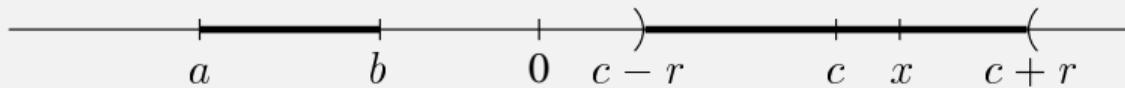


Reta real

A identificação entre os números reais e os pontos de uma reta, designada por *reta real*, permite obter uma representação geométrica dos números reais, muito útil na compreensão e visualização de diversos conceitos envolvendo números reais.

A associação que a cada número real faz corresponder um e um só ponto da reta, permite também usar uma linguagem geométrica, em que “*ponto*” passará a significar “*número real*”, dizer que “ $x < y$ ” será dizer que “ x está à esquerda de y ”

Nesta representação, dados $x, y \in \mathbb{R}$, com $x < y$, o intervalo $[x, y]$ será representado pelo segmento de reta cujos extremos são os pontos x e y .



- Na Figura os pontos a e b representam números reais (identificados também por a e b) tais que $a < b < 0$, uma vez que a está à esquerda de b , estando este, por sua vez, à esquerda de zero.
- O segmento de reta de extremos a e b , marcado com traço mais carregado , representa o intervalo $[a, b]$.

Recordemos agora a noção de *valor absoluto* ou *módulo* de um número real.

Definição

Dado $x \in \mathbb{R}$, $|x|$ representa o **valor absoluto** ou **módulo** de x , definido da seguinte forma:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Nota

Dado $x \in \mathbb{R}$:

- $|x| \geq 0$;
- $|x| = \max\{x, -x\}$;
- $-|x| \leq x \leq |x|$.

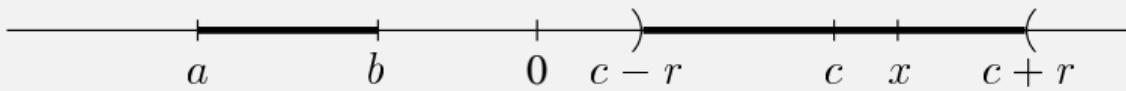
Proposição

Dados $x, y, r \in \mathbb{R}$ com $r \geq 0$:

- $|x| \leq r$ sse $-r \leq x \leq r$;
- $|x| \geq r$ sse $x \leq -r \vee x \geq r$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- $|xy| = |x||y|$;
- $|x - y| \geq ||x| - |y||$;
- $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Definição

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, define-se **distância entre x e y** como sendo $|x - y|$.



Na figura está representado o intervalo $]c - r, c + r[$, i.e., o intervalo aberto centrado em c e de raio (semi-amplitude) $r > 0$.

Este intervalo é o lugar geométrico dos pontos da reta cuja distância a c é menor do que r ou, dito de forma equivalente, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$.

Definição

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que a é

- **majorante de X** se $\forall x \in X \quad x \leq a$;
- **minorante de X** se $\forall x \in X \quad a \leq x$;
- **máximo de X** se a é majorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \max X$;
- **mínimo de X** se a é minorante de X e $a \in X$. Representa-se $a = \min X$.

Nota

Observe-se que, se a é majorante de X , qualquer elemento maior do que a é também majorante de X . Analogamente, se a é minorante de X , qualquer elemento menor do que a é minorante de X .

Definição

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ diz-se **majorado** ou **limitado superiormente**, respetivamente **minorado** ou **limitado inferiormente**, se possui algum majorante, respetivamente minorante. Se X é simultaneamente majorado e minorado diz-se **limitado**.

Definição

Seja X um subconjunto de \mathbb{R} . Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **supremo de X** e representa-se $a = \sup X$, se verifica as duas condições seguintes:

- ① $\forall x \in X \quad x \leq a \quad (a \text{ é majorante de } X);$
- ② se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X, x \leq b$, então $a \leq b \quad (a \text{ é o menor dos majorantes}).$

Definição

Seja X um subconjunto de \mathbb{R} . Um elemento $a \in \mathbb{R}$ diz-se **ínfimo de X** e representa-se $a = \inf X$, se verifica as duas condições seguintes:

- ① $\forall x \in X \quad a \leq x \quad (a \text{ é minorante de } X);$
- ② se $b \in \mathbb{R}$ é tal que $\forall x \in X, \ b \leq x$, então $b \leq a \quad (a \text{ é o maior dos minorantes}).$

Exemplo

Consideremos o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 3\}$.

X é limitado: 0 é minorante e 3 é majorante de X .

O mínimo de X é 0, logo $\inf X = 0$.

$\sup X = 3$ (porquê?) e X não tem máximo.

Definição

Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, um ponto $y \in \mathbb{R}$ diz-se:

- **ponto de acumulação de X** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\setminus \{y\}) \cap X \neq \emptyset$$

- **ponto de acumulação à direita, de X** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad]y, y + \varepsilon[\cap X \neq \emptyset$$

- **ponto de acumulação à esquerda, de X** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad]y - \varepsilon, y[\cap X \neq \emptyset$$

- **ponto isolado de X** se pertencer a X mas não for ponto de acumulação de X , isto é,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap X = \{y\}$$

Definição

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Designa-se por **derivado de X** e representa-se por X' , o conjunto dos pontos de acumulação de X .

X'_+ representa o conjunto dos pontos de acumulação à direita e X'_- representa o conjunto dos pontos de acumulação à esquerda, de X ;

Exemplo

Considerando o conjunto $A = [-1, 1[\cup \{2\} \cup ([3, 4] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, tem-se:

$$A'_- =] -1, 1] \cup]3, 4];$$

$$A'_+ = [-1, 1[\cup [3, 4[;$$

$$A' = A'_- \cup A'_+ = [-1, 1] \cup [3, 4].$$