Álgebra Universal e Categorias

folha 9

3.1. Dá-se a designação de *monóide* a uma estrutura $\mathcal{M} = (M; *, 1_{\mathcal{M}})$, onde M é um conjunto não vazio, $* : M \times M \to M$ é uma operação binária associativa e $1_{\mathcal{M}}$ é um elemento de M tal que, para qualquer $x \in M$, $x * 1_{\mathcal{M}} = x = 1_{\mathcal{M}} * x$.

Para cada monóide $\mathcal{M} = (M; *, 1_{\mathcal{M}})$, considere a estrutura $\mathbf{M} = (\{\mathcal{M}\}, M, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, id)$, onde:

- $\mathrm{dom} : M \to \{\mathcal{M}\}$ é a função que a cada elemento de M associa $\mathcal{M}$;
- $\mathrm{cod} : M \to \{\mathcal{M}\}$ é a função que a cada elemento de M associa $\mathcal{M}$;
- $\circ$ é a operação binária do monóide;
- $id : \{\mathcal{M}\} \to M$ é a função definida por $id(\mathcal{M}) = 1_{\mathcal{M}}$.

Mostre que $\mathbf{M}$ é uma categoria.

3.2. Sejam P um conjunto e $\leq$ uma relação binária em P. A relação $\leq$ diz-se uma *pré-ordem em* P se são satisfeitas as seguintes condições:

(i) para todo $a \in P$, $(a, a) \in \leq$, (reflexividade)
(ii) para quaisquer $a, b, c \in P$, $((a, b) \in \leq$ e $(b, c) \in \leq) \Rightarrow (a, c) \in \leq$. (transitividade)

Dá-se a designação de *conjunto preordenado* a um par $(P, \leq)$, onde P é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma pré-ordem.

Dados conjuntos preordenados $(P, \leq_1)$ e $(Q, \leq_2)$, uma *função isótona* de P em Q é uma função $f : P \to Q$ tal que

$$x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y),$$

para quaisquer $x, y \in P$.

(a) Considere a estrutura **Preset** $= (\mathrm{Obj}(\textbf{Preset}), \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}), \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, id)$, onde:
- $\mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ é a classe de todos os conjuntos preordenados;
- $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ é a classe de todas as aplicações isótonas entre conjuntos preordenados;
- $\mathrm{dom} : \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ é a função que a cada função isótona de $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ associa o seu domínio;
- $\mathrm{cod} : \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Obj}(\textbf{Preset})$ é a função que a cada função isótona de $\mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ associa o seu codomínio;
- $\circ : \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \times \mathrm{Mor}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ é a função parcial que a cada par de funções (f, g) tais que $dom(g) = cod(f)$ associa a composição de g e f;
- $id : \mathrm{Obj}(\textbf{Preset}) \to \mathrm{Mor}(\textbf{Preset})$ é a função que a cada conjunto preordenado $(P, \leq)$ associa a função identidade id_P.

Mostre que **Preset** é uma categoria.

(b) Para cada conjunto preordenado $(P, \leq)$, considere a estrutura $\mathbf{P} = (P, \leq, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, id)$, onde:
- $\mathrm{dom} : \leq \to P$ é a função que a cada par $(a, b) \in \leq$ associa o elemento a;
- $\mathrm{cod} : \leq \to P$ é a função que cada par $(a, b) \in \leq$ associa o elemento b;
- $\circ : \{((a, b), (b, c)) \mid (a, b), (b, c) \in \leq\} \to \leq$ é a função definida por $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$, para quaisquer $(a, b), (b, c) \in \leq$;
- $id : P \to \leq$ é a função definida por $id(a) = (a, a)$.

Mostre que $\mathbf{P}$ é uma categoria.

3.3. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes reais do tipo $n \times m$.

Considere a estrutura $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \circ, id)$, onde:

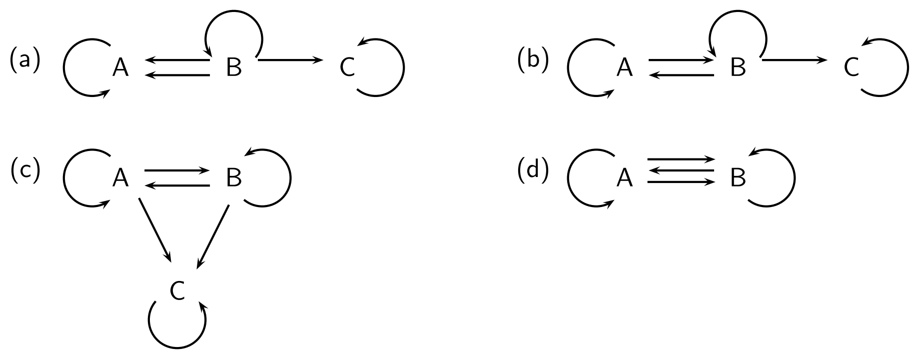
- $\mathrm{dom} : \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ associa o natural n;
- $\mathrm{cod} : \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{N}$ é a função que a cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ associa o natural m;
- $\circ : \{(B, A) \in \mathcal{M}_{q\times r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) \mid p, q, r \in \mathbb{N}\} \to \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a função definida por $A \circ B = A \cdot B$, onde $\cdot$ é a multiplicação usual de matrizes;
- $id : \mathbb{N} \to \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a função que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa a matriz real I_n.

Mostre que $\mathbf{N}$ é uma categoria.

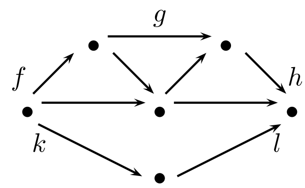
Álgebra Universal e Categorias

folha 10

3.4. Diga qual dos diagramas seguintes pode representar uma categoria:



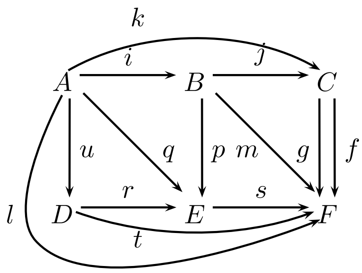
3.5. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o diagrama a seguir representado



Mostre que se os quatro triângulos internos do diagrama comutam, então $h \circ g \circ f = l \circ k$.

3.6. Mostre que uma categoria é discreta se e só se todas as suas subcategorias são plenas.

3.7. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama



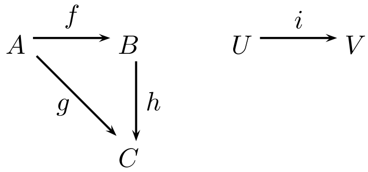
Construa:

(a) A subcategoria plena $\mathbf{C}'$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}') = \{A, B, C, F\}$.

(b) A categoria dos objetos sobre E.

3.8. Considere um conjunto preordenado $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$. Para cada objeto s de $\mathbf{P}$, determine os objetos das categorias $\mathbf{P}/s$ e $s/\mathbf{P}$.

3.9. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ as categorias definidas, respetivamente, pelos diagramas seguintes



Defina por meio de um diagrama a categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

3.10. Sejam $\mathcal{R} = (R; \cdot^{\mathcal{R}}, 1^{\mathcal{R}})$ e $\mathcal{S} = (S; \cdot^{\mathcal{S}}, 1^{\mathcal{S}})$ monóides vistos como categorias $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$. O que é a categoria produto $\mathbf{R} \times \mathbf{S}$?

3.11. (a) Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado visto como uma categoria $\mathbf{P}$. O que é a categoria dual $\mathbf{P}^{op}$?

(b) Seja $\mathcal{R}$ um monóide visto como uma categoria $\mathbf{R}$. O que é a categoria dual $\mathbf{R}^{op}$?

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2024/2025

Álgebra Universal e Categorias

folha 11

3.12. Considere a categoria $\mathbf{C}$ representada ao lado.
Indique, caso exista:

(a) Um monomorfismo de $\mathbf{C}$.

(b) Um morfismo que não seja um epimorfismo de $\mathbf{C}$.

(c) Um bimorfismo de $\mathbf{C}$.

(d) Um isomorfismo de $\mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend left, "r"] \arrow[ddrr, bend right, "j"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[ddr, "i"'] & C \arrow[dd, shift right, "g"'] \arrow[dd, shift left, "f"] \\
& & \\
& & F
\end{tikzcd}$$

3.13. Considere o semigrupo $\mathcal{N} = (\mathbb{N}_0, +)$ visto como uma categoria $\mathbf{N}$. Mostre que nesta categoria todo o morfismo é um bimorfismo e que 0 é o único isomorfismo.

3.14. Considere o seguinte diagrama numa categoria $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
A_7 \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A_8 \arrow[dr] \arrow[dd, leftrightarrow] & \\
& A_5 \arrow[rr] \arrow[dd] & & A_6 \arrow[dd] \\
A_3 \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_4 \arrow[dr] & \\
& A_1 \arrow[rr] & & A_2
\end{tikzcd}$$

Suponha que todas as faces do "cubo", com excepção da face superior, são comutativas. Mostre que se o morfismo $A_6 \to A_2$ é um monomorfismo, então a face superior também é comutativa.

3.15. Considere um conjunto preordenado $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$. Justifique que todos os morfismos de $\mathbf{P}$ são bimorfismos. Indique que condições devem ser satisfeitas pela relação binária do conjunto preordenado $(P, \leq)$ de forma a que categoria $\mathbf{P}$ seja balanceada?

3.16. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se f e g são invertíveis à esquerda (respetivamente, direita), então $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita).

(b) Se $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetivamente, direita), então f é invertível à esquerda (respetivamente, g é invertivel à direita).

3.17. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.

3.18. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então g é um monomorfismo.

3.19. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se f e g são isomorfismos, então $g \circ f$ é um isomorfismo.

3.20. Mostre que as seguintes condições sobre uma categoria $\mathbf{C}$ são equivalentes:

(I1) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à direita;

(I2) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível à esquerda;

(I3) Todo o morfismo em $\mathbf{C}$ é invertível.

3.21. Seja $f : A \to B$ um isomorfismo numa categoria $\mathbf{C}$. Para cada objeto $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, mostre que a função $f_C : \hom(B, C) \to \hom(A, C)$ definida por $f_C(g) = g \circ f$ é uma bijeção.

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2024/2025

Álgebra Universal e Categorias

folha 12

3.22. Mostre que se $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$ são duas categorias com objetos terminais (iniciais), então $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ também tem objetos terminais (iniciais).

3.23. Mostre que se uma categoria $\mathbf{C}$ tem objeto zero, então todo o objeto inicial (terminal) de $\mathbf{C}$ é objeto zero. Deduza que a categoria **Set** não tem objetos zero.

3.24. Seja $\mathbf{K}$ a categoria cujos objetos são os triplos (X, e, f), onde X é um conjunto, $e \in X$ e $f : X \to X$ é uma função; dados objetos (X, e, f), (X', e', f') de $\mathbf{K}$, um morfismo de (X, e, f) em (X', e', f') é uma função $\sigma : X \to X'$ tal que $\sigma(e) = e'$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\
X \arrow[r, "\sigma"'] & X'
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Seja $s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ a função definida por $s(x) = x + 1$, para todo $x \in \mathbb{N}_0$. Mostre que $(\mathbb{N}_0, 0, s)$ é um objeto inicial de $\mathbf{K}$.

3.25. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Mostre que se $f : T \to I$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.

3.26. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama ao lado

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[loop above, "\mathrm{id}_R"] & \\
P \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_P"] & & Q \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "j"] \arrow[ll, shift right, "v"'] \arrow[ll, shift left, "u"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Q"] \\
& S \arrow[loop below, "\mathrm{id}_S"] &
\end{tikzcd}$$

Diga, justificando, se:

(a) A categoria $\mathbf{C}$ tem objetos iniciais e objetos terminais.

(b) $(P, (f, g))$ é um produto de R e S.

(c) $(S, (g, j))$ é um coproduto de P e Q.

3.27. Dados objetos A e B da categoria **Set**, seja $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B\}$ e sejam p_A e p_B as funções definidas por

$$\begin{array}{rcl} p_A : A \times B & \to & A \\ (a, b) & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} p_B : A \times B & \to & B \\ (a, b) & \mapsto & b \end{array}.$$

Mostre que $(A \times B, (p_A, p_B))$ é um produto dos objetos A e B.

3.28. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto terminal T. Para qualquer objeto A de $\mathbf{C}$, mostre que:

(a) o par $(A, (\xi^A, \mathrm{id}_A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \to T$, é um produto de T e A.

(b) o par $(A, (\mathrm{id}_A, \xi^A))$, onde ξ^A é o único morfismo $A \to T$, é um produto de A e T.

(c) Se $(T \times A, (p_1, p_2))$ é um produto de T e A e $(A \times T, ({p'}_1, {p'}_2))$ é um produto de A e T, então $T \times A \cong A \cong A \times T$.

3.29. Na categoria $\mathbf{Set}$, sejam A_1, A_2 conjuntos, $A_1 + A_2$ o conjunto definido por

$$A_1 + A_2 = \{(a, 1) : a \in A_1\} \cup \{(b, 2) \,|\, b \in A_2\}$$

e $i_1 : A_1 \to A_1 + A_2$, $i_2 : A_2 \to A_1 + A_2$ as funções definidas por

$$i_1(a) = (a, 1) \quad \text{e} \quad i_2(b) = (b, 2),$$

para quaisquer $a \in A_1$ e $b \in A_2$. Mostre que $(A_1 + A_2, (i_1, i_2))$ é um coproduto de A_1 e A_2.

3.30. Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$, admitindo coproduto $(A + B, (i_A, i_B))$ e tais que $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(B, A) \neq \emptyset$. Mostre que i_A é invertível à esquerda e, portanto, é um monomorfismo.

Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2024/2025

Álgebra Universal e Categorias

folha 13

3.31. Na categoria $\mathbf{Set}$, sejam $f, g : A \to B$ funções e seja $I = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$. Mostre que o par (I, i), onde i é a função inclusão de I em A

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f e g.

3.32. Seja **Set**$_0$ a subcategoria plena de **Set** cujos objetos são os conjuntos não vazios. Mostre que na categoria **Set**$_0$ há pares de morfismos que não têm igualizador.

3.33. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto zero 0. Mostre que se $f : A \to B$ é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo), então o igualizador (respetivamente, co-igualizador) de f e do morfismo nulo de A em B é o par $(0, 0_{0,A})$ (respetivamente, o par $(0, 0_{B,0})$).

3.34. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f, g : A \to B$ morfismos em $\mathbf{C}$ e (I, i) um igualizador de f e g. Mostre que se $\alpha : B \to C$ é um monomorfismo, então (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

3.35. Sejam $f, g : A \to B$ e $i : I \to A$ morfismos numa categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g), então (I, i) é um igualizador de f e g .

3.36. Na categoria $\mathbf{Set}$, sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ funções. Considere o par $(P, (f', g'))$, onde

$$P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

e $f' : P \to A$ e $g' : P \to B$ são as funções definidas por

$$f'(a, b) = a \text{ e } g'(a, b) = b,$$

para todo $(a, b) \in P$. Mostre que o par $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g).

3.37. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes:

(A1) f é um monomorfismo.

(A2) $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f).

3.38. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto terminal T e A e B objetos de $\mathbf{C}$. Mostre que

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\
A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano se e só se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B.

3.39. Numa categoria $\mathbf{C}$, considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h_2"] \arrow[dd, "h_1"'] \arrow[dr, "h"] & & B_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
& C \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dl, "g_1"] & \\
B_1 \arrow[rr, "f_1"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Mostre que se o diagrama anterior é comutativo e $(D, (f_1, f_2))$ é uma soma amalgamada de (h_1, h_2), então $(D, (f_1, f_2))$ é uma soma amalgamada de (g_1, g_2).

Álgebra Universal e Categorias

folha 14

3.40. Considere um c.p.o. $(P, \leq)$ visto como uma categoria $\mathbf{P}$. Sejam $F_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{P}) \to \mathrm{Obj}(\textsf{\textbf{Set}})$ a função que a cada objeto a de $\mathbf{P}$ associa o conjunto $\{a\}$ e $F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{P}) \to \mathrm{Mor}(\textsf{\textbf{Set}})$ a função que a cada $\mathbf{P}$-morfismo $f : a \to b$ associa a função

$$F_{Mor}(f) : \begin{array}{ccc} \{a\} & \to & \{b\} \\ a & \mapsto & b \end{array}.$$

(a) Mostre que o par de funções $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{P}$ em **Set**.

(b) Diga se o funtor F é fiel e se é pleno.

3.41. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e A um objeto de $\mathbf{D}$. Sejam $F_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ a função que a cada objeto X de $\mathbf{C}$ associa o objeto A e $F_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{D})$ a função que a cada C-morfismo $f : X \to Y$ associa o morfismo $F_{Mor}(f) = \mathrm{id}_A$.

(a) Mostre que o par de funções $F = (F_{Obj}, F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$.

(b) Diga se o funtor F é fiel e se é pleno para quaisquer categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ e para qualquer objeto A de $\mathbf{D}$.

3.42. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria localmente pequena, A um objeto de $\mathbf{C}$ e considere as funções

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A, -)_{Obj} : \mathrm{Obj}(\mathbf{C}) & \to & \mathrm{Obj}(\textsf{\textbf{Set}}) \\ X & \mapsto & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, X), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A, -)_{Mor} : \mathrm{Mor}(\mathbf{C}) & \to & \mathrm{Mor}(\textsf{\textbf{Set}}) \\ f : X \to Y & \mapsto & \begin{array}{rcl} Mor_{\mathbf{C}}(A, f) : \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, X) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A, Y) \\ h & \mapsto & f \circ h. \end{array} \end{array}$$

(a) Mostre que o par $Mor_{\mathbf{C}}(A, -) = (Mor_{\mathbf{C}}(A, -)_{Obj}, Mor_{\mathbf{C}}(A, -)_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{C}$ em **Set**.

(b) Diga se o funtor $Mor_{\mathbf{C}}(A, -)$ é fiel e se é pleno para qualquer categoria $\mathbf{C}$ localmente pequena e para qualquer objeto A de $\mathbf{C}$.

3.43. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias.

(a) Defina os funtores projeção $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e $\mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{D}$.

(b) Diga se os funtores definidos na alínea anterior são fieis e se são plenos para quaisquer categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$.

3.44. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ categorias e F : $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, G : $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ funtores. Mostre que o par $(G_{Obj} \circ F_{Obj}, G_{Mor} \circ F_{Mor})$ é um funtor de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{C}$.
A este funtor dá-se a designação de *funtor composição de G com F* e representa-se por $G \circ F$.

3.45. Mostre que se T é um objeto terminal de uma categoria $\mathbf{C}$, então as categorias $\mathbf{C}/T$ e $\mathbf{C}$ são isomorfas.

3.46. Sejam $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}'$ e $\mathbf{C}''$ categorias. Mostre que são isomorfas as categorias:

(a) $\mathbf{C} \times \mathbf{C}'$ e $\mathbf{C}' \times \mathbf{C}$.

(b) $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}' \times \mathbf{C}'')$ e $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}') \times \mathbf{C}''$.

3.47. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e F : **Set** $\to \mathbf{C}$ um functor. Mostre que:

(a) Se f é um monomorfismo com domínio não vazio em **Set**, então $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathbf{C}$.

(b) Se f é um epimorfismo em **Set**, então $F(f)$ é um epimorfismo em $\mathbf{C}$.

3.48. Sejam $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ categorias e F : $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, G : $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ funtores. Mostre que:

(a) Se $G \circ F$ é fiel, então F é fiel.

(b) Se G e F são plenos, então $G \circ F$ é pleno.

3.49. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se F é fiel, então F preserva e reflete triângulos comutativos.

(b) Se F é fiel, então $F(f)$ é um inverso direito (esquerdo) de $F(g)$ se e só se f é um inverso direito (esquerdo) de g.

(c) Se F é fiel e pleno, então f tem um inverso direito (esquerdo) se e só se $F(f)$ tem um inverso direito (esquerdo).