Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Licenciatura em Ciências da Computação
21/05/2024
Segundo Teste

Nome: Número:

1. Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

(a) Se a_1, a_2, b_1, b_2 são inteiros tais que $a_1 \mid b_1$ e $a_2 \mid b_2$ então $a_1a_2 \mid b_1b_2$.

(b) O último dígito de 3^{20951} é 1.

(c) Se $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e se m.d.c.$(b, n) = 1$, então a congruência $ax \equiv b \pmod n$ tem uma única solução módulo n.

(d) Se $n > 2$ e $(n-1)! \equiv 1 \pmod n$ então n não é primo.

a) Verdadeiro.

Como $a_1 \mid b_1$ então existe $c_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b_1 = a_1c_1$
$a_2 \mid b_2$ então existe $c_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b_2 = a_2c_2$
Logo $b_1b_2 = a_1a_2(c_1c_2)$ e portanto $a_1a_2 \mid b_1b_2$.

b) Falso.

Temos que $3^2 = -1 \pmod{10}$ e que $20951 = 2 \times 10475 + 1$
Logo $(3^2)^{10475} \equiv (-1)^{10475} \pmod{10}$, ou seja, $3^{20950} \equiv -1 \pmod{10}$
e, assim, $3^{20951} \equiv -3 \pmod{10}$. Portanto $3^{20951} \equiv 7 \pmod{10}$ e o último dígito de 3^{20951} é 7.

c) Falso.

Consideremos a congruência $2x \equiv 1 \pmod 2$. Temos que m.d.c$(1,2) = 1$.
No entanto a congruência não tem solução pois $2 \nmid 2x-1$, qualquer que seja $x \in \mathbb{Z}$, uma vez que $2x-1$ é um número ímpar.

d) Verdadeiro.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que $\exists\, n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$, $(n-1)! \equiv 1 \pmod n$ e n é primo.
Se n é primo então pelo Teorema de Wilson, $(n-1)! \equiv -1 \pmod n$
Logo $1 \equiv -1 \pmod n$, ou seja, $n \mid 2$ o que é absurdo.

2. Apresente a solução geral da equação diofantina $42x + 33y = 201$.

Temos $42x+33y = 201 \iff 14x + 11y = 67$.
Como m.d.c $(14,11) = 1$ e $1 \mid 67$ então a equação diofantina $14x + 11y = 67$ tem solução.
Procuremos uma solução particular, usando o algoritmo de Euclides.

$$14 = 11 + 3 \qquad\qquad 1 = 3-2 = 3-(11-3\times 3) =$$
$$11 = 3\times 3 + 2 \qquad\qquad = -11 + 4\times 3 = -11 + 4\times(14-11)$$
$$3 = 2+1 \qquad\qquad = 4\times 14 - 5\times 11$$

Logo $67 = 268\times 14 - 335\times 11$ e $(268, -335)$ é uma solução particular. Sabemos então que a solução geral é dada por:

$$\begin{cases} x = 268 - 11t \\ y = -335 + 14t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{Z}$$

3. Apresente e demonstre o critério de divisibilidade por 4.

Consideremos o inteiro z cuja representação decimal é dada por $z = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$, com $a_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $i = 0 \ldots n$, ou seja, $z = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$. Temos que:

$$10 \equiv 2 \pmod 4$$
$$10^2 \equiv 4 \pmod 4 \iff 10^2 \equiv 0 \pmod 4$$
$$10^k \equiv 0 \pmod 4 \qquad k = 3, 4, 5, \ldots$$

Assim $a_k 10^{k-1} \equiv 0 \pmod 4 \quad \forall k \in \{2,3,4,5,6\ldots\}$
$$a_1 10 \equiv 2a_1 \pmod 4$$
$$a_0 \equiv a_0 \pmod 4$$

Portanto: $z \equiv 2a_1 + a_0 \pmod 4$.

4. Use o Teorema Chinês dos Restos para determinar a solução geral do sistema de congruências lineares

$$\begin{cases} 7x \equiv 1 \pmod 3 \\ 2x \equiv 4 \pmod{14} \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

e verifique que a maior solução negativa que encontrou é de facto solução do sistema.

O sistema não pode ser resolvido pelo TCR tal como está apresentado.

Temos:

$7x \equiv 1 \pmod 3 \iff 6x + x \equiv 1 \pmod 3$

$\iff x \equiv 1 \pmod 3$, pois $3 \mid 6x$

$2x \equiv 4 \pmod{14} \iff x \equiv 2 \pmod 7$, lei do corte

Portanto, o sistema proposto é equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 2 \pmod 7 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

3, 7 e 5 são números primos logo são primos entre si.

O TCR garante que este sistema tem uma única solução módulo $N = 3 \times 7 \times 5 = 105$.

$n_1 = 3$	$a_1 = 1$	$N_1 = 35$	$35x_1 \equiv 1 \pmod 3$	$x_1 = -1$
$n_2 = 7$	$a_2 = 2$	$N_2 = 15$	$15x_2 \equiv 1 \pmod 7$	$x_2 = 1$
$n_3 = 5$	$a_3 = 3$	$N_3 = 21$	$21x_3 \equiv 1 \pmod 5$	$x_3 = 1$

O TCR diz-nos ainda que

$$x_0 = N_1 a_1 x_1 + N_2 a_2 x_2 + N_3 a_3 x_3 =$$
$$= 35 \times 1 \times (-1) + 15 \times 2 \times 1 + 21 \times 3 \times 1 = -35 + 30 + 63 = 58$$

é solução particular do sistema

A solução geral é então dada por $\{58 + 105t \mid t \in \mathbb{Z}\}$.

A maior solução negativa é $58 - 105 = -47$

Temos $7 \times (-47) - 1 = -330$ e $3 \mid -330$ ✓

$2 \times (-47) - 4 = -98$ e $14 \mid -98$ ✓

$-47 - 3 = -50$ e $5 \mid -50$ ✓

Está verificado que -47 é, de facto, solução do sistema.

5. Seja $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a função de Euler. Justifique que se n é ímpar então $\phi(2n) = \phi(n)$.

Se n é ímpar então $m.d.c.(2, n) = 1$. Logo sabemos que $\phi(2n) = \phi(2)\phi(n)$. Ora $\phi(2) = 2 - 1 = 1$. Logo $\phi(2n) = \phi(n)$.

$\square$