Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
9 de novembro de 2022

Teste de Álgebra Linear CC

duração: 2 horas

Nome do aluno: ______________________________ Número: ________

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), assinalando a opção conveniente.

		V	F
1.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $A+B$ é uma matriz triangular superior, então A e B são matrizes triangulares superiores.	☐	☒
2.	Existem $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $(2AB)^2 \neq 4A^2B^2$.	☒	☐
3.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se A e B são simétricas, então $AB - BA$ é antissimétrica.	☒	☐
4.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se $car(A) + car(B) = 2n$, então A e B são invertíveis.	☒	☐
5.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\det(A) + \det(-A) = 0$.	☐	☒
6.	Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, se A^2 é invertível, então A^3 é invertível.	☒	☐
7.	Seja $Ax = b$ um sistema de 5 equações lineares em 4 incógnitas e coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $car([A\|b]) = 5$, então o sistema $Ax = b$ é possível.	☐	☒
8.	Seja $Ax = 0$ um sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas e coeficientes em $\mathbb{R}$. Se $\|A\| \neq 0$, então o sistema $Ax = b$ é possível, para todo $b \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$.	☒	☐

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $C = [c_{ij}]$ a matriz real do tipo 2×3 tal que, para quaisquer $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$,

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

(a) Determine a matriz $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $X + I_2 = 2(X - BC^T)$.

Por definição de C, tem-se

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} X + I_2 = 2(X - BC^T) &\Leftrightarrow X + I_2 = 2X - 2BC^T \\ &\Leftrightarrow -X + I_2 = -2BC^T \\ &\Leftrightarrow X = 2BC^T + I_2 \\ &\Leftrightarrow X = 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a matriz X nas condições indicadas é

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Calcule $\det(A)$ utilizando o Teorema de Laplace.

Desenvolvendo o Teorema de Laplace ao longo da linha 1, temos

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (0 \times (-1) - (-2) \times 3) + (1 \times (-1) - (-2) \times (-2)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(c) Justifique que a matriz A é invertível e determine a sua inversa utilizando o método de Gauss-Jordan.

A matriz A é uma matriz quadrada tal que $|A| \neq 0$, logo A é invertível.
Aplicando o método de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$, temos

$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 + 2l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + 2l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se A e AB são matrizes ortogonais, então B é ortogonal.

Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diz-se uma matriz ortogonal se $XX^T = I_n$ e $X^TX = I_n$.

Assim, se A e AB são matrizes ortogonais, tem-se

$$\begin{aligned} &AA^T = I_n = A^TA,\\ &(AB)(AB)^T = I_n = (AB)^T(AB). \end{aligned}$$

Então, atendendo a que

$$\begin{aligned} (AB)(AB)^T = I_n &\Rightarrow (AB)(B^TA^T) = I_n\\ &\Rightarrow A^T(AB)(B^TA^T)A = A^TA\\ &\Rightarrow (A^TA)(BB^T)(A^TA) = A^TA\\ &\Rightarrow I_n(BB^T)I_n = I_n\\ &\Rightarrow BB^T = I_n, \end{aligned}$$

temos $BB^T = I_n$.
Por outro lado, como

$$\begin{aligned} (AB)^T(AB) = I_n &\Rightarrow (B^TA^T)(AB) = I_n\\ &\Rightarrow B^T(A^TA)B = I_n\\ &\Rightarrow B^TI_nB = I_n\\ &\Rightarrow B^TB = I_n, \end{aligned}$$

temos $B^TB = I_n$.

Uma vez que $BB^T = I_n$ e $B^TB = I_n$, então B é ortogonal.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais correspondente à equação matricial $A_\alpha x = b_\beta$, onde

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & \alpha^2-2\\ -1 & 3 & \alpha \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b_\beta = \begin{bmatrix} 1\\ \beta-2\\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta o sistema $A_\alpha x = b_\beta$ em função dos parâmetros α e β.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A_\alpha|b_\beta]$, temos

$$[A_\alpha|b_\beta] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & \alpha^2-2 & \beta-2\\ -1 & 3 & \alpha & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2\to l_2+l_1\\ l_3\to l_3+l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \beta-1\\ 0 & 1 & \alpha+1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \alpha+1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \beta-1 \end{array}\right].$$

O sistema $A_\alpha x = b_\beta$ é:

- possível se e só se $car(A_\alpha) = car([A_\alpha|b_\beta])$;
- possível determinado se e só se $car(A_\alpha) = car([A_\alpha|b_\beta]) = 3 =$ nº incógnitas;
- possível indeterminado se e só se $car(A_\alpha) = car([A_\alpha|b_\beta]) < 3 =$ nº incógnitas.

Assim, o sistema $A_\alpha x = b_\beta$ é:

- impossível, para quaisquer $\alpha \in \{-1, 1\}$ e $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ (nestes casos temos $car(A_\alpha) = 2 \neq 3 = car([A_\alpha|b_\beta])$);

- possível determinado, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (neste casos temos $car(A_\alpha) = car([A_\alpha|b_\beta]) = 3$);
- possível indeterminado, para qualquer $\alpha \in \{-1, 1\}$ e $\beta = 1$ (neste casos temos $car(A_\alpha) = 2 = car([A_\alpha|b_\beta]) < 3$);

(b) Resolva o sistema $A_\alpha x = 0$ para $\alpha = 1$.

Aplicando o método de eliminaçao de Gauss à matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

e considerando os cálculos da alínea anterior, concluímos que a matriz A_1 é equivalente por linhas à matriz

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema homogéneo com matriz simples U, e equivalente ao sistema $A_1 x = 0$, é o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

donde obtemos

$$\begin{cases} x_1 = -5x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}.$$

Logo

$$\text{Sol}_{(A_1 x = 0)} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a = -5c, b = -2c\} = \{(-5c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, c \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Verifique que $(1, 0, 0)$ é solução do sistema correspondente a $A_1 x = b_1$ e, sem efetuar cálculos, indique o conjunto de soluções deste sistema. Justifique.

Uma vez que

$$A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = b_1,$$

então $(1, 0, 0)$ é solução do sistema $A_1 x = b_1$.

Se y é uma solução do sistema $A_1 x = b_1$, então w é solução do sistema $A_1 x = b_1$ se e só se $w = y + z$ para alguma solução z do sistema $A_1 x = 0$. Assim,

$$\text{Sol}_{(A_1 x = b_1)} = \{(1, 0, 0) + (-5c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, c \in \mathbb{R}\}.$$

4. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrizes tais que $\det(A) = 7$, $\det(B) = 3$ e $C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

Seja $D = \begin{bmatrix} \times & 2 \\ \times & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz real quadrada de ordem 2 cuja primeira coluna é desconhecida e tal que $\det(D) = 3$.

(a) Calcule $\det(2A^{-1}B^T)$.

Para quaisquer $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $|XY| = |X||Y|$,
- $|X^T| = |X|$,
- $|\alpha X| = \alpha^n |X|$,
- se X é invertível, $|X^{-1}| = |X|^{-1}$.

Logo

$$|2A^{-1}B^T| = 2^3|A^{-1}||B^T| = 8 \times \frac{1}{7} \times 3 = \frac{24}{7}.$$

(b) Sabendo que $|C| = 5$, calcule $\begin{vmatrix} 3a+c & c & b-c \\ 6d+2f & 2f & 2e-2f \\ 3g+i & i & h-i \end{vmatrix}$.

Considerando as propriedades dos determinantes, temos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \overset{c_2 \leftrightarrow c_3}{=} -\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} \overset{c_1 \to 3c_1}{=} -\tfrac{1}{3}\begin{vmatrix} 3a & c & b \\ 3d & f & e \\ 3g & i & h \end{vmatrix}$$

$$\overset{l_2 \to 2l_2}{=} -\tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 3a & c & b \\ 6d & 2f & 2e \\ 3g & i & h \end{vmatrix} \overset{\substack{c_3 \to c_3 - c_2 \\ c_1 \to c_1 + c_2}}{=} -\tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 3a+c & c & b-c \\ 6d+2f & 2f & 2e-2f \\ 3g+i & i & h-i \end{vmatrix}$$

Logo

$$\begin{vmatrix} 3a+c & c & b-c \\ 6d+2f & 2f & 2e-2f \\ 3g+i & i & h-i \end{vmatrix} = (-6) \times 5 = -30.$$

(c) Justifique que D é invertível. Para toda a matriz D nas condições indicadas, determine a primeira linha da matriz D^{-1}, isto é, determine os elementos $(D^{-1})_{11}$ e $(D^{-1})_{12}$.

Uma vez que D é uma matriz quadrada e $|D| \neq 0$, então D é invertível.

Sendo D invertível, tem-se

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|}\mathrm{Adj}(D) = \frac{1}{|D|}[\hat{d}_{ij}]^T,$$

onde, para quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$, $\hat{d}_{ij} = (-1)^{i+j} D(i|j)$. Então, uma vez que

$$\hat{d}_{11} = (-1)^{1+1} \det[1] = 1 \text{ e } \hat{d}_{21} = (-1)^{2+1} \det[2] = -2,$$

segue que

$$(D^{-1})_{11} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ e } (D^{-1})_{12} = \frac{1}{3} \times (-2) = -\frac{2}{3}.$$

Cotação - Grupo I: $8 \times 0,75$.

Grupo II: 1.$(1,5 + 1,5 + 1,5)$; 2.(1,75); 3.$(1,75 + 1,5 + 0,75)$; 4.$(1,0 + 1,5 + 1,25)$.