UNIVERSIDADE DO MINHO

Geometria

Curso: M. C. C. **Exame de recurso - 17 Jun 2022**

Nota. O teste é constituído por duas páginas, frente e verso. Justifique pormenorizadamente todas as respostas.

1. Considere em $\mathbb{R}^2$ o produto interno canónico. Seja $\lambda : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por

$$\lambda(x, y) = (x, y - 1)$$

a) (2 val) Mostre que λ é uma isometria.

b) (2 val) Determine o ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e o isomorfismo ortogonal $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\lambda = T_{(a,b)} \circ \varphi$$

em que $T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ designa a translação associada ao ponto (a, b).

2. Sejam E um espaço vetorial, não necessariamente euclidiano, e $a, b \in E$ dois vetores. Considere as translações

$$T_a : E \longrightarrow E \qquad \text{e} \qquad T_b : E \longrightarrow E$$

associadas aos vetores a e b e a aplicação linear $\varphi : E \longrightarrow E$ definida por

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x$$

a) (2 val) Mostre que $(T_a + T_b) \circ \varphi = T_{a+b}$

b) (2 val) Mostre com um exemplo concreto que a soma de duas translações pode não ser uma translação.

3. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno canónico e seja X o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + 2z = 1\}$$

a) (2 val) Mostre que X é um espaço afim e escreva-o na forma $X = a + F$, em que a é um ponto de X e F é o subespaço vetorial associado a X.

Nas alíneas seguintes, designe por $F^\perp$ o suplemento ortogonal de F. Recorde que

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$$

b) (2 val) Determine uma base do subespaço vetorial F.

c) (2 val) Determine o subespaço vetorial $F^\perp$, indicando uma base ortonormada deste subespaço.

d) (1 val) Determine a projeção ortogonal sobre o subespaço vetorial $F^\perp$.

4. (2 val) Sejam $(E, \cdot \mid \cdot)$ um espaço euclidiano e u, v dois vetores de E tais que

$$u \neq 0_E \qquad v \neq 0_E \qquad u \mid v = 0_{\mathbb{R}}$$

Mostre que o conjunto $\{u, v\}$ é linearmente independente.

5. Considere a cónica definida pela equação

$$x^2 + y^2 + 4xy + 3x + y + 1 = 0$$

a) (1 val) Mostre que a cónica é não degenerada.

b) (2 val) Classifique a cónica.

$* * *$ **FIM** $* * *$