



———— Derivadas e funções trigonométricas inversas, hiperbólicas e hiperbólicas inversas ————

1. Calcule as derivadas (onde existirem) das seguintes funções:

(a)  $f(x) = (6x + 1)^5$

(b)  $f(x) = 5x^3 \cos(2x)$

(c)  $f(x) = \operatorname{tg} x$

(d)  $f(x) = \sqrt{x - 3}$

(e)  $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$

(f)  $f(x) = \log(e^{3x} + x^2)$

(g)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

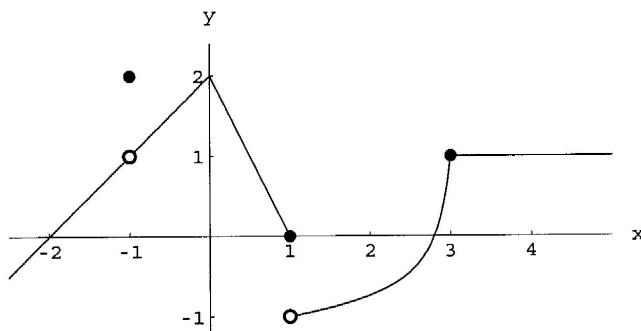
(h)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 3 \\ 3x & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$

2. Encontre equações para as retas tangente e normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  sendo:

(a)  $f(x) = x^2 - 1$  e  $a = 1$

(b)  $f(x) = 1/x^2$  e  $a = -2$

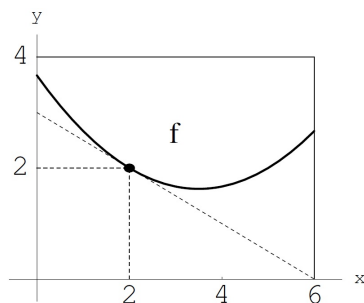
3. Considere uma função com o seguinte gráfico:



(a) Em que pontos  $f$  não é contínua?

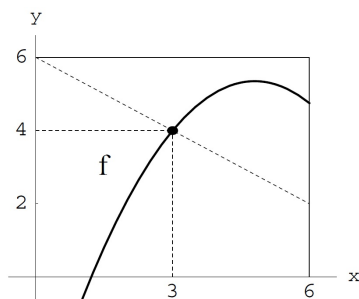
(b) Em que pontos  $f$  é contínua mas não derivável?

4. A figura seguinte representa o gráfico de uma função  $f$  e da reta tangente a esse gráfico no ponto  $(x, y) = (2, 2)$ .



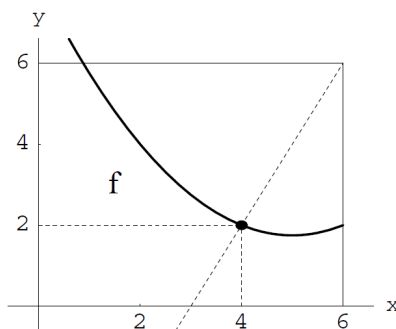
Sendo  $g(x) = f(x^2 - 2)$ , qual o valor da derivada  $g'(2)$ ?

5. A figura seguinte representa o gráfico de uma função  $f$  e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto  $(x, y) = (3, 4)$ .



Sendo  $g(x) = f(4 - 2x + x^3)$ , qual o valor da derivada  $g'(1)$ ?

6. A figura seguinte representa o gráfico de uma função  $f$  e da reta perpendicular a esse gráfico no ponto  $(x, y) = (4, 2)$ .



Sendo  $g(x) = [f(-4 + 2x + x^2)]^2$ , qual o valor da derivada  $g'(2)$ ?

7. Considere a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 5 + 3x + x^5$ . Calcule  $(f^{-1})'(5)$ .

8. Para cada uma das funções seguintes

(1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x^3 + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$  e  $a = 1$

(2)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ (x + 1)^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$  e  $a = -1$

(3)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{se } x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$  e  $a = 2$

(a) Diga se  $f$  é contínua no ponto  $a$ .

(b) Diga se  $f$  é derivável no ponto  $a$ .

9. Sejam  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que  $f$  e  $g$  são ambas contínuas em 0.

(b) Mostre que  $f$  não é derivável em 0.

(c) Mostre que  $g$  é derivável em 0 e indique  $g'(0)$ .

10. Considere o polinómio  $p(x) = x^5 + bx + 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .

(a) Justifique que o polinómio  $p$  tem pelo menos uma raiz real.

(b) Indique, justificando, um valor de  $b$  para o qual o polinómio  $p$  tenha exatamente uma raiz no intervalo  $]0, 1[$ .

(c) Mostre que para esse valor de  $b$ , o polinómio  $p$  tem exatamente três raízes reais.

11. (a) Aplicando o Teorema de Rolle demonstre que a equação  $x^3 - 3x + b = 0$  não pode ter mais do que uma raiz real no intervalo  $] -1, 1[$  qualquer que seja o valor de  $b$ .

(b) Indique para que valores de  $b$  existe exatamente uma raiz real da equação em  $] -1, 1[$ .

12. Usando o teorema de Rolle mostre que a equação  $x^2 = x \sin x + \cos x$  possui exatamente duas raízes reais.

13. Mostre que o polinómio  $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , possui exatamente um zero no intervalo  $]1, 3[$ .

14. Existe alguma função derivável  $g : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaça as seguintes condições  $g(0) = -3$   $g(5) = 5$  e  $g'(x) \leq 1$ ,  $x \in ]0, 5[$  ? Justifique.

15. Utilizando o Teorema de Lagrange, mostre que:

(a)  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad e^x > 1 + x$ ;

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x) < x$ ;

(c)  $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

16. Existirá uma função  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável tal que  $f'(x) = 0$  para  $x \in [0, 1]$  e  $f'(x) = 1$  para  $x \in ]1, 2]$ ?

17. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável tal que

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq M.$$

Mostre que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

18. Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis tais que  $f'(x) < g'(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) = g(a)$ . Mostre que  $f(x) < g(x)$  para todo  $x > a$ .

19. Calcule os seguintes limites:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\sin 5x)}{\log(\sin 6x)}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3) - \sin^3 x}{x^3}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - 1 + 4,5 x^2}{x^3}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(4x)\sin(3x)}{x\sin(2x)}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{(x - 1)^2}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - x - 1}{4x^2 - x - 3}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 2x + 3}{5x^2 + x - 5}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x + 2\sin x}$

20. Calcule:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| (a) $\cos (\arccos (1/8))$                                       | (b) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} (\frac{9\pi}{4}))$ | (c) $\operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} (\frac{5\pi}{4}))$ |
| (d) $\operatorname{sen} (\operatorname{arcsen} (-1/2))$          | (e) $\operatorname{sen} (\operatorname{arcsen} (1) + \pi)$      | (f) $\operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} (-\frac{\pi}{6}))$ |
| (g) $\operatorname{arcsen} (\operatorname{sen} \frac{23\pi}{6})$ | (h) $\arccos (\cos (-\frac{\pi}{3}))$                           | (i) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \pi)$                |
| (j) $\operatorname{tg} (\arccos (\frac{2}{3}))$                  | (k) $\cos (\operatorname{arctg} (\frac{2}{3}))$                 |   |

21. Recorde que  $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$ ,  $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$ . Prove que:

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$   | (b) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$   |
| (c) $\operatorname{sh} (-x) = -\operatorname{sh} x$   | (d) $\operatorname{ch} (-x) = \operatorname{ch} x$  |
| (e) $\operatorname{sh} (x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ | (f) $\operatorname{ch} (x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ |

22. Verifique que:

- (a)  $\operatorname{argsh} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;
- (b)  $\operatorname{argch} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$ ,  $x \in [1, +\infty[$ ;
- (c)  $\operatorname{argth} x = \ln (\sqrt{\frac{1+x}{1-x}})$ ,  $x \in ]-1, 1[$ ;
- (d)  $\operatorname{argcoth} x = \ln (\sqrt{\frac{x+1}{x-1}})$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ .

23. Mostre que:

- |   |  |
|---|--|
| (a) $\operatorname{arcsen}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | (b) $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$             |
| (c) $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$         | (d) $\operatorname{arccotg}' x = \frac{-1}{1+x^2}$     |
| (e) $\operatorname{argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$  | (f) $\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| (g) $\operatorname{argth}' x = \frac{1}{1-x^2}$         | (h) $\operatorname{argcoth}' x = \frac{1}{1-x^2}$ .    |

24. Considere a função bijetiva  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow ]1, +\infty[$  tal que  $f(x) = \operatorname{ch} \sqrt{x}$ .

- (a) Calcule a derivada de  $f$ .
- (b) Mostre que  $f^{-1}(x) = \ln^2(x + \sqrt{x^2 - 1})$ .
- (c) Calcule a derivada da função inversa de  $f$ .

25. Considere a função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x e^x & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

- (a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- (b) Verifique que  $f$  é uma função derivável.
- (c) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de  $f$ .
- (d) Determine o contradomínio de  $f$ .

26. Considere a função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arcsen} \left( \frac{x}{1+x} \right) & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 e^x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

- (a) Verifique que  $f$  é uma função contínua.
- (b) Determine os pontos onde  $f$  é derivável.

27. Considere a função  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{x^2+x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

- (a) Verifique que  $f$  é uma função contínua.
- (b) Determine, caso existam,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- (c) Determine os pontos onde  $f$  é derivável.
- (d) Indique, justificando, os intervalos de monotonia de  $f$  e os extremos locais de  $f$ .
- (e) Determine o contradomínio de  $f$ .

28. Dê exemplo de, ou mostre porque não existe:

- (a) uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável apenas no ponto 1;
- (b) uma função  $f : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, tal que  $f(2) = f(3)$  e  $f'(x) \geq x$ , para todo o  $x \in [2, 3]$ ;
- (c) uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, não decrescente, tal que  $f'(x) < 0$ , para todo o  $x \in X$ ;
- (d) uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável tal que  $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$  é finito e  $\{x \in \mathbb{R} : f'(x) = 0\}$  é infinito.

29. Indique se são verdadeiras ou falsas as proposições seguintes:

- (a) a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 8x & \text{se } x < 1 \\ 4x^2 + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$  é derivável no ponto 1;
- (b) existe uma função  $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável tal que  $f'(x) = 1$  para  $x \in [1, 3]$  e  $f'(x) = -1$  para  $x \in ]3, 4]$ ;
- (c) existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  derivável, não constante, tal que  $f'(x) = 0$  para  $x \in X$ .

30. Considere a equação

$$e^x = a - 2x^3.$$

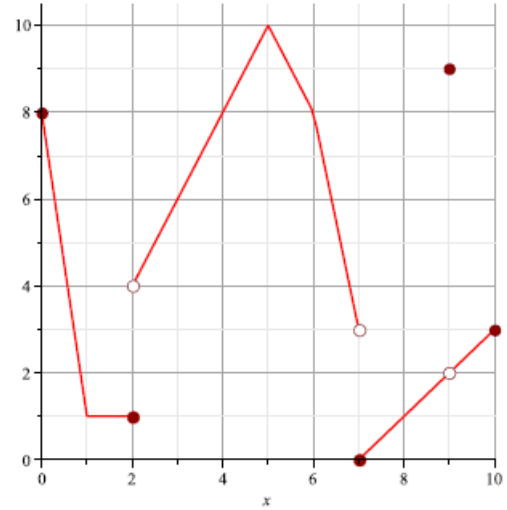
- (a) Mostre que para todo  $a \in \mathbb{R}$ , esta equação tem no máximo uma raiz real.
- (b) Para que valores de  $a \in \mathbb{R}$  se pode afirmar que esta equação tem exatamente uma raiz no intervalo  $[0, 2]$ ?

31. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = -3 + e^{2x} - 2x$ .

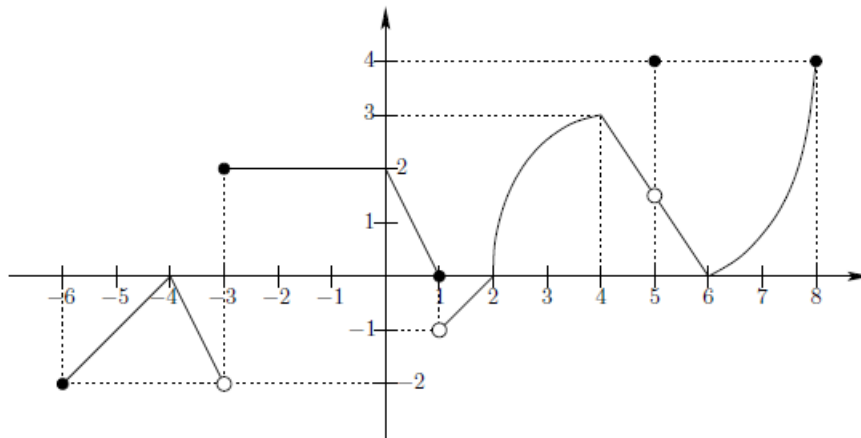
- (a) Calcule  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- (b) Determine os extremos (máximos e mínimos) e os intervalos de monotonia de  $f$ .
- (c) Quantos zeros tem  $f$ ? Justifique a resposta e localize os zeros, indicando intervalos que os contenham.

32. Considere a função  $f : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.

- Indique o contradomínio de  $f$ .
- Determine  $f^{-1}([1, 8])$ .
- Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de  $f$ .
- Indique os pontos de máximo (maximizantes) local de  $f$ .
- Indique os pontos onde  $f$  é descontínua.
- Indique o valor de  $f'(4)$ .
- Indique os pontos onde  $f$  não é derivável.
- Determine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{7x-1}{x}\right)$ .



33. Considere a função  $f : [-6, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico se apresenta na figura seguinte.



- Determine  $f([-4, 2])$ .
- Determine  $f^{-1}([-1, 0])$ .
- Indique os pontos de mínimo (minimizantes) local de  $f$ .
- Indique os pontos de máximo (maximizantes) local de  $f$ .
- Indique os pontos onde  $f$  é descontínua.
- Indique o valor de  $f'(-5)$ .
- Indique os pontos onde  $f$  é contínua e não é derivável.
- Indique um ponto onde a segunda derivada de  $f$  é maior do que 0.
- Determine  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$ .