CÁC BÀI TẬP LỚN

1. Tính giá trị của Pi dựa vào chuỗi sau:

$$\frac{\pi^2-8}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

- n bằng bao nhiêu để giá trị Pi thu được đạt đến độ chính xác 10^{-12}
- Độ chính xác là bao nhiêu nếu n = 100

2. Dãy số Fibonacci được tính dựa trên mối liên hệ sau:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

với $F_0 = F_1 = 1$.

a. Tính 10 số Fibonacci đầu tiên.
b. Đối với 50 số Fibonacci, tính tỉ số:

$$F_n / F_{n-1}$$

Tỉ số này sẽ đạt đến tỉ lệ vàng (golden mean): ((1 + sqrt(5))/2). So sánh giá trị này với kết quả thu được?

3. Đa thức Legendre ($P_n(x)$) được định nghĩa bởi mối liên hệ lặp lại sau:

$$(n+1)\ P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + n\ P_{n-1}(x) = 0$$

với $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ và $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$. Tính 3 đa thức Legendre kế tiếp rồi vẽ 6 đa thức này trên khỏang [-1,1].

4. Giá trị hiện tại của số tiền tiết kiệm hàng năm có thể được tính dựa trên công thức:

$$P = (A/i)\ [(1 + i)^n - 1]/(1 + i)^n$$

Trong đó: A là số tiền tiết kiệm hàng năm (đơn vị $/năm), i là lãi suất hàng năm (%), n là số năm và P là giá trị hiện tại ($).

Ví dụ: Nếu i = 0.15 (15%), A = $100/năm và n = 10 năm thì
P = $501.88.

Giả sử bạn trúng số độc đắc được $1,000,000 và công ty xổ số chỉ cho bạn lựa chọn: nhận $50,000/năm trong vòng 20 năm hoặc chỉ nhận ngay được $500,000, bạn sẽ chọn cái nào? Giả sử chỉ số lạm phát (inflation rate) là 5%.

5. Một website* dùng thuật toán sau đây để tính giá trị Pi:

1. Đặt a = 1, b = 1/sqrt(2), t = 1/4 và x = 1

2. Lặp lại những tập lệnh sau cho đến khi độ lệch giữa a và b nằm trong khoảng chính xác mong muốn:

```
y = a
a = (a + b)/2
b = sqrt(b*y)
t = t - x*(y - a)^2
x = 2*x
```

3. Từ giá trị a, b, t thu được, giá trị Pi được tính bằng:

```
Pi_est = ((a + b)^2)/(4*t)
```

Có bao nhiêu vòng lặp cần dùng để tính được giá trị Pi với độ chính xác 10^{-8}? 10^{-12}?

So sánh kết quả khi dùng thuật toán này với kết quả thu được từ bài 1.

*http://www.netcom.com/~hjsmith/Pi/Gauss_L.html

6. Viết một đoạn script để nhập vào 1 số integer (n) và tính:

Khi n>1, thay thế n thành (n/2) nếu n chẵn. Nếu n lẻ, thay thế n thành (3*n + 1).

Cứ lặp lại như vậy để tạo ra 1 dãy số cho đến khi n = 1.

Ví dụ: Nếu n = 10, dãy số thu được lại 5, 16, 8, 4, 2, 1 và chiều dài của dãy (length) này là 6.

Vẽ đồ thị mô tả chiều dài dãy số (length) ứng với giá trị đầu vào n thay đổi lần lượt từ 2 đến 30 (length vs. n). Ví dụ, khi n = 10, chiều dài dãy (length) là 6; trong khi n = 15, chiều dài dãy là 17. Các giá trị này có tuân theo quy luật (pattern) nào không? Kiểm tra lại với các con số lớn hơn để thấy rõ quy luật. Có số n nào để làm dãy số không bao giờ dừng lại?

7. Viết 2 đoạn scripts / functions để chuyển số La Mã thành số thập phân, ứng với 2 kiểu số La Mã sau:

a. Kiểu số **La Mã cổ**: vị trí, thứ tự của các ký tự không ảnh hưởng đến giá trị. Ví dụ: IX và XI đều bằng 10 + 1 = 11. Dưới đây là bảng chuyển đổi:

Roman	Thập phân
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

b. Kiểu số **La Mã chính thức**: thứ tự của các ký tự sẽ ảnh hưởng đến giá trị. Ví dụ: IX bằng 9 (10 - 1), XC bằng 90 (100 - 10). Ta cũng sẽ dùng bảng chuyển đổi trên, tuy nhiên cần lưu ý các trường hợp thứ tự các ký tự sẽ ảnh hưởng đến giá trị:
IV (4), IX (9), XL (40), XC (90), CD (400) and CM (900)

Trong khi viết mã, chúng ta sẽ sử dụng hàm **input** để nhập số La Mã vào:

```
>> str = input('Roman numeral: ','s')
```

Lệnh trên cho phép ta nhập số La Mã vào bộ nhớ dưới dạng một chuỗi ***string***.

8. Viết 2 đoạn scripts / functions dùng để chuyển đổi số thập phân sang số La Mã cổ & số La Mã chính thức.

9. Tính toán và vẽ ra đường đi của những các hạt ngẫu nhiên được giới hạn bởi 2 thành chắn tại vị trí +B và –B tính từ điểm gốc (nơi mà các hạt ngẫu nhiên xuất phát).

Chuyển động của các hạt ngẫu nhiên sẽ được xác định dựa vào việc lặp đi lặp lại nhiều lần biểu thức sau:

$$x_{j+1} = x_j + s$$

với s là một số ngẫu nhiên được xác định từ phân bố chuẩn (standard normal distribution) (lệnh **randn** trong MATLAB). Ví dụ, vị trí của một hạt sau N bước chuyển dời được tính bởi đoạn code sau:

```
x(1) = 0;
for j = 1:N
   x(j+1) = x(j) + randn(1,1);
end
```

Tại vị trí rào chắn, ta cần chú ý 2 trường hợp sau:

a. Phản xạ - Trong trường hợp này, khi vị trí mới nằm ngoài thành chắn, hạt sẽ dội ngược trở lại bằng đúng khoảng cách nó có thể vượt qua khỏi thành chắn. Có nghĩa là,

when $x_{j+1} > B$,
$x_{j+1} = B - |B - x_{j+1}|$

when $x_{j+1} < (-B)$,
$x_{j+1} = (-B) + |(-B) - x_{j+1}|$

Trên đồ thị đường đi, chúng ta sẽ không thấy bất kỳ điểm nào nằm ngoài |B| từ điểm gốc.

b. Hấp thụ - Trong trường hợp này, nếu hạt đụng vào thành chắn, nó sẽ bị hấp thụ và mất đi. Chúng ta sẽ xác định thời gian sống trung bình của hạt (giá trị trung bình và phân bố số lượng các bước dịch chuyển một hạt bình quân trước khi bị hấp thụ).

c. Hấp thụ 1 phần - Trường hợp này là sự kết hợp của 2 trường hợp trên. Khi hạt đụng vào thành chắn, hạt có thể bị hấp thụ hoặc phản xạ. Giả sử ta gọi xác suất hạt bị phản xạ là p (0 < p < 1), đoạn code sau đây sẽ cho ra quyết định ngẫu nhiên, hạt sẽ bị hấp thụ hay phản xạ:

```
if rand < p
   reflect %phan xa
else
   absorb  %hap thu
end
```

Câu hỏi (các câu trả lời nên trình bày kèm theo đồ thị):

- Vẽ đồ thị mô tả vị trí trung bình (average position) của các hạt theo thời gian?
- Vẽ đồ thị mô tả độ lệch chuẩn của vị trí hạt theo thời gian?
- Tính chất hấp thụ / phản xạ của thành chắn có ảnh hưởng đến các kết luận này?
- Đối với từng trường hợp hấp thụ / hấp thụ 1 phần, vẽ đồ thị diễn tả số lượng các hạt còn sống sót theo số lượng bước dịch chuyển?

10. Các đặc tính của hơi nước bão hòa (Williamson - Chemical Engineering, May 15, 1972, p. 128):

Nhiệt độ bão hòa (degrees F)

$$T_{sat} = 8576.65/(15.47538 - \ln(P_{sat})) - 459.216 - 0.023719P_{sat} + (0.84219e-4)P_{sat}^2 - (0.70854e-7)P_{sat}^3$$

Thể tích riêng của chất lỏng (ft^3/#)

$$V_{liq} = 0.01655 + (0.150326e-4)P_{sat} - (0.40488e-7)P_{sat}^2 + (0.665584e-10)P_{sat}^3 - (0.4053e-13)P_{sat}^4$$

Thể tích riêng của hơi (ft^3/#)

$$V_{vap} = 430.8419/(P_{sat} + 1.66) + 0.2031 - (0.000258)P_{sat}$$

Enthalpy riêng của chất lỏng (BTU/#)

$$H_{liq} = 6473.878/(14.01875 - \ln(P_{sat})) - 391.6036 + (0.022915)P_{sat}$$

Enthalpy riêng của hơi (BTU/#)

$$H_{vap} = 1142.342 + (0.76833)P_{sat} - (0.004194)P_{sat}^2 + (0.11642e-4)P_{sat}^3 - (0.157e-7)P_{sat}^4 + (0.8086e-11)P_{sat}^5$$

Trong tất cả các trường hợp, áp suất có đơn vị psia và những phương trình trên đều đúng khi áp suất từ 20 đến 600 psia. Sai số cực đại trong các phép tính là dưới 1%.

a. Viết một hàm in ra các đặc tính trên của hơi nước khi nhập vào một vector áp suất. Để tiết kiệm thời gian, ta có thể copy các công thức trên vào bộ soạn thảo code của MATLAB (MATLAB editor) và sửa lại cú pháp cho phù hợp.

b. Viết một đoạn script cho phép xuất ra các đặc tính tuỳ theo người sử dụng lựa chọn. Đoạn script chạy cho đến khi người dùng thoát.

c. Bổ sung vào đoạn script cho phép người dùng có thể nhập nhiều hệ đơn vị khác nhau (e.g., SI, English, CGS)

d. Phát triển hàm ở câu a. để xuất ra nhiệt lượng của hơi nước.

e. Nếu người dùng muốn nhập vào nhiệt độ thay vì áp suất thì sẽ như thế nào?

11. Viết một hàm tính: tích tích lũy (cumulative product) của những phần tử trong một vector. Tích tích lũy của phần tử thứ j của vector x, x_j, được định nghĩa như sau:

$$p_j = (x_1)(x_2) \ldots (x_j); \text{ for } j = 1\text{:chiều dài của vector x.}$$

Viết ra 2 phiên bản khác nhau của hàm số này:

a. Một phiên bản sử dụng 2 vòng lặp **for**. Vòng lặp for trong có vai trò "tích luỹ" tích x_j và vòng lặp for ngoài có vai trò lặp cho các phần tử p_j của vector p.

b. Một phiên bản sử dụng hàm **prod** để thay thế cho vòng lặp trong.

Trong mỗi trường hợp, sinh viên có thể kiểm tra lại kết quả bằng hàm **cumprod** (hàm dùng để tính tích tích luỹ)

12. Tương tự như bài 11 nhưng viết một hàm dùng để tính tổng tích luỹ các phần tử của 1 vector. Các phần tử tổng tích luỹ vector được định nghĩa:

$$s_j = x_1 + x_2 + \ldots + x_j$$

for j = 1: chiều dài của vector x.

Nên sử dụng hàm có sẵn **sum** và **cumsum** thay vì **prod** và **cumprod**.

13. Viết một hàm tạo ra một mảng số integers ngẫu nhiên có giá trị nằm trong khoảng [a, b]. Sử dụng dòng sau để định nghĩa hàm:

function A = randint(a,b,M,N)

trong đó **M** và **N** là kích thước của mảng xuất ra (M: hàng, N: cột).

a. Kiểm tra hàm của mình vừa viết với đoạn code sau:

```
x = randint(10,17,100000,1);
hist(x,10:17)
```

Đồ thị histogram biểu diễn kết quả sẽ có dạng gần như phẳng từ 10 đến 17. Chú ý đến những điểm nằm cuối trong phân bố.

b. Kiểm tra hàm của mình vừa viết với đoạn code sau:

```
x = randint(-30,5,100000,1);
hist(x,-30:5)

x = randint(-45,-35,100000,1);
hist(x,-45:-35)

x = randint(7,-2,100000,1);
hist(x,-2:7)
```

c. Sửa lại đoạn code của mình để cho phép không cần nhập vào các giá trị ngõ vào hoặc giá trị ngõ vào mặc định. Sử dụng hàm **rand** để viết code. Sinh viên sẽ cần sử dụng **nargin**. Ví dụ, hàm sẽ trả về:

- Một mảng số integers 5x5 với các giá trị nằm trong khoảng 1 và 20: **A = randint(1,20,5)**
- Một số ngẫu nhiên integer trong khoảng 10 và 50: **A = randint(10,50)**
- Một mảng rỗng nếu không nhập giá trị đầu vào.

--- HẾT ---