**Resolução explicada dos exercícios 9, 10 e 12 da folha 2 (ex. 9 e 10 foram resolvidos nas aulas PL dos dias 17, 18, 19 e 20 de novembro)**

**exercício 9.a)** O código seguinte está disponível na área "Matlab" da Blackboard

```
function [soma, n]=expTaylor(x, tol)

% calcula a soma dos termos da série de potências de x para a função
% exponencial até encontrar um termo cujo valor absoluto
% é inferior a uma tolerância tol.
% n é o grau do último termo somado.

termo=1;
soma=0;
n=0;
while abs(termo)> tol
    soma = soma + termo;
    % [n termo soma], pause
    n=n+1;
    termo = termo*x/n;
end
n=n-1;
```

nota 1: sendo $\frac{x^n}{n!}$ o termo geral da série, cada termo é obtido do termo anterior multiplicando-o por $\frac{x}{n}$, evitando o cálculo das potências de $x$ e dos fatoriais.

nota 2: o primeiro termo que falhar a condição $abs(termo) > tol$ já não é adicionado.

**exercício 9.b)**

```
>> [soma, n]=expTaylor(-1, 1e-5)

soma =

    0.3679


n =

     8

>> abs(soma-exp(-1))

ans =

   2.5033e-06
```

nota: observe-se que o erro de truncatura é inferior ao valor absoluto do primeiro termo desprezado

```
>> 1/factorial(9)

ans =

   2.7557e-06
```

por se tratar de uma série alternada.

**exercício 9.c)**
```
>>  [soma, n]=expTaylor(-100, 1e-5)

soma =

  -2.9138e+25


n =

   279
```
Com

```
>> exp(-100)

ans =

   3.7201e-44
```

neste caso não se verifica $|soma - \exp(-100)| < tol$. (atente-se que o valor da soma é $O(10^{25})$, muito grande, e o valor de $exp(-100)$ é $O(10^{-44})$, muito próximo de zero.

**exercício 9.d)**
```
>> [soma, n]=expTaylor(100, 1e-5)

soma =

   2.6881e+43


n =

   279

>> 1/soma

ans =

   3.7201e-44
```
Este valor está correto enquanto que o valor $-2.9138e + 25$ da soma calculado em 9.c) para $x = -100$ está errado. O problema é o cancelamento subtrativo que ocorre na soma dos termos da série neste último caso. Com efeito, o valor correto é, como se disse antes, $O(10^{-44})$, muitas ordens de grandeza inferior às dos termos que estão a ser adicionados (por exemplo, $100^{100}/100!$ é $O(10^{42})$.

**exercício 10.a)** Com $x \neq k\pi$,

$$\frac{1 - cos(x)}{sin(x)} = \frac{1 - cos(x)}{sin(x)}.\frac{1 + cos(x)}{1 + cos(x)} = \frac{1 - cos^2(x)}{sin(x)(1 + cos(x))} = \frac{sin(x)}{1 + cos(x)}$$

**exercício 10.b)**
```
>> F1=inline('(1-cos(x))/sin(x)')

F1 =
```

```
    Inline function:
    F1(x) = (1-cos(x))/sin(x)

>> F2=inline('sin(x)/(1+cos(x))')

F2 =

    Inline function:
    F2(x) = sin(x)/(1+cos(x))

>> x=pi*1e-8; F1(x), F2(x)

ans =

   1.4136e-08


ans =

   1.5708e-08

>> x=pi*1e-9; F1(x), F2(x)

ans =

     0


ans =

   1.5708e-09
```

Os valores corretos são dados pela expressão F2. Para valores próximos de 0, é cos(x) próximo de 1 e ocorre cancelamento subtrativo no cálculo do numerador de F1. O cancelamento subtrativo é tanto mais grave quanto mais próximo $x$ estiver de zero.

**exercício 12.a)**

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

**exercício 12.b)** O número de condição relativo de uma função $f$ num ponto $x$ onde $f(x)\neq 0$ é dado por $x.\frac{f'(x)}{f(x)}$ (uma vez que os erros são usualmente tomados em valor absoluto também se pode definir o número de condição em termos do valor absoluto da expressão anterior). Com

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$

tem-se

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e o número de condição é, neste caso,

$$\frac{x}{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x}{2}.\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}}.\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}=\frac{x}{2}.\frac{-1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

Uma vez que as expressões de $f$ e $g$ são equivalentes, conclui-se de imediato que os números de condição das funções são iguais.

**exercício 12.c)** No Matlab, usaremos format long para melhor comparar os valores produzidos pelas expressões que definem $f$ e $g$.

```
>> f=inline('sqrt(x+1)-sqrt(x)')

f =

     Inline function:
     f(x) = sqrt(x+1)-sqrt(x)

>> g=inline('1/(sqrt(x+1)+sqrt(x))')

g =

     Inline function:
     g(x) = 1/(sqrt(x+1)+sqrt(x))

>> format long, x=10; f(x), g(x)

ans =

   0.154347130187020


ans =

   0.154347130187021

>> x=1e7; f(x), g(x)

ans =

     1.581138790243131e-04


ans =

     1.581138790555721e-04

>> x=1e11; f(x), g(x)

ans =

     1.581152901053429e-06


ans =

     1.581138830080237e-06
```

```
>> x=1e16; f(x), g(x)

ans =

     0


ans =

     5.000000000000000e-09
```

Para $x = 10$ os valores de $f(x)$ e $g(x)$ são praticamente iguais (coincidem em todos os algarismos significativos com excepção do último). Para os restantes valores, tal não é verdade e o problema agrava-se à medida que $x$ aumenta. Isto deve-se à perda de algarismos significativos no cálculo de $g(x)$ para valores de $x$ grandes. Isto acontece porque $\sqrt{x}$ e $\sqrt{x+1}$ se aproximam à medida que $x$ aumenta. No caso extremo de ser $x = 10^6$, tem-se no Matlab,

```
> sqrt(1+1e16)==sqrt(1e16)

ans =

     1
```

e o cancelamento subtrativo é total.