Álgebra Universal e Categorias

Carla Mendes

2024/2025

Departamento de Matemática

Conceitos Básicos

Neste capítulo recordam-se conceitos básicos de: teoria de conjuntos, relações, funções, operações, relações de ordem e relações de equivalência. Os conceitos e resultados aqui apresentados podem ser encontrados em qualquer livro básico de teoria de conjuntos e de matemática discreta.

Conceitos Básicos

Conjuntos

Para a compreensão dos conteúdos abordados nesta unidade curricular é, em geral, suficiente considerar uma teoria intuitiva de conjuntos. Seguidamente apresentam-se alguns conceitos básicos desta teoria.

Um **conjunto** é definido como uma coleção de objetos, designados por **elementos** ou **membros** do conjunto. Escreve-se $a \in A$ se a é um elemento de um conjunto A; caso contrário, escreve-se $a \notin A$.

Conceitos Básicos

Se A e B são conjuntos tais que todo o elemento de A é também um elemento de B, diz-se que A **está contido em** B ou que A é um **subconjunto** de B e escreve-se $A \subseteq B$. Se A e B são conjuntos tais que $A \subseteq B$ e existe $b \in B$ tal que $b \notin A$, diz-se que A é um **subconjunto próprio** de B e escreve-se $A \subset B$. Um conjunto A não está contido num conjunto B caso exista um elemento a tal que $a \in A$ e $a \notin B$; neste caso escreve-se $A \nsubseteq B$.

Dados conjuntos A e B, diz-se que os conjuntos são **iguais**, e escreve-se $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$; caso contrário, os conjuntos dizem-se **diferentes** e escreve-se $A \neq B$.

Conceitos Básicos

O **conjunto vazio**, isto é, o conjunto sem elementos, é representado por $\emptyset$ ou por $\{\}$. Para qualquer conjunto A, tem-se $\emptyset \subseteq A$.

As operações de conjuntos representadas por $\cup$, $\cap$ e $\setminus$ têm o significado usual.

Se A é um conjunto, o conjunto das partes de A é representado por $\mathcal{P}(A)$, ou seja, $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Um subconjunto Π de $\mathcal{P}(A)$ diz-se uma **partição de** A se $\emptyset \notin \Pi$ e, para qualquer $a \in A$, existe um único $X \in \Pi$ tal que $a \in X$. Note-se que, para qualquer conjunto A, $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $A \in \mathcal{P}(A)$.

Conceitos Básicos

Dados conjuntos A e B, o **produto cartesiano** de A e B, representado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, isto é,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

O conceito de produto cartesiano pode ser generalizado para uma coleção finita de conjuntos. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos, $n \in \mathbb{N}$, define-se

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Se $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, representa-se $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ por A^n. Se $n = 0$, define-se $A^n = \{\emptyset\}$.

Relações

Dados um número natural n e conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, dá-se a designação de **relação n-ária nos conjuntos** A_1, A_2, ..., A_n a um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$; no caso em que $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, a relação n-ária nos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ diz-se uma **relação n-ária em** A. Se ρ é uma relação n-ária nos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são elementos tais que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$, diz-se que que os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ estão **relacionados por** ρ e escreve-se $\rho(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Uma relação 2-ária nos conjuntos A e B diz-se uma **relação binária de** A **em** B ou **correspondência de** A **em** B. Se ρ é uma relação binária de A em B e a e b são elementos tais que $(a, b) \in \rho$, também se escreve $a\,\rho\,b$ em alternativa a $\rho(a, b)$. Se $(a, b) \notin \rho$, escrevemos $a \not\rho\, b$ e dizemos que a **e** b **não estão relacionados por** ρ.

Uma vez que as relações binárias são conjuntos, faz sentido considerar as operações de união, interseção e complementação na construção de novas relações binárias. Além destas operações, existem outros processos que permitem a construção de novas relações binárias.

Se A, B, C e D são conjuntos, ρ é uma relação binária de A em B e ϱ é uma relação binária de C em D, chama-se:

- **relação inversa de** ρ, e representa-se por ρ^{-1}, a relação de B em A definida por

$$\rho^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \rho\}.$$

- **relação composta de** ϱ **com** ρ, e representa-se por $\varrho \circ \rho$, a relação binária de A em D definida por

$$\varrho \circ \rho = \{(x, y) \in A \times D \mid \exists_{z \in B \cap C} \quad ((x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \varrho)\}.$$

Funções e operações

Uma relação binária f de um conjunto A num conjunto B diz-se uma **função (ou aplicação) de** A **em** B se, para cada $a \in A$, existe um e um só $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Escrevemos $f : A \to B$ para indicar que f é uma função de A em B. Para cada $a \in A$, o único elemento b de B tal que $(a, b) \in f$ representa-se por $f(a)$, a este elemento dá-se a designação de **imagem de** a **por** f. Pode, então, escrever-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

Em $f : A \to B$, chamamos: **domínio** ou **conjunto de partida** de f ao conjunto A; **codomínio** ou **conjunto de chegada** de f ao conjunto B; **imagem** ou **contradomínio** de f ao conjunto $\mathrm{Im}f = \{f(x) : x \in A\}$.

Se f é uma função de A em B e $C \subseteq A$, então $f \cap (C \times B)$ é uma função de C em B designada por **restrição de f a C** e representada por $f_{|_C}$.

O conjunto de todas as funções de A em B representa-se por B^A. Dado um conjunto A, chama-se **aplicação vazia** à aplicação $\emptyset : \emptyset \to A$; esta é a única aplicação de $\emptyset$ em A e, portanto, $A^\emptyset = \{\emptyset\}$. Se A não é um conjunto vazio, não existem aplicações de A em $\emptyset$, pelo que $\emptyset^A = \emptyset$.

Conceitos Básicos

Dados conjuntos A e B, uma função $f : A \to B$, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, designamos por: **imagem de X por f** o conjunto $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$; **imagem inversa** (ou **pré-imagem**) **de Y por f** o conjunto $f^{\leftarrow}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$.

Conceitos Básicos

Existem alguns tipos especiais de funções que desempenham um papel relevante no estudo de matemática.

Uma função $f : A \to B$ diz-se:

- **injetiva** se

$$\forall a, b \in A \;\; (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)),$$

  ou equivalentemente, se

$$\forall a, b \in A \;\; (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b).$$

- **sobrejetiva** se

$$\forall b \in B \; \exists a \in A \;\; f(a) = b,$$

  ou equivalentemente se

$$f(A) = B.$$

- **bijetiva** se f é injetiva e sobrejetiva, i.e., se

$$\forall b \in B \; \exists^1 a \in A \;\; f(a) = b.$$

Conceitos Básicos

Uma **família** $(a_i \mid i \in I)$ **de elementos de um conjunto** A, que poderá também ser representada por $(a_i)_{i \in I}$, é uma função φ do conjunto I no conjunto A tal que $\varphi(i) = a_i$; o conjunto I é o **conjunto índice** da família $(a_i)_{i \in I}$. A imagem de I por φ é representada por $\{a_i \mid i \in I\}$.

Conceitos Básicos

Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos de um certo conjunto A, a união e a interseção destes subconjuntos são representadas, respetivamente, por

$$\bigcup(A_i \,|\, i \in I), \quad \bigcup\{A_i \,|\, i \in I\} \quad \text{ou} \quad \bigcup_{i\in I} A_i$$

e

$$\bigcap(A_i \,|\, i \in I), \quad \bigcap\{A_i \,|\, i \in I\} \quad \text{ou} \quad \bigcap_{i\in I} A_i$$

e são definidas por

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in A \,|\, x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\},$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in A \,|\, x \in A_i, \text{ para todo } i \in I\}.$$

Se $I = \emptyset$, tem-se $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$ e $\bigcap_{i\in I} A_i = A$.

Conceitos Básicos

Sejam I um conjunto e $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos. Designa-se por ***produto cartesiano*** da família $(A_i)_{i \in I}$, e representa-se por $\prod_{i \in I} A_i$, o conjunto de todas as funções f de I em $\bigcup_{i \in I} A_i$ tais que, para todo $i \in I$, $f(i) \in A_i$, i.e.,

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i, \forall i \in I \right\}.$$

Cada conjunto A_i designa-se por ***fator*** do produto cartesiano. Se $A_i = \emptyset$, para algum $i \in I$, tem-se $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$. No caso em que $I = \emptyset$, o conjunto $\prod_{i \in I} A_i$ tem exatamente um elemento; a função vazia é o único elemento deste conjunto, ou seja, $\prod_{i \in I} A_i = \{\emptyset\}$. Se $A_i = A$, para todo $i \in I$, representa-se $\prod_{i \in I} A_i$ por A^I.

No sentido de relacionar a definição de produto cartesiano da família $(A_i)_{i\in\{1,2,\dots,n\}}$ com a definição de $A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$, convenciona-se o uso do n-uplo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos de A como uma representação da função $f \in A^{\{1,2,\dots,n\}}$ tal que $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $\ldots$, $a_n = f(n)$. Assim, $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i\in\{1,2,\dots,n\}} A_i$.

Para cada $j \in I$, designa-se por ***projeção-j*** a aplicação $p_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$ tal que $p_j(f) = f(j)$, para todo $f \in \prod_{i\in I} A_i$.

Dados um conjunto A e $n \in \mathbb{N}_0$, chama-se ***operação n-ária em A*** a qualquer função f de A^n em A; ao inteiro n dá-se a designação de ***aridade de f***.

Uma ***operação finitária*** é uma operação n-ária, para algum $n \in \mathbb{N}_0$.

Atendendo a que todas as operações consideradas ao longo do texto são operações finitárias, em geral será omitida a palavra "finitária" e usa-se somente o termo "operação" para significar operação finitária.

Se f é uma operação finitária num conjunto A e $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, a imagem de $(a_1, \ldots, a_n)$ por f é representada por $f(a_1, \ldots, a_n)$.

Se A é um conjunto não vazio, a aridade de uma operação em A é bem determinada.

A uma operação em A de aridade 0 dá-se a designação de ***operação nulária***. Uma operação nulária é uma função $c : \{\emptyset\} \to A$, sendo esta função completamente determinada pelo elemento $c(\emptyset) \in A$ e usualmente identificada com esse elemento; por este motivo, as operações nulárias são também designadas por ***constantes***.

Às operações de aridade 1, 2 e 3 é usual dar a designação de operações ***unárias***, ***binárias*** e ***ternárias***, respetivamente.

Conceitos Básicos

Classes

No estudo de categorias será necessário fazer referência a "grandes coleções" de objetos tais como "a coleção de todos os conjuntos", "a coleção de todos os grupos", "a coleção de todos os morfismos de grupos", etc, as quais não podem ser encaradas como conjuntos.

Note-se que se a "coleção" U de todos os conjuntos for definida como um conjunto, obtem-se uma contradição: considerando o subconjunto $V = \{X \in U \,|\, X \notin X\}$, tem-se $V \in V$ *se e só se* $V \notin V$ (*Paradoxo de Russel*).

Assim, no sentido de evitar situações paradoxais como esta, torna-se necessária uma abordagem mais cuidadosa no estudo da teoria de conjuntos.

Conceitos Básicos

Não sendo objetivo destes apontamentos a apresentação de um estudo detalhado desta teoria, neste texto será considerada apenas uma extensão da teoria intuitiva de conjuntos, na qual todas as "coleções" de objetos são vistas como *classes* e os conjuntos são considerados como classes "pequenas".

Conceitos Básicos

Do ponto de vista axiomático, este tipo de abordagem à teoria de conjuntos é formalizado no sistema Neumman-Bernays-Gödel. Neste sistema é feita uma distinção entre conjuntos e classes (em particular, os conjuntos podem ser elementos de classes, mas não o inverso); além disso, é postulado que existe a classe de todos os conjuntos, designada por *universo* e representada por $\mathcal{U}$ (desta forma é evitado o *Paradoxo de Russel*). As classes são as subcoleções de $\mathcal{U}$. Assim, dadas classes A e B, é possível definir as classes $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \times B$ e, consequentemente, não existe problema na definição de funções entre classes, relações, famílias, etc.

Relações de ordem

Definição

Sejam P um conjunto e ρ uma relação binária em P. Diz-se que ρ é uma relação de ***ordem parcial*** *em P se são satisfeitas as seguintes condições:*

(i) *para todo $a \in P$, $(a, a) \in \rho$.*

(ii) *para quaisquer $a, b \in P$, $(a, b) \in \rho$ e $(b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$.*

(iii) *para quaisquer $a, b, c \in P$, $(a, b) \in \rho$ e $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$.*

Definição (continuação)

Se adicionalmente, para quaisquer $a, b \in P$,

(iv) $(a, b) \in \rho$ ou $(b, a) \in \rho$,

a relação ρ diz-se uma relação de ***ordem total***.

Se P é um conjunto não vazio e ρ é uma relação de ordem parcial em P, ao par (P, ρ) dá-se a designação de ***conjunto parcialmente ordenado*** *(c.p.o.)*; se ρ é uma relação de ordem total em P, o par (P, ρ) designa-se por ***conjunto totalmente ordenado*** ou por ***cadeia***.

Exemplo

1) Sendo A um dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{R}$ *e* $\leq$ *a relação "menor ou igual" usual em A, o par* $(A, \leq)$ *é um c.p.o..*

2) Sendo $|$ *a relação divide em* $\mathbb{N}$, $(\mathbb{N}, |)$ *é um c.p.o..*

3) Dado um conjunto A, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ *é um c.p.o..*

4) Os c.p.o.s $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ *e* $(\mathbb{R}, \leq)$ *são cadeias.*

Conceitos básicos

Em geral, representamos uma ordem parcial definida num conjunto P por $\leq$ e o respetivo c.p.o. por $(P, \leq)$.

Dado um c.p.o. $(P, \leq)$ e dados elementos $a, b \in P$, escrevemos:

- $a \leq b$, e lemos "*a **é menor ou igual a** b*", para representar $(a, b) \in \leq$;
- $a \not\leq b$, e lemos "*a **não é menor ou igual a** b*", para representar $(a, b) \notin \leq$;
- $a < b$, e lemos "*a **é menor do que** b*", se $a \leq b$ e $a \neq b$;
- $a \prec b$, e lemos "*b **é sucessor de** a*" (ou b ***cobre*** a ou a ***é coberto por*** b), se $a < b$ e $\neg(\exists\, c \in P, a < c < b)$.

Conceitos básicos

Dados $a, b \in P$, diz-se que a e b são ***comparáveis*** se $a \leq b$ ou $b \leq a$; caso contrário, ou seja, se $a \not\leq b$ e $b \not\leq a$, diz-se que a e b são ***incomparáveis*** e escreve-se $a \parallel b$.

Um subconjunto A de P diz-se:

- uma ***cadeia em*** $(P, \leq)$ ou um ***conjunto totalmente ordenado em*** $(P, \leq)$ se, para quaisquer $a, b \in A$, a e b são comparáveis;
- uma ***anticadeia em*** $(P, \leq)$ se, para quaisquer $a, b \in A$ tais que $a \neq b$, $a \parallel b$.

O ***intervalo fechado*** $[a, b]$ representa o conjunto

$$\{c \in P \,|\, a \leq c \leq b\}$$

e o ***intervalo aberto*** (a, b) representa o conjunto

$$\{c \in P \,|\, a < c < b\}.$$

Os intervalos $(a, b]$ e $[a, b)$ representam, respetivamente, os conjuntos

$$\{c \in P \,|\, a < c \leq b\} \text{ e } \{c \in P \,|\, a \leq c < b\}.$$

Dado um subconjunto A de P, diz-se que A é um ***subconjunto convexo de*** P se, para quaisquer $a, b \in A$ e $c \in P$,

$$a \leq c \leq b \Rightarrow c \in A.$$

Claramente, para quaisquer $a, b \in P$, o intervalo $[a, b]$ é um subconjunto convexo de P.

Conceitos básicos

Dados um c.p.o. $(P, \leq)$ e A um suconjunto de P, podem existir elementos com propriedades especiais relativamente a A.

Dados um subconjunto A de P e $m \in P$, diz-se que m é:

- um ***maximal*** de A se $m \in A$ e $\neg(\exists\, a \in A, m < a)$;
- um ***minimal*** de A se $m \in A$ e $\neg(\exists\, a \in A, a < m)$;
- um ***majorante*** de A se, para todo $a \in A$, $a \leq m$;
- um ***minorante*** de A se, para todo $a \in A$, $m \leq a$;
- um ***supremo*** de A se m é um majorante de A e $m \leq m'$, para qualquer majorante m' de A;
- um ***ínfimo*** de A se m é um minorante de A e $m' \leq m$, para qualquer minorante m' de A;
- um ***máximo*** de A se m é um majorante de A e $m \in A$;
- um ***mínimo*** de A se m é um minorante de A e $m \in A$.

Conceitos básicos

O conjunto dos majorantes de A e o conjunto dos minorantes de A são representados por $\text{Maj}(A)$ e $\text{Min}(A)$, respetivamente.

Caso exista, o supremo (ínfimo, máximo, mínimo) de um subconjunto A de P é único e representa-se por $\sup A$ ou $\bigvee A$ (respetivamente, $\inf A$ ou $\bigwedge A$, $\max A$, $\min A$).

Se $A = \{a, b\}$ é usual escrever $a \vee b$ e $a \wedge b$ para representar $\bigvee A$ e $\bigwedge A$, respetivamente.

Caso exista, o elemento máximo (mínimo) de P é usualmente representado por 1 (respetivamente, 0).

Um c.p.o. $(P, \leq)$ tal que P tem elemento máximo e elemento mínimo diz-se um ***conjunto parcialmente ordenado limitado***.

Proposição

Num c.p.o. $(P, \leq)$ *são equivalentes as seguintes afirmações, para quaisquer* $a, b \in P$*:*

(i) $a \leq b$;

(ii) $\sup\{a, b\} = b$;

(iii) $\inf\{a, b\} = a$.

Teorema

Seja $(P, \leq)$ *um conjunto parcialmente ordenado e sejam* a, b, c, d *elementos de* P *tais que* $a \leq b$ *e* $c \leq d$*. Então:*

(1) *Se existem* $\inf\{a, c\}$ *e* $\inf\{b, d\}$*, então* $\inf\{a, c\} \leq \inf\{b, d\}$*.*

(2) *Se existem* $\sup\{a, c\}$ *e* $\sup\{b, d\}$*, então* $\sup\{a, c\} \leq \sup\{b, d\}$*.*

Diagramas de Hasse

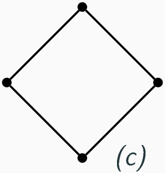
Os conjuntos parcialmente ordenados finitos podem ser representados por meio de diagramas, designados por ***diagramas de Hasse***.

Dado um conjunto parcialmente ordenado finito P, cada elemento de P é representado por um ponto do plano. Se a e b são elementos de P tais que $a \prec b$, o ponto associado ao elemento b é representado acima do ponto associado ao elemento a e unem-se os dois pontos por meio de um segmento de reta.

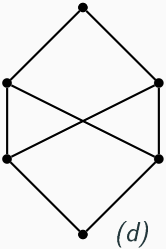
Exemplo

(a)

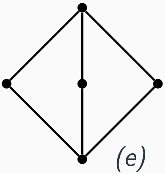
(b)



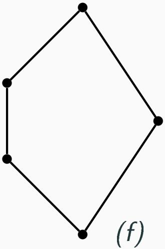
(c)



(d)



(e)



(f)

Construção de conjuntos parcialmente ordenados

Dado um c.p.o. $(P, \leq)$, definem-se a partir da relação $\leq$ outras relações de ordem parcial.

Se $(P, \leq)$ é um c.p.o. e A é um suconjunto não vazio de P, a relação $\leq_{|A}$ definida, para quaisquer $a, b \in A$, por

$$a \leq_{|A} b \text{ se e só se } a \leq b$$

é uma relação de ordem parcial em A. A relação $\leq_{|A}$ designa-se por ***ordem parcial induzida por*** $\leq$ em A.

Sendo $(P, \leq)$ um c.p.o., define-se a partir da relação $\leq$ uma outra relação de ordem parcial em P. A relação $\leq_d$ definida em P por

$$a \leq_d b \text{ se e só se } b \leq a$$

é também uma relação de ordem parcial em P. A relação $\leq_d$ designa-se por ***relação de ordem dual de*** $\leq$ e o c.p.o. $(P, \leq_d)$ designa-se por ***c.p.o. dual de*** $(P, \leq)$.

É simples perceber que $(\leq_d)_d = \leq$ e que o c.p.o. dual de $(P, \leq_d)$ é $(P, \leq)$. Os c.p.o.s $(P, \leq)$ e $(P, \leq_d)$ dizem-se ***c.p.o.s duais***.

Conceitos básicos

Se Φ é uma afirmação sobre conjuntos parcialmente ordenados, a afirmação Φ_d, obtida de Φ substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$, designa-se por ***afirmação dual de*** Φ.

Observe-se que os conceitos de majorante, supremo, elemento máximo, elemento maximal são, respetivamente, duais dos conceitos de minorante, ínfimo, elemento mínimo, elemento minimal.

Se Φ é uma afirmação sobre c.p.o.s envolvendo algum destes conceitos, a afirmação Φ_d é obtida substituindo cada um destes conceitos pelo conceito dual e substituindo toda a ocorrência de $\leq$ por $\leq_d$.

Note-se que se Φ é uma afirmação verdadeira num c.p.o. $(P, \leq)$, então Φ_d é verdadeira em $(P, \leq_d)$, pelo que é válido o seguinte princípio.

Princípio de dualidade para c.p.o.s Uma afirmação é verdadeira em qualquer c.p.o. sse o mesmo acontece com a respetiva afirmação dual.

Conceitos básicos

Dados dois conjuntos parcialmente ordenados $(P, \leq_1)$ e $(Q, \leq_2)$, existem diferentes processos para construir novos c.p.o.s a partir dos c.p.o.s dados.

Por exemplo, a relação binária $\leq$ definida em $P \times Q$ por

$$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1 \text{ e } a_2 \leq_2 b_2$$

é uma relação de ordem parcial e, por conseguinte, $(P \times Q, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, designado por ***produto de*** $(P, \leq_1)$ e $(Q, \leq_2)$ e representado por $P \times Q$.

A construção anterior pode ser generalizada a um número finito de conjuntos parcialmente ordenados: se $(P_1, \leq_1)$, ..., $(P_n, \leq_n)$, com $n \in \mathbb{N}$, são conjuntos parcialmente ordenados, então $(P_1 \times \cdots \times P_n, \leq)$, onde $\leq$ é a relação definida em $P_1 \times \cdots \times P_n$ por

$$(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \text{ se e só se } a_1 \leq_1 b_1, \ldots, a_n \leq_n b_n,$$

é um conjunto parcialmente ordenado.

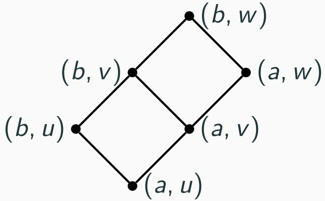
Se $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = P$ e $\leq_1 = \leq_2 = \ldots = \leq_n$, representa-se o c.p.o. $(P_1 \times \cdots \times P_n, \leq)$ por P^n.

Exemplo

Considerando as cadeias **2** *e* **3** *a seguir representadas*

2 **3**

o c.p.o. $(\mathbf{2} \times \mathbf{3}, \leq)$ *pode ser representado pelo diagrama seguinte*



$\mathbf{2} \times \mathbf{3}$

Aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados

No estudo de aplicações entre conjuntos parcialmente ordenados têm particular interesse aquelas que preservam a ordem.

Definição

Sejam $(P_1, \leq_1)$ *e* $(P_2, \leq_2)$ *dois conjuntos parcialmente ordenados e* $\alpha : P_1 \to P_2$ *uma aplicação. Diz-se que:*

- *a aplicação* α ***preserva a ordem*** *ou que* α *é* ***isótona*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$*,*

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- *a aplicação* α *é* ***antítona*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$*,*

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(b) \leq_2 \alpha(a).$$

Definição

- α *é um* ***mergulho de ordem*** *se, para quaisquer* $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b).$$

- α *é um* ***isomorfismo de c.p.o.s*** *se* α *é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.*

Caso exista um isomorfismo de c.p.o.s de $(P_1, \leq_1)$ *em* $(P_2, \leq_2)$, *diz-se que o c.p.o.* $(P_1, \leq_1)$ *é isomorfo ao c.p.o.* $(P_2, \leq_2)$.

Conceitos básicos

Um isomorfismo de c.p.o.s é uma aplicação bijetiva.

Se α é um isomorfismo de um c.p.o. $(P_1, \leq_1)$ num c.p.o. $(P_2, \leq_2)$, então $\alpha^{-1} : P_2 \to P_1$ também é um isomorfismo de $(P_2, \leq_2)$ em $(P_1, \leq_1)$.

Caso exista um isomorfismo entre os c.p.o.s $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ diz-se que os c.p.o.s são ***isomorfos*** e escreve-se $(P_1, \leq_1) \cong (P_2, \leq_2)$.

Note-se que, embora um isomorfismo de c.p.o.s seja uma aplicação isótona e bijetiva, uma aplicação bijetiva e isótona não é necessariamente um isomorfismo de c.p.o.s.

Conceitos básicos

Por exemplo, sendo $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ os c.p.o.s com os diagramas de Hasse a seguir apresentados

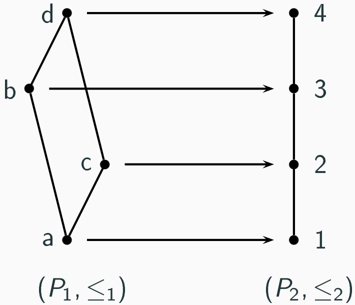


Figura 1

a aplicação α definida de P_1 em P_2 por $\alpha(a) = 1$, $\alpha(b) = 3$, $\alpha(c) = 2$ e $\alpha(d) = 4$, é isótona e bijetiva, mas não é um isomorfismo de c.p.o.s.

Definição

Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma aplicação $f : P \to P$ diz-se um ***operador de fecho em*** *$(P, \leq)$ se, para quaisquer $x, y \in P$, são satisfeitas as seguintes condições:*

F1: $x \leq f(x)$;

F2: $f^2(x) \leq f(x)$;

F3: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Dado um operador de fecho $f : P \to P$ e dado $p \in P$, designa-se o elemento $f(p)$ por ***fecho de*** *p. O elemento p diz-se* ***fechado para*** *f se $p = f(p)$. O conjunto dos elementos de P fechados para f é representado por $Fc_f(P)$.*

Conceitos básicos

Dado um conjunto A, já observámos anteriormente que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

Um operador de fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é usualmente designado por ***operador de fecho em*** A.

Dados um subconjunto X de A que seja fechado para f e um subconjunto Y de A, diz-se que Y é um ***conjunto gerador de*** X se $f(Y) = X$; caso exista um conjunto gerador de X que seja finito, o conjunto X diz-se ***finitamente gerado***.

Um operador de fecho f em $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ diz-se um ***operador de fecho algébrico*** se, para qualquer $X \subseteq A$,

F4: $f(X) = \bigcup\{f(Y) : Y \subseteq X \text{ e } Y \text{ é finito }\}$.

Relações de equivalência

Nesta secção recorda-se uma outra classe de relações binárias conhecidas por *relações de equivalência*. Este tipo de relações são importantes na definição de estruturas quociente.

Sejam A um conjunto e θ uma relação binária em A. Diz-se que θ é uma ***relação de equivalência*** em A se são satisfeitas as seguintes condições:

(i) para todo $a \in A$, $(a, a) \in \theta$, (reflexividade)

(ii) para quaisquer $a, b \in A$, $(a, b) \in \theta \Rightarrow (b, a) \in \theta$, (simetria)

(iii) para quaisquer $a, b, c \in A$, $(a, b) \in \theta$ e $(b, c) \in \theta \Rightarrow (a, c) \in \theta$. (transitividade)

Uma relação de equivalência θ definida num conjunto A determina uma partição de A em subconjuntos não vazios e disjuntos. Dado um elemento $x \in A$, chama-se **classe de equivalência de** x **módulo** θ ou, caso não haja ambiguidade, **classe de equivalência de** x, ao conjunto

$$[x]_\theta = \{y \in A \mid x\,\theta\,y\}.$$

Ao conjunto de todas as classes de equivalência dos elementos de A chamamos **conjunto quociente de** A **módulo** θ e representamo-lo por A/θ, ou seja,

$$A/\theta = \{[x]_\theta \mid x \in A\}.$$

Do proposição seguinte, cuja prova é um exercício simples, segue que o conjunto A/θ é uma partição de A.

Proposição

Sejam A um conjunto e θ uma relação de equivalência em A. Então

(i) *Para qualquer $x \in A$, $[x]_\theta \neq \emptyset$.*

(ii) *Para quaisquer $x, y \in A$, $[x]_\theta \cap [y]_\theta = \emptyset$ se e só se $[x]_\theta \neq [y]_\theta$.*

(iii) *Para qualquer $x \in A$, $x \in [y]_\theta$, para algum $y \in A$.*

Conceitos básicos

O conjunto de todas as relações de equivalência definidas num conjunto A é representado por $\mathrm{Eq}(A)$. O conjunto parcialmente ordenado $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$, onde $\subseteq$ é a relação de inclusão usual, é um reticulado, sendo fácil verificar que o ínfimo e o supremo de duas relações de equivalência em A é determinado de acordo com o resultado seguinte.

Teorema

Seja A um conjunto. Então $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$ *é um reticulado e, para quaisquer* $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Eq}(A)$,

(a) $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$,

(b) $\theta_1 \vee \theta_2 = \{(x, y) \in A^2 \mid \exists\, n \in \mathbb{N}, \exists\, z_0, z_1, \ldots, z_n \in A : x = z_0, y = z_n$ *e* $\forall 1 \leq k \leq n, z_{k-1}\, \theta_1\, z_k$ *ou* $z_{k-1}\, \theta_2\, z_k\}$.

$\square$

Conceitos básicos

Observe-se que se θ_1 e θ_2 são relações de equivalência num conjunto A, tem-se

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1 \circ \theta_2) \cup \ldots .$$

O teorema anterior pode ser generalizado a famílias de relações de equivalência definidas num conjunto A.

Teorema

Sejam A um conjunto. Então $(\mathrm{Eq}(A), \subseteq)$ *é um reticulado e para qualquer conjunto* I *e qualquer família* $(\theta_i \mid i \in I)$ *de relações de equivalência em* A*, tem-se:*

(a) $\displaystyle\bigwedge_{i \in I} \theta_i = \bigcap_{i \in I} \theta_i$,

(b) $\displaystyle\bigvee_{i \in I} \theta_i = \bigcup \{\theta_{i_0} \circ \theta_{i_1} \circ \ldots \circ \theta_{i_k} \mid i_0, i_1, \ldots, i_k \in I, k \in \mathbb{N}_0\}$. $\square$