**Universidade do Minho** **Cursos: CC & MAT**
**DMA** **Probabilidades e Aplicações** **2017/2018**
**Teste I - 31/Outubro/2017**

---

**Nome:** **Nº** **Curso:**

*Responda às questões 1 e 2 na folha de teste. Responda à questão 3 neste enunciado.*
*Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e as funções do* `R` *que utilizar.*
*O teste tem a duração de 2 horas.*

---

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar três lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada.

   (a) Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória.

   (b) Identifique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis decorrentes desta experiência.

   (c) Sabendo que saiu pelo menos uma cara nos três lançamentos, qual a probabilidade de ter saído coroa no primeiro lançamento? Justifique.

   (d) Identifique, justificando, dois acontecimentos independentes decorrentes desta experiência.

   (e) Seja $X$ a v.a.r. que representa o número de caras obtidas nos três lançamentos.

      i. Determine a função de probabilidade e a função de distribuição de X.

      ii. Sabendo que saíram pelo menos duas caras nos três lançamentos, qual a probabilidade de não ter saído qualquer coroa? Justifique.

2. Num lote de 10 espingardas existem 3 espingardas de boa precisão, 5 de precisão média e 2 de má precisão. As espingardas aparentam ser todas iguais pelo que não é possível distinguir, a olho, as 10 espingardas. No entanto, sabe-se que as espingardas de boa precisão acertam no alvo com probabilidade 0.95, as de precisão média acertam no alvo com probabilidade 0.7 e as de má precisão erram sempre o alvo.

   (a) Escolheu-se, ao acaso, uma espingarda neste lote e efectuou-se um só disparo.

      i. Determine a probabilidade de acertar no alvo.

      ii. Sabendo que se acertou no alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda boa precisão? Justifique.

      iii. Sabendo que se errou o alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda de média ou má precisão? Justifique.

   (b) Escolheu-se, ao acaso, uma espingarda neste lote, efectuaram-se 5 disparos com ela, sempre nas mesmas condições, e observou-se que se acertou sempre no alvo. Qual a probabilidade de se ter escolhido uma espingarda de boa precisão? Justifique.

*(v.s.f.f.)*

3. Considere $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade.

(a) Seja $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{F}$ tal que $E_n \subseteq E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n).$$

(b) Mostre que, se $A$, $B$ e $C$ formam uma família de 3 acontecimentos independentes, então $\overline{A}$, $B$ e $C$ também formam uma família de 3 acontecimentos independentes.

(c) Sejam $A$ e $B$ dois elementos de $\mathcal{F}$ tais que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \subsetneq \Omega$, $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$. Mostre que a função $X : \Omega \to \mathbb{R}$, definida por

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & se \quad \omega \in A \\ 1 & se \quad \omega \in B \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases},$$

é uma v.a.r. e determine, em função de $P(A)$ e de $P(B)$, a sua função de distribuição.