Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC | LMAT
15 de junho de 2023

Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso

duração: 2h30min

Grupo I

Justifique convenientemente todas as respostas.

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra do tipo $(2,1)$, onde $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	1	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	4	2	5

Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$. Diga se $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$. Justifique.

Dado um subconjunto X de A:

- diz-se que X é um subuniverso de $\mathcal{A}$ se é fechado para todas as operações de $\mathcal{A}$, ou seja, se, para qualquer símbolo de operação $h \in \{f, g\}$, $n \in \{1,2\}$ e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in X^n$, $h(a_1, \ldots, a_n) \in X^n$;
- representa-se por $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém X.

Assim, uma vez que $2 \in Sg^{\mathcal{A}}(\{2\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\})$ é fechado para as operações $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$, tem-se

$$2 \in Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}); g^{\mathcal{A}}(2) = 3 \in Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}); g^{\mathcal{A}}(3) = 4 \in Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}).$$

O conjunto $\{2,3,4\}$ contém $\{2\}$, é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pois é fechado para as operações de $\mathcal{A}$ (para quaisquer $x, y \in \{2,3,4\}$, $f^{\mathcal{A}}(x,y) \in \{2,3,4\}$ e $g^{\mathcal{A}}(x) \in \{2,3,4\}$) e é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém $\{2\}$. Logo $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) = \{2,3,4\}$.

O conjunto $\{5\}$ é fechado para as operações de $\mathcal{A}$ ($g^{\mathcal{A}}(5) = 5 \in \{5\}, f^{\mathcal{A}}(5,5,) = 5 \in \{5\}$). Assim, $\{5\}$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém $\{5\}$, ou seja, $Sg^{\mathcal{A}}(\{5\}) = \{5\}$.

O conjunto $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{5\}) = \{2,3,4,5\}$ não é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pois não é fechado para todas as operações de $\mathcal{A}$: $4, 5 \in \{2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}}(4,5) = 1 \notin \{2,3,4,5\}$.

2. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ onde $A = \{a,b,c,d\}$ e $f^{\mathcal{A}}$, $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	a	a	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a	b

(a) Considere as congruências $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c,d)$.
Determine θ_2. Justifique que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.

A relação $\theta_2 = \theta(c,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(c,d)\}$. Então $(c,d) \in \theta_2$. Uma vez que θ_2 é uma congruência em $\mathcal{A}$, então θ_2 é uma relação de equivalência em A e satisfaz a propriedade de substituição. Como θ_2 é uma relação de equivalência, então θ_2 é reflexiva e simétrica, pelo que $\triangle_A \subseteq \theta_2$ e $(d,c) \in \theta_2$. Atendendo a que θ_2 satisfaz a propriedade de substituição, então, para quaisquer $x, y \in A$, se $(x,y) \in \theta_2$, temos $(f^{\mathcal{A}}(x), f^{\mathcal{A}}(y)) \in \theta_2$, $(g^{\mathcal{A}}(x), g^{\mathcal{A}}(y)) \in \theta_2$; em particular, como $(c,d) \in \theta_2$, segue que $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(d)) = (a,a) \in \theta_2$, $(g^{\mathcal{A}}(c), g^{\mathcal{A}}(d)) = (a,b) \in \theta_2$. Por simetria, também temos $(b,a) \in \theta_2$. A relação $\triangle_A \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\}$ contém $\{(c,d)\}$, é uma relação de equivalência, satisfaz a propriedade de substituição e é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(c,d)\}$. Logo $\theta_2 = \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\}$.

O par (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator se satisfaz as condições seguintes:

(i) $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$; (ii) $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A$; (iii) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

(i) Claramente, o conjunto de elementos comuns a θ_1 e a θ_2 é $\triangle_A$ e, portanto, $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$.
(ii) A relação $\theta_1 \vee \theta_2$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que cont em $\theta_1 \cup \theta_2$ e tem-se

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\} = \nabla_A.$$

(iii) Por definição de composição de relações binárias, obtem-se

$$\theta_1 \circ \theta_1 = \theta_1 \cup \theta_1 \cup \{(a,d),(d,a),(b,c),(c,b)\} = \theta_2 \circ \theta_1.$$

De (i), (ii) e (iii) conclui-se que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.

(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Indique álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ nas condições indicadas.

Uma vez que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator, temos $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2$. As álgebras $\mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{A}/\theta_2$ não são triviais, uma vez que $\mathcal{A}$ não é trivial (pois $\mathrm{Cong}(\mathcal{A}) \neq \{\triangle_A\}$) e $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Cong}(\mathcal{A}) \backslash \{\nabla_A\}$.

(c) A álgebra $\mathcal{A}$ é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.

Toda a álgebra subdiretamente irredutível é uma álgebra diretamente indecomponível. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível se sempre que existem álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, então $\mathcal{B}$ é uma álgebra trivial ou $\mathcal{C}$ é uma álgebra trivial. Da alínea anterior conclui-se que a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível, logo $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

3. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um morfismo invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

Admitamos que $g \circ f$ é um morfismo invertível à esquerda. Então existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$. Daqui resulta que, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : D \to A$,

$$\begin{aligned} f \circ i = f \circ j \quad &\Rightarrow \quad (h \circ g) \circ (f \circ i) = (h \circ g) \circ (f \circ j) \\ &\Rightarrow \quad (h \circ g \circ f) \circ i = (h \circ g \circ f) \circ j \\ &\Rightarrow \quad id_A \circ i = id_A \circ j \\ &\Rightarrow \quad i = j. \end{aligned}$$

Logo f é cancelável à esquerda, ou seja, f é um monomorfismo.

Grupo II

Relativamente às questões deste grupo, responda a quatro, e apenas quatro, das questões a seguir indicadas. Caso responda às cinco questões, apenas serão consideradas as respostas às questões 4., 6., 7. e 8. Justifique todas as respostas.

4. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Seja $\beta : A/\ker\alpha \to B$ a aplicação definida por $\beta([a]_{\ker\alpha}) = \alpha(a)$, para todo $[a]_{\ker\alpha} \in A/\ker\alpha$.
Mostre que β é um monomorfismo de $\mathcal{A}/\ker\alpha$ em $\mathcal{B}$.

A aplicação β é um homomorfismo de $\mathcal{A}/\ker\alpha$ em $\mathcal{B}$, uma vez que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$, para qualquer símbolo de operação n-ário f e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$\begin{aligned} \beta(f^{\mathcal{A}/\ker\alpha}([a_1]_{\ker\alpha}, \ldots, [a_n]_{\ker\alpha})) &= \beta([f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_{\ker\alpha}) \\ &= \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= f^{\mathcal{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \\ &= f^{\mathcal{B}}(\beta([a_1]_{\ker\alpha}), \ldots, \beta([a_n]_{\ker\alpha})). \end{aligned}$$

Além disso, a apicação β é injetiva, pois, para quaisquer $[a]_{\ker\alpha}, [b]_{\ker\alpha} \in A/\ker\alpha$,

$$\beta([a]_{\ker\alpha}) = \beta([b]_{\ker\alpha}) \Rightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow (a,b) \in \ker\alpha \Rightarrow [a]_{\ker\alpha} = [b]_{\ker\alpha}.$$

Assim, β é um monomorfismo.

5. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que SHS é um operador de fecho.

Mostremos que SHS é um operador de fecho. Pretendemos mostrar que, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$:

(1) $\mathbf{K}_1 \subseteq SHS(\mathbf{K}_1)$;
(2) $(SHS)^2(\mathbf{K}_1) \subseteq SHS(\mathbf{K}_1)$;

(3) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow SHS(\mathbf{K}_1) \subseteq SHS(\mathbf{K}_2)$.

As condições (1), (2) e (3) seguem facilmente das propriedades dos operadores H e S.

(1) Para qualquer operador $O \in \{S, H\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$. Logo, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se $\mathbf{K}_1 \subseteq S(\mathbf{K}_1)$, $S(\mathbf{K}_1) \subseteq HS(\mathbf{K}_1)$ e $HS(\mathbf{K}_1) \subseteq SHS(\mathbf{K}_1)$. Assim, $\mathbf{K}_1 \subseteq SHS(\mathbf{K}_1)$.

(2) Para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se

$$SHSSHS(\mathbf{K}_1) \overset{(i)}{=} SHSHS(\mathbf{K}_1) \overset{(ii)}{\subseteq} SHHSS(\mathbf{K}_1) \overset{(iii)}{=} SHS(\mathbf{K}_1).$$

(i) $S^2 = S$; $SH \leq HS$; (iii) $H^2 = H$; $S^2 = S$.

(3) Para qualquer operador $O \in \{S, H\}$ e para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \quad &\Rightarrow \quad S(\mathbf{K}_1) \subseteq S(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow \quad HS(\mathbf{K}_1) \subseteq HS(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow \quad SHS(\mathbf{K}_1) \subseteq SHS(\mathbf{K}_2). \end{aligned}$$

De (1), (2) e (3), conclui-se que SHS é um operador de fecho.

6. Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ e $k : C \to D$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se g é um monomorfismo e $(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k, então (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$.

Admitamos que g é um monomorfismo e que $(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k.

Uma vez que $(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k, então

(i) $h \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f)$;

(ii) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, para qualquer $j : X \to C$ tal que $h \circ j = k \circ j$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : X \to A$ tal que $(g \circ f) \circ u = j$.

Pretendemos mostrar que (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$, ou seja, temos de mostrar que

(1) $(h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f$;

(2) para qualquer $Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, para qualquer $i : Y \to B$ tal que $(h \circ g) \circ i = (k \circ g) \circ i$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $v : Y \to A$ tal que $f \circ v = i$.

De (i) e considerando que a operação $\circ$ é associativa, tem-se

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f$$

e, portanto, a condição (1) verifica-se.

Mostremos, agora, a condição (2). Sejam $Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $i : Y \to B$ tais que $(h \circ g) \circ i = (k \circ g) \circ i$. Desta igualdade segue que $h \circ (g \circ i) = k \circ (g \circ i)$. Logo, por (ii), existe um e um só morfismo $u : Y \to A$ tal que $(g \circ f) \circ u = g \circ i$. Da última igualdade obtem-se $g \circ (f \circ u) = g \circ i$ e como g é um monomorfismo resulta que $f \circ u = i$. Logo existe $v = u$ tal que $f \circ v = i$. O morfismo u é o único morfismo $p : Y \to A$ tal que $f \circ p = i$. De facto, se admitirmos que existe um morfismo $u' : Y \to A$ tal que $f \circ u' = i$, segue que $(g \circ f) \circ u' = g \circ i$. Mas u é o único morfismo tal $(g \circ f) \circ u = g \circ i$ e, portanto, $u = u'$.

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$, $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, então $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e morfismos $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$.

Admitamos que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B. Então,

(1) $i_A \in \hom(A, C)$ e $i_B \in \hom(B, C)$,

(2) para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_A : A \to X$ e $g_B : B \to X$, existe um, e um só, morfismo $u : C \to X$ tal que $u \circ i_A = g_A$ e $u \circ i_B = g_B$.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
A \arrow[ur, "g_A"] \arrow[r, "i_A"'] & C \arrow[u, "u"] & B \arrow[ul, "g_B"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

Pretende-se mostrar que $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B), ou seja, que

(3) $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;

(4) para para qualquer objeto K de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $h_A : A \to K$ e $h_B : B \to K$ tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$, existe um, e um só, morfismo $v : C \to K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[d, "i_B"] \arrow[ddr, "h_B"] & \\
A \arrow[r, "i_A"] \arrow[drr, "h_A"'] & C \arrow[dr, "v"] & \\
 & & K
\end{tikzcd}$$

(3) Uma vez que $i_A \circ f_A, i_B \circ f_B \in \hom(I, C)$ e $|\hom(I, C)| = 1$, pois I é um objeto inicial, então $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$.

(4) Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $h_A : A \to K$ e $h_B : B \to K$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$. Como $h_A \in \hom(A, K)$ e $h_B \in \hom(B, K)$, então, por (2), existe um, e um só, morfismo, $v : C \to K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$

Logo $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

8. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor. Mostre que se F é um funtor fiel, pleno e sobrejetivo nos objetos, então F preserva monomorfismos.

Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor fiel, pleno e sobrejetivo nos objetos. Pretendemos mostrar que F preserva monomorfismos, ou seja, pretendemos mostrar que, para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $f : A \to B$,

$$f \text{ é monomorfismo } \Rightarrow F(f) \text{ é monomorfismo }.$$

Seja $f : A \to B$ um monomorfismo. Mostremos que $F(f) : F(A) \to F(B)$ é um monomorfismo, ou seja, mostremos que, para quaisquer $\mathbf{D}$-morfismos $i, j : Y \to F(A)$,

$$F(f) \circ i = F(f) \circ j \Rightarrow i = j.$$

Sejam $i, j : Y \to F(A)$ morfismos de $\mathbf{D}$ tais que $F(f) \circ i = F(f) \circ j$. Como $Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ e F é sobrejetivo nos objetos, existe $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ tal que $F(C) = Y$. Logo tem-se $i, j : F(C) \to F(A)$. Então, como F é pleno, existem $i', j' : C \to A$ tais que $F(i') = i$ e $F(j') = j$. Logo de $F(f) \circ i = F(f) \circ j$, obtem-se $F(f) \circ F(i') = F(f) \circ F(j')$. Desta última igualdade, e considerando que F é um funtor, segue que $F(f \circ i') = F(f \circ j')$. Sendo F um funtor fiel, da igualdade anterior resulta que $f \circ i' = f \circ j'$. Como f é um monomorfismo, obtemos $i' = j'$ e, portanto, $i = F(i') = F(j') = j$. Logo $F(f)$ é um monomorfismo.

Cotações:
Grupo I: $1.(1,5); 2.(2,0 + 1,25 + 1,25); 3.(2,0)$;
Grupo II: cada questão deste grupo tem a cotação de 3,0 valores.