Geometria
Notas teóricas e exercícios

Curso: Matemática e Ciências de Computação

Março 2022

Contents

Introdução

Chapter 1

Preliminares

1.1. Noções básicas sobre conjuntos

Assumiremos que o estudante está já familiarizado com a noção de conjunto e diversas operações entre conjuntos, principalmente as operações de interseção, união e inclusão de conjuntos. Resumiremos nesta secção algumas dessas notações e propriedades relativas a conjuntos e aplicações.

Seja X um conjunto. Os objetos que compõem o conjunto X designam-se por elementos ou pontos. A relação de pertence é denotada por $\in$, isto é, escreve-se $a \in X$ para designar que a é um elemento de X. Quando a não é um elemento de X, escreve-se $a \notin X$.

Se o conjunto X não tem qualquer elemento, X é designado por conjunto vazio e denotado pelo símbolo $\varnothing$ ou por $\{\}$. O conjunto X pode ser representado por extenso, listando todos os seus elementos, ou representado por uma propriedade p de modo que simbolicamente se tenha

$$X = \{a : \ a \text{ satisfaz a propriedade } p\}$$

O número de elementos que compõem o conjunto X chama-se cardinal de X e representa-se por $\sharp X$. Tem-se que $\sharp \varnothing = 0$

Definição 1.1.1. (**Igualdade de conjuntos**). Sejam X e Z dois conjuntos. Diz-se que os conjuntos X e Z são iguais, e escreve-se $X = Z$, se estes conjuntos têm exatamente os mesmos elementos. Simbolicamente,

$$X = Z \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall a : \ a \in X \quad \Longleftrightarrow \quad a \in Z)$$

Quando X não é igual a Z, escreve-se $X \neq Z$.

Definição 1.1.2. (**Inclusão de conjuntos**). Sejam X e Z dois conjuntos. Diz-se que o conjunto X é um subconjunto de Z, e escreve-se $X \subset Z$, se todo o ponto de X é um ponto de Z. Simbolicamente,

$$X \subset Z \iff (x \in X \implies x \in Z)$$

Proposição 1.1.3. *Sejam X, Y e Z três conjuntos. As seguintes propriedades verificam-se:*

a) $\varnothing \subset X$

b) $X \subset X$

c) $X \subset Y \quad \wedge \quad Y \subset Z \implies X \subset Z$

d) $X = Z \iff (X \subset Z \quad \wedge \quad Z \subset X)$

O subconjunto X de X chama-se subconjunto impróprio de X. Qualquer conjunto A tal que $A \subset X$ e $A \neq X$ chama-se subconjunto próprio de X. Escreve-se $A \subsetneq Z$ quando $A \subset X$ e $A \neq X$. A proposição 1.1.3–d) é largamente usada para provar que dois conjuntos são iguais.

Definição 1.1.4. (**Intersecção e união de conjuntos**). Sejam X e Z dois conjuntos.

a) $X \cap Z$ é o conjunto de todos os pontos que pertençam simultaneamente ao conjunto X e ao conjunto Z, isto é,

$$X \cap Z = \{a : a \in X \quad \wedge \quad a \in Z\}$$

b) $X \cup Z$ é o conjunto de todos os pontos que pertençam ao conjunto X ou ao conjunto Z, isto é,

$$X \cup Z = \{a : a \in X \quad \vee \quad a \in Z\}$$

Dois conjuntos X e Z dizem-se disjuntos se $X \cap Z = \varnothing$.

Definição 1.1.5. (Par ordenado). Sejam a e b dois objetos. O conjunto

$$\{\{a\}, \{a, b\}\}$$

designa-se por par ordenado constituído pelos objetos a e b e representa-se por (a, b). Nestas condições, o objeto a chama-se primeira coordenada do par e o objeto b chama-se segunda coordenada do par.

Proposição 1.1.6. *Sejam a, b, x e y quatro objetos. Tem-se*

$$\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{x\},\{x,y\}\} \iff a = x \;\wedge\; b = y$$

Usando a notação de parêntesis para representar qualquer par ordenado, a proposição 1.1.6 escreve-se do seguinte modo:

$$(a,b) = (x,y) \iff a = x \;\wedge\; b = y$$

A notação de parêntesis usada para representar um par ordenado torna a definição de par ordenado mais intuitiva, correspondendo melhor à ideia de que a ordem pela qual se escreve as coordenadas é relevante. Note que, por exemplo, teríamos $(1,2) = (2,1)$ se, e só se, $1 = 2$, o que não é verdade. Portanto, $(1,2) \neq (2,1)$, verificando-se assim que a ordem das coordenadas não pode ser modificada.

Ao longo deste trabalho, usar-se-á a notação de parêntesis usada para representar qualquer par ordenado.

Definição 1.1.7. (Produto cartesiano). Sejam A e B dois conjuntos. O produto cartesiano de A por B, denotado por $A \times B$, é o conjunto definido por

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \;\wedge\; y \in B\}$$

em que

$$(a,b) = (x,y) \iff a = x \;\wedge\; b = y$$

para cada $(a,b) \in A \times B$ e $(x,y) \in A \times B$.

Esta noção pode ser generalizada para um número finito de conjuntos. Precisamente, se X_1, $\cdots$, X_n são quaisquer conjuntos, o produto cartesiano destes conjuntos, denotado por $X_1 \times \cdots \times X_n$, é o conjunto definido por

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1 \in X_1 \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; x_n \in X_n\}$$

em que

$$(x_1, \cdots, x_n) = (z_1, \cdots, z_n) \iff x_1 = z_1 \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; x_n = z_n$$

para quaisquer $n-$uplos $(x_1, \cdots, x_n), (z_1, \cdots, z_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$.

Notação. Seja A um conjunto qualquer. O produto cartesiano $A \times A$ é geralmente denotado por A^2. Tem-se que

$$A^2 = A \times A = \{(x,z) : x \in A \;\wedge\; z \in A\}$$

O produto cartesiano $A \times A \times A$ é geralmente denotado por A^3. Generalizando para um número natural $n \geq 1$, o produto cartesiano $A \times \cdots \times A$ (n fatores) é geralmente denotado por A^n. Tem-se então que

$$A^n = A \times \cdots \times A = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_1 \in A \;\wedge\; \cdots \;\wedge\; x_n \in A\}$$

1.2. Relações binárias e aplicações

Definição 1.2.1. (Relação binária). Sejam X e Z dois conjuntos. Uma relação binária de X para Z é um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Z$.

Quando $(a,b) \in R$, escreve-se $a \; R \; b$ em vez de $(a,b) \in R$ e $a \; R \; b$ lê-se a está em relação com b. O elemento a chama-se original e o elemento b chama-se imagem de a por meio de R. O conjunto de todos os elementos a de X tais que exista um elemento $b \in Z$ de modo que que o par (a,b) pertença a R chama-se domínio da relação R. O domínio da relação R é um subconjunto de X. O conjunto de todos os elementos b de Z tais que exista um elemento $a \in X$ de modo que o par (a,b) pertença a R chama-se imagem da relação R. A imagem da relação R é um subconjunto de Z. Note que podemos ter $(a,b),(a,b') \in R$ e $b \neq b'$, isto é, o elemento a pertencente ao domínio de R tem duas imagens distintas. Além disso, podem existir elementos pertencentes a X que não tenham qualquer imagem. Quando essas duas situações não acontecem, dizemos que a relação R é uma aplicação de X para Z. Precisamente,

Definição 1.2.2. (Aplicação). Uma aplicação f de X para Z é uma relação binária de X para Z tal que

- O domínio de f é o conjunto X.
- Se $(a,b),(a,b') \in f$ então $b = b'$.

Quando uma aplicação f de X para Z é dada, escreve-se $f(a) = b$ em vez de $(a,b) \in f$. E escreve-se $f : X \longrightarrow Z$ para significar que f é uma aplicação de X para Z. Quando se tem $f(a) = b$, costuma-se dizer que f aplica a em b.

As relações binárias são frequentemente usadas para definir relações de ordem ou conjuntos de conjuntos de uma maneira especial. Esses conjuntos de conjuntos, quando certas propriedades são satisfeitas, são geralmente designados por conjuntos quocientes. Produtos cartesianos e quocientes de conjuntos são construções muito estudadas em matemática.

Definição 1.2.3. (Aplicação injetiva e sobrejetiva). Sejam X e Z dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Z$ uma aplicação de X em Z.

- A aplicação f diz-se injectiva se
$$f(x) = f(z) \implies x = z$$
- A aplicação f diz-se sobrejetiva se
$$\forall \;\; z \in Z \;\; \exists \;\; x \in X : f(x) = z$$

- A aplicação f diz-se bijetiva se for injetiva e sobrejetiva.

Definição 1.2.4. (**Imagem de um conjunto por meio de uma aplicação**). Sejam X e Z dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Z$ uma aplicação de X em Z.

a) Seja $A \subset X$. A imagem direta de A por meio de f é o subconjunto de Z denotado por $f(A)$ e definido por
$$f(A) = \{z \in Z : \ \exists\ x \in A \ \wedge \ f(x) = z\}$$
que é equivalente a
$$f(A) = \{f(x) : \ x \in A\}$$

b) Seja $B \subset Z$. A imagem inversa de B por meio de f é o subconjunto de X denotado por $f^{-1}(B)$ e definido por
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ f(x) \in B\}$$

Observação. Quando $B = \{b\}$ é um conjunto singular, escreve-se geralmente $f^{-1}(b)$ em vez de $f^{-1}(\{b\})$.

Teorema 1.2.5. *Sejam X e Z dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Z$ uma aplicação de X em Z.*

i) A aplicação f é sobrejetiva se, e só se, a imagem de f for o conjunto Z, isto é, se $f(X) = Z$.

ii) A aplicação f é injetiva se, e só se, para cada $z \in f(X)$, a imagem inversa $f^{-1}(\{z\})$ for um conjunto singular.

Definição 1.2.6. (**Composição de aplicações**). Sejam X, Z, T e Y quatro conjuntos. Sejam $f : X \longrightarrow Z$ e $g : T \longrightarrow Y$ duas aplicações tais que
$$f(X) \subset T$$
A composição de f com g, denotada por $g \circ f$, é a aplicação definida por
$$g \circ f : X \longrightarrow Y$$
$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Definição 1.2.7. (**Aplicações invertíveis**). Seja X um conjunto.

a) A aplicação identidade de X, denotada por $\mathbf{id}_X$, é a aplicação definida por

$$\mathbf{id}_X : X \longrightarrow X$$

$$\mathbf{id}_X(x) = x$$

b) Seja A um subconjunto de Z. A aplicação

$$i : A \longrightarrow X$$

definido por

$$i(x) = x$$

chama-se aplicação inclusão de A em X e é geralmente denotada por $i_{A,X}$ ou simplesmente por i_A.

c) Sejam Z outro conjunto e $f : X \longrightarrow Z$ uma aplicação de X em Z. A aplicação f diz-se invertível se existir uma aplicação $g : Z \longrightarrow X$ tal que

   i) $g \circ f = \mathbf{id}_X$

   ii) $f \circ g = \mathbf{id}_Z$

Teorema 1.2.8. *Sejam X e Z dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Z$ uma aplicação. Então, f é invertível se, e só se, f for bijetiva.*

Definição 1.2.9. (Restrições e extensões de aplicações através do domínio). Sejam X e Z dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Z$ uma aplicação de X em Z.

a) Seja A um subconjunto de X. A restrição de f a A, denotada por $f_{/A}$, é a aplicação definida por

$$f_{/A} : A \longrightarrow Z$$

$$f_{/A}(x) = f(x)$$

para cada $x \in A$.

b) Seja $\widetilde{X}$ qualquer conjunto tal que $X \subset \widetilde{X}$. Uma extensão de f a $\widetilde{X}$ é qualquer aplicação $\widetilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow Z$ tal que $\widetilde{f}_{/X} = f$.

Observação. Note que, quando $X = Z$ e $f = \mathbf{id}_X$, a aplicação inclusão $i_{A,X}$ é a restrição de $\mathbf{id}_X$ ao subconjunto A.

Definição 1.2.10. (Restrições e extensões de aplicações através do espaço de chegada). Sejam X e Z dois conjuntos e $f : X \longrightarrow Z$ uma aplicação de X em Z.

a) Seja B um subconjunto de Z tal que $f(X) \subset B$. A restrição de f a B, geralmente denotada também por f, é a aplicação definida por

$$f : X \longrightarrow B$$

$$x \leadsto f(x)$$

b) Seja $\widetilde{Z}$ qualquer conjunto tal que $Z \subset \widetilde{Z}$. A extensão de f a $\widetilde{Z}$, geralmente denotada também por f, é a aplicação definida por

$$f : X \longrightarrow \widetilde{Z}$$

$$x \leadsto f(x)$$

Definição 1.2.11. (Projeções). Sejam A e B dois conjuntos.

a) Define-se a projeção sobre A, e denota-se por π_A, como sendo a aplicação

$$\pi_A : A \times B \longrightarrow A$$

definida por

$$\pi_A(x, y) = x$$

b) Define-se a projeção sobre B, e denota-se por π_B, como sendo a aplicação

$$\pi_B : A \times B \longrightarrow B$$

definida por

$$\pi_A(x, y) = y$$

Esta definição pode ser generalizada para um número finito de conjuntos. Precisamente, sejam n um número natural e A_1, $\cdots$, A_n conjuntos. Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, define-se a projeção sobre A_j, e denota-se por π_{A_j}, como sendo a aplicação

$$\pi_{A_j} : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A_j$$

definida por

$$\pi_{A_j}(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = x_j$$

Proposição 1.2.12. ***(Aplicações com coordenadas)***. *Sejam A, B e Z conjuntos e $f : Z \longrightarrow A \times B$ uma aplicação. Então, existem duas aplicações*

$$f_1 : Z \longrightarrow A \qquad f_2 : Z \longrightarrow B$$

tais que, $\forall\ x \in Z$,

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

As aplicações f_1 e f_2 chamam-se aplicações coordenadas de f e escreve-se abreviadamente $f = (f_1, f_2)$.

Esta proposição generaliza-se para um número finito de conjuntos. Precisamente, sejam n um número natural, Z, A_1, $\cdots$, A_n conjuntos e

$$f : Z \longrightarrow A_1 \times \cdots \times A_n$$

uma aplicação. Então, existem aplicações

$$f_1 : Z \longrightarrow A_1 \quad \cdots \quad f_j : Z \longrightarrow A_j \quad \cdots \quad f_n : Z \longrightarrow A_n$$

tais que, $\forall\ x \in Z$,

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_j(x), \cdots, f_n(x))$$

1.3. Magmas

Definição 1.3.1. (Operação binária - Magma). Seja E um conjunto. Uma operação binária em E é qualquer aplicação $\top$ de $E \times E$ em E. Simbolicamente,

$$\top : E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \leadsto \top(x, y)$$

O par $(E, \top)$ chama-se magma.

Notação. Uma operação binária em E chama-se também lei de composição em E. Para cada $(x, y) \in E$, a imagem $\top(x, y)$ lê-se composição de x com y ou x operado com y e é geralmente denotada por $x \top y$. As operações binárias são geralmente representadas pelos símbolos + ou $\cdot$ (ponto). Com esses símbolos, a composição de x com y escreve-se $x+y$ e $x \cdot y$ respetivamente. Uma operação binária denotada pelo símbolo + é geralmente designada por adição e a composição $x + y$ sendo chamada de soma de x com y. Neste caso, dizemos que a operação binária $\top$ está escrita aditivamente. Uma operação binária denotada pelo símbolo $\cdot$ é geralmente designada por multiplicação e a composição $x \cdot y$ sendo chamada de produto de x por y. Neste caso, a operação binária $\top$ está escrita multiplicativamente. A notação xy pode ser usada no lugar de $x \cdot y$ para denotar o produto de x com y.

Definição 1.3.2. (Morfismo de magmas). Sejam $(E, \top)$ e $(F, \perp)$ dois magmas e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação entre os conjuntos E e F. A aplicação φ diz-se um homomorfismo de magmas ou morfismo de magmas se

$$\varphi(x \top y) = \varphi(x) \perp \varphi(y) \quad \forall\ x, y \in E$$

If $E = F$ e $\top = \perp$, um morfismo $\varphi : E \longrightarrow E$ chama-se endomorfismo de E.

Definição 1.3.3. (Isomorfismo de magmas). Sejam $(E, \top)$ e $(F, \perp)$ dois magmas e $\varphi : E \longrightarrow F$ um morfismo de magmas.

a) O morfismo φ diz-se monomorfismo se φ for injetiva.

b) O morfismo φ diz-se epimorfismo se φ for sobrejetiva.

c) O morfismo φ diz-se isomorfismo se φ for bijetiva. Diz-se que o magma $(E, \top)$ é isomorfo ao magma $(F, \perp)$ se existir um isomorfismo de E em F.

d) Um endomorfismo de E que seja um isomorfismo chama-se automorfismo de E.

Definição 1.3.4. (Propriedade associativa). Sejam E um conjunto e $(x, y) \longrightarrow x \top y$ uma operação binária em E. Diz-se que esta operação binária é associativa se

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z) \quad \forall\ x, y, z \in E$$

Definição 1.3.5. (Propriedade comutativa). Sejam E um conjunto e $(x, y) \longrightarrow x \top y$ uma operação binária em E. Diz-se que esta operação binária é comutativa se

$$x \top z = z \top x \quad \forall\ x, z \in E$$

Definição 1.3.6. (Elemento neutro). Sejam E um conjunto e $(x, y) \longrightarrow x \top y$ uma operação binária em E. Seja $e \in E$ um elemento de E. Diz-se que e é elemento neutro de $\top$ se

$$x \top e = x \quad \wedge \quad e \top x = x \quad \forall\ x \in E$$

Definição 1.3.7. (Elemento oposto). Sejam E um conjunto e $(x, y) \longrightarrow x \top y$ uma operação binária em E. Seja $x \in E$ um elemento de E. Um elemento x' de E diz-se elemento oposto de x para a operação $\top$ se

$$x \top x' = e \quad \wedge \quad x' \top x = e$$

1.4. Grupos

Definição 1.4.1. (Grupo). Sejam G um conjunto e $(x,y) \longrightarrow x \top y$ uma operação binária em G. Diz-se que o par $(G,\top)$ é um grupo se as seguintes condições forem satisfeitas.

a) A operação $\top$ é associativa.

b) A operação $\top$ admite elemento neutro.

c) Cada $x \in G$ admite elemento oposto para a operação $\top$.

Diz-se que o grupo $(G,\top)$ é comutativo ou abeliano se a operação $\top$ for comutativa.

Definição 1.4.2. (Morfismo de grupo) Sejam $(G,\top)$ e $(H,\perp)$ dois grupos e

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

uma aplicação.

a) A aplicação φ diz-se um morfismo (resp. monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo) de grupos se φ for um morfismo (resp. monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo) de magmas.

b) O grupo $(G,\top)$ diz-se isomorfo ao grupo $(H,\perp)$ se existir pelo menos um isomorfismo de $(G,\top)$ sobre $(H,\perp)$.

Teorema 1.4.3. *Seja G um grupo.*

a) O elemento neutro é único.

b) Para cada $x \in G$, o elemento oposto de x é único.

Notação. Em teoria de grupos, as operações binárias são quase sempre representadas aditivamente ou multiplicativamente. No caso de linguagem aditiva, o elemento neutro representa-se por 0 (que se lê zero) e, para cada x, o elemento oposto a x por $-x$, que se chama elemento simétrico de x. No caso de linguagem multiplicativa, o elemento neutro representa-se por 1 (que se lê um ou identidade) e, para cada x, o elemento oposto a x por x^{-1}, que se chama elemento inverso de x. Sumarizaremos estas questões de linguagem no seguinte quadro:

Convenção	Linguagem abstrata	linguagem aditiva	linguagem multiplicativa
Operação	$x \top y$ (por exemplo)	$x + y$	$x \cdot y$ ou xy
Elemento neutro	e	0	1
Elemento oposto a x	x'	$-x$ (simétrico de x)	x^{-1} (inverso de x)

Os grupos abelianos são geralmente denotados aditivamente.

1.5. Ações

Definição 1.5.1. (Ação). Sejam K e E dois conjuntos. Uma ação de K em E é qualquer aplicação

$$\mu : K \times E \longrightarrow E$$

$$(\alpha, x) \leadsto \mu(\alpha, x)$$

A ação μ chama-se também lei de composição externa em E por K. Os elementos de K designam-se por operadores.

Notação. As ações chamam-se também produtos e, em certos contextos, produtos escalares. Nesses casos, os elementos de K designam-se por escalares em vez de operadores e são geralmente denotados por letras gregas. Para cada $(\alpha, x) \in K \times E$, a imagem $\mu(\alpha, x)$ chama-se composição de α com x ou produto de α por x ou ainda, em certos contextos, produto escalar de α por x. A imagem $\mu(\alpha, x)$ é geralmente escrita em linguagem multiplicativa $\alpha \cdot x$, na qual o ponto pode ser omitido.

Observação. Se o conjunto K for igual ao conjunto E, uma ação de E em E é a mesma coisa que uma operação binária em E.

Definição 1.5.2. (Aplicação equivariante). Sejam K, E e F três conjuntos e

$$\mu : K \longrightarrow E \qquad \widehat{\mu} : K \longrightarrow F$$

ações de K em E e de K em F respectivamente. Seja

$$\varphi : E \longrightarrow F$$

uma aplicação de E em F. A aplicação φ diz-se equivariante ou K-morfismo se

$$\varphi(\mu(\alpha, x)) = \widehat{\mu}(\alpha, \varphi(x)) \quad \forall\ \alpha \in K,\ x \in E$$

Usando a notação multiplicativa e definindo

$$\mu(\alpha, x) = \alpha \cdot x \qquad \alpha \in K,\ x \in E$$

e

$$\widehat{\mu}(\alpha, z) = \alpha \odot z \qquad \alpha \in K,\ z \in F$$

a igualdade acima pode ser escrita do seguinte modo:

$$\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \odot \varphi(x) \quad \forall\ \alpha \in K,\ x \in E$$

Quando não existe qualquer ambiguidade entre a ação de K em E e a ação de K em F, pode-se escrever também $\widehat{\mu}(\alpha, z) = \alpha \cdot z$ em vez de $\widehat{\mu}(\alpha, z) = \alpha \odot z$. Nestas condições, a aplicação φ diz-se equivariante se

$$\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x) \quad \forall\ \alpha \in K,\ x \in E$$

ou ainda

$$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \quad \forall\ \alpha \in K,\ x \in E$$

em que o produto entre parênteses é o que define a ação de K em E e o produto à direita do sinal igual é o que define a ação de K em F.

1.6. Espaços vetoriais

Definição 1.6.1. Sejam E um conjunto não vazio, $\oplus$ uma operação em E

$$\oplus : E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \rightarrowtail x \oplus y$$

e $\odot$ uma ação de $\mathbb{R}$ em E

$$\odot : A \times E \longrightarrow E$$

$$(\alpha, x) \rightarrowtail \alpha \odot x$$

O triplo $(E, \oplus, \odot)$ diz-se um espaço vetorial se as seguintes condições são satisfeitas.

a) O par $(E, \oplus)$ é um grupo comutativo.

b) $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$

c) $(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot y$

d) $\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x$

e) $1 \odot x = x$

for all $x, y \in E$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Os elementos de E chamam-se vetores ou pontos. Os elementos $\mathbb{R}$ chamam-se escalares. A operação $\oplus$ em E é geralmente escrita aditivamente. A ação $\odot$ chama-se produto escalar e, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in E$, o elemento $\alpha \odot x$ chama-se produto escalar de α por x e é geralmente denotado multiplicativamente, sendo então denotado por $\alpha \cdot x$ ou simplesmente por αx. De acordo com essas notações, as condições indicadas nas alíneas b), c), d) e e) escrevem-se do seguinte modo:

a) $\alpha(x+y) = (\alpha x) + (\alpha y)$

b) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$

c) $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$

d) $1\ x = x$

O elemento de neutro para a soma em E é designado por vetor zero ou vetor nulo de E e denotado por 0 ou 0_E. Quando não há qualquer ambiguidade sobre as operações consideradas na definição de estrutura de espaço vetorial, o triplo $(E, \oplus, \odot)$ é denotado simplesmente por E, sem especificar explicitamente as operações consideradas.

Exemplo 1.6.2. Seja $E = \{*\}$ um conjunto singular. Existe uma única operação binária em E e uma única acção $\mathbb{R}$ em E tal que o triplo constituído pelo conjunto E, por essa operação e por essa acção seja um espaço vetorial. A operação binária está definida por $* + * = *$ e a acção por $\alpha \cdot * = *$, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$. O ponto $*$ é o vetor nulo de E.

Exemplo 1.6.3. A multiplicação usual em $\mathbb{R}$ é uma acção de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e satisfaz as condições indicadas na definição 1.6.1. Consequentemente, $\mathbb{R}$, com a sua adição usual e multiplicação usual, é um espaço vetorial.

Exemplo 1.6.4. Seja $n \geq 0$ um número natural. Considere no conjunto $\mathbb{R}^n$ a operação $+$ e a acção $\cdot$ definidas por

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(a_1, \cdots, b_n) \ + \ (x_1, \cdots, x_n) = (a_1 + x_1, \cdots, a_n + x_n)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\alpha \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

O triplo $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. A estrutura de espaço vetorial definida neste exemplo é denominada de estrutura canónica de $\mathbb{R}^n$. O conjunto $\mathbb{R}^n$, equipado com esta operação e esta acção, é denominado de espaço vetorial real canónico a n dimensões. Salvo aviso em contrário, será esta estrutura que se considera em $\mathbb{R}^n$ sempre que se olha para $\mathbb{R}^n$ como espaço vetorial real. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ chamam-se pontos (num contexto mais geométrico) ou vetores (num contexto mais algébrico).

Exemplo 1.6.5. Sejam E um espaço vetorial e X um conjunto qualquer. Denote por $Ap(X;E)$ o conjunto de todas as aplicações definidas em X e com valores em E. Considere no conjunto $Ap(X;E)$ a operação + definida por

$$+ : Ap(X;E) \times Ap(X;E) \longrightarrow Ap(X;E)$$
$$(f,g) \longrightarrow f+g \in Ap(X;E)$$

em que $f+g : X \longrightarrow E$ é a aplicação definida por

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad \forall\ x \in X$$

e a acção $\cdot$ de $\mathbb{R}$ em $Ap(X;E)$ definida por

$$\cdot : \mathbb{R} \times Ap(X;E) \longrightarrow Ap(X;E)$$
$$(\alpha, f) \longrightarrow \alpha \cdot f \in Ap(X;E)$$

em que $\alpha \cdot f : X \longrightarrow E$ é a aplicação definida por

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall\ x \in X$$

O triplo $(Ap(X;E),+,\cdot)$ é um espaço vetorial. Sempre que se considera um conjunto de funções definidas num conjunto qualquer e com valores num espaço vetorial qualquer está subentendido, salvo aviso em contrário, que se trata da estrutura de espaço vetorial determinada pela soma e acção assim definidas. Esta estrutura é geralmente designada por estrutura canónica de espaço vetorial num espaço de funções. A notação clássica para denotar este espaço é E^X ou $M(X;E)$.

1.7. Produto de espaços vetoriais

Teorema 1.7.1. *Sejam n um número natural, em que $n \geq 1$, e E_1, $\cdots$, E_n espaços vetoriais. Considere no produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_n$ a operação binária + definida por*

$$+ : \big(E_1 \times \cdots \times E_n\big) \times \big(E_1 \times \cdots \times E_n\big) \longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_n$$
$$(a_1, \cdots, a_n)\ +\ (x_1, \cdots, x_n) = (a_1 + x_1, \cdots, a_n + x_n)$$

e a ação $\cdot$ de $\mathbb{R}$ em $E_1 \times \cdots \times E_n$ definida por

$$\cdot : \mathbb{R} \times \big(E_1 \times \cdots \times E_n\big) \longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_n$$
$$\alpha \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

Então, o triplo $\big((E_1 \times \cdots \times E_n),+,\cdot\big)$ satifaz todos os axiomas indicados na definição 1.6.1. Consequentemente, este triplo é um espaço vetorial, designado por espaço vetorial produto de E_1, $\cdots$, E_n. O vetor nulo de $\big((E_1 \times \cdots \times E_n),+,\cdot\big)$ é o n-uplo $(0_{E_1}, \cdots, 0_{E_n})$.

1.8. Aplicações lineares

Definição 1.8.1. Sejam E e F dois espaços vetoriais e

$$\varphi : E \longrightarrow F$$

uma aplicação. A aplicação φ diz-se linear (ou homomorfismo, ou morfismo de espaços vetoriais) se for aditiva e homogénea, isto é,

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall\ x, y \in E \qquad \text{(propriedade aditiva)}$$

e

$$\varphi(\alpha x) = \alpha\ \varphi(x) \quad \forall\ x \in E,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{(propriedade homogénea)}$$

Definição 1.8.2. Sejam E e F dois espaços vetoriais e

$$\varphi : E \longrightarrow F$$

uma aplicação linear.

a) A aplicação φ diz-se um monomorfismo linear se φ for injetiva.

b) A aplicação φ diz-se um epimorfismo linear se φ for sobrejetiva.

c) A aplicação φ diz-se um isomorfismo linear se φ for bijetiva. O espaço vetorial E diz-se isomorfo ao espaço vetorial F se existir um isomorfismo linear de E sobre F.

d) Quando $E = F$, um endomorfismo linear de E é qualquer aplicação linear $\varphi : E \longrightarrow E$. Um automorfismo linear de E é um endomorfismo linear de E que seja um isomorfismo linear.

Exemplo 1.8.3. Sejam E e F espaços vetoriais e $\varphi : E \longrightarrow F$ a aplicação definida por $\varphi(x) = 0_F$, para cada $x \in E$. Então, a aplicação φ é linear, denominada por aplicação linear nula.

Exemplo 1.8.4. Sejam E um espaço vetorial e $\varphi : E \longrightarrow E$ a aplicação definida por $\varphi(x) = x$, para cada $x \in E$. Então, a aplicação φ é linear, denominada por aplicação identidade de E e denotada por $\mathbf{id}_E$.

Proposição 1.8.5. *Seja $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação. As seguintes afirmações são equivalentes.*

i) A aplicação ψ é linear.

ii) A aplicação ψ é da forma $f(x) = ax$, em que $a \in \mathbb{R}$, chamada homotetia de razão a.

Nestas condições, $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é isomorfismo se, e só se, $a \neq 0$.

Proposição 1.8.6. *Sejam E, F e G espaços vetoriais e*

$$\varphi : E \longrightarrow F \qquad \psi : F \longrightarrow G$$

aplicações lineares. Então, a aplicação composta

$$\psi \circ \varphi : E \longrightarrow G$$

é linear. Consequentemente, se φ e ψ são isomorfismos lineares, $\psi \circ \varphi$ é também um isomorfismo linear.

Proposição 1.8.7. *Sejam E e F espaços vetoriais e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear bijectiva. Então, a aplicação*

$$\varphi^{-1} : F \longrightarrow E$$

é também linear.

Definição 1.8.8. (Kernel). Sejam E e F dois espaços vetoriais e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Define-se kernel (ou núcleo) de φ, e representa-se por **Ker** φ, como sendo o subconjunto de E definido do seguinte modo:

$$\mathbf{Ker} \; = \{x \in E : \; \varphi(x) = 0_F\}$$

Definição 1.8.9. (Imagem). Sejam E e F dois espaços vetoriais e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Define-se imagem de φ, e representa-se por **Im** φ, como sendo o subconjunto de F definido do seguinte modo:

$$\mathbf{Im}\, \varphi = \{\varphi(x) \in F : \; x \in E\}$$

Proposição 1.8.10. *Sejam E e F espaços vetoriais e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Então,*

a) O conjunto **Ker** φ *é um subespaço vetorial de E*

b) O conjunto **Im** φ *é um subespaço vetorial de F*

c) φ *é injetiva* $\iff$ $\mathbf{Ker}\,\varphi = \{0_E\}$

d) φ *é sobrejetiva* $\iff$ $\mathbf{Im}\,\varphi = F$

e) φ *é bijetiva* $\iff$ $\mathbf{Ker}\,\varphi = \{0_E\} \quad \wedge \quad \mathbf{Im}\,\varphi = F$

Proposição 1.8.11. ***(Projeções associadas a produto de espaços vetoriais)****. Seja n um número natural, em que $n \geq 1$, e E_1, $\cdots$, E_n espaços vetoriais. Considere o espaço vetorial produto $E_1 \times \cdots \times E_n$ (cf. com a proposição 1.7.1). Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, considere a projeção π_j sobre o espaço vetorial E_j*

$$\pi_j : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_j$$

$$\pi_j(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = x_j$$

Então, a aplicação π_{E_j} é um epimorfismo linear.

Proposição 1.8.12. ***(Aplicações lineares com coordenadas)****. Seja n um número natural, em que $n \geq 1$, e E, F_1, $\cdots$, F_n espaços vetoriais. Considere o espaço vetorial produto $E_1 \times \cdots \times E_n$ (cf. com a proposição 1.7.1). Seja*

$$\varphi : E \longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_n$$

uma aplicação e, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, considere a aplicação

$$\varphi_j : E \longrightarrow E_j$$

tal que se tenha

$$\varphi(x) = \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_j(x), \cdots, \varphi_n(x)\big)$$

Então, a aplicação φ é linear se, e só se, φ_j é linear para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$.

1.9. Dualidade

Teorema 1.9.1. *Seja E um espaço vetorial. Denote por $L(E; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as aplicações lineares $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Simbolicamente,*

$$L(E; \mathbb{R}) = \{\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ tais que } \varphi \text{ é linear}\}$$

Considere em $L(E; \mathbb{R})$ a operação binária + definida por

$$+ : L(E;\mathbb{R}) \times L(E;\mathbb{R}) \longrightarrow L(E;\mathbb{R})$$
$$(f,g) \longrightarrow f+g \in L(E;\mathbb{R})$$

em que $f+g : X \longrightarrow E$ *é a aplicação linear definida por*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall\ x \in E$$

e a ação $\cdot$ *de* $\mathbb{R}$ *em* $L(E;\mathbb{R})$ *definida por*

$$\cdot : \mathbb{R} \times L(E;\mathbb{R}) \longrightarrow L(E;\mathbb{R})$$
$$(\alpha, f) \longrightarrow \alpha \cdot f \in L(E;\mathbb{R})$$

em que $\alpha \cdot f : X \longrightarrow E$ *é a aplicação linear definida por*

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \quad \forall\ x \in E$$

Então, o triplo $\big(L(E;\mathbb{R}), +, \cdot\big)$ *satifaz todos os axiomas indicados na definição 1.6.1. Consequentemente, este triplo é um espaço vetorial, designado por espaço vetorial dual de* E *e frequentemente denotado por* E^**. O vetor nulo de* $L(E;\mathbb{R})$ *é a aplicação linear nula.*

Cada aplicação linear $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ designa-se geralmente por forma linear sobre E. Os espaços duais desempenham um papel importantíssimo em quase todas as áreas da matemática, em particular nos espaços euclidianos. Enunciaremos um único resultado, tendo por finalidade a fácil identificação de que uma certa aplicação é, de facto, uma forma linear.

Proposição 1.9.2. *Considere em* $\mathbb{R}^n$ *a estrutura canónica de espaço vetorial (cf. com o exemplo 1.6.4). Considere, para cada* $j \in \{1, \cdots, n\}$*, a projeção*

$$\pi_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\pi_j(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = x_j$$

Então,

a) O conjunto $\{\pi_1, \cdots, \pi_j, \cdots, \pi_n\}$ *é uma base do espaço vetorial* $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$

b) Cada forma linear $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *expressa-se, nesta base, do seguinte modo:*

$$\varphi = \varphi(e_1)\pi_1 + \cdots + \varphi(e_j)\pi_j + \cdots + \varphi(e_n)\pi_n$$

em que $\{e_1, \cdots, e_j, \cdots, e_n\}$ *designa a base canónica do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$*. Consequentemente, se* $(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, tem-se*

$$\varphi(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = \varphi(e_1)x_1 + \cdots + \varphi(e_j)x_j + \cdots + \varphi(e_n)x_n$$

ou, tendo em vista aplicações práticas,

$$\varphi(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_jx_j + \cdots + a_nx_n$$

em que $a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ *são os escalares reais definidos por*

$$a_1 = \varphi(e_1), \cdots, a_j = \varphi(e_j), \cdots, a_n = \varphi(e_n)$$

Exemplo 1.9.3. Em $\mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear se $\varphi(x) = ax$, em que $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.9.4. Em $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear se $\varphi(x,y) = ax + by$, em que $a, b \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.9.5. Em $\mathbb{R}^3$, $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear se $\varphi(x,y,z) = ax+by+cz$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1.10. Equações lineares

Definição 1.10.1. (Equação linear). Sejam E e F dois espaços vetoriais. Uma equação linear é uma equação da forma

$$\varphi(x) = b$$

em que $\varphi : E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear e $b \in F$. O conjunto de soluções da equação é

$$\{x \in E : \ \varphi(x) = b\}$$

conjunto este que é igual a $\varphi^{-1}\{b\}$.

Proposição 1.10.2. *Sejam E, F espaços vetoriais e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Consideremos a equação linear*

$$\varphi(x) = b$$

em que $b \in F$. Seja $a \in E$ uma solução particular da equação, isto é, $\varphi(a) = b$. Então, o conjunto de soluções da equação é

$$\{x \in E : \ \varphi(x) = b\} = \varphi^{-1}\{b\} = a + \mathbf{Ker}\ \varphi$$

Observação. Considere o seguinte sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n = & b_m \end{array}\right.$$

em que todos os a_{ij} e b_k são números reais. Pode-se escrever o sistema na forma

$$(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = (b_1, \cdots, b_m) \tag{1.1}$$

Considere agora as aplicações

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_1(x_1, \cdots, x_n) = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_2(x_1, \cdots, x_n) = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\varphi_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi_m(x_1, \cdots, x_n) = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$$

e a aplicação

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definida por

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \big(\varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_m(x_1, \cdots, x_n)\big)$$

A igualdade 1.1 pode ser escrita equivalentemente na forma

$$(\varphi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_m(x_1, \cdots, x_n)) = (b_1, \cdots, b_m) \tag{1.2}$$

ou ainda na forma

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = (b_1, \cdots, b_m) \tag{1.3}$$

Denotando $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $b = (b_1, \cdots, b_m)$, a última igualdade escreve-se na forma simples:

$$\varphi(x) = b \tag{1.4}$$

Note que, pela proposição 1.9.2, cada aplicação φ_j é linear. Consequentemente, pela proposição 1.8.12, a aplicação φ é também linear. Portanto, a equação 1.4 é linear. Conclui-se que um sistema linear é um caso particular de uma equação linear. Assim, o conjunto de soluções de um sistema linear é da forma

$$a + \mathbf{Ker}\,\varphi$$

em que a é uma solução particular do sistema.

1.11. Espaços métricos

Definição 1.11.1. Seja X um conjunto. Uma aplicação

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \leadsto d(x,y)$$

diz-se uma métrica sobre X se, $\forall\ x,y,z \in X$,

a) $d(x,y) \geq 0$

b) $d(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$

c) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetria)

d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (desigualdade triangular)

O par (X,d) designa-se por espaço métrico.

Quando não há qualquer ambiguidade sobre a métrica considerada na definição de estrutura de espaço métrico, o par $(X,d))$ é denotado simplesmente por X, sem especificar explicitamente a métrica considerada.

Exemplo 1.11.2. Considere a aplicação

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$d(x,y) = |x - y|$$

Esta aplicação é uma métrica sobre $\mathbb{R}$, designada por métrica canónica de $\mathbb{R}$.

Definição 1.11.3. (Bola e vizinhança). Sejam (X,d) um espaço métrico, $a \in X$ e $\delta \in \mathbb{R}$, com $\delta > 0$. A bola de centro a e raio δ, denotada por $B(a,\delta)$, é o conjunto definido por

$$B(a,\delta) = \{x \in X : \ d(x,a) < \delta\}$$

Uma vizinhança do ponto a é qualquer subconjunto de X contendo uma bola de centro a e raio δ.

Observação. Note que qualquer bola de centro a é uma vizinhança de a. O espaço X é uma vizinhança de a.

Várias definições em espaços métricos são obtidas por generalização de definições já estudadas em anos anteriores no quadro de espaços concretos como, por exemplo, no espaço $\mathbb{R}$ ou no espaço $\mathbb{R}^n$. Daremos um exemplo a fim de ilustrar a passagem de um ambiente concreto para um ambiente abstrato.

Consideremos a seguinte definição num ambiente concreto. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão com valores em $\mathbb{R}$. Diz-se que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou tende para a ou que o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a, e escreve-se $x_n \to a$ ou $\lim x_n = a$, se

$$\forall\ \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\ \exists\ p \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq p, \quad |x_n - a| < \delta$$

Note que, de acordo com a métrica do exemplo 1.11.2, tem-se $|x_n - a| = d(x_n, a)$. Portanto, podemos reescrever a condição acima do seguinte modo:

$$\forall\ \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\ \exists\ p \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq p, \quad d(x_n, a) < \delta$$

Sejam agora (X, d) um espaço métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão com valores em X e $a \in X$. Diz-se que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a, e escreve-se $x_n \to a$ ou $\lim x_n = a$, se

$$\forall\ \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0,\ \exists\ p \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq p, \quad d(x_n, a) < \delta$$

Este exemplo leva-nos a acreditar que a generalização de vários conceitos topológicos ou geométricos pode ser linear. Sempre que não seja necessário, faremos, ao longo destas notas, várias generalizações sem qualquer ilustração de casos concretos.

1.12. Espaços normados

Definição 1.12.1. (Norma). Seja E um espaço vetorial real. Uma aplicação

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

diz-se norma em E se, $\forall\ x, y \in E$ and $\alpha \in \mathbb{R}$,

a) $p(x) \geq 0$

b) $p(x) = 0_{\mathbb{R}} \iff x = 0_E$

c) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

d) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$

Para cada $x \in E$, a imagem $p(x)$ é designada por norma de x e geralmente denotada por $\|x\|$. A aplicação $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é geralmente indicada por $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$. As condições acima podem ser escritas do seguinte modo mais intuitivo:

a) $\|x\| \geq 0$

b) $\|x\| = 0_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0_E$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

d) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$

O par (E, p), denotado também por $(E, \|\cdot\|)$, é designado por espaço vetorial normado. Quando, no contexto, não há qualquer ambiguidade sobre a norma que se considera no espaço vetorial E, o par $(E, \|\cdot\|)$ é denotado simplesmente por E, referindo-se ao próprio espaço vetorial E como um espaço vetorial normado. Quando for necessário realçar a norma que se considera, escreveremos $(E, \|\cdot\|)$ para denotar essa estrutura de espaço vetorial normado. Seguidamente, daremos alguns exemplos de normas.

Exemplo 1.12.2. Sejam E um espaço vetorial real e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de E. Cada vetor $x \in E$ escreve-se da forma $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, em que $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Os seguintes exemplos são normas sobre E.

i) Defina-se $\|x\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}$. Essa norma designa-se por norma euclidiana.

ii) Defina-se $\|x\| = \mathbf{max}\,\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. Essa norma designa-se por norma do máximo.

iii) Defina-se $\|x\| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Essa norma designa-se por norma da soma.

Quando $E = \mathbb{R}^n$ e a base escolhida for a base canónica, a norma indicada em i) é a aplicação definida por $\|(x_1, \cdots, x_n)\ | = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Esta norma resulta do teorema de Pitágoras e desempenha um papel crucial em muitas áreas da matemática.

Exemplo 1.12.3. Suponha-se que $E = \mathbb{R}$. A função módulo

$$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow |x|$$

é uma norma em $\mathbb{R}$. A norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ é uma generalização da função módulo uma vez que $\sqrt{x^2} = |x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como qualquer espaço vetorial de dimensão finita admite bases, o exemplo 1.12.2 mostra o seguinte resultado.

Proposição 1.12.4. *Qualquer espaço vetorial de dimensão finita admite normas.*

Chapter 2

Geometria afim concreta

2.1. Translações

Definição 2.1.1. (**Translação**). Seja E um espaço vetorial. Uma aplicação $T : E \longrightarrow E$ diz-se uma translação de E se existir $a \in E$ tal que

$$T(x) = a + x \quad \forall\ x \in E$$

A aplicação T é geralmente denotada por T_a e chama-se translação associada ao ponto a.

Proposição 2.1.2. *(**Composição de translações**). Num espaço vetorial E, a composição de duas translações é ainda uma translação. Precisamente, se a e b são dois vetores de E e $T_a : E \longrightarrow E$ e $T_b : E \longrightarrow E$ são as translações associadas ao ponto a e ao ponto b respetivamente, a composição de T_a com T_b é a translação associada ao ponto $a+b$. Simbolicamente,*

$$T_a \circ T_b = T_{a+b}$$

Demonstração. Exercício

Proposição 2.1.3. *Sejam E um espaço vetorial e $a \in E$.*

a) A aplicação T_a é bijetiva.

b) A aplicação inversa de T_a é a aplicação T_{-a}, que é ainda uma translação.

c) A aplicação T_a é linear se, e só se, $a = 0_E$.

Demonstração. Exercício

Proposição 2.1.4. *(**Grupo das translações**). Seja E um espaço vetorial e denote por $T(E)$ o conjunto de todas as translações de E. Simbolicamente,*

$$T(E) = \{T_a : E \longrightarrow E \quad \wedge \quad a \in E\}$$

Considerando em $T(E)$ a operação composição de funções, o par $(T(E), \circ)$ é um grupo, que é designado por grupo das translações de E. A aplicação identidade $\mathbf{id} = T_0 : E \longrightarrow E$ *é o elemento neutro deste grupo.*

Demonstração. Exercício

2.2. Aplicações afins

Definição 2.2.1. (**Aplicação afim**). Sejam E e F dois espaços vetoriais. Uma aplicação

$$\lambda : E \longrightarrow F$$

diz-se uma aplicação afim se existirem $b \in F$ e uma aplicação linear $\varphi : E \longrightarrow F$ tais que

$$\lambda(x) = b + \varphi(x) \quad \forall \ x \in E$$

Proposição 2.2.2. *Sejam E e F dois espaços vetoriais, $b \in F$ e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Considere a aplicação afim $\lambda : E \longrightarrow F$ definida por*

$$\lambda(x) = b + \varphi(x) \quad \forall \ x \in E$$

Então, tem-se $\lambda = T_b \circ \varphi$.

Demonstração. Exercício

Proposição 2.2.3. *Sejam E, F e G espaços vetoriais,*

$$\eta : E \longrightarrow F \qquad \lambda : E \longrightarrow F \qquad \xi : F \longrightarrow G$$

aplicações afins e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então, tem-se

a) A aplicação $\alpha\eta + \beta\lambda : E \longrightarrow F$ é afim;

b) A aplicação composta $\lambda \circ \xi : E \longrightarrow G$ é afim.

Demonstração. Exercício

Definição 2.2.4. (**Isomorfismo afim**). Sejam E e F dois espaços vetoriais. Uma aplicação $\lambda : E \longrightarrow F$ diz-se um isomorfismo afim se λ for uma aplicação afim bijetiva.

Proposição 2.2.5. *Sejam E e F dois espaços vetoriais, $b \in F$ e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Se a aplicação afim $\lambda : E \longrightarrow F$ definida por $\lambda(x) = b + \varphi(x) \quad \forall\ x \in E$ for um isomorfismo afim então tem-se*

a) A aplicação φ é um isomorfismo linear;

b) A aplicação inversa de λ é a aplicação $\lambda^{-1} : F \longrightarrow E$ definida por

$$\lambda^{-1}(x) = -\varphi^{-1}(b) + \varphi^{-1}(x)$$

c) A aplicação inversa de λ é ainda um isomorfismo afim.

Demonstração. Exercício

Pela segunda alínea da proposição 2.2.3, concluímos facilmente que, se λ e ξ forem isomorfismos afins, a aplicação composta $\lambda \circ \xi$ é ainda um isomorfismo afim. Combinando este facto com a segunda alínea da proposição 2.2.5, obtemos a seguinte teorema.

Proposição 2.2.6. *(**Grupo das transformações afins**). Seja E um espaço vetorial e denote por $A(E)$ o conjunto de todos os isomorfismos afins defnidos em E e com valores em E. Simbolicamente,*

$$A(E) = \{\lambda : E \longrightarrow E \ \ \textit{tal que } \lambda \textit{ seja um isomorfismo afim}\}$$

Considerando em $A(E)$ a operação composição de funções, o par $\big(A(E), \circ\big)$ é um grupo, que é designado por grupo dos isomorfismos afins de E (classicamente conhecido como o grupo das transformações afins de E). A aplicação identidade $\mathbf{id} : E \longrightarrow E$ é o elemento neutro deste grupo.

Demonstração. Exercício

2.3. Simetrias

Definição 2.3.1. (**Simetria**). Sejam E um espaço vetorial e X um subconjunto qualquer de E. Uma aplicação afim $\lambda : E \longrightarrow E$ diz-se uma simetria de X se $\lambda(X) = X$. O conjunto constituído por todas as simetrias de X é denotado geralmente por $A(E, X)$.

Observações. Sejam E um espaço vetorial e X um subconjunto de E.

a) Na definição 2.3.1, $\lambda(X)$ é a imagem do conjunto X por meio da aplicação λ (cf. com a definição 1.2.4). Se $x \in X$, não se tem necessariamente que $\lambda(x) = x$, mas sim que $\lambda(x) \in X$. O ponto $\lambda(x)$ pode ser igual a x ou não, mas certamente que $\lambda(x)$ é um ponto de X.

b) Deve-se evitar a notação $S(X)$ (ou $S(E, X)$) para designar o conjunto das simetrias de X porque a notação $S(X)$ designa quase sempre o grupo simétrico de X, que é um grupo muito estudado em matemática, mas que não está relacionado com as simetrias de X.

c) Se X for um conjunto constituído por um único ponto, uma simetria de X chama-se simetria central (cf. com a secção 2.2, página 99, do livro da Professora Lucía).

d) Existem vários tipos de simetrias conforme o conjunto X que se considera. Um caso muito estudado é aquele em que se considera X como sendo o suplememto ortogonal de um subespaço vetorial de E, quando este é euclidiano. Nestas condições, as simetrias chamam-se simetrias ortogonais (cf. com a secção 2.5, página 103, do livro da Professora Lucía). Nestas notas, não estudaremos esta classe de simetrias.

Terminaremos esta secção enunciando o seguinte resultado.

Proposição 2.3.2. *(**Grupo das simetrias**). Sejam E um espaço vetorial e X um subconjunto de E. O conjunto $A(E, X)$ de todas as simetrias de X é um subgrupo do grupo $A(E)$ de todos os isomorfismos afins de E.*

Demonstração. Exercício

2.4. Espaços afins canónicos

Recode que, se E é um espaço vetorial e A e B dois subconjuntos de E, denota-se por $A + B$ como sendo o conjunto definido por

$$A + B = \{u + v : u \in A \ \wedge \ v \in B\}$$

Quando $A = \{a\}$ é um conjunto com um único ponto, a soma $\{a\} + B$ é geralmente denotada por $a + B$.

Proposição 2.4.1. *Sejam E um espaço vetorial, F e G dois subespaços vetoriais de E e $a, b \in E$ tais que*

$$a + F \subset b + G$$

Então, $F \subset G$. Consequentemente, se $a + F = b + G$ então $F = G$.

Demonstração. Exercício

Definição 2.4.2. (**Espaço afim canónico**). Seja E um espaço vetorial. Um subconjunto X de E diz-se um espaço afim concreto ou canónico se existirem um vector $a \in E$ e um subespaço vetorial F de E tais que $X = a + F$. Simbolicamente,

$$X = a + F = \{a + u : \ u \in F\}$$

Pela proposição 2.4.1, para o mesmo conjunto X, existe um único subespaço vetorial F de E tal que $X = a + F$. Este subespaço vetorial F designa-se por espaço vetorial associado ao espaço afim X. Nos exemplos seguintes e na proposição 2.4.6, ver-se-á que o ponto a não é único.

Definição 2.4.3. (**Dimensão de um espaço afim**). Sejam E um espaço vetorial e $X \subset E$ tal que X seja um espaço afim. Define-se dimensão de X, e representa-se por $\dim X$, como sendo a dimensão do espaço vetorial associado ao espaço afim X.

Exemplo 2.4.4. Sejam E um espaço vetorial e $a \in E$. Uma vez que

$$\{a\} = a + \{0_E\}$$

conclui-se que $\{a\}$ é um espaço afim de dimensão zero.

Exemplo 2.4.5. Sejam E um espaço vetorial e F um subespaço vetorial de E de dimensão k. Uma vez que

$$F = 0_E + F$$

conclui-se que F é um espaço afim de dimensão k. Em particular, E é um espaço afim de dimensão igual à dimensão de E. Note que, se $u, v \in F$, tem-se

$$u + F = v + F$$

o que mostra que o ponto a usado na definição 2.4.2 não é único (cf. com a proposição 2.4.6).

Proposição 2.4.6. *Sejam E um espaço vetorial e F um subespaço vetorial de E. Sejam $a, b, x, y \in E$ e considere o espaço afim*

$$a + F = \{a + u : \; u \in F\}$$

Então, tem-se

a) $x, y \in a + F \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in F$

b) $b \in a + F \quad \Longleftrightarrow \quad b + F = a + F$

Demonstração. Exercício

Proposição 2.4.7. *Sejam E e F dois espaços vetoriais e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação linear. Seja $b \in F$. Então, $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um espaço afim, em que o espaço vetorial associado é o kernel de φ. Precisamente, se $a \in E$ é tal que $\varphi(a) = b$ (portanto, a é uma solução particular da equação $\varphi(x) = b$), então,*

$$\varphi^{-1}(\{b\}) = a + \mathbf{Ker}\ \varphi$$

Demonstração. Esta proposição resulta diretamente da proposição 1.10.2.

Chapter 3

Geometria euclidiana

3.1. Produtos internos

Definição 3.1.1. (**Produto interno**). Seja E um espaço vetorial. Uma aplicação

$$g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

diz-se um produto interno em E se as seguintes condições forem satisfeitas:

a) A aplicação g é bilinear

b) A aplicação g é simétrica, isto é, $g(x,y) = g(y,x) \quad \forall\ x, y \in E$

c) $g(x,x) \geq 0 \quad \forall\ x \in E$

d) $g(x,x) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0_E$

Seja E um espaço vetorial. Uma aplicação bilinear $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se definida se

$$g(x,x) = 0_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0_E$$

e diz-se positiva se

$$g(x,x) \geq 0 \quad \forall\ x \in E$$

Com esta terminologia, um produto interno em E é qualquer forma bilinear sobre E que seja simétrica e definida positiva.

Notação. Sejam E um espaço vetorial e $g : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em E. Para cada $(x,y) \in E \times E$, denotamos $g(x,y)$ geralmente por $x \mid y$ ou $x \cdot y$ ou $< x, y >$. Nestas notas, usaremos quase sempre a notação $\cdot \mid \cdot$ para designar um produto interno em E. Usando a notação $\cdot \mid \cdot$, as condições que caracterizam a definição de produto interno exprimem-se do seguinte modo:

a) $\cdot \mid \cdot$ é bilinear, isto é,

i) $(a+b) \mid x = a \mid x + b \mid x$

ii) $a \mid (x+y) = a \mid x + a \mid y$

iii) $(\beta x) \mid y = \beta(y \mid x) = x \mid (\beta y)$

b) $x \mid y = y \mid x$

c) $x \mid x \geq 0 \quad \forall\ x \in E$

d) $x \mid x = 0_{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0_E$

$\forall\ a, b, x, y \in E$ e $\beta \in \mathbb{R}$

Definição 3.1.2. (**Espaço euclidiano**). Um espaço euclidiano é um par $(E, \cdot \mid \cdot)$ em que E é um espaço vetorial de dimensão finita e $\cdot \mid \cdot$ é um produto interno em E.

Definição 3.1.3. (**Vetores ortogonais**). Num espaço euclidiano $(E, \cdot \mid \cdot)$, dois vetores $u, v \in E$ dizem-se ortogonais se $u \mid v = 0$.

Exemplo 3.1.4. A multiplicação usual em $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrowtail x \cdot y$$

é um produto interno em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.5. A aplicação $\cdot \mid \cdot\ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(x_1, \cdots, x_n) | (x_1, \cdots, x_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_1$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, designado por produto interno canónico em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.1.6. Sejam E um espaço vetorial de dimensão finita n e $B = \{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base de E. Consideremos a aplicação

$$\cdot \mid \cdot\ : E \times E \longrightarrow E$$

definida por

$$x \mid y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_1$$

em que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ e $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$, com $x_1, , \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$. Esta aplicação é um produto interno em E, designado por produto interno em E associado à base B.

O produto interno considerado no exemplo 3.1.5 é o produto interno associado à base canónica de $\mathbb{R}^n$.

O exemplo 3.1.6 demonstra o seguinte teorema:

Proposição 3.1.7. *Todo o espaço vetorial de dimensão finita admite um produto interno.*

Definição 3.1.8. (**Norma euclidiana**) Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e $x \in E$. Define-se norma euclidiana de x (ou simplesmente norma de x), e representa-se por $\|x\|$, como sendo o número real definido por

$$\|x\| = \sqrt{x \mid x}$$

A razão pela qual este número é designado por norma é que, de acordo com o teorema 3.1.11, a aplicação de E em $\mathbb{R}$, que, a cada $x \in E$, associa $\|x\|$, satisfaz as condições que definem a noção de norma num espaço vetorial qualquer. A demostração de que esta aplicação é uma norma envolve dois resultados não triviais, que são a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a desigualdade triangular (cf. com o exercício 7). Começaremos por estabelecer as desigualdades de Cauchy-Schwarz e triangular.

Proposição 3.1.9. *(**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**) Seja $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano. Tem-se*

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Demonstração. Exercício 7(d)ii

Proposição 3.1.10. *(**Desigualdade triangular**) Seja $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano. Tem-se*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Demonstração. Exercício 7e

Teorema 3.1.11. *Todo o espaço euclidiano é um espaço normado. Precisamente, se*

$$\cdot \mid \cdot \ : E \times E \longrightarrow E$$

é um produto interno em E então a aplicação

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\|x\| = \sqrt{x \mid x}$$

é uma norma em E, designada por norma em E associada ao produto interno ou norma euclidiana. Consequentemente, E é um espaço métrico, em que a métrica

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

está definida por

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y) \mid (x-y)}$$

designada também por métrica em E associada ao produto interno ou métrica euclidiana.

Demonstração. Exercício 7

Definição 3.1.12. (**Conjunto ortogonal/ortonormado de vetores**). Seja $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano. Um subconjunto $B = \{e_1, \cdots, e_k\}$ de E diz-se um conjunto ortogonal de vetores se

$$e_i \mid e_j = 0 \quad \forall\ i,j \in \{1,\cdots,k\} \quad \text{com} \quad i \neq j$$

e diz-se um conjunto ortonormado de vetores se

$$\begin{array}{ll} e_i \mid e_j = 0 & \forall\ i,j \in \{1,\cdots,k\} \quad \text{com} \quad i \neq j \\ e_j \mid e_j = 1 & \forall\ j \in \{1,\cdots,k\} \end{array}$$

Proposição 3.1.13. *Num espaço euclidiano E, qualquer subconjunto ortogonal $\{e_1, \cdots, e_k\}$ de vetores de E, em que $e_j \neq 0$ para cada $j \in \{1,\cdots,k\}$, é linearmente independente.*

Demonstração. Exercício 15

Teorema 3.1.14. *(**Gram-Schmidt**). Todo o espaço euclidiano admite uma base ortonormada.*

Demonstração. Seja $(E, \cdot \mid \cdot)$ o espaço euclidiano. Como a dimensão de E é finita, digamos $\dim E = n$, podemos fixar uma base $\{v_1, v_2, v_3 \cdots, v_n\}$ de E. Construiremos uma base ortonormada $\{e_1, e_2, e_3 \cdots, e_n\}$ de E do seguinte modo:

$$e_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$$

Temos que $\|e_1\| = 1$. Para definir o vetor e_2, consideremos primeiro o vetor w_2 definido do seguinte modo:

$$w_2 = v_2 - (v_2 \mid e_1) e_1$$

Temos que e_1 é ortogonal a w_2, pois,

$$\begin{aligned} e_1 \,\big|\, w_2 &= e_1 \,\big|\, \big[v_2 - (v_2 \mid e_1)e_1\big] = \\ &= e_1 \,\big|\, v_2 - e_1 \,\big|\, \big[(v_2 \mid e_1)e_1\big] = \\ &= e_1 \,\big|\, v_2 - (v_2 \mid e_1)(e_1 \mid e_1) = \\ &= e_1 \,\big|\, v_2 - (v_2 \mid e_1) = \\ &= e_1 \,\big|\, v_2 - e_1 \mid v_2 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Agora, consideremos

$$e_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2$$

Facilmente verifica-se que e_1 é ortogonal a e_2. Para definir o vetor e_3, consideremos primeiro o vetor w_3 definido do seguinte modo:

$$w_3 = v_3 - (v_3 \mid e_2)e_2 - (v_3 \mid e_1)e_1$$

Analogamente, verifica-se que o vetor w_3 é ortogonal a e_2 e ortogonal a e_1. Define-se, então,

$$e_3 = \frac{1}{\|w_3\|} w_3$$

E assim sucessivamente.

Proposição 3.1.15. *Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormada de E. Tem-se, para quaisquer vetores $x, y \in E$*

$$x \mid y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_1$$

(cf. com o exemplo 3.1.6) e

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

em que $x_1, , \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ são os escalares reais tais que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ e $y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$. Além disso, para cada $u \in E$, tem-se

$$u = (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 + \cdots + (u|e_n)e_n$$

Demonstração. Exercício 16

Definição 3.1.16. (**Conjuntos ortogonais**). Seja $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano. Dois subconjuntos M e N de E dizem-se ortogonais, escreve-se $M \perp N$, se cada vetor $x \in M$ for ortogonal a cada vetor $y \in N$. Simbolicamente,

$$M \perp N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\ x \in M, y \in N, \quad x \mid y = 0$$

Em particular, um vetor u de E diz-se ortogonal a M se u for ortogonal a todos os vetores de M.

Proposição 3.1.17. *Sejam* $(E, \cdot \mid \cdot)$ *um espaço euclidiano e* M *e* N *dois subconjuntos de* E *que sejam ortogonais. Então,*

$$M \cap N = \varnothing \quad ou \quad M \cap N = \{0_E\}$$

Demonstração. Exercício

Definição 3.1.18. (**Ortogonal de um conjunto**). Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e M um subconjunto de E. Define-se ortogonal de M, e representa-se por $M^\perp$, como sendo o subconjuto de E constituído por todos os vetores de E que sejam ortogonais a cada vetor de M. Simbolicamente,

$$M^\perp = \{u \in E : \ u \mid x = 0 \ \ \forall \ x \in M\}$$

Proposição 3.1.19. *Sejam* $(E, \cdot \mid \cdot)$ *um espaço euclidiano e* M *e* N *dois subconjuntos de* E*.*

a) $M^\perp$ *é um subespaço vetorial de* E*.*

b) $M \subset (M^\perp)^\perp$

c) Se $M \subset N$ *então* $N^\perp \subset M^\perp$

d) Se F *é o subespaço vetorial de* E *gerado por* M *então* $F^\perp = M^\perp$

Demonstração. Exercício

Teorema 3.1.20. *Sejam* $(E, \cdot \mid \cdot)$ *um espaço euclidiano e* F *um subespaço vetorial de* E*. Tem-se*

$$E = F \oplus F^\perp$$

Demonstração. Exercício

3.2. Projeções ortogonais

Definição 3.2.1. (**Projeções associadas a uma soma direta**). Sejam E um espaço vetorial, não necessariamente euclidiano, e F e G dois subespaços vetoriais de E tais que $E = F \oplus G$. Considere, para cada $x \in E$, a decomposição

$$x = u + v$$

em que $u \in F$ e $v \in G$ (os vetores u e v são únicos uma vez que a soma é direta). Define-se projeção sobre F, e representa-se por π_F, como sendo a aplicação

$$\pi_F : E \longrightarrow E$$

$$\pi_F(x) = u$$

Analogamente, define-se projeção sobre G como sendo a aplicação $\pi_G : E \longrightarrow E$ que está definida por $\pi_G(x) = v$.

Proposição 3.2.2. *Sejam E um espaço vetorial e F e G dois subespaços vetoriais de E tais que $E = F \oplus G$.*

a) π_F *e* π_G *são aplicações lineares.*

b) $\mathbf{Ker}\, \pi_F = G$ *e* $\mathbf{Im}\, \pi_F = F$

c) $\mathbf{Ker}\, \pi_G = F$ *e* $\mathbf{Im}\, \pi_G = G$

Demonstração. Exercício de álgebra linear.

Definição 3.2.3. (**Projeções ortogonais**). Sejam E um espaço euclidiano e F um subespaço vetorial de E. Define-se projeção ortogonal sobre F como sendo a projeção sobre F associada à soma direta $E = F \oplus F^\perp$ (cf. com o teorema 3.1.20). Analogamente, define-se projeção ortogonal sobre $F^\perp$ como sendo a projeção sobre $F^\perp$.

Observação. Quando não há qualquer ambiguidade sobre o espaço vetorial F que se considera, a projeção π_F é representada simplesmente por π e a projeção $\pi_{F^\perp}$ por $\pi^\perp$.

Nas condições da definição 3.2.3, se $x \in E$, existem vetores $u \in F$ e $v \in F^\perp$ únicos tais que $x = u + v$. Tem-se então

$$\pi : E \longrightarrow E \qquad \pi^\perp : E \longrightarrow E$$

$$\pi(x) = u \qquad \pi^\perp(x) = v$$

Proposição 3.2.4. *Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e F um subespaço vetorial de E. Tem-se*

$$F = (F^\perp)^\perp$$

Demonstração. Exercício

Proposição 3.2.5. *Sejam* $(E, \cdot \mid \cdot)$ *um espaço euclidiano,* F *um subespaço vetorial de* E *e* $\{e_1, \cdots, e_p\}$ *uma base ortonormada do subespaço vetorial* F*. Considere a projeção ortogonal sobre* F

$$\pi_F : E \longrightarrow E$$

$$\pi_F(x) = u$$

em que $x = u + v$*, com* $u \in F$ *e* $v \in F^{\perp}$*. Então,*

$$\pi_F(x) = (x \mid e_1)e_1 + \cdots + (x \mid e_p)e_p$$

Demonstração. Exercício

Recorde que, se F é um subconjunto não vazio de um espaço métrico E e $x \in E$, a distância de x a F, denotada por $d(x, F)$, é o ínfimo das distâncias de x aos pontos de F. Simbolicamente,

$$d(x, F) = \mathbf{inf}\,\{d(x, u) : \ u \in F\}$$

No caso em que E é um espaço euclidiano, a distância de x a u é dada por

$$d(x, u) = \|x - u\| = \sqrt{(x - u) \mid (x - u)}$$

A próxima proposição mostra que as projeções ortogonais desempenham um papel importante na determinação das distâncias entre conjuntos num ambiente euclidiano.

Proposição 3.2.6. *Sejam* $(E, \cdot \mid \cdot)$ *um espaço euclidiano,* F *um subespaço vetorial de* E *e* $x \in E$*. Então,*

a) $d(x, F) = d(x, \pi(x)) = \|x - \pi(x)\|$

b) $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|\pi(x)\|^2$

Demonstração. Exercício

3.3. Aplicações lineares ortogonais

Definição 3.3.1. (**Aplicação preservando o produto interno**). Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ e $(F, \cdot \mid \cdot)$ dois espaços euclidianos e $\varphi : E \longrightarrow F$ uma aplicação (não necessariamente linear). Diz-se que esta aplicação preserva os produtos internos se, $\forall\ x, y \in E$,

$$\varphi(x) \mid \varphi(y) = x \mid y$$

Proposição 3.3.2. *Sejam* $(E, \cdot \mid \cdot)$ *e* $(F, \cdot \mid \cdot)$ *dois espaços euclidianos e* $\varphi : E \longrightarrow F$ *uma aplicação que preserve os produtos internos. Então,*

a) A aplicação φ *preserva a norma euclidiana, isto é,* $\|\varphi(x)\| = \|x\| \quad \forall\ x \in E$

b) A aplicação φ *preserva a métrica euclidiana, isto é,* $d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x, y) \quad \forall\ x, y \in E$

Demonstração. Exercício

Uma vez que o produto interno é uma aplicação bilinear e simétrica, é natural esperar que uma aplicação que preserve o produto interno seja linear. O próximo resultado mostra que isso é, de facto, verdade.

Proposição 3.3.3. *Sejam* $(E, \cdot \mid \cdot)$ *e* $(F, \cdot \mid \cdot)$ *dois espaços euclidianos e* $\varphi : E \longrightarrow F$ *uma aplicação que preserve os produtos internos. Então,* φ *é linear.*

Demonstração. Exercício

Recorde que uma aplicação linear $\varphi : E \longrightarrow F$ entre dois espaços vetoriais E e F é injetiva se, e só se,

$$\mathbf{Ker}\ \varphi = \{0_E\}$$

Como $\{0_E\} \subset \mathbf{Ker}\ \varphi$, então φ é injetiva se, e só se, $\mathbf{Ker}\ \varphi \subset \{0_E\}$, ou seja se

$$\varphi(x) = 0_F \quad \Longrightarrow \quad x = 0_E$$

Combinando este facto com a proposição 3.3.2, concluímos que φ é injetiva. Isto será o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 3.3.4. *Sejam* E *e* F *dois espaços euclidianos e* $\varphi : E \longrightarrow F$ *uma aplicação que preserve os produtos internos. Então,* φ *é injetiva.*

Definição 3.3.5. (**Aplicação linear ortogonal**). Sejam E e F dois espaços euclidianos. Uma aplicação $\varphi : E \longrightarrow F$ diz-se linear ortogonal ou morfismo de espaços euclidianos se φ for linear e preservar o produto interno.

Da proposição 3.3.4, inferimos facilmente o seguinte resultado.

Proposição 3.3.6. *Qualquer aplicação linear ortogonal entre dois espaços euclidianos é um monomorfismo linear.*

Definição 3.3.7. (**Isomorfismo ortogonal**). Uma aplicação linear ortogonal bijetiva entre dois espaços euclidianos diz-se um isomorfismo ortogonal.

Recorde que uma aplicação linear injetiva entre dois espaços vetoriais da mesma dimensão é um isomorfismo linear. Combinando isto com a proposição 3.3.6 (ou a proposição 3.3.4), uma aplicação linear ortogonal entre dois espaços euclidianos da mesma dimensão é um isomorfismo ortogonal.

Proposição 3.3.8. *Qualquer aplicação linear ortogonal entre dois espaços euclidianos da mesma dimensão é um isomorfismo ortogonal.*

Proposição 3.3.9. *Num ambiente euclidiano, tem-se*

a) A composição de duas aplicações lineares ortogonais é uma aplicação linear ortogonal.

b) A inversa de um isomorfismo ortogonal preserva os produtos internos. Consequentemente, a inversa de um isomorfismo ortogonal é um isomorfismo ortogonal.

Demonstração. Exercício

3.4. Grupo ortogonal

Seja E um espaço euclidiano. Verifica-se facilmente que a aplicação identidade $\mathbf{id} : E \longrightarrow E$ é um isomorfismo ortogonal. Por outro lado, combinando as proposições 3.3.9 e 3.3.9, a composição de dois isomorfismos ortogonais é ainda um isomorfismo ortogonal. Aplicando ainda a segunda alínea da proposição 3.3.9, fica demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 3.4.1. *(**Grupo ortogonal**). Seja E um espaço euclidiano e denote por $O(E)$ o conjunto de todos os isomorfismos ortogonais definidos em E e com valores em E. Simbolicamente,*

$$O(E) = \{\varphi : E \longrightarrow E \ \ \textit{tal que } \varphi \textit{ seja um isomorfismo ortogonal}\}$$

Considerando em $O(E)$ a operação composição de funções, o par $(O(E), \circ)$ é um grupo, que é designado por grupo ortogonal de E. A aplicação identidade $\mathbf{id} : E \longrightarrow E$ é o elemento neutro deste grupo.

3.5. Isometrias

Seja $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano. Recorde que (cf. com o teorema 3.1.11) a norma euclidiana está definida por $\|x\| = \sqrt{x \mid x}$ e a métrica euclidiana por

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x-y) \mid (x-y)}$$

Recorde ainda que, se (X, d) e (Z, d') são dois espaços métricos e $g : X \longrightarrow Z$ uma aplicação, g diz-se uma imersão isométrica se

$$d'(g(x), g(y)) = d(x,y) \quad \forall\ x, y \in X$$

Nestas condições, g é uma aplicação injetiva. Uma isometria é qualquer imersão isométrica que seja sobrejetiva. Além disso, a inversa de uma isometria é ainda uma isometria.

Esta secção é uma introdução ao estudo de isometrias num ambiente euclidiano em que as métricas consideradas serão sempre métricas euclidianas.

Definição 3.5.1. (**Imersão isométrica**). Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e $\varphi : E \longrightarrow E$ uma aplicação (não necessariamente linear). Diz-se que esta aplicação é uma imersão isométrica se, $\forall\ x, y \in E$,

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x,y)$$

Proposição 3.5.2. *Num espaço euclidiano, a composição de duas imersões isométricas é ainda uma uma imersão isométrica.*

Demonstração. Exercício

Definição 3.5.3. (**Isometria**). Uma imersão isométrica de um espaço euclidiano que seja sobrejetiva designa-se por isometria.

Proposição 3.5.4. *Seja E um espaço euclidiano.*

a) A composição de duas isometrias de E é uma isometria de E.

b) A inversa de uma isometria de E é uma isometria de E.

Demonstração. Exercício

A próxima proposição é uma consequência direta da proposição 3.5.4.

Proposição 3.5.5. *(**Grupo das isometrias**). Seja E um espaço euclidiano e denote por $I(E)$ o conjunto de todas as isometrias de E. Simbolicamente,*

$$I(E) = \{\varphi : E \longrightarrow E \ \ \textit{tal que } \varphi \textit{ seja uma isometria}\}$$

Considerando em $I(E)$ a operação composição de funções, o par $(I(E), \circ)$ é um grupo, que é designado por grupo das isometrias de E. A aplicação identidade $\mathbf{id} = T_0 : E \longrightarrow E$ é o elemento neutro deste grupo.

Demonstração. Exercício

Proposição 3.5.6. *Seja E um espaço euclidiano.*

a) Toda a translação de E é uma isometria de E.

b) Todo o isomorfismo ortogonal de E é uma isometria de E.

Demonstração. Exercício

Teorema 3.5.7. *(φ **isometria** + $\varphi(0) = 0 \Longrightarrow$ φ **é iso. ortogonal**). Sejam E um espaço euclidiano e $\varphi : E \longrightarrow E$ uma isometria de E tal que $\varphi(0_E) = 0_E$. Então, φ é um isomorfismo ortogonal de E.*

Demonstração. Exercício 17

O próximo teorema é um dos teoremas fundamentais da geometria euclidiana. Sucintamente, o teorema afirma que toda a isometria de um espaço euclidiano é a composição de uma translação com um isomorfismo ortogonal. Isto significa então que uma isometria é da forma uma constante + isomorfismo ortogonal. Poderá confrontar este resultado com a segunda parte do teorema 1.7, página 96, do livro da Professora Lucía (neste livro, $\overrightarrow{f}$ designa uma aplicação linear e f(A) um ponto).

Teorema 3.5.8. *(**Teorema fundamental da geometria**). Sejam E um espaço euclidiano e $\varphi : E \longrightarrow E$ uma isometria de E. Então, existe uma translação $T : E \longrightarrow E$ e existe um isomorfismo ortogonal $\psi : E \longrightarrow E$ tais que*

$$\varphi = T \circ \psi$$

Além disso, a translação T e o isomorfismo ortogonal ψ são únicos nestas condições.

Demonstração. Exercício

Teorema 3.5.9. *Num ambiente euclidiano, toda a isometria é um isomorfismo linear afim.*

Demonstração. Exercício

Chapter 4

Exercícios

1. Sejam Z um conjunto e $d : Z \times Z \longrightarrow \mathbb{R}$ uma métrica em Z. Considere A e B dois subconjuntos de Z. Prove os seguintes resultados.

   a) Se $A \subset B$ então $d(A, B) = 0$. Em particular, se $x \in B$ então $d(x, B) = 0$

   b) Se $A \cap B \neq \varnothing$ então $d(A, B) = 0$.

   c) Se $A \subset B$ e $x \in Z$ então $d(x, B) \leq d(x, A)$.

2. Recorde que, sendo E e F dois espaços vetoriais, o espaço vetorial produto de E por F é o produto cartesiano $E \times F$ em que a soma em $E \times F$ está definida por

$$+_{E\times F} : (E \times F) \times (E \times F) \longrightarrow E \times F$$

$$(a, b) +_{E\times F} (x, y) = (a +_E x, b +_F y)$$

e a ação (produto escalar) está definida por

$$\cdot_{E\times F} : \mathbb{R} \times (E \times F) \longrightarrow E \times F$$

$$\alpha \cdot_{E\times F} (x, y) = (\alpha \cdot_E a, \alpha \cdot_F b)$$

para quaisquer $a, x \in E$, $b, y \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Note que, quando não há perigo de confusão com os símbolos $+$ e $\cdot$ para designarem quaisquer operações em diferentes conjuntos, escrevemos geralmente esses símbolos sem indicação do conjunto onde essas operações foram definidas. Sendo assim, as operações acima podem ser escritas simplesmente do seguinte modo:

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

e

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)$$

Por exemplo, devemos notar que $a, x \in E$ e portanto, na soma $a + x$, o símbolo + refere-se à soma que foi definida no conjunto E. Analogamente, podemos definir também o espaço vetorial produto $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ dos espaços vetoriais E_1, E_2, $\cdots$, E_n. Em particular, relembremos um dos espaços vetoriais mais importante. Seja $n \geq 0$ um número natural. Considere no conjunto $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (n fatores) a operação usual + e a acção usual $\cdot$ que estão definidas por

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(a_1, \cdots, b_n) \ + \ (x_1, \cdots, x_n) = (a_1 + x_1, \cdots, a_n + x_n)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\alpha \cdot (x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

a) Mostre que a aplicação

$$\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi[(a, b), (x, y)] = ax + 2ay + bx + 3by$$

é bilinear.

b) Mostre que a aplicação

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi[(a, b, c), (x, y, z)] = ax + by + cz + 1$$

não é bilinear.

3. Considere a aplicação

$$\cdot|\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b)|(x, y) = ax + by$$

a) Mostre que a aplicação $\cdot|\cdot$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine $\|(1, 2)\|$.

c) Determine $\|(-3, -6)\|$.

d) Determine $\|(0, 0)\|$.

4. Considere a aplicação

$$\cdot|\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b)|(x, y) = 3ax + ay + bx + 2by$$

a) Mostre que a aplicação $\cdot|\cdot$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

b) Determine $(1,2)|(-1,3)$.

c) Determine $(1,2)|(0,0)$.

5. Mostre que

$$\cdot|\cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,b,c)|(x,y,z) = ax + 2by + ay + bx + cz$$

é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

6. Considere a aplicação

$$\cdot|\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a,b)|(x,y) = ax + ay + bx + by$$

a) Mostre que a aplicação $\cdot|\cdot$ é bilinear.

b) Mostre que a aplicação $\cdot|\cdot$ é simétrica.

c) Mostre que $(x,y)|(x,y) \geq 0$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d) Mostre que $(x,y)|(x,y) = 0$ para cada par da forma $(x,-x) \in \mathbb{R}^2$.

e) Conclua que a aplicação $\cdot|\cdot$ não é um produto interno $\mathbb{R}^2$.

7. Sejam E um espaço vetorial e $\cdot \mid \cdot : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em E. Considere em E a norma associada a este produto interno, isto é,

$$\|x\| = \sqrt{x \mid x}$$

a) Mostre que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$

b) Mostre que, se $x|y = 0$, então $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Teorema de Pitágoras)

c) Mostre que $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x|y) + \|y\|^2$

d) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar arbitrário.

i) Mostre que

$$\|\lambda x + y\|^2 = \|x\|^2\lambda^2 + 2(x|y)\lambda + \|y\|^2$$

ii) (Proposição 3.1.9) Atendendo a que $\|\lambda x+y\|^2 \geq 0$ e que, na igualdade anterior, temos uma equação na variável λ, conclua que

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \text{(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)}$$

(Alternativamente, podemos considerar $\lambda = -\dfrac{x|y}{\|x\|^2}$, desde que $x \neq 0_E$. Se $x = 0_E$, a desigualdade é trivial)

e) (Proposição 3.1.10) Conclua que $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Desigualdade triangular)

f) (Proposição 3.1.11) Mostre que, de facto,

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p(x) = \sqrt{x|x}$$

define uma norma em E.

8. (Proposição 3.1.11) Sejam E um espaço vetorial e $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma norma em E. Mostre que a aplicação

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

é uma métrica em E.

9. Sejam E um espaço vetorial e considere a aplicação

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$

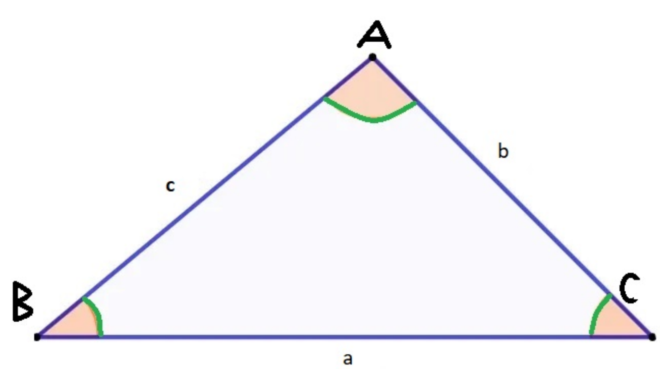
a) Mostre que d é uma métrica em E.

b) Determine $d(x,0)$, para cada $x \neq 0_E$.

c) Mostre que não existe qualquer norma $\|\cdot\|$ em E tal que $d(x,y) = \|x - y\|$

Nota. O exercício 8 mostra que uma norma define sempre uma métrica. No entanto, o exercício 9 mostra que existem métricas que não estão associadas a qualquer norma.

10. (**Teorema dos cossenos**) Considere o triângulo



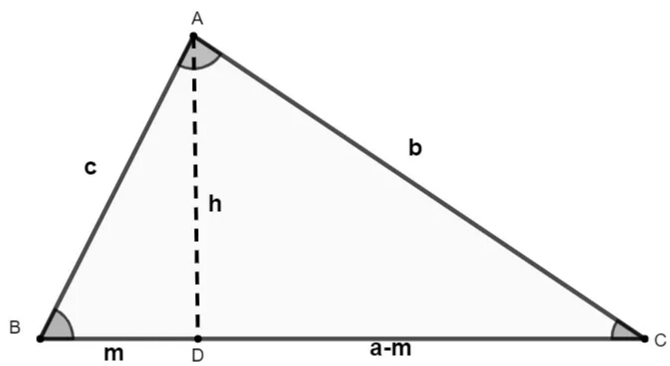
Então, o quadrado de um dos lados do triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto dos mesmos dois lados pelo cosseno do ângulo formado pelos mesmos dois lados. Simbolicamente,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

A resolução das seguintes alíneas constitui a demonstração deste teorema. Considere então o mesmo triângulo dividido em dois triângulos retângulos:



a) Usando a definição de cosseno aplicada ao triângulo ABD, conclua que $c \cdot \cos B = m$.

b) Usando o teorema de Pitágoras sobre o triângulo ABD, conclua que $h^2 = c^2 - m^2$.

c) Usando o teorema de Pitágoras sobre o triângulo ACD, conclua que $b^2 = h^2 + a^2 - 2am + m^2$.

d) Atendendo à alínea b), conclua que $b^2 = c^2 + a^2 - 2am$.

e) Atendendo à alínea a), conclua que $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B$.

11. No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, considere a aplicação

$$\cdot|\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \cdots, x_n) \mid (z_1, \cdots, z_n) = x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n$$

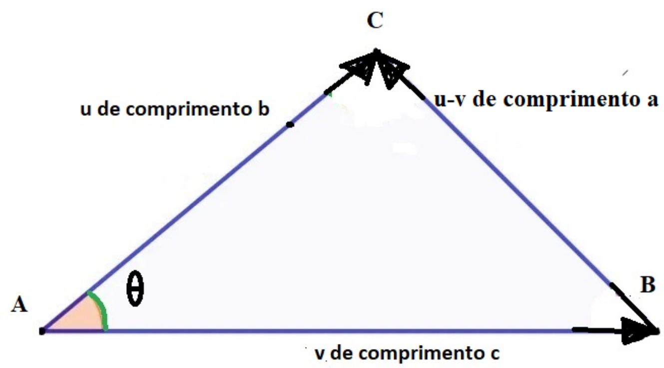
(cf. com o exercício 3)

a) Mostre que $\cdot|\cdot$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$, designado geralmente por produto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.

b) Determine a expressão da norma $\|(x_1, \cdots, x_n)\|$ associada a este produto interno (esta norma é denominada por norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$).

c) Mostre que a base canónica de $\mathbb{R}^n$ é uma base ortonormada para este produto interno.

d) Considere $n = 2$. Fixe a sua atenção no seguinte triângulo plano:



i) Usando o teorema dos cossenos sobre este triângulo, conclua que

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cos\theta$$

ii) Usando o exercício 7c, conclua que

$$u|v = \|u\|\|v\| \cos\theta$$

iii) Conclua que dois vetores de $\mathbb{R}^2$ são ortogonais/perpendiculares se, e só se, o ângulo entre eles for de $90°$ graus.

12. Sejam E um espaço vetorial e $\cdot|\cdot : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em E. Sejam $x, y \in E$ dois vetores tais que $x \neq 0_E$ e $y \neq 0_E$. Mostre que existe um ângulo θ entre 0 e π tal que

$$\cos\theta = \frac{x|y}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Definição. Num espaço euclidiano qualquer, o ângulo θ obtido no exercício 12 chama-se ângulo formado pelos vetores x e y.

13. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canónico (cf. com o exercício 11). Considere as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$:

a) $\varphi(x, y) = (x^2 + y, y)$

b) $\varphi(x, y) = (x - y, x + y)$

c) $\varphi(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y))$

Verifique se estas aplicações são lineares, afins, isometrias, ou isomorfismos ortogonais.

14. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno canónico (cf. com o exercício 11). Considere as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$:

    a) $\varphi(x,y,z) = (x,z,y)$

    b) $\varphi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2,y,z)$

    Verifique se estas aplicações são lineares, afins, isometrias, ou isomorfismos ortogonais.

15. (Proposição 3.1.13) Seja E um espaço euclidiano e denote por $\cdot \mid \cdot$ o produto interno em E. Seja $\{e_1,\cdots,e_k\}$ um conjunto ortogonal de vetores de E, isto é,

$$e_i|e_j = 0_E \quad \forall\ i,j \in \{1,\cdots,k\} \quad \wedge \quad i \neq j$$

    em que $e_j \neq 0_E,\ \ \forall\ j \in \{1,\cdots,k\}$. Mostre que $\{e_1,\cdots,e_k\}$ é um conjunto linearmente independente de E.

16. (Proposição 3.1.15) Seja E um espaço euclidiano e denote por $\cdot \mid \cdot$ o produto interno em E. Seja $\{e_1,\cdots,e_n\}$ uma base ortonormada de E. Mostre que, para cada $u \in E$, tem-se

$$u = (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 + \cdots + (u|e_n)e_n$$

17. (Proposição 3.5.7) Seja E um espaço euclidiano e denote por $\cdot|\cdot$ o produto interno em E. Seja $\psi : E \longrightarrow E$ uma isometria de E tal que $\psi(0_E) = 0_E$.

    a) Atendendo a que $\psi(0) = 0$, mostre que $d(0,\psi(x)) = d(0,x)$

    b) Atendendo a que $\psi(x) = \psi(x) - 0_E$, mostre que $\|\psi(x)\| = \|x\|$

    c) Mostre que $\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|x - y\|$

    d) Notando que $z \mid z = \|z\|^2$, conclua que

$$(\psi(x) - \psi(y)) \,\Big|\, (\psi(x) - \psi(y)) = (x - y) \,\Big|\, (x - y)$$

    e) Usando a bilinearidade e a simetria do produto interno, conclua, pela alínea anterior, que

$$\|\psi(x)\|^2 + \|\psi(y)\|^2 - 2(\psi(x)|\psi(y)) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)$$

f) Usando as alíneas b) e e), conclua que

$$\psi(x) \mid \psi(y) = x \mid y$$

e portanto ψ é ortogonal.

g) Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormada de E. Mostre que $\{\psi(e_1), \cdots, \psi(e_n)\}$ é também uma base ortonormada de E.

Nas alíneas seguintes, fixe uma base ortonormada $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de E.

h) Seja $u \in E$. Usando o exercício 16 e a alínea f), mostre que

$$\psi(u) = (u|e_1)\psi(e_1) + (u|e_2)\psi(e_2) + \cdots + (u|e_n)\psi(e_n)$$

i) Sejam $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Usando a alínea anterior, mostre que

$$\psi(u + v) = \psi(u) + \psi(v)$$

$$\psi(\alpha u) = \alpha\psi(u)$$

Portanto, ψ é linear.

j) Conclua que ψ é um isomorfismo ortogonal.

18. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno canónico e seja X o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + y + z = 1\}$$

a) Mostre que X é um espaço afim e escreva-o na forma $X = a + F$, em que a é um ponto de X e F é o subespaço vetorial associado a X.

Nas alíneas seguintes, designe por $F^\perp$ o suplemento ortogonal de F. Recorde que $\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$.

b) Determine uma base do subespaço vetorial F.

c) Determine uma base ortonormada do subespaço vetorial F.

d) Determine o subespaço vetorial $F^\perp$, indicando uma base deste subespaço.

e) Determine a projeção ortogonal sobre o subespaço vetorial F (cf. com a definição 3.2.3).

f) Seja $a = (1, 0, -1)$. Determine $d(a, F)$ (use a proposição 3.2.6).

Resolução. a) Podemos aplicar a proposição 2.4.7. Segundo as hipóteses desta proposição, temos de determinar uma aplicação linear φ adequada a este exercício. Ora, seja

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(x,y,z) = 2x + y + z$$

Temos,

$$\begin{aligned} X &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + y + z = 1\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \varphi(x,y,z) = 1\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \varphi(x,y,z) \in \{1\}\} = \\ &= \varphi^{-1}(\{1\}) \end{aligned}$$

(cf. com a definição 1.10.1). Logo, aplicando a proposição 2.4.7, temos que $X = \varphi^{-(1}(\{1\})$ é um espaço afim. Quanto à segunda parte desta alínea, temos de encontrar um ponto $a \in \mathbb{R}^3$ que seja solução da equação $\varphi(x) = 1$. Facilmente, vemos que $\varphi(0,0,1) = 1$. Logo, aplicando a segunda parte da proposição 2.4.7, temos que $X = (0,0,1) + F$, em que $F = \mathbf{Ker}\ \varphi$.

b) Para determinar o conjunto $\mathbf{Ker}\ \varphi$, temos de resolver a equação $\varphi(x) = 0$. Ora,

$$\varphi(x) = 0 \iff 2x + y + z = 0 \iff z = -2x - y$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ker}\ \varphi &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -2x - y\} = \\ &= \{(x,y,-2x-y) \in \mathbb{R}^3 : \ x,y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1,0,-2) + y(0,1,-1) \in \mathbb{R}^3 : \ x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Isto mostra que os vetores $(1,0,-2)$ e $(0,1,-1)$ geram o subespaço vetorial $\mathbf{Ker}\ \varphi$. Facilmente, podemos ver que $\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$ é um conjunto de vetores linearmente independente. Logo, $\{(1,0,-2),(0,1,-1)\}$ é uma base do subespaço vetorial $\mathbf{Ker}\ \varphi$.

c) Aplicaremos a proposição 3.1.14. Seja $\{v_1 = (1,0,-2), v_2 = (0,1,-1)\}$ e designemos a base ortonormada por $\{e_1,e_2\}$. Os vetores e_1 e e_2 serão construídos pelo método de Gram-Schmidt. Temos,

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}})$$

$$w_2 = v_2 - (v_2 \mid e_1)e_1 = (0,1,-1) - \left[(0,1,-1) \mid (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}})\right] \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}) = (\frac{-2}{5}, 1, -\frac{1}{5})$$

(note que $\cdot \mid \cdot$ é o produto interno canónico). Agora, basta dividir o vetor $(\frac{-2}{5}, 1, -\frac{1}{5})$ pela sua norma, que é igual a $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$, e obtemos $e_2 = (-\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}})$ Assim,

$$\{e_1,e_2\} = \{(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}), (-\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}})\}$$

é uma base ortonormada de F.

d) Temos,

$$
\begin{aligned}
F^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mid (u_1,u_2,u_3) = 0 \ \ \forall \ (u_1,u_2,u_3) \in F\} = \\
&= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mid (1,0,-2) = 0 \quad \wedge \quad (x,y,z) \mid (0,1,-1) = 0\}
\end{aligned}
$$

(exercício: justificar que determinar $(x,y,z) \mid (1,0,-2) = 0$ e $(x,y,z) \mid (0,1,-1) = 0$ é equivalente a $(x,y,z) \mid (u_1,u_2,u_3) = 0 \ \ \forall \ (u_1,u_2,u_3) \in F$, isto é, não é necessário considerar todos os vetores de F, basta considerar uma base de F - Porquê?)

Ora,

$$
\begin{cases}
(x,y,z) \mid (1,0,-2) = & 0 \\
(x,y,z) \mid (0,1,-1) = & 0
\end{cases}
$$

que é equivalente a

$$
\begin{cases}
x \quad -2z = & 0 \\
\quad\ \ y - z = & 0
\end{cases}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
F^{\perp} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2z \quad \wedge \quad y = z\} = \\
&= \{(2z,z,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{z(2,1,1) \in \mathbb{R}^3 : \ z \in \mathbb{R}\} =
\end{aligned}
$$

Portanto, o vetor $(2,1,1)$ gera $F^{\perp}$. Como este vetor é diferente de zero então $\{(2,1,1)\}$ é uma base de $F^{\perp}$.

e) Aplicaremos a proposição 3.2.5. Para o efeito, teremos de encontrar uma base ortonormada de F. Pela alínea c),

$$
\{e_1,e_2\} = \{(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{-2}{\sqrt{5}}),(-\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}},\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}},-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}})\}
$$

é uma base ortonormada de F. Então,

$$
\pi_F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3
$$

está definida por

$$
\begin{aligned}
\pi_F(x, y, z) &= \\
&= ((x, y, z) \mid e_1)e_1 + ((x, y, z) \mid e_2)e_2 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2z)e_1 + \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}(-2x + 5y - z)e_2 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2z)(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}) + \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}(-2x + 5y - z)(-\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}) \\
&= (\text{continhas}, \text{continhas}, \text{continhas})
\end{aligned}
$$

f) Aplicar a proposição 3.2.6.