Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

—— prova escrita 2 — duas horas ———————————— 2022'23 ——

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (3 valores) Determine, ou justifique que não existem, os extremos locais da seguinte função
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+2y^2-2x-4y+1 \end{array},$$

2. (3 valores) Considere o seguinte integral duplo
$$\int_1^2 \int_{-x+2}^{-x^2+2x} x \, dydx.$$
   (a) Identifique e esboce a região de integração;
   (b) Inverta a ordem de integração do integral apresentado;
   (c) Calcule o valor do integral.

3. (3 valores) Passe para coordenadas polares o integral
$$\int\int_R f(x,y)d(x,y),$$
quando (não é para calcular os integrais)
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

4. (3 valores) Calcule o valor do integral que se segue:
$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_0^{x+y} x \, dzdydx.$$

5. (2 valores) Apresente um integral(sem o resolver), duplo ou triplo, que permita calcular o volume do sólido S, definido por
$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2+y^2, x^2+y^2 \leq 1, z \geq 0\right\}.$$

6. (2 valores) Use coordenadas esféricas para calcular o valor do integral
$$\int\int\int_Q \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \, d(x,y,z),$$
onde $Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z+1)^2 \leq 1\right\}$.

Fim

α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\text{sen}\,(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\,(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg}\,(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

$$(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$
$$\text{sen}\,(2\alpha) = 2\text{sen}\,(\alpha)\cos\,(\alpha)$$
$$\cos\,(2\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\text{sen}\,\alpha)^2$$

Coordenadas polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \end{cases}, \qquad (r,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[, \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r.$$

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\text{sen}\,\theta \\ \\ z = z \end{cases}, \qquad (r,\theta,z) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}, \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ \\ y = \rho\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}, \qquad (\rho,\theta,\varphi) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi], \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\text{sen}\,\varphi.$$