

**Justifique, convenientemente, todas as respostas.**

Duração :: 1h30m

Nome:**Número:**

Exercício 1. (3.5 valores) Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x\}.$$

- (a) Faça um esboço dos seguintes conjuntos: (i) A ; (ii) $\overset{\circ}{A}$; (iii) \overline{A} ; (iv) $\text{fr}(A)$.
- (b) Diga, justificando, se o conjunto A é compacto.

Exercício 2. (2 valores) Faça um esboço do domínio da função $f(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x^2 + (y + 2)^2}$.

Exercício 3. (2 valores) Estude a existência do seguinte limite: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Exercício 4. (4.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{se } xy \neq 0, \\ 2 & \text{se } xy = 0. \end{cases}$

(a) Estude a existência dos seguintes limites: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,-2)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (5,1)} f(x, y)$.

(b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos onde a função f é contínua.

Exercício 5. (7 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- (a) Mostre que f é contínua no ponto $(0, 0)$.
- (b) Determine a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ segundo qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.
- (c) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
- (d) Estude a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$.

Exercício 6. (1 valor) Diga, justificando, se a seguinte proposição é **verdadeira** ou **falsa**:

Se $f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivadas parciais nulas em todos os pontos $(x, y) \in X$, então f é uma função constante.