



Nome:

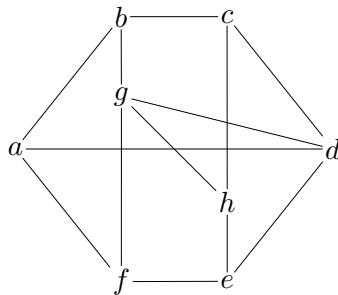
Número:

Parte I

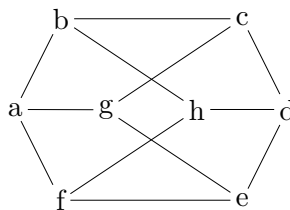
1. Indique, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

- (a) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de adjacência de C_3 .
- (b) Existe um grafo conexo e planar com 5 vértices todos eles de grau 2 e tal que a sua representação planar tem 3 faces.
- (c) Existe um grafo semi-Euleriano cujo número cromático é par.

2. Justifique se o seguinte grafo é ou não planar.



3. Considere o seguinte grafo



Indique, justificando, se o grafo acima representado é

- (a) bipartido, (b) Euleriano, (c) Hamiltoniano.

Cotações: 1. (a) 1.5 valores, (b) 1.5 valores, (c) 1.5 valores;
2. 2 valores;
3. (a) 1 valor, (b) 1 valor, (c) 1.5 valores.

Parte II

4. Justifique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

- (a) Se a, b e c são inteiros tais que $a|c$ e $b|c$ então $ab|c$.
- (b) Dado $a \in \mathbb{Z}$, $a(a+1)(2a+1)$ é um múltiplo de 3.
- (c) O último dígito de 3^{20951} é 1.

5. Determine todos os pares possíveis de dígitos (x, y) tais que o número $\overline{2x647283y}$ é simultaneamente divisível por 11 e por 4.

6. Considere a equação diofantina $102x + 27y = 6$. Determine a solução geral e verifique se existe alguma solução positiva (isto é, uma solução tal que $x > 0$ e $y > 0$) desta equação.

7. Considere o seguinte problema:

Um turista e um guia subiram a correr os degraus da pirâmide de Keops perseguidos por um leão. O turista conseguia subir cinco degraus de uma só vez, o guia seis degraus e o leão sete degraus. A dada altura, o turista estava a 8 degraus do topo da pirâmide, o guia a 1 degrau e o leão a 19 degraus. Quantos degraus pode ter a pirâmide?

- (a) Justifique, sucintamente, que este problema se traduz no seguinte sistema de congruências lineares:

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{6} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}.$$

- (b) Use o Teorema Chinês dos Restos para resolver o sistema e indique qual o número mínimo de degraus que a pirâmide pode ter.

Cotações: 4. (a) 1.5 valores, (b) 1.5 valores, (c) 1.5 valores;
5. 1.5 valores;
6. 2 valores;
7. (a) 0.5 valores, (b) 1.5 valores.