Universidade do Minho	Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática	2 de janeiro de 2023

Teste de Álgebra Linear CC

duração: 2 horas

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

		V	F
1.	O conjunto $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+b=c+2\}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.	☐	☐
2.	O subespaço vetorial $\{(x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ tem dimensão 3.	☐	☐
3.	Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2, v_3, v \in V$, se $V =< v_1, v_2, v_3 >$, então $V =< v_1, v_2, v_3, v >$.	☐	☐
4.	Para qualquer espaço vetorial real V e para quaisquer $v_1, v_2 \in V$, se $v_1 + v_2 \neq 0_V$, então a sequência (v_1, v_2) é linearmente independente.	☐	☐
5.	Se v_1, v_2, v_3 são vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, então $\mathbb{R}^3 =< v_1, v_2, v_3 >$.	☐	☐
6.	A aplicação $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(a,b,c,d) = (2a, c+d, 0)$, para qualquer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, é uma aplicação linear.	☐	☐
7.	Para qualquer endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, f é sobrejetiva se e só se $\mathrm{Nuc}f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.	☐	☐
8.	Para qualquer endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, se $v \in \mathbb{R}^3$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio 3 , então $2v$ é um vetor próprio de f associado ao valor próprio 6.	☐	☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Considere no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, os vetores

$$u_1 = (1,1,1), u_2 = (0,1,3), u_3 = (-3,0,6), u_4 = (1,0,-2)$$

e os subespaços vetoriais $U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$ e $W = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Determine uma base de U.

(b) Mostre que $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2x + 3y\}$.

(c) Determine $\dim(W \cap U)$ e $\dim(W + U)$.

$\overrightarrow{\text{v.s.f.f.}}$

2. Considere os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_1$ a base de $\mathbb{R}^3$ definida por $\mathcal{B}_1 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ e a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que $f(x,y,z,w) = (x-y, z, x-w)$, para qualquer $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$.

   (b) Determine $\dim \operatorname{Im} f$.

   (c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e se é injetiva.

   (d) Sendo $\mathcal{B}_2$ uma base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_3$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}_1)$, $B = M(id_{\mathbb{R}^4};\mathcal{B}_2,\mathcal{B})$ e $C = M(id_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_1)$, indique, justificando, qual das expressões seguintes define a matriz $M(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3)$:

      i. CAB.   ii. CAB^{-1}.   iii. $C^{-1}AB^{-1}$.   iv. $C^{-1}AB$.   v. BAC.

3. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que -1 e 2 são valores próprios de φ com multiplicidades algébricas 1 e 2, respetivamente.

   (b) Determine o subespaço próprio de φ associado ao valor próprio 2. Justifique que o valor próprio 2 tem multiplicidade geométrica 1.

   (c) Diga, justificando, se φ é diagonalizável.

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: $1.(1,5+1,5+1,5)$; $2.(1,5+1,25+1,25+1,25)$; $3.(1,5+1,5+1,25)$.