Tópicos Fundamentais de Matemática

(Licenciatura em Ciências da Computação)

6. Relações de ordem

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

2025/2026

6.1 Conjuntos parcialmente ordenados

definição:

Seja A um conjunto. Uma relação binária R diz-se uma **relação de ordem parcial em** A quando R é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Neste caso, ao par (A, R) dá-se a designação de **conjunto parcialmente ordenado (c.p.o.)**.

exemplo:

São exemplos de c.p.o.'s os seguintes pares:

1) (A, R), onde $A = \{a, b, c, d, e\}$ e

$$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (c, c), (c, e), (d, d), (e, e)\} \ .$$

2) (A, id_A), onde A é um conjunto e $\mathrm{id}_A = \{(a, a) : a \in A\}$.

3) $(\mathbb{N}, \leq)$, onde $\leq$ é a relação "menor ou igual" usual em $\mathbb{N}$ (para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \leq x$, logo $\leq$ é reflexiva; para todos $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ e, portanto, $\leq$ é antissimétrica; para todos $x, y, z \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$, pelo que $\leq$ é transitiva).

4) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "divide" em $\mathbb{N}$ (porquê?).

5) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde A é um conjunto qualquer e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual (porquê).

Se não houver ambiguidade, representamos uma ordem parcial num conjunto A por $\leq$ e o respetivo c.p.o. por $(A, \leq)$.

notação:

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$:

i) escrevemos $a \leq b$ e lemos a **é menor ou igual a** b ou a **precede** b quando $(a, b) \in \leq$;

ii) escrevemos $a \not\leq b$ e lemos a **não é menor ou igual a** b quando $(a, b) \notin \leq$.

definição:

Dado um c.p.o. $(A, \leq)$ e dados $a, b \in A$:

i) dizemos que a **é menor do que** b ou que a **precede propriamente** b, escrevendo $a < b$, quando $a \leq b$ e $a \neq b$;

ii) dizemos que b **é sucessor de** a, ou que a **é sucedido por** b, ou que b **cobre** a**'** ou ainda que a **é coberto por** b, escrevendo $a << b$, quando $a < b$ e $\neg(\exists_{c \in A}\ (a < c \wedge c < b))$;

iii) dizemos que a, b são elementos **comparáveis** quando $a \leq b$ ou $b \leq a$;

iv) dizemos que a e b são **incomparáveis**, escrevendo $a || b$, quando $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$.

proposição:

Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subseteq A$. Então, a relação $\leq_X$ definida por $x \leq_X y \leftrightarrow x \leq y$ (para $x, y \in X$) é uma ordem parcial em X.

demonstração: exercício $\square$.

observação:

A relação de ordem parcial $\leq_X$ referida na proposição anterior é habitualmente designada por **ordem parcial induzida por $\leq$ em X** ou por **restrição de $\leq$ a X**.

proposição:

Seja $(A, \leq)$ um c.p.o.. Então, $(A, \leq^{-1})$ é também um c.p.o..

demonstração: exercício. $\square$

observação:

Quando $(A, \leq)$ é um c.p.o., é comum designar-se a relação inversa de $\leq$ por **relação dual** de $\leq$, denotando-a por $\leq_{dual}$, e designar-se o c.p.o. $(A, \leq_{dual})$ por **c.p.o. dual de** $(A, \leq)$.

exemplo: Os c.p.o.'s duais de $(\mathbb{N}, \leq)$ e $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ (com A um conjunto qualquer) são, respetivamente, $(\mathbb{N}, \geq)$ e $(\mathcal{P}(A), \supseteq)$.

observação:

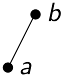
Um c.p.o. $(A, \leq)$, em que A é um conjunto finito não vazio, pode ser representado por meio de um **diagrama de Hasse**, como se descreve em seguida.

1) cada elemento $a \in A$ é representado por um ponto do plano:

$\bullet a$

2) se a e b são dois elementos de A tais que $a \leq b$, representa-se b acima de a; além disso, se $a << b$ unem-se estes dois pontos por um segmento de reta, por exemplo:

ou

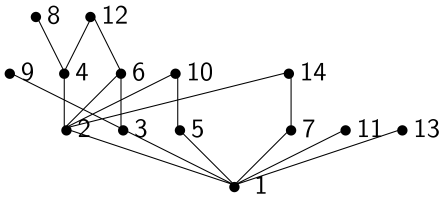


exemplo:

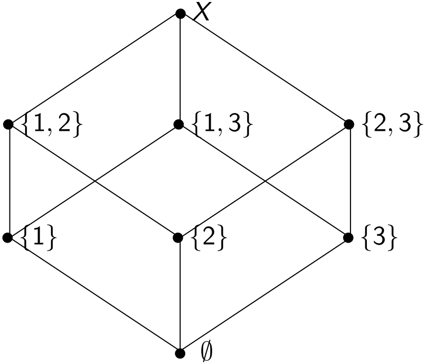
1) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ e $|$ a ordem parcial, definida por

$$x|y \quad \leftrightarrow \quad \exists_{k \in \mathbb{N}}\ y = kx \qquad (x, y \in A).$$

O c.p.o. $(A, |)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:



2) Seja $X = \{1, 2, 3\}$. O c.p.o. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse que se segue.



Dados um c.p.o. $(A, \leq)$ e X um suconjunto de A, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a X.

definição:

Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o., X um subconjunto de A e $m \in A$. Dizemos que m é:

1) um **elemento maximal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ m < x)$;

2) um **elemento minimal de** X quando $m \in X$ e $\neg(\exists_{x \in X}\ x < m)$;

3) **majorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ x \leq m$;

4) **minorante de** X quando $\forall_{x \in X}\ m \leq x$;

5) **supremo de** X quando m é majorante de X e $m \leq m'$, para qualquer m' majorante de X;

6) **ínfimo de** X quando m é minorante de X e $m' \leq m$, para qualquer m' minorante de X;

7) **máximo de** X quando m é majorante de X e $m \in X$;

8) **mínimo de** X quando m é minorante de X e $m \in X$.

O conjunto dos majorantes de X e o conjunto dos minorantes de X são representados por $\mathrm{Maj}(X)$ e $\mathrm{Min}(X)$, respetivamente.

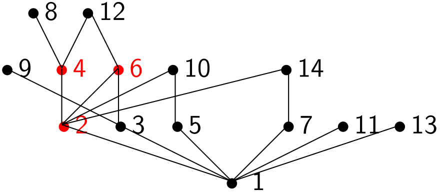
Caso exista, o supremo (resp.: ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto X de A é único e representa-se por $\sup(X)$ (resp.: $\inf(X)$, $\max(X)$, $\min(X)$).

Note-se que, em particular, A tem um máximo se existir $m \in A$ tal que $x \leq m$, para todo $x \in A$; A tem elemento mínimo se existir $m \in A$ tal que $m \leq x$, para todo $x \in A$.

exemplo:

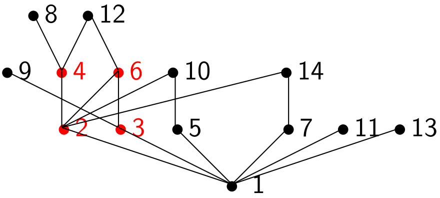
Consideremos, de novo, o c.p.o. $(A, |)$ do exemplo anterior.
Os elementos maximais de A são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14. O único elemento minimal de A é 1. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(A) = \{1\}, & \mathrm{Maj}(A) = \emptyset, & \inf(A) = 1, \\ \min(A) = 1, & \sup(A) \text{ não existe}, & \max(A) \text{ não existe}. \end{array}$$



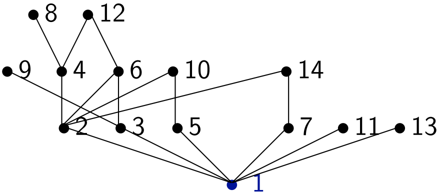
Se $X = \{2, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 é o único elemento minimal de X. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(X) = \{1, 2\}, & \mathrm{Maj}(X) = \{12\}, & \inf(X) = 2, \\ \min(X) = 2, & \sup(X) = 12, & \max(X) \text{ não existe.} \end{array}$$



Se $X = \{2, 3, 4, 6\}$, então os elementos maximais de X são o 4 e o 6; 2 e 3 são os elementos minimais de X. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(X) = \{1\}, & \mathrm{Maj}(X) = \{12\}, & \inf(X) = 1, \\ \min(X) \text{ não existe}, & \sup(X) = 12, & \max(X) \text{ não existe}. \end{array}$$



Se $X = A \setminus \{1\}$, então os elementos maximais de X são: 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14; os elementos minimais de X são: 2, 3, 5, 7, 11 e 13. Além disso,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{Min}(X) = \{1\}, & \mathrm{Maj}(X) = \emptyset, & \inf(X) = 1, \\ \min(X) \text{ não existe}, & \sup(X) \text{ não existe}, & \max(X) \text{ não existe}. \end{array}$$

proposição:

Num c.p.o. $(A, \leq)$, são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer $a, b \in A$:

1) $a \leq b$;

2) $\sup\{a, b\} = b$;

3) $\inf\{a, b\} = a$.

demonstração: exercício $\square$.

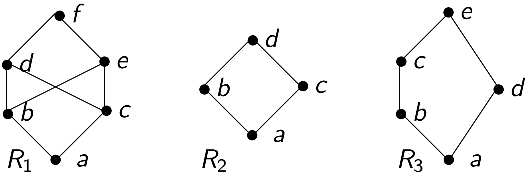
6.2 Reticulados

definição: Um c.p.o. $(A, \leq)$ diz-se um **reticulado** quando, para quaisquer $x, y \in A$, existem o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$.

O supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$ serão denotados por $x \vee y$ e por $x \wedge y$, respetivamente.

exemplo:

1) Consideremos os c.p.o.'s representados pelos seguintes diagramas:



R_1 não é reticulado pois, por exemplo, não existe supremo de $\{b, c\}$.

Os c.p.o.'s R_2 e R_3 são reticulados. Por exemplo, em R_2, $b \vee c = d$ e $b \wedge c = a$.

2) O c.p.o. $(\mathbb{N}, \leq)$ é um reticulado. De facto, para cada $x, y \in \mathbb{N}$, existem supremo e ínfimo de $\{x, y\}$, que são dados por $x \vee y = \max(\{x, y\})$ e $x \wedge y = \min(\{x, y\})$, respetivamente.

3) Dado um conjunto A qualquer, o c.p.o. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado. (Porquê?)

proposição:

Num reticulado $(A, \leq)$, as seguintes proposições são equivalentes, para quaisquer $a, b \in A$:

1) $a \leq b$; 2) $a \vee b = b$; 3) $a \wedge b = a$.

demonstração: imediata, a partir da proposição anterior. $\square$.

proposição:

Num reticulado $(A, \leq)$, as seguintes proposições são verdadeiras, para cada $a, b, c \in A$:

a) $a \wedge b \leq a$; b) $a \leq a \vee b$;

c) $a \wedge b = b \wedge a$; d) $a \vee b = b \vee a$; (comutatividade)

e) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$; f) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$; (associatividade)

g) $a \wedge a = a$; h) $a \vee a = a$; (idempotência)

i) $a \wedge (a \vee b) = a$; j) $a \vee (a \wedge b) = a$; (absorção)

k) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$; l) $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

demonstração: exercício. $\square$.

definição:

Um reticulado $(A, \leq)$ diz-se **distributivo** quando, para quaisquer $a, b, c \in A$,

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c) \ .$$

observação:

1) Atendendo a k) da proposição anterior, para mostrar que um reticulado $(A, \leq)$ é distributivo, basta mostrar:

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \ .$$

2) Mostra-se que um reticulado $(A, \leq)$ é **distributivo** se e só se, para quaisquer

$a, b, c \in A$,

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c) \ .$$

exemplo:

1) O reticulado R_3 do exemplo anterior não é distributivo. Por exemplo, neste reticulado tem-se $c \wedge (b \vee d) = c$, porém $(c \wedge b) \vee (c \wedge d) = b$.

2) O reticulado $(\mathbb{N}, \leq)$ é distributivo. (Porquê?)

3) Dado um conjunto A qualquer, o reticulado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é distributivo. (Porquê?)

6.3 Conjuntos totalmente ordenados e conjuntos bem ordenados

definição:

Uma ordem parcial $\leq$ num conjunto A diz-se uma **ordem total** ou **ordem linear** se quaisquer elementos a e b de A são comparáveis. Neste caso, $(A, \leq)$ diz-se uma **cadeia** ou um **conjunto totalmente ordenado**.

Um subconjunto X de A diz-se uma **cadeia em** $(A, \leq)$ ou um **subconjunto totalmente ordenado de** $(A, \leq)$ quando, para quaisquer $x, y \in X$, x e y são comparáveis.

exemplo:

1) $\{3, 6, 12\}$ e $\{2, 4\}$ são cadeias em $(\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12\}, |)$, mas este c.p.o. não é uma cadeia. Por exemplo, 4 e 10 são incomparáveis.

2) $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ são cadeias.

proposição:

Se $(A, \leq)$ é uma cadeia, então:
1) para todo o subconjunto X de A, $(X, \leq_X)$ é uma cadeia;
2) $(A, \leq_{dual})$ é uma cadeia.

demonstração: exercício. □

proposição: Se $(A, \leq)$ é uma cadeia, então $(A, \leq)$ é um reticulado distributivo.

demonstração: exercício. $\square$

observação: O recíproco da proposição anterior não se verifica. Por exemplo, quando A é um conjunto com pelo menos dois elementos, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ não é uma cadeia (porquê?), embora este c.p.o. seja um reticulado distributivo (como já observámos).

definição: Uma ordem parcial $\leq$ num conjunto A diz-se uma **boa ordem** quando cada subconjunto não vazio de A tem elemento mínimo. Neste caso, $(A, \leq)$ diz-se um **conjunto bem ordenado**.

exemplo:

1) O c.p.o. $(\{1, 2, 4, 8\}, |)$ é um conjunto bem ordenado, mas o c.p.o. $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |)$ não é um conjunto bem ordenado (porquê?).

2) $(\mathbb{N}, \leq)$ é um conjunto bem ordenado (qualquer subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ tem elemento mínimo).

3) $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathbb{R}_0^+, \leq)$ não são conjuntos bem ordenados. (Porquê?)

4) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_{lex})$, onde $\leq_{lex}$ é a **ordem lexicográfica**, dada por

$$(m, n) \leq_{lex} (m', n') \leftrightarrow (m < m' \vee (m = m' \wedge n \leq n')) \ ,$$

é um conjunto bem ordenado.

proposição: Se $(A, \leq)$ é um conjunto bem ordenado, então $(A, \leq)$ é uma cadeia.

demonstração: exercício. $\square$

observação: O recíproco da proposição anterior não se verifica. Por exemplo, considere-se o c.p.o. $(\mathbb{Z}, \leq)$.

teorema (indução sobre uma boa ordem): Seja $(A, \leq)$ um conjunto bem ordenado e $X \subseteq A$. Se

$$\forall_{x\in A}\big(\,\forall_y(y < x \rightarrow y \in X) \rightarrow x \in X\,\big)\ ,$$

então $X = A$.

observação: Mostra-se que o caso particular do teorema anterior em que $(A, \leq)$ é o conjunto bem ordenado $(\mathbb{N}, \leq)$ é equivalente ao princípio de indução nos naturais.

Princípio da Boa Ordenação: Todo o conjunto admite uma boa ordem.

observação: O Princípio da Boa Ordenação pode ser demonstrado a partir de outros princípios, tais como o **Axioma da Escolha** ou o **Lema de Zorn** (que, na verdade, são três princípios equivalentes). Contudo, tais demonstrações são não construtivas, no sentido em que, embora garantam a existência de uma boa ordem para um qualquer conjunto, por si só não fornecem um processo para a obtenção de tais boas ordens.