

POLITECNICO DI MILANO
Corso di Laurea Magistrale di Ingegneria Matematica
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi



Progetto di Programmazione Avanzata per il
Calcolo Scientifico:

**Metodo a elementi finiti per il pricing di
opzioni multi-asset con modelli di Lévy**

Nahuel Foresta, matr. 798775
Giorgio G. Re, matr. 799260

Anno Accademico 2012-2013

Indice

1	Modello di Black & Scholes	4
	Strumenti derivati e Opzioni	5
	L'equazione di <i>Black&Scholes</i>	6
	Opzioni Basket	8
	Opzioni Americane: il problema con l'ostacolo	8
	Difetti del modello di <i>Black&Scholes</i>	9
2	Processi di Lévy e Modelli di Kou e Merton	11

Introduzione

Capitolo 1

Modello di Black & Scholes

Introduzione

In questo capitolo descriviamo i modelli basilari utilizzati per descrivere il mercato finanziario, seguendo le argomentazioni di Merton (1973). Consideriamo quindi un mercato finanziario molto semplificato, costituito da un titolo *risk-free* descritto dal processo B e un titolo azionario con valore pari al processo S . Definiamo quindi questi due processi.

Definizione 1.1. *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio misurabile e sia $\mathcal{F}_{t \in [0, T]}$ una filtrazione. Allora, il processo B descrive il valore di un titolo *risk-free* se la sua dinamica è del tipo:*

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

dove r è un qualsiasi processo \mathcal{F}_t -adattato.

La caratteristica più importante quindi dei processi *risk-free* è l'assenza di aleatorietà data da un processo stocastico casuale. Integrando l'equazione precedente, otteniamo:

$$B(t) = B(0) \int_0^t r(s)ds.$$

Un caso particolare è quello in cui r è una costante deterministica, in tal modo B descrive l'andamento di un'obbligazione.

Assumiamo poi che la dinamica di S sia data da:

$$dS(t) = S(t)\mu(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t),$$

in cui W_t è un processo di Wiener (cioè, un moto browniano) e μ e σ due funzioni deterministiche. La funzione σ è detta volatilità del titolo, μ è il *local mean rate of return* di S .

Osservazione 1.1. Osserviamo la differenza fra il tasso di ritorno di un titolo risk-free e quello di un titolo rischioso. Il tasso di B è:

$$\frac{dB(t)}{B(t)dt} = r(t),$$

ovvero totalmente deterministico, mentre quello di S è dato da:

$$\frac{dS(t)}{S(t)dt} = \mu(t, S(t)) + \sigma(t, S(t)) \frac{dW(t)}{dt},$$

oggetto che non è osservabile al tempo t . Esso è infatti costituito da μ e σ che sono entrambi osservabili al tempo t , più un rumore bianco $W(t)$ che è del tutto casuale. Quindi, al contrario del titolo risk-free, l'azione ha un tasso di ritorno stocastico, anche su una scala infinitesima.

Passiamo ora a definire il modello di Black&Scholes.

Definizione 1.2. Il modello di Black&Scholes consiste di due titoli con le seguenti dinamiche:

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)dt, \\ dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \end{aligned}$$

dove r , μ e σ sono costanti deterministiche.

Strumenti derivati e Opzioni

In questa sezione definiamo gli strumenti derivati e, in particolare le opzioni che abbiamo trattato nel progetto.

Definizione 1.3. In finanza, è denominato strumento derivato ogni contratto o titolo il cui valore si basa sul valore di mercato di un altro titolo o strumento finanziario, detto sottostante (ad esempio, azioni, valute, tassi di interesse o derivati stessi).

Definiamo ora il titolo derivato più semplice, ovvero l'opzione call europea.

Definizione 1.4. Un'opzione call europea con prezzo di esercizio (o strike price) K e scadenza T sul sottostante S è un contratto finanziario derivato con le seguenti caratteristiche:

- il titolare del contratto ha, al tempo T , il diritto di acquistare un'azione del sottostante al prezzo K dal sottoscrittore del contratto, qualsiasi sia il valore del sottostante S al tempo T ;
- il titolare del contratto non ha alcun obbligo di acquistare un'azione del sottostante al tempo T ;

- il diritto di acquistare un'azione del sottostante può essere esercitato solo al tempo T .

Osserviamo che la scadenza del contratto e il prezzo d'esercizio sono stabiliti alla stipula del contratto, che per noi sarà tipicamente $t = 0$.

Oltre alle opzioni *call* europee, esistono opzioni *put* europee, le quali danno al titolare del contratto il diritto a vendere (anziché comprare) un dato titolo azionario a un prezzo fissato K . Le opzioni americane invece (*call* o *put* che siano), permettono di esercitare il diritto all'acquisto o alla vendita dell'azione in ogni istante di tempo $t \in [0, T]$.

Esempio 1.1. Supponiamo di possedere un'opzione *call* con scadenza $T = 1$ anno, strike price $K = 100\text{€}$ e un sottostante che al tempo $t = 0$ vale $S_0 = 100\text{€}$. Allora, se fra un anno $S_T = 120\text{€}$, eserciteremo l'opzione, acquistando il sottostante per un prezzo pari a $K = 100\text{€}$, e il sottoscrittore del contratto pagherà i rimanenti $S_T - K = 20\text{€}$. Se invece $S_T = 80\text{€}$ non eserciteremo l'opzione, ottenendo un guadagno pari a 0.

Osserviamo quindi che il valore a scadenza, cioè il *payoff*, dell'opzione dipende soltanto dal valore del sottostante. Definiamo quindi il *payoff* come processo stocastico in funzione di S .

Definizione 1.5. Sia S il processo stocastico che descrive l'andamento di un titolo azionario, allora il payoff di un'opzione scritta su S con scadenza T e strike K è un processo stocastico $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_t$, e:

$$\mathcal{X} = \Phi(S_T).$$

Per esempio, il *payoff* delle opzioni *call* e *put* europee è:

$$\begin{aligned}\Phi(S_T) &= \max(S_T - K, 0), \\ \Phi(S_T) &= \max(K - S_T, 0).\end{aligned}$$

La domanda che ci poniamo ora è la seguente: qual è il prezzo equo di un'opzione? Ovvero, quanto occorre pagare oggi per avere il diritto ma non l'obbligo di acquistare al tempo T un'azione a un prezzo fissato K ?

L'equazione di *Black&Scholes*

Vi sono molti modi per ricavare l'equazione di *Black&Scholes*: presentiamo qui il modo più semplice e veloce.

Prima di ricavare l'equazione spendiamo qualche riga per descrivere il concetto di neutralità al rischio in finanza. Un operatore economico si dice neutrale al rischio quando le sue preferenze lo rendono indifferente al compiere un'azione il cui risultato è una quantità aleatoria, oppure compiere

un'azione il cui risultato è il valore atteso della quantità aleatoria stessa. Per esempio, per un soggetto neutrale al rischio sono indifferenti le seguenti situazioni:

- avere 1€ con probabilità 1;
- giocare a una lotteria in cui il soggetto può ricevere 2€ con probabilità $1/2$ o 0€ con probabilità $1/2$.

Nel primo caso infatti, egli ottiene sempre 1€, nel secondo ottiene in media 1€. Perciò per un soggetto neutrale al rischio queste situazioni sono indifferenti.

Quando ci occupiamo di *pricing* di derivati, ci poniamo sempre nell'ipotesi di neutralità al rischio. In particolare,

1. assumiamo che il termine di deriva μ del modello S sia pari al tasso di interesse *risk-free* r , cioè poniamo:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t);$$

2. calcoliamo il valore atteso del *payoff*, cioè $\mathbb{E}(\Phi(S_T))$;
3. scontiamo il valore atteso del *payoff* con il tasso di interesse r .

Sia quindi $C : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $C = C(S(t), t)$ il processo stocastico che descrive il valore di un'opzione. In particolare, se consideriamo una *call* europea,

$$C(S, t) = e^{(-r(T-t))} \mathbb{E}(\max(S_T - K, 0)).$$

Applicando a questa quantità il Lemma di Itô, otteniamo la seguente equazione:

$$dC(S, t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dW(t).$$

Dall'altro lato però, per la *risk-neutrality*, la deriva di C , come quella di ogni titolo finanziario, dovrà essere pari a rC , quindi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC.$$

Riassumendo, posti $C = C(S, t)$ e $P = P(S, t)$ i processi che descrivono il prezzo di opzioni *call* e *put*, otteniamo le seguenti equazioni alle derivate parziali con le rispettive condizioni finali e condizioni al bordo:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \\ C(S, T) = \max(S_T - K, 0), \\ C(0, t) = 0, & \forall t \in [0, T], \\ \lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = \infty, & \forall t \in [0, T], \end{cases} \quad (1.1)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + rS \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2} P^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP, \\ P(S, T) = \max(K - S_T, 0), \\ P(0, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T] \\ \lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Come possiamo osservare, si tratta di equazioni paraboliche *backward* con dato finale. Il prezzo dell'opzione al tempo $t = 0$ sarà dato dalla soluzione C o P , valutate in $S_t = S_0$, ovvero il valore dell'azione oggi e in $t = 0$.

Opzioni Basket

Un altro tipo di opzioni scambiate sui mercati finanziari sono le opzioni basket, il cui *payoff* dipende cioè da due o più sottostanti. In particolare, in questo progetto ci siamo concentrati sul *pricing* di opzioni basket 2D, con i seguenti valori finali:

$$C(S_1, S_2, T) = \max(S_{1,T} + S_{2,T} - K, 0)$$

per la *call* e:

$$P(S_1, S_2, T) = \max(K - S_{1,T} - S_{2,T}, 0)$$

per la *put*, dove $S_{1,T}$ e $S_{2,T}$ sono i valori al tempo T dei due sottostanti S_1 e S_2 .

L'equazione che si ottiene con procedimenti analoghi a quelli mostrati nella sezione precedente è la seguente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2} S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} = rC,$$

in cui $C : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $C = C(S_1(t), S_2(t), t)$, σ_1 e σ_2 sono le volatilità dei due sottostanti e ρ è il coefficiente di correlazione fra S_1 e S_2 .

Opzioni Americane: il problema con l'ostacolo

Le opzioni americane differiscono dalle europee poiché consentono di esercitare l'opzione non solo in T , bensì in qualsiasi istante di tempo dalla stipula del contratto alla sua scadenza. In particolare, nel caso monodimensionale, occorre aggiungere ai problemi 1.1 e 1.2 rispettivamente i seguenti vincoli:

$$C(S, t) \geq \max(S_t - K, 0), \quad \forall t \in [0, T],$$

e

$$P(S, t) \geq \max(K - S_t, 0), \quad \forall t \in [0, T].$$

Difetti del modello di *Black&Scholes*

Il modello di *Black&Scholes*, nonostante sia molto utilizzato in finanza, presenta alcuni problemi e può essere pericoloso utilizzarlo per valutare strumenti derivati. In particolare, empiricamente, si evidenziano le seguenti problematiche:

- il valore di S può essere discontinuo, ovvero è possibile che il sottostante presenti dei "salti";
- le code della distribuzione dei log-rendimenti dovrebbero essere normali, ma non lo sono: i valori delle code sono infatti più probabili di quanto ipotizzato dal modello, inoltre le code non sono simmetriche poiché presentano un'asimmetria verso i rendimenti negativi;
- i log-rendimenti inoltre non hanno distribuzioni indipendenti: nelle serie storiche si osservano infatti i cosiddetti *cluster*, ovvero periodi in cui la volatilità è alta e rimane alta oppure periodi con una volatilità che rimane per ridotta per lungo tempo;
- in figura 1.1 è rappresentato il grafico volatilità vs. *moneyness*¹. In esso possiamo osservare che il valore della volatilità non rimane costante al variare dei prezzi di esercizio, bensì presenta una forma convessa. Questo fenomeno è noto come *smile* di volatilità.

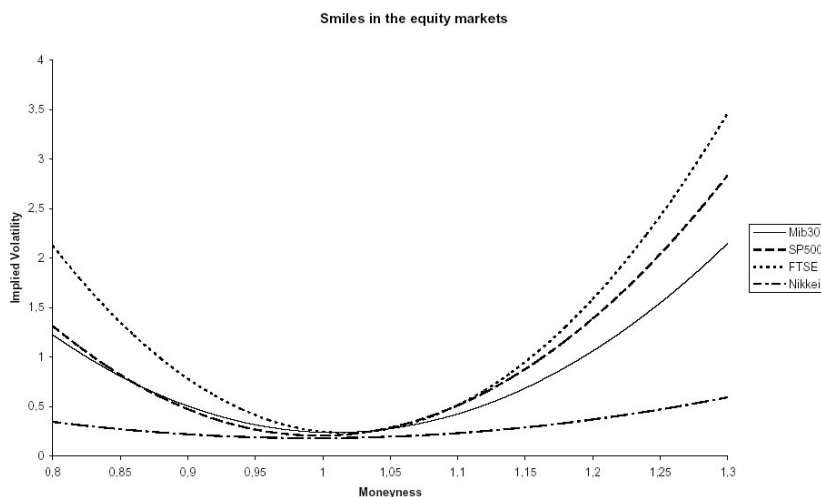


Figura 1.1: *Smile* di volatilità

¹La *moneyness* di un'opzione è il rapporto fra prezzo del sottostante in $t = 0$ e *Strike*, ovvero S_0/K .

Nel prossimo capitolo introdurremo una classe più ampia di processi stocastici, cioè i processi di Lévy, e descriveremo dei modelli che permettono di risolvere alcuni dei problemi sopra descritti. Questi modelli danno luogo a equazioni simili a quella di *Black&Scholes* (PDE) con l'aggiunta però di un termine integrale, per questo le chiameremo Equazioni Integro-Differenziali alle Derivate Parziali (PIDE).

Capitolo 2

Processi di Lévy e Modelli di Kou e Merton