Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	6 de janeiro de 2024

Teste de Álgebra Linear CC

Duração: 2h15min

Nome do aluno: ______________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

V F

1. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, se A é uma matriz simétrica e B é uma matriz antissimétrica, então BAB é uma matriz simétrica. [x] V [ ] F

   Se A é uma matriz simétrica e B é uma matriz antissimétrica, temos $A^T = A$ e $B^T = -B$. Logo,

   $$(BAB)^T = B^T A^T B^T = (-B)(A)(-B) = BAB.$$

   Portanto, BAB é uma matriz simétrica.

2. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $car(A) = car(B) = n$, então $A + B$ é invertível. [ ] V [x] F

   Sejam

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Tem-se $car(A) = car(B) = 2$ e $A + B = 0_{2\times 2}$ não é invertível.

3. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $A^2 = B^2 = I_n$, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = BA$. [x] V [ ] F

   Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $A^2 = B^2 = I_n$, então A e B são matrizes invertíveis e tem-se $A^{-1} = A$, $B^{-1} = B$. Como A, B são matrizes quadradas e invertíveis, então a matriz AB também é invertível e

   $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = BA.$$

4. O conjunto $\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,|\, A \text{ é simétrica}\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. [x] V [ ] F

   Seja $S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,|\, A \text{ é simétrica}\}$. Temos

   - $S \subseteq \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$;
   - $0_{3\times 3} \in S$;
   - para quaisquer $A, B \in S$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha A + \beta B \in S$, pois

   $$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha A + \beta B.$$

   Logo, S é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

V F

5. Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, ..., v_{n-1}, v_n \in V$, se $V =< v_1, \dots, v_{n-1} >$, então $V =< v_1, \dots, v_{n-1}, v_n >$. ☒ ☐

Admitamos que $V =< v_1, \dots, v_{n-1} >$. Uma vez que

$$v_1, ..., v_{n-1} \in < v_1, \dots, v_{n-1}, v_n >$$

e $< v_1, \dots, v_{n-1} >$ é o menor subespaço de V que contém $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ segue que

$$V =< v_1, \dots, v_{n-1} > \subseteq < v_1, ..., v_{n-1}, v_n > .$$

Reciprocamente, como $v_1, ..., v_{n-1}, v_n \in V$ e $< v_1, ..., v_{n-1}, v_n >$ é o menor subespaço de V que contem $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, temos

$$< v_1, \dots, v_{n-1}, v_n > \subseteq V.$$

Logo, $V =< v_1, \dots, v_{n-1}, v_n >$.

6. Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2 \in V \setminus \{0_V\}$, se existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V$, então a sequência (v_1, v_2) é linearmente independente. ☐ ☒

Seja V o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ e sejam $v_1 = (1,1), v_2 = (2,2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Então existem $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$ tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0,0)$, mas a sequência (v_1, v_2) não é linearmente independente.

7. Existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2,2) = (1,2,3)$ e $f(3,3) = (0,1,0)$. ☐ ☐

Se admitirmos que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear e que $f(2,2) = (1,2,3)$, então

$$f(3,3) = f\left(\frac{3}{2}(2,2)\right) = \frac{3}{2}f(2,2) = \frac{3}{2}(1,2,3) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}\right) \neq (0,1,0).$$

Logo, não existe qualquer aplicação linear nas condições indicadas.

8. Para qualquer matriz A do tipo 5×5, se $\det A = 1$, então $car(A) \neq 4$. ☒ ☐

Se A é uma matriz do tipo 5×5 tal que $\det A = 1$, então A é invertível. Logo $car(A) = 5$ e, portanto, $car(A) \neq 4$.

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } k \in \mathbb{R}, \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Justifique que a matriz A_k é invertível se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Uma vez que A_k é uma matriz do tipo 3×3, esta matriz é invertível se e só se $car(A_k) = 3$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A_k, temos:

$$[A_k] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + kl_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & k(k+1) \end{bmatrix} = A'_k.$$

A matriz A'_k é equivalente por linhas à matriz A_k, logo $car(A_k) = car(A'_k)$. Portanto, $car(A_k) = 3$ se e só se $car(A'_k) = 3$ se e só se $k(k+1) \neq 0$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Assim, A_k é invertível se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

(b) Utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine a inversa de A_1.

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A_1|I_3]$, temos

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_3 \\ l_1 \to l_1 + \frac{1}{2}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\substack{l_1 \to -l_1 \\ l_3 \to \frac{1}{2}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Dos cálculos anteriores, concluímos que

$$A^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(c) Justifique que, para qualquer $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $A_0x = b$ ou é ímpossível ou é possível indeterminado.

Para $k = 0$, temos $car(A_k) < 3$. Logo, para qualquer $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $A_0x = b$ não é possível determinado, uma vez que $car(A_0) < 3 =$ nº de incógnitas. Por conseguinte, o sistema ou é impossível ou é possível indeterminado.

Dê exemplo de $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ tal que o sistema $A_0x = b$ seja:

i. impossível;

Se $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, o sistema $A_0x = b$ é impossível, pois $c(A_0) = 2 \neq 3 = car([A_0|b])$.

ii. possível indeterminado.

Se $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, o sistema $A_0x = b$ é possível, pois é um sistema homogéneo. Este sistema é indeterminado, uma vez que $car(A_0) = 2 < 3 =$ nº incógnitas.

2. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)),$$
$$\mathcal{B}' = ((-1,1,1),(0,2,0),(1,0,0))$$

e a base de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}'' = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que, para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$g(a,b,c,d) = (3a+2b-c-2d, 2a+b-c-d, 2a-2c).$$

Temos

$$(a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1),$$

logo

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de (a,b,c,d) relativamente à base $\mathcal{B}''$. Por conseguinte,

$$M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B}) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-2c \\ b+c-d \\ a+b-d \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $g(a,b,c,d)$ relativamente à base $\mathcal{B}$.

Assim,

$$\begin{aligned} g(a,b,c,d) &= (2a-2c)(1,1,1) + (b+c-d)(1,1,0) + (a+b-d)(1,0,0) \\ &= (3a+2b-c-2d, 2a+b-c-d, 2a-2c). \end{aligned}$$

(b) Determine uma base de $\operatorname{Nuc} g$ e a dimensão de $\operatorname{Im} g$. Diga se g é injetiva e se é sobrejetiva.

Por definição de $\operatorname{Nuc} g$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} g &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid g(a,b,c,d) = (0,0,0)\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid 3a+2b-c-2d = 0, 2a+b-c-d = 0, 2a-2c = 0\} \\ &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = c, b = -c+d\} \\ &= \{(c,-c+d,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{c(1,-1,1,0) + d(0,1,0,1) \in \mathbb{R}^4 \mid c,d \in \mathbb{R}\} \\ &= <(1,-1,1,0),(0,1,0,1)>. \end{aligned}$$

A sequência $((1,-1,1,0),(0,1,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(1,-1,1,0) + \beta(0,1,0,1) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo a sequência $((1,-1,1,0),(0,1,0,1))$ é uma base de $\operatorname{Nuc} g$ e, por conseguinte, $\dim \operatorname{Nuc} g = 2$.

Uma vez que $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Nuc} g + \dim \operatorname{Im} g$, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ e $\dim \operatorname{Nuc} g = 2$, concluímos que $\dim \operatorname{Im} g = 2$.

A aplicação g não é injetiva, pois $\operatorname{Nuc} g \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. A aplicação g também não é sobrejetiva, pois $\operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}^3$ ($\dim \operatorname{Im} g = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$).

(c) Determine um subespaço S de $\mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc} \mathrm{g} \bigoplus S = \mathbb{R}^4$.

Pretende-se determinar um subespaço S tal que $\operatorname{Nuc} \mathrm{g} + S = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Nuc} \mathrm{g} \cap S = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Da alínea (a) sabe-se que $((1,-1,1,0),(0,1,0,1))$ é uma base de $\operatorname{Nuc} g$. Sejam $u_1 = (1,-1,1,0)$, $u_2 = (0,1,0,1)$ e (e_1,e_2,e_3,e_4) a base canónica de $\mathbb{R}^4$.

Temos $u_1 = e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4$ e $u_2 = 0e_1 + e_2 + 0e_3 + e_4$.

Como em u_2 a coordenada relativa a e_2 é não nula, temos

$$\mathbb{R}^4 =< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< e_1, u_2, e_3, e_4 > .$$

Agora, como $e_2 = 0e_1 + u_2 + 0e_3 - e_4$, $u_1 = e_1 - u_2 + e_3 + e_4$ e em u_1 a coordenada relativa a e_1 é não nula, segue que

$$< e_1, u_2, e_3, e_4 >=< u_1, u_2, e_3, e_4 > .$$

Considerando que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ e $\mathbb{R}^4 =< u_1, u_2, e_3, e_4 >$, a sequência (u_1, u_2, e_3, e_4) é uma base de $\mathbb{R}^4$. Logo $S =< e_3, e_4 >$ é um subsepaço de $\mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc} \mathrm{g} \bigoplus S = \mathbb{R}^4$.

(d) Determine as matrizes $M(id^3_{\mathbb{R}}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}')$.

Temos

$$\begin{aligned}
id^3_{\mathbb{R}}(1,1,1) &= (1,1,1) = 1(-1,1,1) + 0(0,2,0) + 2(1,0,0)\\
id^3_{\mathbb{R}}(1,1,0) &= (1,1,0) = 0(-1,1,1) + \tfrac{1}{2}(0,2,0) + 1(1,0,0)\\
id^3_{\mathbb{R}}(1,0,0) &= (1,0,0) = 0(-1,1,1) + 0(0,1,0) + 1(1,0,0),
\end{aligned}$$

logo

$$M(id^3_{\mathbb{R}}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned}
M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B}') &= M(id^3_{\mathbb{R}}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(g; \mathcal{B}'', \mathcal{B})\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\det A$.

Calculando o $\det A$ recorrendo ao Teorema de Laplace, temos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+4} \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \times 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2 \times 2 - 2 \times 1) - 2 \times ((-1) \times 2 - 1 \times 1) \\
&= 8.
\end{aligned}$$

(b) Justifique que B é invertível e calcule $\det(2B^{-2}B^T A^2)$.

Uma vez que B é uma matriz quadrada e

$$\det B = (-1) \times 1 \times 1 \times 2 = -2 \neq 0,$$

então B é invertível.

Considerando que as matrizes B^{-2}, B^T e A^2 são matrizes quadradas e $B^{-2}B^T A^2$ é uma matriz do tipo 4×4, temos

$$\begin{aligned}
\det(2B^{-2}B^T A^2) &= 2^4 \times \det(B^{-2}) \times \det B^T \times \det(A^2) \\
&= 2^4 \times (\det(B))^{-2} \times \det B \times (\det(A))^2 \\
&= 2^4 \times (-2)^{-2} \times (-2) \times 2^{16} \\
&= -2^{19}.
\end{aligned}$$

4. Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e h o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$M(h, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $(-1, 0, 1)$ é um vetor próprio de h e indique a que valor próprio está associado.

Tem-se

$$(-1, 0, 1) = -1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1),$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $(-1, 0, 1)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Logo

$$M(h; \mathcal{B}, \mathcal{B}) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $h(-1, 0, 1)$ relativamente à base $\mathcal{B}$. Portanto,

$$h(-1, 0, 1) = 0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Uma vez que $(-1, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$ e $h(-1, 0, 1) = 0(-1, 0, 1)$, então $(-1, 0, 1)$ é um vetor próprio de h associado ao valor próprio 0.

(b) Justifique que -2 é um valor próprio de h e determine uma base do subespaço próprio de h associado a este valor próprio.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de h se e só se $|M(h;\mathcal{B},\mathcal{B}) - \lambda I_3| = 0$.
Então, como

$$|M(h;\mathcal{B},\mathcal{B}) - (-2)I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ (pois a matriz tem uma linha nula)},$$

concluímos que -2 é um valor próprio de h.

Por definição de subespaço próprio de h associado ao valor próprio -2, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3_{[h,-2]} &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, h(a,b,c) = -2(a,b,c)\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, h(a,b,c) + 2(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (h + 2id_{\mathbb{R}^3})(a,b,c) = 0_{\mathbb{R}^3}\} \quad (*) \\
&= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (A + 2I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{bmatrix} a+b-c \\ 0 \\ -a-b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = -b + c\} \\
&= \{(-b+c,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b,c \in \mathbb{R}\} \\
&= \{b(-1,1,0) + c(1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b,c \in \mathbb{R}\} \\
&= \, < (-1,1,0),(1,0,1) > .
\end{aligned}$$

(*) Uma vez que $(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$, o vetor coluna de (a,b,c) relativamente à base $\mathcal{B}$ é $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

A sequência $((-1,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(-1,1,0) + \beta(1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo, $((-1,1,0),(1,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3_{[h,-2]}$.

(c) Justifique que h é diagonalizável. Dê exemplo de uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ seja diagonal.

Da alínea (a) sabe-se que $(-1,0,1)$ é um vetor próprio de h associado ao valor próprio 0. A sequência $((-1,0,1))$ é linearmente independente, pois $(-1,0,1) \neq (0,0,0)$. Da alínea (b) sabemos que a sequência $((-1,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente e é formada por vetores próprios de h associados ao valor próprio -2. Como as duas sequências anteriores são sequências linearmente independentes formadas por vetores próprios associados a valores próprios distintos, a sequência $\mathcal{B}' = ((-1,0,1),(-1,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente. Como a sequência $\mathcal{B}'$ tem 3 vetores e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, então $\mathcal{B}'$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Considerando que h é um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ e existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de h, concluímos que h é diagonalizável. A base $\mathcal{B}' = ((-1,0,1),(-1,1,0),(1,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ é diagonal, pois

$$M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,5$.

Grupo II: 1.$(1,0+1,5+1,5)$; 2.$(1,25+2,0+1,25+1,25)$; 3. (1,25+1,25); 4.$(1,0+1,5+1,25)$.