Caminhos Mínimos: Um para Todos

prof. Fábio Luiz Usberti

MC521 - Desafios de Programação I

Instituto de Computação - UNICAMP - 2018

Sumário

Introdução

Caminhos mínimos de um para todos

- Problema de caminhos mínimos de um para todos: Dado um grafo ponderado G, com comprimentos c_{ij} associados a cada aresta (i, j), e um vértice de origem s. Quais são os caminhos mínimos de s para todos os outros vértices?
- Aplicações:

1. Menor percurso entre duas cidades;
2. Planejamento de sistemas de transporte;
3. Transmissão de dados em uma rede de computadores;
4. Desenho de placas de circuito integrado VLSI;

Introdução

Caminhos mínimos de um para todos

- Nesta aula serão apresentados algoritmos eficientes (polinomiais) para o problema de caminhos mínimos de um para todos;
- Para um grafo não ponderado (ou se todas as arestas possuem o mesmo comprimento), é possível usar o algoritmo de busca em largura $O(V + E)$;
- Para caminhos mínimos em grafos ponderados, serão apresentados os algoritmos de Dijkstra em $O((V + E) logV)$ e de Bellman Ford em $O(VE)$;
- O algoritmo de *Dijkstra* pressupõe que $c_{ij} \geqslant 0$, para toda aresta (i, j).
- O algoritmo de *Bellman Ford* pode ser aplicado para grafos com arestas de comprimento negativo, contanto que não ocorram ciclos de comprimento negativo no grafo.

Visão geral

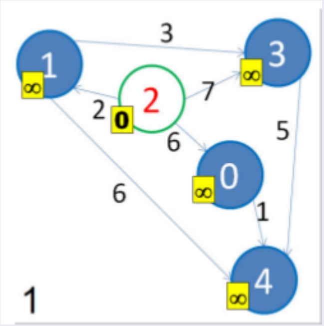
- Seja $dist[i]$ um limitante superior para a distância de caminho mínimo entre os vértices i e s.
- O algoritmo de Dijkstra é um algoritmo iterativo onde a cada iteração são realizados processos denominados de relaxações que procuram aproximar $dist[i]$ para a distância de caminho mínimo entre os vértices i e s.
- Inicialização: $dist[s] \leftarrow 0$ e $dist[i] \leftarrow \infty$ $(\forall i \neq s)$. Anote todos os vértices como não visitados.
- Iteração: Enquanto existirem vértices não visitados.
  1. Escolha como vértice corrente um vértice não visitado i, tal que $i \leftarrow \arg\min_i[dist[i]]$.
  2. Anote o vértice i como visitado.
  3. Para cada vértice v vizinho de i:
     - ★ Relaxação da aresta (i, v): Faça $dist[v] \leftarrow \min[dist[v], dist[i] + c_{iv}]$.

Fila de prioridades

- A cada iteração o algoritmo de *Dijkstra* busca pelo vértice não visitado i com o menor valor de $dist[i]$.
- Uma boa estrutura de dados para armazenar os vértices não visitados é uma fila de prioridades (heap de mínimo), adotando como prioridade de cada vértice i o valor de $dist[i]$.
- Considere que a fila de prioridades armazena para cada vértice i o par $\{dist[i], i\}$.
- Desse modo, as operações de inserção e de extração do menor elemento na fila passam a ter complexidade $O(\log n)$.

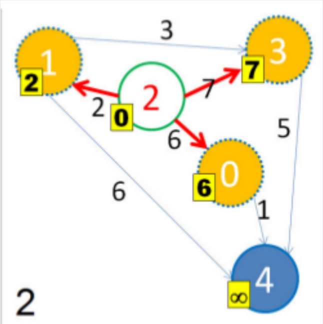
Exemplo

- Considere o grafo a seguir, com vértice de origem $s = 2$.
- Inicialização: $dist[2] \leftarrow 0$. Insira na fila de prioridades (pq) o par $\{dist[2], 2\}$, ou seja, $pq \leftarrow [\{0, 2\}]$.



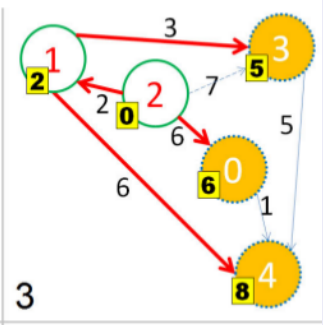
Exemplo

- ITERAÇÃO 1: $pq = [\{0, 2\}]$. Vértice corrente 2.
- Relaxação: arestas $(2, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, 3)$; $dist[0] \leftarrow 6$, $dist[1] \leftarrow 2$ e $dist[3] \leftarrow 7$.
- Fila de prioridades: $pq \leftarrow [\{2, 1\}, \{6, 0\}, \{7, 3\}]$.



Exemplo

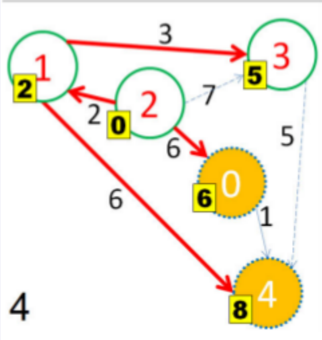
- ITERAÇÃO 2: $pq = [\{2,1\},\{6,0\},\{7,3\}]$. Vértice corrente 1.
- Relaxação: arestas $(1,3)$ e $(1,4)$;
  $dist[3] \leftarrow \min(dist[3], dist[1] + c_{13}) = \min(7, 2+3) = 5$ e $dist[4] \leftarrow 8$.
- Fila de prioridades: $pq \leftarrow [\{5,3\},\{6,0\},\{7,3\},\{8,4\}]$. Obs. Há duas ocorrências do vértice 3 na fila de prioridade. Isso não é um problema contanto que o algoritmo verifique se um vértice extraído da fila já foi visitado.



Algoritmo de Dijkstra

Exemplo

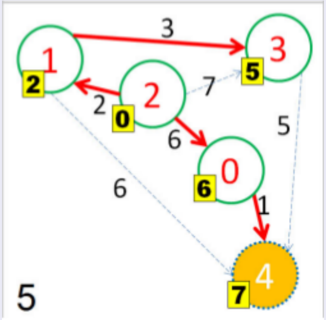
- ITERAÇÃO 3: $pq = [\{5,3\},\{6,0\},\{7,3\},\{8,4\}]$. Vértice corrente 3.
- Relaxação: aresta $(3,4)$; $dist[4] \leftarrow \min(dist[4], dist[3] + c_{34}) = \min(8,10) = 8$.
- Fila de prioridades: $pq \leftarrow [\{6,0\},\{7,3\},\{8,4\}]$.



Algoritmo de Dijkstra

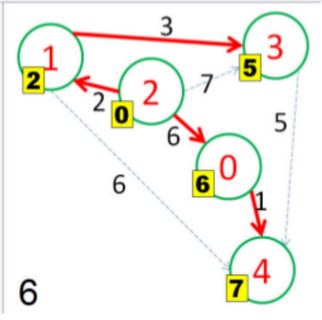
Exemplo

- ITERAÇÃO 4: $pq = [\{6,0\},\{7,3\},\{8,4\}]$. Vértice corrente 0.
- Relaxação: aresta $(0,4)$; $dist[4] \leftarrow \min(dist[4], dist[0] + c_{04}) = \min(8,7) = 7$.
- Fila de prioridades: $pq \leftarrow [\{7,3\},\{7,4\},\{8,4\}]$.



Exemplo

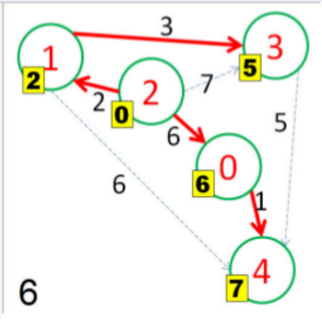
- ITERAÇÃO 5: $pq = [\cancel{\{7,3\}}, \{7,4\}, \{8,4\}]$. O vértice 3 é o próximo da fila de prioridade, porém já foi visitado. Vértice corrente 4.
- Relaxação: não há arestas a serem relaxadas.
- Fila de prioridades: $pq \leftarrow [\{8,4\}]$.



Algoritmo de Dijkstra

Exemplo

- $pq = [\cancel{\{8, 4\}}]$. O vértice 4 é o próximo da fila de prioridade, porém já foi visitado.
- O algoritmo se encerra, pois fila de prioridades está vazia.



Algoritmo de Dijkstra

Código-fonte

- Uma implementação do algoritmo de Dijkstra é apresentada a seguir.
- *pred*[*v*] armazena o vértice predecessor à *v* no caminho mínimo de *s* até *v*.

```
vi dist(V, INF);    // INF = 1E9 to avoid overflow
vi pred(V, -1);
priority_queue< ii , vector<ii >, greater<ii > > pq;
dist[s] = 0;
pq.push(ii(dist[s], s));

while (!pq.empty()) { // main loop
   ii front = pq.top(); pq.pop();   // greedy: get shortest unvisited vertex
   int d = front.first , u = front.second;
   if (d > dist[u]) continue;   // check for duplicates
   for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
      ii v = AdjList[u][j];   // all outgoing edges from u
      if (dist[u] + v.second < dist[v.first]) {
         dist[v.first] = dist[u] + v.second;   // relax operation
         pred[v.first] = u;  // save predecessor
         pq.push(ii(dist[v.first], v.first));
      }
   }
}
```

Algoritmo de Bellman-Ford

Visão geral

- O algoritmo de Bellman-Ford é um algoritmo de programação dinâmica bottom-up que determina os caminhos mínimos de um vértice de origem s até os demais vértices, considerando caminhos com até i arestas.
- O caso base do algoritmo consiste nos caminhos com até $i = 0$ arestas.
- Em seguida, são obtidos os caminhos mínimos acrescidos de uma aresta, até a última iteração, onde o algoritmo obtém os caminhos mínimos com até $i = |V| - 1$ arestas.
- Os caminhos mínimos com até $i = |V| - 1$ arestas correspondem às soluções do problema, uma vez que um caminho simples possui no máximo $|V| - 1$ arestas.

Subestrutura ótima

- Considerando que $dist[v,k]$ é a distância mínima de um caminho com até k arestas da origem s até o vértice v, então a subestrutura ótima do problema pode ser expressa pela seguinte função recursiva:

$$
\begin{aligned}
dist[s,0] &= 0 \\
dist[v,0] &= \infty && \text{se } v \neq s \\
dist[v,i] &= \min\{\min_{(u,v)\in E}\{dist[u,i-1]+c_{uv}\}, dist[v,i-1]\} && \text{se } i > 0
\end{aligned}
$$

- Note que é possível reduzir o uso de memória armazenando somente as duas últimas colunas da tabela de programação dinâmica, uma vez que o cálculo da coluna i depende somente de valores armazenados na coluna $i-1$.

Redução do uso de memória

- Particularmente para esse problema, é possível reduzir ainda mais o uso de memória armazenando somente a última coluna da tabela de programação dinâmica.
- Nesse caso, o cálculo da coluna (iteração) i sobrescreve diretamente os valores armazenados na coluna (iteração) $i-1$. Desse modo, a subestrutura ótima do problema pode ser expressa como:

$$
\begin{aligned}
&dist[s] = 0 && \text{se iteração } i = 0 \\
&dist[v] = \infty && \text{se iteração } i = 0 \text{ e } v \neq s \\
&dist[v] = \min\{\min_{(u,v)\in E}\{dist[u] + c_{uv}\}, dist[v]\} && \text{se iteração } i > 0
\end{aligned}
$$

Código-fonte

- Uma implementação bottom-up do algoritmo de Bellman-Ford é apresentada a seguir.
- O laço principal do algoritmo se repete $V - 1$ vezes, onde em cada iteração aplica-se a relaxação para todas as arestas do grafo.
- $pred[v]$ armazena o vértice predecessor à v no caminho mínimo de s até v.

```
vi dist(V, INF);
vi pred(V, -1);
dist[s] = 0;

for (int i = 1; i <= V - 1; i++)    // relax all E edges V-1 times
   for (int u = 0; u < V; u++)    // these next two loops = O(E), overall O(VE)
      for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
         ii v = AdjList[u][j];
         if (dist[u] + v.second < dist[v.first]) {
            dist[v.first] = dist[u] + v.second;    // relax
            pred[v.first] = u;    // save predecessor
         }
      }
```

Algoritmo de Bellman-Ford

Detecção de ciclo negativo

- O algoritmo de Bellman-Ford pode ser usado para detectar a presença de ciclo negativo.
- Após $|V| - 1$ relaxações de todas as arestas, o algoritmo obtém as distâncias de caminhos mínimos de s para todos os outros vértices.
- Um ciclo negativo pode ser detectado aplicando-se uma relaxação adicional em cada aresta.
- Se após a relaxação adicional for possível reduzir a distância de qualquer vértice até s, conclui-se que há pelo menos um ciclo de custo negativo.

```
// after running the O(VE) Bellman Ford's algorithm
bool hasNegativeCycle = false;

for (int u = 0; u < V; u++)    // one more pass to check
   for (int j = 0; j < (int)AdjList[u].size(); j++) {
      ii v = AdjList[u][j];
      if (dist[v.first] > dist[u] + v.second) // if this is still possible
         hasNegativeCycle = true;    // then negative cycle exists!
   }
printf("Negative Cycle Exist? %s\n", hasNegativeCycle ? "Yes" : "No");
```

Referências

1. S. Halim e F. Halim. Competitive Programming 2, Second Edition Lulu (www.lulu.com), 2011. (IMECC – 005.1 H139c)
2. S. S. Skiena, M. A. Revilla. Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual, Springer, 2003.
3. T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L.Rivest e C. Stein. Introduction to Algorithms. 2nd Edition, McGraw-Hill, 2001. (no. chamada IMECC – 005.133 Ar64j 3.ed.)
4. U. Manber. Introduction to Algorithms: A Creative Approach. Addison-Wesley. 1989. (no. chamada IMECC – 005.133 Ec53t 2.ed.)