

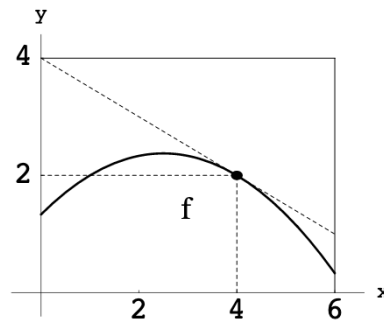


Nome:

Número:

**Justifique, convenientemente, todas as respostas.**

Exercício 1. (2 valores) A figura seguinte representa o gráfico de uma função  $f$  e da reta tangente a esse gráfico no ponto  $(x, y) = (4, 2)$ . Sendo  $g(x) = [f(2x + 3)]^3$ , qual o valor da derivada  $g'(\frac{1}{2})$ ?



Exercício 2. (2.5 valores) Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - e^{x^2} + 3$ .

- Determine os limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Determine o número de zeros de  $f$ .

Exercício 3. (2 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

- Calcule  $\int \frac{x + (\arcsen(3x))^2}{\sqrt{1 - 9x^2}} dx$ .
- Calcule  $\int_0^{\sqrt{3}/2} \arcsen x dx$ .

Exercício 4. (2 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

- Calcule  $\int \frac{2x^2 + x + 3}{(x - 1)^2(x + 2)} dx$ .
- Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg(\frac{1}{x})}{\sen(\frac{1}{x})}$ .

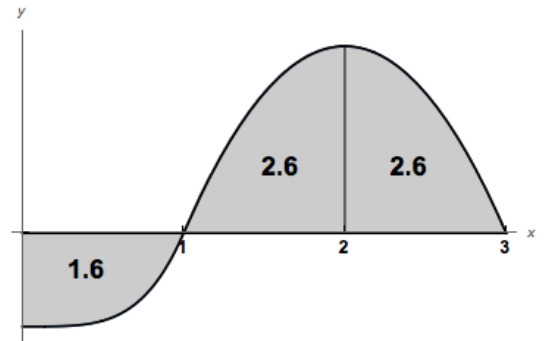
Exercício 5. (2 valores) Responda a uma e uma só das duas questões seguintes:

- Calcule o integral  $\int_{1/2}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$ , efetuando a substituição  $x = \sen^2 t$ .
- Calcule o integral  $\int_{1/2}^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} dx$ , efetuando a substituição  $x = \frac{1}{t}$ .

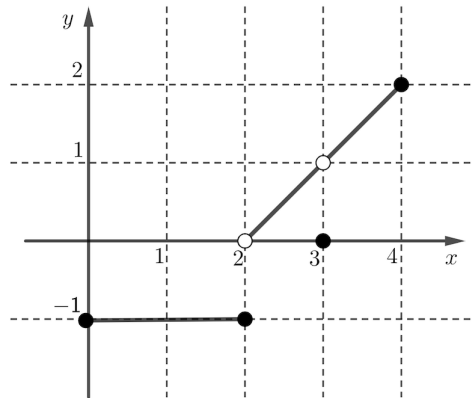
Exercício 6. (3 valores) Na figura estão assinaladas três regiões limitadas entre o gráfico de uma função  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ , derivável, e o eixo das abscissas, que correspondem às abscissas dos intervalos  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$  e  $[2, 3]$ , respetivamente. A área de cada uma destas regiões vem inscrita no seu interior.

Nestas condições, considere a função  $F : [-1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $F(x) = \int_2^{\frac{1+x}{3}} f(t) dt$ .

- Determine os valores de  $F(-1)$ ,  $F(2)$ ,  $F(5)$  e  $F(8)$ .
- Determine expressões para  $F'(x)$  e  $F''(x)$ .
- Represente  $F$  graficamente.



Exercício 7. (3.5 valores) Considere a função  $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico se apresenta na figura seguinte e seja  $F : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .



- Determine o conjunto dos zeros da função  $F$ .
- Determine, caso existam,  $F'(1)$  e  $F'(3)$ .
- Apresente, ou justifique que não existe, uma primitiva da função  $f$ .

Exercício 8. (2 valores) Estabeleça um integral (ou soma de integrais) que dê a área da região

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq -2 \wedge 1 \leq y \leq 2 - x^2\},$$

fazendo previamente um esboço da região  $R$ .

Exercício 9. (1 valor) Apresente um exemplo, **justificando**, de duas funções  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integráveis, tais que  $f(x) \neq g(x)$ , para todo  $x \in [-1, 1]$  e  $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 g(x) dx$ .

FIM