Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Álgebra Linear LCC Teste 2 20/12/2019 Duração: 2h A

Nome: ______________________ **Número:** __________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. O seguinte conjunto F é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   - ☐ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y = z\}$.
   - ☐ $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y\}$.
   - ☐ $F = \{(0, 0, 0), (0, 2, 0), (0, -2, 0)\}$.
   - ☐ $F = \{(x, 2x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$.

2. Seja V um espaço vetorial real e $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ uma base de V.

   - ☐ $(2\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ também é uma base de V.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - ☐ O vetor nulo $\mathbf{0}_V$ não pode escrever-se como combinação linear de $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, 2\boldsymbol{v_1}\}$ não é um conjunto gerador de V.

3. Seja $S = \{(\alpha + \beta, \alpha - \beta, 2\alpha) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   - ☐ $S = \langle (1, 1, 2), (1, -1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.
   - ☐ S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1.
   - ☐ $(1, 1, 1) \in S$.
   - ☐ $S = \mathbb{R}^3$.

4. Seja $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear e A_f a matriz de f. Se $\text{car}(A_f) = 3$, então

   - ☐ $\mathsf{Nuc}(f) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.
   - ☐ f é sobrejetiva.
   - ☐ $\mathsf{Nuc}(f)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1.
   - ☐ f não é injetiva.

5. Sejam $A_g = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_h = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ as matrizes associadas às aplicações lineares g e h, respetivamente.

   - ☐ As aplicações $g \circ h$ e $h \circ g$ estão ambas bem definidas.
   - ☐ A aplicação αg, com $\alpha \in \mathbb{R}$, está bem definida e $\big(\alpha g\big)(1, 1, 1) = (2, 1, -1)$.
   - ☐ A aplicação $h + g$ está bem definida e $\big(h + g\big)(1, 1, 1) = (2, 1, -1)$.
   - ☐ A aplicação $g \circ h$ está bem definida e $\big(g \circ h\big)(1, 1) = (2, 1, -2)$.

6. Seja $p(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)$ o polinómio característico de uma dada matriz A. Então,

- [ ] A é invertível e 1 e $\frac{1}{2}$ são valores próprios de A^{-1}.
- [ ] o sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tem solução única.
- [ ] os valores próprios de A são 0, 1 e 2, com a mesma multiplicidade algébrica.
- [ ] o sistema $(A-2I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e indeterminado.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [3 valores] Considere os vetores $\boldsymbol{u}_1 = (0,0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0,1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1,2)$ e $\boldsymbol{u}_4 = (-1,0,1,0)$ e o subespaço $S = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Verifique se os vetores $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ e $\boldsymbol{u}_4$ são linearmente independentes. Qual a dimensão de S?
   (b) Determine os vetores $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ que pertencem a S.
   (c) Determine α de modo que o vetor $(1,-1,0,\alpha)$ pertença a S.

2. [2.5 valores] Considere a aplicação linear $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por
$$g(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} a & b+d \\ c-d & a \end{bmatrix}, \text{ para } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$
   (a) Determine um vetor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^4$ tal que $\boldsymbol{u} \neq (1,1,1,1)$ e $g(\boldsymbol{u}) = g(1,1,1,1)$.
   (b) Determine uma base para $\mathsf{Nuc}(g)$ e uma base para $\mathsf{Im}(g)$.

3. [2.5 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que
$$T(1,1) = (1,3,1), \quad T(-1,1) = (-1,0,2).$$
   (a) Determine $T(x,y)$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.

4. [3 valores] Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$
   (a) Mostre que os valores próprios de A são 2 e 4.
   (b) Indique os valores próprios de $(A-5I)^3$.
   (c) Determine a dimensão do subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A.
   (d) Apresente, se possível, uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = D$, com D diagonal.

5. [1.5 valores] Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Mostre que se $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ são vetores linearmente dependentes, então $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_k) \in E'$ são também linearmente dependentes. A afirmação recíproca é verdadeira?