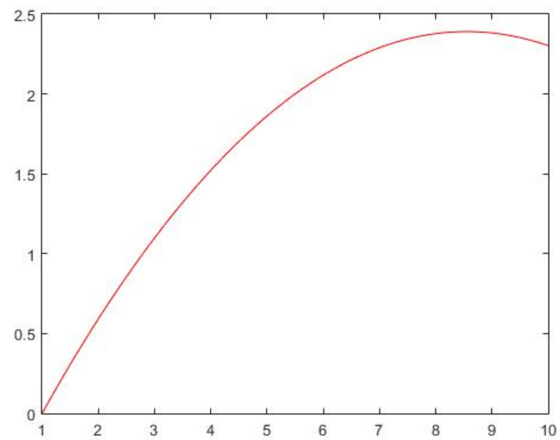
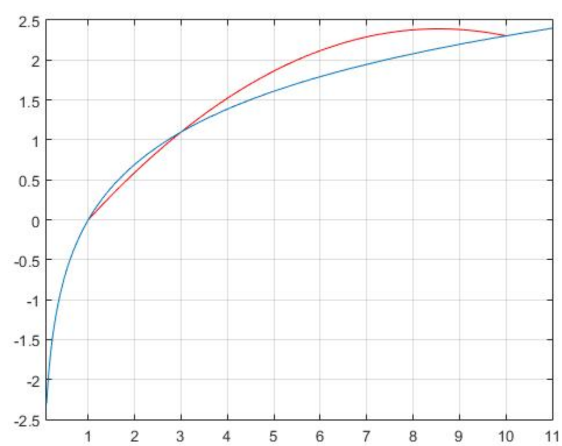
Resolução explicada dos exercícios 4, 5 e 6 da folha 4 (resolvidos nas aulas PL dos dias 15, 16, 17 e 18 de dezembro)

exercício 4.a) Tal como ficou ilustrado na resposta à questão 3.d), a função poLagrange calcula o valor do polinómio interpolador num ponto. No código seguinte, vamos usar aquela função para calcular o polinómio interpolador em cada um dos pontos $1, 1.1, 1.2, 1.3, ..., 10$.

```
xi=[1,3,10]; yi=log(xi);
>> x=1:0.1:10; for k=1:length(x),y(k)=poLagrange(xi,yi,x(k));end,plot(x, y,'r')
```



exercício 4.b) `>> hold on, fplot('log(x)',[0.1,11]), grid on`



(nota: fizeram-se algumas alterações ao código apresentado no enunciado). A figura permite vizualizar os gráficos da função e do polinómio interpolador, os quais, como esperado, se intersetam nos pontos cujas abcissas são os nós de interpolação. Observe-se como o polinómio interpolador tem erros maiores nos pontos mais afastados dos nós

exercício 5.a) Neste caso é $n = 1$ (interpolação linear) uma vez que vão ser usados dois nós. Tem-se

$$(log(x))'' = -1/x^2$$

e a expressão do erro neste caso, para qualquer ponto x entre os nós $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$, é

$$log(x) - p_1(x) = (x-1)(x-2)\frac{-1/\xi_x^2}{2!},$$

onde ξ_x é um ponto que está entre 1 e 2 (e depende de x). Uma vez que

$$|-1/\xi_x^2| \leq 1,$$

podemos escrever, com $x = 1.5$ e tomando módulos,

$$|log(1.5) - p_1(1.5)| \leq |(1.5-1)(1.5-2)|\frac{1}{2} = 0.125$$

exercício 5.b) Para $n = 2$ (os nós são $x_0 = 1, x_1 = 2$ e x_2) tem-se

$$(log(x))''' = 2/x^3$$

e a expressão do erro neste caso, para qualquer ponto x entre 1 e 3, é

$$log(x) - p_1(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\frac{2/\xi_x^3}{3!},$$

onde ξ_x é um ponto que está entre 1 e 3 (e depende de x). Uma vez que

$$|2/\xi_x^3| \leq 1$$

(o máximo, em módulo, da derivada continua a ocorrer no ponto 1), podemos escrever, com $x = 1.5$ e tomando módulos,

$$|log(1.5) - p_2(1.5)| \leq |(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)|\frac{2}{3!}.$$

O valor do polinómio nodal pode calcular-se no Matlab com

```
>> xi=[1,2,3]; x=1.5; abs(prod(x-xi))
```

e assim o majorante para o erro de truncatura é dado por

```
>> xi=[1,2,3]; x=1.5; abs(prod(x-xi))/3

ans =

    0.1250
```

(nota: embora o majorante do erros de $p_1(1.5)$ e de $p_2(1.5)$ seja o mesmo, tal não significa que os erros sejam iguais. O erro $|log(1.5) - p_1(1.5)|$ é

```
 >> abs(log(1.5)-poLagrange([1,2],log([1,2]),1.5))

ans =

    0.0589
```

e o erro $|log(1.5) - p_2(1.5)|$ é

```
>> abs(log(1.5)-poLagrange([1,2,3],log([1,2,3]),1.5))

ans =

    0.0229

)
```

Pode proceder-se de forma análoga para os restantes valores de n, tratando cada caso separadamente. Vamos proceder de forma diferente. Observando que para $f(x) = log(x)$ é

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1/x \\
f''(x) &= -1/x^2 \\
f'''(x) &= 1 \times 2/x^3 \\
f^{(iv)}(x) &= -1 \times 2 \times 3/x^4 \\
\ldots & \\
f^{(n+1)}(x) &= -1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n/x^{n+1}
\end{aligned}$$

e que o máximo de $|f^{(n+1)}(x)|$, no intervalo $[1, n+1]$ é $n!$, atingido no ponto 1, podemos escrever

$$|log(1.5) - p_n(1.5)| \leq |(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)...(1.5-n+1)|\frac{n!}{(n+1)!}.$$

Tem-se

```
>> n=3; xi=1:n+1; x=1.5; abs(prod(x-xi))/(n+1)

ans =

    0.2344

>> n=4; xi=1:n+1; x=1.5; abs(prod(x-xi))/(n+1)

ans =

    0.6563

>> n=5; xi=1:n+1; x=1.5; abs(prod(x-xi))/(n+1)

ans =

    2.4609

>> n=6; xi=1:n+1; x=1.5; abs(prod(x-xi))/(n+1)

ans =

   11.6016
```

o que mostra que não é adequado fazer interpolações com os nós muito afastados do ponto onde se quer aproximar a função.

exercício 6.a) A tabela das diferenças divididas é (ver p. 86 e 87 das notas das aulas)

```
x        f(x)    f[,]    f[,,]

0          0

0.2      0.2013  1.0067

0.4      0.4108  1.0471    0.1010
```

e a fórmula interpoladora de Newton com diferenças divididas neste caso é

$$p_2(x) = 0 + 1.0067 \times (x - 0) + 0.1010 \times (x - 0)(x - 0.2)$$

e para $x = 0.3$, temos

```
>> x=0.3; 0+1.0067*(x-0)+0.1010*(x-0)*(x-0.2)

ans =

    0.3050
```

O mesmo resultado pode ser obtido com a fórmula interpoladora de Newton que requer menos operações aritméticas

```
>> poLagrange([0,0.2,0.4], sinh([0,0.2,0.4]),0.3)

ans =

    0.3050
```

exercício 6.b) Teremos que acrescentar o novo nó 0.6 e correspondente valor nodal sinh(0.6) à tabela anterior e fazer o cáculo das diferenças divididas. Resulta a tabela

```
x        f(x)    f[,]    f [,,]   f[,,,]

0          0

0.2      0.2013  1.0067

0.4      0.4108  1.0471    0.1010

0.6      0.6367  1.1295    0.2061    0.1751
```

e agora tem-se

```
>> x=0.3; 0+1.0067*(x-0)+0.1010*(x-0)*(x-0.2)+0.1751*(x-0)*((x-0.2)*(x-0.4))

ans =

    0.3045
```