Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação
Cálculo
2023/24

Derivadas e funções trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas

1. Calcule as derivadas (onde existirem) das seguintes funções:

(a) $f(x) = (6x+1)^5$

(b) $f(x) = 5x^3 \cos(2x)$

(c) $f(x) = \operatorname{tg} x$

(d) $f(x) = \sqrt{x-3}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$

(f) $f(x) = \log(e^{3x} + x^2)$

(g) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$

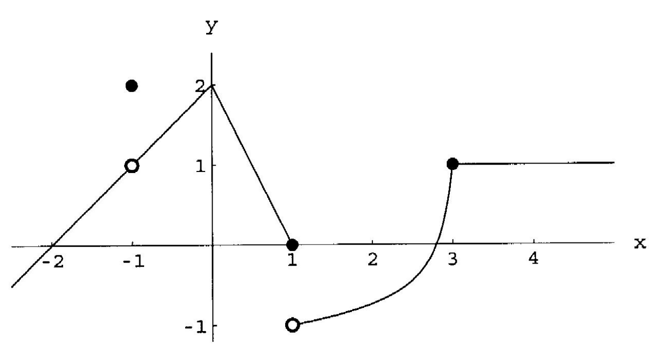
(h) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x < 3 \\ 3x & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$

2. Encontre equações para as retas tangente e normal ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ sendo:

(a) $f(x) = x^2 - 1$ e $a = 1$

(b) $f(x) = 1/x^2$ e $a = -2$

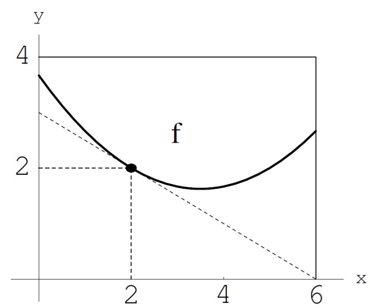
3. Considere uma função com o seguinte gráfico:



(a) Em que pontos f não é contínua?

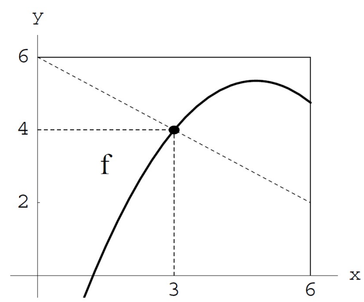
(b) Em que pontos f é contínua mas não derivável?

4. A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta tangente a esse gráfico no ponto $(x, y) = (2, 2)$.



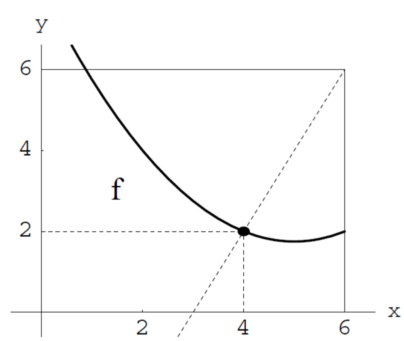
Sendo $g(x) = f(x^2 - 2)$, qual o valor da derivada $g'(2)$?

5. A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto $(x, y) = (3, 4)$.



Sendo $g(x) = f(4 - 2x + x^3)$, qual o valor da derivada $g'(1)$?

6. A figura seguinte representa o gráfico de uma função f e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto $(x, y) = (4, 2)$.



Sendo $g(x) = \left[f(-4 + 2x + x^2)\right]^2$, qual o valor da derivada $g'(2)$?

7. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5 + 3x + x^5$. Calcule $(f^{-1})'(5)$.

8. Para cada uma das funções seguintes

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 2x^3 + 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$ e $a = 1$

(2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ (x+1)^2 & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$ e $a = -1$

(3) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$ e $a = 2$

(a) Diga se f é contínua no ponto a.
(b) Diga se f é derivável no ponto a.

9. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que f e g são ambas contínuas em 0.
(b) Mostre que f não é derivável em 0.
(c) Mostre que g é derivável em 0 e indique $g'(0)$.

10. Considere o polinómio $p(x) = x^5 + b\,x + 4$, $x \in \mathbb{R}$, com $b \in \mathbb{R}$.

(a) Justifique que o polinómio p tem pelo menos uma raiz real.
(b) Indique, justificando, um valor de b para o qual o polinómio p tenha exatamente uma raiz no intervalo $]0, 1[$.
(c) Mostre que para esse valor de b, o polinómio p tem exatamente três raízes reais.

11. (a) Aplicando o Teorema de Rolle demonstre que a equação $x^3 - 3x + b = 0$ não pode ter mais do que uma raiz real no intervalo $]-1, 1[$ qualquer que seja o valor de b.
(b) Indique para que valores de b existe exatamente uma raiz real da equação em $]-1, 1[$.

12. Usando o teorema de Rolle mostre que a equação $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ possui exatamente duas raízes reais.

13. Mostre que o polinómio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, possui exatamente um zero no intervalo $]1, 3[$.

14. Existe alguma função derivável $g : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça as seguintes condições

$g(0) = -3 \qquad g(5) = 5 \qquad \text{e} \qquad g'(x) \leq 1, \quad x \in]0,5[$? Justifique.

15. Utilizando o Teorema de Lagrange, mostre que:

(a) $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \quad e^x > 1 + x;$

(b) $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \dfrac{x^2}{2} < \log\,(1+x) < x;$

(c) $\forall\, x, y \in \mathbb{R} \quad |\text{sen}\, x - \text{sen}\, y| \leq |x - y|.$

16. Existirá uma função $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) = 0$ para $x \in [0,1]$ e $f'(x) = 1$ para $x \in]1,2]$?

17. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável tal que

$$\exists M > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad |f'(x)| \leq M.$$

Mostre que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \text{ para todo o } x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que $f'(x) < g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = g(a)$. Mostre que $f(x) < g(x)$ para todo $x > a$.

19. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\, \cos x - \text{sen}\, x}{x^3}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen}\, x}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log\,(\text{sen}\, 5x)}{\log\,(\text{sen}\, 6x)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,(x^3) - \text{sen}^3 x}{x^3}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x) - 1 + 4,5\, x^2}{x^3}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \text{sen}\, x}{x^3}$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\text{sen}\,(4x)\text{sen}\,(3x)}{x\text{sen}\,(2x)}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{(x-1)^2}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3}$

(l) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{7x^2 - 2x + 3}{5x^2 + x - 5}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x + 2\text{sen}\, x}$

20. Calcule:

(a) $\cos\left(\arccos(1/8)\right)$ (b) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$ (c) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$

(d) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}(-1/2)\right)$ (e) $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}(1)+\pi\right)$ (f) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

(g) $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{23\pi}{6}\right)$ (h) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (i) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\pi\right)$

(j) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)$ (k) $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

21. Recorde que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)$. Prove que:

(a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ (b) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$

(c) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ (d) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$

(e) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ (f) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

22. Verifique que:

(a) $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R};$

(b) $\operatorname{argch} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \quad x \in [1,+\infty[;$

(c) $\operatorname{argth} x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad x \in\ ]-1,1[;$

(d) $\operatorname{argcoth} x = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right), \quad x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1].$

23. Mostre que:

(a) $\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\arccos' x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\operatorname{arctg}' x = \dfrac{1}{1+x^2}$ (d) $\operatorname{arccotg}' x = \dfrac{-1}{1+x^2}$

(e) $\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (f) $\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

(g) $\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$ (h) $\operatorname{argcoth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}.$

24. Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]1, +\infty[$ tal que $f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

(a) Calcule a derivada de f.

(b) Mostre que $f^{-1}(x) = \ln^2\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

(c) Calcule a derivada da função inversa de f.

25. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\, e^x & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ \operatorname{arctg} x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

(b) Verifique que f é uma função derivável.

(c) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f.

(d) Determine o contradomínio de f.

26. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{1+x}\right) & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \\ x^2\, e^x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}.$$

(a) Verifique que f é uma função contínua.

(b) Determine os pontos onde f é derivável.

27. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ \frac{\pi}{2}\, e^{x^2 + x} & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) Verifique que f é uma função contínua.

(b) Determine, caso existam, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

(c) Determine os pontos onde f é derivável.

(d) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de f e os extremos locais de f.

(e) Determine o contradomínio de f.

28. Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

(a) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável apenas no ponto 1;

(b) uma função $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, tal que $f(2) = f(3)$ e $f'(x) \geq x$, para todo o $x \in [2,3]$;

(c) uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, derivável, não decrescente, tal que $f'(x) < 0$, para todo o $x \in X$;

(d) uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ é finito e $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$ é infinito.

29. Indique se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes:

(a) a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } x < 1 \\ 4x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ é derivável no ponto 1;

(b) existe uma função $f : [1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que $f'(x) = 1$ para $x \in [1,3]$ e $f'(x) = -1$ para $x \in]3,4]$;

(c) existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ derivável, não constante, tal que $f'(x) = 0$ para $x \in X$.

30. Considere a equação

$$e^x = a - 2x^3.$$

(a) Mostre que para todo $a \in \mathbb{R}$, esta equação tem no máximo uma raiz real.

(b) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se pode afirmar que esta equação tem exatamente uma raiz no intervalo $[0,2]$?

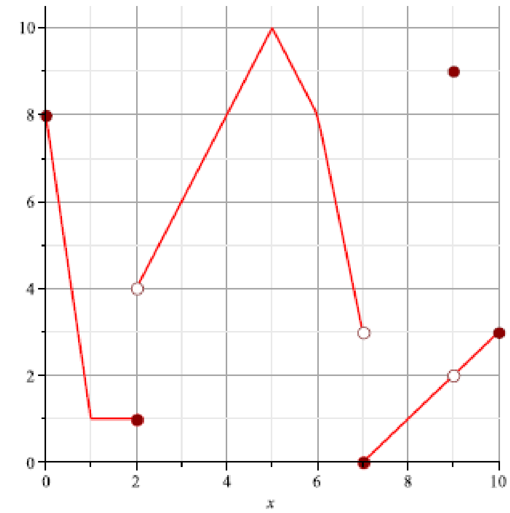
31. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3 + e^{2x} - 2x$.

(a) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Determine os extremos (máximos e mínimos) e os intervalos de monotonia de f.

(c) Quantos zeros tem f? Justifique a resposta e localize os zeros, indicando intervalos que os contenham.

32. Considere a função $f : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.



(a) Indique o contradomínio de f.

(b) Determine $f^{-1}([1, 8])$.

(c) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f.

(d) Indique os pontos de máximo (maximizantes) local de f.

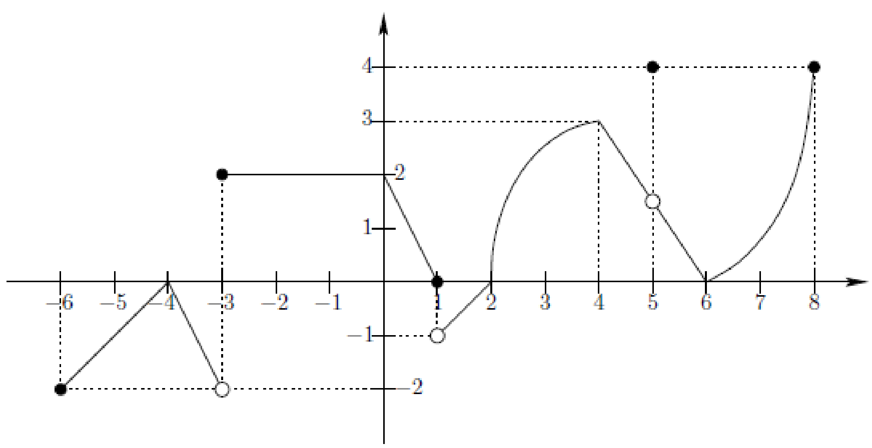
(e) Indique os pontos onde f é descontínua.

(f) Indique o valor de $f'(4)$.

(g) Indique os pontos onde f não é derivável.

(h) Determine $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$ e $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{7x-1}{x}\right)$.

33. Considere a função $f : [-6, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.



(a) Determine $f(]-4, 2[)$.

(b) Determine $f^{-1}(]-1, 0[)$.

(c) Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de f.

(d) Indique os pontos de máximo (maximizantes) local de f.

(e) Indique os pontos onde f é descontínua.

(f) Indique o valor de $f'(-5)$.

(g) Indique os pontos onde f é contínua e não é derivável.

(h) Indique um ponto onde a segunda derivada de f é maior do que 0.

(i) Determine $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$.