Universidade do Minho **Cursos: LCC & LMAT**

Departamento de Matemática **Folha 9** **2025/2026**

Probabilidades e Aplicações

---

1. Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

   (a) Mostre que a transformada de Laplace de X é dada por:
   $$L(t) = \exp\left\{-t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\},\ t \in \mathbb{R}.$$
   Sug.: Comece por provar que a transformada de Laplace de uma v.a. $Z \sim N(0,1)$ é dada por
   $$L_Z(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\}$$
   e, de seguida, use propriedades da lei Normal para generalizar.

   (b) Considere agora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

   i) Mostre que a v.a.r. $S_n \equiv X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ segue a lei
   $$N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,,\, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right).$$

   ii) Mostre que a v.a.r. $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$, com $a_1, a_2, \ldots, a_n$ quaisquer constantes reais não todas nulas, segue a lei
   $$N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\,,\, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right).$$

   (c) Usando (b) ii), conclua que, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ formam uma amostra aleatória proveniente de X (i.e., são n v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com a v.a.r. X), então
   $$\overline{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$
   em que $\overline{X}_n \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

2. Mostre que a transformada de Laplace da lei $Poisson(\lambda)$ é dada por
   $$L(t) = \exp\{-\lambda(1 - e^{-t})\},\ t \in \mathbb{R}.$$
   Use este resultado para provar que, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, então
   $$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim Poisson\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right).$$

3. Considere uma amostra aleatória, de dimensão 100, proveniente de uma v.a.r. $X \sim Poisson(2)$ (i.e., considere $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ v.a.r.'s i.i.d.'s com a lei $Poisson(2)$).

   (a) Usando Ex. 2, determine o valor exato de
   $$P(S_{100} \leq 250),$$
   em que $S_{100} \equiv \sum_{i=1}^{100} X_i$.

   (b) Recorrendo ao T.L.C., determine um valor aproximado para a probabilidade pedida na alínea anterior.

   (c) Repita a alínea anterior, considerando apenas uma amostra aleatória, de dimensão 100, proveniente de uma v.a.r. X tal que $E[X] = 2$ e $Var[X] = 2$.

4. Certo produto tem peso médio de 10g e desvio-padrão de 0.5g. Este produto é embalado em caixas de 12 unidades que, quando estão vazias, apresentam peso médio de 150g e desvio-padrão de 8g. Supondo que todos os pesos considerados são v.a.r.'s independentes e com lei Normal,

   (a) identifique a lei da v.a.r. que representa o peso de uma caixa cheia deste produto.

   (b) determine a probabilidade de uma caixa cheia deste produto pesar mais de 285g.

5. Uma empresa tem dois vendedores, o Sr. A e o Sr. B, cujos montantes diários de vendas são v.a.r.'s independentes que seguem uma lei Normal, com parâmetros $\mu_A = 100$ e $\sigma_A^2 = 100$, $\mu_B = 80$ e $\sigma_B^2 = 9$, respetivamente. Determine a probabilidade de, num dia, o Sr. B vender mais do que o Sr. A?

6. Um investigador pretende recolher uma amostra aleatória que lhe permita estimar a média de uma população (entenda-se, o valor médio de uma v.a.r. de interesse). Para o efeito ele precisa que a dimensão da amostra, n, seja suficiente para garantir que seja de pelo menos 0.95 a probabilidade de a média amostral não se afastar da média da população em mais de 25% do desvio-padrão da população. Supondo que a v.a.r. em causa segue uma lei Normal, qual deve ser o valor mínimo de n?

7. Mostre que a transformada de Laplace da lei $Bin(n, p)$ é dada por:

$$L(t) = (1 - p + pe^{-t})^n, \ t \in \mathbb{R}.$$

   Use este resultado para provar que, se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são v.a.r.'s independentes e tais que $X_i \sim Bin(n_i, p)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, então

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_k \sim Bin\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p\right).$$

8. Sejam $X \sim Bernoulli(p)$ e $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de v.a.r.'s i.i.d.'s com X e considere a v.a.r.

$$S_m \equiv \sum_{i=1}^{m} X_i.$$

   (a) Recorra ao Ex. 7 para concluir que $S_m \sim Bin(m, p)$.

   (b) Use o T.L.C. para mostrar que, quando $m \to +\infty$, a função de distribuição da v.a.r.

$$\frac{S_m - mp}{\sqrt{mp(1-p)}}$$

   converge para a função de distribuição da lei $N(0, 1)$.

   Observação: O resultado da alínea (b) é usualmente apresentado do seguinte modo: se $Y \sim Bin(m, p)$ e m é grande, então a função de distribuição de Y é bem aproximada pela função de distribuição da lei $N(mp, mp(1 - p))$.

9. Considere a experiência que consiste em efetuar 100 lançamentos de um dado equilibrado.

   (a) Seja Y a v.a.r. que representa o número total de pintas nos 100 lançamentos. Determine $E[Y]$ e $Var[Y]$ e obtenha uma aproximação para o valor de $P(Y > 375)$.

   (b) Seja X a v.a.r. que representa o número de vezes que saiu a face 6 nos 100 lançamentos. Identifique a lei exacta de X, o seu valor médio e a sua variância. Recorrendo ao T.L.C., obtenha um valor aproximado de $P(X \leq 30)$ (use Ex. 8); determine ainda o valor exato.

   (c) X e Y são v.a.r.'s independentes? Justifique.