# Aulas: 20 e 23 de abril

**Exposição de matéria teórica. Não houve resolução de exercícios propostos.**

# Aula: 27 de abril

1. Determine a representação matricial da translação pelo vector $\overrightarrow{v}$ no espaço afim $\mathcal{A}$ (munido de um referencial):

   (a) $\overrightarrow{v} = (1, -2)$;

   (b) $\overrightarrow{v} = (3, 0, -4)$;

   (c) $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1, 1)$.

b. $T_{\overrightarrow{v}}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3) + (3, 0, -4) = (x_1 + 3, x_2, x_3 - 4)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Id} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2. Determine a representação matricial da simetria central em $\Omega$ no espaço afim $\mathcal{A}$ (munido de um referencial):

   (a) $\Omega = (2, 3)$;

   (b) $\Omega = (1, -1, -1)$;

   (c) $\Omega = (2, 2, 3, 1)$.

b. $S_\Omega(M) = \Omega - \overrightarrow{\Omega M} = \Omega - (M - \Omega) = 2\Omega - M.$

$S_\Omega(x_1, x_2, x_3) = 2(1, -1, -1) - (x_1, x_2, x_3) =$

$= (2 - x_1, -2 - x_2, -2 - x_3).$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{2\Omega} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{-Id} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3. Determine a representação matricial da homotetia com centro $\Omega$ e razão $\lambda$ no espaço afim $\mathcal{A}$ (munido de um referencial):

(a) $\Omega = (1, 1)$, $\lambda = 3$;

(b) $\Omega = (2, 3)$, $\lambda = -1$;

(c) $\Omega = (1, -1, -1)$, $\lambda = 4$;

(d) $\Omega = (-2, 2, 0, 1)$, $\lambda = -2$.

c. $h(M) = \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} = \Omega + \lambda(M - \Omega) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$.

$h(x_1, x_2, x_3) = -3(1, -1, -1) + 4(x_1, x_2, x_3) =$

$= (-3 + 4x_1, 3 + 4x_2, 3 + 4x_3)$.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{(1-\lambda)\Omega} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}_{\lambda Id} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

8. Determine, **justificando pela definição**, se as seguintes aplicações são isometrias de um plano euclidiano (munido de um referencial ortonormado).

(a) $f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2)$;

(b) $f(x_1, x_2) = (2 - x_2, 1 + x_1)$;

(c) $f(x_1, x_2) = (3x_1, 3x_2)$;

(d) $f(x_1, x_2) = (\cos x_1, \cos x_2)$;

(e) $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$;

(f) $f(x_1, x_2) = (-3 - x_2, 1 - x_1)$;

(g) $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + 3, bx_1 - ax_2 + 5)$, com $a, b \in \mathbf{R}$ tais que $a^2 + b^2 = 1$.

Alguma destas aplicações é uma translação? uma homotetia? uma simetria central?

a Vejamos que $f$ não é uma isometria.

$A = (1,0)$, $B = (0,1)$ $\qquad d(A,B) = \sqrt{2}$

$f(A) = (1,1)$, $f(B) = (0,1)$ $\qquad d(f(A), f(B)) = 1$.

Como $d(f(A), f(B)) \neq d(A,B)$, fica provado que $f$ não é uma isometria.

b. Vejamos que $f$ é uma isometria.

Sejam $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$

Temos $f(A) = (2 - a_2, 1 + a_1)$ e $f(B) = (2 - b_2, 1 + b_1)$

$$d(f(A), f(B))^2 = \| \overrightarrow{f(A)f(B)} \|^2 =$$

$$= (-b_2 + a_2)^2 + (b_1 - a_1)^2 =$$

$$= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = \| \overrightarrow{AB} \|^2 = d(A,B)^2$$

Logo $d(f(A), f(B)) = d(A,B) \Rightarrow f$ é uma isometria.

e $f$ não é uma isometria pois não é uma aplicação afim

Usando a definição:

$A = (1,0)$, $B = (2,0)$ $\qquad d(A,B) = 1$

$f(A) = (1,0)$, $f(B) = (4,0)$ $\qquad d(f(A), f(B)) = 3$

$d(f(A), f(B)) \neq d(A,B) \Rightarrow f$ não é uma isometria

10. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Determine o centro e a razão das seguintes homotetias de $\mathcal{A}$. Apresente a representação matricial. Se houver, indique as simetrias centrais.

(a) $f(x,y,z,t) =$ $\cancel{f(x,y,z)} = (-2x, -2y, -2z + 4, -2t)$;

(b) $f(x,y,z) = (13x, 13y, 26 + 13z)$;

(c) $f(x,y,z) = (-x, -y, -z + 2)$.

$\underline{a}$ 
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Portanto: $f$ é uma homotetia de razão $\lambda = -2$

$(1-\lambda)\Omega = (0,0,0,4) \Rightarrow$ centro $\Omega = (0,0,0,4/3)$.

$\underline{c}$:
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Portanto: $f$ é uma homotetia de razão $\lambda = -1$ (simetria central)

$(1-\lambda)\Omega = (0,0,2) \Rightarrow$ centro $\Omega = (0,0,1)$.

## Aula: 30 de abril

4. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim munido de um referencial. Considerem-se:

   (a) $h$ a homotetia com centro $(3,0)$ e razão $-2$;

   (b) $s$ a simetria central com centro $(-1,-1)$;

   (c) $t$ a translação pelo vector $\overrightarrow{v} = (2,1)$.

   Determine as aplicações compostas:

   $$h \circ h, \qquad s \circ h, \qquad h \circ s, \qquad s \circ t, \qquad \text{e} \qquad h \circ s \circ t$$

   Qual a imagem da recta de equação $x + y = 0$ através das aplicações anteriores? E da circunferência com raio 1 e centro $(0,0)$?

Para o cálculo de compostas de aplicações afins é conveniente recorrer ao uso de coordenadas homogéneas.

$$h: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -2$

$(1-\lambda)\Omega = (9,0)$

$$s: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$

$(1-\lambda)\Omega = (-2,-2)$

$$t: \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\vec{v} = (2,1)$

<u>$h \circ h$</u>

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -9 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$h \circ h$: homotetia razão $\lambda = 4$.

centro $(1-\lambda)\Omega = (-9,0) \Leftrightarrow \Omega = (3,0)$.

<u>$s \circ h$</u>

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -11 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$s \circ h$: homotetia de razão $\lambda = 2$

centro $(1-\lambda)\Omega = (-11,-2) \Leftrightarrow \Omega = (11,2)$

**$h \circ s$**

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$h \circ s$: homotetia razão $\lambda = 2$

centro $(1-\lambda)\Omega = (13, 4) \iff \Omega = (-13, -4)$

**$s \circ t$**

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$s \circ t$: simetria central

centro $2\Omega = (-4, -3) \iff \Omega = (-2, -3/2)$.

**$h \circ s \circ t$** $= h \circ (s \circ t)$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 17 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$h \circ s \circ t$: homotetia de razão $\lambda = 2$

centro $(1-\lambda)\Omega = (17, 6) \iff \Omega = (-17, -6)$.

Seja $r$ a reta de equação cartesiana $x + y = 0$ e seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1.

Vamos calcular a imagem destes dois conjuntos através da aplicação $h$ (para as restantes aplicações é análogo).

$\underline{h(\mathscr{C})}$

Para calcular imagens de circunferências usamos o seguinte resultado:

- Seja $f$ uma semelhança de razão $\lambda$ e seja $\Gamma$ uma circunferência de centro $P$ e raio $R$. Então $f(\Gamma)$ é a circunferência de centro $f(P)$ e raio $|\lambda|R$.

Portanto como $h$ é uma homotetia de razão $-2$ então $h(\mathscr{C})$ é a circunferência de raio $2$ e centro $h(0,0) = (9,0)$.

$\underline{h(r)}$

Para calcular imagens de subespaços afins existem várias possibilidades

- Método I:

  Sejam $A$ e $B$ dois pontos distintos de $r$. Então $f(r)$ é a reta que incide em $f(A)$ e $f(B)$, qualquer que seja a aplicação afim bijetiva $f$.

$r: x + y = 0$ $\qquad A = (0,0) \quad B = (1,-1)$

$\qquad h(A) = (9,0) \quad h(B) = (7,2)$

Portanto, $h(r)$ é a reta que incide em $h(A)$ e $h(B)$.

$$h(r) = h(A) + \langle \overrightarrow{h(A)h(B)} \rangle = (9,0) + \langle (-2,2) \rangle.$$
$$= (9,0) + \langle (-1,1) \rangle.$$

- <u>Método II</u>

Se $s = B + \langle \vec{w} \rangle$ e $f$ é uma aplicação afim (não necessáriamente bijetiva) então $f(s) = f(B) + \langle \vec{f}(\vec{w}) \rangle$, onde $\vec{f}$ é a aplicação linear associada a $f$.

$r = (0,0) + \langle (1,-1) \rangle$

Logo $h(r) = h(0,0) + \langle \vec{h}(1,-1) \rangle =$

$= (9,0) + \langle (-2,2) \rangle = (9,0) + \langle (-1,1) \rangle$.

- <u>Método III</u>

Consiste em usar a forma paramétrica de um subespaço afim. Este método permite calcular a imagem de outro tipo de conjuntos que possam ser escritos de forma paramétrica.

$r: x + y = 0 \Rightarrow r: (x,y) = (\lambda, -\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$h(r) = h(\lambda, -\lambda) = (9 - 2\lambda, 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$h(r): (x,y) = (9 - 2\lambda, 2\lambda) \Leftrightarrow (x,y) = (9,0) + \lambda(-2,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$h(r) = (9,0) + \langle (-2,2) \rangle = (9,0) + \langle (-1,1) \rangle$

- <u>Método IV</u>

As <u>homotetias</u> e <u>translações</u> são as aplicações afins que preservam o paralelismo.

$r: x + y = 0 \qquad A = (0,0) \qquad h(A) = (9,0)$

$h(r)$: reta paralela a $r$ incidente em $h(A)$

$h(r): x + y = 9$.