Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
6 de novembro de 2023

1º teste de Álgebra Linear CC

duração: 1h50min

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Em cada uma das questões deste grupo, indique se cada uma das afirmações é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

V F

1. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se as matrizes A e B são antissimétricas, então a matriz $AB + BA$ é antissimétrica. ☐ ☒

   Se as matrizes A e B são antissimétricas, tem-se $A^T = -A$ e $B^T = -B$. Então

   $$\begin{aligned}(AB+BA)^T &= (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T \\ &= (-B)(-A) + (-A)(-B) = BA + AB = AB + BA.\end{aligned}$$

   Logo, a matriz $AB + BA$ não é necessariamente antissimétrica.

   Por exemplo, se $A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, as matrizes A e B são antissimétricas, mas a matriz $AB + BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ não é antissimétrica.

2. Para quaisquer matrizes reais A e B, se a matriz $A + B$ está definida, então a expressão AB^TA define uma matriz. ☒ ☐

   Seja A uma matriz do tipo $p \times q$, $p, q \in \mathbb{N}$. Se a expressão $A + B$ está definida, então a matriz B é do mesmo tipo da matriz A. Logo, B^T é uma matriz do tipo $q \times p$. Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B^T, então o produto AB^T está definido. Considerando que AB^T é uma matriz do tipo $p \times p$, o número de colunas de AB^T é igual ao número de linhas de A e, portanto, a expressão AB^TA define uma matriz.

3. Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, se $car(A) = car(B) = 3$, então a matriz $A + B$ é invertível. ☐ ☒

   Sejam

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Então $car(A) = car(B) = 3$, mas $A + B = 0_{3\times 3}$ não é invertível.

4. Para quaisquer matrizes invertíveis $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tem-se $((AB)^{-1})^2 = (B^{-1})^2(A^{-1})^2$. ☐ ☒

   Para quaisquer matrizes invertíveis $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tem-se $(AB)^{-1} = B^1A^{-1}$. Logo, para quaisquer matrizes invertíveis $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $((AB)^{-1})^2 = B^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Considerando que o produto de matrizes não é comutativo, nem sempre se tem $B^{-1}A^{-1}B^{-1}A^{-1} = (B^{-1})^2(A^{-1})^2$.

Por exemplo, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

tem-se

$$((AB)^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (B^{-1})^2(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, se o sistema $Bx = 0_{2\times 2}$ é determinado, então o sistema $ABx = 0_{2\times 2}$ é determinado. ☐ ☒

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o sistema $Bx = 0$ é possível determinado e o sistema $ABx = 0$ é possível indeterminado.

6. Existem matrizes $A \in \mathcal{M}_{5\times 3}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$ tais que o sistema $Ax = 0$ é possível determinado e o sistema $Ax = b$ é impossível. ☒ ☐

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então o sistema $Ax = 0$ é possível determinado e o sistema $Ax = b$ é impossível.

7. O conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. ☐ ☒

Sejam $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$, $v = (1, 0, 0)$ e $u = (0, 1, 0)$. Então $u, v \in W$, mas $u + v = (1, 1, 0) \notin W$.

8. Para qualquer espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ e para quaisquer $v_1, v_2, v_3 \in V$, se a sequência (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, então $(v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_3)$ é linearmente independente. ☐ ☐

Admitamos que a sequência (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente. Então, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2 + v_3) + \alpha_3 v_3 = 0_V &\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + \alpha_2 v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3 = 0_V \\ &\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Logo, a sequência $(v_1, v_1 + v_2 + v_3, v_3)$ é linearmente independente.

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que a matriz A é invertível e determine uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$3X - ((A^{-1})^T B)^T = I_3.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{l_2 \to l_2 - 2l_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 4l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada com linhas 3 não nulas e equivalente por linhas à matriz A, logo $car(A) = 3$. Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $car(A) = 3$, então A é invertível.

No sentido de determinarmos a inversa de A, aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|I_3]$

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{l_2 \to l_2 - 2l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 4l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to \frac{1}{3}l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Dos cálculos anteriores concluímos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Então

$$3X - ((A^{-1})^T B)^T = I_3 \Leftrightarrow 3X - B^T A^{-1} = I_3 \Leftrightarrow 3X = I_3 + B^T A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3X = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

Logo, $X = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais correspondente à equação matricial $A_\alpha x = b_\alpha$, onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ -\alpha & \alpha & -4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \\ 2\alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta o sistema $A_\alpha x = b_\alpha$ em função do parâmetro α.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A_\alpha|b_\alpha]$, temos

$$[A_\alpha|b_\alpha] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 1 & \alpha-1 & \alpha+1 & \alpha \\ -\alpha & \alpha & -4 & 2\alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 + \alpha l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 \end{array}\right] = [U_\alpha|c_\alpha].$$

O sistema $A_\alpha x = b_\alpha$ é:

- possível se e só se $car(A_\alpha) = car([A_\alpha|b_\alpha])$;
- possível determinado se e só se $car(A_\alpha) = car([A_\alpha|b_\alpha]) = 3 = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incógnitas;
- possível indeterminado se e só se $car(A_\alpha) = car([A_\alpha|b_\alpha]) < 3 = \text{n}^{\underline{\text{o}}}$ incógnitas.

Então, considerando a matriz em escada $[U_\alpha|c_\alpha]$ (equivalente por linhas à matriz $[A_\alpha|b_\alpha]$), concluímos que o sistema $A_\alpha x = b_\alpha$ é:

- impossível, para qualquer $\alpha \in \{0, -2\}$;
- possível determinado, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -2, 2\}$;
- possível indeterminado, para $\alpha = 2$.

(b) Considere $\alpha = 2$. Utilizando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine o conjunto de soluções do sistema $A_2 x = b_2$.

Considerando $\alpha = 2$ e os cálculos da alínea anterior, concluímos que a matriz $[A_2 \,|\, b_2]$ é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Então o sistema $A_2 x = b_2$ é equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \end{cases},$$

donde obtemos

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} \text{Sol}_{(A_2x=b_2)} & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}c, b = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c, c \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}c, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}c, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, c \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

3. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços vetoriais

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 5y = 0\}, \quad G =< (5,1,0), (0,0,2), (10,2,-6) >,$$

$$H =< (1,1,0), (0,1,0) > .$$

(a) Mostre que $F = G$.

Temos

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 5y = 0\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 5y\} \\ & = & \{(5y,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y(5,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (5,1,0), (0,0,1) > . \end{array}$$

Então, como $(0,0,2) = \alpha(5,1,0) + \beta(0,0,1)$ com $\alpha = 0$, $\beta = 2$ e $\beta \neq 0$, segue que

$$< (5,1,0), (0,0,1) >=< (5,1,0), (0,0,2) > .$$

Por último, atendendo a que $(10,2,-6) = 2(5,1,0) - 3(0,0,2)$, concluímos que

$$< (5,1,0), (0,0,2) >=< (5,1,0), (0,0,2), (10,2,-6) > .$$

Portanto, $F = G$.

(b) Determine uma base de $F + H$ e a dimensão de $F \cap H$.

Da alínea anterior, sabe-se que $F =< (5,1,0), (0,0,1) >$. Logo

$$F + H =< (5,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (0,1,0) > .$$

Como $(5,1,0) = 0(0,0,1) + 5(1,1,0) - 4(0,1,0)$, então

$$F + H =< (0,0,1), (1,1,0), (0,1,0) > .$$

A sequência $((0,0,1), (1,1,0), (0,1,0))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(0,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Portanto, $((0,0,1), (1,1,0), (0,1,0))$ é uma base de $F + G$.

No sentido de determinar $\dim F \cap H$, comecemos por determinar $\dim F$ e $\dim H$.

Como $F =< (5,1,0), (0,0,1) >$ e a sequência $((5,1,0), (0,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(5,1,0) + \beta(0,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

então $((5,1,0), (0,0,1))$ é uma base de F e , portanto, $\dim F = 2$.

Relativamente a H, também temos $\dim H = 2$, pois $H =< (1,1,0), (0,1,0) >$ e a sequência $((1,1,0), (0,1,0))$ é linearmente independente, uma vez que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo, $((1,1,0), (0,1,0))$ é uma base de H.

Então, como $\dim(F + H) = \dim F + \dim H - \dim F \cap H$, $\dim F = \dim H = 2$ e $\dim F + H = 3$ (vimos anteriormente que uma base de $F + H$ tem 3 vetores), concluímos que $\dim F \cap H = 1$.

(c) Determine um subespaço U de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbb{R}^3 = F \bigoplus U$.

Pretendemos determinar um subsepaço U de $\mathbb{R}^3$ que seja um suplementar de F relativamente a $\mathbb{R}^3$, ou seja, tal que $F + U = \mathbb{R}^3$ e $F \cap U = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Sejam $u_1 = (5,1,0)$, $u_2 = (0,1,0)$ e $\mathcal{B} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Considerando que $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, tem-se $\mathbb{R}^3 =< (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) >$, isto é, $\mathbb{R}^3 =< (1,0,0), u_2, (0,0,1) >$. Considerando que $u_1 = 5(1,0,0) + 1.u_2 + 0(0,0,1)$ e $5 \neq 0$, segue que $\mathbb{R}^3 =< u_1, u_2, (0,0,1) >$. Uma vez que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $\mathbb{R}^3 =< u_1, u_2, (0,0,1) >$, a sequência $(u_1, u_2, (0,0,1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Logo, sendo $U =< (0,0,1) >$, tem-se $F + U = \mathbb{R}^3$ e $F \cap U = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: $1.(2,75)$; $2.(2,75 + 1,5)$; $2.(2,0 + 3,0 + 2,0)$.