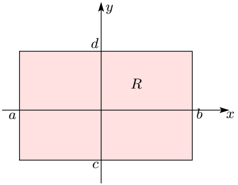
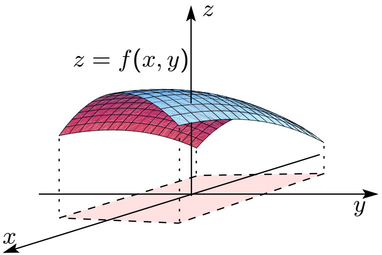
Cap 3 – Integrais múltiplos

3.1 Integração dupla e volumes
Motivação

Seja R o retângulo $[a,b] \times [c,d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) \geq 0 \qquad \text{em} \quad R.$$





A superfície definida por $z = f(x,y)$ e os planos

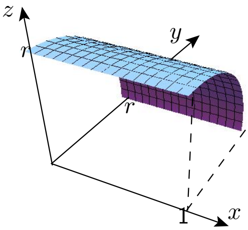
$$x = a, \quad x = b, \quad y = c, \quad y = d$$

formam a fronteira de uma região de $\mathbb{R}^3$.

[Problema] Determinar o volume da região do espaço compreendida entre o retângulo R e o gráfico da função f.

Exemplo

$z^2 + y^2 = r^2$ *Superfície cilíndrica (ao longo do eixo dos xx)*

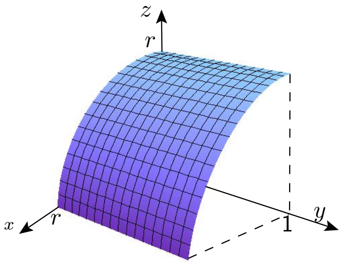


$$f(x,y) = \sqrt{r^2 - y^2}$$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq r\} = [0,1] \times [0,r]$$

Exemplo

$z^2 + x^2 = r^2$ *Superfície cilíndrica (ao longo do eixo dos yy)*

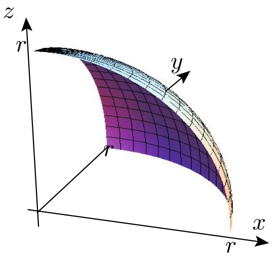


$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq r, \ \ 0 \leq y \leq 1\} = [0, r] \times [0, 1]$$

Exemplo

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ *Superfície esférica de raio* r *e centro em* $(0,0,0)$



$$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq r^2\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq r, \ \ 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\right\}$$

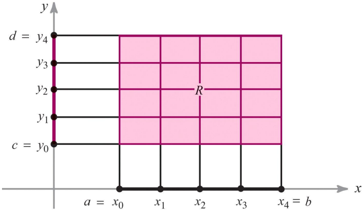
Integral duplo

Seja $R = [a,b] \times [c,d]$ e $f : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Subdividimos $[a,b]$ em m subintervalos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_m = b$
- Subdividimos $[c,d]$ em n subintervalos $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_n = d$
- Às divisões anteriores associamos uma subdivisão do retângulo R em $m \times n$ retângulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

  $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$
  Chamamos a esta subdivisão uma partição P de R.

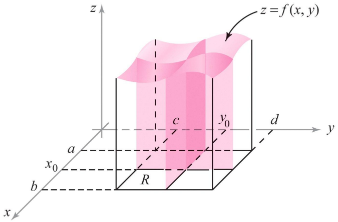


- Denotamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.
- A área do retângulo R_{ij} é então $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$.
- Para cada retângulo R_{ij} escolhemos um ponto (x_i^*, y_j^*).

- O volume do paralelipípedo de base R_{ij} e altura $f(x_i^*, y_j^*)$ é $f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}$.

- O volume do sólido limitado por R e pelo gráfico de f pode ser aproximado por

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}$$



- Chamamos soma de Riemann dupla de f relativa à subdivisão anterior de R ao número

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\, \Delta A_{ij}$$

- Para apresentar a definição de integral duplo falta a noção de norma de uma partição P, que é o comprimento da diagonal de comprimento máximo de todos os subretângulos R_{ij} e que denotamos por $\|P\|$.

- Quando $\|P\| \longrightarrow 0$, a partição P torna-se mais fina (quando $m, n \longrightarrow \infty$). O valor da soma de Riemann de f, quando existe, designa-se por integral definido de f em R e denota-se por

$$\iint_R f(x, y)\, dA.$$

Definição

O integral duplo de f sobre o retângulo R é

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij},$$

se este limite existir (para todas as escolhas possíveis de $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$).

Dado que $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$, outra notação frequentemente usada para o integral duplo é

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy}$$

Observação: Uma função diz-se integrável se o limite acima existe. Mostra-se que todas as funções contínuas são integráveis. De facto, o integral duplo de f existe desde que f não seja "muito descontínua".

Exemplo

Encontre uma aproximação para o valor do integral

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA$$

onde $R = \{(x, y) :\ 0 \leq x \leq 2,\ \ 1 \leq y \leq 2\}$, *calculando uma soma de Riemann dupla com uma partição definida por* $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$ *e* $y_1 = 1,\ y_2 = 1.5,\ y_3 = 2$ *e tomando* (x_i^*, y_j^*) *como sendo o centro de cada retângulo.*

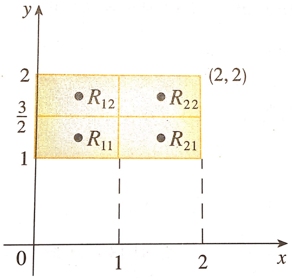


Figura 1: *Partição do retângulo* $[0, 2] \times [1, 2]$.

Resolução.

A área de cada retângulo é $\Delta A_{ij} = \frac{1}{2}$, (x_i^*, y_j^*) é o centro de cada retângulo R_{ij} e $f(x,y) = x - 3y^2$. A correspondente soma de Riemann é

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij} =$$

$$= f(x_1^*, y_1^*)\Delta A_{11} + f(x_1^*, y_2^*)\Delta A_{12} + f(x_2^*, y_1^*)\Delta A_{21} + f(x_2^*, y_2^*)\Delta A_{22}$$

$$= f(0.5, 1.25)\Delta A_{11} + f(0.5, 1.75)\Delta A_{12} + f(1.5, 1.25)\Delta A_{21} + f(1.5, 1.75)\Delta A_{22}$$

$$= -11.875.$$

Assim, temos

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA \approx -11.875.$$

É muito difícil calcular integrais duplos através da definição. Veremos a seguir um método eficiente para o cálculo de integrais duplos e verificaremos que o valor exato deste integral duplo é -12.

Propriedades dos integrais duplos

Sejam $f,\, g : R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então:

1. $\displaystyle\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA$

2. $\displaystyle\iint_R \lambda\, f(x,y)\, dA = \lambda \iint_R f(x,y)\, dA, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

3. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA$

4. $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$

Integrais iterados

A avaliação de integrais duplos através da definição é muito difícil, mas podemos exprimir um integral duplo como *integral iterado* que pode ser avaliado calculando dois integrais simples.

[Teorema de Fubini] Sendo R o retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy.$$

Note que:

- $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy = C(x)$ é um número que depende de x

  (obtido por integração parcial de f com respeito a y, e, portanto, encarando x como uma constante);

- $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx = C(y)$ é um número que depende de y

  (obtido por integração parcial de f com respeito a x, e, portanto, encarando y como uma constante).

Exercício

Calcule o integral

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA,$$

onde $R = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 2, \ \ 1 \le y \le 2\}$. *Compare com a aproximação obtida anteriormente.*

Resolução.

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2)\, dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x - 3y^2)\, dy\, dx \\ &= \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx \quad \text{(integração parcial com respeito a } y\text{)} \\ &= \int_0^2 \left[(2x - 8) - (x - 1)\right] dx \\ &= \int_0^2 (x - 7)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x\right]_0^2 = (2 - 14) - 0 = -12.\end{aligned}$$

Resolução alternativa.

$$\iint_R (x - 3y^2)\, dA = \int_1^2 \int_0^2 (x - 3y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy \quad \text{(integração parcial com respeito a } x\text{)}$$

$$= \int_1^2 \left[(2 - 6y^2) - 0 \right] dy$$

$$= \int_1^2 (2 - 6y^2)\, dy = \left[2y - 6\frac{y^3}{3} \right]_1^2 = (2 - 16) - (4 - 2) = -12.$$

Exercício

Sendo R *o retângulo* $[0,2]\times[-1,0]$, *calcular o integral*

$$\iint_R (x^2y^2+x)\,dA.$$

Resolução.

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2y^2+x)\,dA &= \int_0^2 \int_{-1}^0 (x^2y^2+x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2\frac{y^3}{3}+xy\right]_{y=-1}^{y=0} dx \quad \text{(integração parcial com respeito a } y\text{)} \\
&= \int_0^2 \left[0-\left(-\frac{x^2}{3}-x\right)\right] dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{3}+x\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{9}+\frac{4}{2}=\frac{26}{9}.
\end{aligned}$$

Resolução alternativa.

$$\iint_R (x^2y^2 + x)\,dA = \int_{-1}^{0} \int_0^2 (x^2y^2 + x)\,dx\,dy$$

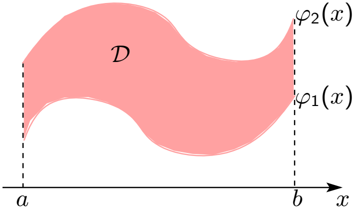
$$= \int_{-1}^{0} \left[\frac{x^3}{3}y^2 + \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2} dy \quad \text{(integração parcial com respeito a } x\text{)}$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[\left(\frac{8}{3}y^2 + \frac{4}{2}\right) - 0\right] dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\frac{8}{3}y^2 + 2\right) dy$$

$$= \left[\frac{8}{3}\cdot\frac{y^3}{3} + 2y\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{8}{9} - 2\right) = \frac{26}{9}.$$

Integração em regiões gerais

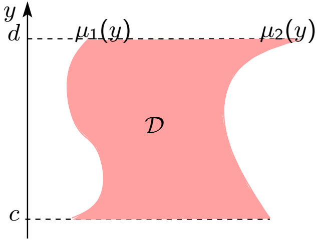


Região do tipo I

$$a \leq x \leq b$$
$$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

Região do tipo II

$$c \leq y \leq d$$
$$\mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)$$



- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo I de $\mathbb{R}^2$, ou verticalmente simples, se existe um intervalo $[a, b]$ e duas funções

$$\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{C}^1(]a, b[)$$

tais que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Então

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo II de $\mathbb{R}^2$, ou horizontalmente simples, se existe um intervalo $[c, d]$ e duas funções

$$\mu_1 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \mu_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{C}^1(]c, d[)$$

tais que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \mu_1(y) \leq x \leq \mu_2(y)\}$. Então

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\mu_1(y)}^{\mu_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy.$$

- $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma região do tipo III de $\mathbb{R}^2$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I e do tipo II.

Exercício

Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq x\}$. *Calcular*

$$\iint_D xy\,dA,$$

descrevendo D *como uma região*

(a) *verticalmente simples.*

(b) *horizontalmente simples.*

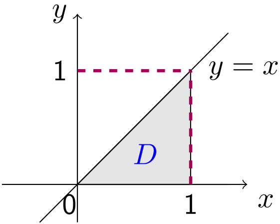


Figura 2: Domínio de integração.

(a) $0 \leq x \leq 1,$
$0 \leq y \leq x$

(b) $0 \leq y \leq 1,$
$y \leq x \leq 1$

Resolução.

(a)

$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_0^x xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} dy$$
$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

(b)

$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_y^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=y}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2}\right) dx = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Interpretação de integrais duplos: volume e área

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é não negativa e integrável em B e S é a região do espaço definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y) \in B,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

então o volume de S é

$$\text{vol}(S) = \iint_B f(x, y)\, dA.$$

- Se $f : B \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função constante $f(x, y) = 1$, a área de B é dada por

$$\text{área}(B) = \iint_B 1\, dA$$

Exercício

Determine o volume do sólido S que é limitado pelo parabolóide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$, pelos planos $x = 2$, $y = 2$ e os três planos coordenados.

Resolução. Primeiro começamos por observar que o sólido S é o sólido que está abaixo da superfície $z = 16 - x^2 - 2y^2$ e acima do quadrado $[0, 2] \times [0, 2]$.

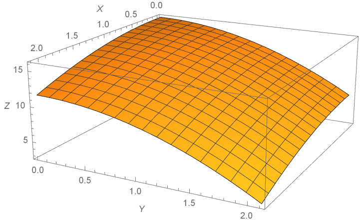


Figura 3: $z = 16 - x^2 - 2y^2$ em $[0, 2] \times [0, 2]$.

Resolução (cont.).

$$
\begin{aligned}
V(S) &= \iint_R \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dA \\
&= \int_0^2 \int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dx\, dy \\
&= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2 x\right]_{x=0}^{x=2} dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48
\end{aligned}
$$

Exercício

Considere o integral duplo

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} \, dy \, dx.$$

(a) *Esboce a região de integração cuja área é representada pelo integral dado.*

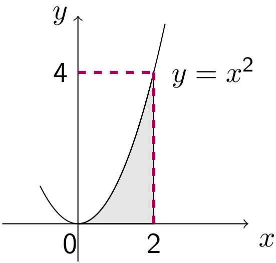
(c) *Calcule o valor do integral.*

(b) *Escreva o integral invertendo a ordem de integração.*

Resolução.

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} 1 \, dy \, dx.$$

(a)



(i) $0 \leq x \leq 2,$
$0 \leq y \leq x^2$

Figura 4: Domínio de integração.

(b)

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} 1 \, dy \, dx = \int_0^2 \left[y\right]_{y=0}^{y=x^2} \, dx = \int_0^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Resolução (cont.).

(c)

$$\int_0^2 \int_0^{x^2} dy\, dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 dx\, dy$$

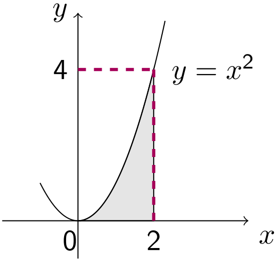


Figura 5: Região de integração.

(ii) $0 \leq y \leq 4,$
$\sqrt{y} \leq x \leq 2$

Exercício

Calcule o valor do integral

$$\int_0^2 \int_x^2 \mathrm{e}^{y^2}\, dy\, dx$$

invertendo a ordem de integração.

Resolução.

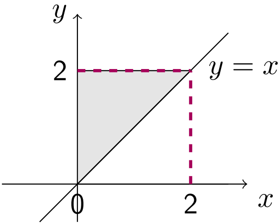


Figura 6: Região de integração.

(i) $0 \leq x \leq 2,$
$x \leq y \leq 2$

(ii) $0 \leq y \leq 2,$
$0 \leq x \leq y$

$$\int_0^2 \int_x^2 \mathrm{e}^{y^2}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\, dx\, dy$$

Resolução (cont.).

Embora o integral original não possa ser avaliado usando o Teorema Fundamental do Cálculo, o novo integral pode ser facilmente calculado.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_x^2 \mathrm{e}^{y^2}\, dy\, dx &= \int_0^2 \int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\, dx\, dy \\
&= \int_0^2 \left[x\mathrm{e}^{y^2}\right]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^2 y\mathrm{e}^{y^2}\, dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 2y\mathrm{e}^{y^2}\, dy \\
&= \left[\mathrm{e}^{y^2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4 - 1\right)
\end{aligned}$$

3.2 Integração tripla
Integral triplo

Seja $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ e $f : B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Subdividimos $[a,b]$, $[c,d]$ e $[p,q]$ em m, n e l subintervalos, respetivamente, como segue:

  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_m = b$

  $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_n = d$

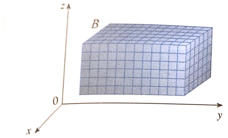
  $p = z_0 < z_1 < \cdots < z_{k-1} < y_l = q$

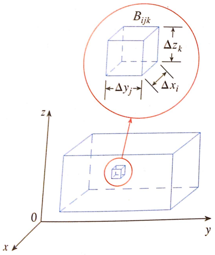
- Associamos uma subdivisão do paralelepípedo B em $n \times m \times l$ paralelepípedos

  $$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

  $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, l.$

  Chamamos a esta subdivisão uma partição P de B.





- Denotamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ e $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

- O volume do paralelepípedo B_{ijk} é

  $$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k.$$

- Para cada B_{ijk} escolhemos um ponto (x_i^*, y_j^*, z_k^*).
- Chamamos soma de Riemann tripla de f relativa à subdivisão anterior de B ao número

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\,\Delta V_{ijk}.$$

- Definimos norma da partição P como sendo o comprimento da diagonal de comprimento máximo de todos os paralelepípedos B_{ijk} e denotamos esta norma por $\|P\|$.

- Quando $\|P\| \longrightarrow 0$, a partição P torna-se mais fina (quando $n, m, l \longrightarrow \infty$). Por analogia com a definição de integral duplo, o valor da soma de Riemann de f, quando existe, designa-sepor integral definido de f em B e denota-se por

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV$$

Definição

O integral triplo de f sobre o paralelepípedo B é

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{\|P\|\longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} f(x_i^*, y_j^*, z_k^*)\Delta V_{ij},$$

se este limite existir (para todas as escolhas possíveis de $(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \in B_{ij}$).

Dado que $\Delta A_{ij} = \Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$, outra notação frequentemente usada para o integral triplo é

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\;dV = \iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

Propriedades dos integrais triplos

Sejam $f,\, g : B \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas. Então:

1. $$\iiint_B [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\, dV = \iiint_B f(x,y,z)\, dV + \iiint_B g(x,y,z)\, dV$$

2. $$\iiint_B \lambda\, f(x,y,z)\, dV = \lambda \iiint_B f(x,y,z)\, dV, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

3. $$f \geq g \Longrightarrow \iiint_B f(x,y,z)\, dV \geq \iiint_B g(x,y,z)\, dV$$

4. $$f \geq 0 \Longrightarrow \iiint_B f(x,y,z)\, dV \geq 0$$

Integrais iterados

Tal como para os integrais duplos, o método prático para avaliar um integral triplo é exprimindo-o como um integral iterado que pode ser avaliado calculando três integrais simples.

[Teorema de Fubini]

Se f é contínua num paralelepípedo $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, então

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_p^q f(x, y, z)\, dz \right] dy \right] dx.$$

Este integral significa que primeiro integramos com respeito a z (mantendo x e y fixos), depois integramos com respeito a y (mantendo x fixo) e finalmente integramos com respeito a x.

Este integral é igual a outros 5 integrais iterados que se obtêm invertendo a ordem de integração. Por exemplo, podemos integrar primeiro com respeito a x, depois y e, por fim, z.

Exemplo

Seja $B = [-1,0] \times \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Calcule

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)\, dV.$$

Resolução.

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \int_{-1}^{0} \int_{-1/2}^{0} \int_{0}^{1/3} (x + 2y + 3z)\, dz\, dy\, dx$$

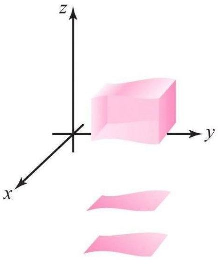
$$= \int_{-1}^{0} \int_{-1/2}^{0} \left[xz + 2yz + \frac{3}{2} z^2 \right]_{z=0}^{z=1/3} dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \int_{-1/2}^{0} \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3} y + \frac{1}{6} \right) dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[\frac{x}{3} y + \frac{y^2}{3} + \frac{y}{6} \right]_{y=-1/2}^{y=0} dx = \int_{-1}^{0} \left[0 - \left(-\frac{x}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \right) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{x}{6}\, dx = \left[\frac{x^2}{12} \right]_{x=-1}^{x=0} = -\frac{1}{12}.$$

Regiões elementares de $\mathbb{R}^3$



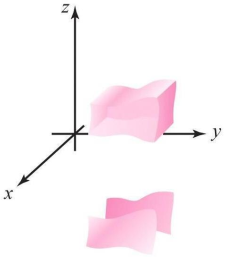
topo e base são superfícies
$z = \gamma(x, y)$

Região do tipo I

$$\gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

com

$$\begin{array}{rcl} a & \leq x \leq & b \\ \varphi_1(x) & \leq y \leq & \varphi_2(x) \\ \gamma_1(x,y) & \leq z \leq & \gamma_2(x,y) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} c & \leq y \leq & d \\ \mu_1(y) & \leq x \leq & \mu_2(y) \\ \gamma_1(x,y) & \leq z \leq & \gamma_2(x,y) \end{array}$$



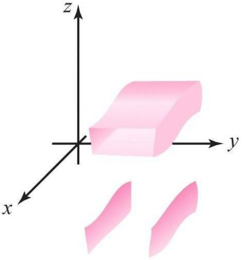
frente e trás são superfícies $x = \rho(y, z)$

Região do tipo II

$$\rho_1(y,z) \le x \le \rho_2(y,z), \qquad (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

com

$$\begin{array}{rcl} p & \le z \le & q \\ \varphi_1(z) & \le y \le & \varphi_2(z) \\ \rho_1(y,z) & \le x \le & \rho_2(y,z) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} c & \le y \le & d \\ \mu_1(y) & \le z \le & \mu_2(y) \\ \rho_1(y,z) & \le x \le & \rho_2(y,z) \end{array}$$



Região do tipo III

$$\delta_1(x,z) \leq y \leq \delta_2(x,z), \qquad (x,z) \in \mathbb{R}^2$$

com

$$\begin{array}{rcl} a & \leq x \leq & b \\ \varphi_1(x) & \leq z \leq & \varphi_2(x) \\ \delta_1(x,z) & \leq y \leq & \delta_2(x,z) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} p & \leq z \leq & q \\ \varphi_1(z) & \leq x \leq & \varphi_2(z) \\ \delta_1(x,z) & \leq y \leq & \delta_2(x,z) \end{array}$$

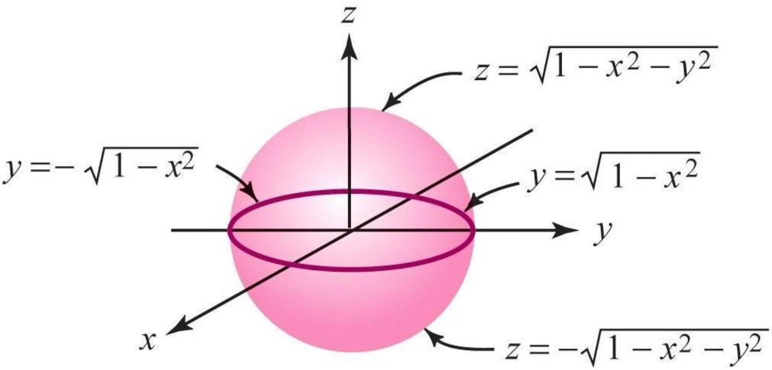
- $U \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma região do tipo IV de $\mathbb{R}^3$ se for, simultaneamente, uma região do tipo I, do tipo II e do tipo III.

Exemplo: a esfera como região elementar de $\mathbb{R}^3$

1. Descreva a esfera unitária

$$\mathcal{E}:\ x^2+y^2+z^2 \le 1$$

em termos de regiões elementares de $\mathbb{R}^3$.



- A intersecção $\mathcal{E}$ com o plano XOY é o círculo unitário

$$x^2 + y^2 \leq 1, \qquad \text{pois} \qquad z = 0.$$

- Nesta região, tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e, então,

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}.$$

- Seja

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

- A esfera $\mathcal{E}$, pode, então ser descrita, como o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $(x, y) \in D$ e

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Há diversos processos para o fazer, basta trocar os papéis de x, y, z...

Integração em regiões elementares de $\mathbb{R}^3$

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ uma região elementar e $\mathbb{R}^3$ e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua.

I) Se $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar de $\mathbb{R}^2$ nas variáveis x e y e

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)\}$$

então

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA$$

II) Se $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar de $\mathbb{R}^2$ nas variáveis y e z e

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D,\ \rho_1(y, z) \leq x \leq \rho_2(y, z)\}$$

então

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\rho_1(y,z)}^{\rho_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx\right] dA.$$

III) Se $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região elementar de $\mathbb{R}^2$ nas variáveis x e z e

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, \delta_1(x, z) \leq y \leq \delta_2(x, z)\}$$

então

$$\iiint_U f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\delta_1(x,z)}^{\delta_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right] dA.$$

Integração tripla e volume

- Se a função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x, y, z) = 1$ for integrável em U, o volume de U é dado por

$$\text{vol}(U) = \iiint_U 1 \, dV.$$

- Para uma função arbitrária $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\iiint_U f(x, y, z) \, dV$$

não tem nenhuma interpretação geométrica relevante, mas tem diversas interpretações, por exemplo, na física.

Integração tripla: aplicações à física

- Se $\rho(x, y, z)$ é a função densidade em qualquer ponto (x, y, z), em massa por unidade de volume, de um objeto sólido que ocupa a região $U \subset \mathbb{R}^3$ então a massa do sólido é

$$m = \iiint_U \rho(x, y, z)\, dV.$$

- Se a carga elétrica está distribuída sobre uma região $U \subset \mathbb{R}^3$ e a densidade de carga, em unidades de carga por área, é dada por $\sigma(x, y, z)$ em qualquer ponto (x, y, z), então a carga total Q é

$$Q = \iiint_U \sigma(x, y, z)\, dV.$$

Exemplo: volume de uma esfera

Recorrendo a integrais iterados, escreva um integral que permita calcular o volume da esfera unitária

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

O volume de $\mathcal{E}$ é dado por

$$\mathrm{vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} 1 \, dV.$$

- A esfera $\mathcal{E}$ pode ser descrita como sendo o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$
\begin{aligned}
-1 &\leq x \leq 1, \\
-\sqrt{1-x^2} &\leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \\
-\sqrt{1-x^2-y^2} &\leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$
- Assim,

$$
\text{vol}(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}} dV \ = \iint_D \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dA
$$

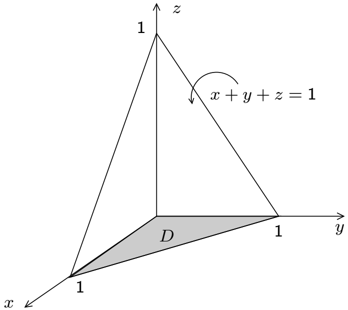
$$
= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx
$$

Nota: Integral muito difícil de calcular...

Exemplo: volume de um tetraedro

Recorrendo a um integral triplo, calcule o volume do tetraedro T de vértices

$$(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0) \ \text{ e } (0,0,1).$$



- A equação geral de um plano é

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

  sendo que o ponto (x_0, y_0, z_0) pertence ao plano e o vetor de coordenadas (A, B, C) é ortogonal ao plano.

- Um vetor ortogonal ao plano que passa nos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ é dado por

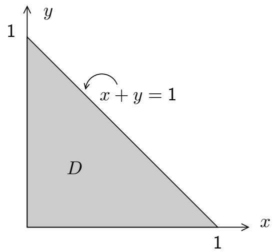
$$\begin{aligned}(A, B, C) &= \big((0, 1, 0) - (1, 0, 0)\big) \times \big((0, 0, 1) - (1, 0, 0)\big)\\ &= (-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1) = (1, 1, 1)\end{aligned}$$

- Escolhendo, por exemplo, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$ obtém-se a equação do plano

$$x + y + z = 1.$$

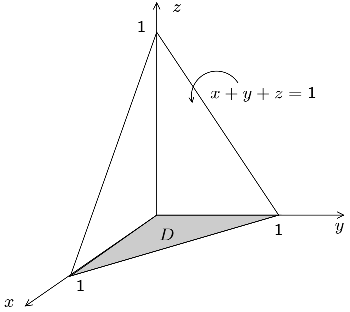
- A intersecção do tetraedro com (por exemplo) o plano horizontal é o triângulo equilátero D tal que

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq 1 \\ 0 \leq & y \leq 1 - x. \end{aligned}$$



- Assim, o tetraedro pode ser descrito como o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq 1 \\ 0 \leq & y \leq 1 - x \\ 0 \leq & z \leq 1 - x - y. \end{aligned}$$



- Finalmente, o volume do tretraedro é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(T) &= \iiint_T 1\, dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big[z\big]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[(1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 dx = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$