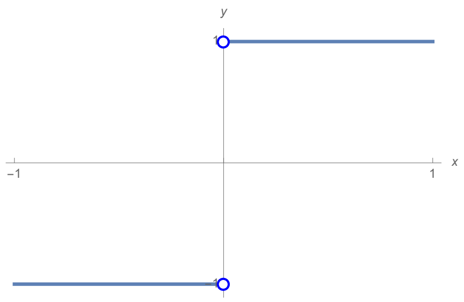
Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2023/24

Funções: limite e continuidade

1. (a) Comecemos por observar que a função f pode ser representada da seguinte forma:

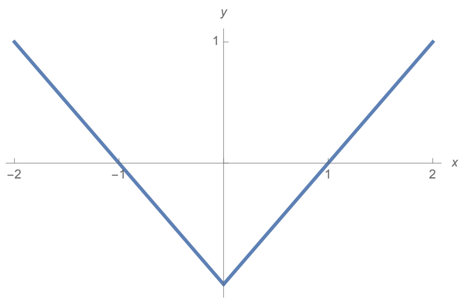
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}.$$



f é crescente. Com efeito, tem-se que $f(x) \leq f(y)$ para todos os pontos $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tais que $x < y$.
$\mathrm{CD}(f) = \mathrm{Im(f)} = \{-1, 1\}$. Logo f é limitada.
$\sup \mathrm{CD}(f) = \max \mathrm{CD}(f) = 1$.
$\inf \mathrm{CD}(f) = \min \mathrm{CD}(f) = -1$.

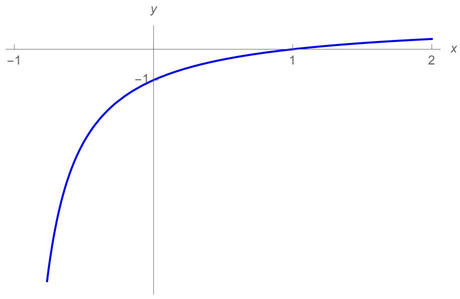
(b) Comecemos por observar que: $f(x) = \sqrt{x^2} - 1 = |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função f pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x - 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}.$$



f não é monótona. Por exemplo, $f(-1) = 0 > -1 = f(0)$ mas $f(0) = -1 < 0 = f(1)$.
$\mathrm{CD}(f) = [-1, +\infty[$. Logo f não é limitada.
Não existe supremo nem máximo do contradomínio de f.
$\inf \mathrm{CD}(f) = \min \mathrm{CD}(f) = -1$.

(c) Comecemos por observar que: $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, $x \in]-1, +\infty[$. A função f pode ser representada graficamente da seguinte forma:



f é estritamente crescente. Com efeito, tem-se que $f(x) < f(y)$ para todos os pontos $x, y \in]-1, +\infty[$ tais que $x < y$.
$\mathrm{CD}(f) =]-\infty, 1[$. Logo f não é limitada.
$\sup \mathrm{CD}(f) = 1$. Não existe máximo do contradomínio de f.
Não existe ínfimo nem mínimo do contradomínio de f.

2. (i) f não é injetiva nem sobrejetiva
g é injetiva e sobrejetiva. Logo g é bijetiva
h não é injetiva nem sobrejetiva.
i não é injetiva nem sobrejetiva.

(ii) $f([-1, 1]) = [0, 1]$
$i([-1, 0]) =]-1, 0] \cup \{2\}$
$i(]-1, 3]) =]-1, 2]$
$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$
$h^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$
$g^{-1}(]-1, 3]) = [-3, 1[$

3. (a) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + \pi/4) = \text{sen}\left(2x^2 + \pi/2\right), \ x \in \mathbb{R}$

(b) $(g \circ f)(x) = g(x-2) = \begin{cases} 3 & \text{se } x - 2 \neq 1 \\ 0 & \text{se } x - 2 = 1 \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 3 \end{cases}, x \in \mathbb{R}$

4. (a) h: possui um mínimo absoluto e um máximo local; não possui máximo absoluto;
i: possui máximo absoluto; não possui mínimos (nem locais nem absolutos);
j: não possui extremos.

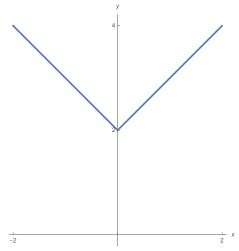
(b) Apenas i é limitada; h é minorada; j não é minorada nem majorada.

5. (a) Afirmação falsa. Com efeito, $f([0, 3]) = [-2, 2] \neq [-2, 1]$.

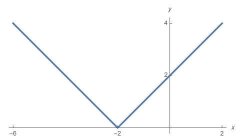
(b) Tem-se que $f\left(\frac{5}{2}\right) = -1$. Logo a afirmação é verdadeira.

(c) Tem-se que $f(-1) = 2$. Logo a afirmação é falsa.

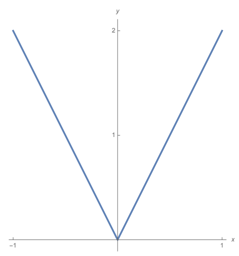
6. (a)



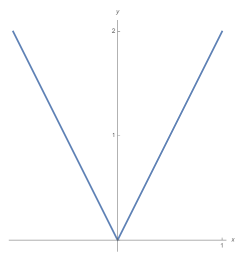
(b)



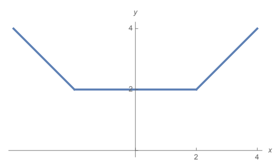
(c)



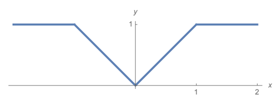
(d)



(e)



(f)



7. (a) Afirmação falsa. Com efeito, tem-se que $1 < 2$ mas $f(1) = 1 > 0 = f(2)$.

   (b) Afirmação verdadeira. Com efeito, tem-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $x + \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ e

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}(4x + 2\pi) = \operatorname{sen}(4x) = f(x)\,.$$

   (c) Afirmação verdadeira. Com efeito, Im(f) $=]0, +\infty[$ e, consequentemente, o conjunto Im(f) é minorado mas não é majorado.

8. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$.

9. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$; não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, uma vez que os limites laterais são distintos.

11.

(a) $-\infty$	(b) $+\infty$	(c) 2
(d) -1	(e) 1	(f) -1
(g) $\frac{\sqrt{3}}{6}$	(h) 0	(i) $\frac{1}{1-\sqrt{2}/2}$
(j) 1	(k) $\frac{4}{3}$	(l) 0
(m) 6	(n) 1	(o) $\frac{1}{2}$
(p) 0	(q) $+\infty$	(r) $\frac{5}{2}$
(s) 0	(t) $-\infty$	(u) 0

(c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2\,.$

(d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{-x}{x} = -1\,.$

(e) $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{|x + 3|}{x + 3} = \lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \dfrac{x + 3}{x + 3} = 1\,.$

(g)

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,.\end{aligned}$$

(h) Tem-se que:

- $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo a função $\operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é limitada;

- $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Então, por um teorema da aula, podemos concluir que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{|\operatorname{sen} x|} = \lim_{x\to 0} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{|\operatorname{sen} x|} = 1$.

(k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 4x} \dfrac{1}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x} \dfrac{4}{\cos 4x} \dfrac{3x}{3\operatorname{sen} 3x} = \dfrac{4}{3}$.

(l) Resolvido na aula.

(m) Usando a regra de Rufini tem-se que:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = (x^2 + 2x + 3)(x - 1).$$

Então:

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(x^2 + 2x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2 + 2x + 3) = 6$.

(n) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1$.

(0)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x^2))}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(p) Análogo ao exercício (l).

(q) $\lim_{x\to+\infty} (x^2 + x\cos x) = \lim_{x\to+\infty} x(x + \cos x) = +\infty$.

(r) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x + 3}{2x - 7} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{5 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{7}{x}} = \dfrac{5}{2}$.

(t) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{7x^4 - 2x + 1}{-3x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{7 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{-\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = -\infty$.

(u) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{-3x + 10}{x^4 - 2x + 4} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-\frac{3}{x^3} + \frac{10}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^4}} = 0$.

12. O limite existe apenas para $a = 0$. Além disso, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

13. (a) f é contínua em π porque $\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = -1$.

    (b) Por exemplo, $x = 0$ e $x = 1$.

14. (a) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$ (c) $\emptyset$ (d) $\{0\}$ (e) $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ (f) $\{1\}$

15. (a) Resolvido na aula
    (b) Resolvido na aula
    (c) Resolvido na aula
    (d) Por exemplo, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
    (e) Resolvido na aula
    (f) Resolvido na aula

16. (a) O domínio de continuidade da função f é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
    (b) O domínio de continuidade da função g é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
    (c) O domínio de continuidade da função h é $\{0\}$.
    (d) O domínio de continuidade da função i é $\{-1, 1\}$.
    (e) O domínio de continuidade da função j é $\{-1\}$.
    (f) O domínio de continuidade da função k é $\{-1\}$.
    (g) O domínio de continuidade da função m é $[-4, 5]\backslash\{2\}$.
    (h) O domínio de continuidade da função n é $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

17. $a = 0$

18.
    (a) Por exemplo, $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$

    (b) Por exemplo, $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$

    (c) Resolvido na aula

19. $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+1) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$.

Temos que $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x) = 2$ e $(g \circ f)(0) = 0$.

Consequentemente, $g \circ f$ não é contínua em $x = 0$.

Não há qualquer contradição com o teorema da função composta, uma vez que, embora f seja contínua em $x = 0$, g não é contínua em $f(0) = 1$.

20. (a) Por exemplo, $z = -2$.

 (b) Por exemplo, $z = -1$.

 (c) Por exemplo, $z = 0$.

21. (a) Consideremos a função $f(x) = x - \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$. Temos que:
 - f é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
 - $f(0) = -1 < 0$;
 - $f(\pi/2) = \pi/2 > 0$.

 Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]0, \pi/2[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $x = \cos x$.

 (b) Consideremos a função $f(x) = x + \ln x$, $x \in]0, 1]$. Temos que:
 - f é contínua por ser a soma de duas funções contínuas. Em particular, f é contínua em $[1/4, 1]$.
 - $f(1/4) < 0$;
 - $f(1) = 1 > 0$.

 Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]1/4, 1[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $x = -\ln x$.

 (c) Consideremos a função $f(x) = 2 + x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Temos que:
 - f é contínua por ser a soma de duas funções contínuas. Em particular, f é contínua em $[0, 2]$.
 - $f(0) = 1 > 0$;
 - $f(2) = 4 - e^2 < 0$.

 Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]0, 2[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $2 + x = e^x$.

22. Consideremos os seguintes dois casos:

 (i) Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ está encontrado o ponto fixo.

 (ii) Suponhamos que $f(a) \neq a$ e que $f(b) \neq b$. Então, como $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ temos que $f(a) > a$ e que $f(b) < b$.

 Consideremos a função $g(x) = f(x) - x$, $x \in [a, b]$. Temos que:

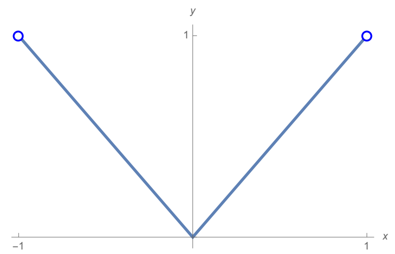
 - g é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
 - $g(a) = f(a) - a > 0$;
 - $g(b) = f(b) - b < 0$.

 Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g(x_0) = 0$, isto é, tal que $f(x_0) = x_0$.

23. (a)
$$\begin{array}{rccl} f: & [-2,-1] \cup [1,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \in [-2,-1] \\ 1 & \text{se} \quad x \in [1,3] \end{cases} \end{array}$$

(b) Não existe. Se a função $g(x) = f(x) + \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é contínua então a função $f(x) = g(x) - \operatorname{sen} x$, $x \in \mathbb{R}$, é também contínua (por ser a diferença de duas funções contínuas).

24. A função g pode ser representada graficamente da seguinte forma:



Temos que CD(g) = Im(g) = $[0, 1[$. O contradomínio de g tem mínimo igual a 0 mas não tem máximo. Não há contradição com o Teorema de Weierstrass porque o conjunto $]-1, 1[$ apesar de limitado, não é fechado.

25. (a) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, as funções:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

Temos que f é contínua e g não é contínua. Mas a função composta $g \circ f$:

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1 \end{array}$$

é contínua.

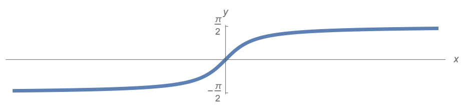
(b) Afirmação verdadeira. Pelo Teorema de Weierstrass, toda a função contínua definida num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ tem máximo e mínimo nesse intervalo. Consequentemente, f é limitada.

(c) Afirmação verdadeira. Consideremos a função $f(x) = \ln(x^3) - x$, $x \in [1, e]$. Temos que:

- f é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas;
- $f(1) = -1 < 0$;
- $f(e) = 3 - e > 0$.

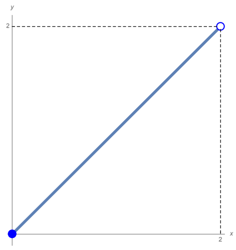
Então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, existe $x \in]1, e[$ tal que $f(x) = 0$, isto é, tal que $\ln(x^3) = x$.

(d) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, a função representada graficamente do seguinte modo:



Tem-se que a função tem domínio $\mathbb{R}$, é contínua e é limitada (o contradomínio da função é o conjunto $]-\pi/2, \pi/2[$, o qual é um conjunto limitado). No entanto, a função não atinge máximo nem mínimo.

(e) Afirmação falsa. Consideremos, por exemplo, a função representada graficamente do seguinte modo:



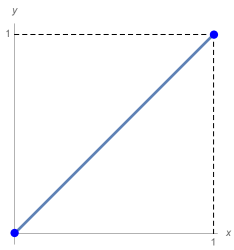
Tem-se que a função tem domínio $[0, 2[$, é contínua e é limitada (o contradomínio da função é o conjunto $[0, 2[$, o qual é um conjunto limitado). No entanto, a função não atinge máximo.

(f) Afirmação falsa. Por exemplo, consideremos a função

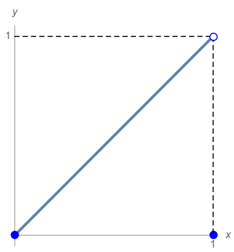
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{se} & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se} & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array}$$

A função $|f|$ é tal que: $|f(x)| = 1$, $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a função $|f|$ é contínua, mas a função f não é contínua em ponto algum.

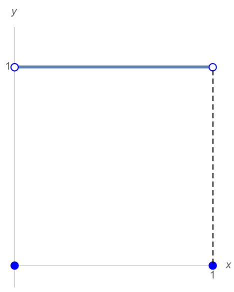
26. (a)



(b)

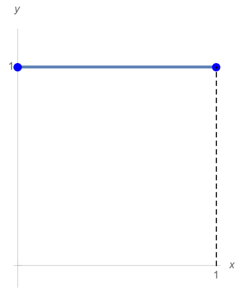


(c)

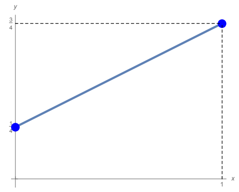


(d) Não existe (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy).

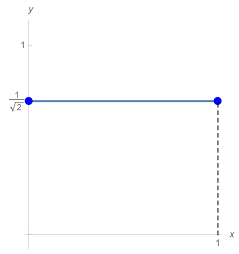
(e)



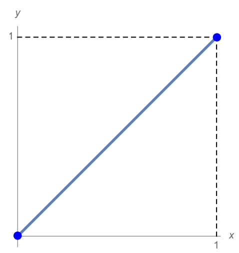
(f)



(g)

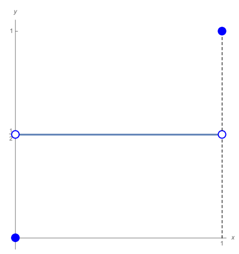


(h)

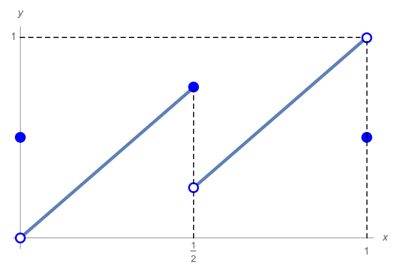


(i) Não existe (pelo Teorema de Bolzano-Cauchy).

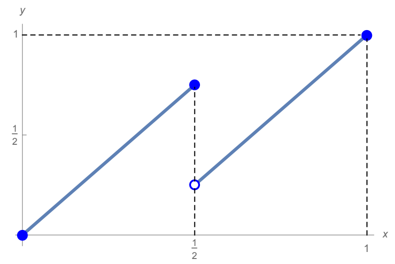
(j)



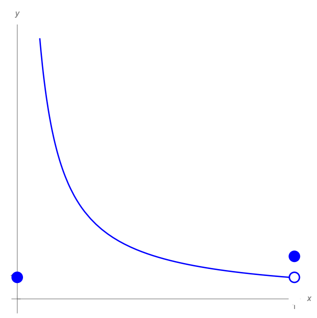
(k)



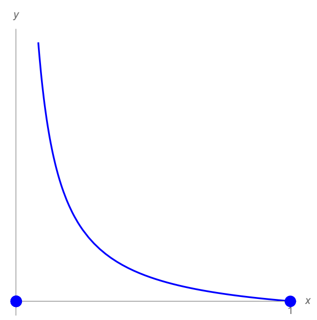
(l)



(m)



(n)



(o)