제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

1987년 제1회 KMO 기출문제

1. a, b, c가 0이 아닌 실수일 때

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$$

이면, $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$ 임을 증명하여라.

2. 음이 아닌 정수 n에 대하여 집합

$$A_n=\{(x,\ y)\,|\,|x|+|y|\le n,\ x,\ y\in\mathbb{Z}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $f(n)-f(n-1)$ (단, $n\ge 1$)

(2) $f(n)$

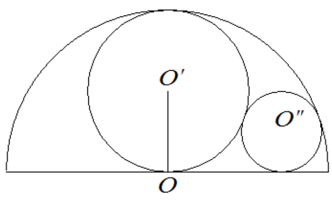
3. 두 양의 정수 p, q가 모두 소수이고 그 차가 2일 때, p, q를 쌍둥이 소수라고 한다. $pq+4$가 소수가 되는 쌍둥이 소수 p, q를 모두 구하여라.

4. $f_1(x)=(x-2)^2$, $f_2(x)=(f_1(x)-2)^2$, $\cdots$, $f_n(x)=(f_{n-1}(x)-2)^2$, $\cdots$ 일 때, $f_n(x)$의 상수항 a_n과 일차항의 계수 b_n을 구하여라.

5. $1987!=1\times2\times3\times\cdots\times1987$을 $a\times10^n$인 꼴로 나타낼 때, n을 구하여라. (단, a는 1의 자리 숫자가 0이 아닌 자연수이다.)

6. $\angle C=90^\circ$인 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 중점을 M, 꼭지점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 CH, CM은 $\angle C$를 삼등분한다. 이 때, $\triangle CHM:\triangle ABC$를 구하여라.

7. 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 $2r$인 반원 O에 반지름의 길이가 r인 원 O'이 내접하고 있다. 원 O'에 외접하고 반원 O에 내접하는 원 O''의 반지름의 길이를 구하여라.



8. $x^3+2x-1=0$의 근을 α라고 할 때, $(\alpha^2+\alpha+1)P(\alpha)=1$을 만족시키는 차수가 최소인 다항식 $P(x)$를 구하여라.

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

9. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$(단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)이 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)f(x-y)\leq \{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$$

을 만족시킬 때, 다음을 증명하여라.

(1) $f(-x)=-f(x)$

(2) $f(x+y)f(x-y)=\{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$

10. n이 $n\geq 3$인 자연수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$n^{n+1}>(n+1)^n$$

11. 세 변의 길이가 각각 자연수인 직각삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 자연수임을 증명하여라.

12. $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}$위에 점 D를 $\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$이 되도록 잡고, 변 AB위에 점 E, 변 BC위에 점 F를 $\overline{BE}:\overline{BF}=2:1$이 되도록 잡자. 선분 BD와 선분 EF의 교점을 G라 할 때, $\overline{EG}:\overline{GF}$를 삼각형의 세 변의 길이를 이용해 나타내어라.

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

1987년 제1회 KMO 풀이

1. a, b, c가 0이 아닌 실수일 때

$$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$$

이면, $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$ 임을 증명하여라.

$\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{a+b-c}{c}+2=\dfrac{a-b+c}{b}+2=\dfrac{-a+b+c}{a}+2$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{a+b+c}{c}=\dfrac{a+b+c}{b}=\dfrac{a+b+c}{a}$

(i) $a+b+c=0$

(ii) $a+b+c\neq 0$

$\dfrac{a+b+c}{c}=\dfrac{a+b+c}{b}=\dfrac{a+b+c}{a}\ \Leftrightarrow\ \dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}\ \Leftrightarrow\ a=b=c$

$\therefore a+b+c=0$ or $a=b=c$ ($\because$ (1), (2))

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

2. 음이 아닌 정수 n에 대하여 집합

$$A_n = \{(x,\ y) \mid |x| + |y| \le n,\ x,\ y \in \mathbb{Z}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $f(n) - f(n-1)$ (단, $n \ge 1$)

(2) $f(n)$

$f(n) - f(n-1)$의 값은 $|x| + |y| = n$을 만족하는 $(x,\ y)$의 개수와 같다.

$\therefore f(n) - f(n-1) = {}_2\mathrm{H}_n \times 2^2 - 2 \times {}_1\mathrm{H}_n \times 2 = 4n$

$\Leftrightarrow\ f(n) = f(n-1) + 4n$

$\Leftrightarrow\ f(n) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 4k = 1 + \frac{n(4+4n)}{2} = 2n^2 + 2n + 1$ ($n \ge 1$)

$\therefore f(n) = 2n^2 + 2n + 1$ ($n \ge 0$, $\because f(0) = 1$)

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

3. 두 양의 정수 p, q가 모두 소수이고 그 차가 2일 때, p, q를 쌍둥이 소수라고 한다. $pq+4$가 소수가 되는 쌍둥이 소수 p, q를 모두 구하여라.

(i) $p=3$, $q=5$ or $p=5$, $q=3$
$pq+4=3\times5+4=19$
(ii) p, $q\geq5$
5 이상의 소수 p'에 대하여 $p'\equiv\pm1 \pmod 6$이므로 5 이상의 쌍둥이 소수는 $6k-1$, $6k+1$ 꼴이다.
$\therefore pq+4=(6k+1)(6k-1)+4=36k^2+3=3(12k^2+1)$
$\therefore pq+4$가 소수가 되는 쌍둥이 소수 p, q는 3, 5이다.

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

4. $f_1(x)=(x-2)^2$, $f_2(x)=\left(f_1(x)-2\right)^2$, $\cdots$, $f_n(x)=\left(f_{n-1}(x)-2\right)^2$, $\cdots$ 일 때, $f_n(x)$의 상수항 a_n과 일차항의 계수 b_n을 구하여라.

$f_n(x) := g_n(x)+b_n x+a_n$

$f_{n+1}(x)=\left(f_n(x)-2\right)^2=\left(g_n(x)+b_n x+a_n-2\right)^2$

$a_{n+1}=\left(a_n-2\right)^2$, $a_1=4 \;\Rightarrow\; a_n=4$

$b_{n+1}=2b_n\left(a_n-2\right)=4b_n$, $b_1=-4 \;\Rightarrow\; b_n=-4^n$

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

5. $1987! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1987$을 $a \times 10^n$인 꼴로 나타낼 때, n을 구하여라. (단, a는 1의 자리 숫자가 0이 아닌 자연수이다.)

$2^{e_1} \| 1987!$, $5^{e_2} \| 1987!$ (e_1, $e_2 \in \mathbb{N}$)

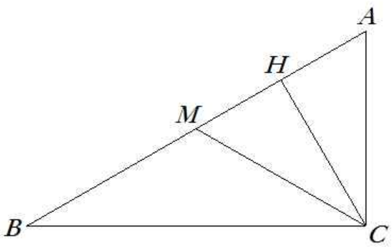
$$e_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1987}{2^i} \right] = 1856$$

$$e_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1987}{5^i} \right] = 494$$

$$\therefore 1987! = \alpha \times 2^{1856} \times 5^{494} = \alpha \times 2^{1362} \times 10^{494}$$

$$\therefore n = 494$$

6. $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 중점을 M, 꼭지점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 CH, CM은 $\angle C$를 삼등분한다. 이 때, $\triangle CHM : \triangle ABC$를 구하여라.



$\overline{AM} \perp \overline{CH}$, $\angle MCH = \angle ACH$이므로 $\triangle AMC$는 이등변삼각형이다.

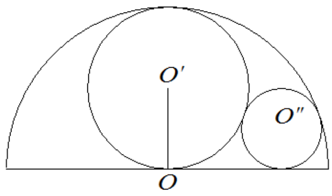
$\therefore \overline{AH} = \overline{HM}$

M이 $\overline{AB}$의 중점이므로 $\overline{BM} = \overline{AM} = 2\overline{HM}$

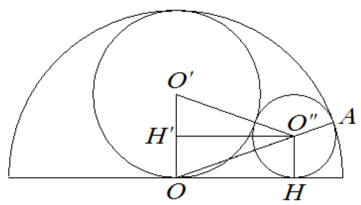
$\therefore \overline{AB} = 4\overline{HM}$

$\therefore \triangle CHM : \triangle ABC = \overline{HM} : \overline{AB} = \overline{HM} : 4\overline{HM} = 1 : 4$

7. 아래 그림과 같이 반지름의 길이가 $2r$인 반원 O에 반지름의 길이가 r인 원 O'이 내접하고 있다. 원 O'에 외접하고 반원 O에 내접하는 원 O''의 반지름의 길이를 구하여라.



O''에서 원 O의 지름에 내린 수선의 발을 H, $\overline{OO'}$에 내린 수선의 발을 H'이라 하고, 원 O''의 반지름을 r'이라고 하자.



$\overline{O'O''}=r+r'$

$\overline{OO''}=\overline{OA}-\overline{O''A}=2r-r'$

$\overline{OH'}=\overline{O''H}=r'$

$\overline{O'H'}=\overline{OO'}-\overline{OH'}=r-r'$

$\therefore \overline{O'O''}^2-\overline{OO''}^2=\overline{O'H'}^2-\overline{OH'}^2$

$\Rightarrow\ (r+r')^2-(2r-r')^2=(r-r')^2-r'^2$

$\Rightarrow\ r(r-2r')=0$

$\Rightarrow\ r'=\dfrac{r}{2}$

참고: 2018년 제 32 회 PKMO 고등부 오일러 7번

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

8. $x^3+2x-1=0$의 근을 α라고 할 때, $(\alpha^2+\alpha+1)P(\alpha)=1$을 만족시키는 차수가 최소인 다항식 $P(x)$를 구하여라.

$\alpha^3+2\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha^3-1=-2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=-2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha+1=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha}$

$\alpha^3+2\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha^3+2\alpha=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\alpha^2+1=\dfrac{1}{2\alpha}=\dfrac{1}{2}\alpha^2+1$

$\therefore (\alpha^2+\alpha+1)P(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{1-\alpha}P(\alpha)=1 \Leftrightarrow P(\alpha)=\dfrac{1-\alpha}{2\alpha}=\dfrac{1}{2\alpha}-\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\alpha^2+1\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\alpha^2+\dfrac{1}{2}$

$\therefore P(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

9. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$(단, $\mathbb{R}$은 실수 전체의 집합)이 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)f(x-y)\le \{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$$

을 만족시킬 때, 다음을 증명하여라.

(1) $f(-x)=-f(x)$

(2) $f(x+y)f(x-y)=\{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$

(1)

x, y에 각각 0을 대입하면 $\{f(0)\}^2 \le 0 \Rightarrow f(0)=0$

x에 0을 대입하면 $f(y)f(-y)\le -\{f(y)\}^2 \le 0 \cdots$ ①

y에 $-x$를 대입하면 $f(0)f(2x)\le \{f(x)\}^2-\{f(-x)\}^2 \Rightarrow \{f(x)\}^2 \ge \{f(-x)\}^2$

x에 $-x$, y에 x를 대입하면 $f(0)f(-2x)\le \{f(-x)\}^2-\{f(x)\}^2 \Rightarrow \{f(x)\}^2 \le \{f(-x)\}^2$

$\therefore \{f(x)\}^2 \ge \{f(-x)\}^2$, $\{f(x)\}^2 \le \{f(-x)\}^2$

$\Rightarrow \{f(x)\}^2 = \{f(-x)\}^2$

$\Rightarrow f(-x)=-f(x)$ ($\because$①)

(2)

x에 y, y에 x를 대입하면 $f(x+y)f(y-x)\le \{f(y)\}^2-\{f(x)\}^2$

$\Rightarrow -f(x+y)f(x-y)\le \{f(y)\}^2-\{f(x)\}^2$ ($\because f(-x)=-f(x)$)

$\Rightarrow f(x+y)f(x-y)\ge \{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$

$\therefore f(x+y)f(x-y)\le \{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$, $f(x+y)f(x-y)\ge \{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$

$\Rightarrow f(x+y)f(x-y)=\{f(x)\}^2-\{f(y)\}^2$

제작자: sakari
제작자 블로그: http://blog.naver.com/01tmdgns

10. n이 $n \geq 3$인 자연수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$n^{n+1} > (n+1)^n$$

(i) $n = 3$

$81 = 3^4 > 4^3 = 64$

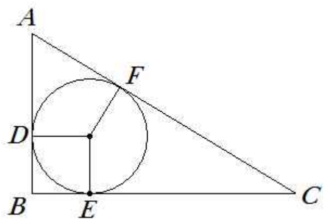
(ii) $n = k$일 때 성립한다고 가정하자.

$k^{k+1} > (k+1)^k$

$$(k+1)^{k+2} > (k+1)^{k+1}(k+1) > (k+1)^{k+1}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}} = (k+1)^{k+1}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = (k+2)^{k+1}$$

따라서 $n = k$일 때 성립하면 $n = k+1$일 때도 성립하므로 $n^{n+1} > (n+1)^n$은 $n \geq 3$인 자연수 n에 대하여 성립한다.

11. 세 변의 길이가 각각 자연수인 직각삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 자연수임을 증명하여라.



$\triangle ABC$의 내심에서 세 변에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하고, 내접원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

$\overline{BD} = \overline{BE} = r$

$\overline{CA} = \overline{AF} + \overline{BE} = \overline{BD} + \overline{CE} = (\overline{AB} - r) + (\overline{BC} - r) = \overline{AB} + \overline{BC} - 2r$

$r = \dfrac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{CA}}{2}$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$가 모두 짝수이거나 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 중에 하나만 짝수이고 나머지는 모두 홀수임으로 r은 자연수이다.

12. $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}$위에 점 D를 $\overline{AD}:\overline{DC}=2:1$이 되도록 잡고, 변 AB위에 점 E, 변 BC위에 점 F를 $\overline{BE}:\overline{BF}=2:1$이 되도록 잡자. 선분 BD와 선분 EF의 교점을 G라 할 때, $\overline{EG}:\overline{GF}$를 삼각형의 세 변의 길이를 이용해 나타내어라.

$\overline{EF}$와 평행한 선분 $\overline{AF'}$을 긋자.
메넬라우스의 정리에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}\times\frac{\overline{F'G'}}{\overline{AG'}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{BF'}}=1\Rightarrow\ \frac{2}{1}\times\frac{\overline{F'G'}}{\overline{AG'}}\times\frac{\overline{BC}}{\frac{\overline{AB}}{2}}=1\ \Rightarrow\ \frac{\overline{F'G'}}{\overline{AG'}}=\frac{\overline{AB}}{4\overline{BC}}$$

$\therefore \overline{EG}:\overline{GF}=\overline{AG'}:\overline{G'F'}=4\overline{BC}:\overline{AB}$