Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2025/2026

Departamento de Matemática

Matrizes

Conceitos básicos

Neste capítulo introduz-se o conceito de matriz e estudam-se operações e propriedades relacionadas com matrizes.

São bastantes os contextos na área da matemática e suas aplicações em que o conceito de matriz se revelou ser fundamental. Por exemplo, para a representação e tratamento de informação que esteja dependente de parâmetros é frequente o recurso a quadros (tabelas) aos quais se dá a designação de matrizes.

Ao longo deste capítulo designamos por $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos; quando necessário indicaremos explicitamente se nos referimos ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais ou ao conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Aos elementos de $\mathbb{K}$ damos a designação de **escalares**.

Matrizes

Definição

*Chama-se **matriz do tipo** $m \times n$ (ou **de ordem** $m \times n$) **sobre** $\mathbb{K}$ a uma função $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ definida por $A(i, j) = a_{ij}$ e que se representa por um quadro em que os mn elementos a_{ij} são dispostos em m filas horizontais e n filas verticais do seguinte modo*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

Definição (continuação)

- *Para cada* $i \in \{1, \ldots, m\}$, *chama-se* **linha** i **da matriz** A *ao elemento* $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ *de* $\mathbb{K}^n$.
- *Para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *chama-se* **coluna** j **da matriz** A *ao elemento* $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ *de* $\mathbb{K}^m$.
- *Ao elemento* a_{ij} *de* $\mathbb{K}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *chama-se* **entrada** (i, j) *ou* **elemento da posição** (i, j) *da matriz* A. *Por vezes, representa-se a entrada* (i, j) *da matriz* A *por* $A_{i,j}$.

Notação e terminologia:

- O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- O conjunto de todas as matrizes sobre $\mathbb{K}$ é representado por $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.
- Em geral, representaremos as matrizes por letras maiúsculas e as suas entradas pela mesma letra, minúscula ou maiúscula, com índices que indicam a respetiva posição na matriz. Havendo ambiguidade na identificação da posição da matriz, coloca-se uma virgula a separar o índice da linha e o índice da coluna. Por exemplo, escreveremos $a_{2,34}$ ou $A_{2,34}$ para indicar o elemento na linha 2 e coluna 34 da matriz A.

Matrizes

Notação e terminologia:

- Se
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$
escreve-se abreviadamente $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ou $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ou $A = [a_{ij}]_{\substack{i\,=\,1,\,...\,,\,m \\ j\,=\,1,\,...\,,\,n}}$. Quando o tipo da matriz for claro pelo contexto ou se não for importante para o estudo em questão, podemos escrever simplesmente $A = [a_{ij}]$.

- Uma matriz diz-se **real** ou **complexa** consoante os seus elementos sejam reais ou complexos.

Exemplo

No lançamento de um objeto foram registados, relativamente à altura e distância atingidos pelo objeto, os valores descritos na tabela seguinte:

$$\begin{array}{ll} \textit{altura} & \multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 100 & 200 & 300 & 450 \\ 253 & 337 & 395 & 451 \end{bmatrix}$} \\ \textit{distancia} & \end{array}$$

A tabela anterior é um exemplo de uma matriz do tipo 2×4.

Exemplo

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz real do tipo 3×2*, i.e.* $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$*.*

A linha 2 *da matriz* A *é o elemento* $(3, 4)$ *de* $\mathbb{R}^2$*.*

A coluna 2 *da matriz* A *é o elemento* $(0, 4, -1)$ *de* $\mathbb{R}^3$*.*

O elemento a_{32} *(situado na linha* 3 *e coluna* 2 *da matriz) é o real* -1*.*

Exemplo

A matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ *é uma matriz de ordem* 1×3.

Exemplo

Por $C = [c_{ij}]_{2\times 3}$, *onde* $c_{ij} = i^j$, *para* $i \in \{1,2\}$ *e* $j \in \{1,2,3\}$, *representa-se a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

Definição

*Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ diz-se **matriz nula de ordem** $m \times n$, e representa-se por $0_{m\times n}$ (ou apenas por 0, caso não haja ambiguidade), se, para todo $i \in \{1, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, ..., n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$.*

Exemplo

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Sejam $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. *Diz-se que as matrizes* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ *são* ***iguais***, *e escreve-se* $A = B$, *se* $m = p$, $n = q$ *e* $a_{ij} = b_{ij}$, *quaisquer que sejam* $i \in \{1, ..., m\}$ *e* $j \in \{1, ..., n\}$.

Exemplo

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$, *com* $b_{ij} = m.d.c.(i, j)$ *são matrizes iguais.*

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Diz-se que:*

- A *é uma* ***matriz linha*** *se* $m = 1$;
- A *é uma* ***matriz coluna*** *se* $n = 1$;
- A *é uma* ***matriz quadrada*** *se* $m = n$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna (do tipo 3×1) e a matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha (do tipo 1×4).

Matrizes

Notação e terminologia:

- É usual representar matrizes coluna e matrizes linha por letras minúsculas; além disso, é usual omitir o índice 1 que é comum a todos os elementos. Por exemplo,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

  representam uma matriz linha de ordem 4 e uma matriz coluna de ordem 3, respetivamente.

- O conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas do tipo $n \times n$ também se representa por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz A pertencente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz quadrada de ordem n ou, simplesmente, uma matriz de ordem n e pode representar-se por $A = [a_{ij}]_n$.

Apresentam-se seguidamente alguns conceitos relativos a matrizes quadradas.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *e* $k \in \{1, \ldots, n\}$. *Dá-se a designação de* ***submatriz principal de*** A ***de ordem*** k *a uma matriz quadrada de ordem* k *obtida de* A *retirando* $n - k$ *linhas da matriz* A, *digamos* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$, *e as* $n - k$ *colunas com os mesmos índices* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}$.
À submatriz principal de A *obtida por remoção das últimas* $n - k$ *linhas e das últimas* $n - k$ *colunas dá-se a designação de* ***submatriz principal primária de*** A ***de ordem*** k *e representa-se por* A_k.

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}).$$

Então a matriz A tem:

- *uma submatriz principal de ordem* 3*: a própria matriz A;*
- *três submatrizes principais de ordem* 2*:*

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

- *três submatrizes principais de ordem* 1*:* $[a_{11}]$, $[a_{22}]$ *e* $[a_{33}]$.

Tem-se $A_1 = [a_{11}]$, $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *e* $A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A = [a_{ij}]_n$ *uma matriz quadrada sobre* $\mathbb{K}$*. Os elementos* a_{ii}*,* $i \in \{1, ..., n\}$*, designam-se por* ***elementos principais de*** A*.*
Diz-se que:

- *os elementos* $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ *se dispõem na* ***diagonal principal de*** A*;*
- *os elementos* $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n1}$ *se dispõem na* ***diagonal secundária*** *de* A*;*
- *a* ***diagonal principal de*** A ***é não negativa*** *se, para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$*,* $a_{ii} \geq 0$*;*
- *a* ***diagonal principal de*** A ***é positiva*** *se, para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$*,* $a_{ii} > 0$*.*

Exemplo

Os elementos principais da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

são -1, 0 e 2 e os elementos que se dispõem na sua diagonal secundária são 1, 0 *e* -4.

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$ diz-se:

- ***triangular superior*** *se, para todos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,*

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***triangular inferior*** *se, para todos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,*

$$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***diagonal*** *se é simultaneamente triangular superior e triangular inferior, i.e., se, para todos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,*

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \ e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz triangular superior, B é uma matriz triangular inferior e C é uma matriz diagonal.

Notação: Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode representar-se abreviadamente por $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Exemplo

No exemplo anterior, tem-se $C = \mathrm{diag}(1, 0, 2, 3)$.

Definição

Uma matriz diagonal em que todos os elementos diagonais são iguais diz-se uma ***matriz escalar***.

Definição

*Dá-se a designação de **matriz identidade de ordem n**, e representa-se por I_n, à matriz escalar de ordem n em que todos os elementos diagonais são iguais a 1, i.e., se para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se*

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Usualmente, o elemento (i, j) da matriz I_n é representado por δ_{ij}, designado por **símbolo de Kronecker**.

Exemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operações com matrizes

Nesta secção definem-se algumas operações envolvendo matrizes: adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e multiplicação de matrizes.

Adição de matrizes

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Chama-se* ***matriz soma de*** A ***e*** B*, e representa-se por* $A + B$*, à matriz cuja entrada* (i, j) *é o elemento* $a_{ij} + b_{ij}$*, i.e.,*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} .$$

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. *Então*

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 & 3+4 \\ 2+2 & 1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Então*

i) $A + B = B + A$. (*comutatividade da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$. (*associatividade da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

iii) $0_{m\times n} + A = A = A + 0_{m\times n}$.

($0_{m\times n}$ *elemento neutro da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

iv) *existe uma matriz* A' *tal que* $A + A' = 0_{m\times n} = A' + A$.

(*existência de elemento oposto, para a adição, de qualquer* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

Demonstração.

i) Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. As matrizes $A + B$ e $B + A$ são ambas do tipo $m \times n$. Além disso,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

$$B + A = [b_{ij} + a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

e, como a adição em $\mathbb{K}$ é comutativa, temos $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

Demonstração (continuação).

iv) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e seja $A' = [a'_{ij}]$ a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $a'_{ij} = -a_{ij}$. Então $A + A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e temos

$$A + A' = [a_{ij} + a'_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

onde $a_{ij} + a'_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$, para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $A + A' = 0_{m\times n}$. Por i), temos $A' + A = 0_{m\times n}$.

Notação:

- Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, podemos escrever, sem ambiguidade, $A+B+C$ para representar $(A+B)+C$ e $A+(B+C)$, atendendo à associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- A matriz A' do teorema anterior representa-se por $-A$.
- Dadas duas matrizes A e B com a mesma ordem, representa-se por $A-B$ a soma de matrizes $A+(-B)$.

Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Chama--se* ***produto do escalar*** α ***pela matriz*** A, *e representa-se por* αA, *a matriz de* $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ *cujo elemento* (i, j) *é* αa_{ij}, *i.e.*,

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *então* $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Então*

i) $(\alpha\beta)\,A = \alpha\,(\beta A)$.

ii) $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$.

iii) $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

iv) $0A = 0_{m\times n}$.

v) $1A = A$.

vi) $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

Demonstração.

i) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então $(\alpha\beta)A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e, uma vez que $(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, também temos $\alpha(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Verifica-se ainda que

$$(\alpha\beta)A = [(\alpha\beta)a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

$$\alpha(\beta A) = [\alpha(\beta a_{ij})]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

e, considerando que o produto de elementos de $\mathbb{K}$ é associativo, tem-se $(\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij})$, para quaisquer $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. Portanto, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.$\square$

Multiplicação de matrizes

Definição

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_ij] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$.
Designa-se por ***produto de*** A ***por*** B*, e representa-se por* AB*, a matriz de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *cuja entrada* (i,j) *é* $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$*, isto é,*

$$\begin{aligned} AB &= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \\ &= \left[a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{i\,p-1} b_{p-1\,j} + a_{ip} b_{pj}\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}. \end{aligned}$$

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então AB é a matriz do tipo 2×4 sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{ll} (AB)_{11} = 0 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1, & (AB)_{12} = 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\ (AB)_{13} = 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0, & (AB)_{14} = 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\ (AB)_{21} = 2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 = 8, & (AB)_{22} = 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 7, \\ (AB)_{23} = 2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 = 4, & (AB)_{24} = 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 7, \end{array}$$

i.e.,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Observação: Contrariamente ao que sucede com a adição de matrizes, a multiplicação de matrizes não é, em geral, comutativa, tal como se pode verificar nos exemplos que a seguir se apresentam.

Exemplo

Considerando as matrizes A e B do exemplo anterior, concluímos que BA não está definido, pois o número de colunas de B não coincide com o número de linhas de A.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} = BA.$$

Definição

*Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Diz-se que as matrizes A e B são **comutáveis** ou **permutáveis** se $AB = BA$.*

Matrizes

Teorema

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* B, C *matrizes tais que as operações a seguir indicadas estejam definidas. Então*

i) $(AB)\,C = A\,(BC)$.
(*associatividade da multiplicação*)

ii) $A\,(B + C) = AB + AC$.
(*distributividade, à esquerda, da multiplicação em relação à adição*)

iii) $(A + B)\,C = AC + BC$.
(*distributividade, à direita, da multiplicação em relação à adição*)

iv) $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)$.

v) $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$, $A0_{n\times p} = 0_{m\times p}$.

vi) $AI_n = A$, $I_mA = A$.

vii) *se* $m = n$, $\quad I_nA = AI_n = A$.

Demonstração.

Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. As matizes $A(BC)$ e $(AB)C$ são ambas do tipo $m \times q$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
(A(BC))_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(BC)_{kj} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{t=1}^{p} b_{kt}c_{tj} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik}b_{kt}c_{tj},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((AB)C))_{ij} = \textstyle\sum_{t=1}^{p} (AB)_{it}C_{tj} &= \textstyle\sum_{t=1}^{p} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kt})c_{tj} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik}b_{kt}c_{tj},
\end{aligned}$$

pelo que $(A(BC))_{ij} = ((AB)C))_{ij}$. Logo, $A(BC) = (AB)C$. $\square$

Observação: Sejam A, B e C matrizes tais que os produtos $(AB)C$ e $A(BC)$ estão definidos. Então, atendendo à associatividade da multiplicação, podemos escrever ABC para representar qualquer um dos produtos indicados.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Atendendo à definição de multiplicação de matrizes, é simples concluir que a multiplicação de A por A está definida se e só se $m = n$. Neste caso, faz sentido a definição seguinte.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Chamamos* **potência de expoente** k **de** A*, com* $k \in \mathbb{N}_0$*, à matriz de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, que representamos por* A^k*, definida por*

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$*,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *e* $k, l \in \mathbb{N}_0$*. Então*

i) $A^k A^l = A^{k+l}$.

ii) $(A^k)^l = A^{kl}$.

Matrizes invertíveis

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. *Uma matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *diz-se* ***invertível*** *se existe uma matriz* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tal que* $AX = XA = I_n$.

Matrizes

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *é invertível, pois existe* $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *tal que*

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e}$$

$$XA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então existe uma e uma só matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA' = I_n = A'A$.

Demonstração.

(Existência) Se A é uma matriz invertível, então existe uma matriz A' tal que $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$.

(Unicidade) Sejam X e Y matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$. Então

$$X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y. \qquad \square$$

Definição

*Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. A única matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n = AA'$ designa-se por **matriz inversa** de A e representa-se por A^{-1}.*

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Do exemplo anterior sabe-se que A é invertível e tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrizes

Nem toda a matriz quadrada é invertível.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *não é invertível. Com efeito, se admitirmos que existe* $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *tal que* $AX = XA = I_2$, *tem-se*

$$AX = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a-c & -b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{bmatrix} = XA,$$

pelo que $0 = c - d = 1$. *(contradição).*

Definição

Uma matriz quadrada que não admite inversa diz-se uma ***matriz singular*** *ou* ***não invertível****.*

Dadas matrizes $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diz-se que A' é a inversa de A se ambas as igualdades $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$ são satisfeitas. Contudo, sabendo que A é invertível, pode-se concluir que A' é a inversa de A verificando apenas uma das igualdades indicadas: $AA' = I_n$ ou $A'A = I_n$.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível e $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n$ (respectivamente, $AA' = I_n$). Então $A' = A^{-1}$ e, portanto, $AA' = I_n$ (respectivamente, $A'A = I_n$).

Demonstração.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e admitamos que A é uma matriz invertível de ordem n e que A' é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A'A = I_n$. Então, como

$$A'A = I_n \Rightarrow A'AA^{-1} = I_nA^{-1} \Rightarrow A'I_n = A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1},$$

temos $A' = A^{-1}$ e, portanto, $AA' = I_n$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível e $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n$ (respectivamente, $AA' = I_n$). Então $A' = A^{-1}$ e, portanto, $AA' = I_n$ (respectivamente, $A'A = I_n$).

Demonstração.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e admitamos que A é uma matriz invertível de ordem n e que A' é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A'A = I_n$. Então, como

$$A'A = I_n \Rightarrow A'AA^{-1} = I_nA^{-1} \Rightarrow A'I_n = A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1},$$

temos $A' = A^{-1}$ e, portanto, $AA' = I_n$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Se* $AB = I_n$ *e* $CA = I_n$*, então* $B = C$*,* A *é invertível e* $A^{-1} = B = C$*.*

Demonstração.

Admitamos que $AB = I_n$ e $CA = I_n$. Então

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

Portanto, A é invertível e $A^{-1} = B$. $\square$

Matrizes

Os dois resultados anteriores podem ser generalizados. De facto, se A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = I_n$, então também se tem $BA = I_n$, pelo que A e B são matrizes invertíveis e $A = B^{-1}$ e $B = A^{-1}$. A prova desta generalização é apresentada no próximo capítulo.

A respeito de matrizes invertíveis prova-se também o resultado seguinte.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *matrizes invertíveis. Então:*

i) A^{-1} *é invertível e* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

ii) AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração.

$i)$ Imediata pela própria definição de matriz invertível.

$ii)$ Como

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

conclui-se que a inversa de AB existe e é a matriz $B^{-1}A^{-1}$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *matrizes invertíveis. Então:*

i) A^{-1} *é invertível e* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

ii) AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração.

$i)$ Imediata pela própria definição de matriz invertível.

$ii)$ Como

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

conclui-se que a inversa de AB existe e é a matriz $B^{-1}A^{-1}$. $\square$

Transposição e conjugação

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Chama-se* ***transposta de*** A, *e representa-se por* A^T, *à matriz de* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *cuja entrada* (i,j) *é* a_{ji}, *i.e., tal que* $A^T = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$, *onde* $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, *então* $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Teorema

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ tais que as operações seguintes estejam definidas. Então

i) $\left(A^T\right)^T = A$.
ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
iv) $(AB)^T = B^T A^T$.
v) $(A^k)^T = (A^T)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

Demonstramos a propriedade iv), ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

iv) Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p \times n}$. Então $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são ambas matrizes do tipo $n \times m$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, tem-se

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = (AB)_{ji} = ((AB)^T)_{ij}.$$

Logo, $(AB)^T = B^T A^T$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz invertível, então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração.

Pela alínea $iv)$ da proposição anterior, tem-se

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = (I_n)^T = I_n \quad \text{e}$$
$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = (I_n)^T = I_n.$$

Logo, a matriz A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz invertível, então A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração.

Pela alínea $iv)$ da proposição anterior, tem-se

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = (I_n)^T = I_n \quad \text{e}$$
$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = (I_n)^T = I_n.$$

Logo, a matriz A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\square$

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se ***conjugada de*** *A, e representa-se por $\overline{A}$, à matriz de $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $j \in \{1, ..., n\}$, $(\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$.*

Define-se a ***transconjugada*** *de A, e representa-se por A^*, como sendo a transposta da conjugada de A.*

Observação: Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tem-se $\overline{A} = A$ e, portanto, $A^* = A^T$.

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 3 \\ 2+3i & 4 & i \\ 0 & 0 & 6-4i \end{bmatrix}.$$

Então

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3 \\ 2-3i & 4 & -i \\ 0 & 0 & 6+4i \end{bmatrix} \quad e \quad A^* = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -i & 6+4i \end{bmatrix}.$$

Teorema

Sejam A e B matrizes sobre $\mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, sempre que as operações seguintes estejam definidas, tem-se:

i) $(A^*)^* = A$;

ii) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

iii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;

iv) $(AB)^* = B^* A^*$;

v) $\left(A^k\right)^* = (A^*)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

Matrizes simétricas e matrizes hermíticas

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:

i) ***simétrica*** *se $A^T = A$;*

ii) ***antissimétrica*** *se $A^T = -A$.*

Exemplo

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica, mas a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

não é, uma vez que os elementos b_{13} e b_{31} não são iguais.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Então*

i) $A + A^T$ *é uma matriz simétrica.*

ii) $A - A^T$ *é uma matriz antissimétrica.*

Demonstração.

Pelas alíneas $i)$ e $ii)$ do teorema anterior, tem-se

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T,$$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T).$$

Logo, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Então*

i) $A + A^T$ *é uma matriz simétrica.*

ii) $A - A^T$ *é uma matriz antissimétrica.*

Demonstração.

Pelas alíneas $i)$ e $ii)$ do teorema anterior, tem-se

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T,$$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T).$$

Logo, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica. $\square$

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica.

Demonstração.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tem-se

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Pela proposição anterior, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz anstissimétrica. Logo, $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é uma matriz simétrica e $\frac{1}{2}(A - A)^T$ é uma matriz antissimétrica. Portanto, toda a matriz A é a soma de matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz simétrica e invertível, então A^{-1} é uma matriz simétrica.

Demonstração.

Se A é uma matriz simétrica, temos $A^T = A$. Então,

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}$$

e, portanto, A^{-1} é uma matriz simétrica. $\square$

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:

- ***hermítica*** *se $A^* = A$.*
- ***anti-hermítica*** *se $A^* = -A$.*

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2+3i \\ 0 & 2 & -i \\ 2-3i & i & 6 \end{bmatrix}$ *é uma matriz hermítica.*

Matrizes

No estudo de matrizes simétricas e de matrizes hermíticas destacam-se algumas matrizes especiais, as matrizes simétricas (hermíticas) definidas positivas, atendendo às suas aplicações práticas (tais como, por exemplo, estudo de cónicas e quádricas, estudo de máximos e mínimos).

Para simplificar a notação, no texto que se segue identificamos uma matriz $[a_{11}] \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{K})$ com o elemento a_{11}, sempre que nos referimos a operações e afirmações envolvendo o único elemento da matriz.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica. Diz-se que a matriz A é:

- ***simétrica semi-definida positiva*** *se $x^T A x \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.*
- ***simétrica definida positiva*** *se $x^T A x > 0$, para todo $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n\times 1}\}$.*

Exemplo

Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a matriz I_n é definida positiva, pois, para qualquer $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \setminus \{0_{n\times 1}\}$, $x^T I_n x = x^T x > 0$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ e $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Tem-se $x^T A x \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{C})$ e identifica-se $x^T A x = [c_{11}]$ com o número c_{11}. Se A é hermítica, tem-se $x^T A x \in \mathbb{R}$; de facto,

$$\overline{x^T A \overline{x}} = \overline{x^T}\,\overline{A\overline{x}} = \overline{x}^T A^T x = \overline{x}^T A^T (x^T)^T = (x^T A \overline{x})^T = x^T A \overline{x}.$$

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ uma matriz hermítica. Diz-se que a matriz A é:

- ***hermítica semi-definida positiva*** *se $x^* A x \geq 0$, para todo $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$.*
- ***hermítica definida positiva*** *se $x^* A x > 0$, para todo $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n\times 1}\}$.*

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*) e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *uma matriz simétrica (resp. hermítica).*

1. *Se* A *é uma matriz simétrica (resp. hermítica) semi-definida positiva, então a diagonal principal de* A *é não negativa.*
2. *Se* A *é uma matriz simétrica (resp. hermítica) definida positiva, então a diagonal principal de* A *é positiva.*

Demonstração.

1., 2.: Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica semi-definida (resp. definida) positiva. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja $e_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que $(e_i)_{j1} = 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ e $(e_i)_{i1} = 1$. Então $e_i^T A e_i = [a_{ii}]$ e o resultado segue da definição de matriz semi-definida (resp. definida) positiva.

A prova é similar quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é uma matriz hermítica semi-definida (resp. definida) positiva. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes simétricas (resp. hermíticas) e $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Se A e B são matrizes simétricas (resp. hermíticas) definidas positivas, então $A + B$ é simétrica (resp. hermítica) definida positiva.*
2. *Se A é simétrica (resp. hermítica) definida positiva e $\alpha > 0$, então αA é simétrica (resp. hermítica) definida positiva.*

Matrizes ortogonais e matrizes unitárias

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:

- ***ortogonal*** *se $AA^T = I_n = A^T A$.*
- ***unitária*** *se $AA^* = I_n = A^* A$.*

Observação: Se A é uma matriz ortogonal (resp. unitária), então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$ (resp. $A^{-1} = A^*$).

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *é uma matriz ortogonal, pois*

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Se* A *é uma matriz ortogonal (resp. unitária), então* A^{-1} *é também uma matriz ortogonal (resp. unitária).*
2. *Se* A *e* B *são matrizes ortogonais (resp. unitárias), então* AB *é ortogonal (resp. unitária).*

Demonstração.

1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz ortogonal, temos

$$AA^T = A^T A = I_n.$$

Então

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

e

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I_n^{-1} = I_n,$$

pelo que A^{-1} é também uma matriz ortogonal.

2. Exercício. $\square$

Matrizes elementares

Nesta secção o estudo é dedicado a uma classe especial de matrizes, as *matrizes elementares*.

Para definirmos esta classe de matrizes, começamos por definir algumas operações que se podem efetuar sobre as linhas (colunas) de uma matriz, designadas por *operações elementares sobre linhas* (*colunas*).

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Definem-se como ***operações elementares sobre linhas*** *da matriz A as seguintes operações:*

i) *troca da linha i com a linha j;*
ii) *multiplicação da linha i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;*
iii) *substituição da linha i pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$,*

Analogamente, define-se **operação elementar sobre as colunas** de uma matriz, bastando substituir "linha" por "coluna" na definição anterior.

Matrizes

Ao longo do texto adotaremos as seguintes notações para as operações elementares sobre linhas:

- $A \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida da matriz A efetuando a troca das suas linhas i e j;
- $A \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A multiplicando a linha i da matriz A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
- $A \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A substituindo a linha i da matriz A pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$.

Para representar as operações elementares por colunas adota-se notação semelhante à anterior, mas escreve-se c_i para indicar a coluna i.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se a matriz* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *pode ser obtida da matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *efetuando uma operação elementar sobre linhas (resp., colunas), então a matriz* A *também pode ser obtida de* B *efetuando uma operação elementar sobre linhas (resp., colunas).*

Demonstração.

No caso das operações elementares por linhas, basta ter em conta que:

- se $A \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} B$, então $B \underset{l_j \leftrightarrow l_i}{\longrightarrow} A$;
- se $A \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} B$, com $\alpha \neq 0$, então $B \underset{l_i \to \frac{1}{\alpha} l_i}{\longrightarrow} A$;
- se $A \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} B$, então $B \underset{l_i \to l_i - \beta l_j}{\longrightarrow} A$.

De forma análoga, justifica-se o resultado para o caso das operações elementares por colunas. $\square$

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é ***equivalente por linhas (resp., por colunas)*** *a B se B pode ser obtida a partir de A efetuando um número finito de operações elementares sobre as linhas (resp., colunas) de A.*

Com base no teorema anterior é fácil concluir que se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas (resp., colunas) a $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, então B é equivalente por linhas (resp., colunas) a A e, por isso, podemos dizer apenas que A e B são equivalentes por linhas.

O resultado seguinte mostra-nos que podemos efetuar uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz A premultiplicando-a (ou seja, multiplicando A à esquerda) por uma matriz adequada.

Teorema

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Então:*

1. *Se* E *é a matriz quadrada de ordem* m *obtida da matriz identidade* I_m *trocando as suas linhas* i *e* j, *então a matriz* EA *é obtida da matriz* A *trocando as suas linhas* i *e* j.
2. *Se* E *é a matriz de ordem* m *obtida da matriz identidade* I_m *multiplicando a linha* i *por* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, *então* EA *é a matriz obtida de* A *multiplicando a linha* i *por* α.
3. *Se* E *é a matriz quadrada de ordem* m *obtida da matriz identidade* I_m *substituindo a linha na posição* i *pela sua soma com* β *vezes a linha na posição* j, *então* EA *é a matriz obtida da matriz* A *substituindo a linha na posição* i *pela sua soma com* β *vezes a linha na posição* j, $i \neq j$.

Analogamente ao que acontece com as operações elementares sobre linhas, uma operação elementar sobre as colunas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida posmultiplicando A (ou seja, multiplicando A à direita) por uma matriz obtida da matriz I_n efetuando nas suas colunas a mesma operação elementar que se pretende efetuar na matriz A.

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos **matriz elementar sobre linhas (resp. colunas)** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a toda a matriz que pode ser obtida da matriz identidade I_n por aplicação de uma operação elementar sobre as suas linhas (resp. colunas).*

Teorema

Toda a matriz elementar sobre linhas (resp. colunas) é também uma matriz elementar sobre colunas (resp. linhas).

Demonstração.

Facilmente se prova o resultado enunciado. De facto, tem-se:

- $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \leftrightarrow c_j}{\longrightarrow} E$;
- $I_n \underset{l_i \rightarrow \alpha l_i}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \rightarrow \alpha c_i}{\longrightarrow} E$;
- $I_n \underset{l_i \rightarrow l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \rightarrow c_i + \beta c_j}{\longrightarrow} E$;

$\square$

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível e, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se:

1) *Se $i \neq j$ e $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E^{-1}$;*
2) *Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $I_n \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \to \frac{1}{\alpha} l_i}{\longrightarrow} E^{-1}$;*
3) *Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ e $I_n \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \to l_i + (-\beta) l_j}{\longrightarrow} E^{-1}$*

Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

*Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma **matriz em forma de escada** se satisfaz as seguintes condições*

- *se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;*
- *se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.*

*Ao primeiro elemento não nulo de cada linha de uma matriz em forma de escada dá-se a designação de **pivot**.*

Matrizes

Exemplo

1. *As matrizes* $\mathbf{0}_{m\times n}$ *e* I_n *são matrizes em forma de escada.*
2. *A matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   está em forma de escada.

Exemplo (continuação.

3. A matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
embora muito parecida com a matriz anterior, não está em forma de escada (o primeiro elemento não nulo na linha 3 está na coluna 4 e a linha 4 não começa com 4 elementos nulos).
4. A matriz
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
não está em forma de escada (o primeiro elemento não nulo na linha 1 está na coluna 3 e a linha 2 não começa com 3 elementos nulos).

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. *Toda a matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada.*

Demonstração.

Prova por indução sobre m. $\square$

Apresenta-se seguidamente um processo que permite obter uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a uma dada matriz. A este processo dá-se a designação de **método de eliminação de Gauss**.

Método de eliminação de Gauss

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então a matriz A pode ser reduzida a uma matriz em escada, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo.

Para k de 1 até m:

i) Procurar a primeira coluna com elementos não nulos na linha k ou abaixo desta.

ii) Se não existir a coluna indicada em i), dá-se o processo por terminado.

iii) Caso exista a coluna referida em i) e se j_k é essa coluna, $j_k \in \{1, ..., n\}$, assegura-se que o elemento na linha k desta coluna é não nulo, trocando, se necessário, a linha k com alguma linha que esteja abaixo; representemos por $a^{(k)}_{kj_k}$ esse elemento.

iv) Para cada $i \in \{k+1, ..., m\}$, adiciona-se à linha i a linha k multiplicada por $-\frac{a^{(k)}_{ij_k}}{a^{(k)}_{kj_k}}$, onde $a^{(k)}_{ij_k}$ representa o elemento na linha i e coluna j_k da matriz que foi obtida após a aplicação dos passos anteriores.

Terminado o processo a matriz que se obtém é uma matriz em escada.

Matrizes

Aos elementos $a^{(1)}_{1j_1}, a^{(2)}_{2j_2}, \ldots$ referidos no processo anterior dá-se a designação de ***pivots da eliminação***.

Exemplo

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss a esta matriz, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Exemplo (continuação).

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 4l_2 \\ l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{3}{4}l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A última matriz obtida é uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas à matriz A.

Observação: Toda a transformação que pode ser feita numa matriz por meio de operações elementares sobre linhas também pode ser realizada por meio de operações elementares sobre colunas. Por conseguinte, toda a matriz pode ser transformada numa matriz em escada por meio de operações elementares sobre colunas.

O método de eliminação de Gauss, quando aplicado a uma matriz A, permite obter uma matriz em escada equivalente por linhas à matriz inicial. Porém, a matriz em escada que é obtida no final do processo pode não ser sempre a mesma, uma vez que que há alguma flexibilidade na escolha das transformações elementares a efetuar sobre a matriz A (nomeadamente, na escolha das linhas que se trocam para colocar um elemento na posição de pivot). No entanto, embora não seja possível garantir a unicidade da matriz em escada que é obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss, prova-se que o número de pivots usados no método de eliminação de Gauss, que é igual ao número de linhas não nulas da matriz em escada obtida de A, é univocamente determinado pelas entradas da matriz A. Com efeito, quaisquer matrizes em escada equivalentes por linhas a uma matriz A têm o mesmo número de linhas não nulas, pelo que faz sentido considerar a definição seguinte.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Designa-se por ***característica*** *da matriz A, e representa-se por $car(A)$, o número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada que seja equivalente por linhas a A.*

Matrizes

Exemplo

Como vimos no exemplo anterior, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é equivalente por linhas à seguinte matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, como U tem 3 linhas não nulas, temos $car(A) = 3$.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Diz-se que* A *é uma* ***matriz em forma de escada reduzida*** *(ou que está em forma de escada reduzida) se satisfaz as seguintes condições:*

- *A é uma matriz em escada;*
- *se uma linha tem elementos não nulos, então o primeiro elemento não nulo da linha é igual a* 1*;*
- *se o primeiro elemento não nulo de uma linha* i *está na coluna* j*, então todos os elementos da coluna* j*, com excepção do elemento que está na linha* i*, são iguais a zero.*

Exemplo

1. *As matrizes* $0_{m\times n}$ *e* I_n *são matrizes em forma de escada reduzida.*
2. *A matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   está em forma de escada reduzida.

Exemplo (continuação).

3. A matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
embora muito parecida com a matriz anterior, não está em forma de escada reduzida.

4. A matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ não está em forma de escada reduzida.

Seguindo uma prova similar à do teorema anterior, prova-se que toda a matriz pode ser transformada numa matriz em forma de escada reduzida.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada reduzida.

Ao processo de transformar uma dada matriz numa matriz em forma de escada reduzida dá-se a designação de ***condensação*** da matriz. O método a seguir descrito para condensação de uma matriz é designado por método de ***eliminação de Gauss-Jordan***, por ser uma extensão do método de eliminação de Gauss.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se A é a matriz nula, então a matriz já está na forma de escada reduzida. Caso A não seja a matriz nula, então A pode ser transformada numa matriz em escada reduzida, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo: aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A obtemos uma matriz em escada A' equivalente a A. Uma vez obtida a matriz em escada A', anulam-se todos os elementos não nulos que estejam acima dos pivots ${a_{kj_k}}^{(k)}$ da matriz A'; para tal, para cada $i \in \{1, \dots, k-1\}$, adiciona-se à linha i da matriz A' a linha k multiplicada por $-\frac{a_{ij_k}^{(k)}}{{a_{kj_k}}^{(k)}}$. Finalmente, multiplica-se cada linha não nula da matriz pelo inverso do pivot dessa linha. Terminado o processo, obtém-se uma matriz em escada reduzida e equivalente por linhas à matriz A.

É conveniente observar que uma matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida - a esta matriz em escada reduzida dá-se a designação de **forma de Hermite** de A.

Exemplo

Consideremos a matriz a seguir indicada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método descrito anteriormente de forma a transformar a matriz A numa matriz em forma de escada reduzida, obtemos

Exemplo (continuação).

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 12l_4 \\ l_2 \to l_2 + 2l_4 \\ l_1 \to l_1 - 4l_4}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \to$$

Exemplo (continuação).

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + \frac{1}{4} l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to -\frac{1}{4} l_2 \\ l_4 \to 2 l_4}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A última matriz obtida é a forma de Hermite de A.

Observação: A transformação de uma matriz A numa matriz em forma de escada reduzida também pode ser obtida por meio de operações elementares sobre colunas.