Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação

Departamento de Matemática — 26 de janeiro de 2024

Exame de Álgebra Linear CC

Época de Recurso

duração: 2h30min

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

		V	F
1.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $A + B$ é uma matriz simétrica, então A e B são matrizes simétricas.	☐	☐
2.	Para quaisquer $A, B, C \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se $A \neq 0_{2\times 2}$ e $AB = AC$, então $B = C$.	☐	☐
3.	Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, se $car(AB) = 3$, então A e B são matrizes invertíveis.	☐	☐
4.	O conjunto $\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,\vert\, A \text{ é triangular superior}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ de dimensão 9.	☐	☐
5.	A aplicação $f : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por $f(A) = A^T$, para qualquer $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, é uma aplicação linear.	☐	☐
6.	Para quaisquer $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $u, v \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, se u e v são vetores próprios de A, então $u + v$ é um vetor próprio de A.	☐	☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e B, C, D matrizes tais que:

   - $B \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ é uma matriz em escada e $car(B) = 2$;
   - $C, D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $\det C = -15$ e D é uma matriz obtida de C efetuando a sequência de operações elementares a seguir indicada

   $$l_1 \to l_1 + 4l_2, \quad c_3 \to 5c_3, \quad c_2 \leftrightarrow c_1, \quad l_2 \to \frac{1}{6}l_2.$$

   (a) Calcule $|A|$.

   (b) Justifique que a matriz A é invertível e determine a sua inversa utilizando o método de Gauss-Jordan.

$\overrightarrow{\text{v.s.f.f.}}$

(c) Classifique os sistemas:

i. $B\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. ii. $B\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. iii. $B^T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Indique o determinante de D.

2. Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, os subespaços vetoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + 2y = 0\} \quad \text{e} \quad G =< (1, -1, 1), (2, 0, 2) > .$$

(a) Mostre que $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z - x = 0\}$.

(b) Diga, justificando, se $F \cup G$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(c) Determine a dimensão de F.

(d) Determine uma base de $F + G$ e justifique que esta soma não é direta.

3. Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}'$ a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$. Sejam f e g os endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$f(1, 0, 0) = (2, -1, -1), f(0, 1, 0) = (-2, 1, 1), f(0, 0, 1) = (0, 0, 5)$$

e

$$M(g, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Justifique que $\text{Nuc}f =< (1, 1, 0) >$. Diga se f é injetiva e se é sobrejetiva.

(b) Determine as matrizes $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ e $M(f \circ g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

(c) Verifique que $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ são vetores próprios de g associados ao mesmo valor próprio. Indique esse valor próprio.

(d) Justifique que 1 é um valor próprio de g e indique um vetor próprio de g associado a este valor próprio.

(e) Justifique que g é diagonalizável.

Cotação - Grupo I: $6 \times 0,5$.

Grupo II: 1.$(1,5+1,5+1,5+1,0)$; 2.$(1,25+0,75+1,25+1,5)$; 3.$(1,5+1,5+1,25+1,5+1,0)$.