

Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

Il progetto

Scopo

Lo scopo è di creare una piccola libreria per il pricing di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, appoggiandosi sulla libreria deal.ii. L'idea è che l'utilizzatore possa sia utilizzare gli oggetti presenti, sia crearne altri con grande facilità nel caso ne avesse bisogno.

Il progetto

Scopo

Lo scopo è di creare una piccola libreria per il pricing di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, appoggiandosi sulla libreria deal.ii. L'idea è che l'utilizzatore possa sia utilizzare gli oggetti presenti, sia crearne altri con grande facilità nel caso ne avesse bisogno.

Motivazioni

La procedura più diffusa in finanza è di usare le differenze finite. Gli elementi finiti, a fronte di una maggiore difficoltà implementativa, risultano essere più vantaggiosi.

Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema**
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

L'equazione da risolvere

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0 \end{aligned}$$

con opportune condizioni al contorno.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria `deal.ii`

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria `deal`.
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria `deal`.
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale. Separabile in due pezzi.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria `deal`.
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

Trasformazioni *price* e *logprice*

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru + \int_{\mathbb{R}} \left(u(t, x+y) - u(t, x) - (e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial x}\right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti

- La parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria `deal`.
- La parte integrale, che necessita di un trattamento speciale.

Trasformazioni *price* e *logprice*

Scomposizione della parte integrale

Definendo nel modo seguente le quantità

$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \nu(y) dy$$

$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y) dy$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \hat{\alpha}) S \frac{\partial C}{\partial S} - (r + \hat{\lambda}) C + \int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y) \nu(y) dy = 0$$

Scomposizione della parte integrale

Analogamente per la trasformazione logprice si ha

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \int_{\mathbb{R}} \nu(y) dy, \\ \hat{\alpha} &= \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \nu(y) dy,\end{aligned}$$

con rispettiva equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \hat{\alpha}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \hat{\lambda})u + \int_{\mathbb{R}} u(t, x + y) \nu(y) dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *Price*

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + (r - \hat{\alpha}_1)S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + (r - \hat{\alpha}_2)S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2}S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} \\ + \rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - (r + \lambda_1 + \lambda_2)C \\ + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1, S_2 e^y) \nu_2(y) dy = 0 \end{aligned}$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *Logprice*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \hat{\alpha}_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} - \hat{\alpha}_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_2} - (r + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) u \\ + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1 + y, x_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1, x_2 + y) \nu_2(y) dy = 0 \end{aligned}$$

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discretizza nel modo usuale

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discretizza nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i

$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy$$

ottenendo una vettore \mathbf{J} funzione di S_i . Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la si discretizza nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i

$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy$$

ottenendo una vettore \mathbf{J} funzione di S_i . Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti

- Per la discretizzazione temporale, viene applicato uno schema di eulero implicito, ma la parte integrale viene lasciata esplicita. Lo schema è stabile se $\frac{1}{dt} < \lambda$.

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

Otteniamo dunque il seguente schema, con \mathbf{C}_h^k vettore componenti soluzione al tempo k

$$M_1 \mathbf{C}_h^k = M_2 \mathbf{C}_h^{k+1} + M \mathbf{J}^1 + M \mathbf{J}^2$$

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

Ricordiamo l'integrale da calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y) \nu(y) dy$$

al quale applichiamo il cambio di variabile

$$z = Se^y$$

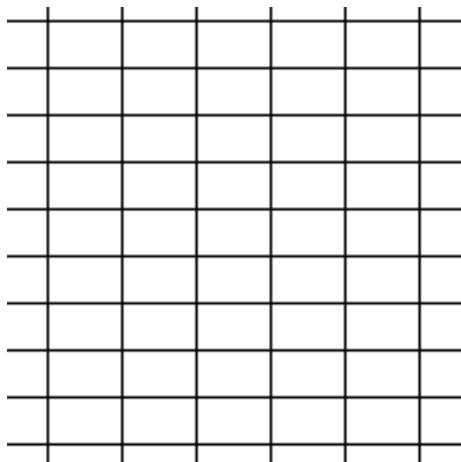


Figura : Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

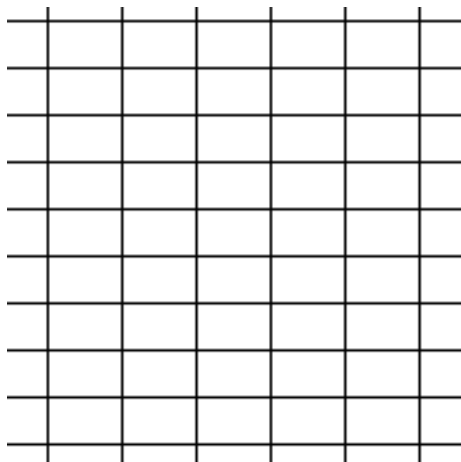


Figura : Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella

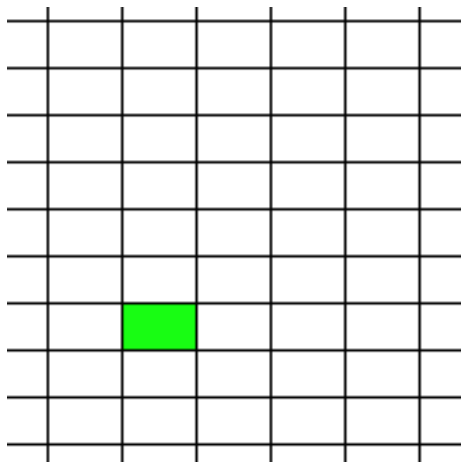


Figura : Poniamoci su una cella

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- In 1d, a tutti i nodi.
- In 2d, solo a quelli che giacciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Prima sull'asse x.

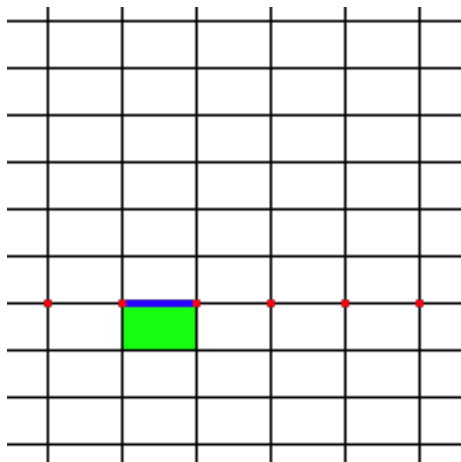


Figura : I contributi della cella ai nodi x

Calcolo dell'integrale in forma *Price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- In 1d, a tutti i nodi.
- In 2d, solo a quelli che giacciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Poi sull'asse y .

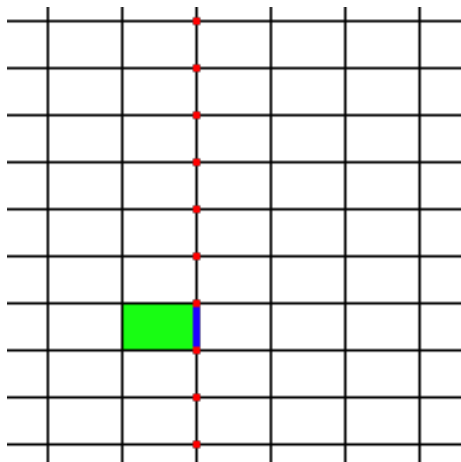


Figura : I contributi della cella ai nodi y

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y) \nu(y) dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$

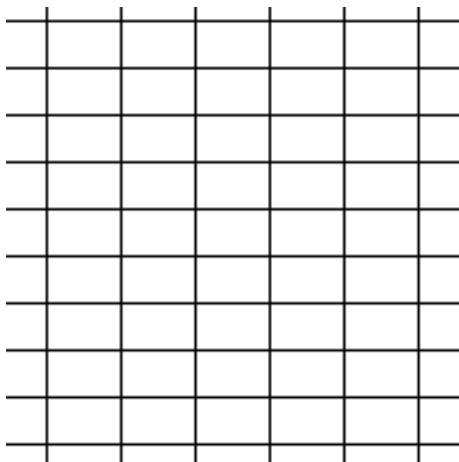


Figura : Una griglia

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y) \nu(y) dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$

In questo caso si cicla su tutti i vertici. Selezionato un vertice i ,

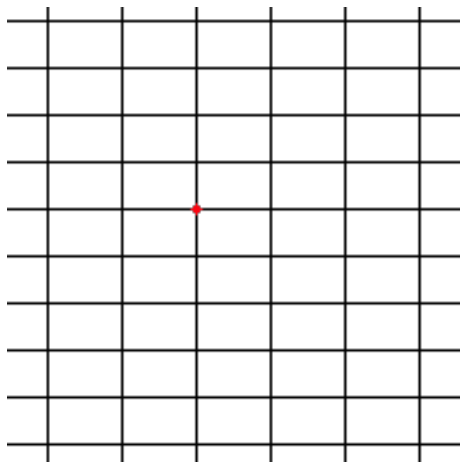


Figura : Poniamoci su un nodo

Calcolo dell'integrale in forma *logprice*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y) \nu(y) dy$$

su una griglia qualunque. Notare come si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$

In questo caso si cicla su tutti i vertici. Selezionato un vertice i , si avranno dei nodi di quadratura in direzione x e si quadra su $x_i + z_l$ (in blu), e se la dimensione è due, anche su y lungo $y_i + z_l$.

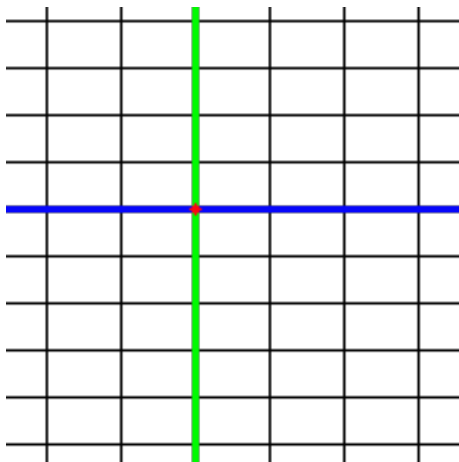


Figura : Calcolo lungo le direzioni

Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice**
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria opensource ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria opensource ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

Vantaggi

- Documentazione molto ampia e chiara, a cui si aggiunge la presenza di 51 tutorial programs che illustrano come usare la libreria per problemi tipici
- Organizzata in moduli che coprono le diverse aree di un problema ad elementi finiti (*creazione griglie, algebra lineare, output risultati, etc*)

La nostra implementazione

Tre strutture chiave per il problema

Classi Opzione

Rappresentano il problema e gestiscono creazione griglia, assemblaggio sistema e soluzione.

Classi Model

I vari modelli utilizzati in finanza sono rappresentati con questa classe, la cui interfaccia è stabilita da una classe base astratta.

Classi Integrali

Il calcolo della parte integrale è gestito da queste classi, e le Opzioni salvano un puntatore a un oggetto di questo tipo.

Tutte sfruttanti il meccanismo dell'ereditarietà al fine di COMPLETE
HERE

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.

Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

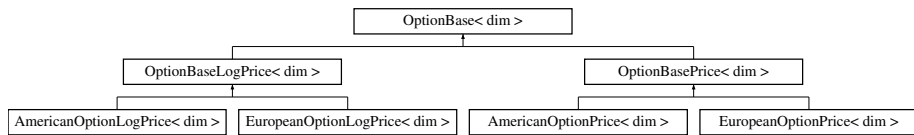


Figura : Schema delle classi Opzione

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.

Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Le classi Opzione

Seguendo la linea di `deal.ii`, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.

Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Estensibile

L'utente può sia utilizzare le opzioni già esistenti, che crearne delle nuove partendo dal secondo o dal terzo livello di ereditarietà.

Le classi Integrable

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *logprice*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche ai modelli.

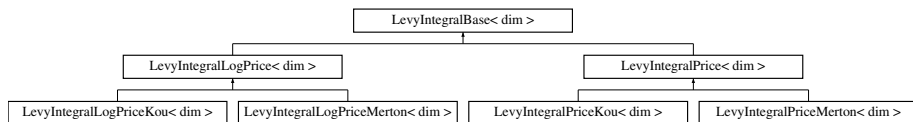


Figura : Schema delle classi LevyIntegral

Le classi Integrale

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *logprice*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche ai modelli.

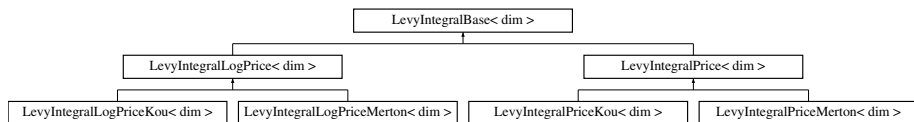


Figura : Schema delle classi LevyIntegral

anything else?

Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati**
- 5 Conclusioni

Price v.s LogPrice

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

- In 1d molto veloce
- In 2d abbastanza conveniente
- Non parallelizzabile
- In 1d mediamente veloce
- Parallelizzabile, quindi più veloce di *Price* 1d

Table of Contents

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni**