

Nome:	Nº	Curso:
--------------	-----------	---------------

Responda às questões 1, 2 e 3 na folha de teste. Responda à questão 4 neste enunciado. Justifique todas as respostas, indique os cálculos intermédios e os comandos do R que usar. Duração: 2 horas.

1. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x < 0 \vee x > 2 \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

- (a) Mostre que $k = \frac{2}{3}$ e determine a função de distribuição de X .
- (b) Identifique os quartis de X .
- (c) Averigue se existem e, em caso afirmativo, calcule $E[X]$ e $Var[X]$.
- (d) Seja Y uma v.a.r. tal que X e Y são i.i.d.'s. Calcule $P(X + Y > 2)$.
- (e) Suponha agora que X é uma v.a.r. que representa o tempo, em horas, que um atleta demora a efetuar uma certa prova desportiva.
 - i. Calcule a probabilidade de um atleta demorar mais de 90 minutos a efectuar a prova.
 - ii. Calcule a probabilidade de, numa amostra aleatória de 100 atletas, a média dos tempos efectuados ser superior a 1 hora.

2. O Sr. João é dono de uma farmácia e verificou que o número de embalagens vendidas, por dia, de um certo medicamento é uma v.a.r. com distribuição $Poisson(3)$.

- (a) Determine a probabilidade de, num dia, não se vender qualquer embalagem deste medicamento nesta farmácia.
- (b) Determine a probabilidade de, num dia em que se vendeu pelo menos uma embalagem deste medicamento, se terem vendido no máximo 4 embalagens.
- (c) Determine a probabilidade de, em 50 dias de vendas nesta farmácia, haver pelo menos 25 dias em que se venderam mais de 3 embalagens do medicamento.
- (d) Determine a probabilidade de, em 10 dias de vendas nesta farmácia, haver dois dias em que não se vendeu qualquer embalagem do medicamento e de haver quatro dias em que se venderam mais de 3 embalagens do medicamento.

Observação: Nas duas últimas alíneas, assuma que o número de embalagens vendidas em dias diferentes são v.a.r.'s independentes.

3. Seja T uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}, t \in \mathbb{R}.$$

Determine $E[|T|]$ e $Var[|T|]$.

Observação: Não é necessário provar que $E[|T|]$ e $Var[|T|]$ existem.

(v.s.f.f.)

4. Seja X uma v.a.r. discreta com função de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & \text{se } x \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{se } \text{c.c.} \end{cases},$$

em que p é uma constante real e é tal que $0 < p < 1$.

- (a) Determine a transformada de Laplace de X .
- (b) Prove que, se X_1, X_2, \dots, X_n são v.a.r.'s, independentes e identicamente distribuídas com X , então $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Bin}(n, p)$.
- (c) Seja Z uma v.a.r. independente e identicamente distribuída com X . Diga, justificando, se as v.a.r.'s X e XZ são independentes.