Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Álgebra Linear LCC Exame de recurso 29/01/2020 Duração: 2h30

Nome: ______________________ **Número:** ________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de -0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & c \\ 0 & b \end{bmatrix}$ uma matriz real. Para quaisquer valores de a, b e c,

   - ☐ $A + A^T$ é simétrica.
   - ☐ $A^T A = AA^T$.
   - ☐ A comuta com $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.
   - ☐ $A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & c^2 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   - ☐ O sistema $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ é impossível.
   - ☐ $A - 2I_3$ é invertível.
   - ☐ O sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem solução única para qualquer $\boldsymbol{b}$.
   - ☐ $(A - 2I_3)^T$ é invertível.

3. Se A é uma matriz de ordem 4 tal que $\det(A) = 3$, então

   - ☐ $\det(-A) = -3$.
   - ☐ $\det\left(A^T A\right) = 1$
   - ☐ $\det(A^T) = \frac{1}{3}$.
   - ☐ $\det(A^{-1}A^2) = 3$.

4. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 e $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ e $\boldsymbol{v_3}$ três vetores de V linearmente independentes. Então

   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente dependente.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto gerador de V.
   - ☐ $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, 2\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}\}$ é um conjunto linearmente independente.

   fjaslghaslk

5. Seja $S = \langle (1,1,0), (0,2,0), (4,3,0) \rangle$. Então

   - ☐ $\dim(S) = 3$.
   - ☐ $(3,3,0) \in S$.
   - ☐ $(0,0,0) \notin S$.
   - ☐ $S = \mathbb{R}^3$.

6. Seja G uma aplicação linear cuja representação matricial é $A_G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.

- [ ] $G(x,y,z) = (x-y, y, -y+z)$, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
- [ ] Tem-se $H(1,1,1) = (-1,1,-3)$ para $H = G \circ G$.
- [ ] $(0,0,3) \notin \mathsf{Im}(G)$.
- [ ] $(1,1,1) \in \mathsf{Nuc}(G)$.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todas as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1.5 valores] Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ (sem calcular A^{-1}).

   (b) Determine a matriz X que satisfaz a equação

   $$AX - 2A = 3I + A,$$

   onde I é a matriz identidade de ordem 3.

2. [2.5 valores] Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, seja $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & \beta \\ -1 & 1 & \alpha & -\beta \end{array}\right]$ a matriz ampliada de um sistema com 3 incógnitas e 3 equações.

   (a) Discuta a existência e unicidade de soluções do sistema, em função dos parâmetros α e β.

   (b) Use o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema quando

   i. $\alpha = 0$ e $\beta = 0$;

   ii. $\alpha = -5$ e $\beta = 2$.

3. [1.5 valores] Considere a seguinte matriz

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Calcule $\det(A)$.

   Dada uma matriz invertível P, qual o valor de $\det(PA^{-1}P^{-1})$?

4. [1.5 valor] Considere, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o conjunto de vetores

$$W = \{(1,0,2), (-1,2,-3), (1,4,k)\}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Determine os valores de k para os quais W é uma base de $\mathbb{R}^3$.

5. [2 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear definida por

$$T(x,y,z,w) = (x+2y-w, -x+3y+z+w).$$

(a) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.

(b) Determine uma base para $\mathsf{Im}(T)$.

6. [2 valores] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Quais os valores próprios da matriz $A - I_3$?

(c) Verifique que $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ é um vetor próprio de A e diga a que valor próprio está associado.

7. [1.5 valores] Uma matriz $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se de rotação se $R^{-1} = R^T$ e $\det(R) = 1$, onde R^T denota a matriz transposta de R.

Dada uma matriz de rotação $R \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, prove que existem vetores não nulos $v \in \mathbb{R}^3$ que são fixados por R, ou seja, tais que $Rv = v$.

Sugestão: Observe que v será um vetor próprio de R e use a relação de valores e vetores próprios com o conceito de determinante.