POLITECNICO DI MILANO
Corso di Laurea Magistrale di Ingegneria Matematica
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi

Progetto di Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico:

Metodo a elementi finiti per il pricing di opzioni multi-asset con modelli di Lévy

Nahuel Foresta, matr. 798775
Giorgio G. Re, matr. 799260

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Introduzione

Capitolo 1

Modello di Black & Scholes

Introduzione

In questo capitolo descriviamo i modelli basilari utilizzati per descrivere il mercato finanziario, seguendo le argomentazioni di Merton (1973). Consideriamo quindi un mercato finanziario molto semplificato, costituito da un titolo *risk-free* descritto dal processo B e un titolo azionario con valore pari al processo S. Definiamo quindi questi due processi.

Definizione 1.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio misurabile e sia* $\mathcal{F}_{t\in[0,T]}$ *una filtrazione. Allora, il processo* B *descrive il valore di un titolo* risk-free *se la sua dinamica è del tipo:*

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

dove r *è un qualsiasi processo* $\mathcal{F}_t$*-adattato.*

La caratteristica più importante quindi dei processi *risk-free* è l'assenza di aleatorietà data da un processo stocastico casuale. Integrando l'equazione precedente, otteniamo:

$$B(t) = B(0) \int_0^t r(s)ds.$$

Un caso particolare è quello in cui r è una costante deterministica, in tal modo B descrive l'andamento di un'obbligazione.

Assumiamo poi che la dinamica di S sia data da:

$$dS(t) = S(t)\mu(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t),$$

in cui W_t è un processo di Wiener (cioè, un moto browniano) e μ e σ due funzioni deterministiche. La funzione σ è detta volatilità del titolo, μ è il *local mean rate of return* ?!?!? di S.

Osservazione 1.1. *Osserviamo la differenza fra il tasso di ritorno di un titolo* risk-free *e quello di un titolo rischioso. Il tasso di* B *è:*

$$\frac{dB(t)}{B(t)dt} = r(t),$$

ovvero totalmente deterministico, mentre quello di S è dato da:

$$\frac{dS(t)}{S(t)dt} = \mu(t, S(t)) + \sigma(t, S(t))\frac{dW(t)}{dt},$$

oggetto che non è osservabile al tempo t. Esso è infatti costituito da μ e σ che sono entrambi osservabili al tempo t, più un rumore bianco $W(t)$ che è del tutto casuale. Quindi, al contrario del titolo risk-free*, l'azione ha un tasso di ritorno stocastico, anche su una scala infinitesima.*

Passiamo ora a definire il modello di *Black&Scholes*.

Definizione 1.2. *Il modello di* Black&Scholes *consiste di due titoli con le seguenti dinamiche:*

$$\begin{aligned} dB(t) &= rB(t)dt, \\ dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \end{aligned}$$

dove r, μ e σ sono costanti deterministiche.

Strumenti derivati e Opzioni

In questa sezione definiamo gli strumenti derivati e, in particolare le opzioni che abbiamo trattato nel progetto.

Definizione 1.3. *In finanza, è denominato strumento derivato ogni contratto o titolo il cui valore si basa sul valore di mercato di un altro titolo o strumento finanziario, detto sottostante (ad esempio, azioni, valute, tassi di interesse o derivati stessi).*

Definiamo ora il titolo derivato più semplice, ovvero l'opzione *call* europea.

Definizione 1.4. *Un'opzione* call *europea con prezzo di esercizio (o* strike price*) K e scadenza T sul sottostante S è un contratto finanziario derivato con le seguenti caratteristiche:*

- *il titolare del contratto ha, al tempo T, il diritto di acquistare un'azione del sottostante al prezzo K dal sottoscrittore del contratto, qualsiasi sia il valore del sottostante S al tempo T;*
- *il titolare del contratto non ha alcun obbligo di acquistare un'azione del sottostante al tempo T;*
- *il diritto di acquistare un'azione del sottostante può essere esercitato solo al tempo T.*

Osserviamo che la scadenza del contratto e il prezzo d'esercizio sono stabiliti alla stipula del contratto, che per noi sarà tipicamente $t = 0$.
Oltre alle opzioni *call* europee, esistono opzioni *put* europee, le quali danno al titolare del contratto il diritto a vendere (anziché comprare) un dato titolo azionario a un prezzo fissato K. Le opzioni americane invece (*call* o *put* che siano), permettono di esercitare il diritto all'acquisto o alla vendita dell'azione in ogni istante di tempo $t \in [0, T]$.

Esempio 1.1. *Supponiamo di possedere un'opzione* call *con scadenza* $T = 1$ *anno,* strike price $K = 100$€ *e un sottostante che al tempo* $t = 0$ *vale* $S_0 = 100$€*. Allora, se fra un anno* $S_T = 120$€*, eserciteremo l'opzione, acquistando il sottostante per un prezzo pari a* $K = 100$€*, e il sottoscrittore del contratto pagherà i rimenenti* $S_T - K = 20$€*. Se invece* $S_T = 80$€ *non eserciteremo l'opzione, ottenendo un guadagno pari a 0.*

Osserviamo quindi che il valore a scadenza, cioè il *payoff*, dell'opzione dipende soltanto dal valore del sottostante. Definiamo quindi il *payoff* come processo stocastico in funzione di S.

Definizione 1.5. *Sia* S *il processo stocastico che descrive l'andamento di un titolo azionario, allora il* payoff *di un'opzione scritta su* S *con scadenza* T *e* strike K *è un processo stocastico* $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_t$*, e:*

$$\mathcal{X} = \Phi(S_T).$$

Per esempio, il *payoff* delle opzioni call e put europee è:

$$\Phi(S_T) = max(S_T - K, 0),$$
$$\Phi(S_T) = max(K - S_T, 0).$$

La domanda che ci poniamo ora è la seguente: qual è il prezzo equo di un'opzione? Ovvero, quanto occorre pagare oggi per avere il diritto ma non l'obbligo di acquistare al tempo T un'azione a un prezzo fissato K?

L'equazione di *Black&Scholes*

Vi sono molti modi per ricavare l'equazione di *Black&Scholes*: presentiamo qui il modo più semplice e veloce.

Prima di ricavare l'equazione spendiamo qualche riga per descrivere il concetto di neutralità al rischio in finanza. Un operatore economico si dice neutrale al rischio quando le sue preferenze lo rendono indifferente al compiere un'azione il cui risultato è una quantità aleatoria, oppure compiere un'azione il cui risultato è il valore atteso della quantità aleatoria stessa.
Per esempio, per un soggetto neutrale al rischio sono indifferenti le seguenti situazioni:

- avere 1€ con probabilità 1;
- giocare a una lotteria in cui il soggetto può ricevere 2€ con probabilità $1/2$ o 0€ con probabilità $1/2$.

Nel primo caso infatti, egli ottiene sempre 1€, nel secondo ottiene in media 1€. Perciò per un soggetto neutrale al rischio queste situazioni sono indifferenti.
Quando ci occupiamo di *pricing* di derivati, ci poniamo sempre nell'ipotesi di neutralità al rischio. In particolare,

1. assumiamo che il termine di deriva μ del modello S sia pari al tasso di interesse *risk-free* r, cioè poniamo:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t);$$

2. calcoliamo il valore atteso del *payoff*, cioè $\mathbb{E}(\Phi(S_T))$;
3. scontiamo il valore atteso del *payoff* con il tasso di interesse r.

Sia quindi $C : \mathbb{R}^+ \times [0,T] \to \mathbb{R}^+$, $C = C(S(t),t)$ il processo stocastico che descrive il valore di un'opzione. In particolare, se consideriamo una *call* europea,

$$C(S,t) = e^{(-r(T-t))}\mathbb{E}\left(max(S_T - K, 0)\right).$$

Applicando a questa quantità il Lemma di Itô, otteniamo la seguente equazione:

$$dC(S,t) = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dW(t).$$

Dall'altro lato però, per la *risk-neutrality*, la deriva di C, come quella di ogni titolo finanziario, dovrà essere pari a rC, quindi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC.$$

Riassumendo, posti $C = C(S,t)$ e $P = P(S,t)$ i processi che descrivono il prezzo di opzioni *call* e *put*, otteniamo le seguenti equazioni alle derivate parziali con le rispettive condizioni finali e condizioni al bordo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + rS\dfrac{\partial C}{\partial S} + \dfrac{1}{2}S^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC, \\ C(S,T) = max(S_T - K, 0), \\ C(0,t) = 0, & \forall t \in [0,T], \\ \lim\limits_{S\to\infty} C(S,t) = \infty, & \forall t \in [0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + rS\dfrac{\partial P}{\partial S} + \dfrac{1}{2}P^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP, \\ P(S,T) = max(K - S_T, 0), \\ P(0,t) = K, & \forall t \in [0,T] \\ \lim\limits_{S\to\infty} P(S,t) = 0, & \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Come possiamo osservare, si tratta di equazioni paraboliche *backword* con dato finale. Il prezzo dell'opzione al tempo $t = 0$ sarà dato dalla soluzione C o P, valutate in $S_t = S_0$, ovvero il valore dell'azione oggi e in $t = 0$.

Opzioni Basket

Un altro tipo di opzioni scambiate sui mercati finanziari sono le opzioni basket, il cui *payoff* dipende cioè da due o più sottostanti. In particolare, in questo progetto ci siamo concentrati sul *pricing* di opzioni basket 2D, con i seguenti valori finali:

$$C(S_1, S_2, T) = max(S_{1,T} + S_{2,T} - K, 0)$$

per la *call* e:

$$P(S_1, S_2, T) = max(K - S_{1,T} - S_{2,T}, 0)$$

per la *put*, dove $S_{1,T}$ e $S_{2,T}$ sono i valori al tempo T dei due sottostanti S_1 e S_2. L'equazione che si ottiene con procedimenti analoghi a quelli mostrati nella sezione precedente è la seguente:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+rS_1\frac{\partial C}{\partial S_1}+rS_2\frac{\partial C}{\partial S_2}+\frac{\sigma_1^2}{2}S_1^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{2}S_2^2\frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2}+\rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 C}{\partial S_1\partial S_2}=rC, \quad (1.3)$$

in cui $C : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0,T] \to \mathbb{R}^+$, $C = C(S_1(t), S_2(t), t)$, σ_1 e σ_2 sono le volatilità dei due sottostanti e ρ è il coefficiente di correlazione fra S_1 e S_2.

Opzioni Americane: il problema con frontiera libera

Le opzioni americane differiscono dalle europee poiché consentono di esercitare l'opzione non solo in T, bensì in qualsiasi istante di tempo dalla stipula del contratto alla sua scadenza. Quindi, proprio perché danno al titolare del contratto dei diritti aggiuntivi, è facile capire che vale la seguente relazione:

$$V^{Am} \geq V^{Eu},$$

ovvero il valore di un'opzione americana è sempre superiore al valore dell'europea corrispondente. In particolare, il valore dell'opzione americana è sempre pari o superiore al valore del *payoff*. L'opzione europea infatti, può avere un valore inferiore al *payoff*, ma questo non può succedere per le americane. Infatti, se così non fosse, potremmo acquistare un'azione e una *put* su questa azione ed esercitare immediatamente, ottenendo un guadagno certo senza correre alcun rischio. Per questo valgono i seguenti vincoli:

$$C^{Am}(S,t) \geq max(S_T - K, 0) \qquad \forall t \in [0,T], \quad (1.4)$$

$$P^{Am}(S,t) \geq max(K - S_T, 0) \qquad \forall t \in [0,T]. \quad (1.5)$$

disegnino 4.5 Seydel pag. 159

Consideriamo ora il comportamento della *put* nella parte sinistra del grafico riportato in figura ***. Senza la possibiltà di esercizio anticipato, $P^{Eu} < K-S$, ma per la disuguaglianza 1.5, $P^{Am} = K - S$. Nella parte destra della curva, invece, vale $P^{Am} \geq max(K - S, 0)$. Quindi, per la continuità e la monotonia di P^{Am}, la curva dovrà toccare il *payoff* in un punto $S_f(t)$, $0 < S_f(t) < K$. Questo punto è definito da:

$$P^{Am}(S,t) > max(K - S, 0) \qquad S > S_f(t),$$

$$P^{Am}(S,t) = K - S \qquad S < S_f(t).$$

Quindi, $\forall t \in [0,T]$, dobbiamo determinare il punto $S_f(t)$, attraverso il quale passa la retta che separa l'area in cui P^{Am} =*payoff* da qualla in cui P^{Am} >*payoff*. Poiché a priori questa frontiera è ignota, questo problema è detto "a frontiera libera".

Per le *call* americane la situazione è differente, poiché $C^{Eu} \geq max(S_T - K, 0)$[1].

[1] Questa relazione si calcola immediatamente sfruttando alcune semplici relazioni che legano C, S e K. In particolare, nel qual caso: $C^{Am} \geq C^{Eu} \geq S - Ke^{-r(T-t)} > S - K$

Perciò il prezzo di una *call* americana è identico a quello di un'europea quindi non si pone in questo caso il problema con frontiera libera.

Formalmente, l'equazione differenziale che occorre risolvere per trovare il prezzo di una *put* americana è la seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + rS\dfrac{\partial P}{\partial S} + \dfrac{1}{2}P^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial S^2} \leq rP, \\ P(S,t) \geq max(K - S_T, 0), \\ P(S,T) = max(K - S_T, 0), \\ P(0,t) = K, \qquad \forall t \in [0,T] \\ \lim\limits_{S\to\infty} P(S,t) = 0, \qquad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{1.6}$$

Difetti del modello di ***Black&Scholes***

Il modello di *Black&Scholes*, nonostante sia molto utilizzato in finanza, presenta alcuni problemi e può essere pericoloso utilizzarlo per valutare strumenti derivati. In particolare, empiricamente, si evidenziano le seguenti problematiche:

- il valore di S può essere discontinuo, ovvero è possibile che il sottostante presenti dei "salti";
- le code della distribuzione dei log-rendimenti dovrebbero essere normali, ma non lo sono: i valori delle code sono infatti più probabili di quanto ipotizzato dal modello, inoltre le code non sono simmetriche poiché presentano un'asimmetria verso i rendimenti negativi;
- i log-rendimenti inoltre non hanno distribuzioni indipendenti: nelle serie storiche si osservano infatti i cosiddetti *cluster*, ovvero periodi in cui la volatilità è alta e rimane alta oppure periodi con una volatilità che rimane per ridotta per lungo tempo;
- in figura 1.1 è rappresentato il grafico volatilità vs. *moneyness*[2]. In esso possiamo osservare che il valore della volatilità non rimane costante al variare dei prezzi di esercizio, bensì presenta una forma convessa. Questo fenomeno è noto come *smile* di volatilità.

Nel prossimo capitolo introdurremo una classe più ampia di processi stocastici, cioè i processi di Lévy, e descriveremo dei modelli che permettono di risolvere alcuni dei problemi sopra descritti. Questi modelli danno luogo a equazioni simili a quella di *Black&Scholes* (PDE) con l'aggiunta però di un termine integrale, per questo le chiameremo Equazioni Integro-Differenziali alle Derivate Parziali (PIDE).

[2] La *moneyness* di un'opzione è il rapporto fra prezzo del sottostante in $t = 0$ e *Strike*, ovvero S_0/K.

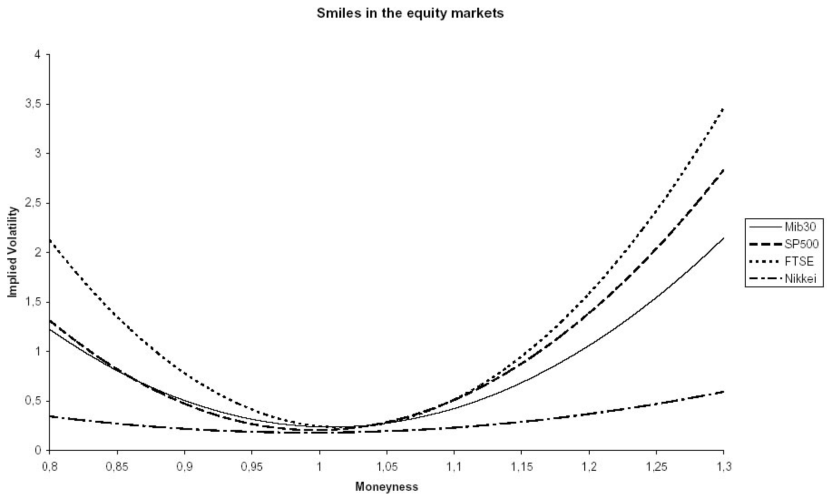

Figura 1.1: *Smile* di volatilità

Capitolo 2

Processi di Lévy e Modelli di Kou e Merton

Introduzione

In questo secondo capitolo introduciamo i processi di Lévy, una classe più ampia di processi stocastici che permettono di descrivere con più accuratezza il comportamento di un titolo azionario. Elenchiamo ora alcune definizioni e un teorema che ci permettono di definire i nuovi modelli.

Definizione 2.1. *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *uno spazio misurabile e sia* $\mathcal{F}_{t\in[0,T]}$ *una filtrazione. Sia* X_t *un processo stocastico* cadlag[1], *allora* X_t *è di Lévy se:*

1. $X_0 = 0$,
2. *ha incrementi indipendenti,*
3. *ha incrementi stazionari,*
4. *c'è continuità stocastica.*

Definizione 2.2. *Sia* X_t *un Lévy, allora poniamo*

$$\nu(A) = \mathbb{E}(\#\{t \in [0,1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}),$$

$\forall A \in \mathcal{B}$, *e chiamiamo* $\nu(A)$ *la misura di Lévy di* X_t.

Definizione 2.3. *Sia* X_t *un processo di Lévy (è un LEVY?!?!?!?), allora* X_t *è un* Compound Poisson *di intensità* λ *e distribuzione di salti* f *se*

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

dove $N_t \sim$Poisson(λ) *e* $Y_i \sim f$, Y_i *i.i.d.* $\forall i$.

[1] Ricordiamo che un processo è detto *cadlag* se ha traiettorie continue a destra e limitate a sinistra.

Teorema 2.1. *Decomposizione di Lévy-Itô.*
Sia X_t un processo di Lévy con misura ν finita, allora esistono due costanti γ e σ tali che:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + X_t^C,$$

dove W_t è un moto browniano e X_t^C un Compound Poisson.

Perciò un processo di Lévy è determinato univocamente dalla sua tripletta caratteristica (γ, σ, ν).

Modelli di Merton e Kou

Passiamo ora a definire i modelli di Merton e Kou. In entrambi questi modelli il prezzo dell'azione è descritto dalla seguente equazione:

$$S_t = S_0 e^{rt+X_t}, \tag{2.1}$$

dove r è il tasso di interesse e X_t è un Lévy, ovvero

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

Nel modello di Merton, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$, e la misura di Lévy è data da:

$$\nu(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}\right\},$$

in cui λ è l'intensità del *Poisson*.
Nel modello di Kou invece, le Y_i sono delle esponenziali con parametri diversi per salti positivi e negativi. In particolare,

$$\nu(x) = p\lambda\lambda_+ e^{\lambda_+ x}\mathcal{I}_{x>0} + (1-p)\lambda\lambda_- e^{-\lambda_- x}\mathcal{I}_{x<0},$$

dove p è la probabilità di salti positivi, λ è il solito parametro del *Poisson*, λ_+ e λ_- sono invece le intensità dei salti positivi e negativi.

Pricing con modelli Exponential Lévy

Riportiamo ora un risultato che permette di individuare un'equazione differenziale che permetta di risolvere il problema di *pricing* descritto nel capitolo precedente.

Teorema 2.2. *Sia S_t nella forma 2.1 con l'ipotesi:*

$$\int_{|x|>1} e^{2x}\nu(dx) < \infty.$$

Sia $C : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \to \mathbb{R}^+$, $C = C(S_t, t)$ nella forma:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}(\Phi(S_t)),$$

dove Φ *è un* payoff Lipshitz *che dipende dall'unico sottostante* S_t*. Allora* C *soddisfa l'equazione:*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + r \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0. \quad (2.2)$$

Per quanto riguarda opzioni su due *asset*, l'equazione 1.3 diventa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + rS_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2} S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - rC \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, S_1 e^y, S_2) - C(t, S_1, S_2) - S_1(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S_1}(t, S_1, S_2) \right) \nu_1(dy) \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, S_1, S_2 e^y) - C(t, S_1, S_2) - S_2(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S_2}(t, S_1, S_2) \right) \nu_2(dy) = 0, \quad (2.3)$$

dove S_1 e S_2 sono i due sottostanti descritti da modelli Exponential Lévy, rispettivamente con misure ν_1 e ν_2.

Capitolo 3

Discretizzazione

Di solito sempre FD, però si possono usare FEM. Tuttavia per 2d non è mai stato fatto nulla da un punto di vista numerico. Perché FEM? Possiamo raffinare, possiamo estendere in 3d (log price facile).

Capitolo 4

Pacchetti usati

Cmake (molto comodo perché abbiamo due piattaforme diverse ma funziona tutto perfettamente)
Doxygen
git (molto comodo per poterlo usare in 2)
deal ii → utilità offerte, pregi, difetti, come usarla, tutorial, eventualmente tutta la documentazione, gruppo molto attivo (abbiamo avuto una difficoltà ma l'abbiamo risolta subito)

Capitolo 5

Codice

Capitolo 6

Risultati

Capitolo 7

Estensioni

Aggiungere altri modelli (NIG, VG), provare altre opzioni, farlo in 3d, Heston?, memoria distribuita.