

Nota. O teste é constituído por duas páginas, frente e verso. Justifique pormenorizadamente todas as respostas.

1. Considere em \mathbb{R}^2 o produto interno canónico. Seja $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por

$$\lambda(x, y) = (x - 1, y)$$

- a) (2 val) Mostre que λ é uma isometria.
b) (2 val) Determine o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e o isomorfismo ortogonal $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda = T_{(a,b)} \circ \varphi$$

em que $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ designa a translação associada ao ponto (a, b) .

2. (2 val) Sejam E um espaço vetorial, não necessariamente euclidiano, e $\varphi : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Sejam $a \in E$ e $T_a : E \longrightarrow E$ a translação associada ao vetor a . Considere a aplicação afim $\lambda : E \longrightarrow E$ definida por

$$\lambda = T_a \circ \varphi$$

e suponha que λ é um isomorfismo afim. Mostre que φ é um isomorfismo linear.

3. Considere em \mathbb{R}^3 o produto interno canónico e seja X o subconjunto de \mathbb{R}^3 definido por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2\}$$

- a) (2 val) Mostre que X é um espaço afim e escreva-o na forma $X = a + F$, em que a é um ponto de X e F é o subespaço vetorial associado a X .

Nas alíneas seguintes, designe por F^\perp o suplemento ortogonal de F . Recorde que

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$$

- b) (2 val) Determine uma base do subespaço vetorial F .
c) (2 val) Determine o subespaço vetorial F^\perp , indicando uma base ortonormada deste subespaço.
d) (1 val) Determine a projecção ortogonal sobre o subespaço vetorial F^\perp .

4. (2 val) Sejam $(E, \cdot | \cdot)$ um espaço euclidiano e u, v dois vetores de E tais que

$$u \neq 0_E \quad v \neq 0_E \quad u | v = 0_{\mathbb{R}}$$

Mostre que o conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente.

5. Considere a cônica definida pela equação

$$x^2 - y^2 + 4xy + 3x + y + 1 = 0$$

- a) (1 val) Mostre que a cônica é não degenerada.
- b) (2 val) Classifique a cônica.

* * * **FIM** * * *