Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Licenciatura em Ciências da Computação
23/05/2023
Segundo Teste

Nome: Número:

1. Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Como $140 = (-4) \times (-25) + 40$ então o resto da divisão de 140 por -25 é 40.

(b) Os números 3^{24678} e $2^{5647389}$ têm o mesmo resto na divisão por 7.

(c) Se $n \in \mathbb{Z}$ é tal que $n \equiv 3 \pmod{11}$ então $22n^3 + 40n - 1 \equiv -4 \pmod{11}$.

(d) Se $3 = 13a + 5b$ para alguns $a, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, então m.d.c.$(a, b) = 3$.

a Falso

Se r é o resto da divisão de um inteiro por -25 então $r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < |-25|$. Logo r não pode ser 40.

Note-se que $140 = (-5)\times(-25) + 15$ pelo que o resto da divisão de 140 por -25 é igual a 15.

b Verdadeiro

Temos $3^3 \equiv -1 \pmod 7$ e $24678 = 3 \times 8226$, logo $3^{24678} \equiv (-1)^{8226} \pmod 7$ e portanto $3^{24678} \equiv 1 \pmod 7$

Temos $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ e $5647389 = 3 \times 1882463$, logo $2^{5674389} \equiv 1^{1882463} \pmod 7$ e portanto $2^{5674389} \equiv 1 \pmod 7$

Concluimos assim que os restos da divisão de 3^{24678} e de $2^{5674389}$ por 7 são ambos iguais a 1.

c Falso.

Seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \equiv 3 \pmod{11}$.

Como $11 \mid 22$ então $22n^3 \equiv 0 \pmod{11}$.

Como $n \equiv 3 \pmod{11}$ então $40n \equiv 120 \pmod{11}$ e assim $40n \equiv 10 \pmod{11}$ (pois $120 = 11 \times 10 + 10$).

Logo $22n^3 + 40n - 1 \equiv 9 \pmod{11}$ mas $9 \not\equiv -4 \pmod{11}$.

Em alternativa:

podemos tomar um contra-exemplo.

Temos que se $n=3$ então $n\equiv 3 \pmod{11}$ mas de $22n^3+40n-1 = 11(2n^3+3n)+7n-1$ resulta que $22n^3+40n-1 \equiv 7n-1 \pmod{11}$ e $7n-1=20$. Ora, $20 \not\equiv -4 \pmod{11}$ uma vez que $11 \nmid 24$.

d. Falso.

De $a,b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ serem tais que $3 = 13a+5b$ apenas podemos concluir que $m.d.c.(a,b) \mid 3$.

Por exemplo, se $a=1$ e $b=-2$ temos $3 = 13a+5b$ mas $m.d.c.(a,b) = 1$.

Caso não conseguíssemos "adivinhar" um contra-exemplo, poderíamos resolver a equação diofantina $13a+5b=3$

$$13 = 2\times 5+3 \qquad 1 = 3-2$$
$$5 = 3+2 \qquad = 3-(5-3) = 2\times 3-5$$
$$3 = 2+1 \qquad = 2\times(13-2\times 5)-5 = 2\times 13 - 5\times 5$$

Assim $3 = 6\times 13 - 15\times 5$

Portanto, uma solução particular da equação é $(a_0,b_0)=(6,-15)$ e a solução geral é dada por $\begin{cases} a = 6-5t \\ b = -15+13t \end{cases}$ $t\in\mathbb{Z}$

Para $t=1$ encontramos a solução $(a_1,b_1)=(1,-2)$ que verifica $m.d.c.(1,-2) = 1 \neq 3$.

2. Use o algoritmo da divisão para mostrar que, para todo o $n \in \mathbb{Z}$, $n(n^2-1)$ é um múltiplo de 3.

Vejamos que, para todo o $n\in\mathbb{Z}$, $3 \mid n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$.

Pelo Teorema do Algoritmo da Divisão, existem $q,r\in\mathbb{Z}$ tais que

$$n = 3q+r \qquad \text{com } r\in\{0,1,2\}$$

- Se $r=0$

  $n=3q$ logo $n(n-1)(n+1) = 3q(3q-1)(3q+1) = 3\,[\,q(3q-1)(3q+1)\,]$

  e assim $3 \mid n(n-1)(n+1)$.

- Se $r=1$

  $n=3q+1$ logo $n(n-1)(n+1) = (3q+1)\,3q\,(3q+2) = 3\,[\,q(3q+1)(3q+2)\,]$

  e assim $3 \mid n(n-1)(n+1)$

- Se $r=2$

  $n=3q+2$ logo $n(n-1)(n+1) = (3q+2)(3q+1)(3q+3) = 3\,[\,(3q+2)(3q+1)(q+1)\,]$

  e assim $3 \mid n(n-1)(n+1)$.

Concluimos que, para qualquer um dos restos possíveis, $3 \mid n(n^2-1)$ logo, para todo o $n \in \mathbb{Z}$, $n(n^2-1)$ é múltiplo de 3.

3. Determine os dígitos x e y tais que o inteiro $\overline{58xx34y}$ é simultaneamente divisível por 9 e por 11.

Usando os critérios de divisibilidade por 9 e por 11 temos que

$$\overline{58xx34y} \equiv y+4+3+2x+8+5 \pmod 9$$
$$\equiv 2+y+2x \pmod 9$$

e que

$$\overline{58xx34y} \equiv y-4+3-x+x-8+5 \pmod{11}$$
$$\equiv y-4 \pmod{11}$$

De $11 \mid \overline{58xx34y}$ resulta que $y \equiv 4 \pmod{11}$ logo $y=4$

De $9 \mid \overline{58xx34y}$ resulta que $2+y+2x \equiv 0 \pmod 9$

Assim $2x \equiv -6 \pmod 9 \iff x \equiv -3 \pmod 9 \iff x \equiv 6 \pmod 9$

logo $x=6$

O número pretendido é então 5866344.

4. Determine a maior solução inteira negativa da congruência linear $12x \equiv 7 \pmod{17}$.

Como $m.d.c(12,17)=1$ e $1 \mid 7$ então a congruência é solúvel e existe uma única solução módulo 17.

Resolução 1

Procuremos o inverso de 12 módulo 17.

$17 = 12 + 5$ $\qquad$ $1 = 5 - 2\times 2$

$12 = 2\times 5 + 2$ $\qquad$ $= 5 - 2\times(12 - 2\times 5) = 5\times 5 - 2\times 12$

$5 = 2\times 2 + 1$ $\qquad$ $= 5\times(17-12) - 2\times 12 = 5\times 17 - 7\times 12$

Logo $-7\times 12 \equiv 1 \pmod{17}$

Temos então

$12x \equiv 7 \pmod{17} \Leftrightarrow x \equiv -49 \pmod{17} \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{17}$

Solução geral $\{2 + t\,17 : t \in \mathbb{Z}\}$. A maior solução inteira negativa é então $x = -15$.

Resolução 2

Resolver a congruência $12x \equiv 7 \pmod{17}$ é equivalente a resolver a equação diofantina $12x + 17y = 7$

Dos cálculos anteriores temos que

$1 = 5\times 17 - 7\times 12$ logo $7 = 35\times 17 - 49\times 12$

pelo que $(-49, 35)$ é solução particular e a solução geral é

$$\begin{cases} x = -49 + t\,17 & t \in \mathbb{Z} \\ y = 35 - t\,12 \end{cases}$$

Só nos interessam os valores de x. Solução $\{-49 + t\,17 : t \in \mathbb{Z}\}$ e a maior solução negativa é $x = -15$.

5. Use o Teorema Chinês dos Restos para determinar a solução geral do seguinte sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} 5x \equiv 1 \pmod{2} \\ 3x \equiv 6 \pmod{15} \\ x \equiv -2 \pmod{7} \end{cases}$$

e verifique que a menor solução positiva que encontrou é de facto solução do sistema.

O TCR não pode ser aplicado ao sistema tal como é apresentado.

$5x \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow 4x + x \equiv 1 \pmod{2} \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod{2}$

$3x \equiv 6 \pmod{15} \Leftrightarrow x \equiv 2 \pmod{5}$ (lei do corte)

Logo o sistema apresentado é equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv -2 \pmod 7 \end{cases}$$

Como 2, 5 e 7 são primos entre si, o TCR garante que existe uma única solução módulo $N = 2 \times 5 \times 7 = 70$

$n_1 = 2$ $\quad a_1 = 1$ $\quad N_1 = N/n_1 = 35$

$n_2 = 5$ $\quad a_2 = 2$ $\quad N_2 = N/n_2 = 14$

$n_3 = 7$ $\quad a_3 = -2$ $\quad N_3 = N/n_3 = 10$

x_1: $\quad N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{n_1} \iff 35 x_1 \equiv 1 \pmod 2$

Podemos tomar $x_1 = 1$

x_2: $\quad N_2 x_2 \equiv 1 \pmod{n_2} \iff 14 x_2 \equiv 1 \pmod 5$

Podemos tomar $x_2 = -1$

x_3: $\quad N_3 x_3 \equiv 1 \pmod{n_3} \iff 10 x_3 \equiv 1 \pmod 7$

Podemos tomar $x_3 = -2$

O TCR garante que

$$x_0 = N_1 a_1 x_1 + N_2 a_2 x_2 + N_3 a_3 x_3 =$$

$$= 35 \times 1 \times 1 + 14 \times 2 \times (-1) + 10 \times (-2) \times (-2) = 35 - 28 + 40 = 47$$

é solução particular do sistema de congruências.

A solução geral é dada por $\{47 + 70t : t \in \mathbb{Z}\}$ pelo que $x_0 = 47$ é a menor solução positiva.

Verifiquemos que $x_0 = 47$ é de facto solução do sistema

$47 \equiv 1 \pmod 2$ $\quad$ pois $\quad 2 \mid 47 - 1 = 46$

$47 \equiv 2 \pmod 5$ $\quad$ pois $\quad 5 \mid 47 - 2 = 45$

$47 \equiv -2 \pmod 7$ $\quad$ pois $\quad 7 \mid 47 + 2 = 49$