Resolução explicada dos exercícios 1, 2 e 3 da folha 3 (resolvidos nas aulas PL dos dias 24, 25, 26 e 27 de novembro)

exercício 1) O código seguinte está disponível na área "Matlab"da Blackboard

```
function [raiz, funevals] = bisec(f, a, b, tol)
% function [raiz, funevals]=bisec(fun, a, b, tol)
% Dados:
%       uma função continua fun
%       os extremos a e b de um intervalo que contém pelo menos um zero de
%       fun
%       a tolerância tol,
% esta função implementa o método da bisecção para aproximar um zero de f;
% termina quando obtem um intervalo de amplitude menor que tol e toma como
% aproximação raiz o valor médio desse intervalo; funevals é o número de
% vezes que a função é calculada.

fa=f(a), fb=f(b);
if fa==0
    raiz=a;
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
elseif fb==0
    raiz=b;
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
elseif fa*fb >0
    raiz=' fa*fb >0: não há garantia de existir uma raíz entre a e b';
    funevals= 'Não foram feitas iterações';
else
    funevals=0;                    % numero de vezes que se calcula f
    while b-a > tol
            med = (a + b)/2;    % o ponto médio do intervalo [a,b] que contem o zero
            fmed=f(med);
            funevals=funevals+1;
            if fmed*fa < 0                          % há um zero de f em [a, med]
                b=med;
                fb=fmed;
            elseif fmed*fb < 0                   % há um zero de f em [med, b]
                a=med;
                fa=fmed;
            else                                          % med é zero de p
                a=med;
                b=med;
            end
    end
    raiz=(a+b)/2;
end
```

exercício 2.a) Começamos por definir a função com

```
f=inline('x*log(x)-1')
```

ou, com

```
f=@(x) x*log(x)-1
```

(nota: esta alternativa é preferível nas versões mais recentes do Matlab).
De

```
>> f(1), f(2)

ans =

    -1


ans =

    0.3863
```

conclui-se (por ser f contínua no intervalo [1,2]) que existe uma raiz da equação entre 1 e 2.

exercício 2.b) Uma vez que em cada iteração o método da bisseção reduz a metade a amplitude do intervalo que contem a raiz, ao fim de k iterações a amplitude é, neste caso (a amplitude do intervalo inicial é igual a 1) dada por $1/2^k$. De

$$\frac{1}{2^k} < 10^{-10}$$

resulta

$$k > log_2(10^{10})$$

e, tendo em conta

```
>> log2(10^10)

ans =

   33.2193
```

concluímos que $k = 34$.

exercício 2.c)

```
>> [raiz, funevals] = bisec(f, 1, 2, 1e-10)

raiz =

    1.7632


funevals =

    34
```

exercício 2.d) A execução não termina. Interrompemos a execução pressionando em simultâneo as teclas Ctrl e C.

```
>> [raiz, funevals] = bisec(f, 1, 2, 1e-20)
Operation terminated by user during bisec (line 39)
```

O critério de paragem nunca é cumprido porque o valor de $tol = 10^{-10}$ é demasidamente pequeno. Isto acontece porque a raiz está entre 1 e 2, e neste intervalo a distância entre um número de $\mathcal{F}$ e o seu sucessor é $2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$. Assim, o mais pequeno valor de tol que pode ser usado é 2^{-52} (o critério de paragem será cumprido com $tol = 10^{-15}$ mas não com $tol = 10^{-16}$).

exercício 3.a) Está resolvido nas páginas 67 e 68 do ficheiro apresenta.pdf que serve de suporte às aulas TP on-line.

exercício 3.b)

```
>> fi3=@(x) (x+exp(-x))/2

fi3 =

    @(x)(x+exp(-x))/2

>> x(1)=0.5; x(2)=fi3(x(1)); k=2; while abs(x(k)-x(k-1))>0.5*1e-3, k=k+1;...
x(k)=fi3(x(k-1)); end, x'

ans =

    0.5000
    0.5533
    0.5642
    0.5665
    0.5670
    0.5671
```

A expressão (ver p. 70 das notas)

$$r - x^{(k)} = \frac{1}{1-\phi'(\theta)}(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

permite-nos fazer a estimativa do erro $|r - x^{(5)}|$ a partir da diferença entre $x^{(6)}$ e $x^{(5)}$.

Com $\phi'(x) = (1 - e^{-x})/2$ e θ próximo de $x^{(5)}$, será

$$|r - x^{(5)}| \approx \frac{1}{|1-\phi'(x^{(5)})|}|x^{(6)} - x^{(5)}|$$

```
>> (1-exp(-x(5)))/2

ans =

    0.2164

>> 1/(1-ans)*(x(6)-x(5))
```

```
ans =

   1.3907e-04
```