Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

— prova escrita 1 — duas horas ———————— 2018'19 —

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (2 valores) Mostre que não existe cada um dos seguintes limites:

$$\text{(a)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1}; \qquad \text{(b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

2. (4 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 x}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

   (a) Estude a continuidade de f;

   (b) Dado $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\|(u,v)\|=1$, calcule $\dfrac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0)$;

   (c) Identifique $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

   (d) A função f é derivável em $(0,0)$? Justifique.

3. (~~1,5~~ 8 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^3 + x^2y^2 - 2y^2 - \ln(y).$$

   (a) Identifique o domínio da função f;

   (b) Calcule as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

   (c) Justifique que f é derivável em $(-2,1)$;

   (d) Determine $f'(-2,1)$;

   (e) Obtenha a taxa de variação da função f no ponto $(-2,1)$ e na direcção e sentido do vector $(\sqrt{3},1)$;

   (f) A taxa de variação da função f obtida na alínea anterior é a taxa de variação máxima de f no ponto $(-2,1)$? Justifique.

   (g) Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-2,1,-6)$.

4. (~~2,5~~ 3 valores) Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$x^3+y^2+z^3+2xyz=6.$$

   (a) Mostre que a equação define z como uma função de (x,y) para pontos "próximos" de $(1,-1,2)$;

   (b) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,-1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,-1)$;

   (c) Obtenha uma equação da recta tangente à curva de nível 2 da função $z(x,y)$ no ponto $(1,-1)$.

5. (~~2,5~~ 3 valores) Sejam $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ e $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funções deriváveis tais que

$$f(x,y,z) = (xy^2z, z\mathrm{e}^{y}+x+\mathrm{e}) \qquad \text{e} \qquad Jg(-2,2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $Jf(2,1,-1)$;

   (b) Determine $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(2,1,-1)$ e $\dfrac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(2,1,-1)$.

Fim

Proposta de Resolução - 1º teste

Análise - LEC - 2018/2019

1

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1}$

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ \boxed{x=0}}} \dfrac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{0-0}{0+y^2-2y+1} = 0$

$\neq$

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\ \boxed{y=x+1}}} \dfrac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-x}{x^2+(x+1)^2-2x-2+1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$

Pela unicidade de limite conclui-se que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{xy-x}{x^2+y^2-2y+1}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \boxed{x=0}}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^4} = 0$

$\neq$

- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \boxed{x=y^2}}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^2y^2}{(y^2)^2+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^4}{2y^4} = \dfrac{1}{2}$

Pela unicidade de limite conclui-se que $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

2

$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^4x}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) A função f é contínua em $(x,y)\neq(0,0)$ porque é o quociente de polinómios.

Em $(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4x}{x^4+y^4} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{x}_{\to 0}\, \underbrace{\dfrac{y^4}{x^4+y^4}}_{\text{limitado}} = 0 = f(0,0)$

$0 \le \dfrac{y^4}{x^4+y^4} \le 1$

logo f é contínua em $(0,0)$

b) Dado $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\|(u,v)\|=1$, então (2)

$$\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0)=Df((0,0);(u,v))=\lim_{h\to 0}\frac{f(hu,hv)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(hv)^4hu}{(hu)^4+(hv)^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h^5}v^4u}{\cancel{h^5}(u^4+v^4)}=\frac{v^4u}{u^4+v^4}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial(0,1)}(0,0)=0$

d) A função f não é derivável em $(0,0)$ porque, sendo derivável em $(0,0)$, teria que acontecer $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0)=u\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+v\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ para qualquer $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tal que $\|(u,v)\|=1$. Por exemplo, para $(u,v)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(0,0)=\frac{\sqrt{2}}{4}\neq 0=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0+\frac{\sqrt{2}}{2}\times 0.$$

$\boxed{3}$ $f(x,y)=x^3+x^2y^2-2y^2-\ln(y)$

a) Domínio: $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2+2xy^2$, com domínio $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x^2y-4y-\frac{1}{y}$, com domínio $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$.

c) $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são funções contínuas em $\mathbb{R}\times\,]0,+\infty[$, consequentemente f é derivável em todo o ponto do seu domínio, em particular em $(-2,1)$.

d) Por b), $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1) = 3(-2)^2 + 2(-2).1^2 = 8$ e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1) = 2(-2)^2.1 - 4.1 - \frac{1}{1} = 3$$

Assim,

$$f'(-2,1) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto 8u + 3v$$

e) $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$ $\quad \|\vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

A taxa de variação de f no ponto $(-2,1)$ na direcção e sentido de $\vec{v}$

é $\frac{\partial f}{\partial(\sqrt{3},1)}(-2,1) = Df\left((-2,1); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = f'(-2,1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}$

$$= 4\sqrt{3} + \frac{3}{2}$$

f) A taxa de variação máxima de f partindo do ponto $(-2,1)$ é dada

por $\|\nabla f(-2,1)\| = \left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)\right)\right\| = \|(8,3)\| = \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{73}$

A resposta é não.

g) Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-2,1,-6)$

é dado por:

$$z = f(-2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-2,1)(x-(-2)) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)(y-1)$$

ou seja

$$z = -6 + 8(x+2) + 3(y-1) \Leftrightarrow 8x + 3y - z = -7$$

$\boxed{4}$ $$x^3+y^2+z^3+2xyz=6$$ (4)

a) → O ponto $(1,-1,2)$ é solução da equação porque

$$1^3+(-1)^2+2^3+2\cdot 1\cdot(-1)\cdot 2 = 10-4 = 6$$

→ Definindo $F(x,y,z)=x^3+y^2+z^3+2xyz$ tem-se que F é derivável em $\mathbb{R}^3$ e que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2+2xy,$$

donde $\frac{\partial F}{\partial z}(1,-1,2) = 3\times 2^2+2\cdot 1\cdot(-1) = 12-2 = 10 \neq 0$

Pelo Teorema da função implícita conclui-se que a equação dada define z como função de (x,y) para pontos próximos de $(1,-1,2)$".

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=3x^2+2yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=2y+2xz$$

b) $$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,-1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,-1,2)} = -\frac{3-4}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,-1,2)} = -\frac{-2+4}{10} = -\frac{1}{5}$$

c) Sendo $\nabla z(1,-1) = \left(\frac{1}{10}, -\frac{1}{5}\right)$ um vetor normal à curva de nível 2 da função $z(x,y)$ no ponto $(1,-1)$, então a recta tangente tem como equação

$$(x,y) = (1,-1) + \lambda\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

$\boxed{5}$ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \mapsto (xy^2z,\ ze^y + x + e)$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$Jg(-2,2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$

5

a)

$$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} y^2z & 2xyz & xy^2 \\ 1 & ze^y & e^y \end{bmatrix}$$

$$Jf(2,1,-1) = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -e & e \end{bmatrix}$$

$g \circ f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

b)

$$J(g\circ f)(2,1,-1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(2,1,-1) & \frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(2,1,-1) & \frac{\partial (g\circ f)}{\partial z}(2,1,-1) \end{bmatrix}$$

Mas,

$$J(g\circ f)(2,1,-1) = Jg(f(2,1,-1)) \cdot Jf(2,1,-1) = Jg(-2,2)\, Jf(2,1,-1)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 1 & -e & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -12-2e & 6+2e \end{bmatrix}$$

Assim sendo,

$$\frac{\partial (g\circ f)}{\partial x}(2,1,-1) = -1 \quad e \quad \frac{\partial (g\circ f)}{\partial y}(2,1,-1) = -12-2e$$