

Matrizes

1. Matrizes

1.1 Conceitos Básicos

1.2 Operações com matrizes

1.2.1 Adição de matrizes

1.2.2 Multiplicação de uma matriz por um escalar

1.2.3 Produto de matrizes

1.2.4 Transposta de uma matriz

1.3 Inversa de uma matriz quadrada

1.4 Algumas matrizes especiais

1.5 Operações e matrizes elementares

1.6 Matrizes em escada e em escada reduzida

1.7 Cálculo de inversas

Matrizes - conceitos básicos

A um quadro de m vezes n números dispostos em m linhas e n colunas dá-se o nome de **matriz**. Os números contidos na matriz são chamados **elementos** da matriz.

- Usualmente representamos os elementos da matriz entre parênteses retos (ou curvos)
- Usaremos letras maiúsculas para denotar matrizes
- O elemento da matriz A que se encontra na linha i e coluna j diz-se o **elemento** (i,j) e será denotado por a_{ij}
- Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se uma matriz de **ordem** $m \times n$

Assim,

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

representa uma matriz de ordem $m \times n$.

Uma **matriz** diz-se **real** se todos os seus elementos são números reais. O conjunto das matrizes reais representa-se, muitas vezes, por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, escrevendo-se,

$$A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

quando A é uma matriz real.

Se $m \neq n$, A diz-se **retangular**. Se $m = n$, A diz-se **quadrada**.

Uma matriz de ordem $m \times 1$ tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},$$

e designa-se por **matriz (ou vetor) coluna**.

Uma matriz de ordem $1 \times n$ tem a forma

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}],$$

e chama-se **matriz (ou vetor) linha**.

- representação com letras minúsculas a carregado e os seus elementos apenas com um índice. Por exemplo,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = [y_1 \quad \dots \quad y_n].$$

Definição

sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes da mesma ordem. Diz-se que A é igual a B e escreve-se $A = B$ se e só se

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n . Diz-se que os elementos

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

se dispõem na **diagonal** de A ou que são os **elementos diagonais** de A .

Definição

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n chamamos **traço** de A e denotamos por $\text{tr}(A)$ à soma dos elementos diagonais de A , ou seja,

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Definição

Uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero chama-se **matriz nula**. Representaremos, em geral, a matriz nula de ordem $m \times n$ por $O_{m \times n}$ ou simplesmente por O .

Definição

À matriz quadrada de ordem n cujos elementos são todos nulos excepto os da diagonal que são todos iguais a um, dá-se o nome de **matriz identidade** de ordem n e representa-se por I_n .

$$O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Adição de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de ordem $m \times n$.

Definição

A soma de A e B é uma matriz $C = [c_{ij}]$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

e escreve-se

$$C = A + B.$$

Note-se que a adição de matrizes só está definida para matrizes com a mesma ordem.

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$ e α um número. O produto de α por A é a matriz $C = [c_{ij}]$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

e escreve-se

$$C = \alpha A.$$

A multiplicação de uma matriz por um escalar está sempre definida.

Definição

Sendo $-B = [-b_{ij}]$,

$$A - B \text{ significa } A + (-B).$$

Exemplo (soma de matrizes e multiplicação por um escalar)

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad 3A = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix},$$

$$B - 3A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -22 & -4 \\ -17 & -22 & -27 \end{bmatrix},$$

$$C - 2D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da adição matricial

No teorema seguinte são enunciadas propriedades de adição de matrizes que seguem da álgebra usual em \mathbb{R} .

Teorema

Sejam A , B e C matrizes de ordem $m \times n$. Então,

- (i) $A + B = B + A$,*
- (ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,*
- (iii) $A + O = A$, em que O designa a matriz nula de ordem $m \times n$,*
- (iv) $A + (-A) = O$, onde $-A = [-a_{ij}]$.*

Regras úteis para a aritmética matricial.

Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar

A operação de multiplicação de uma matriz por um número goza das propriedades seguintes.

Teorema

sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e α e β números. Então,

(i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$

(iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A),$

(iv) $1 A = A.$

Multiplicação de matrizes

Não se define multiplicando os elementos homólogos!

A multiplicação de matrizes dá significado à notação simples e abreviada,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

para representar um sistema de m equações em n incógnitas, quaisquer que sejam os valores de m e n .

Por exemplo, o sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

poderá ser representado por $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times p$ e B uma matriz de ordem $p \times n$. O produto de A e B é a matriz AB de ordem $m \times n$ cujos elementos são dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n,$$

e escreve-se $C = AB$.

$$c_{ij} = \overbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \end{bmatrix}}^{\text{linha } i \text{ de } A} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix}}^{\text{coluna } j \text{ de } B}.$$
$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemplo (produto de matrizes)

Se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

então

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \times 3 + 1 \times 2 + 3 \times 1 & -2 \times (-2) + 1 \times 4 + 3 \times (-3) \\ 4 \times 3 + 1 \times 2 + 6 \times 1 & 4 \times (-2) + 1 \times 4 + 6 \times (-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \end{aligned}$$

Exemplo (produto de matrizes)

e

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \times (-2) + (-2) \times 4 & 3 \times 1 + (-2) \times 1 & 3 \times 3 + (-2) \times 6 \\ 2 \times (-2) + 4 \times 4 & 2 \times 1 + 4 \times 1 & 2 \times 3 + 4 \times 6 \\ 1 \times (-2) + (-3) \times 4 & 1 \times 1 + (-3) \times 1 & 1 \times 3 + (-3) \times 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & 30 \\ -14 & -2 & -15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo (produto de matrizes)

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},$$

então é impossível multiplicar A por B , já que o número de colunas de A não é igual ao número de linhas de B . No entanto, é possível multiplicar B por A :

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 4 + 2 \times 2 \\ 4 \times 3 + 5 \times 1 & 4 \times 4 + 5 \times 2 \\ 3 \times 3 + 6 \times 1 & 3 \times 4 + 6 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicação matricial não é comutativa

Com efeito, se A é de ordem $m \times p$ e B de ordem $p \times n$ o produto AB está definido e, neste caso, AB tem ordem $m \times n$. O produto BA apenas está definido quando $m = n$ mas a matriz BA será de ordem $p \times p$. Mas mesmo quando $m = n = p$ (matrizes quadradas da mesma ordem), em geral, $AB \neq BA$.

Definição

*Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n . Quando se tem $AB = BA$, as matrizes A e B dizem-se **comutáveis**.*

Exemplo (matrizes comutáveis e não comutáveis)

1. Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

então

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $AB \neq BA$.

2. A matriz A é comutável com a matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, já que,

$$AC = CA = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da multiplicação matricial

Teorema

Seja α um número e A, B e C matrizes cujas ordens permitem as operações indicadas a seguir. Então,

- (i) $(AB)C = A(BC)$,*
- (ii) $A(B + C) = AB + AC$,*
- (iii) $(A + B)C = AC + BC$,*
- (iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,*
- (v) $I_m A = A$ e $A I_n = A$, se A for de ordem $m \times n$,*
- (vi) $OA = AO = O$.*

Note que as matrizes especiais I_m e I_n atuam como a identidade multiplicativa à esquerda e à direita, respetivamente.

Regras de notação

Como na álgebra usual, se uma expressão envolve multiplicações e somas e não existem parênteses para indicar a ordem das operações, as multiplicações são efetuadas antes das somas.

Isso é válido tanto para a multiplicação por escalar quanto para a multiplicação matricial. Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

então

$$A + BC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

e

$$3A + B = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Potência de uma matriz

Como $(AB)C = A(BC)$, podemos, simplesmente, omitir os parênteses e escrever ABC . O mesmo é verdade para um produto de quatro ou mais matrizes. No caso em que uma **matriz de ordem $n \times n$ é multiplicada por si mesma um certo número de vezes**, é conveniente usar a notação exponencial.

Então, se k é um número inteiro positivo,

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ vezes}}$$

representa a potência de expoente k de A .

Definimos $A^0 = I_n$.

Exemplo (potência de uma matriz)

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = AAA = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

e, em geral,

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Transposta de uma matriz

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, é muitas vezes útil formar uma nova matriz de ordem $n \times m$ cujas colunas são as linhas de A pela ordem correspondente (A é “refletida” sobre a sua diagonal principal, no caso em que A é uma matriz quadrada).

Definição

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$. À matrix $B = [b_{ij}]$ de ordem $n \times m$ cujos elementos são dados por

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m,$$

chamamos **transposta** de A e designamos $B = A^T$.

Exemplo (transposta de uma matriz)

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ então } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Se } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ então } B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz B é igual à sua transposta (matriz simétrica).

$$\text{Se } C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ então } C + C^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedades da transposição de matrizes

O teorema a seguir apresenta quatro regras algébricas envolvendo a transposição de matrizes.

Teorema

Sejam A e B e α um número. Assumindo que as operações indicadas estão definidas, temos

$$(i) \quad (A^T)^T = A,$$

$$(ii) \quad (A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(iii) \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T,$$

$$(iv) \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Inversa de uma matriz

Não se define a operação “divisão de matrizes”. No entanto, define-se um conceito semelhante ao de “número inverso”.

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Se existir uma matriz X de ordem n tal que

$$XA = I_n \quad \text{e} \quad AX = I_n,$$

diz-se que A é **invertível**, **regular** ou **não singular**. Uma matriz X que verifique a condição anterior diz-se **matriz inversa** de A .

Teorema

Se A for invertível a sua **inversa é única**.

Quando existe, a matriz inversa de A é representada por A^{-1} .

Uma matriz quadrada, não nula, pode não ter inversa. Neste caso, diz-se uma matriz **singular** ou **não invertível**.

Exemplo (inversa de uma matriz)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

são inversas uma da outra, já que

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo (matriz não invertível)

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não tem inversa.

De facto, se B é uma qualquer matriz de ordem 2×2 , então

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, BA não pode ser igual à identidade $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, portanto, A não é uma matriz invertível.

Exercício (Cálculo da inversa de uma matriz)

Use a definição para calcular a inversa de cada uma das matrizes seguintes.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(b) B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(d) D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$(a) A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$(b) B^{-1} = B;$$

$$(c) C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix};$$

$$(d) D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(e) E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da inversão de matrizes

Teorema

Sejam A e B matrizes de ordem n , invertíveis. Então,

(i) A^{-1} é invertível, sendo $(A^{-1})^{-1} = A$,

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Uma vez que o uso da definição não é um processo computacionalmente eficiente para calcular a inversa de uma matriz, estudaremos mais à frente um método numérico para determinar a inversa.

Matrizes invertíveis

Mais à frente estudaremos outras formas para justificar que uma matriz quadrada é invertível, sem ser através da definição.

O resultado seguinte estabelece que se uma matriz quadrada A é uma matriz invertível, para demonstrarmos que a sua inversa é B temos de **demonstrar apenas que um dos produtos AB ou BA é I_n .**

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n invertível.

- 1. Se B , de ordem n , é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $BA = I_n$.*
- 2. Se B , de ordem n , é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $AB = I_n$.*

Algumas matrizes especiais

Definição

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se uma matriz **diagonal** se todos os elementos fora da diagonal são nulos, isto é,

$$i \neq j \implies a_{ij} = 0.$$

Definição

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se **triangular superior** (ou **inferior**) se todos os elementos abaixo (respetivamente acima) da diagonal são nulos, isto é,

$$i > j \implies a_{ij} = 0 \quad (\text{ou } i < j \implies a_{ij} = 0).$$

Exemplo (matrizes diagonais e triangulares)

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

são **ambas triangulares**. A primeira é triangular superior e a segunda triangular inferior.

As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são **todas diagonais**.

Uma matriz diagonal é, ao mesmo tempo, triangular superior e inferior.

Definição

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se uma matriz **banda**, de largura de banda $2k + 1$, se

$$|i - j| > k \implies a_{ij} = 0.$$

Se $k = 1$ a matriz diz-se **tridiagonal** (matriz de largura de banda 3).

Definição

Uma matriz diz-se **densa** se a maior parte dos seus elementos são diferentes de zero.

Definição

Uma matriz diz-se **dispersa** se uma grande percentagem dos seus elementos são nulos.

Definição

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n diz-se uma matriz **simétrica** se $A^T = A$, ou seja, se

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Pode-se verificar que se A é simétrica e invertível então A^{-1} é também simétrica.

Definição

Seja A uma matriz real de ordem n . A matriz A diz-se **ortogonal** se

$$AA^T = I_n \quad \text{e} \quad A^T A = I_n.$$

Podemos concluir que se uma matriz A é ortogonal, então é invertível e a sua transposta é a sua inversa, ou seja, $A^{-1} = A^T$.

Operações elementares

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Um **operação elementar sobre uma linha de A** é uma operação de um dos seguintes tipos:

- I troca de duas linhas;
- II multiplicação de uma linha por um número diferente de zero;
- III substituição de uma linha pela sua soma com um múltiplo de outra linha.

Notação:

- I Troca da linha i com a linha j , com $i \neq j$:

$$l_i \longleftrightarrow l_j$$

- II Linha i multiplicada por $\alpha \neq 0$:

$$l_i \longleftarrow \alpha l_i$$

- III Substituição da linha i pela sua soma com a linha j multiplicada por β , com $i \neq j$:

$$l_i \longleftarrow l_i + \beta l_j$$

Matrizes equivalentes

Substituindo na definição anterior "linha" por "coluna" obtemos as correspondentes definições de **operações elementares sobre as colunas de A** dos tipos I, II e III.

Para as correspondentes operações elementares sobre colunas substituimos l_i e l_j por c_i e c_j , respetivamente.

Definição

*Diz-se que A é uma **matriz equivalente por linhas** (por colunas) a uma matriz B , se esta matriz se pode obter a partir de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas (colunas) de A . Neste caso, usa-se a notação*

$$A \xrightarrow{\text{(linhas)}} B \qquad (A \xrightarrow{\text{(colunas)}} B)$$

Matriz elementar

Definição

A toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma única operação elementar nas suas linhas, de tipo I, II ou III, chamamos **matriz elementar** do Tipo I, II ou III, respetivamente.

Substituindo na definição anterior "linhas" por "colunas", obtemos a correspondente definição de matriz elementar sobre colunas.

Proposição

Toda a matriz elementar sobre linhas é também uma matriz elementar sobre colunas.

1. Se $I_m \xrightarrow[l_i \leftrightarrow l_j]{} E$, então $I_m \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{} E$.
2. Se $I_m \xrightarrow[l_i \leftarrow \alpha l_i]{} E$, então $I_m \xrightarrow[c_i \leftarrow \alpha c_i]{} E$.
3. Se $I_m \xrightarrow[l_i \leftarrow l_i + \beta l_j]{} E$, então $I_m \xrightarrow[c_j \leftarrow c_j + \beta c_i]{} E$.

Operações e matrizes elementares

O resultado seguinte evidencia que podemos efetuar qualquer operação elementar sobre as linhas de uma matriz A de ordem $m \times n$ **premultiplicando** por A (isto é, multiplicando por A à esquerda) por uma matriz elementar adequada: a que resulta de I_m afetando nas suas linhas a mesma operação elementar que pretendemos efetuar nas linhas de A .

Resultado análogo é válido substituindo "linhas" por "colunas", " I_m " por " I_n " e a multiplicação "à esquerda" (premultiplicação) pela multiplicação "à direita" (posmultiplicação).

Operações e matrizes elementares

Teorema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

1. Se

$$I_m \xrightarrow{\text{opElem}} E$$

sendo opElem uma operação elementar sobre linhas, então

$$A \xrightarrow{\text{opElem}} EA$$

2. Se

$$I_m \xrightarrow{\text{opElem}'} E'$$

sendo opElem' uma operação elementar sobre colunas, então

$$A \xrightarrow{\text{opElem}'} AE'.$$

Exercício

Seja A uma matriz de ordem 3×5 . Determine as matrizes elementares que, premultiplicando por A , produzem em A cada uma das seguintes transformações:

- (a) troca da primeira com a terceira linhas;
- (b) multiplicação da primeira linha por 6;
- (c) adição de $\frac{1}{5}$ da segunda linha à terceira linha.

Exercício

Sem efetuar multiplicações de matrizes, indique o resultado de

(a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}.$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}.$$

Teorema

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ equivalentes por linhas, abreviadamente $A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} B$.

Então existe um número finito $k \in \mathbb{N}$ de matrizes elementares E_1, E_2, \dots, E_k , tais que

$$B = E_k \dots E_2 E_1 A.$$

Vamos ver a seguir que as matrizes elementares são invertíveis e, sendo assim, podemos também escrever

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} B.$$

Matrizes elementares são invertíveis

Teorema

Toda a matriz elementar E de ordem n é invertível e tem-se, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \dots, n\}$:

1. se $i \neq j$ e

$$I_m \xrightarrow{l_i \longleftrightarrow l_j} E, \quad \text{então} \quad I_m \xrightarrow{l_i \longleftrightarrow l_j} E^{-1};$$

2. se $\alpha \neq 0$ e

$$I_m \xrightarrow{l_i \longleftarrow \alpha l_i} E, \quad \text{então} \quad I_m \xrightarrow{l_i \longleftarrow \frac{1}{\alpha} l_i} E^{-1};$$

3. se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{R}$ e

$$I_m \xrightarrow{l_i \longleftarrow l_i + \beta l_j} E, \quad \text{então} \quad I_m \xrightarrow{l_i \longleftarrow l_i + (-\beta) l_j} E^{-1}.$$

As matrizes elementares são invertíveis e as suas inversas são matrizes elementares do mesmo tipo.

Exercício (inversas de matrizes elementares)

1. Determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes elementares:

1.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Sabendo que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

justifique que A é invertível e exprima a sua inversa como produto de matrizes elementares.

Pivô de uma linha

Definição

O elemento a_{ik} de uma matriz $A = [a_{ij}]$ diz-se um **pivô** da linha i se é o primeiro elemento não nulo mais à esquerda da sua linha, i. e.,

$$a_{ik} \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{ij} = 0, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Consideramos que uma linha nula não tem pivô.

Chamamos **pivôs** de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.

Matriz em escada

Definição

Diz-se que uma matriz A de ordem $m \times n$ é uma **matriz em escada**, ou tem a **forma em escada** (abreviadamente, denotado por f.e.), se satisfaz as duas condições seguintes:

- se A tem uma linha nula então as linhas seguintes, se existirem, também são nulas;
- se o pivô da linha i estiver na coluna k , então todos os elementos abaixo da linha i , nas colunas $1, \dots, k$ são nulos.

Ou seja, uma matriz A é uma matriz em escada se o número de elementos nulos à esquerda do pivô aumenta de linha para linha até que, possivelmente, sobre apenas linhas nulas.

Exemplo (matriz em escada)

1. Qualquer matriz nula tem a forma em escada.
2. Representando por \bullet os pivôs e por $*$ as entradas da matriz que podem ter qualquer valor, estão em forma de escada, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \bullet & * & * \end{bmatrix}.$$

3. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

não estão em forma de escada.

Matriz em escada reduzida

Definição

Diz-se que uma matriz A de ordem $m \times n$ é uma **matriz em escada reduzida**, ou que tem a **forma em escada reduzida** (abreviadamente, denotado por f.e.r.), se satisfaz as seguintes condições:

- A é uma matriz em escada;
- os pivôs são todos 1;
- os pivôs são os únicos elementos não nulos das suas colunas.

Exemplo (matriz em escada reduzida)

1. A matriz nula $O_{m \times n}$ e a matriz identidade I_n têm a forma em escada reduzida.
2. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.
3. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem a forma em escada reduzida.
4. A matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.
5. As matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

estão em forma de escada reduzida.

Exercício (matriz em escada e em escada reduzida)

1. Indique se estão em forma de escada cada uma das seguintes matrizes:

1.1
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3
$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Indique se estão em forma de escada reduzida cada uma das seguintes matrizes em forma de escada:

2.1
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Equivalência (por linhas) à forma de escada

Teorema

Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} A' (f.e).$$

Processo de redução de A de ordem $m \times n$ à forma de escada

1. Se $A = O_{m \times n}$ ou A é uma matriz linha, então A está em forma de escada e o processo termina.
2. Por troca de linhas (isto é, realizando uma operação elementar do tipo I), se necessário, obtenha-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas da matriz A , um pivô com índice de coluna mínimo. Suponhamos que tal elemento está na posição $(1, t)$. Tem-se

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1t} & b_{1,t+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2t} & b_{2,t+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & b_{mt} & b_{m,t+1} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix},$$

onde $b_{1t} \neq 0$ (note-se que existem $t - 1$ colunas nulas à esquerda da coluna t).

- 3.** Para cada linha i de B , $i = 2, \dots, m$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-\frac{b_{it}}{b_{1t}}$ pela linha 1 (operações elementares do tipo III). Obtém-se uma matriz da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_{1t} & b_{1,t+1} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,t+1} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m,t+1} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix}.$$

- 4.** 'Despreze-se' a linha 1 de C e repita-se o processo à matriz resultante.

Exemplo (Redução à forma em escada)

1º passo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \longleftrightarrow l_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1 \\ l_4 \leftarrow l_4 - l_1 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo (Redução à forma em escada)

2º passo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2/2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} l_3 \leftarrow l_3 - 4l_2 \\ l_4 \leftarrow l_4 - 3l_2 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Exemplo (Redução à forma em escada)

3º passo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 / (-9)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 \leftarrow l_4 + 3l_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})$$

Exemplo (Redução à forma em escada)

4º passo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_4 \leftarrow l_4/3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(todos os pivôs são iguais a 1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.})$$

Exercício

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada.

Equivalência (por linhas) à forma de escada reduzida

Teorema

Toda a matriz A de ordem $m \times n$ é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,

$$A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} A'' \text{ (f.e.r), com } A'' \text{ única.}$$

Processo de redução de A de ordem $m \times n$, não nula e em forma de escada, à forma de escada reduzida

1. Seja a_{sk} o pivô com maior índice de linha. Para que o pivô da linha s possa ser 1, multiplica-se a linha s por $\frac{1}{a_{sk}}$ (transformação elementar do tipo II).

Seja B a matriz obtida. Se $s = 1$, a matriz B está em forma de escada reduzida e o processo termina.

2. Para cada linha i de B , com $i = 1, \dots, s - 1$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-b_{ik}$ pela linha s (transformação elementar do tipo III).

Note-se que tal corresponde a anular os elementos da coluna k , coluna do pivô da linha s , $b_{sk} = 1$, com índice de linha inferior a s .

Obtém-se uma nova matriz C que continua em forma de escada e em que as entradas da coluna k são todas nulas à exceção do pivô c_{sk} que é igual a 1.

3. "Desprezam-se" as linhas de C de índice superior ou igual a s e repete-se o processo à matriz resultante.

Exemplo (Redução à forma em escada reduzida)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{l_3 \leftarrow l_3 + l_4 \\ l_2 \leftarrow l_2 + 2l_4}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{l_2 \leftarrow l_2 - 2l_3 \\ l_1 \leftarrow l_1 - l_3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 + 2l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{f.e.r.})$$

Exercício

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada reduzida.

Comece com a forma em escada equivalente a A obtida no exercício anterior.

Formas de escada e característica de uma matriz

Teorema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Definição

*Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada, equivalente por linhas a A , chamamos **característica de A** e denotamos por $\text{car}(A)$.*

As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica de uma matriz, isto é, se

$$\text{se } A \xrightarrow[\text{(linhas)}]{} B, \quad \text{então } \text{car}(A) = \text{car}(B).$$

Exercício

Discuta, segundo os valores de α e de β , a característica das matrizes de elementos reais

$$A_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Caracterização de matrizes invertíveis

Utilizando apenas a definição não é, em geral, imediato reconhecer, na prática, se uma dada matriz é ou não invertível.

O resultado seguinte permite, em particular, decidir se uma dada matriz quadrada é ou não invertível através da sua característica.

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n . As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível.*
2. *$\text{car}(A) = n$.*
3. *I_n é a forma em escada reduzida de A .*
4. *A é igual a um produto de matrizes elementares.*

Cálculo da inversa de uma matriz

Seja A uma matriz de ordem n invertível. De acordo com o teorema anterior, I_n é a forma em escada reduzida de A e existem, portanto, $k \in \mathbb{N}$ matrizes elementares tais que

$$I_n = E_k \dots E_2 E_1 A = (E_k \dots E_2 E_1) A,$$

pelo que

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1 = E_k \dots E_2 E_1 I_n,$$

isto é, A^{-1} pode obter-se aplicando a I_n as mesmas operações elementares que transformam A em I_n .

Exemplo (cálculo da inversa)

Calculemos a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$[A : I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} l_3 \leftarrow l_3 + l_1 \\ l_4 \leftarrow l_4 - l_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 \longleftrightarrow l_4}$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} l_3 \leftarrow -l_3 \\ l_4 \leftarrow -l_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} \begin{array}{l} l_3 \leftarrow l_3 + l_4 \\ l_2 \leftarrow l_2 - l_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\quad} l_1 \leftarrow l_1 - l_3$$

Exemplo

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] = \left[I_4 \mid A^{-1} \right]$$

Assim, A é invertível e a inversa é

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício

Considere a matriz invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine A^{-1} .

(b) Use a alínea anterior para resolver o sistema de equações

lineares $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Resolução.

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_3 - l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow{l_3 \leftarrow l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{l_2 \leftarrow (-1) \cdot l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \begin{array}{l} \xrightarrow{l_2 \leftarrow l_2 + l_3} \\ l_1 \leftarrow l_1 - l_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow{l_1 \leftarrow l_1 - l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Temos, então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Uma vez que A é uma matriz invertível, vem

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$