Departamento de Matemática | Universidade do Minho

Tópicos de Matemática | Exame de recurso – 8 fev 2023

Lic. em Ciências de Computação - 1º ano | duração: duas horas

Nome ______________________________ Número ____________

GRUPO I. Em cada uma das questões seguintes, diga se é verdadeira (V) ou falsa (F) a proposição, assinalando a opção conveniente:

1. Para quaisquer proposições p, q, r e s, se as proposições $q \Rightarrow r$, $q \vee p \Rightarrow s$ e $\sim s$ são verdadeiras, então, a proposição r é verdadeira. V☐ F☐
2. O contrarrecíproco de "Se faço o exame e tiro positiva, então, aprovo à unidade curricular" é logicamente equivalente a "Se falto ao exame ou tiro negativa, então, reprovo à unidade curricular." V☐ F☐
3. Para toda a condição $p(n)$, em $\mathbb{N}$, se $p(n)$ é hereditária e $p(2)$ e $p(4)$ são proposições verdadeiras, então $p(3) \Rightarrow p(1)$ é uma proposição verdadeira. V☐ F☐
4. Para quaisquer conjuntos A, B e C, $(A \cup B) \cap C \subseteq A \cup (B \cap C)$. V☐ F☐
5. Se o produto cartesiano de dois conjuntos tem exatamente 7 elementos, então um dos conjuntos tem um único elemento. V☐ F☐
6. Para qualquer conjunto A, se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em A, então, $A/\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A)$. V☐ F☐
7. Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em A. Se $[a]_\mathcal{R} \cap [b]_\mathcal{R} \cap [c]_\mathcal{R} = \emptyset$ então, $\mathcal{R}$ é a relação identidade. V☐ F☐
8. Para qualquer c.p.o. $(A, \leq)$ e quaisquer $x, y \in A$ com $x \neq y$, se x e y são elementos maximais de A então não existe ínfimo de $\emptyset$ em A. V☐ F☐

GRUPO II. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

1. um conjunto A tal que $\{1, \{1\}\} \in A$ e $\{1, \{1\}\} \subseteq A$;

2. uma condição em $\mathbb{N}$ que seja hereditária mas não universal;

3. um conjunto A e uma função $f : A \to A$ tal que $f^{\to}(\{1,2\}) = \{5\}$ e $f^{\leftarrow}(\{1,3\}) = \{5,4,2\}$.

4. uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $A = \{1,2,3,4\}$ tal que $[1]_{\mathcal{R}} = \{1,2,3\}$ e $[4]_{\mathcal{R}} = \{3,4\}$;

GRUPO III. Para $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, seja $f_\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por $f_\alpha(x,y) = \alpha(x+y)$.

1. Determine:
   - $f_\alpha\left(\{0,2\} \times \{0,2\}\right)$;
   - $f_\alpha^{\leftarrow}\left(\{0\}\right)$.

2. Mostre que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, f_α não é injetiva.

3. A sobrejetividade da aplicação f_α depende do valor de $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$? Justifique.

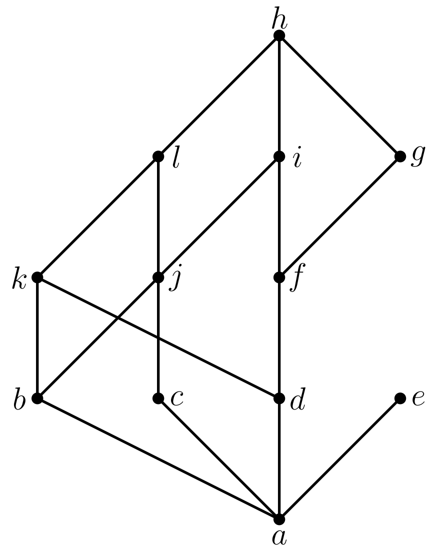
4. Para $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, considere, em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a relação binária $\mathcal{R}_\alpha$ definida por

$$(x, y)\ \mathcal{R}_\alpha\ (a, b) \Leftrightarrow f_\alpha(x, y) = \alpha f_1(a, b).$$

Mostre que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathcal{R}_\alpha$ é uma relação de equivalência e determine $[(2, -1)]_{\mathcal{R}_\alpha}$.

GRUPO IV. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo diagrama de Hasse apresentado.

Indique, caso exista:



1. o conjunto dos majorantes de $X = \{b, c, d\}$;

2. o ínfimo e o supremo de $Y = \{b, d\}$;

3. os elementos minimais de $Z = \{b, d, g, i\}$;

4. o ínfimo e o supremo do conjunto vazio;

5. um subsconjunto X com 6 elementos que seja uma cadeia para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. A.

6. um subsconjunto X com 6 elementos que seja um reticulado para a ordem parcial induzida pela ordem do c.p.o. A.

[Cotação:] **GRUPO I.** $8 \times 1.0 = 8.0$ **GRUPO II.** $4 \times 1.0 = 4.0$ **GRUPO III.** $1.5 + 1.0 + 1.0 + 1.5 = 5.0$ **GRUPO IV.** $6 \times 0.5 = 3.0$.