Id}_{\{\mathcal{T}(X)/\theta_{\mathbf{K}}(X)\}}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathbf{K}}(Y).$$

Então, novamente pelo Teorema 2.8.20, tem-se $\theta_{\mathbf{K}'}(Y) = \theta_{\mathbf{K}}(Y)$, pelo que

$$\mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}'}(Y) = \mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y).$$

Daqui segue que $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, pois, para qualquer álgebra $\mathcal{A} \in \mathbf{K}'$ temos

$$\mathcal{A} \in H(\{\mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}'}(Y)\}),$$

para algum conjunto Y adequado, donde

$$\mathcal{A} \in H(\{\mathcal{T}(Y)/\theta_{\mathbf{K}}(Y)\}) \subseteq \mathbf{K}.$$

Uma vez que $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}'$ e $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, então $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$. □

Teorema 2.8.25 (Birkhoff)**.** *Seja* $\mathbf{K}$ *uma classe de álgebras de tipo* (O,τ). *Então* $\mathbf{K}$ *é uma classe equacional se e só se* $\mathbf{K}$ *é uma variedade.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\mathbf{K} = M(\Sigma)$, para algum conjunto de identidades Σ. Então, pelo Lema 2.8.19, $V(\mathbf{K}) \models \Sigma$. Assim, $V(\mathbf{K}) \subseteq M(\Sigma)$, e, portanto, $V(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$, i.e., $\mathbf{K}$ é uma variedade.

($\Leftarrow$) Resulta do Lema 2.8.24. $\square$

Exemplo 2.8.26.

(1) A classe $\mathbf{G}$ *dos grupos vistos como álgebras de tipo (2,1,0) é uma variedade;*

$$\mathbf{G} = M(\{x(yz) \approx (xy)z, x1_{\mathbf{G}} \approx 1_{\mathbf{G}}x \approx x, xx^{-1} \approx x^{-1}x \approx 1_{\mathbf{G}}\}).$$

(2) A classe $\mathbf{S}$ *dos semigrupos é uma variedade;*

$$\mathbf{S} = M(\{x(yz) \approx (xy)z\}).$$

(3) A classe $\mathbf{S}$ *dos semirreticulados é uma variedade;*

$$\mathbf{S} = M(\{x(yz) \approx (xy)z, xy \approx yx, xx \approx x\}).$$

(4) A classe $\mathbf{R}$ *dos reticulados é uma variedade;*

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \;&= M(\{x \wedge y \approx y \wedge x, x \vee y \approx y \vee x,\\ &\qquad x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z, x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z,\\ &\qquad x \vee (x \wedge y) \approx x, x \wedge (x \vee y) \approx x\}).\end{aligned}$$

3. Teoria de categorias

A teoria de categorias é um ramo da matemática relativamente recente e foi desenvolvido no sentido de permitir representar de forma uniforme diferentes estruturas matemáticas. A teoria de categorias permite identificar semelhanças estruturais entre diversos objetos matemáticos que à primeira vista não parecem estar relacionados, sendo assim possível formular conceitos de grande generalidade e efetuar a prova de resultados com aplicações nas mais diversas áreas da matemática e na área das ciências da computação.

3.1 Categorias

As teorias axiomáticas desempenham um papel relevante na área de matemática. Estas teorias são caracterizadas por conjuntos com uma determinada estrutura e por correspondências entre estes conjuntos que preservam a sua estrutura. O conceito de categoria generaliza estas teorias.

Definição 3.1.1. *Uma **categoria** $\mathbf{C}$ é um quíntuplo* $(\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ)$, *onde*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *é uma classe a cujos elementos se dá a designação de **objetos de** $\mathbf{C}$,*

- $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *é uma classe a cujos elementos se dá a designação de **morfismos de** $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}$-morfismos ,*

- dom *é uma função* $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *que a cada $\mathbf{C}$-morfismo f associa um objeto designado por **domínio de** f,*

- cod *é uma função* $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *que a cada $\mathbf{C}$-morfismo f associa um objeto designado por **codomínio de** f,*

- $\circ$ *é uma função*

$$\{(g, f) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \,|\, \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)\} \to \mathrm{Mor}(\mathbf{C}),$$

*designada por **composição**,*

e tal que as condições seguintes são satisfeitas:

(C1) *para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$*, a classe de morfismos de domínio* A *e codomínio* B *é um conjunto,*

(C2) *para quaisquer* $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$*, tais que* $\mathrm{cod}(f)=\mathrm{dom}(g)$*,* $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ *e* $cod(g \circ f) = cod(g)$*,*

(C3) *(morfismos identidade) para qualquer* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$*, existe* $id_A \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *tal que* $\mathrm{dom}(id_A) = A$*,* $\mathrm{cod}(id_A) = A$ *e para quaisquer* $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *tais que* $\mathrm{dom}(f) = A$ *e* $\mathrm{cod}(g) = A$*,*

$$f \circ id_A = f \quad e \quad id_A \circ g = g,$$

(C4) *(associatividade) para quaisquer* $f, g, h \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *tais que* $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ *e* $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(h)$*,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Dados objetos A e B de uma categoria $\mathbf{C}$, pode não existir qualquer morfismo de A em B (se $A \neq B$) ou podem existir vários; o **conjunto de morfismos de** A **em** B **é representado por** $\hom(A, B)$. Tem-se

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) = \bigcup_{A,B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})} \hom(A, B).$$

Da definição anterior, resulta que:

- a cada morfismo f de uma categoria $\mathbf{C}$ estão univocamente associados dois objetos $dom(f)$ e $cod(f)$. Escreve-se

$$f : A \to B \quad ou \quad A \xrightarrow{f} B$$

  para indicar que $A = dom(f)$ e $B = cod(f)$;

- a cada par de morfismos (g, f) de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ está associado um único morfismo $g \circ f \in \hom(A, C)$ designado por **composição de** g **com** f;

- a cada objeto A de uma categoria $\mathbf{C}$ está associado um único morfismo que satisfaz a condição (C3). De facto, se h e id_A são dois morfismos que satisfazem a condição (C3), então $h = h \circ id_A = id_A$. Ao morfismo id_A dá-se a designação de **morfismo identidade em** A.

Notação: Havendo necessidade de identificar a categoria à qual pertendem determinados morfismos, indexam-se os morfismos com o símbolo que designa a categoria. Por exemplo, para indicar que $\hom(A, B)$, id_A, $g \circ f$ se referem a morfismos da categoria $\mathbf{C}$, escreve-se $\hom_{\mathbf{C}}(A, B)$, $id_A^{\mathbf{C}}$, $g \circ_{\mathbf{C}} f$.

Exemplos de categorias

Apresentam-se de seguida alguns exemplos de categorias, algumas das quais associadas a estruturas matemáticas bem conhecidas.

(i) A categoria **Pfn**: Obj(**Pfn**) é a classe de todos os conjuntos. Mor(**Pfn**) é a classe de todas as funções parciais entre conjuntos. Se X e Y são conjuntos, define-se $\hom(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações parciais de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de aplicações parciais. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(ii) A categoria **Set**: Obj(**Set**) é a classe de todos os conjuntos. Mor(**Set**) é a classe de todas as funções entre conjuntos. Se X e Y são conjuntos, define-se $\hom(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de funções. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(iii) A categoria **FinSet**: Obj(**FinSet**) é a classe de todos os conjuntos finitos. Mor(**FinSet**) é a classe de todas as funções entre conjuntos finitos. Se X e Y são conjuntos finitos, define-se $\hom(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de funções. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(iv) A categoria **Sgp**: Obj(**Sgp**) é a classe de todos os semigrupos. Mor(**Sgp**) é a classe de todos os homomorfismos de semigrupos. Dados semigrupos S e U, define-se $\hom(S, U)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de semigrupo de S em U. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se S é um semigrupo, então id_S é o morfismo identidade.

(v) A categoria **Mon**: Obj(**Mon**) é a classe de todos os monóides. Mor(**Mon**) é a classe de todos os homomorfismos de monóides. Dados monóides S e T, define-se $\hom(S, T)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de S em T. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se S é um monóide, então id_S é o morfismo identidade.

(vi) A categoria **Grp**: Obj(**Grp**) é a classe de todos os grupos. Mor(**Grp**) é a classe de todos os homomorfismos de grupos. Dados grupos G e H, define-se $\hom(G, H)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de grupo de G em H. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se G é um grupo, então id_G é o morfismo identidade.

(vii) A categoria **AbGrp**: Obj(**AbGrp**) é a classe de todos os grupos abelianos. Mor(**AbGrp**) é a classe de todos os homomorfismos entre grupos abelianos. Dados grupos abelianos G e H, define-se $\hom(G, H)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de grupo de G em H. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se G é um grupo abeliano, então id_G é o morfismo identidade.

(viii) A categoria **Rng**: Obj(**Rng**) é a classe de todos os anéis. Mor(**Rng**) é a classe de todos os homomorfismos de anéis. Dados anéis A e B, define-se $\hom(A, B)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de anel de A em B. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se A é um anel, então id_A é o morfismo identidade.

(ix) A categoria $\mathbf{Vect}_K$: Obj($\mathbf{Vect}_K$) é a classe de todos os espaços vetoriais sobre um corpo K. Mor($\mathbf{Vect}_K$) é a classe de todas as transformações lineares entre espaços vetoriais. Dados espaços vetoriais U e V sobre K, $\hom(U, V)$ é o conjunto de todas as transformações lineares de U em V. A composição de morfismos é a composição usual de transformações lineares. Se V é um espaço vetorial sobre K, id_V é a transformação linear identidade.

(x) A categoria **Poset**: Obj(**Poset**) é a classe de todos os conjuntos parcialmente ordenados. Mor(**Poset**) é a classe de todas as aplicações isótonas entre conjuntos parcialmente ordenados. Dados conjuntos parcialmente ordenados P e Q, define-se $\hom(P, Q)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações isótonas de P em Q. A composição de morfismos é a composição usual de aplicações. Dado um conjunto parcialmente ordenado P, id_P é a aplicação identidade em P.

As categorias anteriores são exemplos de categorias designadas por ***categorias concretas***, isto é, tratam-se de categorias cujos objetos são conjuntos (possivelmente com algum tipo de estrutura) e cujos morfismos são funções (que eventualmente preservam a estrutura do conjunto). Além das categorias concretas, existem outras categorias, também relevantes, nas quais os objetos não têm de ser necessariamente conjuntos e os morfismos nem sempre são funções. No caso particular das categorias finitas que a seguir se definem, os objetos podem ser qualquer objeto matemático ou identidade física e os morfismos não têm de ser necessariamente funções.

(xi) A categoria **0**: É a categoria sem objetos e sem morfismos.

(xii) A categoria **1**: A categoria que tem um único objeto e um único morfismo (o morfismo identidade associado ao único objeto da categoria).

(xiii) A categoria **2**: A categoria que tem dois objetos, dois morfismos identidade e um morfismo de um objeto no outro.

(xiv) A categoria **3**: A categoria que tem três objetos (designemo-los por $\star$, $\bullet$ e $*$), três morfismos identidade e outros três morfismos $f : \star \to \bullet$, $g : \star \to *$ e $h : * \to \bullet$ tais que $f = h \circ g$.

Graficamente, as categorias **1**, **2** e **3** podem ser representadas por

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[loop above, "id_\star"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\star \arrow[loop above, "id_\star"] \arrow[rr, "f"] & & \bullet \arrow[loop above, "id_\bullet"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & * \arrow[loop above, "id_*"] \arrow[dr, "h"] & \\
\star \arrow[loop above, "id_\star"] \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & \bullet \arrow[loop above, "id_\bullet"]
\end{tikzcd}$$

(xv) Todo o conjunto X pode ser visto como uma categoria $\mathbf{Dis}(X)$: os objetos de $\mathbf{Dis}(X)$ são os elementos de X e os únicos morfismos são os morfismos identidade (um para cada elemento $x \in X$).

(xvi) Todo o grupo $\mathbf{G} = (G; \cdot, ^{-1}, 1)$ também pode ser encarado como uma categoria: o único objeto da categoria é o grupo $\mathbf{G}$; os morfismos de $\mathbf{G}$ são os elementos de G, o morfismo identidade $id_{\mathbf{G}}$ é a identidade de G e a composição de morfismos é a operação binária do grupo.

(xvii) A categoria **Rel**: Obj(**Rel**) é a classe de todos os conjuntos. Mor(**Rel**) é a classe de todas as relações binárias entre conjuntos. Dados conjuntos A e B, um morfismo de A em B é um subconjunto de $A \times B$ e, portanto, $\hom(A, B)$ é o conjunto de todas as relações binárias de A em B. Dado um conjunto A, o morfismo identidade em A é a relação identidade em A, $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$. A composição de morfismos é a composição usual de relações binárias, isto é, dadas duas relações binárias $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq C \times D$,

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times D \mid \exists\, b \in B \cap C, (a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in S\}.$$

Uma categoria $\mathbf{C}$ diz-se:

- ***pequena*** se as classes Obj($\mathbf{C}$) e Mor($\mathbf{C}$) são conjuntos;
- ***magra*** se para quaisquer $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, $|\hom_{\mathbf{C}}(A, B)| \leq 1$;
- ***discreta*** se os únicos morfismos de $\mathbf{C}$ são os morfismos identidade.

Exemplo 3.1.2.
(1) Dado um conjunto X, a categoria $\mathbf{Dis}(X)$ é discreta e magra.

(2) As categorias $\mathbf{1}$ e $\mathbf{2}$ são exemplos de categorias pequenas. O monóide $(\mathbb{N}; \cdot, 1)$, visto como uma categoria, também é exemplo de uma categoria pequena.

3.2 Diagramas

A descrição de certas categorias e a prova de propriedades sobre objetos e morfismos de uma dada categoria pode tornar-se extremamente complexa. No sentido de facilitar tais descrições e a prova de determinados argumentos a respeito de categorias, é usual o recurso a representações gráficas designadas por diagramas.

Um **diagrama** numa categoria $\mathbf{C}$ é um grafo orientado cujos vértices representam objetos da categoria e cujas arestas orientadas representam morfismos da mesma categoria. Se uma aresta representa um morfismo com domínio A e codomínio B, então o vértice origem e o vértice destino da aresta representam, respetivamente, os objetos A e B. Os vértices e as arestas do diagrama podem ser identificados, respetivamente, pelos nomes dos objetos e pelos nomes dos morfismos aos quais estão associados.

Um diagrama pode ser usado para representar uma categoria ou pode representar apenas uma parte dos objetos e dos morfismos que definem a categoria.

Por exemplo, o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & C \arrow[loop below, "id_C"] \arrow[r, "h"'] & D \arrow[loop right, "id_D"]
\end{tikzcd}$$

representa uma categoria com quatro objetos e dez morfismos. Note-se que, para cada objeto $X \in \{A, B, C, D\}$, existe um morfismo id_X e, para quaisquer morfismos $s \in \hom(X, Y)$ e $t \in \hom(Y, Z)$, com $X, Y, Z \in \{A, B, C, D\}$, existe um morfismo $t \circ s \in \hom(X, Z)$.

A representação do diagrama de uma categoria pode ser simplificada suprimindo a representação de alguns morfismos. Com efeito, caso se assuma que um determinado diagrama representa uma categoria, os morfismos identidade podem ser omitidos, uma vez que é garantido que estes existem. Assim, o diagrama seguinte

$$\star \xrightarrow{f} \bullet$$

pode ser usado para representar a categoria **2**. Note-se, porém, que no caso de morfismos resultantes da composição de outros dois é necessário que fique claro qual o morfismo respeitante à composição. Por exemplo, no caso dos diagramas seguintes

$$\begin{tikzcd}
\star \arrow[r, "f"'] & \bullet \arrow[r, "g"'] & *
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & * \arrow[dr, "h"] & \\
\star \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & * \arrow[dr, "h"] & \\
\star \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "l"'] & & \bullet
\end{tikzcd}$$

o primeiro diagrama não representa uma categoria, uma vez que não há qualquer morfismo que possa corresponder ao morfismo $g \circ f$. No caso do segundo diagrama, caso se assuma que este diagrama representa uma categoria, tem de se considerar $f = h \circ g$. No último caso, este diagrama não será considerado a representação de uma categoria, a não ser que se identifique qual dos morfismos l ou f corresponde ao morfismo $h \circ g$.

O recurso a diagramas para estabelecer propriedades a respeito de categorias é bastante usual; tais propriedades são geralmente expressas dizendo que um determinado diagrama comuta. Dado um diagrama numa categoria $\mathbf{C}$ diz-se que o ***diagrama comuta*** se, para qualquer par (A, B) de objetos do diagrama e para qualquer par $((f_1, f_2, \ldots, f_n), (g_1, g_2, \ldots, g_m))$ de caminhos de A a B, em que $m, n \in \mathbb{N}$ e pelo menos um dos caminhos tem comprimento superior a 1, tem-se $f_n \circ \ldots f_2 \circ f_1 = g_m \circ \ldots g_2 \circ g_1$.

Por exemplo, quando se afirma que o diagrama a seguir representado comuta

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dd, "h"] \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "k"'] & \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

tal significa que $h \circ f = k$. No caso do diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "g"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "k"'] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

diz-se que este diagrama comuta se $g \circ f = l \circ k$.

3.3 Construção de categorias

Seguidamente estudam-se alguns processos que permitem, a partir de categorias dadas, construir novas categorias.

Alguns processos usuais na construção de novas estruturas matemáticas a partir de estruturas dadas consistem na formação de subestruturas, na formação de produtos de estruturas e na construção de estruturas quociente.

Definição 3.3.1. *Seja* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}})$ *uma categoria. Uma categoria* $\mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{S}), \mathrm{Mor}(\mathbf{S}), \mathrm{dom}_{\mathbf{S}}, cod_{\mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{S}})$ *diz-se uma* **subcategoria** *de* $\mathbf{C}$ *se:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$*;*
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *e* $\{id_A^C | A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})\} \subseteq \mathrm{Mor}(\mathbf{S})$*;*
- *para qualquer* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{S})$, $\mathrm{dom}_{\mathbf{S}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(f)$ *e* $\mathrm{cod}_{\mathbf{S}}(f) = \mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f)$*;*
- *para qualquer* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})$*, o morfismo* $id_A^{\mathbf{S}}$ *é o mesmo que o morfismo* $id_A^{\mathbf{C}}$*;*
- *para quaisquer* $\mathbf{S}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to D$*, o morfismo* $g \circ_{\mathbf{S}} f$ *é mesmo que o morfismo* $g \circ_{\mathbf{C}} f$*.*

Exemplo 3.3.2.

(1) **Set** *é uma subcategoria de* **Pfn***.*

(2) **FinSet** *é uma subcategoria de* **Set***.*

(3) **AbGrp** *é uma subcategoria de* **Grp**.

Definição 3.3.3. *Uma subcategoria* $\mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{S}), \mathrm{Mor}(\mathbf{S}), \mathrm{dom}_{\mathbf{S}}, cod_{\mathbf{S}}, \circ_{\mathbf{S}})$ *de uma categoria* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}})$ *diz-se uma* ***subcategoria plena*** *de* $\mathbf{C}$ *se, para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})$, $\hom_{\mathbf{S}}(A, B) = \hom_{\mathbf{C}}(A, B)$.

A construção de produtos de categorias é também um processo simples.

Definição 3.3.4. *Sejam*

$$\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}}) \text{ e } \mathbf{D} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{D}), \mathrm{Mor}(\mathbf{D}), \mathrm{dom}_{\mathbf{D}}, cod_{\mathbf{D}}, \circ_{\mathbf{D}})$$

categorias. Designa-se por ***categoria produto de*** $\mathbf{C}$ ***por*** $\mathbf{D}$, *e representa-se por* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, *a categoria definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *são todos os pares* (A, B), *onde* A *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* B *é um objecto de* $\mathbf{D}$;
- *os morfismos de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *são todos os pares* (f, g), *onde* f *é um morfismo de* $\mathbf{C}$ *e* g *é um morfismo de* $\mathbf{D}$;
- *para qualquer* $(f, g) \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C} \times \mathbf{D})$, $\mathrm{dom}_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((f, g)) = (\mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(f), \mathrm{dom}_{\mathbf{D}}(g))$ *e* $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}((f, g)) = (\mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f), \mathrm{cod}_{\mathbf{D}}(g))$
- *para cada objeto* (A, B) *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$, *o morfismo identidade* $id^{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}_{(A,B)}$ *é o par* $(id^{\mathbf{C}}_A, id^{\mathbf{D}}_B)$;
- *a composição* $(f, g) \circ_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}} (f', g')$ *dos morfismos* (f, g) *e* (f', g') *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *é definida componente a componente, isto é,* $(f, g)\circ_{\mathbf{C}\times\mathbf{D}}(f', g') = (f\circ_{\mathbf{C}}f', g\circ_{\mathbf{D}}g')$.

Exemplo 3.3.5. *Considerando grupos* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{H}$ *como categorias, o produto de categorias* $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ *corresponde ao usual produto direto de grupos.*

No sentido de definir categorias quociente, começamos por definir o que se entende por *congruência* nos morfismos de uma categoria.

Definição 3.3.6. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria. Uma relação de equivalência* $\sim$ *definida em* $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *diz-se uma* **congruência** *em* $\mathbf{C}$ *se, para quaisquer* $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$,

(1) $f \sim g$ *implica* $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ *e* $\mathrm{cod} f = \mathrm{cod}(g)$;

(2) $f \sim g$ *implica* $j \circ f \circ i \sim j \circ g \circ i$, *para todos os morfismos* $i : A \to X$ *e* $j : Y \to B$, *onde* $\mathrm{dom}(f) = X = \mathrm{dom}(g)$ *e* $\mathrm{cod}(f) = Y = \mathrm{cod}(g)$.

Dado $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$, *representamos por* $[f]$ *a classe de equivalência de* f.

Definição 3.3.7. *Sejam* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}})$ *uma categoria e* $\sim$ *uma congruência em* $\mathbf{C}$. *Designa-se por* ***categoria quociente****, e representa-se por* $\mathbf{C}/\!\sim$*, a categoria* $\mathbf{C}/\!\sim = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}/\!\sim), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}/\!\sim), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}/\sim}, cod_{\mathbf{C}/\sim}, \circ_{\mathbf{C}/\sim})$ *definida do seguinte modo:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}/\!\sim) = \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$;
- *os morfismos de* $\mathbf{C}/\!\sim$ *são as classes de equivalência* $[f]$ *de todos os morfismos* f *de* $\mathbf{C}$;
- *para qualquer* $[f] \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}/\sim)$, $\mathrm{dom}_{\mathbf{C}/\sim}([f]) = \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(f)$, $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}/\sim}([f]) = \mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f)$;
- *para cada objeto* A *de* $\mathbf{C}/\!\sim$*, o morfismo identidade* $id_A^{\mathbf{C}/\sim}$ *é* $[id_A^{\mathbf{C}}]$;
- *a composição* $[g] \circ_{\mathbf{C}/\sim} [f]$ *dos morfismos* $[f]$ *e* $[g]$ *é o morfismo* $[g \circ_{\mathbf{C}} f]$.

Um processo bastante simples, mas particularmente importante, que permite a construção de uma categoria a partir de outra categoria dada consiste em "trocar o sentido dos morfismos". A categoria obtida por este processo, cuja definição formal se apresenta a seguir, designa-se por *categoria dual* da categoria dada.

Definição 3.3.8. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria. Designa-se por* ***categorial dual*** *ou* ***categoria oposta*** *de* $\mathbf{C}$*, e representa-se por* $\mathbf{C}^{op}$*, a categoria*

$$(\mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{op}), \mathrm{dom}(\mathbf{C}^{op}), \mathrm{cod}(\mathbf{C}^{op}), \circ_{\mathbf{C}^{op}})$$

definida do seguinte modo:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$;
- $\mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{op}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$;
- *para qualquer* $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{op})$, $\mathrm{dom}_{\mathbf{C}^{op}}(f) = \mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f)$, $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}^{op}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathbf{C}^{op}}(f)$;
- *para qualquer* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op})$, $id_A^{\mathbf{C}^{op}} = id_A^{\mathbf{C}}$;
- *para quaisquer* $f \in \mathrm{hom}_{\mathbf{C}^{op}}(A, B)$, $g \in \mathrm{hom}_{\mathbf{C}^{op}}(B, C)$*, o morfismo*

  $$g \circ_{\mathbf{C}^{op}} f \in \mathrm{hom}_{\mathbf{C}^{op}}(A, C)$$

  é o morfismo

  $$f \circ_{\mathbf{C}} g \in \mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(C, A),$$

  ou seja, $g \circ_{\mathbf{C}^{op}} f = f \circ_{\mathbf{C}} g$.

Note-se que de acordo com a definição anterior, para quaisquer objetos $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op})$, $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathbf{C}^{op}$ se e só se $f : B \to A$ é um morfismo de $\mathbf{C}$.

Observe-se também que $(\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$. Assim, toda a categoria é a dual de alguma categoria e toda a definição da teoria de categorias pode ser reformulada numa definição na categoria dual. Cada afirmação S sobre categorias pode ser transformada numa afirmação dual S^{op}, trocando as palavras "domínio" e "codomínio" e substituindo cada ocorrência de $f \circ g$ por $g \circ f$. Se S é uma afirmação verdadeira a respeito de uma categoria $\mathbf{C}$, então S^{op} é uma afirmação verdadeira a respeito de $\mathbf{C}^{op}$. Por conseguinte é válido o princípio seguinte.

Princípio da dualidade: Se S é uma afirmação verdadeira para todas as categorias, então S^{op} também é uma afirmação verdadeira para todas as categorias.

Embora existam casos em que uma dada categoria e a sua categoria dual são a mesma, como é o caso das categorias $\mathbf{Rel}$ e $\mathbf{Rel}^{op}$, em geral a categoria dual de uma determinada categoria $\mathbf{C}$ é uma nova categoria, tal como acontece com as categorias $\mathbf{Set}$ e $\mathbf{Set}^{op}$. Note-se que um morfismo $f : A \to B$ de $\mathbf{Set}^{op}$ é um morfismo $f : B \to A$ de $\mathbf{Set}$ e, portanto, $f : B \to A$ é uma função de B em A, porém, o morfismo $f : A \to B$ em $\mathbf{Set}^{op}$ não é necessariamente uma função.

Apresentam-se seguidamente mais dois processos de construção que permitem a formação de categorias cujos objetos são morfismos de uma dada categoria.

Definição 3.3.9. *Sejam* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}})$ *uma categoria e* I *um objeto de* $\mathbf{C}$. *Designa-se por* ***categoria dos objetos sobre*** I*, e representa-se por* $\mathbf{C/I}$*, a categoria* $(\mathrm{Obj}(\mathbf{C/I}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C/I}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C/I}}, cod_{\mathbf{C/I}}, \circ_{\mathbf{C/I}})$ *definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C/I}$ *são todos os morfismos de* $\mathbf{C}$ *com codomínio* I*;*

- *dados objetos* f *e* g *de* $\mathbf{C/I}$ *(isto é, dados* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to I$ *e* $g : B \to I$*), um* $\mathbf{C/I}$*-morfismo de* f *em* g *é um triplo de morfismos* (f, j, g)*, onde* j *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo de* A *em* B *tal que* $g \circ_{\mathbf{C}} j = f$*;*

- *para cada objeto* $f : A \to I$ *de* $\mathbf{C/I}$*, o morfismo identidade* $id_f^{\mathbf{C/I}}$ *é o triplo de* $\mathbf{C}$*-morfismos* (f, id_A, f)*;*

- *a composição* $(f_2, h, f_3) \circ_{\mathbf{C/I}} (f_1, g, f_2)$ *dos morfismos* $(f_1, g, f_2) : f_1 \to f_2$ *e* $(f_2, h, f_3) : f_2 \to f_3$ *de* $\mathbf{C}/I$ *é o morfismo* $(f_1, h \circ_{\mathbf{C}} g, f_3) : f_1 \to f_3$*.*

Dualmente, define-se $\mathbf{I/C}$, a ***categoria dos objetos sob*** I.

Definição 3.3.10. *Seja* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{Mor}(\mathbf{C}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}, cod_{\mathbf{C}}, \circ_{\mathbf{C}})$ *uma categoria. Designa-se por* ***categoria dos*** $\mathbf{C}$***-morfismos*** *e representa-se por* $\mathbf{C}^{\to}$*, a categoria* $(\mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{\to}), (\mathrm{Mor}(\mathbf{C}^{\to}), \mathrm{dom}_{\mathbf{C}^{\to}}, cod_{\mathbf{C}^{\to}}, \circ_{\mathbf{C}^{\to}})$ *definida do seguinte modo:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{\to}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$*;*

- *dados objetos f_1, f_2 de $\mathbf{C}^{\rightarrow}$ (isto é, dados $\mathbf{C}$-morfismos $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$), um morfismo de f_1 em f_2 é um par $(j : X_1 \to X_2,\ k : Y_1 \to Y_2)$ de $\mathbf{C}$-morfismos tais que $f_2 \circ_{\mathbf{C}} j = k \circ_{\mathbf{C}} f_1$;*
- *para qualquer $\mathbf{C}^{\rightarrow}$-objeto $f : X \to Y$, o morfismo identidade $id_f^{\mathbf{C}^{\rightarrow}}$ é o par $(id_X^{\mathbf{C}}, id_Y^{\mathbf{C}})$;*
- *a composição $(j', k') \circ_{\mathbf{C}^{\rightarrow}} (j, k)$ dos morfismos $(j, k) : f_1 \to f_2$ e $(j', k') : f_2 \to f_3$ é o morfismo $(j' \circ_{\mathbf{C}} j, k' \circ_{\mathbf{C}} k) : f_1 \to f_3$.*

3.4 Morfismos especiais

No estudo de conjuntos e funções têm especial destaque as funções que satisfazem propriedades tais como injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Tais propriedades motivaram a definição de conceitos análogos para morfismos de categorias.

Definição 3.4.1. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$.*
Um morfismo $f : A \to B$ de $\mathbf{C}$ diz-se um **monomorfismo** *se f é* **cancelável à esquerda***, i.e., se para quaisquer morfismos $g, h : C \to A$,*

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$

Um monomorfismo f de A em B também se diz uma ***inclusão*** *de A em B e é usualmente representado por $f : A \rightarrowtail B$ ou $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$.*
Caso exista um monomorfismo de A em B, então A diz-se um ***subobjeto de*** *B e escreve-se $A \subset B$.*

É simples perceber que o conceito de monomorfismo surge como uma abstração da noção de função injetiva. De facto, a respeito de monomorfismos e de funções injetivas na categoria **Set**, prova-se o resultado seguinte.

Proposição 3.4.2. *Na categoria* **Set***, os monomorfismos são exatamente as aplicações injetivas.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ uma função injetiva e sejam $g, h : C \to A$ funções tais que $f \circ g = f \circ h$. Então tem-se necessariamente $g = h$. Com efeito, se admitirmos que $g \neq h$, existe $c \in C$ tal que $g(c) \neq h(c)$ e, uma vez que f é injetiva, segue que $f(g(c)) \neq f(h(c))$, o que contradiz $f \circ g = f \circ h$.
Reciprocamente, admitamos que $f : A \to B$ é um monomorfismo. Sejam $a, a' \in A$ tais que $a \neq a'$. No sentido de provar que $f(a) \neq f(a')$, consideremos um conjunto singular $\{x\}$ e as funções

$$\begin{array}{rccc} \overline{a}: & \{x\} & \to & A \\ & x & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \overline{a'}: & \{x\} & \to & A \\ & x & \mapsto & a' \end{array}.$$

Uma vez que $\overline{a} \neq \overline{a'}$ e f é um monomorfismo, então $f \circ \overline{a} \neq f \circ \overline{a'}$. Assim,

$$f(a) = (f \circ \overline{a})(x) \neq (f \circ \overline{a'})(x) = f(a').$$

Logo f é injetiva. □

Tal como acontece na categoria **Set**, em muitas outras categorias nas quais os morfismos são funções verifica-se que os monomorfismos são exatamente as funções injetivas; tal acontece, por exemplo, em muitas categorias de "conjuntos estruturados" tais como as categorias **Grp**, **Rng**, $\mathbf{Vect}_K$. Porém, existem categorias cujos morfismos são funções, mas em que estes dois conceitos não coincidem. De facto, embora da demonstração anterior seja claro que numa categoria concreta todas as funções injetivas são monomorfismos, existem categorias cujos morfismos são funções e nas quais a classe dos monomorfismos não coincide com a classe das funções injetivas.

Definição 3.4.3. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$.
Um morfismo $f : A \to B$ *de* $\mathbf{C}$ *diz-se um* **epimorfismo** *se* f *é* **cancelável à direita**, *i.e., se para quaisquer morfismos* $g, h : B \to C$,

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Um epimorfismo f *de* A *em* B *é usualmente representado por* $f : A \twoheadrightarrow B$ *ou* $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$. *Caso exista um epimorfismo de* A *em* B, *diz-se que* B *é um* ***objeto quociente*** *de* A.

A noção de epimorfismo é dual da noção de monomorfismo. Assim, um morfismo f é um epimorfismo numa categoria $\mathbf{C}$ se e só se f é um monomorfismo na categoria dual $\mathbf{C}^{op}$.

O conceito de epimorfismo surge como uma abstração do conceito de função sobrejetiva e na categoria **Set** verifica-se o seguinte.

Proposição 3.4.4. *Os epimorfismos na categoria* **Set** *são exatamente as funções sobrejetivas.*

Demonstração. Sejam $f : A \to B$ uma função sobrejetiva e $g, h : B \to C$ funções tais que $g \neq h$. Então, para algum $b \in B$, $g(b) \neq h(b)$ e, uma vez que f é sobrejetiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Assim, $g(f(a)) \neq h(f(a))$ e, portanto, $g \circ f \neq h \circ f$. Logo f é um epimorfismo.
Reciprocamente, suponhamos que $f : A \to B$ não é uma função sobrejetiva. Então existe $b \in B$ tal que, para todo $a \in A$, $b \neq f(a)$. No sentido de provar que f não é um epimorfismo, consideremos duas funções $g, h : B \to \{0, 1\}$ definidas da seguinte forma:

(i) $g(a) = h(a) = 0$, para todo $a \in B$ tal que $a \neq b$,

(ii) $g(b) = 0$,

(iii) $h(b) = 1$.

Então $g \circ f = h \circ f$, mas $g \neq h$ e, portanto, f não é um epimorfismo. □

Da prova anterior segue que numa categoria concreta todo o morfismo sobrejetivo é um epimorfismo. Porém, a implicação contrária não é em geral verdade. De facto, embora na categoria **Set** os epimorfismos coincidam com as funções sobrejetivas, tal não é em geral verdade para outras categorias cujos morfismos são funções.

Exemplo 3.4.5. *Na categoria* **Mon***, consideremos os monóides* $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *e* $(\mathbb{N}_0, +, 0)$*. A função de inclusão* $i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$*, que a cada inteiro não negativo* z *associa o inteiro* z*, é um monomorfismo. Esta função também é um epimorfismo, pois assumindo que* g *e* h *são dois morfismos do monóide* $(\mathbb{Z}; +, 0)$ *num monóide* $(E; *, 1_E)$ *tais que* $g \circ i = h \circ i$*, prova-se que* $g = h$*. De facto, se* $z \geq 0$*, então* $i(z) = z$*, donde segue que* $h(z) = h(i(z)) = g(i(z)) = g(z)$*. Se* $z < 0$*, então* $-z > 0$*, pelo que* $-z \in \mathbb{N}_0$ *e, portanto,*

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z) * 1_E \\ &= g(z) * h(0) \\ &= g(z) * h(-z + z) \\ &= g(z) * (h(-z) * h(z)) \\ &= g(z) * (h(i(-z)) * h(z)) \\ &= g(z) * (g(i(-z)) * h(z)) \\ &= (g(z) * g(i(-z))) * h(z) \\ &= (g(z) * g(-z)) * h(z) \\ &= g(z + (-z)) * h(z) \\ &= g(0) * h(z) \\ &= 1_E * h(z) \\ &= h(z). \end{aligned}$$

Uma vez que $g(z) = h(z)$*, para todo* $z \in \mathbb{Z}$*, tem-se* $g = h$ *e, portanto,* i *é um epimorfismo. No entanto, a função* i *não é sobrejetiva.*

Proposição 3.4.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$*,* $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$*. Então:*

(1) *Para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$*,* id_A *é um monomorfismo e um epimorfismo.*

(2) *Se* f *e* g *são monomorfismos (respetivamente, epimorfismos), então* $g \circ f$ *é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo).*

(3) *Se* $g \circ f$ *é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo), então* f *é um monomorfismo (respetivamente,* g *é um epimorfismo).*

Demonstração. (1) Trivial.

(2) Suponhamos que f e g são monomorfismos. Sejam $i : D \to A$ e $j : D \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$. Pretendemos mostrar que $i = j$. Ora, assumindo que $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$, então, por associatividade, tem-se $g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j)$. Uma vez que g é um monomorfismo, segue que $f \circ i = f \circ j$. Por último, atendendo a que f é um monomorfismo tem-se $i = j$.

De forma similar prova-se que se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.

(3) Suponhamos que $g \circ f$ é um monomorfismo. Pretendemos mostrar que, para quaisquer $i : D \to A$ e $j : D \to A$, se $f \circ i = f \circ j$, então $i = j$. De facto, se $f \circ i = f \circ j$, então $g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j)$. Por conseguinte $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$ e, atendendo a que $g \circ f$ é um monomorfismo, vem que $i = j$.

De forma análoga prova-se que se $g \circ f$ é um epimorfismo, então g é um epimorfismo.

□

Definição 3.4.7. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria. Um* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *diz-se um* ***bimorfismo*** *se é simultanemente um monomorfismo e um epimorfismo.*

Apresentam-se de seguida mais alguns tipos especiais de morfismos.

Definição 3.4.8. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$ *um morfismo de* $\mathbf{C}$. *Diz-se que:*

- f *é* ***invertível à direita*** *se existe um morfismo* $g : B \to A$ *de* $\mathbf{C}$ *tal que* $f \circ g = id_B$*; neste caso, o morfismo* g *diz-se um* **um inverso direito** *de* f.
- f *é* ***invertível à esquerda*** *se existe um morfismo* $g : B \to A$ *de* $\mathbf{C}$ *tal que* $g \circ f = id_A$*; neste caso, o morfismo* g *diz-se um* **um inverso esquerdo** *de* f.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$. Então $f : B \to A$ e $g : A \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}^{op}$. Assim, se $g \circ f = id_A$ em $\mathbf{C}$, tem-se $f \circ g = id_A$ em $\mathbf{C}^{op}$. Por conseguinte os conceitos de inverso direito e inverso esquerdo são duais.

Com base na definição anterior é simples estabelecer o resultado seguinte, cuja prova fica ao cuidado do leitor.

Proposição 3.4.9. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$.

(1) *Para todo* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_A *é invertível à direita e à esquerda.*

(2) *Se* f *e* g *são invertíveis à direita (respetivamente, esquerda), então* $g \circ f$ *é invertível à direita (respetivamente, esquerda).*

(3) *Se* $g \circ f$ *é invertível à direita (respetivamente, esquerda), então* g *é invertível à direita (respetivamente,* f *é invertível à esquerda).*

Observe-se que existem morfismos que podem não ter qualquer inverso esquerdo; por exemplo, na categoria **Set**, a função $f : \{0, 1\} \to \{1\}$ definida por $f(0) = f(1) = 1$ não tem inverso esquerdo. Verifica-se também que um mesmo morfismo pode ter mais do que um inverso esquerdo; se consideramos na categoria **Set** a função $f : \{0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, então os morfismos

$g, h : \{0,1,2\} \to \{0,1\}$ definidas por $g(0) = g(2) = 0$, $g(1) = 1$ e $h(0) = 0$, $h(1) = h(2) = 1$ são ambos inversos esquerdos de f. Pelo Princípio de Dualidade, um morfismo pode também não ter qualquer inverso direito ou pode ter vários. Na categoria **Set** é, no entanto, possível garantir a existência de inverso esquerdo e inverso direito para certos morfismos.

Proposição 3.4.10. *Na categoria* **Set***, todo o monomorfismo com domínio não vazio é invertível à esquerda e todo o epimorfismo é invertível à direita.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ um monomorfismo com domínio não vazio. Então $A \neq \emptyset$ e f é injetiva. Por conseguinte é possível definir uma função $g : B \to A$ da seguinte forma: $g(f(a)) = a$, para todo $a \in A$ e $g(b) = a_0$, se $b \notin f(A)$, onde a_0 é um elemento fixo em A. A função g é um inverso esquerdo de f.

Se $f : A \to B$ é um epimorfismo, então f é sobrejetiva. Neste caso, pode definir-se uma função $h : B \to A$ da seguinte forma: para todo $b \in B$, $h(b) = a$, onde a é um elemento fixo em A tal que $f(a) = b$. Esta função h é um inverso direito de f. Note-se que se f não é injetiva, este inverso não é único. □

O resultado anterior não é válido em todas as categorias, ou seja, nem todo o monomorfismo é um morfismo invertível à esquerda e nem todo o epimorfismo é invertível à direita. Por exemplo, na categoria **2**, o único morfismo de um objeto no outro é um epimorfismo e um monomorfismo, mas não tem nem inverso direito nem inverso esquerdo.

Proposição 3.4.11. *Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria* **C***.*

(1) *Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.*

(2) *Se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.*

Demonstração. (1) Suponhamos que f é invertível à esquerda. Então f tem um inverso esquerdo, isto é, existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por conseguinte, para quaisquer morfismos $i, j : C \to A$

$$\begin{aligned} f \circ i = f \circ j \quad &\Rightarrow \quad g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j) \\ &\Rightarrow \quad (g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j \quad \text{(por associatividade)} \\ &\Rightarrow \quad id_A \circ i = id_A \circ j \qquad\quad (g \text{ é inverso esquerdo de } f) \\ &\Rightarrow \quad i = j \end{aligned}$$

(2) Imediato por dualidade. □

Proposição 3.4.12. *Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria* **C***. Se $g : B \to A$ é um inverso direito de f e $h : B \to A$ é um inverso esquerdo de f, então $g = h$.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ um morfismo em **C** tal que $g : B \to A$ é um inverso direito de f e $h : B \to A$ é um inverso esquerdo de f. Então

$$g = id_A \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ id_B = h.$$ □

Definição 3.4.13. *Um morfismo $f : A \to B$ de uma categoria* $\mathbf{C}$ *diz-se um* ***isomorfismo*** *ou um* ***morfismo invertível*** *se é simultaneamente invertível à direita e à esquerda. Um isomorfismo f de A em B é usualmente representado por $f : A \stackrel{\sim}{\longrightarrow} B$.*

Exemplo 3.4.14.
(1) *Na categoria* **Set***, os isomorfismos são exatamente as funções bijetivas.*
(2) *Na categoria* **Grp***, os isomorfismos são os homomorfismos de grupo bijetivos.*

Dos resultados que se estabelecem a seguir é imediato que caso exista um isomorfismo de um objeto A num objeto B também existe um isomorfismo de B em A. Assim, caso exista um isomorfismo de um objeto A num objeto B diz-se apenas que os objetos A e B são isomorfos e escreve-se $A \cong B$.

Proposição 3.4.15. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria.*

(1) *Para todo $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_A é um isomorfismo.*

(2) *Se $f : A \to B$ é um isomorfismo, então existe um único morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.*

Demonstração. Imediato a partir das proposições 3.4.9 e 3.4.12. □

Definição 3.4.16. *Seja $f : A \to B$ um isomorfismo numa categoria* $\mathbf{C}$*. Designa-se por* ***inverso de*** *f, e representa-se por f^{-1}, o único morfismo $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1} \circ f = id_A$ e $f \circ f^{-1} = id_B$.*

Proposição 3.4.17. *Se $f : A \to B$ é um isomorfismo numa categoria* $\mathbf{C}$*, então $f^{-1} : B \to A$ também é um isomorfismo.*

Demonstração. Imediato a partir da proposição anterior. □

A prova do resultado seguinte é um exercício simples que fica ao cuidado do leitor.

Proposição 3.4.18. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ isomorfismos numa categoria* $\mathbf{C}$*. Então $g \circ f$ é um isomorfismo e o seu inverso é $f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Proposição 3.4.19. *Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria* $\mathbf{C}$*. Se f é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo) e é invertível à direita (respetivamente, invertível à esquerda), então f é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ um monomorfismo invertível à direita. Então existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Logo $(f \circ g) \circ f = id_B \circ f = f$, donde $f \circ (g \circ f) = f \circ id_A$. Por conseguinte, atendendo a que f é um monomorfismo, tem-se $g \circ f = id_A$. Assim, g é simultaneamente um inverso direito e um inverso esquerdo de f e, portanto, f é um isomorfismo.

Dualmente, se $f : A \to B$ é um epimorfismo invertível à esquerda, então f é um isomorfismo. □

Observe-se que da Proposição 3.4.11 é imediato que todo o isomorfismo é um bimorfismo. Contudo, um bimorfismo não é necessariamente um isomorfismo. Já apresentámos anteriormente um exemplo desta situação na categoria **2**. Na categoria **Mon** também é possível encontrar bimorfismos que não são isomorfismos. De facto, $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ e $(\mathbb{Z}, +, 0)$ são objetos desta categoria e a função $i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, que a cada inteiro não negativo z associa o respetivo inteiro z, não é invertível, mas é um monomorfismo e um epimorfismo.

Definição 3.4.20. *Uma categoria* **C** *diz-se* ***equilibrada*** *se todo o bimorfismo é um isomorfismo.*

Exemplo 3.4.21. *A categoria* **Set** *é equilibrada, mas a categoria* **Mon** *não é.*

3.5 Objetos iniciais, objetos terminais

Nesta secção consideram-se caracterizações abstratas do conjunto vazio e dos conjuntos singulares da categoria **Set** e de outros objetos estruturalmente similares existentes em outras categorias.

Definição 3.5.1. *Seja* **C** *uma categoria.*

- *Um objeto I de* **C** *diz-se um* ***objeto inicial*** *se, para qualquer objeto X de* **C**, *existe um, e um só, morfismo $I \to X$.*
- *Um objeto T de* **C** *diz-se um* ***objeto terminal*** *se, para qualquer objeto X de* **C**, *existe um, e um só, morfismo $X \to T$.*

Exemplo 3.5.2.

(1) *Na categoria* **Set**, *o conjunto vazio é um objeto inicial e qualquer conjunto singular $\{x\}$ é um objeto terminal. Note-se que a categoria* **Set** *tem um único objeto inicial e tem vários objetos terminais.*

(2) *Na categoria* **Grp**, *um grupo trivial é um objeto inicial e terminal.*

(3) *Na categoria* **Poset**, *qualquer c.p.o. $(\{x\}, \{(x, x)\})$ é um objeto terminal.*

(4) *Considerando o c.p.o.* $(\mathbb{N}_0, \leq)$ *como uma categoria, o inteiro zero é o único objeto inicial e não existem objetos terminais. O c.p.o.* $(\mathbb{Z}, \leq)$ *não tem objetos iniciais nem objetos terminais.*

(5) *Um c.p.o., encarado como uma categoria, tem objeto inicial se e só se tem elemento mínimo e tem objeto terminal se e só se tem elemento máximo.*

Os exemplos anteriores permitem perceber que certas categorias não têm qualquer objeto inicial nem qualquer objeto terminal e que existem categorias que podem ter vários objetos iniciais ou vários objetos terminais. Caso uma categoria tenha mais do que um objeto inicial (respetivamente, terminal) prova-se que este é único a menos de isomorfismo.

Proposição 3.5.3. *Os objetos iniciais (respetivamente, terminais) de uma categoria* $\mathbf{C}$*, caso existam, são únicos a menos de isomorfismo. Reciprocamente, se* I *é um objeto inicial (respetivamente, terminal) e* $I \cong J$*, então* J *é um objeto inicial (respetivamente, terminal).*

Demonstração. Se I e J são objetos iniciais numa categoria $\mathbf{C}$, então existem morfismos únicos $f : I \to J$ e $g : J \to I$. Por conseguinte $g \circ f$ é um morfismo de I em I. O morfismo identidade id_I também é um morfismo de I em I. Mas, atendendo a que I é um objeto inicial, existe um único morfismo de I em I; logo $g \circ f = id_I$. De modo análogo, tem-se $f \circ g = id_J$. Logo g é inverso direito e inverso esquerdo de f e, portanto, f é um isomorfismo. Assim, $I \cong J$.
Reciprocamente, sejam I e J objetos de $\mathbf{C}$ tais que I é um objeto inicial e $I \cong J$. Então existe um isomorfismo $i : I \to J$ e, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $f : I \to X$. Logo existe um morfismo $f \circ i^{-1} : J \to X$ e prova-se que este é o único $\mathbf{C}$-morfismo de J em X. De facto, se $g : J \to X$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, tem-se $g \circ i : I \to X$ e, por conseguinte, $g \circ i = f$. Logo $g = f \circ i^{-1}$. Assim, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $J \to X$ e, portanto, J é um objeto inicial de $\mathbf{C}$.

Dualmente, prova-se o resultado a respeito de objetos terminais. □

Nos exemplos anteriores verificou-se que um mesmo objeto pode ser simultaneamente inicial e terminal.

Definição 3.5.4. *Um objecto* 0 *de uma categoria* $\mathbf{C}$ *que seja simultaneamente inicial e terminal diz-se um* ***objeto zero****.*

Note-se que uma categoria pode ter objetos iniciais e objetos terminais e não ter objeto zero. Por exemplo, a categoria **Set** não tem objeto zero. A categoria representada pelo diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[loop above, "id_C"] & \\
A \arrow[ur, "h \circ f = g"] \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[rr, shift left, "f"] & & B \arrow[ul, "h"'] \arrow[loop right, "id_B"] \arrow[ll, shift left, "f'"]
\end{tikzcd}$$

também é exemplo de uma categoria com objetos iniciais (A e B), com um objeto final (C) e que não tem objeto zero.

Se $\mathbf{C}$ é uma categoria com objeto zero 0, então, para quaisquer objetos A e B existem, a menos de isomorfismo, morfismos únicos $\xi_A : A \to 0$ e $\xi^B : 0 \to B$. Considerando a composição $\xi^B \circ \xi_A : A \to B$, prova-se que este morfismo depende apenas de A e B e não depende de 0.

Proposição 3.5.5. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* 0 *e* $0'$ *objetos zero e* A*,* B *objetos de* $\mathbf{C}$*. Então o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "\xi^B"] & B \\
A \arrow[u, "\xi_A"] \arrow[r, "\xi'_A"'] & 0' \arrow[u, "\xi'^B"']
\end{tikzcd}$$

i.e., $\xi^B \circ \xi_A = \xi'^B \circ \xi'_A$.

Demonstração. Como 0 e $0'$ são objetos zero, existe um isomorfismo entre eles. Seja $f : 0 \to 0'$ esse isomorfismo. Então

$$f \circ \xi_A = \xi'_A \quad \text{e} \quad \xi'^B \circ f = \xi^B,$$

donde

$$\xi_A = f^{-1} \circ \xi'_A \quad \text{e} \quad \xi^B = \xi'^B \circ f.$$

Logo

$$\xi^B \circ \xi_A = (\xi'^B \circ f) \circ (f^{-1} \circ \xi'_A) = \xi'^B \circ (f \circ f^{-1}) \circ \xi'_A = \xi'^B \circ \xi'_A. \qquad \square$$

A proposição anterior garante que numa categoria com objeto zero, para quaisquer dois objetos A e B da categoria, existe um único morfismo nulo de A em B.

Definição 3.5.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* 0 *um objeto zero de* $\mathbf{C}$*,* A *e* B *objetos de* $\mathbf{C}$*,* $\xi_A : A \to 0$ *o único morfismo de* A *em* 0 *e* $\xi^B : 0 \to B$ *o único morfismo de* 0 *em* B*. Designa-se por* ***morfismo nulo*** *de* A *em* B*, e representa-se por* $0_{A,B}$*, o morfismo* $\xi^B \circ \xi_A$*.*

Exemplo 3.5.7. *Na categoria* **Grp**, *se H e G são grupos, $\{1_G\}$ é um objeto zero e o morfismo*

$$\begin{array}{rcl} 0_{H,G} : H & \to & G \\ x & \mapsto & 1_G \end{array}$$

é o morfismo nulo de H em G.

Proposição 3.5.8. *Seja* **C** *uma categoria com objeto zero. A composta de um morfismo nulo com qualquer outro morfismo é ainda um morfismo nulo.*

Demonstração. Sejam **C** uma categoria, 0 um objeto zero de **C**, A, B, C objetos de **C** e $f : C \to A$ um morfismo de **C**. Então

$$\begin{array}{rcl} 0_{A,B} \circ f & = & (\xi^B \circ \xi_A) \circ f \\ & = & \xi^B \circ (\xi_A \circ f) \\ & = & \xi^B \circ \xi_C \\ & = & 0_{C,B} \end{array}$$

□

3.6 Produtos e coprodutos

As noções que a seguir se apresentam permitem caracterizar de forma abstrata conceitos bem conhecidos tais como produto cartesiano de conjuntos, produto direto de álgebras e união disjunta de conjuntos.

Definição 3.6.1. *Sejam* **C** *uma categoria e A_1, A_2 objetos de* **C**. *Chama-se* ***produto de A_1 e A_2*** *a um par $(P, (p_i)_{i \in \{1,2\}})$, onde P é um objeto de* **C** *e $p_1 : P \to A_1$ e $p_2 : P \to A_2$ são* **C***-morfismos tais que, para cada objeto S de* **C** *e para quaisquer* **C***-morfismos $f_1 : S \to A_1$ e $f_2 : S \to A_2$, existe um único* **C***-morfismo $u : S \to P$ tal que $p_1 \circ u = f_1$ e $p_2 \circ u = f_2$, i.e., tal que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A_2 \end{tikzcd}$$

O morfismo p_i designa-se por ***projeção de índice*** *i.*

Exemplo 3.6.2.

(1) *Na categoria* **Set**, *o par $(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$, onde $A_1 \times A_2$ é o produto cartesiano dos conjuntos A_1 e A_2 e $p_i : A_1 \times A_2 \to A_i$, $i \in \{1, 2\}$, é a projeção-i, é um produto dos objetos A_1 e A_2.*

(2) *Na categoria* **Grp**, *o par $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, (p_1, p_2))$, onde $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ é o produto direto dos grupos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ e $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$, $i \in \{1, 2\}$, é a projeção-i, é um produto dos objetos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$.*

(3) *Considerando um conjunto parcialmente ordenado P como uma categoria, o produto de dois elementos $p, q \in P$ é um elemento $p \times q \in P$, juntamente com projeções*

$$p \times q \leq p$$
$$p \times q \leq q$$

tais que, para qualquer elemento $s \in P$, se

$$s \leq p \text{ e } s \leq q,$$

então $s \leq p \times q$; ou seja, $p \times q$ é o ínfimo de $\{p, q\}$.

Proposição 3.6.3. *O produto de dois objetos de uma categoria é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A_1, A_2 objetos de $\mathbf{C}$ e $(P, (p_i)_{i\in\{1,2\}})$ e $(Q, (q_i)_{i\in\{1,2\}})$ produtos de A_1 e A_2. Então, uma vez que Q é um produto de A_1 e A_2, existe um único morfismo $i : P \to Q$ tal que $q_1 \circ i = p_1$ e $q_2 \circ i = p_2$. De forma análoga, como P é um produto de A_1 e A_2, existe um único morfismo $j : Q \to P$ tal que $p_1 \circ j = q_1$ e $p_2 \circ j = q_2$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
A_1 & Q \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] \arrow[d, "j"] & A_2 \\
& P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim, $p_1 \circ j \circ i = p_1$ e $p_2 \circ j \circ i = p_2$. Por conseguinte, atendendo a que $p_1 \circ id_P = p_1$ e $p_2 \circ id_P = p_2$, resulta da condição de unicidade que $j \circ i = id_P$. De forma similar prova-se que $i \circ j = id_Q$. Logo $i : P \to Q$ é um isomorfimo. $\square$

Nas condições da definição anterior, e caso exista o produto dos objetos A_1 e A_2, o objeto P é usualmente representado por $A_1 \times A_2$ e o morfismo u, univocamente determinado pelos morfismos f_1, f_2, é representado por $< f_1, f_2 >$.

O conceito de produto de dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ pode ser generalizado a famílias de objetos de $\mathbf{C}$.

Definição 3.6.4. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $(A_i)_{i\in I}$ uma família de objetos de $\mathbf{C}$. Chama-se* ***produto de*** *$(A_i)_{i\in I}$ a um par $(P, (p_i)_{i\in I})$, onde P é um objeto de $\mathbf{C}$ e $p_i : P \to A_i$, $i \in I$, são $\mathbf{C}$-morfismos tais que, para cada objeto S de $\mathbf{C}$ e para cada família $\{f_i : S \to A_i\}_{i\in I}$ de $\mathbf{C}$-morfismos, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $u : S \to P$ tal que $p_i \circ u = f_i$, para todo $i \in I$.*

Nas condições da definição anterior, se $|I| = n$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, o produto $(P, (p_i)_{i\in I})$ diz-se n-***ário***; em particular, se $|I| = 0, 1, 2$ ou 3 o produto diz-se ***nulário***, ***unário***, ***binário*** ou ***ternário***, respetivamente.

Observe-se que os produtos nulários de uma categoria coincidem com os objetos terminais. De facto, se $(P; (p_i)_{i\in\emptyset})$ é um produto de uma família $(A_i)_{i\in\emptyset}$ de objetos de uma categoria $\mathbf{C}$, então P é um objeto de $\mathbf{C}$ tal que, para qualquer objeto S de $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $u : S \to P$. Reciprocamente, se P é um objeto terminal, então $(P; (p_i)_{i\in\emptyset})$ é um produto nulário.

Os produtos unários existem para qualquer objeto A de uma categoria $\mathbf{C}$; de facto, $(A, (id_A))$ é um produto de (A).

Definição 3.6.5. *Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família finita de objetos tem produto, diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem produtos finitos****. Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família de objetos tem produto, diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem produtos****.*

Dualmente, define-se coproduto de dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$.

Definição 3.6.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* A_1, A_2 *objetos de* $\mathbf{C}$*. Chama-se* ***coproduto de*** A_1 ***e*** A_2 *a um par* $(Q, (i_j)_{j\in\{1,2\}})$*, onde* Q *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i_1 : A_1 \to Q$ *e* $i_2 : A_2 \to Q$ *são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada objeto* Z *de* $\mathbf{C}$ *e para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $g_1 : A_1 \to Z$ *e* $g_2 : A_2 \to Z$*, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $v : Q \to Z$ *tal que* $v \circ i_1 = g_1$ *e* $v \circ i_2 = g_2$*, i.e., tal que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"'] & Q \arrow[u, "v"] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

O morfismo i_j *designa-se por* ***injeção de índice*** j*.*

Proposição 3.6.7. *O coproduto de dois objetos de uma categoria é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Segue por dualidade da prova apresentada para a Proposição 3.6.3. □

Caso exista o coproduto $(Q, (i_j)_{j\in\{1,2\}})$ de dois objetos A_1 e A_2 de uma categoria $\mathbf{C}$, o objeto Q é usualmente representado por $A_1 + A_2$ e o morfismo v referido na definição anterior, univocamente determinado pelos morfismos g_1 e g_2, é representado por $[g_1, g_2]$.

Exemplo 3.6.8.

(1) *Na categoria* **Set***, o coproduto de dois conjuntos* A_1 *e* A_2 *corresponde à sua união disjunta, onde* $A_1 + A_2$ *pode ser definido, por exemplo, por*

$$A_1 + A_2 = \{(a, 1) : a \in A_1\} \cup \{(a, 2) \,|\, a \in A_2\}$$

e cujas funções injeção são naturalmente definidas por

$$i_1(a) = (a, 1) \text{ e } i_2(a) = (a, 2).$$

Dadas funções g_1 *e* g_2 *nas condições descritas no diagrama seguinte*

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"'] & A_1 + A_2 \arrow[u, "{[g_1, g_2]}"] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

define-se

$$[g_1, g_2](x, \delta) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } \delta = 1 \\ g_2(x) & \text{se } \delta = 2 \end{cases}$$

Então, se $h : A_1 + A_2 \to Z$ *é uma função tal que* $h \circ i_1 = g_1$ *e* $h \circ i_2 = g_2$*, tem-se* $h(x, \delta) = [g_1, g_2](x, \delta)$*, para qualquer* $(x, \delta) \in A_1 + A_2$*.*

(2) *Considerando um conjunto parcialmente ordenado* P *como uma categoria, o coproduto de dois elementos* $p, q \in P$ *é um elemento* $p + q \in P$*, juntamente com injeções*

$$p \leq p + q$$
$$q \leq p + q$$

tais que, para qualquer elemento $z \in P$*, se*

$$p \leq z \text{ e } q \leq z,$$

então $p + q \leq z$*; ou seja,* $p + q$ *é o supremo de* $\{p, q\}$*.*

De forma análoga ao que foi feito no caso dos produtos, a noção de coproduto pode ser generalizada a famílias arbitrárias de objetos.

Definição 3.6.9. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $(A_j)_{j \in J}$ *uma família de objetos de* $\mathbf{C}$*. Chama-se* ***coproduto de*** $(A_j)_{j \in J}$ *a um par* $(Q; (i_j)_{j \in J})$*, onde* Q *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i_j : A_j \to Q$*,* $j \in J$*, são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada objeto* Z *de* $\mathbf{C}$ *e para cada família* $\{g_j : A_j \to Z\}_{j \in J}$ *de* $\mathbf{C}$*-morfismos, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $v : Q \to Z$ *tal que* $v \circ i_j = g_j$*, para todo* $j \in J$*.*

Um coproduto $(Q, (q_i)_{i \in J})$ diz-se n***-ário*** se $|J| = n$, com $n \in \mathbb{N}_0$; se $|J| = 0, 1, 2$ ou 3 o coproduto diz-se ***nulário***, ***unário***, ***binário*** ou ***ternário***, respetivamente.

Dualmente ao que sucede nos produtos, os coprodutos nulários de uma categoria coincidem com os objetos iniciais e os coprodutos unários também existem para qualquer objeto A de uma categoria $\mathbf{C}$.

Definição 3.6.10. *Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família finita de objetos tem coproduto diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem coprodutos finitos****. Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família de objetos tem coproduto diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem coprodutos****.*

3.7 Igualizadores e coigualizadores

A noção de igualizador generaliza conceitos tais como o de kernel de um homomorfismo de grupo e a noção de coigualizador generaliza o conceito de conjunto quociente por uma relação de equivalência.

Definição 3.7.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f, g : A \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$*. Um par* (I, i)*, onde* I *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo, diz-se um* **igualizador de** f **e** g *se:*

(i) $f \circ i = g \circ i$*;*

(ii) para qualquer $\mathbf{C}$*-morfismo* $i' : I' \to A$ *tal que* $f \circ i' = g \circ i'$*, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $u : I' \to I$ *tal que* $i \circ u = i'$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ I' \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd}$$

Definição 3.7.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* I *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Diz-se que* (I, i) *é um* ***igualizador*** *em* $\mathbf{C}$ *se existem morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *tais que* (I, i) *é um igualizador de* f *e* g*.*
Diz-se que a categoria $\mathbf{C}$ ***tem igualizadores*** *se para qualquer par de* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f, g : A \to B$ *existe um igualizador.*

Exemplo 3.7.3.
(1) *Na categoria* **Set***, sejam* $f, g : A \to B$ *funções e seja* $I = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$*. Então o par* (I, i)*, onde* i *é a função inclusão de* I *em* A

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f *e* g*.*

(2) *Na categoria* **Grp***, sejam* $\mathcal{G}_1 = (G_1; \cdot, ^{-1}, 1_{G_1})$ *e* $\mathcal{G}_2 = (G_2; \cdot, ^{-1}, 1_{G_2})$ *grupos,* $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ *um homomorfismo de grupos,* $\phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ *o homomorfismo trivial (i.e.,*

o homomorfismo que a cada elemento de G_1 associa o elemento neutro de G_2) e seja $I = \{x \in G_1 : f(x) = \phi(x) = 1_{G_2}\}$. Então o par (I, i), onde i é a função inclusão de I em G_1

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & G_1 \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f e ϕ.

Proposição 3.7.4. *Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$. Se $(I, i : I \to A)$ e $(I', i' : I' \to A)$ são igualizadores de f e g, então I e I' são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$, $(I, i : I \to A)$ e $(I', i' : I' \to A)$ igualizadores de f e g. Uma vez que (I, i) é um igualizador de f e g, tem-se $f \circ i = g \circ i$. Então, atendendo a que (I', i') também é um igualizador de f e g, existe um, e um só, morfismo $u : I \to I'$ tal que $i' \circ u = i$. Considerando que (I', i') é um igualizador de f e g, também se tem $f \circ i' = g \circ i'$. Logo, como (I, i) é um igualizador de f e g, existe um, e um só morfismo $v : I' \to I$ tal que $i \circ v = i'$. Além disso, como (I, i) é um igualizador de f e g, sabe-se que existe um, e um só, morfismo $w : I \to I$ tal que $i \circ w = i$, esse morfismo é o morfismo id_I. Uma vez que $v \circ u$ é um morfismo de I em I e $i \circ (v \circ u) = i$, segue que $v \circ u = id_I$. De modo análogo prova-se que $i \circ v = id_{I'}$. Assim, u é invertível à direita e à esquerda e, portanto, u é um isomorfismo de I' em I. Logo I e I' são isomorfos. □

Proposição 3.7.5. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A e I objetos de $\mathbf{C}$ e $i : I \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo. Se (I, i) é um igualizador em $\mathbf{C}$, então i é um monomorfismo.*

Demonstração. Seja $(I, i : I \to A)$ um igualizador em $\mathbf{C}$. Então existem $\mathbf{C}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : A \to B$ tais que (I, i) é um igualizador de f e g. Pretendemos mostrar que i é um monomorfismo, ou seja, que para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $k : C \to I$ e $h : C \to I$,

$$i \circ k = i \circ h \Rightarrow k = h.$$

De facto, se $k : C \to A$ e $h : C \to A$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $i \circ k = i \circ h$ e se considerarmos $z = i \circ k = i \circ h$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, shift left, "k"] \arrow[u, shift right, "h"'] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

tem-se

$$f \circ z = f \circ (i \circ k) = (f \circ i) \circ k = (g \circ i) \circ k = g \circ (i \circ k) = g \circ z.$$

Mas (I, i) é um igualizador de f e g, pelo que existe um único morfismo $u : C \to I$ tal que $i \circ u = z$. Então, como $i \circ k = i \circ h = z$ resulta que $k = h = u$. Logo i é um monomorfismo. □

Proposição 3.7.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* A *e* I *objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Se* (I, i) *é um igualizador em* $\mathbf{C}$ *e* i *é um epimorfismo, então* i *é um isomorfismo.*

Demonstração. Sejam $(I, i : I \to A)$ um igualizador em $\mathbf{C}$ e $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos dos quais (I, i) é um igualizador. Então $f \circ i = g \circ i$. Se i é um epimorfismo segue que $f = g$, donde $f \circ id_A = g \circ id_A$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f = g"] & B \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "id_A"'] & & \end{tikzcd}$$

Atendendo a que (I, i) é um igualizador de f e g, existe um único morfismo $u : A \to I$ tal que $i \circ u = id_A$, donde resulta que $i \circ u \circ i = id_A \circ i = i = i \circ id_I$. Então, como todo o igualizador é um monomorfismo, segue que $u \circ i = id_I$. Logo u é um inverso direito e um inverso esquerdo de i e, portanto, i é um isomorfismo. □

Definição 3.7.7. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria com objeto zero* 0*,* N *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f : A \to B$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Diz-se que* N *é um* ***núcleo de f*** *(ou um* ***kernel de*** f*) se existe algum* $\mathbf{C}$*-morfismo* $i : N \to A$ *tal que* (N, i) *é um igualizador de* f *e* $0_{A,B}$*.*

Da definição anterior resulta imediatamente que dois núcleos de um mesmo morfismo $f : A \to B$ são isomorfos. O nucleo de f (kernel de f) é, usualmente, representado por Nuc$f$ (ou ker$f$).

Proposição 3.7.8. *Se* $f : A \to B$ *é um monomorfismo numa categoria com objeto zero* 0*, então* Nuc$f = 0$*.*

Demonstração. Se $f : A \to B$ é um monomorfismo prova-se que $(0, \xi^A : 0 \to A)$ é igualizador de f e $0_{A,B}$. De facto, como 0 é objeto inicial e $f \circ \xi^A$ e $0_{A,B} \circ \xi^A$ são morfismos de 0 em B, tem-se

$$f \circ \xi^A = 0_{A,B} \circ \xi^A.$$

Além disso, se admitirmos que $i' : K \to A$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que

$$f \circ i' = 0_{A,B} \circ i',$$

i.e., é tal que

$$f \circ i' = 0_{K,B},$$

prova-se que existe um unico morfismo $u : K \to 0$ tal que $\xi^A \circ u = i'$. Com efeito, de

$$f \circ i' = 0_{K,B} \quad \text{e} \quad f \circ 0_{K,A} = 0_{K,B},$$

vem que

$$f \circ i' = f \circ 0_{K,A},$$

pelo que $i' = 0_{K,A}$, pois f é um monomorfismo. Então existe $u = \xi_K$ tal que $\xi^A \circ u = i'$. Note-se que u só pode ser ξ_K, uma vez que 0 é objeto terminal.

Assim, $(0, \xi^A)$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$ e, portanto, Nuc$f = 0$. □

Considerando o dual da definição de igualizador tem-se a noção de coigualizador.

Definição 3.7.9. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f, g : A \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$*. Um par* (K, k)*, onde* K *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo, diz-se um* ***coigualizador de*** f ***e*** g *se:*

(i) $k \circ f = k \circ g$*;*

(ii) para qualquer $\mathbf{C}$*-morfismo* $k' : B \to K'$ *tal que* $k' \circ f = k' \circ g$*, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $v : K \to K'$ *tal que* $v \circ k = k'$*.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "k'"'] & K \arrow[d, "v"] \\ & & K' \end{tikzcd}$$

Definição 3.7.10. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Diz-se que* (K, k) *é um* ***coigualizador*** *em* $\mathbf{C}$ *se existem morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *tais que* (K, k) *é um coigualizador de* f *e* g*.*
Diz-se que a categoria $\mathbf{C}$ ***tem coigualizadores*** *se para qualquer par de* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f, g : A \to B$ *existe um coigualizador.*

Sendo o conceito de coigualizador dual da noção de igualizador, são imediatos os resultados seguintes.

Proposição 3.7.11. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *morfismos de uma categoria* $\mathbf{C}$*. Se* $(K, k : B \to K)$ *e* $(K', k' : B \to K')$ *são coigualizadores de* f *e* g*, então* K *e* K' *são isomorfos.*

Demonstração. Imediato, por dualidade da Proposição 3.7.4. □

Proposição 3.7.12. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Se* (K, k) *é um coigualizador em* $\mathbf{C}$*, então* k *é um epimorfismo.*

Demonstração. Imediato, por dualidade da Proposição 3.7.5. □

Proposição 3.7.13. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Se* (K, k) *é um coigualizador em* $\mathbf{C}$ *e* k *é um monomorfismo, então* k *é um isomorfismo.*

Demonstração. Imediato, por dualidade da Proposição 3.7.6. □

Exemplo 3.7.14. *Na categoria* **Set***, sejam X um conjunto, $R \subseteq X \times X$ uma relação de equivalência em X e considere-se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "r_2"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

onde r_1 e r_2 são as funções de R em X definidas por

$$\begin{array}{rccc} r_1 : & R & \to & X \\ & (a,b) & \mapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} r_2 : & R & \to & X \\ & (a,b) & \mapsto & b \end{array}$$

e p_1 e p_2 são as projeções de $X \times X$ em X. Então a aplicação natural

$$\begin{array}{rccc} \pi_R : & X & \to & X/R \\ & x & \mapsto & [x]_R \end{array}$$

é um coigualizador de r_1 e r_2. De facto, para qualquer $(x, y) \in R$, tem-se

$$(\pi_R \circ r_1)(x, y) = \pi_R(r_1(x, y)) = \pi_R(x) = [x]_R,$$
$$(\pi_R \circ r_2)(x, y) = \pi_R(r_2(x, y)) = \pi_R(y) = [y]_R,$$

pelo que $(\pi_R \circ r_1)(x, y) = (\pi_R \circ r_2)(x, y)$, pois $[x]_R = [y]_R$. Logo $\pi_R \circ r_1 = \pi_r \circ r_2$. Além disso, para qualquer $f : X \to Y$ tal que $f \circ r_1 = f \circ r_2$, existe uma única aplicação $\overline{f} : X/R \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \pi_R = f$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & X \arrow[r, "\pi_R"] \arrow[dr, "f"'] & X/R \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

De facto, a correspondência $\overline{f}$ de X/R em X definida por $\overline{f}([x]_R) = f(x)$, para qualquer $[x]_R \in X/R$, é uma aplicação nas condições indicadas. Comecemos por verificar que $\overline{f}$ é uma aplicação. Para todo $[x]_R \in X/R$, é imediato que $\overline{f}([x]_R) \in Y$, pois $\overline{f}([x]_R) = f(x)$ e f é uma aplicação de X em Y. Além disso, para quaisquer $[x]_R, [y]_R \in X/R$, se $[x]_R = [y]_R$, tem-se $(x, y) \in R$, pelo que

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}([x]_R) & = & f(x) \\ & = & f(r_1(x, y)) \\ & = & (f \circ r_1)(x, y) \\ & = & (f \circ r_2)(x, y) \\ & = & f(r_2(x, y)) \\ & = & f(y) \\ & = & \overline{f}([y]_R). \end{array}$$

Logo $\overline{f}$ é uma aplicação.
Facilmente também se verifica que $\overline{f} \circ \pi_R = f$. Com efeito, as aplicações $\overline{f} \circ \pi_R$ e f têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e, para qualquer $x \in X$,

$$\begin{aligned}(\overline{f} \circ \pi_R)(x) &= \overline{f}(\pi_R(x)) \\ &= \overline{f}([x]_R) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Falta provar a unicidade de $\overline{f}$. Ora, se $\overline{g} : X/R \to Y$ é uma aplicação tal que $\overline{g} \circ \pi_R = f$, vem que $\overline{f} \circ \pi_R = \overline{g} \circ \pi_R$ e uma vez que π_R é sobrejetiva resulta que $\overline{g} = \overline{f}$.

De um modo geral, as relações de equivalência permitem construir coigualizadores para duas aplicações arbitrárias $f, g : X \to Y$. De facto, considerando a menor relação de equivalência R que contém

$$S = \{(f(x), g(x)) \,|\, x \in X\},$$

prova-se que $(Y/R, \pi_R : Y \to Y/R)$ é um coigualizador de f e g.

Definição 3.7.15. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto zero 0, K um objeto de $\mathbf{C}$ e $f : A \to B$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Diz-se que K é um **conúcleo de f** (ou um **cokernel de** f) se existe um $\mathbf{C}$-morfismo $k : B \to K$ tal que (K, k) é um coigualizador de f e $0_{A,B}$.*

O conceito de conúcleo é dual do conceito de núcleo, pelo que os resultados estabelecidos para núcleos podem ser dualizados para conúcleos.

3.8 Produto fibrado e soma amalgamada

O conceito de produto fibrado, frequentemente utilizado em matemática, generaliza conceitos tais como o de interseção e de imagem inversa. A noção de soma amalgada é a noção dual de produto fibrado.

Definição 3.8.1. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Chama-se **produto fibrado** de (f, g) (ou **pullback** de (f, g)) a um par $(P, (f', g'))$, onde P é um objeto de $\mathbf{C}$ e $f' : P \to A$ e $g' : P \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}$ tais que*

(i) *$f \circ f' = g \circ g'$, i.e., tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

(ii) *para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $i : X \to A$ *e* $j : X \to B$ *tais que* $f \circ i = g \circ j$, *existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $k : X \to P$ *tal que* $i = f' \circ k$ *e* $j = g' \circ k$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "k"] \arrow[ddr, "i"'] \arrow[drr, "j"] & & \\
& P \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Se $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g), o diagrama apresentado na alínea (i) da definição anterior diz-se um ***quadrado de produto fibrado*** ou ***quadrado cartesiano.***

Diz-se que uma categoria **C tem produtos fibrados** se existe produto fibrado para qualquer par de morfismos que tenham o mesmo codomínio.

Se $(P, (f', g'))$ e $(Q, (f'', g''))$ são produtos fibrados de (f, g), onde $f : A \to C$ e e $g : B \to C$ são morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$, então P e Q são isomorfos. A prova deste resultado, que é deixada ao cuidado do leitor, é semelhante às provas apresentadas para as proposições 3.6.3 e 3.7.4.

Proposição 3.8.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to C$ *e* $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$. *Se* $(P, (f', g'))$ *e* $(Q, (f'', g''))$ *são produtos fibrados de* (f, g), *então* P *e* Q *são isomorfos.*

Exemplo 3.8.3.

(1) *Na categoria* **Set**, *sejam* A, B, C *conjuntos e* $f : A \to C$ *e* $g : B \to C$ *funções. Então o produto fibrado de* (f, g) *é o par* $(P, (f', g'))$, *onde*

$$P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

e $f' : P \to A$ *e* $g' : P \to B$ *são as funções definidas, para todo* $(a, b) \in P$, *por*

$$f'(a, b) = a \text{ e } g'(a, b) = b.$$

(2) *Nas condições do exemplo anterior se consideramos que* $A, B \subseteq C$ *e que* f *e* g *são, respetivamente, as funções inclusão* $i_1 : A \to C$ *e* $i_2 : B \to C$, *tem-se*

$$\begin{array}{rcl} P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\} & = & \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, i_1(a) = i_2(b)\} \\ & = & \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\} \end{array}$$

e, portanto, $P \cong A \cap B$.

(3) *Se em* (1) *tomarmos* $B = C$ *e* $g = id_B$, *então*

$$\begin{array}{rcl} P = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, f(a) = g(c)\} & = & P = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, f(a) = c)\} \\ & \cong & \{a \in A \mid \exists c \in C, f(a) = c\} \\ & = & f^{\leftarrow}(C). \end{array}$$

Proposição 3.8.4. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\
X_1 \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

um quadrado cartesiano. Se f é um monomorfismo, então j também o é.

Demonstração. Suponhamos que $u, v : B \to A$ são dois morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $j \circ u = j \circ v$. Então

$$\begin{array}{rclcl}
f \circ (i \circ u) & = & (f \circ i) \circ u & = & (g \circ j) \circ u \\
 & = & g \circ (j \circ u) & = & g \circ (j \circ v) \\
 & = & (g \circ j) \circ v & = & (f \circ i) \circ v \\
 & = & f \circ (i \circ v) & &
\end{array}$$

donde segue que $i \circ u = i \circ v$, uma vez que f é um monomorfismo. Assim, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, shift left, "u"] \arrow[dr, shift right, "v"'] \arrow[drr, "j \circ u = j \circ v"] \arrow[ddr, "i \circ u = i \circ v"'] & & \\
 & A \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\
 & X_1 \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

é comutativo, o que implica $u = v$. Logo j é um monomorfismo. □

Proposição 3.8.5. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo de* $\mathbf{C}$*. Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) f é um monomorfismo.

(2) O diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "id_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano.

(3) Existe um objeto X e um morfismo $g : X \to A$ tal que o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano.

Demonstração. (1) ⇒ (2) Suponhamos que $f : A \to B$ é um monomorfismo. Claramente, $f \circ id_A = f \circ id_A$. Além disso, se $i, j : X \to A$ são **C**-morfismos tais que $f \circ i = f \circ j$, prova-se que existe um e um só morfismo $u : S \to A$ tal que $id_A \circ u = i$ e $id_A \circ u = j$. Com efeito, atendendo a que f é um monomorfismo, de $f \circ i = f \circ j$ segue que $i = j$. Logo existe $u = i = j$ tal que $id_A \circ u = i$ e $id_A \circ u = j$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u=i"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& A \arrow[r, "id_A"'] \arrow[d, "id_A"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Desta forma, fica provado que $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f).

(2) ⇒ (3) Imediato.

(3) ⇒ (1) Admitamos que existe um objeto X e um morfismo $g : X \to A$ tais que $(X, (g, g))$ é um produto fibrado de (f, f). Pretendemos mostrar que f é um monomorfismo. Sejam $i, j : S \to A$ morfismos de **C** tais que $f \circ i = f \circ j$. Então, atendendo a que $(S, (g, g))$ é um produto fibrado de (f, f), existe um e um só morfismo $u : S \to X$ tal que $g \circ u = i$ e $g \circ u = j$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& X \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Logo $i = j$ e, portanto, f é um monomorfismo. □

Dualmente, define-se soma amalgamada de morfismos de uma categoria.

Definição 3.8.6. *Sejam* **C** *uma categoria e* $f : C \to A$ *e* $g : C \to B$ *morfismos de* **C**. *Chama-se* ***soma amalgamada*** *de* (f, g) *(ou* ***pushout*** *de* (f, g)*) a um par* $(S, (f', g'))$*, onde* S *é um objeto de* **C** *e* $f' : A \to S$ *e* $g' : B \to S$ *são morfismos de* **C** *tais que* *(i)* $f' \circ f = g' \circ g$, *i.e., tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "g'"'] & S \end{tikzcd}$$

(ii) para quaisquer morfismos $i : B \to X$ *e* $j : A \to X$ *tais que* $i \circ g = j \circ f$*, existe um único morfismo* $k : S \to X$ *tal que* $i = k \circ g'$ *e* $j = k \circ f'$*.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "j"] & \\ B \arrow[r, "g'"] \arrow[drr, "i"'] & S \arrow[dr, "k"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

Se **C** é uma categoria tal que existe soma amalgamada para qualquer par de morfismos que tenham o mesmo domínio, diz-se que a categoria **C tem somas amalgamadas**.

Os duais de todos os resultados estudados para produtos fibrados são válidos para somas amalgamadas.

3.9 Limites e colimites

Nas secções anteriores definiram-se os conceitos de objeto terminal, produto e igualizador, sendo possível identificar semelhanças nas definições apresentadas. O conceito de limite generaliza o que há de comum nestas noções, pelo que objetos terminais, produtos e igualizadores não são mais do que exemplos de limites. Dualmente define-se colimite, conceito este que que tem os objetos inicias, os coprodutos e os coigualizadores como exemplos.

Definição 3.9.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D*. Um* D***-cone*** *ou* ***cone do diagrama*** D *é um par* $(C, (f_i : C \to D_i)_{i\in I})$*, onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $(f_i : C \to D_i)_{i\in I}$ *é uma família de* $\mathbf{C}$*-morfismos, tal que, para cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $g : D_j \to D_k$ *existente em* D*, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} D_j \arrow[rr, "g"] & & D_k \\ & C \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "f_k"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $g \circ f_j = f_k$*. Ao objeto* C *dá-se a designação de* ***vértice*** *do cone.*

Note-se que podem existir diversos cones, com vértices distintos, para um mesmo diagrama D.

Definição 3.9.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D*. Um cone* $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ *do diagrama* D *diz-se um* D***-cone limite*** *ou um* ***limite do diagrama*** D *se, para qualquer outro* D*-cone* $(C, (f_i : C \to D_i)_{i\in I})$*, existe um único morfismo* $u : C \to L$ *tal que, para cada* $i \in I$*,* $\lambda_i \circ u = f_i$*, i.e., tal que cada triângulo de vértices* C*,* L *e* D_i *comuta.*

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "f_j"'] \arrow[ddr, "f_k"] \arrow[ddrr, "f_l"] & & \\
& L \arrow[dl, "\lambda_j"] \arrow[dr, "\lambda_k"'] \arrow[drr, "\lambda_l"] & & \\
D_j & & D_k & D_l
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3.9.3.

(1) *Sejam* A *e* B *dois objetos de uma categoria* $\mathbf{C}$ *e seja* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *formado apenas por dois objetos* A *e* B

$$A \qquad\qquad B$$

Então um D*-cone é um par* $(C, (f, g))$*, onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f : C \to A$ *e* $g : C \to B$ *são* $\mathbf{C}$*-morfismos.*

$$A \xleftarrow{\ f\ } C \xrightarrow{\ g\ } B$$

Assim, um D*-cone limite, caso exista, é um produto de* A *e* B*.*

(2) *Seja* D *um diagrama sem objetos e sem morfismos. Então um cone para o diagrama* D *numa categoria* $\mathbf{C}$ *é qualquer par* $(C, (\,))$*, onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$*. Por conseguinte um* D*-cone limite é um par* $(L, (\,))$*, onde* L *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *tal que, para qualquer outro* D*-cone* $(C, (\,))$ *de* $\mathbf{C}$*, existe um único morfismo* $u : C \to L$*, i.e.,* L *é um objeto terminal.*

(3) *Seja* D *o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

com três objetos e dois morfismos. Um D*-cone é um par* $(P', (f', g', h'))$ *onde* P' *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f' : P \to B$*,* $g' : P \to A$ *e* $h' : P \to C$ *são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que* *o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "h'"'] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

i.e., tais que $f \circ f' = h' = g \circ g'$. Se $(P', (f', g', h'))$ é um D-cone limite, então para qualquer outro D-cone $(P'', (f'', g'', h''))$ existe um único morfismo $u : P'' \to P'$ tal que $f'' = f' \circ u$, $g'' = g' \circ u$ e $h'' = h' \circ u$. Assim, $(P', (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g).

Proposição 3.9.4. *Sejam* **C** *uma categoria, D um diagrama em* **C** *e $(D_i)_{i\in I}$ a família de objetos de D. Um D-cone limite é único a menos de isomorfismo, i.e., se $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ e $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ são D-cones limite, então existe um isomorfismo $i : L \to L'$.*

Demonstração. Seja $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ um D-cone limite. Então, uma vez que $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $u : L \to L$ tal que

$$\text{(i)} \quad \lambda_i \circ u = \lambda_i, \text{ para cada } i \in I,$$

e, atendendo a que $\lambda_i \circ id_L = \lambda_i$, para todo $i \in I$, segue que que $u = id_L$.

Consideremos que $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ também é um D-cone limite. Então, como $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $v : L' \to L'$ tal que

$$\text{(ii)} \quad \lambda'_i \circ v = \lambda'_i, \text{ para cada } i \in I,$$

e, uma vez que $\lambda'_i \circ id'_L = \lambda'_i$, para todo $i \in I$, tem-se $v = id_{L'}$.

Agora, atendendo a que $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone limite e que $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $f : L' \to L$ tal que

$$\text{(iii)} \quad \lambda_i \circ f = \lambda'_i, \text{ para qualquer } i \in I.$$

De forma análoga, como $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone limite e $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $g : L \to L'$ tal que

$$\text{(iv)} \quad \lambda'_i \circ g = \lambda_i, \text{ para qualquer } i \in I.$$

Assim, $\lambda_i \circ f \circ g = \lambda_i$, donde $f \circ g = id_L$. De forma similar conclui-se que $g \circ f = id_{L'}$. Logo f é um isomorfismo. □

Diz-se que uma categoria **C tem limites** (respetivamente, **limites finitos**) se todo o diagrama (respetivamente diagrama finito) D admite D-cone limite.

Proposição 3.9.5. *Seja* **C** *uma categoria. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(1) $\mathbf{C}$ *tem limites finitos.*

(2) $\mathbf{C}$ *tem produtos finitos e igualizadores.*

(3) $\mathbf{C}$ *tem um objeto terminal e produtos fibrados.*

O conceito seguinte é a noção dual de D-cone.

Definição 3.9.6. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, D um diagrama em $\mathbf{C}$ e $(D_i)_{i\in I}$ a família de objetos de D. Um* ***cocone do diagrama*** *D é um par $(C, (f_i : D_i \to C)_{i\in I})$, onde C é um objeto de $\mathbf{C}$ e $(f_i : D_i \to C)_{i\in I}$ é uma família de $\mathbf{C}$-morfismos, tal que, para cada morfismo $g : D_j \to D_k$ existente em D, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} D_j \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_j"'] & & D_k \arrow[dl, "f_k"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $f_k \circ g = f_j$.

Definição 3.9.7. *Um co-cone $(L, (\lambda_i : D_i \to L)_{i\in I})$ de um diagrama D numa categoria $\mathbf{C}$ diz-se um* ***colimite do diagrama*** *D se, para qualquer outro co-cone $(C, (f_i : D_i \to C)_{i\in I})$, existe um único morfismo $u : L \to C$ tal que, para cada $i \in I$, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "u"] & & C \\ & D_i \arrow[ul, "\lambda_i"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., tal que $u \circ \lambda_i = f_i$.

3.10 Funtores

No início deste capítulo foram apresentados vários exemplos de domínios matemáticos formulados como categorias. Atendendo a que as categorias constituem elas própias um domínio matemático, é natural questionar se existem categorias de categorias. De facto, como iremos ver mais à frente, tais categorias existem: os objetos destas categorias são categorias e os morfismos, designados por funtores, são correspondências entre categorias que preservam a sua estrutura.

Definição 3.10.1. *Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Um* ***funtor*** *(ou* ***funtor covariante****) F de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ é um par de funções*

$$(F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D}), F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D}))$$

tal que

- *a função* F_{Ob} *associa a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *um objeto* $F_{Ob}(A)$ *de* $\mathbf{D}$,
- *a função* F_{hom} *associa a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *um* $\mathbf{D}$*-morfismo* $F_{hom}(f) : F_{Ob}(A) \to F_{Ob}(B)$

e que satisfaz as seguintes condições:

(F1) *para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$, $F_{hom}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$;

(F2) *para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$,

$$F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f).$$

Se F *é um funtor de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *escrevemos* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

Definição 3.10.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um* ***cofuntor*** *(ou* ***funtor contravariante****)* F *de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *é um par de funções*

$$(F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D})), F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D}))$$

tal que

- *a função* F_{Ob} *associa a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *um objeto* $F_{Ob}(A)$ *de* $\mathbf{D}$,
- *a função* F_{hom} *associa a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *um* $\mathbf{D}$*-morfismo* $F_{hom}(f) : F_{Ob}(B) \to F_{Ob}(A)$

e que satisfaz as seguintes condições:

(CF1) *para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$, $F_{hom}(id_A) = id_{F_{Ob}(A)}$;

(CF2) $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(f) \circ F_{hom}(g)$, *para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$.

Se F *é um funtor contravariante de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *escrevemos* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

Notação: As funções F_{Ob} e F_{hom} referidas nas definições anteriores são usualmente representadas pelo mesmo símbolo F.

Exemplo 3.10.3.

(1) *Dada uma categoria* $\mathbf{C}$ *pode definir-se um funtor de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{C}$ *que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa o próprio objeto* A *e que a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* f *associa o próprio morfismo* f*. A este funtor, representado por* $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$*, dá-se a designação de* ***funtor identidade em*** $\mathbf{C}$.

(2) *Para qualquer categoria* $\mathbf{C}$ *e qualquer subcategoria* $\mathbf{C}'$ *de* $\mathbf{C}$*, define-se um funtor de* $\mathbf{C}'$ *em* $\mathbf{C}$ *que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa o próprio objeto* A *e que a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* f *associa o próprio morfismo* f*. A este funtor dá-se a designacão de* ***funtor inclusão*** *e representa-se por* $I : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$.

(3) *Define-se um funtor* E : ***Mon*** $\rightarrow$ ***Set****, da categoria dos monóides* ***Mon*** *na categoria dos conjuntos* ***Set****, que a cada monóide* $(M; \cdot^M, 1_M)$ *associa o conjunto* M *e que a cada homomorfismo de monóides* $f : (M; \cdot^M; 1_M) \rightarrow (N; \cdot^N, 1_N)$ *associa a função* $f : M \rightarrow N$*. Este funtor é um exemplo de funtores designados por funtores esquecimento.*

(4) *Considerando monóides* $\mathbf{M} = (M; \cdot^M, 1_M)$ *e* $\mathbf{N} = (N; \cdot^N, 1_N)$ *como categorias, qualquer par* $(\{M\} \rightarrow \{N\} : M \mapsto N, f)$*, onde* $f : M \rightarrow N$ *é um homomorfismo de monóides, é um funtor de* $\mathbf{M}$ *em* $\mathbf{N}$*.*

(5) *Sejam* $\mathbf{P}_1 = (P_1, \leq_1)$ *e* $\mathbf{P}_2 = (P_2, \leq_2)$ *c.p.o.'s. Considerando* $\mathbf{P}_1$ *e* $\mathbf{P}_2$ *como categorias, tem-se* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}_1) = \leq_1$ *e* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}_2) = \leq_2$*. Se* $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ *é um funtor de* $\mathbf{P}_1$ *em* $\mathbf{P}_2$*, então a cada* $\mathbf{P}_1$*-morfismo de* a *em* b *é associado um* $\mathbf{P}_2$*-morfismo de* $F_{Ob}(a)$ *em* $F_{Ob}(b)$*, i.e.,*

$$(a, b) \in \leq_1 \Rightarrow (F_{Ob}(a), F_{Ob}(b)) \in \leq_2 .$$

Por conseguinte F_{Ob} *é uma aplicação isótona de* P_1 *em* P_2*.*

(6) *Dada uma categoria* $\mathbf{C}$ *e a sua categoria dual* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$*, define-se um cofuntor* $D : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ *que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa o próprio objeto* A *e que a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \rightarrow B$ *associa o* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$*-morfismo* $f : B \rightarrow A$*. A este funtor dá--se a designação de* ***cofuntor dualidade****. De forma análoga define-se o cofuntor dualidade* $D^{op} : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{C}$*.*

(7) *Define-se da categoria* ***Set*** *nela própria um cofuntor* P : ***Set*** $\rightarrow$ ***Set*** *que*

- *a cada conjunto* A *fazem corresponder o seu conjunto potência* $\mathcal{P}(A)$*;*
- *a cada aplicação* $f : A \rightarrow B$ *associam a aplicação* $P(f) : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ *definida por*

$$P(f)(B') = f^{\leftarrow}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}, \;\; \forall B' \subseteq B.$$

Definição 3.10.4. *Sejam* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{D}$ *e* $\mathbf{E}$ *categorias. Dados um funtor ou cofuntor* $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ *e um funtor ou cofuntor* $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$*, representa-se por* $G \circ F$ *ou* GF*, o par de funções*

$$(G_{Ob} \circ F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Obj}(\mathbf{E}), G_{hom} \circ F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathrm{Mor}(\mathbf{E})).$$

Proposição 3.10.5. *Sejam* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$*,* $G : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ *e* $H : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ *funtores ou cofuntores. Então,*

(1) *Se* F *e* G *são ambos funtores ou ambos cofuntores,* $G \circ F$ *é um funtor. Caso contrário,* GF *é um cofuntor.*

(2) $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$*.*

(3) $F \circ Id_{\mathbf{A}} = F = Id_{\mathbf{B}} \circ F$.

Atendendo à propriedade (2) da proposição anterior podemos escrever, sem ambiguidade, HGF para representar quer $H(GF)$ quer $(HG)F$.

Definição 3.10.6. *Sejam* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *categorias e* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *funtores ou cofuntores.*

(1) *Se* F *e* G *são ambos funtores ou ambos cofuntores, ao funtor* $G \circ F$ *dá-se a designação de* ***funtor composição de*** G ***com*** F.

(2) *Se* F *é um funtor (respetivamente, cofuntor) e* G *é um cofuntor (respetivamente, funtor), ao confuntor* $G \circ F$ *dá-se a designação de* ***cofuntor composição de*** G ***com*** F.

Definição 3.10.7. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *diz-se um* ***isomorfismo*** *se existe um funtor* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tal que* $F \circ G = Id_{\mathbf{D}}$ *e* $G \circ F = Id_{\mathbf{C}}$.

Um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$, associa a cada objeto A de $\mathbf{C}$ a sua "imagem" $F(A)$ em $\mathbf{D}$ e associa a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : A \to B$ a sua "imagem" $F(f) : F(A) \to F(B)$. Estas "imagens" permitem obter uma representação de $\mathbf{C}$ na categoria $\mathbf{D}$, pelo que é importante perceber quais as propriedades de $\mathbf{C}$ que são preservadas pelo funtor.

Comecemos por observar que a representação de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$, obtida por meio de um funtor F, não é necessariamente uma subcategoria de $\mathbf{D}$.

Considere-se, por exemplo, a categoria $\mathbf{C}$ definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B_1 \arrow[loop above, "id_{B_1}"] & B_2 \arrow[loop above, "id_{B_2}"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[loop above, "id_C"] \end{tikzcd}$$

e seja $\mathbf{D}$ a categoria

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[loop left, "id_{A'}"] \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend left, "g' \circ f'"] & B' \arrow[loop above, "id_{B'}"] \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[loop right, "id_{C'}"] \end{tikzcd}$$

Considerem-se, também, as funções

$$F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D}) \text{ e } F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$$

de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ tais que

- $F_{Ob}(A) = A'$, $F_{Ob}(B_1) = F_{Ob}(B_2) = B'$, $F_{Ob}(C) = C'$;
- para cada objeto X de $\mathbf{C}$, $F_{hom}(id_X) = id_{F(X)}$;
- $F_{hom}(f) = f'$, $F_{hom}(g) = g'$.

Facilmente se verifica que $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$, no entanto, a "imagem" de $\mathbf{C}$ não é uma subcategoria de $\mathbf{D}$; note-se que a referida "imagem"

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[loop above, "id_{A'}"] \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[loop above, "id_{B'}"] \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[loop above, "id_{C'}"] \end{tikzcd}$$

não é uma categoria, uma vez que tem os morfismos $f' : A' \to B'$ e $g' : B' \to C'$, mas não tem a sua composição.

Definição 3.10.8. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor e* P *uma propriedade a respeito de morfismos. Diz-se que:*

- F ***preserva*** P *se, para qualquer morfismo* f *em* $\mathbf{C}$*, sempre que* f *tem a propriedade* P*, o morfismo* $F(f)$ *também a tem.*
- F ***reflete*** P *se, para qualquer morfismo* f *em* $\mathbf{C}$*, sempre que* $F(f)$ *tem a propriedade* P*, o morfismo* f *também a tem.*

Para abreviar, diz-se apenas que F preserva (reflete) X se F preserva (reflete) a propriedade de ser X.

A respeito das propriedades de morfismos, é simples verificar que os funtores não preservam necessariamente monomorfismos e epimorfismos.

Considerando a categoria **2**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

e a categoria $\mathbf{C}$ definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[loop left, "g"] \arrow[r, "f = f \circ g"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

verifica-se que morfismo f é um monomorfismo na categoria **2**, mas não é um monomorfismo na categoria $\mathbf{C}$. Por conseguinte o funtor inclusão da categoria **2** na categoria $\mathbf{C}$ não preserva monomorfismos.

Proposição 3.10.9. *Os funtores preservam inversos direitos, inversos esquerdos e isomorfismos.*

Demonstração. Apresenta-se a prova de que os funtores preservam inversos direitos, ficando ao cuidado do leitor a prova dos restantes casos.
Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Se f é um inverso direito, então existe um $\mathbf{C}$-morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por conseguinte $F(g \circ f) = F(id_A)$, donde segue que $F(g) \circ F(f) = id_{F(id_A)}$. Logo $F(f)$ é um inverso direito em $\mathbf{D}$. □

Embora os funtores preservem inversos direitos, inversos esquerdos e isomorfismos, não refletem necessariamente estas propriedades. Por exemplo, o funtor F da categoria $\mathbf{2}$ na categoria $\mathbf{1}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A' \arrow[loop above, "id_{A'}"] \end{tikzcd}$$

que associa cada objeto da categoria $\mathbf{2}$ ao objeto A' da categoria $\mathbf{1}$ e que associa cada morfismo da categoria $\mathbf{2}$ ao mofismo $id_{A'}$, não reflete isomorfismos, uma vez que o morfismo $id_{A'}$ é um isomorfismo na categoria $\mathbf{1}$, mas o morfismo f da categoria $\mathbf{2}$ não é.

Os exemplos anteriores permitem perceber que a "imagem" de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$ pode não dizer muito a respeito de $\mathbf{C}$, pelo que tem interesse estudar funtores que preservam/refletem mais propriedades.

Definição 3.10.10. *Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Um functor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ diz-se:*

(1) ***injetivo em objetos*** *se, para quaisquer objetos A e B de $\mathbf{C}$,*

$$F(A) = F(B) \Rightarrow A = B;$$

(2) ***fiel*** *se para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : A \to B$*

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g;$$

(3) *um **mergulho** se é injetivo em objetos e é fiel;*

(4) ***sobrejetivo nos objetos*** *se, para todo o objeto B de $\mathbf{D}$, existe um objeto A em $\mathbf{C}$ tal que $F(A) = B$;*

(5) ***representativo*** *se, para todo o objeto B de $\mathbf{D}$, existe um objeto A em $\mathbf{C}$ tal que $F(A) \cong B$;*

(6) ***pleno*** *se, para quaisquer objetos A e B de $\mathbf{C}$ e para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo $g : F(A) \to F(B)$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : A \to B$ tal que $F(f) = g$.*

De modo análogo, define-se ***cofuntor injetivo em objetos***, ***cofuntor fiel***, ***cofuntor mergulho***, ***cofuntor sobrejetivo nos objetos***, ***cofuntor representativo*** e ***cofuntor pleno***.

Exemplo 3.10.11.

(1) *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $\mathbf{C}'$ *uma subcategoria de* $\mathbf{C}$. *O funtor inclusão* $I : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ *é injetivo em objetos e é fiel; caso* $\mathbf{C}'$ *seja uma subcategoria plena de* $\mathbf{C}$*, o funtor* I *é pleno.*

(2) *O funtor esquecimento* $E : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$*, que a cada monóide* $(M; \cdot^M, 1_M)$ *associa o conjunto* M *e que a cada homomorfismo de monóides* $f : (M; \cdot^M, 1_M) \to (N; \cdot^N, 1_N)$ *associa a função* $f : M \to N$*, é, claramente, um funtor fiel, pois a homormofismos de monóides diferentes são associadas funções diferentes. Contudo, atendendo a que existem morfismos da categoria* $\mathbf{Set}$ *que não correspondem a homomorfismos de monóides, o funtor* E *não é pleno. Este funtor também não é injetivo em objetos, uma vez que é possível ter monóides distintos com o mesmo conjunto suporte.*

(3) *Sejam* $\mathbf{M}$ *e* $\mathbf{N}$ *as categorias correspondentes aos monóides* $(M; \cdot^M, 1_M)$ *e* $(N; \cdot^N, 1_N)$ *e seja* $f : M \to N$ *um homomorfismo de monóides sobrejetivo e não injetivo. Então* f *é um funtor pleno, mas não é fiel.*

Proposição 3.10.12. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor.*

(1) *Se* F *é um funtor fiel, então* F *reflete monomorfismos e epimorfismos.*

(2) *Se* F *é um funtor fiel e pleno, então* F *reflete inversos direitos e inversos esquerdos.*

Demonstração. (1) Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo e suponhamos que $F(f)$ é um monomorfismo. Sejam $g, h : C \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Então $F(f \circ g) = F(f \circ h)$, donde $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$. Uma vez que $F(f)$ é um monomorfismo, tem-se $F(g) = F(h)$ e, atendendo a que F é fiel, resulta que $g = h$. Logo F reflete monomorfismos.

De modo análogo prova-se que F reflete epimorfismos.

(2) Mostremos que se F é fiel e pleno, então F reflete inversos direitos. Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $F(f) : F(A) \to F(B)$ é um inverso direito. Então existe um $\mathbf{D}$-morfismo $g' : F(B) \to F(A)$ tal que $g' \circ F(f) = id_{F(A)}$. Uma vez que F é pleno, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $g : B \to A$, tal que $F(g) = g'$. Por conseguinte $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$, donde $F(g \circ f) = F(id_A)$. Então, atendendo a que F é fiel, vem que $g \circ f = id_A$ e, portanto, f é um inverso direito. Logo F reflete inversos direitos.

A prova de que F reflete inversos esquerdos é similar. $\square$

3.11 Categorias de categorias

As propriedades dos funtores sugerem o estudo de categorias cujos objetos são categorias e cujos morfismos são funtores.

Um quintuplo $\mathbf{K} = (K, M, \text{dom}, \text{cod}, \circ)$ onde

- K é uma classe de categorias;
- M é a classe de todos funtores entre as categorias de K;
- dom é a função que a cada funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ de M associa a categoria $\mathbf{C}$;
- cod é a função que a cada funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ de M associa a categoria $\mathbf{D}$;
- $\circ$ é a função que a cada par de funtores $(F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{E})$ de M associa o funtor $G \circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$;
- para cada categoria $\mathbf{C}$ de K, o morfismo $id_{\mathbf{C}}$ é o funtor $Id_{\mathbf{C}}$

é uma categoria.

Exemplo 3.11.1. *São exemplos de categorias de categorias:*

(1) *A categoria* **Mon**. *Já observamos anteriormente que cada monóide pode ser visto como uma categoria, logo* **Mon** *pode ser vista como uma categoria de categorias.*

(2) *A categoria que tem como único objeto uma categoria* $\mathbf{C}$ *e que tem como único morfismo o funtor* $Id_{\mathbf{C}}$.

(3) *A categoria cuja classe de objetos é formada por todas as categorias finitas e cuja coleção de morfismos é a coleção de funtores entre estas categorias.*

(4) *A categoria* **Cat** *cuja classe de objetos é formada por todas as categorias pequenas e cuja coleção de morfismos é formada por todos os funtores entre categorias pequenas.*

Os casos anteriores são exemplos de categorias de categorias que não são problemáticos. No entanto, existem certas limitações na definição de categorias cujos objetos são categorias. Por exemplo, definindo como categoria ***normal*** uma categoria que não é um dos seus objetos, será que existe alguma categoria que inclua todas as categorias normais? Usando um argumento similar ao do Paradoxo de Russel, para provar que não existe o conjunto de todos os conjuntos normais, somos levados a concluir que não existe a categoria de todas as categorias normais. De facto, se admitirmos que existe a categoria $\mathbf{N}$ de todas as categorias normais, temos dois casos a considerar: $\mathbf{N}$ é uma categoria normal ou $\mathbf{N}$ não é normal. Se considerarmos que $\mathbf{N}$ é uma categoria normal, então $\mathbf{N}$ é um dos elementos de $\mathbf{N}$, o que contradiz a hipótese de $\mathbf{N}$ ser normal. Logo $\mathbf{N}$ não pode ser uma categoria normal. Mas se $\mathbf{N}$ não é uma categoria normal, então $\mathbf{N}$ não é um dos elementos de $\mathbf{N}$, donde segue que $\mathbf{N}$ é normal (contradição). O argumento associado ao Paradoxo de Russel também é usado para argumentar que não existe o conjunto de todos os conjuntos, pelo que, por argumentos análogos, é discutível a existência da categoria de todas as categorias. Atendendo a que para o nosso estudo não há a necessidade de considerar uma categoria universal de categorias, limitamos o estudo de categorias de categorias a casos em que não se coloquem este tipo de problemas.

3.12 Transformações naturais

Os morfismos de uma categoria permitem relacionar objetos e cada funtor relaciona categorias. Seguidamente iremos ver como as transformações naturais permitem relacionar funtores.

Definição 3.12.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores. Chama-se* ***transformação natural de*** F ***em*** G*, e representa-se por* $\tau : F \to G$*, a uma função de* $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *em* $\mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ *que a cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *associa um* $\mathbf{D}$*-morfismo* $\tau_C : F(C) \to G(C)$ *tal que, para cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : C \to C'$*, o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & G(C') \end{tikzcd}$$

i.e., $\tau_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \tau_C$*.*
Para cada objeto C *de* $\mathbf{C}$*, o morfismo* τ_C *diz-se uma* ***componente da transformação natural****.*

Exemplo 3.12.2.

(1) *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor. A função que a cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *associa o* $\mathbf{D}$*-morfismo* $id_{F(C)}$ *é uma transformação natural de* F *em* F*, designada por* ***transformação identidade*** *e representada por* id_F*.*

(2) *Dado um grupo* $\mathcal{G} = (G; *, \ ^{-1}, 1_G)$*, define-se grupo dual de* $\mathcal{G}$ *como sendo o grupo* $\mathcal{G}^{op} = (G; *^{op}, \ ^{-1}, 1_G)$*, onde* $*^{op}$ *é a operação definida por* $a *^{op} b = b * a$*. Considerando a noção de grupo dual, pode definir-se o funtor* $Op : \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Grp}$ *que a cada grupo* $\mathcal{G}$ *da categoria* $\boldsymbol{Grp}$ *associa o seu grupo dual* $\mathcal{G}^{op}$ *e que a cada homomorfismo de grupos* $f : G \to H$ *associa o homomorfismo de grupos* $f^{op} : G^{op} \to H^{op}$*, definido por* $f^{op}(a) = f(a)$*.*
A função τ *que a cada grupo* $\mathcal{G}$ *da categoria* $\boldsymbol{Grp}$ *associa o homomorfismo* $\tau_{\mathcal{G}} : Id_{\boldsymbol{Grp}}(\mathcal{G}) \to Op(\mathcal{G})$*, definido por* $\tau_{\mathcal{G}}(g) = g^{-1}$*, é uma transformação natural do funtor* $Id_{\boldsymbol{Grp}}$ *no funtor* Op*.*

(3) *Seja $P : \textbf{\textit{Set}} \to \textbf{\textit{Set}}$ o cofuntor que:*

- *a cada conjunto A faz corresponder o seu conjunto potência $\mathcal{P}(A)$;*
- *a cada aplicação $f : A \to B$ associa a aplicação $P(f) : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ definida por*

$$P(f)(B') = f^{\leftarrow}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}, \ \ \forall B' \subseteq B.$$

Então PP é um funtor e a função que a cada conjunto A associa a função $\tau_A : A \to PP(A)$, definida por $\tau_A(a) = \{\{a\}\}$, para todo $a \in A$, define uma transformação natural $\tau : Id_{\textbf{\textit{Set}}} \to PP$.

As transformações naturais podem ser combinadas de forma a definir novas transformações naturais.

Proposição 3.12.3. *Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funtores e $\tau : F \to G$ e $\eta : G \to H$ transformações naturais. Então a função que a cada objeto C de $\mathbf{C}$ associa o $\mathbf{D}$-morfismo $\eta_C \circ \tau_C$, representado por $(\eta \circ \tau)_C$, é uma transformação natural de F em H.*

Demonstração. Comecemos por verificar que a função indicada está bem definida. Uma vez que η e τ são transformações naturais, a cada objeto C de $\mathbf{C}$, as transformações naturais τ e η associam, respetivamente, $\mathbf{D}$-morfismos $\tau_C : F(C) \to G(D)$ e $\eta_C : G(C) \to H(C)$. Por conseguinte, para cada objeto C de $\mathbf{C}$, $\eta_C \circ \tau_C$ é um $\mathbf{D}$-morfismo. Além disso, para quaisquer objetos C e C' de $\mathbf{C}$, se $C = C'$, tem-se $(\eta \circ \tau)_C = (\eta \circ \tau)_{C'}$, uma vez que as transformações naturais η e τ são funções. Por último, verifica-se que, para cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : C \to C'$, o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "(\eta\circ\tau)_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(C) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(C') \arrow[r, "(\eta\circ\tau)_{C'}"'] & H(C')
\end{tikzcd}$$

De facto, como τ e η são transformações naturais, para cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : C \to C'$, tem-se

$$G(f) \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ F(f) \quad \text{e} \quad H(f) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ G(f).$$

Logo

$$\begin{array}{rclcl}
H(f) \circ (\eta \circ \tau)_C & = & H(f) \circ (\eta_C \circ \tau_C) & = & (H(f) \circ \eta_C) \circ \tau_C \\
& = & (\eta_{C'} \circ G(f)) \circ \tau_C & = & \eta_{C'} \circ (G(f) \circ \tau_C) \\
& = & \eta_{C'} \circ (\tau_{C'} \circ F(f)) & = & (\eta_{C'} \circ \tau_{C'}) \circ F(f) \\
& = & (\eta \circ \tau)_{C'} \circ F(f). & &
\end{array}$$

Assm, a função que a cada objeto C de $\mathbf{C}$ associa o $\mathbf{D}$-morfismo $\eta_C \circ \tau_C$ é uma transformação natural de F em H. □

Definição 3.12.4. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$ *e* $\eta : G \to H$ *transformações naturais. Designa-se por* ***composta de*** η ***e*** τ*, e representa-se por* $\eta \circ \tau$*, a transformação natural de* F *em* H *que a cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *associa o* $\mathbf{D}$*-morfismo* $(\eta \circ \tau)_C$*.*

A respeito da composição de transformações naturais, é simples verificar as propriedades seguintes.

Proposição 3.12.5. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G, H, L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$*,* $\eta : G \to H$ *e* $\sigma : H \to L$ *transformações naturais. Então*

(1) $id_G \circ \tau = \tau$ *e* $\tau \circ id_G = \tau$*.*

(2) $(\sigma \circ \eta) \circ \tau = \sigma \circ (\eta \circ \tau)$*.*

As transformações naturais e os funtores também podem ser combinados de forma a definir novas trasformações naturais.

Proposição 3.12.6. *Sejam* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{D}$ *e* $\mathbf{E}$ *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$*,* $H : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$ *e* $G, G' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *funtores e* $\tau : G \to G'$ *uma transformação natural. Então:*

(1) *A função que a cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *associa o* $\mathbf{E}$*-morfismo* $(\tau F)_C = \tau_{F(C)}$*, define uma transformação natural* $\tau F : GF \to G'F$*.*

(2) *A função que a cada objeto* D *de* $\mathbf{D}$ *associa o* $\mathbf{C}$*-morfismo* $(H\tau)_D = H(\tau_D)$*, define uma transformação natural* $H\tau : HG \to HG'$*.*

Demonstração. (1) Verifica-se facilmente que a função indicada está bem definida. De facto, uma vez que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$, para cada objeto C de $\mathbf{C}$, $F(C)$ é um objeto de $\mathbf{D}$. Então, considerando que τ é uma transformação natural de G em G', $\tau_{F(C)} : G(F(C)) \to G'(F(C))$ é um $\mathbf{E}$-morfismo. Além disso, para quaisquer objetos C e C' de $\mathbf{C}$, se $C = C'$, tem-se $(\tau F)_C = (\tau F)_{C'}$. Finalmente, verifica-se que, para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $f : C \to C'$, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
GF(C) \arrow[r, "(\tau F)_C"] \arrow[d, "GF(f)"'] & G'F(C) \arrow[d, "G'F(f)"] \\
GF(C') \arrow[r, "(\tau F)_{C'}"'] & G'F(C')
\end{tikzcd}$$

De facto, como $F(f) : F(C) \to F(C')$ é um $\mathbf{D}$-morfismo e τ é uma transformação natural de G em G', tem-se

$$G'(F(f)) \circ \tau_{F(C)} = \tau_{F(C')} \circ G(F(f)),$$

donde

$$(G'F(f)) \circ (\tau F)_C = (\tau F)_{C'} \circ (GF(f)).$$

Do que foi provado conclui-se que a função indicada é uma transformação natural de GF em $G'F$.

(2) A prova é análoga à anterior. $\square$

Definição 3.12.7. *Sejam* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias e* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores. Se* $\tau : F \to G$ *é uma transformação natural tal que, para cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$, τ_C *é um isomorfismo, então* τ *diz-se um* ***isomorfismo natural*** *e escreve-se* $\tau : F \xrightarrow{\sim} G$.

Proposição 3.12.8. *Sejam* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *e* $\mathbf{E}$ *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $H : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$ *e* $G, G' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *funtores e* $\tau : G \to G'$ *uma transformação natural. Se* τ *é um isomorfismo natural, então:*

(1) *a função que a cada objeto* D *de* $\mathbf{D}$ *associa o* $\mathbf{E}$*-morfismo* $(\tau^{-1})_D = (\tau_D)^{-1}$ *é um isomorfismo natural de* G' *em* G*, representado por* $\tau^{-1} : G' \to G$*, e tem-se* $\tau \circ \tau^{-1} = id_{G'}$ *e* $\tau^{-1} \circ \tau = id_G$.

(2) τF *é um isomorfismo natural e* $(\tau F)^{-1} = \tau^{-1} F$.

(3) $H\tau$ *é um isomorfismo natural e* $(H\tau)^{-1} = H\tau^{-1}$.

Demonstração. Demonstramos a propriedade (1), ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

(1) É simples verificar que a função está bem definida. De facto, atendendo a que τ é um isomorfismo natural de G em G', a cada objeto D de $\mathbf{D}$ é associado um $\mathbf{E}$-isomorfismo $\tau_D : G(D) \to G'(D)$. Logo, para cada objeto D de $\mathbf{D}$, $(\tau^{-1})_D = (\tau_D)^{-1}$ é um $\mathbf{E}$-isomorfismo. Além disso, como τ é uma função e o inverso de cada isomorfismo é único, para quaisquer objetos D e D' de $\mathbf{D}$ tais que $D = D'$, tem-se $\tau_D^{-1} = \tau_{D'}^{-1}$. Por último, para cada $\mathbf{D}$-morfismo $f : D \to D'$, tem-se

$$G'(f) \circ \tau_D = \tau_{D'} \circ G(f)$$

donde

$$(\tau_{D'})^{-1} \circ G'(f) \circ \tau_D \circ (\tau_D)^{-1} = (\tau_{D'})^{-1} \circ \tau_{D'} \circ G(f) \circ (\tau_D)^{-1}$$

e, por conseguinte,

$$(\tau_{D'})^{-1} \circ G'(f) = G(f) \circ (\tau_D)^{-1}.$$

Logo

$$(\tau^{-1})_{D'} \circ G'(f) = G(f) \circ (\tau_D^{-1}).$$

Assim, a função que a cada objeto D de $\mathbf{D}$ associa o $\mathbf{E}$-morfismo $(\tau^{-1})_D = (\tau_D)^{-1}$ é um isomorfismo natural de G' em G.

Facilmente também se verifica que $\tau \circ \tau^{-1} = id_{G'}$. De facto, $\tau \circ \tau^{-1}$ e $id_{G'}$ são ambas transformações naturais de G' em G' e, para cada objeto D de $\mathbf{D}$,

$$(\tau \circ \tau^{-1})_D = \tau_D \circ (\tau^{-1})_D = \tau_D \circ (\tau_D)^{-1} = id_{G'(D)} = (id_{G'})_D.$$

De modo análogo prova-se que $\tau^{-1} \circ \tau = id_G$. □

Definição 3.12.9. *Sejam* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *categorias e* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores. O funtor* F *diz-se* ***equivalente*** *ao funtor* G *se existe um isomorfismo natural* $\tau : F \to G$.

Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ categorias e $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funtores. Note-se que caso exista um isomorfismo natural $\tau : F \to G$, também existe o isomorfismo natural $\tau^{-1} : G \to F$. Assim, caso exista um isomorfismo natural entre os funtores diz-se apenas que os funtores F e G são **equivalentes** e escreve-se $F \approx G$.

A propriedade associativa da composição de transformações naturais e a existência de uma transformação natural identidade id_F associada a cada funtor F, sugerem a possibilidade de se definir uma categoria cuja classe de objetos é a classe $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ formada por todos os funtores de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$ e cujos morfismos são todas as transformações naturais entre estes funtores. Porém, tendo em atenção a definição de categoria, é necessário colocar algumas restrições na definição de categorias de funtores. Note-se que se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são categorias arbitrárias e F e G são funtores de $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$, não é garantido que a classe $[F, G]$ de todas as transformações naturais de F em G seja um conjunto. Sendo assim, restringimos o estudo de categorias de funtores de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ ao caso em que $\mathbf{C}$ é uma categoria pequena, pois neste caso é garantido que, para quaisquer funtores F e G de $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$, a classe $[F, G]$ é um conjunto.

Nestas condições podemos considerar a categoria $([\mathbf{C}, \mathbf{D}], T, \mathrm{dom}, cod, \circ)$, onde

- $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ é a classe de todos os funtores de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$;
- T é a classe de todas as transformações naturais entre funtores de $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$;
- dom é a função que a cada transformação natural $\eta : F \to G$ associa o funtor F;
- cod é a função que a cada transformação natural $\eta : F \to G$ associa o funtor G;
- $\circ$ é a função que a cada par de transformaçoes naturais $(\tau : F \to G, \eta : G \to H)$ associa a transformação natural $\eta \circ \tau : F \to H$;
- para cada funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, o morfismo id_F é a transformação natural $id_F : F \to F$.

3.13 Equivalência de categorias

Várias categorias têm bastantes propriedades em comum sem que exista necessariamente um isomorfismo entre elas. Assim, surge a necessidade de definir um conceito"menos exigente" que o de categorias isomorfas. A noção de isomorfismo natural de funtores leva à definição de categorias equivalentes.

Definição 3.13.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. As categorias* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *dizem-se **equivalentes**, e escreve-se* $\mathbf{C} \approx \mathbf{D}$*, se existem funtores* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *e* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tais que* $GF \approx Id_{\mathbf{C}}$ *e* $FG \approx Id_{\mathbf{D}}$.

Proposição 3.13.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. As categorias* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *são equivalentes se e só se existe um funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *pleno, fiel e representativo.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Admitamos que as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são equivalentes. Então existem funtores $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e isomorfismos naturais $\tau : Id_{\mathbf{C}} \overset{\sim}{\longrightarrow} GF$ e $\eta : FG \overset{\sim}{\longrightarrow} Id_{\mathbf{D}}$.
Pela definição de η é imediato que F é representativo.
Para provar que F é fiel, admitamos que $f, g : C \to C'$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $F(f) = F(g)$. Então, atendendo a que os diagramas seguintes são comutativos,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "f"'] & GF(C) \arrow[d, "GF(f)"] \\ C' \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & GF(C') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "g"'] & GF(C) \arrow[d, "GF(g)"] \\ C' \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & GF(C') \end{tikzcd}$$

tem-se

$$\tau_{C'} \circ f = GF(f) \circ \tau_C = GF(g) \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ g$$

donde segue que $f = g$, uma vez que $\tau_{C'}$ é um isomorfismo. De forma análoga, prova-se que G também é fiel.
Finalmente, para provar que F é pleno, consideremos um $\mathbf{D}$-morfismo $h : F(C) \to F(C')$. Se definirmos o morfismo $g = \tau_{C'}^{-1} \circ G(h) \circ \tau_C$, então temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} GF(C) \arrow[d, "G(h)"'] & C \arrow[l, "\tau_C"'] \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "g"'] & GF(C) \arrow[d, "GF(g)"] \\ GF(C') & C' \arrow[l, "\tau_{C'}"] \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & GF(C') \end{tikzcd}$$

Consequentemente, $G(h) \circ \tau_C = GF(g) \circ \tau_C$ e, uma vez que τ_C é um isomorfismo, segue que $G(h) = GF(g)$. Agora, considerando que G é fiel, obtem-se $h = F(g)$. Portanto F é pleno.

($\Leftarrow$) Admitamos que $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ é um funtor pleno, fiel e representativo. Como F é representativo, para cada objeto D de $\mathbf{D}$, pode escolher-se um objeto C em $\mathbf{C}$ tal que $F(C) \cong D$. Escolha-se e fixe-se um objeto C nas condições indicadas e defina-se $G(D) = C$. Escolha-se, agora, um isomorfismo $\eta_D : D \to FG(D)$ em $\mathbf{D}$. Assim, para quaisquer objetos D e D' de $\mathbf{D}$ e para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo $h : D \to D'$, tem-se o morfismo $\eta_{D'} h (\eta_D)^{-1} : FG(D) \to FG(D')$. Uma vez que F é fiel e pleno, existe um único morfismo $i : G(D) \to G(D')$ em $\mathbf{C}$ tal que $F(i) = \eta_{D'} h (\eta_D)^{-1}$, i.e., tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "h"'] & FG(D) \arrow[d, "F(i)"] \\ D' \arrow[r, "\eta_{D'}"'] & FG(D') \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Defina-se $G(h) = i$. Verificamos, agora, que G, tal como definido anteriormente, é um funtor de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{C}$. De facto, temos uma função bem definida. Por outro lado, para qualquer objeto D de $\mathbf{D}$,

$$FG(id_D) = \eta_D id_D (\eta_D)^{-1} = id_{FG(D)} = F(id_{G(D)})$$

e, uma vez que F é fiel, tem-se $G(id_D) = id_{G(D)}$. Além disso, para quaisquer $\mathbf{D}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$,

$$\begin{array}{rcl} FG(g \circ f) & = & \eta_C \circ g \circ f \circ (\eta_A)^{-1} \\ & = & (\eta_C \circ g \circ (\eta_B)^{-1}) \circ (\eta_B \circ f \circ (\eta_A)^{-1}) \\ & = & FG(g) \circ FG(f) \\ & = & F(G(g) \circ G(f)) \end{array}$$

e, novamente porque F é fiel, tem-se $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$. Portanto G é um funtor de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{C}$.
Considerando que, para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo $h : D \to D'$, o diagrama anterior é comutativo, também é possível concluir que a correspondência que a cada objeto D de $\mathbf{D}$ associa o isomorfismo $\eta_D : D \to FG(D)$ define um isomorfismo natural $\eta : Id_{\mathbf{D}} \to FG$. Assim, $FG \approx Id_{\mathbf{D}}$.
Seguidamente prova-se que também se tem $GF \approx Id_{\mathbf{C}}$, ou seja, que existe um isomorfismo natural $\tau : GF \to Id_{\mathbf{C}}$. Para tal, comecemos por observar que, para cada objeto C de $\mathbf{C}$,

$$(\eta F)_C = \eta_{F(C)} : F(C) \to FGF(C)$$

é um isomorfismo em $\mathbf{D}$. Então, $((\eta F)_C)^{-1} : FGF(C) \to F(C)$ é também um isomorfismo de $\mathbf{D}$ e, como é F fiel e pleno, existe um único morfismo $\tau_C : GF(C) \to C$ em $\mathbf{C}$ tal que $F(\tau_C) = ((\eta F)_C)^{-1}$. É simples verificar que a correspondência que a cada objeto C de $\mathbf{C}$ associa o morfismo $\tau_C : GF(C) \to C$ é um isomorfismo natural de GF em $Id_{\mathbf{C}}$. De facto, como F reflete isomorfismos, para cada objecto C de $\mathbf{C}$, τ_C é um isomorfismo. Além disso, para cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : C \to C'$, tem-se o seguinte diagrama em $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} GF(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "GF(f)"'] & C \arrow[d, "f"] \\ GF(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & C' \end{tikzcd}$$

Aplicando o functor F a este diagrama, e considerando a definição de τ_C, $\tau_{C'}$ e η, obtemos um diagrama comutativo em $\mathbf{D}$. Então, como F é fiel, segue que, para cada objeto C de $\mathbf{C}$, o diagrama anterior também é comutativo. Logo $\tau : GF \to Id_{\mathbf{C}}$ é um isomorfismo natural e, portanto, $GF \approx Id_{\mathbf{C}}$.
Portanto as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são equivalentes.

$\square$

Exemplo 3.13.3.

(1) *Seja* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *a categoria dos espaços vetoriais finitos sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e seja* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *a categoria das matrizes sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *(os objetos desta categoria são os inteiros positivos; dados* $m, n \in \mathbb{N}$*, o conjunto dos morfismos de* m *em* n *é o conjunto das matrizes do tipo* $m \times n$ *sobre* $\mathbb{K}$*; a composição de morfismos é a multiplicação de matrizes). Seja* G *o funtor de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *em* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *tal que: para cada objeto* V *de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$*,* $G(V) = \mathrm{dimV}$*; para cada morfismo* f *de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$*,* $G(f)$ *é a matriz do morfismo* f *relativamente a bases fixas. O funtor* G *é fiel e pleno, uma vez que cada matriz* $A_{m \times n} : m \to n$ *representa (relativamente a bases fixas) uma, e uma só, transformação linear. O funtor* G *também é representativo, uma vez que cada inteiro* m *é a dimensão do espaco vetorial* $\mathbb{K}^m$*. Assim, as categorias* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *e* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *são equivalentes.*

(2) *Seja* P *um conjunto pré-ordenado (i.e., um conjunto munido de uma relação binária* $\preceq$ *reflexiva e transitiva) visto como uma categoria. Considere-se a relação de equivalência* θ *definida em* P *por*

$$x \ \theta \ y \Leftrightarrow x \preceq y \quad \text{e} \quad y \preceq x, \qquad x, y \in P.$$

No conjunto quociente P/θ*, a relação*

$$[x]_\theta \leq [y]_\theta \Leftrightarrow x \preceq y, \qquad x, y \in P$$

é uma ordem.
A aplicação canónica $F : P \to P/\theta$ *é compatível com as relações binárias definidas nos conjuntos, pelo que* F *é um funtor de* P *em* P/θ*.*
É simples verificar que F *é uma equivalência de categorias. De facto, da sobrejetividade de* F *podemos concluir que* F *é um funtor representativo. De*

$$\forall x, y \in P, \ x \preceq y \Leftrightarrow [x]_\theta \leq [y]_\theta$$

conclui-se que F *é um funtor pleno. Da não existência de dois morfismos de um objeto para outro, segue que* F *é fiel.*

Bibliografia

[1] Adámek, J., Herrlich, H., Strecker, G. - Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats, Wiley-Interscience, 1990.

[2] Awodey, S. - *Category Theory*, Oxford University Press, 2010.

[3] Bergman, C. - *Universal Algebra: Fundamentals and Selected Topics*, CRC Press, 2011.

[4] Burris, S. e Sankappanavar, H.P. - *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1981.

[5] Davey, B. A., Priestley, H. A., *Lattices and order*, Cambridge University Press, 2002.

[6] Grätzer, G. - *Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1979.

[7] Mitchell, B. - *Theory of Categories*, Academic Press, 1965.

[8] Pareigis, B. - *Categories and Functors*, Academic Press, 1970.

[9] Popescu, N., Popescu, L. - *Theory of Categories*, Editura Academiei, 1979.

[10] Simmons, H. - *An Introduction to Category Theory*, Cambridge University Press, 2011.