Ficha de trabalho 2

1 (a) $f(x,y) = xy^2 - 3x^3y$

$P = (1,1)$

$\vec{v} = (-1,2)$

Vetor unitário com a direção de $\vec{v}$: $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$

$= \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Derivada direcional de f em $(1,1)$ na direção de $\vec{u}$:

$$D_{\vec{u}} f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= y^2 - 9x^2y\Big|_{(1,1)} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + 2xy - 3x^3\Big|_{(1,1)} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= (1-9) \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + (2-3) \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= -8 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + (-1) \cdot \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$= \frac{8\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

2. $f(x,y) = y\ln x + y^2$

$P = (1,2)$

(a) $$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \left(\frac{y}{x}(x,y), (\ln x + 2y)(x,y)\right)$$

Logo, $$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{y}{x}, \ln x + 2y\right)$$

(b) Sendo $P = (1,2)$, pela alínea anterior temos que:

$$\vec{\nabla} f(1,2) = (2, \ln 1 + 2 \times 2) = (2,4)$$

(c) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Queremos a derivada parcial de f em P na direção definida pelo ângulo $\pi/3$, logo $\vec{u} = (\cos \pi/3, \operatorname{sen} \pi/3)$.

Logo $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$

$$D_{\vec{u}} f(1,2) = 2 \times \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$$

A taxa máxima de variação de f a partir de P ocorre na direção do vetor gradiente $\vec{\nabla} f(1,2) = (2,4)$ e o seu valor é:

$$\| \vec{\nabla} f(1,2) \| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

3. $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ $\qquad$ $f(x,y) = 9$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$
$$= (2x(x,y), 4y(x,y))$$
$$= (2x, 4y)$$

Logo $\vec{\nabla} f(1,2) = (2,8)$.

Seja C, a curva nível tal que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = 9\}$.

A reta tangente a C no ponto $(1,2)$ tem como equação:

$$\vec{\nabla} f(1,2) \cdot (x-1, y-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2,8) \cdot (x-1, y-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 8y = 18$$
$$\Leftrightarrow x + 4y = 9$$