1.3 Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$ (cont.)

Derivada direcional e vetor gradiente

Nesta seção vamos introduzir um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite determinar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

Para $z = f(x, y)$, a derivada parcial de f em relação a

- x é a derivada direcional de f na direção do eixo dos xx, ou seja, na direção do vetor unitário $\vec{i} = (1, 0)$ e representa a taxa de variação de z na direção de $\vec{i}$.

- y é a derivada direcional de f na direção do eixo dos yy, ou seja, na direção do vetor unitário $\vec{j} = (0, 1)$ e representa a taxa de variação de z na direção de $\vec{j}$.

Definição

A ***derivada direcional*** *de $z = f(x, y)$ em (a, b) na direção e sentido do vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é definida por*

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(a, b) &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left((a, b) + t(u_1, u_2)\right) - f(a, b)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t}, \end{aligned}$$

se este limite existir (for finito).

Observe-se que, se $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0)$,

$$D_{\vec{i}} f(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

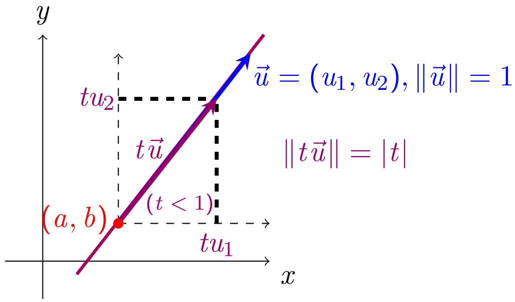
e, se $\vec{u} = \vec{j} = (0, 1)$,

$$D_{\vec{j}} f(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a, b + t) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Observe-se que os pontos da forma

$$(x, y) = (a, b) + t(u_1, u_2) = (a + tu_1, b + tu_2), \quad t \in \mathbb{R},$$

são os pontos da reta (equação paramétrica) que passa em (a, b) e que tem a direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$.



Se definirmos a função g, na variável t, da forma

$$g(t) = f(a + tu_1, b + tu_2),$$

então, pela definição de derivada de g para $t = 0$, temos

$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t} = D_{\vec{u}} f(a, b).$$

Interpretação geométrica da derivada direcional

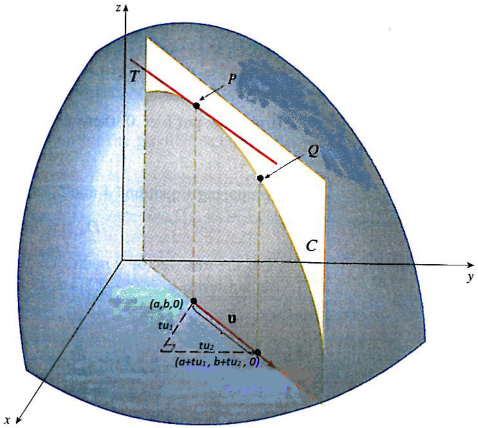


Figura 1: Derivada direcional em (a, b) na direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

O plano vertical que passa em P na direção do vetor $\vec{u}$ interseta a superfície S de equação $z = f(x, y)$ na curva C. O declive da reta tangente T à curva C no ponto P é a derivada direcional de f na direção de $\vec{u}$ (taxa de variação de f na direção de $\vec{u}$ com respeito à distância).

Com $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\|\vec{u}\| = 1$ e $g(t) = f(a + tu_1, b + tu_2)$, temos

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = g'(0).$$

Exemplo

Calcular $D_{\vec{v}} f(a, b)$ quando

$$f(x, y) = x^2 + xy, \quad (a, b) = (1, 1) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (3, 4),$$

usando a definição.[1]

- $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^4} = 5 \neq 1$; tomemos $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right) = (u_1, u_2)$;

- $(a, b) + t\,(u_1, u_2) = (1, 1) + t\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right) = \left(1 + \dfrac{3}{5}t, 1 + \dfrac{4}{5}t\right)$;

- $g(t) = f(1 + \frac{3}{5}t, 1 + \frac{4}{5}t) = (1 + \frac{3}{5}t)^2 + (1 + \frac{3}{5}t)(1 + \frac{4}{5}t) = 2 + \frac{13}{5}t + \frac{21}{25}t^2$;

- $D_{\vec{v}} f(1, 1) = g'(0) = \left(\frac{13}{5} + \frac{42}{25}t\right)\Big|_{t=0} = \dfrac{13}{5}$.

[1] Observe que podemos escrever $D_{\vec{v}} f(a, b)$ sem que $\vec{v}$ seja unitário.

Na prática para o cálculo de derivadas direcionais usamos a fórmula dada pelo teorema seguinte.

Teorema

Se f é uma função diferenciável de duas variáveis x e y, então f tem derivadas direcionais na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e

$$D_{\vec{u}}f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, u_2.$$

Dem. Para demonstrar este resultado, basta considerar a função $g(t) = f(x,y)$, onde $x = a + tu_1$ e $y = b + tu_2$ e aplicar a regra da cadeia ao cálculo de $g'(t)$. De facto,

$$g'(t) = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2$$

e quando $t = 0$, temos $x = a$ e $y = b$.

Exercício

Sendo f definida por $f(x,y) = x^3y^2$, determine a derivada direcional de f em $(x,y) = (2,-1)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$.

Resolução.

Vetor unitário com a direção de $\vec{v}$: $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Derivada direcional de f em $(2,-1)$ na direção de $\vec{u}$:

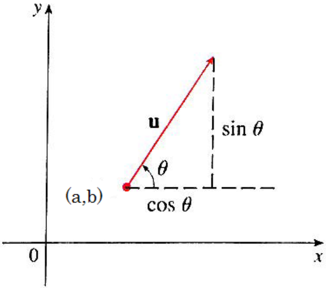
$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}}f(2,-1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 3x^2y^2\Big|_{(2,-1)} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} + 2x^3y\Big|_{(2,-1)} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
&= 6\sqrt{2} - 8\sqrt{2} \\
&= -2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Se $\vec{u}$ é um vetor unitário que faz um ângulo θ com o semi-eixo positivo dos xx, então

$$\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

e temos

$$D_{\vec{u}}f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\operatorname{sen}\theta.$$

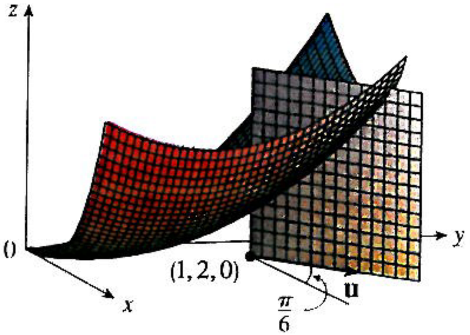


Exercício

Determine a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(x,y)$ para f definida por

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2,$$

sendo $\vec{u}$ o vetor unitário dado pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$. Qual o valor de $D_{\vec{u}}f(1,2)$?



Resolução.

Vetor unitário definido pelo ângulo $\theta = \frac{\pi}{6}$:
$\vec{u} = (\cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Derivada direcional de f num ponto (x, y) na direção de $\vec{u}$:

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}}f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ \cdot \tfrac{1}{2} \\
&= (3x^2 - 3y) \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} + (-3x + 8y) \cdot \tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}\left[3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8 - 3\sqrt{3})y\right]
\end{aligned}
$$

Valor da derivada direcional em $(1, 2)$: $D_{\vec{u}}f(1,2) = \frac{13-3\sqrt{3}}{2}$.

Vetor gradiente

O vetor gradiente de uma função f de duas variáveis em (a, b) é o vetor das derivadas parciais de f em (a, b) e denota-se por $\overrightarrow{\nabla} f(a, b)$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\nabla} f(a, b) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,\vec{j}\end{aligned}$$

Recorde-se que, para $\vec{u} = (u_1, u_2)$ unitário,

$$D_{\vec{u}} f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,u_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) \cdot (u_1, u_2)$$

Com esta notação podemos, então, escrever

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(a, b) = \overrightarrow{\nabla} f(a, b) \cdot \vec{u}}$$

O vetor gradiente ocorre não só no cálculo de derivadas direcionais mas também em muitos outros contextos.

Exercício

Em que direção a partir do ponto (2,0) a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xy$ tem uma taxa de variação igual a -1?

Resolução. Sabemos que $D_{\vec{u}}f(2,0) = -1$ e pretendemos determinar $\vec{u}$, não esquecendo que $\|\vec{u}\| = 1$.

Seja, então, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário tal que $D_{\vec{u}}f(2,0) = -1$. Então, dado que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(2,0) = -1 &\iff \vec{\nabla} f(2,0) \cdot \vec{u} = -1 \\ &\iff \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,0), \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\right) \cdot (u_1, u_2) = -1 \\ &\iff (0,2) \cdot (u_1, u_2) = -1 \iff 2u_2 = -1 \iff u_2 = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, $\vec{u} = (u_1, -\frac{1}{2})$, $u_1 \in \mathbb{R}$. Mas como devemos ter $\|\vec{u}\| = 1$, ou seja, $\sqrt{u_1^2 + (-\frac{1}{2})^2} = 1$, concluímos que $u_1^2 + \frac{1}{4} = 1 \iff u_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Temos, assim, duas possibilidades,

$$\vec{u} = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\right).$$

Generalização

Para uma função f de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definimos o vetor gradiente de f em $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ como sendo

$$\vec{\nabla} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n), \ \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, \vec{e_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, \vec{e_n}$$

e temos, para $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ unitário,

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \vec{\nabla} f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \vec{u}}$$

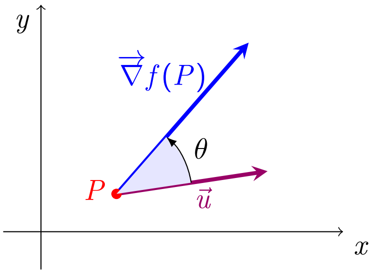
Propriedades geométricas do vetor gradiente

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciável em $P \in D$.
Vimos que, para um vetor $\vec{u}$ com $\|\vec{u}\| = 1$,

$$D_{\vec{u}} f(P) = \vec{\nabla} f(P) \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla} f(P)\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta.$$

onde $\theta \in [0, \pi]$ é o ângulo entre $\vec{\nabla} f(P)$ e $\vec{u}$. Ou seja,

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(P) = \|\vec{\nabla} f(P)\| \cos\theta}$$



Propriedades geométricas do vetor gradiente

$$\boxed{D_{\vec{u}}f(P) = \|\overrightarrow{\nabla} f(P)\| \cos\theta}$$

Então, se $\overrightarrow{\nabla} f(P) \neq \vec{0}$,

- o maior valor de $D_{\vec{u}}f(P)$ é igual a $\|\overrightarrow{\nabla} f(P)\|$ e ocorre quando $\cos\theta = 1$, ou seja, quando $\theta = 0$, o que significa que $\vec{u}$ tem a direção e sentido do vetor gradiente,

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\nabla} f(P)}{\|\overrightarrow{\nabla} f(P)\|};$$

- o menor valor de $D_{\vec{u}}f(P)$ é igual a $-||\overrightarrow{\nabla} f(P)||$ e ocorre quando $\cos\theta = -1$ e, portanto, $\theta = \pi$, isto é, $\vec{u}$ tem a direção do vetor gradiente mas sentido oposto,

$$\vec{u} = -\frac{\overrightarrow{\nabla} f(P)}{\|\overrightarrow{\nabla} f(P)\|};$$

- $D_{\vec{u}}f(P)$=0 quando $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto é, quando $\vec{u}$ é ortogonal a $\overrightarrow{\nabla} f(P)$.

Exercício

(a) *Se* $f(x,y) = xe^y$, *determine a taxa de variação de* f *no ponto* $P=(2,0)$ *na direção de* P *para* $Q=(\frac{1}{2},2)$.

(b) *Em que direção tem* f *uma taxa máxima de variação a partir do ponto* P*? Qual o valor desta taxa máxima de variação?*

Resolução.

(a) *Calculemos primeiro o vetor gradiente em* $P=(2,0)$*:*

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (e^y, xe^y)\,; \qquad \overrightarrow{\nabla} f(2,0) = \left(e^0, 2e^0\right) = (1,2)$$

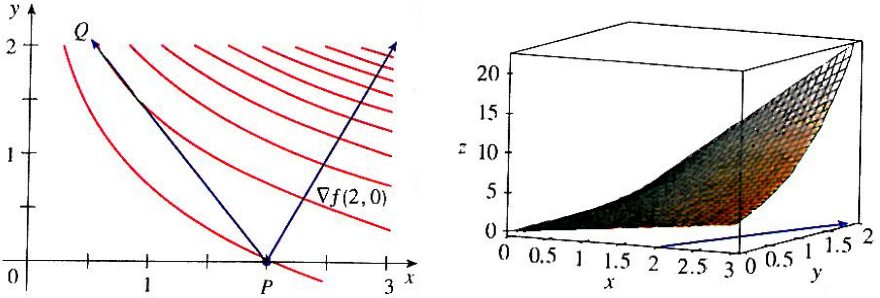
Vetor unitário na direção de $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-\frac{3}{2},2)$*:*

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{(-\frac{3}{2},2)}{\frac{5}{2}} = (-\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5})$$

Taxa de variação de f *no ponto* P *na direção de* P *para* Q*:*

$$D_{\vec{u}} f(2,0) = \overrightarrow{\nabla} f(2,0)\cdot\vec{u} = (1,2)\cdot(-\tfrac{3}{5},\tfrac{4}{5}) = -\tfrac{3}{5}+\tfrac{8}{5} = 1.$$

(b) *A taxa máxima de variação de* f *a partir de* P *ocorre na direção do vetor gradiente* $\overrightarrow{\nabla} f(2,0) = (1,2)$ *e o seu valor é* $\|\overrightarrow{\nabla} f(2,0)\| = \sqrt{5}$.



(a) Curvas de nível e vetor gradiente em P (b) Gráfico de f e vetor gradiente em P

Figura 2: $f(x, y) = xe^y$

Observe-se que o vetor gradiente $\overrightarrow{\nabla} f(2, 0) = (1, 2)$ parece ser perpendicular à curva de nível que contém P, curva de equação $f(x, y) = k \Longleftrightarrow xe^y = k$, com $k = f(2, 0) = 2$.

Gradiente e estruturas de nível

- Sejam
  - $\mathcal{E}$ a estrutura de nível k de f;
  - $\vec{w}$ um vetor unitário tangente à estrutura de nível $\mathcal{E}$.
- Então
  - $f(\mathbf{x})$ é constante para todo o $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ (por definição de estrutura de nível, $\mathbf{x} \in \mathcal{E} \iff f(\mathbf{x}) = k$);
  - sendo $P \in \mathcal{E}$ temos $D_{\vec{w}} f(P) = 0$.
- Mas, com $\|\vec{w}\| = 1$,

$$0 = D_{\vec{w}} f(P) = \|\vec{\nabla} f(P)\| \cos\theta$$

- Supondo $\vec{\nabla} f(P) \neq 0$ devemos ter

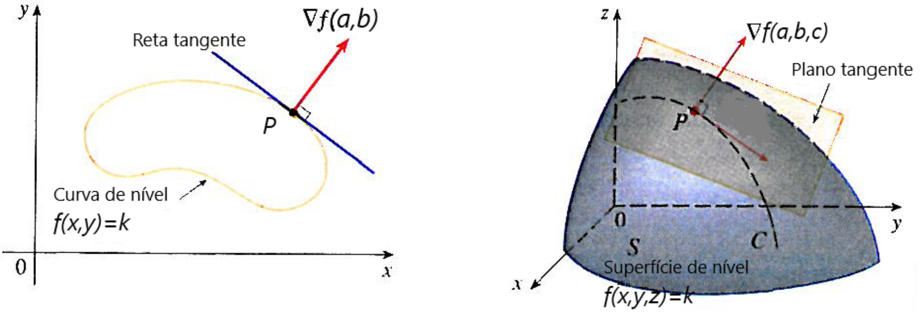
$$\cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \vec{\nabla} f(P) \perp \vec{w}$$

Ou seja

$\vec{\nabla} f(P)$ é ortogonal à estrutura de nível $\mathcal{E}$.

Consequências

- $\vec{\nabla} f(P)$ aponta na direção e sentido de maior crescimento de f a partir de P;
- $-\vec{\nabla} f(P)$ aponta na direção e sentido de maior decrescimento de f a partir de P;
- $||\vec{\nabla} f(P)||$ é maior quando as estruturas de nível de f estão mais próximas entre si e menor quando estas estão mais afastadas;
- $\vec{\nabla} f(P)$ é um vetor ortogonal à estrutura de nível de f que passa em P.



(a) $z = f(x, y)$ (b) $w = f(x, y, z)$

(a) Para uma função f de duas variáveis e um ponto $P = (a, b)$ do seu domínio, $\vec{\nabla} f(a, b)$ é perpendicular à reta tangente à curva de nível $f(x, y) = k$ em P, com $k = f(a, b)$.

(b) Para uma função f de três variáveis e um ponto $P = (a, b, c)$ do seu domínio, $\vec{\nabla} f(a, b, c)$ é perpendicular ao plano tangente à superfície de nível $f(x, y, z) = k$ em P, com $k = f(a, b, c)$.

Reta tangente a uma curva de nível

- Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, $\mathcal{C}$ a curva de nível de f definida pela equação

$$f(x, y) = k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$(a, b) \in \mathcal{C}$ tal que $\vec{\nabla} f(a, b) \neq \vec{0}$.

- Vimos que $\vec{\nabla} f(a, b)$ é um vetor ortogonal à estrutura de nível de f que passa em (a, b), isto é, à curva $\mathcal{C}$.

- A equação da reta tangente a $\mathcal{C}$ em $(a, b) \in \mathcal{C}$ é dada por

$$\vec{\nabla} f(a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0.$$

Observe-se que se $P = (a, b)$ e $Q = (x, y)$ é um ponto da reta, então o vetor $\overrightarrow{PQ} = (x - a, y - b)$ é ortogonal a $\vec{\nabla} f(a, b)$.

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $P = (2, 3)$.

- curva de nível de f que passa em P:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 13\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 13\}$$

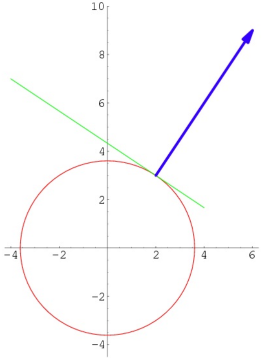
Observe-se que $f(P) = 13$.

- vetor gradiente de f em P:

$$\vec{\nabla} f(2, 3) = (4, 6)$$

- reta tangente a $\mathcal{C}$ em P:

$$\vec{\nabla} f(2, 3) \cdot (x - 2, y - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3y = 13$$



Plano tangente a superfícies de $\mathbb{R}^3$

- Já vimos
  - como construir o plano tangente ao gráfico de uma função real de duas variáveis;
  - que o gráfico de uma função real de duas variáveis define uma superfície em $\mathbb{R}^3$;
  - que nem toda a superfície de $\mathbb{R}^3$ é o gráfico de uma função real de duas variáveis (cf superfície esférica).
- Será possível construir o plano tangente a uma superfície que não seja o gráfico de uma função real de duas variáveis?

Seja $\mathcal{S}$ uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e $P = (a, b, c) \in \mathcal{S}$.

- Se $\mathcal{S}$ é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, então o plano tangente a $\mathcal{S}$ em P tem equação

$$\begin{aligned} z &= f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-b) \\ &= c + \vec{\nabla} f(a,b) \cdot (x-a, y-b), \quad \vec{\nabla} f(a,b) \neq \vec{0} \end{aligned}$$

  onde $(a, b) \in D$ e $c = f(a, b)$.

- Se $\mathcal{S}$ não é o gráfico de uma função de duas variáveis, $\mathcal{S}$ pode ser vista como superfície de nível k de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
  - $\vec{\nabla} g(P)$ é um vetor normal à superfície de nível de g que passa em P, isto é, é perpendicular ao plano tangente a $\mathcal{S}$ que passa em P.
  - Qualquer vetor do plano tangente a $\mathcal{S}$ que passa em P pode ser escrito como $\vec{v} = (x - a, y - b, z - c)$.
  - Assim $\vec{\nabla} g(P) \perp \vec{v}$, ou seja, $\vec{\nabla} g(P) \cdot \vec{v} = 0$.
  - A equação do plano tangente à superfície de nível k de g, $\mathcal{S}$, em P é

$$\vec{\nabla} g(a,b,c) \cdot (x-a, y-b, z-c) = 0, \qquad \vec{\nabla} g(a,b,c) \neq \vec{0}.$$

Observação

- Todo o gráfico de uma função de duas variáveis pode ser visto como superfície de nível $k = 0$ de uma função de três variáveis:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \leftrightsquigarrow \qquad g : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y) \qquad f(x, y) - z = g(x, y, z) \qquad g(x, y, z) = 0$$

- Assim, se $\mathcal{S}$ é uma superfície de $\mathbb{R}^3$ podemos sempre supor que é a superfície de nível k de uma função $g : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e a equação do plano tangente a $\mathcal{S}$ em P, $P = (a, b, c) \in \mathcal{S}$, é

$$\vec{\nabla} g(P) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0, \qquad \vec{\nabla} g(P) \neq \vec{0}.$$

- Importante: saber escolher a função g.

Exemplo

- Determine a equação do plano tangente à superfície $\mathcal{S}$ definida por $x^2 + y^2 - xyz = 7$ no ponto $(2, 3, 1)$ por dois processos diferentes:

1. considerando a superfície como a superfície de nível de uma função de 3 variáveis $g(x, y, z)$;

- $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - xyz$ e $\mathcal{S}$ é a superfície de nível $k = 7$ de g.
- Temos

$$\begin{array}{lll} g'_x(x,y,z) = 2x - yz, & g'_y(x,y,z) = 2y - xz, & g'_z(x,y,z) = -xy \\ g'_x(2,3,1) = 1, & g'_y(2,3,1) = 4, & g'_z(2,3,1) = -6 \end{array}$$

donde $\vec{\nabla} g(2,3,1) = (1, 4, -6) = \vec{i} + 4\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$.

- A equação do plano tangente é

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g(2,3,1) \cdot (x-2, y-3, z-1) = 0 &\Leftrightarrow (1,4,-6) \cdot (x-2, y-3, z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2) + 4(y-3) - 6(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 4y - 6z = 8. \end{aligned}$$

2. considerando a superfície como o gráfico de uma função de 2 variáveis $f(x, y)$.

- Temos

$$x^2 + y^2 - xyz = 7 \Leftrightarrow z = \frac{x^2 + y^2 - 7}{xy}, \quad x, y \neq 0;$$

- Podemos tomar $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2 - 7}{xy}$, $(x, y) \in D$ e $(a, b) = (2, 3)$
- Temos

$$f'_x(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + 7}{x^2\, y}, \qquad f'_y(x, y) = \frac{y^2 - x^2 + 7}{x\, y^2}$$

$$f'_x(2, 3) = \frac{1}{6}, \qquad f'_y(2, 3) = \frac{2}{3}$$

donde $\vec{\nabla} f(2, 3) = (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}) = \frac{1}{6}\,\vec{i} + \frac{2}{3}\,\vec{j}$.

- A equação do plano tangente é

$$\begin{aligned} z = f(2, 3) + \vec{\nabla} f(2, 3) \cdot (x - 2, y - 3) &\Leftrightarrow z = 1 + \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \cdot (x - 2, y - 3) \\ &\Leftrightarrow z = 1 + \frac{1}{6}(x - 2) + \frac{2}{3}(y - 3) \\ &\Leftrightarrow x + 4y - 6z = 8. \end{aligned}$$

Reta normal a uma superfície

- Seja $\mathcal{S}$ a superfície de nível k de uma função diferenciável $g : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{S}$ tal que $\vec{\nabla} g(P) \neq \vec{0}$.
  - Já vimos que $\vec{\nabla} g(P)$ é um vetor normal a $\mathcal{S}$.
  - Dado o vetor $\vec{\nabla} g(P)$ e o ponto $P \in \mathcal{S}$, a reta que passa em P com a direção de $\vec{\nabla} g(P)$ tem equação vetorial

$$(x, y, z) = P + \lambda \vec{\nabla} g(P), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- A reta normal a $\mathcal{S} : g(x, y, z) = k$ em P tem, então, equação vetorial

$$(x, y, z) = P + \lambda \vec{\nabla} g(P), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

- Equação da reta normal a $\mathcal{S}$ definida por $z = x^2 + y^2$ em $P = (1, -2, 5)$.
  - Aqui $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ e $k = 0$ pelo que

$$\begin{aligned} &g'_x(x,y,z) = 2x, \quad &&g'_y(x,y,z) = 2y, \quad &&g'_z(x,y,z) = -1, \\ &g'_x(1,-2,5) = 2, \quad &&g'_y(1,-2,5) = -4, \quad &&g'_z(1,-2,5) = -1 \end{aligned}$$

    e $\overrightarrow{\nabla} g(1, -2, 5) = (2, -4, -1) = 2\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - \vec{k}$.
  - A equação da reta normal a $\mathcal{S}$ em P é

$$(x, y, z) = (1, -2, 5) + \lambda(2, -4, -1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

    ou ainda, na forma das equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 4\lambda \\ z = 5 - \lambda \end{cases}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$