



Metodo a elementi finiti per il pricing di opzioni multi-asset con modelli di Lévy

Progetto di Programmazione Avanzata per il Calcolo Scientifico

Nahuel Foresta Giorgio Re

Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano

31 agosto 2014

Indice

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

Il progetto

Scopo

Lo scopo di questo progetto è creare una piccola libreria per il *pricing* di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, utilizzando la libreria deal.ii. L'idea è che l'utente possa sia utilizzare gli strumenti presenti, sia aggiungerne altri nel caso di bisogno, con grande facilità (ereditarietà).

Il progetto

Scopo

Lo scopo di questo progetto è creare una piccola libreria per il *pricing* di derivati finanziari con il metodo degli elementi finiti, utilizzando la libreria deal.ii. L'idea è che l'utente possa sia utilizzare gli strumenti presenti, sia aggiungerne altri nel caso di bisogno, con grande facilità (ereditarietà).

Motivazioni

La procedura più diffusa in finanza è l'utilizzo delle differenze finite. Gli elementi finiti, a fronte di una maggiore difficoltà implementativa, risultano essere più vantaggiosi.

Indice

- 1 Introduzione
- 2 Il problema**
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

L'equazione da risolvere

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \\ + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0 \end{aligned}$$

con opportune condizioni al contorno.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale ed è separabile in due parti.

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \int_{\mathbb{R}} \left(C(t, Se^y) - C(t, S) - S(e^y - 1) \frac{\partial C}{\partial S}(t, S) \right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria `deal`.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale

Trasformazioni *price* e *log-price*

L'equazione da risolvere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru + \int_{\mathbb{R}} \left(u(t, x+y) - u(t, x) - (e^y - 1) \frac{\partial u}{\partial x}\right) \nu(dy) = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Possiamo scomporre il problema in due parti:

- la parte differenziale, trattata in modo usuale con l'aiuto della libreria deal.ii
- la parte integrale, che necessita di un trattamento speciale

Trasformazioni *price* e *log-price*

Scomposizione della parte integrale

Definendo nel modo seguente le quantità

$$\hat{\alpha} = \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \nu(y) dy$$

$$\hat{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \nu(y) dy$$

l'equazione diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \hat{\alpha}) S \frac{\partial C}{\partial S} - (r + \hat{\lambda}) C + \int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y) \nu(y) dy = 0$$

Scomposizione della parte integrale

Analogamente per la trasformazione *log-price* si ha

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \int_{\mathbb{R}} \nu(y) dy, \\ \hat{\alpha} &= \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \nu(y) dy,\end{aligned}$$

con rispettiva equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \hat{\alpha} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (r + \hat{\lambda})u + \int_{\mathbb{R}} u(t, x + y) \nu(y) dy = 0$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *price*

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + (r - \hat{\alpha}_1)S_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} + (r - \hat{\alpha}_2)S_2 \frac{\partial C}{\partial S_2} + \frac{\sigma_1^2}{2}S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}S_2^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_2^2} \\ + \rho\sigma_1\sigma_2S_1S_2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1 \partial S_2} - (r + \lambda_1 + \lambda_2)C \\ + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1, S_2 e^y) \nu_2(y) dy = 0 \end{aligned}$$

In due dimensioni

Con la trasformazione *log-price*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \left(r - \frac{\sigma_1^2}{2} - \hat{\alpha}_1 \right) \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ + \left(r - \frac{\sigma_2^2}{2} - \hat{\alpha}_2 \right) \frac{\partial u}{\partial x_2} - (r + \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) u \\ + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1 + y, x_2) \nu_1(y) dy + \int_{\mathbb{R}} u(t, x_1, x_2 + y) \nu_2(y) dy = 0 \end{aligned}$$

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la discretizzazione nel modo usuale

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la discretizzazione nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i

$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy$$

ottenendo una vettore \mathbf{J} funzione di S_i . Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

- Per la parte differenziale, si scrive la formulazione variazionale e la discretizzazione nel modo usuale
- Per la parte integrale, si calcola il valore della parte integrale relativa al nodo S_i

$$J^1(S_i) = \int_{\mathbb{R}} C(t, S_1 e^y, S_2) \nu_1(y) dy$$

ottenendo una vettore \mathbf{J} funzione di S_i . Tale funzione va poi scritta come elemento dello spazio a elementi finiti

- Per la discretizzazione temporale, viene applicato uno schema di Eulero Implicito, ma la parte integrale viene trattata in modo esplicito. Lo schema è stabile se $1/\Delta t < \lambda$.

Discretizzazione

Data una griglia con nodi S_i

Otteniamo dunque il seguente schema, con \mathbf{C}_h^k vettore componenti soluzione al tempo k

$$M_1 \mathbf{C}_h^k = M_2 \mathbf{C}_h^{k+1} + M\mathbf{J}^1 + M\mathbf{J}^2$$

Calcolo dell'integrale in forma *price*

Ricordiamo l'integrale da calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} C(t, Se^y) \nu(y) dy$$

al quale applichiamo il cambio di
variabile

$$z = Se^y$$

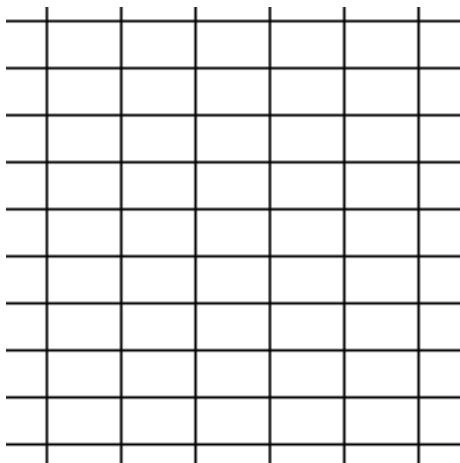


Figura: Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

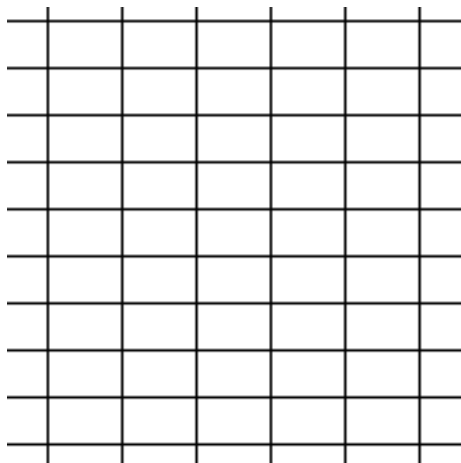


Figura: Una semplice griglia strutturata

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^{\infty} \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella

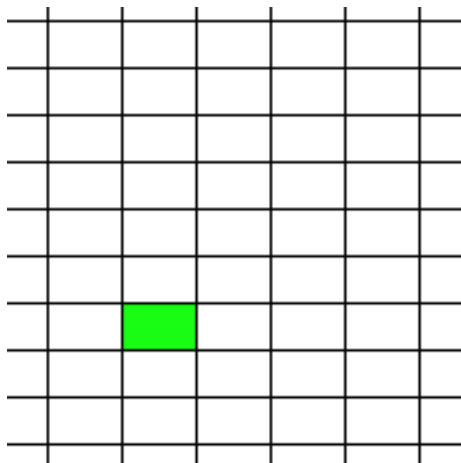


Figura: Poniamoci su una cella

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- in 1d, a tutti i nodi
- in 2d, solo a quelli che giacciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Prima sull'asse x.

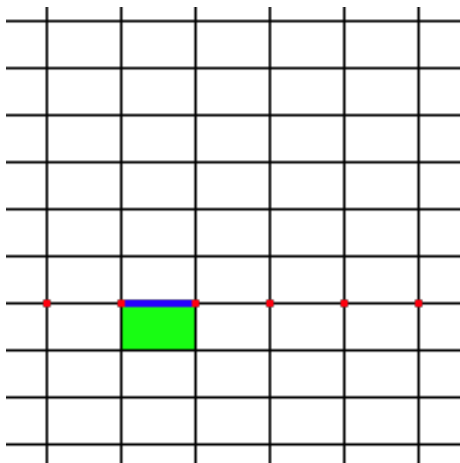


Figura: I contributi della cella ai nodi x

Calcolo dell'integrale in forma *price*

L'integrale diventa allora

$$\int_0^\infty \frac{C(t, z)}{z} \nu \left(\log \left(\frac{z}{S} \right) \right) dz$$

Quindi per ogni cella, si calcolano i contributi dovuti alla cella e si distribuiscono ai nodi di competenza:

- in 1d, a tutti i nodi
- in 2d, solo a quelli che giacciono sulla retta passante per la faccia selezionata. Poi sull'asse y .

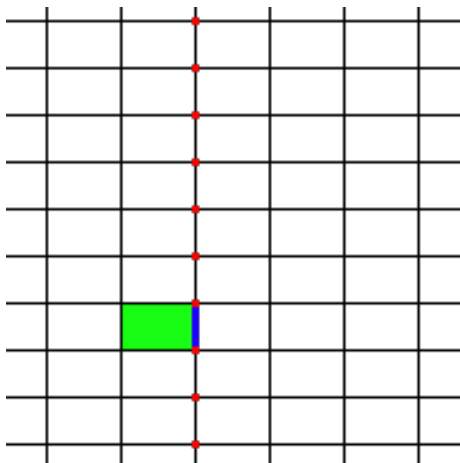


Figura: I contributi della cella ai nodi y

Calcolo dell'integrale in forma *log-price*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y) \nu(y) dy$$

su una griglia qualunque.

Osserviamo che si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$.

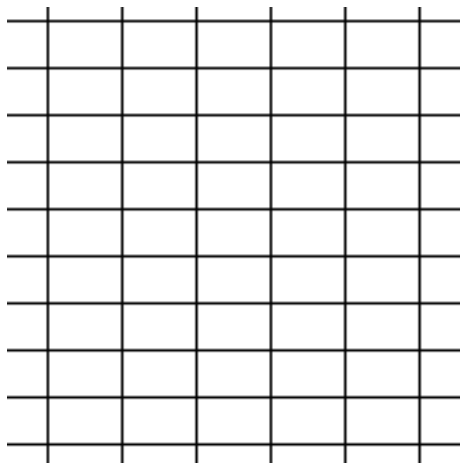


Figura: Una griglia

Calcolo dell'integrale in forma *log-price*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y) \nu(y) dy$$

su una griglia qualunque.

Osserviamo che si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$. In questo caso si realizza un ciclo su tutti i vertici. Selezionato un vertice i ,

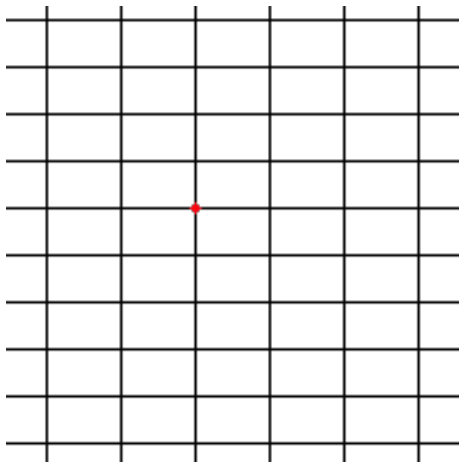


Figura: Poniamoci su un nodo

Calcolo dell'integrale in forma *log-price*

In questo caso l'integrale da calcolare è

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, x + y) \nu(y) dy$$

su una griglia qualunque.

Osserviamo che si può uscire dal dominio a causa del termine $x + y$. In questo caso si realizza un ciclo su tutti i vertici. Selezionato un vertice i , si avranno dei nodi di quadratura in direzione x e si quadra su $x_i + z_l$ (in blu), e se la dimensione è due, anche su y lungo $y_i + z_q$ (in verde).

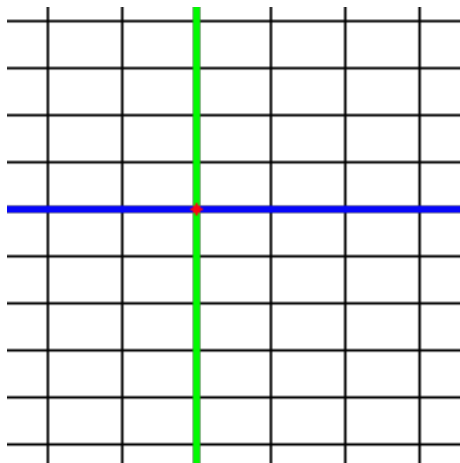


Figura: Calcolo lungo le direzioni

Indice

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice**
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria *open source* ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

La libreria deal.ii

Libreria deal.ii

Una potente libreria *open source* ad elementi finiti sui quadrilateri. Molto completa e semplice da utilizzare all'inizio, permette di risolvere problemi variazionali fino a 3 dimensioni con poche righe di codice.

Vantaggi

- Documentazione molto ampia e chiara, a cui si aggiunge la presenza di 51 *tutorial* che illustrano come usare la libreria per problemi più o meno tipici.
- Organizzata in moduli che coprono le diverse aree di un problema ad elementi finiti (*creazione griglie, algebra lineare, output risultati, etc*).

La nostra implementazione

Tre strutture chiave per il problema

Classi Opzione

Rappresentano il problema e gestiscono creazione griglia, assemblaggio sistema e soluzione.

Classi Model

I vari modelli utilizzati in finanza sono rappresentati con queste classi, la cui interfaccia è stabilita da una classe base astratta.

Classi Integrali

Il calcolo della parte integrale è gestito da queste classi, e le Opzioni salvano un puntatore a un oggetto di questo tipo.

Tutte queste strutture sfruttano il meccanismo dell'ereditarietà al fine di coprire i diversi casi possibili.

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.

Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

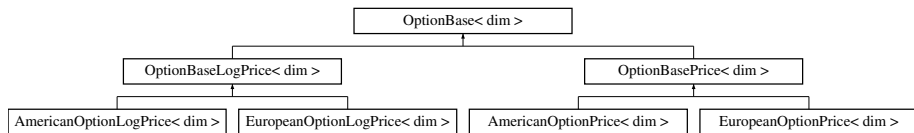


Figura: Schema delle classi Opzione

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.

Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Le classi Opzione

Seguendo la linea di deal.ii, le classi opzione costituiscono il *core* del programma ad elementi finiti. Implementano i vari metodi necessari per la soluzione del problema.

Le classi foglia sono quelle effettivamente usate, in quanto implementano tutti i metodi.

Factory di Opzioni

Per facilitare la creazione di opzioni all'utente, è stata creata una *Factory* che permette di creare i vari oggetti **Opzione** con un'interfaccia comune.

Estensibile

L'utente può sia utilizzare le opzioni già esistenti, sia crearne delle nuove partendo dal secondo o dal terzo livello di ereditarietà.

Le classi Integrable

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *log-price*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche per i modelli.

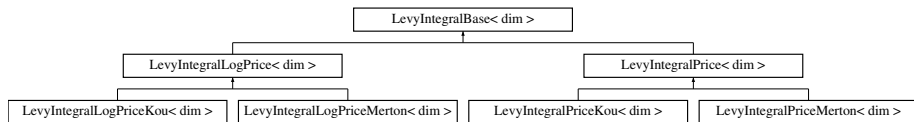


Figura: Schema delle classi LevyIntegral

Le classi Integrable

Per calcolare la parte integrale, sono state create una serie di classi. Il secondo livello di ereditarietà distingue fra *price* e *log-price*, mentre le classi foglia implementano quadrature specifiche per i modelli.

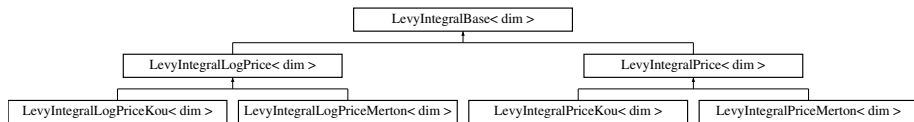


Figura: Schema delle classi LevyIntegral

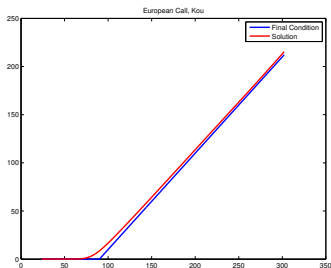
Add something.

Indice

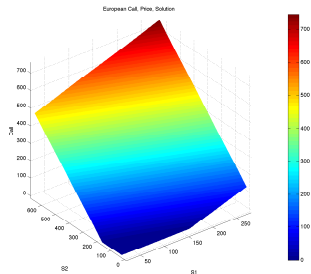
- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati**
- 5 Conclusioni

Prezzi dei derivati?

Alcuni esempi di risultati ottenuti:



(a) Call europea, modello di Kou



(b) Basket Call Europea, modello di B&S

I risultati, confrontati con la soluzione analitica (nei pochi casi in cui esiste) o con altri *software* di simulazione (differenze finite o Montecarlo), sono corretti.

Price v.s LogPrice

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

<i>Price</i>	<i>LogPrice</i>
In 1d molto veloce	In 1d mediamente veloce
In 2d buone performance	In 2d lento
Non parallelizzabile	Parallelizzabile, quindi più veloce di <i>Price</i> 1d
No <i>mesh adapting</i> in 2d	<i>Mesh adapting</i> anche in 2d, migliorando le prestazioni
Troncamento del dominio può introdurre problemi	Nessun problema troncamento dominio

Tabella: Confronto fra *Price* e *LogPrice*

Price v.s LogPrice

Con entrambi i metodi si ottengono risultati corretti e soddisfacenti:

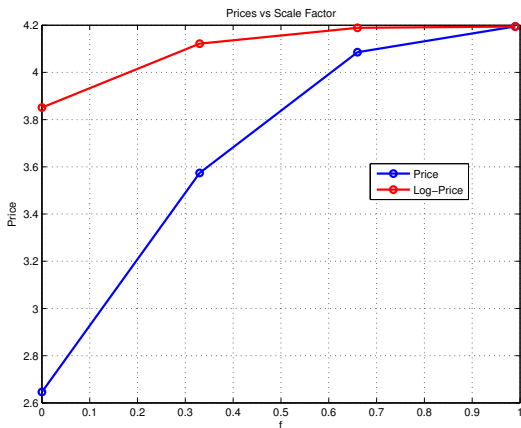
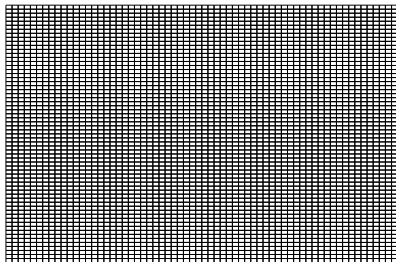


Figura: Convergenza del prezzo per una put al variare dello *scaling factor*

Mesh adaptivity

Utilizzando le funzioni della libreria deal.ii, è facile adattare la griglia:

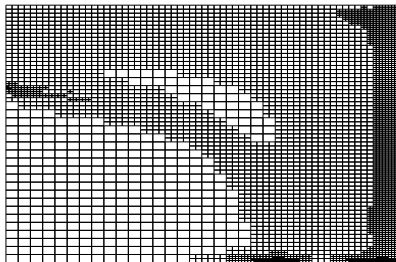


(a) Griglia iniziale

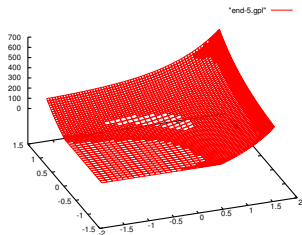
Figura: Adattamento di griglia per una Call Europea 2d in forma *LogPrice*

Mesh adaptivity

Utilizzando le funzioni della libreria deal.ii, è facile adattare la griglia:



(a) Griglia adattata



(b) Soluzione con griglia adattata

Figura: Adattamento di griglia per una Call Europea 2d in forma *LogPrice*

Indice

- 1 Introduzione
- 2 Il problema
- 3 Struttura del codice
- 4 Risultati
- 5 Conclusioni**

Bilancio del progetto

Il programma finale si configura come una piccola ma solida libreria che serve da base per il pricing di derivati finanziari di base, e altri possono essere costruiti facilmente. Inoltre lascia molta libertà all'utente (più trasformazioni, scelta di parametri).

Anche se non velocissimo, le prestazioni sono migliori se comparate con altri software.

Possibilità di estensioni

Il progetto, data al sua struttura aperta, si presta molto ad estensioni.
Alcune idee:

- Aggiunta di altri derivati finanziari simili

Possibilità di estensioni

Il progetto, data al sua struttura aperta, si presta molto ad estensioni.
Alcune idee:

- Aggiunta di altri derivati finanziari simili
- Aggiunta di altri modelli finanziari

Possibilità di estensioni

Il progetto, data al sua struttura aperta, si presta molto ad estensioni.
Alcune idee:

- Aggiunta di altri derivati finanziari simili
- Aggiunta di altri modelli finanziari
- Parallelizzazione in memoria distribuita

Possibilità di estensioni

Il progetto, data al sua struttura aperta, si presta molto ad estensioni.
Alcune idee:

- Aggiunta di altri derivati finanziari simili
- Aggiunta di altri modelli finanziari
- Parallelizzazione in memoria distribuita
- Estensione al caso con tre sottostanti

Vi ringraziamo dell'attenzione.