

Análise

— Folha de exercícios 8 — 2022'23 —

1. Calcule o valor do integral  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y)$ , onde:

- (a)  $f(x, y) = 3$  e  $\mathcal{R} = [1, 2] \times [0, 1]$ ;
- (b)  $f(x, y) = e^{x+y}$  e  $\mathcal{R} = [-1, 0] \times [0, 2]$ ;
- (c)  $f(x, y) = x^3 + y^2$  e  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [1, 2]$ ;
- (d)  $f(x, y) = xy^2$  e  $\mathcal{R} = [-1, 0] \times [1, 2]$ .

2. Calcule os seguintes integrais, esboçando as regiões de integração:

- (a)  $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx$ ;
- (b)  $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx$ ;
- (c)  $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx$ ;
- (d)  $\int_0^1 \int_1^{e^y} (x + y) dx dy$ .

3. Calcule o valor do integral  $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) d(x, y)$ , usando as duas possíveis ordens de integração, quando  $f$  e  $\mathcal{R}$  são:

- (a)  $f(x, y) = xy$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$ ;
- (b)  $f(x, y) = x + y$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq -x^2 + 4x\}$ ;
- (c)  $f(x, y) = e^{x+y}$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x \leq y \leq -x + 2\}$ ;
- (d)  $f(x, y) = x + y$  e  $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \leq y \leq -x + 2\}$ .

4. Identifique o domínio de integração (fazendo um esboço) e inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:

- (a)  $\int_0^1 \int_y^{y+3} f(x, y) dx dy$ ;
- (b)  $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy dx$ ;
- (c)  $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx dy$ ;
- (d)  $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy dx$ ;
- (e)  $\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} f(x, y) dy dx$ ;
- (f)  $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy dx$ ;
- (g)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} f(x, y) dy dx$ ;
- (h)  $\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$ ;
- (i)  $\int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} f(x, y) dy dx$ ;
- (j)  $\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$ .

5. Invertendo a ordem de integração, calcule:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2} \, dy \, dx; & \text{(b)} \quad & \int_1^{e^3} \int_{\log y}^3 dx \, dy; \\ \text{(c)} \quad & \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3} \, dx \, dy; & \text{(d)} \quad & \int_1^e \int_{\log y}^1 \frac{(x^2+1)^{13}}{y} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

6. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas  $R$  que se seguem:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, e^{-x} \leq y \leq e^x\}; \\ \text{(b)} \quad & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y^2 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}; \\ \text{(c)} \quad & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y \leq -2x^2 - x + 3, y \leq -x + 1\}; \\ \text{(d)} \quad & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\}; \end{aligned}$$

7. Usando integrais duplos, calcule o volume de cada um dos sólidos  $S$  que se seguem:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, e^{-x} \leq y \leq e^x, 0 \leq z \leq x + y\}; \\ \text{(b)} \quad & S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, y \leq -x^2 - 2x, x - y \leq z \leq x + y\}; \\ \text{(c)} \quad & S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, x \geq y^2 - y, x \leq z + y, y \leq -x - z\}; \\ \text{(d)} \quad & S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}. \end{aligned}$$

8. Determine as coordenadas polares dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A = (3, \sqrt{3}), \quad B = (0, 2), \quad C = (0, -2), \quad D = (-4, -4), \quad E = (1, 1).$$

9. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$$A = \left(1, \frac{\pi}{4}\right), \quad B = \left(2, \frac{3\pi}{2}\right), \quad C = (5, 0), \quad D = \left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad E = \left(3, \frac{11\pi}{6}\right).$$

10. Passando para coordenadas polares, calcule  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, d(x, y)$ , onde:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5\}; \\ \text{(b)} \quad & f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1} \log(x^2 + y^2) \quad \text{e} \quad \mathcal{D} \text{ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações } x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x^2 + y^2 = 9; \\ \text{(c)} \quad & f(x, y) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \sqrt{3}y \geq x, \sqrt{3}x \geq y\}; \\ \text{(d)} \quad & f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}; \\ \text{(e)} \quad & f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x, y \geq x^2, x \geq 0\}. \end{aligned}$$

11. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas  $R$  que se seguem:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x, y \leq x, x^2 + y^2 \leq 9\}; \\ \text{(b)} \quad & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq x, x \geq 0\}; \\ \text{(c)} \quad & R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, (x+2)^2 + y^2 \geq 4, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

12. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes sólidos:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}; \\ \text{(b)} \quad & B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, z \geq 0, y + z \leq 2\}; \\ \text{(c)} \quad & C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, y + z \leq 3\}. \end{aligned}$$