Geometria
LMat & LCC

Exame de recurso
17/06/2019

Proposta de resolução

1 $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e_1}, \vec{e_2})\}$, $\mathcal{R}' = \{O', (\vec{v_1}, \vec{v_2})\}$

$O = (1,1)_{\mathcal{R}'}$ $\quad \begin{cases} \vec{v_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{v_2} = \vec{e_1} \end{cases}$

a Resolução 1:

Seja $M \in \mathcal{A}$. Se $M = (x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ e $M = (x_1', x_2')_{\mathcal{R}'}$, sabemos que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \text{ onde } O' = (w_1, w_2)_{\mathcal{R}}$$

Como $O = (1,1)_{\mathcal{R}'}$ e $O = (0,0)_{\mathcal{R}}$ vem que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Logo: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ é a expressão da mudança de referencial de $\mathcal{R}'$ para $\mathcal{R}$.

Para $A = (1,-1)_{\mathcal{R}}$ temos

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' + x_2' = 3 \\ x_1' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2' = 3 \\ x_1' = 0 \end{cases}$$

Logo $A = (0,3)_{\mathcal{R}'}$

Resolução 2:

$$\begin{cases} \vec{v_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \vec{v_2} = \vec{e_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e_1} = \vec{v_2} \\ \vec{e_2} = \vec{v_1} - \vec{v_2} \end{cases}$$

Logo: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ é a expressão da mudança de referencial de $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}'$.

Para $A = (1,-1)_{\mathcal{R}}$ temos: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Logo $A = (0,3)_{\mathcal{R}'}$.

b Como $\mathcal{R} = \{O, (\vec{e_1}, \vec{e_2})\}$ é ortonormado temos:

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} = (\vec{e_1} + \vec{e_2}) \cdot (\vec{e_1} + \vec{e_2}) = \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + 2\, \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = 2$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (\vec{e_1} + \vec{e_2}) \cdot \vec{e_1} = \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} + \vec{e_2} \cdot \vec{e_1} = 1$

$\vec{v_2} \cdot \vec{v_2} = \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = 1$

Logo $\cos \measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \dfrac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\| \|\vec{v_2}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

A matriz de mudança de base de $\mathcal{B}' = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ para $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$

é tal que $\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -1 < 0 \quad (\Rightarrow \varepsilon = -1)$

Logo $\operatorname{sen} \measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = \varepsilon\sqrt{1-c^2}$ com $\varepsilon = -1$ e $c = 1/\sqrt{2}$

Assim $\operatorname{sen} \measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = -\sqrt{1 - 1/2} = -1/\sqrt{2}$

Como $\cos \measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = 1/\sqrt{2}$ e $\operatorname{sen} \measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = -1/\sqrt{2}$

Resulta que a medida de $\measuredangle(\vec{v_1}, \vec{v_2})$ é $2\pi - \pi/4 = 7\pi/4$.

2. $r = A + \langle \vec{v} \rangle = (0,0,1) + \langle (1,1,1) \rangle$, $P = (2,1,1)$

a. Como s é a reta paralela a r incidente em P, então
$s = P + \langle \vec{v} \rangle = (2,1,1) + \langle (1,1,1) \rangle$

Se $(x,y,z) \in s$, temos: $(x,y,z) = (2,1,1) + \lambda(1,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+z \\ y = z \\ \lambda = z-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+z \\ y = z \end{cases}$$

é um sistema de equações cartesianas de s.

b. Como r e s são paralelas, $d(r,s) = d(P,r) = d(P,Q)$ onde Q é a projeção ortogonal de P em r.

Temos $Q = A + \dfrac{\vec{AP}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$

$\vec{AP} = P - A = (2,1,0)$ $\quad \vec{AP}\cdot\vec{v} = 2+1 = 3$ $\quad \|\vec{v}\|^2 = 3$

$Q = (0,0,1) + \frac{3}{3}(1,1,1) = (1,1,2)$

$\vec{PQ} = Q - P = (1,1,2) - (2,1,1) = (-1,0,1)$ $\quad \|\vec{PQ}\| = \sqrt{2}$

Logo $d(r,s) = d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{2}$

c. Consideremos $r' = B + \langle \vec{w} \rangle = (0,0,0) + \langle (1,0,0) \rangle$

Para mostrar que r e r' são enviesadas é necessário mostrar que $\dim \langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 3$

Temos $\det(\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$. Logo $\dim\langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 3$ e r e r' são enviesadas.

3. Seja $M = (x,y,z)$ um ponto genérico de A, $\Omega = (w_1, w_2, w_3)$ um ponto fixo de A_3 e λ um número real não nulo.

A homotetia de centro Ω e razão é a aplicação afim definida por
$h(M) = \Omega + \lambda\vec{\Omega M}$

Em coordenadas, temos então
$h(x,y,z) = (w_1, w_2, w_3) + \lambda(x - w_1, y - w_2, z - w_3) =$

$= \big((1-\lambda)w_1, (1-\lambda)w_2, (1-\lambda)w_3\big) + \lambda(x,y,z).$

Comparando com a aplicação dada no enunciado

$h(x,y,z) = (3x-2, 3y-4, 3z+6) = (-2,-4,6) + 3(x,y,z)$

vemos claramente que h é uma homotetia de razão $\lambda = 3$ e que o seu centro verifica $(1-\lambda)(w_1,w_2,w_3) = (-2,-4,-6)$, ou seja, $-2(w_1,w_2,w_3) = (-2,-4,-6) \Rightarrow (w_1,w_2,w_3) = (1,2,-3)$.

4. $\sigma(x,y) = (2-y, 1-x)$

a. Representação matricial de σ

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A matriz principal de σ é $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Para mostrar que σ é isometria, basta mostrar que $AA^T = Id$

Temos $AA^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$

Portanto, σ é isometria.

b. Temos que $\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$

Calculemos os pontos fixos de σ:

$$\sigma(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} 2-y = x \\ 1-x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = 2 \\ x+y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2 = 1 \ \lightning$$

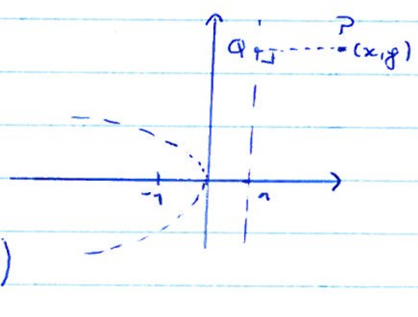
Logo σ não possui pontos fixos.

Usando o teorema da classificação das isometrias do plano, como $\det(A) = -1 < 0$, σ só pode ser ou uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Como σ não tem pontos fixos, então σ é uma reflexão deslizante.

c. Temos $\sigma\circ\sigma(x,y) = \sigma(2-y, 1-x) = \big(2-(1-x), 1-(2-y)\big) = (1+x, -1+y)$
$= (x,y) + (1,-1)$

Claramente $\sigma\circ\sigma$ é a translação segundo o vetor $\vec{v} = (1,-1)$.

5. $A = (-1,0)$, $r: x = 1$



Seja $P = (x,y) \in \mathcal{A}$.

Temos $d(P,A) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ e que $d(P,r) = d(P,Q)$ onde Q é a projeção ortogonal de P em r.

De forma geométrica (ou através de cálculo)

Conseguimos ver que $Q = (1, y)$. Logo $d(P, r) = d(P, Q) =$

$= \sqrt{(x-1)^2 + (y-y)^2} = |x-1|$

Portanto: $d(P, A) = d(P, r) \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x-1| \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 2x + \cancel{1} + y^2 = \cancel{x^2} - 2x + \cancel{1} \Leftrightarrow y^2 = -4x$

P satisfaz a equação canónica de uma parábola. $(a = -1)$

Por construção o foco é o ponto $A = (-1, 0)$, a diretriz é a reta r de equação cartesiana $x = 1$ e o vértice é $(0,0)$.