1.2 Semântica do Cálculo Proposicional clássico

1. Sejam v_1 e v_2 as únicas valorações tais que

$$v_1(p) = \begin{cases} 0 \text{ se } p \in \{p_0, p_1\} \\ \\ 1 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_0, p_1\} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \{p_1, p_3\} \\ \\ 0 \text{ se } p \in \mathcal{V}^{CP} - \{p_1, p_3\} \end{cases}.$$

   Considere as fórmulas $\varphi_1 = (p_2 \vee p_0) \wedge \neg(p_2 \wedge p_0)$ e $\varphi_2 = p_1 \to ((p_5 \leftrightarrow p_3) \vee \bot)$. Calcule os valores lógicos das fórmulas φ_1 e φ_2 para as valorações v_1 e v_2.

2. Considere as fórmulas: $\varphi_1 = \neg p_3 \wedge (\neg p_1 \vee p_2)$; $\varphi_2 = (\neg p_3 \vee \neg p_1) \leftrightarrow (p_1 \to p_2)$; $\varphi_3 = \neg p_3 \to (p_1 \wedge \neg p_2)$.

   a) Para cada um dos conjuntos $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ e $\{\varphi_2, \varphi_3\}$, dê exemplo de uma valoração que atribua o valor lógico 1 a todos os seus elementos.

   b) Mostre que não existem valorações que, em simultâneo, atribuam o valor lógico 1 a φ_1 e φ_3.

3. Seja v uma valoração. Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

   a) $v((p_3 \to p_2) \to p_1) = 0$ e $v(p_2)$=0 é uma condição suficiente para $v(p_3) = 0$.

   b) Uma condição necessária para $v(p_1 \to (p_2 \to p_3)) = 0$ é $v(p_1) = 1$ e $v(p_3) = 0$.

   c) Uma condição necessária e suficiente para $v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1$ é $v((p_3 \to (p_1 \to p_3)) = 1$.

4. De entre as seguintes fórmulas, indique as tautologias e as contradições.

   a) $(p_1 \to \bot) \vee p_1$

   b) $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$

   c) $\neg(p_1 \wedge p_2) \to (p_1 \vee p_2)$

   d) $(p_1 \vee \neg p_1) \to (p_1 \wedge \neg p_1)$

5. Das seguintes proposições, indique as verdadeiras. Justifique.

   a) $\models \varphi \wedge \psi$ se e só se $\models \varphi$ e $\models \psi$.

   b) Se $\models \varphi \vee \psi$, então $\models \varphi$ ou $\models \psi$.

   c) Se $\models \varphi$ ou $\models \psi$, então $\models \varphi \vee \psi$.

   d) Se $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\not\models \psi$, então $\not\models \varphi$.

6. Seja $\varphi = (\neg p_2 \to \bot) \wedge p_1$.

   a) Dê exemplo de:

      i) uma valoração v tal que $v(\varphi) = v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$;

      ii) uma valoração v tal que $v(\varphi) \neq v(\varphi[p_0 \wedge p_3/p_2])$.

   b) Seja ψ uma fórmula. Indique uma condição suficiente para que uma valoração v satisfaça $v(\varphi) = v(\varphi[\psi/p_2])$. A condição que indicou é necessária?

7. Considere o conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$ das fórmulas cujos conetivos estão no conjunto $\{\vee, \wedge\}$.

   a) Enuncie o teorema de indução estrutural para $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

   b) Seja v a valoração que a cada variável proposicional atribui o valor lógico 0. Mostre que $v(\varphi) = 0$ para qualquer $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

   c) Existem tautologias no conjunto $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$? Justifique.

8. Para cada uma das seguintes fórmulas, encontre uma fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas conetivos no conjunto $\{\neg, \vee\}$.

   a) $(p_0 \wedge p_2) \to p_3$. **b)** $p_1 \vee (p_2 \to \perp)$.

   c) $\neg p_4 \leftrightarrow p_2$. **d)** $(p_1 \vee p_2) \to \neg(p_1 \wedge \perp)$.

9. Defina, por recursão estrutural em fórmulas, uma função $f : \mathcal{F}^{CP} \longrightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\neg,\vee\}}$ que a cada fórmula φ faça corresponder uma fórmula $f(\varphi)$ logicamente equivalente a φ.

10. Investigue se os conjuntos de conetivos $\{\vee, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee, \wedge\}$ são ou não completos.

11. Calcule formas normais conjuntivas e disjuntivas logicamente equivalentes a cada uma das seguintes fórmulas:

    a) $\neg p_0$. **b)** $p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)$. **c)** $(p_1 \vee p_0) \vee \neg(p_2 \vee p_0)$.

    d) $(p_1 \to \perp)$. **e)** $(p_1 \vee p_0) \wedge (p_2 \vee (p_1 \wedge p_0))$. **f)** $(p_1 \to p_2) \leftrightarrow (\neg p_2 \to \neg p_1)$.

12. Considere que φ e ψ são fórmulas cujo conjunto de variáveis é $\{p_1, p_2\}$ e $\{p_1, p_2, p_3\}$, respetivamente, e que têm as seguintes tabelas de verdade:

p_1	p_2	φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

e

p_1	p_2	p_3	ψ
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

    Determine FND's e FNC's logicamente equivalentes a cada uma das fórmulas.

13. Será que existem outros conetivos binários para além de $\wedge$, $\vee$, $\to$, e $\leftrightarrow$? Para responder a esta questão, adotemos esta definição: um conetivo binário $\diamond$ é determinado pela sua função de verdade $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$.

    a) Quantos conetivos binários existem?

    b) Para cada $v_\diamond : \{0,1\}^2 \longrightarrow \{0,1\}$, escreva $v_\diamond$ como uma tabela de verdade e traduza essa tabela de verdade como uma FND.

    c) Conclua que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ permaneceria um conjunto completo de conetivos, mesmo se tivéssemos adoptado no Cálculo Proposicional outros conetivos binários.

14. Nenhum dos conetivos $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ é completo (i.e. constitui, por si só, um conjunto completo de conetivos). No entanto, existem conetivos binários completos.

    Considere-se a extensão do conjunto das fórmulas proposicionais $\mathcal{F}^{CP}$ com o conetivo binário $\uparrow$ (conhecido como *seta de Sheffer* ou *nand*), determinado pela função booleana $v_\uparrow$ t. q. $v_\uparrow(1,1) = 0$, $v_\uparrow(1,0) = 1$, $v_\uparrow(0,1) = 1$ e $v_\uparrow(0,0) = 1$. Mais precisamente:

    i) acrescente-se ao alfabeto do Cálculo Proposicional a letra $\uparrow$;
    ii) considere-se a definição indutiva de $\mathcal{F}^{CP}$ (sobre este alfabeto estendido) com uma nova regra: se $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$, então $(\varphi \uparrow \psi) \in \mathcal{F}^{CP}$;
    iii) à definição de valoração v, acrescente-se a condição $v(\varphi \uparrow \psi) = v_\uparrow(v(\varphi), v(\psi))$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

    a) Encontre fórmulas φ, ψ logicamente equivalentes a $p_0 \uparrow p_1$ e tais que i) φ é FND; ii) ψ é FNC.
    b) Mostre que, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$: i) $\varphi \uparrow \psi \Leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$; ii) $\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi \uparrow \varphi$.
    c) Dê exemplo de tautologias e de contradições onde o único conetivo usado seja $\uparrow$.
    d) O conjunto $\{\uparrow\}$ é completo? Justifique.

15. Justificando, indique quais dos seguintes conjuntos de fórmulas são satisfazíveis.

    a) $\{p_0 \wedge p_2, p_1 \rightarrow \neg p_3, p_1 \vee p_2\}$.
    b) $\{p_0 \rightarrow p_1, p_0 \rightarrow \neg p_1, p_0\}$.
    c) $\{p_0 \vee \neg p_1, p_1, p_0 \leftrightarrow (p_2 \vee p_3)\}$.
    d) $\mathcal{F}^{CP}$.
    e) $\mathcal{F}^{CP}_{\{\vee,\wedge\}}$.

16. Sejam $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}^{CP}$. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

    a) Se $\Gamma \cup \Delta$ é satisfazível, então Γ e Δ são conjuntos satisfazíveis.
    b) Se Γ e Δ são conjuntos satisfazíveis, então $\Gamma \cup \Delta$ é satisfazível.
    c) Se Γ é satisfazível e $\varphi \in \Gamma$, então $\neg\varphi \notin \Gamma$.
    d) Se Γ contém uma contradição, então Γ não é satisfazível.

17. Este exercício ilustra um método, conhecido por *resolução*, para decidir se uma fórmula do Cálculo Proposicional é uma tautologia. O método assenta em formas normais conjuntivas e na análise de conjuntos de fórmulas não serem satisfazíveis.

    Considere as fórmulas

$$\varphi = (p_3 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \vee \neg(\neg p_1 \rightarrow p_2),$$

$$\psi = \neg p_2 \wedge p_3 \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee p_1).$$

    a) Observe que ψ é uma FNC e mostre que ψ é logicamente equivalente a $\neg\varphi$.
    b) Observe que, para toda a valoração v, $v(\psi) = 1$ sse v satisfaz $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$.
    c) Mostre que $\{\neg p_2, p_3, \neg p_3 \vee \neg p_1 \vee p_2, p_2 \vee p_1\}$ não é satisfazível e diga se ψ é uma contradição.
    d) Diga se φ é uma tautologia.
    e) Aplique a sequência de passos anterior, considerando

$$\varphi = (p_2 \rightarrow p_1) \rightarrow (\neg p_2 \wedge p_3), \qquad \psi = (p_1 \vee \neg p_2) \wedge (p_2 \vee \neg p_3).$$

18. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

    a) $p_3 \vee p_0, \neg p_0 \models p_3$.
    b) $p_0 \vee \neg p_1, p_1 \vee p_2 \models p_0 \vee p_2$.
    c) $\neg p_2 \rightarrow (p_1 \vee p_3), \neg p_2 \models \neg p_1$.
    d) para todos $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$, $\neg\psi$, $\psi \rightarrow \sigma \models \sigma \vee \varphi$.

19. Sejam $\varphi, \psi, \sigma \in \mathcal{F}^{CP}$ e Γ um conjunto de fórmulas. Demonstre que:

   a) $\varphi \vee \psi, \neg\varphi \vee \sigma \models \psi \vee \sigma$.

   b) $\models \varphi \to \psi$ se e só se $\varphi \models \psi$.

   c) $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ se e só se $\Gamma, \neg\varphi \models \psi$.

   d) Γ não é satisfazível se e só se $\Gamma \models \perp$.

20. Considere as seguintes afirmações:

   - Se há vida em Marte, então Zuzarte gosta de tarte.
   - Zuzarte é um marciano ou não gosta de tarte.
   - Zuzarte não é um marciano, mas há vida em Marte.

   a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

   b) Mostre que as três afirmações acima não podem ser simultaneamente verdadeiras.

21. Considere as seguintes afirmações:

   - Se a porta do cofre foi arrombada, então: o inspetor Heitor desvenda o crime ou o segurança Bragança é culpado.
   - O segurança Bragança não é culpado se e só se: a porta do cofre não foi arrombada e o inspetor Heitor desvenda o crime.
   - Não é verdade que: o segurança Bragança não é culpado ou a porta do cofre foi arrombada.

   a) Exprima as afirmações anteriores através de fórmulas do Cálculo Proposicional, utilizando variáveis proposicionais para representar as frases atómicas.

   b) Admitindo que todas as afirmações são verdadeiras, podemos concluir que o inspetor Heitor desvenda o crime? Justifique.

22. O Carlos, o João e o Manuel, suspeitos de um crime, fizeram os seguintes depoimentos, respetivamente:

   - O João é culpado, mas o Manuel é inocente.
   - Se o Carlos é culpado, o Manuel também o é.
   - Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

   a) Os três depoimentos são compatíveis entre si?

   b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

   c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

   d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é culpado?

   e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e que os culpados mentiram, quem é culpado?