Probabilidades e Aplicações

---

1. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma v.a.r.. Mostre que a lei de probabilidade de X, i.e., a função $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ definida por
$$P_X(B) = P(\, X^{-1}(B)\,) \equiv P(\, X \in B\,), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$
é uma medida de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2. Sejam $\Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$, P a medida de probabilidade uniforme sobre $(\Omega, P(\Omega))$, i.e.,
$$P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = P(\{w_3\}) = \frac{1}{3},$$
e X, Y e Z as v.a.r.'s seguintes:
$$\begin{array}{lll} X(w_1) = 1, & X(w_2) = 2, & X(w_3) = 3, \\ Y(w_1) = 2, & Y(w_2) = 3, & Y(w_3) = 1, \\ Z(w_1) = 3, & Z(w_2) = 1, & Z(w_3) = 2. \end{array}$$
   (a) Mostre que estas v.a.r.'s têm a mesma função de distribuição (e portanto têm a mesma lei de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
   (b) Identifique a função de distribuição das v.a.r. $M_1 = \max\{X, Y\}$ e $M_2 = \max\{X, Y, Z\}$. Indique ainda se alguma destas v.a.r.'s é quase certa.
   [Nota: Uma v.a.r. W diz-se *quase certa* se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $P(W = a) = 1$.]

3. Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar dois lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada.
   (a) Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência.
   (b) Considere agora as v.a.r.'s X e Y que representam, respetivamente, o número de caras e o número de coroas obtidas nesta experiência.
      i. Identifique, através de diagramas, as funções X e Y e diga se são iguais.
      ii. Determine as funções de distribuição das duas v.a.r.'s. X e Y têm a mesma lei de probabilidade? Justifique.

4. Demonstre as propriedades i) a iii) de uma função de distribuição (ver slides Cap.II, Secção 2).

5. Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar dois lançamentos consecutivos de um dado equilibrado. Determine, e represente graficamente, a função de probabilidade e a função de distribuição da v.a.r. que representa:
   (a) o módulo da diferença das faces obtidas;
   (b) o máximo das faces obtidas;
   (c) o mínimo das faces obtidas;
   (d) o número de faces par obtidas;
   (e) o número de faces ímpar obtidas;
   (f) a soma das faces obtidas.

6. Recorde a experiência alaetória referida no Ex. 6.(d) da Folha 2.

   (a) Determine a probabilidade de sair face par num lançamento deste dado;

   (b) Considere agora a experiência aleatória que consiste em efetuar 10 lançamentos consecutivos deste dado. Determine:

   - a probabilidade de sair apenas uma face par;
   - a probabilidade de sair pelo menos três faces ímpar;
   - a probabilidade de se obter mais de 2 faces par e pelo menos 3 faces ímpar;
   - a probabilidade de, dado que saíram faces ímpar, sair também alguma face par.

   Nota: Observe que, se $X \sim Bin(n, p)$, então a v.a.r. $Y = n - X \sim Bin(n, 1 - p)$.

7. Resolva as seguintes alíneas definindo, em cada uma delas, uma v.a.r. com lei Binomial que seja relevante para o cálculo das probabilidades pedidas.

   (a) Em 20 lançamentos de uma moeda equilibrada, qual a probabilidade de terem saído 7 caras? E de terem saído no máximo 9 caras? E de terem saído pelo menos 15 caras?

   (b) Sabendo que 20% dos indivíduos de uma determinada população são pobres, determine a probabilidade de numa amostra de 10 indivíduos escolhidos, com reposição, ao acaso nesta população, haver pelo menos 6 pobres? E de haver no máximo 5 pobres?

   (c) Uma urna contém 5 bolas brancas e 8 bolas vermelhas. Determine a probabilidade de ao extrair sucessivamente, com reposição, 6 bolas desta urna, todas as bolas escolhidas serem brancas. E qual a probabilidade de todas as bolas extraídas serem vermelhas?

8. Resolva novamente a alínea c) do Ex.7, supondo agora que a escolha é feita sem reposição.

9. Numa lotaria com um milhão de bilhetes (numerados de 000000 a 999999), qual a probabilidade de o número premiado:

   (a) ser formado por 3 algarismos pares e 3 algarismos ímpares?

   (b) ter exactamente 2 noves? E de ter no máximo 2 noves? E de ter pelo menos 2 noves?

10. Considere um processo de geração de dígitos aleatórios. Quantos dígitos é necessário gerar de modo a garantir que a probabilidade de aparecerem zeros seja pelo menos 0.9?

11. Num jogo do totoloto (7 extracções sem reposição de uma urna contendo 49 bolas numeradas de 1 a 49), qual a probabilidade de:

    (a) saírem apenas números ímpares?

    (b) saírem exactamente 3 múltiplos de 5?

    (c) saírem pelo menos 5 números superiores a 40?

12. Considere a seguinte função de distribuição de uma v.a.r. discreta X

$$F(c) = \begin{cases} a & \text{se} \quad c < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad 0 \leq c < 1 \\ b & \text{se} \quad c = 1 \\ \frac{3}{4} & \text{se} \quad 1 < c < 2 \\ d & \text{se} \quad c \geq 2 \end{cases},$$

    com a, b e d constantes reais.

    (a) Determine a, b e d. Construa e represente a função de probabilidade de X.

    (b) Suponha agora que X representa o número de livros de probabilidade vendidos por dia numa certa livraria. Determine:

   i. a probabilidade de num dia se vender pelo menos um livro.
   ii. a probabilidade de se vender exactamente dois livros num dia em que houve pelo menos uma venda.
   iii. a probabilidade de, numa semana, haver exactamente 3 dias em que se vende 2 livros (suponha que para a livraria a semana tem 6 dias e que há independência entre o número de livros vendidos em dias diferentes).

13. Numa empresa existem computadores que sofrem avarias ocasionais. O número mensal de computadores que avaria é uma v.a.r. que segue a lei de Poisson de parâmetro 3.

    (a) Qual a probabilidade de, num mês, não haver computadores avariados?
    (b) Qual a probabilidade de, num mês, haver no máximo 3 computadores avariados?
    (c) Qual a probabilidade de, num mês, haver pelo menos 5 computadores avariados?
    (d) Sabendo que, num mês, houve pelo menos 5 computadores avariados, qual a probabilidade de este número não exceder 10?
    (e) Suponha que a oficina de recuperação de computadores consegue recuperar K computadores por mês. Calcule K de modo a que seja de pelo menos 0.8 a probabilidade de não haver computadores a aguardar recuperação no final de um mês.

14. É editado um manual de probabilidades com uma tiragem de 100000 exemplares. A probabilidade de um manual ter defeitos na encadernação é de 10^{-4}. Calcule o valor exato e uma aproximação para a probabilidade de o número de manuais defeituosos nessa tiragem ser de:
    i) exactamente 5 manuais; *ii*) pelo menos 3 manuais; *iii*) mais de 5 manuais.

15. Assuma que o número de artigos de luxo vendidos diariamente num certa loja é uma v.a.r. discreta, X, que segue a lei de Poisson com parâmetro 0.6.

    (a) Determine a probabilidade de, num dia, se vender 2 artigos de luxo.
    (b) Qual a probabilidade de, numa semana, haver exatamente 3 dias em que se vende 2 artigos de luxo? (assuma que a semana tem 6 dias e que as quantidades vendidas em dias distintos são independentes)
    (c) Suponha agora que cada artigo de luxo tem, independentemente dos outros, probabilidade p (com $0 < p < 1$) de ter defeito. Determine a função de probabilidade da v.a.r. que representa o número de artigos defeituosos vendidos diariamente. Em particular, mostre que esta v.a.r. segue a lei $Poisson(0.6 \times p)$.
    (d) Generalize a alínea anterior quando $X \sim Poisson(\lambda)$, com um qualquer $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

16. Uma empresa quer recrutar um profissional para preencher um cargo de chefia que exige liderança, iniciativa, flexibilidade e criatividade. É sabido que apenas 10% dos profissionais no mercado possuem este tipo de perfil. Como não tem urgência para contratar um tal profissional, não foi fixado o número máximo de entrevistas e a empresa tem disponibilidade para ir fazendo sucessivamente entrevistas até encontrar o candidato com o perfil pretendido (permitindo até que um mesmo indivíduo se possa apresentar várias vezes a entrevista).

    (a) Qual a probabilidade de na 3.ª entrevista aparecer o 1.º candidato com o perfil desejado?
    (b) Qual a probabilidade de serem necessárias no máximo 2 entrevistas até que apareça o 1.º candidato com o perfil desejado?
    (c) Qual a probabilidade de serem necessárias mais do que 6 entrevistas até que apareça o 1.º candidato com o perfil desejado?
    (d) Sabendo que já foram entrevistados 6 candidatos sem que tenha aparecido um com o perfil desejado, qual a probabilidade de ser necessário entrevistar pelo menos mais 3 candidatos?