**Justifique, convenientemente, todas as respostas.**

**Nome:** **Número:**

Exercício 1. (3.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x\}.$$

(a) Faça um esboço dos seguintes conjuntos: (i) $A$; (ii) $\mathring{A}$; (iii) $\overline{A}$; (iv) fr(A).

(b) Diga, justificando, se o conjunto $A$ é compacto.

Exercício 2. (2 valores) Faça um esboço do domínio da função $f(x,y) = \dfrac{\log(y^2 - x^2)}{x^2 + (y-2)^2}$.

Exercício 3. (2 valores) Estude a existência do seguinte limite: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Exercício 4. (4.5 valores) Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} x-y & \text{se} \quad xy \neq 0, \\ 3 & \text{se} \quad xy = 0. \end{cases}$

(a) Estude a existência dos seguintes limites: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,-3)} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y)$.

(b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos onde a função $f$ é contínua.

Exercício 5. (7 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que $f$ é contínua no ponto $(0,0)$.

(b) Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ segundo qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(d) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$.

Exercício 6. (1 valor) Diga, justificando, se a seguinte proposição é **verdadeira** ou **falsa**:

Se $f \colon X \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais nulas em todos os pontos $(x, y) \in X$, então $f$ é uma função constante.

FIM