ЗМІСТ

1.Лінійний простір 6

2.Базис та вимірність лінійного простору..................................7

3.Ізоморфізм лінійного простору 8

4.Лінійний підпростір. Лінійна оболонка 8

5.Еквівалентність систем векторів. 9

6.Сума та перетин лінійних підпросторів 10

7.Зв´язок між розмірностями суми та перетину лінійних підпросторів

....10

8. Пряма сума лінійних підпросторів..11

9 .Перетворення базису лінійного підпростору.......................12

10.Евклідів простір. 13

11.Нерівність Коші-Буняковського 13

12.Поняття норми, відстані, кута..14

13.Ортогональність. Ортонормований базис...........................15

14.Скалярний добуток в ортонормованому базисі 15

15.Ортогональність підпросторів. Ортогональна сума 16

16.Ортогональне доповнення. Орт.проекція та складова 17

17.Унітарний підпростір...17

18.Лінійний оператор 18

19.Обернений оператор. Взаємооднозначний оператор 18

20.Образ та ядро лінійного оператора 19

21.Матриця лінійного оператора..19

22. Перетворення матриці лінійного оператора.....................20

23. Еквівалентність матриць. Еквівалентність операторів.......20

25. Власні числа та власні вектори лінійного оператора, їх властивості.

....21

28. Характеристичний многочлен. 23

29. Спектр оператора. Критерій діагоналізованності. 25

30. Інваріантний підпростір. Індуційований оператор. 26

31. Жорданова форма матриці. 27

32. Функції від матриць...27

32. Функції від матриць...28

33. Поверхня та лінія в просторі. 30

34. Циліндричні та сферичні системи координат. 31

35. Конічні та циліндричні поверхні. 32

36. Площина в просторі. Загальне рівняння, рівняння через нормаль

та у відрізках. 33

37. Площина у просторі. Нормальне рівняння площини. Поняття

відстані та...34

відхилення. 34

38. Взаємне розташування площин в просторі. Пучок та зв’язка

площин...35

39. Рівняння прямої в просторі. 36

40. Взаємне розташування прямих у просторі........................37

41. Взаємне розташування прямої та площини. 38

42. Поверхні другого порядку. Еліпсоїд. Гіперболоїди. 39

43. Поверхні другого порядку. Еліпсоїд. Параболоїди. 41

44. Поверхні другого порядку. Конус. Циліндри......................42

45. Спряжений оператор – визначення, умови існування. 43

46. Властивості спряженого оператора. 43

47. Матриця спряженого оператора.......................................44

49. Самоспряжений оператор, його властивості. 45

50. Унітарний оператор. Критерій унітарності. 46

51. Унітарний оператор та ортонормована система елементів.47

52. Жорданів базис самоспряженого оператора....................48

53. Спектральне розвинення самоспряженого оператора. 50

56. Квадратична форма. 51

57. Канонічний вигляд квадратичної форми...........................52

58. Метод Лагранжа приведення квадратичної форми до канонічного

....53

вигляду...53

59. Метод Якобі приведення квадратичної форми до канонічного

вигляду...54

60. Критерій Сільвестра знаковизначенності квадратичної форми.

....54

61. Приведення рівняння поверхні другого порядку до канонічного

вигляду...55

1.Лінійний простір

Лінійним простором над числовим полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ називається множина L, для елементів якої визначені дві операції:

1. $\forall\, \overline{x}, \overline{y}\ \in L$ відповідає елемент $\overline{x}+\overline{y} \in L$, що називається сумою цих елементів
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ і $\forall\, \overline{x} \in L$ відповідає елемент $\lambda\overline{x}\ \in\ L$, що називається добутком числа λ на $\overline{x}$;

При цьому операції задовільняють 8 аксіомам:

1. $\forall\, \vec{x}, \vec{y}\ \in\ L \Rightarrow \vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (комутативність додавання)
2. $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L \Rightarrow \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}) = (\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$;
3. $\exists$нейтральний елемент $\vec{0} \in L : \forall\, \vec{x} \in L :\ \vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$;
4. $\forall\, \vec{x} \in L$ $\exists$протилежний $(-\vec{x})$, такий що $\vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}$;
5. $\forall\, \vec{x} \in L \Rightarrow 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$;
6. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ і $\forall\, \vec{x} \in L \Rightarrow \alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{x}$;
7. $\forall\, \alpha, \beta\ \in\ \mathbb{R}(\mathbb{C})$ і $\forall\, \vec{x} \in L \Rightarrow (\alpha+\beta)\vec{x} = \alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$
8. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ і $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in L \Rightarrow \alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

Властивості лінійного простору:

1. У довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент $\overline{o}$ і для кожного елемента $\overline{x}$ існує єдиний протилежний елемент $-\overline{x}$.

2. У довільному лінійному просторі нульовий елемент $\overline{o} = 0 \cdot \overline{x}$, де $\overline{x}$ – довільний елемент, а протилежний елемент $-\overline{x} = (-1)\cdot\overline{x}$.

1.1 Приклади лінійних просторів

1. Множина геометричних векторів з стандартнии операціями додавання та множення на числа:
   E^1 - множина векторів деякої прямої;
   E^2 - множина векторів, компланарних фіксованій площині;
   E^3- множина векторів простору.

2. $R^n(C^n)$ - множина всіх впорядкованих наборів з n чисел (розташовані як строчки $\overleftarrow{x}$ або стовпчики $\vec{x}$). З операцією додавання і множення на числа, визначених для матриць. Всі 8 аксіом мають місце.

3. Множина матриць порядка m x n. ($M_{m\,x\,n}$) з операціями, визначеними для матриць. $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0......0 \\ 0......0 \\ 0......0 \\ 0......0 \end{pmatrix}$

2.Базис та вимірність лінійного простору

Визначення 1. Впорядкована система векторів $f = \left\{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\right\} \subset L$ називається базисом лінійного простору L, якщо $\forall \vec{x} \in L$ $\exists!$ набор чисел $(x_1, ..., x_n) : \vec{x} = x_1\vec{f}_1 + ... + x_n\vec{f}_n$. Це представлення вектора $\vec{x}$ називається розкладом $\vec{x}$ за базисом f, а впорядкований набор чисел $(x_1, ..., x_n)$ - координатами вектора $\vec{x}$ в базисі f.

Визначення 2. Число векторів в базисі називається вимірністю лінійного простору L і позначається $dim\, L = n$. В цьому випадку L називається n-вимірним лінійним простором.

Визначення 1'. Базисом лінійного простору L називається його база, а вимірністю - ранг L.

Визначення 3. Система векторів $f = \left\{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\right\} \subset L$, називається повною в L, якщо $\forall \vec{x} \in L$ $\exists$ набір чисел $(x_1, ..., x_n) : \vec{x} = x_1\vec{f}_1 + ... + x_n\vec{f}_n$

Визначення 1" Впрорядкована система векторів $f = \left\{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\right\} \subset L$ називається базисом лінійного простору L, якщо вона ЛНЗ і повна в L (З теореми 2).

3.Ізоморфізм лінійного простору

Два простори є ізоморфними, якщо між ними можна встановити взаємооднозначну відповідність між елементами, при якій зберігається скалярний добуток.
З цього визначення випливає, що ізоморфні простори мають однаковий вимір.
З визначення ізоморфізму просторів маємо, що E і E^1 мають по n лінійно незалежних векторів базису, між якими можна встановити взаємооднозначну відповідність і кожен з цих базисів можна ортонормувати. А потім встановити взаємооднозначну відповідність з канонічним базисом, який є єдиним.

4.Лінійний підпростір. Лінійна оболонка

Визначення 1. Нехай L - лінійний простір. Множина $L_1 \in L$ називається лінійним підпростором (підпростором), якщо:

1)$\forall, \vec{x}, \vec{y} \in L_1 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in L_1$;

2) $\forall \vec{x}$ і $\forall \lambda$- числа $\Rightarrow \lambda\vec{x} \in L_1$

Зауваження. З визначення $\Rightarrow$ Якщо L_1 розглядати само по собі окремо від L, то L_1 буде лінійним простором.

Приклади.

1. Тривіальні: $\{\vec{0}\}, L$ - підпростори L.
2. $L = M_{m\,x\,n} \Rightarrow L_1 = \left\{A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n\} \subset M_{m\,x\,n} \,|\, \vec{a}_1 = \vec{0}\right\}$ - підпростір
3. $L = P_3 \Rightarrow L_1 = p(t) \in \{P_3 \,|\, p(0) = 0\}$
4. $\forall p_1(t, p_2(t) \in L_1 \Rightarrow p_1(t) + p_2(t)|_{t=0} = p_1(0) + p_2(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow p_1(t) + p_2(t) \in L_1$
5. $\forall \lambda$ і $\forall p(t) \in L_1 \Rightarrow \lambda \cdot p(t)|_{t=0} = \lambda \cdot p(0) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot p(t) \in L_1 \Rightarrow L_1 -$ лінійний простір

Знайти $dim\, L_1$ і базис для L_1 з прикладу 3

$\forall p(t) \in L_1$ маємо:

1) $p(t) \in P_3 \Rightarrow p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

2)$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = 0; \Rightarrow p(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t$, де a, b, c - довільні числа $\Rightarrow \{t^3, t^2, t\}$ - повна в L_1, вони ЛНЗ $\Rightarrow$ це базис в L_1 і $dim\, L_1 = 3$

$L_1 = \{p(t) \in P_3 \,|\, p(0) = 0\}$

Лінійна оболонка

Нехай L - лінійний простір, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_k\} \in L$

Визначення 2. Лінійною оболонкою векторів $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k$ називається множина

$\mathcal{L}(\vec{a}_1; \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)$, що складається з усіх лінійних комбінацій векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k$, тобто
$\mathcal{L}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k) = \{\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \alpha_k \cdot \vec{a}_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), i = 1, 2, ..., k\}$

Твердження. $\forall \vec{a}_1, ..., \vec{a}_k \in L \Rightarrow \mathcal{L}(\vec{a}_1, ...\vec{a}_k)$ - лінійний підпростір L.

Доведення.

1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}(\vec{a}_1, ...\vec{a}_k) \Rightarrow \exists(\alpha_1, ..., \alpha_k), (\beta_1, ...\beta_k):$
$\Rightarrow \vec{x} = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \alpha_k \vec{a}_k; \vec{y} = \beta_1 \vec{a}_1 + ... + \beta_k \vec{a}_k \Rightarrow$

$\vec{x} + \vec{y} = (\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \alpha_k \vec{a}_k) + (\beta_1 \vec{a}_1 + ... + \beta_k \vec{a}_k) = \gamma_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \gamma_k \vec{a}_k$, де $\gamma_i = \alpha_i + \beta_i \Rightarrow$
$\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{L}(\vec{a}_1, ...\vec{a}_k)$

2)$\forall \lambda$ - число $\Rightarrow \lambda\vec{x} = \lambda(\alpha_1 \vec{a}_1 + ...\alpha_k \vec{a}_k) = \gamma_1 \cdot \vec{a}_1 + ... + \gamma_k \cdot \vec{a}_k$,
де $\gamma_i = \lambda \cdot \alpha_i \Rightarrow \lambda\vec{x} \in \mathcal{L}\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k\}$

З 1), 2) $\Rightarrow \mathcal{L}(\vec{a}_1, ...\vec{a}_k)$- лінійний підпростір.

Зауваження 1. З визначення $\Rightarrow$ Якщо $\left\{\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n\right\}$ - базис L, то $L = \mathcal{L}(\vec{f}_1, ..., \vec{f}_n)$.

Зауваження 2. Якщо $\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_r\right\}$ - база системи $\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k\}$,
то $\mathcal{L}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k) = \mathcal{L}(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m)$ і $dim\,(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k) = r = rang\,\{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k\}$

1. ## 5.Еквівалентність систем векторів.

Дві **системи векторів є еквівалентними**, якщо кожен елемент першої можна представити у вигляді лінійної комбінації другої, аналогічно і у зворотньому напрямку.

6.Сума та перетин лінійних підпросторів

Нехай L - лінійний простір і $L_1, L_2, ..., L_k$- його лінійні підпростори.

Визначення 3. Сумою підпросторів L_1, L_2,... L_k називається множина
$L_\Sigma = L_1 + L_2 + ... + L_k = \{\vec{x} \in L \,|\, \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + ...\vec{x}_k,$ де $x_i \in L_i, i = 1, 2, ..., k\}$

Визначення 4. Перетином лінійних підпросторів L_1 і L_2 називається множина
$L_\cap = L_1 \cap L_2 = \{\vec{x} \in L \,|\, \vec{x} \in L_1$ і $\vec{x} \in L_2\}$

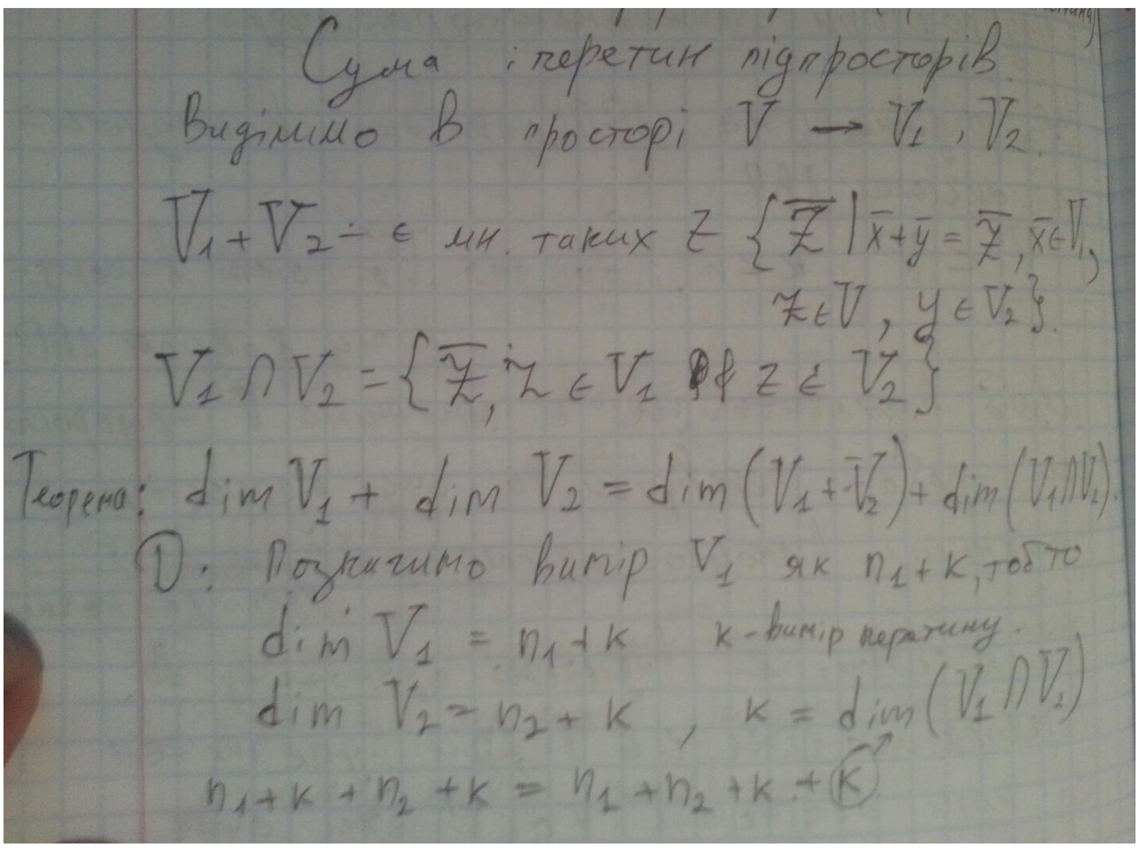
(*записано для двох, але насправді для довільної кількості)

Відмітимо, що $\forall\, \vec{x} \in L_1\ \vec{x}_{\in L_1} + \vec{0}_{\in L_2} + ... + \vec{0}_{\in L_k} = \vec{x} \in L_\Sigma \Rightarrow L_1 \subset L_\Sigma$ і $\forall\, i\ L_i \subset L_\Sigma$.

Твердження. L_Σ і $L_\cap$ - є лінійними підпросторами L.

Теорема. $\forall$ лінійних підпросторів $L_1, L_2 \subset L$
$dim\,(L_1 + L_2) + dim(L_1 \cap L_2) = dim\, L_1 + dim\, L_2$

7.Зв´язок між розмірностями суми та перетину лінійних підпросторів



Сума і перетин підпросторів

Виділимо в просторі $V \to V_1, V_2$

$V_1 + V_2$ – є мн. таких z $\{\bar{z} \,|\, \bar{x} + \bar{y} = \bar{z}, \bar{x} \in V_1, z \in V, y \in V_2\}$

$V_1 \cap V_2 = \{\bar{z}, z \in V_1\ \&\ z \in V_2\}$

Теорема: $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$

Д: Позначимо вимір V_1 як $n_1 + k$, тобто

$\dim V_1 = n_1 + k$ k - вимір перетину.

$\dim V_2 = n_2 + k$, $k = \dim(V_1 \cap V_2)$

$n_1 + k + n_2 + k = n_1 + n_2 + k + k$

8. Пряма сума лінійних підпросторів

Нехай $L_1, ..., L_m$ - лінійні підпростори L,

$L_\Sigma = L_1 + L_2 + ... + L_m$

Визначення. L_Σ називається прямою сумою підпросторів в $L_1, ..., L_m$ і позначається $L_\Sigma = L_1 \dot{+} L_2 ... \dot{+} L_m$, якщо $\forall \vec{x} \in L_\Sigma \ \exists! \, x_i \in L_i, \ i = 1, 2, ...m$ і $\vec{x} = \vec{x}_1 + ...\vec{x}_m$

Теорема. $L_\Sigma = L_1 + L_2 + ... + L_m$ буде прямою $\Leftrightarrow$ базис в L_Σ є об'єднанням базисів в $L_1, L_2, ..., L_m$.

9 .Перетворення базису лінійного підпростору

9 Перетворення базису лін. підпростору

Нехай у векторному просторі n маємо 2 базиси: $\beta = \{e_1 \ldots e_n\}$ і $\beta' = \{e_1' \ldots e_n'\}$. Вектор $\bar{x} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ в базисі β, $\bar{x}' = (\alpha_1' \ldots \alpha_n')$, де $\bar{x}' = [\bar{x}]_{\beta'}$.

Запишемо вектори базису β' через вектори базису β:

$$\begin{cases} \bar{e}_1' = t_{11} \cdot \bar{e}_1 + t_{21} \cdot \bar{e}_2 + \ldots + t_{n1} \cdot \bar{e}_n, \\ \vdots \\ \bar{e}_n' = t_{1n} \cdot \bar{e}_1 + t_{2n} \cdot \bar{e}_2 + \ldots + t_{nn} \cdot \bar{e}_n. \end{cases} \quad (1)$$

Координати векторів у β' в (1) утворюють матрицю T:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & \ldots & t_{1n} \\ \vdots & - & \ldots & - \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Запишемо $\bar{x}_1' = \alpha_1' \cdot \bar{e}_1' + \alpha_2' \cdot \bar{e}_2' + \ldots + \alpha_n' \cdot \bar{e}_n'$ і підставимо сюди вираз (1):

$$\bar{x}_1' = \alpha_1'(t_{11} \cdot \bar{e}_1 + t_{21} \cdot \bar{e}_2 + \ldots + t_{n1} \bar{e}_n) + \ldots + \alpha_n'(t_{1n} \bar{e}_1 + \ldots + t_{nn} \cdot \bar{e}_n) =$$

$$= \underbrace{\alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n}_{X},$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1' \cdot t_{11} + \alpha_2' \cdot t_{12} + \ldots + \alpha_n' \cdot t_{1n} \\ \alpha_n = \alpha_1' \cdot t_{n1} + \alpha_2' t_{n2} + \ldots + \alpha_n' \cdot t_{nn} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1' \cdot t_{11} + \ldots + \alpha_n' \cdot t_{1n} \\ \alpha_1' \cdot t_{n1} + \ldots + \alpha_n' \cdot t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & \ldots & t_{1n} \\ - & - & - \\ t_{n1} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$$

$$X = T \cdot X' \quad ; \quad X' = T^{-1} \cdot X \quad , \text{ де}$$

T - матриця переходу від β до β', вектори-стовпці якої — це координати вектора $\bar{e}_i'$ в базисі β.

10.Евклідів простір.

Розглянемо лінійний векторний простір $V = \{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$.
Так як це лінійний простір, то на ньому визначаються внутрішні (додавання) і зовнішні (множення на число) операції. Окрім цих операцій розглянемо добуток елементів із V.

Скалярний добуток двох векторів є число, що ставиться у відповідність цим двом векторам.

$\lambda \in \mathbb{R}$ - дійсний Евклідовий простір.
$\lambda \in \mathbb{C}$ - комплексний Евклідовий простір.

Нехай $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V$, тоді для скалярного добутку виконуються наступні аксіоми:

1. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;
2. $(\bar{x}, \bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{x}, \bar{z})$;
3. $(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y})$;
4. $(\bar{x}, \bar{x}) = \overline{x^2}, (\bar{x}, \bar{x}) \geq 0, (\bar{x}, \bar{x}) = 0$, коли $\bar{x} = \bar{0}$.

Евкліловим простором називається дійсний векторний лінійний простір, на якому визначена операція скалярного добутку (позначається як E).
Як і будь-який лінійний простір, простір E^n має безліч базисів, що складаються з n лінійно незалежних векторів.

11.Нерівність Коші-Буняковського, колінеарність

Два вектори є колінеарними, якщо вони лежать на паралельних або на одній прямій. Можуть бути співнаправленими або протилежно направленими („антиколінеарними")

НЕРІВНІСТЬ Коші - Боняковського
$\forall x, y \in L$ справедлива нерівність:
$(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$.
Дов. в силу властивостей скалярного добутку $\forall \alpha$ $(x+y\alpha, x+\alpha y) \geq 0$. Скористаємось власт. лінійності: $\alpha^2(y,y) + 2\alpha(x,y) + (x,x) \geq 0$
$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0$. ■

12.Поняття норми, відстані, кута

Норма вектора

В просторі E кожному вектору ставиться у відповідність його норма — число, яке дорівнює: $\forall \bar{x} \in E \quad \|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$, що задовольняє аксіомам:

I $\|\bar{x}\| \geq 0$, $\|\bar{x}\| = 0$, т.т.т. $\bar{x} = \bar{0}$

II $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$, $\lambda \in R$

III Нерівність трикутника:

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

Норма вектора — дійсне додатне число

Евклідовий простір часто називають нормованим векторним простором, а визначений на ньому добуток — скалярним.

Так як визначено скалярний добуток, то в евклід. просторі можна визначити кут між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}, \quad \varphi = (\widehat{\bar{x}, \bar{y}}) \qquad (1)$$

Доведення

Використаємо нерівність Коші-Буняківського $(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} \cdot \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})}$. Тепер бачимо, що (1) буде дійсно меншим за 1: $0 \leq \cos\varphi \leq 1$. Тому можемо визначити кут

Відстань між ел. норм. простору

$$\rho(x-y) = \|x-y\|$$

13.Ортогональність. Ортонормований базис

Система векторів $\{\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ називається ортогональною, якщо вектори цієї системи є попарно ортогональними, тобто

$$(\overline{x_i}, \overline{x_j}) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

і ортонормованою, якщо виконується друга умова, де $|\overline{x_i}| = 1 \; \forall i = \overline{1, n}$.

Будь-який вектор можна про нормувати (поділити на його норму) і отримати довжину 1.

$$|\bar{x}| = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = 1$$

Теорема: будь-яка система ортогональних векторів є лінійно незалежною.

Ортонормований <u>базис</u> n-вимірного Евклідового простору називається <u>канонічним</u>, якщо

$$\begin{aligned} \overline{e_1} &= (1,0,\dots,0) \\ \overline{e_2} &= (0,1,\dots,0) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{e_n} &= (0,0,\dots,1) \end{aligned}$$

В ПДСК канонічний базис – це $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$.

Теорема: в будь-якому Евклідовому просторі існує ортонормований базис.

14.Скалярний добуток в ортонормованому базисі

<u>**Твердження.**</u> Якщо $\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$ - ортонормований базис в H, то $\forall \vec{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\vec{y} = \{y_1, \dots, y_n\} \in H$

$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ - в унітарному $\left((\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ — в евклідовому} \right)$

Доведення.

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \quad \overline{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j \Rightarrow$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} (\vec{e}_i, y_j \vec{e}_j) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{y}_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{y}_j \delta_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

Оскільки для дійсних чисел $\overline{y}_i = y_i$, то в евклідовому просторі $(\overline{x}, \overline{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

<u>**Твердження 2.**</u> Якщо $\forall \vec{x}, \vec{y} \in H$, $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$ (або $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ в евклідовому), то базис $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ - ортонормований.

Доведення.

В базисі $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ координати векторів $\vec{e}_i = 0 \cdot \vec{e}_1 + ... + 1 \cdot \vec{e}_1 + ...0 \cdot \vec{e}_n \Rightarrow$

$\vec{e}_i = \{0, ..., 1, ...0\}$, $\vec{e}_j = \{0, ..., 0, ..., 1, ...0\}$

Тоді при $i \neq j \Rightarrow (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \cdot 0 + ... + 1 \cdot 0 + ... + 0 \cdot 1 + ...0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{e}_i \perp \vec{e}_j$

$(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 0 \cdot 0 + ... + 1 \cdot 1 + ... + 0 \cdot 0 = 1 \Rightarrow |\vec{e}_i| = 1 \Rightarrow \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$- ортонормований.

Отже за допомогою Твердження 1 та Твердження 2 ми довели наступну теорему.

Теорема. Якщо H- уніарний (евклідовий) простір, то $\forall \vec{x}, \vec{y} \in H \ \ (\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$.

($\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ - в евклідовому) $\Leftrightarrow$ базис $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - ортонормований

15.Ортогональність підпросторів. Ортогональна сума

Визначення. Два довільні вектори $\vec{x}, \vec{y} \in H$ називаються ортогональними, якщо $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

Зауваження. Якщо $\vec{x} \neq 0, \vec{y} \neq 0$, то $\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{0}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = 0, \ \ \varphi \in [0; \pi] \ \Rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{2}$ - це пояснює застосування "ортогональності" і тому в подальшому факт ортогональності позначатимо $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Визначення. Система векторів називається ортогональною, якщо будь-які два вектори з неї ортогональні один одному.

Визначення. Система векторів $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \in H$ називається ортонормованою, якщо вона ортогональна і нормована ($|\vec{e}_i| = 1 \ \forall i$).

З попередньої теореми $\Rightarrow$будь-яка ортонормована система векторів є ЛНЗ.

Для ортонормованої $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$: $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j; \end{cases}$.

16.Ортогональне доповнення. Орт.проекція та складова

Підпростір E^P Евклідового простору E^N називається ортогональним до підпросторуЕ^K, якщо будь-який вектор з E^P є ортогональним усім векторам з E^K.
Для того, щоб визначити, чи будуть підпростори E^P і E^K ортогональними, достатньо визначити, чи будуть усі вектори базису з E^P ортогональними до усіх векторів довільного базису з E^K.
Так як жоден вектор не може бути ортогональним самому собі, то підпростори E^P і E^K не перетинаються.
Якщо $E^p \cup E^k = E^n$, то E^K – **ортогональне доповнення** до E^P.
Виділимо два підпростори, які не перетинаються $V_1 \perp V_2$, то $V_2 = V_1^\perp$.
Ортогональне доповнення називається **анулятором** підпростору.
Покажемо, що підпростір і анулятор утворюють весь простір. Візьмемо у підпросторі E^P якийсь ортонормований базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_p}$ і доповнимо його до базису простору E^N: $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_p}, \overline{e_{p+1}}, \overline{e_{p+2}}, \dots, \overline{e_n}$.
Так як кожен вектор, що доповнює базис E^N є ортогональним до усіх E^P.
Значить усі вектори (n-p) лежать в ортогональному доповнені до E^P.(k=n-p)
Є властивість, ортогональне доповнення ортогонального доповнення – це сам підпростір: $(V_1^\perp)^\perp = V_1$
Властивість ортогональності підпросторів є симетричною.

Нехай F- підпростір $H \Rightarrow G = F^\perp$ - теж підпростір H і, як ми довели,

$H = F \oplus G \Rightarrow \ \forall \vec{x} \in H \ \exists! \vec{x}_1 \in F$ і $\vec{x}_2 \in G$: такі, що $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.

З єдиності такого розкладу $\Rightarrow$ вектора $\vec{x}_1$ і $\vec{x}_2$ однозначно пов'язуються з вектором $\vec{x}$.

Вектор $\vec{x}_1$ називається проекцією вектора $\vec{x}$ на підпростір F і позначається $\vec{x}_1 = pr_{_F}\vec{x}$.

Вектор $\vec{x}_2$ називається ортогональною складовою вектора $\vec{x}$ при проектуванні на F і позначається $\vec{x}_2 = ort_{_F}\vec{x}$

Зауваження. Оскільки $(\vec{x},\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{y},\vec{x}) = 0 \Rightarrow G = F^\perp \Leftrightarrow F = G^\perp$, то

$\vec{x}_2 = ort_{_F}\vec{x} = pr_{_G}\vec{x} = pr_{_{F^\perp}}\vec{x}$;

$\vec{x}_1 = pr_{_F}\vec{x} = \vec{x}_1 = ort_{_G}\vec{x} = ort_{_{F^\perp}}\vec{x}$.

17.Унітарний підпростір

Це Евклідовий простір, визначений на множині комплексних чисел, тобто $\bar{x}, \bar{y}, \dots$ мають комплексні координати і $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$.

Для цього простору визначені 4 аксіоми:

1. $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$
2. $(\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y})$
3. $(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{(\bar{y}, \bar{x})}$
4. $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$

Скалярний добуток в унітарному просторі називається ермітовим добутком (сума добутків координат першого вектора на спряжені координати другого вектора).

Унітарний простір – це комплексний простір, на якому визначений ермітовий добуток.
Для унітарного простору норма зберігається.

18.Лінійний оператор

Розглянемо два лінійні векторні простори V і W. Нехай кожному вектору $V_i \in V$ відповідають вектори $W_k \in W$, і є такі, що не мають відповідних векторів. Тоді кажемо про відображення V на W. Відображення відбувається за допомогою застосування деякого оператора $\mathcal{A}(V) = W$. Оператори позначаються готичними літерами $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots, \mathcal{Z})$.

Оператор – перетворення (відображення) одного лінійного векторного простору в інший.

$$V \xrightarrow{\mathcal{A}} W$$

V – прообраз відображення ($V = \{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\}$);
W – образ відображення ($W = \{\overline{y_1}, \dots, \overline{y_k}\}$).

$Y = \mathcal{A}(X)$, якщо $X \in V$ і $Y \in W$.

Оператор, що діє у лінійному просторі називається **лінійним оператором**. Для них виконуються наступні аксіоми:

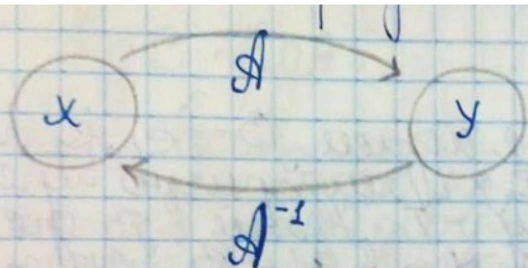
1. $\mathcal{A}(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = \mathcal{A}(\overline{x_1}) + \mathcal{A}(\overline{x_2})$
2. $\mathcal{A}(\alpha\overline{x}) = \alpha\mathcal{A}(\overline{x})$ або $\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overline{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}(\overline{x_i})$ 1
   де $\overline{x_i} \in V$ і $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

І навпаки: якщо для $\mathcal{A}$ виконуються ці дві аксіоми, то $\mathcal{A}$ - лінійний оператор.

З формули 1 бачимо, що якщо $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ є лінійно незалежними, то лінійний оператор $\mathcal{A}$ переведе їх в множину лінійно незалежних векторів.
Лінійний оператор переводить нульовий вектор у нульовий.
Так як система з n лінійно незалежних векторів $\{\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}\} \longrightarrow \{\overline{y_1}, \dots, \overline{y_n}\}$, то ми маємо один і той самий n-вимірний векторний лінійний простір, але інший базис.

Лінійний оператор, фактично, є оператором переходу від одного базису до іншого базису в даному просторі.

19.Обернений оператор. Взаємооднозначний оператор



$\bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x})$;
$\bar{x} = \mathcal{A}^{-1}(\bar{y})$.

Обернений оператор єдиний, так як встановлено взаємнооднозначне відображення.

Для оберненого відображення виконується властивість:

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{I} = \mathcal{E}$

20.Образ та ядро лінійного оператора

Нехай $\mathcal{A}: V \to W$

Образом лінійного оператора $\mathcal{A}$ називається множина векторів $\bar{y} \in W$, кожен з яких є образом хоча б одного вектора з V. ($Im\ \mathcal{A}$)

$$Im\ \mathcal{A} = \{\bar{y} \in W, \bar{y} = \mathcal{A}(\bar{x}), \bar{x} \in V\}$$

Ядром оператора $\mathcal{A}$ називається множина таких векторів з V, які відображаються в один елемент простору W. ($Ker\ \mathcal{A}$)

$$Ker\ \mathcal{A} = \{\bar{x} \in V, \mathcal{A}(\bar{x}) = \bar{e}, \bar{e} \in W\}, \bar{e} = \bar{0}$$

Мають місце наступні твердження:

1. Ядро лінійного оператора $\mathcal{A}$ є підпростором простору V.
   Доведення: так як оператор лінійності додавання і множення на число, то одиничний вектор $\bar{e} \in W$, то $\bar{e} = \bar{0}$.
   Нехай $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in Ker\ \mathcal{A}, \mathcal{A}(\overline{x_1}) = \bar{0}\ \mathcal{A}(\overline{x_2}) = \bar{0}$. Для того, щоб показати, що $Ker\ \mathcal{A}$ є підпростором простору V достатньо показати, куди переходить лінійна комбінація $\overline{x_1}$ і $\overline{x_2}$
   $$\mathcal{A}(\alpha_1\overline{x_1} + \alpha_2\overline{x_2}) = \alpha_1\mathcal{A}(\overline{x_1}) + \alpha_2\mathcal{A}(\overline{x_2}) = 0$$
2. Образ лінійного оператора $Im\ \mathcal{A}$ є підпростором простору W. (доводиться аналогічно пункту 1 з додаванням $\mathcal{A}(\bar{0}) = \bar{0}$
3. Ядро лінійного оператора $Ker\ \mathcal{A}$ містить $\bar{0}$ тоді і тільки тоді, якщо з властивості $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$ випливає $\overline{y_1} \neq \overline{y_2}\ \ \forall \overline{x_i} \in V, \overline{y_i} \in W$

Рангом оператора $\mathcal{A}$ називається вимір його образу:

$$rang\ \mathcal{A} = \dim Im\ \mathcal{A}$$

Так як лінійний оператор визначається своєю матрицею, то:

$$rang\ \mathcal{A} = rang\ A$$

Дефектом лінійного оператора називається вимір його ядра:

$$\operatorname{def} \mathcal{A} = \dim Ker\ \mathcal{A}$$

Якщо оператор $\mathcal{A}: V^n \to V^n$ і $rang\ \mathcal{A} < n$, то $\operatorname{def} \mathcal{A} = n - rang\ \mathcal{A}$.

Якщо $\operatorname{def} \mathcal{A} > 1, \operatorname{def} \mathcal{A} = k\ \Rightarrow rang\ \mathcal{A} = n - \operatorname{def} \mathcal{A} = n - k$ – незалежних векторів.
Отже, $n = rang\ \mathcal{A} + \operatorname{def} \mathcal{A}$

21.Матриця лінійного оператора

Нехай $\mathcal{A}$ – лінійний оператор, що діє у векторному лінійному просторі V^n і розглянемо два базиси

$\beta = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$ і $\beta' = \{\overline{e_1'}, \overline{e_2'}, \dots, \overline{e_n'}\}$ і застосуємо оператор $\mathcal{A}$ до векторів базису β і нехай ми отримаємо базис β'.

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\overline{e_1}) = \overline{e_1'} = t_{11}\overline{e_1} + t_{21}\overline{e_2} + \dots + t_{n1}\overline{e_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{A}(\overline{e_n}) = \overline{e_n'} = t_{1n}\overline{e_1} + t_{2n}\overline{e_2} + \dots + t_{nn}\overline{e_n} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Отже, $\overline{e_i'} = \mathcal{A}(\overline{e_i}) \to \overline{e_i'} = \mathcal{A}(\overline{e_i})^T$ ②

Тобто, кожен лінійний оператор визначається своєю матрицею в даному базисі, а в іншому базисі матриця буде іншою. І навпаки: кожній матриці даного базису відповідає лінійний оператор.
Існує також нульовий оператор, який переводить будь-який вектору нульовий: $\mathcal{O}(\bar{x}) = \bar{0}$. І він має нульову матрицю O. А ще існує одиничний (тотожній) оператор, який не змінює вектор: $\mathcal{J}(\bar{x}) = \bar{x}$, у відповідність йому ставиться одинична матриця I.

22. Перетворення матриці лінійного оператора.

* вектори як елементи ЛВП можуть виступати і операторами, і матриці цих операторів.

Перетворення матриці лін. оператора при переході до іншого базису 16.02.15

Теорема: якщо для будь-якого вектора-стовбця $\bar{x}$ виконується співвідношення: $AX = BX$, де A і B - матриці, то $A = B$.

Доведення: для будь-яких векторів-стовбців, тому доведемо для векторів канонічного базису:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$ - почергово для кожного з них

Нехай маємо 2 базиси $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ і $\beta' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n\}$ і матрицю переходу від базису до базису - T. Нехай в β діє лінійний оператор $\mathcal{A}$, в β' - $\mathcal{B}$. Це означає, що $Y = AX$ в β, $Y' = BX'$ в β'. Знаємо, що $X = TX'$, $Y = Y' \cdot T$ - формула переходу $X_\beta \xrightarrow{T} X'_{\beta'}$ і $Y_\beta \xrightarrow{T} Y'_{\beta'}$. Запишемо: $TY' = A \cdot TX'$, тоді

$$Y' = T^{-1}AT \cdot X' \Rightarrow \boxed{T^{-1}AT = B}$$ - з теореми.

формула переходу (5)

23. Еквівалентність матриць. Еквівалентність операторів.

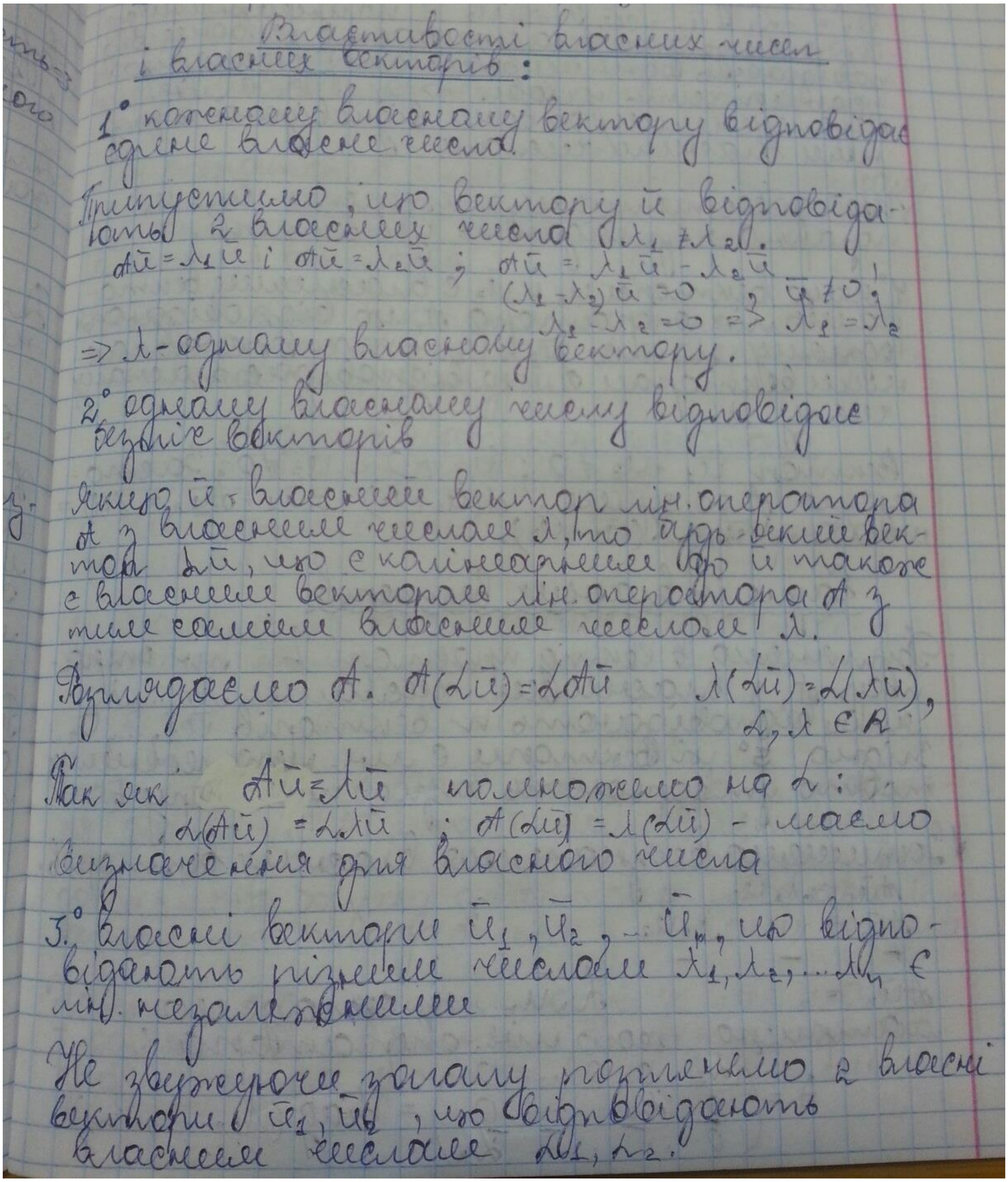
Еквівалентні матриці - матриці, пов'язані співвідношенням (5) - це одна й та сама матриця у різних базисах.

Еквівалентні оператори - це ті оператори в яких матриці еквівалентні.

25. Власні числа та власні вектори лінійного оператора, їх властивості.

удь – який ненульовий вектор $\bar{u}$, що задовільняє рівнянню $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$ – називається власним вектором оператора А, а λ – власним числом, що відповідає даному власному вектору.

Властивості :



Властивості власних чисел і власних векторів:

1° кожному власному вектору відповідає єдине власне число.

Припустимо, що вектору $\bar{u}$ відповідають 2 власних числа $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$A\bar{u} = \lambda_1\bar{u}$ і $A\bar{u} = \lambda_2\bar{u}$; $A\bar{u} = \lambda_1\bar{u} - \lambda_2\bar{u}$

$(\lambda_1 - \lambda_2)\bar{u} = 0$; $\bar{u} \neq 0$;

$\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$

$\Rightarrow \lambda$ - одному власному вектору.

2° одному власному числу відповідає безліч векторів

Якщо $\bar{u}$ - власний вектор лін. оператора A з власним числом λ, то будь-який вектор $\alpha\bar{u}$, що є колінеарним до $\bar{u}$ також є власним вектором лін. оператора A з тим самим власним числом λ.

Розглядаємо A. $A(\alpha\bar{u}) = \alpha A\bar{u}$ $\quad \lambda(\alpha\bar{u}) = \alpha(\lambda\bar{u})$, $\alpha, \lambda \in R$

Так як $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$ помножимо на α:

$\alpha(A\bar{u}) = \alpha\lambda\bar{u}$; $A(\alpha\bar{u}) = \lambda(\alpha\bar{u})$ - маємо визначення для власного числа

3° власні вектори $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots \bar{u}_n$, що відповідають різним числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ є лін. незалежними

Не звужуючи загалу розглянемо 2 власні вектори $\bar{u}_1, \bar{u}_2$, що відповідають власним числам λ_1, λ_2.

$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 = 0$. Припустимо, що $\bar{u}_2$ залежить від $\bar{u}_1$. це означає, що $\lambda_2 \neq 0$ і тоді $\bar{u}_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\bar{u}_1 = c\bar{u}_1 \Rightarrow \bar{u}_2$ є колінеарним до $\bar{u}_1 \Rightarrow$ згідно властивості 2° вони відповідають одному власному числу, що протирічить умові. $\Rightarrow \bar{u}_1$ і $\bar{u}_2$ є лін. незалежними, бо вони відповідають різним власним числам.

Щоб довести лін. незалежність $\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n$ попарно розглядають усі вектори.

4° Якщо вектора $\bar{u}_1$ і $\bar{u}_2$ є власними векторами лін. оператора $\mathcal{A}$, що відповідають одному λ, то $\bar{u}_1 + \bar{u}_2$ — також є власним вектором $\mathcal{A}$, що відповідає власному числу λ.

Вектор $\overrightarrow{\bar{u}_1 + \bar{u}_2} \neq 0$; $\bar{u}_1 \neq 0$ і $\bar{u}_2 \neq 0$. Застосуємо $\mathcal{A}$ до суми: $\mathcal{A}(\bar{u}_1+\bar{u}_2) = \mathcal{A}\bar{u}_1 + \mathcal{A}\bar{u}_2 = (6) = \lambda\bar{u}_1 + \lambda\bar{u}_2 = \lambda(\bar{u}_1+\bar{u}_2)$.

26. Лінійна незалежність власних векторів.

Якщо власні вектори є лінійно незалежними, то вони утворюють базис.

Базис із власних векторів

Розглянемо в евклід. просторі E^n лін. оператор $\mathcal{A}$ з власними числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, яким відповідають n векторів $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$. Згідно 3° ці вектори є лін. незалежними, тобто утворюють базис простору E^n.

Запишемо визначення власних векторів:

$A\bar{u}_1 = \lambda_1\bar{u}_1$

$A\bar{u}_2 = \lambda_2\bar{u}_2$

$\dots$

$A\bar{u}_n = \lambda_n\bar{u}_n$ і складемо матрицю цього лін. оператора:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

У базисі із власних векторів матриця лін.оператора має діагональну форму.

Якщо в деякому базисі матриця лін.оператора є діагональною, то вектори базису є власними векторами цього оператора.

27. Лінійний оператор простої структури.

Лін.оператор A, який діє в лін. n-вимірному просторі – оператор простої структури, якщо він має n лін. незалежних власних векторів.

✓Якщо власні вектори лін.оператора A утворюють базис, то A є оператором простої структури.

28. Характеристичний многочлен.

(*) Запишемо визначення власного вектора у вигляді (*): $A\bar{u}=\lambda\bar{u}$.

Маємо: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ (7')

$$\begin{pmatrix}a_{11}\cdot x_1+\dots+a_{1n}\cdot x_1\\ \vdots \\ a_{n1}x_n+\dots+a_{nn}\cdot x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \vdots\\ \lambda x_n\end{pmatrix}$$

, якщо ми розкриємо рівність векторів-стовпців, то отримаємо систему лін. рівнянь: (однорідну)

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_1=\lambda x_1\\ \vdots\\ a_{n1}x_n+\dots+a_{nn}x_n=\lambda x_n\end{cases};$$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_1+\dots+a_{1n}x_1=0\\ a_{21}x_2+(a_{22}-\lambda)x_2+\dots+a_{2n}x_2=0\\ \vdots\\ a_{n1}x_n+a_{n2}x_n+\dots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases}\quad (8)$$

Запишемо у згорнутому вигляді:

$$(A-\lambda I)X=0 \quad (9)$$

Розв'язками системи (9) є координати вектора X, який ≠0 за визначенням власного вектора.

Для цього Rg системи (9) повинен бути <n, за т. Кронекера-Капелі:

$$Rg(A-\lambda I)<n \quad (10)$$

Для того, щоб виконалась умова (10), необхідно:

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0} \quad (11)$$

Характеристичне рівняння.

29. Спектр оператора. Критерій діагоналізованності.

$\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ Мн. всіх вл. зн. оп. A з урахуванням їх геометричної кратності назив. спектром оператора. Spec A.

Ел. спектру назив. простим, якщо його геометрична кратність $= 1$. Якщо всі ел. спектру — прості, то спектр називається простим. Оператор із простим спектром завжди буде діагоналізованим.

Критерій діагоналізовності

Для того, щоб лін. оп. $A: L \to L$ був діагоналізовним, (базис в просторі L над полем P), необхідно і достатньо виконання 2-х умов:

1) Всі корені $P(\lambda)$ лежать в полі P
2) геом. кратність кожного власного значення співпадає з алг. кратністю.

Доведення

Достатність: нехай виконуються 2 умови.
Якщо $P(\lambda)$ має різні корені $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ із кратністю $k_1, \dots, k_m$ відповідно, то розмірність підпростору співпадає з алг.: $\dim L_\lambda = k_i$, а $k_1 + \dots + k_m = n$. За теоремою про незалежність $\dim L_\lambda$ власних векторів, будь-яка сукупність векторів $x_i \in L_{\lambda_i}$ є лін. незалежною, тобто кожен підпростір L_{λ_i} немає спільних елементів з об'єднанням інших елементів:

$$L_{\lambda_i} \cap (L_{\lambda_1} + \dots + L_{\lambda_{i-1}} + L_{\lambda_{i+1}} + \dots + L_{\lambda_m}) = \emptyset$$ — не перетин.

Тоді $L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus L_{\lambda_n}$ — пряма сума, яка, з урах. умови, дає весь простір L.

Тоді, взявши в якості базису простору L об'єднання базисів підпросторів, отримаємо, що власний базис — базис із власних векторів, в якому матриця оп. A буде діагональною.

Необхідність: нехай оп. A діагоналізований. Позначимо: $\lambda_1 \ldots \lambda_m$ різні значення оп. A, $\ell_i = \dim L_{\lambda_i}$ — геом. кратність власних значень. Відповідні власні підпростори не перетинаються один з одним і тому породжують весь простір L: $L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_m} = L$. В базисі, який представляє собою об'єднання базисів підпросторів L_{λ_i}, матриця A буде діагонального вигляду: $A = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1 \ldots \lambda_1}_{\ell_1} \ldots \underbrace{\lambda_m \ldots \lambda_m}_{\ell_m})$

Відповідний $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\ell_1} (\lambda - \lambda_2)^{\ell_2} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{\ell_m}$. В будь-якому базисі.

Тобто, геом. кратність ℓ_i співпадає з алг. кратністю.

Всі корені характеристичного многочлена належать заданому полю P.

30. Інваріантний підпростір. Індуційований оператор.

Підпростір $L_1 \subset L$ — інваріантний підпростір відносно A, якщо оп. A не виводить ел-ти за його межі: $\forall x \in L_1 \; Ax \in L_1$. Кожен лін. оп. завжди має 2 тривіальні інваріантні підпростори: весь простір та нульовий підпростір.

Нехай L — підпростір, інваріантний відносно оп. A. Відображення $A/L : L \to L_1$ визначене рівністю $(A/L)x = Ax$, $\forall x \in L$ — індукований оп. на оп. A або звуження оп. A на підпростір L. В силу лін. оп. A теж буде лін. Він співпадає з оп. A на підпросторі L і не визначений за його межами. Хар. многочлен такого оп. є дільником породжуючого многочлена.

31. Жорданова форма матриці.

Жорданова форма

Жорданова клітинка - квадратна матриця, на діагоналі якої стоїть власне число кратності k, а наддіагональні ел. =1, а усі інші =0.

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (5)$$

* Приєднані вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n$

Якщо вдалося знайти вектори в ланцюжку, що є лінійнонезалежними і які відповідають базису $E^n = \{\bar{e}_1, \dots \bar{e}_n\}$, матриця A має вигляд (5) - жорданової клітинки.

Якщо матриця A лін. оп. A має декілька кратних власних чисел, то вона буде складатися з жорданових клітин, що відповідають кожному власному числу відповідної кратності і ця матриця I називається НОРМАЛЬНОЮ ЖОРДАНОВОЮ ФОРМОЮ МАТРИЦІ А.

І при цьому ця форма є єдиною, з точністю до розташування жорданових клітин на діагоналі

$\lambda_1 = 7, \; k_1 = 2$
$\lambda_2 = 3, \; k_2 = 3$
$\lambda_3 = 4, \; k_3 = 1$

$$J = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad n=6$$

Кожній клітинці відповідає ланцюжок приєднаних векторів. Щоб знайти $\bar{e}$, треба розв'язати систему неоднорід. рівнянь

32. Функції від матриць.

Функції від матриць.

Ф-ії від лінійного оператора.

$A: E^n \to E^n$

Найпростішою ф-ією від A лін. оператора є поліном (або многочлен).

$$P(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \dots + a_1 t + a_0 .$$

$$P(A) = a_k A^k + \dots + a_1 A + a_0 J .$$

$$A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A^2 \cdot A, \dots, A^k = A^{k-1} \cdot A .$$

$P(A) = B$ – довести самостійно, що поліном від опер. є оператор.

Так, як кожен оператор визначається своєю матрицею в деякому базисі, то $P(A)$ – також є матрицею в цьому базисі.

Нехай, J_A – жорд. форма матриці A.

(Візьмемо одну клітину)

Знайдемо значення $P(\cancel{A} J_A)$.

Розкладемо многочлен $P(t)$ за степенями $(t-\lambda)$.

$$P(t) = P(\lambda) + \frac{P'(\lambda)}{1}(t-\lambda) + \frac{P''(\lambda)}{2!}(t-\lambda)^2 + \dots$$

$$\frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(t-\lambda)^k.$$

Розглянем $P(J_A)$.

$$P(J_A) = P(\lambda)\cdot I + \frac{P'(\lambda)}{1!}(J_A-\lambda I)+\dots+\frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}(J_A-\lambda I)^k$$

$$J_A-\lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P\left(\begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix} P(\lambda) & P'(\lambda) & \frac{P''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!} \\ 0 & P(\lambda) & P'(\lambda) & \dots & \frac{P^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P(\lambda) \end{Vmatrix}$$

(8)

33. Поверхня та лінія в просторі.

В просторі задана ПДСК : OXYZ і задана деяка поверхня S.
Рівняння $\varphi(x,y,z)=0$ (1) називають рівнянням поверхні S відносно заданої системи координат, якщо йому рівнянню задовольняють координати будь-якої точки, яка лежить на поверхні S і не задовольняють координати будь-якої т., яка не лежить на ній.

Поверхні у просторі

алгебраїчні — визначаються алг. рівняннями в деякій системі координат

$$\sum a_{klm} \cdot x^k \cdot y^l \cdot z^m = 0 \quad (2)$$

трансцендентні — всі ті, які не є алгебраїчними

Лінію в просторі найчастіше розглядають як перетин поверхонь, тобто ГМТ точок, які одночасно належать 2 поверхням.

Якщо $\varphi_1(x_1,y_1,z_1)=0$ і $\varphi_2(x_2,y_2,z_2)=0$ — це рівняння 2-х поверхонь, перетин яких — це лінія L, то координати будь-якої точки цієї лінії задовольняють вказаним рівнянням. Щоб задати лінію, розглядаємо систему:

$$\begin{cases} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

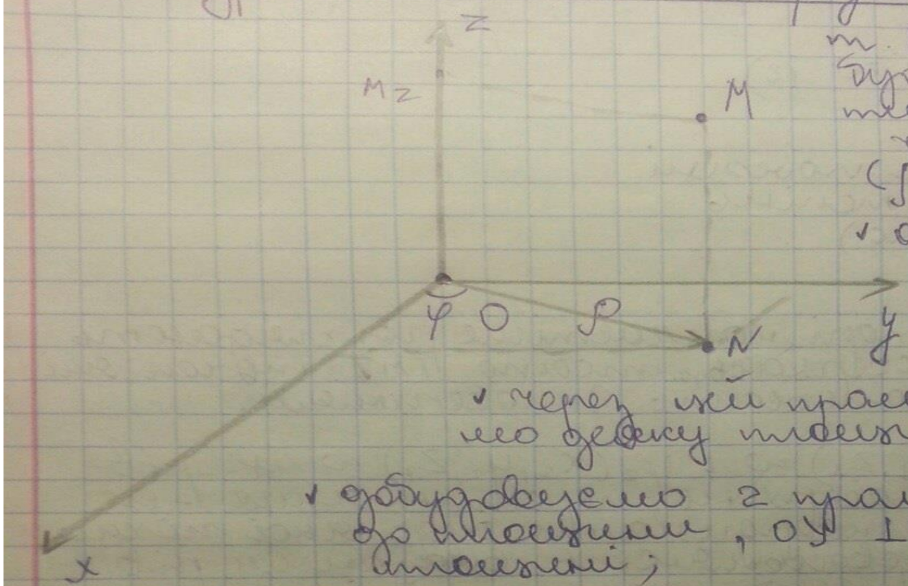
Лінія в просторі

алг., якщо визначається перетином алг. поверхонь

трансцендентні у всіх інших випадках

34. Циліндричні та сферичні системи координат.

Циліндрична система координат (ЦСК)

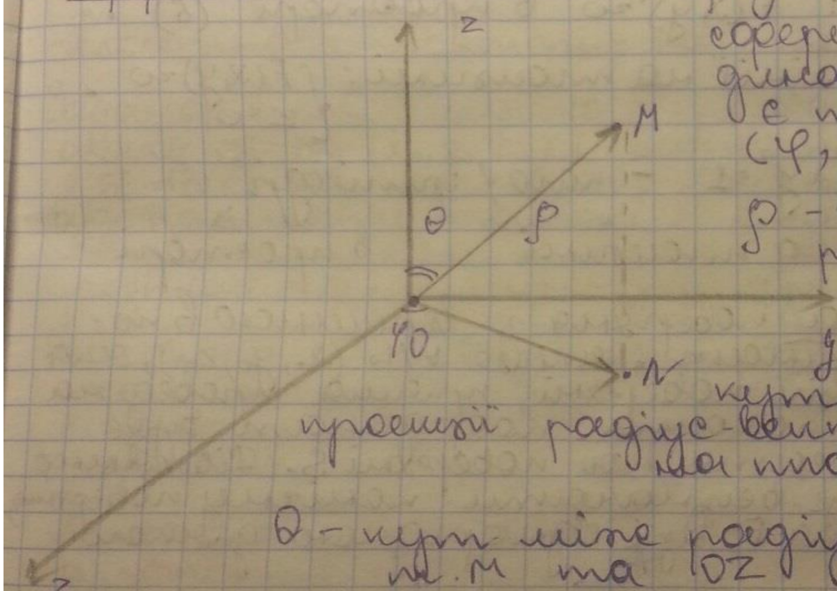


т. М в ЦСК буде визначатися 3-ма числами (ρ, φ, z) ~

- обираємо т. O довільно і проводимо промінь OX;
- через цей промінь проводимо деяку площину;
- добудовуємо 2 прямі: OZ ⊥ до площини, OY ⊥ до OX в цій площині;
- знаходимо проекції т. М на пряму OZ і на згадану площину, тоді координати ρ та φ – полярні координати т. М відносно полюса O і полярного променя OX, а координата z – величина відрізка OM_z з урахуванням знаку.

Зв'язок ЦСК з ПДСК:
$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad (4)$$

Сферична система координат (ССК)



сферичними координатами т. М є трійка чисел (φ, θ, ρ), де

ρ – довжина радіус-вектора точки М;

φ – аргумент; кут повороту проекції радіус-вектора т. М на площину xy;

θ – кут між радіус-вектором т. М та OZ

Зв'язок з ПДСК:
$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ z = \rho \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (5)$$

35. Конічні та циліндричні поверхні.

Визначимо деякі типи поверхонь:

• S - циліндрична поверхня, твірні якої $\parallel OZ$, якщо $\forall M_0(x_0, y_0, z_0)$ пряма лінія, що проходить через цю т. $M_0 \parallel OZ$, повністю лежить на поверхні S. Будь-яка така циліндрична поверхня визначається рівнянням: $F(x,y)=0$ в просторі (6).

Визначення лінії на площині: $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Приклад: $x^2+y^2=1$ - коло / циліндр

на площині   в просторі

• S - конічна поверхня з вершиною в початку координат, якщо $\forall M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка лежить на цій поверхні, пряма проведена через т. M_0 і початок координат буде повністю лежати на поверхні S. Рівняння $F(x,y,z)=0$ буде визначати конічну поверхню, якщо функція F буде однорідною деякого степеня n.

Ф-ція F буде однорідною деякого степеня n, якщо при будь-якому $\lambda>0$ виконується $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n \cdot F(x,y,z)$ (7).

36. Площина в просторі. Загальне рівняння, рівняння через нормаль та у відрізках.

Площина в просторі - алг. поверхня I порядку.

Задана ПДСК. Площина P проходить через деяку т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектор $\vec{n}=(A,B,C) \perp P$; $\vec{n}$ - вектор нормалі. Довільна т. $M(x,y,z)$ буде належати площині P в тому і тільки тому випадку, коли $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$; $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$, розписуємо: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. (1)

Рівняння (1) - рівняння площини, яка проходить через задану т. ⊥ до заданого вектора; рівняння площини через точку і нормаль.

Якщо в останньому виразі розкрити дужки, зібрати подібні і позначити вираз $-Ax_0-By_0-Cz_0$ як D, то ми отримаємо заг. рівняння площини в просторі:

$Ax+By+Cz+D=0$ (2) - алг. рівняння I порядку

Якщо повне рівняння і $D \neq 0$, то ми його можемо переписати у вигляді:

$$-\frac{A}{D}x-\frac{B}{D}y-\frac{C}{D}z=1$$

Або, якщо ввести позначення $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$, то рівняння набуде вигляду: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (3)

це буде рівняння площини у відрізках.

37. Площина у просторі. Нормальне рівняння площини. Поняття відстані та відхилення.

Нормальне рівняння площини

$\vec{r}\vec{n} = p$, де $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор довільної точки $M(x, y, z)$ площини, $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – одиничний вектор, що має напрям перпендикуляра, опущеного на площину із початку координат, α, β, γ – кути, утворені згаданим перпендикуляром з осями координат OX, OY, OZ, p – довжина перпендикуляра.

В координатній формі рівняння записується $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$

√ Відстань від деякої т. $M_1 \notin P$ до P – довжина перпендикуляру, проведеного з т. M_1 до площини P.

√ Відхиленням $\delta(M, P)$ називаємо число, яке дорівнює відстані від т. до площини у випадку, коли т. і поч. координат лежать по різні боки і дорівнює відстані із знаком "–", коли вони лежать по одному бік

$$\delta(M_0, P) = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \quad (7).$$

Відстань $\rho(M_0, P) = |\delta(M_0, P)| = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|$

$$\rho(M_0, P) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

38. Взаємне розташування площин в просторі. Пучок та зв'язка площин.

• Нехай є P_1 і P_2, які задані своїми заг. рівняннями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad і \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Кут між площинами визначається як кут між векторами нормалей цих площин:

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{P_1,P_2}) = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \quad (9)$$

Умова $P_1 \parallel P_2$: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. (10) ← колінеар

Якщо виконується і $\frac{A_1}{A_2}=\frac{D_1}{D_2}$, то P_1 і P_2 співпадають.

Умова $P_1 \perp P_2$: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ (11).

• Сукупність всіх площин, які проходять через одну і ту саму пряму l — пучок площин з центром в l.

<u>Теорема</u> про пучок площин

Якщо $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ це рівняння 2-х різних площин, перетином яких буде пряма l, а α і $\beta \neq 0 \in R$, то $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ (12) — буде рівнянням деякої площини, яка проходить через пряму l. Більше того, яка б не була наперед задана площина, що проходить через l, знайдеться такі α і β при яких це рівняння буде визначати цю площину.

Наголошено, це рівняння і визначає пучок площин.

Зв'язкою площин з центром в т. M_0 називається сукупність площин, які проходять через задану т. Рівняння площини, що належить до заданої зв'язки має вигляд:

(13) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, при $\neq 0$ одночасно коефіцієнтах A, B, C.

39. Рівняння прямої в просторі.

Пряма лінія в просторі визначається як лінія перетину 2-х різних не паралельних площин:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

заг. рівняння

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

$\vec{q}$ - направляючий вектор прямої L, якщо він буде $\parallel$ до цієї прямої і $\vec{q} \neq 0$.

Запишемо тепер рівняння прямої, яка проходить через деяку т. M_0 паралельно до $\vec{q}(k, l, m)$.

З геом. точки зору: $M_0(x_0, y_0, z_0) \in L$ т.т.т, коли $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{q}$ будуть колінеарними:

$$\frac{x-x_0}{k} = \frac{y-y_0}{l} = \frac{z-z_0}{m} \quad (15)$$

k, l, m можуть $= 0$; канон. рівняння

На осн. канон. рівняння можемо отримати ще 2 типи рівнянь:

- рівняння прямої, що проходить через 2 задані точки M_1 і M_2, а направляючий вектор $q = \overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (16)$$

- параметричне рівняння прямої.

Для цього потрібно прирівняти кожне з відношень канон. рівняння до параметру t:

$$x = x_0 + kt \quad y = y_0 + lt \quad z = z_0 + mt \quad (17)$$

40. Взаємне розташування прямих у просторі.

(5) Кут між 2 прямими в просторі. Взаємне розташування прямих

2 прямі задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \qquad \vec{s_1} = (m_1, n_1, p_1)$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \qquad \vec{s_2} = (m_2, n_2, p_2)$$

Кут між прямими – кут між направл. вект. прямих

$$\varphi = (\widehat{\vec{s_1}, \vec{s_2}})$$

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \quad (5)$$

Умова перпендик. прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Rightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \quad (6)$$

Умова паралельності прямих:

$$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (7)$$

У просторі можливі три випадки розміщення двох прямих:

1) прямі лежать в одній площині і мають спільну точку (перетинаються);
2) лежать в 1 площ. і не мають спільних точок – паралельні;
3) не лежать в 1 площ. – мимобічні.

Окремий випадок перетину прямих – накладання прямих одна на одну.

41. Взаємне розташування прямої та площини.

Взаємне розташування L та P

прямої, яка задана параметричними рівняннями: $L: x = x_0 + kt \quad y = y_0 + lt \quad z = z_0 + mt$.

і площини, що задана заг. рівнянням:

$P: Ax + By + Cz + D = 0$.

Щоб визначити розташування L та P потрібно точки з L підставити у P:

$$(Ak + Bl + Cm)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Якщо ми отримаємо:

1) рівняння відносно параметру t, то пряма і площина перетинаються в одній точці;

2) протиріччя, то $L \parallel P$;

3) тотожність, то $L \subset P$ (повністю лежить у площині).

Кут між L та P – гострий кут між L та її проекцією на площину.

Якщо пряма і площина задані рівняннями $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$, $Ax + By + Cz + D = 0$, то

$$\sin\varphi = \frac{|Ak + Bl + Cm|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + k^2 + l^2}} \quad (25)$$

Умова $L \parallel P$: $Ak + Bl + Cm = 0$ (26)

Умова $L \perp P$: $\frac{A}{k} = \frac{B}{l} = \frac{C}{m}$ (27)

42. Поверхні другого порядку. Еліпсоїд. Гіперболоїди.

Пов. 2 порядку – поверхня, яка в ПДСК визнач. алгебраїчним рівнянням 2-го порядку: $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0$

Принаймні 1 з перших ~~[illegible]~~ коефіцієнтів $\neq 0$

квадр. частина

лінійна частина

Еліпсоїд — замкнута центральна поверхня другого порядку. Еліпсоїд має центр симетрії та три осі, які називаються осями еліпсоїда. Точки перетину координатних осей з еліпсоїдом називаються його вершинами. Січення еліпсоїду площинами є еліпсами. В декартовійсистемі координат рівняннятеліпсоїдумаєвигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ Дослідження форми еліпсоїда проведемо методом паралельних перерізів. Для цьогорозглянемо перерізи данного еліпсоїда площинами, паралельними площині Oxy. Кожна з таких площин визначається рівнянням z=h, де h – довільне дійсне число, а лінія, яка утвориться і перерізі, визначається рівняннями

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$; z=h.

<u>Однопорожнинний гіперболоїд</u>

– Однопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в ПДСК визначається:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Координатні площини – площини симетрії, початок координат – центр симетрії.

Якщо a=b, то це гіперболоїд обертання. Його можна отримати обертанням гіперболи: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ відносно OZ.

Якщо a=b ~~=c~~, то гіперболоїд правильний.

Візьмемо перерізи гіперболоїда площинами z=h. Рівняння лінії перерізу – еліпс:

$x^2/(a^*)^2+y^2/(b^*)^2=1$, ~~[illegible]~~

$a^*=a\cdot\sqrt{1+h^2/c^2}$, $b^*=b\cdot\sqrt{1+h^2/c^2}$.

Двопорожнинний гіперболоїд

– Двопорожнинний гіперболоїд – поверхня, яка в деякій ПДСК визначається:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

або

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

: * якщо домножити на (-1) та циклічно зсунути осі координат.

Координатні площини – площини симетрії, початок координат – центр симетрії.

Якщо $a=b$, то гіперболоїд обертання. Отриманий обертанням гіперболи відносно Oz:

$$\begin{cases} z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1 \\ y=0 \end{cases}$$

Якщо $a=b=c$, то гіперболоїд правильний.

Переріз $z=h$ – це еліпс $\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1$, де

$a^* = a\cdot\sqrt{h^2/c^2-1}$, $b^* = b\cdot\sqrt{h^2/c^2-1}$.

Відповідно, площина $z=h$ буде перетинати поверхню лише коли $|h| \geq c$. Іншими словами, в шарі між площинами $z=-c$ і $z=c$ немає точок цієї поверхні.

В силу симетрії відносно координатної площини $z=0$, ця поверхня утворена 2 порожнинами, розташованими поза вказаним шаром.

Переріз $x=h$ та $y=h$ подібен до однопорожнинного гіперболоїда.

43. Поверхні другого порядку. Еліпсоїд. Параболоїди.

Пов. 2 порядку – поверхня, яка в ПДСК визначна алгебраїчним рівнянням 2-го порядку: $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0$

Принаймні 1 із перших коефіцієнтів $\neq 0$

квадр частина

лінійна частина

еліптичний параболоїд – поверхня, яка в деякій ПДСК виз.

$$\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z} \qquad p,q>0$$

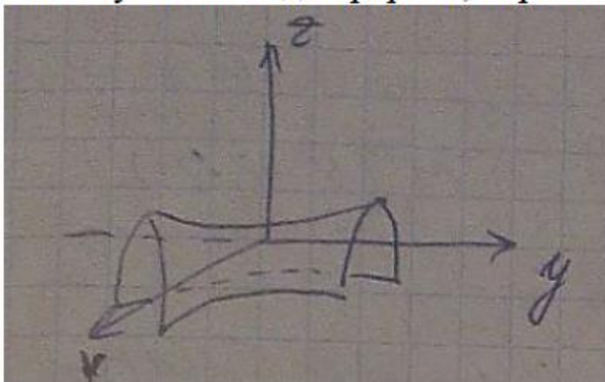
Площинами симетрії будуть пл. XZ та YZ, лінія перетину цих площин (Oz) є віссю еліптичного параболоїда.

Розташування в напівпросторі $z \geq 0$ і переріз його пл $z=h$ буде являти собою еліпс. З збільшенням h – еліпс збільш., то еліпс

15. Гіперболічний параболоїд. Метод дослідження

$-\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$=z,pq>0.

Застосуємо метод перерізів, отримаємо:



$x = h$ – гіпербола

$$x = -\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}$$

$$y = -\frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}$$

Еліпсоїд — замкнута центральна поверхня другого порядку. Еліпсоїд має центр симетрії та три осі, які називаються осями еліпсоїда. Точки перетину координатних осей з еліпсоїдом називаються його вершинами. Січення еліпсоїду площинами є еліпсами. В декартовійсистемі координат рівнянняеліпсоїдумаєвигляд: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$ Дослідження форми еліпсоїда проведемо методом паралельних перерізів. Для цьогорозглянемо перерізи данного еліпсоїда площинами, паралельними площині Oxy. Кожна з таких площин визначається рівнянням z=h, де h – довільне дійсне число, а лінія, яка утвориться і перерізі, визначається рівняннями

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$; z=h.

44. Поверхні другого порядку. Конус. Циліндри.

Пов. 2 порядку — поверхня, яка в ПДСК визначена алгебраїчним рівнянням 2-го порядку: $\underbrace{Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz}_{\text{квадр частина}}+\underbrace{Gx+Hy+Kz}_{\text{лінійна частина}}+L=0$

Принаймні 1 із перших ~~[illegible]~~ коефіцієнтів $\neq 0$

— Дійсний конус II порядку — поверхня, яка визначається: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

Такий конус утворен. прямими, що проходять через початок координат — вершина конусу.

Покажемо, що L, яка поєднує деяку т. конусу M_0 із т. $(0;0)$ повністю лежить на конусі. Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді: $\begin{cases} x=x_0 t \\ y=y_0 t \\ z=z_0 t \end{cases}$ $t\in R$

Підставляючи координати т. M_0 в рівняння конусу, отримаємо: $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=0$

Отримали тотожність $\Rightarrow$ т. M_0 лежить на конусі.

Циліндричні пов. 2-го порядку.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (еліптичні циліндри)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гіперб циліндр)

$y^2=2py$ (параболічний циліндр)

45. Спряжений оператор – визначення, умови існування.

Спряжений оператор

Нехай маємо лінійні оператори $\mathcal{A}: E^n \to E^n$. $\mathcal{B}: E^n \to E^n$ називається спряженим до оператора $\mathcal{A}$, якщо для будь-яких векторів $\bar{x}, \bar{y} \in E^n$ $(\mathcal{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \mathcal{B}\bar{y})$ ① (позначається як $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$).

Теорема 1: якщо для оператора $\mathcal{A}$ існує спряжений оператор $\mathcal{A}^*$, то він єдиний.
Доведення: припустимо, що $\exists \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ спряжених до $\mathcal{A}$ оператори.

$$(\mathcal{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \mathcal{B}_1\bar{y}) = (\bar{x}, \mathcal{B}_2\bar{y})$$
$$\Longrightarrow \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$$

46. Властивості спряженого оператора.

Властивості спряженого оператора:

1. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$
   Доведення: нехай $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ і підставимо у ①
   $$(\mathcal{A}^*\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, (\mathcal{A}^*)^*\bar{y})$$
   $$(\bar{x}, \mathcal{A}\bar{y}) = (\mathcal{A}^*\bar{x}, \bar{y})$$
   $$(\bar{x}, (\mathcal{A}^*)^*\bar{y}) = (\bar{x}, \mathcal{A}\bar{y})$$
   $$\Longrightarrow (\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$$
2. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$
3. $(\alpha\mathcal{A})^* = \alpha\mathcal{A}^*, \alpha \in \mathbb{R}$
4. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
5. $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$
6. $rang\ \mathcal{A} = rang\ \mathcal{A}^*$
7. У комплексному просторі в ортонормованому базисі спряженому оператору відповідає спряжена матриця $a_{ij}^* = \overline{a_{ij}}$

8. Властивість 3, де $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^*$

47. Матриця спряженого оператора

<u>Теорема 3.</u> Нехай $e = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ - ортонормований базис в E,

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ - матриці лінійних операторів $A, B : E \to E$ в цьому базисі.

Тоді $B = A^* \Leftrightarrow B = A^*$

Доведення

($\Rightarrow$) Дано: $B = A^*$

Тоді$b_{ij} = (B(\vec{e}_j), \vec{e}_i) =(A^*(\vec{e}_j), \vec{e}_i) =^7 (\vec{e}_j, A(\vec{e}_i)) = \overline{(A(\vec{e}_i), \vec{e}_j)} = \overline{a}_{ji} \Rightarrow B = A^*$ щ.т.д.

($\Leftarrow$) Дано: $B = A*$

Тоді $b_{ij} = \overline{b_{ji}} \Rightarrow (B(\vec{e}_j), \vec{e}_i) =b_{ij} = \overline{a}_{ji} = \overline{(A(\vec{e}_i), \vec{e}_j)} = (\vec{e}_j, A(\vec{e}_i)) \Leftrightarrow B^* =A \Leftrightarrow A^* = B$, для векторів базису!

Отже, $\forall \vec{x}, \vec{y}$ маємо:

$$(B(\vec{x}), \vec{y}) = \left(B\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\right), \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j B(\vec{e}_j), \sum_{i=1}^{n} y_i\vec{e}_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_j\vec{y}_i)\,(B(\vec{e}_j), \vec{e}_i) =$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} x_j\vec{y}_i\,(\vec{e}_j, A(\vec{e}_i)) = \sum_{i,j=1}^{n} (x_j\vec{e}_j, y_iA(\vec{e}_i)) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j, y_iA(\vec{e}_i)\right) = \sum_{j=1}^{n} (\vec{x}, y_jA(\vec{e}_j)) =$$
$$\left(\vec{x}, \sum_{j=1}^{n} y_jA(\vec{e}_j)\right) = \left(\vec{x}, \sum_{j=1}^{n} A(y_j\vec{e}_j)\right) = \left(\vec{x}, A\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\vec{e}_j\right)\right) = (\vec{x}, A(\vec{y})) \Leftrightarrow B^* = A \Leftrightarrow$$

$A^* = B$

49. Самоспряжений оператор, його властивості.

Оператор $\mathcal{A}$, що діє в Евклідовому просторі, називається самоспряженим, якщо$(\mathcal{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \mathcal{A}\bar{y})$ 3, тобто $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

<u>Теорема 3:</u> $\mathcal{A}$ є самоспряженим тоді і тільки тоді, коли його матриця в <u>ортонормованому базисі</u> є симетричною.

Доведення: <u>необхідність:</u> нехай $\mathcal{A}$ має А в ортонормованому базисі $\beta = \{\overline{e_1}, \dots, \overline{e_n}\}$, тоді згідно теореми 2 $A^* = A^T \implies A = A^T$.

<u>Достатність:</u> нехай у β матриця $A = A^T$, і так як $A \to \mathcal{A}$ і $A^* \to \mathcal{A}^*$, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$.

Властивості самоспряженого оператора:

1. Усякий самоспряжений оператор є оператором простої структури (бо його власні вектори складають базис).
2. Для будь-якого самоспряженого оператора існує ортонормований базис, що складається з його власних векторів.
3. Усі n коренів характеристичного рівняння самоспряженого оператора є дійсними.
4. Симетрична матриця завжди є такою, що діагоналізується у дійсному просторі.
5. Матриця, що зводить симетричну матрицю до діагональної, є ортогональною.

50. Унітарний оператор. Критерій унітарності.

Унітарний оператор — оператор у функціональному аналізі, добуток якого на спряжений дорівнює одиничному оператору: $UU^* = U^*U = I$.

Т. про критерій унітарності оператора

Щоб оп. U був унітарним, необх. і дост. щоб виконувалося співвідношення $U^* = U^{-1}$

Необх: нехай U – унітарний $\Rightarrow (Ux, Uy) = (x, y)$.

Тоді скористаємося означенням спряж. оператора

$(U^* Ux, y) = (x, y)$

$((U^*U - I)x, \forall y) = 0$

$\Downarrow$

$(U^*U - I)x = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{U^*U = I.}$

Дост: Нехай $U^* = U^{-1}$ тоді $(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, U^{-1} U y) = (x, y)$.

Зауваж. 1. Теорема показує еквівалентність 2-ох співвідношень $U^* = U^{-1}$ і $(Ux, Uy) = (x, y)$, тому кожне з них може бути обране у якості означення, друге тоді перетв. на критерій

Зауваження 2 в евкл. пр. умова перетв. на $U^T = U^{-1}$

51. Унітарний оператор та ортонормована система елементів.

$U^* = U^{-1}$

Т. про унітарний оп. та ортонормовану систему

Любий уніт. оп. перетв ортонорм. систему в ортонорм.+ Якщо деякий оператор перетворює ортонормований базис в ортонормований, то він — унітарний

Дов:

1) $\{e_i\}$ та $\{f_j\} = \{Ue_j\}$. $(Ue_j, Ue_i) = (e_j, e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

2) Нехай є 2 ортонорм. базиси $e_1, e_2, \dots, e_n$ та $f_1 = Ue_1, \dots, f_n = Ue_n$.

Оберемо $x \in L$ та розкладемо за базисом

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

та $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$.

$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$

$Ux = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$

$Uy = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$

Всилу лінійності оп. U

$(Ux, Uy) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$. Тобто наш оп. U-уніт.

Властивості:

1) Всі власні значення уніт. оп. за абсол. величиною $= 1$.

2) Всі вл. значення ортогонального оп. $= \pm 1$.

3) Вл. ~~числа~~ вектори, що відп. різним вл. значенням — ортогон.

4) Визначник матриці ортог. перетв, за модулем $= 1$.

Теорема Шура ~~[illegible]~~ даже самоспряг. оп.

52. Жорданів базис самоспряженого оператора.

Теорема про Жорданів базис самоспряженого оператора.

Для кожного самоспр. оп. можна збудувати базис із ортонормованих власних векторів, при чому, матриця оператора в цьому базисі буде діагон.

Дов: Нехай оп. $A: L \to L$ - є самоспряжений. $A^* = A$. $\dim L = n$.
Нехай λ_1 - вл. знач, $f_1 \neq 0$ - відповідний вл. вектор. $Af_1 = \lambda_1 f_1$. Визначимо підпростір $L_1 \equiv \Lambda(f_1)$ як лін. оболонку вектора L_1 (колінеарні вектори).
Тоді можна простір L представити у вигляді ортогональної суми підпростора L_1 та його ортогонального доповнення.
$L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$. $\dim L_1 = 1$. $\dim L_1^{\perp} = n-1$.
Очевидно, що підпростір L_1 - це власний підпростір, який інваріантний відносно оп. A.
ел. не виходять за її межі.
$x \in L_1 \Rightarrow x = k \cdot f_1$.
$Ax = A(kf_1) = kAf_1 = k\lambda_1 f_1 = \tilde{k} f_1$.
$\Rightarrow Ax \in L_1$.

Покажемо, що $L_1^{\perp}$-ортогональне теж буде інваріантним відносно оп. A. За означенням:

$x \in L_1^{\perp}$. $\underline{(x, f_1) = 0}$. $(Ax, f_1) = (x, A^* f_1) = (x, A f_1) = (x, \lambda_1 f_1) = \lambda_1 \underbrace{(x, f_1)}_{=0}$

L_1 і $L_1^{\perp}$ - два інваріантні підпростори відносно оператора A.

$A = (A|_{L_1}) \oplus (A|_{L_1^{\perp}})$

Матриця оператора A буде тоді псевдодіагональною:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A|_{L_1} & \Theta \\ \hline \Theta & A|_{L_1^{\perp}} \end{array}\right) \quad A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \Theta \\ \hline \Theta & A|_{L_1^{\perp}} \end{array}\right)$$

$(A|_{L_1^{\perp}})^* = (A|_{L_1^{\perp}})$; $\forall x, y \in L_1^{\perp}$: $((A|_{L_1^{\perp}})x, y) = (Ax, y) = (x, A^* y) =$
$= (x, Ay) = (x, (A|_{L_1^{\perp}})y)$.

Тому для цього звуження можна повторити всі раніше проведені викладки. В результаті, повторивши їх необхідну к-сть разів отримаємо розклад простору L в ортогональну суму одновимірних власних підпросторів $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$

$A = (A|_{L_1}) \oplus (A|_{L_2}) \oplus \dots \oplus (A|_{L_n})$.

Матрицю оп. A в базисі із власних векторів $f_1, f_2, \dots f_n$

буде діагональною $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Вектори $f_1, \dots f_n$ вже є ортогональними, бо належать до ортогональних підпросторів, тому для остаточного дов. теореми залишається лише віднормувати

53. Спектральне розвинення самоспряженого оператора.

Визначимо оператор P_k: $P_k x \equiv (x, e_k) e_k$.

~~Цей~~ Цей оп. назив. проектором на одновимірний підпростір, що породжується вектором e_k.

1. Оператор буде самоспряженим. $P_k^* = P_k$.
2. Будь-який натуральний степінь цього оп. буде збігатися з самим оп. $(P_k)^m = P_k$.
3. Добуток двох різних проекцій $= 0$.

$\cancel{P_k \ne P_l}$ $P_k \cdot P_l = 0$. $k \ne l$.

Оп. P_k комутує з будь-яким оп., який комутує з оператором A.

Розклад елементів ортонорм. базис:

$$x = \sum_{i=1}^{n} P_i x.$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x =$$ спектральне розвинення самоспр. оператора

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right) \cdot x$$

$$\underline{A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i}.$$

набір вл. знач. – спектр

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = I.$$

56. Квадратична форма.

Квадратичні форми

Квадратичною формою від $x_1, x_2, \dots, x_n$ є числова ф-ція: $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n$ або $L(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, (1)

Якщо x_i і a_{ij} є дійсними, то квадратична форма є дійсною.

Матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матриця квадратичної форми.

Якщо $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = (x_1 \dots x_n)$, то (1) можна записати у матричному вигляді: $L(x_1, \dots, x_n) = X^T A X$ (2).

Так як квадратична форма є числовою функцією, то вважається, що $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$, (3) бо x_i тепер числа, тому матриця A є симетричною: $a_{ij} = a_{ji}$, тому що повинно виконуватись (3) - комутативність чисел.

57. Канонічний вигляд квадратичної форми.

Канонічний вигляд квадратичної форми:

$$L(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 \quad (4)$$

Теорема: будь-яка квадратична форма зводиться до канонічного вигляду.

Доведення: так як матриця A квад. ф. є симетричною, тобто співпадає з матрицею самоспряженого оператора, яка в базисі із власних векторів, які є ортонормованими має діагональний вигляд:

$$B = T^{-1}AT = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$ де

T складається із власних векторів-стовпців.

Тоді канон. вигляд квадр. форми:

$$L(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \quad (5)$$; де

λ_i - власні числа матриці A

Один із способів зведення квадратичної форми до канонічного вигляду — метод ортогональних перетворень.

58. Метод Лагранжа приведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Метод Лагранжа

Нехай хоча б 1 з коефіцієнтів квадр. форми $a_{ii} \neq 0$.

Не звужуючи загалу, припустимо, що a_{ii} – це $a_{11} \neq 0$.

Згрупуємо члени, що містять x_1 і доповнимо їх до повного квадрату.

$$L(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \dots + 2a_{12}x_1 \cdot x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_n x_{n-1}$$

Виразимо члени, що містять x_1:

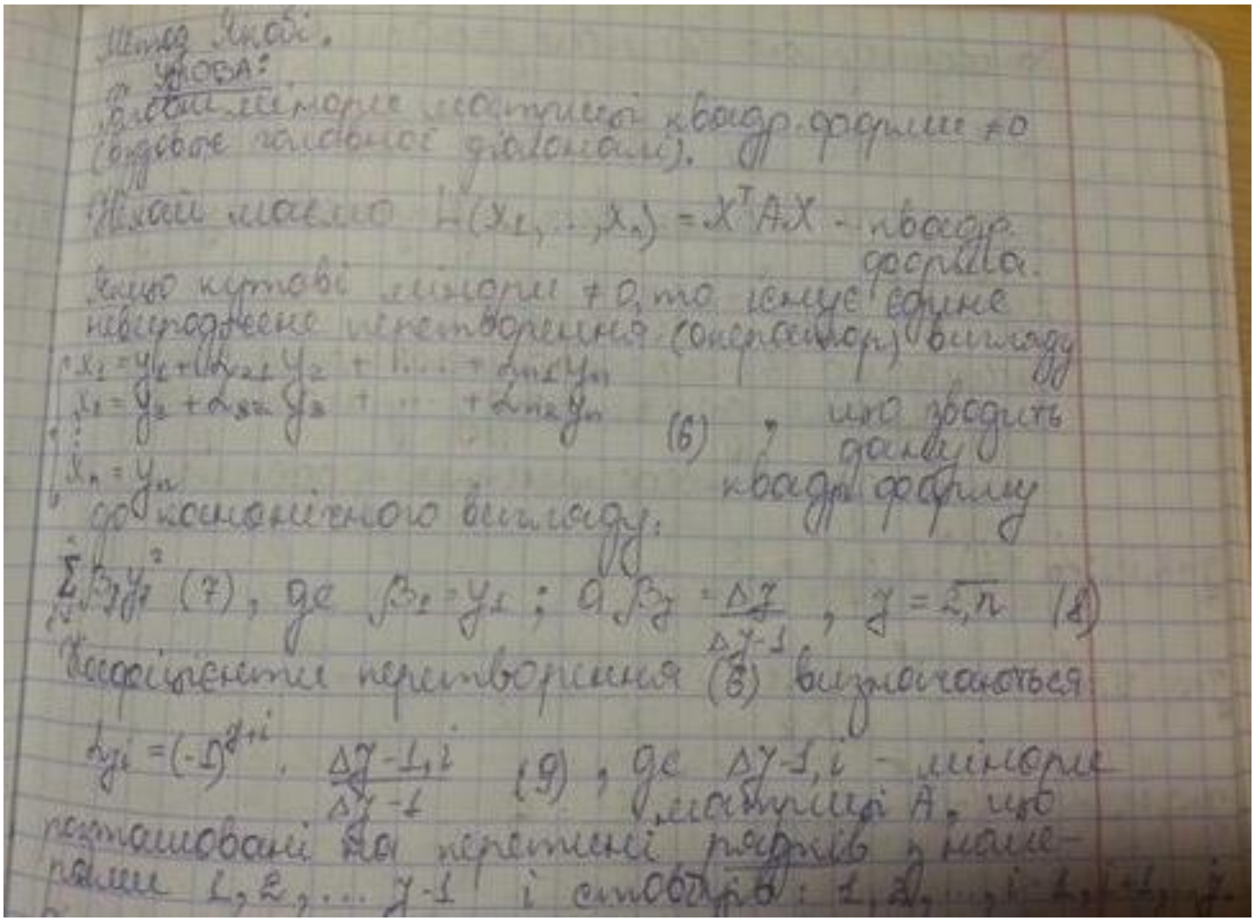
$$a_{11}\left(x_1^2 + \frac{2a_{12}}{a_{11}}x_1 \cdot x_2 + \dots + \frac{2a_{1n}}{a_{11}}x_1 \cdot x_n\right) + L(x_2, \dots, x_n) =$$

виділяємо повний квадрат:

$$= a_{11}(x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n)^2 + L(x_2, \dots, x_n)$$

Виділяємо аналогічно повний квадрат від x_2 у виразі $L(x_2, \dots, x_n)$.

59. Метод Якобі приведення квадратичної форми до канонічного вигляду.



Метод Якобі.

Умова:

Всі мінори матриці квадр. форми $\neq 0$ (кутові головної діагоналі).

Нехай маємо $H(x_1,\dots,x_n) = X^T A X$ - квадр. форма.

Якщо кутові мінори $\neq 0$, то існує єдине невироджене перетворення (оператор) вигляду

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{21} y_2 + \dots + \alpha_{n1} y_n \\ x_2 = y_2 + \alpha_{32} y_3 + \dots + \alpha_{n2} y_n \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases} \quad (6)$$

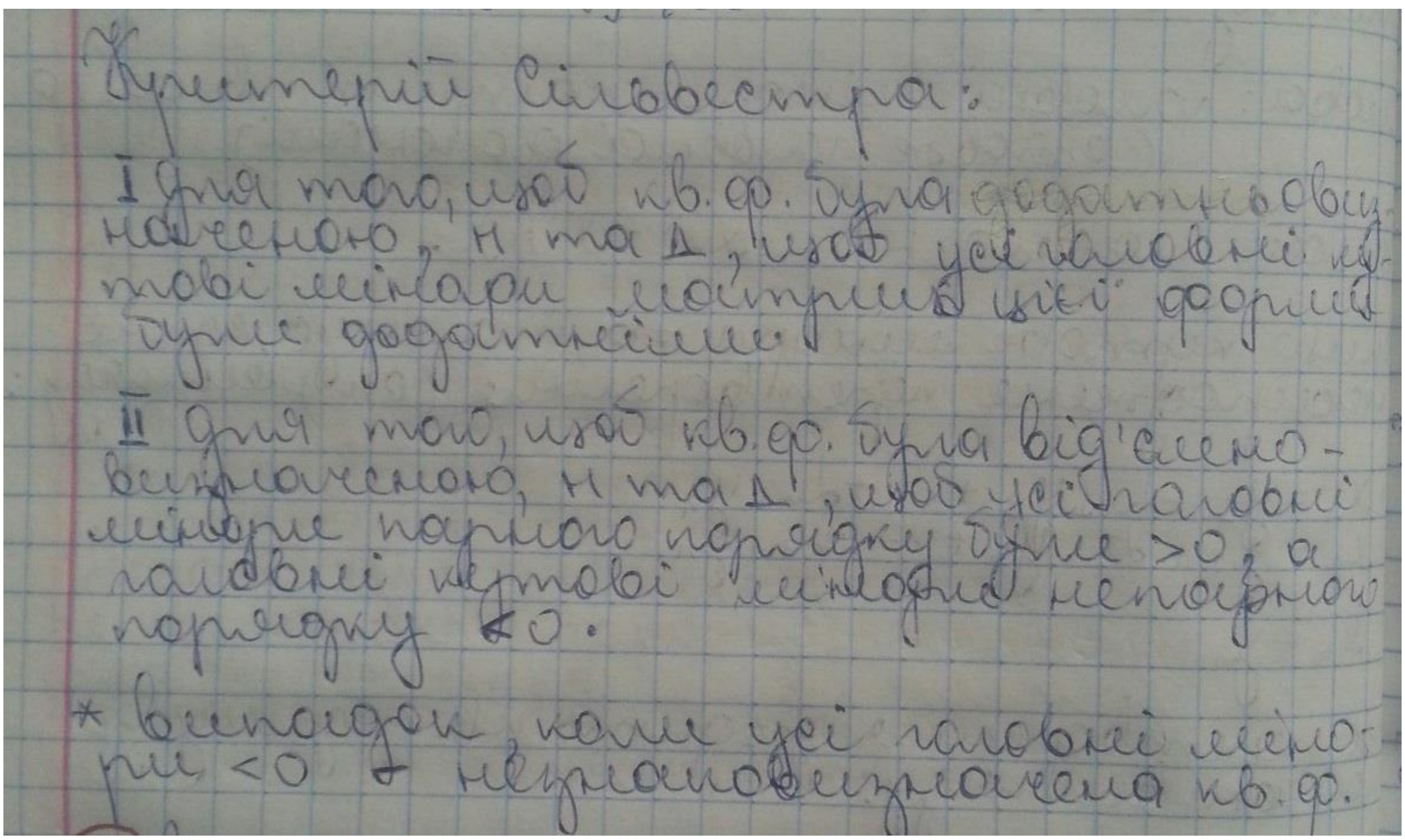
, що зводить дану квадр. форму до канонічного вигляду:

$\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j y_j^2$ (7), де $\beta_1 = y_1$; а $\beta_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}$, $j = \overline{2,n}$ (8)

Коефіцієнти перетворення (6) визначаються

$\alpha_{ji} = (-1)^{j+i} \cdot \frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}}$ (9), де $\Delta_{j-1,i}$ - мінори матриці A, що розташовані на перетині рядків з номерами $1, 2, \dots, j-1$ і стовбців: $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, j-$

60. Критерій Сільвестра знаковизначенності квадратичної форми.



Критерій Сільвестра:

I Для того, щоб кв. ф. була додатньовизначеною, н та д, щоб усі головні кутові мінори матриці цієї форми були додатніми.

II Для того, щоб кв. ф. була від'ємновизначеною, н та д, щоб усі головні мінори парного порядку були >0, а головні кутові мінори непарного порядку <0.

* випадок, коли усі головні мінори <0 – незнаковизначена кв. ф.

61. Приведення рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду.

Приведення р-ня II порядку до канонічного вигляду

Запишемо р-ня поверхні у вигляді:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + bx + cy + dz + f = 0$$

Якщо ввести позначення: $A = \{a_{ij}\}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, то записане р-ня можемо записати у вигляді:

$$(A\bar{r}, \bar{r}) + (\bar{e}, \bar{r}) + f = 0.$$

З геом. т. зору приведення поверхні до канон. вигляду містить 2 кроки:

1) поворот системи координат (СК): сумістити вісі СК та вісі поверхні

2) зміщення СК – паралельний перенос: центр поверхні співпадає із початком СК

Поворот СК з аналітичної т. з. – процес приведення кв. форми до канон. вигляду за допомогою ортогон. перетворення.

Властивість орт. перетв.: $U^{-1} = U^T$.

Знайти таке орт. перетв. U, що матриця кв. форми $\tilde{A} = U^T \cdot A \cdot U$ – $\mathrm{diag}(\lambda_i)$.

Тоді, замість початкового р-ня, отримаємо:

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2 + \tilde{b}\tilde{x} + \tilde{c}\tilde{y} + \tilde{d}\tilde{z} + f = 0.$$

Новий: $\vec{\tilde{e}} = U^T \cdot \vec{e}$. Фактично, ми виконали поворот.

Для паралельного переносу СК, потрібно виділити повний квадрат по кожній змінній $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ і зробити відповідну заміну, або змістити центр.

Отримаємо р-ня у виродженому або невиродженому вигляді.