Geometria

Resolução do segundo teste

29/11/2011

1. $r = \underset{A}{(1,1,1)} + \langle \underset{\vec{v}}{(1,-1,0)} \rangle$ $\qquad$ $s = \underset{B}{(1,1,0)} + \langle \underset{\vec{w}}{(1,1,1)} \rangle$

a) $\vec{AB} = B - A = (0,0,-1)$

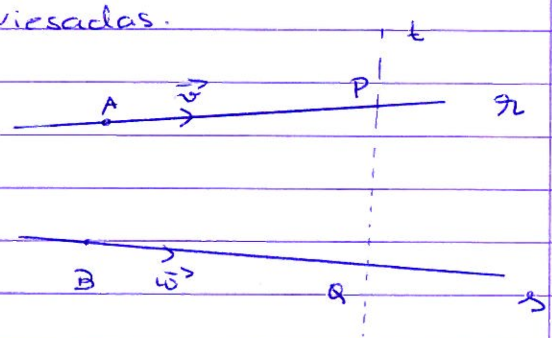
$r + s = A + \langle \vec{AB}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$

$= (1,1,1) + \langle (0,0,-1), (1,-1,0), (1,1,1) \rangle$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -(1+1) = -2 \neq 0$$

Logo $\{\vec{AB}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de três vectores linearmente independentes e, portanto, $\dim(r+s) = 3$

Logo r e s são rectas enviesadas.



b) Temos

$\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PQ} + \vec{QB}$ $\qquad (*)$

Como A e $P \in r$ e B e $Q \in s$

existem α e $\beta \in \mathbb{R}$ tais que

$\vec{AP} = \alpha \vec{v}$ e $\vec{QB} = \beta \vec{w}$

Note-se também que como t é a perpendicular comum a r e a t se tem $\vec{v} \perp \vec{PQ}$ e $\vec{w} \perp \vec{PQ}$

Fazendo o produto escalar em $(*)$ com $\vec{v}$ e $\vec{w}$ temos

$$\begin{cases} \vec{AB}\cdot\vec{v} = \alpha \vec{v}\vec{v} + \beta \vec{w}\vec{v} \\ \vec{AB}\cdot\vec{w} = \alpha \vec{v}\vec{w} + \beta \vec{w}\cdot\vec{w} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2\alpha \\ -1 = 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1/3 \end{cases}$$

Assim temos $P = A + \vec{AP} = A + 0\vec{v} = A = (1,1,1)$

$Q = B + \vec{BQ} = B - \vec{QB} = B + \frac{1}{3}\vec{w} =$

$= (1,1,0) + \frac{1}{3}(1,1,1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

c) Como r e s são enviesadas: $d(r,s) = d(P,Q)$

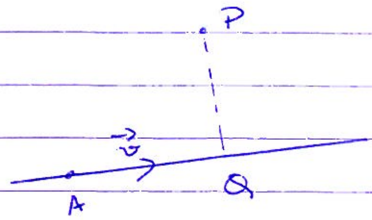
C.A.: $d(P,Q)^2 = \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 =$

$= 1/9 + 1/9 + 4/9 = 6/9 = \frac{2}{3}$

Logo $d(r,s) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

d) O ângulo formado por r e s é o ângulo $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = 0$

Logo $\theta = \pi/2$



2. $r = x + y - 1 = 0$

a) O vector $(1,1)$ é um vector normal a r, logo $\vec{v} = (1,-1)$ é um vector director de r

$A = (0,1)$ é um ponto de r. Portanto $r = (0,1) + \langle(1,-1)\rangle$

Seja Q a projecção ortogonal de P em r.

Temos $\vec{AP} = \vec{AQ} + \vec{QP}$. Como $A, Q \in r$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{AQ} = \lambda\vec{v}$.

Logo $\vec{AP} = \lambda\vec{v} + \vec{QP}$. Fazendo o produto escalar com $\vec{v}$ obtemos $\vec{AP}\vec{v} = \lambda\vec{v}\vec{v}$, pois $\vec{PQ} \perp \vec{v}$

Portanto $\lambda = \dfrac{\vec{AP}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = \dfrac{(1,0)\cdot(1,-1)}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

Assim $Q = A + \vec{AQ} = (0,1) + \frac{1}{2}(1,-1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) Seja $P(M)$ a projecção ortogonal de M em r.

Repetindo o raciocínio da alínea anterior temos:

$$P(M) = A + \frac{\vec{AM}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = (0,1) + \frac{(x,y-1)\cdot(1,-1)}{2}(1,-1)$$

$$= (0,1) + \frac{x-(y-1)}{2}(1,-1) = (0,1) + \left(\frac{x-y+1}{2}, \frac{-x+y-1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x-y+1}{2}, \frac{1-x+y}{2}\right)$$

c) Sabemos que $S(M) = M + 2\,\overrightarrow{MP(M)} =$

$$= M + 2\,(P(M) - M) = -M + 2P(M)$$

Logo fazendo $M = (x,y)$

$$S(x,y) = -(x,y) + 2\left(\frac{x-y+1}{2}, \frac{1-x+y}{2}\right) =$$

$$= (-x,-y) + (x-y+1, 1-x+y) =$$

$$= (-y+1, 1-x)$$

3. Em coordenadas homogéneas, f e g têm a seguinte representação

$$f: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g: \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo a representação de $f \circ g$ é dada por:

$$f \circ g: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em coordenadas usuais $f \circ g$ representa-se por:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A matriz associada a $f \circ g$ é então a matriz identidade que é uma matriz ortogonal (claramente $I I^t = I$) e além disso $f \circ g$ é a translação segundo $\vec{v} = (-1, -2)$

4. Uma homotetia de centro Ω e razão λ é definida genericamente por: $M \longrightarrow \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$

Comparando esta expressão com a função h temos

$$\lambda = -2 \qquad (1-\lambda)\Omega = (4, 6, 9, 1)$$

$$3\,\Omega = (4, 6, 9, 1)$$

$$\Omega = (4/3, 2, 3, 1/3)$$

Portanto h é uma homotetia de centro $\left(\frac{4}{3}, 2, 3, \frac{1}{3}\right)$ e razão -2.