Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação - 1º ano

exame de recurso - 29 janeiro 2016 Duração: 2 horas

1. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Sejam p, q e r proposições. Se a proposição $r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ é falsa, então, a proposição $\sim q \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim r)$ é verdadeira.

   (b) Sejam X e A conjuntos. Se $A \subseteq X$, então, $R = \omega_A \cup \omega_{X \setminus A}$ é uma relação de equivalência em X.

   (c) Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. Se existe supremo de $\emptyset$ em A então A admite um elemento minimal.

   (d) Sejam A, B e C conjuntos. Se $A \times C \sim B \times C$ então $A \sim B$.

2. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

   (a) conjuntos A, B e C tais que $A \in B$, $\{A, B\} \in C$ e $\{A, B\} \subseteq C$;

   (b) uma família de conjuntos $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = [0, 2]$ e $\bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{1\}$;

   (c) uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ tal que $(1, 3) \in \mathcal{R}$ e $2 \in [1]_{\mathcal{R}} \cap [4]_{\mathcal{R}}$;

   (d) um conjunto A e uma função $f : \mathcal{P}(A) \to A$ injetiva.

3. Usando indução matemática, prove que, para todo o natural $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k - 3) = n(n - 2)$.

4. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(m, n) = nm$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   (a) Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y\}$, determine $f(A)$. Justifique.

   (b) Se $B = \{7\}$, determine $f^{\leftarrow}(B)$. Justifique.

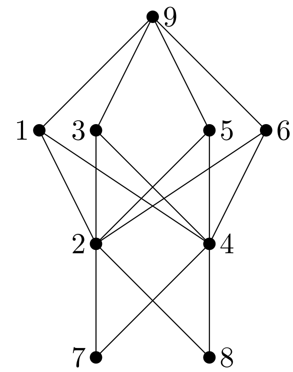
   (c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou é injetiva.

   (d) Considere a relação de equivalência associada à igualdade de imagem por f, definida por

   $$(x, y)\ \mathcal{R}_f\ (a, b) \Leftrightarrow f(x, y) = f(a, b).$$

   Para $k \in \mathbb{Z}$, determine $[(1, k)]_{\mathcal{R}_f}$.

5. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:



   (a) Indique, caso exista:

      i. Maj $\{7, 4\}$;

      ii. $\min \emptyset$;

      iii. um subconjunto X de A que não admita supremo nem ínfimo.

   (b) Justifique que $(A, \leq)$ não é um reticulado.

Cotação: **1.** 4×1.0 **2.** 4×1.0 **3.** 1.5 **4.** $3 \times 1.5 + 2.0$ **5.** 4×1.0