算法设计与分析

主讲人：吴庭芳

Email: *tfwu@suda.edu.cn*

苏州大学 计算机学院







第十二讲 贪心算法

内容提要：

- 贪心算法思想
- 活动选择问题
- 贪心算法原理

贪心算法思想

- **求解最优化问题的算法通常需要经过一系列的步骤，在每个步骤面临多种选择。使用动态规划算法是将这些选择都计算一遍，从而得到最优选择**
- **实际上，对于有些问题可以使用更简单、更高效的算法：贪心算法**
  - 贪心算法是这样一种策略：它在每一步都做出当时看起来最佳的选择，也就是做出局部最优的选择，并寄希望这样的选择最终能导致全局最优解
  - 贪心算法并不保证得到最优解，但对很多问题确实可以求得最优解
  - 贪心方法是一种强有力的算法设计方法，可以很好地解决很多问题，比如最小生成树算法、单源最短路径的 Dijkstra 算法等







第十二讲 贪心算法

内容提要：

- 贪心算法思想
- 活动选择问题
- 贪心算法原理

活动选择问题

- **调度竞争共享资源的多个活动选择问题：**
  - 假定有一个包含 n 个活动的集合 S={a_1，a_2，…，a_n}，这些活动使用同一个资源（例如同一个教室），而这个资源在某个时刻只能供一个活动使用
  - 每个活动 a_i 都有一个开始时间 s_i 和结束时间 f_i，其中 $0 \le s_i < f_i$。如果被选中，任务 a_i 发生在半开区间 $[s_i, f_i)$ 期间
  - 如果两个活动 a_i 和 a_j 满足 $[s_i, f_i)$ 和 $[s_j, f_j)$ 不重叠，则称它们是兼容的，即 $s_i \ge f_j$ 或 $s_j \ge f_i$
  - 在活动选择问题中，希望选出一个最大兼容活动集。不失一般性，设活动已经按照结束时间单调递增排序：

$$f_1 \leqslant f_2 \leqslant f_3 \leqslant \cdots \leqslant f_{n-1} \leqslant f_n$$

活动选择问题

- **例如：设有 11 个待安排的活动，它们的开始和结束时间如下，并假设活动已经按结束时间的非减序排序：**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

按结束时间的非减序排序

- 则 $\{a_3, a_9, a_{11}\}$、$\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$、$\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$ 都是兼容活动集合
- 其中 $\{a_1, a_4, a_8, a_{11}\}$、$\{a_2, a_4, a_9, a_{11}\}$ 是最大兼容活动集合。显然最大兼容活动集合不一定是唯一的

活动选择问题

- **活动选择问题分析：**
  - 可以通过动态规划方法将活动选择问题分为两个子问题，然后将两个子问题的最优解整合成原问题的一个最优解。在确定将哪些子问题用于最优解时，要考虑几种选择
  - 贪心算法更简单一些，只需要考虑一个选择（即贪心选择）。在做贪心选择时，只留下一个非空子问题

活动选择问题

- **活动选择问题的最优子结构**
  - 令 S_{ij} 表示在 a_i 结束之后开始，且在 a_j 开始之前结束的那些活动的集合

$$a_1 \;\cdots\cdots\; a_i \;\underbrace{\overbrace{a_{i+1} \;\cdots\cdots\; a_{k-1}}^{S_{ik}} \; a_k \; \overbrace{a_{k+1} \;\cdots\cdots\; a_{j-1}}^{S_{kj}}}_{S_{ij}} \; a_j \;\cdots\cdots\; a_n$$

  - 设 A_{ij} 是 S_{ij} 的一个最大兼容活动集合，并设 A_{ij} 包含活动 a_k（做出一个选择 k），则得到两个子问题：寻找 S_{ik} 的最大兼容活动集合（在 a_i 结束之后开始且 a_k 开始之前结束的那些活动）和寻找 S_{kj} 的最大兼容活动集合（在 a_k 结束之后开始且 a_j 开始之前结束的那些活动）
  - 令 $A_{ik}=A_{ij}\cap S_{ik}$，$A_{kj}=A_{ij}\cap S_{kj}$，则 A_{ik} 包含 A_{ij} 中 a_k 开始之前结束的活动子集，A_{kj} 包含 A_{ij} 中 a_k 结束之后开始的活动子集，因此有 $A_{ij} = A_{ik} \cup \{a_k\} \cup A_{kj}$（原问题 S_{ij} 的最优解 A_{ij} 由两个子问题的解所构成）

活动选择问题

- **活动选择问题具有最优子结构性，即：**
  - 证明：用剪切-粘贴法证明最优解 $A_{ij} = A_{ik} \cup \{a_k\} \cup A_{kj}$ 必然包含两个子问题 S_{ik} 和 S_{kj} 的最优解，即 A_{ik} 必是 S_{ik} 一个最大兼容活动子集，A_{kj} 必是 S_{kj} 一个最大兼容活动子集
    - 设 S_{kj} 存在另一个最大兼容活动集 A'_{kj}，满足 $|A'_{kj}| > |A_{kj}|$，则可以将 A'_{kj} 作为 S_{ij} 最优解的一部分。这样就构造出一个兼容活动集合，其大小

$$|A_{ik}|+|A'_{kj}|+1 > |A_{ik}|+|A_{kj}|+1 = |A_{ij}|,$$

与 A_{ij} 是最大兼容活动集合相矛盾

活动选择问题

动态规划方法

- 活动选择问题具有最优子结构性，所以可用态规划方法求解
- 令 $c[i, j]$ 表示集合 S_{ij} 的最优解大小，即兼容活动的个数，可以得到递归式如下：

$$c[i,j]=c[i,k]+c[k,j]+1$$

为了选择 k，有：

$$c[i,j]=\begin{cases}0 & \text{if } S_{ij}=\varnothing \\ \max\limits_{a_k\in S_{ij}}\{c[i,k]+c[k,j]+1\} & \text{if } S_{ij}\neq\varnothing\end{cases}$$

- 可以设计带备忘机制的或自底向上的动态规划算法进行求解

活动选择问题

活动选择问题的贪心算法

- 假如无需求解所有子问题就可以选择出一个活动加入到最优解中，那么可以省去上述递归式中考查所有选择的过程（遍历 k）。实际上，对于活动选择问题，只需考虑一个选择：贪心选择
- **贪心选择**：在贪心算法的每一步所做的当前最优选择（局部最优选择）
- 活动选择问题的贪心选择：每次总选择具有最早结束时间的兼容活动加入到集合 A 中
- **为什么?** 直观上，按这种方法选择兼容活动可以为未安排的活动留下尽可能多的时间。也就是说，该算法的贪心选择意义是使剩余的可安排时间段最大化，以便安排尽可能多的兼容活动

活动选择问题

- **活动选择问题的贪心算法**
  - 注意：选择最早结束的活动并不是本问题唯一的贪心选择方法
  - 练习16.1-3，其他贪心选择有：选择持续时间最短者、选择与其他剩余活动重叠最少者、以及选择最早开始者，但均不能得到最优解

活动选择问题

- 例：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

结束时间递增

- 由于活动已按结束时间单调递增的顺序排序，贪心选择就是活动 a_1。当做出贪心选择后，只剩下一个子问题需要求解：寻找在 a_1 结束后开始的活动
- 为什么不需要考虑在 a_1 开始前结束的活动？因为 $s_1 < f_1$，且 f_1 是最早结束时间，所以不会有活动的结束时间早于 s_1。因此所有与 a_1 兼容的活动都是在 a_1 结束之后开始
- 令 $S_k=\{a_i \in S \mid s_i \geq f_k\}$ 为在 a_k 结束之后开始的任务集合。当做出贪心选择，选择了 a_1 后，剩下的 S_1 是唯一需要求解的子问题

活动选择问题

- 例：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

结束时间递增

- 已经证明活动选择问题具有最优子结构性质，根据最优子结构性质：如果 a_1 在最优解中，那么原问题的最优解由活动 a_1 及子问题 S_1 的最优子解构成
- 对 S_1 可以继续按照相同的方式递归求解

活动选择问题

- **直觉正确吗？即按照上述贪心选择（最早结束的活动）方法选择的活动集合是问题最优解吗？即证明贪心选择性质**
- **定理 16.1** 考虑任意非空子问题 S_k，令 a_m 是 S_k 中结束时间最早的活动，则 a_m 必在 S_k 的某个最大兼容活动子集中。
- **证明：** 令 A_k 是 S_k 中的一个最大兼容活动子集，且 a_j 是 A_k 中结束最早的活动。1）若 $a_j = a_m$，则得证

  2）否则，令 $A'_k = (A_k - \{a_j\}) \cup \{a_m\}$，即将 A_k 中的 a_j 替换为 a_m。因为 A_k 中的活动都不相交， a_j 是 A_k 中结束时间最早的活动，而 a_m 是 S_k 中结束时间最早的活动，所以 $f_m \le f_j$，即 A'_k 中的活动也是不相交的。

  由于 $|A'_k| = |A_k|$，所以 A'_k 也是 S_k 的一个最大兼容活动子集，且包含 a_m，得证

活动选择问题

- **定理 16.1 的含义：选结束时间最早的 a_m 不会错!**
  - 对于活动选择问题，虽然可以用动态规划方法进行求解，但是并不需要这么麻烦
  - 相反，从 S_0 开始，可以反复选择结束时间最早的活动，重复这一过程直至不再有剩余的兼容活动。所得子集就是最大兼容活动集合
  - 由于结束时间严格递增，故只需按照结束时间的单调递增顺序处理所有活动，每个活动只需考查一次
  - 贪心选择算法通常是自顶向下设计：作出一个选择，然后求解剩余的那个子问题。而不是像动态规划策略那样自底向上地求解出很多子问题，然后再作出选择

活动选择问题

活动选择问题的贪心算法

- 采用自顶向下的设计：首先做出一个选择，然后求解剩下的子问题。每次选择将问题转化成一个规模更小的问题

```
RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, k, n)
1  m = k + 1
2  while m ≤ n and s[m] < f[k]      // find the first activity in S_k to finish
3      m = m + 1
4  if m ≤ n
5      return {a_m} ∪ RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, m, n)
6  else return Ø
```

查找 S_k 中最早结束的活动，直至找到第一个与 a_k 兼容的活动 a_m，即开始时间 s_m 大于活动 a_k 的结束时间 f_k

$m > n$，意味着在 S_k 中未找到与 a_k 兼容的活动

- 数组 s、f 分别表示 n 个活动的开始时间和结束时间，下标 k 指出要求解的子问题 S_k。并假定 n 个活动已经按照结束时间单调递增排列好，算法返回 S_k 的一个最大兼容活动集
- 初次调用：RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR(s, f, 0, n)

活动选择问题

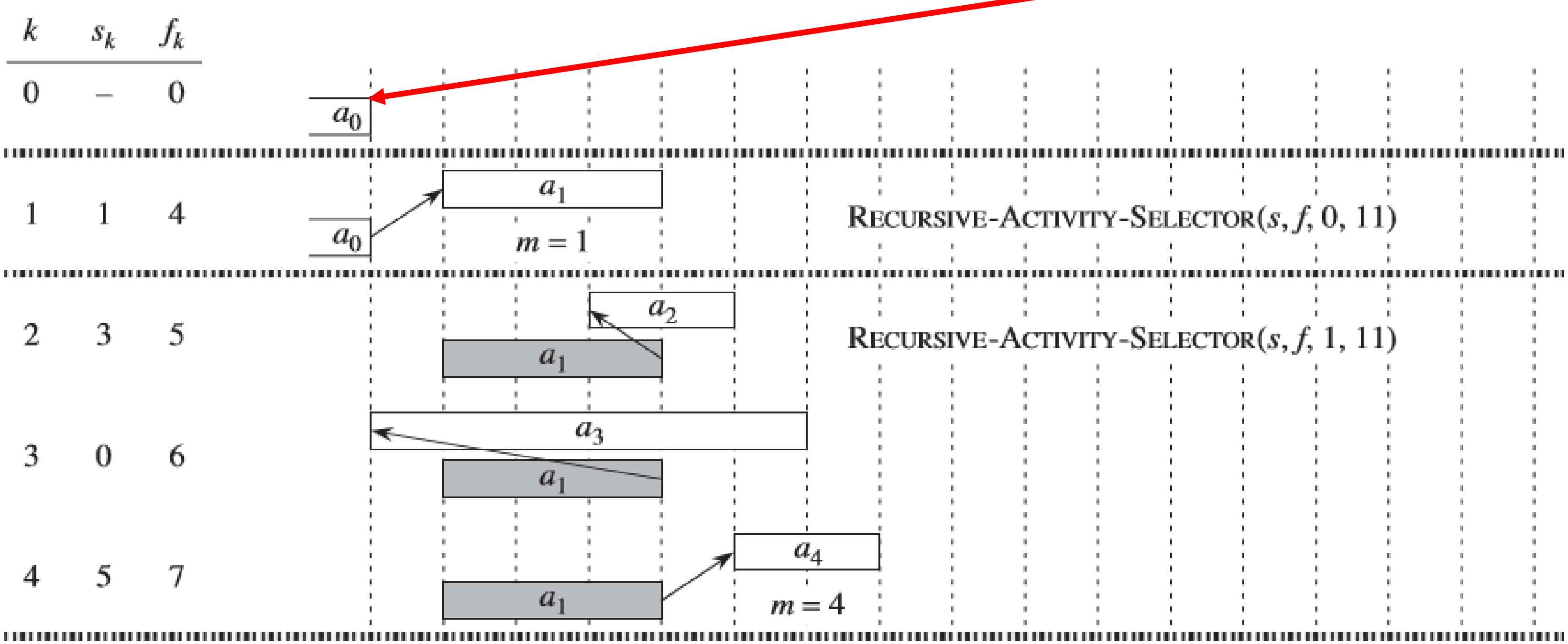
例：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

结束时间递增

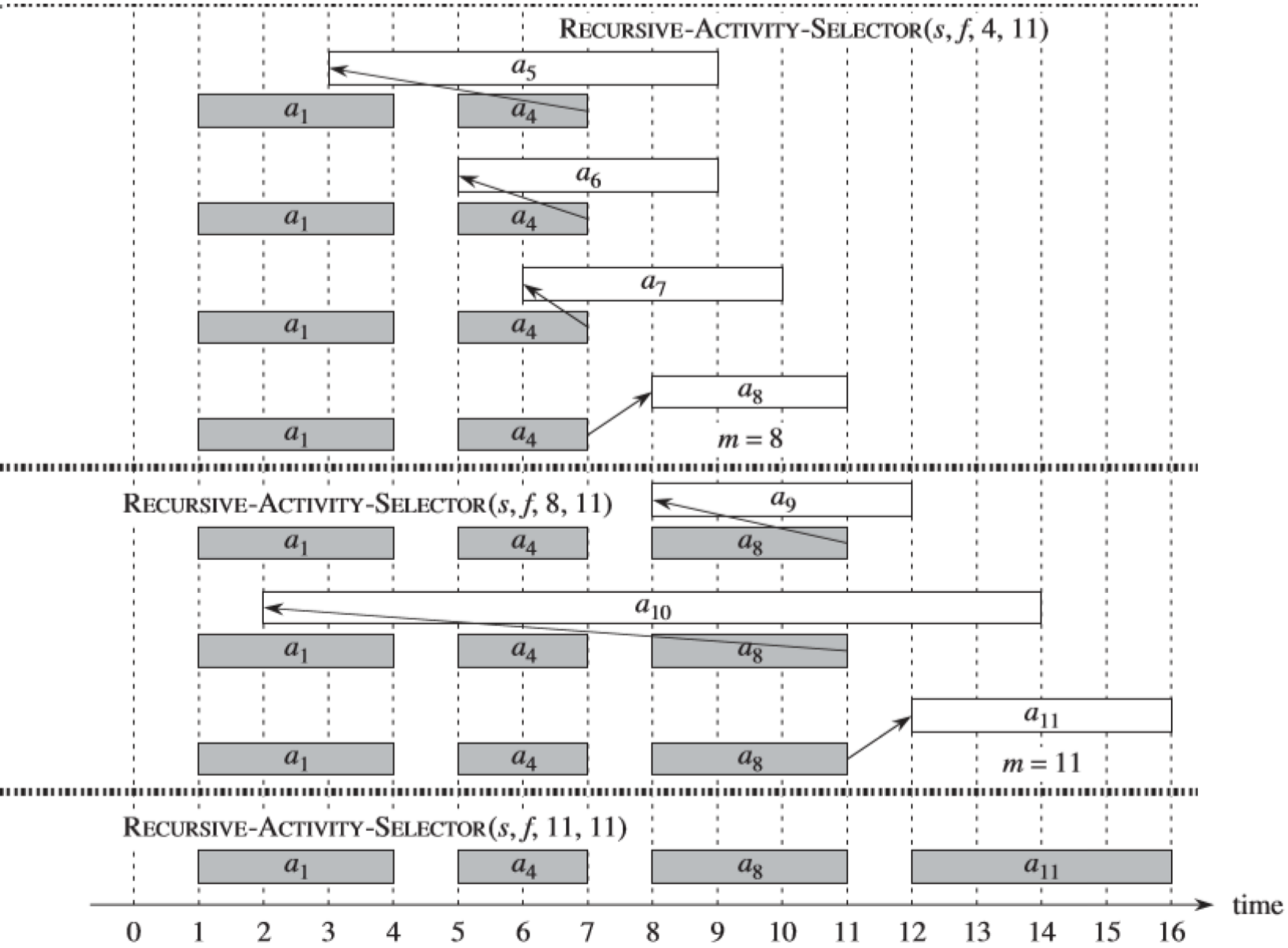
执行过程如图所示：

注：为了处理的方便，这里引入一个虚拟活动 a_0，其结束时间 $f_0 = 0$



活动选择问题

k	s_k	f_k
5	3	9
6	5	9
7	6	10
8	8	11
9	8	12
10	2	14
11	12	16



活动选择问题

- 例：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_i	1	3	0	5	3	5	6	8	8	2	12
f_i	4	5	6	7	9	9	10	11	12	14	16

结束时间递增

- 假定输入的活动已按结束时间的递增顺序排列，贪心算法只需 $O(n)$ 的时间即可选择出来 n 个活动的最大兼容活动集合。在整个递归调用过程中，每个活动被且只被第 2 行的 while 循环检查一次
- 如果所给出的活动未按非减序排列，可以用 $O(n\lg n)$ 的时间进行排序

活动选择问题

- **迭代实现的贪心算法**
  - 上述 RECURSIVE-ACTIVITY-SELECTOR 是一个“尾递归”过程：以一个对自身的递归调用再接一次并集操作结尾，可以很容易地转化为迭代形式
  - 假定活动已经按照结束时间单调递增的顺序排列好

```
GREEDY-ACTIVITY-SELECTOR(s, f)
n = s.length
A = {a_1}
k = 1
for m = 2 to n
    if s[m] ≥ f[k]
        A = A ∪ {a_m}
        k = m
return A
```

集合 A 用于存入选出的活动

变量 k 对应最后一个加入 A 的活动的下标

f_k 是 A 中活动的最大结束时间

for 循环查找 S_k 中最早结束的活动，若 a_m 与之前选出的活动兼容，即开始时间 s_m 大于 f_k，则将 a_m 加入 A

算法的运行时间是 O(n)







第十二讲 贪心算法

内容提要：

- □ 贪心算法思想
- □ 活动选择问题
- □ 贪心算法原理

贪心算法原理

- **贪心算法通过做出一系列选择来求问题的最优解**

——即**贪心选择**：在每个决策点，它做出在当时看来是最佳的选择

  - 这种**启发式策略**并不保证总能找到最优解，但对有些问题确实有效，相比动态规划算法，贪心算法简单和直接得多

- **贪心算法通常采用自顶向下的设计，做出一个选择，然后求解剩下的子问题。每次选择将问题转化成一个更小规模的问题**

贪心算法原理

- **贪心算法求解的一般步骤：**
  ① 确定问题的最优子结构
  ② 基于得到的递归式设计一个递归算法
  ③ 证明如果做出一个贪心选择，只剩下一个子问题需要求解
  ④ 证明贪心选择总是安全的
  ⑤ 设计一个递归算法实现贪心策略
  ⑥ 将递归算法转换为迭代算法
- 贪心算法以动态规划方法为基础：对于活动选择问题，首先定义子问题 S_{ij}，其中 i 和 j 都可变。如果总是做出贪心选择，则可以将子问题限定为 S_k 的形式

贪心算法原理

- **贪心算法求解的一般步骤：**
  - 通过贪心选择来改进最优子结构，使得选择后只留下一个子问题。在活动选择问题中，将子问题定义为 S_k 的形式；然后，证明贪心选择（S_k 中最早结束的活动 a_m）与剩余兼容活动集的最优解组合在一起，就会得到 S_k 的最优解
  - 更一般地，贪心算法设计步骤：（1）将最优化问题转化这样的形式：每次对其作出选择后，只剩下一个子问题需要求解

    （2）证明作出贪心选择后，原问题总存在最优解，即贪心选择总是安全的

    （3）证明作出贪心选择后，剩余的子问题满足：其最优子解与前面的贪心选择组合即可得到原问题最优解 (具有最优子结构)

贪心算法原理

- **对应每个贪心算法，都有一个动态规划算法，但动态规划算法要繁琐的多**
- **如何证明一个最优化问题适合用贪心算法求解?**
  - 没有适合所有情况的方法
  - **贪心选择性质**和**最优子结构性**是两个关键要素
  - 如果能够证明问题具有这两个性质，则向贪心算法迈出了重要一步

贪心算法原理

- **贪心选择性质：**
  - 贪心选择性质：可以通过做出局部最优（贪心）选择来构造全局最优解的性质
  - 贪心选择性质使得我们进行选择时，只需做出当前看起来最优的选择，而不用考虑子问题解

贪心算法原理

- **贪心策略 VS 动态规划策略：**
  - 在动态规划方法中，每个步骤也都要进行一次选择，但这种选择通常依赖于子问题的解。因此，通常以自底向上地方式求解动态规划问题，先求解较小的子问题，然后才能求解较大的子问题
  - 在贪心算法中，我们总是做出当前看来最佳的选择，然后求解剩下的唯一一个子问题。贪心算法进行选择时可能依赖之前做出的选择，但不依赖任何将来的选择或子问题的解
  - 动态规划要先求解子问题才能进行第一次选择，贪心算法在进行第一次选择之前不需要求解任何子问题
  - 动态规划算法通常采用自底向上的方式完成计算，而贪心算法通常是自顶向下的，每一次选择，将给定问题实例转换成更小的问题

贪心算法原理

- **如何证明每次贪心选择能生成全局最优解?**
  - 必须证明每个步骤做出贪心选择能生成全局最优解
  - 通常首先考查某个子问题的最优解，然后**用贪心选择替换某个其它选择**来修改此解，从而得到一个相似但更小的子问题
  - 如果进行贪心选择时不得不考虑众多选择，通常意味着可以改进贪心选择，使其更为高效。例如，活动选择问题中，假定已经将活动按结束时间单调递增顺序排好序，则对每个活动能够只需要处理一次。通过对输入进行预处理或者使用适合的数据结构，通常可以使贪心选择更快速、更高效

贪心算法原理

- **最优子结构性**
  - 含义：一个问题的最优解包含其子问题的最优解
  - 最优子结构性质是能否应用动态规划和贪心方法的关键要素
- **贪心算法更为直接地使用最优子结构：**
  - 通过对原问题应用贪心选择后即可得到子问题
  - 需要证明：将子问题的最优解与贪心选择组合在一起就能生成原问题的最优解

贪心算法原理

- **对比动态规划算法和贪心算法：**
  - 0-1 背包问题和分数背包问题：都具有最优子结构性质
    - 0-1 背包问题：动态规划算法
    - 分数背包问题：贪心算法，按 p_i / w_i 的降序考虑问题

贪心算法原理

- **0-1 背包问题问题描述：**
  - 一个正在抢劫商店的小偷发现了 n 个商品，第 i 个商品的重量是 w_i 磅，其价值为 v_i 美元， w_i 和 v_i 都是整数。小偷的背包最多容纳 W 磅重的商品， W 是一个整数
  - 小偷应如何选择装入背包的商品，使得装入背包中商品的总价值最大?
  - 小偷在选择装入背包的商品时，对每种商品 i 只有 2 种选择，要么完整拿走，要么把它留下；不能将商品 i 装入背包多次，也不能只装入部分的商品 i

贪心算法原理

- **分数背包问题问题描述：**
  - 设定与 0-1 背包问题类似，但对每个商品，小偷可以只拿走商品 i 的一部分，而不是只能做出二元（0-1）选择
  - 比如，可以将 0-1 背包问题中的商品想象为金锭，而分数背包问题中的商品更像金砂

贪心算法原理

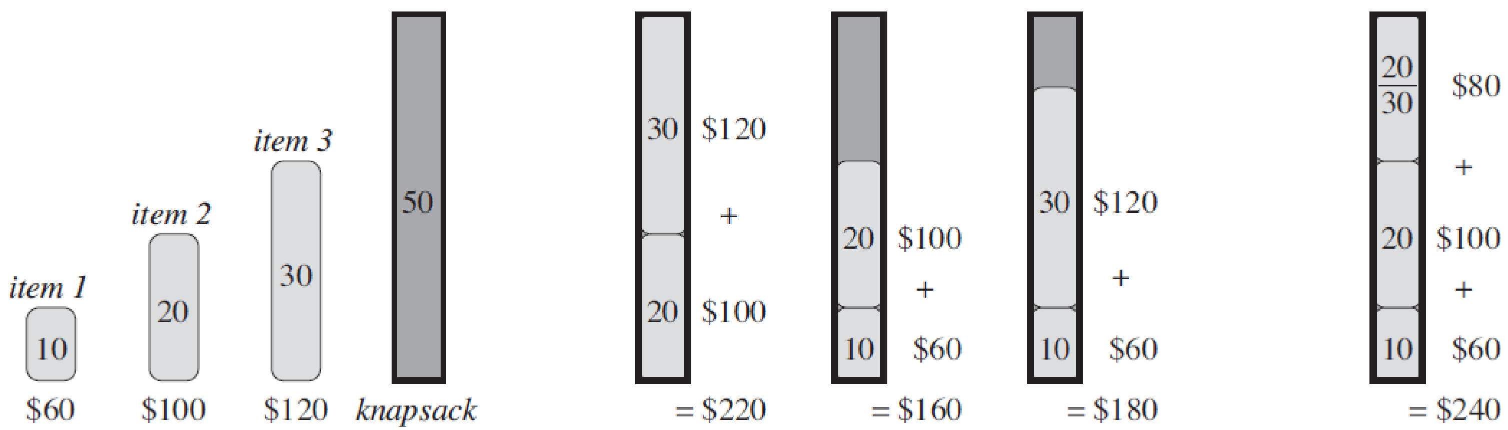
- **0-1 背包问题问题：**
  - 这 2 类背包问题都具有最优子结构性质
  - 对于 0-1 背包问题，考虑重量不超过 W 而价值最高的装包方案，如果将商品 j 从此方案中删除，则剩余商品必须是重量不超过 W-w_j 的价值最高的方案，即小偷只能从不包括商品 j 的 n-1 个商品中选择拿走哪些

贪心算法原理

- **用贪心算法解分数背包问题的基本步骤：**
  - 可以用贪心策略求解分数背包问题，而不能求解 0-1 背包问题
  - 首先计算每种商品每磅的价值 v_i/w_i。然后，遵循贪心策略，小偷首先尽可能多地拿走每磅价值最高的商品。如果该商品已全部拿走而背包尚未满，继续尽可能多地拿走每磅价值第二高的商品，依此类推，直至达到重量上限 W
  - 因此，通过将商品按每磅价值排序，贪心算法的运行时间为 $O(n\lg n)$

贪心算法原理

- 对于 0-1 背包问题，贪心策略是无效的
- 下图所给出的问题实例：商品 1 的每磅价值为 6 美元，商品 2 的每磅价值为 5 美元，商品 3 的每磅价值为 4 美元。对于 0-1 背包问题，按照上述贪心策略，首先拿走商品 1；而最优解为拿走商品 2 和商品 3，而留下商品 1
- 因此，贪心策略对于 0-1 背包问题之所以无效是因为在这种情况下，它无法保证最终能将背包装满，部分闲置背包空间使得每磅背包空间的价值降低了



贪心算法原理

- 事实上，在考虑 0-1 背包问题时，应比较选择该商品和不选择该商品所导致的最终方案，然后再作出最好选择，由此就导出许多互相重叠的子问题—这正是该问题可用动态规划算法求解的另一重要特征，实际上动态规划算法的确可以有效地解 0-1背包问题

0-1 背包问题

- **0-1 背包问题 Knap(1, n, c) 的形式化定义：**
  - 给定 $c > 0$，$w_i > 0$，$v_i > 0$，$1 \le i \le n$，求 n 元 0-1 向量 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，使得：

$$\max \sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant c \\ x_i \in \{0, 1\},\ 1 \leqslant i \leqslant n \\ w_i > 0,\ v_i > 0,\ c > 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

  - 例如：$w = (w_1, w_2, w_3) = (2, 3, 4)$，$v = (v_1, v_2, v_3) = (1, 2, 5)$，求 Knap(1, 3, 6)
  - 取 $x = (1, 0, 1)$，Knap(1, 3, 6) $= (v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3) = 1*1 + 2*0 + 5*1 = 6$ 最大

0-1 背包问题

- **0-1 背包问题 Knap(1, n, c) 具有最优子结构：**
  - **剪切-粘贴证明：** 设 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ 是 Knap(1, n, c) 的一个最优解，下证 $(y_2, \ldots, y_n)$ 是 Knap(2, n, c-w_1y_1) 子问题的一个最优解

    若不然，设 $(z_2, \ldots, z_n)$ 是 Knap(2, n, c-w_1y_1) 的最优解，因此有：

$$\sum_{i=2}^{n} v_i z_i > \sum_{i=2}^{n} v_i y_i \text{ 且 } \sum_{i=2}^{n} w_i z_i \le c - w_1 y_1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} v_i z_i > \sum_{i=1}^{n} v_i y_i \text{ 又有 } w_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} w_i z_i \le c$$

则说明 $(y_1, z_2, \ldots, z_n)$ 是 Knap(1, n, c) 的一个更优解，矛盾。

0-1 背包问题

- **0-1 背包问题子问题定义：**
  - 设所给 0-1 背包问题的子问题记为 Knap(i, n, j)，$j \le c$ （假设 c，w_i 取整数），其定义为：

$$\max \sum_{k=i}^{n} v_k x_k$$

$$\begin{cases} \sum_{k=i}^{n} w_k x_k \leqslant j \\ x_k \in \{0, 1\},\ i \leqslant k \leqslant n \\ w_k > 0,\ v_k > 0,\ j > 0,\ i \leqslant k \leqslant n \end{cases}$$

  - 设最优值（最大价值）为 $m(i, j)$，即 $m(i, j)$ 是背包容量为 j，可选物品为 $i, i+1, \ldots, n$ 的 0-1 背包问题的最优值

0-1 背包问题

- **最优值的递归式如下：**
  - 由最优子结构性质，可以计算出 $m(i, j)$ 的递归式如下：

$$m(i,\ j)=\begin{cases}\max\{m(i+1,\ j),\ m(i+1,\ j-w_i)+v_i\} & j\geqslant w_i\\ m(i+1,\ j) & 0\leqslant j<w_i\end{cases}$$

  - 面对每个物品，只有拿或者不拿两种选择。首先，声明一个大小为 $m(n, c)$ 的二维数组，$m(i, j)$ 表示在面对第 i 件物品，且背包容量为 j 时所能获得的最大价值，那么可以分析得出 $m(i, j)$ 的计算方法：
    - 如果放入第 i 个物品，背包的容量 $j < w_i$，相当于放入物品 i 是不合法的，此时 $m(i, j)$ 的值与 $m(i+1, j)$ 的值相等

0-1 背包问题

- **最优值的递归式如下：**
  - 由最优子结构性质，可以计算出 $m(i, j)$ 的递归式如下：

$$m(i,\ j)=\begin{cases}\max\{m(i+1,\ j),\ m(i+1,\ j-w_i)+v_i\} & j\geqslant w_i\\ m(i+1,\ j) & 0\leqslant j<w_i\end{cases}$$

- 如果再放入第 i 个物品，背包的容量仍然满足要求。此时，第 i 个物品有两种可能：选或者不选。如果选，背包的容量变小，改变为问题 $m(i+1, j-w_i)$，则 $m(i, j)$ 的值为 $m(i+1, j-w_i)+v_i$。如果不选，背包的容量不变，改变为问题 $m(i+1, j)$

说明：当 $j < w_i$ 时，只有 $x_i = 0$，$\therefore m(i, j) = m(i+1, j)$；

$$\text{当 } j \geq w_i \text{ 时，}\begin{cases}\text{取 } x_i = 0 \text{ 时，} & \text{为 } m(i+1, j)\\ \text{取 } x_i = 1 \text{ 时，} & \text{为 } m(i+1, j-w_i)+v_i\end{cases}$$

0-1 背包问题

- **最优值的递归式如下：**
  - $m[1][c]$ 中的值就是该背包问题的最大价值
  - 二维数组 m 中最先填入物品 n 的最优解 $m(n, j)$：

$$m(n,\ j)=\begin{cases} v_n & j \geqslant w_n \\ 0 & 0 \leqslant j < w_n \end{cases}$$

0-1 背包问题

- 0-1 背包问题的动态规划算法 Knapsack(v[], w[], c, n, m[][])：

```
Knapsack( v[], w[], c, n, m[][] )
{//输出m[1][c]
   jMax=min(w[n]-1, c);  //j≤jMax, 即0≤j<wn; j>jMax, 即j≥ wn
   for j=0 to jMax do  m[n][j]=0;      //0≤j<wn, (4)式
   for j=w[n] to c do   m[n][j]=v[n];   //j≥ wn, (3)式
   for i=n-1 dwonto 2 do  //i>1表示对i=1暂不处理, i=1时只需求m[1][c]
   {   jMax=min(w[i]-1, c);
       for j=0 to jMax do  //0≤j<wi, (2)式
           m[i][j]=m[i+1][j];
       for j=w[i]  to c  do    //j≥ wi, (1)式
           m[i][j]=max(m[i+1][j], m[i+1][j-w[i]]+v[i]);
   }
   if c>=w[1]  then  m[1][c]=max(m[2][c], m[2][c-w[1]]+v[1]);
   else m[1][c]=m[2][c];
}
```

0-1 背包问题

- **0-1 背包问题构造最优解：**

```
Traceback( w[], c, n, m[][], x[])
{//输出解x[1..n]
    for i= 1 to n-1 do
        if(m[i][c]=m[i+1][c])  x[i]=0;
        else
        {   x[i]=1;
            c -= w[i];
        }
    x[n]=(m[n][c])?1:0;
}
```

0-1 背包问题

- 例题：

W=5	1	2	3	4
重量w	2	1	3	2
价值v	12	10	20	15

- 从下向上，从左到右填表

n | j	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	37
2	0	10	15	25	30	35
3	0	0	15	20	20	35
4	0	0	15	15	15	15

第4行，只考虑物品4，物品4的重量是2，价值是15

- 背包容量为0和1的时候，放不进去4，因此p[4][0]=p[4][1]=0
- 背包容量为2,3,4,5的时候，放进一个4，因此p[4][2]=p[4][3]=p[4][4]=p[4][5]=15

0-1 背包问题

- **例题：**

W=5	1	2	3	4
重量w	2	1	3	2
价值v	12	10	20	15

n | j	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	37
2	0	10	15	25	30	35
3	0	0	15	20	20	35
4	0	0	15	15	15	15

- 从下向上，从左到右填表

第3行，只考虑物品4和3，物品4的重量2，价值15；物品3的重量3，价值20

$$p(i,\ j)=\begin{cases}\max(p(i+1,\ j),\ p(i+1,\ j-w_i)+v_i\} & j\ge w_i\\ p(i+1,\ j) & 0\le j<w_i\end{cases}$$

以p[3][5]为例，代入上述方程可得：

- p[3][5]=max(p[4][5],p[4][5-3]+20)=35
  - 5-3的3是物品3的重量，20是物品3的价值
  - 意思是j(5)>wi(3),此时物品3可以放进背包
    - 如果物品3性价比不高，就选择不放进来，p[3][5]=p[4][5]
    - 如果物品3性价比高，就选择放进背包，p[3][5]=p[4][2]+20，意思是物品3放入背包，背包容量变为2，而价值增加20

0-1 背包问题

- 例题：

W=5	1	2	3	4
重量w	2	1	3	2
价值v	12	10	20	15

➢ 从下向上，从左到右填表

n | j	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	37
2	0	10	15	25	30	35
3	0	0	15	20	20	35
4	0	0	15	15	15	15

我们最终需要的结果放在了p[1][5]中

求p[1][5]需要用到第二行的数据，而p[1][0~4]的数据都没有用，可以置0

- p[1][5]=max(p[2][5],P[2][5-2]+12)=37

分数背包问题

- **分数背包问题的形式化定义：**
  - 给定 $c>0$，$w_i>0$，$v_i>0$，$1\le i\le n$，求 n 元 0-1 向量 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，使得：

$$\max\sum_{i=1}^{n} v_i x_i$$

x_i为装入物品i的比例

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i \le c & w_i>0\\ 0\le x_i\le 1 & i=1,2,\ldots,n\\ v_i>0,\ w_i>0,\ c>0 & i=1,2,\ldots,n\end{cases}$$

w_i为重量，c为背包容量

v_i为价值

v_i/w_i为价值率(单位重量价值)

  - **例子：n=3，c=20，v=(25, 24, 15)，w= (18, 15, 10)，列举4个可行解：**

	(x_1, x_2, x_3)	$\sum w_i x_i$	$\sum v_i x_i$
①	(1/2, 1/3, $\frac{1}{4}$)	16.5	24.5
②	(1, 2/15, 0)	20	28.2
③	(0, 2/3, 1)	20	31
④	(0, 1, $\frac{1}{2}$)	20	31.5（最优解）

分数背包问题

- 贪心策略设计：
  - 策略1：按价值最大贪心，使目标函数增长最快

    按价值排序从高到低选择物品→②解（次最优解）
  - 策略2：按重量最小贪心，使背包重量增长最慢

    按重量排序从小到大选择物品→ ③解（次最优解）
  - 策略3：按价值率最大贪心，使单位重量价值增长最快

    按价值率排序从大到小选择物品→ ④解（最优）

分数背包问题

- 分数背包问题的贪心算法:

```
GreedyKnapsack(n, M, v[], w[], x[])
{   //按价值率最大贪心选择
    Sort(n, v, w);  //使得 v1/w1 ≥ v2/w2 ≥ … ≥ vn/wn
    for i = 1 to n do x[i]=0;
    c = M;
    for i = 1 to n do
    {
        if (w[i] > c) break;
        x[i]=1;
        c-=w[i];
    }
    if (i ≤ n) x[i] = c/w[i];  //使物品i是选择的最后一项
}
```

时间复杂度: $T(n) = O(n\lg n)$

分数背包问题

- **贪心选择的最优性证明：**
  - **定理：如果 $v_1/w_1 \ge v_2/w_2 \ge \ldots \ge v_n/w_n$，则 GreedyKnapsack 算法对于给定的背包问题实例生成一个最优解**
  - **证明基本思想：**

    把贪心解与任一最优解相比较，如果这两个解不同，就去找开始不同的第一个 x_i，然后设法用贪心解的 x_i 去代换最优解的 y_i，并证明最优解在分量代换之后其总价值保持不变，反复进行下去，直到新产生的最优解与贪心解完全一样，从而证明了贪心解是最优解。

分数背包问题

- 贪心选择的最优性证明：

– 证明：设$(x_1, \ldots, x_n)$是贪心算法求得的解

$Case1$：所有$x_i = 1$。显然该解就是最优解。

$Case2$：设$X = (1,\ldots,1,x_j,0,\ldots,0)$ $\quad x_j \neq 1, 1 \leq j \leq n$。下证$X$就是最优解。设问题的最优解$Y = (y_1,\ldots,y_n)$，则存在$k$使得$y_k \neq x_k$的最小下标（否则$Y = X$，得证）。

首先，可以证明$y_k < x_k$。（反证：若$y_k > x_k$，则$x_k \neq 1$，$\therefore k \geq j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \geq \sum_{i=1}^{k} w_i y_i > \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \geq \sum_{i=1}^{j} w_i x_i = c \;\therefore Y\text{不是可行解，矛盾）}$$

下面改造Y成为新解$Z = (z_1,\ldots,z_n)$，并使Z仍为最优解。将y_k增加到x_k，从$(y_{k+1},\ldots,y_n)$中减同样的重量使总量仍是c。即，

$$z_i = x_i \quad i = 1,2,\ldots,k; \quad \text{和} \quad w_k(z_k - y_k) = \sum_{i=k+1}^{n} w_i(y_i - z_i)$$

分数背包问题

- 贪心选择的最优性证明：

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} w_i z_i = \sum_{i=1}^{k-1} w_i z_i + w_k z_k + \sum_{i=k+1}^{n} w_i z_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} w_i y_i + w_k z_k + \left(\sum_{i=k+1}^{n} w_i y_i - w_k (z_k - y_k) \right) = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i = c$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} v_i z_i = \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + (z_k - y_k) v_k - \sum_{i=k+1}^{n} (y_i - z_i) v_i \quad // \because Z\text{由}Y\text{变得的}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + (z_k - y_k) w_k v_k / w_k - \sum_{i=k+1}^{n} (y_i - z_i) w_i v_i / w_i$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} v_i y_i + \left[(z_k - y_k) w_k - \sum_{i=k+1}^{n} (y_i - z_i) w_i \right] v_k / w_k \quad // \text{利用} v_i / w_i \downarrow$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i y_i$$

$\therefore Z$也是最优解，且$z_i = x_i \; i = 1, \ldots, k$； 重复上面过程 $\Rightarrow$ X为最优解。







谢谢！

Q & A

作业：16.1-3

16.2-1, 16.2-2