Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação

1º Trabalho de Grupo de Análise - 27 Fev

Nome: ______________________ Número: __________

Nome: Proposta de Resolução Número: __________

1. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+y}.$$

   (a) Calcule a imagem do ponto $(2,-1)$;

   (b) Indentifique o domínio D da função f;

   (c) Identifique o interior, o derivado e a fronteira do domínio D;

   (d) Calcule, ou justifique que não existe,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y).$$

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = x^2 + y.$$

   (a) Identifique e esboce as curvas de nível -2,-1,0,1,2 da função g;

   (b) Partindo do ponto $(0,0)$ indique:

      i. um vector de $\mathbb{R}^2$ que indica uma direcção e um sentido em que a função cresce;

      ii. um vector de $\mathbb{R}^2$ que indica uma direcção e um sentido em que a função decresce.

3. Calcule, ou justifique que não existe, o seguinte limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^4}.$$

$\boxed{1}$

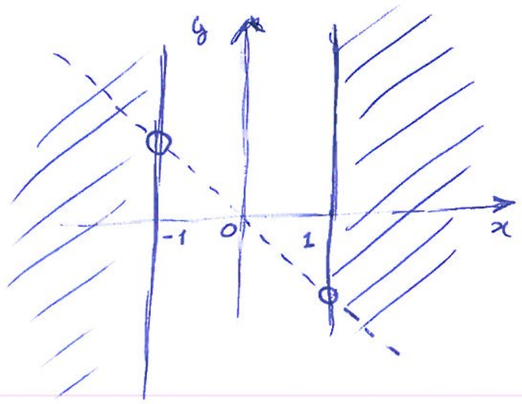
$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+y}$$

a) $f(2,-1) = \dfrac{\sqrt{2^2-1}}{2+(-1)} = \dfrac{\sqrt{4-1}}{2-1} = \sqrt{3}$

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-1 \geq 0 \text{ e } x+y \neq 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1) \text{ e } y \neq -x\}$

c)



$\overset{\circ}{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x < -1 \text{ ou } x > 1) \text{ e } y \neq -x\}$

$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$

$fr(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1 \text{ ou } x = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \text{ e } |x| \geq 1\}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+y} = \frac{\sqrt{1^2-1}}{1+0} = 0.$

$\boxed{2}$ $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto x^2 + y$

a) $\mathcal{N}_{-2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = -2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 - 2\}$

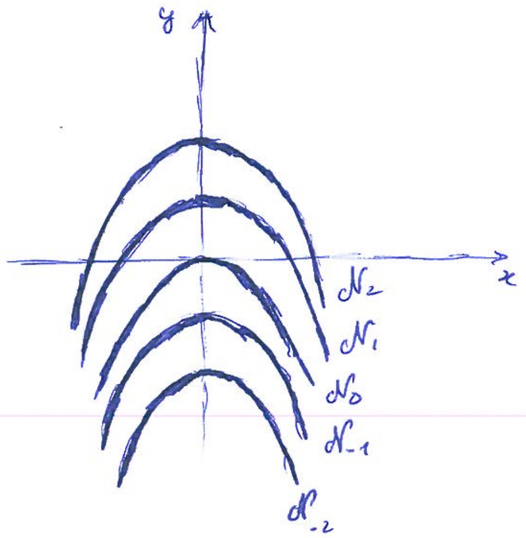
$\mathcal{N}_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = -1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 - 1\}$

$\mathcal{N}_{0} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2\}$

$\mathcal{N}_{1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + 1\}$

$\mathcal{N}_{2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + 2\}$

Todas as curvas são parábolas.



b) i) Por exemplo: $\vec{v} = (0,1)$

ii) Por exemplo: $\vec{u} = (0,-1)$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^4}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{xy}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^4}}_{\text{limitada}} = 0$$