



Universidade do Minho  
Escola de Ciências  
DMat

Exame  
27 · 01 · 2020

Cálculo  
LCC  
2019/2020

Duração: 2 horas

---

Nome:

Número:

---

- Responda às questões 1, 3, 5, 6 e 7 justificando devidamente as suas respostas.
- Nas perguntas de verdadeiro/falso cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0.25 valores.

Questão 1 [2.5 valores] Considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 6x + 5 \geq 0 \wedge |x - 4| > 2\}.$$

a) Mostre que  $A = ]-\infty, 1] \cup ]6, +\infty[$ .

b) Determine o conjunto dos pontos de acumulação e o conjunto dos pontos interiores de  $A$ .

c)  $A$  é um conjunto aberto? Porquê?

Questão 2 [4 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa:

V F

- a) Se  $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1\}$ , então a sucessão  $(u_n)_n$  é convergente. ☐ ☐
- b) Se  $(u_n)_n$  é uma sucessão limitada mas não monótona, então  $(u_n)_n$  é divergente. ☐ ☐
- c) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$  são convergentes, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)$  é convergente. ☐ ☐
- d) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  é convergente, então  $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$  é convergente. ☐ ☐

Questão 3 [1.5 valores] Estude a natureza da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2 + 1}$ .

Questão 4 [4 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

V F

- a) Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são duas funções descontínuas, então  $f \circ g$  é uma função descontínua. ☐ ☐
- b) Se  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável, então  $f$  é contínua. ☐ ☐
- c) Se  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função derivável, então  $f$  é primitivável. ☐ ☐
- d) Seja  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 4$ .  
Então  $\int_{-1}^1 f(2x) dx = 2$ . ☐ ☐

Questão 5 [2 valores] Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0, \\ \pi e^{x^2+x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

a) Verifique que a função  $f$  é contínua.

b) Mostre que  $f$  não é derivável no ponto 0.

Questão 6 [3 valores] Calcule cada um dos seguintes integrais indefinidos:

a)  $\int \frac{x \ln(1 + 4x^2)}{1 + 4x^2} dx;$

b)  $\int e^x \cos x \, dx$ .

Questão 7 [3 valores] Considere a região do plano  $R$  limitada pelas curvas

$$y = |x| + 1 \text{ e } y = -x^2 + 3.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região  $R$ .

b) Calcule o valor da área da região  $R$ .

c) **Estabeleça** um integral, ou a soma de integrais, que lhe permita calcular o valor do perímetro da região  $R$ . (Não calcule o valor do perímetro)

---

(FIM)