Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática

Análise

— prova escrita 1 — duas horas ———————————— 2023'24 —

Justifique, convenientemente, todas as suas respostas

1. (2 valores) Considere o conjunto A definido por
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 \text{ ou } x^2 + (y-1)^2 < 4\}.$$
   (a) Faça um esboço do conjunto A;
   (b) Identifique o interior, a aderência e a fronteira do conjunto A.

2. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$
   (a) Mostre que a função f é contínua em $(0,0)$.
   (b) Calcule, ou justifique que não existem, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   (c) Mostre que a função f não é derivável em $(0,0)$.

3. (5 valores) Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \operatorname{sen}(xy).$$
   (a) Identifique o domínio da função f;
   (b) Calcule as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;
   (c) Justifique que f é derivável em $(\pi, 1)$;
   (d) Determine $f'(\pi, 1)$;
   (e) Determine a taxa de variação instantânea da função f no ponto $(\pi, 1)$ e na direcção do vector $\vec{u} = (1,1)$.

4. (3 valores) Considere a seguinte equação de três variáveis reais
$$\ln(xy) + \mathrm{e}^{2xz} - z = 1. \tag{1}$$
   (a) Mostre que a equação (1) define z como uma função de (x,y) para pontos "próximos" de $(x_0, y_0, z_0) = \left(2, \frac{1}{2}, 0\right)$;
   (b) Determine $z'\left(2, \frac{1}{2}\right)$, sendo $z(x,y)$ a função implícita cuja existência foi provada no exercício anterior;
   (c) Sendo $z = z(x,y)$ a função implícita cuja existência foi provada na alínea (a), determine uma equação da recta tangente à curva de nível zero da função $z(x,y)$ no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

5. (2 valores) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $\nabla f(2,3,0) = (-1,2,3)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = f\left(-2ye^x, -3y + y^3x^2, x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$.
   Determine:
   (a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,-1)$;
   (b) $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,-1)$.

Fim