Metodo a elementi finiti per il pricing di opzioni multi-asset con modelli di Lévy

Progetto di Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico

Nahuel Foresta   Giorgio G. Re

Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano

15 settembre 2014

Indice

Il progetto

Scopo

Lo scopo di questo progetto è creare una piccola libreria per il *pricing* di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, utilizzando la libreria deal.ii. L'idea è che l'utente possa sia utilizzare gli strumenti presenti, sia aggiungerne altri nel caso di bisogno, con grande facilità (ereditarietà).

Il progetto

Scopo

Lo scopo di questo progetto è creare una piccola libreria per il *pricing* di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, utilizzando la libreria deal.ii. L'idea è che l'utente possa sia utilizzare gli strumenti presenti, sia aggiungerne altri nel caso di bisogno, con grande facilità (ereditarietà).

Motivazioni

La procedura più diffusa in finanza è l'utilizzo delle differenze finite. Gli elementi finiti, a fronte di una maggiore difficoltà implementativa, risultano essere più vantaggiosi.

Indice

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno e condizione finale.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t,S) - S(e^y - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t,S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno e condizione finale.
Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno e condizione finale.
Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno e condizione finale.
Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale ed è separabile in due parti.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno e condizione finale.
Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale ed è separabile in due parti.

Trasformazioni *price* e *log-price*, $x = log\left({}^{S}/_{S_0}\right)$.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru + \int_{\mathbb{R}} \left(u(t, x+y) - u(t, x) - (e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno e condizione finale.
Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale ed è separabile in due parti.

Trasformazioni *price* e *log-price*, $x = log\left({}^{S}/_{S_0} \right)$.

Il problema con l'ostacolo: Opzioni Americane

Nelle Opzioni Americane:

$$P(S,t) \geq \max(K - S, 0) \qquad \forall t \in [0, T]$$

Il problema con l'ostacolo: Opzioni Americane

Nelle Opzioni Americane:

$$P(S,t) \geq \max(K-S,0) \qquad \forall t \in [0,T]$$

L'equazione diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + rS\dfrac{\partial P}{\partial S} + \dfrac{1}{2}S^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} \\ + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(P(t,Se^y) - P(t,S) - S(e^y-1)\dfrac{\partial P}{\partial S}(t,S) \right) \nu(dy) \leq rP, \\ P(S,t) \geq \max(K-S,0) \end{cases}$$

Scomposizione della parte integrale

Definendo nel modo seguente le quantità

$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\nu(y)dy$$
$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y)dy$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \hat{\alpha}) S \frac{\partial C}{\partial S} - (r + \hat{\lambda}) C + \int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y)\nu(y)dy = 0$$

Scomposizione della parte integrale

Analogamente per la trasformazione *log-price* si ha

$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\nu(y)dy$$
$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y)dy$$

con rispettiva equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \hat{\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \hat{\lambda})u + \int_{\mathbb{R}} u(t, x+y)\nu(y)dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *price*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r-\hat{\alpha}_1)S_1\frac{\partial C}{\partial S_1} + (r-\hat{\alpha}_2)S_2\frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2}S_1^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}S_2^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2}$$
$$+ \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2\frac{\partial^2 C}{\partial S_1\partial S_2} - (r+\lambda_1+\lambda_2)C$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1e^y, S_2)\nu_1(y)dy + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1, S_2e^y)\nu_2(y)dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *log-price*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \hat{\alpha}_1\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}$$
$$+ \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} - \hat{\alpha}_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} - (r + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)u$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1 + y, x_2)\nu_1(y)dy + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1, x_2 + y)\nu_2(y)dy = 0$$

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la discretizzazione nel modo usuale

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la discretizzazione nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i

$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2)\nu_1(y)dy$$

ottenendo una vettore $\mathbf{J}$ funzione di S_i. Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la discretizzazione nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i
$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2)\nu_1(y)dy$$
ottenendo una vettore $\mathbf{J}$ funzione di S_i. Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti
- Per la discretizzazione temporale, viene applicato uno schema di Eulero Implicito, ma la parte integrale viene trattata in modo esplicito. Lo schema è stabile se ${}^1/_{\Delta t} < \lambda$.

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

Otteniamo dunque il seguente schema, con $\mathbf{C}_h^k$ vettore componenti soluzione al tempo k

$$M_1\mathbf{C}_h^k = M_2\mathbf{C}_h^{k+1} + M\mathbf{J}^{1,k+1} + M\mathbf{J}^{2,k+1}$$

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

Otteniamo dunque il seguente schema, con $\mathbf{C}_h^k$ vettore componenti soluzione al tempo k

$$M_1\mathbf{C}_h^k = M_2\mathbf{C}_h^{k+1} + M\mathbf{J}^{1,k+1} + M\mathbf{J}^{2,k+1}$$

Per la soluzione del sistema lineare abbiamo utilizzato un *solver* diretto della libreria. Per il problema con l'ostacolo abbiamo scritto un *solver* iterativo che impone ad ogni iterazione e per ogni punto della griglia che la soluzione stia sopra l'ostacolo.

Calcolo dell'integrale in forma *price*

Ricordiamo l'integrale da calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y)\nu(y)dy$$

al quale applichiamo il cambio di variabile

$$z = Se^y$$

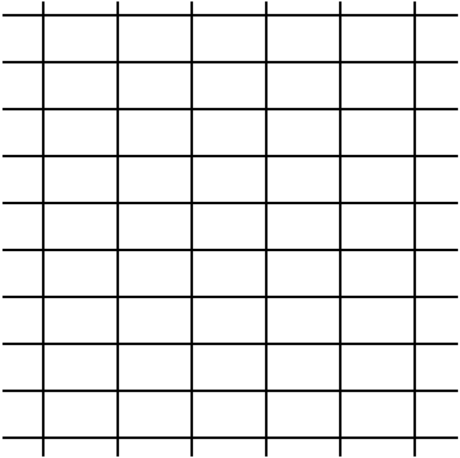


Figura: Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^{\infty} \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

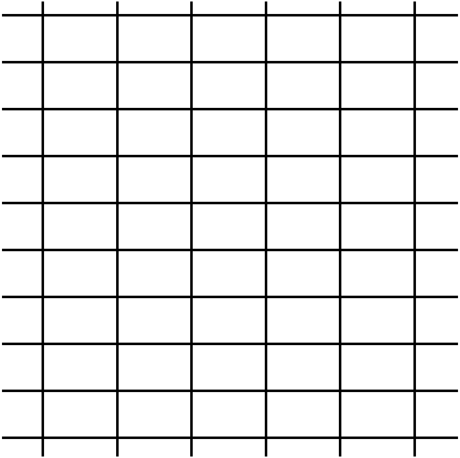


Figura: Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella

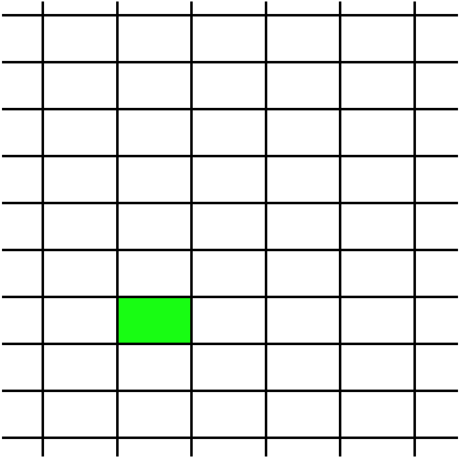


Figura: Poniamoci in una cella

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t,z)}{z}\nu\left(\log\left(\frac{z}{S}\right)\right)dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella
e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- in 1d, a tutti i nodi
- in 2d, solo a quelli che giacciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Prima sull'asse x.

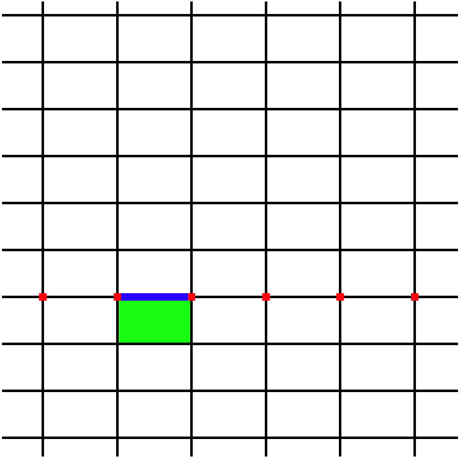


Figura: I contributi della cella ai nodi x

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella
e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- in 1d, a tutti i nodi
- in 2d, solo a quelli che giacciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Poi sull'asse y.

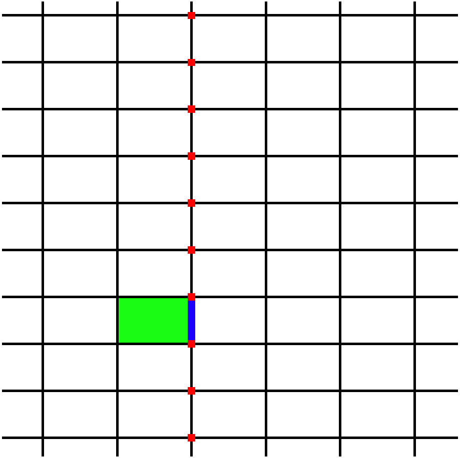


Figura: I contributi della cella ai nodi y

Calcolo dell'integrale in forma *log-price*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x+y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque.
Osserviamo che si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$.

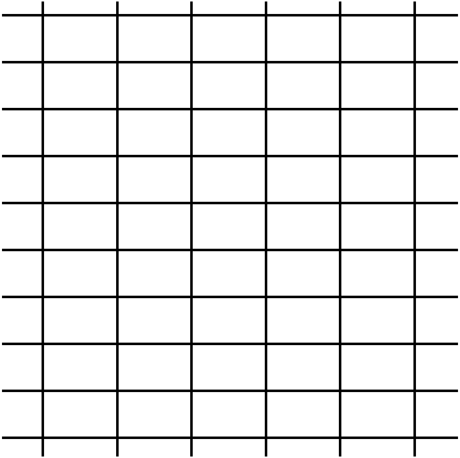


Figura: Una griglia

Calcolo dell'integrale in forma *log-price*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x+y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque.
Osserviamo che si può uscire dal dominio a causa del termine $x+y$.

Selezionato un vertice i,

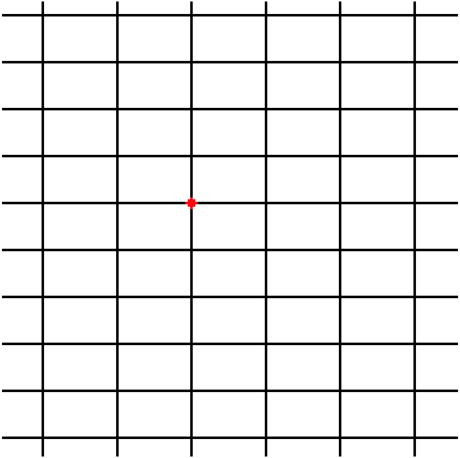


Figura: Poniamoci in un nodo

Calcolo dell'integrale in forma *log-price*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x+y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque.
Osserviamo che si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$.

Selezionato un vertice i, si avranno dei nodi di quadratura in direzione x e si quadra su $x_i + z_l$ (in blu), e se la dimensione è due, anche su y lungo $y_i + z_q$ (in verde).

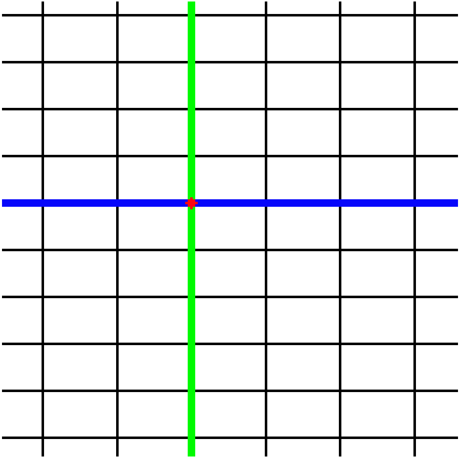


Figura: Calcolo lungo le direzioni

Indice

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria *open source* ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria *open source* ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

Vantaggi

- Documentazione molto ampia e chiara, a cui si aggiunge la presenza di oltre 50 *tutorial* che illustrano come usare la libreria per problemi più o meno tipici.
- Si interfaccia con molte librerie, molto scalabile, comunità attiva.

La nostra implementazione

Tre strutture chiave per il problema

Classi Opzione

Rappresentano il problema e gestiscono creazione griglia, assemblaggio sistema e soluzione.

Classi Modello

I vari modelli utilizzati in finanza sono rappresentati con queste classi, la cui interfaccia è stabilita da una classe base astratta.

Classi Integrali

Il calcolo della parte integrale è gestito da queste classi, e le Opzioni salvano un puntatore a un oggetto di questo tipo.

Tutte queste strutture sfruttano il meccanismo dell'ereditarietà al fine di coprire i diversi casi possibili.

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

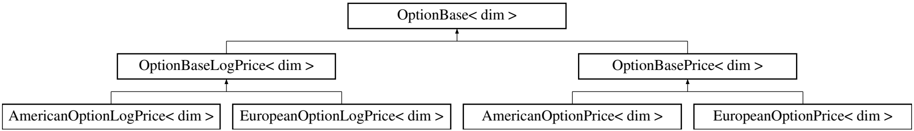


Figura: Schema delle classi Opzione

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Estensibili

L'utente può sia utilizzare le opzioni già esistenti, sia crearne delle nuove partendo dal secondo o dal terzo livello di ereditarietà.

Le classi Integrale

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *log-price*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche per i modelli.

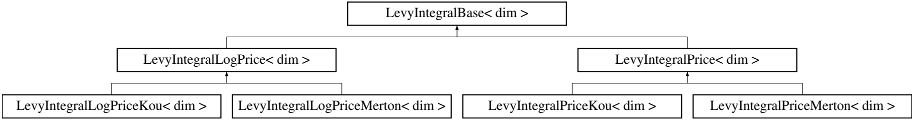


Figura: Schema delle classi LevyIntegral

Le classi Integrale

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *log-price*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche per i modelli.

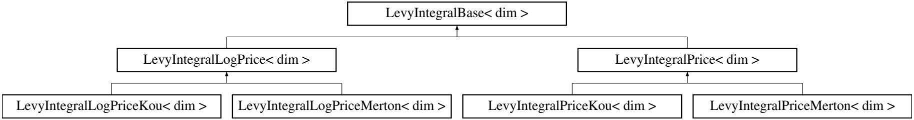


Figura: Schema delle classi LevyIntegral

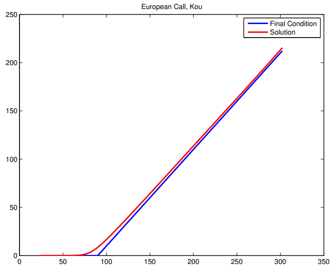
Generiche

Le classi intermedie non sono astratte e implementano formule di calcolo generiche (cioè, Gauss) per risolvere il problema con modelli qualsiasi.

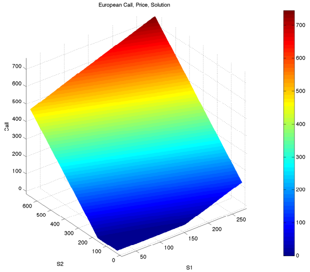
Indice

Opzioni Europee

Alcuni esempi di risultati ottenuti:



(a) Call europea, modello di Kou

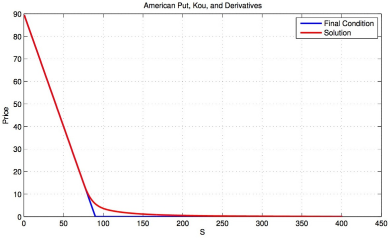


(b) Call Basket europea, modello di Black&Scholes

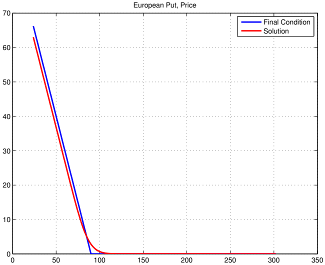
I risultati, confrontati con la soluzione analitica (nei pochi casi in cui esiste) o con altri *software* di simulazione (differenze finite o Montecarlo), sono corretti.

Opzioni Americane

Risultati ottenuti nel problema con ostacolo:



(a) Put americana, modello di Black&Scholes



(b) Put europea, modello di Black&Scholes

Come possiamo notare, il *solver* dell'americana impone che la soluzione stia sempre sopra l'ostacolo, nonostante essa tenda ad andare sotto il *payoff*.

Price v.s *Log-Price*

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

Price	*Log-Price*
In 1d molto veloce	In 1d mediamente veloce
In 2d performance ottime	In 2d lento
Non parallelizzabile	Facilmente parallelizzabile (quindi più veloce di *price* 1d con almeno 4 *cores*)
No *mesh adapting* in 2d per PIDE	*Mesh adapting* anche in 2d, migliorando le prestazioni
Il troncamento del dominio può introdurre problemi	Nessun problema con il troncamento del dominio

Tabella: Confronto fra *Price* e *Log-Price*

Price v.s *Log-Price*

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

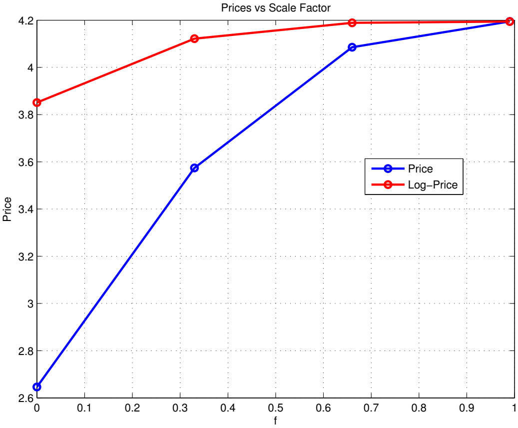
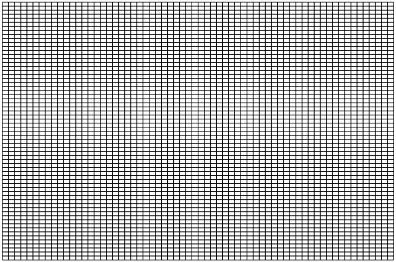


Figura: Convergenza del prezzo per una put al variare dello *scaling factor*

Mesh adaptivity

Utilizzando le funzioni della libreria deal.ii, è facile adattare la griglia:

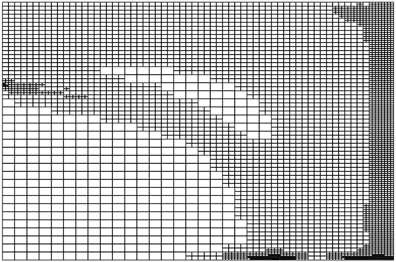


(a) Griglia iniziale

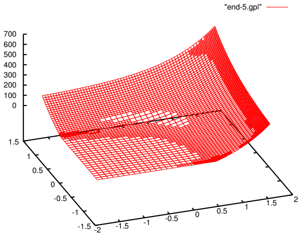
Figura: Adattamento di griglia per una Call Europea 2d in forma *Log-Price*

Mesh adaptivity

Utilizzando le funzioni della libreria deal.ii, è facile adattare la griglia:



(a) Griglia adattata



(b) Soluzione con griglia adattata

Figura: Adattamento di griglia per una Call Europea 2d in forma *Log-Price*

Indice

Bilancio del progetto

Il programma finale si configura come una piccola ma solida libreria per il *pricing* di derivati finanziari di base, con la possibilità di prezzarne altri facilmente. Inoltre lascia molta libertà all'utente (più trasformazioni, scelta di parametri, *mesh adapting*).

FEM vs. FDM

Grazie agli elementi finiti è possibile avere un'approssimazione più pregiata della soluzione, permettendo di calcolare in modo più preciso anche le derivate.

Prestazioni rispetto ad altri *software*

Le prestazioni sono migliori se comparate con altri *software*, specialmente nella risoluzione di problemi con ostacolo.

Possibilità di estensioni

Il progetto, avendo una struttura aperta, si presta molto facilmente ad estensioni. Alcune idee:

- aggiunta di altri derivati finanziari simili

Possibilità di estensioni

Il progetto, avendo una struttura aperta, si presta molto facilmente ad estensioni. Alcune idee:

- aggiunta di altri derivati finanziari simili
- aggiunta di altri modelli finanziari

Possibilità di estensioni

Il progetto, avendo una struttura aperta, si presta molto facilmente ad estensioni. Alcune idee:

- aggiunta di altri derivati finanziari simili
- aggiunta di altri modelli finanziari
- parallelizzazione in memoria distribuita

Possibilità di estensioni

Il progetto, avendo una struttura aperta, si presta molto facilmente ad estensioni. Alcune idee:

- aggiunta di altri derivati finanziari simili
- aggiunta di altri modelli finanziari
- parallelizzazione in memoria distribuita
- estensione al caso con tre sottostanti.

Vi ringraziamo dell'attenzione.