Тема. Крайова задача для лінійного диф. р-ня II-го порядку

Беремо довільне лінійне р-ня II-го порядку

$y'' + q(x)y' + h(x)y = f_1(x)$.

Причому розглядаємо його на відрізку $x \in [0, l]$, на якому функції q, h, f_1 – неперервні.

Зведемо дане р-ня до іншої форми, помноживши його на вираз $p(x) = e^{\int_0^x g(t)dt}$. Таким чином, маємо вираз

$$e^{\int_0^x g(t)dt} y'' + g(x) e^{\int_0^x g(t)dt} y' + h(x) p(x) y = f_1(x) p(x)$$

Якщо ввести позначення $q(x) = -h(x)p(x)$, а $f(x) = f_1(x)p(x)$, матимемо $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x)$.

Введемо лінійний оператор $L \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)$, тоді р-ня буде $L[y] = f(x)$.

Ми будемо розглядати р-ня з лінійними граничними умовами: $\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0$, $\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = u_l$, де $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$.

Якщо коефіцієнти $\alpha_i = 0$, то це граничні умови другого роду. Якщо $\beta_i = 0$ – граничні умови другого роду.

А якщо $\alpha_i \neq 0$ та $\beta_i \neq 0$ – третього роду.

Якщо права частина рня: $f(x) \neq 0$, то вона називається неоднорідною. Крайова задача буде однорідною, якщо вона поставлена для однорідного р-ня з однорідними граничними умовами (наприклад, $y(0) = y(l) = 0$). Для однорідного р-ня завжди є тривіальний розв'язок. Але може бути ситуація, коли інших розв'язків задача не має.

Це означає, що розв'язуючи на $[0, l]$ задачу Коші для однорідного р-ня з початковими умовами $y(0) = 0$ а $y'(0) = y_1$, то ми при виборі ненульових значеннях y_1, ми отримаємо функцію $y(x, y_1)$, яка не перетворюється в нуль на правій стороні відрізку $y(l, y_1) \neq 0$.

Якщо ж все-таки при деякому значенні $\bar{y}_1 \neq 0$ буде задовольняти другу граничну умову, то це означає що відповідно однорідна крайова задача має розв'язок що не є тотожнім нулем (який є нетривіальним).

В силу лінійності, вираз $K \cdot y(x, \bar{y}_1)$ теж є розв'язком.

Важливим випадком однорідної крайової задачі є задачі на власні значення: в них потрібно визначити такі значення параметрів, в яких будуть існувати нетривіальні розв'язки однорідної крайової задачі.

Приклад:

Задачі типу $L[y] + \lambda p(x) y(x) = 0$, де $\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$
$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$

Відповідні значення λ називаються власними значеннями крайової задачі, а відповідні тривіальні розв'язки є власними функціями.

Не обмежуючи загальності, неоднорідну крайову задачу можна розглядати з однорідними граничними умовами. Для цього в початковій крайовій задачі необхідно зробити заміну $y = z + Y(x)$, де $Y(x)$ має задовольняти задані граничні умови.

Тоді, $L[y] = L[z] + L[Y] = f(x)$, де граничні умови

$\alpha_1(z'(0) + Y'(0)) + \beta_1(z(0) + Y(0)) = u_0$, $\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0$.

Нехай у нас є дві функції $y(x)$ та $z(x)$, де

$$^{z*}L[y] = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) - qy = f(x), \quad a \quad ^{y*}L[z] = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dz}{dx}\right) - qz = \varphi(x),$$

Виконавши та віднявши два вирази

$$\frac{d}{dx}\left(p\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\right) = fz - \varphi y$$ – тотожність Лагранжа.

Якщо проінтегрувати дану тотожність на проміжку від 0 до l, отримаємо формулу Гріна:

$$p\left(z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\right)\Big|_0^l = \int_0^l (fz - \varphi y)\,dx$$

З цих двох співвідношень випливає, що у випадку коли y_1 та y_2 – лінійно незалежні розв'язки лінійного р-ня, то вони задовільняють співвідношенню:

$$p\left(y_2\frac{dy_1}{dx} - y_1\frac{dy_2}{dx}\right) = C, \quad W(y_1, y_2) = \frac{C}{p(x)}.$$

Розглянемо р-ня $L[y] = f(x)$, а функція p – неперервно-диференційовано та додатня, а q та f – неперервні. Крайові умови стандартні*.

Припустимо, що відповідна крайова задача має тільки тривіальний розв'язок. В силу лінійності неоднорідної задачі можна сказати, що якщо розв'язок неоднорідної задачі існує – він буде єдиним.

Спробуємо довести існування розв'язку при зроблених припущеннях на коефіцієнти р-ня.

Припустимо, що розв'язок неоднорідної крайової задачі існуватиме для спеціальної правої частини. Тоді функція $f(x)$ відрізняється від нуля лише в деякому ε-околі точки ξ з проміжку $[0; l]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \xi - \varepsilon \\ f_\xi(x) & \xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon \\ 0 & \xi + \varepsilon \le x \le l \end{cases}$$

де функція $f_\xi(x) \ge 0$, а $\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f_\xi(x)\,dx = 1$.

Проінтегруємо початковий вираз,

$$p(\xi + \varepsilon)\, y'_\varepsilon(\xi + \varepsilon, \xi) - p(\xi - \varepsilon)\, y'_\varepsilon(\xi - \varepsilon, \xi) - \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} q(x)\, y_\varepsilon(x)\,dx = 1 \quad (1)$$

Припустимо, що існує границя $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(x) \overset{\xi - \varepsilon}{=} G(x, \xi)$.

Виконаємо граничний перехід, спрямувавши $\varepsilon \to 0$.

Матимемо

$$(1) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} p(\xi)\frac{dG}{dx}\Big|_{x = \xi + 0} - p(\xi)\frac{dG}{dx}\Big|_{x = \xi - 0} = 1$$

Останнє співвідношення каже, що $\frac{dG}{dx}$ в точці $x = \xi$ має точку розриву першого роду з величиною стрибка $\frac{1}{p(\xi)}$.

Тобто, якщо функція G існує, то:

1) як ф-ція аргумента x, вона задовольняє однорідне р-ня на проміжках $0 < x < \xi$ та $\xi < x < l$

2) функція G задовольняє граничні умови
$$\alpha_1 G'_x(0, \xi) - \beta_1 G(0, \xi) = 0$$
$$\alpha_2 G'_x(l, \xi) + \beta_2 G(l, \xi) = 0$$

3) функція G неперервна за аргументом x на проміжку $[0; l]$, а її перша похідна в точці $x = \xi$ має розрив першого роду зі стрибком $\frac{1}{p(\xi)}$

Функція G, що задовільняє цим трьом умовам, називається функцією Гріна. І через неї можна виразити розв'язок крайової задачі для довільної правої частини.

Нехай існує розв'язок $y(x)$ неоднорідної крайової задачі і ф-ція Гріна $G(x, \xi)$ однорідної крайової задачі.

Застосуємо до даної пари функцій формулу Гріна

$$\left(p\left(G(x,\xi)\frac{dy}{dx} - y\frac{dG}{dx}\right)\right)\Big|_0^{\xi - \varepsilon} + \left(p\left(G(x,\xi)\frac{dy}{dx} - y\frac{dG}{dx}\right)\right)\Big|_{\xi + \varepsilon}^{l} =$$
$$= \int_0^{\xi-\varepsilon} G(x,\xi) f(x)\,dx + \int_{\xi+\varepsilon}^{l} G(x,\xi) f(x)\,dx$$

Оскільки y та G задовольняють однорідним граничним умовам, то підстановка в точці 0 та ℓ перетворюватиметься в нуль.

Матимемо,

$$p(\xi-\varepsilon)\left(G(\xi-\varepsilon,\xi)\frac{dy}{dx} - y(\xi-\varepsilon)\frac{dG}{dx}\Big|_{x=\xi-\varepsilon}\right) - \left(p\left(G(\xi+\varepsilon,\xi)\frac{dy}{dx} - \right.\right.$$

$$\left. - y(\xi+\varepsilon)\frac{dG}{dx}\Big|_{x=\xi+\varepsilon}\right) = \dots$$

Враховуючи в-ті для функції Гріна та проводячи граничний перехід $\varepsilon \to 0$, маємо

$$y(\xi) = \int_0^\ell f(x)\, G(x,\xi)\, dx.$$

Покажемо, що ф-ція Гріна існує та задамо алгоритм:

1) будуємо ф-цію $y_1(x)$, що є розв'язком лінійного однорідного р-ня, що задовольняє ліву граничну умову
$L[y_1] = 0, \quad \alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0) = 0.$
Тому ф-цію y_1 можемо завжди збудувати як розв'язок задачі Коші $L[y_1]=0$ з наступними початковими умовами $y_1(0) = -C\alpha_1$, а $y_1'(0) = C\beta_1$ [наприклад], де $C \neq 0$.
Збудована ф-ція y_1 НЕ буде задовольняти другій граничній умові.

2) аналогічно будуємо ф-цію $y_2(x)$, що задовольняє однорідне р-ня і другу граничну умову.

Не важко переконатися [самостійно], що ф-ції y_1 та y_2 є лінійно незалежними. Знаючи ф-ції y_1 та y_2 шукатимемо функцію Гріна наступним чином:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} y_1(x)\,\varphi_1(\xi), & 0 \le x \le \xi \\ y_2(x)\,\varphi_2(\xi), & \xi \le x \le \ell \end{cases}$$

Дана ф-ція буде задовільняти однорідному р-ню гарантовано. Також, вона задовольняє граничним умовам завдяки функціям y_1 та y_2. Третя умова не завжди виконується, тому підбираємо деякі функції φ_1 та φ_2:

$$\begin{cases} y_2(\xi)\cdot\varphi_2(\xi) - y_1(\xi)\,\varphi_1(\xi) = 0 \\ y_2'(\xi)\,\varphi_2(\xi) - y_1'(\xi)\,\varphi_1(\xi) = \dfrac{1}{p(\xi)} \end{cases}$$

Підібравши ф-ції φ_1 та φ_2, що задовольняє даній системі, ми задовольняємо третю умову.

Визначник даної системи являє собою визначник Вронського для двох ЛН розв'язків:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_2 & -y_1 \\ y_2' & -y_1' \end{vmatrix} = W(y_2, -y_1) \neq 0$$

Система буде мати єдиний розв'язок, який можна знайти за допомогою формул Крамера:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)}, \quad \text{а} \quad \varphi_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{p(\xi)\,W(\xi)}$$

* функція $p(\xi)$ визначатиметься через визначник Вронського, $p(x) = \dfrac{C}{W(x)}$, де C визначається з умови нормування розв'язків y_1 та y_2.

Таким чином, функція Гріна для відповідної крайової задачі:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\cdot y_2(\xi)}{C}, & 0 \le x \le \xi \\ \dfrac{y_2(x)\cdot y_1(\xi)}{C} & \xi \le x \le \ell \end{cases}$$

Проведені викладки представляють собою доведення існування та єдиності функції Гріна для однорідної крайової задачі, у випадку коли відповідна однорідна крайова задача має тільки тривіальний розв'язок.

Теорема (про розв'язок крайової задачі)

Якщо однорідна крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, то неоднорідна крайова задача буде мати єдиний розв'язок для будь-якої функції $f(x)$, яка є неперервною на відрізку $[0;l]$, причому цей розв'язок можна подати у наступному вигляді:

$$y(x) = \int_0^l G(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

Доведення:

Для доведення ми безпосередньою перевіркою ми переконаємося, що визначена відповідним чином функція $y(x)$ буде задовольняти неоднорідне р-ня та початкові умови. Для цього, перепишемо функцію $y(x) = \int_0^x G_1(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G_2(x,\xi) f(\xi) d\xi$, де $G_1(x,\xi) = \frac{1}{c} y_1(\xi) y_2(x)$, а $G_2(x,\xi) = \frac{1}{c} y_1(x) y_2(\xi)$.

Шукаємо похідні для функції $y(x)$,

$$y'(x) = \int_0^x G_1'(x,\xi) f(\xi) d\xi + \cancel{G_1(x,x) f(x) \cdot 1} + \int_x^l G_2'(x,\xi) f(\xi) d\xi - \cancel{G_2(x,x) f(x) \cdot 1}$$

$$y''(x) = \int_0^x G_1''(x,\xi) f(\xi) d\xi + G_1'(x,x) f(x) + \int_x^l G_2''(x,\xi) f(\xi) d\xi - G_2'(x,x) f(x) =$$

$$= \int_0^x G_1''(x,\xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G_2''(x,\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{p(x)} f(x)$$

Отже, підставивши маємо

$$L[y] = py'' + p'y' - q \cdot y = \ldots = \int_0^x \underbrace{L[G_1]}_{=0} f(\xi) d\xi + \int_x^l \underbrace{L[G_2]}_{=0} f(\xi) d\xi + f(x) = f(x)$$

т.я. G_1 задовольняє однорідне р-ня; т.я. G_2 задовольняє однорідне р-ня

Тема: „Задача Штурма – Ліувілля"

Нехай в нас є деякий лінійний диференціальний оператор L. Ненульова функція $y \neq 0$ називається власною функцією даного оператора, якщо $L[y] = \lambda y$, де відповідне число λ є власним значенням.

Розглядатимемо лінійний оператор $L_1 \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$.

А крайову задачу поставимо наступним чином:

$L_1[y] = \lambda y$, де граничні умови $\begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \end{cases}$

Границі $[0;\pi]$ не зменшує загальності задачі, оскільки можемо перейти до $[a;b]$ заміною $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$.

Якщо при певному значенні $\lambda = \tilde{\lambda}$ ця крайова задача має нетривіальний розв'язок $y(x,\tilde{\lambda}) \neq 0$, то $\tilde{\lambda}$ – власне значення крайової задачі, а $y(x,\tilde{\lambda})$ – це власна функція крайової задачі.

Властивості:

1. Існує зчисленна множина власних значень і відповідна їм множина власних функцій. Причому, всі власні значення можна занумерувати в порядку зростання їх абсолютної величини $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_k| \leq \ldots$.
2. Кожному власному значенню з точністю до сталого множника відповідає лише одна власна функція. Іншими словами, ранг власних значень дорівнює 1.

Доведення:

Припустимо, що для деякого власного значення $\tilde{\lambda}$ існує дві власні функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ (більше ніж дві не може бути, якщо врахувати порядок р-ня).

Тоді,

$$\varphi_1(0)\cos\alpha + \varphi_1'(0)\sin\alpha = 0$$

$$\varphi_2(0)\cos\alpha + \varphi_2'(0)\sin\alpha = 0$$

Це можливо, коли $W(\varphi_1, \varphi_2)\big|_0 = 0$, що протирічить в-тям визначника Вронського. Наше припущення було невірним оскільки в-то відноситься лише до поставленої нами крайової задачі, бо якщо зробити граничні умови складнішими, у нас може бути ранг 2 власного значення. Наприклад,

$y'' + \lambda y = 0$ з умовами $\begin{cases} y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$

Тоді, $\lambda_n = n^2 \begin{cases} \to \cos nx \\ \to \sin nx \end{cases}$ ■

3. Власні функції, які відповідають різним власним значенням є ортогональними.

Доведення:

Візьмемо ф-ції $y(x,\lambda_1)$ та $y(x,\lambda_2)$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Умова ортогональності (скалярний добуток рівний нулю):

$$\int_0^\pi y(x,\lambda_1)\, y(x,\lambda_2)\, dx = 0$$

Розглянемо функції $f(x), g(x) \in C^2_{[0,\pi]}$ – двічі неперервно-диференційовні.

$L_{2[0,\pi]}$ – у цих ф-цій квадрат ф-цій є інтегровним

Визначимо $L[f] = f'' - q(x) f(x)$.

Візьмемо інтеграл

$$\int_0^\pi g(x) L[f]\, dx = \int_0^\pi g(x)\big(f''(x) - q(x) f(x)\big)\, dx =$$

$$= -\int_0^\pi g(x) f(x) q(x)\, dx + \int_0^\pi g(x) f''(x)\, dx =$$

$$= -\int_0^\pi g(x) f(x) q(x)\, dx + g(x) f'(x)\Big|_0^\pi - \Big(g'(x) f(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi g''(x) f(x) dx\Big) =$$

$$= -\int_0^\pi g(x) f(x) q(x)\, dx + g(\pi) f'(\pi) - g(0) f'(0) - g'(\pi) f(\pi) +$$

$$+ g'(0) f(0) + \int_0^\pi g''(x) f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\pi f(x) L[g]\, dx + W(g,f)\Big|_{x=\pi} - W(g,f)\Big|_{x=0}$$

Тобто, $\int_0^\pi \big(g L[f] - f L[g]\big) dx = W(g,f)\big|_{x=\pi} - W(g,f)\big|_{x=0}$.

Якщо λ_1 та λ_2 – різні власні значення, а $\underbrace{y(x,\lambda_1)}_{f}$ та $\underbrace{y(x,\lambda_2)}_{g}$ – відповідні їм власні ф-ції, то підставивши ці ф-ції в отримане співвідношення, маємо:

$$\int_0^\pi \big(y(x;\lambda_2)\cdot\lambda_1 y(x;\lambda_1) - y(x;\lambda_1)\cdot\lambda_2 y(x;\lambda_2)\big) dx = 0$$ – оскільки ф-ції f і g задовольняє початковим умовам

Перепишемо, $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \int_0^\pi y(x,\lambda_1)\, y(x;\lambda_2)\, dx = 0$. ■

4. Власні значення задачі Штурма-Ліувілля – дійсні.

Доведення:

Самостійно. ■

Визначимо $h \equiv -ctg\,\alpha$, а $H \equiv -ctg\,\beta$.

Тоді, задачу Штурма–Ліувілля можна записати у вигляді $L_1[y] = \lambda y$ з крайовими умовами $\begin{cases} h\,y(0) - y'(0) = 0 \\ H\,y(\pi) - y'(\pi) = 0 \end{cases}$.

Визначимо функції $\varphi(x,\lambda)$ та $\psi(x,\lambda)$ – два розв'язки відповідного диференційного р-ня, що задовольняють початковим умовам.

$\varphi(0,\lambda) = 1$ $\qquad \varphi'_x(0,\lambda) = h$

$\psi(0,\lambda) = 0$ $\qquad \psi'_x(0,\lambda) = 1$

Якщо $\lambda = s^2$, то ф-ції φ та ψ будуть задовольняти наступні диференційні р-ня. А функції φ та ψ, відповідно будуть задовольняти таким диф. р-ням:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)\, q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\,d\tau$$

$$\psi(x,\lambda) =$$

Оскільки два останніх співвідношення визначають розв'язки задачі Коші, то ми можемо вважати, що $s \in \mathbb{C}$. Запишемо його у вигляді $s = \sigma + it$. Тоді, $\exists s_0 > 0$ у випадку коли $|s| > s_0$, то справедливі наступні оцінки:

$\varphi(x,\lambda) = O(e^{|t|x})$, а $\psi(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|x}\right)$

Або, $\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{e^{|t|x}}{|s|^2}\right)$

Функція φ при будь-яких значеннях λ задовольняє першу граничну умову. Тому, можемо визначити власні значення, підставивши ф-цію φ в другу граничну умову. Оскільки власні числа задачі Штурма–Ліувілля дійсні, $\operatorname{Im} s = t = 0$, то $\varphi(x,\lambda) = \cos sx + O\left(\frac{1}{s}\right)$.

Продиференціювавши даний вираз, і підставивши його в другу умову – отримаємо для знаходження власних значень наступну умову: $-s\sin\pi s + O(1) = 0$.

При великих значеннях s дане р-ня має корені, причому лежать вони поблизу дійсних чисел: $s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Отриману асимптотику можна уточнити при додаткових припущеннях, а саме вимагаючи обмеженості функції q, $\underset{x\in[0,\pi]}{|q'(x)|} \le M$. Після деяких перетворень, отримаємо що $s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, де константа визначається як $c = \frac{1}{\pi}\left(H + h + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\,d\tau\right)$.

Асимптотика функцій (власних) крайової задачі:

$\varphi_n(x) = \cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, де $\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau$.

При наближенні $h = \infty$, а $H \neq \infty$, то

$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\pi(n+\frac{1}{2})} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\quad H_1 = H + \int_0^\pi q(\tau)\,d\tau$

А якщо $h = H = \infty$, то

$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\quad c = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(\tau)\,d\tau$

Тоді, $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Випадок $h \neq \infty$, а $H = \infty$ зводиться до випадку $h = \infty$ та $H \neq \infty$ за допомогою заміни $\tau = \pi - x$.

Тема: „Повнота системи власних функцій для задачі Штурма – Ліувілля"

Розглянемо задачу Штурма – Ліувілля наступного вигляду
$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0$$
При умовах
$$\begin{cases} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \end{cases}$$
При даних крайових умовах розглянемо задачу
$$y'' - q(x)y = f(x).$$
Вона крайова задача розв'язується за допомогою ф-ції Гріна:
$$y(x) = \int_0^\pi G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi.$$
Аналогічно з першою задачею,
$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \qquad y'' - q(x)y = -\lambda y$$
Тоді, $y(x) = \int_0^\pi G(x,\xi)\cdot(-\lambda y(\xi))\,d\xi$, $\quad y(x) + \lambda\int_0^\pi G(x,\xi)y(\xi)\,d\xi = 0 \quad (1)$

Задачу Штурма – Ліувілля звели до аналогічного інтегрального р-ня. А функція G – ядро інтегрального рівняння.

Позначимо $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ – власні значення задачі Штурма – Ліувілля, які занумеровані в порядку збільшення їх абсолютної величини. А $v_0(x), v_1(x), v_2(x), \dots$ – відповідні власним значенням нормовані функції.

Ядро можна визначити як $H(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\lambda_n}$.

В силу рівномірної асимптотики для власних значень та функцій, ряд в правій частині буде збіжним абсолютно та рівномірно. Тому, ядро H буде неперервним.

Визначимо третє ядро $Q(x,\xi) = H(x,\xi) - G(x,\xi)$, яке буде симетричним та неперервним.

Згідно теорії інтегральних р-нянь кожне симетричне ядро, яке не є тотожнім нулем, має щонайменше одну власну функцію.

Тобто, $\exists \lambda_0\ \exists u(x) \neq 0 \quad u(x) + \lambda_0\int_0^\pi Q(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = 0.$

Покажемо далі, що ядро Q є тривіальним. Переконаємося, що $Q(x,\xi) = 0$.

1. Покажемо, що власні ф-ції задачі Штурма – Ліувілля ортогональні до ядра Q, $v_n(x) \perp Q(x,\xi)$. Переконаємося за допомогою скалярного добутку
$$\left(v_n(x); Q(x,\xi)\right) = \int_0^\pi Q(x,\xi)v_n(x)\,dx = \int_0^\pi H(x,\xi)v_n(x)\,dx - \int_0^\pi G(x,\xi)v_n(x)\,dx =$$
$$= \int_0^\pi\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{v_m(x)v_m(\xi)}{\lambda_m}\right)v_n(x)\,dx - \frac{v_n(\xi)}{\lambda_n} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\int_0^\pi \frac{v_m(x)v_n(x)}{\lambda_m}dx\right)v_m(\xi) - \frac{v_n(\xi)}{\lambda_n} =$$
$$= \left[\begin{array}{l}\text{оскільки власні}\\ \text{функції є}\\ \text{ортогональними}\end{array}\right] = \frac{1}{\lambda_n}\underbrace{\int_0^\pi v_n^2(x)\,dx}_{\substack{\text{оскільки } v_n(x)\\ \text{є нормованими,}\\ \text{то } \int_0^\pi v_n^2(x)dx = 1}}\cdot v_n(\xi) - \overset{[\text{згідно }(1)]}{\frac{v_n(\xi)}{\lambda_n}} = \frac{v_n(\xi)}{\lambda_n} - \frac{v_n(\xi)}{\lambda_n} = 0$$

Отже, власні ф-ції ортогональні до ядра Q.

2. Покажемо, що відповідні власні функції $v_n(x) \perp u(x)$, де $u(x)$ – власна ф-ція ядра задачі Штурма – Ліувілля за припущенням.
$$\left(v_n(x); u(x)\right) = \int_0^\pi v_n(x)u(x)\,dx = \left[\begin{array}{l}\text{виразимо з}\\ \text{інтегрального}\\ \text{рівняння}\end{array}\right] = \int_0^\pi v_n(x)\left(-\lambda_0\int_0^\pi Q(x;\xi)u(\xi)\,d\xi\right)dx =$$
$$= \left[\begin{array}{l}\text{змінимо}\\ \text{порядок}\\ \text{інтегрування}\end{array}\right] = -\lambda_0\int_0^\pi u(\xi)\Big(\underbrace{\int_0^\pi v_n(x)\,Q(x;\xi)\,dx}_{\substack{\text{дорівнює нулю,}\\ \text{згідно вище доведеного}}}\Big)d\xi = 0$$

Повернемося до р-ня, $u(x) + \lambda_0\int_0^\pi Q(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = 0$,
$$u(x) + \lambda_0\int_0^\pi G(x;\xi)u(\xi)\,d\xi + \lambda_0\int_0^\pi u(\xi)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(\xi)v_n(x)}{\lambda_n}\right)d\xi = 0$$

Останній доданок рівний 0, оскільки поміняєвши порядок інтегрування, маємо $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\upsilon_n(x)}{\lambda_n}\underbrace{\left(\int_0^{\pi} u(\xi)\upsilon_n(\xi)d\xi\right)}_{0} = 0$.

Залишається,

$u(x) + \lambda_0 \int_0^{\pi} G(x,\xi)u(\xi)\,d\xi = 0$, тобто $u(x) \in \{\upsilon_n(x)\}$ і $u(x) \perp \{\upsilon_n(x)\}$.

Тоді, $u(x) \equiv 0$. Отже, ядро $Q(x,\xi)$ НЕ МАЄ власних функцій. Звідси, $Q(x,\xi) = 0$, а тоді $G(x,\xi) = -H(x,\xi)$.

Звідси, $G(x,\xi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\upsilon_n(x)\upsilon_n(\xi)}{\lambda_n}$.

Теорема (про розвинення)

Якщо функція $f(x)$ має неперервну другу похідну, і задовольняє граничним умовам, то функція $f(x)$ може бути подана у вигляді абсолютно та рівномірно збіжного ряду Фур'є по власних ф-ціях задачі Штурма – Ліувілля.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \upsilon_n(x)$, де $a_n = \int_0^{\pi} \upsilon_n(x) f(x)\,dx$

Доведення:

Визначимо $h(x) \equiv f'(x) - q(x)f(x)$. Оскільки функція $f(x)$ задовольняє граничним умовам – можемо записати наступне:

$f(x) = \int_0^{\pi} G(x,\xi)h(\xi)d\xi = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\upsilon_n(x)}{\lambda_n}\left(\int_0^{\pi} \upsilon_n(\xi)h(\xi)d\xi\right) = \left[\text{замість } h(x) \text{ функції підставити представлення}\right]$:

$= \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_0^{\pi} f(\xi)\upsilon_n(\xi)d\xi\right)}_{a_n} \upsilon_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \upsilon_n(x)$, де $a_n = \int_0^{\pi} f(\xi)\upsilon_n(\xi)d\xi$.

Теорема (про повноту системи власних функцій)

Система власних ф-цій задачі Штурма – Ліувілля є повною в просторі $L_{2[0,\pi]}$. Іншими словами, для кожної функції $f(x) \in L_{2[0,\pi]}$ має місце рівність Парсеваля

$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$, де $a_n = \int_0^{\pi} \upsilon_n(x) f(x)dx$.

Доведення:

- $f \in C^2_{[0,\pi]}$

$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^{\pi} f(x)v_n(x)dx}_{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

- Множина двічі неперервно-диференційованих ф-цій буде скрізь щільною в просторі $L_{2[0,\pi]}$.

Тобто, для довільної $f \in L_{2[0,\pi]}$ можна видати таку послідовність $\{f_n\} \in C^2_{[0,\pi]}$, що $f_n \xrightarrow[L_2]{} f$.

Вважатимемо, що ф-ція $f_n(x)$ в околах точок 0 та π перетворюється в нуль.

Запишемо рівність Парсеваля для різниці двох елементів нашої послідовності:

$\int_0^{\pi} (f_k(x) - f_l(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^k - a_n^l)^2$

У випадку, коли $k, l \to \infty$, ліва частина виразу буде нескінченно малою. Отже, до нуля прямуватиме права частина.

В силу нерівності Коші – Буняковського можемо записати, що

$|a_n - a_n^k| \le \sqrt{\int_0^{\pi} (f(x) - f_k(x))^2 dx}$.

А враховуючи дану нерівність і умову збіжності $f_n \xrightarrow[L_2]{} f$ можна сказати, що $\exists \lim_{k\to\infty} a_n^k = a_n$.

Зафіксуємо деяке $N \in \mathbb{N}$. Тоді можемо записати співвідношення

$\sum_{n=1}^{N} (a_n^k - a_n^l)^2 \le \int_0^{\pi} (f_k(x) - f_l(x))^2 dx$. Спрямувавши в нерівності $k \to \infty$, матимемо:

$\sum_{n=1}^{N} (a_n - a_n^l)^2 \le \int_0^{\pi} (f(x) - f_l(x))^2 dx$

А спрямувавши $N \to \infty$,

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_n^l) \le \int_0^{\pi} (f(x) - f_l(x))^2 dx$

З отриманої нерівності випливатиме, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$.

Scanned by CamScanner

Також можемо довести, що $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^l)^2 \xrightarrow[l\to\infty]{} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, що випливає з нерівності, що $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^l)^2 - \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2\right| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^l - a_n)^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^l + a_n)^2}$

Оскільки $f_n \xrightarrow[L_2]{} f$, то $\int_0^{\pi} f_n^2(x)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{\pi} f^2(x)dx$.

Таким чином, ми маємо довести рівність Парсеваля для функції $f_m(x)$, $\int_0^{\pi} f_m^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^m)^2$

$\uparrow$ при $m \to \infty$,

$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ – рівність Парсеваля для $f \in L_2$. ∎

Тема: „Системи лінійних диф р-нянь I-го порядку"

Тема: „Базові поняття стосовно систем"

Системою лінійних диф р-нянь I-го порядку називається система виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + f_i(t), \quad \text{де} \quad i = 1, .., n$$

У матричному представленні дане р-ня має вигляд

$\dot{x} = A \cdot x + F(t)$, де $x = \{x_i(t)\}$, $F(t) = \{f_i(t)\}$, $A = [a_{ij}]$.

Матриця A відповідає деякому диференціальному оператору.

$T: E \to E$.

1) $F(t) = \Theta$

Тоді, р-ня має вигляд $\dot{x} = Ax$.

Якщо всі власні числа різні, то

Теорема (про оператор з усіма різними власними значеннями)

Оператор $T: E \to E$ і має n різних, дійсних власних значень буде діагоналізовним (тобто матриця в деякому базисі є діагональною).

Доведення:

Кожному власному значенню $\lambda_1, .., \lambda_n$ відповідає власний вектор $e_1, .., e_n$. Переконаємося, що набір власних векторів буде лінійно незалежним.

Припустимо, що деякий з векторів e_i виражається як лінійна комбінація інших векторів (тобто, система є лінійно залежною): $e_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i e_i$.

Подіємо на дану рівність оператором $T - \lambda_j 1$,

$\underbrace{(T - \lambda_j 1) e_j}_{0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i (T - \lambda_j 1) e_i$, $0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_j)}_{\neq 0} e_i$.

Тобто, ми маємо нетривіальну лінійну комбінацію, яка є лінійно залежною. Але даний факт (якщо продовжити далі) суперечить нашому припущенню.

Тобто, вектори $e_1, \dots, e_n$ – ЛН, оберемо ці вектори в якості базису простору E.

Тепер збудуємо матрицю оператора T в базисі $e_1, \dots, e_n$.

Потрібно подіяти оператором на вектори

$Te_i = \lambda_i e_i$,

$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \Theta \\ & \lambda_2 & \\ \Theta & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix}$ – діагональна матриця. ∎

Зауваження

В матричному вигляді теорема може бути сформульована наступним чином:

Якщо A має n різних власних значень, то буде існувати $\exists Q$ $\det Q \neq 0$ невироджена матриця Q, яка приводить матрицю A до діагонального вигляду

$Q \cdot A \cdot Q^{-1} = B = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, де $Q = P^{-1}$ – обернена до матриці переходу.

Теорема (про задачу Коші для системи з різними дійсними власними значеннями)

Нехай матриця A має n різних дійсних власних значень. Тоді, задача Коші для системи лінійних диференціальних р-нянь має єдиний розв'язок.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Доведення:

В силу попередньої теореми, знаємо що існує перетворення простору E, яке діагоналізує матрицю Q. Застосуємо це перетворення та перейдемо до базису власних векторів

$$\begin{cases} \dot{y} = By \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Отже, замість однієї задачі Коші маємо іншу задачу Коші.

Розглянемо як n систем звичайних лінійних р-нянь I-го порядку:

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \lambda_i y_i \\ y_i(0) = y_0^i \end{cases} \quad i = \overline{1, \dots, n}$$

Кожна з таких задач Коші є коректною і мають розв'язок $y_i = y_0^i e^{\lambda_i t}$, де $i = \overline{1, \dots, n}$.

Оскільки зворотне перетворення простору є однозначним, то приходимо до того, що розв'язок задачі Коші є однозначним.

$x = Q^{-1} y = Py$. ∎

Комплексний n-вимірний простір F – це множина впорядкованих наборів $F \ni z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, де $z_i \in \mathbb{C}$. Операції додавання, множення та ділення визначаються так само, як і в одновимірному просторі. Але з'являється оператор σ комплексного спряження, який $\sigma z = (\overline{z_i})$.

Нехай простір E – дійсний простір. А простір $E_c = \{ z \in \mathbb{C}^n \mid z = \sum \alpha_i x_i, \ x \in E, \ \alpha_i \in \mathbb{C} \}$

називається комплексифікацією простору E.

Нехай нам задано деякий комплексний простір F.
Тоді декомплексифікацією даного даного простору є такий простір $F_{\mathbb{R}} \equiv F \cap \mathbb{R}^n$. Або, іншим чином, $F_{\mathbb{R}} = \{ z \in F \mid \sigma z = z \}$.
Деякий комплексний простір F буде комплексифікацією деякого дійсного простору E тоді і тільки тоді, коли простір F буде інваріантним відносно операції комплексного спряження.

Повністю аналогічно визначимо комплексифікацію для оператора. Нехай в нас є оператор $T: E \to E$. Комплексифікацією даного оператора є оператор T_c, що $T_c z = \sum_i \alpha_i T x_i$.
Важливою є теорема,

Теорема (критерій комплексифікації)

> Нехай $Q: E_c \to E_c$. Він представлятиме комплексифікацію деякого оператора $T: E \to E$ тоді і тільки тоді, коли він комутує з оператором комплексного спряження $\sigma Q = Q \sigma$.

Доведення:

1) (необх.)

Майже очевидним чином випливає з означення комплексифікації оператора.

2) (дост.)

Нехай оператори Q та σ комутують.

Розглянемо дію добутку σQ на елемент $x \in E$. Тоді,
$(\sigma Q)x = \sigma(Qx)$
$(\sigma Q)x = Q(\sigma x) = Qx$ (оскільки $x \in E \subset \mathbb{R}^n$)

Тобто, $\sigma(Qx) = Qx$ – нерухома точка оператора,
$Qx \in \{ y \in E_c \mid \sigma y = y \} = (E_c)_{\mathbb{R}} = E$.
Отже, простір E являється інваріантним відносно оператора Q. Тоді буде існувати звуження оператора Q на простір E, $Q|_E \equiv T$.
Тоді, за означенням матимемо, що $T_c = Q$. ■

Оператор називається напівпростим, якщо його комплексифікація буде діагоналізовною.

Теорема (про комплексні власні значення оператора)

> Якщо оператор T, який визначено на дійсному просторі, має комплексне власне значення μ, то цей оператор також матиме комплексно спряжене власне значення $\bar{\mu}$.

Доведення:

Розглянемо комплексифікацію оператора T, T_c. Характеристичні многочлени операторів співпадають. Тому, оператор T_c має власне значення μ. Нехай φ – власний вектор числа μ:
$T_c \varphi = \mu \varphi$. Подіємо на обидві частини оператором комплексного спряження $\sigma(T_c \varphi) = \sigma(\mu \varphi)$, де $\sigma(T_c \varphi) = T_c(\sigma \varphi) = T_c \bar{\varphi}$, а $\sigma(\mu \varphi) = \bar{\mu} \cdot \bar{\varphi}$.
Тобто, ми прийшли до того, що $\bar{\mu}$ – власне число вектора $\bar{\varphi}$. Притому, число $\bar{\mu}$ буде також власним значенням оператора T. ■

Теорема (про декомпозицію оператора)

Нехай оператор T має наступний набір власних значень
$T: \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\mu_1 \bar{\mu}_1, \ldots, \mu_s \bar{\mu}_s$.

Тоді, оператор T та простір E можна розкласти на пряму суму: $T = T_a \oplus T_b$, а $E = E_a \oplus E_b$. Причому T_a матиме лише дійсні значення, а оператор T_b – комплексні.

Доведення:

Перейдемо до комплексифікації E_c та T_c. Визначимо наступні простори: $F_a \equiv \Lambda(e_1, e_2, \dots, e_r)$, де $e_1, \dots, e_r$ – власні вектори, а $F_b \equiv \Lambda(f_1, \bar{f}_1, \dots, f_s, \bar{f}_s)$. Всі ці вектори в сукупності є лінійно незалежними і утворюють базис простору E.

Оскільки F_a та F_b інваріантні відносно операції комплексного спряження, то $E_c = F_a \oplus F_b$. Тоді, можемо визначити два наступні простори $E_a \equiv (F_a)_R$, а $E_b \equiv (F_b)_R$. І тоді, $E = E_a \oplus E_b$.

Оскільки E_a та E_b інваріантні відносно оператора T, тобто $TE_a \subset E_a$ та $TE_b \subset E_b$. Побудувавши звуження $T|_{E_a} = T_a$ та $T|_{E_b} \equiv T_b$, то $T = T_a \oplus T_b$. ■

Зауваження

Завдяки цій теоремі, початкову систему рівнянь $\dot{x} = Tx$ можна декомпонувати на дві: $\dot{x} = T_a x$ та $\dot{x} = T_b x$.

Теорема (про оператор з комплексними власними значеннями)

Нехай оператор T, що діє в просторі E має лише комплексні власні значення $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_s, \bar{\mu}_s$, тоді цей оператор T розкладається в пряму суму операторів T_i, $T = \bigoplus_{i=1}^{s} T_i$, де T_i має лише два власні значення $\mu_i, \bar{\mu}_i$.

А простір $E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_i$, де $\dim E_i = 2$.

Доведення:

В якості простору $F_i \equiv \Lambda(f_i, \bar{f}_i)$, тоді $E_c = \bigoplus_{i=1}^{s} F_i$.

Виконуючи декомплексифікацію в останньому твердженні, прийдемо до твердження, що $E_i \equiv (F_i)_R$. ■

Теорема (про вигляд матриці оператора з комплексними власними значеннями в просторі $\mathbb{R}^2$)

Нехай оператор T діє в $\mathbb{R}^2$, $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Якщо даний оператор має пару комплексно спряжених значень $\mu = a + ib$ та $\bar{\mu} = a - ib$, тоді в просторі $\mathbb{R}^2$ можна знайти базис, в якому матриця A оператора T має вигляд $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Доведення:

Нехай φ та $\bar{\varphi}$ – власні вектори, які відповідають власним значенням μ та $\bar{\mu}$. Очевидно, що вектори $\varphi = u + iv$ та $\bar{\varphi} = u - iv$ є лінійно незалежними. Вектори u та v теж є лінійно незалежними, оскільки $u = \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi})$, а $v = \frac{1}{2i}(\varphi - \bar{\varphi})$. Тож, вектори u та v можна взяти в якості базису простору $\mathbb{R}^2$.

Збудуємо матрицю оператора в просторі $\{v; u\}$.

Подіємо комплексифікацією оператора T_c на вектор φ:

$T_c \varphi = \mu\varphi = (a+ib)(u+iv) = (au - bv) + i(bu + av)$. З іншого боку,

$T_c(u+iv) = T_c u + i T_c v = \left[\begin{matrix} \text{оскільки вектори} \\ u \text{ та } v \text{ є дійсними} \end{matrix}\right] = Tu + iTv$

Тобто, $Tu + iTv = (au - bv) + i(bu + av)$

Запишемо матрицю оператора в новому базисі (по стовпчиках):

$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. ■

Тема: „Експоненти операторів"

Нехай ми працюємо в просторі $E \subset \mathbb{R}^n$. Для кожного елементу $x \in E$ можна визначити норму елемента $N(x)$, що $N: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$. Причому мають виконуватися три умови

1) $N(x) \geq 0$, $N(x) = 0 \iff x = 0$
2) $N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$
3) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Приклад

1) Якщо $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, то

$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$\|x\|_{sum} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_{max} = \max_i |x_i|$

Теорема (про еквівалентність норм)

В просторі $\mathbb{R}^n$ всі норми є еквівалентними.

$\forall N(x) \; \exists A, B > 0 \; \forall x \in E \quad A \cdot \|x\| \leq N(x) \leq B \cdot \|x\|$

Будь-яка норма еквівалентна до евклідової.

Доведення:

Очевидно, що має місце нерівність $(\max_i |x_i|)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq n(\max_i |x$

Тобто, $(\|x_{max}\|)^2 \leq \|x\|^2 \leq n(\|x\|_{max})^2$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\| \leq \|x\|_{max} \leq \|x\|$.

Покажемо, що довільна норма $N(x)$ неперервна в просторі E.

Задамо деякий базис простору, що складається з векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$, а $M \equiv \max_i N(e_i)$.

Тоді, $N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq$

$\leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} \max_i |x_i| = M \cdot n \cdot \max_i |x_i| \leq M \cdot n \cdot \|x\|$.

В силу отриманої оцінки, $N(x) \leq M n \|x\|$, можемо зробити висновок

$N(x_k) \xrightarrow[x_k \to y]{} N(y)$

Це доводить неперервність довільної норми.

Далі, розглянемо в просторі компакт $K \equiv \{x \mid \|x\| = 1\}$. В силу властивостей неперервних функцій на компакті, $A \leq N(x) \leq B \quad \forall x \in K$.

А $\forall x \in E \quad y = \frac{x}{\|x\|} \quad \|y\| = 1$. Тобто, $\forall x \in E \quad A \leq N(\frac{x}{\|x\|}) \leq B$,

$A\|x\| \leq N(x) \leq B \cdot \|x\|$. ■

Нехай в нас є оператор $T: E \to E$. Нормою оператора T називають число, яке визначається як $\|T\| \equiv \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

В-ті норми оператора:

1) $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$
2) $\|T \cdot S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$
3) $\|T^m\| \leq \|T\|^m$

Нехай в нас є оператор $T: E \to E$. Тоді, експонентою оператора називатимемо оператор $e^T \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$. У випадку обмеженості оператора T, ряд з останнього означення є збіжним, причому абсолютно. Якщо оператор обмежений, то $\|T\| = \alpha$, а $\|e^T\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T\|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{\alpha} = e^{\|T\|}$.

Тому ми бачимо, що якщо оператор обмежений, то експонента теж є обмеженою.

Теорема (про в-ті експоненти оператора)

Нехай оператори P, Q, S і T – обмежені. Тоді,

1) якщо P і Q – подібні, то e^P і e^Q – подібні

$P = U \cdot Q \cdot U^{-1} \Rightarrow e^P = U \cdot e^Q \cdot U^{-1}$

2) якщо S і T – комутують

$$S\cdot T = T\cdot S \Rightarrow e^{T+S} = e^T\cdot e^S = e^S\cdot e^T$$

3) оператор, обернений до експоненти дорівнює експоненті протилежного оператора

$$(e^T)^{-1} = e^{-T}$$

4) якщо $Q = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, то в цьому ж базисі,

$$e^Q = \begin{pmatrix} e^a\cos b & -e^a\sin b \\ e^a\sin b & e^a\cos b \end{pmatrix}$$

Доведення:

1) $P = U\cdot Q\cdot U^{-1}$

Тоді, $e^P = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}P^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(U\cdot Q\cdot U^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(U\cdot Q\cdot U^{-1}\cdot U\cdot Q\cdot U^{-1}\times\ldots) =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}U\cdot Q^k\cdot U^{-1} = U\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q^k}{k!}\right)U^{-1} = U\cdot e^Q\cdot U^{-1}.$

2) Якщо S і T – комутують, тобто $S\cdot T = T\cdot S$, то

$$e^{T+S} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(T+S)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n+m=k}C_k^m T^m\cdot S^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n+m=k}\frac{T^m}{m!}\cdot\frac{S^n}{n!} \circeq$$

$$\circeq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{S^j}{j!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{T^l}{l!} = e^S\cdot e^T$$

Або, аналогічно

$$\circeq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{T^j}{j!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{S^l}{l!} = e^T\cdot e^S$$

Тобто, $e^{T+S} = e^S\cdot e^T = e^T\cdot e^S.$

3) Випливає з другої, якщо $S = -T$

Тоді, $e^T\cdot e^{-T} = e^{\Theta}$, $e^T\cdot e^{-T} = 1$, $e^{-T} = (e^T)^{-1}$.

4) Перейдемо від оператора T до його комплексифікації T_c. Обидва оператори мають набір власних значень $a\pm ib$.
$T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ в базисі $\{v; u\}$, а $T_c = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$ в базисі $\varphi, \bar\varphi = u \pm iv$.

Маючи оператор T_c та його матрицю, то можемо сказати, що $e^{T_c} = \begin{pmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{a-ib} \end{pmatrix}$. Вектор φ є власним для оператора e^{T_c} з власним значенням e^{a+ib}, бо $e^{T_c}\varphi = e^{a+ib}\varphi$

$$e^{T_c}\varphi = e^{a+ib}\varphi = e^{a+ib}(u+iv) = (e^a\cos b + ie^a\sin b)(u+iv) = (ue^a\cos b - ve^a\sin b) +$$
$$+ i(ue^a\sin b + ve^a\cos b)$$

Або,

$$e^{T_c}\varphi = e^{T_c}(u+iv) = e^{T_c}u + ie^{T_c}v = e^Tu + ie^Tv$$

Порівнявши отримані рівняння, маємо що

$e^Tu = e^a\cos b + ie^a\sin b$, а $e^Tv = ue^a\sin b + ve^a\cos b$

Розклавши це по базису $\{v; u\}$ та записавши матрицю оператора, маємо:

$$e^T = \begin{pmatrix} e^a\cos b & \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Якщо в нас поставлена задача Коші для системи лінійних р-нянь I-го порядку:

$$\begin{cases} \dot x = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Тоді дана задача матиме розв'язок $x = e^{At}\cdot x_0$ ← вектор початкових умов

Так само, за допомогою експоненти можемо розв'язати неоднорідну систему:

$$\begin{cases} \dot x = Ax + B(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Тоді, маємо розв'язок однорідної системи у вигляді

$$x_{одн.} = e^{At}\cdot x_0$$

А частинний розв'язок неоднорідної, знайдемо за допомогою методу Лагранжа (варіації сталих):

$$x_{неодн.} = e^{At}\cdot c(t)$$

Продиференціювавши, маємо

$$Ae^{At}\cancel{c(t)} + e^{At}c'(t) = Ae^{At}\cancel{c(t)} + B(t), \quad c'(t) = e^{-At}B(t)$$

Проінтегрувавши,

$$c(t) = \int_0^t e^{-A\tau} B(\tau) d\tau + \tilde{c}$$

Отримаємо, що розв'язок неоднорідної системи матиме вигляд

$$x = e^{At}\left(\tilde{c} + \int_0^t e^{-A\tau} B(\tau) d\tau\right), \text{ де } \tilde{c} = x_0.$$

Тобто,

$$x = e^{At}\left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} B(\tau) d\tau\right)$$

Тепер, маємо два способи розв'язку неоднорідних р-нянь:

- перетворення Лапласа
- за допомогою експоненти оператора

Тема „Канонічні форми операторів"

Розглядемо оператор T, який діє в комплексному просторі E, $T: E \to E$. Характеристичний многочлен оператора,

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{q} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}.$$

Тобто, оператор має власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ з кратністю $n_1, n_2, \dots, n_q$ відповідно. Причому, $n_1 + \dots + n_q = \dim E$.

Кореневим підпростором оператора T, який відповідає власному значенню λ, визначається як $Ker(T - \lambda 1)$.

Узагальненим кореневим підпростором оператора T, який відповідає власному значенню λ_k, назвемо $E(T, \lambda_k) = Ker(T - \lambda_k 1)^{n_k}$, де n_k – кратність λ_k.

Теорема (про декомпозицію – перше)

Нехай оператор T діє в просторі E, який є дійсним, якщо всі власні значення оператора дійсні; комплексному – якщо є хоч одне комплексне власне значення.

Тоді, простір E можна представити у вигляді прямої суми узагальнених кореневих підпросторів,

$$E = \bigoplus_{k=1}^{q} E(T, \lambda_k), \quad \text{де} \quad \dim E(T, \lambda_k) = n_k.$$

Визначимо простір $K_j \equiv Ker\, T^j$, а $L_j \equiv Im\, T^j$. Згадавши означення, можна збудувати деяку послідовність вкладених підпросторів:

$$\varnothing = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m \subset \dots$$

$$E = L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_m \supset \dots$$

Простір $N \equiv \bigcup_j K_j$, а $M = \bigcap_j L_j$

Scanned by CamScanner

В силу скінченновимірності простору E, ланцюжки вкладень будуть обриватися на деякому кроці.

Тобто, $\exists m : K_j = K_m \quad \forall j > m$

$\exists n : L_j = L_n \quad \forall j > n$

Простір E можемо представити у вигляді прямої суми підпросторів, $E = M \oplus N$.

Пряма сума — це коли ми можемо представити кожен елемент $z \in E$, як $z = z_N + z_M$ ($z_N \in N$, $z_M \in M$), причому єдиним чином.

Покажемо це,

$$TM = TL_n = L_{n+1} = \left[\begin{matrix} \text{в силу скінченновимірності} \\ \text{простору } E \end{matrix} \right] = L_n = M.$$

Це означає, що звуження оператора T на простір M, має обернене до себе.

Оскільки $T^n N = \varnothing$, то з цього можемо зробити висновок, що $N \cap M = \varnothing$ — простори не перетинаються.

Розглянемо елемент $x \in E$ такий, що $T^m x = y \in M$.

Аналогічно, $T^m|_M$ також буде оборотним. Тоді можемо вибрати такий елемент $\exists z \in M \; T^m x = T^m z$.

Останнє співвідношення можна переписати у вигляді $T^m(x-z) = 0$, тобто $x - z \in N$.

Очевидно, що $x = (x-z) + z$, де $x \in E, (x-z) \in N, z \in M$, причому однозначно.

Таким чином, простір E розкладається в пряму суму просторів N та M.

Доведення

Вважатимемо, що $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_q$ — власні числа оператора T, то визначимо наступні простори:

$N_k \equiv N(T - \lambda_k 1)$ та $M_k \equiv M(T - \lambda_k 1)$.

Можемо розкласти простір E в пряму суму $E = N_1 \oplus M_1$.

Далі треба показати, що простір E можна подати у вигляді прямої суми просторів $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_q$.

Для доведення, скористаємось методом індукції за розмірністю простору E.

1. Для $\dim E = 1$ — твердження очевидне

2. $\dim E = d > 1$

Припустимо, що потрібне твердження буде виконуватися для будь-якого підпростору меншої розмірності.

Достатньо переконатися в тому, що власними числами звуження $T|_{M_1}$ будуть числа $\lambda_2, \dots, \lambda_q$, а також, що простір $N((T - \lambda_k 1)|_{M_1}) = N(T - \lambda_k 1)$ для $k > 1$.

Покажемо це:

$Ker((T - \lambda_1 1)|_{N_k}) = 0$ при $k > 1$.

Подібно операторам $(T - \lambda_1 x)x = 0 \iff Tx = \lambda_1 x$.

Подібним змішаним оператором, $(T - \lambda_k 1)^j x = (\lambda_1 - \lambda_k)^j x \neq 0 \; \forall j$.

Тобто, вектор x, який є власним для λ_1 — не буде лежати в ядрі N_k, $x \notin N_k$.

Оскільки підпростір N_k — інваріантний відносно оператора $T - \lambda_1 1$, то $N_k \subset Im(T - \lambda_1 1)^j$. З чого можемо зробити висновок, що $N_k \subset M_1$.

Тобто, власні значення звуження оператора $T|_{M_1}$ - це числа $\lambda_2, \dots, \lambda_q$.

Кожен з визначених підпросторів N_k, фактично представляє собою відповідний узагальнений кореневий підпростір E_k (згідно означення). ■

1. Розглянемо просту ситуацію: оператор T має єдине власне значення $\tilde{\lambda}$. Його характеристичний многочлен $P(\lambda) = (\lambda - \tilde{\lambda})^n$.
Весь простір E буде узагальненим кореневим підпростором для оператора T, $E = E(T, \tilde{\lambda})$.

Тоді, $T = (T - \lambda\mathbb{1}) + \lambda\mathbb{1} = N + S$

нільпотентний оператор; діагональний

Отримали, що оператор $T = N + S$, причому $N + S = S + N$. А оператор S – діагональний, N – нільпотентний.
Легко можна знайти експоненту відповідного оператора T.

$$e^T = e^{N+S} = e^S \cdot e^N = e^{\lambda}\mathbb{1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k\right)$$

Тобто,

$$e^T = e^{\lambda}\mathbb{1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k\right)$$

2. Оператор T має власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ з кратностями $n_1, \ldots, n_q$, де простір $E = \bigoplus_{k=1}^{q} E(T, \lambda_k)$, $E_k = E(T, \lambda_k)$.
Звуження оператора T на кожен такий кореневий підпростір має єдине власне значення λ_k, $T|_{E_k} \equiv T_k$, λ_k.
А кожен оператор $T_k = N_k + S_k$.
Визначивши $N = \bigoplus_{k=1}^{q} N_k$, а $S = \bigoplus_{k=1}^{q} S_k$, де S – діагоналізований оператор в базисі, який являє собою об'єднання базисів узагальнених кореневих підпросторів; а N – нільпотентний.

Теорема (про декомпозицію – друга)

Нехай оператор $T: E \to E$. Простір E є дійсним, якщо всі власні значення оператора дійсні, і комплексний в іншому випадку.
Тоді оператор можна представити у вигляді суми нільпотентного оператора N та діагоналізованого оператора S, причому єдиним чином:

$$T = N + S$$

Доведення:
Доведено вище. ■

Теорема (про декомпозицію – третя)

Нехай оператор $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тоді, цей оператор T можна однозначно представити у вигляді суми операторів $T = N + S$, де N – нільпотентний, а S – напівпростий (тобто, діагоналізованою буде його комплексифікація).

Доведення:
Перейдемо до комплексифікації оператора T – T_c. Для неї виконуються умови другої теореми про декомпозицію $T_c = N_0 + S_0$, де N_0 – нільпотентний, а S_0 – діагоналізований в $\mathbb{C}^n$.
Покажемо, що S_0 та N_0 являють собою комплексифікацію деяких дійсних операторів. Для цього потрібно показати, що вони комутують з оператором комплексного спряження σ.
Визначимо оператор $S_1 = \sigma S_0 \sigma^{-1}$, а $N_1 = \sigma N_0 \sigma^{-1}$. Тоді, оператор $\sigma T_c = T_c \sigma$, або $T_c = \sigma T_c \sigma^{-1} = \sigma(N_0 + S_0)\sigma^{-1} = \sigma N_0 \sigma^{-1} + \sigma S_0 \sigma^{-1} = N_1 + S_1$
Не важко зрозуміти, що N_1 – нільпотентний, а S_1 – діагоналізований.
Тобто, ми розкладемо $T_c = N_0 + S_0$ та $T_c = N_1 + S_0$. А в силу однозначності представлення оператора T_c, $N_0 = N_1$ та $S_0 = S_1$.

$$S_1 = \sigma S_0 \sigma^{-1} \quad \Rightarrow \quad \sigma S_0 = S_0 \sigma$$

$$N_1 = \sigma N_0 \sigma^{-1} \quad \Rightarrow \quad \sigma N_0 = N_0 \sigma$$

В силу критерія, S_0 та N_0 – комплексифікації деяких дійсних операторів. Причому, $S_0 = S_c$ та $N_0 = N_c$. ■

Нехай оператор T має наступний набір власних значень $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ та набір комплексно спряжених власних значень $a_1 \pm ib_1, \dots, a_s \pm ib_s$. Тоді, комплексифікація діагоналізованої частини у відповідному базисі матиме вигляд

$$S_c = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \Theta \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1+ib_1 & & & & \\ & & & & a_1-ib_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_s+ib_s & \\ \Theta & & & & & & & a_s-ib_s \end{pmatrix}$$

А в напівпростому вигляді,

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \Theta \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ \Theta & & & & & \begin{bmatrix} a_s & -b_s \\ b_s & a_s \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Приклад:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det T = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Характеристичний многочлен,

$$\lambda^4 - 0 \cdot \lambda^3 + (1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0)\lambda^2 - \left(0 + 0 + 0 + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right)\lambda + \det T = 0$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0, \quad (\lambda^2+1)^2 = 0$$

$\lambda = -i; -i; i; i$

Знайдемо напівпросту частину оператора в деякому базисі

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ – в базисі узагальнених кореневих підпросторів.

Шукаємо базис УКП: $E(T, i) = \operatorname{Ker}(T - i\mathbb{1})^2$

$$(T - i\mathbb{1})^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{pmatrix}$$

$$(T - i\mathbb{1})^2 f = 0,$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2i & 0 & 0 & 0 \\ -2i & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i & 0 \\ -4i & -2 & -2i & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Отримаємо два вектори,

$$f_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отримали базис напівпростої частини.

Причому, можемо отримати матрицю переходу P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця

$$S = P \cdot S_0 \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ – напівпроста частина в заданому стандартному базисі

Нільпотентна частина, $N = T - S$,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta$$

Таким чином,

$$e^T = e^{N+S} = e^S \cdot e^N = P \cdot e^{S_0} \cdot P^{-1} \cdot (1 + N)$$

де

$$e^{S_0} = \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 & 0 & 0 \\ \sin 1 & \cos 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

Тема „Нільпотентні канонічні форми"

Елементарним нільпотентним блоком r-го порядку називатимемо квадратну матрицю $r \times r$, в якій перша піддіагональ одинична, а всі інші елементи – нульові.

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \Theta \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ \Theta & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо це матриця деякого оператора N в базисі $e_1, \dots, e_n$. Тоді, $Ne_1 = e_2$. Якщо розписувати, то $Ne_1 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots + 0 \cdot e_n$

Аналогічно, продовжуючи далі

$Ne_{n-1} = e_n$

$Ne_n = 0$

З даної послідовності можемо зробити висновок, що

$N^n(e_n) = 0$

Оператор N є нільпотентним порядку n. А будь-який менший степінь НЕ буде нульовим.

Нехай у нас є глобальний простір E та підпростір $W \subset E$. Він є циклічним для оператора T, якщо:

1. підпростір W інваріантний відносно T,
   $TW \subset W$
2. $\exists x \in W \quad W = \Lambda\{T^i x\}$

Відповідний вектор x називається циклічним вектором.

Будь-який ненульовий вектор простору генерує циклічний підпростір.
$Z(T, x)$ – циклічний підпростір відносно оператора T з циклічним вектором x.

Найменше число k, що $T^k x = 0$ називається висотою T і позначається $nil(x)$.

Якщо оператор T – нільпотентний, якщо $T^l x \neq 0$ $\forall l$ $0 \le l \le nil(x)$

Лема 1

Нехай $n = nil(x)$. Тоді, вектори $\{T^k x\}$, де $k \in [0, n-1]$ утворюють базис відповідного циклічного підпростору $Z(T, x)$.

Очевидно, що система є повною. Воно твердження випливає з значення $W = \mathcal{L}\{T^i x\}$.

Припустимо, що ці вектори є лінійно залежні. Тобто знайдеться $\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i x = 0$, де $\sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \neq 0$. Нехай a_j – перший з коефіцієнтів, який ненульовий. Подіємо на співвідношення оператором T^{n-j-1}: $T^{n-j-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i x\right) = \left[\begin{matrix}\text{в силу}\\ \text{лінійності}\end{matrix}\right] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^{n+i-j-1} x =$

$$= \left[\begin{matrix}\text{оскільки } \forall i < j,\\ a_i = 0\end{matrix}\right] = a_j T^{n-1} x + \underbrace{\sum_{i=j+1}^{n-1} a_i T^{n+i-j-1} x}_{\text{оскільки } 0 \le l \le nil(x), \text{ то дорівнює } 0} = a_j \underbrace{T^{n-1} x}_{\neq 0} = 0$$

Тобто, $a_j = 0$, що суперечить припущенню. Отже, маємо систему лінійно незалежних елементів.

Тобто, така система може бути базисом.

Наслідок

В базисі з елементів $\{N^k(x)\}$, де $0 \le k < nil(x)$, нільпотентний оператор описується елементарним нільпотентним блоком.

Лема 2

Нехай $n = nil(x)$. Якщо многочлен $P(t)$ задовольняє співвідношення $P(N)x = 0$, то вираз t^n є дільником многочлена $P(t)$.

Лема 3

Нехай $N: E \to E$ – нільпотентний оператор.

Тоді, $E = \oplus Z_i(N, x)$ – пряма сума циклічних просторів.

Доведення:

Доведемо мат. індукцією

1. $\dim E = 0$ – очевидно виконується

2. Оскільки $Ker N \neq 0$ при $\dim E > 0$, то $\dim NE < \dim E$.

Відповідно, можемо знайти вектори $\exists y_1, \dots, y_r \in NE$. В такому випадку, $NE = Z(y_1) \oplus \dots \oplus Z(y_r)$.

Визначимо вектори x_j: $Nx_j = y_j$. На них теж можна збудувати підпростори $Z(x_1), \dots, Z(x_r)$ – які є ЛН. Очевидно, що $nil(x_j) \ge 2$, бо $Nx_j = y_j \neq 0$.

Якби циклічні підпростори $Z(x_j)$ були б ЛЗ, то ми могли б в кожному підпросторі $Z(x_j)$ обрати елемент u_j, при тому $\sum_{j=1}^{r} u_j = 0$. Але тоді $\sum_{j=1}^{r} N u_j = 0$. Але $Nu_j \in N(Z(x_j)) = Z(y_j)$.

Але циклічні простори $Z(y_j)$ – ЛН за побудовою. Відповідно, може бути ситуація коли $u_j \in Ker N$. Тоді, кожен з векторів u_j можемо розкласти по базису ядра:

$u_j = \sum_{k=0}^{n_j - 1} a_{jk} N^k x_j$, де $n_j = nil(x_j)$. Або ж, $u_j = P_j(N) x_j$, де $P_j(N)$ – деякий матричний многочлен від P.

Далі, $Nu_j = N(P_j(N) x_j) = P_j(N) \cdot N x_j = P_j(N) y_j = 0$

Тоді, в силу леми № 2 можемо сказати, що дільником $P_j(t)$ буде вираз t^m, де $m < nil(y_j)$.

Тобто, дільником гарантовано буде t. Тоді, $P_j(t) = S_j(t) \cdot t$

Враховуючи представлення для P_j, отримаємо $u_j = P_j(N) x_j = S_j(N) N x_j =$

$= S_j(W) y_j \in Z(y_j)$.

Але останні циклічні підпростори $Z(y_j)$ – ЛН, то елементи y_j тільки нульові. Це доводить, що $Z(x_j)$ є ЛН.

Тоді, $E = Z(x_1) \oplus \ldots \oplus Z(x_r) \oplus L$, де $L \subset \mathrm{Ker}\, N$. Простр L потрібно визначити з рівняння $\mathrm{Ker}\, N = L \oplus (\mathrm{Ker}\, N \cap NE)$. У цьому випадку підпростір L буде ЛН з $Z(x_j)$. В силу того, що кожен циклічний підпростір з $\mathrm{Ker}\, N$ – одновимірний, то $L = Z(w_1) \oplus \ldots \oplus Z(w_s)$, де $w_1, \ldots, w_s$ – базис L.

Остаточно отримуємо, що

$$E = Z(x_1) \oplus \ldots \oplus Z(x_r) \oplus \underbrace{Z(w_1) \oplus \ldots \oplus Z(w_s)}_{\text{одновимірні}} \ \blacksquare$$

Теорема (про структуру нільпотентного перетворення)

Нехай $N : E \to E$ – нільпотентний. Тоді, в просторі E існує деякий базис, в якій $A = \mathrm{diag}(A_k)$ з елементарними нільпотентними блоками по головній діагоналі.

Такий вигляд матриці нільпотентного оператора називається канонічною нільпотентною формою.

Доведення:

Твердження є очевидним наслідком леми №3.

В $Z(x_j)$ можна обрати базис $\{T^{k_j} x_j\}$. А в даному базисі $N|_{Z(x_j)}$ – елементарний нільпотентний блок $\begin{pmatrix} 0 & & \Theta \\ 1 & 0 & \\ \Theta & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\blacksquare$

Наслідок 1

К-ть елементарних нільпотентних блоків матриці оператора дорівнює розмірності його ядра.

Наслідок 2

Дві нільпотентні матриці подібні тоді і тільки тоді, коли їх нільпотентні канонічні форми співпадають (з точністю до перестановки блоків)

$$N = \begin{pmatrix} [0] & & & & & \Theta \\ & \ddots & & & & \\ & & [0] & & & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & & & \ddots \; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \\ \Theta & & & & & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ddots \end{pmatrix}$$

Для побудування N треба знати ν_k – к-ть нільпотентних блоків розмірності k.

Ми можемо знайти $\delta_k \equiv \dim \mathrm{Ker}\, N^k = n - \mathrm{rang}\, N^k$, де $n = \dim N^k$.

Тепер треба пов'язати ν_k та δ_k.

$\delta_1 = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{n-1} + \nu_n$ – к-ть нульових стовпчиків матриці N.

$\delta_2 = \dim \mathrm{Ker}\, N^2 = \nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3 + \ldots + 2\nu_{n-1} + 2\nu_n$

. . . .

$\delta_{n-1} = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots + (n-1)\nu_{n-1} + (n-1)\nu_n$

$\delta_n = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots + (n-1)\nu_{n-1} + n\nu_n$

За допомогою звичайного методу виключення Гаусса

$\nu_1 = 2\delta_1 - \delta_2$
$\nu_2 = -\delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3$
$\nu_3 = -\delta_2 + 2\delta_3 - \delta_4$
$\dots$
$\nu_{n-1} = -\delta_{n-2} + 2\delta_{n-1} - \delta_n$
$\nu_n = \delta_n - \delta_{n-1}$

Тобто, загальна формула $\nu_k = \begin{cases} 2\delta_1 - \delta_2, & k=1 \\ -\delta_{k-1} + 2\delta_k - \delta_{k+1}, & 2 \le k \le n-1 \\ \delta_n - \delta_{n-1}, & k=n. \end{cases}$

Теорема (про побудову нільпотентної канон. форми)

Нехай N – нільпотентний оператор n-вимірного простору. Тоді, якщо ν_k – к-ть елементарних нільпотентних блоків k-го порядку, а δ_k – розмірність ядра k-го степеня оператора N, то має місце співвідношення

$\nu_1 = 2\delta_1 - \delta_2$

$\nu_k = -\delta_{k-1} + 2\delta_k - \delta_{k+1}, \quad k \in [2; n-1]$

$\nu_n = \delta_n - \delta_{n-1}$

Тема: „Вільні канонічні форми"

Розглядаємо оператор $T\ E \to E$, у випадку, коли він має всі дійсні λ; в $\mathbb{C}$ – якщо $\exists \lambda \in \mathbb{C}$.

Припустимо, що оператор T має єдине власне значення λ. В цьому випадку, оператор $T = N + \lambda\mathbb{1}$.

Відповідно, в просторі E можна знайти базис, в якому оператор N буде описуватися канонічною нільпотентною формою.

І тоді канонічна форма матриці оператора T матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \Theta \\ & \lambda & 1 & \\ \Theta & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \Theta \\ & \lambda & \ddots & \\ \Theta & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \equiv C_\lambda.$$

Кількість елементарних λ-блоків дорівнює розмірності ядра, $\dim(\operatorname{Ker}(T - \lambda\mathbb{1}))$.

Нехай тепер оператор T має різні власні значення $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

В цьому випадку, $E = \bigoplus_i E(T, \lambda_i)$.

Якщо визначити оператор $T_k \equiv T\big|_{E(T,\lambda_k)}$ – даний оператор має єдине власне значення.

В узагальненому кореневому просторі можемо обрати базис, в якому оператор T_k характеризується матрицею C_{λ_k}.

Тоді, матриця оператора T в базисі, який представляє собою об'єднання базисів УКП буде квазідіагональна з матрицями C_{λ_k} по діагоналі.

Теорема (про жорданову форму матриці)

Канонічна форма оператора $T: E \to E$, де $E \subset \mathbb{R}$, і $E \subset \mathbb{C}$, якщо $\exists \lambda_k \in \mathbb{C}$ – це квазідіагональна матриця , клітками C_{λ} по головній діагоналі.

Такий вигляд матриці називається [канонічною] жордановою формою.

Доведення:

Див. вище. ■

Якщо $T: E \to E$, де $E \subset \mathbb{R}$. Припустимо, що даний оператор має єдину пару комплексно спряжених $\lambda = a \pm ib$ $(b > 0)$.

Перейдемо до комплексифікації T_c. В даному випадку в просторі E_c існуватиме базис, в якому матриця оператора T_c буде псевдодіагональною. Але тоді цей простір E_c буде інваріантним підпростором для оператора T. Ми можемо стверджувати, що в просторі E $\exists E \supset E_{\mu}$, що $(E_{\mu})_c = E_c(T_c, \mu) \oplus E_c(T_c, \bar{\mu})$. Причому базисом цього підпростору E_{μ} будуть дійсні та уявні частини базису простору E_c.

Тоді, в даному базисі матриця оператора T матиме вигляд:

$$B_{\mu} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} D_2 & & \\ I_2 & D_2 & \\ & \ddots & \\ & & I_2 D_2 \end{bmatrix} & & \Theta \\ & \ddots & \\ \Theta & & \begin{bmatrix} D_2 & & \\ I_2 & D_2 & \\ & \ddots & \\ & & I_2 D_2 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

де $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Псевдодіагональна матриця, що складається з блоків B_{μ} називається дійсною канонічною формою.

Теорема (про дійсну канонічну форму)

Нехай $T: E \to E$, де $E \subset \mathbb{R}$. Тоді, в цьому просторі можна знайти базис, в якому матриця оператора T матиме вигляд:

$$A = \operatorname{diag}(C_{\lambda_1}, \ldots, C_{\lambda_r}, B_{\mu_1}, \ldots, B_{\mu_s})$$

Такий вигляд матриці називається дійсною канонічною формою.

Для побудови дійсної канонічної форми нам буде потрібно застосувати теорему про побудову канонічної нільпотентної форми до звуженого оператора $T - \lambda I$.

Визначимо,

$$D_k^{\lambda} \begin{cases} \text{к-ть елементарних } \lambda\text{-блоків розмірності } k, \text{ у випадку коли } \lambda \in \mathbb{R}. \\ \text{к-ть блоків розмірності } 2k, \text{ якщо } \lambda \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Інше позначення,

$$\delta_k^{\lambda} \begin{cases} \dim \operatorname{Ker}(T - \lambda I)^k, \text{ якщо } \lambda \in \mathbb{R} \\ \dim \operatorname{Ker}(T_c - \lambda I)^k, \text{ якщо } \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Теорема (про побудову дійсної канонічної форми)

Нехай $T: E \to E$, $E \subset \mathbb{R}$. Тоді, дійсна канонічна форма оператора визначається числами D_k^{λ} (для кожного дійсного λ, або пари [кожної] комплексно спряженої пари $\lambda; \bar{\lambda}$), що обчислюються наступним чином:

$$D_k^{\lambda} = -\delta_{k-1}^{\lambda} + 2\delta_k^{\lambda} - \delta_{k+1}^{k} \quad \text{для } 1 \le k \le n_{\lambda}$$

$$\delta_0^{\lambda} \equiv 0, \quad \text{а} \quad \delta_{n_{\lambda}+1}^{\lambda} = \delta_{n_{\lambda}}^{\lambda}$$

Доведення:

Приймемо без доведення. ■

Приклад:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & -1\\ 3 & -4 & 5 & -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda^4-0\cdot\lambda^3+\left(\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -4 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -1\end{vmatrix}\right)\lambda^2-$$

$$-\left(\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -4 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 5 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ -4 & 5 & -1\end{vmatrix}\right)\lambda+\det A=0$$

$$\lambda^4+(1+1-\cancel{3}-\cancel{1}+\cancel{1}+\cancel{3})\lambda^2-\left(\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 3 & -4 & -5\end{vmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ -4 & 1 & -1\end{vmatrix}\right)\lambda+1=0$$

$\lambda^4+2\lambda^2+1=0,\quad (\lambda^2+1)^2=0,\quad \lambda=\pm i;\pm i;$

$$(A-iI)^2=\begin{pmatrix}-i & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1-i & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2-i & -1\\ 3 & -4 & 5 & -1-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1-i & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2-i & -1\\ 3 & -4 & 5 & -1-i\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cancel{1}\cancel{-1}-1+3 & i+1+i+1+4 & i-1-2+i+5 & -i+0+\cancel{1}-\cancel{1}-i\\ -i\cancel{-1}-i+\cancel{1}+0 & -1+(1+i)^2-1 & \cancel{-1}\cancel{-1}-i+\cancel{1}-i+0 & \cancel{1}+0\cancel{-1}+0\\ -i-1+2-1-3 & \cancel{-1}\cancel{+1}+i-2+i+4 & -1-1+(2-i)^2-5 & \cancel{1}+0\cancel{-2}+i+\cancel{1}+i\\ -3i-4+5-3-3i & -3+4+4i-5+4+4i & -3-4+10-5i-3-5i & 3+0-5+(1+i)^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2i+6 & 2i+2 & -2i\\ -2i & -2+\cancel{1}+2i\cancel{-1} & -2i & 0\\ -2i-2 & 2i+2 & -7+4-2i-1 & 2i\\ -6i-2 & 8i & -10i-2 & -2+\cancel{1}+2i\cancel{-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2i+6 & 2i+2 & -2i\\ -2i & 2i-2 & -2i & 0\\ -2i-2 & 2i+2 & -2i-4 & 2i\\ -6i-2 & 8i & -10i-2 & 2i-2\end{pmatrix}$$

$\delta_1=1,\quad \delta_2=2$

$\operatorname{rang}(A-iI)=3,\quad \operatorname{rang}(A-iI)^2=2$

Тоді,

$\vartheta_1=0,\quad \vartheta_2=1$

Маємо дійсну канонічну форму початкової матриці

$$\left(\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)$$

Розділ „Фундаментальні теорії ЛАС"

Тема: „Стоки та джерела лінійної автономної системи"

Розглянемо автономну систему $\dot{x} = f(x)$, де це є довільною автономною системою.

Але спочатку розглянемо лінійну алгебраїчну систему $\dot{x} = Ax$. Точка $x=0$ називається стоком, якщо всі власні значення оператора A мають від'ємну дійсну частину.

Точка $x=0$ називається джерелом системи, якщо всі власні значення оператора A мають додатню дійсну частину. А відповідний ЛП називається розширенням.

Лема Нехай A – це оператор, який діє в $E \subset \mathbb{R}$. Причому дійсна частина всіх його власних значень $\alpha < Re\lambda < \beta$. Тоді, в E можна знайти такий базис, що $\alpha \|x\|^2 \le (Ax, x) \le \beta \|x\|^2$.

Доведення:

Нехай $c \in \mathbb{R}$, що $Re\lambda < c < \beta$.

Припустимо, що A – нетвірний (його комплексифікація діагоналізовна). Тоді, $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r \oplus F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$, де E_i – одновимірний простір, який збудований на власному векторі e_i, що відповідає дійсному власному значенню λ_i; F_j – двовимірний підпростір, збудований на векторах f_j, g_j, що відповідають $a_j \pm ib_j$. Згідно нашого припущення, $\lambda_i < c$, а $a_j < c$.

Вважатимемо, що базис з векторів $\{e_i, f_j, g_j\}$ – ортонормований. Тоді, скалярний добуток $(Ae_i, e_i) = \lambda_i < c$.

Так само, $(Af_j, f_j) < c$.

Оскільки в нас є певний базис, $x = (x_1^e, \ldots, x_r^e, x_1^f, \ldots, x_s^f, x_1^g, \ldots, x_s^g)$.

Можемо переконатися, що $(Ax, x) \le c\|x\|^2 < \beta \|x\|^2$.

Тому оцінку ми отримали у нетвірному випадку.

Для довільного оператора A, оберемо в E базис, в якому оператор буде представлятися своєю дійсною канонічною формою. Тоді цей оператор A можемо представити у вигляді суми $A = S + N$, де N – нільпотентна частина.

Зробимо N достатньо малою.

Без втрати загальності, вважатимемо, що

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тоді, $Ne_1 = e_2$, $Ne_2 = e_3$, …, $Ne_{n-1} = e_n$, $Ne_n = 0$.

Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$ і збудуємо довільний базис наступним чином:

$e_1^* = e_1$

$e_2^* = \frac{1}{\varepsilon} e_2$

$e_3^* = \frac{1}{\varepsilon^2} e_3$

…

$e_n^* = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} e_n$

З'ясуємо як діятиме N на нові вектори:

$Ne_1^* = Ne_1 = e_2 = \varepsilon \cdot e_2^*$

$Ne_2^* = N(\frac{1}{\varepsilon} e_2) = \frac{1}{\varepsilon} Ne_2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot e_3 = \varepsilon \cdot e_3^*$

…

$Ne_{n-1}^* = \varepsilon e_n^*$

$Ne_n^* = 0$

Scanned by CamScanner

Відповідно, вигляд нільпотентної частини в новому базисі

$$N_* = \begin{pmatrix} 0 & & & \Theta \\ \varepsilon & 0 & & \\ & \varepsilon & \ddots & \\ & & & 0 \\ \Theta & & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглядаючи відповідний скалярний добуток $(Ax, x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} (Sx, x)$, отже, в потрібному базисі при $\varepsilon \to 0$ оператор перетворюється в конформний.

Тобто, в силу доведеного вище, наша лема має місце.

Оцінка знизу $\alpha \|x\|^2 \leq (Ax; x)$ виводиться аналогічно. ∎

Теорема (про лінійний стік)

Нехай $A: E \to E$. Тоді, три наступні твердження будуть еквівалентними:

1) початок системи координат $x=0$ – стік ЛС.

2) для довільної норми простору E можна знайти такі додатні константи $\exists k, b > 0$ $\forall x \in E$ $\|e^{At} \cdot x\| \leq k \cdot e^{-bt} \|x\|$.

3) в E можна ввести норму B, в якій $\exists b > 0$ $\forall x \in E$ $\forall t > 0$ $\|e^{At} \cdot x\|_B \leq e^{-bt} \|x\|_B$.

Доведення:

1) ③ ⇒ ② в силу відомої теореми про еквівалентність норм.

2) ② ⇒ ① в силу наступного факту: якщо розв'язок $x(t)$ лінійної системи $\dot{x} = Ax$ прямує до 0 зі збільшенням t, то всі власні значення мають $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

3) ① ⇒ ③

Оберемо в E базис B таким чином, щоб виконувалися твердження доведеної леми. Нехай координати розв'язку $x(t)$ в базисі B: $x = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

Спробуємо знайти похідну норми в базисі B:

$$\frac{d\|x\|_B}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\right) = \frac{x_1 \cdot \dot{x}_1 + \ldots + x_n \cdot \dot{x}_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{(\dot{x}; x)}{\|x\|_B} =$$

$$= \frac{(Ax; x)}{\|x\|_B} \leq \frac{\beta \|x\|_B^2}{\|x\|_B} = \beta \|x\|_B$$

Тобто, $\frac{d\|x\|_B}{dt} \leq \beta \|x\|_B$, $\frac{d\|x\|_B}{\|x\|_B} \leq \beta \cdot dt$

Проінтегруємо останню нерівність в межах $[0, t]$,

$\ln \|x\|_B \Big|_0^t \leq \beta t$, $\|x\|_B \leq e^{\beta t} \cdot \|x(0)\|_B$

В силу лінійності потоку, в якості точки $x(0)$ можна взяти довільну точку. І тоді переписати нерівність як $\|e^{At} \cdot x\|_B \leq e^{\beta t} \|x\|_B$.

* поклавши $b = -\beta$, отримаємо III твердження теореми. ∎

Повністю аналогічну теорему ми можемо сформулювати для джерела.

Теорема (про джерело ЛС)

Нехай $A: E \to E$. Тоді, три наступні твердження еквівалентні:

1) початок с.к. $x=0$ – джерело ЛС

2) для довільної норми в E, можна видати $\exists k, \ell > 0$ $\forall x \in E$ $\forall t > 0$ $\|e^{At} x\| \geq k e^{\ell t} \|x\|$.

• 2) в E можна ввести таку норму, що

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in E \ \forall t > 0 \quad \|e^{At} x\|_n \geq e^{\varepsilon t} \|x\|_n$

Тема „Гіперболічні потоки"

Потік К $\dot{x} = Ax$ називається гіперболічним, якщо жодне власне значення A не має нульової $\mathrm{Re}\,\lambda$.

Теорема (про гіперболічний потік)

Нехай A визначає гіперболічний потік. Тоді, простір E можна представити $E = E_s \oplus E_u$, які інваріантні відносно A. Причому, $A|_{E_s}$ (звуження A на E_s) – представляє собою стиснення; а $A|_{E_u}$ – розширення.

Доведення.

Оберемо в E базис, в якому матриця A описується своєю дійсною канон. формою. Переставимо місцями частини цього базису таким чином, що спочатку в канонічній формі були розташовані блоки, що відповідають власним значенням з додатньою власною частиною, а потім з від'ємною дійсною частиною. Тоді перший набір блоків буде відповідати $A|_{E_u}$, а другий $A|_{E_s}$. Оскільки підпростір E_u і E_s інваріантні відносно A, вони будуть також інваріантними відповідно його експоненти e^{At}. В силу того, як ми обрали відповідні блоки, звуження $e^{At}|_{E_u}$ – . , $e^{At}|_{E_s}$ – стисненням. ■

Зауваження

Відповідна декомпозиція простору E та оператора однозначна

Тема: „Типові в-ті операторів"

Будемо казати, що деяка в-ть P є типовою у множині операторів, якщо множина операторів з цією в-тю містить в собі відкриту та скрізь щільну множину.

Теорема (про оператори з різними власними значеннями)

Множина операторів з різними власними значеннями є відкритою та скрізь щільною у ... всіх операторів, які визначені на заданому просторі E.

Доведення:

Розглянемо деякий оператор $T: E \to E$.

Можемо знайти в просторі E деякий базис такий, що оператор $T = S + N$. Причому оператор S – псевдодіагональна матриця виду

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \Theta \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & D_1 & \\ \Theta & & & & \ddots \; D_s \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \Theta \\ & \ddots & 1 \; 0 & & \\ & & & \Theta_2 & \\ \Theta & & & I \; \ddots & I \; \Theta_2 \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad \Theta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_k = \begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}$$

Норму матриці візьмемо як $\|T\|_{B_{max}} \equiv \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Позначимо T_0 – множина операторів з різними власними значеннями.

Збудуємо числа $\lambda_1', \ldots, \lambda_r'$ таким чином, що всі ці числа різні та вони задовільняють умові $|\lambda_i - \lambda_i'| < \varepsilon$. А також набір чисел $a_1', \ldots, a_s'$ що $|a_i - a_i'| < \varepsilon$.

Тоді збудуємо оператор T_0 так, що

$T' = S' + N$, де

$$S' = \begin{pmatrix} \lambda_1' & & & & \Theta \\ & \ddots & \lambda_r' & & \\ & & & D_1' & \\ \Theta & & & & \ddots \; D_s' \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad D_i' = \begin{pmatrix} a_k' & -b_k \\ b_k & a_k' \end{pmatrix}$$

Оператор $T' \in T_0$, бо він має усі різні власні значення. А $\|T' - T\|_{B_{max}} < \varepsilon$.

Тобто, множина T_0 є скрізь щільною множиною.

Залишається показати, що множина T_0 є відкритою.

Доведемо це від супротивного: припустимо, що існує послідовність операторів T_k, які $T_k \notin T_0$.

$\exists \{T_k\} \notin T_0 \quad T_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \tilde{T} \in T_0$

Тобто, якщо в нас число λ_k – це власне значення оператора T_k, то його кратність повинна бути більше одиниці (щонайменше два). Іншими словами,

$\exists x_k, y_k \quad (x_k, y_k) = 0 \quad T_k x_k = \lambda_k x_k$
лінійно незалежні $\quad T_k y_k = \lambda_k y_k$

Виконуємо граничний перехід при $k \to \infty$,

$\tilde{T} \tilde{x} = \lambda \tilde{x}$
$\tilde{T} \tilde{y} = \lambda \tilde{y}$

Причому, $(\tilde{x}; \tilde{y}) = 0$.

Оператор $\tilde{T}$ має власне значення кратності 2. Але оскільки $\tilde{T} \in T_0$, то ми маємо протиріччя.

Отже, множина операторів T_0 є відкритою у множині всіх операторів. ■

Множина T_0 – це підмножина множини невироджених операторів. Тому, невиродженість — це типова в-ть для множини лінійних відображень n-вимірного дійсного простору.

Множина невироджених операторів вже не буде відкритою.

Приклад:

Як себе поводитиме оператор $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$

Множина гіперболічних операторів є відкритою та скрізь щільною у множині всіх відображень n-вимірного простору (довести самостійно).

Тема: „Фазові портрети простих лінійних систем на площині"

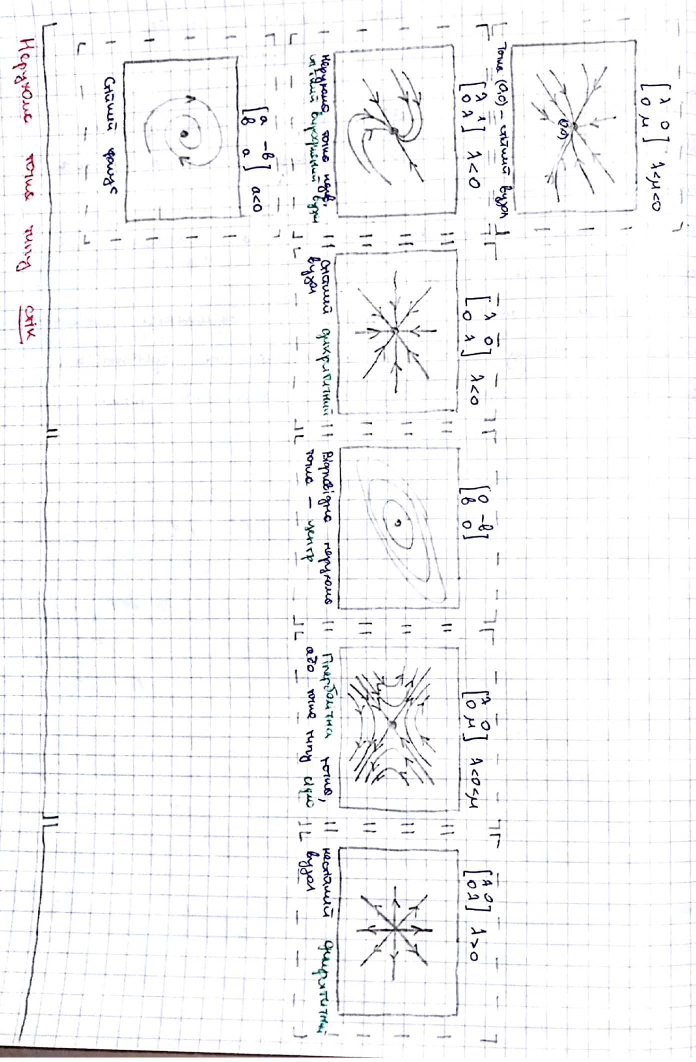
Розглядаємо автономну систему $\dot{x} = Ax$, де $\underset{2\times2}{A}$.

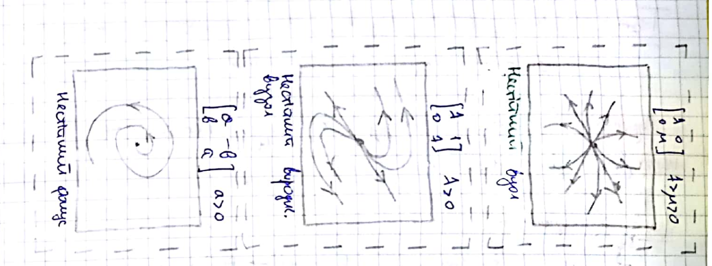
Матриця B є подібною до матриці A, якщо можемо записати $B = \Gamma A \cdot \Gamma^{-1}$.

Поняття подібності дозволяє визначити на множині всіх матриць відношення еквівалентності.

На площині (множині матриць 2×2) відношення еквівалентності розбиває множину на 10 класів, що не перетинаються.

Розбиваємо на основі визначення канонічних форм.





Системи лінійних диф. рівнянь називаються алгебраїчно еквівалентними, якщо їх матриці мають однакові власні значення; і називаються топологічно еквівалентними, якщо існує перетворення, яке переводить їх фазові портрети один в один із збереженням напрямку траєкторій.

Тема: „Властивості розв'язків систем автономних диференціальних р-нянь"

Розглядаємо системи виду $\dot{x} = f(x)$. Відображення f є неперервно-диференційованим.

Лема (нерівність Гронвола)

Нехай відображення $u: [0, t] \to \mathbb{R}$ неперервне та невід'ємне. Якщо існують такі $C \geq 0$, $K \geq 0$, що

$$u(t) \leq C + \int_0^t K \cdot u(s) ds$$

Тоді в кожній точці відрізку $[0; t]$, $u(t) \leq C \cdot e^{Kt}$

Доведення:

- Якщо $C > 0$, введемо допоміжну функцію $U(t) \equiv C + \int_0^t K \cdot u(s) ds$. Тоді $u(t) \leq U(t)$.

Тоді, $U' = K u(t) \leq K U(t)$.

В результаті, маємо диф. нерівність з відокремленими змінними.

$\frac{dU}{U} \leq K dt$, а проінтегрувавши $U(t) \leq C e^{Kt}$. А оскільки $U(0) = C$ та $u(t) \leq U(t)$, то $u(t) \leq C e^{Kt}$.

- Якщо $C = 0$, розглянемо послідовність констант C_n таких, що $C_n \to 0$.

Застосувавши до даних констант виведене вище, доведемо і для даного випадку. ■

Теорема (про неперервну залежність розв'язків від початкових умов)

Нехай множина W відкрита, а відображення f має константу Ліпшиця K. Тоді, якщо $y(t)$ та $z(t)$ — розв'язки нашої системи $\dot{x} = f(x)$, які визначені на відрізку $[t_0, t_1]$, то тоді в кожній точці відрізку має місце нерівність

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{K(t-t_0)}$$

Доведення:

Введемо нову функцію $\sigma(t) = |y(t) - z(t)|$.

Оцінимо зверху дану функцію,

$$\sigma(t) = |y(t) - z(t)| = \left| y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau - z(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(\tau, z(\tau)) d\tau \right| \leq$$

$$\leq |y(t_0) - z(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, z(\tau))| d\tau \leq$$

$$\leq |y(t_0) - z(t_0)| + \int_{t_0}^{t} K \cdot |y(\tau) - z(\tau)| d\tau$$

Тобто, для функції виконується оцінка

$$\sigma(t) \leq \sigma(t_0) + \int_{t_0}^{t} K \sigma(\tau) d\tau.$$

Скориставшись нерівністю Гронвола при $u(t) = \sigma(t)$ та $C = \sigma(t_0)$, приходимо до твердження теореми:

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{K(t-t_0)}. ■$$

Зауваження

Чим більша константа Ліпшиця правої частини системи, тим ТОЧНІШЕ треба задавати початкові умови.

Лема (про однакові розв'язки)

Нехай f – неперервно диференційовне відображення, що визначене на множині W.
Якщо два розв'язки $u(t)$ і $v(t)$ системи $\dot{x} = f(x)$ визначені на одному і тому максимальному інтервалі J, і в деякій точці $t_0 \in J$ вони співпадають, то вони співпадають всюди на цьому проміжку.

Теорема (про продовження розв'язку)

Нехай множина W – відкрита множина, на якій визначено неперервно-диференційовне відображення f.
Нехай $y(t)$ – це розв'язок, який визначений на максимально можливому скінченному інтервалі $J = [\alpha, \beta]$.
Тоді, для довільного компакту $K \subset W$ $\exists t \in]\alpha, \beta[$, що $y(t) \notin K$

Доведення:

Виконаємо методом від супротивного.
Припустимо, що в жодній точці інтервалу (α, β), розв'язок $y(t)$ не виходить за межі компакту $\forall t \in (\alpha, \beta)$ $y(t) \in K$.
Оскільки f – неперервно диференційовна на W, то на компакті K вона буде обмеженою.
Тобто, $\exists M$ що $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in K$.
Оберемо в межах проміжку $]\alpha, \beta[$ деяку точку $\gamma \in]\alpha, \beta[$, і покажемо що розв'язок $y(t)$ можна буде подовжити до неперервного на відрізку $[\gamma, \beta]$.
Можна переконатися в тому, що розв'язок $y(t)$ буде рівномірно неперервним на напівінтервалі $[\gamma; \beta)$

$$|y(t_0) - y(t_1)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{y'(s)}_{f(y(s))} ds \right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(y(s))| ds \leq M(t_1 - t_0).$$

Тобто, розв'язок $y(t)$ рівномірно неперервний.
Визначимо значення функції $y(\beta) = y(\gamma) + \lim\limits_{t \to \beta} \int_{\gamma}^{t} y'(s) ds =$
$= y(\gamma) + \lim\limits_{t \to \beta} \int_{\gamma}^{t} f(y(s)) ds = y(\gamma) + \int_{\gamma}^{\beta} f(y(s)) ds$ (оскільки f – неперервно-диференційовне)
Тобто, в кожній точці $t \in [\gamma, \beta]$, $y(t) = y(\gamma) + \int_{\gamma}^{t} f(y(s)) ds$.
З останнього співвідношення випливає, що ф-ція y диференційовна в β, причому $y'(\beta) = f(y(\beta))$.
Тобто, $y(t)$ буде розв'язком системи в точці β. Але тоді за теоремою Коші – Пікара, розв'язок $y(t)$ існуватиме в деякому околі точки β. Тобто, він буде визначений на проміжку $[\beta; \beta + \delta)$, де $\delta > 0$. Що каже про те, що розв'язок визначений на $[\beta; \beta + \delta)$, тобто наш початковий інтервал розв'язку НЕ Є МАКСИМАЛЬНИМ. Що доводить хибність нашого припущення. ∎

Наслідок

Нехай A – компактна підмножина відкритої множини W.
Нехай f – неперервно-диференційовне відображення.
Оберемо $y_0 \in A$ і припустимо, що будь-який розв'язок $y(t)$, що визначений на проміжку $[0; \beta)$ і розпочинається з точки $y(0) = y_0$ повністю належить до компакту A.
Тоді цей розв'язок можна продовжити на напіввісь $[0; +\infty)$ таким чином, що він повністю лежатиме в межах A.

Теорема (про близькі розв'язки)

Нехай відображення f — неперервно-диференційовне.

* $y(t)$ — деякий розв'язок системи $\dot{x} = f(x)$, який визначений на відрізку $[t_0, t_1]$, причому в момент часу t_0, $y(t_0) = y_0$.

Тоді, існує такий окіл точки y_0, $U(y_0)$ і константа K такий, що для точки $z_0 \in U(y_0)$ буде існувати розв'язок $z(t)$ визначений на проміжку $[t_0, t_1]$ проходить через точку $z(t_0) = z_0$ і виконується нерівність $|y(t) - z(t)| \leq K|y_0 - z_0| e^{K(t-t_0)}$

Доведення.

В силу компактності відрізка $[t_0, t_1]$ і відкритості множини W, знайдеться $\varepsilon > 0$, що множина точок $x \in W$ $|x - y(t)| \leq \varepsilon$ буде компактом. Тоді, звуження неперервно-диференційовного відображення f на цей компакт буде Ліпшиць неперервним з деякою константою Ліпшиця.

Оберемо достатньо мале $\delta > 0$, що $\delta \leq \varepsilon$ та $\delta e^{K(t_1-t_0)} \leq \varepsilon$.

Тоді, якщо відстань між точками $|z_0 - y_0| < \delta$, то знайдеться єдиний розв'язок $z(t)$, який проходить через точку z_0 і визначений на відрізку $[t_0; t_1]$.

Оскільки, по-перше, $z_0 \in W$ оскільки $|z_0 - y_0| < \delta$. А тоді буде розв'язок $z(t)$, який проходить через z_0 і визначений на $[t_0; \beta)$. Причому $\beta > t_1$.

Бо якщо припустити, що $\beta \leq t_1$, то скористовшись [теоремою про неперервну залежність],

$$|z(t) - y(t)| \leq |z_0 - y_0| e^{K(t-t_0)} < \delta e^{K(t_1-t_0)} \leq \varepsilon$$

Тобто, $z(t)$ повністю лежить в компакті K.

За попередньою теоремою, напівінтервал $[t_0, \beta)$ не може бути максимальним інтервалом існування розв'язку.

Тобто, $\beta > t_1$, а розв'язок $z(t)$ буде визначений на множині $[t_0, t_1]$. * як ми показали вище існування *

Експоненційна оцінка випливає з [теореми про неперервну залежність ...], а єдиність такого розв'язку випливає з [леми про однакові розв'язки]. ∎

Тема: „Потік системи автономних р-нянь"

Розглядаємо систему $\dot{x} = f(x)$, де f – неперервно-диференційоване відображення, що визначене на відкритій множині W.

Тоді,

$\forall y \in E \quad \exists \underset{\text{розв'язок рівняння}}{\varphi(t)} \quad \varphi(0) = 0$, визначений на max інтервалі існування $J(y)$.

Розглянемо множину $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times W,\ t \in J(y)\}$.

Тоді, потоком автономної системи диф р-нянь називатимемо $\psi: \begin{matrix} \Omega \to W \\ (t, y) \to \psi(t, y) \end{matrix} \quad \psi(t, y) = \psi_t(y)$

$\psi_t(y) = e^{At} \cdot y$ – потік лінійної системи диф. р-нянь

Приклад:

1) $\dot{x} = x^2$, $\quad -\frac{1}{x} = t + C$

Якщо задана початкова умова $x(0) = x_0$, то $C = -1/x_0$.

$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$, де $t \neq 1/x_0$.

В термінах оператора еволюції, $\psi_t(x) = \frac{x}{1 - tx}$.

Якщо $x > 0$, то її еволюція відбувається на проміжку $(-\infty, \frac{1}{x}) \ni t$. Причому потік зростає від нескінченно малих значень при великих від'ємних значеннях часу, приймає значення x при $t = 0$, прямує до ∞, коли $t \to \frac{1}{x}$.

Якщо $x < 0$, то її еволюція відбувається на такому проміжку $(\frac{1}{x}; +\infty) \ni t$. В цьому випадку потік приймає нескінченновеликі від'ємні значення, коли $t \to \frac{1}{x}$ і із збільшенням t, величина потоку строго зростає та прямує до 0.

При $x = 0$, еволюція не відбувається. Це є нерухомою точкою відповідної системи.

Теорема (про групову в-ть потоку)

Відображення ψ має наступну в-ть:

$\psi_{s+t}(x) = \psi_s(\psi_t(x))$.

Тобто, якщо визначений вираз в лівій частині, має сенс вираз в правій частині (і навпаки)

Доведення:

Припустимо, що $s, t > 0$ і визначений потік в правій частині $\psi_s(\psi_t(x))$. Це означає, що $t \in J(x)$ (інтервал існування розв'язку), а $s \in J(\psi_t(x))$.

Припустимо, що $J(x) = (\alpha; \beta)$. І тоді, можемо помітити, що $\beta > s + t$.

Визначимо відображення $y: (\alpha; s+t] \to W$ наступним чином:

$$y(r) \equiv \begin{cases} \psi(r, x), & \alpha < r \leq t \\ \psi(r - t, \psi_t(x)), & t \leq r \leq t + s \end{cases}$$

Це відображення являє собою розв'язок відповідної системи (для якої визначили потік). Причому, $y(0) = x$. Звідси, $s + t \in J(x)$.

$\psi_{s+t}(x) = y(s+t) = \psi(s, \psi_t(x)) = \psi_s(\psi_t(x))$

Тобто, припускаючи існування потоку $\psi_{s+t}(x)$, можемо $\psi_s(\psi_t(x))$. ∎

Теорема (про неперервність потоку)

> Множина Ω є відкритою, а ψ — неперервне перетворення даної множини.

Доведення:

Оберемо в множині Ω точку $(t_0, x_0) \in \Omega$ $t_0 \geq 0$.
Тоді, інтегральна крива, яка проходить через точку x_0 в момент часу t_0 визначена по відрізку $[0; t_0]$. А, відповідно, буде визначена на інтервалі $(-\varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$.
Тоді, знайдеться такий окіл $U(x_0)$ точки x_0, що розв'язок $\psi_0(x)$ визначений на інтервалі $(-\varepsilon; t_0 + \varepsilon)$ для всіх точок x вказаного околу.

А це значить, що $\underbrace{(-\varepsilon; t_0 + \varepsilon) \times U(x_0) \subset \Omega}_{\text{декартів добуток}}$. Отже, дана множина є відкритою.

[Відкритість доведена. Покажемо неперервність.]

Припустимо, що $\overline{U}(x_0) \subset W$. Оскільки відображення f є ліпшицево неперервним, то для нього існує константа Ліпшиця K на компакті $A \equiv \psi([-\varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \overline{U}(x_0))$ (по другій змінній).
Оберемо $\delta > 0$ таким чином, щоб $\delta < \varepsilon$ і щоб $\forall x_1 \in U(x_0)$ $|x_1 - x_0| < \delta$.

Вважаючи, що $|t_1 - t_0| < \delta$ можемо розглянути $|\psi(t_1, x_1) - \psi(t_0, x_0)| =$
$= |\psi(t_1, x_1) - \psi(t_0, x_0) \pm \psi(t_1, x_0)| \leq \underbrace{|\psi(t_1, x_1) - \psi(t_1, x_0)|}_{\substack{< \varepsilon, \text{ оскільки в силу раніше доведених теорем,} \\ \text{його можна оцінити зверху виразом} \\ < \delta e^{K\delta} \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0}} +$
$+ \underbrace{|\psi(t_1, x_0) - \psi(t_0, x_0)|}_{\substack{\xrightarrow[\delta \to 0]{} 0 \\ \text{в силу неперервності розв'язку}}} < \varepsilon$

Тобто, наш потік буде неперервним. ∎

Теорема (про існування оберненого потоку)

Нехай $\psi_t : U \to V$, де V — відкрита множина. А відображення $\psi_{-t} : V \to U$.
Тоді композиція $\psi_{-t} \cdot \psi_t$ буде тотожним перетворенням множини U. А $\psi_t \cdot \psi_{-t}$ — тотожне перетворення множини V.