MATEMÁTICA DISCRETA

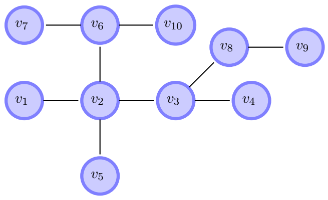
Lic. Ciências da Computação

Exercícios - Grafos (Conceitos básicos)

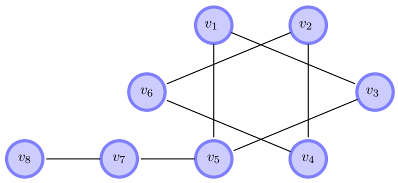
---

1. (a) Escreva uma descrição formal de cada um dos seguintes grafos:

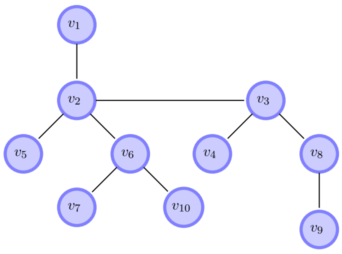
(i) G_1



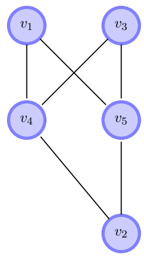
(ii) G_2



(iii) G_3



(iv) G_4



   (b) Calcule a matriz de incidência de cada um dos grafos acima.

   (c) Calcule a matriz de adjacência de cada um dos grafos acima.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Desenhe o grafo G_A cuja matriz de adjacência é A.

   (b) Identifique caminhos de comprimento 6 de G_A.

   (c) Identifique todos os caminhos elementares de G_A.

   (d) Identifique todos os caminhos simples de G_A.

   (e) Identifique todos os ciclos de G_A, caso existam.

   (f) Identifique todos os circuitos simples que não são ciclos de G_A, caso existam.

   (g) Identifique circuitos que não são ciclos de G_A, caso existam.

3. Repita o exercício anterior para os grafos do exercício 1..

4. Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $v, w \in V$ tais que $v \neq w$

   (a) Mostre que se existe um caminho entre v e w então existe um caminho elementar entre v e w.

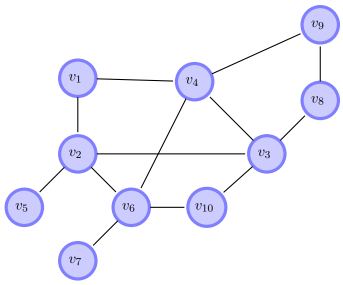
   (b) Mostre que se existem dois caminhos de v para w, elementares, distintos e que diferem no penúltimo vértice, então existe um ciclo cujo primeiro vértice é w.

5. Calcule

   (a) o número máximo de arestas de um grafo com 10 vértices.

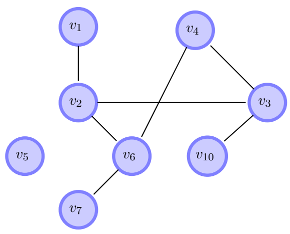
   (b) o número mínimo de vértices de um grafo com 100 arestas.

6. Seja G o grafo seguinte.

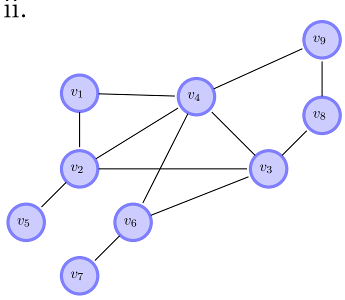


   (a) Verifique se os seguintes grafos são subgrafos de G.

      i.



      ii.



      iii. $\Big(\{v_1, v_2, v_8\}, \big\{\{v_1, v_2\}\big\}\Big)$;

      iv. $\Big(\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_{10}\}, \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_4, v_3\}, \{v_4, v_9\}, \{v_2, v_3\}\big\}\Big)$;

      v. $\Big(\{v_2, v_4, v_5, v_6, v_9\}\}, \big\{\{v_4, v_6\}, \{v_4, v_9\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_6, v_9\}\big\}\Big)$.

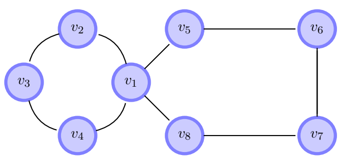
   (b) Desenhe o subgrafo de G induzido por:

      i. $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_9\}$.

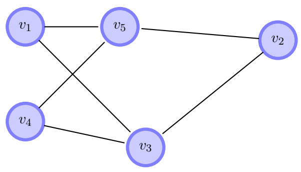
      ii. $\{v_1, v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

7. Diga quais dos seguintes grafos são bipartidos e, em caso afirmativo, identifique uma partição correspondente do conjunto dos vértices.

   (a)



   (b)



   (c) $G = (V, E)$ o grafo definido por:
   $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
   $E = \big\{\{c, g\}, \{a, d\}, \{e, h\}, \{f, d\}, \{b, d\}\{h, a\}, \{h, f\}\big\}$.

   (d) $G = (V, E)$ o grafo definido por:
   $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,
   $E = \big\{\{a, d\}, \{b, h\}, \{e, h\}, \{f, d\}, \{a, g\}, \{b, d\}\{h, a\}, \{g, f\}, \{d, e\}, \{h, f\}, \{g, b\}, \{h, c\}, \{c, d\}, \{g, h\}\big\}$.

8. Identifique os ciclos dos grafos do exercício 7..

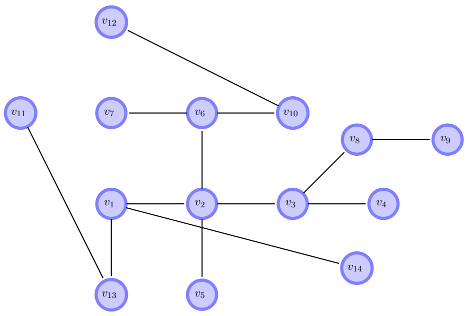
9. Caso existam, dê um exemplo de um grafo que verifica a condição:

   (a) não há vértices de grau ímpar;
   (b) não há vértices de grau par;
   (c) há exactamente um vértice de grau par;
   (d) não há ciclos de comprimento par;
   (e) há um único ciclo de comprimento ímpar;
   (f) existem 3 vértices de grau ímpar.

10. Prove que num grafo G o número de vértices de grau ímpar é par.

11. Numa festa com pelo menos duas pessoas, algumas já se conheciam de outros encontros. Mostre que na festa estão pelo menos duas pessoas que conheciam previamente o mesmo número de pessoas. (teorema da Amizade)

12. Construa todas as árvores com 6 vértices.
13. Uma aresta e de um grafo $G = (V, E)$ diz-se uma ponte de G se o número de componentes conexas do grafo $G' = (V, E \setminus \{e\})$ for maior do que o número de componentes conexas de G. Mostre que, num grafo, uma aresta é uma ponte se e só se não pertence a um ciclo.
14. Usando apenas a definição de árvore, conclua que toda a árvore não trivial tem pelo menos um vértice de grau 1.
15. Prove que numa árvore $G = (V, E)$ se verifica $\sharp V - \sharp E = 1$. (Sugestão: use indução sobre $\sharp E$.)
16. Seja $G = (V, E)$ um grafo.
    (a) Prove que se G é conexo, então $\sharp V - 1 \leq \sharp E$ arestas.
    (b) Prove que um grafo conexo em que $\sharp V - 1 = \sharp E$ é uma árvore.
17. Considere o grafo seguinte.



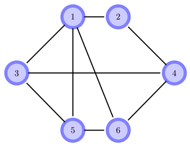
    (a) Verifique que é uma árvore.
    (b) Mostre que é um grafo bipartido apresentando uma partição dos vértices que justifica esta classificação.
18. Mostre que qualquer árvore não trivial é um grafo bipartido. Quais as árvores que são grafos bipartidos completos?
19. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Chama-se complemento de G a um grafo $G' = (V, E')$ em que

$$E' = \{\{x, y\} \mid x, y \in V,\ \{x, y\} \notin E,\ x \neq y\}.$$

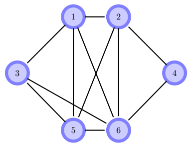
    (a) Calcule o complemento de $K_{3,5}$.
    (b) Determine o complemento dos grafos C_4 e C_5.
    (c) O complemento de um grafo conexo é conexo? E o complemento de um grafo desconexo é desconexo?

20. Prove que qualquer árvore satisfaz a fórmula de Euler.
21. Encontre uma representação planar do grafo $K_{2,8}$.
22. Diga se $K_{3,8}$ é planar. Justifique a sua resposta.
23. Para cada um dos grafos seguintes, encontre uma representação planar e indique o número de faces, ou justique porque é que não é possível ter tal representação.

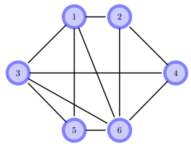
(i)



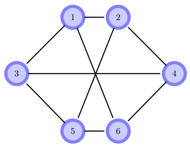
(ii)



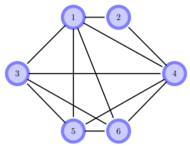
(iii)



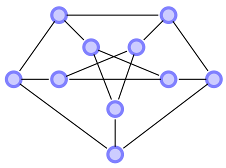
(iv)



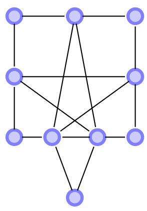
(v)



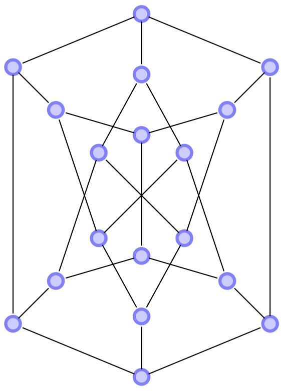
24. Elabore duas provas alternativas de que o grafo de Petersen não é planar.



25. Verifique se o grafo representado a seguir é planar.



26. Justifique que o grafo abaixo (grafo de Pappus) não é planar.



27. Dê exemplos de grafos conexos não planares com 7 vértices.

28. Desenhe um grafo bipartido com 10 vértices e 18 arestas que não seja planar.

29. Construa um grafo G com 6 vértices, sendo dois deles de grau 4 e quatro de grau 3, tal que

    (a) G seja planar;

    (b) G não seja planar.

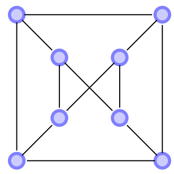
30. Mostre que, se G é um grafo com 11 vértices, então G ou o seu complementar não é planar.

31. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $G_n = (V, E)$ o grafo definido por $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e

$$E = \{\{v_i, v_j\} \mid \mathrm{mdc}(i, j) = 1\}.$$

    Calcule os valores de n para os quais G_n é planar.

32. Seja G o grafo representado na figura seguinte.



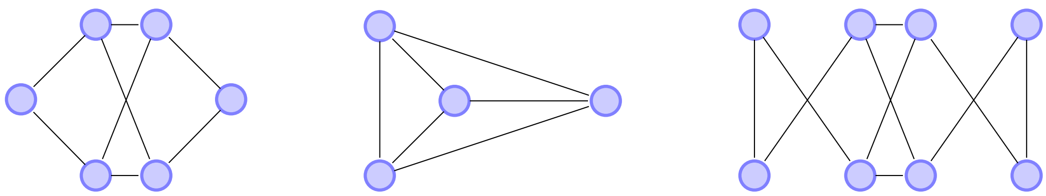
    (a) Existe algum subgrafo de G homeomorfo a K_5?

    (b) Existe algum subgrafo de G homeomorfo a $K_{3,3}$?

    (c) Para que inteiros n o grafo C_n é um subgrafo de G?

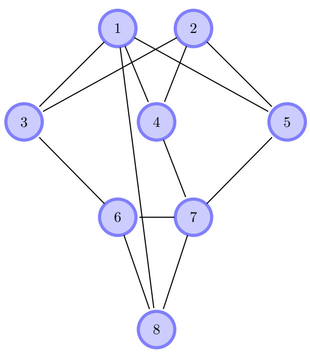
    (d) Para que inteiros n o grafo P_n é um subgrafo de G?

33. Mostre que os três seguintes grafos conexos são homeomorfos e identifique as transformações que os relacionam.

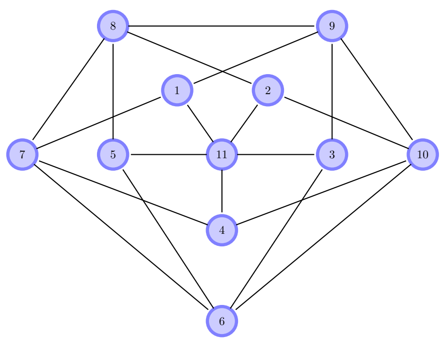


34. Use o Teorema de Kuratowski para provar que os seguinte grafos não são planares.

(a)

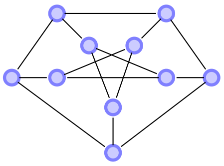
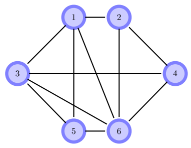
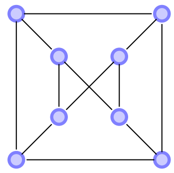


(b)



Exercícios - Grafos eulerianos e hamiltonianos

35. Considere os seguintes grafos:

    i. K_5;
    ii. $K_{2,3}$;
    iii. 
    iv. 
    v. 

    (a) Indique os que são eulerianos.
    (b) Indique os que são semieulerianos.
    (c) Indique os que são hamiltonianos.

36. Dê um exemplo de um grafo euleriano não planar.

37. Mostre que K_n é hamiltoniano.

38. Encontre um grafo não hamiltoniano com 7 vértices, todos com grau maior ou igual a 3.

39. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e Q_n o grafo simples cujos vértices são os n-uplos cujas entradas são 0 ou 1 e em que dois vértices são adjacentes se diferirem apenas numa coordenada.

    (a) Represente Q_3.
    (b) Mostre que Q_n é um grafo hamiltoniano (Sugestão: comece por analisar os casos $n = 2, 3, 4$).

40. Identifique os grafos bipartidos completos que são eulerianos.

41. Identifique os grafos bipartidos completos que são hamiltonianos.

42. Mostre que se G e G' são grafos conexos homeomorfos, então G é euleriano se e só se G' é euleriano.

Exercícios - Número cromático

43. Seja G um grafo conexo com pelo menos 2 vértices. Mostre que G é bipartido se e só se tem número cromático 2.

44. Calcule o número cromático dos grafos do exercício 35

45. Construa um grafo planar conexo cujo número cromático seja 4.

46. Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcule o número cromático de C_n.