Universidade do Minho **Curso: LCC**

Departamento de Matemática **Formulário** **2024/2025**

Probabilidades e Aplicações

Leis de Probabilidade Discretas Univariadas Mais Conhecidas

I) Binomial com parâmetros n e p: $X \sim Bin(n,p)$ || $E[X] = np; Var[X] = np(1-p)$
$C_X = \{0, 1, \ldots, n\}$
Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & se \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$$

Observações: 1) $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 2) Quando $n = 1$, a lei é designada de $Bernoulli(p)$

II) Hipergeométrica com parâmetros N, M e n: $X \sim HG(N, M, n)$ ||
$C_X = \{\max(0, n-(N-M)), \ldots, \min(n, M)\}$
Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} & \text{se} \quad k \in C_X \\ 0 & \text{se} \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

III) Poisson com parâmetro λ, $\lambda \in \mathbb{R}^+$: $X \sim Poisson(\lambda)$ || $E[X] = Var[X] = \lambda$
$C_X = \mathbb{N}_0$
Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{se} \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{se} \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

IV) Geométrica com parâmetro p: $X \sim Geom(p)$ || $E[X] = 1/p; Var[X] = (1-p)/p^2$
$C_X = \mathbb{N}$
Função de probabilidade:

$$f(k) = \begin{cases} p(1-p)^{k-1} & \text{se} \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{se} \quad \text{c.c.} \end{cases}$$

Funções do `R` - Leis Discretas Univariadas

X	$Bin(n,p)$	$HG(N,M,n)$	$Poisson(\lambda)$	$Geom(p)$
$P(X = k)$	`dbinom(k,n,p)`	`dhyper(k,M,N-M,n)`	`dpois(k,`λ`)`	`dgeom(k-1,p)`
$P(X \leq k)$	`pbinom(k,n,p)`	`phyper(k,M,N-M,n)`	`ppois(k,`λ`)`	`pgeom(k-1,p)`
quantil de ordem β	`qbinom(`β`,n,p)`	`qhyper(`β`,M,N-M,n)`	`qpois(`β`,`λ`)`	`qgeom(`β`,p) + 1`

Leis de Probabilidade Absolutamente Contínuas Univariadas Mais Conhecidas

I) Uniforme no intervalo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$: $X \sim U([a, b])$ || $E[X] = \frac{a+b}{2}; Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se \quad a \leq x \leq b \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases}$$

Função de distribuição:

$$F(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < a \\ \frac{c-a}{b-a} & se \quad a \leq c \leq b \\ 1 & se \quad c > b. \end{cases}$$

II) Exponencial de parâmetro λ, $\lambda \in \mathbb{R}^+$: $X \sim Exp(\lambda)$ || $E[X] = \frac{1}{\lambda}; Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$
Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Função de distribuição:

$$F(c) = \begin{cases} 0 & se \quad c < 0 \\ 1 - e^{-\lambda c} & se \quad c \geq 0 \end{cases}$$

III) Normal de parâmetros μ e σ^2, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ || $E[X] = \mu; Var[X] = \sigma^2$
Função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \; x \in \mathbb{R}$$

Função de distribuição:

$$F(c) = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dx$$

Funções do `R` - Leis Absolutamente Contínuas Univariadas

$X \sim$	$U([a,b])$	$Exp(\lambda)$	$N(\mu, \sigma^2)$
$f(x)$	`dunif(x,a,b)`	dexp(x,λ)	dnorm(x,μ,σ)
$F(c) = P(X \leq c)$	`punif(c,a,b)`	pexp(c,λ)	pnorm(c,μ,σ)
quantil de ordem β	qunif(β,a,b)	qexp(β,λ)	qnorm(β,μ,σ)

Leis de Probabilidade Multivariadas Mais Conhecidas

A) Multinomial com parâmetros n e $p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}$: $(X_1, X_2, \ldots, X_{r-1}) \sim M(n; p_1, p_2, \ldots, p_{r-1})$

Função de probabilidade conjunta: (caso discreto)

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_{r-1} = n_{r-1}) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_{r-1}! n_r!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_{r-1}^{n_{r-1}} p_r^{n_r}, \tag{1}$$

com $p_i \in]0,1[$ e $n_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, r$, e tais que $n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-1} \leq n$, $n_r = n - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{r-1})$ e $p_r = 1 - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{r-1})$.

Função do `R`: Para obter (1)

- definir vetores **a** e **p** (ambos de dimensão r): **a** = c($n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}, n_r$) e **p** = c($p_1, p_2, \ldots, p_{r-1}, p_r$);
- executar: `dmultinom(a, n, p)`.

B) Normal Multivariada com parâmetros u e $\mathbf{\Sigma}$: $(X_1, X_2, \ldots, X_p) \sim N_p(\mathbf{u}, \Sigma)$

Função densidade de probabilidade conjunta: (caso absolutamente contínuo)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sqrt{det(\Sigma)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{u})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{u})\right\}, \quad \mathbf{x} = [x_1 \, x_2 \, \ldots \, x_p]^\top \in \mathbb{R}^p,$$

com $\mathbf{u}$ vetor coluna de $\mathbb{R}^p$ e $\mathbf{\Sigma}$ matriz real, quadrada de ordem p, invertível, simétrica e positiva definida.

Observação: $\mathbf{u}$ é o vetor valor médio de $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ (i.e. $\mathbf{u} = [\, E[X_1] \, E[X_2] \, \ldots \, E[X_p] \,]^\top$) e $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{i,j}]_{i,j=1}^{p}$ é a respetiva matriz das covariâncias (i.e., $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$).

Extra: No `R`, para obter: $\sqrt{x}$ executar `sqrt(x)` || e^x executar `exp(x)`