63. Use sistemas de congruências para resolver a congruência $17x \equiv_{42} 5$.

$17x \equiv 5 \pmod{42}$ $\qquad$ $42 = 2 \times 3 \times 7$

$$17x \equiv 5 \pmod{42} \iff \begin{cases} 17x \equiv 5 \pmod{2} \\ 17x \equiv 5 \pmod{3} \\ 17x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

$17x \equiv 5 \pmod{42} \iff 42 \mid 17x - 5$

$\iff 2 \mid 17x - 5 \wedge 3 \mid 17x - 5 \wedge 7 \mid 17x - 5$

$17x \equiv 5 \pmod{2} \iff 16x + x \equiv 4 + 1 \pmod{2}$

$\iff x \equiv 1 \pmod{2}$

$17x \equiv 5 \pmod{3} \iff 15x + 2x \equiv 3 + 2 \pmod{3}$

$\iff 2x \equiv 2 \pmod{3}$

$\iff x \equiv 1 \pmod{3}$ (lei do corte)

$17x \equiv 5 \pmod{7} \iff 14x + 3x \equiv 5 \pmod{7}$

$\iff 3x \equiv 5 \pmod{7}$

$$17x \equiv 5 \pmod{42} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ 3x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

→ Não podemos aplicar o TCR

$$3x \equiv 5 \pmod{7}$$
$$\Updownarrow$$
$$6x \equiv 10 \pmod{7} \iff 7x - x \equiv 3 \pmod{7}$$
$$\iff -x \equiv 3 \pmod{7}$$
$$\iff x \equiv -3 \pmod{7}$$
$$\iff x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$17x \equiv 5 \pmod{42} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \end{cases}$$

Podemos aplicar o TCR. Existe uma única solução módulo $N = 2 \times 3 \times 7 = 42$

$N = 42$

$n_1 = 2 \qquad a_1 = 1 \qquad N_1 = N/n_1 = 21$

$n_2 = 3 \qquad a_2 = 1 \qquad N_2 = N/n_2 = 14$

$n_3 = 7 \qquad a_3 = 4 \qquad N_3 = N/n_3 = 6$

$x_1: \quad N_1 x_1 \equiv 1 \pmod{n_1} \qquad 21 x_1 \equiv 1 \pmod 2 \qquad x_1 = 1$

$x_2: \quad N_2 x_2 \equiv 1 \pmod{n_2} \qquad 14 x_2 \equiv 1 \pmod 3 \qquad x_2 = 2$

$x_3: \quad N_3 x_3 \equiv 1 \pmod{n_3} \qquad 6 x_3 \equiv 1 \pmod 7 \qquad x_3 = 6$

$x_0 = N_1 a_1 x_1 + N_2 a_2 x_2 + N_3 a_3 x_3 = 21 \times 1 \times 1 + 14 \times 1 \times 2 + 6 \times 4 \times 6 =$

$= 21 + 28 + 144 = 193$

$x_0$ é solução do sistema

$193 \equiv 25 \pmod{42}$

25 é a única solução do sistema módulo 42, isto é,

$\{25 + 42t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ é a solução geral do sistema.

65. Quando se retiram $2, 3, 4, 5, 6$ ovos de cada vez de um determinado cesto, ficam, respetivamente, $1, 2, 3, 4, 5$ ovos no cesto. Ao retirar 7 ovos de uma só vez, não sobra quaquer ovo no cesto. Qual o menor número de ovos que o cesto pode conter?

Seja $x$ o número de ovos no cesto

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 7 \\ x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv 4 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

Não podemos aplicar o TCR pois existem $n_i$ que não são primos entre si.

$$x \equiv 5 \pmod 6 \underset{6 = 2\times 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \equiv 5 \bmod 2 \\ x \equiv 5 \bmod 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \bmod 2 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

↳ eqs repetidas

$$x \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow 4 \mid x-3 \Rightarrow 2 \mid x-3 \Rightarrow 2 \mid x-3+2$$
$$\Rightarrow 2 \mid x-1 \Rightarrow x \equiv 1 \pmod 2$$

O sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Podemos aplicar o TCR

Existe uma única solução

módulo $N = 3 \times 4 \times 5 \times 7 = 420$

Solução : 119

51. Trabalhando módulo 9 ou 11, indique os dígitos que faltam nos cálculos apresentados:

(a) $51840 \times 273581 = \overline{1418243x040}$;

(b) $512 \times \overline{1x53125} = 1000000000$.

a) $51840 \times 273581 = \overline{1418243x040}$

- Módulo 9

$$51840 \equiv 0+4+8+1+5 \pmod 9$$
$$\equiv 0 \pmod 9$$

$$51840 \times 273581 \equiv 0 \pmod 9$$

$$\overline{1418243x040} \equiv 0+4+x+0+3+4+2+\underbrace{8+1}+4+1$$
$$\equiv x \pmod 9$$

Logo $x \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow x = 0 \vee x = 9$

- Módulo 11

$$51840 \equiv 0 - 4 + 8 - 1 + 5 \pmod{11}$$
$$\equiv 8 \pmod{11}$$

$$273581 \equiv 1 - 8 + 5 - 3 + 7 - 2 \pmod{11}$$
$$\equiv 0 \pmod{11}$$

$$51840 \times 273589 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\overline{1418243x040} \equiv 0 - 4 + 0 - x + 3 - 4 + 2 - 8 + 1 - 4 + 1 \pmod{11}$$
$$\equiv -x - 13 \pmod{11}$$

Logo $-x - 13 \equiv 0 \pmod{11}$

$$x \equiv -13 \pmod{11}$$
$$x \equiv 9 \pmod{11}$$

Portanto $x = 9$

47. Calcule o resto da divisão de $38^{43} + 47^{22}$ por 15.

$$38 \equiv 8 \pmod{15}$$

$$38^2 \equiv 64 \pmod{15} \quad \Rightarrow \quad 38^2 \equiv 4 \pmod{15}$$

$$38^4 \equiv 16 \pmod{15} \quad \Rightarrow \quad 38^4 \equiv 1 \pmod{15}$$

$$43 = 4 \times 10 + 3$$

$$38^{40} \equiv 1 \mod 15 \quad \Rightarrow \quad 38^{43} \equiv 38^3 \pmod{15}$$

$$38^2 \equiv 4 \pmod{15} \quad \Rightarrow \quad 38^3 \equiv 4 \times 38 \pmod{15}$$

$$\Rightarrow \quad 38^3 \equiv 152 \pmod{15}$$

$$\Rightarrow \quad 38^3 \equiv 2 \pmod{15}$$

Logo $38^{43} \equiv 2 \pmod{15}$

$$47 \equiv 2 \pmod{15} \quad \Rightarrow \quad 47^4 \equiv 2^4 \pmod{15}$$

$$\Rightarrow \quad 47^4 \equiv 1 \pmod{15}$$

$22 = 4 \times 5 + 2$

$47^{20} \equiv 1 \pmod{75} \Rightarrow 47^{22} \equiv 47^2 \pmod{75}$

$47 \equiv 2 \pmod{75} \Rightarrow 47^2 \equiv 4 \pmod{75}$

Logo $47^{22} \equiv 4 \pmod{75}$

Portanto $38^{43} + 47^{22} \equiv 2 + 4 \pmod{75}$

$\equiv 6 \pmod{75}$

Assim o resto da divisão de $38^{43} + 47^{22}$ por 75 é 6.

21. (a) Para que valores de $x$ e de $y$ se tem $11x + 7y = 200$?

(b) Para que valores encontrados em (a) se tem $3x + y$ múltiplo de 3?

a) $m.d.c(11, 7) = 1$

$\Rightarrow \exists\, x_0, y_0 \in \mathbb{Z} : \quad 11x_0 + 7y_0 = 1$

$\Rightarrow \exists\, x_0, y_0 \in \mathbb{Z} : \quad 11(200x_0) + 7(200y_0) = 200$

Então $\begin{cases} x_1 = 200x_0 \\ y_1 = 200y_0 \end{cases}$ é uma solução particular da eq. diofantina

$11 = 7 + 4$

$7 = 4 + 3$

$4 = 3 + 1$

$1 = 4 - 3$

$= 4 - (7-4) = -7 + 2\times 4$

$= -7 + 2\times(11-7)$

$= 2\times 11 - 3\times 7$

Logo $\begin{cases} x_1 = 200\times 2 = 400 \\ y_1 = 200\times(-3) = -600 \end{cases}$ é solução particular

Portanto:

$$\begin{cases} x = 400 + 7t \\ y = -600 - 11t \end{cases}$$

$$11(400 + 7t) + 7(-600 - 11t) =$$

$$= 11 \times 400 - 7 \times 600 + \cancel{77t} - \cancel{77t} = 200$$