Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações | 11 de fevereiro de 2014

Álgebra Linear CC

—— Exame de recurso —— duração: 2h15min —

1. Sejam

$$A_k = \begin{bmatrix} k & 1 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & -2 \\ 1 & -1 & k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a matriz $X \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $X + A_0 = C^T C$.

(b) Utilizando determinantes, determine os valores do parâmetro real k para os quais a matriz A_k é invertível.

(c) i. Com base na alínea anterior, justifique que o sistema $A_1 x = 0$ é possivel e indeterminado.

ii. Utilizando o algoritmo de Gauss, resolva o sistema $A_1 x = 0$.

iii. Sem resolver o sistema $A_1 x = b$, verifique que $(0, 0, -1, -1)$ é solução deste sistema e indique o seu conjunto de soluções. Justifique a sua resposta.

2. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, considere os vetores $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (0, -2, 2)$ e seja S o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ a seguir indicado

$$S = \{(y, x - z, -x + z) \in \mathbb{R}^3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Determine uma base e a dimensão de S.

(b) Justifique que existe uma base de S da qual fazem parte os vetores u_1 e u_2 e indique uma base de S nessas condições.

(c) Dê exemplo, caso exista, de um subespaço vetorial U de $\mathbb{R}^3$ tal que:

i. $S \cup U$ não seja subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

ii. $\mathbb{R}^3 = S \bigoplus U$.

3. Sejam B_1 a base canónica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, B_2 a base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B_2 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$M(g; B_2, B_1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a dimensão de Img e mostre que Nuc$g =< (0, 2, 2) >$.

(b) Com base na alínea anterior, diga, justificando, se: i) g é um isomorfismo. ii) 0 é valor próprio de g.

(c) Determine $M(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}; B_1, B_2)$ e $M(g; B_2, B_2)$.

(d) Mostre que -3 é valor próprio de g e indique a respetiva multiplicidade geométrica.

(e) Diga, justificando, se g é diagonalizável.

Cotação: **1** - (1.5 + 1.5 + 2.25); **2** - (1.5 + 1.5 + 2.5);
3 - (2.5 + 1.0 + 2.5 + 1.5 + 1.75).