Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	6 de janeiro de 2024

Teste de Álgebra Linear CC

Duração: 2h15min

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

	V	F
1. Para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, se A é uma matriz simétrica e B é uma matriz antissimétrica, então BAB é uma matriz simétrica.	☐	☐
2. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $car(A) = car(B) = n$, então $A + B$ é invertível.	☐	☐
3. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $A^2 = B^2 = I_n$, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = BA$.	☐	☐
4. O conjunto $\{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,\vert\, A \text{ é simétrica}\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.	☐	☐
5. Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, ..., v_{n-1}, v_n \in V$, se $V =< v_1, \ldots, v_{n-1} >$, então $V =< v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n >$.	☐	☐
6. Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2 \in V \setminus \{0_V\}$, se existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0_V$, então a sequência (v_1, v_2) é linearmente independente.	☐	☐
7. Existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(2, 2) = (1, 2, 3)$ e $f(3, 3) = (0, 1, 0)$.	☐	☐
8. Para qualquer matriz A do tipo 5×5, se $\det A = 1$, então $car(A) \neq 4$.	☐	☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & k+2 \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } k \in \mathbb{R}, \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Justifique que a matriz A_k é invertível se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

   (b) Utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine a inversa de A_1.

   (c) Justifique que, para qualquer $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, o sistema $A_0 x = b$ ou é ímpossível ou é possível indeterminado. Dê exemplo de $b \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ tal que o sistema $A_0 x = b$ seja:

      i. ímpossível;

      ii. possível indeterminado.

2. Considere as bases de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)),\\ \mathcal{B}' &= ((-1,1,1),(0,2,0),(1,0,0))\end{aligned}$$

e a base de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B}'' = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que, para todo $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$g(a,b,c,d) = (3a + 2b - c - 2d, 2a + b - c - d, 2a - 2c).$$

(b) Determine uma base de $\operatorname{Nuc} g$ e a dimensão de $\operatorname{Im} g$. Diga se g é injetiva e se é sobrejetiva.

(c) Determine um subespaço S de $\mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Nuc} \mathrm{g} \bigoplus S = \mathbb{R}^4$.

(d) Determine as matrizes $M(id^3_{\mathbb{R}};\mathcal{B},\mathcal{B}')$ e $M(g;\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$.

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\det A$.

(b) Justifique que B é invertível e calcule $\det(2B^{-2}B^TA^2)$.

4. Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e h o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$M(h,\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que $(-1,0,1)$ é um vetor próprio de h e indique a que valor próprio está associado.

(b) Justifique que -2 é um valor próprio de h e determine uma base do subespaço próprio de h associado a este valor próprio.

(c) Justifique que h é diagonalizável. Dê exemplo de uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(h;\mathcal{B}',\mathcal{B}')$ seja diagonal.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,5$.

Grupo II: 1.$(1,0+1,5+1,5)$; 2.$(1,25+2,0+1,25+1,25)$; 3. (1,25+1,25); 4.$(1,0+1,5+1,25)$.