Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Álgebra Linear LCC Exame de recurso Duração: 2h30 [Exame modelo]

Nome: ______________________ **Número:** ________

Grupo I

Em cada questão deste grupo deve ser assinalada apenas uma das opções de resposta. A uma resposta correta é atribuída uma cotação de 1.25 valores (apenas uma resposta está correta) e a uma resposta errada é atribuída uma cotação de −0.25 valores. A cotação mínima total deste grupo é de 0 valores.

1. Dadas duas matrizes $A \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, a matriz

   - ☐ $AB + BA$ está bem definida.
   - ☐ $A^T B$ está bem definida.
   - ☐ $(A + B^T)^T$ pode ser calculada.
   - ☐ $AB \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Se A e B são matrizes de ordem $n > 1$ tais que $3AB = I_n$, então

   - ☐ A e B são inversas uma da outra.
   - ☐ A é invertível e $A^{-1} = \frac{1}{3}B$.
   - ☐ A é invertível e $A^{-1} = 3B$.
   - ☐ A é invertível e B é não invertível.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   - ☐ Para $n \geq 3$, $A^n = \boldsymbol{O}_{3\times 3}$.
   - ☐ O sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ tem solução única.
   - ☐ $\det(A^T) \neq 0$.
   - ☐ $\det(A + 2I_3) = 2$.

4. Os seguintes vetores formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

   - ☐ $(1, 1, -1), (2, 3, 4), (1, -2, 3), (2, 1, 1)$.
   - ☐ $(1, 1, 0), (0, 2, 3), (-2, 0, 1)$.
   - ☐ $(1, 2, 0), (0, 1, -1)$.
   - ☐ $(-1, 2, 1), (3, 2, 2), (2, 4, 3)$.

5. Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\dim\big(\mathsf{Im}(T)\big) = 2$. Então

   - ☐ $\mathsf{Nuc}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^4}\}$.
   - ☐ $(0, 0, 0, 0) \notin \mathsf{Nuc}(T)$.
   - ☐ $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ com dimensão 2.
   - ☐ $\mathsf{Nuc}(T)$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1.

6. Seja A uma matriz de ordem 3 cujo polinómio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2-4)$. Então

   - ☐ $\det(A - 2I_3) \neq 0$.
   - ☐ Os valores próprios da matriz $A^T + 2I_3$ são 0, 3 e 4.
   - ☐ o sistema $(A - 2I_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ é possível e determinado.
   - ☐ $A^T - I_3$ é invertível.

Grupo II

Neste grupo as respostas a todos as questões devem ser devidamente justificadas.

1. [1 valor] Sejam A e B matrizes invertíveis. Mostre que
$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}.$$

2. [2.5 valores] Considere, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a matriz
$$M = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2\beta \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \end{array}\right].$$
   (a) Escreva o sistema, nas incógnitas x, y e z, cuja matriz ampliada é M.
   (b) Discuta o sistema, em função dos parâmetros α e β.
   (c) Indique a solução do sistema para $\alpha = \beta = 0$.

3. [2 valores] Considere as seguintes matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Calcule $\det(A)$ e $\det(B)$.
   (b) Considere o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, onde $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}^T$. Determine o valor da incógnita x_3 usando a regra de Cramer.

4. [3 valores] Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por
$$T(x,y,z) = (x+2y-z, y+2z, 2x+5y, x+3y+z).$$
   (a) Determine a representação matricial de T relativamente às bases canónicas.
   (b) Calcule, de duas formas distintas, $T(1,2,3)$.
   (c) Determine $\mathsf{Nuc}(T)$ e uma sua base.
   (d) Indique uma base para $\mathsf{Im}(T)$.

5. [2.5 valores] Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$
   (a) Determine os valores próprios de A.
   (b) Determine o subespaço próprio associado ao maior valor próprio de A.

6. [1.5 valores] Sejam A uma matriz real quadrada de ordem n tal que $A^2 = I_n$ e $\boldsymbol{u}$ um vetor não nulo que não é vetor próprio de A.
   (a) Mostre que se λ é um valor próprio de A, então $\lambda \in \{-1, 1\}$.
   (b) Mostre que os vetores $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + A\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - A\boldsymbol{u}$ são vetores próprios de A e diga a que valores próprios estão associados.