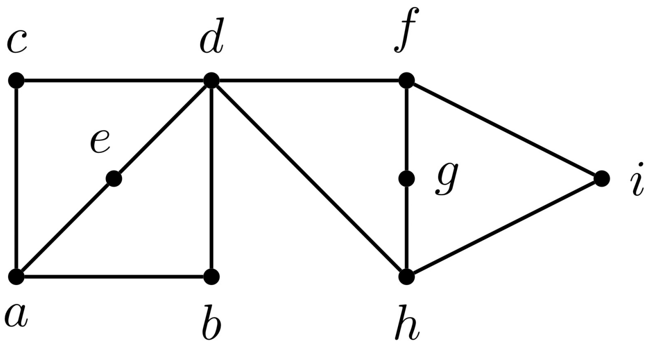
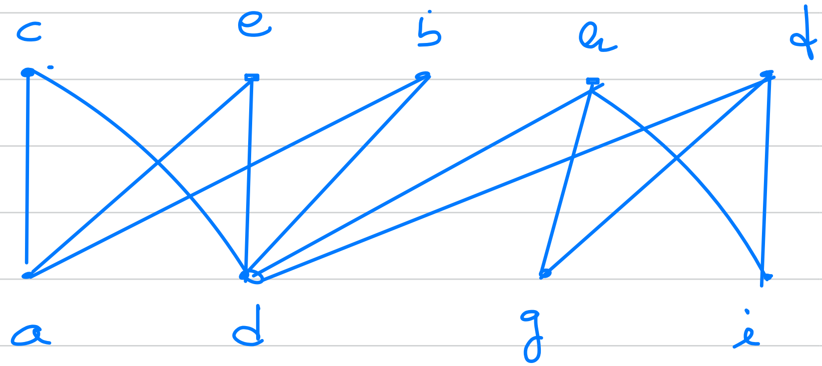
11. Dos seguintes grafos, diga quais são bipartidos, indicando uma partição do conjunto dos seus vértices

(f) 



Este grafo é uma representação do grafo proposto como grafo bipartido.

15. Qual o número mínimo de vértices de um grafo simples com 200 arestas? Porquê?

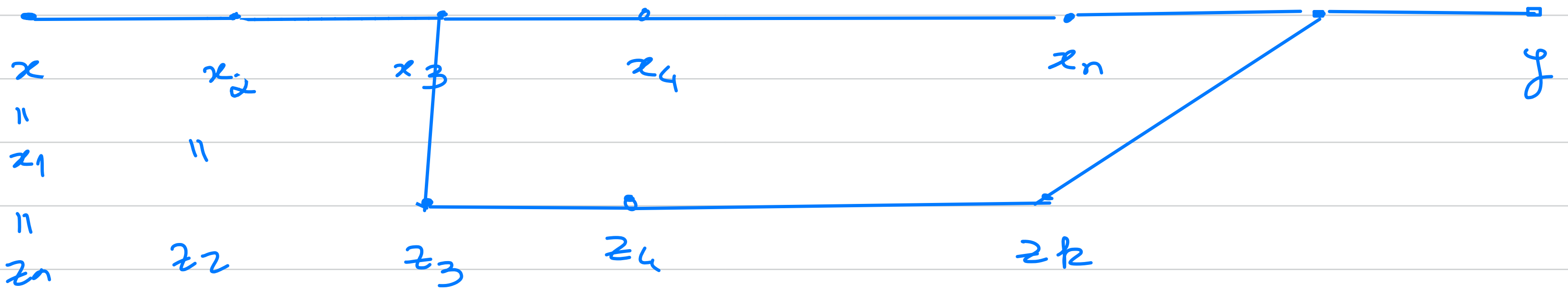
O grafo K_n tem $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas

O grafo K_{20} tem $\frac{20 \times 19}{2} = 190$ arestas

O grafo K_{21} tem $\frac{21 \times 20}{10} = 210$ arestas

Para construir o grafo pretendido consideramos um grafo com 21 vértices de tal forma que 20 desses vértices formam K_{20} e o vigésimo primeiro vértice incide em 20 dos outros vértices, obtendo-se assim $190 + 20 = 200$ arestas.

9 (b) Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $x, y \in V$. Mostre que se existem dois caminhos elementares distintos entre x, y, então G admite um ciclo.



Suponhamos que temos dois caminhos

$$C_1 = \langle x, x_2, x_3, \ldots, x_n, y \rangle$$
$$C_2 = \langle x, z_2, z_3, \ldots, z_k, y \rangle$$

Como $C_1 \neq C_2$ existem $x_i = z_j$ e $x_{i+1} \neq z_{j+1}$

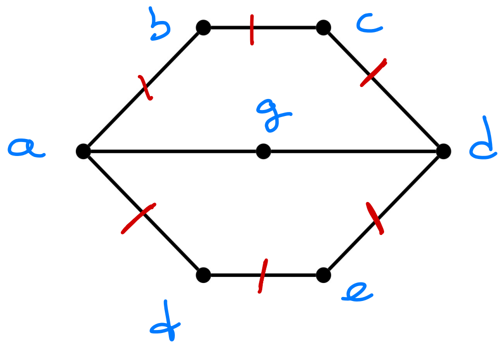
Escolhemos os próximos vértices x_r e z_s tais que

$x_r = z_s$ (eventualmente $x_r = z_s = y$)

Assim $\langle x_i = z_j, x_{i+1}, \ldots, x_r = z_s, z_{s-1}, z_{s-2}, \ldots, z_j = x_i \rangle$

é um ciclo no grafo G.

41. Mostre que o seguinte grafo não é euleriano nem hamiltoniano:



O grafo não é euleriano porque o vértice a assinalado tem grau 3 e um grafo euleriano é tal que todos os seus vértices têm grau par.

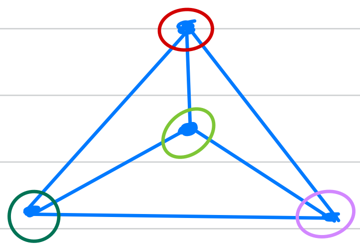
Suponhamos, por redução absurdo, que o grafo é hamiltoniano. Então existe um ciclo hamiltoniano, ou seja, um ciclo que percorre todos os vértices. Como b, c, e, f têm grau 2 então as arestas $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{c,d\}$, $\{d,e\}$, $\{e,f\}$, $\{f,a\}$ fazem parte do ciclo hamiltoniano.

Mas estas arestas formam o ciclo $\langle a, b, c, d, e, f, a \rangle$, ciclo esse que não percorre o vértice g. Absurdo.

Logo o grafo não é hamiltoniano.

43. Construa um grafo planar conexo cujo número cromático seja 4.

Basta considerar K_4



24. O *complemento* de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, onde

$$\overline{V} = V \text{ e } \overline{E} = \{\{x, y\} \subseteq V : x \neq y, \{x, y\} \notin E\}.$$

(a) Determine o complemento de $K_{3,5}$.

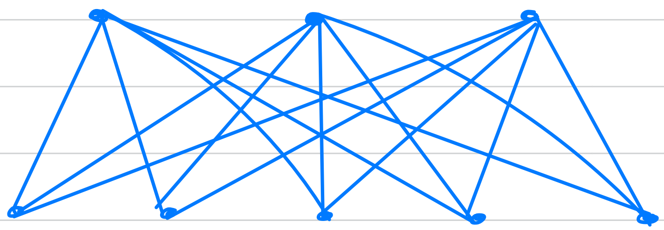
(b) Determine $\overline{G}$, onde G é um grafo desconexo com duas componentes conexas que são os grafos K_3 e K_5.

(c) Dado o grafo ciclo C_5, mostre que $\overline{C_5}$ e C_5 são o mesmo grafo.

(d) Considere o grafo linha P_3. Mostre que $\overline{P_3}$ e P_3 são o mesmo grafo.

(e) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "O complemento de um grafo conexo é um grafo conexo.".

a)

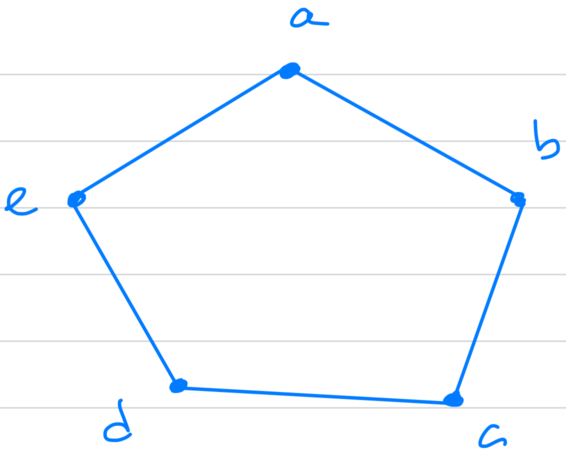


$K_{3,5}$

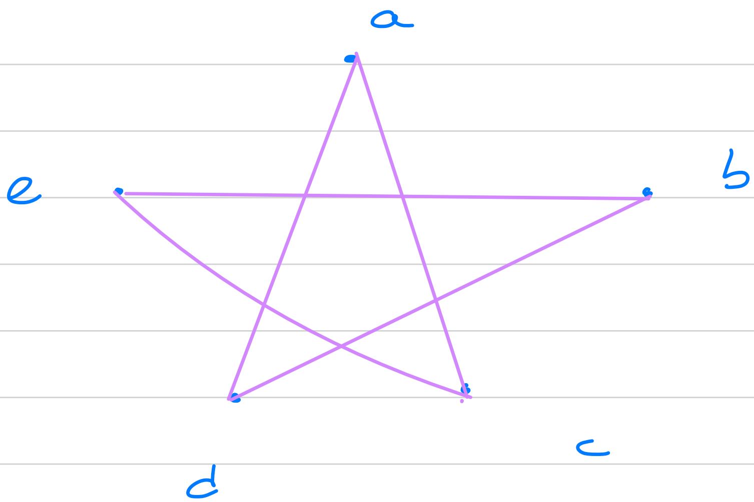
O grafo $\overline{K_{3,5}}$ é o grafo que tem como componentes conexas K_3 e K_5.

b) $K_{3,5}$

c)

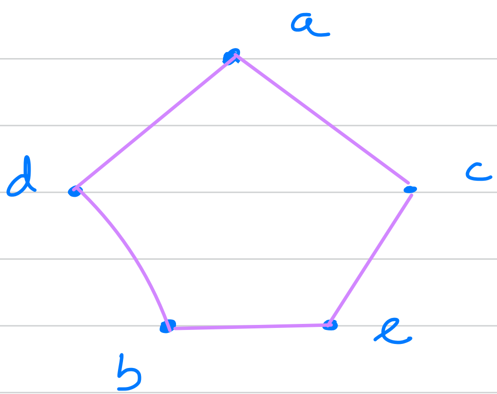


C_5



$\overline{C_5}$

||



C_5

14. Prove o Teorema da Amizade: "Em toda a cidade com pelo menos 2 habitantes, residem 2 pessoas com o mesmo número de amigos que habitam nessa mesma cidade."

Representamos os habitantes da cidade por vértices e dizemos que dois vértices são adjacentes se os habitantes correspondentes são amigos. Seja $G = (V, E)$ tal grafo.

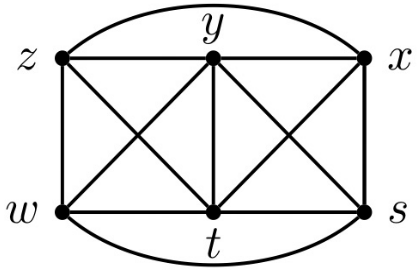
Devemos mostrar que existem $v_1, v_2 \in V$ tais que $grau(v_1) = grau(v_2)$.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que o grau de todos os vértices é diferente. Seja n o número de vértices. Se os graus são todos diferentes e como o grafo é simples então os graus são necessariamente $0, 1, 2, \ldots, n-1$

Se temos um vértice de grau $n-1$ então esse vértice é adjacente a todos os outros. Mas tal não pode acontecer pois temos um vértice de grau 0.

Assim existem vértices v_1 e v_2 com $grau(v_1) = grau(v_2)$

47. Considere o grafo G representado por



(a) Mostre que G não é planar.

(b) Mostre que $\chi(G) = 4$.

(c) Verifique se G é bipartido.

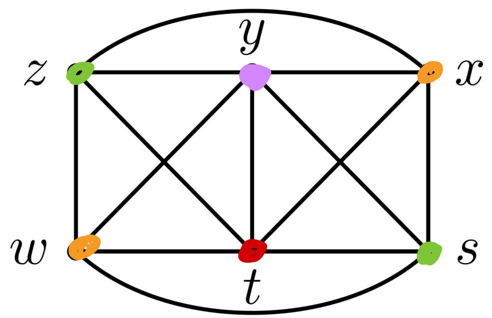
(d) O *complemento* de um grafo $H = (V, E)$ é um grafo $\overline{H} = (\overline{V}, \overline{E})$, onde

$$\overline{V} = V, \text{ e } \overline{E} = \{\{a, b\} : a \neq b, \{a, b\} \notin E\}.$$

Determine o complemento de G.

b)

grau	vértice
5	y, t
4	z, x, s, w



Temos então uma coloração com 4 cores logo $\chi(G) \leq 4$.
Como K_4 é subgrafo de G então $\chi(G) \geq 4$
Logo $\chi(G) = 4$.

38. Para que valores de $m, n \in \mathbb{N}$ o grafo $K_{m,n}$ é euleriano?

No grafo $K_{m,n}$ o grau dos vértices ou é m ou é n

Logo para que $K_{m,n}$ seja euleriano temos necessariamente

m e n pares.

35. Seja G um grafo conexo planar com pelo menos 3 vértices. Mostre que G tem pelo menos um vértice de grau não superior a 5.

Sabemos que para um grafo conexo planar $3v - a \geq 6$

Suponhamos por redução ao absurdo que todos os vértices de G têm grau superior a 5, ou seja, maior ou igual a 6.

Então $$\sum_v \text{grau}(v) \geq 6v$$

Por outro lado $$\sum_v \text{grau}(v) = 2a$$

Logo $2a \geq 6v \iff 3v - a \leq 0$. Mas isto contradiz o facto de para grafos conexos planares $3v - a \geq 6$.