Universidade do Minho	5 de abril de 2024

Resolução do 1º Teste de

Autómatos e Linguagens Formais

LCC/LMAT	Duração: 2 horas

1. Considere as linguagens $L_1 = A^*aA^*aA^*$, $L_2 = A^*aaA^*$ e $L_3 = L_1 \setminus A^*abA^*$ sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$. Para cada uma das afirmações seguintes, diga, justificando, se a afirmação é verdadeira ou falsa.

a) $L_1 = L_2$.

R: Tem-se, por exemplo, que a palavra aba pertence a L_1 mas não pertence a L_2. Logo, a afirmação é falsa.

b) $L_3 \subseteq L_2$.

R: A afirmação é verdadeira. De facto, consideremos uma palavra $w \in L_3$, ou seja, $w \in L_1$ e $w \notin A^*abA^*$. Deve-se mostrar que $w \in L_2$.

Ora, de $w \in L_1$, resulta que w é da forma $w = u_1au_2au_3$ para palavras $u_i \in A^*$. Se u_2 tivesse alguma ocorrência da letra b é claro que w teria o fator ab, em contradição com a hipótese de que $w \notin A^*abA^*$. Logo $u_2 = a^k$ para algum $k \in \mathbb{N}_0$, donde

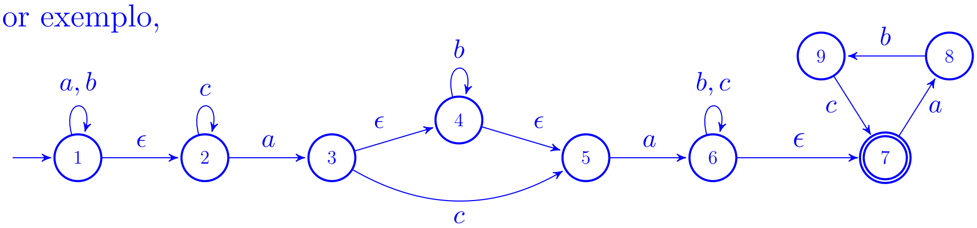
$$w = u_1aa^kau_3 = u_1aaa^ku_3$$

tem o fator aa. Portanto $w \in L_2$, como se queria provar.

2. Seja L a linguagem representada pela expressão regular $(a^* + b)^*c^*a(b^* + c)a(b + c)^*(abc)^*$ sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.

a) Indique um autómato finito com transições vazias que reconheça L.

R: Note-se que $(a^*+b)^* = (a+b)^*$. Um autómato finito com transições vazias que reconhece L é, por exemplo,



b) Indique todas as palavras de L de comprimento ≤ 4.

R: As palavras de L de comprimento ≤ 4 são:

$a^2, a^3, ba^2, ca^2, aba, aca, a^2b, a^2c, a^4, aba^2, ba^3, b^2a^2, aca^2, bca^2, c^2a^2, a^2ba, a^2ca, (ba)^2, baca,$
$caba, (ca)^2, a^3b, a^3c, ba^2b, ba^2c, ca^2b, ca^2c, ab^2a, (ab)^2, abac, acab, (ac)^2, a^2b^2, a^2bc, a^2cb, a^2c^2.$

c) É verdade que $L \cap A^*abcaA^* = \emptyset$? Justifique.

R: É falso pois, por exemplo, a palavra $abca^2$ pertence a L e tem o fator $abca$.

d) Indique uma palavra u de $L \cap bcaA^*$ de comprimento 8 tal que $u = u^I$.

R: A única palavra nas condições requeridas é $u = bcab^2acb$.

3. Seja L a linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ definida indutivamente pelas seguintes regras:

i) $c \in L$;

ii) Se $w \in L$, então $bw \in L$;

iii) Se $w \in L$, então $awaa \in L$.

Seja ainda $K = \{xca^{2n} : x \in \{a, b\}^*, n \in \mathbb{N}_0, |x|_a = n\}$.

a) Mostre que a palavra $u = ab^2abca^4$ pertence a L e a K.

R: Por i), $c \in L$ donde, por ii), $bc \in L$. Aplicando agora a regra iii), obtém-se que $abca^2 \in L$. A seguir, aplicando duas vezes consecutivas a regra ii), tem-se que $b^2abca^2 \in L$. Finalmente, usando novamente iii), conclui-se que $u = ab^2abca^4 \in L$.

A palavra u é da forma $u = xca^{2n}$ com $x = ab^2ab$ e $n = 2$. Dado que $|x|_a = 2$, deduz-se que $u \in K$.

b) Prove que $L = K$.

R: A prova da igualdade dos conjuntos L e K faz-se por "*dupla inclusão*".

- Comecemos por provar que $L \subseteq K$. A prova será feita por indução estrutural sobre a definição de L. Seja $v \in L$. Pretende-se mostrar que $v \in K$.

  I) Suponhamos primeiro que $v = c$. Neste caso tem-se $v = xca^{2n}$ com $x = \epsilon$ e $n = 0$. Como $|\epsilon|_a = 0$ é imediato que $v \in K$.

  II) Suponhamos agora que $v = bw$, com $w \in L$. Suponhamos ainda, por hipótese de indução, que $w \in K$. Então w é do tipo $w = xca^{2n}$ com $x \in \{a, b\}^*$ e $|x|_a = n$. Daí resulta que $v = bxca^{2n}$ e que $|bx|_a = n$. Portanto $v \in K$.

  III) Assumamos por fim que $v = awa^2$, com $w \in L$. Assume-se também, por hipótese de indução, que $w \in K$. Logo $w = xca^{2n}$ com $x \in \{a, b\}^*$ e $|x|_a = n$. Assim $v = axca^{2(n+1)}$ com $|ax|_a = n + 1$. Consequentemente, $v \in K$.

  De I) a III) resulta, pelo Princípio de indução estrutural sobre a definição de L, que $v \in K$. Terminou-se deste modo a prova da inclusão $L \subseteq K$.

- Mostremos agora que $K \subseteq L$. Seja $v \in K$. Então $v = xca^{2n}$ com $x \in \{a, b\}^*$, $n \in \mathbb{N}_0$ e $|x|_a = n$. Mostremos, por indução sobre n, que $v \in L$.

  I) Suponhamos primeiro que $n = 0$. Então $v = b^mc$ para algum $m \in \mathbb{N}_0$. Por i), $c \in L$. Se $m = 0$, então $v = c \in L$. Senão $m > 0$ e aplicando m vezes consecutivas a regra ii) deduz-se que $v = b^mc \in L$.

  II) Suponhamos agora que $n > 0$. Suponhamos ainda, por hipótese de indução, que, para cada elemento $z \in K$ da forma $z = yca^{2(n-1)}$ com $y \in \{a, b\}^*$ e $|y|_a = n-1$, tem-se $z \in L$. De $|x|_a = n$, resulta que x é da forma $x = b^may$ com $y \in \{a, b\}^*$ e $|y|_a = n - 1$. Logo, $v = b^maza^2$ onde $z = yca^{2(n-1)}$. Por definição de K, $z \in K$. Logo, pela hipótese de indução, $z \in L$. Pela regra iii) deduz-se, por conseguinte, que a palavra aza^2 pertence a L. Para concluir que $v \in L$ basta agora aplicar m vezes a regra ii).

  De I) e II) resulta, pelo Princípio de indução, que $v \in L$, concluindo-se assim a prova da inclusão $K \subseteq L$.

c) Mostre que a linguagem $M = \{a^m c a^{2m} : m \in \mathbb{N}_0\}$ não é regular.

R: Pelo Teorema de Kleene, mostrar que M não é regular equivale a mostrar que não é reconhecível. Suponhamos que M é reconhecível. Então, pelo Lema da Iteração, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $u \in M$, com $|u| \geq n$, existem palavras $x, y, z \in A^*$ tais que:

I) $|xy| \leq n$ e $y \neq \epsilon$;

II) $u = xyz$;

III) $\forall k \in \mathbb{N}_0, xy^k z \in M$.

Consideremos, em particular, a palavra $u = a^n c a^{2n}$. Como $u \in M$ e $|u| \geq n$, deduz-se de I)–III) que $u = xyz$ para alguns $x, y, z \in A^*$ tais que $|xy| \leq n$, $y \neq \epsilon$ e

$$xy^2 z \in M. \tag{1}$$

Como $|xy| \leq n$, xy é um prefixo de a^n, donde

$$x = a^r, \quad y = a^s \quad \text{e} \quad z = a^t c a^{2n}$$

com $r, s, t \in \mathbb{N}_0$, $s \neq 0$ e $r + s + t = n$, como se ilustra na seguinte figura.

a^n		ca^{2n}
x	y	z

Portanto

$$xy^2 z = a^r (a^s)^2 a^t c a^{2n} = a^{n+s} c a^{2n}.$$

Ora, como $s \neq 0$, $2(n + s) \neq 2n$ e, por isso, $xy^2 z \notin M$, em contradição com (1). Consequentemente, M não é reconhecível donde, pelo Teorema de Kleene, não é regular.

d) Indique uma linguagem regular R tal que $L \cap R = M$.

R: A linguagem $R = \{a^m c a^n : m, n \in \mathbb{N}_0\}$ está nas condições pretendidas. Que é regular decorre de ser representada pela expressão regular $a^* c a^*$. Mostremos que $L \cap R = M$.

É claro que $M \subseteq L \cap R$ pois toda a palavra da forma $a^m c a^{2m}$, com $m \in \mathbb{N}_0$, pertence a $L (= K)$ e a R. Verifiquemos, para concluir, que $L \cap R \subseteq M$. Seja $v \in L \cap R$. Então $v \in L$ e $v \in R$. De $v \in R$, deduz-se que $v = a^m c a^n$ para alguns $m, n \in \mathbb{N}_0$. Agora, de $v \in L$, e do facto de $L = K$ por **b**), resulta que $n = 2m$. Logo, $v \in M$ como queríamos provar.

e) Apresente uma definição indutiva de R.

R: A linguagem R é definida indutivamente pelas seguintes regras:

i) $c \in R$;

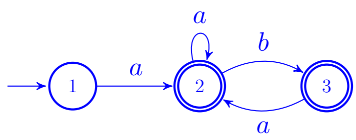
ii) Se $w \in R$, então $aw \in R$;

iii) Se $w \in R$, então $wa \in R$.

4. Seja L a linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$ constituída pelas palavras que começam por a e não têm o fator b^2.

a) Indique um autómato finito que reconheça L.

R: O autómato seguinte reconhece L:



b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa L ou não.

i) $a(ba)^* + a(ab)^*$.

R: A expressão $r = a(ba)^* + a(ab)^*$ não representa a linguagem L pois, por exemplo, a palavra aba^2 pertence a L e não pertence a $\mathscr{L}(r)$.

ii) $a(a + ba)^*$.

R: A expressão $r = a(a+ba)^*$ não representa L. De facto, ab é um caso de um elemento de L que não pertence à linguagem $\mathscr{L}(r)$ representada pela expressão regular.

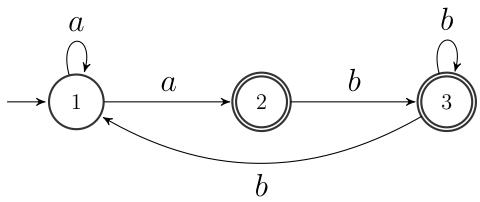
iii) $a(a + ba)^*(\epsilon + b)$.

R: A expressão $r = a(a + ba)^*(\epsilon + b)$ representa L pois, claramente, r é a expressão regular que representa a linguagem reconhecida pelo autómato indicado na alínea **a)** (ou seja, L).

c) Indique todas as palavras de L de comprimento ≤ 4.

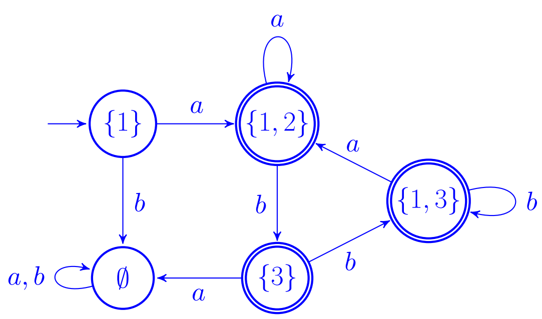
R: Tem-se $\{u \in L : |u| \leq 4\} = \{a, a^2, ab, a^3, a^2b, aba, a^4, a^3b, a^2ba, aba^2, (ab)^2\}$.

5. Seja $\mathscr{A}$ o autómato finito representado pelo seguinte grafo:



a) Construa um autómato finito determinista completo acessível equivalente a $\mathscr{A}$.

R: O autómato $DA(\mathscr{A})$, apresentado de seguida, verifica o estipulado



b) Indique palavras $u, v \in A^*$ tais que $|u| = |v| = 6$, $u \in L(\mathscr{A})$ e $v \notin L(\mathscr{A})$.

R: Por exemplo, $u = a^2b^2a^2$ e $v = a^3ba^2$.