Universidade do Minho **Cursos: LMAT & LCC**
DMAT **Probabilidades e Aplicações** **2025/2026**

Teste I - A || 28 de outubro 2025

Nome: **Nº** **Curso:**

Responda à questão 4 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do R que utilizar. Duração: 2h.

---

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar um lançamento de uma moeda equilibrada e, de seguida, efetuar dois lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.

   (a) Identifique, justificando, o espaço de probabilidade associado a esta experiência.

   (b) Indique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis (mas não impossíveis) decorrentes desta experiência. Na justificação, **identifique claramente o subconjunto do espaço amostral a que corresponde cada um dos acontecimentos que indicou**.

   (c) Usando a definição, diga se os seguintes acontecimentos, E, F e G, formam uma família de acontecimentos independentes:

   E: "saiu cara no lançamento da moeda",
   F: "saiu face par no primeiro lançamento do dado",
   G: "a soma das faces obtidas nos dois lançamentos do dado foi ímpar".

2. Uma aldeia remota de Portugal tem apenas 20 habitantes, dos quais 10 são `idosos` (i.e., com pelo menos 65 anos), 6 são `adultos de meia-idade` (i.e., com mais de 35 e menos de 65 anos) e os restantes são `jovens` (i.e., com idade inferior ou igual a 35 anos). Todos os habitantes foram submetidos a uma consulta para averiguar sobre o respetivo estado de saúde, que poderia ser considerado como `Bom` ou `Mau`. Dos resultados das consultas médicas, sabe-se o seguinte:
   - o estado de saúde foi considerado `Bom` em 75% dos `jovens`;
   - o estado de saúde foi considerado `Bom` em 50% dos `adultos de meia-idade`;
   - todos os `idosos` tiveram estado saúde considerado `Mau`.

   (a) Escolheu-se, ao acaso, um habitante desta aldeia.

   i. Determine a probabilidade de o seu estado de saúde ser considerado `Mau`.

   ii. Sabendo que o seu estado de saúde foi considerado `Mau`, qual a probabilidade de se ter escolhido um habitante não `idoso`? Justifique.

   iii. Sabendo que o seu estado de saúde foi considerado `Bom` qual a probabilidade de se ter escolhido um habitante com mais de 35 anos? Justifique.

   (b) Escolheram-se, ao acaso e com reposição, 8 habitantes desta aldeia.

   i. Determine a probabilidade de se ter escolhido pelo menos 4 `idosos`.

   ii. Sabendo que foram escolhidos mais de 2 `idosos`, qual a probabilidade de terem sido escolhidos, no máximo, 4 habitantes com menos de 65 anos? Justifique.

3. Suponha que tem um dado, com as faces numeradas de 1 a 6, mas não equilibrado. Este dado é tal que, num lançamento, a probabilidade de sair face par é o dobro da de sair face ímpar. Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar um lançamento deste dado e seja $X : \{1,2,3,4,5,6\} \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$X(\omega) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad \omega \text{ é par} \\ 0 & \text{se} \quad \omega \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

   (a) Mostre que X é uma v.a.r. discreta e determine a sua função de distribuição.

   (b) Diga, justificando, se $X \sim Bin(1, \frac{2}{3})$. *(v.s.f.f.)*

Cotação: **1)** 6.5 [2.0+1.5+3.0]; **2)** 7.5 [a) 4.5, b) 3.0]; **3)** 3.0 [2.0+1.0]; **4)** 3.0

4. Considere Ω um conjunto não-vazio e $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade.

(a) Seja $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $P(G_n) = \frac{1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}$, e seja F um elemento de $\mathcal{A}$ tal que $P(F) = \frac{1}{2}$. Mostre que, se, qualquer que seja o $n \in \mathbb{N}$, os dois acontecimentos F e G_n forem independentes, então

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (G_n \cap F)\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Nota: Pode usar, sem demonstrar, que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

(b) Considere agora Ψ um conjunto não-vazio, $g : \Omega \to \Psi$ uma função e $g(\mathcal{A})$ a família de subconjuntos de Ψ definida por

$$g(\mathcal{A}) = \{g(E) : E \in \mathcal{A}\}.$$

Diga, justificando, se $g(\mathcal{A})$ é sempre uma σ-álgebra sobre Ψ.

(c) Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma v.a.r. e seja λ uma qualquer constante real. Mostre que a função λX também é uma v.a.r..