Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Licenciatura em Ciências da Computação
07/06/2023
Exame de recurso

Nome: Número:

Parte I

1. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de adjacência de C_3.

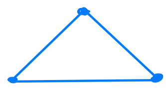
(b) Existe um grafo conexo e planar com 5 vértices todos eles de grau 2 e tal que a sua representação planar tem 3 faces.

(c) Existe um grafo semi-Euleriano cujo número cromático é par.

a) Falso.

A matriz de adjacência apresentada é relativa ao grafo linha P_2

e não ao grafo ciclo C_3

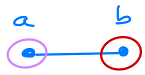


b) Falso.

Seja G um grafo com 5 vértice todos eles de grau 2. Então sabemos que $\sum_v \text{grau}(v) = 2a$, ou seja, $2 \times 5 = 2 \times a$. Portanto G terá 5 arestas. Admitindo que G é conexo e planar então satisfaz a fórmula de Euler ou seja, $v - a + f = 2$. Logo $5 - 5 + f = 2$, ou seja, $f = 2$, pelo que $f \neq 3$.

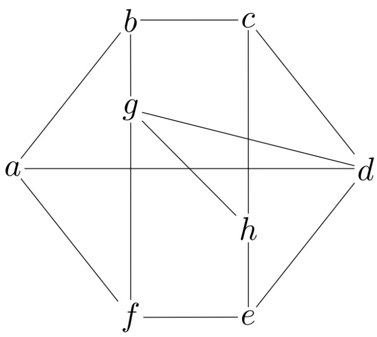
c) Verdadeiro.

Por exemplo, o grafo G:



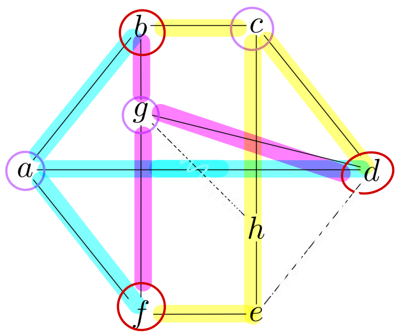
Claramente $\chi(G) = 2$ e G é semi-euleriano uma vez que $\langle a, b \rangle$ é um caminho, não fechado, que percorre todas as arestas de G sem as repetir.

2. Justifique se o seguinte grafo é ou não planar.



O grafo apresentado não é planar.

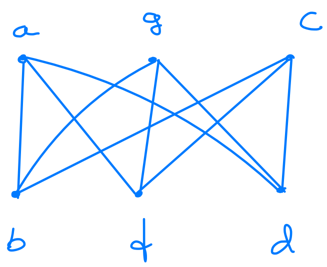
Esquematicamente podemos ver um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$:



Ou seja:

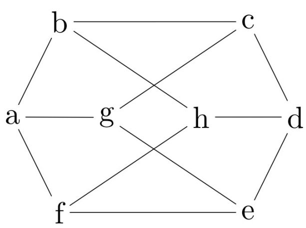
Consideramos o grafo que se obtém retirando as arestas $\{e,d\}$ e $\{g,h\}$.

Os vértices h e e são, neste subgrafo, vértices de grau 2. Portanto o subgrafo é homeomorfo ao grafo:



que é o grafo $K_{3,3}$. Pelo Teorema de Kuratowski, o grafo proposto não é planar.

3. Considere o seguinte grafo



Indique, justificando, se o grafo acima representado é

(a) bipartido, (b) Euleriano, (c) Hamiltoniano.

NOTA: o grafo apresentado consiste de uma representação (não planar) do cubo.

a) G é bipartido.

Temos que $X = \{a, h, c, e\}$ e $Y = \{b, d, f, g\}$ constituem uma partição dos vértices de G. De facto, os vértices de X só incidem nos vértices de Y e vice-versa.

b) G não é Euleriano.

Um grafo conexo é Euleriano sse todos os seus vértices são de grau par. O grafo proposto tem todos os seus vértices com grau 3, pelo que não é um grafo Euleriano.

c) G é um grafo Hamiltoniano.

O caminho $\langle a, b, c, g, e, d, h, f, a \rangle$ é um ciclo Hamiltoniano de G, ou seja, um ciclo que percorre todos os vértices de G sem repetir.

4. Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Se a, b e c são inteiros tais que $a|c$ e $b|c$ então $ab|c$.

(b) Dado $a \in \mathbb{Z}$, $a(a+1)(2a+1)$ é um múltiplo de 3.

(c) O último dígito de 3^{20951} é 1.

a) Falso.

Considerando $a = 2$, $b = 2$ e $c = 2$ temos que $a|c$, $b|c$ mas $ab \nmid c$.

b) Verdadeiro.

Dado $a \in \mathbb{Z}$ então a satisfaz uma e uma só das seguintes possibilidades:

i) $a \equiv 0 \pmod 3$ ii) $a \equiv 1 \pmod 3$ iii) $a \equiv 2 \pmod 3$

i) Se $a \equiv 0 \pmod 3$ então $3|a$ e, por consequência, $3 | a(a+1)(2a+1)$.

ii) Se $a \equiv 1 \pmod 3$ então $2a \equiv 2 \pmod 3$ e $2a+1 \equiv 3 \pmod 3$, ou seja, $2a+1 \equiv 0 \pmod 3$. Assim, $3 | (2a+1)$ e, por consequência, $3 | a(a+1)(2a+1)$

iii) Se $a \equiv 2 \pmod 3$ então $a+1 \equiv 3 \pmod 3$, ou seja, $a+1 \equiv 0 \pmod 3$. Assim, $3 | (a+1)$ e, por consequência, $3 | a(a+1)(2a+1)$.

Em qualquer um dos casos, $3 | a(a+1)(2a+1)$.

c) Falso.

Temos que $3^2 \equiv -1 \pmod{10}$ e $20951 = 2 \times 10475 + 1$.

Logo $(3^2)^{10475} \equiv (-1)^{10475} \pmod{10}$ e portanto $3^{20950} \equiv -1 \pmod{10}$.

Assim $3^{20951} \equiv -3 \pmod{10}$, ou seja, $3^{20951} \equiv 7 \pmod{10}$.

Concluímos que o último dígito de 3^{20951} é 7 e não 1.

5. Determine todos os pares possíveis de digitos (x, y) tais que o número $\overline{2x647283y}$ é simultaneamente divisível por 11 e por 4.

Critério de divisibilidade por 4:

$$\overline{2x647283y} \equiv 2\times 3 + y \pmod 4 \iff \overline{2x647283y} \equiv 6 + y \pmod 4$$

Critério de divisibilidade por 11:

$$\overline{2x647283y} \equiv y - 3 + 8 - 2 + 7 - 4 + 6 - x + 2 \pmod{11} \iff$$

$$\overline{2x647283y} \equiv y - x + 14 \pmod{11} \iff \overline{2x647283y} \equiv y - x + 3 \pmod{11}$$

Como x, y são dígitos, $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e para que $\overline{2x647283y}$ seja divisivel por 4 e por 11 :

$$6 + y \equiv 0 \pmod 4 \quad e \quad y - x + 3 \equiv 0 \pmod{11}$$

De $6 + y \equiv 0 \pmod 4$ resulta que $y \equiv 2 \pmod 4$ e, portanto, $y = 2$ ou $y = 6$

Se $y = 2$ então $2 - x + 3 \equiv 0 \pmod{11} \iff x \equiv 5 \pmod{11}$. Logo $x = 5$

Se $y = 6$ então $6 - x + 3 \equiv 0 \pmod{11} \iff x \equiv 9 \pmod{11}$. Logo $x = 9$

Os pares (x, y) possíveis são então $(5, 2)$ e $(9, 6)$.

6. Considere a equação diofantina $102x + 27y = 6$. Determine a solução geral e verifique se existe alguma solução positiva (isto é, uma solução tal que $x > 0$ e $y > 0$) desta equação.

Temos que $102x + 27y = 6 \iff 34x + 9y = 2$

Calculemos m.d.c $(34, 9)$. Pelo algoritmo de Euclides:

$$34 = 3\times 9 + 7 \qquad 1 = 7 - 3\times 2$$

$$9 = 1\times 7 + 2 \qquad = 7 - 3\times(9 - 7) = -3\times 9 + 4\times 7$$

$$7 = 3\times 2 + 1 \qquad = -3\times 9 + 4(34 - 3\times 9) = 4\times 34 - 15\times 9$$

Logo $2 = 8\times 34 - 30\times 9$ e $(x_0, y_0) = (8, -30)$ é solução de $34x + 9y = 2$

A solução geral é dada por $\begin{cases} x = 8 + 9t \\ y = -30 - 34t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$

Não existe solução tal que $x > 0$ e $y > 0$ pois quando $t \geq 0$ tem-se $x > 0$ e $y < 0$ e quando $t < 0$ tem-se $x < 0$ e $y > 0$.

7. Considere o seguinte problema:

Um turista e um guia subiram a correr os degraus da pirâmide de Keops perseguidos por um leão. O turista conseguia subir cinco degraus de uma só vez, o guia seis degraus e o leão sete degraus. A dada altura, o turista estava a 8 degraus do topo da pirâmide, o guia a 1 degrau e o leão a 19 degraus. Quantos degraus pode ter a pirâmide?

(a) Justifique, sucintamente, que este problema se traduz no seguinte sistema de congruências lineares:

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 6 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}.$$

(b) Use o Teorema Chinês dos Restos para resolver o sistema e indique qual o número mínimo de degraus que a pirâmide pode ter.

a) Seja x o número de degraus da pirâmide.

Como o turista sobe 5 degraus de cada vez e a dada altura estava a 8 degraus do topo então $x \equiv 8 \pmod 5$. Note-se que $x \equiv 8 \pmod 5 \Leftrightarrow x \equiv 3 \pmod 5 \Leftrightarrow x \equiv -2 \pmod 5$.

Analogamente como o guia sobe 6 degraus de cada vez e estava a 1 degrau do topo então $x \equiv 1 \pmod 6$.

Finalmente o leão sobe 7 degraus de cada vez e estava a 19 degraus do topo, pelo que $x \equiv 19 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 12 \pmod 7 \Leftrightarrow x \equiv 5 \pmod 7$

b) $\begin{cases} x \equiv -2 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 6 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$ Como $m.d.c(5,6) = m.d.c(5,7) = m.d.c(6,7) = 1$ podemos resolver o sistema usando o TCR.

O TCR garante que existe uma única solução módulo $N = 5 \times 6 \times 7 = 210$

Temos:

$n_1 = 5$ $\quad a_1 = -2$ $\quad N_1 = N/n_1 = 42$ $\quad x_1 : 42x_1 \equiv 1 \pmod 5$

$n_2 = 6$ $\quad a_2 = 1$ $\quad N_2 = N/n_2 = 35$ $\quad x_2 : 35x_2 \equiv 1 \pmod 6$

$n_3 = 7$ $\quad a_3 = 5$ $\quad N_3 = N/n_3 = 30$ $\quad x_3 : 30x_3 \equiv 1 \pmod 7$

$x_1 :$ $\quad 42x_1 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow 2x_1 \equiv 1 \pmod 5$ $\quad x_1 = 3$

$x_2 :$ $\quad 35x_2 \equiv 1 \pmod 6 \Leftrightarrow 5x_2 \equiv 1 \pmod 6$ $\quad x_2 = -1$

$x_3 :$ $\quad 30x_3 \equiv 1 \pmod 7 \Leftrightarrow 2x_3 \equiv 1 \pmod 7$ $\quad x_3 = 4$

Logo $x_0 = N_1a_1x_1 + N_2a_2x_2 + N_3a_3x_3 = 42 \times (-2) \times 3 + 35 \times 1 \times (-1) + 30 \times 5 \times 4 =$

$= -252 - 35 + 600 = 313$ é solução particular do sistema.

Temos $313 \equiv 103 \pmod{210}$

Assim, a solução geral do sistema é dada por

$$\{ 103 + 210t : t \in \mathbb{Z} \}$$

O número mínimo de degraus que a pirâmide pode ter é atingido em $t=0$ e são 103 degraus.