Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 1

1. Preliminares de lógica

1.1 Das seguintes frases indique aquelas que são proposições:

(a) O gato é um mamífero.

(b) É meio-dia e meia.

(c) $(25 \times 2) + 7$.

(d) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.

(e) 2 é par e $2 + x = 3$.

(f) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?

(g) $4 < 3$.

(h) Se $x \geq 2$, então $x^3 \geq 1$.

(i) Se sairmos hoje à noite, amanhã não nos levantamos cedo.

(j) Telefona-me hoje à noite se estiveres em casa.

1.2 De entre as seguintes palavras sobre o alfabeto do Cálculo Proposicional, indique, justificando, aquelas que pertencem ao conjunto $\mathcal{F}^{CP}$, por outras palavras, aquelas que são fórmulas do Cálculo Proposicional:

(a) $(\neg (p_1 \vee p_2))$ (c) $((p_3 \wedge p_1) \vee)$ (e) $(\perp)$
(b) $((\neg p_5) \rightarrow (\neg p_6))$ (d) $((p_0 \wedge (\neg p_0)) \rightarrow \perp)$ (f) $(p_0 \wedge p_1 \vee p_2)$

1.3 Representando as frases *Estou feliz*, *Estou a ver um filme*, e *Estou a comer pipocas* por p_0, p_1 e p_2, respetivamente, traduza as seguintes fórmulas para linguagem corrente:

(a) $p_2 \rightarrow p_0$ (c) $p_0 \vee \neg p_1$ (e) $(p_1 \vee p_2) \rightarrow p_0$ (g) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_2)$
(b) $p_1 \leftrightarrow p_2$ (d) $\neg p_0 \wedge \neg p_1$ (f) $\neg(p_1 \rightarrow p_2)$ (h) $(\neg p_0 \wedge p_1) \rightarrow \neg p_2$

1.4 Considere as proposições *7 é par*, *3+1=4* e *24 é divisível por* 8 representadas, respetivamente, por p_0, p_1 e p_2.

(a) Escreva fórmulas que representem as afirmações:

(i) $3 + 1 \neq 4$ e 7 é ímpar.

(ii) 7 é par se 24 não é divisível por 8.

(iii) Nem $3 + 1 \neq 4$, nem 24 é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes fórmulas:

(i) $p_0 \vee (\neg p_2)$ (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1)$ (iii) $(\neg p_2) \rightarrow (\neg p_1 \vee p_0)$

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 2

1.5. Das seguintes proposições indique as que são verdadeiras:

(a) $(e < 4) \wedge (e^2 < 9)$

(b) 1 e -1 são soluções da equação $x^3 - 1 = 0$.

(c) 64 é múltiplo de 3 ou de 4.

(d) $\sqrt{530} < 25 \to 530 < 25^2$

(e) 7^4 é par se e só se $7^4 + 1$ é ímpar.

(f) Se π é um número natural, então $0 = 1$.

(g) $2^8 = 512$ se $2^7 = 256$.

(h) $0 = 0 \leftrightarrow 2^8 = 512$

1.6. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo Proposicional:

(a) $p_0 \vee (\neg p_0)$

(b) $\neg(p_0 \vee \perp)$

(c) $p_0 \wedge \neg(p_0 \vee p_1)$

(d) $p_0 \wedge (\neg p_0 \vee p_1)$

(e) $\neg(p_0 \to \neg p_1)$

(f) $p_0 \leftrightarrow (p_1 \vee p_0)$

(g) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_0 \vee p_1)$

(h) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(i) $p_0 \to (\perp \to p_2)$

(j) $\perp \wedge \neg(p_1 \to p_2)$

(k) $(p_0 \leftrightarrow \neg p_2) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(l) $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \wedge p_1) \to p_2)$

1.7. Suponha que p_0 representa uma proposição verdadeira, p_1 uma proposição falsa, p_2 uma proposição falsa e p_3 uma proposição verdadeira. Quais das seguintes fórmulas são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $p_0 \vee p_2$

(b) $(p_2 \wedge p_3) \vee p_1$

(c) $\neg(p_0 \wedge \perp)$

(d) $\neg p_3 \vee \neg p_2$

(e) $(p_3 \wedge p_0) \vee (p_1 \wedge p_2)$

(f) $p_2 \vee (p_3 \vee (p_0 \wedge p_1))$

(g) $p_2 \to p_1$

(h) $p_0 \leftrightarrow p_2$

(i) $(p_1 \leftrightarrow \perp) \wedge p_0$

(j) $p_3 \to (p_0 \to \neg p_3)$

(k) $((p_1 \to p_3) \leftrightarrow p_3) \wedge \neg p_0$

(l) $(p_3 \to p_0) \leftrightarrow \neg(p_2 \vee p_1)$

1.8. Admitindo que p_0, p_1 e p_2 representam proposições e que $p_0 \leftrightarrow p_1$ é falsa, o que pode dizer sobre o valor lógico das seguintes fórmulas?

(a) $p_0 \wedge p_1$

(b) $p_0 \vee p_1$

(c) $p_0 \to p_1$

(d) $(p_0 \wedge p_2) \leftrightarrow (p_1 \wedge p_2)$

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 3

1.9. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

(b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

(c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

(d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

(e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

(f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

(g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

(h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

1.10. Considere as seguintes afirmações:

- Se o João gosta de literatura portuguesa, então gosta de ler.
- O João gosta de ler banda desenhada ou não gosta de ler.
- O João não gosta de banda desenhada, mas gosta de literatura portuguesa.

(a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases simples.

(b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

1.11. De entre as seguintes fórmulas, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

(a) $p_0 \to (p_0 \lor p_1)$

(b) $\neg(p_0 \land p_1) \to (p_0 \lor p_1)$

(c) $(p_0 \to p_1) \leftrightarrow (\neg p_1 \to \neg p_0)$

(d) $(p_0 \to (p_0 \lor p_1)) \land p_1$

(e) $(p_0 \lor \neg p_0) \to (p_0 \land \neg p_0)$

(f) $\neg(p_0 \to (p_1 \to p_0))$

1.12. Indique quais dos pares de fórmulas que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\neg(p_0 \land p_1)$; $\neg p_0 \lor \neg p_1$

(b) $p_0 \to p_1$; $p_1 \to p_0$

(c) $\neg(p_0 \to p_1)$; $p_0 \land (p_1 \to \perp)$

(d) $p_0 \to (p_1 \to p_2)$; $\neg(\neg p_2 \to \neg p_1) \to \neg p_0$

1.13. Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas os conetivos $\lor$ e $\neg$.

(a) $p_0 \to p_1$

(b) $\neg(p_0 \land (p_1 \land p_2))$

(c) $p_0 \land p_1$

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 4

1.14. Considere os três seguintes predicados $p(n)$ sobre os números inteiros:

(i) $n^2 \geq 0$

(ii) $n^2 < 0$

(iii) $n < 5 \to n < 2$

Para cada um destes predicados:

(a) para cada valor de n, indique se a correspondente proposição é ou não verdadeira;

(b) indique se a proposição $\exists_n\, p(n)$ é verdadeira;

(c) indique se a proposição $\forall_n\, p(n)$ é verdadeira.

1.15. Suponha que o domínio de variação de x é um dado conjunto de coelhos e considere os predicados na variável x:

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \textit{ tem pelo branco}, \\ q(x): & x \textit{ gosta de cenouras}. \end{array}$$

Traduza as seguintes quantificações por palavras:

(a) $\forall_x\, p(x)$

(b) $\exists_x\, q(x)$

(c) $\forall_x\, (p(x) \wedge q(x))$

(d) $\exists_x\, (p(x) \vee q(x))$

(e) $\forall_x\, (p(x) \to q(x))$

(f) $\exists_x\, (q(x) \leftrightarrow \neg p(x))$

1.16. Suponha que o domínio de variação de x é um dado conjunto de cães e e considere os predicados na variável x:

$$\begin{array}{ll} p(x): & x \textit{ é preto}, \\ q(x): & x \textit{ tem quatro anos}, \\ r(x): & x \textit{ tem manchas brancas}. \end{array}$$

Traduza as seguintes quantificações para linguagem simbólica.

(a) Existe um e um só cão preto.

(b) Não existem cães pretos.

(c) Todos os cães têm quatro anos de idade.

(d) Existe um cão preto com manchas brancas.

(e) Todos os cães com quatro anos têm manchas brancas.

(f) Existe um cão que tem quatro anos somente se não tem manchas brancas.

(g) Os cães pretos são precisamente os que não têm quatro anos.

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 5

1.17. Exprima cada uma das seguintes frases como quantificações:

(a) A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais.

(b) A equação $x^2 - 4 = 0$ tem uma única solução positiva.

(c) 1000000 não é o maior número natural.

(d) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(e) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

1.18. Considere a seguinte proposição:

Todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale à negação da proposição anterior:

(a) Todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

(b) Nem todos os Hobbits são criaturas pacíficas.

(c) Existem Hobbits que são criaturas conflituosas.

(d) Nem todos os Hobbits são criaturas conflituosas.

1.19. Considere as seguintes proposições, em que o universo de cada uma das quantificações é o conjunto dos números reais.

(i) $\forall_x \exists_y \; x + y = 0$

(ii) $\exists_x \forall_y \; x + y = 0$

(iii) $\exists_x \forall_y \; x + y = y$

(iv) $\forall_x \; (x > 0 \rightarrow \exists_y \; xy = 1)$

Para cada proposição p indicada anteriormente:

(a) indique se p é ou não verdadeira;

(b) apresente, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição que seja equivalente a $\neg p$.

1.20. Seja $p(x)$ um predicado sobre a variável x e seja a um elemento específico do domínio de variação de x. De entre as seguintes proposições, indique aquelas que são necessariamente verdadeiras.

(a) $p(a) \rightarrow \forall_x p(x)$

(b) $\forall_x p(x) \rightarrow p(a)$

(c) $p(a) \rightarrow \exists_x p(x)$

(d) $\exists_x p(x) \rightarrow p(a)$

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 6

1.22. Prove que, qualquer que seja o número natural n, se n é múltiplo de 6, então n é múltiplo de 2 e de 3.

1.23. Mostre que a soma de dois naturais ímpares é um natural par.

1.24. Mostre que o produto de dois naturais ímpares é um natural ímpar.

1.25. Mostre que, para quaisquer naturais m e n, se mn é par, então m é par ou n é par.

1.26. Justificando, diga se a seguinte proposição é verdadeira: para quaisquer naturais m e n, mn é par se e só se m é par ou n é par.

1.27. Prove que, para todo o natural n, n^2 é ímpar se e só se n é ímpar.

1.28. Encontre um contra-exemplo para cada uma das afirmações seguintes:

(a) Se $x^4 = 1$, com $x \in \mathbb{R}$, então $x = 1$.

(b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.

(c) Se $a^2 > b^2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a > b$.

(d) Se $n = p^2 + q^2$, com p, q primos, então n é primo.

1.29. Mostre que não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

1.30. Prove que, para quaisquer reais x e y, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, então $x \neq 3$.

1.31. Mostre que existe um e um só número inteiro x tal que, para todo o inteiro y, $x + y = y$.

Universidade do Minho — LCC
Departamento de Matemática — 2025/2026

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 7

2. Indução nos naturais

2.1. Seja $p(n)$ o seguinte predicado sobre os naturais:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

(a) Mostre que o predicado $p(n)$ é hereditário, ou seja, mostre que, para cada $k \in \mathbb{N}$, se $p(k)$ é verdadeira, então $p(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Podemos concluir que a proposição "$\forall_{n\in\mathbb{N}}\, p(n)$" é verdadeira?

2.2. Prove, por indução, as seguintes propriedades:

(a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

(e) $n! \geq n^2$, para todo $n \geq 4$.

(f) $5^n - 1$ é múltiplo de 4, para todo $n \geq 1$.

(g) $7n < 2^n$, para todo $n \geq 6$.

(h) $2^n > n^2$, para todo $n \geq 5$.

(i) $a^n \leq b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq a \leq b$.

2.3. Considere a sucessão de Fibonacci F_n (com $n \in \mathbb{N}$), definida por:

$$F_1 = 1;\ F_2 = 1;\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \text{para todo } n \geq 3.$$

Recorrendo ao Princípio de Indução Completa, mostre que: para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq (3/2)^{n-2}$.

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 8

3. Teoria elementar de conjuntos

3.1. Considere o conjunto $A = \left\{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\right\}$. Indique todos os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

(a) $\left\{a \in A : a^2 \in \mathbb{Z}\right\}$

(b) $\left\{a^2 \in \mathbb{R} : a \in A \wedge a^2 \in A\right\}$

(c) $\left\{b \in \mathbb{Z} : \exists_{a \in A} \ b = a^2\right\}$

(d) $\left\{b \in \mathbb{R} : \exists_{a \in A} \ b^2 = a\right\}$

3.2. Descreva, por compreensão, cada um dos conjuntos que se seguem:

(a) $A = \{-1, 1\}$

(b) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

(c) $B = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(d) $D = \{4, 9, 16, 25\}$

3.3. De entre os conjuntos que se seguem, indique aqueles que são iguais.

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$, $\{1, 2\}$ e $\left\{n \in \mathbb{N} : 0 < n^2 \leq 4\right\}$

(b) $\{r, t, s\}$, $\{s, t, r, s\}$, $\{t, s, t, s\}$ e $\{s, t, r, t\}$

(c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{\emptyset\}$ e $\{\}$

(d) $\{1, \{-1\}\}$, $\{1, -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$

3.4. Seja $A = \{5, 11, \{5, 11\}, \{0\}, \emptyset\}$. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

(a) $5 \in A$ (b) $\{5\} \in A$ (c) $\{5, 11\} \in A$ (d) $A \subseteq \mathbb{R}$

(e) $\{5, 11\} \subseteq A$ (f) $0 \in A$ (g) $\emptyset \in A$ (h) $\{0, 5, 11\} \subseteq A$

3.5. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) $1 \in \{1\}$ (c) $\{1\} \in \{1\}$ (e) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ (g) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

(b) $1 \in \{\{1\}\}$ (d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$ (f) $\{1\} \subseteq \{1\}$ (h) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$

3.6. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (c) $\emptyset \notin \emptyset$ (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

3.7. Considere que A é um subconjunto de B e que B é um subconjunto de C. Considere ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ e que $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

(a) $a \in C$ (b) $b \in A$ (c) $d \in B$ (d) $c \notin A$ (e) $e \notin A$ (f) $f \notin A$

3.8. Dê exemplos de conjuntos A e B tais que se tenha simultaneamente:

(a) $A \subseteq B$ e $A \notin B$

(b) $A \nsubseteq B$ e $A \in B$

(c) $A \nsubseteq B$ e $A \notin B$

(d) $A \subseteq B$ e $A \in B$

3.9. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists_{y \in \mathbb{N}} \ x = 2y\}$ e $C = \left\{x^2 : x \in A\right\}$. Determine $A \cup C$, $A \cup B$, $C \cup B$, $A \cup A$, $A \cap B$, $B \cap B$, $B \cup C \cup A$, $C \backslash A$, $A \backslash B$ e $B \backslash A$.

3.10. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto X. Prove que

(a) $A \cup A = A$

(b) $A \cap B = B \cap A$

(c) $A \backslash B \subseteq A$

(d) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$

(e) se $A \cup B = \emptyset$ então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$

(f) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 9

3.11. Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$ então $B = C$.

3.12. Dê exemplos de conjuntos A, B e C para os quais se tenha, respetivamente:

(a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ (b) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

3.13. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira, para quaisquer conjuntos A, B e C.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cup B$.

(c) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$ então $C \subseteq A \cap B$.

(d) Se $C \subseteq (A \cap B)$ então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$.

3.14. Sejam $A = \{1, 5, 7\}$ e $B = \{\emptyset, \{1, 5, 7\}\}$. Indique $\mathcal{P}(A)$ e $\mathcal{P}(B)$ e diga, justificando, se $A \in \mathcal{P}(B)$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3.15. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$.

3.16. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira, para quaisquer conjuntos A e B: (a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$; (b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3.17. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{5\}$. Determine $A \times C$, $C \times A$, $(A \times C) \setminus (C \times A)$, $A \times B \times C$, $A \times \emptyset \times C$, C^3 e $C^3 \times B$.

3.18. Sejam A, B e C conjuntos. Prove que $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$.

3.19. Sejam A, B e C conjuntos tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

3.20. Seja A um conjunto finito com n elementos. Para cada valor de n, indique qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos.

3.21. Considere os conjuntos $A_i = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2i\}$ e $B_i = [i, i+1[$, para cada $i \in \mathbb{N}_0$. Considere ainda as famílias de conjuntos:

(a) $\mathcal{F}_1 = (A_i)_{i \in \{1,2,3\}}$; (b) $\mathcal{F}_2 = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$; (c) $\mathcal{F}_3 = (B_i)_{i \in \{1,2,3\}}$; (d) $\mathcal{F}_4 = (B_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$.

Para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, calcule $\bigcup \mathcal{F}_k$ e $\bigcap \mathcal{F}_k$.

3.22. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos.

(a) Mostre que, para cada $k \in I$, $A_k \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

(b) Seja B um conjunto e considere a família de conjuntos $(B_i)_{i \in I}$, onde, para cada $i \in I$, $B_i = A_i / B$. Mostre que $(\bigcap\limits_{i \in I} A_i)/B = \bigcap\limits_{i \in I} B_i$.

3.23. Indique todas as partições do conjunto $\{1, 2, 3\}$. Repita o exercício para o conjunto $\{1, \{2\}, \mathbb{N}\}$.

3.24. Mostre que $\Pi = \{B_i : i \in \mathbb{N}_0\}$ é uma partição de $\mathbb{R}_0^+$, para os conjuntos B_i definidos no exercício **3.21**, e dê exemplo de outras partições de $\mathbb{R}_0^+$.

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 10

4. Funções

4.1. Considere os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

(a) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que não seja função.

(b) Dê exemplo de uma correspondência de A para B que seja função.

(c) Quantas funções existem de A para B e quantas de B para A?

4.2. Considere as funções:

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$;

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definida por $f(x) = 2x - 1$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Determine:

(a) $g(\{-1, 0, 1\})$; (b) $g(]-\infty, 0])$; (c) $g(\mathbb{R})$;

(d) $g^{-1}(\{0\})$; (e) $g^{-1}(]-\infty, 0])$; (f) $f(\{4, 6, 9\})$;

(g) $f(\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y\in\mathbb{N}}\ x = 3y\})$; (h) $f^{-1}(\{2\})$; (i) $f^{-1}(\{3, 4, 5\})$.

4.3. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$. Indique, caso exista, uma função de A para B que seja: (a) não injetiva; (b) injetiva; (c) sobrejetiva; (d) não sobrejetiva.

4.4. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_1(x) = 2x$; $f_2 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$;

$f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, $f_3(x) = x^2$; $f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $f_4(x) = |x| + 2$.

4.5. Sejam f, g e h as funções de $\mathbb{N}_0$ para $\mathbb{N}_0$ definidas por:

$$f(n) = n + 1; \qquad g(n) = 2n; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

(a) $f \circ f$; (b) $f \circ g$; (c) $g \circ f$; (d) $g \circ h$;

(e) $f \circ g \circ h$; (f) $h \circ f$; (g) $h \circ g$; (h) $h \circ f \circ g$.

4.6. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| + 2$, para todo o real x, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x + 2 & \text{se } x > -2 \end{cases} .$$

(a) Determine $f(\{-2, 2\})$ e $f\big(]-2, 4]\big)$.

(b) Determine $f^{-1}(\{-2, 0, 1, 2\})$.

(c) Diga se $g \circ f$ é injetiva e se é sobrejetiva.

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 11

4.7. Dê exemplos de:

(a) duas funções $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que f e g não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante.

(b) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ f = f$.

(c) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq id_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

4.8. Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Mostre que $id_B \circ f = f = f \circ id_A$.

4.9. Considere as seguintes funções

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2x-3, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & x^3, \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N}_0 \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

(a) Verifique que f, g e h são funções bijetivas.

(b) Determine as funções inversas de f, g e h.

4.10. Sejam A e B conjuntos não vazios. Considere a função $f : A \times B \to B \times A$ definida por $f(a, b) = (b, a)$, para todo $(a, b) \in A \times B$.

(a) Mostre que f é bijetiva.

(b) Determine f^{-1}.

4.11. Sejam A e B conjuntos e seja $f : A \longrightarrow B$ uma função bijetiva. Mostre que, para qualquer $b \in B$, $f^{-1}(\{b\}) = \{f^{-1}(b)\}$.

4.12. Seja X um conjunto e seja $\phi_X : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ a função dada por $\phi(Y) = X \backslash Y$, para cada $Y \in \mathcal{P}(X)$.

(a) Seja $A = \{0, 1\}$.

  (i) Determine ϕ_A.

  (ii) Verifique que ϕ_A é bijetiva.

  (iii) Determine ϕ_A^{-1}.

(b) Mostre que ϕ_X é uma função bijetiva (para um conjunto X arbitrário).

(c) Determine ϕ_X^{-1} (para um conjunto X arbitrário).

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 12

5. Relações binárias

5.1. Para cada uma das relações binárias seguintes, indique o domínio e a imagem.

(a) S é a relação de $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ para $B = \{1, 2, 3\}$ dada por $S = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$.

(b) R é a relação em $\mathbb{R}$ dada por $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

(c) $|$ é a relação "divide" em $\{2, 3, 4, 6, 9, 10, 12, 20\}$ definida por: $a \mid b \leftrightarrow (\exists_{n\in\mathbb{N}}\, b = na)$.

(d) T é a relação binária em $\{1, 2, 3\}^2$ definida por: $(x, y)\ T\ (x', y') \leftrightarrow x < x'$.

(e) U é a relação binária em $\mathcal{P}(\{a, b\})$ definda por: $X\ U\ Y \leftrightarrow X \cap Y = \{a\}$.

5.2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$.

(a) Indique o número de relações binárias de A em B.

(b) Indique todas as relações binárias de A em B cujo domínio é $\{1, 2\}$ e cuja imagem é $\{a, b\}$.

(c) Dê exemplo de uma relação binária R de A em B que seja total mas não unívoca.

(d) Dê exemplo de uma relação binária R de A em B que seja unívoca mas não total.

(e) Dê exemplo de uma relação binária R de A em B que seja total, unívoca e tenha imagem $\{a, b\}$.

5.3. Sejam A, B conjuntos e R, S relações binárias unívocas de A em B.

(a) Mostre que $R \cap S$ é ainda uma relação binária unívoca.

(b) Mostre que $R \cup S$ não é necessariamente unívoca.

(c) Indique uma condição suficiente para $R \cup S$ ser unívoca.

5.4. Seja R a relação binária de $\mathbb{N}$ em $\{0, 1\}$, definida por:

$$x\ R\ y \leftrightarrow \big(\, (\exists_{k\in\mathbb{N}}\, x = 2k \wedge y = 0) \vee (\exists_{k\in\mathbb{N}}\, x = 2k + 1 \wedge y = 1)\,\big)\ .$$

(a) Mostre que R é total e unívoca.

(b) Apresente a função $\mathcal{F}_R$ determinada pela relação R.

(c) Determine $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_R}$ (o grafo da função $\mathcal{F}_R$ indicada em (b)).

(d) Repita (b) e (c) para a relação R indicada em **5.2.** (e).

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 13

5.5. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função.

(a) Mostre que $\mathcal{G}_f$ é uma relação binária de A para B que é total e unívoca.

(b) Mostre que $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_f} = f$.

5.6. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Considere as seguintes relações em A:

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(10,8)\}, \qquad S = \{(10,2),(10,8)\}, \qquad T = \{(6,2),(6,4),(8,10)\}.$$

Determine

(a) R^{-1}
(b) $R^{-1} \cup S^{-1}$
(c) $T \setminus S^{-1}$
(d) $T^{-1} \cap S$
(e) $S \circ T$
(f) $R \circ T$
(g) $S^{-1} \circ S$
(h) $(S \circ T)^{-1}$
(i) $S^{-1} \circ T^{-1}$
(j) $T^{-1} \circ S^{-1}$
(k) $(R \circ S) \circ T$
(l) $R \circ (S \circ T)$

5.7. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ e $R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c)\}$. Determine:

(a) $R^{-1} \circ R$
(b) $R \circ R^{-1}$
(c) $R \circ \mathrm{id}_A$
(d) $\mathrm{id}_B \circ R$
(e) $R \circ \omega_A$
(f) $\omega_B \circ R$

5.8. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Dê exemplo de, ou justifique que não existe:

(a) uma relação binária R de A em B tal que $R = R^{-1}$;

(b) uma relação binária R de A em B tal que $\mathrm{Dom}(R) = \emptyset$;

(c) uma relação binária R em A tal que $\mathrm{id}_A \subseteq R$ e $\mathrm{id}_A \not\subseteq R^{-1}$;

(d) relações binárias R e S em A tais que $R \circ S = S \circ R$ e $R \neq S$;

(e) relações binárias R de A em B e S de B em A tais que $R \circ S = \mathrm{id}_B$ e $S \circ R = \mathrm{id}_A$.

5.9. Sejam A, B e C conjuntos, R e S relações binárias de A em B e T e U relações binárias de B em C. Mostre que:

(a) $R \circ \mathrm{id}_A = R$;

(b) $\mathrm{id}_B \circ R = R$;

(c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

(d) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;

(e) $R \subseteq S \Rightarrow T \circ R \subseteq T \circ S$;

(f) $T \subseteq U \Rightarrow T \circ R \subseteq U \circ R$;

(g) $(T \cup U) \circ R = (T \circ R) \cup (U \circ R)$;

(h) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$;

(i) $(T \cap U) \circ R \subseteq (T \circ R) \cap (U \circ R)$;

(j) $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$.

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 14

5.10. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e as seguintes relações em A:

$$R_1 = \{(1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1)\}, \qquad R_2 = \{(2,3)\},$$

$$R_3 = \{(1,2), (2,3), (3,2), (1,3), (2,2), (3,3)\}, \quad R_4 = \{(a,a) : a \in A\} = \mathrm{id}_A.$$

Diga, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação

(a) reflexiva; (b) simétrica; (c) antissimétrica; (d) transitiva.

5.11. Indique se cada uma das seguintes relações binárias é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva:

(a) a usual relação $<$ em $\mathbb{N}$;

(b) a relação $|$ ("divide") em $\mathbb{N}$, dada por: $a|b \quad \leftrightarrow \quad \exists_{n \in \mathbb{N}}\ b = na$;

(c) a usual relação $\subseteq$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

5.12. Sejam A um conjunto e R uma relação binária em A. Mostre que

(a) R é simétrica se e só se $R^{-1} = R$; (b) R é transitiva se e só se $R \circ R \subseteq R$.

5.13. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam R, S e T as seguintes relações binárias em A:

$$R = \{(1,1), (2,3), (3,4)\}; \qquad S = \{(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)\}; \qquad T = \{(a,b) \in A^2 : a < b\}\ .$$

Determine o fecho reflexivo e o fecho simétrico de cada uma destas relações.

5.14. Seja A um conjunto e R uma relação binária em A. Recorde que R^s denota o fecho simétrico de R. Mostre que:

(a) R é simétrica se e só se $R^s = R$; (b) $R^s = R \cup R^{-1}$.

5.15. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja R a seguinte relação binária em A: $R = \{(1,2), (2,3), (4,5), (5,5)\}$. Determine R^t (o fecho transitivo de R). Justifique a sua resposta a partir da definição de fecho transitivo de uma relação binária.

5.16. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seja R a seguinte relação binária em A: $R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (5,5)\}$.

(a) Determine as potências R^i de R, para $1 \le i \le 5$.

(b) Determine o fecho transitivo de R utilizando as potências de R calculadas em (a).

5.17. Seja A um conjunto finito com n_0 elementos e seja R uma relação binária em A para a qual existe $k \le n_0$ tal que $R^{k+1} \subseteq R^k$.

(a) Mostre por indução nos naturais que, para todo $n \ge k$, $R^n \subseteq R^k$.

(b) Conclua que $R^t = \bigcup_{i=1}^{k} R^i$. (Recorde a igualdade: $R^t = \bigcup_{i=1}^{n_0} R^i$.)

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 15

5.18. Verifique se cada uma das seguinte relações é de equivalência e, em caso afirmativo, determine as classes de equivalência:

(a) Sendo A um conjunto não vazio, R está definida em $\mathcal{P}(A)$ por
$$X \; R \; Y \text{ se e só se } X \cap Y \neq \emptyset \qquad (X, Y \subseteq A);$$

(b) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, ρ está definida em $\mathcal{P}(A)$ por $X \; \rho \; Y$ se e só se $\#X = \#Y$ (como usualmente, $\#X$ e $\#Y$ denotam o número de elementos de X e de Y, respetivamente);

(c) S é a relação em $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$ definida por $(a, b) \; S \; (c, d)$ se e só se $ad = bc$.

5.19. Seja $A = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e considere a relação binária R em A definida por: $x \; R \; y$ se e só se $x^2 = y^2$.

(a) Verifique que R é uma relação de equivalência.

(b) Indique todos os elementos da classe $[-3]_R$ e determine o conjunto quociente A/R.

5.20. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere as seguintes relações de equivalência em A: R é a menor relação de equivalência em A tal que $(1, 2), (1, 3), (4, 5) \in R$ e S é a relação de equivalência em A cujas classes de equivalência são: $\{1, 3\}$, $\{4\}$ e $\{2, 5\}$. Determine R, indique todos os elementos da classe $[2]_R$ e indique, se existirem, $a, b \in A$ tais que aRb e aSb.

5.21. Sejam A um conjunto não vazio e R uma relação de equivalência em A. Mostre que, para quaisquer $x, y \in A$, $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ se e só se $[x]_R = [y]_R$.

5.22. Considere a relação R em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \, R \, (z, w)$ se e só se $y = w$. Verifique que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e descreva a classe de equivalência $[(2, 3)]_R$.

5.23. Seja n um número natural. Considere a relação $\equiv (\bmod\ n)$ definida em $\mathbb{Z}$ por
$$x \equiv y \pmod n \text{ se e só se } \exists k \in \mathbb{Z} : \, x - y = kn \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

(a) Mostre que $\equiv (\bmod\ n)$ é uma relação de equivalência.

(b) Para cada $x \in \mathbb{Z}$, determine a classe de equivalência de x para a relação $\equiv (\bmod\ 2)$. Quantas classes de equivalência existem para a relação $\equiv (\bmod\ 2)$?

5.24. Sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Seja R_f a relação binária em A associada a f, definida por: $a \; R_f \; b$ se e só se $f(a) = f(b)$.

(a) Mostre que R_f é uma relação de equivalência.

(b) Mostre que, para cada $a \in A$, $[a]_{R_f} = f^{-1}(\{f(a)\})$.

5.25. Considere o conjunto $A = \{a, b, c\}$. Determine todas as relações de equivalência em A e, para cada uma, indique o conjunto quociente. Observe que cada um destes conjuntos quociente é uma partição de A.

5.26. Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$ e considere as seguintes partições de A:
$$\Pi_1 = \{\{2, 6\}, \{3, 7\}, \{4\}\}, \quad \Pi_2 = \{\{2, 4, 6\}, \{3, 7\}\}, \quad \Pi_3 = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}\} \; .$$
Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$, determine $\mathcal{R}_{\Pi_j}$ (a relação em A induzida por Π_j) e indique $[7]_{\mathcal{R}_{\Pi_j}}$.

5.27. Seja Π uma partição de um conjunto A. Mostre que $\mathcal{R}_\Pi$ é uma relação de equivalência em A

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 16

6.1. Seja $A = \{a, b\}$. Indique todas as relações de ordem parcial em A e apresente os correspondentes diagramas de Hasse.

6.2. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam ρ_1, ρ_2, ρ_3 e ρ_4 as seguintes relações em A:

$\rho_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$; $\rho_2 = \{(1,1), (1,4), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4), (2,4)\}$;

$\rho_3 = \{(1,1), (4,1), (2,2), (4,2), (3,3), (4,4)\}$; $\rho_4 = \{(1,1), (2,3), (2,2), (2,1), (3,3), (4,4), (3,1)\}$.

Indique se cada uma destas relações é ou não uma ordem parcial e, para cada ordem parcial, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

6.3. Mostre que os seguintes pares são c.p.o.'s:

(a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto;

(b) $(\mathbb{N}_0, |)$, onde $|$ é a relação "*divide*" definida por $x|y \leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{N}_0} y = kx)$.

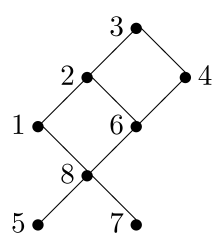
(c) $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_{lex})$, onde $\leq_{lex}$ é a ordem lexicográfica, dada por: $(m, n) \leq_{lex} (m', n')$ se e só se $m < m'$ ou $(m = m' \wedge n \leq n')$.

6.4. Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:

(a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(A), \subseteq_{dual})$, sendo $A = \{1, 2\}$;

(b) $(A, |)$ e $(A, |_{dual})$, sendo $A = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$ e $|$ a relação dada por $x|y \leftrightarrow (\exists_{k\in\mathbb{N}_0} y = kx)$.

6.5. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:



Para cada um dos conjuntos A, X e Y determine, caso existam, os majorantes e os minorantes, o supremo e o ínfimo, os elementos maximais e minimais e o máximo e o mínimo.

6.6. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:

(a) Se algum elemento de X é maximal, então X tem elemento máximo;

(b) Se X tem elemento máximo, então algum elemento de X é maximal;

(c) Se existe $\sup(X)$, então algum elemento de X é maximal;

(d) Se algum elemento de X é maximal, então existe $\sup(X)$.

6.7. Mostre que, num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$: (1) $a \leq b$; (2) $\sup\{a, b\} = b$; (3) $\inf\{a, b\} = a$.

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 17

6.8. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., $X \subseteq A$ e $m \in A$. Mostre que:

(a) m é majorante de X em $(A, \leq)$ se e só se m é minorante de X em $(A, \leq_{dual})$;

(b) m é ínfimo de X em $(A, \leq)$ se e só se m é supremo de X em $(A, \leq_{dual})$.

6.9. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ do exercício 6.5. Para cada $n \in \{1, ..., 8\}$, caso seja possível, dê exemplo, de um subconjunto X de A com n elementos tal que $(X, \leq_X)$ seja um reticulado.

6.10. Considere o c.p.o. $(\mathbb{N}_0, |)$ (definido no exercício 6.3 (b)).

(a) Diga, justificando, se $(\mathbb{N}_0, |)$ tem elemento máximo ou elemento mínimo.

(b) Mostre que $(\mathbb{N}_0, |)$ é um reticulado, indicando para cada $a, b \in \mathbb{N}_0$, o supremo e o ínfimo de $\{a, b\}$.

(c) Considere $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18\}$ e $Y = \{1, 2, 5, 6, 12, 20, 30, 120\}$.

  (i) Construa os diagramas de Hasse de $(X, |)$ e de $(Y, |)$.

  (ii) Indique, caso existam, os elementos minimais e os elementos maximais de X.

  (iii) Indique, caso existam, elementos $a, b \in Y$ tais que:

    (I) exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$ e este supremo seja diferente do supremo de $\{a, b\}$ em $(\mathbb{N}_0, |)$;

    (II) não exista supremo de $\{a, b\}$ em $(Y, |)$;

  (iv) Dê exemplo de um subconjunto W de X tal que $(W, |)$ tenha elemento máximo e elemento mínimo e não seja um reticulado.

  (v) Dê exemplos de subconjuntos Z de Y, com pelo menos quatro elementos, tais que $(Z, |)$ é uma cadeia.

6.11. Seja $(A, \leq)$ um reticulado e $a, b, c \in A$. Prove que:

(a) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

(b) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$;

(c) $a \wedge (a \vee b) = a$;

(d) $a \vee (a \wedge b) = a$;

(e) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$;

(f) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

6.12. Considere de novo o c.p.o. $(A, \leq)$ do exercício 6.5. Dê exemplo de $X \subseteq A$ com 4 elementos tal que: (a) $(X, \leq_X)$ seja um reticulado; (b) $(X, \leq_X)$ não seja um reticulado; (c) $(X, \leq_X)$ seja uma cadeia; (d) $(X, \leq_X)$ seja um reticulado distributivo, mas não seja uma cadeia.

6.13. Mostre que se $(A, \leq)$ é uma cadeia, então $(A, \leq)$ é um reticulado distributivo.

6.14. Justifique se cada um dos seguintes c.p.o.'s é um conjunto bem ordenado:

(a) $\left(\mathbb{Z}_0^-, \leq\right)$, onde $\leq$ é a relação usual de menor ou igual em inteiros;

(b) $\left(\mathbb{Z}_0^-, \geq\right)$, onde $\geq$ é a relação usual de maior ou igual em inteiros;

(c) $(\mathbb{Z}, \leq')$, onde $\leq'$ é a relação dada por: $x \leq' y$ se e só se (ii) $|x| < |y|$; ou (ii) $|x| = |y|$ e $x \leq y$;

(d) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex})$, onde $\leq_{lex}$ é a ordem lexicográfica definida no exercício 6.3 (c).

6.15. Seja $(A, \leq)$ um c.p.o. tal que A é um conjunto finito. (i) Mostre que $\leq$ é uma ordem total se e só se $\leq$ é uma boa ordem. (ii) Mostre ainda que esta proposição não é necessariamente verdadeira para um conjunto A arbitrário.

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 18

7.1 Para cada A e B, de entre os conjuntos que se seguem, justifique se $A \sim B$.

(a) $\emptyset$ (b) $\{\emptyset\}$

(c) $\mathbb{N} \times \mathcal{P}(\emptyset)$ (d) $[2]$

(e) $\{z \in \mathbb{Z} : 2 + z = 1\}$ (f)$\{f : f$ é função de $[2]$ em $[1]\}$

(g) $\mathbb{N}_0$ (h) $\mathbb{Z}^-$

(i) $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ (j) $\{n \in \mathbb{N} : 1|n\}$

7.2 Indique aplicações bijetivas que mostrem que:

(a) $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}_0$;

(b) $\mathbb{N}_0 \sim \{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq k\}$, para $k \in \mathbb{N}_0$;

(c) $[0, 1] \sim [1, 3]$;

(d) $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$;

(e) $A \times B \sim B \times A$, para quaisquer conjuntos A e B.

7.3 Sejam A, B tais que $A \sim B$. Prove que:

(a) se C é um conjunto tal que $B \sim C$, então $A \sim C$;

(b) se C e D são conjuntos equipotentes, então

(i) existem funções injetivas de A em C se e só se existem funções injetivas de B em D;

(ii) existem funções sobretivas de A em C se e só se existem funções sobrejetivas de B em D;

(c) $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

7.4 Mostre que:

(a) para todo $m, n \in \mathbb{N}$, existe $f : [m] \to [n]$ injetiva se e só se $m \leq n$ (na implicação da esquerda para a direita é útil recorrer a indução nos naturais);

(b) conclua que, para todos os conjuntos finitos A e B, $\#A \leq \#B$ se e só se existe $f : A \to B$ injetiva;

(c) para quaisquer conjuntos A e B,

(i) se A é finito e $B \subseteq A$, então B é finito;

(ii) se A é um conjunto infinito e $A \subseteq B$, então B é infinito;

(iii) se A é infinito e $x \in A$, então $A \setminus \{x\}$ é infinito.

(Sugestão: em (i) recorra a indução nos naturais, designadamente a indução em $\#A$.)

Tópicos Fundamentais de Matemática

Folha 19

7.5 Mostre que:

(a) para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a < b$, $\#[0,1] = \#[a,b]$;

(b) a função $f : [0,1] \to]0,1]$ tal que $f(x) = \frac{x+1}{2}$ é injetiva;

(c) $\#[0,1] = \#\,]0,1]$ (sugestão: recorra ao Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein);

(d) $\#[0,1] = \#\,[0,1[$;

(e) $\#[0,1[= \#\,]0,1[$.

7.6 Seja A, A', B, B' conjuntos tais que $A \sim A'$ e $B \sim B'$. Mostre que:

(a) $\#A = \#B$ se e só se $\#A' = \#B'$;

(b) $\#A \leq \#B$ se e só se $\#A' \leq \#B'$;

7.7 Mostre que cada um dos seguintes conjuntos é numerável.

(a) $\{3n : n \in \mathbb{N}_0\}$ (b) $\{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2\}$

(c) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (d) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(e) $\mathbb{Q} \times \{0,1\}$ (f) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

7.8 Seja A um conjunto numerável e B um conjunto finito. Mostre que:

(a) $A \cup B$ é numerável;

(b) $A \cap B$ é finito;

(c) $A \setminus B$ é numerável.

7.9 Sejam A um conjunto numerável e B um conjunto finito não vazio ou um conjunto numerável. Mostre que $A \times B$ é numerável.

7.10 Mostre que os seguintes conjuntos não são numeráveis.

(a) $[0,1]$ (b) $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$

(c) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (d) $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

(e) $[2]^{\mathbb{N}}$ (f) $\mathbb{R}^2$

7.11 Seja A um conjunto tal que $\#\mathbb{R} \leq \#A$. Mostre que $\#\mathbb{N} < \#A$.