Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC **Análise**

Primeiro Teste **8/05/2020** 2019/2020

Proposta de Correção

Pergunta 9

Considere a curva parametrizada por $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, e o ponto $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$.

(a) Verifique que $\|\mathbf{r}'(t)\| = t^2 + 1$ e calcule o comprimento da curva entre $t = 0$ e $t = 1$.

(b) Verifique que os vetores velocidade e aceleração são ortogonais apenas quando $t = 0$.

(c) Sabendo que o vetor normal no ponto P é o vetor $N = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, calcule o vetor binormal em P.

(d) Determine uma equação do plano osculador em P.

Resolução.

a) $\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{1}{3}t^3, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, t\right)' = \left(t^2, \sqrt{2}t, 1\right)$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \left\|\left(t^2, \sqrt{2}t, 1\right)\right\| = \sqrt{(t^2)^2 + \left(\sqrt{2}t\right)^2 + 1} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = \sqrt{(1+t^2)^2} = 1 + t^2$$

Comprimento da curva entre $t = 0$ e $t = 1$:

$$\int_0^1 \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \int_0^1 (1+t^2)\, dt = \left[\frac{t^3}{3} + t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

b) Vetor velocidade: $\mathbf{r}'(t) = (t^2, \sqrt{2}t, 1)$; Vetor aceleração: $\mathbf{r}''(t) = \left(2t, \sqrt{2}, 0\right)$

Os vetores $\mathbf{r}'(t)$ e $\mathbf{r}''(t)$ são ortogonais se e só se $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = 0 &\iff 2t^3 + 2t = 0 \iff 2t(t^2+1) = 0 \iff t = 0 \quad \vee \quad t^2 + 1 = 0 \\ &\iff t = 0 \quad \vee \quad t^2 = -1 \iff t = 0,\end{aligned}$$

uma vez que a condição $t^2 = -1$ é impossível.

c) $\mathbf{r}(t) = P \iff \left(\frac{1}{3}t^3, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, t\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) \iff t = 1$

Temos, então, $P = \mathbf{r}(1)$ e o vetor binormal em P é dado por $\mathbf{B}(1) = \mathbf{T}(1) \times \mathbf{N}(1)$, com $\mathbf{N} = \mathbf{N}(1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (dado) e

$$\mathbf{T}(1) = \frac{\mathbf{r}'(1)}{\|\mathbf{r}'(1)\|} = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1).$$

Assim,

$$\mathbf{B}(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

d) Plano osculador em P:

$$\mathbf{B}(1) \cdot ((x,y,z) - P) = 0 \iff \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}, y - \frac{\sqrt{2}}{2}, z - 1\right) = 0$$

$$\iff -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \iff -x + \sqrt{2}y - z = -\frac{1}{3}$$