Semânticas das Linguagens de Programação 2024/25

2º Teste // 21 Maio 2025 // 01h30 min

Renato Neves (nevrenato@di.uminho.pt)

Problema 1 (7 valores). Tirando partido do sistema deductivo descrito na Figura 1, prove que a seguinte derivação é verdadeira.

$$\mathbb{A} \to \mathbb{B}, \mathbb{A} \to \mathbb{C} \vdash \mathbb{A} \to \mathbb{B} \times \mathbb{C}$$

Construa de seguida o programa correspondente à árvore de prova a que chegou, recorrendo para tal à Figura 2.

Problema 2 (5 valores). Descreva por palavras suas aquilo que $\lambda x. \langle \pi_2\, x, \pi_1\, x \rangle$ faz. De seguida tirando partido do sistema equacional descrito na Figura 3, prove que a seguinte igualdade é verdadeira.

$$\Big(\lambda x. \langle \pi_2\, x, \pi_1\, x \rangle\Big) \Big(\Big(\lambda y. \langle \pi_2\, y, \pi_1\, y \rangle\Big)\, z\Big) =_{\beta\eta} z$$

?

Problema 3 (3 valores). Prove que a seguinte implicação é verdadeira. Provar para todos os casos

$$\Gamma, x : \mathbb{A}, y : \mathbb{B}, \Delta \vdash t : \mathbb{A} \quad \Longrightarrow \quad \Gamma, y : \mathbb{B}, x : \mathbb{A}, \Delta \vdash t : \mathbb{A}$$

Problema 4 (3 valores). Vamos supor que estamos a trabalhar na categoria Set (dos conjuntos e funções). Tirando partido da semântica descrita na Figura 4, prove que a igualdade abaixo é verdadeira.

$$[\![x \vdash \langle \langle \pi_1\, x, \pi_1 \pi_2\, x \rangle, \pi_2 \pi_2\, x \rangle]\!](a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3)$$

Problema 5 (2 valores). Considere a categoria representada pelo seguinte grafo.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\leq"] \arrow[r, "\leq"] & \frac{1}{2} \arrow[loop below, "\leq"] \arrow[r, "\leq"] & 1 \arrow[loop right, "\leq"] \end{tikzcd}$$

é fechado pois aponta para 1

e 1 aponta para ele mesmo

Mostre que é uma categoria Cartesiano-fechada. Dica: tal como vimos nas aulas com outras categorias, pode assumir que esta categoria tem supremos.

$$\frac{\mathbb{A} \in \Gamma}{\Gamma \vdash \mathbb{A}}\ (\text{ass}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash 1}\ (\text{trv}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbb{A} \times \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \mathbb{A}}\ (\pi_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbb{A} \times \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \mathbb{B}}\ (\pi_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbb{A} \qquad \Gamma \vdash \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \mathbb{A} \times \mathbb{B}}\ (\text{prd}) \qquad \frac{\Gamma, \mathbb{A} \vdash \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \mathbb{A} \to \mathbb{B}}\ (\text{cry}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbb{A} \to \mathbb{B} \quad \Gamma \vdash \mathbb{A}}{\Gamma \vdash \mathbb{B}}\ (\text{app})$$

Figure 1: Sistema deductivo Cartesiano.

$$\frac{x : \mathbb{A} \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \mathbb{A}}\ (\text{ass}) \qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : 1}\ (\text{triv}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \mathbb{A} \times \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \pi_1\, t : \mathbb{A}}\ (\pi_1) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \mathbb{A} \times \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \pi_2\, t : \mathbb{B}}\ (\pi_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathbb{A} \qquad \Gamma \vdash s : \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \langle t, s \rangle : \mathbb{A} \times \mathbb{B}}\ (\text{prd}) \qquad \frac{\Gamma, x : \mathbb{A} \vdash t : \mathbb{B}}{\Gamma \vdash \lambda x : \mathbb{A}.\, t : \mathbb{A} \to \mathbb{B}}\ (\text{cry})$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \mathbb{A} \to \mathbb{B} \quad \Gamma \vdash s : \mathbb{A}}{\Gamma \vdash t\, s : \mathbb{B}}\ (\text{app})$$

Figure 2: Cálculo lambda simplesmente tipado.

$$\begin{array}{lll} \pi_1 \langle t, s \rangle =_{\beta\eta} t & t =_{\beta\eta} * & (\text{if } \Gamma \vdash t : 1) \\ \pi_2 \langle t, s \rangle =_{\beta\eta} s & \lambda x.\, t\, s =_{\beta\eta} t[s/x] & \\ \langle \pi_1\, t, \pi_2\, t \rangle =_{\beta\eta} t & \lambda x.(t\, x) =_{\beta\eta} t & \end{array}$$

$$\frac{}{t =_{\beta\eta} t} \qquad \frac{t =_{\beta\eta} s}{s =_{\beta\eta} t} \qquad \frac{t =_{\beta\eta} s \qquad s =_{\beta\eta} u}{t =_{\beta\eta} u}$$

$$\frac{t =_{\beta\eta} s}{\pi_1\, t =_{\beta\eta} \pi_1\, s} \qquad \frac{t =_{\beta\eta} s}{\pi_2\, t =_{\beta\eta} \pi_2\, s} \qquad \frac{t =_{\beta\eta} s \qquad u =_{\beta\eta} v}{\langle t, u \rangle =_{\beta\eta} \langle s, v \rangle}$$

$$\ldots$$

Figure 3: Fragmento do sistema equacional do cálculo lambda simplesmente tipado.

$$\frac{x_i : \mathbb{A} \in \Gamma}{[\![\Gamma \vdash x_i : \mathbb{A}]\!] = \pi_i}\ 1 \qquad \frac{}{[\![\Gamma \vdash * : 1]\!] = !}\ 2 \qquad \frac{[\![\Gamma \vdash t : \mathbb{A} \times \mathbb{B}]\!] = f}{[\![\Gamma \vdash \pi_1 t : \mathbb{A}]\!] = \pi_1 \cdot f}\ 3$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : \mathbb{A}]\!] = f \qquad [\![\Gamma \vdash s : \mathbb{B}]\!] = g}{[\![\Gamma \vdash \langle t, s \rangle : \mathbb{A} \times \mathbb{B}]\!] = \langle f, g \rangle}\ 4 \qquad \frac{[\![\Gamma, x : \mathbb{A} \vdash t : \mathbb{B}]\!] = f}{[\![\Gamma \vdash \lambda x : \mathbb{A}.\, t : \mathbb{A} \to \mathbb{B}]\!] = \lambda f}\ 5$$

$$\frac{[\![\Gamma \vdash t : \mathbb{A} \to \mathbb{B}]\!] = f \quad [\![\Gamma \vdash s : \mathbb{A}]\!] = g}{[\![\Gamma \vdash t\, s : \mathbb{B}]\!] = \text{app} \cdot \langle f, g \rangle}\ 6$$

Figure 4: Semântica do cálculo lambda simplesmente tipado.