Metodo a elementi finiti per il pricing di opzioni multi-asset con modelli di Lévy

Progetto di Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico

Nahuel Foresta   Giorigo Re

Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano

30 agosto 2014

Struttura della presentazione

Il progetto

Scopo

Lo scopo è di creare una piccola libreria per il pricing di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, appoggiandosi sulla libreria deal.ii. L'idea è che l'utilizzatore possa sia utilizzare gli oggetti presenti, sia crearne altri con grande facilità nel caso ne avesse bisogno.

Il progetto

Scopo

Lo scopo è di creare una piccola libreria per il pricing di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, appoggiandosi sulla libreria deal.ii. L'idea è che l'utilizzatore possa sia utilizzare gli oggetti presenti, sia crearne altri con grande facilità nel caso ne avesse bisogno.

Motivazioni

La procedura più diffusa in finanza è di usare le differenze finite. Gli elementi finiti, a fronte di una maggiore difficoltà implementativa, risultano essere più vantaggiosi.

Struttura della presentazione

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t,S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t,S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale. Separabile in due pezzi.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

Trasformazioni *price* e *logprice*

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru + \int_{\mathbb{R}} \left(u(t, x+y) - u(t,x) - (e^y - 1)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.
Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

Trasformazioni *price* e *logprice*

Scomposizione della parte integrale

Definendo nel modo seguente le quantità

$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\nu(y)dy$$
$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y)dy$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \hat{\alpha}) S \frac{\partial C}{\partial S} - (r + \hat{\lambda}) C + \int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y)\nu(y)dy = 0$$

Scomposizione della parte integrale

Analogamente per la trasformazione logprice si ha

$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y)dy,$$
$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)\nu(y)dy,$$

con rispettiva equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \hat{\alpha}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \hat{\lambda})u + \int_{\mathbb{R}} u(t, x + y)\nu(y)dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *Price*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r - \hat{\alpha}_1) S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + (r - \hat{\alpha}_2) S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2} S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2}$$
$$+ \rho \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - (r + \lambda_1 + \lambda_2) C$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1, S_2 e^y) \nu_2(y) dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *Logprice*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \hat{\alpha}_1\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}$$
$$+ \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} - \hat{\alpha}_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_2} - (r + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2)u$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1 + y, x_2)\nu_1(y)dy + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1, x_2 + y)\nu_2(y)dy = 0$$

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discetizza nel modo usuale

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discetizza nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i

$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2)\nu_1(y)dy$$

ottenendo una vettore $\mathbf{J}$ funzione di S_i. Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discetizza nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i
$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2)\nu_1(y)dy$$
ottenendo una vettore $\mathbf{J}$ funzione di S_i. Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti
- Per la discretizzazione temporale, viene applicato uno schema di eulero implicito, ma la parte integrale viene lasciata esplicita. Lo schema è stabile se Stabile se $\frac{1}{dt} < \lambda$.

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

Otteniamo dunque il seguente schema, con $\mathbf{C}_h^k$ vettore componenti soluzione al tempo k

$$M_1 \mathbf{C}_h^k = M_2 \mathbf{C}_h^{k+1} + M\mathbf{J}^1 + M\mathbf{J}^2$$

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

Ricordiamo l'integrale da calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y)\nu(y)dy$$

al quale applichiamo il cambio di variabile

$$z = Se^y$$

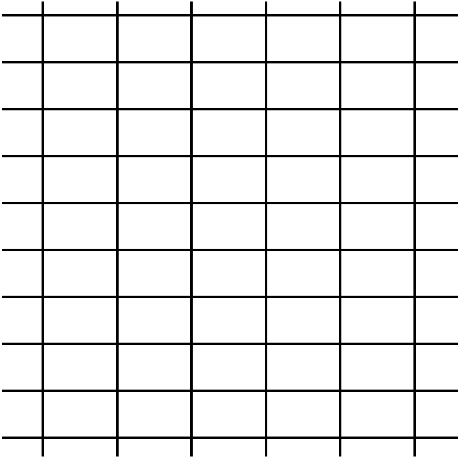


Figura : Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t,z)}{z}\nu\left(\log\left(\frac{z}{S}\right)\right)dz$$

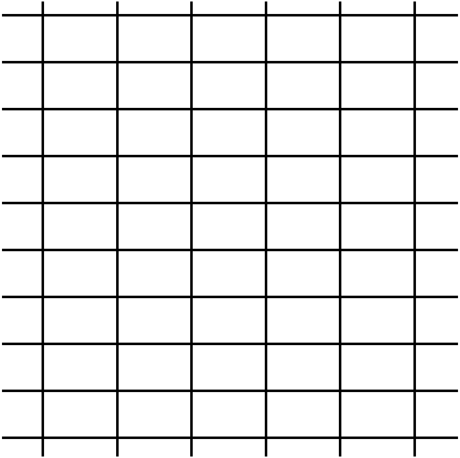


Figura : Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^{\infty} \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella

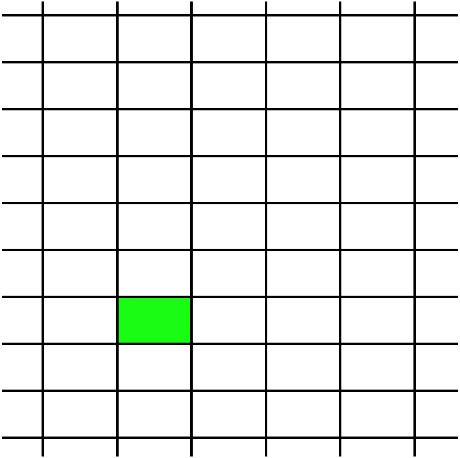


Figura : Poniamoci su una cella

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t,z)}{z}\nu\left(\log\left(\frac{z}{S}\right)\right)dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella
e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- In 1d, a tutti i nodi.
- In 2d, solo a quelli che giaciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Prima sull'asse x.

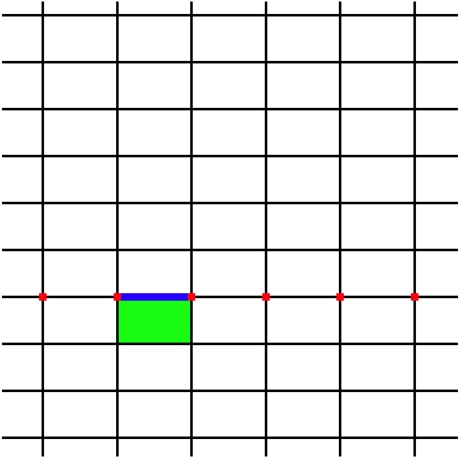


Figura : I contributi della cella ai nodi x

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t,z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella
e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- In 1d, a tutti i nodi.
- In 2d, solo a quelli che giaciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Poi sull'asse y.

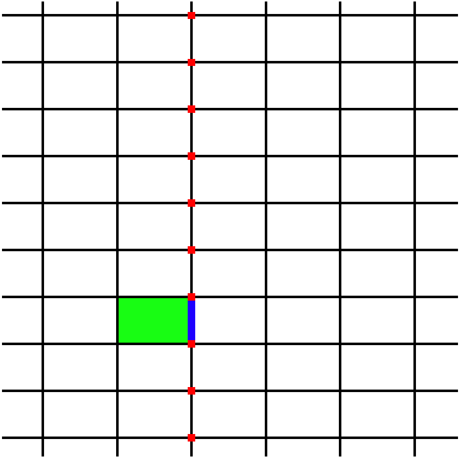


Figura : I contributi della cella ai nodi y

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x+y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal domininio a causa del termine $x+y$

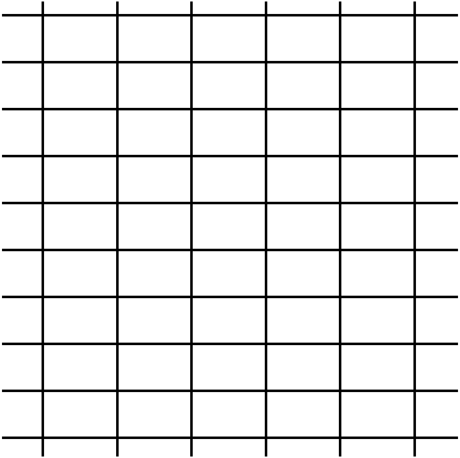


Figura : Una griglia

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x+y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal domininio a causa del termine $x+y$
In questo caso si cicla su tutti i vertici. Selezionato un vertice i,

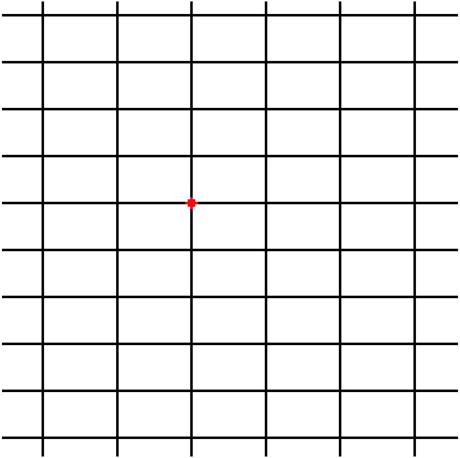


Figura : Poniamoci su un nodo

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x+y)\nu(y)dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal domininio a causa del termine $x+y$
In questo caso si cicla su tutti i vertici. Selezionato un vertice i, si avranno dei nodi di quadratura in direzione x e si quadra su $x_i + z_l$ (in blu), e se la dimensione è due, anche su y lungo $y_i + z_l$.

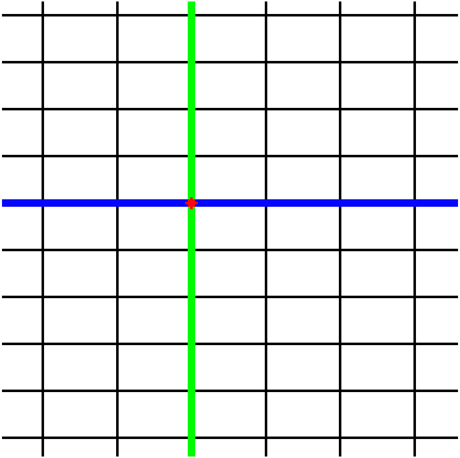


Figura : Calcolo lungo le direzioni

Struttura della presentazione

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria opensource ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria opensource ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

Vantaggi

- Documentazione molto ampia e chiara, a cui si aggiunge la presenza di 51 tutorial programs che illustrano come usare la libreria per problemi tipici
- Organizzata in moduli che coprono le diverse aree di un problema ad elementi finiti (*creazione griglie, algebra lineare, output risultati, etc*)

La nostra implementazione

Tre strutture chiave per il problema

Classi Opzione

Rappresentano il problema e gestiscono creazione griglia, assemblaggio sistema e soluzione.

Classi Model

I vari modelli utilizzati in finanza sono rappresentati con questa classe, la cui interfaccia è stabilita da una classe base astratta.

Classi Integrali

Il calcolo della parte integrale è gestito da queste classi, e le Opzioni salvano un puntatore a un oggetto di questo tipo.

Tutte sfruttanti il meccanismo dell'ereditarietà al fine di COMPLETE HERE

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

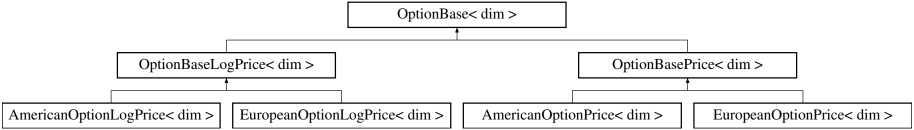


Figura : Schema delle classi Opzione

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.
Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Estensibile

L'utente può sia utilizzare le opzioni già esistenti, che crearne delle nuove partendo dal secondo o dal terzo livello di ereditarietà.

Le classi Integrale

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *logprice*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche ai modelli.

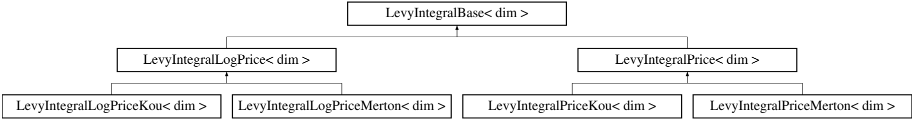


Figura : Schema delle classi LevyIntegral

Le classi Integrale

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *logprice*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche ai modelli.

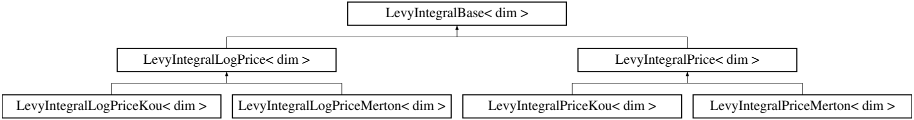


Figura : Schema delle classi LevyIntegral

anything else?

Struttura della presentazione

Qua cosa mettiamo?

Price v.s *LogPrice*

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

Price	*LogPrice*
In 1d molto veloce	In 1d mediamente veloce
In 2d buone performance	In 2d lento
Non parallelizzabile	Parallelizzabile, quindi più veloce di *Price* 1d
No *mesh adapting* in 2d	*Mesh adapting* anche in 2d, migliorando le performance
Troncamento del domionio può introdurre problemi	Nessun problema troncamento dominio

Tabella : Confronto fra *Price* e *LogPrice*

Price v.s LogPrice

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

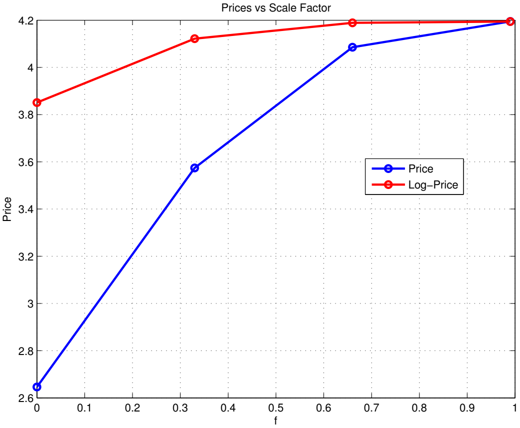
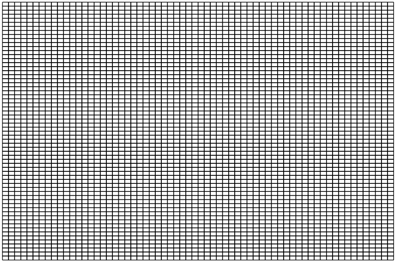


Figura : Convergenza del prezzo per una put al variare dello *scaling factor*

Mesh adaptivity

Utilizzando le funzioni della librearia deal.ii, è facile adattare la griglia:

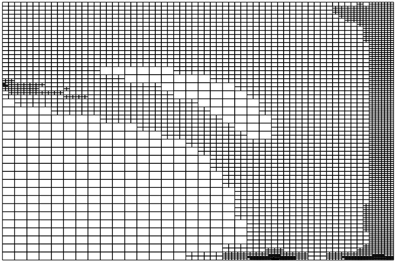


(a) Griglia iniziale

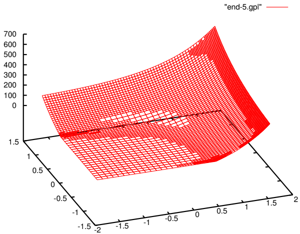
Figura : Adattazione di griglia per una Call Europea 2d in forma *LogPrice*

Mesh adaptivity

Utilizzando le funzioni della librearia deal.ii, è facile adattare la griglia:



(a) Griglia adattata



(b) soluzione adattata

Figura : Adattazione di griglia per una Call Europea 2d in forma *LogPrice*

Struttura della presentazione