Table of Contents

Il progetto

Scopo

Lo scopo è di creare una piccola libreria per il pricing di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, appoggiandosi sulla libreria deal.ii.
L'idea è che l'utilizzatore possa sia utilizzare gli oggetti presenti, sia crearne altri con grande facilità nel caso ne avesse bisogno.

Il progetto

Scopo

Lo scopo è di creare una piccola libreria per il pricing di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, appoggiandosi sulla libreria deal.ii. L'idea è che l'utilizzatore possa sia utilizzare gli oggetti presenti, sia crearne altri con grande facilità nel caso ne avesse bisogno.

Motivazioni

La procedura più diffusa in finanza è di usare le differenze finite. Gli elementi finiti, a fronte di una maggiore difficoltà implementativa, risultano essere più vantaggiosi.

Table of Contents

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t,S) - S(e^y - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t,S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t,S) - S(e^y - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t,S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t,S) - S(e^y - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t,S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale. Separabile in due pezzi.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

Trasformazioni *price* e *logprice*

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru + \int_{\mathbb{R}} \left(u(t, x+y) - u(t,x) - (e^y - 1)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

Trasformazioni *price* e *logprice*

Scomposizione della parte integrale

Definendo nel modo seguente le quantità

$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\nu(y)dy$$

$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y)dy$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \hat{\alpha}) S \frac{\partial C}{\partial S} - (r + \hat{\lambda}) C + \int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y)\nu(y)dy = 0$$

Scomposizione della parte integrale

Analogamente per la trasformazione logprice si ha

$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y)dy,$$
$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\nu(y)dy,$$

con rispettiva equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \hat{\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \hat{\lambda})u + \int_{\mathbb{R}} u(t, x + y)\nu(y)dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *Price*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r - \hat{\alpha}_1) S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + (r - \hat{\alpha}_2) S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2} S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2}$$
$$+ \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - (r + \lambda_1 + \lambda_2) C$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1, S_2 e^y) \nu_2(y) dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *Logprice*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \hat{\alpha}_1\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}$$
$$+ \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} - \hat{\alpha}_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} - (r + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)u$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1 + y, x_2)\nu_1(y)dy + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1, x_2 + y)\nu_2(y)dy = 0$$

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discetizza nel modo usuale

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discetizza nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i

$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2)\nu_1(y)dy$$

ottenendo una vettore $\mathbf{J}$ funzione di S_i. Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discetizza nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i
$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2)\nu_1(y)dy$$
ottenendo una vettore $\mathbf{J}$ funzione di S_i. Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti
- Per la discretizzazione temporale, viene applicato uno schema di eulero implicito, ma la parte integrale viene lasciata esplicita. Lo schema è stabile se Stabile se $\frac{1}{dt} < \lambda$.

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

Otteniamo dunque il seguente schema, con $\mathbf{C}_h^k$ vettore componenti soluzione al tempo k

$$M_1\mathbf{C}_h^k = M_2\mathbf{C}_h^{k+1} + M\mathbf{J}^1 + M\mathbf{J}^2$$

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

Ricordiamo l'integrale da calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y)\nu(y)dy$$

al quale applichiamo il cambio di variabile

$$z = Se^y$$

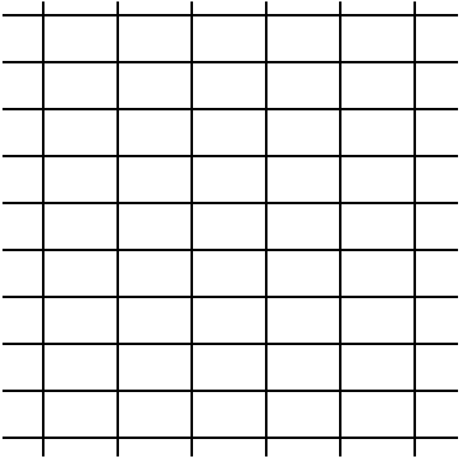

Figura : Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^{\infty} \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

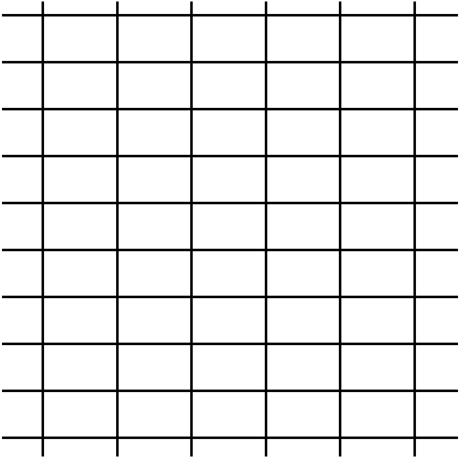

Figura : Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^{\infty} \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella

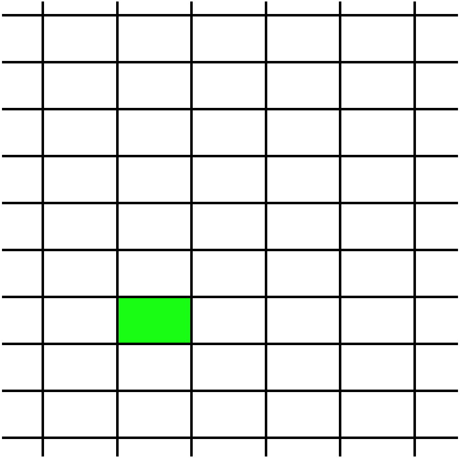

Figura : Poniamoci su una cella

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^{\infty} \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella
e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- In 1d, a tutti i nodi.
- In 2d, solo a quelli che giaciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Prima sull'asse x.

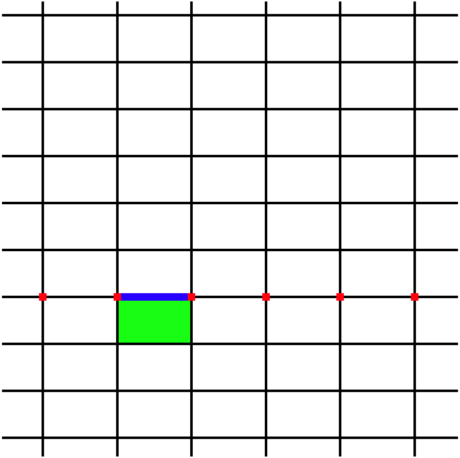

Figura : I contributi della cella ai nodi x

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t,z)}{z}\nu\left(\log\left(\frac{z}{S}\right)\right)dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella
e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- In 1d, a tutti i nodi.
- In 2d, solo a quelli che giaciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Poi sull'asse y.

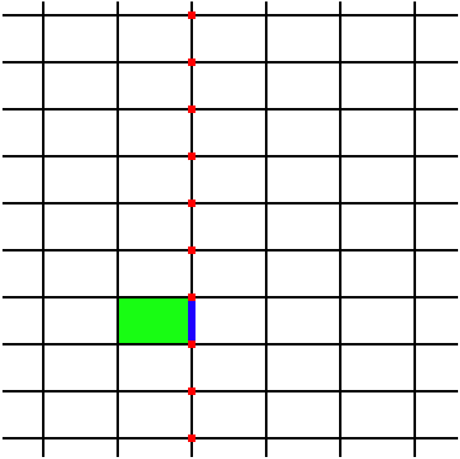

Figura : I contributi della cella ai nodi y

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal domininio a causa del termine $x + y$

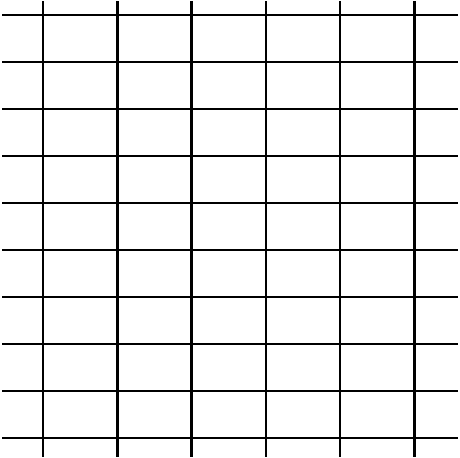

Figura : Una griglia

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal domininio a causa del termine $x + y$
In questo caso si cicla su tutti i vertici. Selezionato un vertice i,

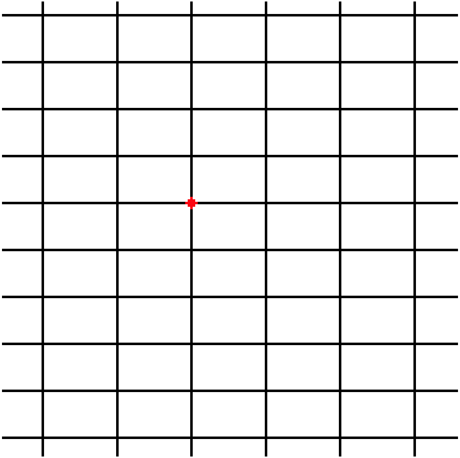

Figura : Poniamoci su un nodo

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x+y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal dominino a causa del termine $x+y$
In questo caso si cicla su tutti i vertici. Selezionato un vertice i, si avranno dei nodi di quadratura in direzione x e si quadra su $x_i + z_l$ (in blu), e se la dimensione è due, anche su y lungo $y_i + z_l$.

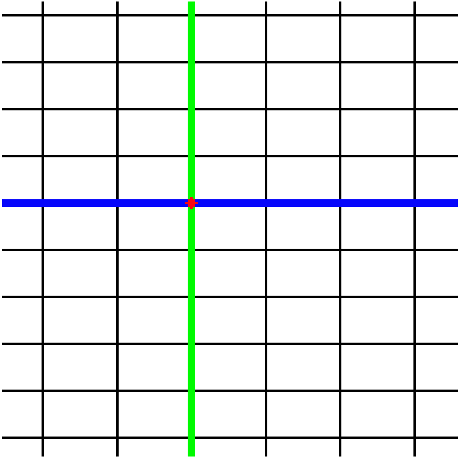

Figura : Calcolo lungo le direzioni

Table of Contents

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria opensource ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria opensource ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

Vantaggi

- Documentazione molto ampia e chiara, a cui si aggiunge la presenza di 51 tutorial programs che illustrano come usare la libreria per problemi tipici
- Organizzata in moduli che coprono le diverse aree di un problema ad elementi finiti (*creazione griglie, algebra lineare, output risultati, etc*)

La nostra implementazione

Tre strutture chiave per il problema

Classi Opzione

Rappresentano il problema e gestiscono creazione griglia, assemblaggio sistema e soluzione.

Classi Model

I vari modelli utilizzati in finanza sono rappresentati con questa classe, la cui interfaccia è stabilita da una classe base astratta.

Classi Integrali

Il calcolo della parte integrale è gestito da queste classi, e le Opzioni salvano un puntatore a un oggetto di questo tipo.

Tutte sfruttanti il meccanismo dell'ereditarietà al fine di COMPLETE HERE

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

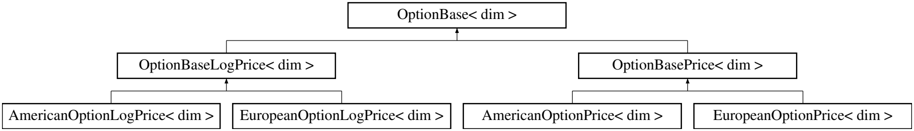

Figura : Schema delle classi Opzione

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Estensibile

L'utente può sia utilizzare le opzioni già esistenti, che crearne delle nuove partendo dal secondo o dal terzo livello di ereditarietà.

Le classi Integrale

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *logprice*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche ai modelli.

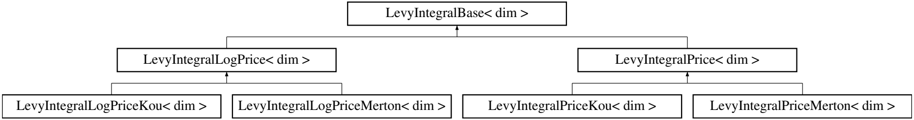

Figura : Schema delle classi LevyIntegral

Le classi Integrale

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *logprice*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche ai modelli.

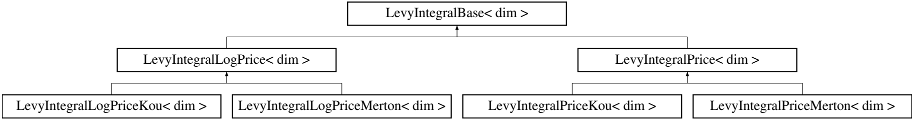

Figura : Schema delle classi LevyIntegral

anything else?

Table of Contents

Price v.s *LogPrice*

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

Price	*LogPrice*
In 1d molto veloce	In 1d mediamente veloce
In 2d buone performance	In 2d lento
Non parallelizzabile	Parallelizzabile, quindi più veloce di *Price* 1d
No *mesh adapting* in 2d	*Mesh adapting* anche in 2d, migliorando le performance
Troncamento del domionio può introdurre problemi	Nessun problema troncamento dominio

Tabella : Confronto fra *Price* e *LogPrice*

Price v.s LogPrice

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

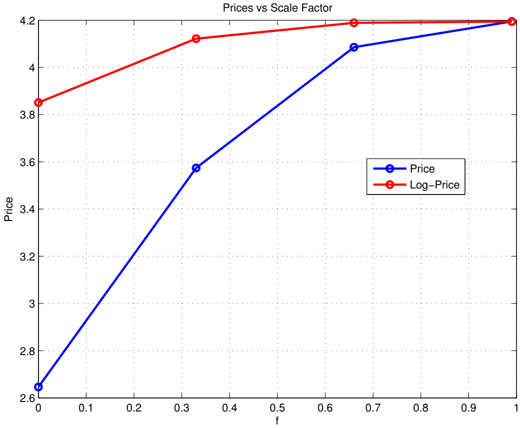

Figura : Convergenza del prezzo per una put al variare dello *scaling factor*

Table of Contents