Chương 5:
TÍNH TOÁN HÌNH THỨC TRONG MATLAB (SYMBOLIC)

Minh-Phuong Tran

Ton Duc Thang University

Ngày 29 tháng 2 năm 2016

NỘI DUNG

1. 5. Tính toán hình thức trong MATLAB (Symbolic)
    - 5.1. Giới thiệu
    - 5.2. Các phép tính vi tích phân
    - 5.3. Giải phương trình đại số
    - 5.4. Giải phương trình vi phân thường

5.1.1. Tính toán hình thức là gì?

- Để dùng được bộ công cụ ta phải định nghĩa một loại dữ liệu đặc biệt khác với các loại dữ liệu khác trong MATLAB- đó là symbolic (ký hiệu).
- Symbolic là một cấu trúc dữ liệu lưu lại chuỗi ký tự đại diện cho ký hiệu toán học mà ta đang xử lý.
- Bộ công cụ bộ sung khả năng giải toán với các ký hiệu tóan học cho MATLAB. Lõi của bộ công cụ này được phát triển bởi Maple.

Symbolic cho phép thực hiện các phép toán sau:

- Calculus: đạo hàm, tích phân, giới hạn, chuỗi.
- Đại số tuyến tính: nghịch đảo, định thức, giá trị riêng eigen, Inverses, determinants, eigenvalues, singular value decomposition, and canonical forms of symbolic matrices.
- Rút gọn: dùng để rút gọn biểu thức.
- Giải phương trình: đại số và vi phân
- Các hàm đặc biệt: cung cấp các hàm đặcd biệt như beta, bessel, gamma.
- Transforms: Fourier, Laplace, z-transform.

- Symbolic là phép toán hình thức, khác với các phép toán thông thường.
- Ví dụ: » sqrt(2)
  ans = 1.4142
  »= sqrt(sym(2))
  ans= $2^{(1/2)}$
- Để khai báo một symbolic trong MATLAB, ta có thể dùng lệnh sym. Lệnh syms dùng để khai báo nhiều symbolic trong một dòng lệnh.
  Ví dụ: » x=sym('x')
- Nhiều biến symbolic:
  Ví dụ: » syms a b x y
- Để xác định có bao nhiêu biến symbolic trong một biểu thức ta dùng lệnh findsym
  Ví dụ: » findsym(f)

5.1.2. Khai báo Symbolic

Stt	Lệnh trong Matalb	Ý nghĩa	Kết quả
1	x=sym('x','real')	Tạo biến x là số thực	
2	x=sym('x','positive')	Tạo biến x là số thực dương	
3	syms x y;	Định nghĩa 2 biến x,y	
4	syms	Liệt kê các biến mà trương trình quản lý	'x' 'y'
2	A=x+1 B=y^2-1	Tạo 2 biến symbolic mới A và B	
3	A+B	cộng 2 biến A và B	x+y^2
4	A-B	Trừ 2 biến A và B	x+2-y^2
5	A*B	Nhân 2 biến A và B	(x+1)*(y^2-1)
6	A/B	Biến A chia biến B	(x+1)/(y^2-1)
7	A^B	A luỹ thừa B	(x+1)^(y^2-1)

Để thay thế giá trị vào một một biến symbolic ta dùng lệnh subs

Ví dụ:

» subs(f,a,2)

ans = sin(2*x)

» $subs(f, \{x, a\}, \{2, 5\})$

ans = -0.5440

Rút gọn biểu thức:

- collect(f,v): gom đa thức theo biến v.
- expand: khai triển đa thức.
- factor: phân tích đa thức thành các nhân tử.
- horner: phân tích đa thức thành một biểu thức dạn Horner.
- numden: phân tích biểu thức thành dạng hữu tỷ.
- simple: đơn giản tối đa biểu thức.
- simplify: rút gọn biểu thức.

Ví dụ:

» $t = (x-2)^2 + (x-2)^3 + 2$

» collect(t,x)

» expand(t)

» $t = x^2 + 2ax + a^2$

» factor(t)

Stt	Lệnh trong Matalb	Ý nghĩa	Kết quả
1	collect((x+1)^2+(x+y)^2,y)	Gom các lũy thừa cùng bậc theo biến y	y^2+2*x*y+(x+1)^2+x^2
2	expand((x+y+1)^2)	Khai triển các biểu thức	x^2+2*x*y+2*x+y^2+2*y+1
3	factor(x^3-y^3)	Phân tích thành thừa số	(x-y)*(x^2+x*y+y^2)
4	simplify((x^3-y^3)/(x^2-y^2))	Thu gọn biểu thức	(x^2+x*y+y^2)/(x+y)

Vẽ hình trong symbolic

Lệnh ezplot(f,[a,b]) vẽ biểu thức f trong khoảng [a,b].

Ví dụ:

```
» syms x
» ezplot('sin(x)/x',[-5,5])
```

Lệnh diff: đạo hàm.

Ví dụ: $A = x + 1, B = y^2 - 1$.

Stt	Lệnh trong Matalb	Ý nghĩa	Kết quả
1	diff(B)	Tính đạo hàm biểu thức B	2*y
2	diff(B,2)	Tính đạo hàm biểu thức B bậc 2	2
3	diff(A*B,y)	Tính đạo hàm biểu thức A*B theo biến y	2*(x+1)*y
4	diff(A*B,y,2)	Tính đạo hàm bậc 2 biểu thức A*B theo biến y	2*x+2

5.2.1. Đạo hàm

Lệnh diff: đạo hàm.

diff(Y)

Y: hàm số hoặc biến hình thức cần lấy đạo hàm.

Ví dụ

```
› syms x; f = sin(5*x)
› diff(f)
› ans = 5*cos(5*x)
› g = exp(x)*cos(x)
› diff(g)
› ans = exp(x)*cos(x) – exp(x)*sin(x)
› c = sym('5'); diff(c)
› ans = 0
```

5.2.1. Đạo hàm

Lệnh diff: đạo hàm.

- diff(5)
- ans = [ ] vì 5 không phải là biến hình thức

<u>Lấy đạo hàm cấp 2</u>

- diff(g,2)

hoặc

- diff(diff(g))
- ans = -2exp(x)*sin(x)

<u>Đạo hàm đa biến</u>

Gọi f = f(x,y) thì

- Đạo hàm theo x: diff(f,x)
- Đạo hàm theo y: diff(f,y)

5.2.1. Đạo hàm

Lệnh diff: đạo hàm.

- Đạo hàm cấp 2 theo x: diff(f,x,2)
- Đạo hàm cấp 2 theo y: diff(f,y,2)
- Nếu x là biến mặc định của f thì diff(f,2) tương đương với diff(f,x,2).

Ví dụ

- syms s t
- f = sin(s*t)
- diff(f,t) => ans = cos(s*t)*s
- diff(f,s)=> ans = cos(s*t)*t
- diff(f,t,2) => ans = -sin(s*t)*s^2
- findsym(f,1) => ans = t

Suy ra biến mặc định là t do đó diff(f,2) = diff(f,t,2)

Lệnh int: tích phân.

int(f,x) hoặc int(f) : Tìm nguyên hàm của hàm f = f(x).

int(f,a,b) : Tính tích phân của f từ a -> b.

Ví dụ

› syms x n a b t

› f = x ^ n

› int(f) (hoặc inf(f,x))

› ans = x^(n+1)/(n+1)

Lệnh int: tích phân.

Ví dụ: $A = x + 1, B = y^2 - 1$.

int(A)	Tích tích phân biến A	1/2*x^2+x
int(A,0,5)	Tích tích phân biến A từ 0 đến 5	35/2
int(A*B,x)	Tích tích phân biến A*B theo biến x	(y^2-1)*(1/2*x^2+x)

Lệnh limit: giới hạn

Giới hạn

- limit(f) : $\lim_{x \to 0} f(x)$
- limit(f,x,a) : $\lim_{x \to a} f(x)$

  hoặc limit(f,a)
- limit(f,x,a,'left') : $\lim_{x \to a^+} f(x)$
- limit(f,x,a,'right') : $\lim_{x \to a^-} f(x)$

Ví dụ

```
› sym h n x
› limit((cos(x + h) – cos(x))/h,h,0)
› ans =  - sin(x)
› limit((1 + x/n)^n,n,inf)
› ans = exp(x)
› limit(x/abs(x),x,0,'left')
› ans = -1
› limit(x/abs(x),x,0,'right')
› ans = 1
› limit(x/abs(x),x,0)
› ans = NaN
```

5.2.4. Tổng chuỗi

Lệnh symsum: tổng của một chuỗi.

Tính: $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$$

$$1+x+x^2+\dots$$

```
> syms x k
> s1 = symsum(1/k^2,1,inf)
> s2 = symsum(x^k,k,0,inf)
> s1 = 1/6*pi^2
> s2 = -1/(x-1)
```

Lệnh solve hay fzero thường được dùng để giải phương trình hoặc hệ phương trình đại số.

Ví dụ: Giải phương trình:,

» solve('$x^2 - 2*x - 4 = 0$')

ans = $[5^{1/2} + 1]$ $[1 - 5^{1/2}]$

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

»[x,y]=solve('$x^2 - y = 2','y - 2*x = 5$') $x = [1 + 2*2^{1/2}][1 - 2*2^{1/2}]$

$y = [7 + 4*2^{1/2}][7 - 4*2^{1/2}]$

»disp(solve('x+tan(y)=5','y'))

-atan(x-5)

»solve('$x^2 + 2x + 2 = 0$')

ans = [-1+i] [-1-i]

5.3. Giải phương trình đại số

Lệnh solve hay fzero thường được dùng để giải phương trình hoặc hệ phương trình đại số.

- **Ví dụ**
  - s = solve(`cos(2*x) + sin(x) = 1`)
  - s =

    [0]

    [pi]

    [1/6*pi]

    [5/6*pi]

- solve('f(x)','g(x)','h(x)',…): giải hệ nhiều phương trình.

Với lệnh fzero, ta tìm nghiệm gần một giá trị cho trước.

Ví dụ

»solve('$exp(-x) = sin(x)$')

»fzero(inline('$exp(-x) - sin(x)'), 0.5$)

Ví dụ

» f=@(x) $0.4123 * x^2 - 22.97 * x + 263.1$;

» xzero=fzero(f,15)

Lệnh solve hay fzero thường được dùng để giải phương trình hoặc hệ phương trình đại số.

Ví dụ

Giải hệ: $\begin{cases} x^2 y^2 = 0 \\ x - y/2 = \alpha \end{cases}$

- syms x y alpha
- [x y] = solve('x^2*y^2=0','x – y/2 = alpha')

```
x =                    y =
   [      0]           [ -2*alpha]
   [      0]           [ -2*alpha]
   [ alpha]            [        0]
   [ alpha]            [        0]
```

- Nghiệm: v = [x, y]

5.3. Giải phương trình đại số

Lệnh solve hay fzero thường được dùng để giải phương trình hoặc hệ phương trình đại số.

- Giải hệ: $\begin{cases} u^2 + v^2 = a^2 \\ u + v = 1 \\ a^2 - 2a = 3 \end{cases}$
  - S = solve('u^2+v^2=a^2','u+v=1','a^2–2*a=3')
  - S =

    a: [2x1 sym]

    u: [2x1 sym]

    v: [2x1 sym]
  - S.a

    ans =

    [3]

    [-1]

5.4. Giải phương trình vi phân thường

Lệnh dsolve thường được dùng để giải phương trình vi phân.

Ví dụ

Giải: $\dfrac{dy}{dt} = 1 + y^2,\ y(0) = 1$

› dsolve('Dy=1+y^2','y(0)=1')

› y = tan(t + 1/4*pi)

Giải: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \cos(2x) - y,\ \text{y(0)=1},\ \dfrac{d}{dx}y(0) = 0$

› y =dsolve('D2y=cos(2*x) – y','y(0)=1','Dy(0)=0','x')

› simplify(y); ans = 4/3*cos(x) – 2/3*cos(x)^2+1/3

Lệnh dsolve thường được dùng để giải phương trình vi phân.

Giải phương trình vi phân sau: $y'(t) + 4y(t) = e^{-t}$

```
>> y=dsolve('Dy+4*y=exp(-t)')
```

Giải phương trình vi phân sau: $y'(t) + 4y(t) = e^{-t}$, $y(0)=1$

```
>> y=dsolve('Dy+4*y=exp(-t)','y(0)=1')
```

Giải phương trình vi phân sau: $y''(t) + 4y(t) = e^{-2t}$, $y(0)=1$, $y(pi)=0$

```
>> y=dsolve('D2y+4*y=exp(-2*t)','y(0)=0','y(pi)=0')
```

Lệnh dsolve thường được dùng để giải phương trình vi phân.

- Giải: $\begin{cases} \dfrac{d^3u}{dx^3} = u \\ u(0) = 1;\ u'(0) = -1;\ u''(0) = \pi \end{cases}$
  - dsolve('D3u=u','u(0)=1','Du(0)=-1','D2u(0)=pi'),'x')
- Giải: $\begin{cases} \dfrac{df}{dt} = 3f(t) + 4g(t) \quad , f(0) = 0 \\ \dfrac{dg}{dt} = -4f(t) + 3g(t)\ , g(0) = 1 \end{cases}$
  - [f g] = dsolve('Df = 3*f + 4*g','Dg = -4*f + 3*g',...

    'f(0) = 0','g(0) = 1')
  - f = exp(3*t)*sin(4*t); g = exp(3*t)*cost(4*t)