



———— Derivadas e funções trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas ————

1. (a) $f'(x) = 30(6x + 1)^4, \quad x \in \mathbb{R}$

(b) $f'(x) = 15x^2 \cos(2x) - 10x^3 \sin(2x), \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

(d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}, \quad x \in]3, +\infty[$

(e) $f'(x) = \frac{\sin x}{(2 + \cos x)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

(f) $f'(x) = \frac{3e^{3x} + 2x}{e^{3x} + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

(g) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(h) $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 3 \\ 3 & \text{se } x > 3 \end{cases}$

2. (a) Equação da reta tangente $\rightsquigarrow y = 2(x - 1)$; equação da reta normal $\rightsquigarrow y = -\frac{1}{2}(x - 1)$

(b) Equação da reta tangente $\rightsquigarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$; equação da reta normal $\rightsquigarrow y = -4x - \frac{31}{4}$

3. (a) A função f não é contínua nos pontos -1 e 1 . Com efeito:

- f não é contínua no ponto 1 porque não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$;
- f não é contínua no ponto -1 porque apesar de existir $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ tem-se que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 \neq 2 = f(-1)$.

(b) A função f é contínua mas não derivável nos pontos 0 e 3 . Com efeito:

- f não é derivável no ponto 0 porque $f'_+(0) < 0$ e $f'_-(0) > 0$;
- f não é derivável no ponto 3 porque $f'_+(3) = 0$ e $f'_-(3) \neq 0$.

4. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$g'(x) = f'(x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2)' = f'(x^2 - 2) \cdot 2x.$$

Em particular,

$$g'(2) = 4f'(2).$$

Como $f'(2)$ é igual ao declive m_t da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 2)$, vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 2)$ passa nos pontos $(2, 2)$ e $(6, 0)$, tem-se que

$$m_t = \frac{0 - 2}{6 - 2} = -\frac{1}{2}.$$

Então,

$$f'(2) = m_t = -\frac{1}{2}.$$

Consequentemente,

$$g'(2) = 4 \cdot f'(2) = -\frac{4}{2} = -2.$$

5. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$g'(x) = f'(4 - 2x + x^3) \cdot (4 - 2x + x^3)' = f'(4 - 2x + x^3) \cdot (-2 + 3x^2).$$

Em particular,

$$g'(1) = f'(3) \cdot 1 = f'(3).$$

Como $f'(3)$ é igual ao declive m_t da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 4)$, vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta perpendicular ao gráfico de f no ponto $(3, 4)$ passa nos pontos $(3, 4)$ e $(0, 6)$, tem-se que o declive m_p desta reta é:

$$m_p = \frac{6 - 4}{0 - 3} = -\frac{2}{3}.$$

Consequentemente, o declive m_t é dado por

$$m_t = -\frac{1}{m_p} = \frac{3}{2},$$

e, portanto,

$$f'(3) = m_t = \frac{3}{2}.$$

Então,

$$g'(1) = f'(3) = \frac{3}{2}.$$

6. Pela regra da derivada da função composta, temos que:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2f(-4 + 2x + x^2)[f(-4 + 2x + x^2)]' \\ &= 2f(-4 + 2x + x^2)f'(-4 + 2x + x^2) \cdot (-4 + 2x + x^2)' \\ &= 2f(-4 + 2x + x^2)f'(-4 + 2x + x^2) \cdot (2 + 2x) \end{aligned}$$

Em particular,

$$g'(2) = 2f(4)f'(4)6 = 12f(4)f'(4).$$

Observemos que $f(4) = 2$. Como $f'(4)$ é igual ao declive m_t da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(4, 2)$, vamos calcular este declive. Atendendo a que a reta perpendicular ao gráfico de f no ponto $(4, 2)$ passa nos pontos $(4, 2)$ e $(6, 6)$, tem-se que o declive m_p desta reta é:

$$m_p = \frac{6 - 2}{6 - 4} = 2.$$

Consequentemente, o declive m_t é dado por

$$m_t = -\frac{1}{m_p} = -\frac{1}{2},$$

e, portanto,

$$f'(4) = m_t = -\frac{1}{2}.$$

Então,

$$g'(2) = 12 f(4)f'(4) = 12.2.(-\frac{1}{2}) = -12.$$

7. $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$ (Observe que $f(0) = 5$ ou, equivalentemente, $f^{-1}(5) = 0$).

8. (1) (a) Temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 + 1) = 3$; e que
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x^2 = 3$.

Consequentemente, como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$, concluímos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$. Observemos agora que $f(1) = 3$. Como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 = f(1)$, concluímos que f é contínua no ponto 1.

(1) (b) Temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x^3 + 1) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^3 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2(x^2 + x + 1) = 6.$

Logo, $f'_+(1) = 6$.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3(x + 1) = 6.$

Logo, $f'_-(1) = 6$.

Consequentemente, como $f'_+(1) = f'_-(1) = 6$, concluímos que f é derivável no ponto 1 e que $f'(1) = 6$.

(2) (a) f é contínua no ponto -1 (Justifique).

(2) (b) f não é derivável no ponto -1 (Justifique).

(3) (a) f é contínua no ponto 2 (Justifique).

(3) (b) f não é derivável no ponto 2 (Justifique).

9. Resolvido na aula.

10. Resolvido na aula.

11. (a) Seja $f(x) = x^3 - 3x + b$, $x \in \mathbb{R}$. Começemos por observar que f é derivável. Em particular, f é contínua em $[-1, 1]$ e derivável em $] - 1, 1[$ e, portanto, o Teorema de Rolle e os seus corolários são aplicáveis a $f|_{[-1,1]}$. Temos que

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

e que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Por um dos corolários do Teorema de Rolle temos que entre dois zeros consecutivos de f' existe quando muito um zero de f . Assim, a equação $x^3 - 3x + b = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real no intervalo $] - 1, 1[$ qualquer que seja o valor de b .

- (b) Observemos que

$$f'(x) < 0, \quad \forall x \in] - 1, 1[.$$

Consequentemente, f é estritamente decrescente neste intervalo e, portanto, existe no máximo uma raiz real da equação $x^3 - 3x + b = 0$ em $] - 1, 1[$.

Existe exatamente uma raiz real da equação $x^3 - 3x + b = 0$ em $] - 1, 1[$ para os valores de b para os quais $f(-1) > 0$ e $f(1) < 0$. Mas

$$f(-1) = b + 2 > 0 \Leftrightarrow b > -2,$$

e

$$f(1) = b - 2 < 0 \Leftrightarrow b < 2.$$

Concluimos então que existe exatamente uma raiz real da equação $x^3 - 3x + b = 0$ em $] - 1, 1[$ para $b \in] - 2, 2[$.

12. Seja $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Atendamos a que:

- (i) A função f é derivável e

$$f'(x) = 2x - \sin x - x \cos x + \sin x = 2x - x \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A derivada de f tem apenas um zero:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Por um dos corolários do Teorema de Rolle, f tem no máximo dois zeros, pelo que a equação dada possui no máximo duas raízes reais.

- (ii) Por outro lado temos que:

$$f(-2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0, \quad f(0) = -1 < 0, \quad f(2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0.$$

Como a função f é contínua em cada um dos intervalos $[-2\pi, 0]$ e $[0, 2\pi]$ e muda de sinal nestes intervalos, então pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem pelo menos um zero em cada um desses intervalos. Em particular, a equação $x^2 = x \sin x + \cos x$ tem pelo menos uma raiz real em cada um desses intervalos.

De (i) e (ii), concluímos que a equação $x^2 = x \sin x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

13. Resolvido na aula.

14. Resolvido na aula.

15. (a) Consideremos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x - x - 1$.

Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f|_{[0,x]}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in]0, x[: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in]0, x[: \quad \underbrace{\frac{e^x - x - 1}{x}}_{>0} = \underbrace{e^{c_x} - 1}_{>0}.$$

Com efeito, $e^{c_x} - 1 > 0$ porque $e^{c_x} > 1$. Consequentemente, $e^x - x - 1 > 0$, isto é, $e^x > x + 1$.

Seja agora $x < 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f|_{[x,0]}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in]x, 0[: \quad \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in]x, 0[: \quad \underbrace{\frac{-e^x + x + 1}{-x}}_{>0} = \underbrace{e^{c_x} - 1}_{<0}.$$

Com efeito, $e^{c_x} - 1 < 0$ porque $e^{c_x} < 1$. Consequentemente, $-e^x + x + 1 < 0$, isto é, $e^x > x + 1$.

(b) Consideremos a função $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log(1+x) - x$.

Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f|_{[0,x]}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in]0, x[: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in]0, x[: \quad \underbrace{\frac{\log(1+x) - x}{x}}_{>0} = \underbrace{\frac{1}{1+c_x} - 1}_{<0}.$$

Consequentemente, $\log(1+x) - x < 0$, isto é, $\log(1+x) < x$.

Consideremos agora a função $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x)$.

Seja $x > 0$ e apliquemos o Teorema de Lagrange a $f|_{[0,x]}$ que é uma função derivável. Então

$$\exists c_x \in]0, x[: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c_x)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c_x \in]0, x[: \quad \underbrace{x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x)}_{>0} = \underbrace{1 - c_x - \frac{1}{1+c_x}}_{<0}.$$

Consequentemente, $x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x) < 0$, isto é, $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$.

(c) Consideremos os seguintes dois casos:

- (i) se $x = y$ vem $0 = 0$, o que é óbvio.
- (ii) se $x \neq y$ (suponhamos $x < y$), podemos definir $f(z) = \sin z$, $z \in [x, y]$. Temos que f é derivável com $f'(z) = \cos z$. Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[x, y]$ vem

$$\exists c \in]x, y[: \quad \frac{\sin y - \sin x}{y - x} = \cos c.$$

Consequentemente,

$$\exists c \in]x, y[: \quad \left| \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \right| = |\cos c|.$$

Como $|\cos c| \leq 1$, para todo o $c \in]x, y[$, concluímos que

$$\left| \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \right| \leq 1,$$

donde $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

16. Não existe uma tal função. Com efeito, existindo uma tal função f , a sua derivada, definida no intervalo $[0, 2]$ não possuiria a propriedade do valor intermédio, contrariando o Teorema de Darboux.

17. Começemos por observar que f é uma função derivável no intervalo \mathbb{R} . Em particular, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, f é contínua em $[x, y]$ e derivável em $]x, y[$. Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[x, y]$, temos que

$$\exists c \in]x, y[: \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Consequentemente,

$$\exists c \in]x, y[: \quad \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| = |f'(c)|.$$

Como $|f'(c)| \leq M$, concluímos que

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq M,$$

donde

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Consideremos a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$.

Dado $x > a$ apliquemos o Teorema de Lagrange a $h|_{[a,x]}$ (h é contínua em $[a, x]$ e derivável em $]a, x[$). Temos que

$$\exists c \in]a, x[: \quad \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(c)$$

ou equivalentemente,

$$\exists c \in]0, x[: \quad \frac{(g(x) - f(x)) - (g(a) - f(a))}{\underbrace{x - a}_{>0}} = \underbrace{g'(c) - f'(c)}_{>0}.$$

Consequentemente, $g(x) > f(x)$.

19. Calcule os seguintes limites:

- | | |
|-------------------|--------------------|
| (a) 2 | (b) $-\frac{1}{3}$ |
| (c) 0 | (d) 1 |
| (e) 0 | (f) 0 |
| (g) $\frac{1}{6}$ | (h) 0 |
| (i) 6 | (j) $\frac{1}{3}$ |
| (l) $\frac{7}{5}$ | (m) 3 |

20. Calcule:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|----------------------|
| (a) $\frac{1}{8}$ | (b) $\frac{\pi}{4}$ | (c) $-\frac{\pi}{4}$ |
| (d) $-\frac{1}{2}$ | (e) -1 | (f) $-\frac{\pi}{6}$ |
| (g) $-\frac{\pi}{6}$ | (h) $\frac{\pi}{3}$ | (i) 0 |
| (j) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ | (k) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ | |

21. (a) Seja $x \in \mathbb{R}$. Então

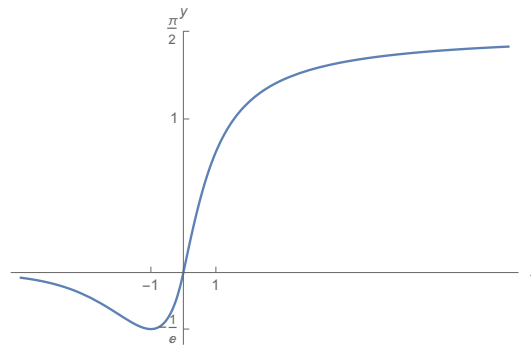
$$\begin{aligned}\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1.\end{aligned}$$

22. Ver slides das aulas.

23. Foram resolvidas nas aulas as alíneas (b) e (e) .

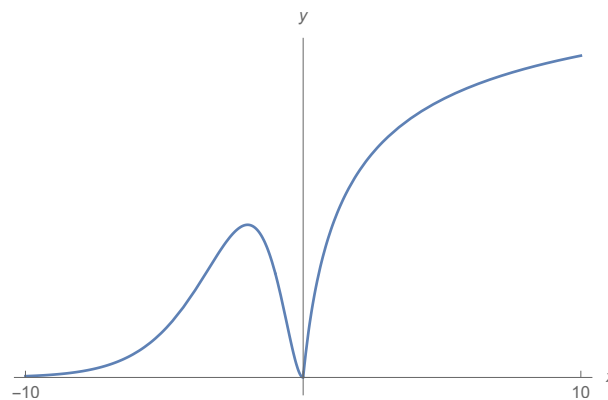
24. Resolvido na aula.

25. A função f pode ser representada graficamente da seguinte forma:



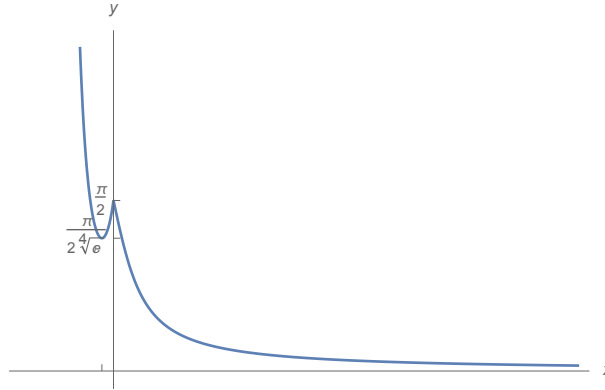
- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- (c) A função f é decrescente em $] -\infty, -1]$ e é crescente em $[1, +\infty[$.
- (d) $\operatorname{Im}(f) = \left[-\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right[$.

26. A função f pode ser representada graficamente da seguinte forma:



- (b) A função f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

27. A função f pode ser representada graficamente da seguinte forma:



- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- (c) A função f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (d) A função f é decrescente nos intervalos $]-\infty, -1/2]$ e $[0, +\infty[$. A função f é crescente em $[-1/2, 0]$. A função tem um máximo local igual a $\frac{\pi}{2}$ no ponto 0 e tem um mínimo local igual a $\frac{\pi}{2}e^{-1/4}$ no ponto $-\frac{1}{2}$.
- (e) $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$.

28. (a) Um exemplo pode ser dado pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ (x-1)^2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

- (b) Não existe. Com efeito, se existisse uma tal função $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que $f(2) = f(3)$ então pelo Teorema de Lagrange, existiria um ponto $c \in]2, 3[$ tal que $f'(c) = 0$. Então não poderíamos ter $f'(x) \geq x \geq 2$, para todo o $x \in [2, 3]$.
- (c) Um exemplo pode ser dado pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 3-x & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- (d) Um exemplo pode ser dado pela função $f(x) = \sin x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ (Justifique).

29. (a) Afirmação falsa (Justifique). Este exercício foi referido na aula TP do dia 16 de novembro. Observe que f não é contínua no ponto 1.

(b) Não existe uma tal função. Com efeito, existindo uma tal função f , a sua derivada, definida no intervalo $[1, 4]$ não possuiria a propriedade do valor intermédio, contrariando o Teorema de Darboux.

(c) Afirmação verdadeira. Um exemplo pode ser dado pela função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (represente graficamente esta função):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

30. (a) Seja $f(x) = e^x - a + 2x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Temos que

$$f'(x) = e^x + 6x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, f é estritamente crescente. Consequentemente f tem no máximo um zero ou, de modo equivalente, a equação $e^x = a - 2x^3$ tem no máximo uma raiz real.

(b) Como f é estritamente crescente, f tem exatamente um zero em $[0, 2]$ se e só se:

(i) $f(0) = 0$ ou

(ii) $f(2) = 0$ ou

(iii) $f(0) < 0 < f(2)$, aplicando o Teorema de Bolzano-Cauchy.

Como $f(0) = 1 - a$ e $f(2) = e^2 + 16 - a$, obtemos que f tem exatamente um zero em $[0, 2]$ se e só se $1 \leq a \leq 16 + e^2$.

31. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3 + e^{2x} - 2x$.

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(b) A função f tem um valor mínimo absoluto igual a -2 no ponto $x = 0$. A função f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$.

(c) Como

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty > 0, \quad f(0) = -2 < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty > 0,$$

pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, f tem pelo menos dois zeros reais, um em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$.

Como f é estritamente monótona em cada um desses intervalos, esses zeros são únicos. (Em alternativa poderia ser argumentado da seguinte forma: temos que $f'(x) = 2e^{2x} - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, a derivada tem apenas um zero (em $x = 0$). Como a derivada tem apenas um zero, por um dos corolários do Teorema de Rolle, concluímos que f tem no máximo dois zeros).

32. (a) $[0, 10]$.
 (b) $[0, 4] \cup [6, 7[\cup [8, 9[\cup]9, 10]$.
 (c) $x \in [1, 2], \quad x = 7$.
 (d) $x = 0, \quad x \in]1, 2[, \quad x = 5, \quad x = 9, \quad x = 10$.
 (e) $x = 2, \quad x = 7, \quad x = 9$
 (f) $f'(4) = 2$.
 (g) $x = 1, \quad x = 2, \quad x = 5, \quad x = 6, \quad x = 7, \quad x = 9$.
 (h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 8; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{7x-1}{x}\right) = 3$.

33. (a) $] - 2, 2]$.
 (b) $] - 5, -4[\cup] - 4, -7/2[\cup]1, 2[$.
 (c) $x = -6, \quad x \in] - 3, 0[, \quad x = 6$
 (d) $x = -4, \quad x \in [-3, 0], \quad x = 4, \quad x = 5, \quad x = 8$
 (e) $x = -3, \quad x = 1, \quad x = 5$
 (f) $f'(-5) = 1$.
 (g) $x = -4, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad x = 4, \quad x = 6$
 (h) $x = 7$
 (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) = -1$