Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Álgebra Linear LCC Teste 1 Duração: 1h45 4/11/2019 A

Nome: ____________________ **Número:** __________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Dadas duas matrizes $A \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, a matriz

   - ☐ $AB + BA$ está bem definida.
   - ☐ A^TB está bem definida.
   - ☐ $\left(A + B^T\right)^T$ pode ser calculada.
   - ☐ $AB \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, com $\alpha \neq 0$.

   - ☐ A comuta com A^T para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$.
   - ☐ A e A^T nunca são comutáveis.
   - ☐ A é uma matriz elementar quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   - ☐ A é um produto de matrizes elementares para α e β não nulos.

3. Se A é um matriz quadrada de ordem n tal que $A^3 = \frac{1}{4}I_n$, então

   - ☐ A é invertível e $A^{-1} = 4A^2$.
   - ☐ A não é invertível.
   - ☐ A^2 é invertível e $(A^2)^{-1} = A$.
   - ☐ $(A^3)^{-1} = I_n$.

4. Se A é uma matriz quadrada de ordem n e B é tal que $A \xrightarrow[l_1 \longleftarrow 2l_1]{} B$, então

   - ☐ $\det(-B) = \det(-A)$.
   - ☐ $\det(2B) = \det(A)$.
   - ☐ $\det(AB) = 2\det(A)$.
   - ☐ $\det(B) = 2\det(A)$.

5. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sobre a característica de A sabemos que

   - ☐ $\operatorname{car}(A) = 2$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.
   - ☐ $\operatorname{car}(A) = 2$ se $b = a$.
   - ☐ $\operatorname{car}(A) \geq 3$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.
   - ☐ $\operatorname{car}(A) = 3$ se $a \neq 0$.

6. Se $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 & \beta - 3 \end{array}\right]$ é a matriz ampliada de um sistema de equações lineares, com α e β parâmetros reais, então

   - ☐ o sistema é possível e determinado se $\alpha \neq 1$.
   - ☐ o sistema é possível e indeterminado se $\alpha = 1$.
   - ☐ o sistema é sempre possível.
   - ☐ o sistema é impossível se $\beta = 3$.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Se A e B são duas matrizes invertíveis de ordem n tais que $\left[\left(A^{-1}\right)^T B\right]^{-1} = I_n$, mostre que $B = A^T$.

2. [3.5 valores] Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e x_4 com a seguinte matriz simples e vetor dos termos independentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique que $\boldsymbol{s}_1 = (1, 4, -3, -1)$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

   (b) Verifique que o sistema homogéneo associado $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é possível e indeterminado, usando o método de eliminação de Gauss, e apresente a solução geral deste sistema.

   (c) Se $\boldsymbol{s}$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, então $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}_1$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Mostre este resultado e use-o para apresentar duas outras soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

3. [3 valores] Considere a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Use A^{-1} para resolver as equações matriciais

      i. $2A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

      ii. $AA^T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$.

4. [3 valores] Suponha que existe uma matriz A tal que $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\det(A) = 3$.

   (a) Calcule $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big)$ e verifique que $\det\big(\operatorname{adj}(A)\big) = \big[\det(A)\big]^2$. Conclua que $\operatorname{adj}(A)$ e A são matrizes invertíveis.

   (b) Mostre que, em geral, para uma matriz invertível A de ordem n se tem
$$A = \det(A) \cdot \big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}.$$

   (c) Sem calcular $\big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}$, determine o elemento na posição $(3, 2)$ de A.

   Sugestão: recorde que a segunda coluna de $\big[\operatorname{adj}(A)\big]^{-1}$ é a soluçao do sistema $\operatorname{adj}(A)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e use a Regra de Cramer.

5. [1.5 valores] Um matriz A de ordem n diz-se involutiva se $A^2 = I_n$ e idempotente se $A^2 = A$. Mostre que

   (a) se N é involutiva, então $\frac{1}{2}(I_n + N)$ e $\frac{1}{2}(I_n - N)$ são idempotentes e $(I_n + N)(I_n - N) = O$.

   (b) toda a matriz involutiva se pode escrever como a diferença de duas matrizes idempotentes, cujo produto é a matriz nula.