Exercício 1.1 Usando os sinais $<$, $=$ e $>$, preencha os espaços identificados com $\square$ de modo a obter proposições verdadeiras:

a) $\frac{3}{8} \square 0,37$;
b) $0,33 \square \frac{1}{3}$;
c) $\sqrt{2} \square 1,414$;
d) $5 \square \sqrt{25}$;
e) $\frac{3}{7} \square 0,428571$;
f) $\frac{22}{7} \square \pi$.

Exercício 1.2 Escreva sob a forma de dízima as seguintes frações:

a) $\frac{3}{7}$;
b) $\frac{29}{4}$;
c) $\frac{7}{101}$;
d) $\frac{274301}{3300}$.

Exercício 1.3 Represente os seguintes números racionais sob a forma de quociente de números inteiros:

a) $1,25$;
b) $2,374$;
c) $5,(3)$;
d) $54,134(728)$.

Exercício 1.4 Encontre um número racional e um número irracional nos intervalos:

a) $\left]\frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}\right[$;
b) $\left]\frac{1}{101}, \frac{1}{100}\right[$;
c) $\left]\frac{\pi}{101}, \frac{\pi}{100}\right[$.

Exercício 1.5 Sejam x e y números reais. Diga, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa:

a) $x < y \;\Rightarrow\; x^2 < y^2$;
b) $x < y \;\Rightarrow\; x^3 < y^3$;
c) $(x, y \neq 0 \wedge x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$;
d) $x < y \;\Rightarrow\; x < \frac{x+y}{2} < y$;
e) $x > 7 \Rightarrow |x| > 7$;
f) $|1 + 4x| < 1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$;
g) $|x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$;
h) $|x - 5| \leq 2 \Rightarrow 3 < x < 7$.

Exercício 1.6 No que se segue x e y representam números reais e n representa um número natural. Indique quais das seguintes relações são verdadeiras. Dê um contraexemplo para as relações que forem falsas.

a) $(x + y)^n = x^n + y^n$;
b) $(xy)^n = x^n y^n$;
c) $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;
d) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
e) $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
f) $|x + y| = |x| + |y|$.

Exercício 1.7 Em cada uma das alíneas seguintes encontre números reais a e ε de modo a que a solução da inequação $|x - a| < \varepsilon$ seja o intervalo dado:

a) $]-2, 2[$;
b) $]-4, 0[$;
c) $]0, 4[$;
d) $]-3, 7[$.

Exercício 1.8 Represente em extensão os seguintes conjuntos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x+4| = 3\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x+1)^2} = 3\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x+2|\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : (x^2-7)^2 = 0\}$;

e) $\big\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3x+1} = 2x\big\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : |x|\ |x+3| = 4\}$.

Exercício 1.9 Exprima cada uma dos conjuntos seguintes na forma de intervalo ou reunião de intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 - x \leq 2\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 - 2x \leq 1\}$;

c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 5\}$;

d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2(x^2-1) \geq 0\}$;

e) $\{x \in \mathbb{R} : |5 - \frac{1}{x}| < 1\}$;

f) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| \geq 2\}$;

g) $\{x \in \mathbb{R} : |5x+2| \leq 1\}$;

h) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq 4x\}$;

i) $\{x \in \mathbb{R} : 6x^2 - 5x \leq -1\}$;

j) $\{x \in \mathbb{R} : |3x-2| \leq 1\}$;

k) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\}$;

l) $\{x \in \mathbb{R} : |x-1| < |x-2|\}$;

m) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{2x+3} > 0\}$;

n) $\{x \in \mathbb{R} : |x+2| + |x-2| < 10\}$;

o) $\{x \in \mathbb{R} : |x^2-1| \leq 1\}$;

p) $\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 \leq 4\}$;

q) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\}$;

r) $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x-2} \leq 0\}$;

s) $\{x \in \mathbb{R} : |x-3| < 2|x|\}$;

t) $\{x \in \mathbb{R} : |x+1| > |x-3|\}$.

Exercício 1.10 Para cada um dos seguintes conjuntos determine o derivado, o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam).

a) $\mathbb{Z}$;

b) $\mathbb{Q}$;

c) $]0, 2[$;

d) $\mathbb{Q} \cap [-2, 0[$;

e) $[-\sqrt{5}, 3] \cap \mathbb{Q}$;

f) $[0, \sqrt{3}\,] \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$;

g) $]0, 3[\backslash\{1\} \cup \{4, 5\}$;

h) $\big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\big\}$;

i) $[0, 1] \setminus \big\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\big\}$;

j) $\big\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\big\}$;

k) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 11\}$;

l) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < \frac{25}{16}\}$;

m) $\big\{x \in \mathbb{R} : x^5 > x^3\big\}$;

n) $\Big\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+2} > 2\Big\}$;

o) $\{x \in \mathbb{R} : |x-5| < 3\}$;

p) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |x-1| \leq 4\}$;

q) $\{x \in \mathbb{R} : x < |x|\}$;

r) $\{2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$;

s) $\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x \leq 0 \wedge |x^2-1| < x+5\}$;

t) $\{x \in \mathbb{Q} : |x| < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : 1 \leq x \leq \pi\}$;