10. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

10.1. Методологические принципы формальной логики

ПРЕДМЕТ И МЕТОД ЛОГИКИ. ИЗУЧЕНИЕ ЛОГИКИ КАК НАУКИ

Термин "логика" происходит от древнегреческого "логос" (logos), что означает "слово" (в смысле - понятие, суждение, высказывание). В Древней Греции "логос" был одним из философских терминов. В состав философии его впервые ввел Гераклит (544-483 до н.э.), который называл логикой вечную и всеобщую необходимость, некую стойкую закономерность.

В развитии человеческой мысли значение термина "логика" неоднократно изменялось. На сегодняшний день ему приписывают по меньшей мере три значения.

- Термин "логика" можно употреблять в таких словосочетаниях : "логика истории", "логика вещей", "логика фактов", "логика социального развития". Здесь слово "логика" используют для обозначения определенных взаимосвязей, взаимозависимостей явлений, событий, действий. Оно указывает на определенную закономерную последовательность вещей и явлений.
- Термин "логика" очень часто в общении людей используют в связи с таким феноменом, как человеческое мышление: "логика мышления", "женская логика", "где же логика", "железная логика". В этом случае слово "логика" употребляют для обозначения обоснования, доказательства положений, которые выдвигает человек. Здесь можно говорить про логику как характеристику человеческого мышления.
- Термин "логика" может быть использован для обозначения определенной науки. Именно про эту науку и пойдет дальше речь.

Что же изучает эта наука, что является предметом ее исследования?

Чаще всего ответ на этот вопрос следующий: логика - это наука, которая изучает мышление человека.

В некоторой степени это верно: логика тесно связана с мышлением. Но все-таки мышление - это многогранный объект для исследования. не случайно его иногда называют "Вселенной вокруг нас". Мышление - это сложный феномен, который изучает множество наук: философия, кибернетика, языковедение, эстетика, психология, нейрофизиология и др. Логика находится среди них и специфика ее заключается в том, что она изучает не мышление как таковое, в общем, а только процесс размышления человека. Логику прежде всего интересует, каким образом думают люди, какие схемы рассуждений они применяют для обоснования своих мыслей, какие ошибки при этом они могут допустить.

В связи с этим логику можно определить так: ***Логика - это наука, изучающая формы (схемы, структуры) размышлений людей.***

При этом ее не интересуют размышления конкретных людей: размышление гения или умственно отсталого человека, мыслительный процесс взрослого или ребенка. Это прерогатива психологии. Логика только устанавливает общие правила (условия, законы, нормы), согласно которым должно строиться любое размышление. В связи с этим логику считают нормативной наукой.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ

Логика - очень древняя наука. Ее история насчитывает 2, 5 тыс. лет и делится на два этапа:

- традиционный (IV в. до н.э. - первая половина XIXв.);
- современный (вторая половина XIXв. - до нашего времени).

Традиционная логика :

Развитие логических знаний на первом этапе происходило очень медленно. Хотя можно выделить несколько эпох, которые видели возвеличивание логики. Одна из них приходится на времена античности(IV- III в. до н.э.). Именно в это время логика впервые заявила о себе как науке.

Основателем считается древнегреческий философ, ученый-энциклопедист Аристотель (Старигит) (384 - 322 до н.э.). Он очень высоко оценивал эту дисциплину. По его мнению, логика - это необыкновенная наука. Она дает возможность каждому, кто ею овладел, получить метод исследования любой проблемы, так как эта наука дает возможность в явном виде определить, что есть доказательство, выделить его главные разновидности и ступени.

Этот метод широко известен как дедуктивный метод. Его активно использовал герой Конан Дойля - Шерлок Холмс. Сам Аристотель называл метод "силлогистическим". По его мнению, любое доказательство можно построить в виде некоторого силлогизма, то есть размышления. Анализ таких силлогизмов он и привел в своих трудах по логике.

Вместе с Аристотелем в античное время логической проблематикой интересовались также представители стоицизма и софистики. Зенон из Китиона на острове Кипр (ок. 336-264 до н.э.) – древнегреческий философ, родоначальник стоической школы. По его словам логика – это ограда, защищающая сад, в котором деревья – это физика, а плоды – этика. Таким образом, он ставил логику на первое место в философии, цель которой научить людей правильно судить о вещах и избавить их от заблуждений. Именно Зенон ввел термин «логика» для обозначения самостоятельной науки о мышлении в замен Аристотелева термина «аналитика».

Среди стоиков еще можно отметить Крисиппа (281/277 - 208/205 до н.э.), разработавшего стоическую концепцию логики. Основное внимание он уделял исследованию таких компонентов логической формы (схемы) рассуждений, благодаря которым высказывания связывают между собой. Это, например, такие выражения естественного языка, как "если … то", "…и…", "… или…" и т.п. В современных логических изысканиях они получили название "логические союзы" или пропозициональные связки.

Софисты основное внимание уделяли анализу логических ошибок в размышлении людей. Софизмы – утверждения по форме основано на внешнем сходстве явлений, на преднамеренно неправильном подборе исходных положений, на подмене понятий, двусмысленности слов. Софисты даже за большие деньги обучали тех, кто желал, "искусству обмана", которое заключалось в том, чтобы неправильную схему рассуждения, то есть ту, для которой не выполняются законы или правила логики, выдать за правильную. Примеры софизмов:

" ЛГУН": *Критянин Епименид говорит, что все критяни лгуны, но Епименид - сам критянин, следовательно и он лгун. Но если он лгун, то и то, что он говорит, неистинное, и, следовательно, критяни правдивые; но Епименид - критянин, и,* *следовательно, то, что он говорит, - правда. Таким образом, критяни - лгуны, Епименид тоже лгун, и то, что он говорит, неправда. Таким способом мы можем по очереди доказывать, что Епименид и критяни - правдивые и неправдивые.*

"ХВОСТАТЫЙ":

То, чего ты не потерял, ты имеешь.
Ты не потерял хвост.
Следовательно, ты имеешь хвост.

" СОФИЗМ ЕВАТЛА": *Еватл брал уроки софистики у Протагора с тем условием, что гонорар он заплатит только в том случае, если после окончания обучения выиграет первый судебный процесс. Но после обучения Еватл не проводил ни одного судебного процесса и поэтому считал, что имеет право не платить Протагору гонорар. Тогда последний пригрозил, что он подаст жалобу в суд, и сказал Еватлу :*

- Судьи или присудят тебе заплатить гонорар, или не присудят. В обоих случаях ты вынужден будешь заплатить мне. В первом случае согласно решению суда, а во втором - согласно нашему договору ("когда ты выиграешь первый судебный процесс, тогда и заплатишь").

На это Еватл, обученный Протагором секретам софистики, ответил:

- Ни в том, ни в другом случае я не заплачу. Если присудят заплатить, то я, как тот, кто проиграл первый судебный процесс, не заплачу согласно нашему договору, а если не присудят, то я не заплачу согласно решению суда.

Учение софистов можно оценить как "интеллектуальное мошенничество", но при этом следует помнить, что оно базировалось на абсолютном знании логики.

Вторая великая эпоха в становлении логики пришлась на христианское средневековье (с XII в. до середины XIV в.).

Именно в это время логика становится одной из главных учебных дисциплин образования того времени. Она входит в триумвират - цикл из трех дисциплин (логика, грамматика, риторика). Грамматика отвечала на вопрос, как говорить, риторика - как делать это изысканно, а логика - как сделать так, чтобы выводы, к которым приходит человек в процессе рассуждений, были обоснованными. Изучение этих трех дисциплин в учебных заведениях были обязательными. Она оставалась одним из главных предметов преподавания во всех западноевропейских университетах, в Киево-Могилянской академии.

Выдающиеся ученые средневековья высоко ценили логику как науку. "Логика - это искусство искусств и наука наук, указывающая путь к истоку всех методов",- писал в конце XI в. византийский писатель, философ, государственный деятель Михаил Псёлл. Такой же точки зрения по оцениванию методологического значения логики придерживалось и большинство философов-схоластов средних веков.

Тем не менее между двумя великими эпохами вознесения логики - античной и средневековой - логика пребывала в состоянии зимней спячки. Ее уважали за предыдущие результаты. Но, навряд ли, кто-то пророчил в то время большое будущее для логики. Наоборот, очень часто говорили о неспособности ее дальнейшего развития. Даже выдающийся немецкий философ И. Кант (1724-1804) утверждал, что логика от самого свое го истока есть завершенная наука, которая не сделала ни одного шага со времен Аристотеля.

Ошибочность таких представлений касательно перспектив логики была опровергнута действительным развитием событий на протяжении последних ста лет, когда на смену традиционной логики пришла, так называемая, современная логика.

Современная логика:

Современна логика формировалась с конца XIX - до начала XX в. Но ее основоположником по праву считается выдающийся немецкий ученый Готфрид Лейбниц(1646-1716). Хотя он и жил в XVII веке, его труды опережали время. Они не были приняты современниками. Только в XX столетии с развитием современной логики идеи Лейбница получили поддержку и были развиты современными логиками.

Современная логика существенно отличается тот традиционной.

На втором этапе развития логических знаний интересы логиков значительно расширяются. Они обращаются к анализу таких типов рассуждений, которым ранее было вообще отказано в возможности логического анализа. Так, наряду с различными видами теоретических (научных) размышлений, основной целью которых является обоснование знаний, предметом исследования многих логиков становятся практические размышления, направленные на разъяснение действий человека. Возникают новые разделы логического знания, существенно связанные с типами рассуждений из разных отраслей знаний - математики, лингвистики, права, психологии, информатики, экономики и т.п.

Надо отметить, что современная логика ни в коей мере не противопоставляется традиционной (аристотелевой) логике. Она - ее продолжение. "В современном развитии логики традиционная аристотелева логика занимает свое место как упрощенная формулировка проблем, обусловленных предметом. В этом явная аналогия арифметики примитивных племен в сравнении с современной математикой" (Уайтхед, англ. ученый, 1861-1947, предисловие к книге Куайна "Система логистики").

Сначала современная логика ориентировалась исключительно на анализ математических рассуждений. С ее помощью ученые пытались решить проблему основ математического знания после того, как были найдены парадоксы в теории множеств. Этот период в развитии логики иногда называют "классическим".

Возле истоков классической логики стояли Д.Буль, де Морган, Ч.Пирс, Г.Фреге, Д.Гилберт. В их работах была постепенно реализована идея привнесения в логику тех методов, которые обычно применяют в математике. Результатом этой работы явилось появление таких разделов современной логики, как логика высказываний и логика предикатов. Первым значительным трудом в этой области было трехтомное издание Рассела и Уайтхеда "Принципы математики" (1910-1913).

Критику классической логики начали уже в XX столетии и вели в различных направлениях. Ее результат - возникновение новых разделов современной логики, которые образуют в совокупности так называемую неклассическую логику или модальную (модальный – обусловленный какими-то обстоятельствами).

Неклассическая логика тяжело поддается определению, т.к. ее ветви рассматривают различные типы рассуждений. Например, разделами этой логики являются :

- алетическая логика, которая рассматривает рассуждения, в состав которых включены такие модальные понятия, как "необходимость", "возможность", "случайность";
- логика времени (темпоральная) - описывает логические связи высказываний о прошлом, современном и будущем;
- эпистемическая логика - включает модальные понятия "сомнения", "обязательно" и т.п.
- логика норм (денотатная) - рассматривает связи нормативных высказываний;
- логика оценок (аксиологическая) - имеет дело с понятиями "хорошо", "плохо", "лучше" и т.д.
- логика действий, описывающая рассуждения, связанные с действиями человека.

Кроме этого можно назвать интуиционную логику, релевантную, логику цели, логику желаний, когнитивную и др.

Это перечисление не охватывает все разделы неклассической логики, экстенсиональное развитие еще не остановилось. Можно только сказать, что общее задание, которое стоит перед неклассической логикой, заключается в том, чтобы полнее описать те разновидности размышлений и рассуждений, которые не были описаны в классической логике.

Дополнением современной логики является неформальная логика, возникшая в конце XX столетия. В ее границах разрабатываются специальные методы анализа размышлений, которые выражены природным языком и которые используются в публичных дискуссиях. Критериями оценки таких рассуждений есть принятие посылок, релевантность посылок относительно вывода рассуждения, весомость, достаточность посылок для обоснования определенного положения (неформальные, нечеткие логики).

РАССУЖДЕНИЕ И ЕГО СТРУКТУРА

Предметом логики как науки на протяжении всей истории ее развития были разнообразные схемы рассуждений.

Рассуждение - это мыслительный процесс, в ходе которого на основании явных, известных знаний получают новое знание.

Структура любого рассуждения включает два компонента: посылки и вывод.

Посылки - высказывания, в которых содержатся исходные, известные знания.

Вывод - высказывание, содержащее новое знание и полученное логическим путем из посылок.

Как правило, в процессе реального общения, люди опускают некоторые посылки, выводы, т.е. сокращают процесс рассуждения.

Но если мы хотим провести обоснованный анализ рассуждений противника, грамотно раскритиковать его точку зрения, мы должны уметь восстанавливать процесс рассуждений в полном объеме.

ПРАВИЛЬНЫЕ И НЕПРАВИЛЬНЫЕ РАССУЖДЕНИЯ. ПОНЯТИЕ ПРО ЛОГИЧЕСКУЮ ОШИБКУ.

В логике рассуждения делят на правильные и неправильные.

Правильное рассуждение - это рассуждение, в котором придерживались всех правил и законов логики.

Неправильное рассуждение - это рассуждение, в котором допущены логические ошибки в следствии нарушения правил или законов логики.

Логические ошибки бывают в виде паралогизмов и софизмы.

Паралогизм - логическая ошибка, допущенная в рассуждениях случайно, по незнанию.

Софизм - логическая ошибка, допущенная специально с целью введения оппонента в заблуждение, обоснование неправдивого утверждения.

Паралоги́зм *(др.-греч. παραλογισμός — ложное умозаключение) — непреднамеренная логическая ошибка.*

Аристотель называл паралогизмом всякое ложное доказательство за исключением софизма, то есть намеренного ложного доказательства.

Авторы «Логики Пор-Рояля» употребляли термин «паралогизм» как синоним термина «софизм».

Одно из важнейших изменений в значении термина было произведено И. Кантом, который отличал логический паралогизм (которое он определял как ложное по своей логической форме умозаключение) от трансцендентального паралогизма (специфической философской ошибки).

Испанский философ Х. Л. Бальмес в своей работе по логике определял паралогизм как умозаключение, ложное по содержанию, а софизм — как умозаключение ложное по форме.

Паралогизм представляет собой ложный (ошибочный) по форме, то есть неправильно построенный вывод (умозаключение, рассуждение). Ошибка в таком рассуждении состоит не в том, что его содержание будет истинным или ложным, а в том, что форма вывода не соответствует правилам логики. Паралогизм как вид логической ошибки следует отличать от содержательных ошибок.

Своей непреднамеренностью (непредумышленностью) паралогизм отличается от софизма — логической ошибки, совершаемой намеренно (преднамеренно ложного вывода).

Кроме того, паралогизмы следует отличать от парадоксов и антиномий — правильно построенных умозаключений, приводящих к самопротиворечию.

Парадо́кс *(от др.-греч. παράδοξος — неожиданный, странный от др.-греч. παρα-δοκέω — кажусь) — ситуация (высказывание, утверждение, суждение или вывод), которая может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения. Следует разлиой, логически верной, ситуацией (высказыванием, утверждением, суждением или выводом), которая не может существовать в реальности.*

Антино́мия *(греч. anti — против и nomos — закон; противоречие в законе или противоречие закона самому себе) — ситуация, в которой противоречащие друг другу высказывания об одном и том же объекте имеют логически равноправное обоснование, и их истинность или ложность нельзя обосновать в рамках принятой парадигмы, то есть противоречие между двумя положениями, признаваемыми* *одинаково верными, или, другими словами, противоречие двух законов. Термин «антиномия» был предложен Гоклениусом.*

Идея антиномического мышления возникла в древнегреческой философии (Платон, Аристотель), хотя чаще употреблялся термин «апория»; тогда же были сформулированы некоторые семантические антиномии, например, «Лжец» (Евбулид из Милета). В простейшем варианте «Лжеца» человек произносит: «Я лгу», или «То что я сейчас говорю, является ложью», или же «Это высказывание ложно». Если высказывание ложно, то говорящий сказал правду, и сказанное им не является ложью. Если же высказывание не является ложным, а говорящий утверждает, что оно ложно, то это его высказывание ложно. Таким образом, если говорящий лжет, он говорит правду, и наоборот. Парадокс «Лжец» произвел громадное впечатление на современников Евбулида. Существует даже легенда, что некий Филит Косский, отчаявшись разрешить этот парадокс, покончил с собой, а известный древнегреческий логик Диодор Кронос, дав обет не принимать пищу до тех пор, пока не найдет решение «Лжеца», умер, так и не разрешив проблему.

Формулированию и анализу антиномии много внимания уделяли схоластические логики.

Главным заданием логики является анализ правильных рассуждений. Специалисты по логике стараются выявить и исследовать схемы таких рассуждений, определить различные типы. Неправильные рассуждения в логике анализируют только с точки зрения объяснения допущенных в них ошибок.

Правильность рассуждений вовсе не означает истинность его посылок и вывода. Вообще логика не занимается выяснением истинности или ложности посылок и выводом рассуждений. Но в логике существует следующее правило: **если рассуждение построено правильно относительно законов и правил логики и при этом оно опирается на истинные посылки, то вывод такого рассуждения всегда будет истинным.** В иных случаях истинность вывода гарантировать нельзя.

ЛОГИЧЕСКАЯ ФОРМА РАССУЖДЕНИЯ

Логическая форма рассуждения - способ связи высказываний, входящих в состав рассуждения.

Для выявления логической формы рассуждений абстрагируются от смыслового аспекта рассуждения и сосредоточиваются только на компонентах, представляющих его формальный аспект.

Такое различие между формой и содержанием выявить с помощью естественного языка невозможно. Люди не способны абстрагироваться от смысла языковых выражений, применяемых в процессах мышления или общения с другими людьми.

Для того, чтобы приведенная выше причина не влияла на определение структуры, формы определенного рассуждения, в логике созданы так называемые искусственные языки - формализованные.

Формализованный язык - это специальный искусственный язык, в котором выражения естественного языка заменяют на специальные символы, за которыми закрепляют определенные значения.

Рассуждение при таком подходе превращается в цепочку знаков, построенную по строгим правилам.

Построение модели, в которой смысловым рассуждениям соответствуют их формальные аналоги, в логике называется "формализация".

Компонентами логической формы являются логические термины и нелогические.

Логические термины естественно в природном языке выражаются с помощью слов и словосочетаний : *любой, некоторый, если…то, и, или, не.*

В нелогических терминах фиксируют некоторую информацию, о которой идет речь в выражении. Смысл рассуждения выражен именно в нелогических терминах.

Логическая форма рассуждения - структура, которая проявляется в результате абстрагирования от значений нелогических терминов.

Итак, логика – наука о мышлении, о правильных рассуждениях, о приемах и методах познания с помощью рассуждений. В конце 19-го – начале 20-го века с появлением булевой алгебры началось бурное развитие математической (формальной) логики. В настоящее время различают традиционную логику как часть философии, и формальную, математическую логику, соотношение которых показано на рис. 10.1.

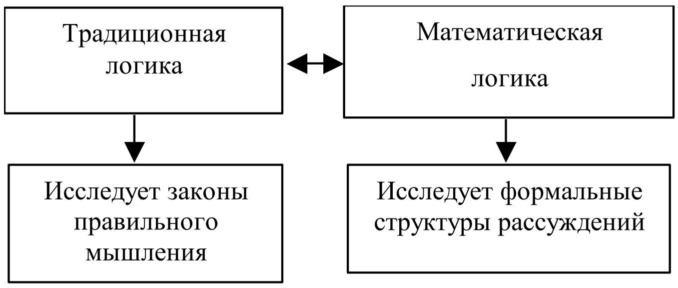

Рис.10. 1. Структура логики.

Логика, изучая правильные рассуждения, оперирует понятиями истинности и ложности. Правильное рассуждение или высказывание полагается истинным, неправильное – ложным.

Хотя в обычной жизни мы пользуемся большим числом оттенков (модальностей), для формализации, но как сказано в Евангелии от Матфея: «Но да будет слово ваше : да, да; нет, нет; а что сверх этого, то от лукавого», и, следовательно, в качестве формального аппарата для представления знаний нам достаточно двузначной логики.

Методологические основы формальной логики заключатся в выполнении нескольких принципов.

Принцип тождества. Истинность фактов, лежащих в основе высказываний и рассуждений, устанавливается на основании действительности, известных законов, наблюдений. Если истинность какого-либо факта установлена, то она не подвергается сомнению и не изменяется в процессе рассуждения. Это означает также, что один и тот же термин используется всегда в одном и том же смысле.

Принцип непротиворечивости означает, что, утверждая что-либо, нельзя отрицать то же самое. Один и тот же факт (высказывание) не может быть одновременно истинным и ложным.

Например, высказывание Сократа «*Я знаю, что я ничего не знаю*» противоречиво, так как одновременно утверждает и опровергает один и тот же факт: если Сократ знает, что он ничего не знает, то он не знает также и этого. Согласно принципу непротиворечивости, из рассмотрения исключаются такие высказывания, истинность или ложность которых не может быть установлена, например, высказывание о брадобрее, который должен (или не должен) брить самого себя, высказывание критянина о том, что все критяне – лжецы, и другие семантические парадоксы.

Принцип исключенного третьего. Нельзя одновременно отвергать высказывание и его отрицание. Любое высказывание может быть либо истинным, либо ложным, – третьего не дано.

Принцип достаточного основания. Всякое высказывание должно быть обосновано, т.е. истинность утверждения нельзя принимать на веру. Если утверждение выводится из каких-либо суждений, данных, фактов – *оснований*, то их должно быть достаточно для установления истинности утверждения.

Можно еще добавить одно очень важное свойство - **монотонности достоверных рассуждений**. Если истинность некоторого высказывания (A) уже установлена, то добавление новых фактов (B) не изменяет его истинности.

10.2. Основные понятия

Суждение, или высказывание – это мысль, в которой утверждается наличие или отсутствие каких-либо фактов или связей между фактами. Высказывания выражаются повествовательными предложениями.

Определение 10.1. *Простое высказывание* — это простое повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Вопросительные и восклицательные предложения высказываниями не являются.

Логические значения *Истинно* (*True*) и *Ложно* (*False*) будем обозначать соответственно T и F.

Примеры.

«Киев – столица Украины» – истинное высказывание, оно имеет значение *True* («истинно»). «5 > 10» – ложное высказывание, оно имеет значение *False* («ложно»). «Все люди смертны» – истинное высказывание. «Некоторые люди – юристы» – истинное высказывание.

Каждое простое высказывание обозначают символами латинского алфавита (с индексами или без индексов), которые называют *пропозициональными символами*: $A, B, C, A_1, A_2, \dots$

Сложные высказывания составляются из простых с помощью союзов «не», «и», «или», «если ..., то...», «тогда и только тогда». Этим союзам соответствуют логические операции: унарная операция отрицания $\neg$ («не»), бинарные операции конъюнкции & («и»), дизъюнкции $\vee$ («или»), импликации $\rightarrow$ («если…, то…», эквивалентности $\equiv$ («тогда и только тогда»). Символы операций называют *пропозициональными связками*.

Примеры.

«Лондон – столица Англии» $\Leftrightarrow A$. «Лондон не является столицей Англии» $\Leftrightarrow \neg A$. «Самый большой город Англии, Лондон (A), является ее столицей (B)» $\Leftrightarrow A\&B$. «Население Канады говорит на английском (A) или на французском языке (B)» $\Leftrightarrow A \vee B$. «Если воробей – птица (A), то у него есть крылья (B)» $\Leftrightarrow A \rightarrow B$. «Животное является птицей (A) тогда и только тогда, когда у него есть крылья (B)» $\Leftrightarrow A \equiv B$.

Истинность или ложность сложных высказываний зависит от истинности или ложности входящих в него простых высказываний, а также тем способом, которыми они комбинируются, т.е. связкой, используемой для построения сложного высказывания. Каждая логическая связка определяется своей *таблицей истинности* (см. табл. 10.1, 10.2).

Таблица 10.1

A	$\neg A$
F	T
T	F

Таблица 10.2

A	B	$A \& B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \equiv B$
F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

С помощью связки **отрицания** $\neg$ из утвердительных получаются отрицательные высказывания. Например, если высказывание A – «воробей – птица» истинно, то высказывание $\neg A$ – «воробей *не* птица» – ложно, а высказывание $\neg\neg A$ – «*Неверно,* что воробей *не* птица» эквивалентно высказыванию «воробей – птица».

Конъюнкция $A\&B$, соответствующая союзам «и», «а», истинна в том и только том случае, если истинны оба входящих в нее высказывания. Например, высказывание «на улице идет дождь (A) с сильным ветром (B)» выражается формулой $A\&B$. Конъюнкция коммутативна, потому высказывание «на улице сильный ветер (B) и дождь (A)», выразимое формулой $B\&A$, эквивалентно первому. Однако, в естественном языке подобные высказывания не всегда эквивалентны, например, выказывания «Джейн вышла замуж (A) и родила ребенка (B)» и «Джейн родила ребенка (B) и вышла замуж (A)», эквивалентные в силу коммутативности конъюнкции, описывают, по всей видимости, совершенно различные ситуации в жизни. В формальной логике с этим приходится мириться.

Закон противоречия: $A\&\neg A \equiv F$ – формальное выражение принципа непротиворечивости**.**

Дизъюнкция $A \vee B$, соответствующая союзу «или», истинна в любом случае, когда истинно хотя бы одно входящее в нее высказывание, и ложна только в том случае, если оба простых высказывания ложны. Например, высказывание «дважды два – четыре (A) или пять (B)» выражается формулой $A \vee B$ и является истинным. Для дизъюнкции выполнен **закон исключенного третьего:** $A \vee \neg A \equiv T$.

Импликация $A \rightarrow B$ выражает логическую (часто – причинно-следственную) связь между высказываниями A и B и формализует естественное *умозаключение*, в котором из *посылки* (*антецедента*) A следует *заключение* (*консеквент*) B. Таблица истинности импликации отражает правильные (достоверные) *умозаключения.*

Формальное выражение **принципа тождества $\mathbf{A \rightarrow A}$** *(А есть А).*

Формальное выражение ***принципа монотонности достоверных рассуждений*** $\mathbf{A \rightarrow (B \rightarrow A)}$.

Умозаключение будет правильным (истинным) в том случае, если из истинной посылки следует истинное заключение: $T \rightarrow T = T$ и будет ложным, если из истинной посылки следует ложное заключение: $T \rightarrow F = F$. Если же посылка ложна, то из нее может следовать как ложное, так и истинное заключение, – умозаключение остается истинным в обоих случаях: $F \rightarrow T = T$, $F \rightarrow F = T$, т.е. *из лжи следует все, что угодно*.

Обычно импликация $A \rightarrow B$ выражает некоторое правило, которое выражает *необходимость* истинности посылки A для того, чтобы выполнялась истинность заключения B, например: «если воду нагреть до 100 градусов (A), то она закипит (B)»; «чтобы получить диплом (B), нужно закончить институт (A)»; «если кошка перебежит дорогу (A), то случится неприятность (B)»; «когда на небе тучи (A), может пойти дождь (B)».

Эквивалентность $A \equiv B$ утверждает равнозначность (равносильность, тождественность) двух утверждений A и B; она истинна тогда, когда истинностные значения A и B совпадают.

Эквивалентность $A \equiv B$ утверждает не только необходимость условия A для того, чтобы было истинно B, но и достаточность этого условия, т.е. $A \equiv B = (A \rightarrow B)\ \&\ (B \rightarrow A)$, где $A \rightarrow B$ выражает *необходимость* A, а $B \rightarrow A$ – *достаточность* A. Например, утверждение: «птицы летают над морем – земля близка», – выражает одновременно два утверждения: необходимость условия – «если птицы летают над морем, то близка земля», и достаточность: «если земля близко, то птицы летают над морем».

С помощью логических связок сложные высказывания можно записать в виде *формулы*, которую называют *пропозициональной формой*.

Определение 10.2.

* Каждая пропозициональная буква есть формула.
* Если A и B – формулы, то формулами являются: $(\neg A)$, $(A\ \&\ B)$, $(A \vee B)$.
* Других формул нет.

При записи формул приняты следующие соглашения: внешние скобки можно опускать; установлен приоритет операций: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$. Логические связки для импликации $\rightarrow$ и эквивалентности $\equiv$ вводятся для сокращения записи формул: $A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg(A\ \&\ \neg B)$, $A \equiv B = (A \rightarrow B)\ \&\ (B \rightarrow A)$.

Построив формулу алгебры высказываний, мы отвлекаемся от ее содержательного смысла и оперируем только с понятиями истинности и ложности.

Приписывание пропозициональным буквам их истинностных значений называется *интерпретацией* формулы. Множество всех интерпретаций формулы образует ее *таблицу истинности*. Если выполнить отображения $0 \Leftrightarrow F$, $1 \Leftrightarrow T$, то каждой пропозициональной связке будет соответствовать булева операция, а каждой формуле алгебры высказываний – булева формула, следовательно, алгебра высказываний является интерпретацией булевой алгебры. В связи с этим в ней сохраняются все аксиомы и теоремы булевой алгебры, в том числе представимость формул алгебры высказываний в виде СДНФ и СКНФ.

Определение 10.3. Тождественно истинная формула называется *тавтологией*. Тождественно ложная формула называется *противоречием*. Формула, которая принимает истинное значение хотя бы на одной своей интерпретации, называется *выполнимой*. Формула, которая принимает на одних наборах значения истина, а на каких-то – ложные, называется *нейтральной.* Таким образом, формулы распадаются на три класса.

Две формулы называются *эквивалентными*, если их таблицы истинности совпадают.

Запись $|= A$ означает: «формула A – тавтология».

Тавтологии являются *выделенными* формулами логики высказываний; именно они представляют наибольший интерес. Тавтология истинна при любых значениях входящих в нее простых высказываний; таблица истинности тавтологии в каждой строке содержит значение «истинно». В обыденной жизни мы также пользуемся понятием тавтологии: это утверждение, которое не несет никакой информации, так как посылка и заключение его утверждают одно и то же, например: «Снег белый, потому что он белый», «Масло масляное». Такие высказывания выражаются формулой: $A \to A$, тождественную истинность которой нетрудно проверить: если $|A| = F$, то $F \to F = T$, если $|A| = T$, то $T \to T = T$. Утверждение: «Больной либо умрет, либо выживет», сакраментальная фраза «Быть или не быть» – тоже тавтологии, так как они выразимы тождественно истинной формулой: $A \vee \neg A$.

В формальной логике понятие тавтологии включает в себя все тождественно истинные утверждения. Они формализуют правильные схемы рассуждений. Например, законы де Моргана – это тавтологии: $|= \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \,\&\, \neg B)$ (например, «*неверно, что это преступление совершили А или В*» эквивалентно высказыванию: «*ни А, ни В не совершали этого преступления*»); $|= \neg(A \,\&\, B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ (например, «*неверно, что А и В вместе участвовали в ограблении*» эквивалентно «*либо А, либо В, либо оба они в ограблении не участвовали*»).

Проблема разрешимости в алгебре высказываний заключается в том, чтобы отыскать эффективную процедуру (алгоритм), с помощью которой для каждой формулы логики высказываний можно установить, является она тавтологией или нет.

Очевидно, что такая процедура для формул логики высказываний существует: это построение таблиц истинности.

Примеры.

1. В качестве примера рассмотрим закон утверждения консеквента: $|= A \to (B \to A)$. (***принцип монотонности достоверных рассуждений***). Поскольку

каждая строка таблицы истинности (табл. 10.3) этой формулы содержит значения T, формула является тавтологией. Также, $A \to (B \to A) = \neg A \vee \neg B \vee A = T \vee \neg B = T$.

Таблица 10.3

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
F	F	T	T
F	T	F	T
T	F	T	T
T	T	T	T

2. **Метод редукции (сведение к противоречию)** служит способом сокращения переборов при составлении таблицы истинности. В качестве примера докажем, что формула

$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ – тавтология.

Предположим, что это не так, т.е. существует такая интерпретация, на которой формула принимает ложное значение:

$$|\overbrace{(A \to (B \to C))}^{T} \to \overbrace{(\underbrace{(A \to B)}_{T} \to \underbrace{(A \to C)}_{F})}^{F}| = F.$$

Получаем систему уравнений:

1) $|A \to (B \to C)| = T$,
2) $|A \to B| = T$,
3) $|A \to C| = F$.

Из 3) следует: $|A| = T$, $|C| = F$. Подставим эти значения в 2): $|T \to B| = T$, откуда $|B| = T$. Подставим найденные значения $|A| = T$, $|C| = F$, $|B| = T$ в 1): $|T \to (T \to F)| = |T \to F| = F$. Полученное значение противоречит условию 1), следовательно, не существует такой интерпретации, на которой формула принимает ложное значение, т.е. она является тавтологией.

3. Проверим, является ли следующая формула тавтологией: $(A \to (B \to C)) \to (A \vee B \to C)$.

Предположим, что $|(A \to (B \to C)) \to (A \vee B \to C)| = F$. Тогда

1) $|A \to (B \to C)| = T$,
2) $|A \vee B| = T$,
3) $|C| = F$.

Из 2) следует: а) $|A| = T$, $|B| = T$; б) $|A| = T$, $|B| = F$; с) $|A| = F$, $|B| = T$. Подставляя значения $|A| = T$, $|B| = T$ в 1), получаем противоречие: $|T \to (T \to F)| = F$. Однако, это еще не доказывает, что формула является тавтологией. Рассмотрим другие значения: б) $|A| = T$, $|B| = F$. Подставляя эти значения в 1), получим: $|T \to (F \to F)| = T$. Таким образом, при интерпретации $|A| = T$, $|B| = F$, $|C| = F$ формула принимает ложное значение, следовательно, она не является тавтологией.

10.3. Логическое следование

Определение 10.4. Если A и B – формулы, то говорят, что *B логически следует из A*, или *A логически влечет B*, если на всех интерпретациях, где A принимает истинное значение, B также принимает истинное значение. Это обозначается как $A \models B$ или $A \Rightarrow B$.

Теорема 10.1. Логическое следование $A \models B$ выполнено тогда и только тогда, когда формула $A \to B$ – тавтология.

Доказательство. Пусть логическое следование $A \models B$ выполнено. Это означает, что на всех интерпретациях, на которых формула $|A| = T$, формула $|B| = T$, следовательно, $|A \to B| = T$. Если формула $|A| = F$, то $|A \to B| = T$ независимо от значения B, следовательно, формула $A \to B$ – тавтология.

Предположим теперь, что формула $A \to B$ – тавтология. Тогда не существует такой интерпретации, на которой $|A \to B| = F$. Следовательно, если формула $|A| = T$, то и $|B| = T$, что соответствует определению логического следования, т.е. $A \models B$.◊

Определение 10.5. Формула B логически следует из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если на всех тех интерпретациях, на которых $A_1, \ldots, A_n$ принимают истинные значения одновременно, формула B также принимает истинное значение. Это обозначается так: $A_1, \ldots A_n \models B$.

Теорема 10.2. $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ тогда и только тогда, когда $\vdash A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, \ldots \,\&\, A_n \to B$.

Доказать самостоятельно.

Определение 10.5. $A \models B$ и $B \models A$, то формула A логически эквивалентна формуле B. Это обозначается как $A \Leftrightarrow B$, или $A \equiv B$.

Если формула A логически эквивалентна, то $A \equiv B$ – тавтология.

Пример. Проверим логическое следование: $A \to B,\ A \to \neg B \models \neg A$ (правило доведения до абсурда) и тавтологию: $\models (A \to B) \,\&\, (A \to \neg B) \to \neg A$. Обозначим тавтологию через E. Построим таблицу истинности (табл. 10.4).

Таблица 10.4

A	B	$A \to B$	$A \to \neg B$	$(A \to B) \,\&\, (A \to \neg B)$	$\neg A$	E
F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
T	T	T	F	F	F	T

Как видим, на тех наборах, на которых посылки $A \to B,\ A \to \neg B$ принимают истинное значение одновременно, формула $\neg A$ также принимает истинное значение. Следовательно, логическое следование выполнено. С другой стороны, формула $(A \to B) \,\&\, (A \to \neg B) \to \neg A$ является тавтологией, что также является доказательством выполнимости логического следования.

Логические следования устанавливают *правила вывода* истинных заключений из истинных посылок. Говорят, что логическое следование (правило вывода) *сохраняет истинность*. Правила вывода, сохраняющие истинность, называются *достоверными* (*дедуктивными*) *рассуждениями* (*умозаключениями*).

Вообще, способность к умозаключению и логическому решению задач отличает человека о животных. Умозаключения состоят из двух компонент: посылок – утверждений об объекте, служащие основанием для вывода; и заключения –

суждения, сделанного на основании посылок. Под посылкой понимают утверждение об определенном положении вещей.

Умозаключение – это мыслительный процесс выведения заключений на основании двух или более посылок, истинность которых не подлежит сомнению. Они истинны, если посылки логичны. Логичность – эталон наших суждений.

«Моя машина – красного цвета. В гараже стоит моя машина. Следовательно, в гараже стоит красная машина.» Умозаключение позволяет проверить обоснованность и логичность выводов. Истинность и логичность умозаключения (силлогизма) определяется истинностью и логичностью посылок. Полученный вывод, логичен.

Изменим условие задачи. *«Моя машина – красного цвета. В гараже стоит красная машина. Следовательно, в гараже стоит моя машина.»* Это умозаключение ложно, логика нарушена. В гараже может стоять любая машина красного цвета, не обязательно моя, так как, не каждая красная машина – моя.

Различают три вида умозаключений – индуктивные, дедуктивные и традуктивные.

Индукция – это переход от наблюдений к обобщению, сбор фактов и построение посылок для подтверждения или опровержения гипотетических суждений. Например, *«в понедельник шел дождь, во вторник шел дождь, следовательно, в среду тоже будет идти дождь».* Два факта послужили основанием для предсказания будущего события.

Дедукция – переход от общего положения к частным выводам. Если посылки истинны, то дедуктивное умозаключение не может быть ложным.

Математическая логика занимается исследование и построением именно дедуктивных выводов.

Есть еще традукция – вид опосредованного умозаключения, в котором посылки и вывод являются суждениями одинаковой степени общности. Традуктивным умозаключением является аналогия. По характеру посылок и вывода традукция может быть трех типов: 1) заключение от единичного к единичному, 2) заключение от частного к частному, 3) заключение от общего к общему. *«Петр – брат Ивана. Сергей – брат Ивана. Следовательно, Петр и Сергей – братья».* Это не всегда верно, так как родство может быть по разным линиям.

10.4. Метатеоремы о тавтологиях

Теорема 10.3 (*правило modus*[1] *ponens*). Если A — тавтология и $A \to B$ — тавтология, то B — тавтология, т.е. если $\models A$ и $\models A \to B$, то $\models B$.

Доказательство. Предположим, что на некоторой интерпретации $|B| = F$. Тогда $|A \to B| = |A \to F| = T$ на той же интерпретации (по условию теоремы). Следовательно, $|A| = F$, что невозможно, так как A – тавтология.◊

Правило *modus ponens* (сокращенно *MP*) устанавливает логическое следование A, $A \to B \models B$ и называется еще правилом *отделения.*

Правило МР выражает элементарный акт дедукции. Импликацию $A \to B$, которая по определению имеет смысл «если A, то B», можно интерпретировать как правило, в котором A является «причиной», а B – «следствием». Тогда импликация правило

[1] Способ, мера, образ.

МР говорит о том, что следствие B наступает при выполнении условия A, т.е. при истинности посылки.

Например, формула $A \to B$ может выражать такое правило: «*если на светофоре горит зеленый свет, то можно переходить дорогу*». Мы ждем зеленого света на светофоре, чтобы перейти дорогу, т.е. мы неявно пользуемся правилом МР: когда посылка становится истинной (зеленый свет), то истинно и заключение (можно переходить дорогу). Тем самым мы выполняем элементарный акт дедукции: из истинности посылки мы выводим истинное заключение. Разумеется, этот вывод справедлив только в том случае, если правило $A \to B$ истинно. Например, многие полагают, что если кошка перебежит дорогу, то случится неприятность. Принимая это правило за истинное, человек, увидев перебегающую ему дорогу кошку, весь день ждет неприятности (и обычно ее находит). Многие правила, однако, не вызывают сомнений в их истинности. Это, например, математические теоремы, физические, химические и другие законы, установленные наукой.

Теорема 10.4 (*правило подстановки*). Если A – тавтология, содержащая пропозициональные переменные $a_1, a_2, ..., a_n$, то формула B, полученная из A заменой каждого вхождения a_i на некоторую формулу A_i , также будет тавтологией.

*Доказательство***.** Пусть задано истинностное распределение для пропозициональных букв, входящих в B. Формулы A_i для этого распределения примут некоторые значения δ_1, $\delta_2,\ldots,\delta_n$, где δ_i есть T или F. Если такое же распределение придать формулам $A_1, \ldots, A_n$, то значение формулы B совпадет со значением формулы A. Но так как A – тавтология, то это значение будет T при любом истинностном распределении букв, входящих в B. Следовательно, B – тавтология.◊

Пример. Формула $A \to (B \to A)$ — тавтология. Заменим A на $A \vee B$. Получим новую тавтологию: $\models A \vee B \to (B \to A \vee B)$. Таким образом, каждую тавтологию можно рассматривать как схему, из которой с помощью подстановки можно получить бесконечное множество тавтологий.

Теорема 10.5 (*правило эквивалентной замены*). Если B получается из A подстановкой формулы B_1 вместо одного или нескольких вхождений подформулы A_1 в A, то $((A_1 \equiv B_1) \to (A \equiv B))$ есть тавтология, и, следовательно, если A_1 и B_1 логически эквивалентны, то A и B также логически эквивалентны.

Иными словами, если есть тавтология A, и в ней есть подформула A_1, и если заменить A_1 на эквивалентную ей формулу B_1, то полученная формула B будет эквивалентна A.

*Доказательство***.** Рассмотрим произвольное истинностное распределение переменных, входящих в A, B, A_1, B_1. Если при этом распределении A_1 и B_1 имеют различные значения, то $|A_1 \equiv B_1| = F$ и, следовательно, $((A_1 \equiv B_1) \to (A \equiv B))$ примет значение T. Если же A_1 и B_1 принимают одинаковые значения, то одинаковые истинностные значения примут A и B, так как B отличается от A только тем, что некоторые вхождения подформулы A_1 заменены в ней на B_1, которая имеет то же самое истинностное значение. Следовательно, в этом случае, если $|A_1 \equiv B_1| = T$, то и $|A \equiv B| = T$, и $((A_1 \equiv B_1) \to (A \equiv B))$ есть тавтология.◊

Пример. В тавтологии $A \to (B \to A)$ заменим подформулу $B \to A$ на эквивалентную ей формулу $\neg B \vee A$, получим новую тавтологию $A \to \neg B \vee A$. Тавтологией также будет формула: $A \to \neg(B \mathbin{\&} \neg A)$, так как $B \to A$ эквивалентно

$\neg(B \,\&\, \neg A)$. Рассмотренные метатеоремы дают возможность получать новые тавтологии и новые правила вывода из уже имеющихся.

10.5. Формализация и решение логических задач

Язык алгебры высказываний используется для формализации предложений естественного языка и доказательства логических следований. Для этого каждое простое высказывание обозначается пропозициональной буквой; сложное выказывание записывается как формула, в которой связки естественного языка заменяются пропозициональными связками (как это указано в 10.2).

Двузначная классическая логика полезна в обыденной жизни, даже, если приходится признать, что в допущениях, например, о двузначности, есть элемент произвола. Для решения любой интеллектуальной проблемы не следует пренебрегать логикой. Например, если рассматривается какая-то вероятностная задача, то прежде, чем чтобы то ни было предпринять, можно найти следствия, вытекающие из набора гипотез, без рассмотрения их вероятностного (содержательного) смысла. Ссылки на модальную или интуиционистскую логику дают понять, что в некоторых ситуациях нужна иная, не классическая логика.

Связкой «эквивалентность» заменяются выражения естественного языка следующей природы: *если – и - только - если, тогда и только тогда, равносильно*. «Импликация» заменяет: *если - то, в случае A имеет место B, A - только если B, B- если A, A влечет B, для B достаточно A, для A необходимо B*. Замена на «конъюнкцию» - *A и B, не только A - но и B, B - хотя и A, B – несмотря на A, как A - так и B, A вместе с B, A - в тоже время как B*.

Перевод ***A&B*** наиболее прост, если в нем не участвует причина времени (о чем говорилось выше). Многие смысловые оттенки (*несмотря, хотя, но и*) исчезают.

«Дизъюнкция» - *A или B, A – если не B, A или B или оба.* Трудности перевода «дизъюнкции» состоит в двусмысленности определенных терминов. Если в меню ресторана указано *«чай или кофе – бесплатно»,* то мы не удивимся, если, потребовав, и то и другое, получим увеличенный счет. В то же время, если объявления гласит, что *«пожертвования принимаются в церкви или школе»*, то мы не думаем, что принесенное в церковь отвергнут из-за того, что мы уже пожертвовали в школу.

Если хотят выразить исключительное или, то должны добавить к *«или»*, например, фразу *«но не то и другое вместе»* - формализуется $\neg(A\&B)\&(A\vee B)$.

Выражениям *«A, если не B», «A, кроме случая, когда B»* придается смысл такой, что наличие B освобождает от ответственности утверждать истинность A. То есть, если не $\neg$B, то A, а если B, то об A ничего не говорится *(* $\neg B \to A = \neg A \to B$*)*.

В обычном языке не употребляются скобки для указания сочетаемости частей сложного предложения. «*Если Джонс присутствует или если Уильямс выскажется за наше предложение и Старк не станет возражать, то наше предложение будет принято»* (*казнить нельзя помиловать* – на письме необходимо расставлять нужные акценты знаками препинания). Формализация данного предложения следующая:

$\boldsymbol{D \vee W \,\&\neg\, S \to P}$. В формуле отсутствуют скобки, позволяющие однозначно воспринимать информацию в соответствии с исходным текстом.

Пример 10.1. Рассмотрим логическое следование. *Если не будет дождя, то мы поедем на пикник. Если мы поедем на пикник, то мы хорошо проведем день. Дождя нет. Следовательно, мы хорошо проведем день.*

Обозначим пропозициональными буквами простые высказывания: P – «*не будет дождя*»; S – «*поедем на пикник*»; R – «*хорошо проведем день*». Необходимо доказать логическое следование: $P \to S, S \to R, P \models R$.

Доказательство.

1 способ. Доказать тавтологию: $\models (P \to S) \,\&\, (S \to R) \,\&\, P \to R$. Для этого достаточно построить таблицу истинности.

2 способ. Доказательство от противного (метод редукции).

Предположим, что существует такая интерпретация, на которой все посылки принимают истинное значение, а следствие – ложное, т.е. $|P \to S| = T$, $|S \to R| = T$, $|P| = T$. Предполагаем $|R| = F$. Тогда из $|S \to R| = |S \to F| = T$ следует, что $|S| = F$; из $|P \to S| = |P \to F| = T$ следует, что $|P| = F$, что противоречит третьей посылке $|P| = T$. Это противоречие доказывает логическое следование.

3 способ. Построение формального логического вывода.

Построим логический вывод, используя известные правила вывода. Логический вывод записывается обычно как нумерованная последовательность формул, справа от каждой формулы записывается комментарий, указывающий, на каком основании формула включена в эту последовательность. Посылки вывода обычно обозначаются буквой Г (гипотеза).

1. $P \to S$	Г1
2. $S \to R$	Г2
3. P	Г3
4. S	правило MP(3,1)
5. R	правило MP(4,2)

Последняя формула в этом выводе является логическим следствием посылок Г1, Г2, Г3.

В силу того, что правило MP сохраняет истинность, каждая формула, участвующая в выводе, истинна при истинности посылок Г1, Г2, Г3. Поэтому, если соединить символом $\to$ формулы, так чтобы посылка импликации предшествовала заключению в этом выводе, то полученная формула также будет истинной, и, следовательно, она является логическим следованием исходных посылок.

Поэтому из данного вывода мы можем получить логическое следование:

$P \to S, S \to R \models P \to R$.

Это логическое следование соответствует правилу вывода, которое называют правилом силлогизма:

$$A \to B,\ B \to C \models A \to C.$$

Пример 10.2. *Из-за снегопада* (A) *машина попадет в пробку* (B): $A \to B$. *В пробку машина не попала* ($\neg B$). *Следовательно, снегопада не было* ($\neg A$). Докажем $A \to B, \neg B \models \neg A$.

Предположим, что $|A \to B| = T$, $|\neg B| = T$ и $|\neg A| = F$, тогда $|A \to B| = |\ T \to F| = F$. Полученное противоречие доказывает логическое следование.

Это логическое следование соответствует правилу вывода ***modus tollens*** (***MT***):

$A \to B, \neg B \models \neg A$.

Пример 10.3. *Решетка является модулярной* (B) *в том случае, если она дистрибутивна* (A)*:* $A \to B$. *Но мы знаем, что если решетка не модулярна* ($\neg B$)*, то она и не дистрибутивна* ($\neg A$)*:* $\neg B \to \neg A$.

Предположим, что $|A \to B| = T$, $|\neg B \to \neg A| = F$, тогда $|\neg B| = T$, $|\neg A| = F$ и $|A \to B| = |T \to F| = F$. Полученное противоречие доказывает логическое следование.

Это логическое следование соответствует правилу вывода, которое называют правилом контрапозиции:

$$A \to B \models \neg B \to \neg A.$$

Пример 10.4. *Если доллар растет (B), то цены не уменьшаются (¬A). Если доллар падает (¬B), то цены также не уменьшаются (¬A):* $B \to \neg A$ *и* $\neg B \to \neg A$. То есть, цены не уменьшаться в любом случае. По закону контрапозиции мы можем получить: $A \to \neg B$ *и* $A \to B$.

$$\boldsymbol{A \to \neg B\ ,\ A \to B\ \models \neg A\ .}$$

Этот закон отражает правило приведения к абсурду. Если из посылки следует одновременно истина и ложь, то сама посылка – ложна.

Пример 10.5. *Я не смогу заснуть (A) только в том случае, если выпью кофе (B).* Как формализовать данное предложение? Кажется, что *«если»* стоит при высказывании B, следовательно, должно быть $\boldsymbol{B \to A}$. Но смысл фразы заключается в следующем: *«Если я не заснул, то из этого следует только одно – я выпил кофе».* То есть, следует проводить формализацию таким образом: $\boldsymbol{A \to B}$. **У**потребление *«только»* меняет, кажущееся на первый взгляд верным, направление импликации.

Приведем еще раз правила формального вывода:

$\boldsymbol{A \to B, A \models B}$	***modus ponens***
$\boldsymbol{A \to B, B \to C \models A \to C}$	***правило силлогизма***
$\boldsymbol{A \to B \models \neg B \to \neg A}$	***правило контрапозиции***
$\boldsymbol{A \to B, \neg B \models \neg A}$	***modus tollens***
$\boldsymbol{A \to B, A \to \neg B \models \neg A}$	***правило приведения к абсурду***

Пример 10.6. Получить возможные логические следования из данного множества посылок. *Если в огороде- бузина (A), то в Киеве – дядька (B). Лошади кушают овес (C) или в огороде - бузина. Если лошади кушают овес, то Волга впадает в Каспийское море (E). Волга не впадает в Каспийское море.*

Построим дедуктивный вывод:

1. $A \to B$	Г1
2. $C \vee A$	Г2
3. $C \to E$	Г3
4. $\neg E$	Г4
5. $\neg E \to \neg C$	правило контрапозиции (3)

(*Если Волга не впадает в Каспийское море, то лошади не кушают овес)*

6. $\neg C \to A$	*эквивалентна замена (2)*
7. $\neg E \to A$	правило силлогизма (5, 6)

(*Если Волга не впадает в Каспийское море, то в огороде- бузина)*

8. $\neg E \to B$	правило силлогизма (1, 7)

(*Если Волга не впадает в Каспийское море, то в Киеве- дядька)*

9. B MP (4,8)

(В Киеве - дядька)

Таким образом, из данного набора посылок мы вывели все возможные заключения.

Понятие о дедуктивном методе мы черпаем, прежде всего, из детективной литературы, в частности, от Шерлока Холмса. Как известно, Шерлок Холмс пользовался при раскрытии преступлений именно дедуктивным методом. Вот как он объясняет сущность дедуктивного метода:

«*Мой принцип расследования состоит в том, чтобы исключить все явно невозможные предположения. Тогда то, что остается, является истиной, какой бы неправдоподобной она ни казалась*». Это рассуждение можно выразить такой схемой: $A \vee B,\ \neg A \models B,$ что эквивалентно: $\neg A \rightarrow B,\ \neg A \models B$, т.е. применению правила MP.

В одном из рассказов о Шерлоке Холмсе сложилась такая ситуация: «*Нам известно, что преступник не мог попасть в комнату ни через дверь* (A)*, ни через дымовой ход* (B)*. Мы знаем также, что он не мог спрятаться в комнате* (C)*, поскольку в ней прятаться негде. Как же тогда он проник сюда*? – *Через крышу*(D)! – *Без сомнения. Он мог проникнуть в эту комнату только через крышу*.»

Это рассуждение можно формализовать так: $A \vee B \vee C \vee D,\ \neg A,\ \neg B,\ \neg C \models D$, что равносильно: $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (\neg C \rightarrow D)),\ \neg A,\ \neg B,\ \neg C \models D.$ Трехкратное применение правила MP доказывает это логическое следование.

Не следует забывать, что логическое следование выполнено только тогда, когда из истинных посылок следует истинное заключение. Поэтому должна существовать хотя бы одна интерпретация (т.е. истинностное распределение букв, входящих в каждую посылку), на которой все посылки истинны одновременно. Если такой интерпретации не существует, то система посылок противоречива и из нее выводимо любое заключение, т.е. вместе с некоторой формулой $\neg A$ выводимо и ее отрицание $\neg A.$ С другой стороны, логическое следование может оказаться невыполненным, если посылок недостаточно для вывода нужных заключений. В таких случаях, в зависимости от содержания задачи, множество посылок может быть пополнено.

Пример 10.7. Четверо подсудимых A, B, C и D. Установлено следующее: если A виновен, то B был соучастником; если B виновен, то либо C был соучастником, либо A не виновен; если D не виновен, то A виновен и C невиновен; если B виновен, то A виновен. Кто из подсудимых виновен?

Формализуем гипотезы: $A \rightarrow B$, $B \rightarrow C \vee \neg A$, $\neg D \rightarrow A \& \neg C$, $D \rightarrow A$. Если проверить множество посылок на непротиворечивость, то мы получим единственную возможность превращения их в истину – все виновны. Такой же ответ (ABCD) будет получен в результате алгебраического упрощения формулы, соответствующей задаче.

Логические задачи, решаемые цепочкой силлогизмов, называются *соритами*.

Сорит (греч. sorit – куча) – вид сложного силлогизма, в котором приводится только последнее заключение, проводимое через ряд посылок; остальные заключения не высказываются, а подразумеваются.

Строение сорита выражается следующей формулой: *Все А есть В, все В есть С, все С есть Д. Тогда все А есть Д.* Многие рассуждения во всех областях знания излагаются в форме сложного силлогизма.

Соритом или «кучей, стесненной доводом» Ломоносов называл соединение многих высказываний, мыслей таким образом, что следствие одной становится посылкой для следующей. В качестве примера он приводит такой сорит: *Что добро, того желать должно. Что желать должно, то и одобрить надлежит. Что одобрить надлежит, то и похвально. Следовательно, что есть добро, то и похвально.*

Существуют более сложные схемы соритов. Например, сорит, введенный в логику Д.С.Миллем и выражающийся следующей схемой: *А есть признак Д. В есть признак Е. С есть признак Н. Но Д, Е и Н есть признак М. Следовательно, АВС есть признак М.*

Существует множество авторских схем суждений (порядка 64 схем, из которых только 19 выполнимых), силлогизмов, соритов. Некоторые из них носят специальные названия. Но все они подчиняются правилам, введенным выше. Например, разделительно-отрицательное суждение можно содержательно представить в виде следующего: *Книга бывает или интересной или увлекательной. Данная книга – интересная. Следовательно, она не увлекательная*. ($K \to I \vee Y$, $K \to I$; $K \to \neg Y$). Нетрудно проверить, что логическое следование в таком виде не выполняется. Выполнима следующая форма (причина - различия в понимании дизъюнкции): *Книга бывает или интересной или увлекательной. Данная книга – не интересная. Следовательно, она увлекательная*. (1. $\mathrm{K} \to \mathrm{I} \vee \mathrm{Y}$, 2. $\mathrm{K} \to \neg\mathrm{I}$; 3. *из 1* $\neg I \to \neg K \vee Y$, *4. силлогизм 2 и 3 и метаопределение* $\mathbf{K} \to \mathbf{Y}$)

10.6. Метод резолюций

В основе метода резолюций лежит процедура поиска опровержения, т. е. вместо доказательства тавтологии (составленной из посылок задачи и следствия, см. пример 10.1) доказывается, что отрицание формулы противоречиво. Метод опровержения для доказательства логического следования заключается в следующем. Пусть выполняется логическое следование: $F1$, $F2 \models G$. Тогда $\models F1 \& F2 \to G$ является тавтологией, и, следовательно, $|\neg(F1 \& F2 \to G)| = |F1 \& F2 \& \neg G| \equiv F$. Поскольку по определению посылки $F1$, $F2$ истинны, формула $F1 \& F2 \& \neg G$ может обратиться в ложь только, если $|\neg G| = F$, т.е. если $|G| = T$. Тогда логическое следствие выполнено. В принципе процедура опровержения формализует метод редукции (т.н. неформальный вывод).

Введем несколько определений.

Определение 10.6. Дизъюнкция литер называется *дизъюнктом*, или *клаузой* (*clause*) (иногда – *клозом*). Однолитерный дизъюнкт называется *единичным дизъюнктом*. Когда дизъюнкт не содержит никаких литер, его называют *пустым* дизъюнктом. Так как пустой дизъюнкт не содержит литер, которые могли бы быть истинными при любых интерпретациях, то пустой дизъюнкт всегда ложен. Пустой дизъюнкт обозначается символом □.

Правило резолюций Робинсона. Если для любых двух дизъюнктов C_1 и C_2 существует литера $L_1 \in C_1$ и контрарная ей литера $L_2 \in C_2$ ($L_2 = \neg L_1$), то вычеркнув

L_1 из C_1 и L_2 из C_2 и построив дизъюнкт из оставшихся литер, получим *резольвенту* C_1 и C_2 : $C'_1 \vee C'_2$, где $C'_1 = C_1 \backslash L_1$, $C'_2 = C_2 \backslash L_2$.

Теорема 10.6. *Резольвента C* есть логическое следование C_1 и C_2, содержащих контрарные литеры L и $\neg L$: $L \vee C'_1, \neg L_1 \vee C'_2 \models C'_1 \vee C'_2$.

Доказательство. Предположим, что $|L \vee C'_1| = T$, $|\neg L \vee C'_2| = T$, $|C'_1 \vee C'_2| = F$. Тогда $|C'_1| = F$, $|C'_2| = F$. Если $|L \vee C'_1| = T$, то $|L| = T$, но $|\neg L \vee C'_2| = T$, следовательно, $|L| = F$. Полученное противоречие доказывает теорему.◊

Правило резолюций является обобщением многих известных нам правил вывода. Например, правило силлогизма: $A \to B, B \to C \models A \to C$ может быть переписано в виде: $\neg A \vee B, \neg B \vee C \models \neg A \vee C$, что соответствует правилу резолюций. Правило MP: $A, A \to B \models B$ может быть переписано в виде: $A\ \neg A \vee B \models B$, что также соответствует правилу резолюций. Наконец, закон противоречия $A \& \neg A \equiv F$ равнозначен правилу: $A, \neg A \models \square$, согласно которому, резольвента двух контрарных однолитерных дизъюнктов есть пустой дизъюнкт.

Метод резолюций применительно к решению задач состоит в том, чтобы проверить, содержит ли множество дизъюнктов S, состоящее из преобразованных в КНФ посылок и отрицания следствия, пустой дизъюнкт $\square$. Если S содержит $\square$, то множество S невыполнимо, если нет, то надо проверить, может ли он быть получен из данного множества дизъюнктов. Иными словами, необходимо найти множество основных примеров, опровергающих исходное множество дизъюнктов. Эта процедура заключается в построении резолютивного вывода и основана на правиле резолюций Робинсона.

Определение 10.7. *Резолютивный вывод* из множества дизъюнктов S есть последовательность $C_1, C_2, ..., C_k$, такая, что каждое C_i либо принадлежит S, либо является резольвентой предшествующих C_i. Если последний дизъюнкт $C_k = \square$, то множество дизъюнктов S является невыполнимым, а весь вывод называется опровержением S. Если C_k не является пустым дизъюнктом и дальнейшее применение правила резолюций невозможно, то множество S является выполнимым.

Пример 10.8. Рассмотрим задачу из примера 10.1. Необходимо проверить логическое следование в логике высказываний: $P \to S,\ S \to R,\ P \models R$. Составим множество дизъюнктов S, для чего каждую формулу приведем к КНФ, а от заключения R возьмем отрицание. Получим:

1. $\neg P \vee S$
2. $\neg S \vee R$
3. P
4. $\neg R$
5. $\neg S$ резольвента 4, 2
6. $\neg P$ резольвента 5, 1
7. $\square$ резольвента 3, 6

Пример 10.9. Какие выводы можно сделать из следующих высказываний :

" Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
- Говорит Мегрэ. Есть новости ?

- Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов. Торранс установил, что если Франсуа был пьян(F), то либо Этьен убийца(E), либо Франсуа лжет(L). Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи(U).

Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет. Затем звонила …

- Все. Спасибо. Этого достаточно. - Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все. "

Предположим, что убийца – Этьен. Можно формализовать задачу и применить метод резолюции для выяснения истинности нашего предположения.

1. $F \to E \vee L$	*Условие задачи – список гипотез*
2. $E \vee \neg F \& U$	
3. $U \to E \vee L$	
4. $\neg F \to \neg L$	
	Приведем гипотезы в КНФ
1. $\neg E$	отрицание вывода
2. $\neg F \vee E \vee L$	гипотеза 1
3. $E \vee \neg F$	гипотеза 2 (удаление конъюнкции)
4. $E \vee U$	гипотеза 2 (удаление конъюнкции)
5. $\neg U \vee E \vee L$	гипотеза 3
6. $F \vee \neg L$	гипотеза 4
7. $\neg F$	резольвента 1,3
8. U	резольвента 1,4
9. $\neg U \vee L$	резольвента 1,5
10. $\neg L$	резольвента 6,7
11. $\neg U$	резольвента 9,10
12. $\square$	резольвента 8,11

Правило резолюций – очень мощное и удобное средство логического доказательства.

Для построения формального вывода необходимо знание некоторых приемов и теорем. Приведем формальный вывод для вышеизложенной задачи:

1. $F \to E \vee L$	гипотеза 1
2. $E \vee \neg F \& U$	гипотеза 2
3. $U \to E \vee L$	гипотеза 3
4. $\neg F \to \neg L$	гипотеза 4
5. $\neg E \to \neg F$	гипотеза 2 (удаление конъюнкции)
6. $\neg E \to U$	гипотеза 2 (удаление конъюнкции)
7. $\neg E \to E \vee L$	силлогизм 3, 8
8. $\neg E \to L$	из 7 эквив.преобр. и идемпотент.
9. $L \to F$	контрапозиция гипотезы 4
10. $\neg E \to F$	силлогизм 8, 11
11. E	довед.до абсурда 5, 10

Мы видим, что гипотеза 1 является лишней, она не участвует ни в доказательстве логического следования методом резолюций, ни в построении формального вывода.

№1

Три лица **А., В.** и **С.** обвиняются в преступлении. Они дали некоторые показания. Обозначим высказывание " **А**. виновен" через ***а*** , а показания А**.** через ***А***; аналогично введем обозначения ***в*** и ***В***, ***с*** и ***С*** :

А. $A = в \,\&\, \neg c$ (виновен **А. , С.** не виновен);

В. $B = a \to c$ (если виновен **А**. , то виновен и **С.**);

С. $C = \neg c \,\&\, (a \vee в)$ (**С.** не виновен, виновны **А.** или **В.**).

* Если никто на виновен, кто дал ложные показания?

** Если все дали ложные показания, кто виновен?

Здесь возможны несколько вариантов решения в зависимости от степени правдивости показаний. Например, можно построить полную таблицу истинности для показаний этих лиц. Если никто не виновен, то при распределении значений $|a|=F, |b|=F, |c|=F$ необходимо определить значения истинности показаний ***A, B,*** и ***C*** и определить ложные (первая строка таблицы).

Если все дали правдивые показания, то хотя бы при одном распределении пропозициональных букв ***а,в,с*** все высказывания ***A, B,*** и ***C*** должны принять значение **Т.** Значения пропозициональных букв, равные **Т** в этом распределении, соответствуют виновному(или виновным) в преступлении (третья строка таблицы) :

a	*в*	*c*	*A*	*B*	*C*	$\neg c$	$a \vee в$
F	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**	**T**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**F**
F	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**F**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**T**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**

Из таблицы следует, что если никто не виновен, то показания лиц **А.** и **В.** являются ложными, если все дали правдивые показания, то виновен **В.**

№2

Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Они сделали следующие заявления:

Браун : 1 *Джонс невиновен.* **2** *Это сделал Смит.*

Джонс : 1 *Смит не мог этот сделать.* **2** *Я записался в джаз-оркестр.*

Смит : 1 *Джонс виновен.* **2** *Браун невиновен.*

Оказалось, что двое из них в каждом из двух своих заявлений сказали правду, а один оба раза сказал не правду. Кто виновен ?

Пусть Б - Браун виновен. Его показания обозначим через **б.** Аналогично введем обозначения **Д, д, С, с.**

Поскольку второе заявление Джонса совершенно не означает, что он виновен или не виновен, оно эквивалентно тавтологии ***(Д или не Д).***

Запишем отдельные показания :

$$\text{б} = \overline{\text{Д}} \,\&\, \text{С};$$
$$\text{д} = \overline{\text{С}} \,\&\, (\overline{\text{Д}} \cup \text{Д}) = \overline{\text{С}};$$
$$\text{с} = \text{Д} \,\&\, \overline{\text{Б}}\,.$$

По условию два из них истинны, а одно ложно, но какое именно, нам неизвестно. Поэтому любая их попарная дизъюнкция есть истинное высказывание, а, следовательно, конъюнкция этих дизъюнкций также истинна:

$$|\,(\text{б} \cup \text{д}) \,\&\, (\text{д} \cup \text{с}) \,\&\, (\text{б} \cup \text{с})\,| = \text{T}\;;$$

после подстановки формул **б,д,с** и элементарных преобразований получим :

$$|\;\text{Д} \,\&\, \overline{\text{Б}} \,\&\, \overline{\text{С}}\,| = \text{T}\;;$$

то есть условие задачи может выполняться только тогда, когда Джонс виновен, а Браун и Смит не виновны. Однако, полученный результат является только необходимым условием. Нужно еще проверить, является ли он достаточным, то есть, совместим ли со всеми условиями исходной задачи. В данном случае оба показания Брауна оказываются ложными, показания Смита - истинными, показания Джонса истинны (т.к. второе не противоречит никакому решению, то может быть и истинным).

Если бы полученный результат был не единственным, нужно было бы проверить все случаи и выбрать из них те, которые удовлетворяют условию исходной задачи.

Какие логические ошибки допущены в следующих рассуждениях:

1) Милосердие вызывает в гуманистов симпатию.
"Милосердие" - слово.
Следовательно, некоторые слова вызывают у гуманистов симпатию.

2) Если кто-то украл какую-то вещь, то он пытается её спрятать. Подозреваемый эту вещь спрятал. Следовательно, он её украл;

3) Люди, которые копируют чужие подписи, являются преступниками. Гравер копирует чужие подписи. Следовательно, гравер - преступник;

4) В книге ценится или ее содержание, или форма изложения. В научной книге ценится содержание. Таким образом, в научной книге не ценится форма изложения.

5) Лекарства, которые принимает больной - добро. Чем больше добра, тем лучше. Следовательно, лекарств нужно принимать как можно больше.

6) Вор не желает получить ничто плохого. Приобрести что-то хорошо - доброе дело. Следовательно, вор, доставая (воруя) добрые вещи, делает доброе дело;

7) Опровергая софистов, Аристотель сказал: "Кто объявляет все истинным, тем самым делает истинным и утверждение, противоположное его собственному";

8) - Следовательно, по-вашему, убеждений нет?

- Нет - и не существует.

- Это ваше убеждение?

- Да.

- Как же вы говорите, что их нет? Вот Вам уже одно на первый случай. (И.Тургенев).

ОШИБКИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ РАССУЖДЕНИЯХ

1) Кто-то взялся доказать, что 3 раза по 2 будет не 6, а 4. Реализую свою странную выходку, он взял в руки обычную спичку и попросил чтобы присутствующие внимательно следить за ходом его мысли.

"Переломив спичку пополам, - заявил странный математик, - будем иметь один раз 2. Проделав это же действие над одной из половинок, получим второй раз 2. Наконец, повторив эту же операцию над второй с половинок, получим третий раз 2". Следовательно, беря три раза по два, мы получим четыре, а не шесть, как принято считать"

2) Трое туристов, заплатив за обед 30 рублей, покинули столовую. Хозяин столовой, обнаружив, что их обед стоит только 25 рублей, послал им вдогонку официанта, передав им 5 рублей. Благодарные туристы взяли себе по одному рублю, а два рубля отдали официанту.Поскольку туристам, которые заплатили за обед по 10 рублей, возвратили по 1 рублю, то они фактически заплатили по 9 рублей. Если к трех девяткам прибавить еще те два рубля, которые получил официант, то мы получим 29 рублей. Но куда делся еще один?

3) Четверо туристов, заплатив за обед 40 рублей, покинули столовую. Хозяин столовой, подсчитав, что их обед стоил 30 рублей, послал им вдогонку официанта, передав им 10 рублей. Благодарные туристы взяли себе по одному рублю, а шесть рублей отдали официанту. Поскольку туристам, которые заплатили за обед по 10 рублей, возвратили по 1 рублю, то они фактически израсходовали по 9 рублей, то есть 36 рублей все вместе. Если к этому числу прибавить еще те 6 рублей, которые были подарены официанту, то окажется, как будто всего денег здесь израсходовано не 40, а 42 рубля. Откуда же взялись эти два "лишние" рубля?