Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação

Análise

—— prova escrita 1 — duas horas —————————— 2023'24 ——

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (2 valores) Considere o conjunto A definido por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \text{ ou } (x-1)^2 + y^2 < 4\}.$$

   (a) Faça um esboço do conjunto A;

   (b) Identifique o interior, a aderência e a fronteira do conjunto A.

2. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

   (a) Mostre que a função f é contínua em $(0, 0)$.

   (b) Calcule, ou justifique que não existem, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

   (c) Mostre que a função f não é derivável em $(0, 0)$.

3. (5 valores) Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \cos(xy).$$

   (a) Identifique o domínio da função f;

   (b) Calcule as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

   (c) Justifique que f é derivável em $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$;

   (d) Determine $f'\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$;

   (e) Determine a taxa de variação instantânea da função f no ponto $\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$ e na direcção do vector $\vec{u} = (1, 1)$.

4. (3 valores) Considere a seguinte equação de três variáveis reais

$$\ln(xy) + \mathrm{e}^{xz} - z = 1. \qquad (1)$$

   (a) Mostre que a equação (1) define z como uma função de (x, y) para pontos "próximos" de $(x_0, y_0, z_0) = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$;

   (b) Determine $z'\left(2, \frac{1}{2}\right)$, sendo $z(x, y)$ a função implícita cuja existência foi provada no exercício anterior;

   (c) Sendo $z = z(x, y)$ a função implícita cuja existência foi provada na alínea (a), determine uma equação da recta tangente à curva de nível zero da função $z(x, y)$ no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

5. (2 valores) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\nabla f(2, 3, 0) = (-1, 2, 3)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = f\left(yx, x + y, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right)$.
   Determine:

   (a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 2)$;

   (b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 2)$.

Fim