Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC **Análise**

Ficha de exercícios 6 — 2019/2020

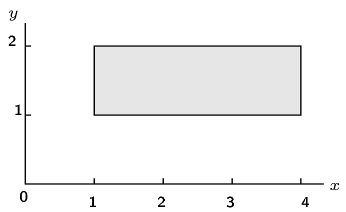
1. Calcule o integral, onde R é o retângulo $[0,2] \times [-1,0]$,

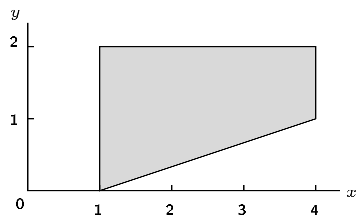
$$\iint_R (x^2y^2 + x)\, dA.$$

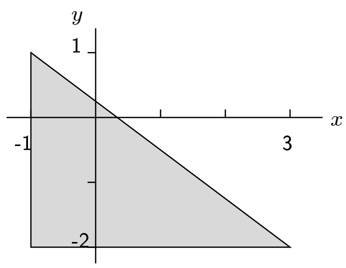
2. Calcule os seguintes integrais

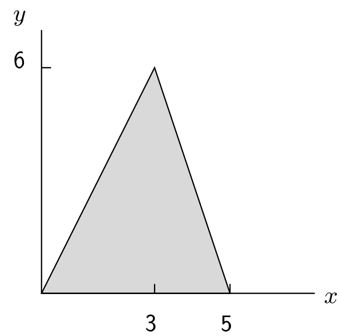
(a) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^4 (4x+y)\ dx\, dy$; (b) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^2 6xy\ dy\, dx$.

3. Para cada uma das regiões D apresentadas a seguir, escreva o integral duplo $\displaystyle\iint_D f\, dA$ de duas formas diferentes.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

4. Seja D o círculo unitário de centro na origem, R a região de D em que $x \geq 0$ e B a região de D na qual $y \leq 0$. Sem efetuar cálculos indique, em cada caso, se o valor do integral é positivo, negativo ou nulo.

(a) $\displaystyle\iint_R 1\, dA$; (b) $\displaystyle\iint_B 5x\, dA$; (c) $\displaystyle\iint_D 5x\, dA$; (d) $\displaystyle\iint_D \operatorname{sen} y\, dA$.

5. Para cada um dos integrais, esboce a região de integração e calcule o valor do integral.

(a) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \int_x^{2x} \operatorname{sen} x\, dy\, dx$; (b) $\displaystyle\int_{-2}^{0} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} 2xy\, dy\, dx$; (c) $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^{y} x\, dx\, dy$.

6. Determine o volume da região compreendida entre o gráfico de f definida por $f(x,y) = x+y$ e a região plana definida por $0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 3$.

7. A região R encontra-se sob a superfície definida por $f(x,y) = 2e^{-(x-1)^2-y^2}$ e acima do círculo do plano xy definido por $x^2+y^2 \leq 4$.

(a) Descreva as linhas de nível de f.

(b) Escreva um integral iterado para o cálculo do volume de R.

8. Um edifício tem 8 metros de largura e 16 metros de comprimento; tem um telhado plano que, num dos cantos, tem 12 metros de altura e em cada um dos cantos adjacentes tem 10 metros de altura. Qual é o volume do edifício?

9. Invertendo a ordem de integração, calcule cada um dos seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{e^x}^{e} \frac{y}{\ln y}\, dy\, dx$.

10. Considere o integral

$$I = \int_0^6 \int_{x/3}^{2} x\sqrt{y^3+1}\, dy\, dx.$$

(a) Esboce a região de integração de I.

(b) Calcule I.

11. Calcule o integral, onde P é o paralelepípedo $[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$,

$$\iiint_P xyz\, dV.$$

12. Calcule $\displaystyle\iiint_U f\, dV$ onde $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 - z$$

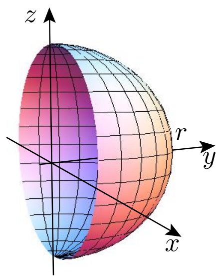
e U é a região paralelipipédica definida por $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$ e $2 \le z \le 3$.

13. Esboce a região de integração de cada um dos seguintes integrais triplos.

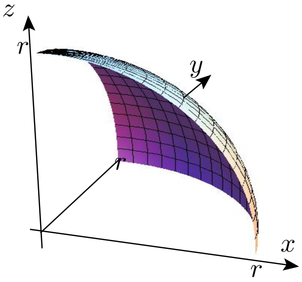
(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz$.

14. Escreva o integral $\displaystyle\iiint_U f\, dV$ onde U é a região indicada na figura.

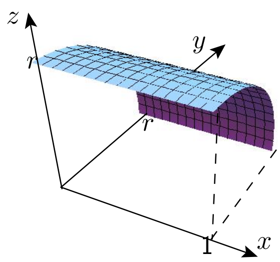
(a)



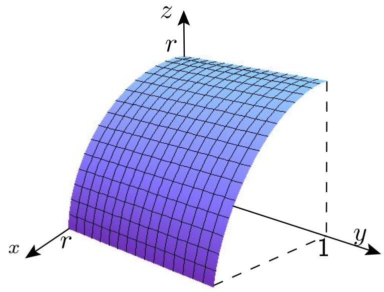
(b)



(c)



(d)



15. Recorrendo a um integral triplo calcule o volume do edifício descrito no exercício 8.

16. Calcule o volume da região limitada pelo plano definido por $z = x$, a superfície definida por $z = x^2$ e os planos definidos por $y = 0$ e $y = 3$.

17. Seja U o sólido limitado pela superfície definida por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e pelo plano definido por $z = 2$. Sem efetuar cálculos, indique se o valor do integral é positivo, negativo ou nulo.

(a) $\displaystyle\iiint_U \sqrt{x^2+y^2}\, dV$; (b) $\displaystyle\iiint_U x\, dV$; (c) $\displaystyle\iiint_U z - \sqrt{x^2+y^2}\, dV$.