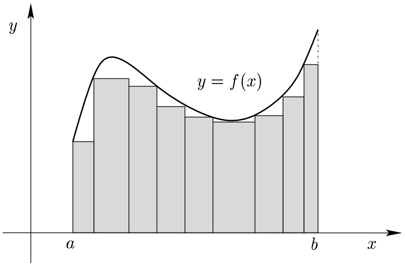
Integral de Riemann

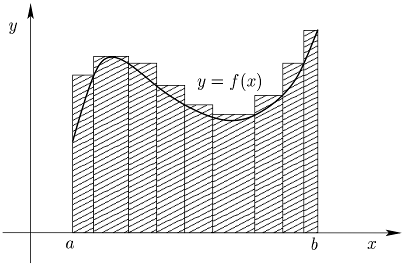
Maria Joana Torres

2022/23

Vamos considerar funções $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas, isto é,

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\ \exists\, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in [a, b] \qquad \alpha \leq f(x) \leq \beta.$$





$s(f, P)$ – área a cheio
$S(f, P)$ – área a tracejado

Definição:

Dado um intervalo $[a, b]$, seja $\Upsilon = \{\text{partições de } [a, b]\}$.

Define-se **integral superior de f** do seguinte modo:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P \in \Upsilon} \{S(f, P)\}.$$

Define-se **integral inferior de f** do seguinte modo:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P \in \Upsilon} \{s(f, P)\}.$$

Definição:

Dados um intervalo $[a, b]$ e uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f diz-se **integrável em** $\boldsymbol{[a, b]}$ se

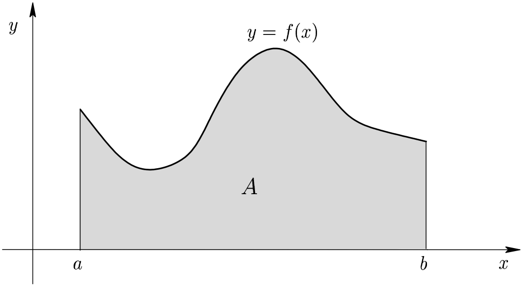
$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

A este valor comum chama-se **integral de $\boldsymbol{f}$** (ou **integral definido de $\boldsymbol{f}$**) e denota-se por

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{ou simplesmente} \quad \int_a^b f.$$

Dada uma função $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ não negativa, integrável, seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

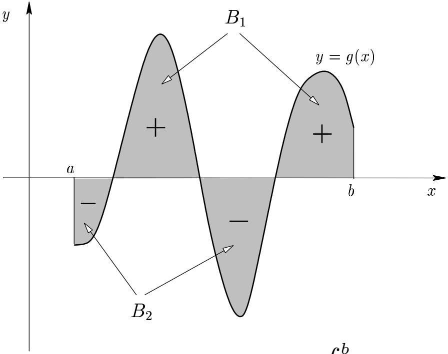


Chamamos área de A ao valor do integral de f em $[a, b]$, isto é,

$$\text{área de } A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Seja agora $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Sejam

$$B_1 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \ g(x) > 0, \ 0 < y \leq g(x)\},$$
$$B_2 = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : \ g(x) < 0, \ g(x) \leq y < 0\}.$$



$$\text{área de } B_1 - \text{ área de } B_2 = \int_a^b f(x)\, dx$$

Proposição:

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis. Então:

1. Se $c \in \,]a, b[$, então $f_{\big|_{[a,c]}}$ e $f_{\big|_{[c,b]}}$ são integráveis e
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$
2. Para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot f$ é integrável e
$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$
3. $f + g$ é integrável e
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

4. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x \in [a,b]$ então
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$
5. Em particular, se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$, então
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0;$$
6. $|f|$ é integrável e
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$$
7. $f \cdot g$ é integrável.

Teorema:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é integrável.

Teorema:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função descontínua apenas num número finito de pontos. Então f é integrável.

Teorema:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e monótona. Então f é integrável.

Nota:

Convenção: Por uma questão de comodidade, não queremos estar preocupados com o facto do extremo superior de integração ser ou não maior ou igual ao extremo inferior. Assim, convenciona-se que, se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável,

$$\forall\, c,\ d \in [a, b] : c \leq d \qquad \int_d^c f(x)\, dx = -\int_c^d f(x)\, dx.$$

As propriedades do integral definido apresentadas anteriormente mantêm-se válidas após esta generalização.

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então

$$\forall\, x \in [a, b] \qquad f_{\big|_{[a,x]}} \text{ é integrável.}$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} F: & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt. \end{array}$$

Teorema **[Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo]**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Suponhamos que f é contínua em $c \in [a, b]$. Então a função F é derivável em c e $F'(c) = f(c)$.

Corolário:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f admite primitiva.

Teorema [**Segundo Teorema Fundamental do Cálculo**]:

Sejam $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e F uma primitiva de f. Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Notação:

Nas condições do Segundo Teorema Fundamental do Cálculo, se F é uma primitiva de f em $[a, b]$, denota-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big]_a^b \underset{\textbf{Notação}}{=} F(b) - F(a).$$

Teorema [**Integração por partes**]: :

Sejam $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis tais que f' e g' são integráveis. Então é válida a

fórmula de integração por partes no integral definido

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Teorema **[Integração por mudança de variável]**:

Sejam $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ contínua e $\varphi:[c,d]\longrightarrow[a,b]$ uma função com derivada contínua e tal que $\varphi(c)=a$ e $\varphi(d)=b$. Então é válida a seguinte

fórmula de integração por substituição no integral definido

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\;dt.$$

Teorema **[do valor médio para integrais]**:

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então

$$\exists\, c \in \,]a, b[\qquad \int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b - a).$$