

**POLITECNICO DI MILANO**  
Corso di Laurea Magistrale di Ingegneria Matematica  
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi



Progetto di Programmazione Avanzata per il  
Calcolo Scientifico:

**Option Pricing per modelli  
Exponential-Lévy in 1d e 2d.**

Nahuel Foresta, matr. 798775  
Giorgio G. Re, matr. 799260

Anno Accademico 2012-2013

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modello di Black &amp; Scholes</b>	<b>4</b>
	Strumenti derivati e Opzioni . . . . .	5
	L'equazione di <i>Black&amp;Scholes</i> . . . . .	6

## Capitolo 1

# Introduzione

## Capitolo 2

# Modello di Black & Scholes

### Introduzione

In questo capitolo descriviamo i modelli basilari utilizzati per descrivere il mercato finanziario, seguendo le argomentazioni di Merton (1973). Consideriamo quindi un mercato finanziario molto semplificato, costituito da un titolo *risk-free* descritto dal processo  $B$  e un titolo azionario con valore pari al processo  $S$ . Definiamo quindi questi due processi.

**Definizione 2.1.** Sia  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  uno spazio misurabile e sia  $\mathcal{F}_{t \in [0, T]}$  una filtrazione. Allora, il processo  $B$  descrive il valore di un titolo *risk-free* se la sua dinamica è del tipo:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt,$$

dove  $r$  è un qualsiasi processo  $\mathcal{F}_t$ -adattato.

La caratteristica più importante quindi dei processi *risk-free* è l'assenza del termine  $W(t)$ , ovvero l'assenza di aleatorietà data da un moto browniano. Integrando infatti l'equazione precedente, otteniamo:

$$B(t) = B(0) \int_0^t r(s)ds.$$

Un caso particolare è quello in cui  $r$  è una costante deterministica, in tal modo  $B$  descrive l'andamento di un'obbligazione.

Assumiamo inoltre che la dinamica di  $S$  sia data da:

$$dS(t) = S(t)\mu(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t),$$

in cui  $W_t$  è un processo di Wiener (cioè, un moto browniano) e  $\mu$  e  $\sigma$  due funzioni deterministiche. La funzione  $\sigma$  è detta volatilità del titolo,  $\alpha$  è il *local mean rate of return* di  $S$ .

**Osservazione 2.1.** Osserviamo la differenza fra il tasso di ritorno di un titolo risk-free e quello di un titolo rischioso. Il tasso di  $B$  è:

$$\frac{dB(t)}{B(t)dt} = r(t),$$

ovvero totalmente deterministico, mentre quello di  $S$  è dato da:

$$\frac{dS(t)}{S(t)dt} = \mu t, S(t) + \sigma \frac{dW(t)}{dt},$$

oggetto che non è osservabile al tempo  $t$ . Esso è infatti costituito dato da  $\alpha$  e  $\sigma$  che sono entrambi osservabili al tempo  $t$ , più un rumore bianco  $W(t)$  che è del tutto casuale. Quindi, al contrario del titolo risk-free, l'azione ha un tasso di ritorno stocastico, anche su una scala infinitesima.

Passiamo ora a definire il modello di Black&Scholes.

**Definizione 2.2.** Il modello di Black&Scholes consiste di due titoli con le seguenti dinamiche:

$$\begin{aligned} dB(t) &= B(t)r(t)dt, \\ dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \end{aligned}$$

dove  $r$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti deterministiche.

## Strumenti derivati e Opzioni

In questa sezione definiamo gli strumenti derivati e, in particolare le opzioni che abbiamo trattato nel progetto.

**Definizione 2.3.** In finanza, è denominato strumento derivato ogni contratto o titolo il cui valore si basa sul valore di mercato di un altro titolo o strumento finanziario, detto sottostante (ad esempio, azioni, valute, tassi di interesse o derivati stessi).

Definiamo ora il titolo derivato più semplice, ovvero l'opzione call europea.

**Definizione 2.4.** Un'opzione call europea con prezzo di esercizio (o strike price)  $K$  e scadenza  $T$  sul sottostante  $S$  è un contratto finanziario derivato con le seguenti caratteristiche:

- il titolare del contratto ha, al tempo  $T$ , il diritto di acquistare un'azione del sottostante al prezzo  $K$  dal sottoscrittore del contratto, qualsiasi sia il valore del sottostante  $S$  al tempo  $T$ ;
- il titolare del contratto non ha alcun obbligo di acquistare un'azione del sottostante al tempo  $T$ ;

- il diritto di acquistare un'azione del sottostante può essere esercitato solo al tempo  $T$ .

Osserviamo che la scadenza del contratto e il prezzo d'esercizio sono stabiliti alla stipula del contratto, che per noi sarà tipicamente  $t = 0$ .

Oltre alle opzioni *call* europee, esistono opzioni *put* europee, le quali danno al titolare del contratto il diritto a vendere (anziché comprare) un dato titolo azionario a un prezzo fissato  $K$ . Le opzioni americane invece (*call* o *put* che siano), permettono di esercitare il diritto all'acquisto o alla vendita dell'azione in ogni istante di tempo  $t \in [0, T]$ .

**Esempio 2.1.** Supponiamo di possedere un'opzione *call* con scadenza  $T = 1$  anno, strike price  $K = 100\text{€}$  e un sottostante che al tempo  $t = 0$  vale  $S_0 = 100\text{€}$ . Allora, se fra un anno  $S_T = 120\text{€}$ , eserciteremo l'opzione, acquistando il sottostante per un prezzo pari a  $K = 100\text{€}$ , e il sottoscrittore del contratto pagherà i rimanenti  $S_T - K = 20\text{€}$ . Se invece  $S_T = 80\text{€}$  non eserciteremo l'opzione, ottenendo un guadagno pari a 0.

Osserviamo quindi che il valore a scadenza, cioè il *payoff*, dell'opzione dipende soltanto dal valore del sottostante. Definiamo quindi il *payoff* come processo stocastico in funzione di  $S$ .

**Definizione 2.5.** Sia  $S$  il processo stocastico che descrive l'andamento di un titolo azionario, allora il payoff di un'opzione con scadenza  $T$  e strike  $K$  è un processo stocastico  $\mathcal{X} \in \mathcal{F}_t$ , e:

$$\mathcal{X} = \Phi(S_T).$$

Per esempio, il *payoff* delle opzioni *call* e *put* europee è:

$$\begin{aligned}\Phi(S_T) &= \max(S_T - K, 0), \\ \Phi(S_T) &= \max(K - S_T, 0).\end{aligned}$$

La domanda che ci poniamo ora è la seguente: qual è il prezzo equo di un'opzione? Ovvero, quanto occorre pagare oggi per avere il diritto ma non l'obbligo di acquistare a  $T$  un'azione a un prezzo fissato  $K$ ?

## L'equazione di *Black&Scholes*

Prima di ricavare l'equazione di *Black&Scholes* spendiamo qualche riga per descrivere il concetto di neutralità al rischio in finanza. Un operatore economico si dice neutrale al rischio quando le sue preferenze lo rendono indifferente al compiere un'azione il cui risultato è una quantità aleatoria, oppure compiere un'azione il cui risultato è il valore atteso della quantità aleatoria stessa.

Per esempio, per un soggetto neutrale al rischio sono indifferenti le seguenti situazioni:

- avere 1€ con probabilità 1;
- giocare a una lotteria in cui il soggetto può ricevere 2€ con probabilità  $1/2$  o 0€ con probabilità  $1/2$ .

Nel primo caso infatti, egli ottiene sempre 1€, nel secondo ottiene in media 1€. Perciò per un soggetto neutrale al rischio queste situazioni sono indifferenti.

Quando ci occupiamo di *pricing* di derivati, ci poniamo sempre nell'ipotesi di neutralità al rischio. In particolare,

1. assumiamo che il termine di deriva  $\mu$  del modello  $S$  sia pari al tasso di interesse *risk-free*  $r$ , cioè poniamo:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t);$$

2. calcoliamo il valore atteso del *payoff*, cioè  $\mathbb{E}(\Phi(S_T))$ ;

3. scontiamo il valore atteso del *payoff* con il tasso di interesse  $r$ .

Sia quindi  $C : \mathbb{R}^+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $C = C(S(t), t)$  il processo stocastico che descrive il valore di un'opzione. In particolare, se consideriamo una *call* europea,

$$C(S, t) = e^{(-r(T-t))} \mathbb{E}(\max(S_T - K, 0)).$$

Applicando a questa quantità il Lemma di Itô, otteniamo la seguente equazione:

$$dC(S, t) = \left( \frac{\delta C}{\delta t} + rS \frac{\delta C}{\delta S} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\delta C}{\delta S} dW(t).$$

Dall'altro lato però, per la *risk-neutrality*, la deriva di  $C$ , come quella di ogni titolo finanziario, dovrà essere pari a  $rC$ , quindi:

$$\frac{\delta C}{\delta t} + rS \frac{\delta C}{\delta S} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} = rC.$$

Riassumendo, posti  $C = C(S, t)$  e  $P = P(S, t)$  i processi che descrivono il prezzo delle opzioni call e putt, otteniamo le seguenti equazioni alle derivate parziali con le rispettive condizioni finali:

$$\begin{cases} \frac{\delta C}{\delta t} + rS \frac{\delta C}{\delta S} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} = rC, \\ C(S, T) = \max(S_T - K, 0), \end{cases} \quad (2.1)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\delta P}{\delta t} + rS \frac{\delta P}{\delta S} + \frac{1}{2} S^2 \frac{\delta^2 P}{\delta S^2} = rP, \\ P(S, T) = \max(K - S_T, 0), \end{cases} \quad (2.2)$$

## Opzioni Basket

## Opzioni Americane: il problema con l'ostacolo