Sistemas de equações lineares **Exercícios**

1. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tal que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

2. Resolva os sistemas seguintes por substituição (direta ou inversa).

(a) $\left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +z & = 1 \\ & 4y & -2z & = 2 \\ & & 3z & = 3 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 3 \\ & -3x_2 & +x_3 & -2x_4 & = -3 \\ & & 2x_3 & +5x_4 & = -3 \\ & & & -7x_4 & = -7 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rrrl} 2x_1 & & & = 2 \\ 4x_1 & -2x_2 & & = 4 \\ 3x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 1 \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{rrrrl} x & & & & = 1 \\ 1.5x & +0.25y & & & = 1.25 \\ x & +1.5y & -4z & & = -0.5 \\ 4x & +y & +2z & +2w & = 5 \end{array}\right.$

3. Para cada um dos sistemas apresentados a seguir, comece por escrever a matriz ampliada do sistema. Use o método de eliminação de Gauss para transformar a matriz ampliada numa matriz triangular superior, resolvendo em seguida o sistema equivalente ao sistema inicial.

(a) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & & +z & = 1 \\ & 2y & +z & = 1.5 \\ x & -y & & = 0.25 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 6 \\ 4x & +5y & -z & = 2 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rrrl} x & -3y & +z & = 2 \\ 2x & -4y & +3z & = 7 \\ -3x & +y & +2z & = 9 \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & = 6 \\ x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = -1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 2 \end{array}\right.$

(e) $\left\{\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & -3x_3 & = 3 \\ -2x_1 & -x_2 & & = -4 \\ 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = 7 \end{array}\right.$ (f) $\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -y & +z & -w & = 2 \\ x & +2y & -3z & & = 0 \\ 3x & +y & & -w & = 6 \\ -2x & +3y & +z & +3w & = -2 \end{array}\right.$

4. Verifique que os sistemas

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +3y & -11z & = -4 \\ 3x & -2y & +3z & = 5 \\ -x & +8y & -25z & = -3 \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{rrrl} & 5y & +2z & = 5 \\ x & +y & & = 2 \\ -x & +4y & +2z & = 1 \end{array}\right.$$

são impossíveis.

5. Use o método de eliminação de Gauss para resolver o sistema tridiagonal

$$\begin{cases} x & -y & & & & = 1 \\ -x & +2y & -z & & & = 0 \\ & -y & +2z & -w & & = 1 \\ & & -z & +2w & -u & = 0 \\ & & & -w & +2u & = 0 \end{cases}.$$

6. Dado o sistema

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 2x_1 & +kx_2 & +6x_3 & = 6 \\ -x_1 & +3x_2 & +(k-3)x_3 & = 0 \end{cases},$$

resolva-o para os seguintes valores de k:

(a) $k = -4$ (b) $k = 0$ (c) $k = 4$

7. Em cada caso, encontre condições sobre os números a, b e c para que o sistema apresentado não tenha solução, tenha uma única solução ou um número infinito de soluções.

(a) $\begin{cases} ax_1 & +x_2 & = -1 \\ 2x_1 & +x_2 & = b \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = a \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & = b \\ x_1 & -5x_2 & +7x_3 & = c \end{cases}$

8. Apresente um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, com quatro equações e quatro incógnitas que seja

(a) possível e determinado.
(b) possível e indeterminado.
(c) impossível.

9. Verifique que $\boldsymbol{x} = (1, 4, 1, 1)$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = -3 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}.$$

Encontre todas as soluções do sistema.

10. Resolva os dois sistemas

$$\begin{cases} x & +2y & -2z & = 1 \\ 2x & +5y & +z & = 9 \\ x & +3y & +4z & = 9 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x & +2y & -2z & = 9 \\ 2x & +5y & +z & = 9 \\ x & +3y & +4z & = -2 \end{cases}$$

simultaneamente usando operações elementares numa matriz ampliada 3×5 e substituição inversa duas vezes.

11. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada tem a forma

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right].$$

Para que valores de a o sistema tem uma única solução?

12. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right].$$

Para que valores de a e b o sistema

(a) tem uma infinidade de soluções?

(b) é impossível?

(c) tem solução única?

13. Considere um sistema de equações lineares cuja matriz ampliada é a matriz

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \end{array}\right].$$

(a) O sistema pode ser impossível?

(b) Para que valores de β o sistema tem uma infinidade de soluções?

14. Considere um sistema da forma

$$\begin{cases} -m_1x & + & y & = b_1 \\ -m_2x & + & y & = b_2 \end{cases}$$

onde m_1, m_2, b_1 e b_2 são constantes.

(a) Mostre que o sistema tem uma única solução se $m_1 \neq m_2$.

(b) Se $m_1 = m_2$, mostre que o sistema só é possível se $b_1 = b_2$.

(c) Interprete geometricamente os resultados.

15. Seja (c_1, c_2) uma solução do sistema 2×2

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = 0 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = 0 \end{cases}$$

onde a_{11}, a_{21}, a_{12} e a_{22} são constantes reais.

Mostre que, qualquer que seja o número real α, o par $(\alpha c_1, \alpha c_2)$ é também uma solução.

16. Determine os valores de h tais que a matriz apresentada é a matriz ampliada de um sistema possível.

(a) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 4 & 2 \\ -3 & h & -1 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & h & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{array}\right]$ (c) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & h \end{array}\right]$ (d) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 1 \\ h & 6 & -2 \end{array}\right]$

17. Diga se cada um dos seguintes sistemas de equações lineares é possível e, em caso afirmativo, indique se é determinado ou indeterminado.

(a) $\begin{cases} x & +2y & +z & & = 0 \\ x & +y & +3z & +w & = 0 \\ & -y & +2z & +w & = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x & +y & -z & = 1 \\ & y & & = 1 \\ x & +4y & +2z & = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x & -2y & +3z & = 1 \\ 2x & & +6z & = 6 \\ -x & +3y & -3z & = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x & +y & -z & = 0 \\ & y & +z & = 0 \\ x & +4y & +2z & = 0 \end{cases}$

18. Resolva o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

19. Considere o sistema de equações lineares cuja matriz dos coeficientes é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e cujo vetor dos termos independentes é $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

    (a) Verifique que $\boldsymbol{s_1} = \big(-1, 1, 1, 2\big)$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

    (b) Resolva o sistema homogéneo $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

    (c) Observe que se $\boldsymbol{s_h}$ é uma solução do sistema homogéneo, então $\boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{s_h}$ é uma solução do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Apresente outras soluções do sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

20. Use o método de eliminação de Gauss para verificar que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é invertível.

21. Calcule, caso exista, a inversa de cada uma das matrizes apresentadas a seguir.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

    (d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ (f) $F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

22. Utilize o exercício anterior para resolver os seguintes sistemas:

    (a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 7y = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - z = 1 \\ -x + y - z = 2 \\ -x + 2z = 7 \end{cases}$

    (d) $\begin{cases} x - z = 5 \\ -x + y - z = 4 \\ -x + 2z = -3 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 3y + z = 12 \\ x + y = 8 \\ 2x + 3y + 3z = -4 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 3y + z = 4 \\ x + y = 8 \\ 2x + 3y + 3z = 12 \end{cases}$

23. Encontre os valores de r para os quais a matriz

    (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & r & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & r & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

    é invertível.

24. Use o método de eliminação de Gauss para determinar o conjunto de soluções dos sistemas de equações lineares apresentados a seguir.

(a) $\begin{cases} x_1 & & -x_3 & +3x_4 & = 4 \\ 2x_1 & +2x_2 & & +x_4 & = -3 \\ -3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +4x_4 & = -1 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +16x_4 & = -15 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x & +y & +u & +v & +w & = 1 \\ x & -y & -u & +v & -w & = 1 \\ x & +3y & +3u & +v & +3w & = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x & -2y & -z & +3u & = 1 \\ 2x & -4y & +z & & = 5 \\ x & -2y & +2z & +2u & = 4 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 4x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +9x_3 & = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x_1 & & -2x_3 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} & x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & = 0 \\ -2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x & +y & +2z & +w & = 5 \\ 4x & +2y & +7z & +3w & = 8 \\ 6x & +4y & +9z & +4w & = 13 \\ -4x & -2y & +4z & -2w & = -10 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x & +y & +z & = 6 \\ 2x & +y & -2z & = -2 \\ x & -y & -z & = -4 \\ 5x & +2y & -2z & = 7 \end{cases}$

25. Uma empresa produziu três produtos, A, B e C, num total de 80000 unidades. Sabe-se que, em unidades, a produção do produto B excedeu em 10000 a produção do produto C e que a produção do produto C foi o triplo da produção do produto A. Quantas unidades de cada produto foram produzidas?

26. Numa certa secção do centro de determinada cidade, dois conjuntos de ruas de sentido único cruzam-se de acordo com a figura abaixo.

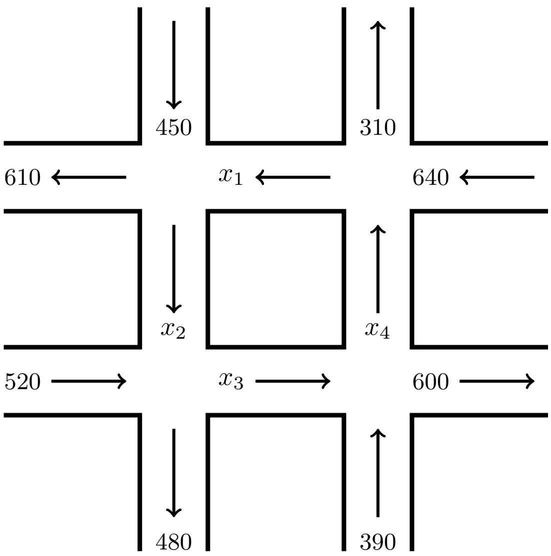
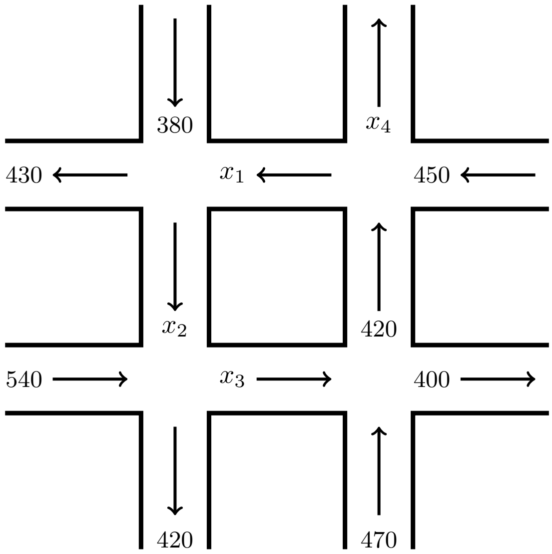


Figura 1: Diagrama de fluxo de tráfego

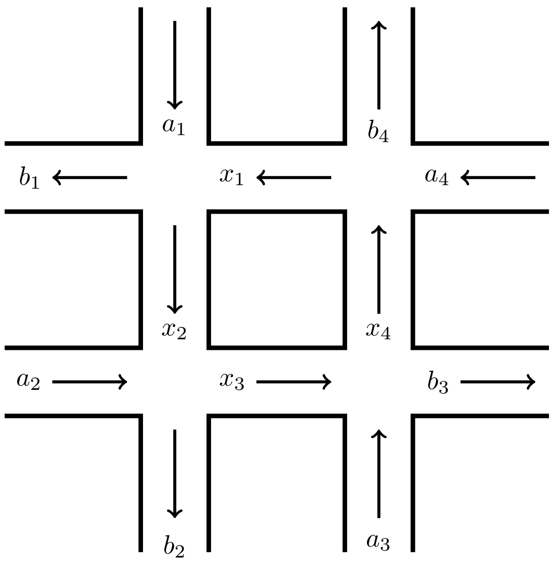
A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa secção durante a hora de ponta é apresentada no diagrama. Determine a quantidade de veículos que circulam entre cada um dos cruzamentos.

27. Considere o seguinte diagrama de fluxo de tráfego:



Determine os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4.

28. Considere o seguinte diagrama de fluxo de tráfego onde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ são números inteiros positivos:



Escreva um sistema de equações lineares com as incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e mostre que o sistema é possível se e somente se

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

O que pode concluir sobre o número de veículos que entram e saem da secção ilustrada no diagrama?

Soluções

1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5/12 & 2/3 & 1/2 \end{bmatrix}^T$

2. (a) $(1,1,1)$ (b) $(7,-1,-4,1)$ (c) $(1,0,2)$ (d) $(1,-1,0,1)$

3. (a) $(1,0.75,0)$ (b) $\left(\frac{5}{2},-\frac{7}{4},-\frac{3}{4}\right)$ (c) $(-1,0,3)$

   (d) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)$ (e) $\left(2,0,-\frac{1}{3}\right)$ (f) $(4,-2,0,4)$

5. $(8,7,6,4,2)$

6. (a) Impossível. (b) $(3-3\alpha,1,\alpha),\ \alpha\in\mathbb{R}$ (c) $\left(\frac{13}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right)$

7. (a) Se $a=2$ e $b\neq -1$, não há soluções.
   Se $a=2$ e $b=-1$, as soluções são $(\frac{-1-t}{2},t)$, $t\in\mathbb{R}$.
   Se $a\neq 2$, a única solução é $\left(\frac{b+1}{2-a},\frac{-2-ab}{2-a}\right)$.

   (b) Se $c\neq 3a+b$, não há soluções.
   Se $c=3a+b$, as soluções são $\left(\frac{4}{3}t-\frac{a+2b}{3},\frac{5}{3}t-\frac{2a+b}{3},t\right),\ t\in\mathbb{R}$.

8. (a)

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ & x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ & & x_3 & +x_4 = 0 \\ & & & x_4 = 0 \end{cases}$$

Solução: $(0,0,0,0)$

(b)

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 = 0 \\ & & x_3 & +x_4 = 0 \\ & & & x_4 = 0 \end{cases}$$

Conjunto de soluções: $\{(\alpha,-\alpha,0,0):\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

c)

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 = 2 \\ & & x_3 & +x_4 = 0 \\ & & & x_4 = 0 \end{cases}$$

9. $\{(1+t-s,2+t+s,s,t),\ s,t\in\mathbb{R}\}$

10. $(-1,2,1)$ e $(3,1,-2)$

11. $a\neq -2$

12. (a) $a=5,b=4$ (b) $a=5,b\neq 4$ (c) $a\neq 5$

13. (a) Não. $(0,0,0)$ é sempre solução. (b) $\beta=2$

16. (a) $h\neq -12$ (b) $h\neq 4$ (c) $h\in\mathbb{R}$ (d) $h\in\mathbb{R}$

17. (a) Possível e indeterminado. Conjunto de soluções: $\{(-5\alpha-2\beta,2\alpha+\beta,\alpha,\beta):\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$.
    (b) Possível e determinado. Conjunto de soluções: $\{(0,1,0)\}$.
    (c) Impossível.
    (d) Possível e indeterminado. Conjunto de soluções: $\{(2\alpha,-\alpha,\alpha):\ \alpha\in\mathbb{R}\}$

18. $\{(1-2a, a, a-1, 0),\ a \in \mathbb{R}\}$

19. (b) Conjunto de soluções: $\{(\alpha-\beta, -\alpha, \alpha, \beta):\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

    (c) Por exemplo, $(-1, 0, 2, 3)$ e $(-1, -1, 3, 4)$.

21.

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ (e) E não é invertível. (f) $F^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

22. (a) $(2, 3)$ (b) $(-1, 1)$ (c) $(9, 19, 8)$ (d) $(7, 13, 2)$ (e) $(1, 7, -9)$ (f) $(6, 2, -2)$

23. (a) Não invertível, para qualquer valor de r. (b) Invertível para $r \neq 0$.

24.

(a) $\left\{(4+\alpha, -\frac{11}{2}-\alpha, \alpha, 0):\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

(b) $\{(1-\beta, -\alpha-\gamma, \alpha, \beta, \gamma):\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{(2-2s, s, 1, 0):\ s \in \mathbb{R}\}$ (d) $\{(0, 0, 0)\}$

(e) $\{(2\alpha, -\alpha+\beta, \alpha, \beta):\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ (f) $\left\{(\alpha, 0, -\frac{\alpha}{2}, \alpha):\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

(g) $\left(\frac{7}{2}, 0, 0, -2\right)$ (h) Impossível.

25. 10000 unidades do produto A, 40000 do produto B e 30000 do produto C.

26. $\{(330+\alpha, 170+\alpha, 210+\alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

27. $x_1 = 280$, $x_2 = 230$, $x_3 = 350$, $x_4 = 590$.