



Números Reais

2. (a) $\frac{3}{8} > 0,37$

(b) $0,33 < \frac{1}{3}$

(c) $\sqrt{2} > 1,414$

(d) $5 = \sqrt{25}$

(e) $\frac{3}{7} > 0.428571$

(f) $\frac{22}{7} > \pi$

3. (a) $x = 2,25 = \frac{9}{4}$

(b) $x = 3,721 = \frac{3721}{1000}$

(c) $x = 5,(4) = \frac{49}{9}$

(d) $x = 0,(17) = \frac{17}{99}$

(e) $x = 3,2(7) = \frac{59}{18}$

(f) $x = 3,66(087) = \frac{365721}{99900}$

4. (a) Por exemplo, $\frac{\pi}{100}$

(b) Por exemplo, $\frac{32}{11 \times 10} = \frac{32}{110}$.

5. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = -5$ e $y = 1$, tem-se $-5 < 1$ e, no entanto, $|-5| = 5 > 1 = |1|$.

- (b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = -5$ e $y = 2$, tem-se $-5 < 2$ e, no entanto, $(-5)^2 = 25 > 4 = 2^2$.
- (c) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = 2$ e $y = 4$, tem-se $2 < 4$ e, no entanto, $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.
- (d) Afirmação verdadeira. Basta observar que a função $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente.
- (e) Afirmação verdadeira. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$x < y \Rightarrow x + x < x + y \Rightarrow 2x < x + y \Rightarrow x < \frac{x + y}{2}$$

e

$$x < y \Rightarrow x + y < y + y \Rightarrow x + y < 2y \Rightarrow \frac{x + y}{2} < y.$$

- (f) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = 5$ e $y = 10$, tem-se $5 < 10$ e, no entanto, $\frac{1}{|5|} > \frac{1}{|10|}$.

6. (a) $|x - 0| < 2$
 (b) $|x - (-2)| < 2$
 (c) $|x - 2| < 2$
 (d) $|x - 2| < 5$
 (e) $|x - (-2)| < 5$

7. (a) $[-1, +\infty[$ (b) $[0, \frac{1}{2}]$
 (c) $] - \infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$ (d) $] - \infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$
 (e) $[-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}]$ (f) $] - \infty, 1] \cup [5, +\infty[$
 (g) $[-2, 0] \cup [2, +\infty[$ (h) $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$
 (i) $] - 3, -2[\cup]2, 3[$ (j) $] - \frac{3}{2}, 1[$
 (k) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ (l) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
 (m) $] - 3, -2[\cup]2, 3[$ (n) $[0, 2[$
 (o) $] - \infty, -3[\cup]1, +\infty[$ (p) $]1, +\infty[$

8. (a) $\{-7, -1\}$ (b) $\{-4, 2\}$
 (c) $\{-1\}$ (d) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$
9. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $x = 4$ e $y = 4$, tem-se $\sqrt{4+4} = \sqrt{8} \neq 4 = \sqrt{4} + \sqrt{4}$.
 (b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $n = 2$, $x = 2$ e $y = 1$, tem-se $(2+1)^2 = 9 \neq 4+1 = 2^2 + 1^2$.
 (c) Afirmação verdadeira. Justifique.
10. (a) Conjunto dos majorantes: $[7, +\infty[$; $\sup A = 7$; $\max A = 7$
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 0]$; $\inf A = 0$; $\min A = 0$
 A é limitado porque é majorado e minorado
 (b) Majorantes: $[2, +\infty[$; $\sup B = 2$; não existe máximo
 Conjunto dos minorantes: \emptyset ; não existe ínfimo nem mínimo
 B não é limitado porque não é minorado
 (c) Conjunto dos majorantes: $[2, +\infty[$; $\sup C = 2$; não existe máximo
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 1]$; $\inf C = 1$; não existe mínimo
 C é limitado porque é majorado e minorado
 (d) Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{2}, +\infty[$; $\sup D = \sqrt{2}$; não existe máximo
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 1]$; $\inf D = 1$; $\min D = 1$
 D é limitado porque é majorado e minorado
 (e) Conjunto dos majorantes: \emptyset ; não existe supremo nem máximo
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 1]$; $\inf E = 1$; $\min E = 1$
 E não é limitado porque não é majorado
 (f) Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{5}, +\infty[$; $\sup F = \sqrt{5}$; não existe máximo
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, -\sqrt{5}]$; $\inf F = -\sqrt{5}$; não existe mínimo
 F é limitado porque é majorado e minorado
 (g) Conjunto dos majorantes: $[0, +\infty[$; $\sup G = 0$; $\max G = 0$
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 0]$; $\inf G = 0$; $\min G = 0$
 G é limitado porque é majorado e minorado
 (h) Conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$; $\sup H = 1$; $\max H = 1$
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, 0]$; $\inf H = 0$; não existe mínimo
 H é limitado porque é majorado e minorado
 (i) Conjunto dos majorantes: $[\frac{1}{2}, +\infty[$; $\sup I = \frac{1}{2}$; $\max I = \frac{1}{2}$
 Conjunto dos minorantes: $] -\infty, -1]$; $\inf I = -1$; $\min I = -1$
 I é limitado porque é majorado e minorado

11. (a) Seja $X = \mathbb{N}$. Então,
 $\text{int } X = \emptyset$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = \mathbb{N}$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
 $X' = \emptyset$
- (b) Seja $X = \mathbb{R}$. Então,
 $\text{int } X = \mathbb{R}$. X é aberto porque $\text{int } X = X$
 $\overline{X} = \mathbb{R}$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
 $X' = \mathbb{R}$
- (c) Seja $X = \mathbb{Z}$. Então,
 $\text{int } X = \emptyset$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = \mathbb{Z}$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
 $X' = \emptyset$
- (d) Seja $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Então,
 $\text{int } X = \emptyset$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = \mathbb{R}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = \mathbb{R}$
- (e) Seja $X = \mathbb{Q}$. Então,
 $\text{int } X = \emptyset$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = \mathbb{R}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = \mathbb{R}$
- (f) Seja $X = [0, 2[$. Então,
 $\text{int } X =]0, 2[$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = [0, 2]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = [0, 2]$
- (g) Seja $X = [0, 3]$. Então,
 $\text{int } X =]0, 3[$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = [0, 3]$. X é fechado porque $\overline{X} = X$
 $X' = [0, 3]$
- (h) Seja $X =]5, 10[$. Então,
 $\text{int } X =]5, 10[$. X é aberto porque $\text{int } X = X$
 $\overline{X} = [5, 10]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = [5, 10]$
- (i) Seja $X = \mathbb{Q} \cap [-2, 0[$. Então,
 $\text{int } X = \emptyset$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = [-2, 0]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = [-2, 0]$
- (j) Seja $X = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 2]$. Então,
 $\text{int } X = \emptyset$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = [0, 2]$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = [0, 2]$

- (k) Seja $X =]0, 3[\setminus \{1\} \cup \{4, 5\}$. Então,
 $\text{int } X =]0, 3[\setminus \{1\}$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = [0, 3] \cup \{4, 5\}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = \{0, 3\}$
- (l) Seja $X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Então,
 $\text{int } X = \emptyset$. X não é aberto porque $\text{int } X \neq X$
 $\overline{X} = X \cup \{0\}$. X não é fechado porque $\overline{X} \neq X$
 $X' = \{0\}$
12. (a) Por exemplo, $[1, 2[$ ou \mathbb{Q}
(b) \emptyset ou \mathbb{R}
(c) Por exemplo, $]1, 2[$
(d) Por exemplo, $[1, +\infty[$
(e) Por exemplo, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
(f) Por exemplo, $[1, 2[$
(g) Por exemplo, $[1, 2[$
(h) Por exemplo, $[1, 3]$
(i) Por exemplo, $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
(j) Por exemplo, $\{2\}$
(k) Por exemplo, $]1, 2[\cup]2, 3[$
(l) Por exemplo, $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$
13. (a) Afirmação falsa. Por exemplo, para $A =]0, 2[$ tem-se que A é aberto (justifique) e, no entanto, A é limitado (justifique).
(b) Afirmação falsa. Por exemplo, para $A =]1, 3[$ e $B = \{2\}$ tem-se que $A \cup B =]1, 3[$, que é aberto (justifique que A é aberto, que B é fechado e que $A \cup B$ é aberto).
(c) Afirmação falsa. Por exemplo, para $A =]1, 3]$ e $B = [3, 5[$ tem-se que $A \cap B = \{3\}$, que é fechado (justifique que A e B não são abertos nem fechados e que $A \cap B$ é fechado).
(d) Afirmação falsa. O conjunto $A =]0, 4[\cap \mathbb{Q}$ não é aberto porque $\text{int } A = \emptyset \neq A$.
(e) Afirmação falsa. O conjunto $A = [0, 7] \cap \mathbb{Q}$ não é fechado porque $\overline{A} = [0, 7] \neq A$.
(f) Afirmação falsa. Tem-se que $A =]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$. Consequentemente, o conjunto dos majorantes é o conjunto vazio e, portanto, A não é limitado superiormente.

(g) Afirmação verdadeira. Justifique.

14. (a) $\text{int } A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; $\overline{A} = A' = \mathbb{R}$

Conjunto dos majorantes: \emptyset ; não existe supremo nem máximo

Conjunto dos minorantes: \emptyset ; não existe ínfimo nem mínimo

(b) $B =] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$

$\text{int } B =] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$; $\overline{B} = B' = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{2}, +\infty[$; $\sup B = \sqrt{2}$; não existe máximo

Conjunto dos minorantes: $] - \infty, -\sqrt{2}]$; $\inf B = -\sqrt{2}$; não existe mínimo

(c) $C =] - \sqrt{50}, \sqrt{50}[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\text{int } C = \emptyset$; $\overline{C} = C' = [-\sqrt{50}, \sqrt{50}]$

Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{50}, +\infty[$; $\sup C = \sqrt{50}$; não existe máximo

Conjunto dos minorantes: $] - \infty, -\sqrt{50}]$; $\inf C = -\sqrt{50}$; não existe mínimo

(d) $D =] - \infty, 0[$

$\text{int } D =] - \infty, 0[$; $\overline{D} = D' =] - \infty, 0]$

Conjunto dos majorantes: $[0, +\infty[$; $\sup D = 0$; não existe máximo

Conjunto dos minorantes: \emptyset ; não existe ínfimo nem mínimo

(e) $E =] - 1, 0[\cup] 1, +\infty[$

$\text{int } E =] - 1, 0[\cup] 1, +\infty[$; $\overline{E} = E' = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$

Conjunto dos majorantes: \emptyset ; não existe supremo nem máximo

Conjunto dos minorantes: $] - \infty, -1]$; $\inf E = -1$; não existe mínimo

(f) $F = (] - 2, 2[\cap \mathbb{Q}) \cup ([1, \pi] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\text{int } F =] 1, 2[$; $\overline{F} = F' = [-2, \pi]$

Conjunto dos majorantes: $[\pi, +\infty[$; $\sup F = \pi$; $\max F = \pi$

Conjunto dos minorantes: $] - \infty, -2]$; $\inf F = -2$; não existe mínimo

(g) $G = (] - 7, -1[\cap \mathbb{Q}) \cup (] - \sqrt{3}, \sqrt{3}[\cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\text{int } G =] - \sqrt{3}, -1[$; $\overline{G} = G' = [-7, \sqrt{3}]$

Conjunto dos majorantes: $[\sqrt{3}, +\infty[$; $\sup G = \sqrt{3}$; não existe máximo

Conjunto dos minorantes: $] - \infty, -7]$; $\inf G = -7$; não existe mínimo

(h) $\text{int } H = H \setminus \{0\}$; $\overline{H} = H' = [0, 1]$

Conjunto dos majorantes: $[1, +\infty[$; $\sup H = 1$; não existe máximo

Conjunto dos minorantes: $] - \infty, 0]$; $\inf H = 0$; $\min H = 0$