Universidade do Minho — **Cursos: CC & MAT**

DMA — **Probabilidades e Aplicações** — **2015/2016**

Exame de Recurso - 27/Janeiro/2016

Nome: **Nº** **Curso:**

Responda às questões 1, 2 *e* 3 *na folha de teste e à questão* 4 *neste enunciado. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do* R *que usar. O exame tem a duração de* 2h30m.

---

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar quatro lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.
   (a) Identifique o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associado a esta experiência aleatória.
   (b) Identifique, justificando, três acontecimentos independentes decorrentes desta experiência.
   (c) Seja X a v.a.r. que representa o número de faces par obtidas nos 4 lançamentos do dado.
      i. Determine a função de probabilidade e a função de distribuição da v.a.r. X.
      ii. Determine os quartis de X.
      iii. Considere agora Z a v.a.r. que representa a soma das faces obtidas nos 4 lançamentos do dado. X e Z são independentes? Justifique.

2. O Sr. João é dono de uma farmácia e verificou que o número de embalagens vendidas, por dia, de um certo medicamento é uma v.a.r. com distribuição $Poisson(1)$.
   (a) Determine a probabilidade de, num dia, não se vender qualquer embalagem deste medicamento nesta farmácia.
   (b) Determine a probabilidade de, num dia em que se vendeu pelo menos uma embalagem deste medicamento, se terem vendido menos de 5 embalagens.
   (c) Determine a probabilidade de, em 10 dias de vendas nesta farmácia, haver dois dias em que não se vendeu qualquer embalagem e haver três dias em que se venderam mais de 2 embalagens (assuma que as quantidades de embalagens vendidas em dias diferentes são independentes).
   (d) O Sr. João estendeu o seu negócio e tem agora 50 farmácias espalhadas pelo país. Sabe-se que as quantidades de embalagens deste medicamento vendidas diariamente em farmácias distintas são v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com $Poisson(1)$. Calcule a probabilidade de, num dia escolhido ao acaso, o número total de embalagens vendidas nas 50 farmácias ser superior a 40.

3. Seja Y uma v.a.r. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(y) = \begin{cases} 2e^{-2(y-1)} & se \quad y > \beta \\ 0 & se \quad y \leq \beta \end{cases}.$$

   (a) Mostre que $\beta = 1$.
   (b) Determine a função de distribuição e identifique a mediana de Y.
   (c) Identifique a lei da v.a.r. $T = 2Y - 2$.
   (d) Seja X uma v.a.r. independente e identicamente distribuída com Y. Calcule $P(Y+X > 1)$.

(v.s.f.f.)

4. Seja Ω um conjunto e $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos de Ω.

   (a) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se $\mathcal{A}$ é um π-sistema sobre Ω então $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra sobre Ω".

   (b) Considere agora $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma v.a.r. e F a função de distribuição de X.

      i. Mostre que se E e G são acontecimentos independentes então $\overline{E}$ e $\overline{G}$ também são acontecimentos independentes.

      ii. Mostre que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$