Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação - 1º ano

teste global - 18 dez 2015 Duração: 2 horas

1. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

(a) Sejam p, q e r proposições. Se as proposições $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow q$ e $\sim q$ são verdadeiras, então, a proposição r é verdadeira.

A afirmação é falsa. Do facto de $r \Rightarrow p$ e $p \Rightarrow q$ serem verdadeiras, por transitividade, temos que $r \Rightarrow q$ é verdadeira. Como temos $\sim q$ verdadeira, por Modus Tolens, concluímos que $\sim r$ é verdadeira. Assim, não podemos concluir que r é verdadeira.

(b) Sejam A e B conjuntos disjuntos. Então, $R = \omega_A \cup \omega_B$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$.

A afirmação é verdadeira. Como A e B são disjuntos, $\{A, B\}$ é uma partição do conjunto $A \cup B$. Como a relação de equivalência associada a esta partição é $\omega_A \cup \omega_B$, concluímos que R é uma relação de equivalência.

(c) Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. Se existe ínfimo de $\emptyset$ em A então A admite um elemento maximal.

A afirmação é verdadeira. Se existe $\inf \emptyset$, então existe $\max A$ e o máximo de um c.p.o. é sempre um elemento maximal desse mesmo c.p.o.

(d) Sejam A, B e C conjuntos. Se $A \cup C \sim B \cup C$ então $A \sim B$.

A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$, então, $A \cup C = \{1, 2, 3\} = B \cup C$ e, portanto, $A \cup C \sim B \cup C$ e, no entanto, $A \not\sim B$, já que são conjuntos finitos com diferentes cardinais.

2. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

(a) um conjunto A tal que $\emptyset \in A$ e $\emptyset \subseteq A$;

$A = \{\emptyset\}$. Neste caso, temos $\emptyset \in A$. A inclusão $\emptyset \subseteq A$ é sempre verdadeira.

(b) uma família de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$;

Para $i \in \mathbb{N}$, seja $A_i = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq i - 1\}$. Então, $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma família de conjuntos que satisfaz as condições enunciadas.

(c) Uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $(1, 3), (1, 4) \in \mathcal{R}$ e $[4]_{\mathcal{R}} = \{1, 4\}$;

Não existe. Sendo $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência tal que $(1, 4) \in \mathcal{R}$, teríamos, por simetria, que $(4, 1) \in \mathcal{R}$ e, uma vez que $(4, 1), (1, 3) \in \mathcal{R}$, por transitividade, teríamos que $(3, 4) \in \mathcal{R}$ e, portanto, teríamos que $3 \in [4]_{\mathcal{R}}$, o que não acontece.

(d) Uma função $f : \{1, 2\} \to \mathcal{P}(\{1, 2\})$ sobrejetiva.

Não existe. Como $\#\{1, 2\} = 2 < 4 = \#\mathcal{P}(\{1, 2\})$, não existe qualquer função de $\{1, 2\}$ em $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ sobrejetiva.

3. Usando indução matemática, prove que, para todo o natural n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$.

(1) Comecemos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos que $\sum_{k=1}^{1}(3k-2) = 3 \times 1 - 2 = 1 = \frac{1(3\times 1 - 1)}{2}$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$. Queremos provar que $\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$. De facto, como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2) &= \sum_{k=1}^{n}(3k-2) + (3(n+1)-2) \\
&= \frac{n(3n-1)}{2} + 3n + 1 && \text{[por hipótese de indução]} \\
&= \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} \\
&= \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} \\
&= \frac{(n+1)(3n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural n.

4. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, definida por $f(m,n) = (mn, m^2)$, para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(a) Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid |x| = |y| = 1\}$, determine $f(A)$.

Como $A = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$ e $f((1,1)) = f((-1,-1)) = (1,1)$, $f((-1,1)) = f((1,-1)) = (-1,1)$, temos que

$$f(A) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

(b) Se $B = \{0,2\} \times \{2,0\}$, determine $f^{\leftarrow}(B)$.

Como $B = \{(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)\}$ e:

- $f((m,n)) = (0,0) \Leftrightarrow mn = 0 = m^2 \Leftrightarrow m = 0 \wedge n \in \mathbb{Z}$;
- $f((m,n)) = (2,0) \Leftrightarrow mn = 2 \wedge m^2 = 0 \Leftrightarrow$ condição impossível;
- $f((m,n)) = (0,2) \Leftrightarrow mn = 0 \wedge m^2 = 2 \Leftrightarrow$ condição impossível em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$;
- $f((m,n)) = (2,2) \Leftrightarrow mn = 2 \wedge m^2 = 2 \Leftrightarrow$ condição impossível em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

temos que

$$f^{\leftarrow}(B) = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou injetiva.

Em (a), vimos que $f((1,1)) = f((-1,-1)) = (1,1)$. Logo, f não é injetiva. Em (b), vimos que $(2,0)$ não é imagem de um par de números inteiros. Logo, f não é sobrejetiva.

(d) Considere a relação de equivalência associada à igualdade de imagem por f, definida por

$$(x,y)\ \mathcal{R}_f\ (a,b) \Leftrightarrow f(x,y) = f(a,b).$$

Determine $[(2,0)]_{\mathcal{R}_f}$ e $[(0,2)]_{\mathcal{R}_f}$.

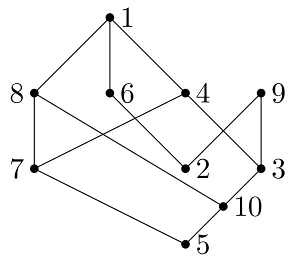
Como $f(2,0) = (0,4)$ e $f(0,2) = (0,0)$, temos que

$$\begin{aligned}
[(2,0)]_{\mathcal{R}_f} &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x,y)\ \mathcal{R}_f\ (2,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times Z \mid f(x,y) = f(2,0)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (xy, x^2) = (0,4)\} \\
&= \{(2,0), (-2,0)\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[(0,2)]_{\mathcal{R}_f} &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x,y)\ \mathcal{R}_f\ (0,2)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times Z \mid f(x,y) = f(0,2)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times Z \mid (xy, x^2) = (0,0)\} \\
&= \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:



(a) Indique, caso exista:

i. Maj $\{7, 10\}$;

Maj $\{7, 10\} = \{8, 4, 1\}$.

ii. $\sup \emptyset$;

Não existe. Quando existe, $\sup \emptyset = \min A$. O c.p.o. A tem dois elementos minimais (o 2 e o 5), pelo que não admite elemento mínimo.

iii. um subconjunto de A com 5 elementos que admita máximo e mínimo.

Seja $X = \{1, 8, 7, 10, 5\}$. Então, X admite máximo (o elemento 1) e mínimo (o elemento 5).

(b) Será $(A, \leq)$ um reticulado? Justifique.

Não. Como vimos em (a)ii., A não admite elemento mínimo e A é um c.p.o. finito (qualquer reticulado finito admite elemento mínimo).

Cotação: **1.** 4 × 1.0 **2.** 4 × 1.0 **3.** 1.5 **4.** 3 × 1.5 + 2.0 **5.** 4 × 1.0