



Folha 3 - Séries de números reais

Exercício 1 Mostre que cada uma das seguintes séries é convergente com soma igual ao valor indicado:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3;$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{n+1} 4^{-(n+2)} = \frac{9}{16};$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n}} = 1;$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) = -1;$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \frac{9}{2};$

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{6^n} = \frac{3}{4};$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2};$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{45};$

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2} \right) = \frac{1}{2}.$

Exercício 2 Represente $x = 1.\overline{41}$ na forma de um quociente entre dois números inteiros, observando que

$$x = 1 + \frac{41}{100} + \frac{41}{100^2} + \frac{41}{100^3} + \cdots + \frac{41}{100^n} + \cdots.$$

Exercício 3 Mostre que se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\lim_n a_n = 0$.

Sugestão: note que $s_n = s_{n-1} + a_n$, onde $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Exercício 4 Justifique que as séries seguintes são divergentes.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{(-2)^{n-1}};$

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{n^2} \right);$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+2^n}{2^{n+2}};$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{n+3}};$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(4 + \frac{1}{n} \right);$

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}};$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 4^{n+1}}{3^{n+2}};$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+2};$

k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{-4} + n^{-\frac{1}{2}} \right);$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8}{3\sqrt{n}} + \frac{1}{4^n} \right);$

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+4}{3n-1};$

l) $\sum_{n=1}^{+\infty} (2+\pi)^{2n}.$

Exercício 5 Considere as sucessões definidas por $a_n = \frac{2n + n^2}{3n^2 + 7}$, $b_n = \frac{1}{\pi^{2n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e ainda as sucessões de termo geral

$$x_n = a_n + 3b_n, \quad y_n = \begin{cases} a_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ b_n & \text{se } n > 10^8 \end{cases} \quad \text{e} \quad z_n = \begin{cases} b_n & \text{se } n \leq 10^8 \\ a_n & \text{se } n > 10^8. \end{cases}$$

a) Conclua, justificando, que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente e que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente.

b) Justificando devidamente, determine a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

Exercício 6 Apresente duas séries divergentes, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, tais que $u_n + v_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n) \text{ seja convergente.}$$

Exercício 7 Em cada uma das alíneas seguintes, apresente um exemplo nas condições indicadas:

a) uma série alternada divergente;

b) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^3$ seja divergente;

c) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_n u_n = 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ seja divergente;

d) uma sucessão $(u_n)_n$ tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ seja divergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ seja convergente.

Exercício 8 Considere a série de Riemann convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Pretende-se determinar um limite superior para a sua soma.

a) Verifique que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

b) Usando o resultado da alínea anterior conclua que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < 2.$$

Nota: Pode mostrar-se que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercício 9 Use um critério de comparação para decidir sobre a natureza das séries seguintes.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{7^n + 1}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}}; & \text{e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 + (-1)^n}{n^4}; & \text{g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{10} + 5}; \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n - 1}; & \text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n + 1}{n^3 + 1}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{3^n - 1}; & \text{h)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{1 + n^4}. \end{array}$$

Exercício 10 Use o critério de D'Alembert (ou da razão) para decidir se convergem ou divergem as séries seguintes.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n}; & \text{e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}; & \text{g)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}. \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{99^n}{n!}; & \text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{2n}}; \end{array}$$

Exercício 11 Use o critério de Cauchy (ou da raiz) para estudar a convergência das séries seguintes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{2}{3} \right)^n; & \text{e)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^n; \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+a)^n}, a \in \mathbb{R}^+; & \text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{n} \right)^n; & \text{f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}. \end{array}$$

Nota: para a resolução das alíneas b) e c), recorde que $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Exercício 12 Use o critério de Leibnitz para justificar que as séries alternadas seguintes são convergentes.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+2}; & \text{b)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-n}; & \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{array}$$

Exercício 13 Usando um teste adequado, decida sobre a natureza das séries apresentadas a seguir e, em caso de convergência, indique se a convergência é simples ou absoluta.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}; & \text{e)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^3}; & \text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}; \\ \text{b)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5}{3 \cdot 2^n}; & \text{f)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}}; & \text{j)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2}; \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6 + 7n}; & \text{g)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 1}; & \text{k)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}; \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{1}{n}; & \text{h)} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4 + \cos n}{n^3}; & \text{l)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}. \end{array}$$