Universidade do Minho
Escola de Ciências
DMat

Cálculo
LCC
2019/2020

Folha 2 - **Sucessões de números reais**

Exercício 1 Encontre uma expressão para o termo geral u_n da sucessão apresentada, assumindo que o padrão dos primeiros termos continua.

a) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

b) $2, 7, 12, 17, \ldots$

c) $0, 2, 0, 2, 0, 2, \ldots$

d) $-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots$

e) $2, 10, 50, 250, \ldots$

f) $-\frac{1}{2}, -1, -2, -4, -8, \ldots$

Exercício 2 Diga quais das seguintes sucessões são constantes, alternadas, minoradas, majoradas, limitadas ou monótonas:

a) $u_n = 1$;

b) $v_n = (-1)^n$;

c) $w_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$;

d) $x_n = \frac{n}{n+2}$;

e) $y_n = \frac{3}{n+5}$;

f) $z_n = \begin{cases} n^4 & \text{se } n \leq 10, \\ 2 & \text{se } n > 10; \end{cases}$

g) $u_n = \frac{n+1}{n}$;

h) $v_n = (-1)^{n+1} n$;

i) $w_n = \frac{n^2-1}{n^2}$;

j) $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$;

k) $y_n = n^2 + 2$;

l) $z_n = (-1)^n \cos(n\pi)$.

Exercício 3 Diga se é limitada a sucessão $(u_n)_n$ definida a seguir pelo seu termo geral:

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

b) $u_n = (-1)^n n^4$;

c) $u_n = 2n + 1$;

d) $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é par}, \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar}; \end{cases}$

e) $u_n = (-1)^n \cos(2n^3 + 1)$;

f) $u_n = 1 - \frac{1}{3^n}$;

g) $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ é par}, \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar}; \end{cases}$

h) $u_n = \frac{(-1)^n + 7n}{5n}$;

i) $u_n = 5^n$.

Exercício 4 Mostre que a sucessão $(b_n)_n$ de termo geral $b_n = \frac{n}{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, é uma sucessão decrescente.

Exercício 5 Mostre que
$$\lim_n \frac{1}{n} = 0,$$
usando a definição.

Exercício 6 Das seguintes sucessões, diga quais as que têm limite:

a) $y_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par ,} \\ \dfrac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar ;} \end{cases}$

b) $u_n = \dfrac{1}{2}$;

c) $v_n = \dfrac{1}{n}$;

d) $w_n = n$.

Exercício 7 Admitindo que a sucessão $(a_n)_n$ definida por
$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad n \geq 1,$$
é convergente, encontre o seu limite.

Exercício 8 Considere a sucessão $(u_n)_n$ definida por
$$u_1 = 0, \quad u_{n+1} = \frac{2+u_n}{3}\ , \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Calcule os primeiros 4 termos da sucessão.

b) Admitindo que a sucessão é convergente, determine o seu limite.

Exercício 9 Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

a) se $(u_n)_n$ é limitada então $(u_n)_n$ é convergente;

b) se $(u_n)_n$ não é limitada então $(u_n)_n$ é divergente;

c) se $(u_n)_n$ não é limitada então toda a sua subsucessão é divergente;

d) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são divergentes então $(u_n + v_n)_n$ é divergente;

e) se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são divergentes, e $v_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_n$ é divergente.

Exercício 10 Que pode dizer de $\lim_n u_n$ em cada um dos seguintes casos:

a) $(u_n)_n$ possui uma subsucessão convergente para a e outra convergente para b, com $b \neq a$;

b) $(u_n)_n$ é tal que $(u_{2n})_n$ e $(u_{2n-1})_n$ convergem para a;

c) $(u_n)_n$ é decrescente e $u_n \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

d) $(u_n)_n$ é uma sucessão crescente em $]2,5[$;

e) $(u_n)_n$ é crescente e de termos negativos;

f) $(u_n)_n$ é decrescente e de termos positivos.

Exercício 11 Calcule, se existir:

a) $\lim\limits_n \dfrac{n^2}{n^3+1}$;

b) $\lim\limits_n \dfrac{n^2-4}{n+5}$;

c) $\lim\limits_n (-1)^n \dfrac{n}{n^4+3}$

d) $\lim\limits_n \dfrac{n^3+2}{2n^2+n+1}$;

e) $\lim\limits_n \dfrac{7-n^5}{3n^5+n^3+2n^2}$;

f) $\lim\limits_n \dfrac{n^3+2n}{5-3n^2}$;

g) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$;

h) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2n}$;

i) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}$;

j) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$;

k) $\lim\limits_n \left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)^{n-1}$;

l) $\lim\limits_n \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{2n+1}$;

m) $\lim\limits_n \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$;

n) $\lim\limits_n \dfrac{n^2 \operatorname{sen}(1+n^3)}{1+n^3}$;

o) $\lim\limits_n \dfrac{\cos n}{n^2+1}$

p) $\lim\limits_n \dfrac{3^n+4^n+5^n}{5^n}$;

q) $\lim\limits_n \dfrac{5^n+2}{4^n}$;

r) $\lim\limits_n \dfrac{e^n-1}{5^n}$;

s) $\lim\limits_n \dfrac{3^{n-1}}{7^n}$;

t) $\lim\limits_n \dfrac{\cos(n\pi)+\cos(2n\pi)}{n\,\pi}$;

u) $\lim\limits_n \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$;

v) $\lim\limits_n \dfrac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4}$;

w) $\lim\limits_n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

x) $\lim\limits_n \left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

Exercício 12 Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

a) Se $(a_n)_n$ é tal que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1,1\}$ então $(a_n)_n$ não é convergente.

b) A sucessão $\left(1+(-1)^n\right)_n$ é convergente.

c) Se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0,1\}$ então $(u_n)_n$ é divergente.

d) A sucessão $\left((-1)^n + \dfrac{1}{n}\right)_n$ é convergente.

e) Se $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito então $(u_n)_n$ é convergente.

f) Se $(u_n)_n$ e $(w_n)_n$ são tais que $\lim\limits_n (u_n w_n) = 0$ então $\lim\limits_n u_n = 0$ ou $\lim\limits_n w_n = 0$.

Exercício 13 Mostre que se $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são sucessões convergentes e tais que $|u_n - v_n| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_n \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.

Exercício 14 Apresente um exemplo de, ou justifique porque não existe:

a) uma sucessão convergente e não monótona;

b) uma sucessão crescente e convergente para zero;

c) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\lim_n |u_n| = 2$ mas $(u_n)_n$ não converge para 2;

d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\lim_n |u_n| = 0$ mas $(u_n)_n$ não converge para 0.

Exercício 15 Mostre que a soma das primeiras dez potências de base $\frac{1}{2}$ e expoente natural é $\frac{1023}{1024}$.

Exercício 16 A soma dos dois primeiros termos de uma progressão geométrica decrescente é 8 e a sua diferença é 4.

a) Calcule o primeiro termo e a razão.
b) Determine a soma dos seis primeiros termos.

Exercício 17 A soma dos sete primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ é 254. Calcule o primeiro termo.

Exercício 18 O primeiro e o sexto termos de uma progressão geométrica são, respetivamente, 4 e $\frac{1}{8}$. Calcule a soma dos dez termos consecutivos a partir do sétimo inclusivé.

Exercício 19 Numa progressão geométrica de razão 2, o primeiro termo é $\frac{1}{512}$. Calcule a soma dos cinco termos consecutivos a partir do décimo (inclusivé).

Exercício 20 Considere a sucessão definida por

$$u_n = 3 \times 2^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Prove que $(u_n)_n$ é uma progressão geométrica.
b) Calcule a soma S_n dos n primeiros termos da sucessão.
c) Calcule $\lim_n S_n$.

Exercício 21 Considere a progressão geométrica cujos primeiros termos são $27, 9, 3, \dots$.

a) Escreva uma expressão que lhe permita calcular a soma S_n dos n primeiros termos da progressão.
b) Calcule $\lim_n S_n$.

Exercício 22 Determine a soma de todos os termos da progressão geométrica de que se conhece:

a) $r = \frac{1}{3}$ e $u_1 = -9$;
b) $u_4 = \frac{1}{2}$ e $u_5 = -\frac{1}{4}$;
c) $u_2 = -30$ e $u_3 = -90$.