Exercício 6.1 Seja $f(x) = x^2$.

a) Calcule $f'(-1)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

b) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

Exercício 6.2 Verifique se a função $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ é derivável em $x = 1$.

Exercício 6.3 Calcule, onde existir, a derivada de cada uma das funções:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 7$;

b) $f(x) = (6x + 1)^5$;

c) $f(x) = \sqrt{x} + x^\pi$;

d) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{x}}$;

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

g) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$;

h) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$;

i) $f(x) = x^3 e^x$;

j) $f(x) = x \ln x$;

k) $f(x) = x \ln(x^2 + x + 1)$;

l) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$;

m) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

n) $f(x) = 5x^3 \cos(2x)$;

o) $f(x) = \frac{e^x \operatorname{sen} x}{\ln x}$;

p) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;

q) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2))$;

r) $f(x) = x^{-\frac{2}{3}} e^x \operatorname{sen} x$.

Exercício 6.4 Considere a função $f(x) = 1 - e^x$.

a) Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das abcissas.

b) Determine uma equação da reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Exercício 6.5 Determine a função derivada de cada uma das seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2+1}, & \text{se } x < 3 \\ -3x, & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x^3, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 16, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Exercício 6.6 Determine a e b de modo que a função $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x < 3 \\ ax + b, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$ seja derivável.

Exercício 6.7 Estude as funções (indicando domínio e contradomínio, extremos e intervalos de monotonia, pontos de inflexão e concavidade; esboce o gráfico) definidas por:

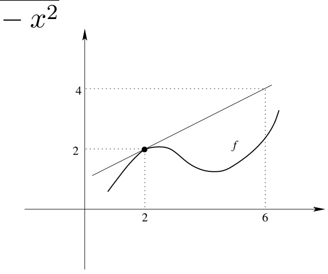
a) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

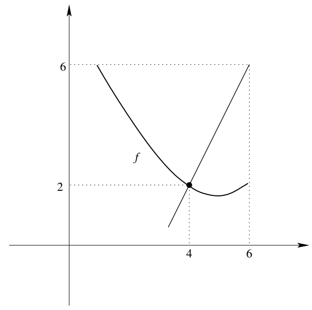
c) $h(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

d) $j(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

Exercício 6.8 A figura ao lado representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (2, 2)$. Sendo $g(x) = f(x^2 - 2)$, qual o valor da derivada $g'(2)$?



Exercício 6.9 A figura ao lado representa o gráfico de uma função f e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto $(x, y) = (4, 2)$. Sendo $g(x) = f(5x - x^2)$, qual o valor da derivada $g'(1)$?



Exercício 6.10 De uma função $f :]-2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ sabe-se que

$$f(-1) = 0 \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{1 + \ln(x+2)}{x+2}.$$

a) Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

b) Poderá concluir que f é contínua em $x = -1$? Justifique.

c) Calcule $f''(2)$.

Exercício 6.11 Mostre que:

a) $\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

c) $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$;

d) $\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}$;

e) $\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

f) $\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$;

h) $\operatorname{argcoth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercício 6.12 Mostre que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

Exercício 6.13 Mostre que o polinómio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ possui exatamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

Exercício 6.14 Considere o polinómio $p(x) = x^5 + b\,x + 4,\ x \in \mathbb{R}$, com $b \in \mathbb{R}$.

a) Justifique que o polinómio p tem pelo menos um zero real.

b) Indique, justificando, um valor de b para o qual a equação $p(x) = 0$ tem exatamente uma raiz real no intervalo $]0, 1[$.

c) Mostre que para esse valor de b, o polinómio p tem exatamente três zeros reais.

Exercício 6.15

a) Aplicando o teorema de Rolle demonstre que a equação $x^3 - 3x + b = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real no intervalo $]-1, 1[$, qualquer que seja o valor de b.

b) Indique para que valores de b existe exatamente uma raiz real da equação em $]-1, 1[$.

Exercício 6.16 Indique se existe uma função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0, 1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1, 2]$.

Exercício 6.17 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$.

a) Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$.

b) Mostre que $f'(x)$ nunca se anula em $]-1, 1[$.

c) Explique porque não há qualquer contradição com o teorema de Rolle.

Exercício 6.18 Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = x - e^{x-1}$.

a) Verifique que $g(1) = g'(1) = 0$.

b) Mostre que 1 é o único zero de g.

Exercício 6.19 Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = g(a)$. Mostre que $f(x) < g(x)$ para todo $x > a$.

Exercício 6.20 Mostre, recorrendo ao teorema de Lagrange, que:

a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad e^x > 1 + x$;

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$;

c) $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$.

Exercício 6.21 Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^x & \text{se } x < 0, \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Verifique que f é uma função derivável.

c) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f.

d) Determine o contradomínio de f.

Exercício 6.22 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{4x^2 - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - 1}$;

b) $\lim_{x\to 1} \Big(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\Big)$;

c) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$;

d) $\lim_{x\to 0^+} x^x$;

e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$;

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\,\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$;

h) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{arcsen} x\ \operatorname{cotg} x)$;

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} 5x)}{\ln(\operatorname{sen} 6x)}$;

j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x\ \operatorname{sen} x}$;

k) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - 1 + 5x^2}{x^3}$;

l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x} - \operatorname{sen}^2\sqrt{x}}{x}$;

m) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen}^3 x}{x^3}$;

n) $\lim_{x\to 0} \Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\Big)$;

o) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$;

p) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$;

q) $\lim_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 3x}{x \operatorname{sen} 2x}$;

r) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x + 2\operatorname{sen} x}$.

Exercício 6.23 Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x\ \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2\ \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que f e g são ambas contínuas em 0.

b) Mostre que f não é derivável em 0.

c) Mostre que g é derivável em 0 e indique $g'(0)$.

Exercício 6.24 Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

a) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável apenas no ponto 1;

b) uma função $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que $f(2) = f(3)$ e $f'(x) \geq x$, para todo o $x \in [2,3]$;

c) uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, não decrescente, tal que $f'(x) < 0$, para todo o $x \in D$;

d) uma função $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, com pelo menos dois zeros, mas cuja derivada nunca se anula;

e) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que o conjunto $\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) = 0\}$ é finito e o conjunto $\{x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = 0\}$ é infinito.

Exercício 6.25 Indique se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes:

a) a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } x < 1 \\ 4x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é derivável no ponto 1;

b) existe uma função $f : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que $f'(x) = 1$ para $x \in [1,3]$ e $f'(x) = -1$ para $x \in]3,4]$;

c) existe $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, não constante, tal que $f'(x) = 0$ para $x \in D$;

d) se $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável e $f'(x) > 0$ para todo o $x \in [0,1]$, então $f([0,1]) = [f(0), f(1)]$.