2.1 Sintaxe do Cálculo de Predicados

1. Escreva as seguintes afirmações como fórmulas para um tipo de linguagem apropriado.

   a) Todo aquele que é persistente aprende Lógica.

   b) Quem quer vai, quem não quer manda.

   c) Nem todos os pássaros voam.

   d) Se toda a gente consegue, também o João consegue.

   e) Para todo o número natural que é maior do que 6, o seu dobro é maior do que 12.

   f) Quaisquer dois conjuntos que têm os mesmos elementos são iguais.

   g) Existe um inteiro positivo menor do que qualquer inteiro positivo.

   h) Todo o inteiro positivo é menor do que algum inteiro positivo.

   i) Não há barbeiro que barbeie precisamente aqueles homens que não se barbeiam a si próprios.

2. Seja $L = (\{0, f, g\}, \{R\}, \mathcal{N})$ o tipo de linguagem tal que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(f) = 1$, $\mathcal{N}(g) = 2$, $\mathcal{N}(R) = 2$.

   a) Explicite a definição indutiva do conjunto dos termos de tipo L.

   b) Indique quais das seguintes sequências de símbolos constituem termos de tipo L:

i)	0.	**ii)**	$f(0)$.	**iii)**	$f(1)$.
iv)	$g(f(x_1, x_0), x_0)$.	**v)**	$g(x_0, f(x_1))$.	**vi)**	$R(x_0, x_1)$.

   c) Calcule o conjunto das variáveis de cada um dos seguintes termos:

i)	0.	**ii)**	$g(x_1, f(x_1))$.
iii)	$g(x_1, x_2)$.	**iv)**	$g(x_1, g(x_2, x_3))$.

   d) Para cada um dos termos t da alínea anterior, calcule $subt(t)$.

   e) Para cada um dos termos t da alínea **c)**, calcule $t[g(x_0, 0)/x_1]$.

3. Seja L o tipo de linguagem definido no exercício anterior.

   a) Enuncie o teorema de indução estrutural para o conjunto $\mathcal{T}_L$.

   b) Defina, por recursão estrutural, funções $r, h : \mathcal{T}_L \to \mathbb{N}_0$ que a cada termo t fazem corresponder o número de ocorrências de variáveis em t e o número de ocorrências de símbolos de função em t, respetivamente.

   c) Dê exemplos de termos t_1 e t_2 de tipo L tais que $\#\mathrm{VAR}(t_1) = r(t_1)$ e $\#\mathrm{VAR}(t_2) < r(t_2)$.

   d) Demonstre que, para todo o termo $t \in \mathcal{T}_L$, $\#\mathrm{VAR}(t) \leq r(t)$.

4. Seja L um tipo de linguagem. Mostre que: para todo o termo $t \in \mathcal{T}_L$, $\mathrm{VAR}(t) \subseteq subt(t)$.

5. Seja $L = (\{0, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(-) = \mathcal{N}(<) = 2$.

   a) Dê exemplos de termos de tipo L. Justifique.

   b) Dê exemplos de fórmulas atómicas de tipo L.

   c) Justifique que cada uma das seguintes palavras é uma fórmula de tipo L.

   i) $x_2 - 0 < x_1$.
   ii) $\exists x_0 \forall x_1 (x_1 - x_0 < 0)$.
   iii) $\forall x_2 (\exists x_0 (x_0 < x_1) \to \exists x_1 (x_2 < x_1 - x_0)) \land \mathsf{P}(x_2)$.
   iv) $\forall x_0 (x_0 < x_1) \lor \exists x_1 (x_1 < x_0)$.

   d) Para cada fórmula da alínea anterior, calcule o conjunto das suas subfórmulas.

   e) Calcule os conjuntos de variáveis livres e de variáveis ligadas de cada uma das fórmulas da alínea c).

   f) A proposição "Para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$, $\mathrm{LIV}(\varphi) \cap \mathrm{LIG}(\varphi) = \emptyset$" é verdadeira?

6. Para cada uma das fórmulas φ da alínea c) do exercício anterior, calcule $\varphi[x_2 - x_0/x_1]$.

7. Considere o tipo de linguagem L do exercício 5. Para cada uma das fórmulas φ do exercício 5.c), indique quais das seguintes proposições são verdadeiras.

   a) A variável x_1 é substituível pelo termo termo 0 em φ.

   b) A variável x_1 é substituível pelo termo x_2 em φ.

   c) A variável x_2 é substituível por qualquer termo de tipo L em φ.

   d) Qualquer variável é substituível pelo termo $x_1 - x_3$ em φ.

8. Seja L um tipo de linguagem.

   a) Defina, por recursão estrutural, a função $\mathrm{SUBFA} : \mathcal{F}_L \to \mathcal{P}(\mathcal{F}_L)$ que a cada fórmula φ faz corresponder o conjunto das subfórmulas atómicas de φ.

   b) Sejam φ uma fórmula de tipo L e x uma variável. Demonstre que: se $x \notin \mathrm{LIV}(\psi)$ para todo $\psi \in \mathrm{SUBFA}(\varphi)$, então $x \notin \mathrm{LIV}(\varphi)$.