POLITECNICO DI MILANO
Corso di Laurea Magistrale di Ingegneria Matematica
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi

Progetto di Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico:

Option Pricing per modelli Exponential-Lévy in 1d e 2d.

Nahuel Foresta, matr. 798775
Giorgio G. Re, matr. 799260

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Capitolo 2

Modello di Black & Scholes

Introduzione

In questo capitolo descriviamo i modelli basilari utilizzati per descrivere il mercato finanziario, seguendo le argomentazioni di Merton (1973). Consideriamo quindi un mercato finanziario molto semplificato, costituito da un titolo *risk-free* descritto dal processo B e un titolo azionario con valore pari al processo S. Definiamo quindi questi due processi.

Definizione 2.1. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurabile e sia $\mathcal{F}_{t\in[0,T]}$ una filtrazione. Allora, il processo B descrive il valore di un titolo* risk-free *se la sua dinamica è del tipo:*

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

dove r è un qualsiasi processo $\mathcal{F}_t$-adattato.

La caratteristica più importante quindi dei processi *risk-free* è l'assenza del termine $W(t)$, ovvero l'assenza di aleatorietà data da un moto browniano. Integrando infatti l'equazione precedente, otteniamo

$$B(t) = B(0) \int_0^t r(s)ds.$$

Un caso particolare è quello in cui r è una costante deterministica, in tal modo B descrive l'andamento di un'obbligazione.
Assumiamo inoltre che la dinamica di S sia data da:

$$dS(t) = S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t),$$

in cui W_t è un processo di Wiener (cioè, un moto browniano) e α e σ due funzioni deterministiche. La funzione σ è detta volatilità del titolo, α è il *local mean rate of return* ?!?!? di S.

Osservazione 2.1. *Osserviamo la differenza fra il tasso di ritorno di un titolo* risk-free *e quello di un titolo rischioso. Il tasso di B è:*

$$\frac{dB(t)}{B(t)dt} = r(t),$$

ovvero totalmente deterministico, mentre quello di S è dato da:

$$\frac{dS(t)}{S(t)dt} = \alpha t, S(t) + \sigma\frac{dW(t)}{dt},$$

oggetto che non è osservabile al tempo t. Esso è infatti costituito dato da α e σ che sono entrambi osservabili al tempo t, più un rumore bianco $W(t)$ che è del tutto casuale. Quindi, al contrario del titolo risk-free*, l'azione ha un tasso di ritorno stocastico, anche su una scala infinitesima.*

Passiamo ora a definire il modello di *Black&Scholes*.

Definizione 2.2. *Il modello di* Black&Scholes *consiste di due titoli con le seguenti dinamiche:*

$$dB(t) = B(t)r(t)dt, \tag{2.1}$$

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \tag{2.2}$$

dove r, α e σ sono costanti deterministiche.

Strumenti derivati e Opzioni

In questa sezione definiamo gli strumenti derivati e, in particolare le opzioni che abbiamo trattato nel progetto.

Definizione 2.3. *In finanza, è denominato strumento derivato ogni contratto o titolo il cui valore si basa sul valore di mercato di un altro titolo o strumento finanziario, detto sottostante (ad esempio, azioni, valute, tassi di interesse o derivati stessi).*

Definiamo ora il titolo derivato più semplice, ovvero l'opzione *call* europea.

Definizione 2.4. *Un'opzione* call *europea con prezzo di esercizio (o* strike price*) K e scadenza T sul sottostante S è un contratto finanziario derivato con le seguenti caratteristiche:*

- *il titolare del contratto ha, al tempo T, il diritto di acquistare un'azione del sottostante al prezzo K dal sottoscrittore del contratto, qualsiasi sia il valore del sottostante S al tempo T;*
- *il titolare del contratto non ha alcun obbligo di acquistare un'azione del sottostante al tempo T;*
- *il diritto di acquistare un'azione del sottostante può essere esercitato solo al tempo T.*