

# Table of Contents

1 Introduzione

2 Il problema

3 Struttura del codice

4 Risultati

5 Conclusioni

## Scopo del progetto

Lo scopo è di creare una piccola libreria per il pricing di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, appoggiandosi sulla libreria deal.ii.

### Motivazioni

La procedura più diffusa in finanza è di usare le differenze finite. Gli elementi finiti, seppure leggermente più complicati da implementare, presentano solo vantaggi.

# Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema**
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

## L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left( C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

Con opportune condizioni al contorno.

## L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left( C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

Con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii

## L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left( C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

Con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, trattata in modo esplicito ad ogni passaggio.

## L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left( C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

Con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, trattata in modo esplicito ad ogni passaggio. Separabile in due pezzi.

## L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left( C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

Con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- La parte integrale, trattata in modo esplicito ad ogni passaggio.

Trasformazioni *price* e *logprice*



## L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru + \int_{\mathbb{R}} \left(u(t, x+y) - u(t, x) - (e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial x}\right) \nu(dy) = 0$$

Con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria `deal`.
- La parte integrale, trattata in modo esplicito ad ogni passaggio.

Trasformazioni *price* e *logprice*

## Scomposizione della parte integrale

Definendo in modo seguente le quantità

$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \nu(y) dy$$

$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y) dy$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \hat{\alpha}) S \frac{\partial C}{\partial S} - (r + \hat{\lambda}) C + \int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y) \nu(y) dy = 0$$

## Scomposizione della parte integrale

Analogamente per la trasformazione logprice si ha

$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y) dy,$$
$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \nu(y) dy,$$

con rispettiva equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} - \hat{\alpha} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \hat{\lambda}) u + \int_{\mathbb{R}} u(t, x+y) \nu(y) dy = 0$$

## In due dimensioni

Con la trasformazione *Price*

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + (r - \hat{\alpha}_1)S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + (r - \hat{\alpha}_2)S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2}S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} \\ + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - (r + \lambda_1 + \lambda_2)C \\ + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1, S_2 e^y) \nu_2(y) dy = 0 \end{aligned}$$

## In due dimensioni

Con la trasformazione *logprice*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left( r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \hat{\alpha}_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ + \left( r - \frac{\sigma_2^2}{2} - \hat{\alpha}_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_2} - (r + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) u \\ + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1 + y, x_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1, x_2 + y) \nu_2(y) dy = 0 \end{aligned}$$

# Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice**
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

# La libreria deal.ii

## Libreria deal.ii

Una potente libreria ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da iniziare a utilizzare, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

# La libreria deal.ii

## Libreria deal.ii

Una potente libreria ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da iniziare a utilizzare, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

## Vantaggi

- Documentazione molto ampia e chiara, a cui si aggiunge la presenza di 51 tutorial programs che illustrano come usare la libreria per problemi tipici
- Organizzata in moduli che coprono le diverse aree di un problema ad elementi finiti (*creazione griglie, algebra lineare, output risultati, etc*)



# La nostra implementazione

## Classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, è stata creata una serie classi principale che rappresentano il problema e gestiscono creazione griglia, assemblaggio sistema e soluzione.

# Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati**
- 5 Conclusioni

# Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni