Probabilidades e Aplicações

Soluções da Folha Prática 8

1. (a) $f((a_1,a_2)) = \begin{cases} 4/36 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(0,0),(1,0)\} \\ 12/36 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(0,1)\} \\ 9/36 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(0,2)\} \\ 6/36 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(1,1)\} \\ 1/36 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(2,0)\} \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$ (b) $\frac{5}{36}$

   (c) $f_X(a_1) = \begin{cases} 25/36 & se \quad a_1=0 \\ 10/36 & se \quad a_1=1 \\ 1/36 & se \quad a_1=2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$, $f_Y(a_2) = \begin{cases} 9/36 & se \quad a_2\in\{0,2\} \\ 18/36 & se \quad a_2=1 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

   (d) Não (e) $Cov(X,Y) = -\frac{1}{6}$, $\rho(X,Y) = -0.4472$

2. (a) $f((a_1,a_2)) = \begin{cases} 1/16 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(0,0),(0,2),(1,0),(1,3),(2,1),(2,3)\} \\ 2/16 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(0,1),(2,2)\} \\ 3/16 & se \quad (a_1,a_2)\in\{(1,1),(1,2)\} \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$ (b) $\frac{11}{16}$

   (c) $f_{X_1}(a_1) = \begin{cases} 4/16 & se \quad a_1\in\{0,2\} \\ 8/16 & se \quad a_1=1 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$; $f_{X_2}(a_2) = \begin{cases} 2/16 & se \quad a_2\in\{0,3\} \\ 6/16 & se \quad a_2\in\{1,2\} \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$; Não

   (d) $Cov(X_1,X_2) = \frac{1}{4}$, $\rho(X_1,X_2) = 0.4082$

3. (a) $C_{(X,Y)} = \{(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$;

$$F((c_1,c_2)) = P(X\le c_1, Y\le c_2) = \begin{cases} 0 & se \quad (c_1<0 \vee c_2<0)\vee(0\le c_1<1 \wedge 0\le c_2<1) \\ 1/32 & se \quad 1\le c_1<2 \wedge 0\le c_2<1 \\ 5/32 & se \quad 2\le c_1<3 \wedge 0\le c_2<1 \\ 14/32 & se \quad c_1\ge 3 \wedge 0\le c_2<1 \\ 1/32 & se \quad 0\le c_1<1 \wedge c_2\ge 1 \\ 4/32 & se \quad 1\le c_1<2 \wedge c_2\ge 1 \\ 13/32 & se \quad 2\le c_1<3 \wedge c_2\ge 1 \\ 1 & se \quad c_1\ge 3 \wedge c_2\ge 1 \end{cases}$$

   (b) $f_X(x) = \begin{cases} 1/32 & se \quad x=0 \\ 3/32 & se \quad x=1 \\ 9/32 & se \quad x=2 \\ 19/32 & se \quad x=3 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} 14/32 & se \quad y=0 \\ 18/32 & se \quad y=1 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$; Não

   (c) $\frac{78}{32}$; $\frac{18}{32}$; 0.621; 0.246; −0.059; −0.151

4. $Cov(X,X^2) = \rho(X,X^2) = 0$. Comentário: X e X^2 não são independentes mas $\rho(X,X^2)=0$.

5. (a) $F_M(c) = [F(c)]^n$; $F_N(c) = 1-[1-F(c)]^n$ (b) $Exp(n\lambda)$

6. São independentes.

7. $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Bin(n,p)$

8. (a) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ e^{-x} & se \quad x > 0 \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & se \quad y \leq 0 \\ e^{-y} & se \quad y > 0 \end{cases}$ (b) $\frac{1}{2}$

   (c) $P(X+Y \leq u) = \begin{cases} 0 & se \quad u \leq 0 \\ 1 - e^{-u}[1+u] & se \quad u > 0 \end{cases}$; $2e^{-1} - 3e^{-2}$ (d) São independentes

   (e) $E[X] = E[Y] = 1$, $Var[X] = Var[Y] = 1$, $Cov(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$

9. (a) $k = 1/8$;

   $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^3 & se \quad 0 < x < 2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}[\frac{8}{3} - 2y + \frac{5}{6}y^3] & se \quad -2 < y \leq 0 \\ \frac{1}{8}[\frac{8}{3} - 2y + \frac{1}{6}y^3] & se \quad 0 < y < 2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$

   (b) Não (c) $\frac{8}{5}$; $-\frac{8}{15}$; 0.107; 0.604; -0.036; -0.142

10. (a) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \vee x > 1 \\ \frac{2}{5}(x+2) & se \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$; $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & se \quad y < 0 \vee y > 1 \\ \frac{1}{5}(1+8y) & se \quad 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$;
    Não são independentes

    (b) $\frac{8}{15}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{8}{15}$; $\frac{19}{30}$; $\frac{37}{450}$; $\frac{59}{900}$; $-\frac{1}{225}$; -0.061

11. 0.12

12. 0.0034

13. $(X,Y) \sim M(2; \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$; Não

14. —

15. —

16. (a) — (b) $Cov(X_1, X_2) = \rho(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi}$ (c) —

17. (a) $\chi_{0.25} = 1.75; \chi_{0.5} = 2.5; \chi_{0.75} = 3.25$ (b) 0.0003

    (c) i. $f((x,y)) = \begin{cases} \frac{1}{9} & se \quad x \in [1,4], y \in [1,4] \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$ ii. $\frac{1}{2}$ iii. $\frac{4}{9}$

Soluções da Folha Prática 9

---

1. —

2. —

3. (a) 0.9997154 (b) 0.9997965 (c) igual a (b)

4. (a) $N(270, 67)$ (b) 0.0334

5. 0.0277

6. $n = 62$. Note que se quer determinar $n \in \mathbb{N}$ tal que $P(|\overline{X}_n - \mu| \leq 0.25\sigma) \geq 0.95$, em que μ e σ são, respetivamente, o valor médio e o desvio-padrão da v.a.r. e $\overline{X_n}$ denota a média amostral.

7. —

8. —

9. (a) $E[Y] = 350$; $Var[Y] = \frac{875}{3}$; 0.0716
   (b) $X \sim Bin(100, \frac{1}{6})$; $E[X] = \frac{100}{6}$; $Var[X] = \frac{500}{36}$; 0.9998267 (aproximado); 0.9997042 (exato)
   (c) Não são independentes