Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação - 1º ano

2º teste - 18 dez 2015 Duração: 2 horas

1. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:

   (a) Sejam A, B e C conjuntos não vazios. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções não constantes, então, $g \circ f : A \to C$ é uma função não constante;

   A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Sejam $A = B = C = \mathbb{N}$. As aplicações

   $$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \begin{cases} 2 \text{ se } n \text{ par} \\ 4 \text{ se } n \text{ ímpar} \end{cases} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ se } n \text{ par} \\ 3 \text{ se } n \text{ ímpar} \end{cases} \end{array}$$

   são funções não constantes e

   $$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 1 \end{array}$$

   é uma função constante.

   (b) Sejam A e B conjuntos. Então, $\mathcal{R} = \omega_A \cup \omega_B$ é uma relação de equivalência em $A \cup B$;

   A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Sejam $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Então,

   $$R = \omega_A \cup \omega_B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

   não é uma relação de equivalência em $A \cup B$ uma vez que não é transitiva, já que $(1, 2), (2, 3) \in R$ e $(1, 3) \notin R$.

   (c) Seja $(A, \leq)$ um c.p.o. Se existe $\inf \emptyset$ então A admite um elemento maximal;

   A afirmação é verdadeira. Se existe $\inf \emptyset$, então existe $\max A$ e o máximo de um c.p.o. é sempre um elemento maximal desse mesmo c.p.o.

   (d) Sejam A, B e C conjuntos. Se $A \cup C \sim B \cup C$ então $A \sim B$.

   A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$, então, $A \cup C = \{1, 2, 3\} = B \cup C$ e, portanto, $A \cup C \sim B \cup C$ e, no entanto, $A \not\sim B$, já que são conjuntos finitos com diferentes cardinais.

2. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

   (a) uma função sobrejetiva $f : A \to A$ tal que a relação binária f^{-1} não é uma função;

   Não existe. Se f é sobrejetiva, como o domínio e o conjunto de chegada são iguais, f é bijetiva e, portanto, a relação binária f^{-1} é tabém uma função.

   (b) uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em A tal que $A/\mathcal{R} = \{[1]_\mathcal{R}, [2]_\mathcal{R}\}$;

   Seja $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$. Então,

   $$A/\mathcal{R} = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} = \{[1]_\mathcal{R}, [2]_\mathcal{R}\}.$$

(c) uma ordem parcial $\leq$ em A tal que $(A, \leq)$ é um c.p.o. no qual não existe $\inf \emptyset$ nem $\sup \emptyset$.

Seja $\leq = \mathrm{id}_A \cup \{(1,2),(3,4)\}$. Então, 1 e 3 são dois elementos minimais e 2 e 4 são dois elementos maximais de A, pelo que o c.p.o. A não admite máximo nem mínimo. Logo, não existe $\inf \emptyset$ nem $\sup \emptyset$.

(d) uma relação $\mathcal{R}$ tal que $(A, \mathcal{R})$ é um reticulado mas não é um conjunto bem ordenado.

Seja $\mathcal{R} = \mathrm{id}_A \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$. Então, o diagrama de Hasse de $(A, \mathcal{R})$ é um losango com mínimo 1 e máximo 4. Logo, o c.p.o. é um reticulado. Mais ainda, como não é uma cadeia, o reticulado não é um conjunto bem ordenado.

3. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, definida por $f(m,n) = (mn, m^2)$, para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(a) Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid |x| = |y| = 1\}$, determine $f(A)$.

Como $A = \{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$ e $f((1,1)) = f((-1,-1)) = (1,1)$, $f((-1,1)) = f((1,-1)) = (-1,1)$, temos que

$$f(A) = \{(1,1),(-1,1)\}.$$

(b) Se $B = \{0,2\} \times \{2,0\}$, determine $f^{\leftarrow}(B)$.

Como $B = \{(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)\}$ e:

- $f((m,n)) = (0,0) \Leftrightarrow mn = 0 = m^2 \Leftrightarrow m = 0 \land n \in \mathbb{Z}$;
- $f((m,n)) = (2,0) \Leftrightarrow mn = 2 \land m^2 = 0 \Leftrightarrow$ condição impossível;
- $f((m,n)) = (0,2) \Leftrightarrow mn = 0 \land m^2 = 2 \Leftrightarrow$ condição impossível em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$;
- $f((m,n)) = (2,2) \Leftrightarrow mn = 2 \land m^2 = 2 \Leftrightarrow$ condição impossível em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

temos que

$$f^{\leftarrow}(B) = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) Diga, justificando, se f é sobrejetiva e/ou injetiva.

Em (a), vimos que $f((1,1)) = f((-1,-1)) = (1,1)$. Logo, f não é injetiva. Em (b), vimos que $(2,0)$ não é imagem de um par de números inteiros. Logo, f não é sobrejetiva.

4. Seja θ a relação binária definida em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ por

$$(x,y)\ \theta\ (a,b) \Leftrightarrow x - y = a - b \qquad (x,y,a,b \in \mathbb{N}_0).$$

(a) Mostre que θ é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

A relação binária θ é uma relação de equivalência porque:

- θ é reflexiva, já que, para todos $(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, se tem $a - b = a - b$ e, portanto, $(a,b)\ \theta\ (a,b)$;
- θ é simétrica. De facto, dados $(x,y),(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, temos

$$\begin{aligned}(x,y)\ \theta\ (a,b) &\Leftrightarrow x - y = a - b\\ &\Leftrightarrow a - b = x - y\\ &\Leftrightarrow (a,b)\ \theta\ (x,y);\end{aligned}$$

- θ é transitiva. de facto, dados $(x,y),(a,b),(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, temos

$$\begin{aligned}(x,y)\ \theta\ (a,b) \wedge (a,b)\ \theta\ (p,q) &\Leftrightarrow x-y=a-b \wedge a-b=p-q\\ &\Rightarrow a-b=p-q\\ &\Leftrightarrow (x,y)\ \theta\ (p,q);\end{aligned}$$

(b) Determine as classes $[(0,2)]_\theta$ e $[(2,0)]_\theta$.

Tendo em conta a definição de classe de equivalência, temos

$$\begin{aligned}[(0,2)]_\theta &= \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid (x,y)\ \theta\ (0,2)\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x-y=0-2\}\\ &= \{(x,x+2) \mid x \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[(2,0)]_\theta &= \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid (x,y)\ \theta\ (2,0)\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x-y=2-0\}\\ &= \{(y+2,y) \mid y \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned}$$

(c) Mostre que $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\theta \sim \mathbb{Z}$.

Seguindo a resposta da alínea anterior, dado $z \in \mathbb{Z}$, a expressão

$$f(z) = \begin{cases} [(z,0)]_\theta & \text{se } z>0\\ [(0,0)]_\theta & \text{se } z=0\\ [(0,-z)]_\theta & \text{se } z<0\end{cases}$$

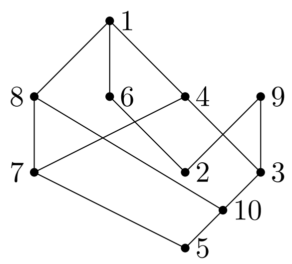
define uma aplicação de $\mathbb{Z}$ em $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)/\theta$.

Esta aplicação é claramente injetiva e é também sobrejetiva, pois, dado $(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$,

$$[(a,b)]_\theta = \begin{cases} [(a-b,0)]_\theta & \text{se } a>b\\ [(0,0)]_\theta & \text{se } a=b\\ [(0,b-a)]_\theta & \text{se } a<b\end{cases},$$

ou seja, $[(a,b)]_\theta = f(a-b)$. Estamos em condições de afirmar que os dois conjuntos são equipotentes.

5. Considere o c.p.o. $(A,\leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:



(a) Indique, caso exista:

i. Maj $\{7,10\}$;

Maj $\{7,10\} = \{8,4,1\}$.

ii. $\sup \emptyset$;

Não existe. Quando existe, $\sup \emptyset = \min A$. O c.p.o. A tem dois elementos minimais (o 2 e o 5), pelo que não admite elemento mínimo.

iii. um subconjunto de A com 5 elementos que admita máximo e mínimo.

Seja $X = \{1, 8, 7, 10, 5\}$. Então, X admite máximo (o elemento 1) e mínimo (o elemento 5).

(b) Será $(A, \leq)$ um reticulado? Justifique.

Não. Como vimos em (a)ii., A não admite elemento mínimo e A é um c.p.o. finito (qualquer reticulado finito admite elemento mínimo).

Cotação: **1.** 4 × 1.0 **2.** 4 × 1.0 **3.** 3 × 1.5 **4.** 2 × 1.5 + 2.0 **5.** 3 × 0.5 + 1.0