Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

Folha de exercícios 7 — 2022'23

1. Determine os pontos críticos de cada uma das funções apresentadas. Averigúe se algum deles é maximizante local, minimizante local ou ponto de sela.
   (a) $f(x,y) = x^4 + y^4$;
   (b) $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$;
   (c) $f(x,y) = x^4 + y^3$;
   (d) $f(x,y) = xy$;
   (e) $f(x,y) = x^2 - y^2$;
   (f) $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$.

2. Determine e classifique os pontos críticos das funções definidos por:
   (a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - y$;
   (b) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$;
   (c) $f(x,y) = e^{2x^2+y^2}$;
   (d) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

3. Determine, caso existam, os extremos locais das funções definidas por:
   (a) $f(x,y) = (2x-y)^2$;
   (b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 1$;
   (c) $f(x,y) = x^3y^3$;
   (d) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - y$;
   (e) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$;
   (f) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$;
   (g) $f(x,y) = y + x\operatorname{sen} y$;
   (h) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;
   (i) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$;
   (j) $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{\,x^2+y^2+y^2}$;

4. Determinado foguete tem um sistema de controlo sensível quer à humidade quer à temperatura. Supondo que o raio (em Kms) no qual o foguete pode ser controlado é dado pela função
$$R(h,t) = 27800 - 5t^2 - 6ht - 3h^2 + 400t + 300h,$$
identifique as condições atmosféricas óptimas (temperatura vs humidade) para operar o foguete.

5. Determine o máximo do produto entre dois números reais, desde que a soma deles seja igual a quatro.

6. De entre todos os triângulos rectângulos com hipotenusa de cumprimento quatro, calcule as dimensões daquele que possui área máxima.

7. Determine as dimensões do rectângulo de área máxima que se encontra inscrito na elipse de equação
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

8. Determine os extremos das funções f, definidas a seguir, vinculados pelas respectivas condições:
   (a) $f(x,y) = \ln(xy)$ e $2x + 3y = 5$;
   (b) $f(x,y) = x + y$ e $x^2 + y^2 = 1$;
   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$;
   (d) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ e $x^2 - y^2 = 1$;
   (e) $f(x,y) = xy$ e $9x^2 + y^2 = 4$;
   (f) $f(x,y) = x + 2y$ e $x^2 + y^2 = 5$;
   (g) $f(x,y,z) = x + 2y$ e $x + y + z = 1$ e $y^2 + z^2 = 4$;
   (h) $f(x,y,z) = 3x - y - 3z$ e $x + y = z$ e $x^2 + 2z^2 = 1$.
9. Pretende-se construir um quarto, com a forma de um paralelepípedo, para armazenamento de materiais em temperatura elevada com um volume de 100 metros cúbicos. Como o ar quente sobe, a perda de calor por unidade de área pelo tecto é cinco vezes maior que a perda de calor pelo chão. A perda de calor pelas quatro paredes é três vezes maior do que a perda de calor pelo chão. Determine as dimensões do quarto a construir que minimize a perda de calor e, portanto, minimiza o custo do aquecimento.
10. Determine o ponto do plano $2x - y + z = 1$ que está mais próximo do ponto $(-4, 1, 3)$.
11. Mostre que um paralelepípedo de volume 27 unidades cúbicas, possui superfície mínima se for um cubo.
12. Determine três números positivos cuja soma é 13 e tais que a soma dos seus quadrados é mínima.
13. Considere uma placa circular de raio 1, identificada com os pontos $P = (x,y)$ do plano $\mathbb{R}^2$ que verificam $x^2 + y^2 \leq 1$. Sabendo que a temperatura em qualquer ponto (x,y) da placa é
$$T(x,y) = 2x^2 + y^2 - y + 10,$$
encontre os pontos mais quentes e mais frios na placa.
14. Determine o mínimo e o máximo absoluto da função
$$f: \begin{array}{rcl} [0,2\pi] \times [0,2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \operatorname{sen} x + \cos y \end{array}.$$
15. Determine o mínimo e o máximo absoluo da função f no disco definido pela equação $x^2 + y^2 \leq 1$, sendo f definida por:
   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^4$;
   (b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.