Caminhos

Relembrar: os grafos desta UC são grafos simples.

Definição: Um caminho de um grafo G é uma sequência de vértices no qual dois vértices sucessivos definem uma aresta.

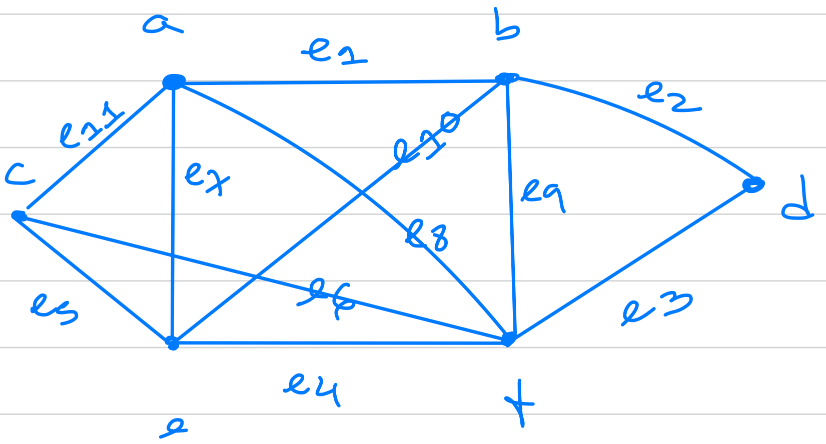
Representa-se um caminho por $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ onde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vértices de G.

Ao primeiro vértice da sequência chamamos a origem do caminho ou vértice inicial e ao último vértice chamamos destino do caminho ou vértice final.

Convenção: Chama-se caminho trivial à sequência $\langle a \rangle$, onde a é um vértice do grafo G.

Observação: Um caminho também pode ser definido como uma sequência de arestas, no qual duas arestas sucessivas têm um vértice comum.

Exemplo



Neste grafo

$\langle a, b, d, f, c, e, f, b \rangle$ é um caminho de a para b.

Este caminho também pode ser representado por: $\langle e_1, e_2, e_3, e_6, e_5, e_4, e_9 \rangle$

Definição: O comprimento de um caminho é o número de arestas que definem o caminho

Definição: Chama-se caminho elementar a um caminho onde nenhum vértice repetido.

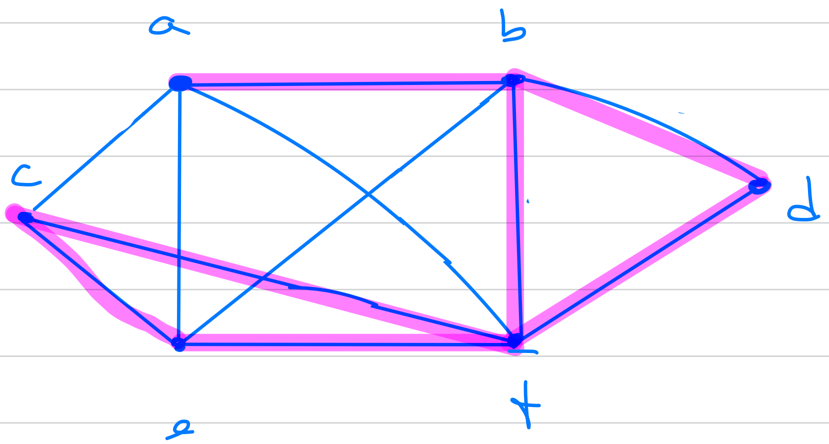
Definição: Um caminho simples ou atalha é um caminho sem arestas repetidas.

Definição: Um circuito é um caminho no qual vértice inicial coincide com o vértice final.

Definição: Um circuito simples é um caminho que é, simultaneamente, um circuito e um caminho simples.

Definição: Um ciclo é um circuito simples, não trivial, onde não há repetição de vértices à exceção do vértice inicial e final.

Exemplo



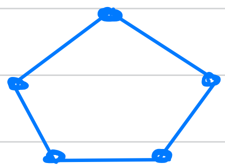
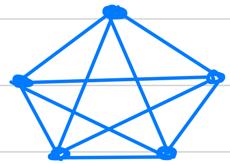
Neste grafo, o caminho ⟨a, b, d, f, c, e, f, b⟩

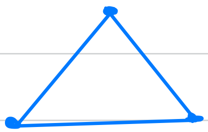
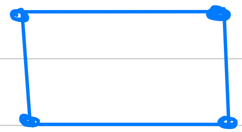
- tem comprimento 7
- não é elementar (b e f repetem)
- ⟨a, f, d, b⟩ é um caminho elementar de a para b
- é um atalho (não há repetição de arestas)
- ⟨a, b, d, f, c, e, f, c, e, b⟩ não é atalho (repetem {f, c} e {c, e})
- não é um circuito ($a \neq b$)
- ⟨f, c, e, f⟩ é um circuito e é circuito simples
- ⟨a, b, d, f, e, c, a⟩ é um ciclo

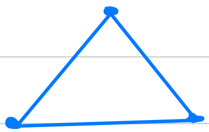
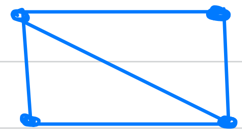
Subgrafos

Definição: Um subgrafo de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo $G' = (V', E')$ onde $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Exemplo

O grafo  é um subgrafo de 

O grafo  não é subgrafo de 

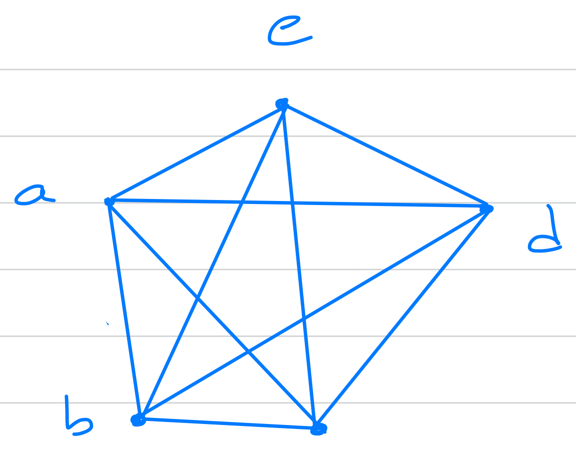
O grafo  é subgrafo de 

Definição Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $V' \subseteq V$. Chama-se subgrafo de G induzido por V' ao grafo $G' = (V', E')$ onde

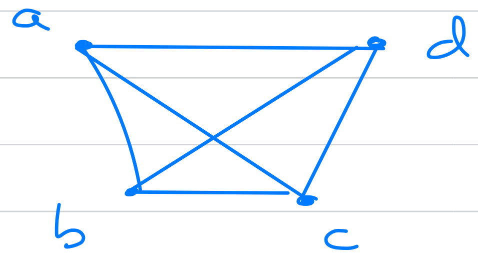
$$E' = \{ \{v_i, v_j\} \in E : v_i, v_j \in V' \}$$

Exemplo

Dado o grafo



o subgrafo induzido por $\{a, b, c, d\}$ é



Alguns grafos especiais

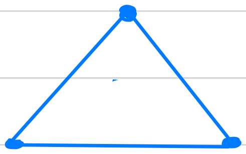
Definição: Um grafo trivial é um grafo onde $G = (V, E)$ com $\#V = 1$ e $\#E = 0$

Um grafo nulo é um grafo $G = (V, E)$ onde $\#E = 0$

Definição: Seja $n \geq 3$. Um grafo com n vértices e n arestas diz-se um grafo ciclo de comprimento n se as n arestas definem um ciclo

Um grafo ciclo de comprimento n representa-se por C_n.

Exemplos

C_3 

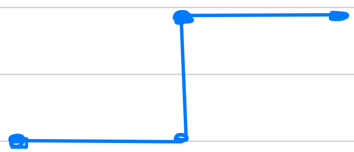
C_4 

Definição Seja $n \geq 1$. Um grafo com $n+1$ vértices e n arestas diz-se um grafo linha de comprimento n se dois vértices são adjacentes a um e um só vértice e todos os outros vértices são adjacentes a dois e só dois vértices. O grafo linha de comprimento n representa-se por P_n.

Exemplo

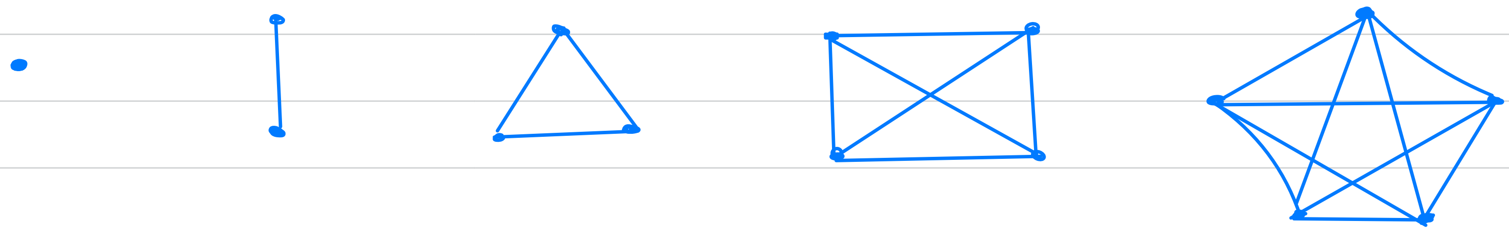
P_1 

P_2 : 

P_3 

Definição Um grafo completo é um grafo no qual quaisquer dois vértices são adjacentes. Um grafo completo com n vértices representa-se por K_n.

Exemplos: K_1 K_2 K_3 K_4 K_5



Nota: O grafo K_n tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas, $n \geq 2$

$n = 2$: $\binom{2}{2} = 1$

$n = 3$: $\binom{3}{2} = 3$

$n = 4$: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$

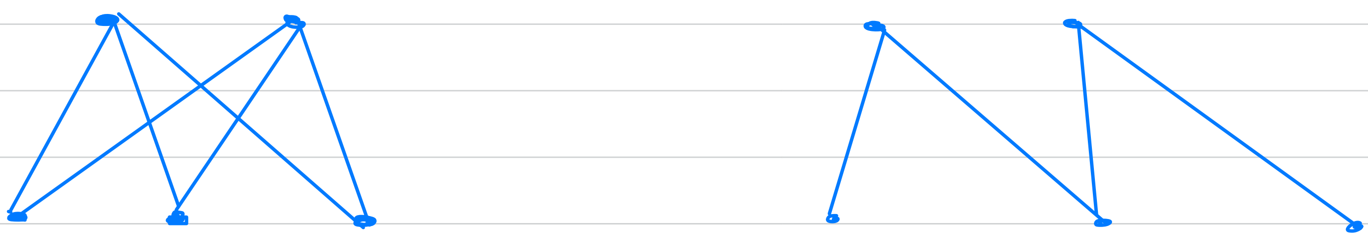
$n = 5$ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

Proposição Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Temos que K_m é subgrafo de K_n sse $m \leq n$.

Demonstração: Trivial.

Definição: Um grafo $G=(V,E)$ diz-se bipartido se existir uma partição $\{X,Y\}$ de V de modo que cada vértice de X é adjacente apenas aos vértices de Y e cada vértice de Y é adjacente apenas aos vértices de X.

Exemplos Os dois grafos seguintes são bipartidos:



Proposição Um grafo é bipartido se e só se não admite ciclos de comprimento ímpar.

Ideia da demonstração

$(\Rightarrow)$ Sejam $G=(V,E)$ e $\{X,Y\}$ um partição de G que realiza

G como grafo bipartido. Seja $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_n, v_1 \rangle$ um ciclo de G. Se $v_1 \in X$ então $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, ..., $v_n \in Y$ e $v_1 \in X$. Logo concluimos que n é par.

($\Leftarrow$) Suponhamos que G tem apenas ciclos de comprimentos par.

Definimos a partição $\{X, Y\}$ estabelecendo que, fixado $v \in V$,

$$X = \{ x \in V \mid \text{um caminho de } x \text{ a } v \text{ tem comprimento par} \}$$

$$Y = \{ y \in V \mid \text{um caminho de } x \text{ a } v \text{ tem comprimento impar} \}$$

Há que mostrar que $\{X, Y\}$ de facto realiza G como grafo bipartido (...)

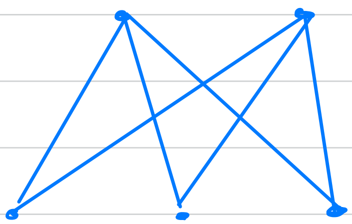
Definição

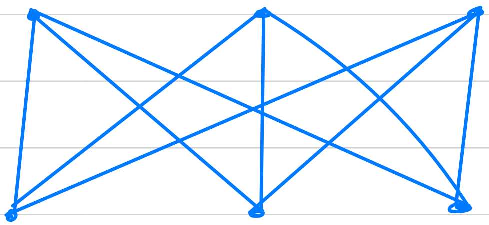
Um grafo bipartido completo é um grafo bipartido $G = (V, E)$

tal que, para a partição $\{X, Y\}$ de V, cada vértice de X é adjacente a todos os vértices de Y (e, portanto, cada vértice de Y é adjacente a todos os vértices de X).

Representa-se o grafo bipartido completo por $K_{m,n}$ onde $\# X = m$ e $\# Y = n$ e $m \leq n$.

Exemplos Os grafos $K_{2,3}$ e $K_{3,3}$ são representados, resp., por:





Nota: O grafo $K_{n,m}$ tem $n\,m$ arestas

Proposição: Dados $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$ e $p \leq q$.

Então $K_{m,n}$ é subgrafo de $K_{p,q}$ sse $m \leq p$ e $n \leq q$.

Demonstração: Imediata.

Grau de um vértice

Definição: Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $v \in V$. Chama-se grau (ou valência) de v e representa-se por $\text{grau}(v)$ ao número de arestas incidentes a v.

Exemplo:

- No grafo K_5 todos os vértices têm grau 4
- No grafo $K_{2,3}$ existem 2 vértices com grau 3 e 3 vértices com grau 2.

Teorema (teorema do aperto de mãos)

Num grafo $G = (V, E)$ a soma dos graus de todos os vértices é o dobro do número de arestas.

Demonstração: Por indução sobre o número de arestas

$P(n)$: a soma do grau de todos os vértices de um grafo com n arestas é $2n$.

$P(0)$: Suponhamos que não existem arestas. Então cada vértice tem grau 0 e, portanto, a soma dos grau é 0 e $0 = 2 \times 0$. Então $P(0)$ verifica-se

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$: Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira.

Queremos provar que $P(k+1)$ é verdadeira.

Seja $G = (V, E)$ um grafo com $k+1$ arestas. Consideramos G' um subgrafo de G com k arestas, ou seja, "tiramos" uma aresta a G digamos a aresta $\{a, b\}$.

Então G' tem k arestas logo, por hipótese de indução, a soma dos graus de todos os vértices é $2k$. Para obter G de G' "juntamos" apenas a aresta $\{a, b\}$. Assim, o grau de a e o grau de b aumentam uma unidade. Logo a soma dos graus de todos os vértices de G é $2k + 1 + 1 = 2(k+1)$.

Então $P(k+1)$ é verdadeiro.

Como $P(0)$ se verifica e $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ então $P(n)$ é verdadeira, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Corolário

Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Demonstração: Seja $G = (V, E)$ um grafo com n arestas. Então:

$$\sum_{\text{grau}(v) \text{ é ímpar}} \text{grau}(v) + \underbrace{\sum_{\text{grau}(v) \text{ par}} \text{grau}(v)}_{\text{par}} = \sum_{v \in V} \text{grau}(v) = \underbrace{2n}_{\text{par}}$$

Logo $\displaystyle\sum_{\text{grau}(v) \text{ é ímpar}} \text{grau}(v)$ é um número par.

Este somatório será par sse o número de vértices a soma é ímpar. $\square$