

## Análise

— Folha de exercícios 5 — 2022'23 —

- Determine equações da recta normal e do plano tangente a cada uma das superfícies dadas, no ponto indicado:
  - $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ ,  $(1, 1, 1)$ ;
  - $xyz^2 = 1$ ,  $(1, 1, 1)$ ;
  - $z = x^2 + 3y^3 + \sin(xy)$ ,  $(1, 0, 1)$ ;
  - $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$ ,  $(-1, 1, 2)$ ;
  - $z = 4x^2$ ,  $(1, 2, 4)$ ;
  - e  $xyz = 1$ ,  $(1, 1, 0)$ .
- Determine a equação do plano tangente à superfície  $x^2 + y^2 - xyz = 7$  no ponto  $(2, 3, 1)$  por dois processos diferentes:
  - Considerando a superfície como a superfície de nível de uma função de 3 variáveis,  $f(x, y, z)$ ;
  - Considerando a superfície como o gráfico de uma função de 2 variáveis,  $g(x, y)$ .
- O potencial eléctrico  $V$  em  $(x, y, z)$ , de um dado objecto 3D, é dado por  $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ . Determine a taxa de variação de  $V$  em  $P = (2, -1, 3)$  na direcção e sentido de  $P$  para a origem do sistema de coordenadas. Indique ainda a direcção e sentido que produz a taxa máxima de variação de  $V$  em  $P$ . Qual o valor dessa taxa?
- A temperatura  $T$  num dado ponto  $(x, y)$  de uma placa plana é dada por  $T(x, y) = x^2 e^{-y}$ . Partindo do ponto  $(2, 1)$ , em que direcção e sentido a temperatura diminui mais rapidamente? Qual a taxa de variação instantânea partindo de  $(2, 1)$  e seguindo a direcção e sentido obtidos?
- Considere a superfície de nível  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$ .
  - Determine equações da recta normal e do plano tangente a  $S$  no ponto  $(2, 2, 1)$ ;
  - Verifique se a recta encontrada na alínea anterior intersecta o eixo  $Oz$ .
- Sejam  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x - y^2$  e  $A = (-1, 0)$ .
  - Determine e represente graficamente a curva de nível de  $f$  que passa em  $A$ ;
  - Calcule o vector  $\nabla f(A)$ . Coloque no esboço efectuado na alínea anterior, um representante de  $\nabla f(A)$  com origem em  $A$ ;
  - Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $(A, f(A))$ .
- Determine os pontos da curva de equação  $x(x^2 + y^2) + 9x^2 + y^2 = 0$  cuja recta tangente é horizontal ou vertical.
- Determine os pontos da elipse  $2x^2 + y^2 = 1$  cuja recta tangente passa pelo ponto  $(1, 1)$ .
- Determine os pontos da curva de equação  $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$  cuja recta normal é paralela à recta  $y = x$ .
- Determine os planos tangentes à esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  que contêm a recta de equação 
$$\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -5 + 2z \end{cases}.$$
- Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = x^2 y^3$ . Indique, para o ponto  $(-1, 2)$ , um vector:
  - com a direcção e sentido de maior crescimento de  $f$ ;
  - com a direcção e sentido de maior decrescimento de  $f$ ;
  - com a direcção e sentido em que a variação instantânea de  $f$  é nula.