

Análise

— Folha de exercícios 3 — 2022'23 —

1. Estude a existência dos seguintes limites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y), \quad \text{com} \quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^2, \\ 0 & \text{se } y \neq x^2; \end{cases}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y), \quad \text{com} \quad g(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 5 & \text{se } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$$

2. Calcule, caso exista (ou demonstre que não existe) cada um dos seguintes limites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}; \quad (d) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,0,1)} \frac{x^4 z}{(x^4 + y^2)^3};$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 y}{2x^2 + 4y^2}; \quad (f) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x+y}{x-y};$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y}; \quad (h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3};$$

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2x^2 y^3}{2x^4 + 3y^6}; \quad (j) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2};$$

$$(l) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - 2y}{x^4 + y^2}; \quad (m) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-2x^2 + 3y}{x^2 + y^2};$$

$$(n) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^3}{3x^2 + 4y^6}; \quad (o) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2};$$

$$(p) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin x}{x^2 + 3y^2}; \quad (q) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \cos \left(\frac{\log(x^6)}{y^2 - x + 1} \right);$$

$$(r) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}; \quad (s) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$(t) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2}; \quad (u) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1};$$

3. Estude a continuidade de cada uma das funções $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínua à origem de cada uma das funções definidas por:

$$(a) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}; \quad (b) f(x, y) = \frac{3x^2(y-1)}{x^2 + y^2};$$

$$(c) f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}; \quad (d) f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^4 + 2y^4};$$

5. Estude a continuidade das funções definidas por:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0; \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < x^2, \\ 1 & \text{caso contrário}; \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (f) f(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y, \\ y & \text{se } x < y; \end{cases}$$

$$(g) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (h) f(x, y) = \log(x^3 y)$$

$$(i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (j) f(x, y) = \begin{cases} x, & x < y \\ -y + 2, & x \geq y \end{cases}$$

$$(k) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (l) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

$$(m) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad (n) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x \neq -y \\ \frac{x^2}{2}, & x = -y \end{cases}$$

6. Relativamente a uma função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

(a) se $f(0, 0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$ então f é contínua em $(0, 0)$;

(b) se $f(0, 0) = 1$ e $f(x, x^3) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então f é descontínua em $(0, 0)$;

(c) se f é contínua em $(0, 0)$ e $f(x, x^2) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então
 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$;

(d) se $f(x, x^2) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $f(x, -x^2) = e^x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então f é contínua em $(0, 0)$.