$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^{1} t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}\,dt$$

# Розділ 9 Кратні інтеграли

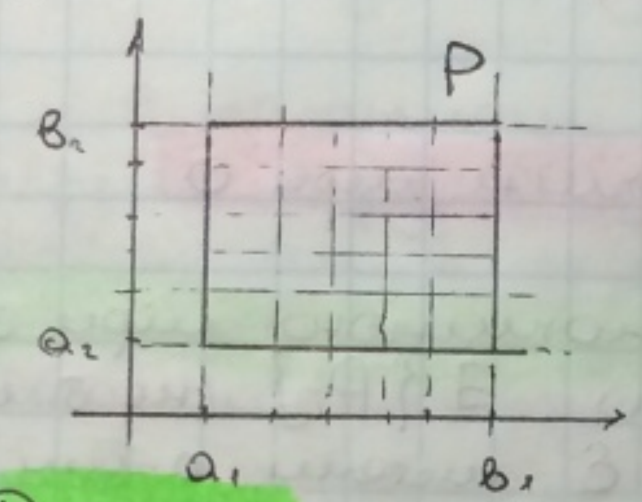
03.09.16

## Підрозділ 9.1. Інтеграл Рімана на n-вимірному проміжку

**Замкнений проміжок (координатний паралелепіпед)** у просторі $\mathbb{R}^n$ — $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i=1\dots n\}$

**Міра** (обсяг) координатного паралелепіпеда — $\mu(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$

Введена ф-ція має власт. інваріантності, адитивності та монотонності.




**Розбиття** координатних відрізків автоматично породжує розбиття коорд. паралелепіпеду. $R$

$P = \bigcup_{j=1}^{k} P_j$

**Діаметр** розбиття $R$ — максимальний з діаметрів розбиття.

**Інтегральна сума Рімана** ф-ції $f: P \to \mathbb{R}$ на проміжку $P$, що відповідає розбиттю $R$:

$$S_R = \sum_{j=1}^{k} f(\vec{t}_j)\,\mu(P_j)$$

**(n-кратний) інтеграл Рімана** — величина $I$, позначають $\int_P f(\vec{x})\,d\vec{x} = \underbrace{\int\dots\int}_{n\ \text{шт.}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0\ \forall R\ (|R|<\delta \Rightarrow |I-S_R|<\varepsilon)$, незалежно від вибору точок $t_j \in P_j$ $\Leftrightarrow \lim_{|R|\to 0} S_R$

Зазвичай 2-кратні і 3-кратні інтеграли назив. подвійними і потрійними.

$f(\vec{x}) = c$ - конст.

$$\int_P c\, d\vec{x} = \lim_{|R|\to 0} S_R = \lim_{|R|\to 0} \sum_{j=1}^{k} c \cdot \mu(P_j) = c \cdot \mu(P)$$

**Теорема 9.1** про обмеженість інтегрованої за Ріманом ф-ції на n-вимірному проміжку (необхідна умова інтегровності)

інт. ⇒ обм. ⇔ необм. ⇒ неінт.

Доведення для одновим. вип. ⇒ справедливо для багатовимірного. ■

Так, як в одновимірному випадку, можна ввести поняття верхньої та нижньої суми, інтегралу Дарбу, їх властивості, необх. та дост. умови інтегрованості обмеженої ф-ції на проміжку. Доведення аналогічні.

## Підрозділ 9.2. Властивості множин міри 0

$\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ має міру 0 чи є множиною міри 0 у розумінні Лебега, якщо $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \{P_i\}$ (не більш ніж зчисленне розбиття множини $\mathcal{E}$ системи n-вим. проміжків, сума мір котрих не перевищує $\varepsilon$) $\sum_i \mu(P_i) < \varepsilon$

В розр. Жордана - скінч. мн., Лебега - зчисл.

**Теорема 9.2** Властивості множин міри 0

а) Підмножина множини міри 0 - множина міри 0

б) Точка - множина міри 0

в) Об'єднання скінченної / зчисленної к-сті множин міри 0 - множина міри 0

г) $f: D \to \mathbb{R}^k$, де $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$; $f$ - неперервна ⇒ графік $f$ в $\mathbb{R}^n$ є множиною n-вимірної міри 0.

Доведення: а) очевидно.

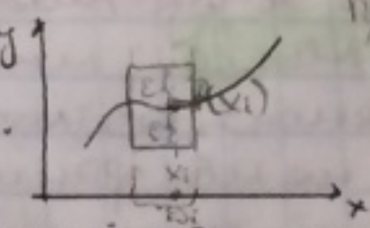
б) точку можна покрити одним проміжком міри меншої, ніж б-е зад. $\varepsilon$

в) $\mathcal{E} = \bigcup_k \mathcal{E}_k$. Якщо $\mathcal{E}_k$ - множина міри 0, то за озн. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall \mathcal{E}_k \;\; \exists \{P_i^k\} \quad \sum_i \mu(P_i^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

$$\mu(\mathcal{E}) < \sum_k \sum_i \mu(P_i^k) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^k} + \ldots = \frac{\varepsilon/2}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

Т.ч., маємо не більш ніж зчисленну к-сть не більш ніж зчисленних множин $P_i^k$, за теор. така множина є не більш ніж зчисленною.

г) Нехай $n = 2 \Rightarrow y = f(x)$



Нехай $D$ - замкнений в $\mathbb{R}^{n-1}$ проміжок. Тоді маємо непер. ф-цію на замкненому проміжку $\overset{\text{т. Кантора}}{\Rightarrow}$ ф-ція рівномірно неперервна.

$(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall x, x' \in D \;\; (d(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon))$

Візьмемо розбиття $R$, $(|R| < \delta)$ множини $D$ і на кожному проміжку розбиття $D_i$ візьмемо точку $x_i$. Побудуємо множину $\mathcal{E}_i = D_i \times [f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon] < \mu(\mathcal{E}_i) = 2\varepsilon \cdot \mu(D_i)$

$\mu(\text{гр. } f \text{ в } \mathbb{R}^n) < \sum_i 2\varepsilon \mu(D_i) = 2\varepsilon \mu(D)$. За рахунок вибору $\varepsilon$ цю величину можна зробити як завгодно малою.

Нехай $D$ - незамкнений в $\mathbb{R}^{n-1}$ проміжок. Тоді завжди можна побудувати замкнений проміжок чи об'єднання (скінч. або зчисл.) замкн. проміжків, що покриває мн. $D$. ■

В загальному випадку, якщо множина має міру 0 в розр. Жордана, то вона має міру 0 в розр. Лебега, але в протилежний бік - не завжди.

Н-д: множина рац. точок на $[0,1]$ має 0 в розр. Лебега, але не в розр. Жордана.

Якщо множина - компакт, то міри Жордана і Лебега співпадають.

Якщо якась властивість викон. в б-е точці $\mathcal{E}$ окрім, можливо, точок множини міри 0, то ця властивість має місце майже скрізь на $\mathcal{E}$.

**Теорема 9.3** Критерій Лебега

Ф-ція $f$ інт. за Ріманом на n-вим. проміжку тоді і тільки тоді, коли вона обмежена на ньому і неперервна майже у всіх його точках.

□

Ф-ція Діріхле не є інт.

## Підрозділ 9.3 Інтеграл по множині

$\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ - допустима множина, якщо вона

$f(\vec{x}) = c$ - конст.

$$\int_P c\, d\vec{x} = \lim_{|R|\to 0} S_R = \lim_{|R|\to 0} \sum_{j=1}^{k} c \cdot \mu(P_j) = c \cdot \mu(P)$$

**Теорема 9.1** про обмеженість інтегрованої за Ріманом ф-ції на n-вимірному проміжку (необхідна умова інтегровності)

інт. ⇒ обм. ⇔ необм. ⇒ неінт.

Доведення для одновим. вип. ⇒ справедливо для багатовимірного. ∎

Так, як в одновимірному випадку, можна ввести поняття верхньої та нижньої суми, інтегралу Дарбу, їх властивості, необх. та дост. умови інтегрованості обмеженої ф-ції на проміжку, доведення аналогічні.

## Підрозділ 9.2. Властивості множин міри 0

$\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ має міру 0 чи є множиною міри 0 у розумінні Лебега, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{P_i\}$ (не більше ніж зчисленне розбиття множини $\mathcal{E}$ системи n-вим. проміжків, сума мір котрих не перевищує $\varepsilon$) $\sum_i \mu(P_i) < \varepsilon$

В розум. Жордана - скінч. мн., Лебега - зчисл.

**Теорема 9.2** Властивості множин міри 0

а) Підмножина множини міри 0 - множина міри 0

б) Точка - множина міри 0

в) Об'єднання скінченної /зчисленної к-сті множин міри 0 - множина міри 0

г) $f: D \to \mathbb{R}^n$, де $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$; $f$ - неперервна ⇒ графік $f$ в $\mathbb{R}^n$ є множиною n-вимірної міри 0.

Доведення: а) очевидно

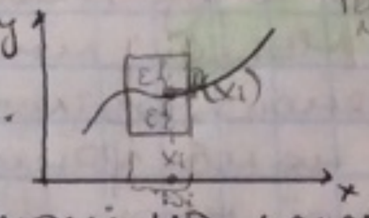
б) точку можна покрити одним проміжком міри меншої, ніж б-я зад. $\varepsilon$

в) $\mathcal{E} = \bigcup_k \mathcal{E}_k$. Якщо $\mathcal{E}_k$ - множина міри 0, то за озн. $\forall \varepsilon > 0 \ \forall \mathcal{E}_k \ \exists \{P_i^k\}_{\mathcal{E}}$ $\sum_i \mu(P_i^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$

$$\mu(\mathcal{E}) < \sum_k \sum_i \mu(P_i^k) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^k} + \dots = \frac{\varepsilon/2}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

Т.ч., маємо не більше ніж зчисленну к-сть не більше ніж зчисленних множин $P_i^k$, за теор. така множина є не більш ніж зчисленною.

г) Нехай $n = 2 \Rightarrow y = f(x)$




Площа мн-и - 0

n=3 об'єм плоскої фігури - 0

Нехай $D$ - замкнений в $\mathbb{R}^{n-1}$ проміжок. Тоді маємо непер. ф-цію на замкненому проміжку $\overset{\text{т. Кантора}}{\Rightarrow}$ ф-ція рівномірно неперервна.

$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall x, x' \in D \ (d(x, x') < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon))$

Візьмемо розбиття $R$, $(|R| < \delta)$ множини $D$ і на кожному проміжку розбиття $D_i$ візьмемо точку $x_i$. Побудуємо множину $\mathcal{E}_i = D_i \times [f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon] < \mu(\mathcal{E}_i) = 2\varepsilon \cdot \mu(D_i)$

$\mu(\text{гр. } f \text{ в } \mathbb{R}^n) < \sum_i 2\varepsilon \mu(D_i) = 2\varepsilon \mu(D)$. За рахунок вибору $\varepsilon$ цю величину можна зробити як завгодно малою.

Нехай $D$ - незамкнений в $\mathbb{R}^{n-1}$ проміжок. Тоді завжди можна побудувати замкнений проміжок чи об'єднання (скінч. або зчисл.) замкн. проміжків, що покриває мн. $D$. ∎

В загальному випадку, якщо множина має міру 0 в розу. Жордана, то вона має міру 0 в розу. Лебега, але в протилежний бік - не завжди.

Н-д: множина раці. точок на $[0, 1]$ має 0 в розу. Лебега, але не в розу.

Якщо множина - компакт, то міри Жордана і Лебега співпадають.

Якщо якась властивість викон. в б-я точці $\mathcal{E}$ окрім, можливо, точок множини міри 0, то ця властивість має місце майже скрізь на $\mathcal{E}$.

**Теорема 9.3** Критерій Лебега

Ф-ція $f$ інт. за Ріманом на n-вим. проміжку тоді і тільки тоді, коли вона обмежена на ньому і неперервна майже у всіх його точках.

□

Ф-ція Діріхле не є інт.

## Підрозділ 9.3 Інтеграл по множині

$\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ - допустима множина, якщо вона обмежена в цьому просторі і її межа є множиною міри 0 в розд. Лебега. Н-р: Б-я Жорданова плоска фігура.

**Межа** – множина точок межі, тобто, вона є замкненою, оскільки ні внутрішні, ні зовнішні точки не м.б. граничними для межі. Тоді межа дозволеної множини є і обмеженою, і замкненою, тобто, є компактом.

Оскільки для б-я дозволених множин $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ з $\mathbb{R}^n$ межа їх об'єднання, перетину чи різниці є підмножиною об'єднання їх меж, то об., пер. і різн. дозволених множин – дозволена множина.

10.08.16 **Характеристична ф-ція множини** $\mathcal{E}$

$$\chi_{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathcal{E} \\ 0, \text{ якщо } x \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

Ця ф-ція має розриви на межі множини $\mathcal{E}$. І тому, якщо $\mathcal{E}$ – дозволена, її характеристична ф-ція неперервна майже скрізь.

Нехай $\mathcal{E}$ – дозволена. Побудуємо $f\chi_{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ якщо } x \in \mathcal{E} \\ 0, \text{ якщо } x \notin \mathcal{E} \end{cases}$

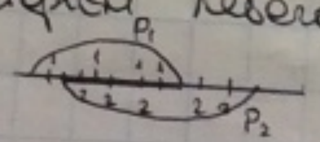
**Інтеграл ф-ції $f$ на множині $\mathcal{E}$** $\int\limits_{\mathcal{E}} f\,dx \equiv \int\limits_{P \supset \mathcal{E}} f\chi_{\mathcal{E}}(x)\,dx$

де $P$ – проміжок, що містить $\mathcal{E}$.

**Теорема 9.4.** Якщо $P_1, P_2$ – два різні проміжки, кожен з котрих містить множину $\mathcal{E}$, то інтеграли $\int\limits_{P_1 \supset \mathcal{E}} f\chi_{\mathcal{E}}(x)\,dx$, $\int\limits_{P_2 \supset \mathcal{E}} f\chi_{\mathcal{E}}(x)\,dx$ еквівалентні, тобто, вони існують або не існують одночасно, а якщо існують, то їхні значення співпадають.

Доведення: $P \equiv P_1 \cap P_2$. $f\chi_{\mathcal{E}}(x)$ розривна в точках розриву самої ф-ції $f$ на мн. $\mathcal{E}$ і на межі множини $\mathcal{E}$, причому всі ці точки розриву належать $P \cap P_1 \cap P_2$.

Отже, за критерієм Лебега $f\chi_{\mathcal{E}}$ інтегрована або неінт. на $P_1, P_2, P$.




Будемо розглядати лише ті розбиття $P$, які є продовженням розбиттів $P_1, P_2$. Будуємо інтегральну суму Рімана по цьому розбиттю.

Побудована інт. сума Рімана – її доданки поза проміжком $= 0 \Rightarrow$ інт. суми Рімана для цих проміжків співпадають $\Rightarrow$ співпадають їх границі ■

Підрозділ 9.4. **Властивості кратного інтегралу**

**① Лінійність.**

Покажемо, що якщо $f, g$ – інт. на дозволеній мн. $\mathcal{E}$, то для б-я чисел $\alpha, \beta$ справедлива рівність

$$\int\limits_{\mathcal{E}} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int\limits_{\mathcal{E}} f(x)\,dx + \beta \int\limits_{\mathcal{E}} g(x)\,dx.$$

Доведення: 1) Очевидно, що лін. комб. має не більше точок розриву, ніж ф-ції $f$ і $g$, тобто міра точок розриву $= 0$.

2) Відповідна рівність очевидно виконується для інтегральних сум Рімана, тому достатньо взяти граничний перехід при $|R| \to 0$.

**② Адитивність**

$$\int\limits_{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathcal{E}_1} f(x)g(x) + \int\limits_{\mathcal{E}_2} f(x)\,dx, \text{ де } \mu(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = 0$$

Доведення: 1) Оскільки об'єднання та перетин двох дозволених множин – дозволена множина, то інт. від $f$ по $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ існують або не існують одночасно (за критерієм Лебега)

2) За означенням, $\int\limits_{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2} f(x)\,dx = \int\limits_{P \supset \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2} f\chi_{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2}(x)\,dx \ominus$

$\chi_{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2} = \chi_{\mathcal{E}_1} + \chi_{\mathcal{E}_2} - \chi_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}$

$\ominus \underbrace{\int\limits_P f\chi_{\mathcal{E}_1}(x)\,dx}_{= \int_{\mathcal{E}_1} f(x)dx} + \underbrace{\int\limits_P f\chi_{\mathcal{E}_2}(x)\,dx}_{= \int_{\mathcal{E}_2} f(x)dx} - \int\limits_P f\chi_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}(x)\,dx$

$\int\limits_P f\chi_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}(x)\,dx = \lim\limits_{|R| \to 0} \sum\limits_i f\chi_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}(t_i)\mu(P_i) \ominus$

Ф-ція $f\chi_{\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2}$ обмежена → візьмемо її sup і винесемо за ліміт.

$\ominus 0$, оск. або сама ф-ція $= 0$, або за ум. $\mu(P_1 \cap P_2) = 0$

**③ Монотонність**

Якщо $f, g$ – інт. на дозволеній мн. $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ і $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in \mathcal{E}$, то $\int\limits_{\mathcal{E}} f(x)\,dx \le \int\limits_{\mathcal{E}} g(x)\,dx$

<u>Наслідок 1.</u> Якщо $g$ – інт. на дозв. мн. $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$ і $g(x) \ge 0$ $\forall x \in \mathcal{E} \Rightarrow$ $\Rightarrow \int\limits_{\mathcal{E}} g(x)\,dx \ge 0$

Доведення н1: $f(x) = 0$.

<u>Наслідок 2.</u> Нехай для $g$ викон. всі умови н1, $\exists t \in \mathcal{E}$, $g(t) > 0$, то $\int\limits_{\mathcal{E}} g(x)\,dx > 0$

Доведення: Знайдеться окіл, де $g(x) > 0$

← далі

④ **Оцінка інтегралу**

Якщо $f$-інт на $E\subset\mathbb{R}^n \Rightarrow |f|$-інт. на $E\subset\mathbb{R}^n$ і $\left|\int_E f(x)dx\right| \le \int_E |f(x)|dx$

⑤ **Теорема про середнє**

Якщо $f, g$ - інт. на дозволеній мн. $E\subset\mathbb{R}^n$, $g(x)\ge 0$ $\forall x\in E$, то $\int_E f(x)g(x)dx = \Theta\int_E g(x)dx$, де $\underset{\inf_E f(x)}{m} \le \Theta \le \underset{\sup_E f(x)}{M}$

<u>Наслідок 1</u>. Якщо в умові теореми про середнє $f$ - неперервна на $E$, а множина $E$ - зв'язна, то $\int_E f(x)g(x)dx = f(t)\int_E g(x)dx$, де $t\in E$.

Доведення: Ф-ція $f$ приймає всі знач. між $m$ та $M$.

$\Theta = f(t)$ (теорема про проміжне значення).

$f(x): E\to\mathbb{R}$, $f(x)$-неперервна на зв'язній дозволеній множині $E$

<u>Наслідок 2</u>: Якщо в НЛ $g(x)=1$, то $\int_E f(x)dx = f(t)\mu(E)$

За допомогою критерію Лебега доводимо 3, 4, 5 власт.: з інт. $f$ легко показати інт $|f|$, а з інт. $f, g$ - інт. їх добутку. Самі рівності, нерівності формулюються для інт. суми Рімана, де вони очевидні, а потім взяти граничний перехід при $|R|\to 0$ ∎

## Підрозділ 9.5. Правила обчислення кратного інтегралу

### Теорема 9.5 Фубіні про зведення кратного інтегралу до повторного.

Нехай $X\times Y\subset\mathbb{R}^{m+n}$, де $X\subset\mathbb{R}^m$, $Y\subset\mathbb{R}^n$. Окрім того, нехай $f: X\times Y\to\mathbb{R}$ - інтегрована на $X\times Y$. Тоді $\underbrace{\int_{X\times Y} f(x,y)dxdy}_{\text{кратний інт.}} = \underbrace{\int_X dx\int_Y f(x,y)dy}_{\text{повторний інт.}} = \int_Y dy\int_X f(x,y)dx$ $\quad\left(\int_X dx\int_Y f(x,y)dy = \int_X\left(\int_Y f(x,y)dy\right)dx\right)$

Доведення. $F(x) \equiv \int_Y f(x,y)dy$. Фіксуємо $x$ і беремо інтеграл, потім беремо інтеграл від ф-ту, тобто, від $F(x)$. Якщо для якогось $x$ внутрішній інтеграл не існує, заміняємо внутрішній інтеграл на верхній/нижній інтеграл Дарбу або б-е значення між ними.

$$\underline{S}_R(t) = \sum_{i,j}\inf_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)\underbrace{\mu(X_i\times Y_j)}_{\mu(X_i)\times\mu(Y_j)} \le \sum_i\inf_{x\in X_i}\left(\sum_j\inf_{y\in Y_j} f(x,y)\mu(Y_j)\right)\cdot\mu(X_i) \le$$

$$\le\sum_i\inf_{x\in X_i}\left(\underline{\int_Y} f(x,y)dy\right)\mu(X_i) \le \sum_i\inf_{x\in X_i} F(x)\mu(X_i) \le \sum_i\sup_{x\in X_i} F(x)\mu(X_i) \le$$

$$\le\sum_i\sup_{x\in X_i}\left(\overline{\int_Y} f(x,y)dy\right)\mu(X_i) \le \sum_i\sup_{x\in X_i}\left(\sum_j\sup_{y\in Y_j} f(x,y)\mu(Y_j)\right)\cdot\mu(X_i) \le$$

$$\le\sum_{i,j}\sup_{\substack{x\in X_i\\ y\in Y_j}} f(x,y)\underbrace{\mu(Y_j)\mu(X_i)}_{\mu(X_i\times Y_j)} = \overline{S}_R(t)$$

заміна

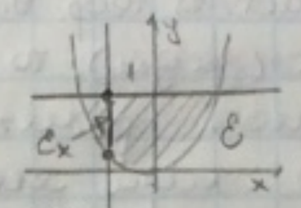
17.09.16

<u>Наслідок 1</u>. Якщо $P\subset\mathbb{R}^n$ $P=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$, то $\int_P f(x)dx = \int_{a_n}^{b_n}dx_n\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}dx_{n-1}\ldots\int_{a_1}^{b_1}f(x)dx$

<u>Наслідок 2</u>. Якщо $f$ інтегрована за Ріманом на множині $E=\{(\vec{x},y)\in\mathbb{R}^n \mid \vec{x}\in D\subset\mathbb{R}^{n-1}\ \&\ \varphi_1(\vec{x})\le y\le\varphi_2(\vec{x})\}$, де $D$ - обмежена в $\mathbb{R}^{n-1}$ множина, то $\int_E f(\vec{x},y)d\vec{x}dy = \int_D d\vec{x}\int_{\varphi_1(\vec{x})}^{\varphi_2(\vec{x})} f(\vec{x},y)dy$

Доведення:

$E$: $\underset{\varphi_1(x)}{y=x^2}$ & $\underset{\varphi_2(x)}{y=1}$



$$E_x = \begin{cases} y\in\mathbb{R} \mid \varphi_1(\vec{x})\le y\le\varphi_2(\vec{x}), & \text{якщо } x\in D\\ \varnothing, & \text{якщо } x\notin D\end{cases}$$

$(\lambda_E = \lambda_D\cdot\lambda_{E_x})$

$$\int_E f(\vec{x},y)d\vec{x}dy = \int_{P\subset E} f\lambda_E d\vec{x}dy = \int_{P_x\subset D}d\vec{x}\int_{P_y\subset E_x} f\lambda_E dy = \int_{P_x}\left(\int_{\varphi_1(\vec{x})}^{\varphi_2(\vec{x})} f\lambda_E dy\right)d\vec{x} =$$

$$= \int_D dx\int_{\varphi_1(\vec{x})}^{\varphi_2(\vec{x})} f(\vec{x},y)dy \quad ∎$$

**Мірою** (Жордана) чи об'ємом обмеженої множини $E$ в просторі $\mathbb{R}^n$ назив. $\mu(E) = \int_E 1\,d\mu$, якщо цей інтеграл існує.

$$\mu(E) = \int_E 1\,\underbrace{d\mu}_{\equiv dx} = \int_{P\subset E}\lambda_E\,\underbrace{d\mu}_{\equiv dx} \ominus$$

Даний інтеграл існує, згідно критерію Лебега, якщо підінт. ф-ція обмежена (очевидно) і якщо неперервна майже скрізь. Точки розриву $\lambda_E$ - межа області, тому введена таким чином міра існує лише для дозволених множин.

$$\ominus \underbrace{\underline{\int_{P\subset E}}\lambda_E dx}_{\substack{\text{нижній інт. Дарбу}\\ \Sigma 1dx}} = \underbrace{\overline{\int_{P\subset E}}\lambda_E dx}_{\substack{\text{верхній інт. Дарбу}\\ \Sigma 1dx}}$$

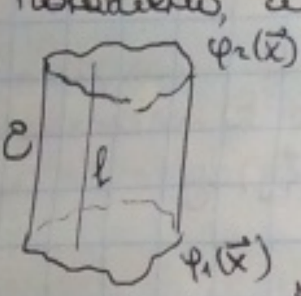
<u>Наслідок 3</u> Якщо в умовах наслідку 2 $D$ - вимірна за Жорд., $\varphi_1$ і $\varphi_2$ - неперервні, то $E$ - вимірна, то її можна підрахувати:

$\mu(E) = \int_D(\varphi_2(x)-\varphi_1(x))dx$

Доведення. $\mu(E) = \int_E 1dx =$ (за 2 насл. цей інтеграл предст. як повторний) $\ominus$

$$= \int_D dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1 \cdot dy = \int_D (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))\, dx$$

Показано, що $\mathcal{E}$ - вимірна множина.




Залиш. показати, що межа множини $\mathcal{E}$ має міру 0. Ця межа скл. з 3 частин: $\varphi_1(\vec{x})$, $\varphi_2(\vec{x})$, цил. поверхня.

Верхня ($\varphi_2(\vec{x})$) і нижня ($\varphi_1(\vec{x})$) межа множини $\mathcal{E}$ мають міру 0 згідно власт. г) теор. 9.2.

Якщо множина $D$ вимірна (за ум.), то її межа має міру 0, тобто, знайдеться така сукупність проміжків, яка покриває межу множини $D$ і міра якої не перевищує неск. малу величину $\varepsilon/l$. Тоді міра бокової поверхні множини $\mathcal{E}$ $\mu(\mathcal{E}_{бок.}) = l\,\mu(D_{межі}) < \varepsilon$. Отже, множина $\mathcal{E}$ - вимірна (її межа має міру 0). ■

Приклад 1.

$\mathcal{E} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le r^2\}$

$$\mu(\mathcal{E}) = \int_{[-r;r]} \Big(\underbrace{\sqrt{r^2-x^2}}_{=\varphi_2(x)} - (\overbrace{-\sqrt{r^2-x^2}}^{=\varphi_1(x)})\Big)\, dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx =$$

$$= (x = r\cos\varphi) = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{r^2 - r^2\cos^2\varphi} \cdot r\sin\varphi\, d\varphi = \ldots$$

Приклад 2.

$\mathcal{E} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$

$$\mu(\mathcal{E}) = \int_{D:\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}} \sqrt{r^2-x^2-y^2} - (-\sqrt{r^2-x^2-y^2})\, dx\, dy = 2\iint_{x^2+y^2\le r^2} \sqrt{r^2-x^2-y^2}\, dx\, dy = \ldots$$

**Носій** ф-ції $f: D \to \mathbb{R}$, де $D \subset \mathbb{R}^n$ - замикання в області $D$ множини тих точок, де $f(x) \ne 0$.

**Теорема 9.6** про заміну змінних в кратному інтегралі.
Нехай $\varphi: D_t \to D_x$ - неперервно диференційована разом зі своїм оберненим $\varphi^{-1}$ взаємнооднозначне відображення обмеженої відкритої множини $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на таку ж $D_x \subset \mathbb{R}^n$, крім того, нехай $f$ - інтегрована за Ріманом на мн. $D_x$, а її носій - компакт в просторі $D_t$. Тоді $(f\circ\varphi)\cdot|\det\varphi'|$ - інтегрована на $D_t$ і має місце формула

$$\int_{D_x = f(D_t)} f(x)\,dx = \int_{D_t} (f\circ\varphi(t)) \cdot |\det\varphi'(t)|\, dt,$$

де $\det\varphi'$ - якобіан відображення $\varphi$ в точці $t$.

$$\det\varphi'(t) \equiv \frac{D(x_1 \ldots x_n)}{D(t_1 \ldots t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

Доведення (за методом мат. інд.).

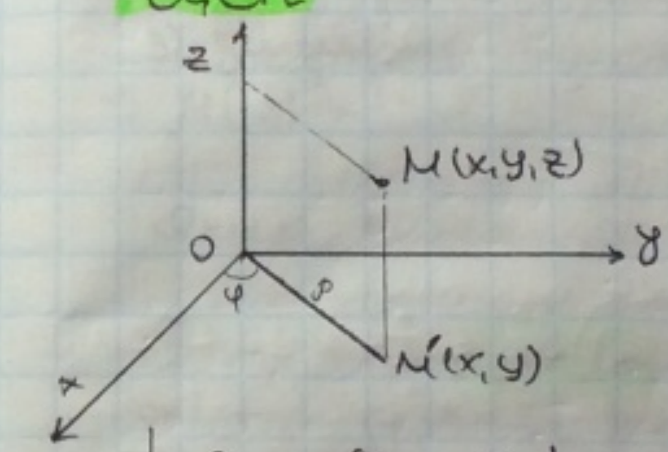
База інд: $n=1$ - формула заміни змінних в одновимірному інтегралі (ф-ла заміни змінної). $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$.

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx, & \text{якщо } a \le b \\ -\int_a^b f(x)\,dx, & \text{якщо } a > b \end{cases}$$, тому модуль.

Інд. перехід без доведення. ■

<u>Зауваження</u>. Заміна змінних, яка використ. на практиці, може не задовільняти умовам теореми 9.6. Н-д, може бути порушена взаємнооднозн. або непер. диф. Але якщо це особл. має місце на множині міри 0, то теорема 9.6 справедлива.

**ЦСК**




$(x,y,z) \to (\rho, \varphi, z)$

$x = \rho\cos\varphi \qquad 0 \le \rho < +\infty$

$y = \rho\sin\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$z = z \qquad -\infty < z < +\infty$

$\rho^2 = x^2+y^2$

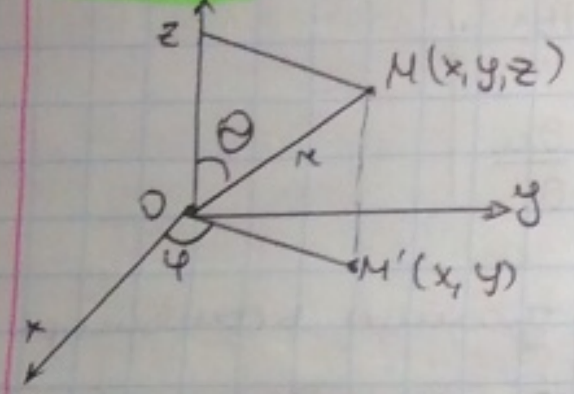
$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = const$ - циліндр

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Для полярних координат якобіан такий же, як і для циліндричних

## ССК




$$(x,y,z) \to (r, \varphi, \theta)$$

$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad 0 \le r < +\infty$

$z = r\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$

$r^2 = x^2+y^2+z^2 = const$ - сфера

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta\left(-r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right) -$$
$$- r\sin\theta\left(r\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) =$$
$$= -r^2\sin\theta\cos^2\theta - r^2\sin^3\theta = -r^2\sin\theta$$

# Розділ 10. Елементи інтеграла Лебега на абстрактній множині

24.09.16

**σ-кільце** – непорожня система множин T, яка задовільняє вимогам: 1) $A\in T$ & $B\in T \Rightarrow (A-B)\in T$
2) $A_1, A_2, \dots, A_n \in T \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in T$

Множина $\mathcal{E}\in T$ – **одиниця** системи множин T, якщо $\mathcal{E}\in T \quad \forall A\in T \quad A\cap\mathcal{E} = A$

**σ-алгебра** – σ-кільце з одиницею

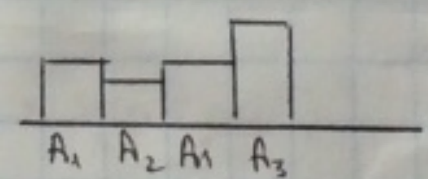
Пара, яка скл. з $\{X, T\}$ – **вимірний простір**, а елементи цієї σ-алгебри – **вимірні множини**.

**Міра μ** – числова невід'ємна зліченно адитивна ф-ція, яка визначена на вимірному просторі $\{X,T\}$.
1) невід'ємна: $\mu(A)\ge 0 \quad \forall A\in T$
2) числова: $\mu: T\to R$
3) зліченно адитивна: $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in T$ (вимірні множ.), $A_i\cap A_j = \varnothing,\ i\ne j$
$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

Якщо викон. лише 2 і 3 власт., то ця ф-ція – **заряд**.

Ф-ція f – **проста** (ступінчата), якщо вона приймає скінченну к-сть різних значень $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$, причому множини $A_k$, на яких вона приймає ці значення $A_k = \{x\in X \mid f(x) = f^{(k)}\}$ є вимірними.

$$\int_X f\,d\mu \equiv \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\mu(A_k)$$ – **інтеграл Лебега** від простої ф-ції f за мірою μ.




Нехай існує послідовність простих ф-цій $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. $\quad \int_X f\,d\mu \equiv \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$

інтегровна ф-ція

Інтеграл по вимірній множині $\int_A f\,d\mu = \int_X (f\cdot\chi_A)\,d\mu$, де $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x\in A \\ 0, & \text{якщо } x\notin A \end{cases}$

Ф-ція $f$ - щільність заряду $\omega$ відносно міри $\mu$ і познач. $\frac{d\omega}{d\mu}$, якщо $\forall A \in T$ $\inf\limits_A f \le \frac{\omega(A)}{\mu(A)} \le \sup\limits_A f$

## Теорема 10.1 Радона - Никодима

Нехай $\beta \subset T$ - така система вимірних множин, що $\forall A \in T$ $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ з цієї системи $\beta$, причому вони взаємно не перетинаються ($A_i \cap A_j = \varnothing$ $\forall i \ne j$) і нехай інтегровна ф-ція $f$ - щільність заряду $\omega$ відносно міри $\mu$ $f = \frac{d\omega}{d\mu}$. Тоді $\forall A \in T$ її заряд можна підрахувати як інтеграл Лебега: $\omega(A) = \int\limits_A f d\mu$

Доведення. За умовою ф-ція $f$ - інтегровна: $\exists \{f_n\}$ - прості ф-ції, $f_n \underset{x}{\rightrightarrows} f$. За означ. рівном. зб.:

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) - \frac{1}{n} < f(x) \le f_n(x) + \frac{1}{n}$

Нехай на $A_k$ $f(x) = f^{(k)}$ $\inf\limits_{A_k} f \ge f_n^{(k)} - \frac{1}{n}$

$\sup\limits_{A_k} f \le f_n^{(k)} + \frac{1}{n}$

$\left(f_n^{(k)} - \frac{1}{n}\right)\mu(A_k) \le \omega(A_k) \le \left(f_n^{(k)} + \frac{1}{n}\right)\mu(A_k)$ $\int\limits_{A_k} f_n d\mu = f_n^{(k)} \mu(A_k)$

$\int\limits_{A_k} f_n d\mu - \frac{1}{n}\mu(A_k) \le \omega(A_k) \le \int\limits_{A_k} f_n d\mu + \frac{1}{n}\mu(A_k)$

$\forall k = 1, 2, \ldots, m$

Покажемо, що інтеграл Лебега є адитивним.

$\int\limits_{\substack{A \cup B \\ A \cap B = \varnothing}} f d\mu = \int\limits_X (f \cdot \chi_{A \cup B}) d\mu = \int\limits_X (f(\chi_A + \chi_B)) d\mu = \int\limits_X f \cdot \chi_A d\mu + \int\limits_X f \cdot \chi_B d\mu =$

$= \int\limits_A f d\mu + \int\limits_B f d\mu.$

$\int\limits_A f_n d\mu - \frac{1}{n}\mu(A) \le \omega(A) \le \int\limits_A f_n d\mu + \frac{1}{n}\mu(A)$

$\left|\omega(A) - \int\limits_A f_n d\mu\right| \le \frac{1}{n}\mu(A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\omega(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A f_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X (\underbrace{\underset{\text{проста}}{f_n} \cdot \underset{\text{характ.}}{\chi_A}}_{\text{проста}}) d\mu = \int\limits_X \lim\limits_{n\to\infty} (f_n \cdot \chi_A) d\mu =$

$= \int\limits_A \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\mu = \int\limits_A f d\mu$ ■

511-19

28.09.16

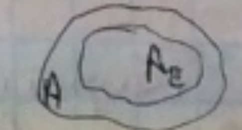
Сім'я множин $\beta$ з $\sigma$-алгебри $T$ $\beta \subset T$ $\mu$-породжуюча, якщо для будь-якої вимірної множини $A$ і для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A_\varepsilon = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, де $A_k \cap A_l = \varnothing$, $k \ne l$, $A_k \in \beta$, що $A_\varepsilon \subset A$ і $\mu(A - A_\varepsilon) < \varepsilon$

## Теорема 10.2 Радона - Никодима

Нехай заряд $\omega: T \to \mathbb{R}$ такий, що для нього існує стала $C > 0$, $|\omega(B)| \le C\mu(B)$ $\forall B \in T$ і нехай існує така інтегровна функція $f$, що $\forall B \in \beta$, де $\beta$ - фіксована $\mu$-породжуюча сім'я множин, $\inf\limits_B f \cdot \mu(B) \le \omega(B) \le \sup\limits_B f \cdot \mu(B)$, то $\omega(A) = \int\limits_A \frac{d\omega}{d\mu} d\mu$ $\forall A \in T$.

Доведення: Оск. $B \in \beta$. $A_k \in \beta$.

$B = A_1$
$B = A_2$
$\ldots$
$B = A_m$



$\inf\limits_A f \cdot \mu(A_\varepsilon) \le \omega(A_\varepsilon) \le \sup\limits_A f \cdot \mu(A_\varepsilon)$ $\left(\inf\limits_A f \le \inf\limits_{A_m} f,\ \sup\limits_{A_m} f_1 \le \sup\limits_A f\right)$

- $\inf\limits_A f \mu(A) \overset{\pm \mu(A_\varepsilon)}{=} \inf\limits_A f(\mu(A) - \mu(A_\varepsilon)) + \inf\limits_A f \mu(A_\varepsilon) \circledcirc$

$A = A_\varepsilon \cup (A - A_\varepsilon)$

$\omega(A) = \omega(A_\varepsilon) + \omega(A - A_\varepsilon)$

$\mu(A) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(A - A_\varepsilon)$

$\circledcirc$ $\inf\limits_A f \mu(A - A_\varepsilon) + \inf\limits_A f \mu(A_\varepsilon) < \varepsilon \cdot \inf\limits_A f + \omega(A_\varepsilon) = \varepsilon \cdot \inf\limits_A f + \omega(A) -$

$- \omega(A - A_\varepsilon) \le \varepsilon \cdot \inf\limits_A f + \omega(A) + \varphi_1(\varepsilon)$

$\varphi_1(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega(A - A_\varepsilon) \ge 0 \\ C\varepsilon, & \text{якщо } \omega(A - A_\varepsilon) < 0 \end{cases}$ (з умови $|\omega(B)| \le C \cdot \mu(B)$)

- $\sup\limits_A f \mu(A) \overset{\pm \mu(A_\varepsilon)}{=} \sup\limits_A f(\mu(A) - \mu(A_\varepsilon)) + \sup\limits_A f \cdot \mu(A_\varepsilon) \ge \sup\limits_A f \mu(A - A_\varepsilon) +$

$+ \omega(A_\varepsilon) = \sup\limits_A f \mu(A - A_\varepsilon) + \mu(A) - \mu(A - A_\varepsilon) \ge \sup\limits_A f \mu(A - A_\varepsilon) + \omega(A) + \varphi_2(\varepsilon)$

$\varphi_2(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \omega(A - A_\varepsilon) \le 0 \\ -C\varepsilon, & \text{якщо } \omega(A - A_\varepsilon) > 0 \end{cases}$

Отже,

$\inf\limits_A f \mu(A) - \varepsilon \inf\limits_A f - \varphi_1(\varepsilon) \le \omega(A) \le \sup\limits_A f \mu(A) - \sup\limits_A f \mu(A - A_\varepsilon) - \varphi_2(\varepsilon)$

Маємо:

$\inf\limits_A f \cdot \mu(A) \le \omega(A) \le \sup\limits_A f \cdot \mu(A)$. Отже, $f$ - щільність заряду $\omega$. За теор. 10.1 $\omega(A) = \int\limits_A \frac{d\omega}{d\mu} d\mu$. ■

Нехай маємо вимірний простір $Y$, на ньому побуд. $\sigma$-алгебра $T_Y$ і міра $\mu$. Нехай маємо ф-цію $g: X \to Y$, $g$ - бієкція. $\sigma$-алгебра в просторі $Y$ породжує $\sigma$-алгебру в просторі $X$.

$(Y, T_Y, \mu)$
$\uparrow g: X \to Y$
$(X,\ T_X \equiv \{g^{-1}(A) \mid A \in T_Y\},\ \mu_g(B) \equiv \mu(g(B)))$, $B \subset T_X$ ($B$ - ел. $\sigma$-алгебри $T_X$)

## Теорема 10.3.

Якщо $A \in T_Y$ ($A$ - вимірна множина $\sigma$-алгебри $T_Y$), а $f$ - інтегровна на $Y$ ф-ція, то композиція $f \circ g$ - інтегровна ф-ція на множині $X$, де $g$ - взаємнооднозначне відображення, $\int\limits_{g^{-1}(A)} f \circ g\, d\mu_g = \int\limits_A f d\mu$.

Доведення: Покажемо, що теорему достатньо довести для випадку, коли $A = Y$. Розглянемо характеристичну ф-цію

$$\lambda_{g^{-1}(A)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in g^{-1}(A) \\ 0, & \text{якщо } x \notin g^{-1}(A) \end{cases} \overset{g\text{-бієкц.}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 1, & \text{якщо } g(x) \in A \\ 0, & \text{якщо } g(x) \notin A \end{cases} = \lambda$$

$$= \lambda_A(g(x)) = (\lambda_A \circ g)(x)$$

$d\mu_g$

$$\int\limits_{g^{-1}(A)} (f \circ g)\, d\mu_g \equiv \int\limits_X (f \circ g) \lambda_{g^{-1}(A)}(x)\, d\mu_g = \int\limits_X (f \circ g)(\lambda_A \circ g)\, d\mu_g = \int\limits_X ((f \cdot \lambda_A) \circ g)(x)\, d\mu_g$$

$$\int\limits_A f d\mu \equiv \int\limits_Y (f \cdot \lambda_A)\, d\mu$$

- Якщо $f$ - проста, то $f \circ g$ - теж проста.

$\mu_g(B) \equiv \mu(g(B))$

$$\int\limits_X f(g(x))\, d\mu_g \equiv \sum_{k=1}^{n} (f \circ g)^{(k)} \mu_g(B_k) = \sum_{k=1}^{n} (f \circ g)^{(k)} \mu_g(g^{-1}(A_k)) = \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(g(x)) \mu(A_k) =$$
$$= \int\limits_Y f d\mu$$

- Якщо $f$ - інтегровна, то існує послідовність ф-цій $f_n$, рівномірно збіжних до $f$: $f_n \underset{Y}{\rightrightarrows} f$
$$\Downarrow$$
$$f_n \circ g \underset{X}{\rightrightarrows} f \circ g$$

для простих ф-цій вже доведено

Тоді $\int\limits_X (f \circ g)\, d\mu_g \equiv \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X (f_n \circ g)\, d\mu_g = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_Y f_n d\mu = \int\limits_Y f d\mu$ ■

Розглянемо два вимірні простори: $(Y, T_Y, \mu)$
$\uparrow g: X \to Y$
$(X, T_X, \Theta)$

## Теорема 10.4

Нехай $A \in T_Y$, $f$ - інтегровна на $Y$, то композиція $f \circ g$ - інтегровна на $X$, $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_{g^{-1}(A)} (f \circ g) \frac{d\mu_g}{d\Theta} d\Theta$ (умови 10.3)

Доведення: З теор. 10.3 випливає, що достатньо довести, що $\int\limits_{g^{-1}(A)} h\, d\mu_g = \int\limits_{g^{-1}(A)} h \frac{d\mu_g}{d\Theta} d\Theta$, де $h = f \circ g$.

~якобіан

Аналогічно 10.3 можна показати, що достатньо довести дану рівність для всього простору.

- $h$ - проста ф-ція. За означ. $\int\limits_X h\, d\mu_g \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} h^{(k)} \mu_g(B_k) =$
$$= \sum_{k=1}^{n} h^{(k)} \int\limits_{B_k} \frac{d\mu_g}{d\Theta} d\Theta = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{B_k} h^k \frac{d\mu_g}{d\Theta} d\Theta = \int\limits_X h \frac{d\mu_g}{d\Theta} d\Theta.$$

- $h$ - інтегровна: $h_n \underset{X}{\rightrightarrows} h$. Тоді $\int\limits_X h\, d\mu_g = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_X h_n d\mu_g =$ (для простих ф-цій вже доведено)
$$= \lim_{n \to \infty} \int\limits_X h_n \frac{d\mu_g}{d\Theta} d\Theta = \int\limits_X h \frac{d\mu_g}{d\Theta} d\Theta.$$ ■

# Розділ 11 Криволінійні інтеграли

інтеграл від скалярної ф-ції по кривій

## Підрозділ 11.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Нехай крива $L$ параметризована: $L$ в $\mathbb{R}^3$

$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b]$$

На цій кривій $L$ будуємо σ-алгебру $T_L$ (множини), в яку входять всі відкриті, напіввідкриті, замкнені проміжки кривої $L$.

В якості міри на кривій візьмемо довжину $- |\cdot|$. ($l \subset L$)

$$\mu(l) = |\cdot|_L = \int_l \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt.$$ Отже, простір $(L, T_L, |\cdot|_L)$

Якщо $f(x, y, z)$ – ф-ція, що визначена на кривій $L$, то криволінійний інтеграл першого роду від ф-ції $f$ вздовж кривої $L$ – інтеграл Лебега в просторі $(L, T_L, |\cdot|_L)$

$\int_L f\, dl$.

$$\begin{matrix} (L, T_L, |\cdot|_L) \\ \uparrow g: X \to Y \\ ([a,b], T_{[a,b]}, |\cdot|_{\mathbb{R}}) \end{matrix}$$

Згідно теореми 10.4 криволінійний інтеграл першого роду запис. як інтеграл Лебега у відповідному просторі

$$\int_L f\, dl = \int_{g^{-1}(A) = [a,b]} (f \circ \vec{g}) \frac{d\mu_g}{dt}\, dt.$$

Для виведення ф-ли щільності

Візьмемо довільний елемент у σ-алгебри відрізку $[a, b]$

За 10.1 ~~...~~ заряд, а отже і міру, можна представити як

$$\forall [\alpha, \beta] \in T_{[\alpha, \beta]} \quad \underset{\mu(g([\alpha,\beta]))}{\mu_g([\alpha, \beta])} = \int_\alpha^\beta \frac{d\mu_g}{dt}\, dt$$

довжина ділянки кривої, яка є образом $[\alpha, \beta]$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

**Теорема 11.1** Формула обчислення криволінійного інтегралу першого роду

$$\int_L f\, dl = \int_a^b (f \circ g) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

$$\int_L f\, dl = \int_a^b f(\bar{g}(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

01.10.16

$$L = \bar{g}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad a \le t \le b$$

1) $L \subset \mathbb{R}^2$: $\int_L f\, dl = \int_a^b f(\bar{g}(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$

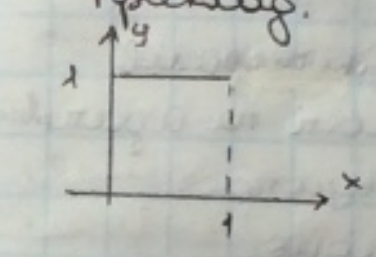
2) $y = f(x)$: $\int_L f\, dl = \int_a^b f(x, f(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$

3) $\rho = \rho(\varphi)$: $\int_L f\, dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}\, d\varphi$

Для криволінійних інтегралів першого роду зберігаються майже всі властивості визначеного: лінійність, адитивність, монотонність, теорема про середнє, оцінка інтегралу.

① $|L| = \int_L dl$ довжина кривої – криволінійний інтеграл першого роду від одиничної ф-ції

Приклад. $y = 1$, $0 \le x \le 1$



$$|L| = \int_0^1 \sqrt{1 + 0^2}\, dx = \int_0^1 dx = 1 \quad \begin{bmatrix} x = t \;\; t: 0 \to 1 \\ y = 1 \end{bmatrix}$$

$$|L| = \int_{-1}^0 \sqrt{1 + 0^2}\, d\overset{t}{x} = \int_{-1}^0 d\overset{t}{x} = +1 \quad \begin{bmatrix} x = -t & x: 1 \to 0 \\ y = 1 & t: -1 \to 0 \end{bmatrix}$$

За побудовою криволінійного інтегралу першого роду збільшенню значення параметра повинно відповідати збільшення (подовження) ділянки кривої, яка проходиться.

② $\int_{L_{AB}} f\, dl = \int_{L_{BA}} f\, dl$.

інтеграл від векторної ф-ції по кривій

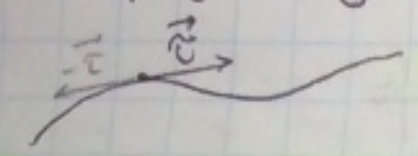
## Підрозділ 11.2. Криволінійні інтеграли другого роду

$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$

$P, Q, R$ – неперервні ф-ції, визначені на кривій $L$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти в $\mathbb{R}^3$

Будемо розглядати орієнтовні криві (криві з орієнтацією), тобто, в цих кривих зафіксовані початок і кінець, параметр збільшується від початку до кінця кривої.




$\vec{\tau}$ - дотичний вектор, вздовж напрям проходження кривої

Криволінійний інтеграл другого роду від вектора $\bar{a}$ вздовж орієнтовної кривої $L$:

$$\int_L (\bar{a}\cdot d\vec{l}) = \int_L (Pdx + Qdy + Rdz) \ominus \int_L (\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl.$$

позначення

$d\vec{l} \equiv (dx, dy, dz)$, $\vec{\tau} \equiv (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\alpha = (\hat{\tau, 0x})$, $\beta = (\hat{\tau, 0y})$, $\gamma = (\hat{\tau, 0z})$

$$\ominus \int_a^b (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))\,dt$$

Властивості криволінійного інтегралу другого роду:

① Залежить від напряму кривої

$$\int_{L_-} (\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl = \int_{L_+} (\vec{a}\cdot(-\vec{\tau}))\,dl = -\int_{L_+} (\vec{a}\cdot\vec{\tau})\,dl.$$

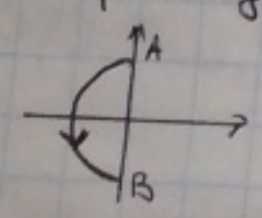
Також очевидно, що для криволінійних інтегралів другого роду виконуються властивості лінійності та адитивності. Інші власт. в загальному випадку не виконуються.

Покажемо, що не викон. теорема про середнє.

$$\int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx = P(x^*, y^*)\cdot\int_{L_{AB}} dx$$

$L_{AB}$ - гладка крива, $P(x,y)$ неперервна на цій кривій, а точка $(x^*, y^*)$ - якась точка цієї кривої.

Приклад: $x^2 + y^2 = 1$, $x \le 0$ $A(0;1) \to B(0;-1)$ $P(x,y) = y$




$$\int_{L_{AB}} P(x,y)\,dx = \begin{pmatrix} x = \cos t \\ y = \sin t \\ \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t(\cos t)'\,dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = -\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{AB} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\cos t = 0$$

$$-\frac{\pi}{2} = P(x^*, y^*)\cdot 0$$

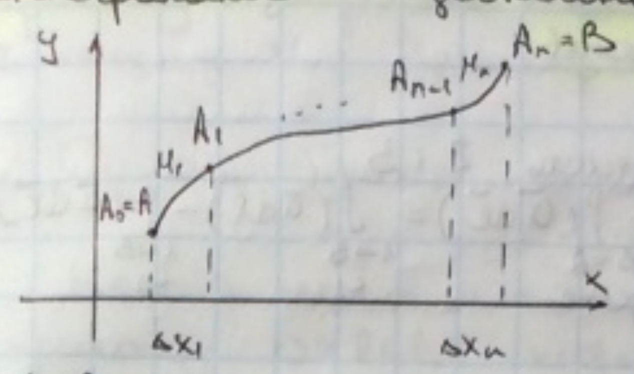
На практиці криволінійний інтеграл другого роду часто беруть по замкнених кривих (контур) $\oint_L (\vec{a}\cdot d\vec{l})$

Якщо орієнтовна крива $L$ замкнена, то взятий вздовж неї криволінійний інтеграл другого роду від вект. ф-ції $\vec{a}$ - циркуляція вектора $\bar{a}$ по контуру $L$.

Якщо вектор $\bar{a}$ визначений в $\mathbb{R}^3$, то його назив. полем.

Якщо вектор $\vec{a}$ - поле якоїсь сили, то його циркуляція вздовж $L$ є роботою вектора $\bar{a}$ вздовж цього контура.

Криволінійні інтеграли 1-го і 2-го роду іноді назив. інтегралами по довжині кривої і по проекції кривої відповідно.




1) $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ - довільним чином обираємо скінченну к-сть точок цієї кривої. $A = A_0$, $B = A_n$.

2) На кожній з ділянок кривої $\overset{\smile}{A_{i-1}A_i}$ вибираємо довільну т. $M_i(x_i, y_i)$

3) Значення ф-ції в т. $M_i$ - $f(x_i, y_i)$ множимо на довжину відповідної ділянки кривої - $\Delta l_i$: $f(x_i, y_i)\Delta l_i$

4) Шукаємо границю інтегральної суми

$\lim\limits_{diam(\Delta l_i)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$, коли діаметр відповідних розбиттів $\Delta l_i \to 0$.

Якщо така границя існує незалежно від вибору $A_i, M_i$, то цей інтеграл $\int_L f(x,y)\,dl$ - криволінійний інтеграл першого роду.

Якщо на 3) $f(x_i, y_i)$ множити на проекцію на $0x$ відповідної ділянки кривої, отримаємо криволінійний інтеграл другого роду $\int_L f(x,y)\,dx$.

Підрозділ 11.3. Неперервне поле потенціалу

(Умова незалежності криволінійного інтегралу 2-го роду від шляху інтегрування)

Розглянемо випадок, коли $\vec{a} = \overrightarrow{grad\, u} \Leftrightarrow P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, при цьому $u$ - потенціальна ф-ція вектора $\bar{a}$

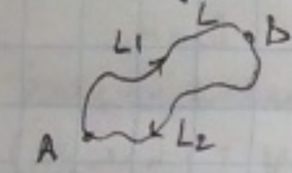
Теорема 11.2. Нехай на області $V \subset \mathbb{R}^3$ визначене векторне поле $\vec{a}$, неперервне на $V$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

1) на області $V$ існує однозначна ф-ція $u(x,y,z)$, яка має неперервні частинні похідні і для котрої на області $V$ виконується рівність $\vec{a} = \overrightarrow{grad\, u}$. Іншими словами, $Pdx + Qdy + Rdz = du$ - повний диференціал ф-ції $u$.

2) Інтеграл від вектора $\vec{a}$ по б-я неперервному кусково-гладкому контуру $L$, що лежить в області $V$, $= 0$
$\oint\limits_{L \subset V} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = 0$. В цьому випадку кажуть що поле $\vec{a}$ - потенціальне

3) Інтеграл по б-я орієнтовній кривій $L$ з області $V$ не залежить від її форми, а залежить лише від початкової і кінцевої точки кривої: $\int\limits_{L \subset V} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = const$.

Доведення. Доведемо еквівалентність 2 і 3.

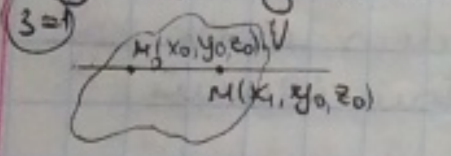


$$0 = \oint\limits_{L} (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \int\limits_{\substack{A \to B \\ L_1}} (\vec{a}\, d\vec{l}) + \int\limits_{\substack{B \to A \\ L_2}} (\vec{a}\, d\vec{l}) = \int\limits_{\substack{A \to B \\ L_1}} (\vec{a}\, d\vec{l}) - \int\limits_{\substack{A \to B \\ L_2}} (\vec{a}\, d\vec{l}) = 0$$

Доведемо еквівалентність 1 і 3.

(1⇒3) В області $V$ візьмемо дві точки $A_1$ і $A_2$, з'єднаємо їх неперервною кусково-гладкою кривою $L$. Нехай ця крива визначена параметрично: $L: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_1 \le t \le t_2$.
$u(x,y,z) = u(x(t), y(t), z(t)) = u(t)$.
$$\int\limits_L P dx + Q dy + R dz = \int\limits_L du = \int\limits_{t_1}^{t_2} du = u(t_2) - u(t_1)$$
Отже, було показано, що $1 \Rightarrow 3$, причому ця const - різниця значень ф-ції в кінцевій і початковій точках.

(3⇒1)



Проведемо пряму через ці точки, яка завжди перетнеться з областю $V$ по відрізку.
(якщо перетин не відрізок, а точка, то візьмемо іншу точку)
$v(x, y_0, z_0) - v(x_0, y_0, z_0) = \int\limits_{L_{M_0M}} (\vec{a}\, d\vec{l}) \stackrel{①}{=}$, згідно 3 твердження.

$\stackrel{①}{=} \int\limits_{x_0}^{x} P dx$

$\frac{\partial v}{\partial x} = P \quad \frac{\partial v}{\partial y} = Q \quad \frac{\partial v}{\partial z} = R$

08.10.16

$$\vec{a} = \overrightarrow{grad}\, u \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q \\ \frac{\partial u}{\partial z} = R \end{cases}$$

**Ротор (вихор)** вектора $\vec{a}$

$$rot\, \vec{a} = \underset{\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}{\vec{\nabla}} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Якщо $rot\, \vec{a} = 0$, то відповідне поле назив. безвихоровим.

**Область** $V \subset \mathbb{R}^3$ **однозв'язна**, якщо б-я кусково-гладкий контур, що їй належить, можна стиснути в точку з обл. $V$, причому в процесі стиснення він весь час залишається в області $V$. Приклад: коло; кільце, але — незв'язна обл.

Однозв'язною є область без дірок.

Нехай маємо контур $L \subset V$: $x = x(l),\ y = y(l),\ z = z(l)$, причому $0 \le l \le 1$. $x(0) = x(1);\ y(0) = y(1);\ z(0) = z(1)$
Нехай маємо поверхню $S \subset V$: $x = \varphi(l,t),\ y = \psi(l,t),\ z = \chi(l,t)$
$\Delta = \{0 \le l \le 1-t;\ 0 \le t \le 1\}$. $\varphi(0,t) = \varphi(1-t,t);\ \psi(0,t) = \psi(1-t,t);\ \chi(0,t) = \chi(1-t,t)$
$\varphi(l,0) = x(l),\ \psi(l,0) = y(l);\ \chi(l,0) = z(l)$

**Теорема 11.3.** В умовах теореми 11.2 нехай $\vec{a}$ - неперервно диференційований вектор. Тоді для того, щоб криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L (\vec{a}\, d\vec{l})$ не залежав від шляху інтегрування, необхідно (а якщо область $V$ - однозв, то і достатньо), щоб в усіх точках області $V$ поле $\vec{a}$ було безвихоровим, тобто, щоб $rot\, \vec{a} = 0$.

Доведення. Необхідність. Якщо криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, то згідно 11.2 знайдеться така потенційна ф-ція $u = u(x,y,z)$, що $P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}$

$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$, оскільки за умовою частинні похідні 2-го порядку неперервні.
Аналогічно - інші координати $rot\, \vec{a}$. Вони теж $= 0$, тому поле $\vec{a}$ безвихорне.

Достатність. Розгл. ситуацію, коли $V$ - куб.
У цьому випадку якщо $rot\, \vec{a} = 0$, то потенційну ф-цію $u$ можна побудувати явним чином.
$$u(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\alpha, y_0, z_0)\, d\alpha + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \beta, z_0)\, d\beta + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, \gamma)\, d\gamma + u(x_0, y_0, z_0),$$
де $(x_0, y_0, z_0) \in V$

$(x_0, y_0, z_0)$

Підрахуємо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y_0,z_0) + \left(P(x,y,z_0) - P(x,y_0,z_0)\right) + \left(P(x,y,z) - P(x,y,z_0)\right) = P(x,y,z)$$

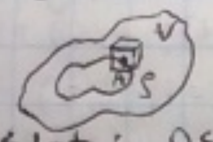
(ОСК. $\operatorname{rot}\vec{a}=0 \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)

Аналогічно $P = \frac{\partial u}{\partial x}, \; Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \; R = \frac{\partial u}{\partial z}$

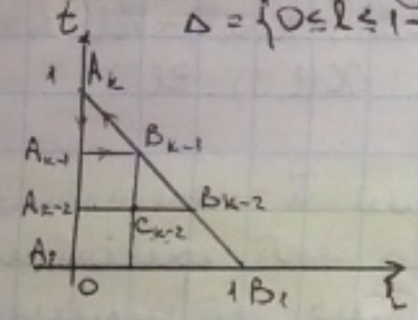
Отже, викон. всі умови теореми 11.2 $\Rightarrow$ інтеграл не залежить від шляху інтегрування.

Розглянемо загальний випадок.

Нехай S - обмежена замкнена поверхня, яка лежить в області V. Оскільки область - відкрита множина, то тоді для б-ї т. A на поверхні S знайдеться такий куб з довжиною ребра $d$, в якому міститься т. A, але який не виходить за межі області V.




$t$, $\Delta = \{0 \le l \le 1-t;\ 0 \le t \le 1\}$ графічно:




Горизонталі і вертикалі розбиття трикутника проведено настільки щільно, щоб образи отриманих елементів (трик., прямок.) повністю потрапили в куб з ребром $d$

Будемо рахувати криволінійний інтеграл другого роду $\int(\vec{a}\,d\vec{l})$ по образу межі цих елементарних елементів (трик., прямок)

$$0 = \oint_{\Delta}(\vec{a}\,d\vec{l}) = \int_{A_{k-1}B_{k-1}}(\vec{a}\,d\vec{l}) + \int_{B_{k-1}A_k}(\vec{a}\,d\vec{l}) + \int_{A_kA_{k-1}}(\vec{a}\,d\vec{l}) \Rightarrow \int_{A_{k-1}B_{k-1}}(\vec{a}\,d\vec{l}) = 0$$

оск. куб.

+0 (компенсуються)

$$0 = \int_{\square}(\ ) = \int_{\square} + \int_{\Delta} = \int_{A_{k-2}C_{k-2}} + \int_{C_{k-2}B_{k-1}} + \int_{B_{k-1}A_{k-1}} + \int_{A_{k-1}A_{k-2}} +$$

$$+ \int_{B_{k-1}C_{k-2}} + \int_{C_{k-2}B_{k-2}} + \int_{B_{k-2}B_{k-1}} = \int_{A_{k-2}B_{k-2}}(\vec{a}\,d\vec{l}) = 0$$

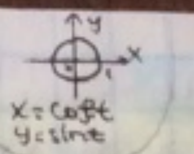
...

$$\int_{A_1B_1}(\vec{a}\,d\vec{l}) = 0$$

$\parallel \oint_L \vec{a}\,d\vec{l}$

■

<u>Зауваження</u>. Теореми 11.2 і 11.3 відрізняються двома вимогами: неперервна диференційовність вектора $\vec{a}$ необхідна для забезпечення виконання необхідної умови теореми. Для демонстрації необхідності однозв'язності обл. V розгл. приклад: $\vec{a} = \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{=P}\vec{i} + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=Q}\vec{j}$ $\quad V = \mathbb{R}^2 - \{(0;0)\}$




$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Отже, поле $\vec{a}$ є неперервно диференц.

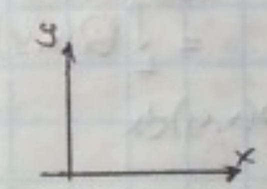
$\frac{\partial P}{\partial x}$ та $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ та $\frac{\partial P}{\partial y}$ співпадають, отже $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$. $\oint \vec{a}\,d\vec{l} = \int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0$

$(dx, dy)$

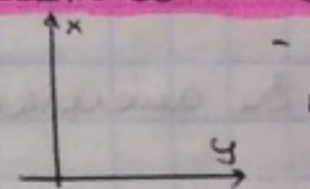
однозв'язність принципова

<u>Наслідок</u> Умови незалежності криволінійного інтегралу другого роду від шляху інтегрування на площині $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$, тобто, для 2-х вимірного випадку $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

## Підрозділ 11.4 Орієнтація в просторі області. Формули Гріна обчислення площі через криволінійний інтеграл



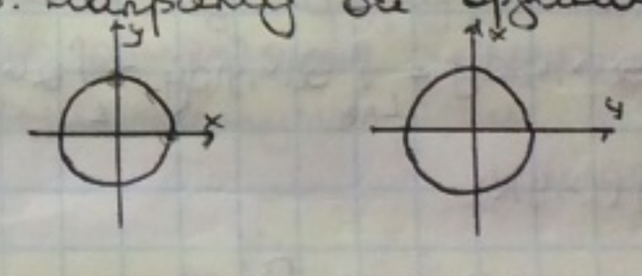

- права прямокутна СК



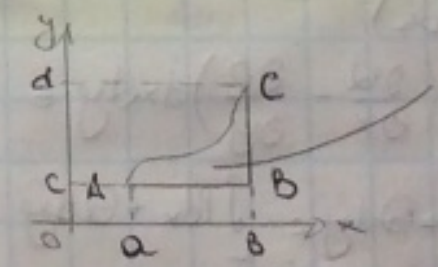

- ліва прямокутна СК

Їх не можна накласти одна на одну, залишаючись на площині, тому ці СК принципово різні.

Додатній напрям - напрям по колу, який дає найкоротший шлях від дод. напряму осі абсциc до дод. напряму осі ординат.




Додатній напрям вважається таким, щоб, рухаючись по ньому, відповідна область залишалась ліворуч.




елементарна область

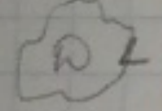
дуга AC - строго зрост. ф-ція

12.10.16

Якщо цю область повернути відносно початку координат на $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, маємо також ел. області. Прямокутники - також елементарні області.

## Теорема 11.4 Формула Гріна

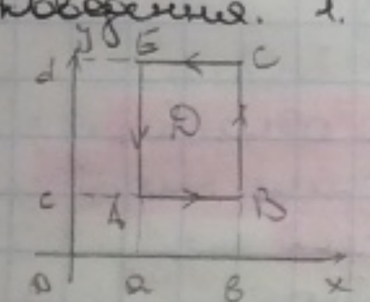
Нехай плоска область $D$ з неперервною кусково-гладкою межею $L$ має таку властивість: її замикання $\overline{D}$ може бути розрізано прямими, паралельними осям координат на скінченну кількість елементарних областей. Якщо при цьому ф-ції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні на цьому замиканні разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то має місце формула Гріна:



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_L (P\,dx + Q\,dy).$$

При цьому контур $L$ обходиться в додатньому напрямку.

**Доведення.** 1. Нехай область $D$ — прямокутник (елементарна).

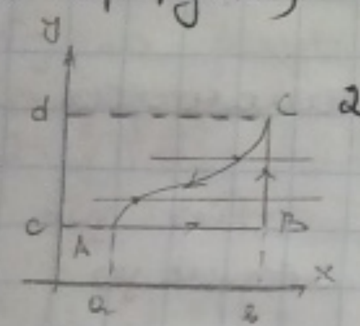


$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d \left(Q(b,y) - Q(a,y)\right) dy =$$

$$= \int_{L_{BC}} Q(x,y)dy + \int_{L_{EA}} Q(x,y)dy + \underbrace{\int_{L_{AB}} Q(x,y)dy}_{=0} + \underbrace{\int_{L_{CE}} Q(x,y)dy}_{0} = \oint_L Q(x,y)dy$$

(за теор. Фубіні). За аналогією $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy\,dx = \ldots = -\oint P(x,y)dx$

2. Нехай область $D$ має наст. вигляд:



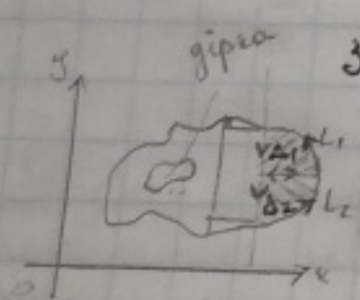
Нехай $\overset{\smile}{AC}: y = f(x) \longrightarrow x = f^{-1}(y)$ (в силу монотонності)

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy = \int_c^d dy \int_{f^{-1}(y)}^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d \left(Q(b,y) - Q(f^{-1}(y),y)\right) dy =$$

$$= \int_{L_{BC}} Q(x,y)dy + \int_{L_{CA}} Q(x,y)dy + \underbrace{\int_{L_{AB}} Q(x,y)dy}_{0} = \oint_L Q(x,y)dy$$

За аналогією, $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dy\,dx = \ldots = -\oint P(x,y)dx.$

Додавши ці вирази, отримаємо формулу Гріна.



3. $\overline{D} = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ (Заг. випадок)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= (\text{в силу 1 і 2}) = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_k} P\,dx + Q\,dy = \oint_L P\,dx + Q\,dy$$

(додатній напрям — проти годинникової стрілки). ■

Формула Гріна пов'язує криволінійні і кратні інтеграли.

**Зауваження 1.** Формула Гріна є для кратних інтегралів аналогом формули Ньютона-Лейбніца для однократних, оскільки інтеграл від похідних по області інтегрування виражаються через значення ф-ції на межі області.

**Зауваження 2.** Формула Гріна не є симетричною, оскільки не є симетричними змінні $x$ та $y$. (В декартовій ск їх порядок фіксований)

**Наслідок** Обчислення площі за допомогою криволінійних інтегралів.

$$S = \iint_D dx\,dy = (Q = x,\ P = 0) = \oint_L x\,dy \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1\right)$$

$$S = \iint_D dx\,dy = (Q = 0,\ P = -y) = -\oint_L y\,dx$$

$$S = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\oint_L (x\,dy - y\,dx)$$

Приклад: підрах. площу еліпса.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

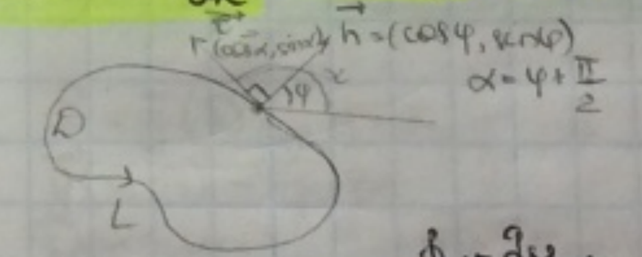
$$S_{ел.} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(a\cos t\, d(b\sin t) - b\sin t\, d(a\cos t)\right) = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

## Теорема 11.5 Друга формула Гріна.

Нехай ф-ції $u(x,y)$, $v(x,y)$ та їх частинні похідні 1-го та 2-го порядку неперервні в замкненій області $D$, яка обмежена гладкою кривою $L$. Тоді справедлива друга формула Гріна:

$$\oint_L \begin{vmatrix} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \end{vmatrix} dl = \iint_D \begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} dx\,dy,$$

де $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\Delta$ — оператор Лапласа, а $\frac{\partial u}{\partial n}$ чи $\frac{\partial v}{\partial n}$ — похідна за напрямом зовнішньої нормалі кривої $L$.



$\vec{\tau}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\vec{n} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$

**Доведення:**

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha$$

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n} dl = \oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha - v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right) dl = \oint_L \Big(\underbrace{-v\frac{\partial u}{\partial y}}_{P};\ \underbrace{v\frac{\partial u}{\partial x}}_{Q}\Big)\vec{\tau}\,dl =$$

$$= (\text{за першою формулою Гріна}) = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left( v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy$$

За аналогією $\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\,dl = \ldots = \iint_D \left( u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \right) dx\,dy$

Віднімемо отримані вирази.

$$\oint_L \left( u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \iint_D (u\cdot\Delta v - v\cdot\Delta u)\,dx\,dy.$$

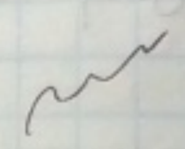
# Розділ 12 Поверхневі інтеграли

## Підрозділ 12.1. Поверхня в трьохвимірному просторі. Дотична площина та нормаль до поверхні

Якщо $F(x,y,z)$ - неперервна ф-ція, то сукупність точок $(x,y,z)$, таких, що виконується $F(x,y,z)=0$ - поверхня, що визначена неявно. Н-д: $x^2+y^2+z^2-1=0$

Якщо для ф-ції $F$ в околі якоїсь точки з поверхні виконуються умови теореми про неявні ф-ції, то в цьому околі поверхню, визначену неявно, можна звести до поверхні, визначеної явним чином. Н-д: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$



$L:\ x=x(u,0)\to x(u,T)$

$y=y(u,0)\to y(u,T) \qquad u\in\mathbb{R}$

$z=z(u,0)\to z(u,T)$

Параметрично визначена поверхня $S$ - образ двовимірної області $D$ з простору $\mathbb{R}^2$ при його відображенні в простір $\mathbb{R}^3$

$D\subset\mathbb{R}^2 \qquad S=\vec{g}(D), \qquad \vec{g}=\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\\ z=\chi(u,v)\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}\in D$

$x=\sin u\cos v;\ y=\sin u\sin v;\ z=\cos u \qquad 0\le u\le\pi;\quad 0\le v\le 2\pi$

Якщо ф-ції $\varphi,\psi,\chi$ - взаємооднозначні і мають неперервні частинні похідні, то відповідна поверхня $S$ гладка (неперервно диференційована)

Якщо в якості $u$ і $v$ візьмемо $u=x,\ v=y$, $\Rightarrow x=x,\ y=y,\ z=\chi(x,y)$ то з параметрично визначеної поверхні отримаємо поверхню, визначену явним чином.

$S=\vec{g}(D),\ v=v_0$

$\vec{g}(u,v_0)$ - крива

Дотичний вектор до цієї кривої $\frac{\partial\vec{g}}{\partial u}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u};\ \frac{\partial\psi}{\partial u};\ \frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$

Точка $\vec{g}(u,v)$ поверхні $S=\vec{g}(D)$, для котрої $\frac{\partial\vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{g}}{\partial v}$ - не колінеарні вектори (лінійно незалежні) - неособлива точка за даного представлення поверхні $S$. Інакше - особлива. $\longrightarrow \frac{\partial\vec{g}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{g}}{\partial v}=\vec{0}$

**Вправа** За допомогою цил. коорд. показати, що вершина конуса – особлива точка

$\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ $\quad S = \vec{g}(D) \quad \binom{u}{v} \in D$

22.10.16 Нехай поверхня $z = \chi(x,y)$ виражена явно. $\quad \begin{matrix} x = x \\ y = y \end{matrix}$

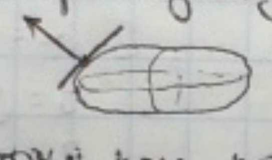
$\frac{\partial \vec{g}}{\partial x} = (1; 0; \frac{\partial \chi}{\partial x}), \quad \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = (0; 1; \frac{\partial \chi}{\partial y})$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\vec{j} + \vec{k} \neq \vec{0}, \text{ тобто,}$$

якщо поверхня визначена явним чином, то вона особливих точок не має.

Площина, натягнута на вектори $\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}$ в якійсь точці – дотична площина в даній точці поверхні.

Б-я ненульовий вектор, що проходить через точку дотику поверхні з дотичною площиною і перпендикулярний до цієї площини – нормаль.



$\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = \vec{N}$, визначення має місце в ненульовій (неособливій) точці при параметричному визначенні поверхні.

$\vec{g}: \begin{pmatrix} D \\ T \\ |\cdot|_{\mathbb{R}^2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} S \\ \mathcal{T}_{\vec{g}} \\ \sigma \end{pmatrix}$ Нехай в області $D \in \sigma$-алгебра $T$, міра – $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$

Якщо $f(x,y,z)$ – ф-ція, визначена на поверхні $S$, тобто, поверхня $S$ належ. області визначення цієї ф-ції, то поверхневим інтегралом 1-го роду назив. інтеграл Лебега у відповідному просторі $(S, \mathcal{T}_{\vec{g}}, \sigma)$. $\iint_S f\,dS$

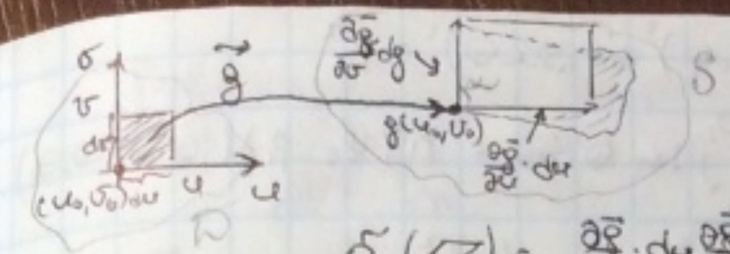
Згідно теореми 10.4 [1] розуміємо, як рахується поверхневий інтеграл 1-го роду $\iint_S f\,dS = \iint_{D = g^{-1}(S)} (f \circ \vec{g}) \frac{d\sigma_g}{du\,dv}\,du\,dv$

$\frac{d\sigma_g}{du\,dv} = |\vec{N}|$

$\sigma_g(\Delta) = \iint_{g^{-1}(\Delta)} \frac{d\sigma_g}{du\,dv}\,du\,dv$

Розкладемо в ряд Тейлора

$$\vec{g}(u,v) = \vec{g}(u_0; v_0) + \frac{\partial \vec{g}}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot du + \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}(u_0, v_0)\,dv + o\left(\sqrt{(du)^2 + (dv)^2}\right)$$



$$\sigma_g(\square) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \cdot du \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} dv \cdot \sin\alpha = \left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right| du\,dv = |\vec{N}|\,du\,dv$$

**Теорема 12.1** Формула підрахунку поверхневого інтегралу першого роду.

$$\iint_S f\,dS = \iint_{D = g^{-1}(S)} f(g(u,v)) \left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right| du\,dv, \text{ де}$$

$S = \vec{g}(D), \quad \binom{u}{v} \in D, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \\ \chi(u,v) \end{pmatrix}$ $\quad \vec{g}$ – бієктивне, неперервно диференційоване відображення

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{j} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Тоді $\iint_S f\,dS = \iint_{D = g^{-1}(S)} f(\vec{g}(u,v)) \left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right| du\,dv =$

$= \iint_D f(\vec{g}(u,v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv =$

$= \iint_D f(\vec{g}(u,v)) \sqrt{E \cdot G - F^2}\,du\,dv$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 + |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$ – тотожність Лагранжа

$$\left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right| = \sqrt{\underbrace{\left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u}\right|^2}_{E} \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|^2}_{G} - \underbrace{\left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{g}}{\partial v}\right|^2}_{F}} = \sqrt{E \cdot G - F^2}$$

Приклад.

Підрахувати площу області сфери між двома меридіанами $\varphi$ і двома паралелями

$x = R\sin\theta\cos\varphi \qquad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

$y = R\sin\theta\sin\varphi \qquad \theta_1 \le \theta \le \theta_2$

$z = R\cos\theta$

$E = \left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial \varphi}\right|^2 = (-R\sin\theta\sin\varphi)^2 + (R\sin\theta\cos\varphi)^2 = R^2\sin^2\theta \qquad F = 0$

$$G = \left|\frac{\partial \vec{g}}{\partial \Theta}\right|^2 = (R\cos\Theta\cos\varphi)^2 + (R\cos\Theta\sin\varphi)^2 + (-R\sin\Theta)^2 = R^2$$

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \sqrt{R^4 \sin^2\Theta}\, d\Theta = R^2(\varphi_2-\varphi_1)\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \sin\Theta\, d\Theta = R^2(\varphi_2-\varphi_1)(\cos\Theta_1-\cos\Theta_2)$$

Площа сфери ( $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\Theta \in [0; \pi]$ ) $4\pi R^2$

Нехай змінна $z$ явно виражена через $x$ та $y$: $z = \chi(x,y)$

$$S = \iint_D f(\vec{g}(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy$$ – при явному визначенні поверхні

Властивості поверхневого інтегралу першого роду: лінійність, адитивність, монотонність, теорема про середнє, оцінка модуля інтегралу

## Підрозділ 12.2 Поверхневі інтеграли другого роду

Якщо поверхня обмежує якесь тіло, то у неї розрізняють зовнішню і внутрішню сторони.

Якщо поверхня визначена рівнянням $z = \chi(x,y)$ то у неї розрізняють верхню і нижню сторони.

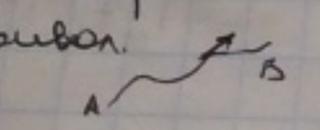
Такі поверхні двосторонні або орієнтовані (поверхні з орієнтацією)

Двостороння поверхня має властивості:

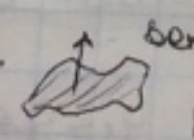
Для б-я замкненого контура, що проходить по цій поверхні і не перетинається з її межею для б-я точки цього контуру обраний в точці напрям нормалі, неперервно змінюючись під час руху по контуру не змінює, тим не менш, свого напряму при поверненні в початкову т. На односторонній поверхні знайдеться такий контур, що напрям зміниться на протилежний. (лист Мьобіуса)

05. 11. 16 Нехай $S = \vec{g}(\Theta)_{\in R^2}$, $S$ – гладка поверхня, визначена параметрично

Кривол.



Поверхн.



вектор нормалі

$$\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \pm\frac{A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ –

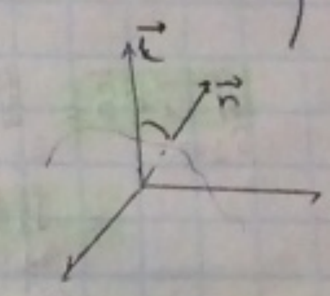
один. норм. вектор до поверхні, визн. параметрично в її неособл. точці (заг. вип.) $\pm$ не вик., оск. змін. місцями $u$ і $v$ в $A, B, C$

Поверхня визначена явно ( $z = \chi(x,y)$ ):

$$\vec{N} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{n} = \left(\frac{-\frac{\partial \chi}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2}}, \frac{-\frac{\partial \chi}{\partial y}}{\phantom{x}}, \frac{1}{\phantom{x}}\right)$$

$$\cos(\widehat{\vec{n},\vec{k}}) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2}} > 0$$



(якщо обираємо + => обираємо верхню сторону поверхні)

За визначенням поверхневий інтеграл другого роду від векторної ф-ції $\vec{a}$ по орієнтовній поверхні $S$:

$$\iint_{S\text{ з орієнт.}} \vec{a}\cdot d\vec{S} \equiv \iint_S (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

$$(\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})$$

векторний запис поверхневого інтегралу 2-го роду

$$\iint_{S\text{ з ор.}} \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_S \left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right)dS = \left(\begin{array}{c}\text{пов. інт. 1-го роду}\\ \text{зводимо до}\\ \text{повторного}\end{array}\right) = \iint_{D=\vec{g}^{-1}(S)}\left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right)\|\vec{N}\|\,du\,dv =$$

$$= \iint_D (\vec{a}\cdot\vec{N})\,du\,dv = \iint_D (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)\,du\,dv =$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v}\end{vmatrix} du\,dv$$

Нехай поверхню $S$ можна однозначно спроектувати на вимірні частини всіх трьох координатних площин.

1) $x = f_1(y,z)$, де $\binom{y}{z} \in D_1$
2) $y = f_2(x,z)$, де $\binom{x}{z} \in D_2$
3) $z = f_3(x,y)$, де $\binom{x}{y} \in D_3$

$D_1, D_2, D_3$ – проекції поверхні $S$ на відповідні координатні площини.

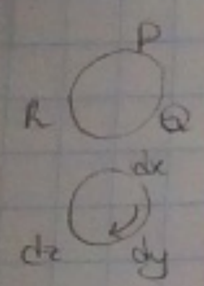
для 3) $x = x$, $y = y$, $z = \chi(x,y)$ $\quad \vec{N} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$

1) $x = f_1(y,z)$ $y = y$, $z = z$

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial y}\times\frac{\partial \vec{g}}{\partial z} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & 1 & 0\\ \frac{\partial f_1}{\partial z} & 0 & 1\end{vmatrix} = \vec{i} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\vec{k}$$

2) $x = x,\ y = f_2(x,z),\ z = z$

$$\vec{N} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial x} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial z} & 1 \\ 1 & \frac{\partial f_2}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}\vec{i} + \vec{j} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\vec{k}$$




$$\iint\limits_{S_{зор.}} \vec{a}\,d\vec{S} = \iint\limits_{S_{з}} \left(P\vec{i}\cdot\vec{N} + Q\vec{j}\cdot\vec{N} + R\vec{k}\cdot\vec{N}\right)\cdot\frac{1}{\|\vec{N}\|}\,dS =$$

$$= \iint\limits_{D} P(f_1(y,z),y,z)\,dy\,dz + \iint\limits_{D_2} Q(x,f_2(x,z),z)\,dz\,dx + \iint\limits_{D_3} R(x,y,f_3(x,y))\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S_{зор.}} P(x,y,z)\,dy\wedge dz + Q(x,y,z)\,dz\wedge dx + R(x,y,z)\,dx\wedge dy =$$

(замість звичайного добутку – $\wedge$ – знак зовнішнього добутку $dx\,dy = dy\,dx$, $dx\wedge dy = -dy\wedge dx$)

$$= \iint\limits_{S_{зор.}} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$$

**координатний запис** поверхневого інтегралу 2-го роду

Оскільки поверхневий інтеграл другого роду є узагальненням криволінійного інтегралу другого роду, то він має ті самі властивості: лінійність, адитивність, залежність від сторони поверхні.

$\iint\limits_{S_{зор.}} \vec{a}\,d\vec{S}$ – потік векторного поля $\vec{a}$ через поверхню S.

Поверхневі інтеграли першого та другого роду можна ввести як границі відповідних інтегральних сум Рімана.

1-го: $\iint\limits_{S} f(x,y,z)\,dS = \lim\limits_{\substack{\text{діаметр} \\ \text{розбиття } (S_i) \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\text{площа}(S_i)$

В цій границі $S_i$ – частина поверхні S. Всі $S_i$ перетинаються хіба що на своїх межах. Розбиття поверхні S та її частини $S_i$ є довільними. Вибір точки $(x_i,y_i,z_i)$ також є довільним на частині $S_i$.

Поверхневий інтеграл 2-го роду будується аналогічно.

$\iint\limits_{S_{зор.}} P\,dy\wedge dy + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$

Н-д: $\iint\limits_{S_{зор.}} f(x,y,z)\,dx\wedge dy = \lim\limits_{\substack{\text{діаметр} \\ \text{розбиття } (S_i) \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\text{площа проекції } S_i \text{ на } XOY$

## Підрозділ 12.4 Основні інтегральні формули аналізу

(зв'язок інтегрування й диференціювання)

**Елементарне тіло** – тіло, отримане наступним чином: в площині малюємо, що містить елементарну область через її межу проведемо циліндричну поверхню, обмежимо її зверху і знизу двома поверхнями, що не перетинаються (але можуть торкатися одна до одної)

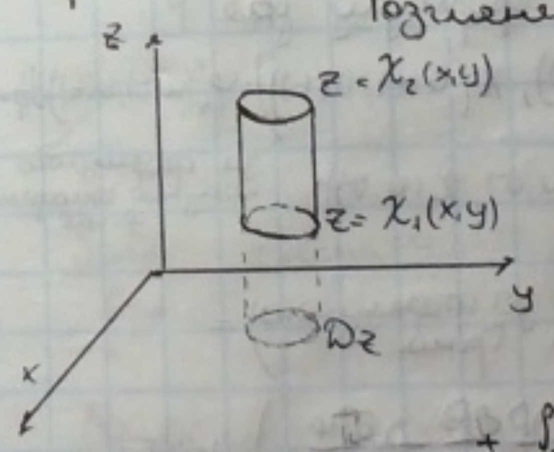
**Теорема 12.2 Формула Гауса – Остроградського**

Нехай тіло $V \subset \mathbb{R}^3$ з неперервною кусково-гладкою поверхнею S має наступну властивість: його замикання $\bar{V}$ може бути розрізане площинами, що паралельні координатним, на скінченну кількість елементарних тіл. Якщо при цьому ф-ції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні на $\bar{V}$ разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, то має місце формула Гауса – Остроградського:

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S_{зор.}} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$$

Доведення. Оскільки формула Гауса – Остроградського фактично є узагальненням формули Гріна, то доведення можна провести аналогічно.

Розглянемо фрагмент доведення для наст. тіла:




$$\iiint\limits_{V} \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{D_z} dx\,dy \int\limits_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint\limits_{D_z} R(x,y,\chi_2(x,y))\,dx\,dy - \iint\limits_{D_z} R(x,y,\chi_1(x,y))\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{S_{\text{верх.пов.}V}} R(x,y,z)\,dx\wedge dy + \iint\limits_{S_{\text{ниж.пов.}V}} R(x,y,z)\,dx\wedge dy +$$

$$+ \iint\limits_{S_{\text{бок.}V}} R(x,y,z)\,dx\wedge dy = \iint\limits_{S_{зор.}} R\,dx\wedge dy \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження.</u> $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}$. Тоді інший запис формули Гауса – Остроградського $\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{a}\,dV = \iint\limits_{S_{зор.}} \vec{a}\,d\vec{S}$

__Наслідок 1.__ Формула обчислення об'єму через поверхневий інтеграл

$P = x,\ Q = y,\ R = z$

$$\mu(V) = \frac{1}{3}\iint\limits_{S_{зов.}} x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy = (P = x,\ Q = R = 0) =$$

$$= \iint\limits_{S_{зов.}} x\,dy\wedge dz = \dots \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1\right)$$

12.11.16 Теорема 12.3 Формула Стокса

Нехай $S$ – орієнтована, двічі неперервно диференційована поверхня без особливих точок в області $V \subset \mathbb{R}^3$, визначена параметрично $S = \vec{g}(D)$, де $\vec{g} = \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \\ \chi(u,v) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D \subset \mathbb{R}^2$. І нехай

область $D$ задовільняє всім умовам теореми 11.4 про ф-лу Гріна. Нехай також поверхня $S$ при цьому натягнута на контур $L$ (контур $L$ обмежує поверхню $S$), причому $L = \left\{ \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} a \le t \le b \right\}$.

Тоді якщо векторна ф-ція $\vec{a}(P, Q, R)$ є неперервно диференційованою в області $V$, то справедлива формула Стокса:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \left(\vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), d\vec{S}\right)$$

де контур $L$ обходиться в додатному напрямку.

Доведення: В силу симетрії доведемо формулу для $P$.

$$\int\limits_L P\,dx = \int\limits_L P(x,y,z)\,dx = \int\limits_a^b P\big(\varphi(u(t),v(t)),\ \psi(u(t),v(t)),\ \chi(u(t),v(t))\big)\cdot \varphi'_t(u(t),v(t))\,dt =$$

$$= (\text{перейдемо в площину } u,v) = \int\limits_{L(u,v)} P(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v)) \times$$ за формулою похідної складеної ф-ції

$$\times\left(\frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi(u,v)}{\partial v}dv\right) = \int\limits_{L(u,v)} P\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + P\frac{\partial \varphi}{\partial v}dv = (\text{за формулою Гріна}) =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial\left(P\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)}{\partial u} - \frac{\partial\left(P\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)}{\partial v}\right)du\,dv = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + P\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} - P\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\right)du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \Bigg(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v} + P\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} -$$

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - P\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}\Bigg)du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \chi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\right)du\,dv =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix} - \frac{\partial P}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}\right)du\,dv =$$

$$= \iint\limits_S \left(\left(0, \frac{\partial P}{\partial z}, -\frac{\partial P}{\partial y}\right), d\vec{S}\right) = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial P}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial P}{\partial y}\vec{k}\right), d\vec{S}\right)$$

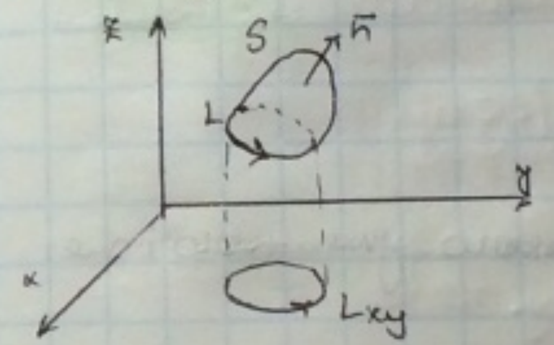
За аналогією $\displaystyle\int\limits_L Q\,dy = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\vec{k} - \frac{\partial Q}{\partial z}\vec{i}\right), d\vec{S}\right)$

$$\int\limits_L R\,dz = \iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial R}{\partial x}\vec{j}\right), d\vec{S}\right)$$

__Зауваження 1.__ Умова двічі непер. диф. поверхні $S$ була введена лише для спрощення доведення.

__Зауваження 2.__ Аналогічно формулам Гріна та Гаусса-Остр. формула Стокса залишається справедливою для $\sigma$-я орієнт. поверхні $S$, котру можна розбити за допомогою на скінченну к-сть гладких частин.

__Зауваження 3.__ Вибір напрямку нормалі поверхні $S$ пов'язаний з орієнтацією кривої $L$.




__Зауваження 4.__ Інший вигляд формули Стокса:

$$\int\limits_L (\vec{a}\,d\vec{l}) = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\vec{a}, d\vec{S})$$

__Зауваження 5.__ Поле $\vec{a}$ потенціальне, коли $\oint(\bar{a}\,d\bar{l}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{a} = 0$, тобто, поле потенціальне тоді і тільки тоді, коли воно є безвихорним.

## Підрозділ 12.5. Елементи векторного аналізу

$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Можна довести, що $\operatorname{rot} \overrightarrow{\operatorname{grad} u} = 0$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0$

Задача 1. Визначити оцінку за допомогою дивергенції

$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

Задача 2. Знайти дивергенцію сферичного векторного поля. $\vec{a} = f(r)\cdot\vec{r}$

$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(f(r)\cdot x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)\cdot y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r) z) = 3f(r) + r f'(r)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot x\right) = \frac{\partial f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot x + f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\cdot 1 = \frac{x^2}{r}\cdot f'(r) + f(r)$

Визначити вид ф-ції, для котрої поле $\vec{a}$ буде соленоїдальним

$3f(r) + r f'(r) = 0$

$3f + r\cdot\frac{df}{dr} = 0$

$\frac{df}{f} = -\frac{3dr}{r}$

$\ln|f| = -3\ln|r| + C_1$

$|f| = e^{-3\ln|r| + C_1}$

$f = \frac{C}{r^3}$ $\qquad \vec{a} = \frac{C\vec{r}}{r^3}$ – кулонівське поле

Запишемо формулу Гауса – Остроградського для цього поля:

$\underbrace{\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\, dV}_{0} = \iint_S \left(\frac{C}{r^3}\vec{r}\right)\cdot\vec{r}\, dS = \underbrace{\iint_S \frac{C}{r^2}\, dS}_{\neq 0}$

# Розділ 13. Гармонічний аналіз

19.11.16

## Підрозділ 13.1. Простір $L_2$. Визначення та основні властивості

**Метрика** (відстань) – відображення $d: X\times X \to \mathbb{R}$:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$ – симетричність
3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$ – нерівність трикутника

• $L$: $d(x,y) = |x-y|$

Метрика між ф-ціями $\left(\int_X |f|\, d\mu < \infty\right)$

• $L_1$: $d(f,g) = \int_X |f-g|\, d\mu$. В цьому випадку ф-ції $f$ і $g$, які дорівнюють одна одній майже скрізь, ототожнюють.

• $L_2$: $\left(\int_X f^2(x)\, d\mu < \infty\right)$ $\qquad d(f,g) = \sqrt{\int_X (f-g)^2\, d\mu}$

Простір, на якому введена метрика, є метричним.
Простір, в якому введена норма, є нормованим.

**Норма**: $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$:

1) $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0$, якщо $x = 0$ – невиродженість
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$ – однорідність
3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ – нерівність трикутника

Зв'язок між нормою та метрикою: $\|x\| = d(0,x)$

$d(x,y) = \|x-y\|$

**Ермітова форма** $(\cdot,\cdot): X\times X \to \mathbb{C}$

1) ермітова симетричність $(x_1, x_2) = \overline{(x_2, x_1)}$

лінійність відносно першого аргументу:

2) $(x_1 + x_2, x_3) = (x_1, x_3) + (x_2, x_3)$
3) $(\lambda x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2)$

$(x_1, \lambda x_2) = \overline{(\lambda x_2, x_1)} = \overline{\lambda(x_2, x_1)} = \bar{\lambda}(x_1, x_2)$

$(x,x) = \overline{(x,x)} \in \mathbb{R}$

4) $(x,x) \ge 0$ – ермітова форма додатна
5) $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – невиродженість

Невироджена додатна ермітова форма – скалярний добуток.

Приклади скалярних добутків:

- $\mathbb{R}^n: (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- $\mathbb{C}^n: (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$

Зв'язок між нормою та скалярним добутком: $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

**Теорема 13.1** Тотожність паралелограма

У б-е лінійному нормованому просторі можна ввести скалярний добуток, якщо для б-е його елементів виконується тотожність паралелограма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

□

$L_1$: $[0, 2\pi]$, $f = 1$, $g = \sin x$

$$\|f \pm g\|^2 = \left(\int_0^{2\pi} |1 \pm \sin x| dx\right)^2 = \left(\int_0^{2\pi} (1 \pm \sin x) dx\right)^2 = 4\pi^2$$

$\|f\|^2$

$$\|g\|^2 = \left(\int_0^{2\pi} |\sin x| dx\right)^2 = \left(2\int_0^{\pi} \sin x dx\right)^2 = 16$$

За тотожністю паралелограма $4\pi^2 + 4\pi^2 \neq 2(4\pi^2 + 16)$, тобто, в просторі $L_1$ немає скалярного добутку.

Скінченновимірний простір, у якому введений скалярний добуток – Евклідів, нескінченновимірному – Предгільбертовим.

Скалярний добуток в $L_2$: $(f,g) = \int_X f \bar{g} \, d\mu$

**Теорема 13.2** Лінійна комбінація ф-цій з простору $L_2$ належить цьому простору, тобто,

1) $f \in L_2$, $g \in L_2 \Rightarrow (f+g) \in L_2$

2) $f \in L_2$, $g \in L_2 \Rightarrow \alpha f \in L_2$, $\alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

Доведення: 1) $(f+g)^2 = f^2 + 2(f,g) + g^2$

$$(f-g)^2 = f^2 - 2(f,g) + g^2 \geq 0$$

$$(f,g) \leq \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2} g^2$$

2) $\int_X (\alpha f)^2 d\mu = \alpha^2 \int_X f^2 d\mu < \infty$

■

$H$ – предгільбертовий простір,

$\{e_k\}_{k=1}^{n}$ – ортонормована система векторів у цьому просторі

$|x|^2 = x \cdot \bar{x}$

Максимально наблизити $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ до $f$ (відстань – мінімальна)

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = (f,f) - \overline{\alpha_k} \sum_{k=1}^{n} (f, e_k) - \alpha_k \sum_{k=1}^{n} \overline{(f, e_k)} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = (f,f) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - (f,e_k)|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f,e_k)|^2$$

$$(\alpha_k - (f,e_k))\overline{(\alpha_k - (f,e_k))}$$

$\alpha_k = (f, e_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ – коефіцієнти Фур'є

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|^2 = (f,f) - \sum_{k=1}^{n} |(f,e_k)|^2 \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} |(f,e_k)|^2 \leq \|f\|^2$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |(f,e_k)|^2 \leq \|f\|^2$ – нерівність Бесселя

$\sum_{k=1}^{\infty} |(f,e_k)|^2$ – ряд Фур'є

**Теорема 13.3**. Якщо виконується рівність Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} |(f,e_k)|^2 = \|f\|^2$, то ряд Фур'є збіжний до відповідної ф-ції $f$ у Предгільбертовому просторі $H$, тобто,

$\forall f \in H$ $f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, e_k) e_k$

□

## Підрозділ 13.2. Тригонометрична система. Тригонометричний ряд Фур'є

Якщо на матеріальну точку діє сила, пропорційна відхиленню точки від початку координат, то положення цієї точки на осі $Ox$ задовільняє диференційному рівнянню:

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Такі ф-ції назив. гармоніками.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\overset{n}{\overset{\parallel}{\omega}} t + \varphi_n) = A_0 \cos\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nt \cdot \cos\varphi_n - \sin nt \cdot \sin\varphi_n) A_n =$$

26.11.16

$$= \underbrace{A_0 \cos\varphi_0}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{A_n \cos\varphi_n}_{a_n} \cos nt + \underbrace{(-A_n \sin\varphi_n)}_{b_n} \sin nt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$ – тригонометричний ряд Фур'є

$n = 1, 2 \ldots$

$\{1, \cos nt, \sin nt\}$ – тригонометрична система ф-цій

Розглянемо тригонометричну систему ф-цій на просторі $L_2[-\pi; \pi]$ – простір ф-цій з інтегрованим квадратом на $[-\pi; \pi]$, де в якості метрики взята міра Лебега на цьому відрізку.

Покажемо ортогональність тригонометричної системи ф-цій

$$(\sin nx, \sin mx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$(1, \sin nx) = 0$

$(1, \cos nx) = 0$

$(\cos nx, \cos mx) = 0$

$(\sin nx, \cos mx) = 0$

Отже, система ортогональна.

$(1,1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,dx = 2\pi$

(Зробимо систему ортонормованою)

$$(\cos nx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2\pi}\sin 2nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

$(\sin nx, \sin nx) = \ldots = \pi$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx;\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right\}$ – ортономована система.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty}(f,e_n)e_n = (f,e_0)e_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(f,e_n)e_n =$$

коеф. Фур'є – $(f, e_n)$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t)\,dt\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt\,dt\cdot\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\,dt\cdot\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\Big(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt}_{a_n}\Big)\cos nx + \Big(\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt}_{b_n}\Big)\sin nx\right) \ominus$$

Т.ч., б-я ф-ція з інтегрованим квадратом на $[-\pi;\pi]$ м.б. представлена як тригонометричний ряд Фур'є.

Отримаємо ряд Фур'є в комплексній формі:

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ $\qquad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$

$$\ominus\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} - b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{c_n}\Big)e^{inx} + \Big(\underbrace{\frac{a_n+ib_n}{2}}_{c_{-n}}\Big)e^{-inx}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}, \text{ де}$$

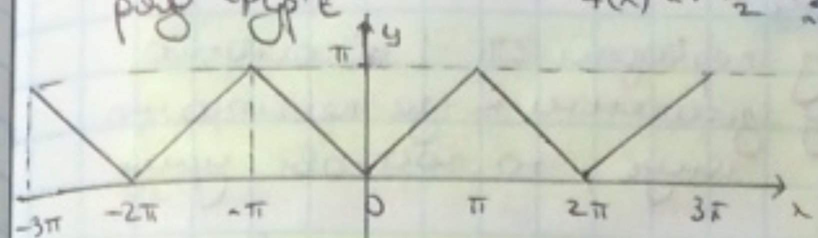
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}\,dt \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Заміна $x = \frac{\pi y}{l}$ $\Downarrow$ на $[-l; l]$

## Підрозділ 13.3 Достатні умови збіжності ряду Фур'є

Якщо ф-ції належ. простору $L_1[-\pi;\pi]$, то можемо підрахувати інтеграли, тобто зіставити ф-ції відповідний ряд Фур'є

$$f(x) \leftrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$$




$y = |x|$

$\underbrace{[-\pi;\pi]}_{T = 2\pi}$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\underbrace{(t-x)}_{u}\right)dt \ominus$$

$\sin\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{u}{2}\right)$

$+$

$\sin\frac{3u}{2} - \sin\frac{u}{2} = 2\cos u\sin\frac{u}{2} = \cos u\left(2\sin\frac{u}{2}\right)$

$+ \ \ldots$

$+$

$\sin\frac{2n+1}{2}u - \sin\frac{2n-1}{2}u = \cos nu\left(2\sin\frac{u}{2}\right)$

$$\sin\frac{2n+1}{2}u = 2\sin\frac{u}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos u + \ldots + \cos nu\right) \Rightarrow \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku$$

$$\ominus\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{t-x}{2}}\,dt$$ – інтеграл Діріхле

$$= (z = t - x) = \int_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\pi\sin\frac{z}{2}}\,dz$$

$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\pi\sin\frac{z}{2}} =: D_n(z)$ – ядро Діріхле

$$\int_{-\pi}^{\pi}D_n(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{2\pi\sin\frac{z}{2}}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos z + \cos 2z + \ldots + \cos nz\right)dz = 1$$

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}f(x)D_n(z)\,dz$$

$$S_n(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+z) - f(x)\right)D_n(z)\,dz$$

**Теорема 13.4** **Рімана – Лебега**

Якщо ф-цію $\varphi$ можна представити як граничну рівномірно збіжної послідовності простих ф-цій на $[a,b]$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi(x)\sin nx\,dx = 0$ □

**Теорема 13.5** **Умови Діні**

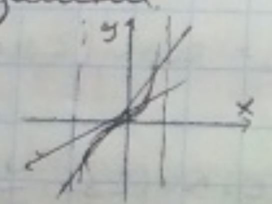
Якщо ф-ція $f$ періодична з періодом $2\pi$ і абсолютно інтегровна, а при фіксованому значенні $x$ за певного значення $\delta>0$ $\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt$ існує, то часткові суми ряду Фур'є від ф-ції $f$ збіжні в цій точці $x$ до ф-ції $f(x)$.

Доведення. Було показано, що $S_n(x)-f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+z)-f(x)\big)D_n(z)dz =$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\frac{z/2}{\sin z/2}\cdot\sin\frac{2n+1}{2}z\,dz \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доведемо, що цей інт. існує: він є збіжний за умовою теореми з точністю до лінійної заміни

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$



$x = tg\,x$

015-2 Викон. дост. умови збіжності, ці умови – умови Діні. ■

03.12.16 Умови Діні виконуються, якщо в даній точці $x$ ф-ція $f$ неперервна і має скінченну похідну або, принаймні, ліву і праву похідну.

Висновки теореми 13.5 будуть справедливі, якщо замість збіжності $\int\limits_{-\delta}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right|dt$ будуть збіжними наступні два інтеграли: $\int\limits_{-\delta}^{0}\left|\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}\right|dt$, $\int\limits_{0}^{\delta}\left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right|dt$

(маємо точку розриву першого роду в т. 0)

В цьому випадку всі викладки теореми 13.5 повторюються, але $S_n - f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ замінюємо на $S_n - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Отже, якщо ф-ція $f$ абсолютно інтегровна, кусково-гладка і періодична з періодом $2\pi$, то її ряд Фур'є є збіжним всюди, а його сума дорівнює $f(x)$ в точках неперервності і дорівнює $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точках розриву.

Неперервній ф-ції з періодом $2\pi$ можна однозначно зіставити її ряд Фур'є, але цей ряд Фур'є може бути розбіжний.

**Суми Фейєра ф-ції $f$** – вирази, що дорівнюють середньому арифметичному часткових сум ряду Фур'є відповідної ф-ції $f$.

$$\sigma_k(x) \equiv \frac{S_0(x)+S_1(x)+\ldots+S_{k-1}(x)}{k} = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1}S_n(x) =$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}dz\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi k}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{k-1}\sin\frac{2n+1}{2}z\right)}_{\psi(z)}\frac{f(x+z)}{\sin\frac{z}{2}}dz \circeq$$

$$\sum_{n=0}^{k-1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z \equiv \psi(z)$$

$$\psi(z)\cdot 2\sin\frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{k-1}2\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)\sin\frac{z}{2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{k-1}\big(\cos nz - \cos(n+1)z\big) = (1-\cos z)+(\cos z-\cos 2z)+$$

$$+\ldots+\big(\cos(k-1)z-\cos kz\big) = 1-\cos kz = 2\cdot\sin^2\frac{kz}{2}$$

$$\circeq \frac{1}{2\pi k}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{kz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2 f(x+z)dz =$$ – **інтеграл Фейєра**

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\,\Phi_k(z)dz$$

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{2\pi k}\left(\frac{\sin\frac{kz}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\right)^2$$ – **ядро Фейєра**

**Теорема 13.6** **Властивості ядра Фейєра**

1) $\Phi_k(z)\geq 0$
2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_k(z)dz = 1$
3) $\forall\delta>0$ $\int\limits_{-\pi}^{-\delta}\Phi_k(z)dz = \int\limits_{\delta}^{\pi}\Phi_k(z)dz \equiv \Phi_k(z)\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Доведення: 1) очевидно
2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_k(z)dz = \ldots$

$$S_n(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(\ldots)}_{\text{нехай}=1}\Big(\frac{1}{2}+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\cos jz}_{\text{інт. від }\cos = 0}\Big)dz = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dz = 1$$

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{k-1} S_n(z) = 1$$

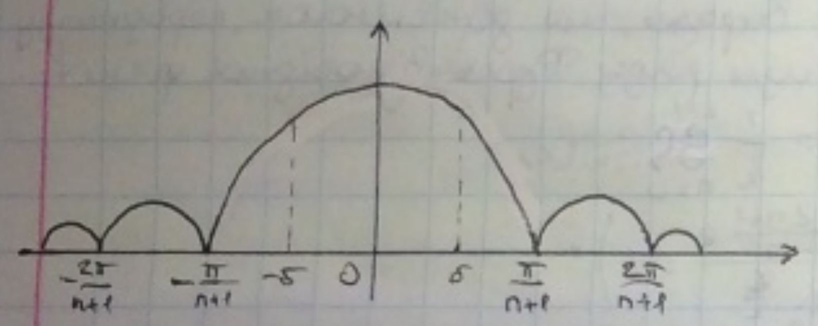
З іншого боку, $\ominus \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(z)dz$.

3)

3) $\int_{\delta}^{\pi} \Phi_k(z)dz = \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{2\pi k}\cdot\frac{\sin^2\frac{kz}{2}}{\sin^2\frac{z}{2}}dz \le \frac{1}{2\pi k}\int_{\delta}^{\pi}\frac{dz}{\sin^2\frac{z}{2}} =$

$$= \frac{1}{\pi k}\int_{\delta}^{\pi}\frac{d(z/2)}{\sin^2\frac{z}{2}} = \frac{1}{\pi k}\left(-\mathrm{ctg}\frac{z}{2}\right)\Big|_{\delta}^{\pi} = \frac{1}{\pi k}\,\mathrm{ctg}\frac{\delta}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

■




Графічне представлення ядра Фейєра.

**Теорема 13.7 Фейєра**

Якщо ф-ція $f$ неперервна з періодом $2\pi$, то послідовніст $\{\sigma_k\}$ її часткових сум Фейєра збіжна до ф-ції $f$ на всій числовій прямій.

Доведення $|\sigma_k(x) - f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\Phi_k(z)dz - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_k(z)dz\right| \ominus$

$\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_k(z)dz = 1 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_k(z)dz = f(x)$

$\ominus \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+z) - f(x))\Phi_k(z)dz\right| \overset{\text{адит., оц. модуля інт.}}{\le} \int_{-\pi}^{-\delta}|f(x+z) - f(x)|\Phi_k(z)dz +$

$+ \int_{-\delta}^{\delta}|f(x+z) - f(x)|\Phi_k(z)dz + \int_{\delta}^{\pi}|f(x+z) - f(x)|\Phi_k(z)dz$

Для 1-го і 3-го інтегралу, оскільки $f$ неперервна і періодична з періодом $2\pi$, отже, $f$ неперервна на відрізку $\overset{\text{теор. Вейєрштрасса}}{\Rightarrow}$ обмежена на відрізку, $\Rightarrow$ в силу періодичності обмежена якоюсь сталою $M$ на всій числовій прямій $\Rightarrow$ $|f(x+z) - f(x)| \le 2M \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{\delta}^{\pi}|f(x+z) - f(x)|\Phi_k(z)dz \le 2M\varphi_k(z) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$,

отже 1-ий і 3-ій інтеграл можна зверху оцінити нескінченно малою величиною.

Для 2-го інтегралу, оскільки $f$ неперервна і періодична з періодом $2\pi$, згідно теореми Кантора $f$ рівномірно неперервна на відрізку, в силу періодичності – і на всій числовій прямій.

Тоді $|f(x+z) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{-\delta}^{\delta}|f(x+z) - f(x)|\Phi_k(z)dz \le \varepsilon\varphi_k(z) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

■

## Підрозділ 13.6 Наближення неперервних ф-цій поліномами

Ф-ції наст. вигляду $\frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} A_j\cos jx + B_j\sin jx$, де $A_j^2 + B_j^2 \ne 0$, – тригонометричні поліноми

**Теорема 13.8 Вейєрштрасса**

Якщо $f$ – неперервна ф-ція на $[-\pi;\pi]$ і періодична з періодом $2\pi$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists$ тригон. поліном $T(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$

Доведення. В якості тригонометричного полінома $T(x)$ можна взяти, наприклад, відповідну суму Фейєра $\sigma_k(x)$. Сума Фейєра, за побудовою, є тригонометричним поліномом, згідно 13.7, відрізняється від $f(x)$ в усіх точках чис. прямої не більше ніж на неск. мале $\varepsilon$. ■

**Теорема 13.9 Вейєрштрасса**

Якщо ф-ція $f$ неперервна на $[a,b]$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists$ звичайний (алгебраїчний) поліном $P(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$

Доведення. $[-\pi;\pi] \to [a,b]$ $\quad a = -\pi k + \alpha \quad \Rightarrow k = \frac{b-a}{2\pi}$

$t = kx + \alpha \quad b = \pi k + \alpha$

$\alpha = \frac{a+b}{2}$

$\frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} A_j\cos jx + B_j\sin jx$

$\sum_{i=0}^{m} c_i t^i$ , тобто, наближуємо алгебраїчним поліномом. ■

Якщо $f$ – неперервна на $[a,b]$ ф-ція. Якщо оберемо деяку послідовніст $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad \varepsilon_n = \frac{1}{n}$

Тоді згідно теореми 13.9 знайдеться така послідовніст поліномів $\{P_n\}$ ($n$ – номер полінома), що $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon_n$ $\forall x\in[a,b]$. $P_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ $\forall x\in[a,b]$

(Б-я рівномірна збіжність неперервних ф-цій збігається до неперервної ф-ції)

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\qquad$ Можна зробити апроксімацію неперервної функції поліномом

$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$

## Підрозділ 13.7. Інтеграл Фур'є

### Теорема 13.10

Якщо ф-ція $f$ абсолютно інтегровна на всій числ. прямій і в т. $x$ задовільняє умовам Діні, то має місце інтегральна формула Фур'є: $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$

Доведення. Введемо інтеграл $J(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt \circledeq$

За умовою ф-ція абсолютно інт., тоді внутр. інтеграл існує, $|f(t)\cos\lambda(t-x)| \le |f(t)|$ – обмеж. зверху

Подвійний інтеграл є рівномірно збіжний, тому за теоремою Фубіні змінимо порядок інтегрування:

$\frac{1}{\pi}$

$$\circledeq \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-x}\left(\int_0^A d\sin(\lambda(t-x))\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt = (z = t-x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+z)\frac{\sin Az}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin A}{z}\,dz = 1 \quad \text{при } A>0$$

$$J(A) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(x+z)-f(x)\right)\sin\frac{Az}{z}\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\left(f(x+z)-f(x)\right)\frac{\sin Az}{z}\,dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{|z|\ge N} f(x+z)\sin\frac{Az}{z}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_{|z|\ge N} f(x)\frac{\sin Az}{z}\,dz$$

Інт. Діріхле є збіжний, за рахунок вибору $N$ інтеграл $\frac{1}{\pi}\int_{|z|\ge N} f(x)\sin\frac{Az}{z}\,dz$

Ф-ція $f$ за умовою інт., $\sin\frac{Az}{z}$ інтег. (інт. Діріхле) $\Rightarrow$ добуток двох інт. ф-цій – інт. ф-ція $\Rightarrow$ за рахунок вибору $N$ можна зробити як завгодно малим інт. $\frac{1}{\pi}\int_{|z|\ge N} f(x+z)\sin\frac{Az}{z}\,dz$

За теоремою Рімана–Лебега інтеграл $\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N}\left(f(x+z)-f(x)\right)\frac{\sin Az}{z}\,dz$ також як-завгодно малий.

В правій частині 3 нескінч. малі інтеграли $\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

■

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,V.P.\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$ – інший запис формули Фур'є

$$0 = \frac{1}{2\pi}\,V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)\,dt$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\,dt$$ – комплексна формула Фур'є.

Покажемо, що інтеграл Фур'є можна отримати з ряду Фур'є за допомогою граничного переходу.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)\right)dt\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt}_{\downarrow_{l\to\infty}\, 0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)\,dt\right)}_{\text{інтегральна сума для } \int_0^{\infty} F(\lambda)d}$$

$$\xrightarrow{l\to\infty} \int_0^{\infty} F(\lambda)\,d\lambda \qquad F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l} \qquad \Delta\lambda = \frac{\pi}{l}$$

Отже, інтеграл Фур'є – границя відповідної суми Фур'є.

Інший вигляд формули Фур'є:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\cos\lambda t\cos\lambda x + \sin\lambda t\sin\lambda x\right)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt\right)}_{a_\lambda}\cos\lambda x + \underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt\right)}_{b_\lambda}\sin\lambda x\right)d\lambda =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\sin\lambda x\right)d\lambda$$

## Підрозділ 13.8 Перетворення Фур'є

17.12.16

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}\,dt$$

перетворення Фур'є:

$$F[f] = g(\lambda) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda t}\,dt$$

(Відм. $e^{\pm}$, V.P, умови Діні + формула + позначення)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}\,d\lambda$$ – формула обернення

$F^{-1}[f]$ – обернене перетворення Фур'є

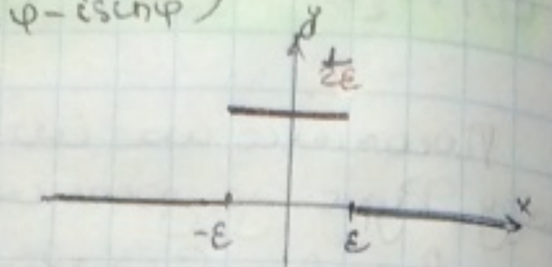
**Приклад** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & x \in [-\varepsilon; \varepsilon] \\ 0, & x \notin [-\varepsilon; \varepsilon] \end{cases}$

Підрахувати перетворення Фур'є.

$$F[t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2\varepsilon} \frac{e^{-i\lambda t}}{-i\lambda} \Big|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda\varepsilon} \frac{e^{i\lambda\varepsilon} - e^{-i\lambda\varepsilon}}{2\varepsilon} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \lambda\varepsilon}{\lambda\varepsilon}}_{} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$




$\varepsilon \to 0$ – ліміт початкової ф-ції в $\infty$ не існує

$\delta$-ф-ції Дірака

## Властивості перетворен Фур'є

**① Оберненість**

Якщо ф-ція $f$ абсолютно інтегровна на всій числовій прямій і, наприклад, задовільняє умовам Діні, то має місце: $F^{-1}[F[f]] = V.P.\ F[F^{-1}[f]] = f$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt = (\alpha = -\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P. \int_{+\infty}^{-\infty} d(-\alpha) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \Big( \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt}_{V.P.} \Big) e^{-i\alpha x} d\alpha = V.P.\ F[F^{-1}[f]]$$

**② Лінійність**

Перетворення Фур'є і обернене перетворення Фур'є – лінійні ф-ції:

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g]$$
$$F^{-1}[\alpha f + \beta g] = \alpha F^{-1}[f] + \beta F^{-1}[g] \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Доведення очевидно випливає з лінійності інтегралу.

**③** Якщо послідовність $f_n$ ф-цій з простору $L_1(-\infty; +\infty)$ збіжна, то перетворення Фур'є від елементів цієї ф-ції збіжні рівномірно: $\{f_n\}$ – зб. в $L_1(-\infty; +\infty) \Rightarrow g_n \equiv F[f_n]$ – рівн. зб. на $\mathbb{R}$

$$|g_{n+p}(\lambda) - g_n(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |f_{n+p}(t) - f_n(t)|\, dt}^{<\varepsilon} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \|f_{n+p}(t) - f_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\left( |e^{-i\lambda t}| = \sqrt{\cos^2\lambda t + (-i\sin\lambda t)^2} = 1 \right)$$

**④** Перетворення Фур'є абсолютно інтегровної ф-ції $f$ є обмеженою неперервною ф-цією, котра $\to 0$ при $|\lambda| \to \infty$

Обмеженість: $g = F[f]$

$$|g(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx}_{<\infty}$$

Неперервність: Покажемо, що $f$ – неперервна у випадку, коли $f$ – характеристична ф-ція на $(a, b)$

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} \Big|_a^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}, \text{ при } \lambda \ne 0$$

$$g(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^0 dx = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}$$

Треба показати, що $\lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda} = \frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}$ (для неперервності)

за пр-лом Лопіталя

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda} = 0$$

**⑤** Перетворення Фур'є від похідної ф-ції дорівнює перетворенню Фур'є від початкової ф-ції, помнож. на $i\lambda$

$F[f'] = i\lambda F[f]$

$$F[f'](\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} df(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big( \underbrace{f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{} + \underbrace{i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx}_{i\lambda F[f]} \Big) \qquad \begin{pmatrix} t \equiv x - \\ \text{не важливо} \end{pmatrix}$$

ф-ція $f$ повинна бути така, щоб $f(x) e^{-i\lambda x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

Зауваж. $F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f]$

**⑥** Якщо ф-ції $f(x)$ і $x \cdot f(x)$ – абсолютно інтегровні, тоді перетворення Фур'є ф-ції $f$ – диференційована ф-ція і $g'(\lambda) = F[-ixf(x)]$ $\quad (g = F[f])$

$$g'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right) = \begin{pmatrix} \text{операції інтегрування і} \\ \text{диференціювання можна змінити місцями} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d}{d\lambda} (e^{-i\lambda x}) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix) f(x) e^{-i\lambda x} dx = F[-ixf(x)]$$

Згортка двох ф-цій $f_1$ і $f_2$ : $(f_1 * f_2)(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,dt$

7 Перетворення Фур'є від згортки ф-цій:
$F[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi}\, F[f_1] \cdot F[f_2]$

$$F[f_1 * f_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,dt \right) e^{-i\lambda x} dx = \left(\text{викон. умови теореми Фубіні}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-t) e^{-i\lambda x} dx \right) dt = (y = x-t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\lambda t} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{-i\lambda y} dy \right) dt = \sqrt{2\pi}\, F[f_1] \cdot F[f_2].$$