Universidade do Minho | **Cursos: CC & MAT**

DMAT | **Probabilidades e Aplicações** | **2019/2020**

Exame de Recurso - 27/Janeiro/2020

Nome: **Nº** **Curso:**

Responda à questão 4 *neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique os cálculos intermédios e funções do R que utilizar. Duração*: 2h30m. As questões 1 e 2 valem 40% da nota do exame e as restantes questões valem 60%.

---

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar três lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada.

   (a) Identifique, justificando, o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associado a esta experiência.

   (b) Identifique, justificando, três acontecimentos independentes decorrentes desta experiência.

   (c) Sabendo que saiu pelo menos uma cara nos dois últimos lançamentos, qual a probabilidade de terem saído somente caras? Justifique.

   (d) Considere Z a v.a.r. que representa o número de caras obtidas nos três lançamentos. Determine, usando a definição, a função de distribuição de Z.

   (e) Considere agora que numa caixa estão 5 moedas: três equilibradas, uma falsa que só tem caras e uma outra falsa que só tem coroas. Escolheu-se, ao acaso e com os olhos vendados, uma moeda desta caixa e efetuaram-se três lançamentos com ela.

      i. Qual a probabilidade de sair pelo menos uma cara nos três lançamentos? Justifique.

      ii. Sabendo que não saiu qualquer cara nos três lançamentos, qual a probabilidade de se ter escolhido uma das moedas equilibradas? Justifique.

2. Enuncie e demonstre o Teorema da Probabilidade Total.

3. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & se \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & se \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases},$$

   em que k é uma constante real.

   (a) Mostre que $k = \frac{1}{3}$.

   (b) Determine a função de distribuição de X e esboçe o seu gráfico.

   (c) Determine os quartis de X.

   (d) Mostre que $E[X]$ e $Var[X]$ existem. Mostre ainda que $E[X] = \frac{7}{6}$ e $Var[X] = \frac{11}{36}$.

   (e) Suponha agora que X representa o tempo, <u>em horas</u>, que um cliente demora a ser atendido numa certa repartição pública.

      i. Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 6 clientes desta repartição, haver pelo menos 2 clientes que foram atendidos em menos de 15 minutos e de haver exactamente 3 clientes que demoraram mais de 1h30m a ser atendidos? Justifique.

      ii. Qual a probabilidade de, numa amostra aleatória de 100 clientes desta repartição, a média dos tempos de atendimento ser superior a 1h? Justifique.

   (f) Seja Y uma v.a.r. independente de X e tal que $Y \sim U[0, 3]$.

      i. Determine a função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y).

      ii. Calcule $P(X < \frac{1}{4} \cup Y > 1)$.

      iii. Calcule $P(Y > X)$.

(v.s.f.f.)

4. Seja G uma v.a.r absolutamente contínua. Diz-se que G segue a lei Gama com parâmetros p e α, com $p > 0$ e $\alpha > 0$, e abrevia-se por $G \sim Gama(p, \alpha)$, se a função densidade de probabilidade de G é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} e^{-\alpha x} x^{p-1} & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases},$$

em que $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$.

Considere agora Y uma v.a.r. tal que $Y \sim N(0, \sigma^2)$ e seja Z a v.a.r. definida por $Z = Y^2$.

(a) Mostre que a função de distribuição de Z é dada por:

$$c \in \mathbb{R},\ F_Z(c) = \begin{cases} F_Y\left(\sqrt{c}\right) - F_Y\left(-\sqrt{c}\right) & \text{se} \quad c > 0 \\ 0 & \text{se} \quad c.c. \end{cases},$$

em que F_Y denota a função de distribuição da v.a.r. Y.

(b) Mostre que $Z \sim Gama\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$.

Observação: Pode usar, sem demonstrar, que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.