

Algoritmos e Estruturas de Dados

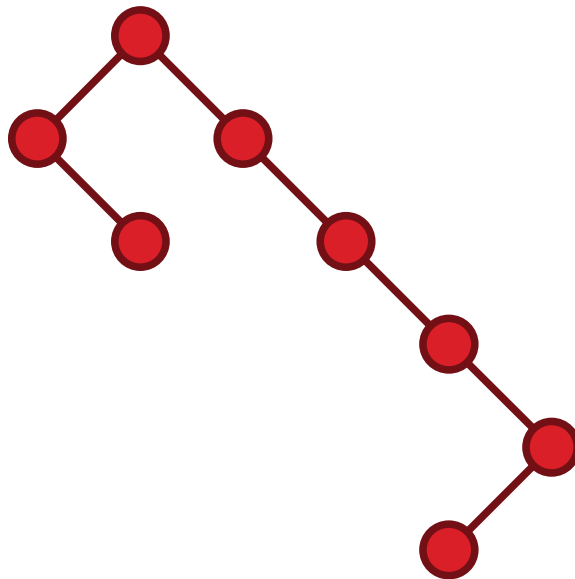
Árvores balanceadas AVL

Prof. João Caram

Árvores e desbalanceamento

2

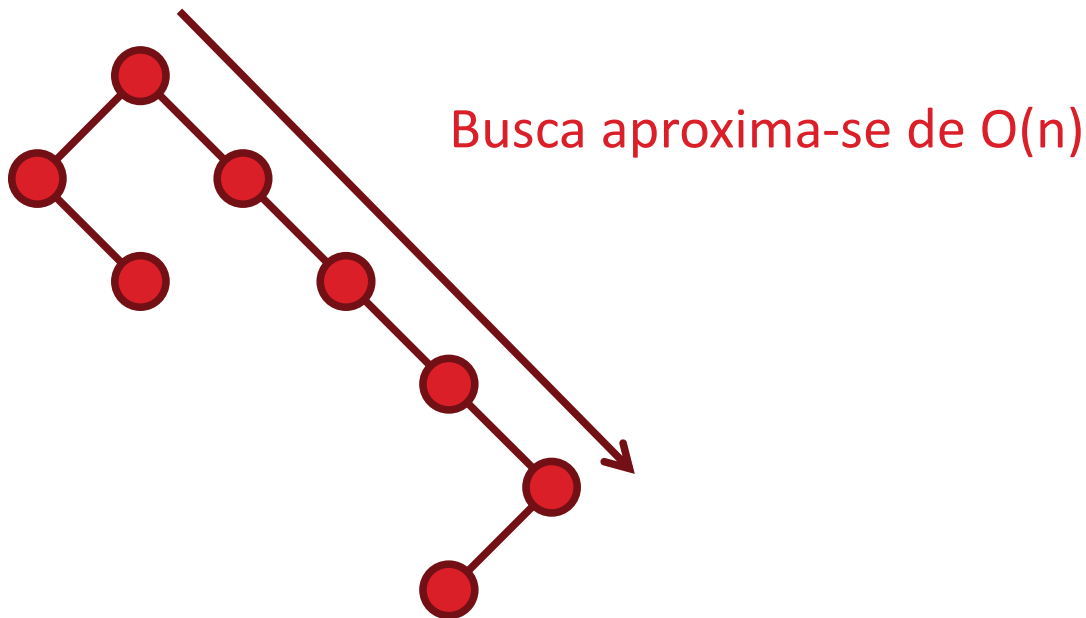
- Árvores binárias podem se tornar ineficientes se suas subárvores estiverem desbalanceadas



Árvores e desbalanceamento

3

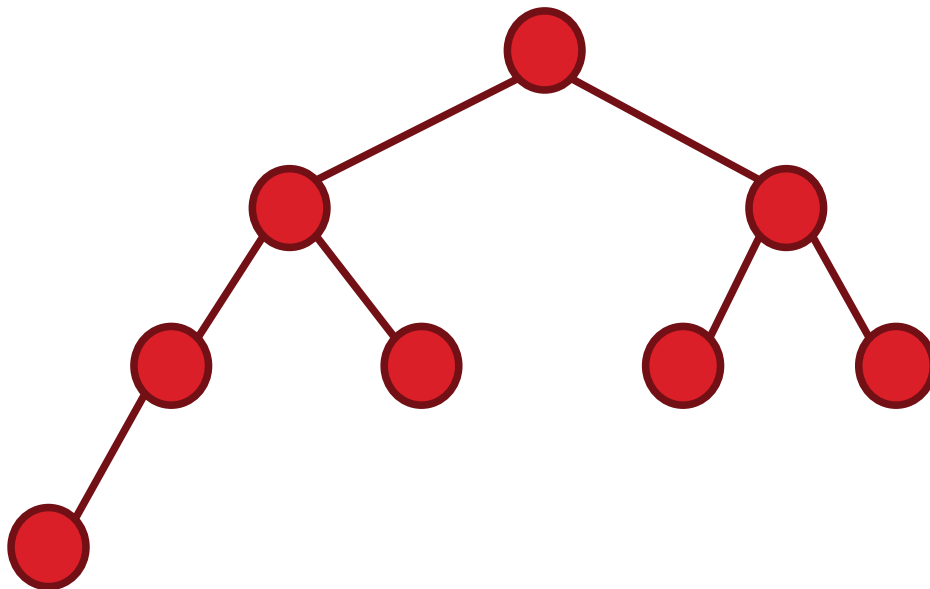
- Árvores binárias podem se tornar ineficientes se suas subárvores estiverem desbalanceadas



Árvores balanceadas

4

- Uma **árvore balanceada** procura manter as alturas das duas subárvores equilibradas.



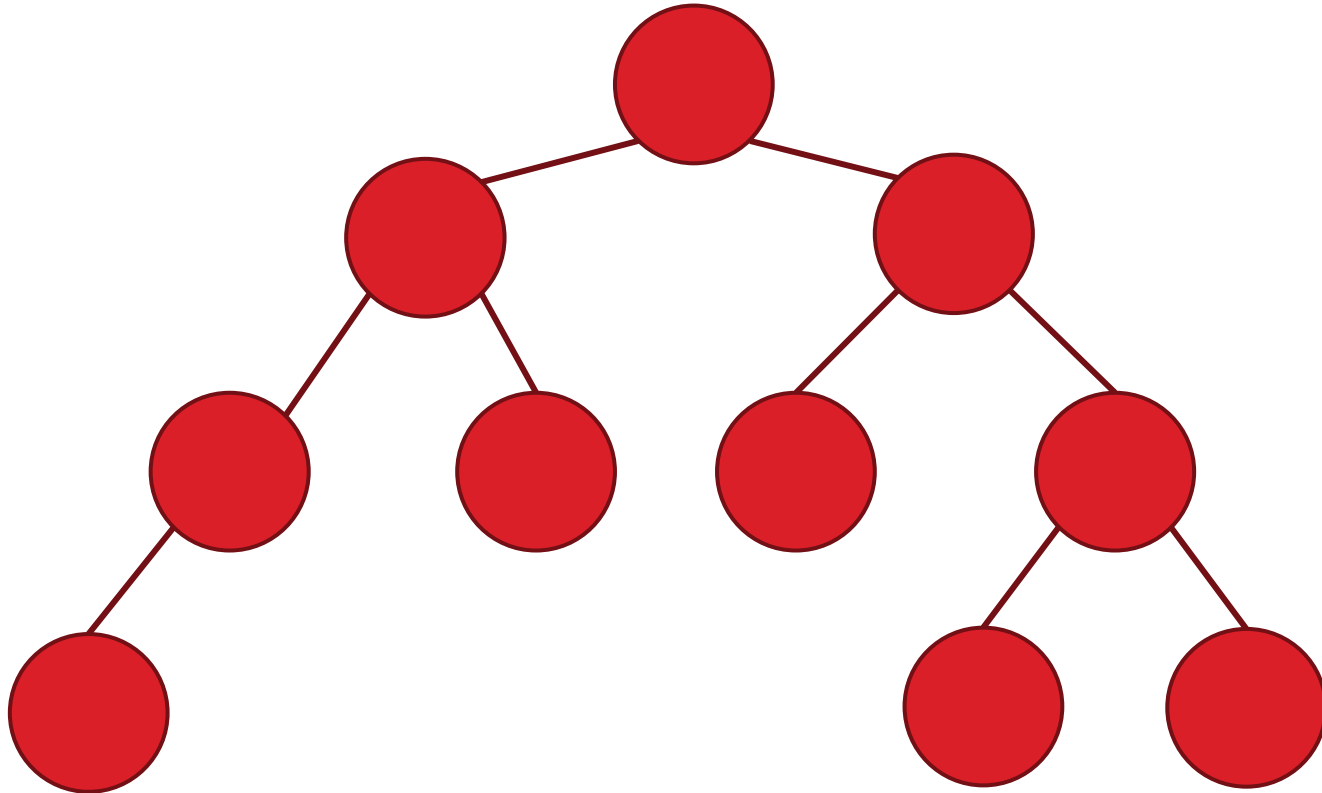
Árvores AVL

5

- **AVL**: Árvore binária de busca balanceada
 - ▣ Criada por **A**delson-**V**aleskii e **L**andis
 - ▣ Regra de inserção e busca: igual à ABB
 - ▣ **Regra de balanceamento**: alturas das subárvores podem diferir em no máximo uma unidade

Árvores AVL

6



Árvores AVL e fator de balanceamento

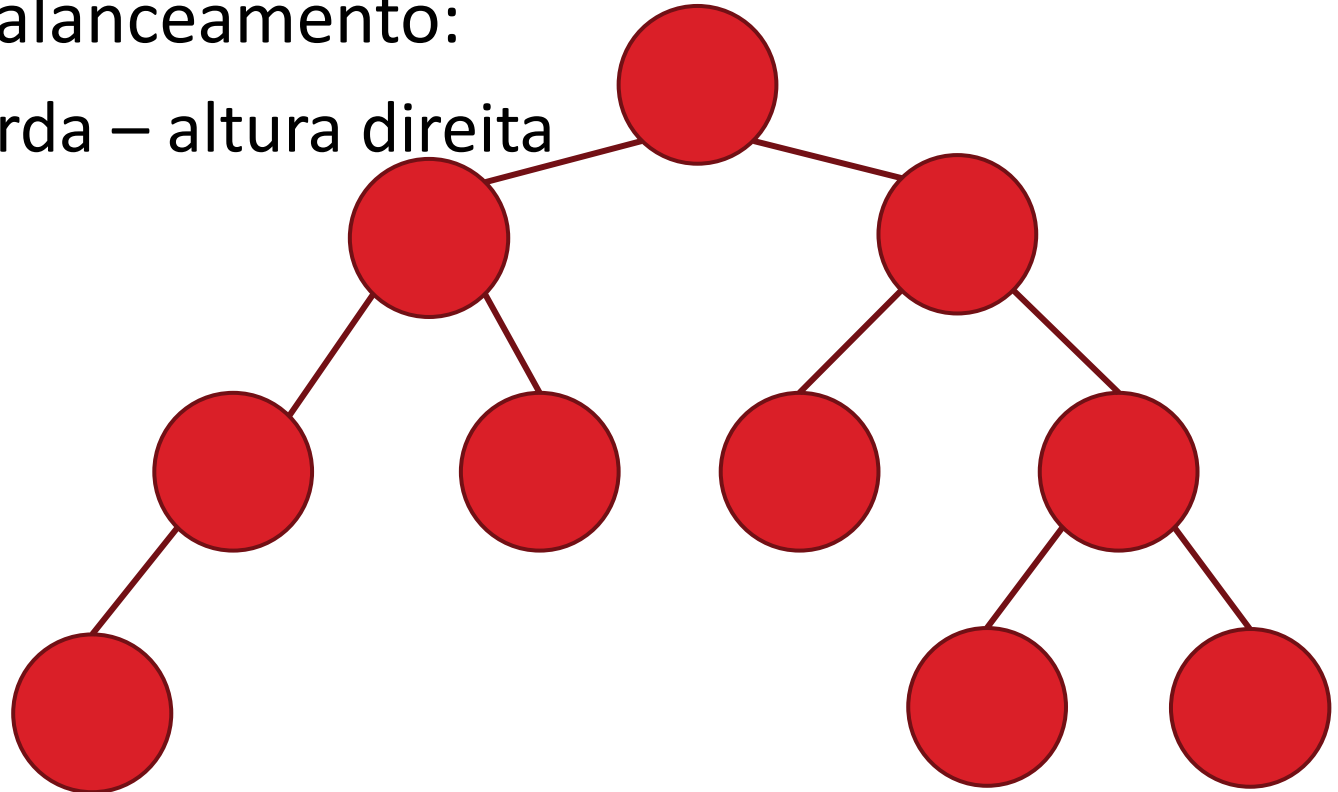
7

- Conceito fundamental: ***fator de balanceamento***
 - ▣ Diferença entre as alturas das subárvores esquerda e direita

Árvores AVL e fator de balanceamento

8

- Fator de balanceamento:
altura esquerda – altura direita

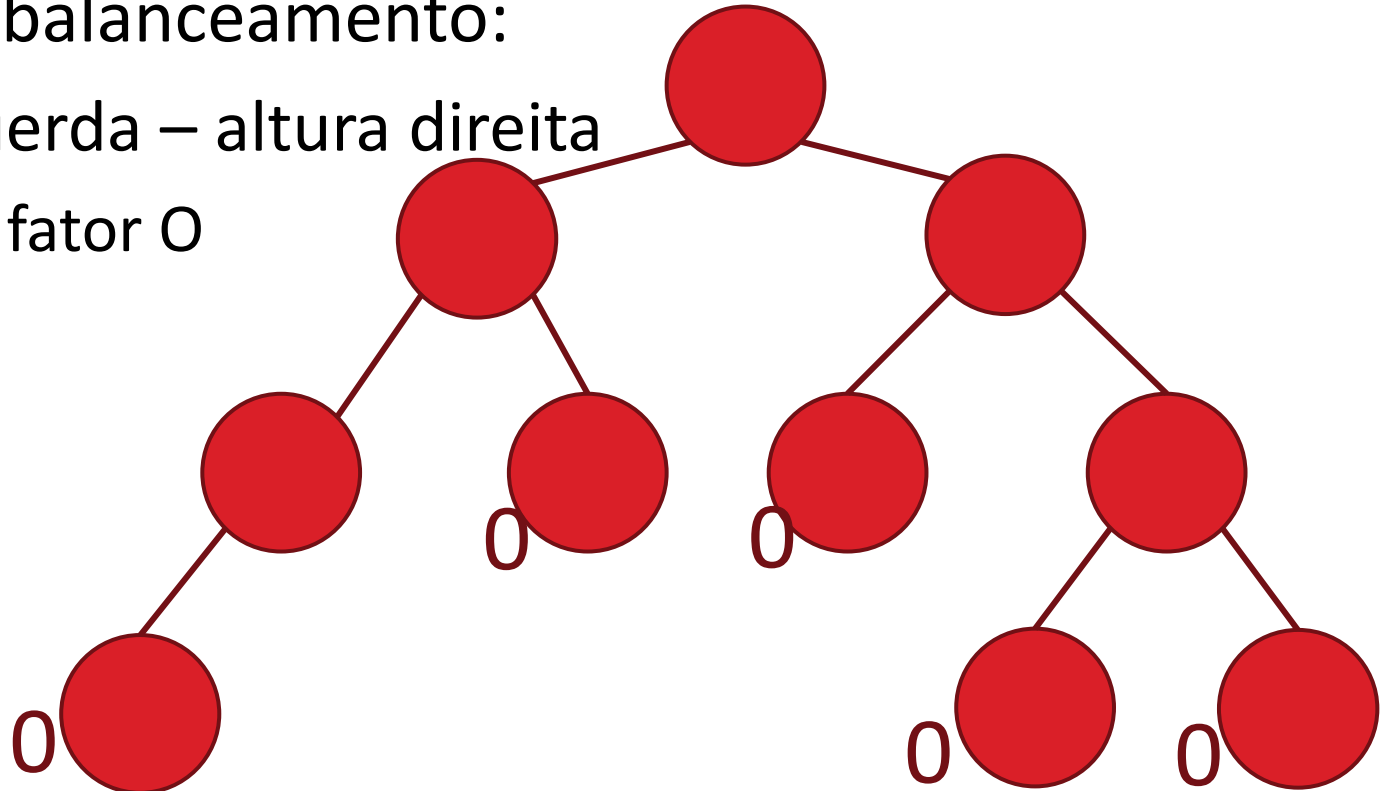


Árvores AVL e fator de balanceamento

9

- Fator de balanceamento:
altura esquerda – altura direita

- Folhas: fator 0



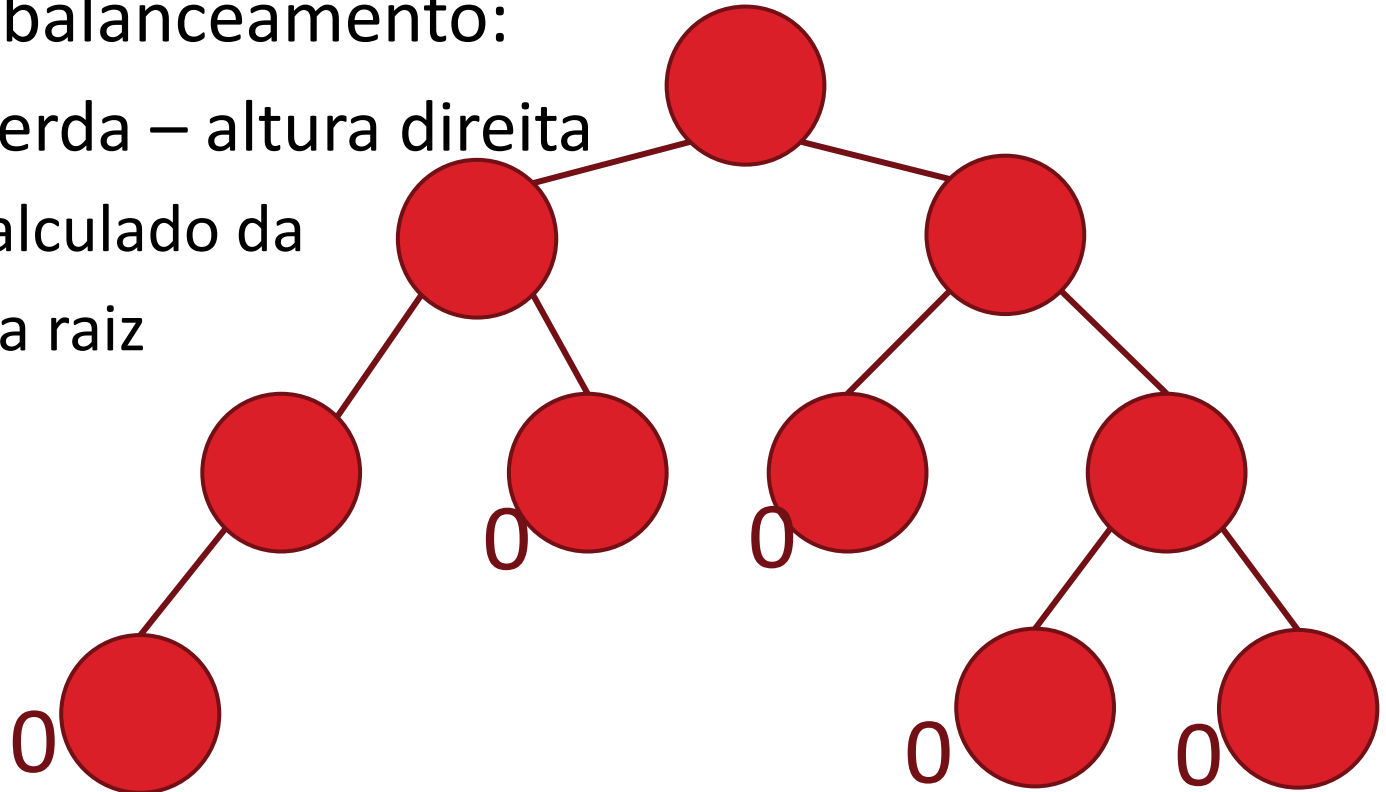
Árvores AVL e fator de balanceamento

10

□ Fator de balanceamento:

altura esquerda – altura direita

▣ Fator calculado da
folha até a raiz



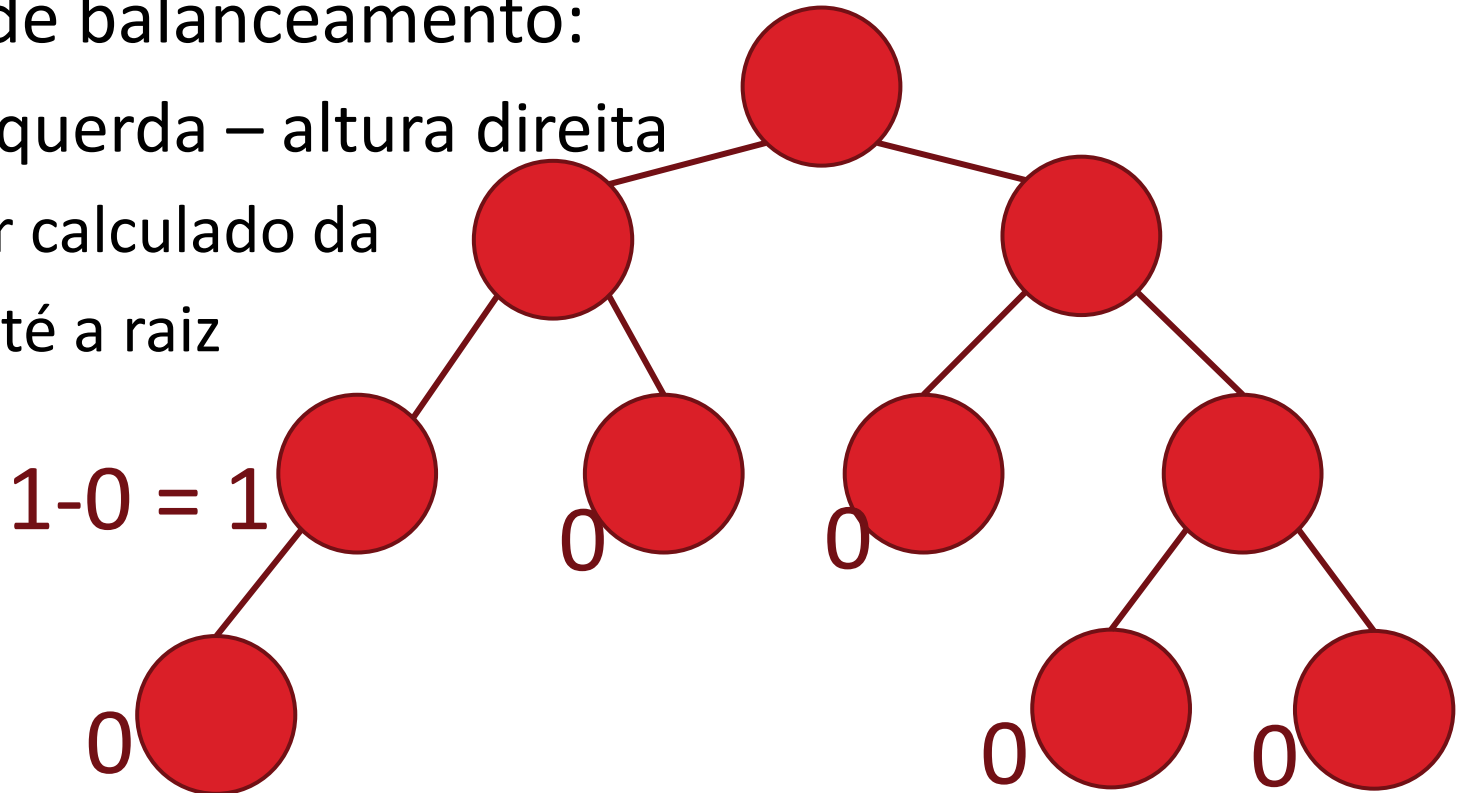
Árvores AVL e fator de balanceamento

11

□ Fator de balanceamento:

altura esquerda – altura direita

▣ Fator calculado da
folha até a raiz



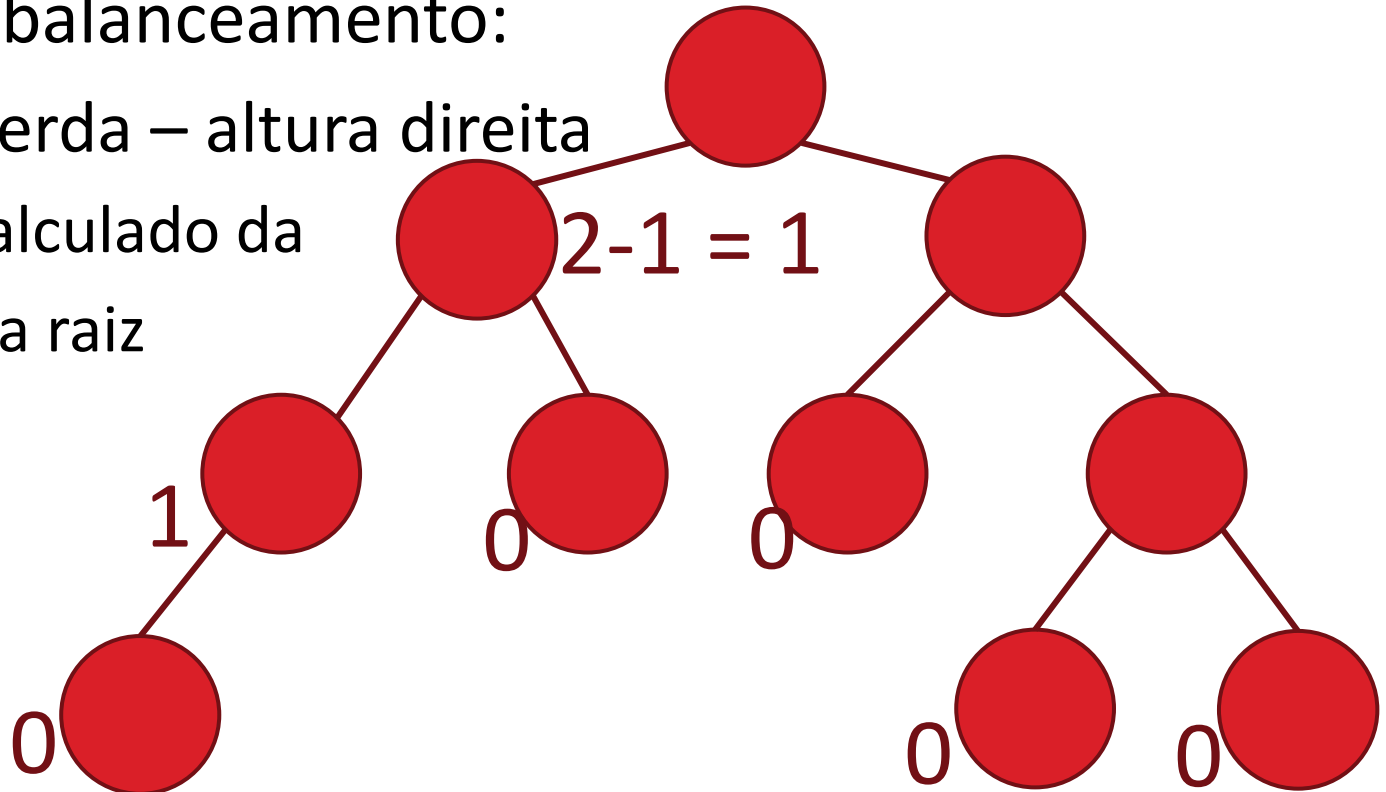
Árvores AVL e fator de balanceamento

12

□ Fator de balanceamento:

altura esquerda – altura direita

▣ Fator calculado da
folha até a raiz



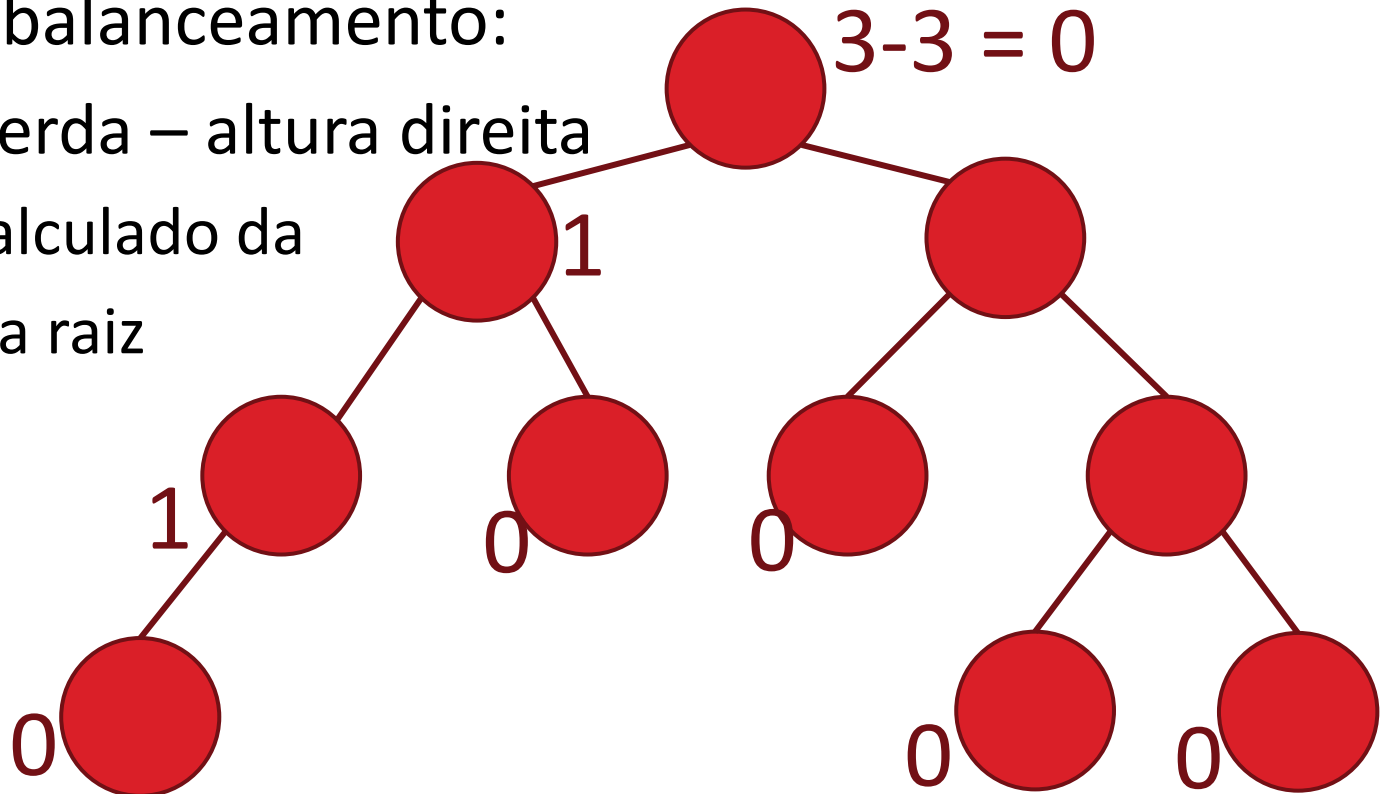
Árvores AVL e fator de balanceamento

13

□ Fator de balanceamento:

altura esquerda – altura direita

▣ Fator calculado da
folha até a raiz



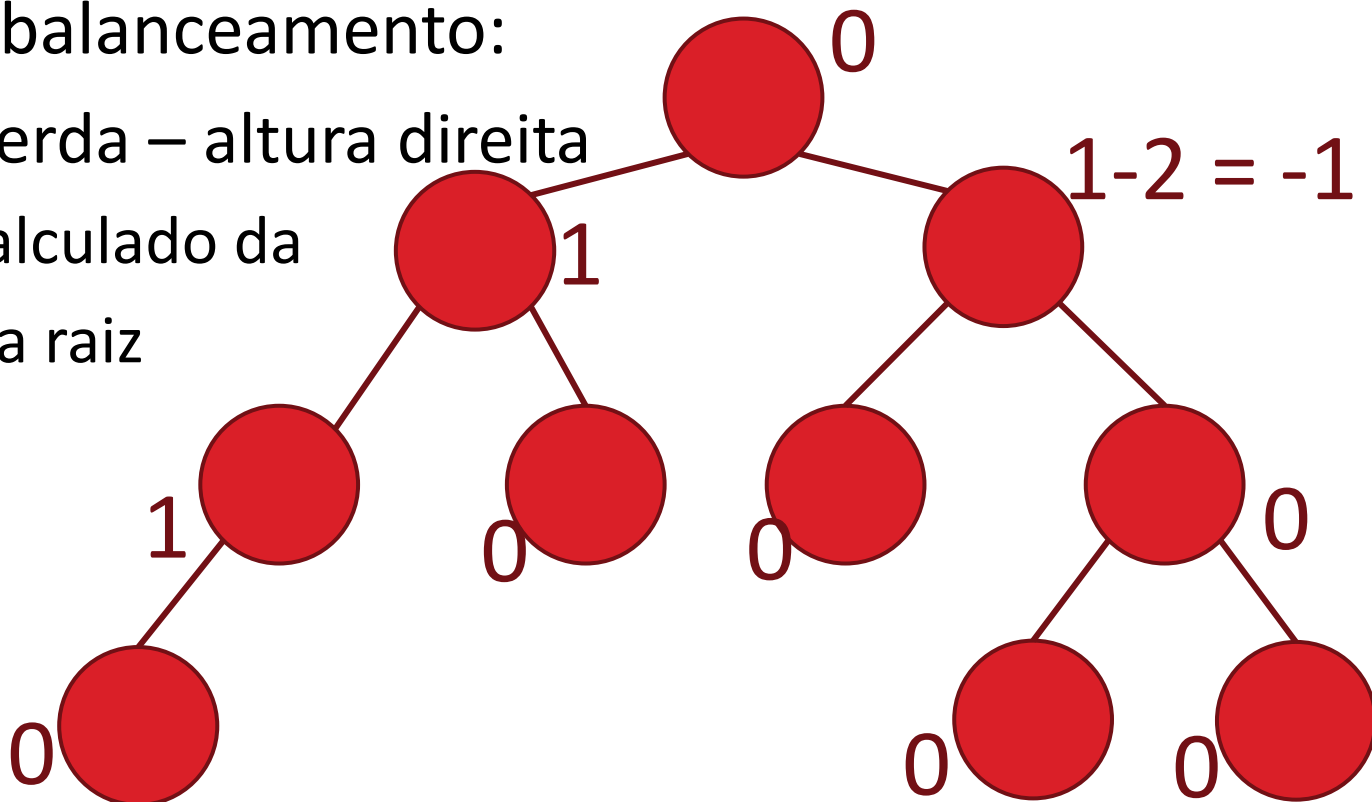
Árvores AVL e fator de balanceamento

14

- ❑ Fator de balanceamento:

altura esquerda – altura direita

- Fator calculado da
folha até a raiz



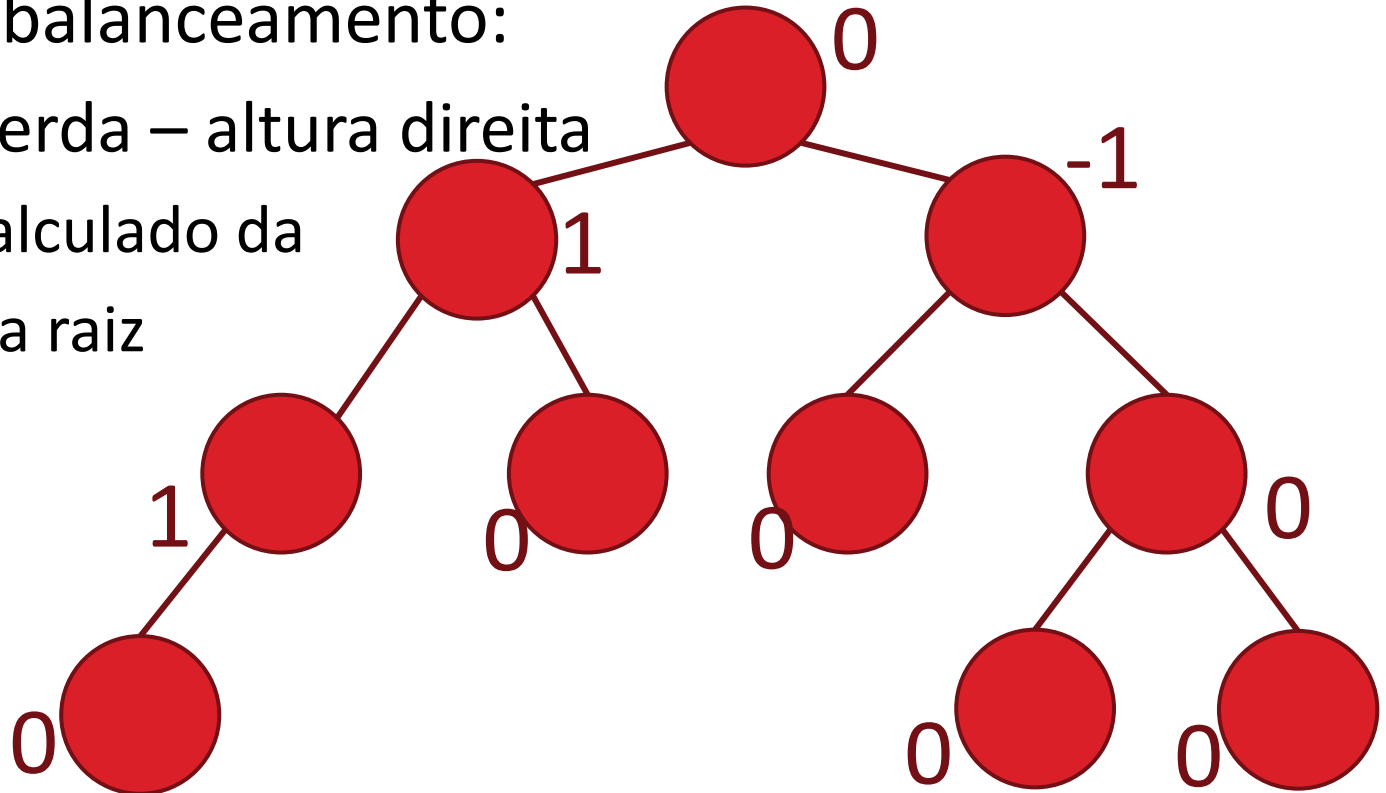
Árvores AVL e fator de balanceamento

15

□ Fator de balanceamento:

altura esquerda – altura direita

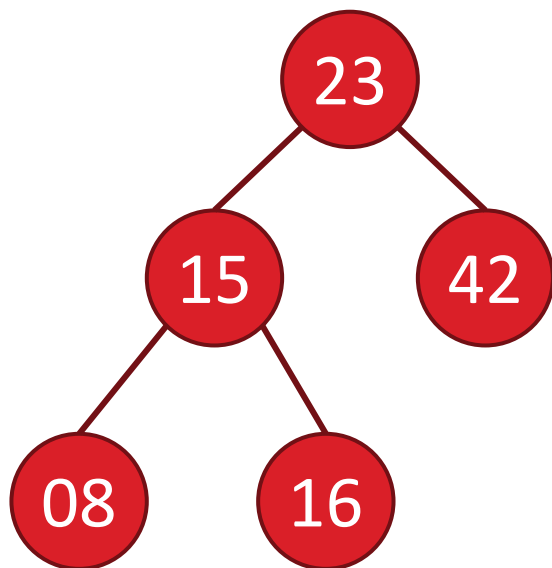
▣ Fator calculado da
folha até a raiz



Rotação de uma subárvore

16

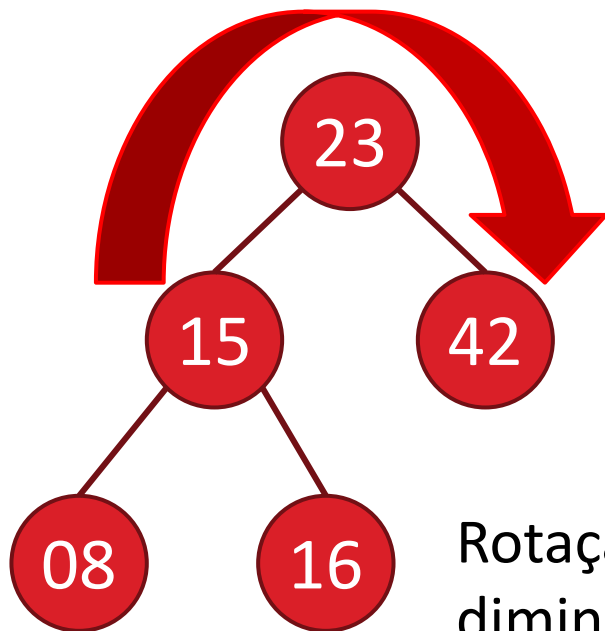
- Diminui em 1 a altura da subárvore rotacionada
- Pode ser feita à direita ou à esquerda



Rotação de uma subárvore

17

- Diminui em 1 a altura da subárvore rotacionada
 - ▣ Pode ser feita à direita ou à esquerda

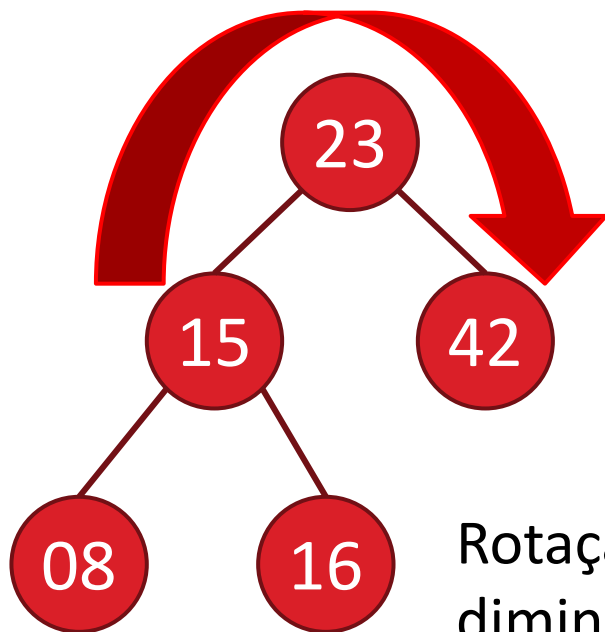


Rotação à direita:
diminui a altura da esquerda

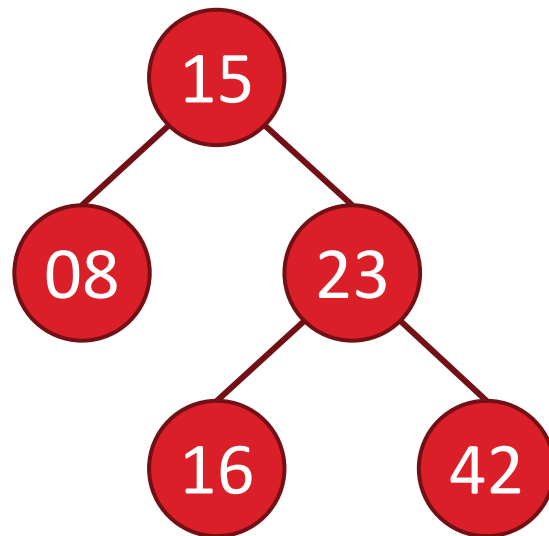
Rotação de uma subárvore

18

- Diminui em 1 a altura da subárvore rotacionada
 - ▣ Pode ser feita à direita ou à esquerda



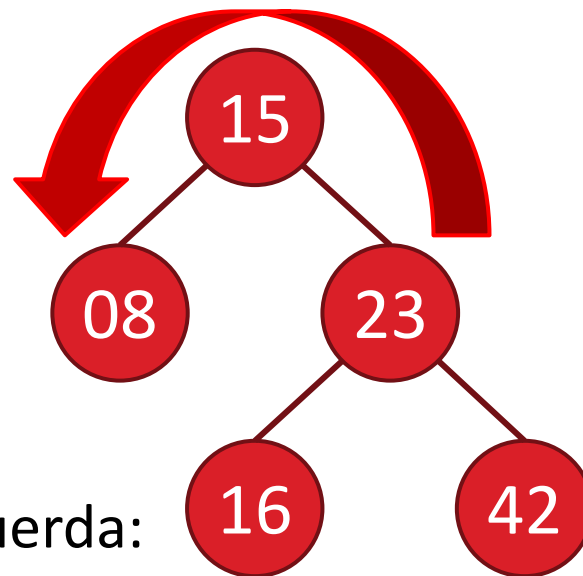
Rotação à direita:
diminui a altura da esquerda



Rotação de uma subárvore

19

- Diminui em 1 a altura da subárvore rotacionada
 - ▣ Pode ser feita à direita ou à esquerda

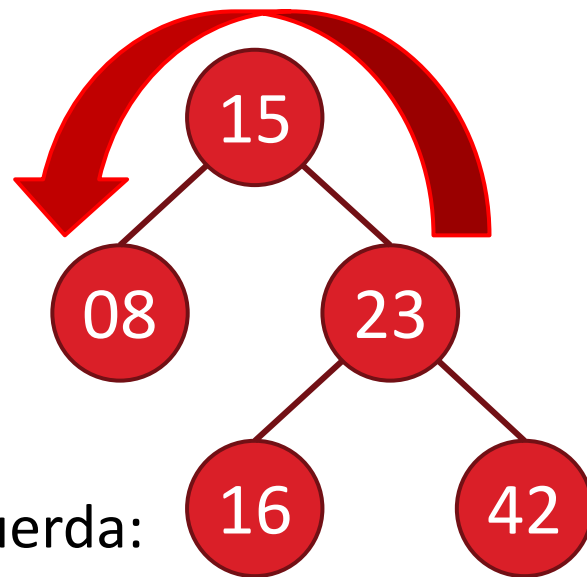
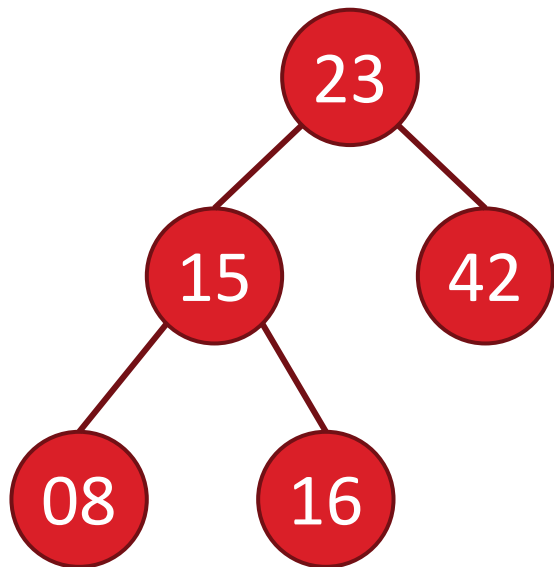


Rotação à esquerda:
diminui a altura da direita

Rotação de uma subárvore

20

- Diminui em 1 a altura da subárvore rotacionada
 - ▣ Pode ser feita à direita ou à esquerda

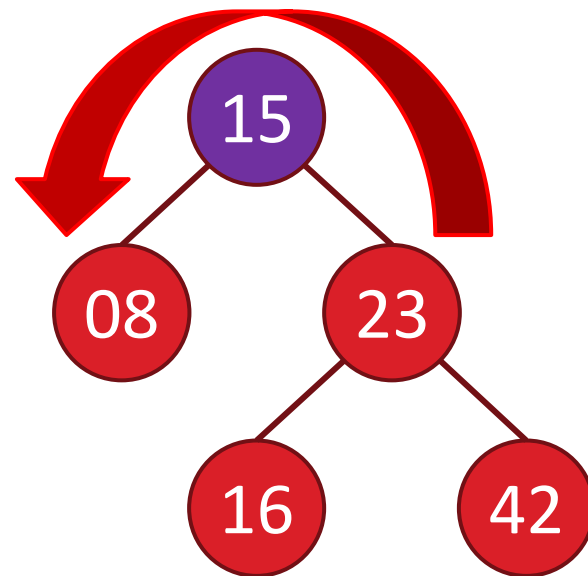


Rotação à esquerda:
diminui a altura da direita

Rotação à esquerda

21

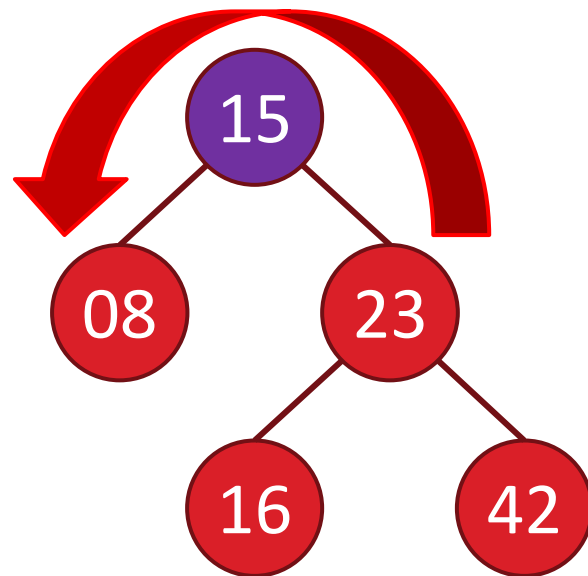
- Guardar raiz



Rotação à esquerda

22

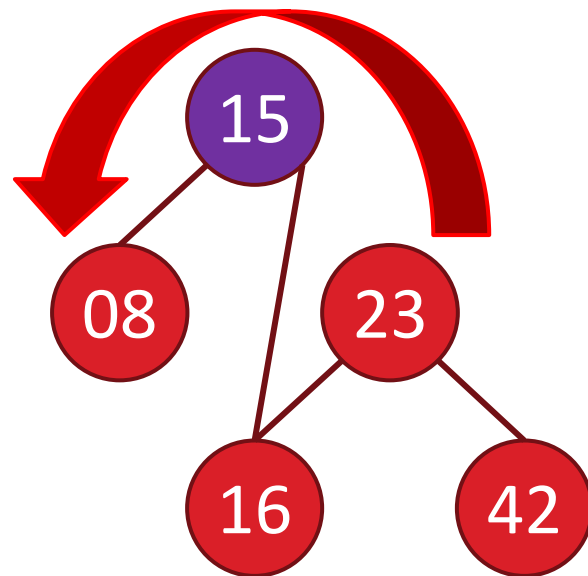
□ `raiz.dir <-- dir.esq`



Rotação à esquerda

23

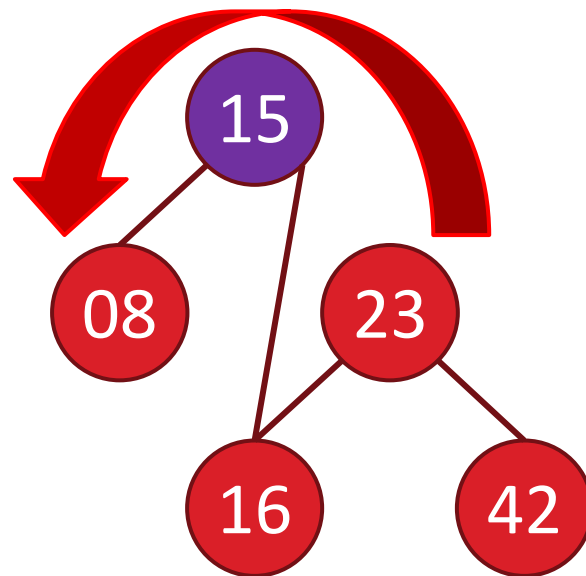
□ raiz.dir <-- dir.esq



Rotação à esquerda

24

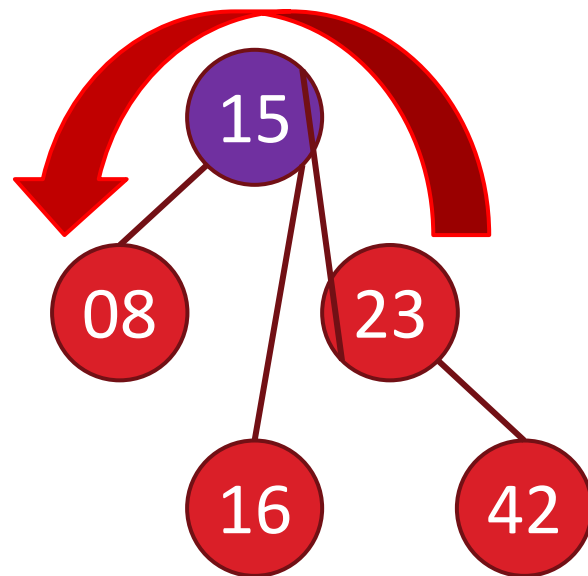
- ❑ `raiz.dir <-- dir.esq`
- ❑ `“dir”.esq <-- raiz`



Rotação à esquerda

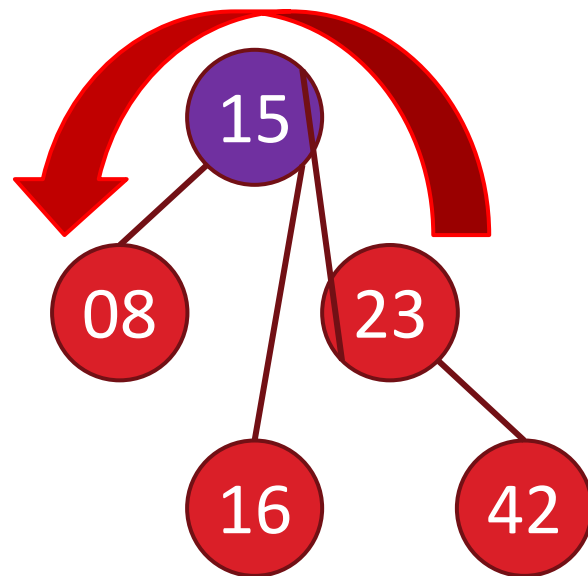
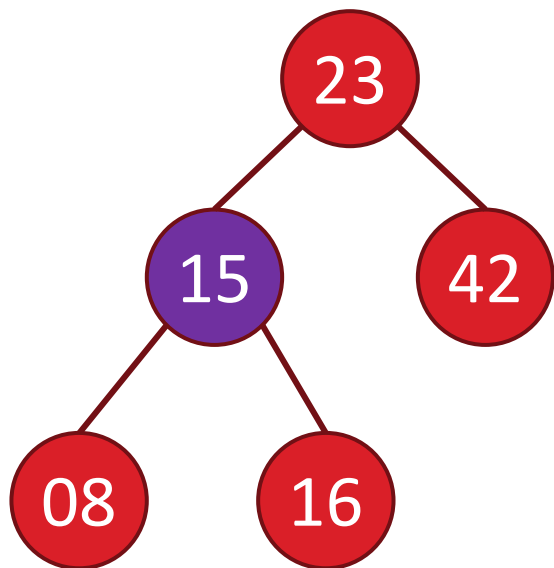
25

- ❑ `raiz.dir <-- dir.esq`
- ❑ `“dir”.esq <-- raiz`



Rotação à esquerda

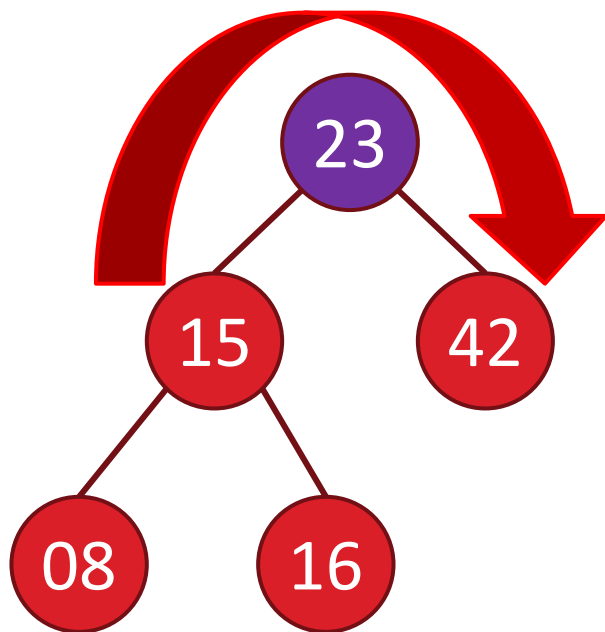
26



Rotação à direita

27

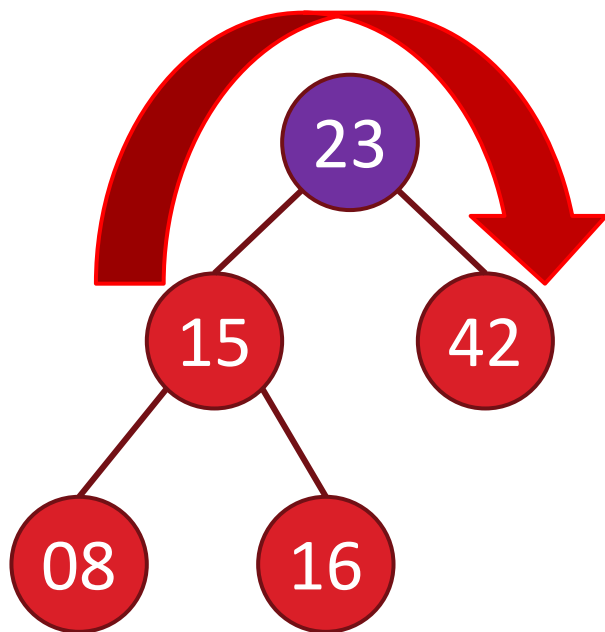
□ Guardar raiz



Rotação à direita

28

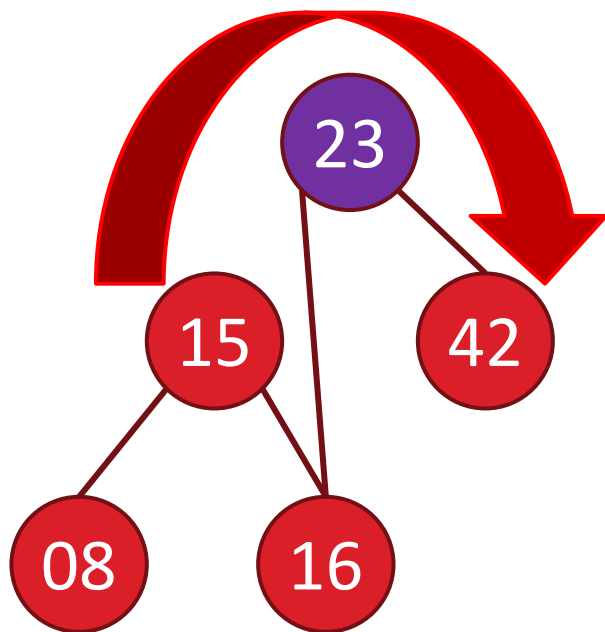
□ `raiz.esq <-- esq.dir`



Rotação à direita

29

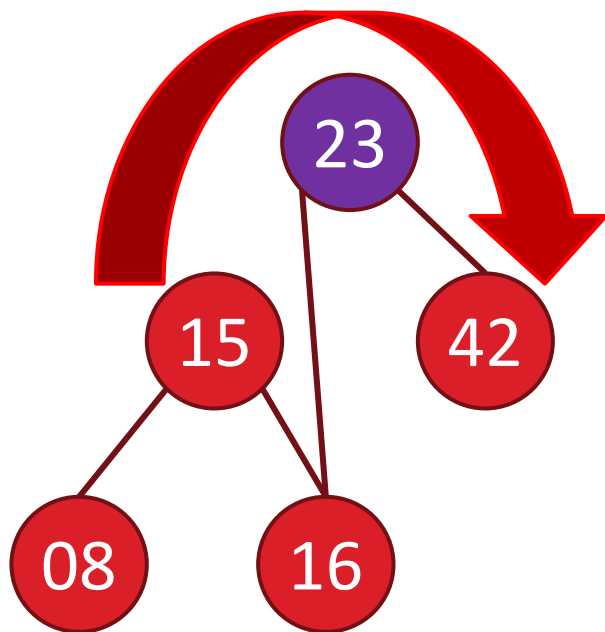
□ `raiz.esq <-- esq.dir`



Rotação à direita

30

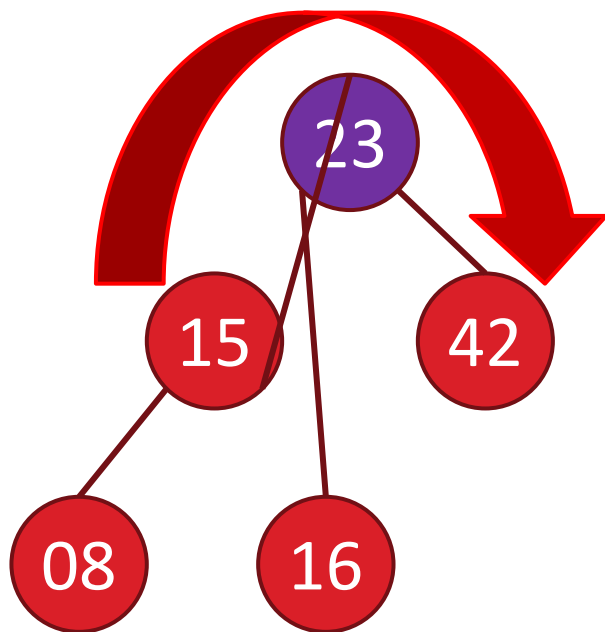
- `raiz.esq <-- esq.dir`
- `"esq".dir <-- raiz`



Rotação à direita

31

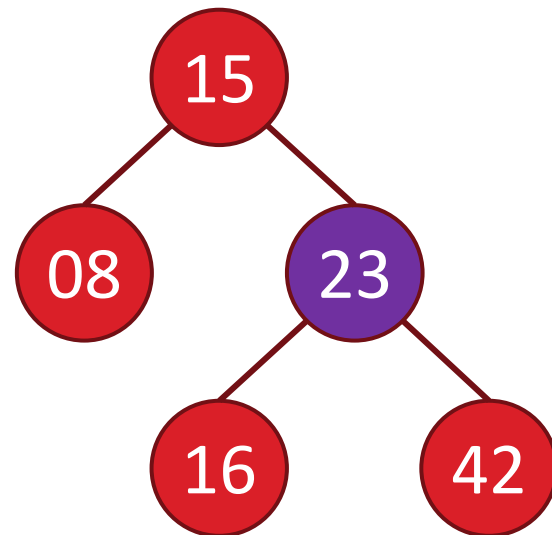
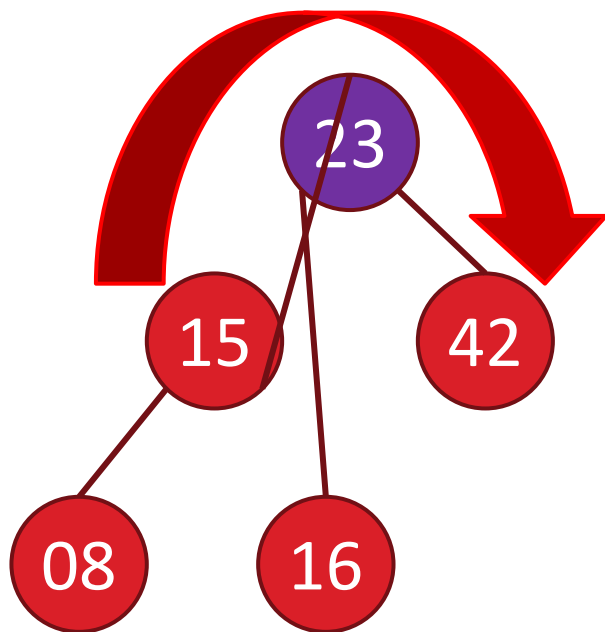
- `raiz.esq <-- esq.dir`
- `"esq".dir <-- raiz`



Rotação à direita

32

- $\text{raiz.esq} \leftarrow \text{esq.dir}$
- $\text{"esq".dir} \leftarrow \text{raiz}$

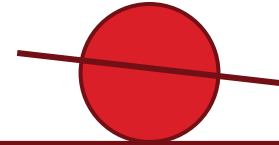


AVL, rotação e balanceamento

33

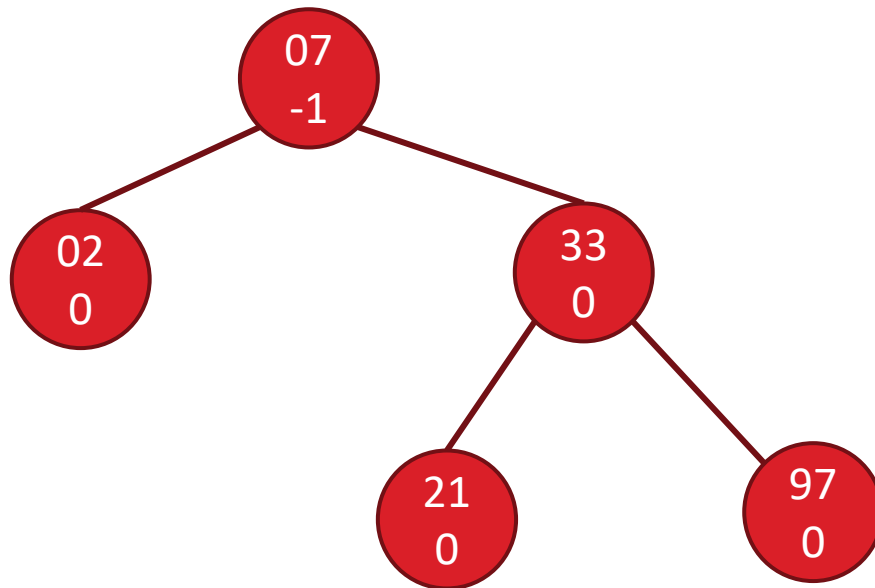
- Uma árvore AVL:
 - Verifica o fator de balanceamento de todo o caminho recursivo a cada inserção e retirada
 - Em caso de desbalanceamento (fator 2 ou -2), faz a rotação em sentido contrário naquele momento

AVL: inserções e remoções



Ins: 02, 13, 81, 97, 33, 25, 21, 07

Rem: 25, 81, 13



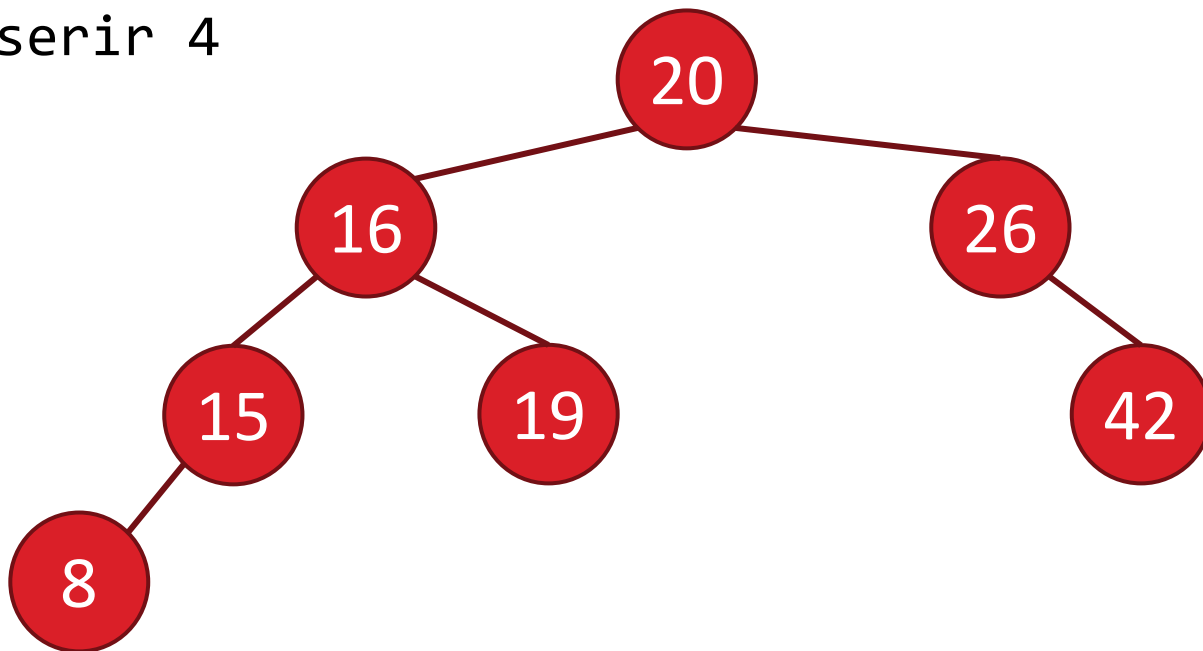
AVL e regras de balanceamento

35

Fator	Fator do filho	Ação
2	Esq: -1	Rotação dupla: filho à esquerda, pai à direita
	Esq: 0	Rotação à direita
	Esq: 1	Rotação à direita
-2	Dir: -1	Rotação à esquerda
	Dir: 0	Rotação à esquerda
	Dir: 1	Rotação dupla: filho à direita, pai à esquerda

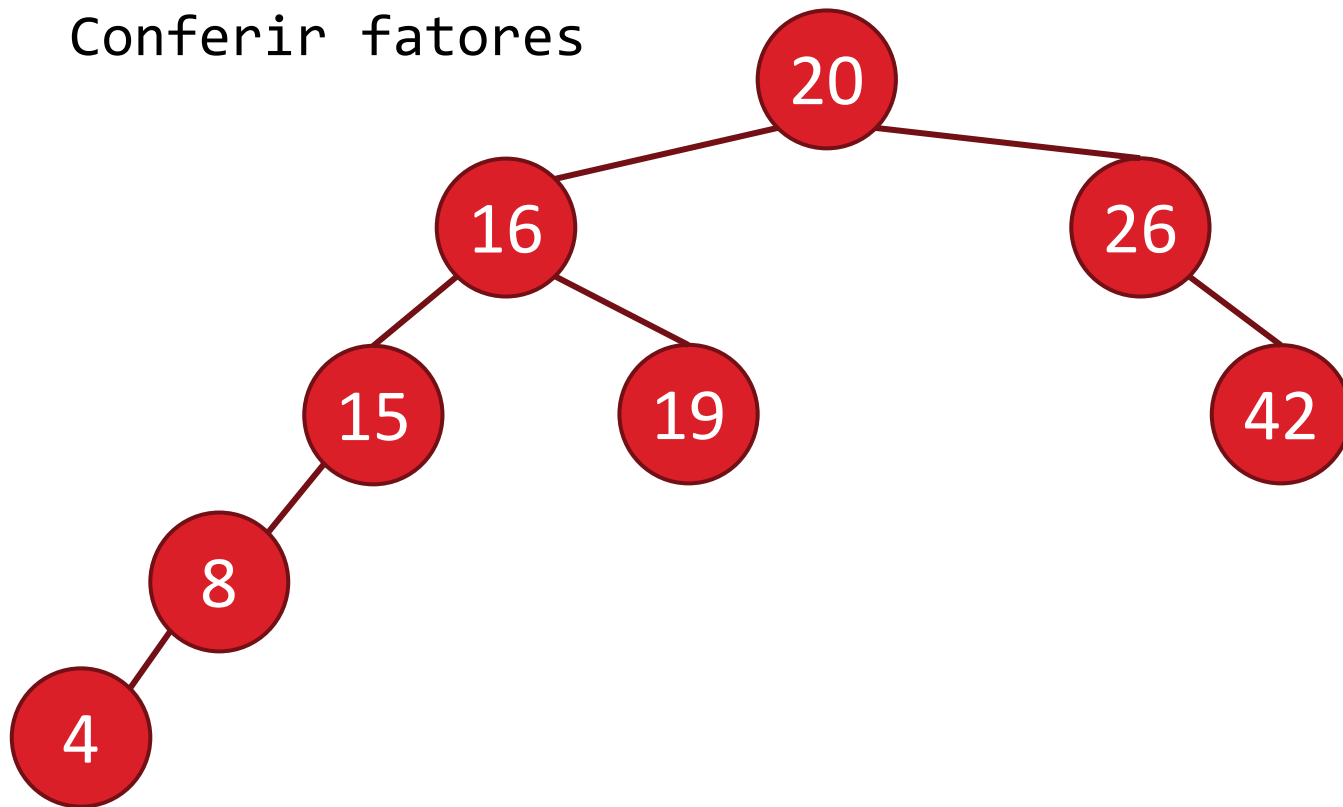
AVL: exemplo adicional

Inserir 4



AVL: exemplo adicional

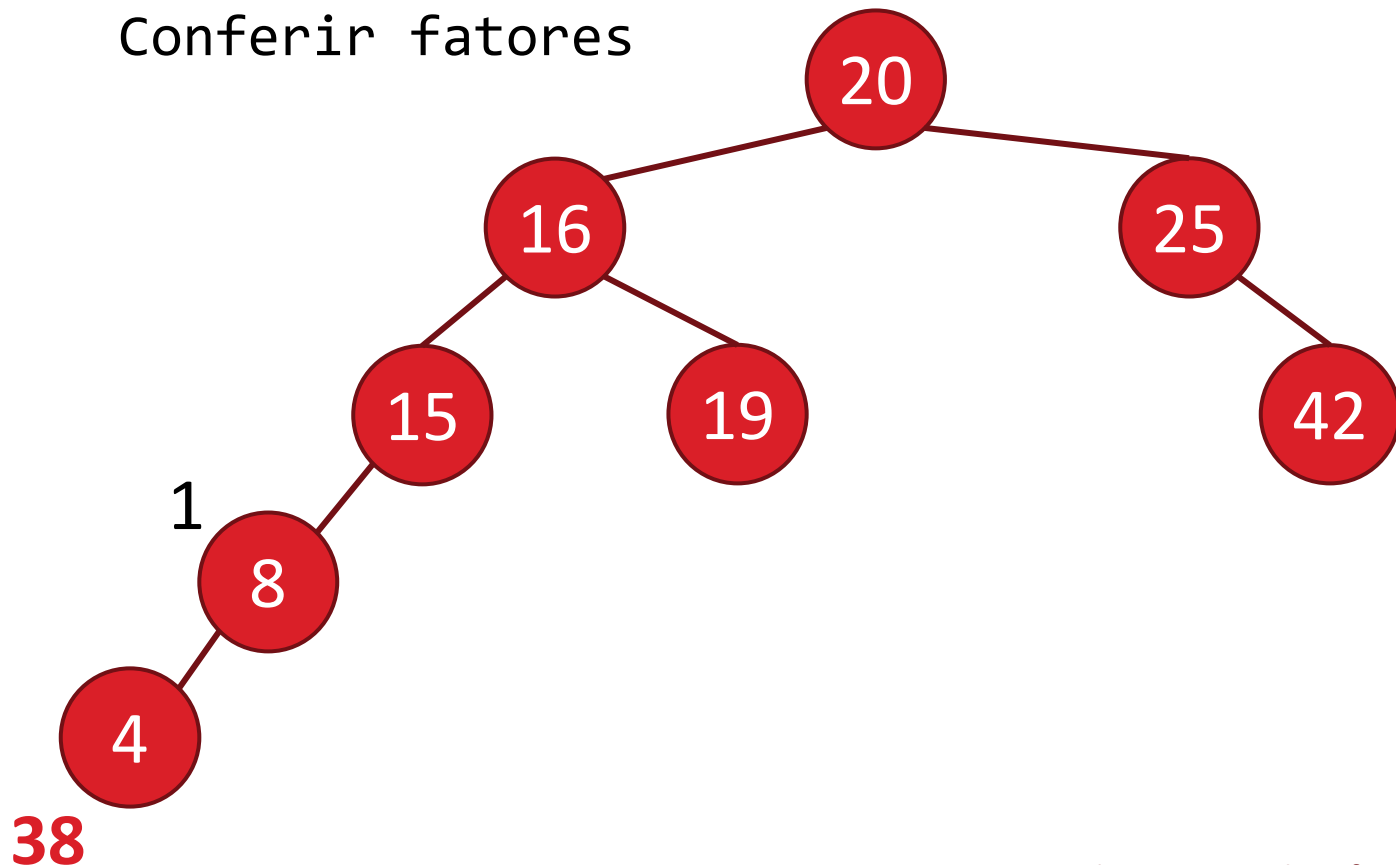
Conferir fatores



37

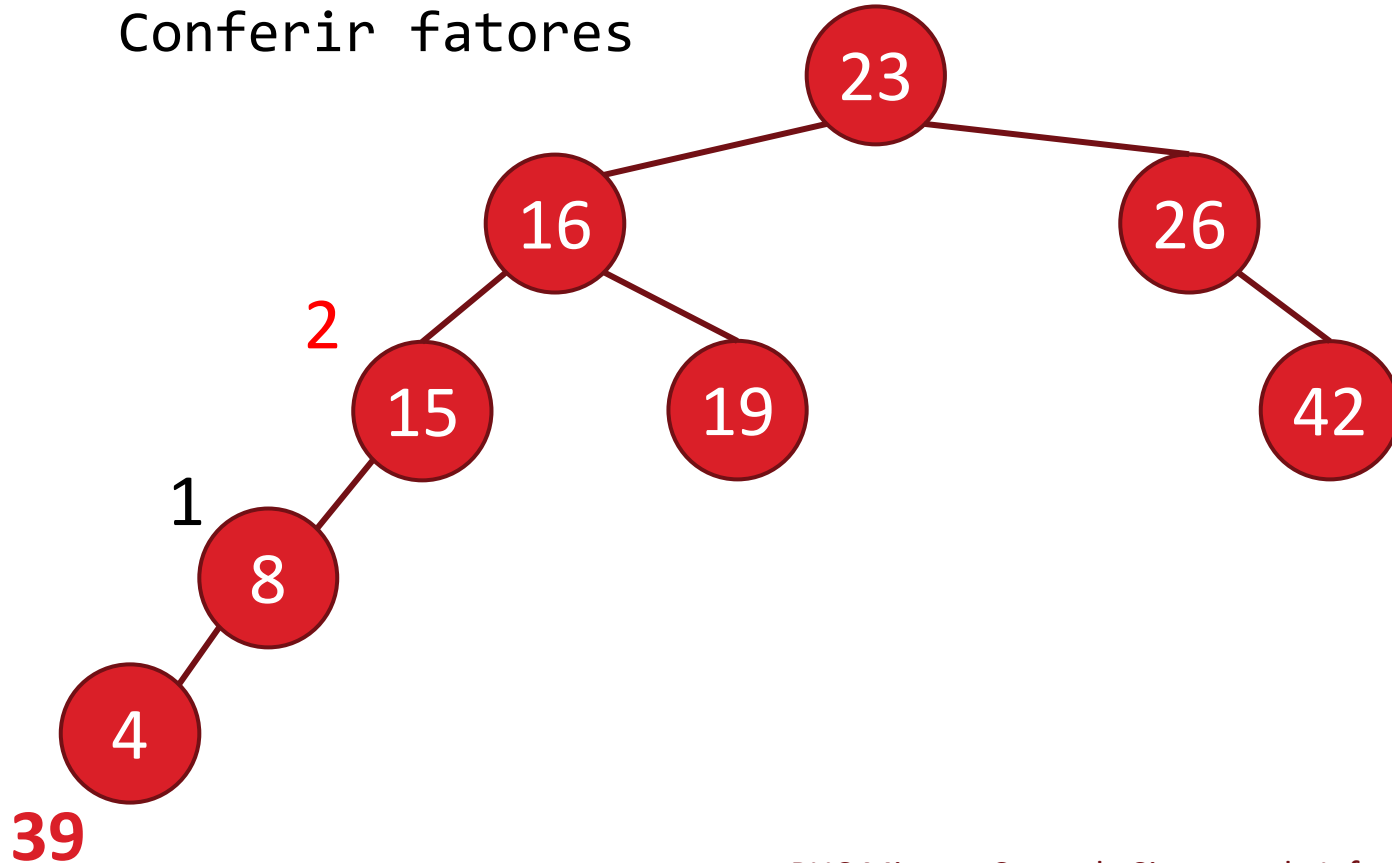
AVL: exemplo adicional

Conferir fatores



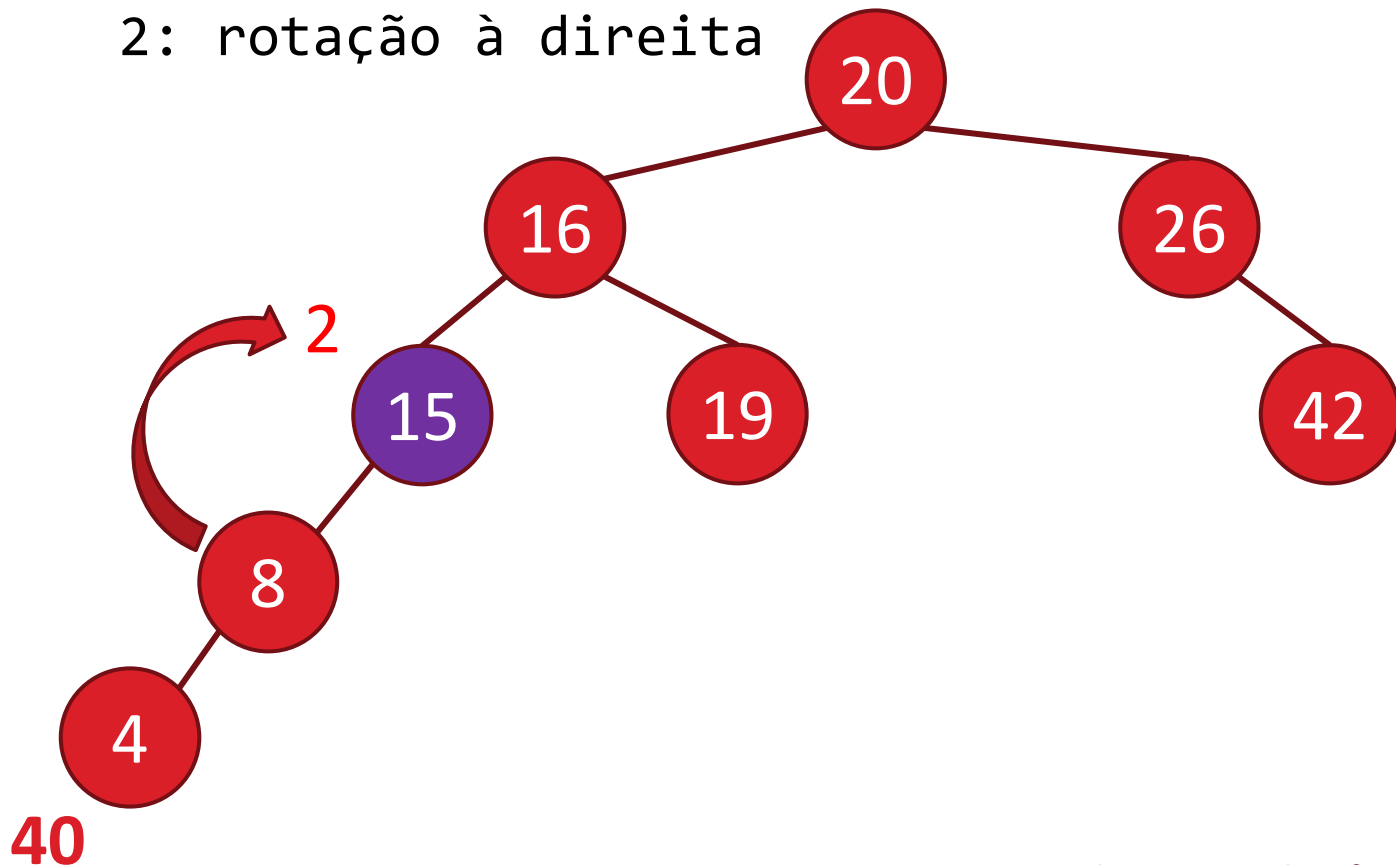
AVL: exemplo adicional

Conferir fatores



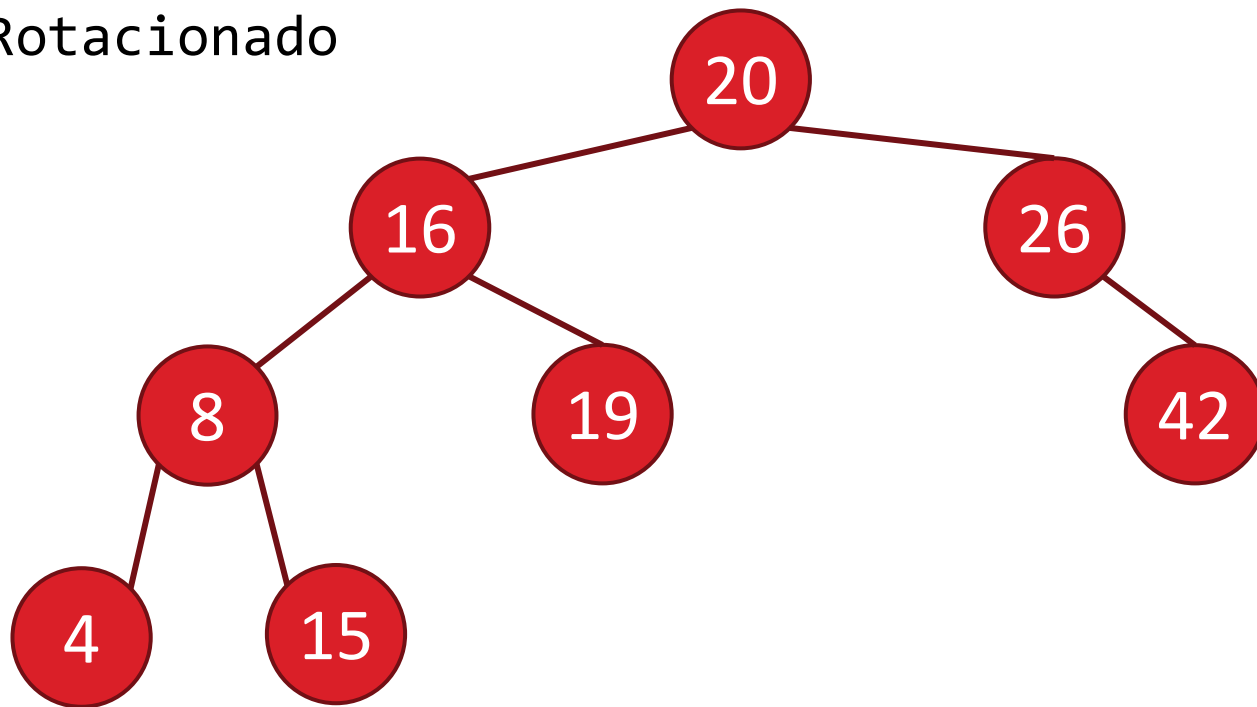
AVL: exemplo adicional

2: rotação à direita



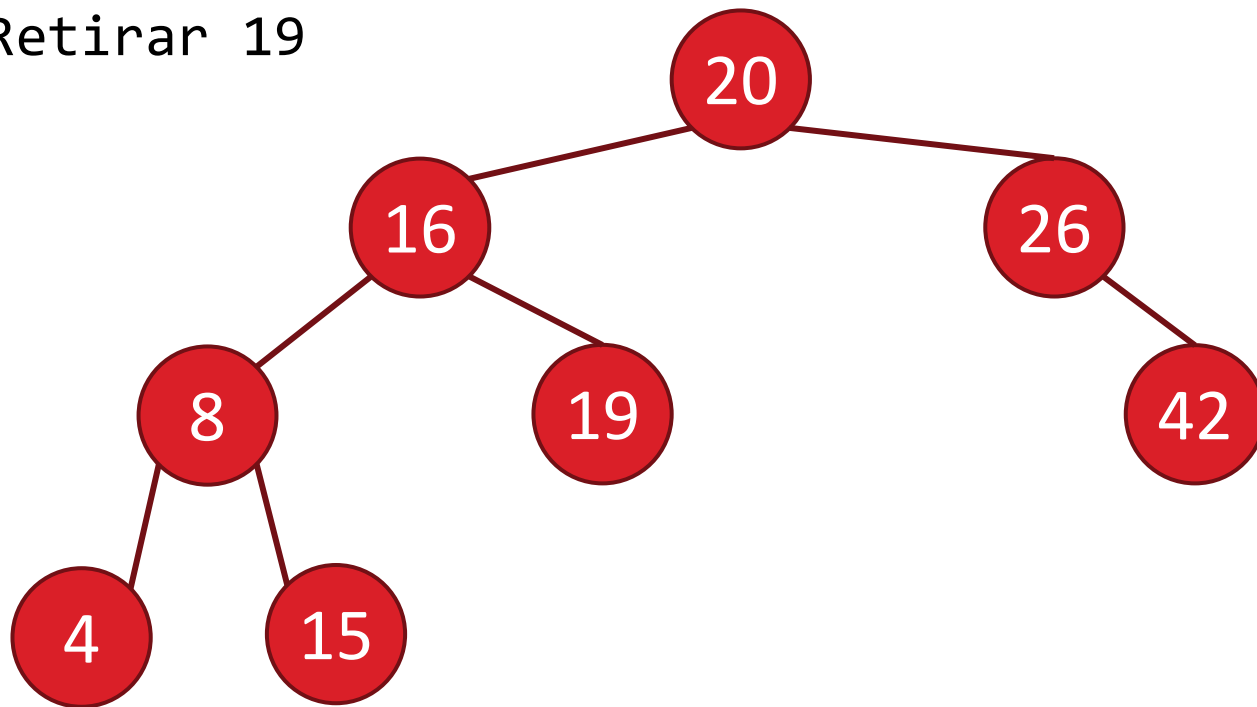
AVL: exemplo adicional

Rotacionado



AVL: exemplo adicional

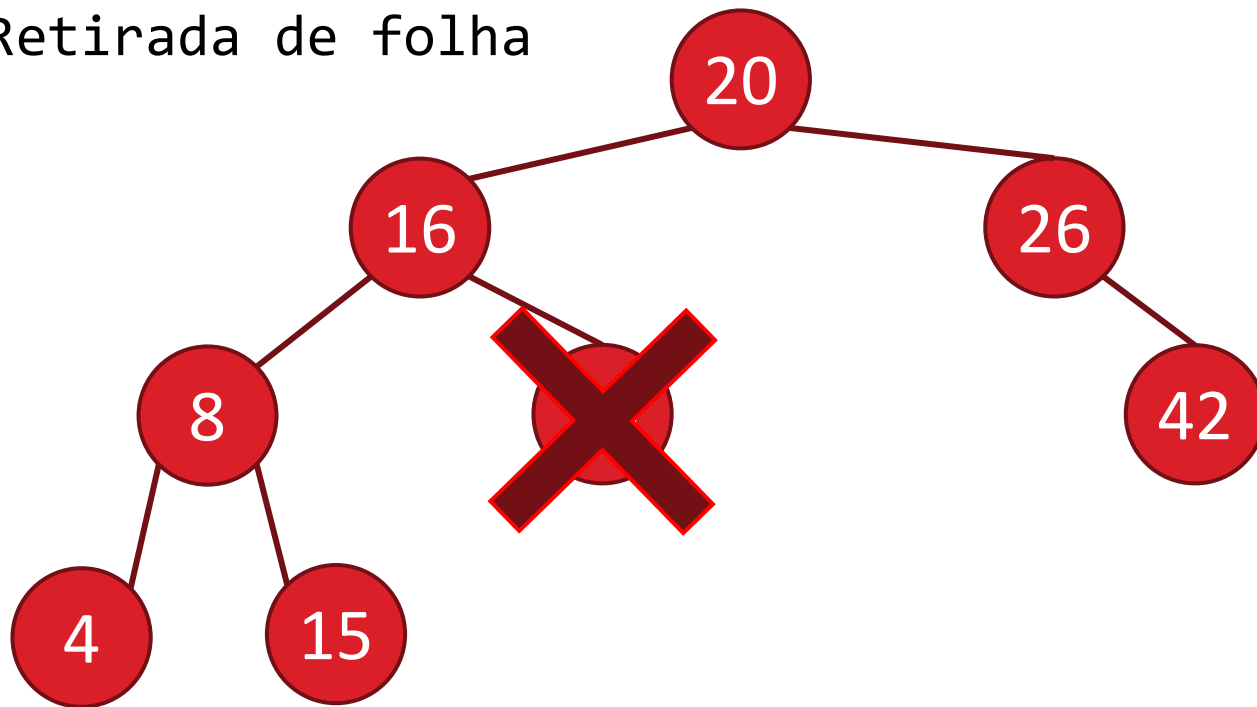
Retirar 19



42

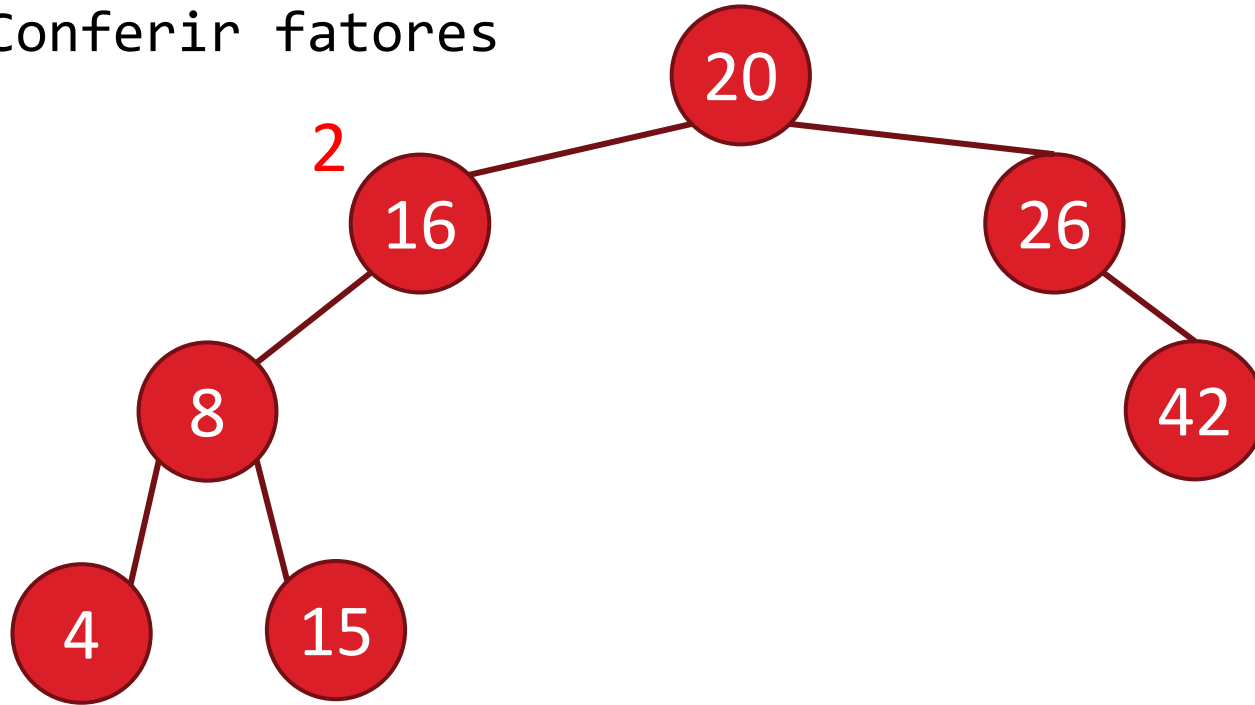
AVL: exemplo adicional

Retirada de folha



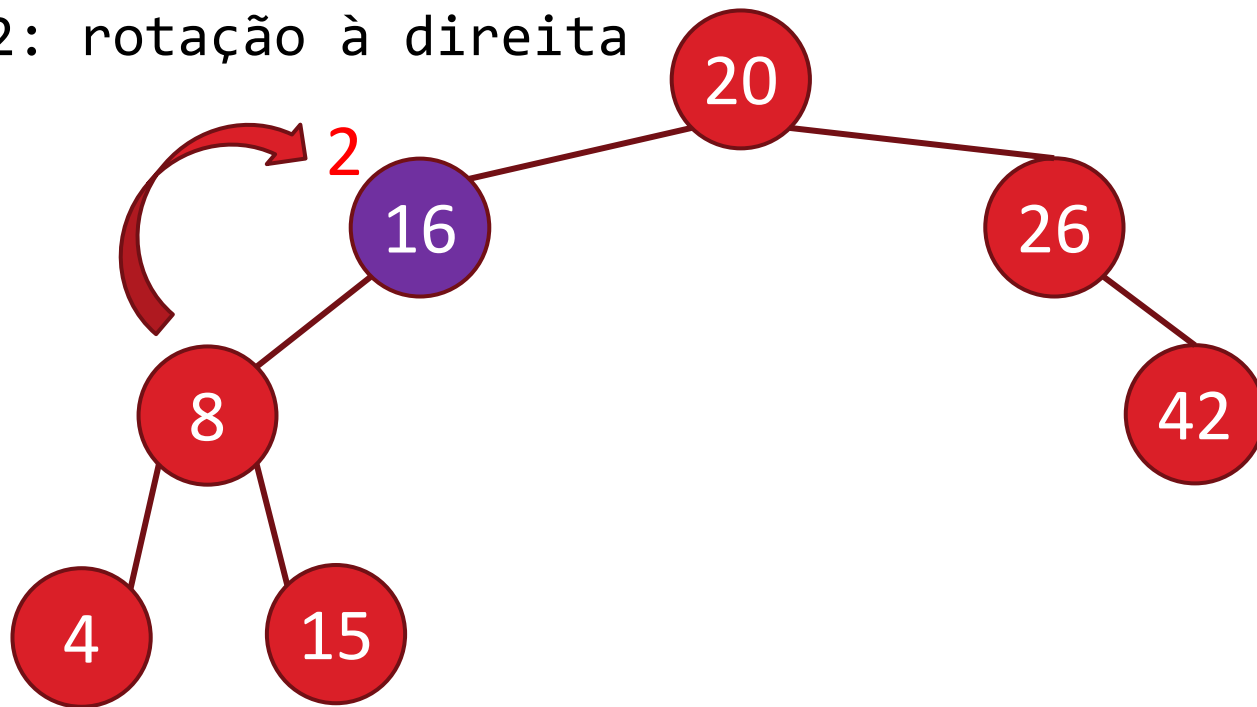
AVL: exemplo adicional

Conferir fatores



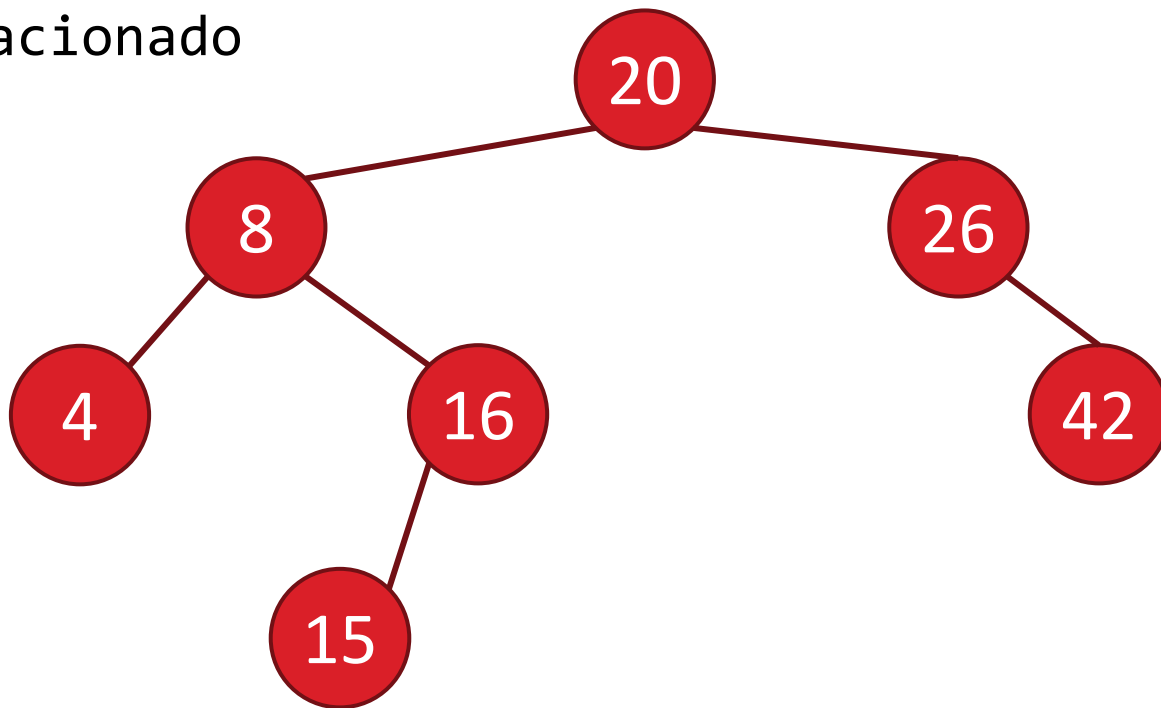
AVL: exemplo adicional

2: rotação à direita



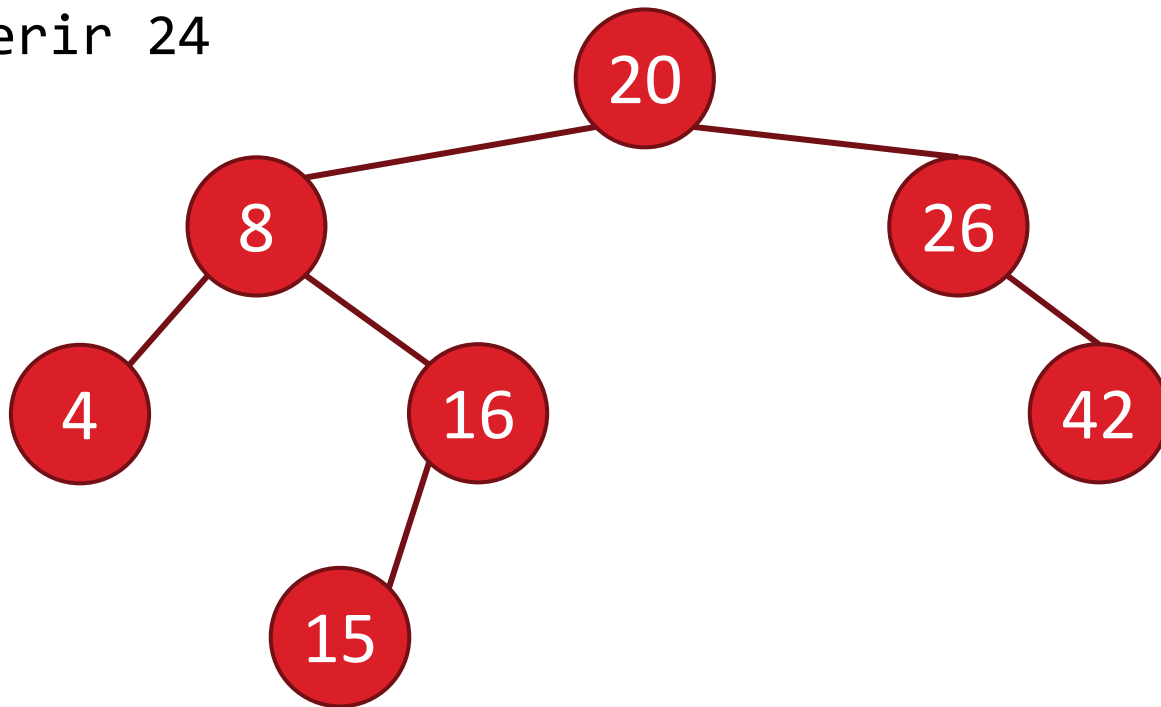
AVL: exemplo adicional

Rotacionado



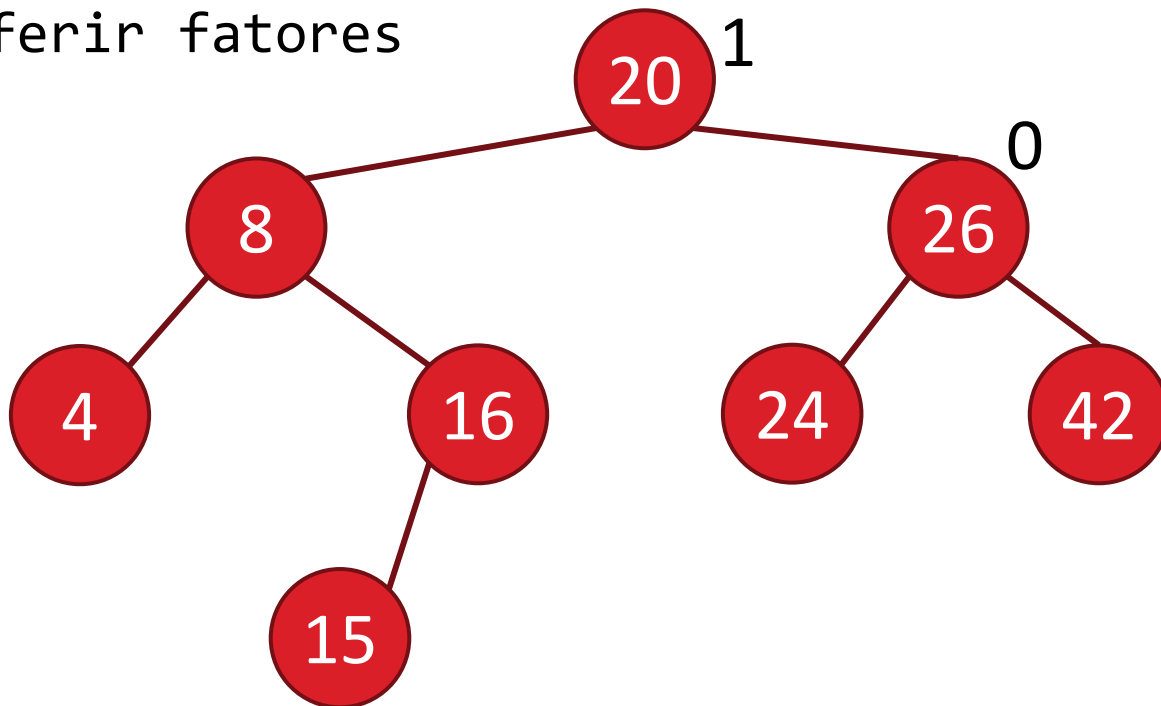
AVL: exemplo adicional

Inserir 24



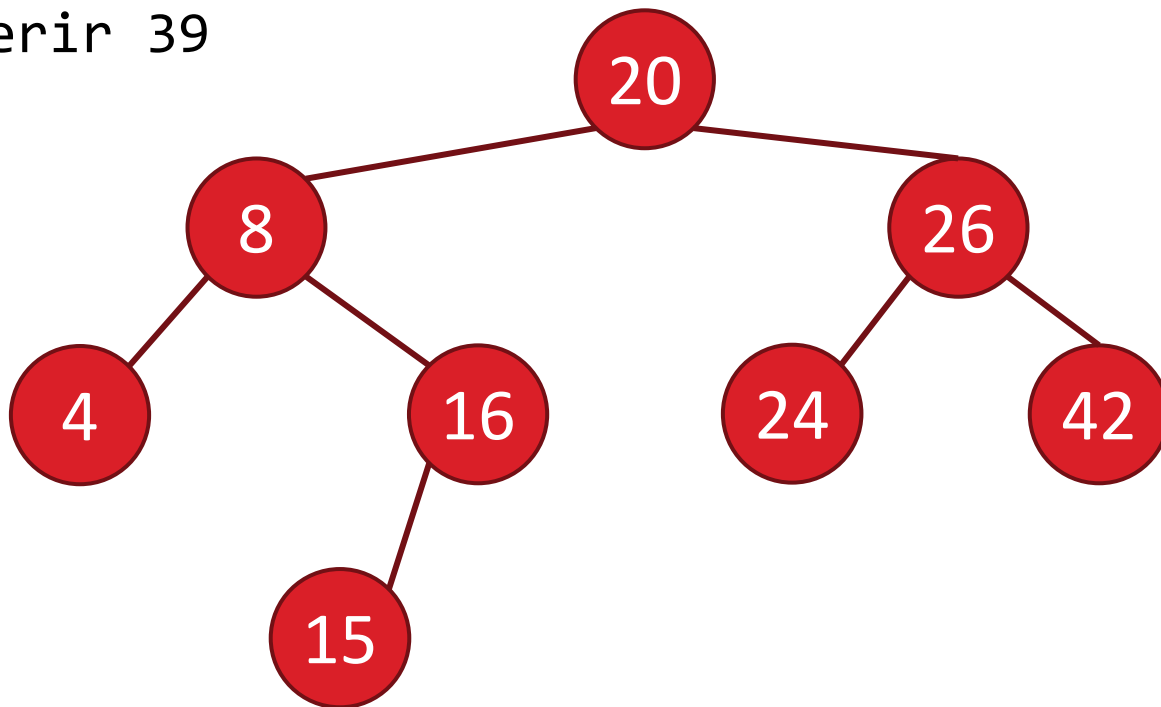
AVL: exemplo adicional

Conferir fatores



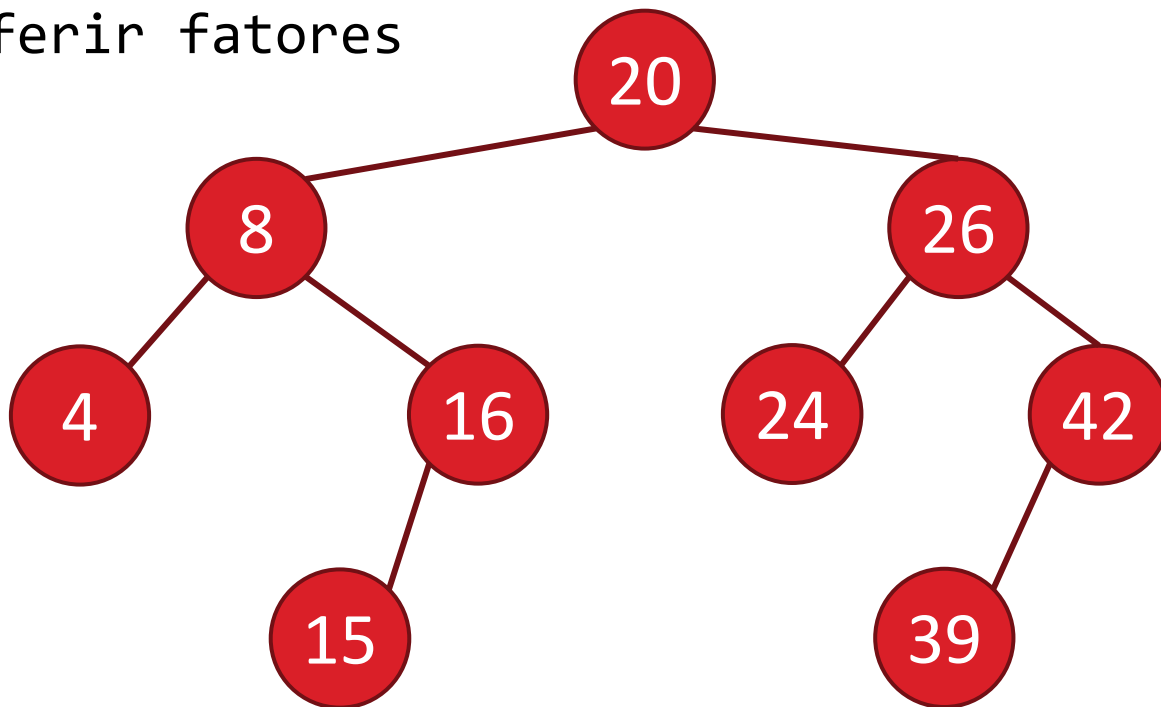
AVL: exemplo adicional

Inserir 39



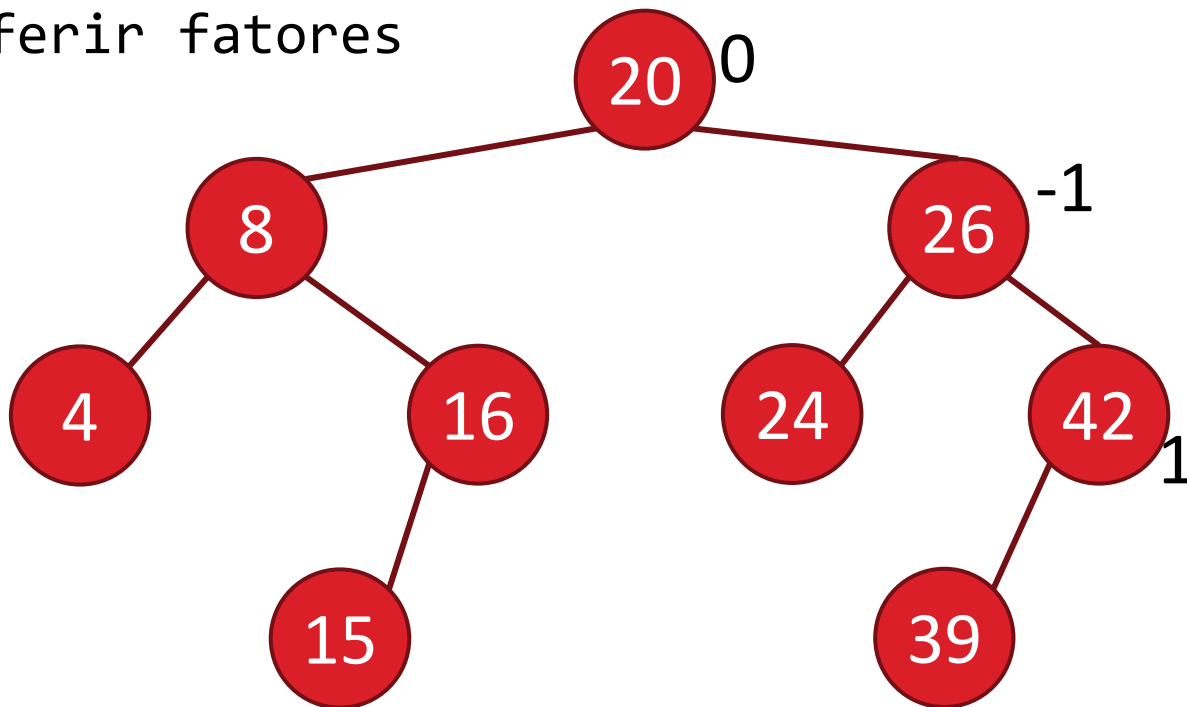
AVL: exemplo adicional

Conferir fatores



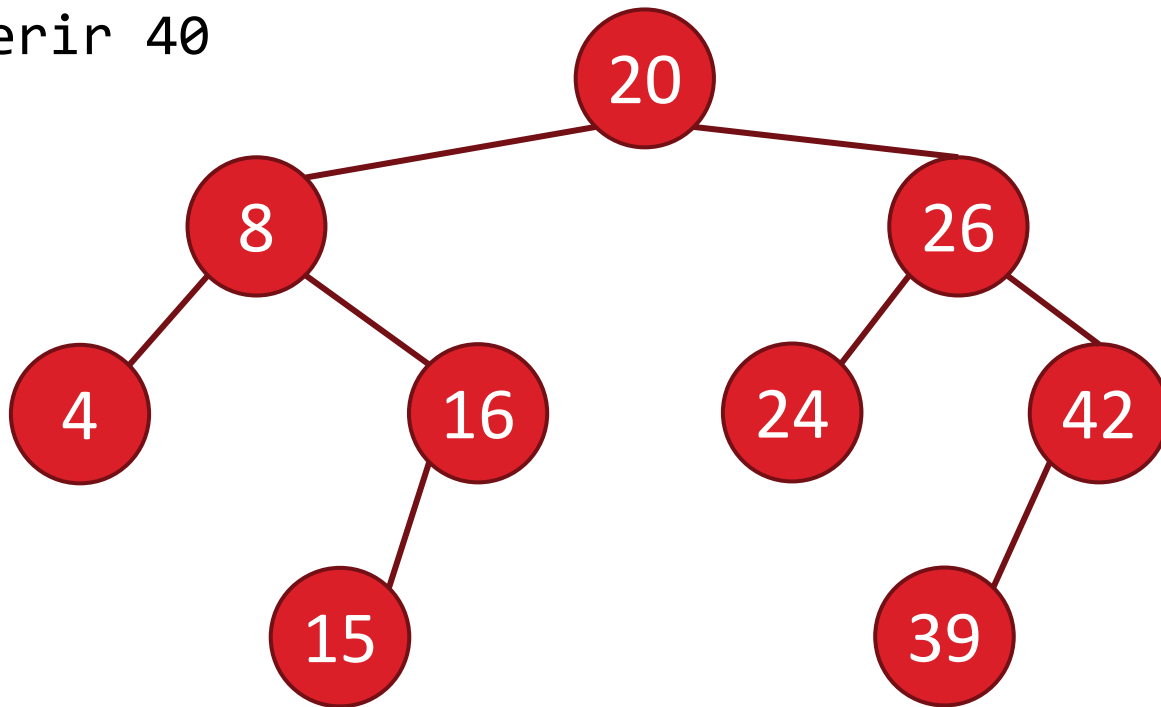
AVL: exemplo adicional

Conferir fatores



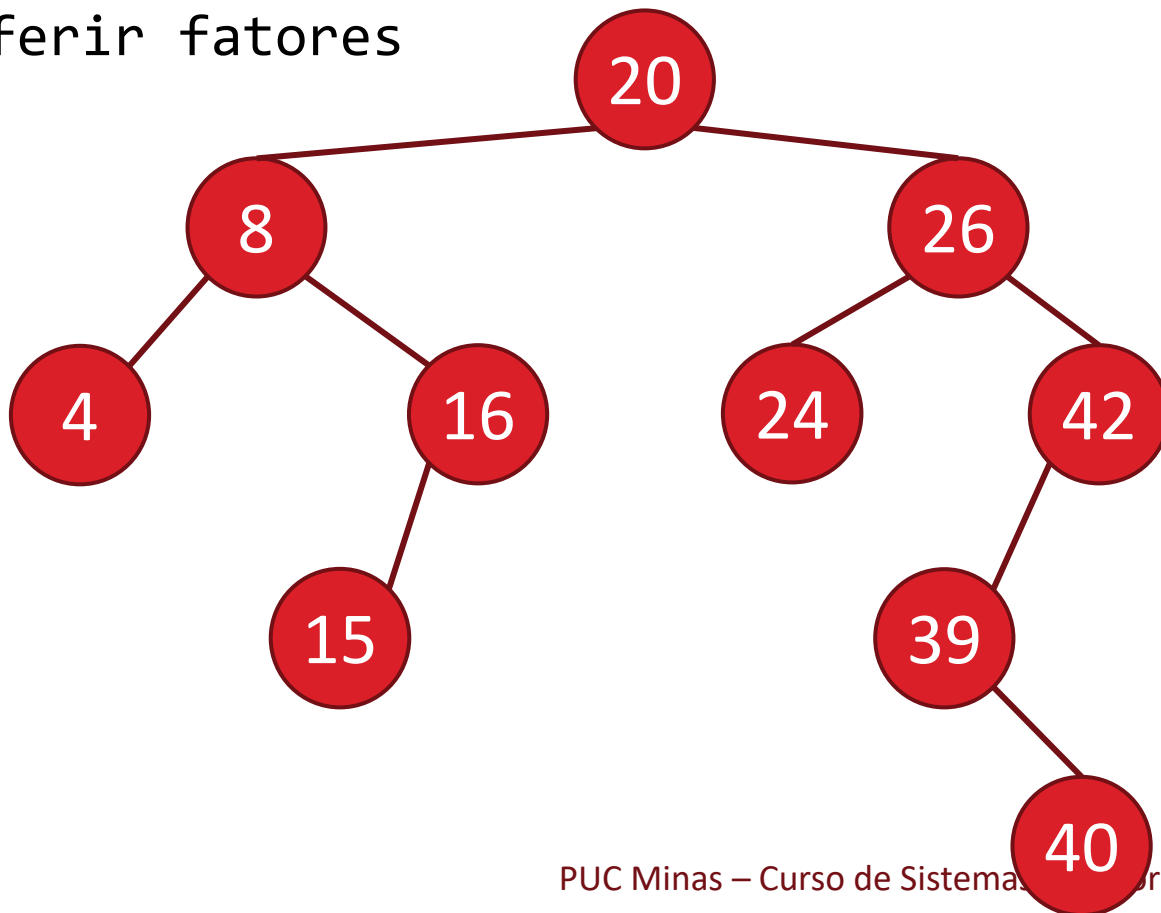
AVL: exemplo adicional

Inserir 40



AVL: exemplo adicional

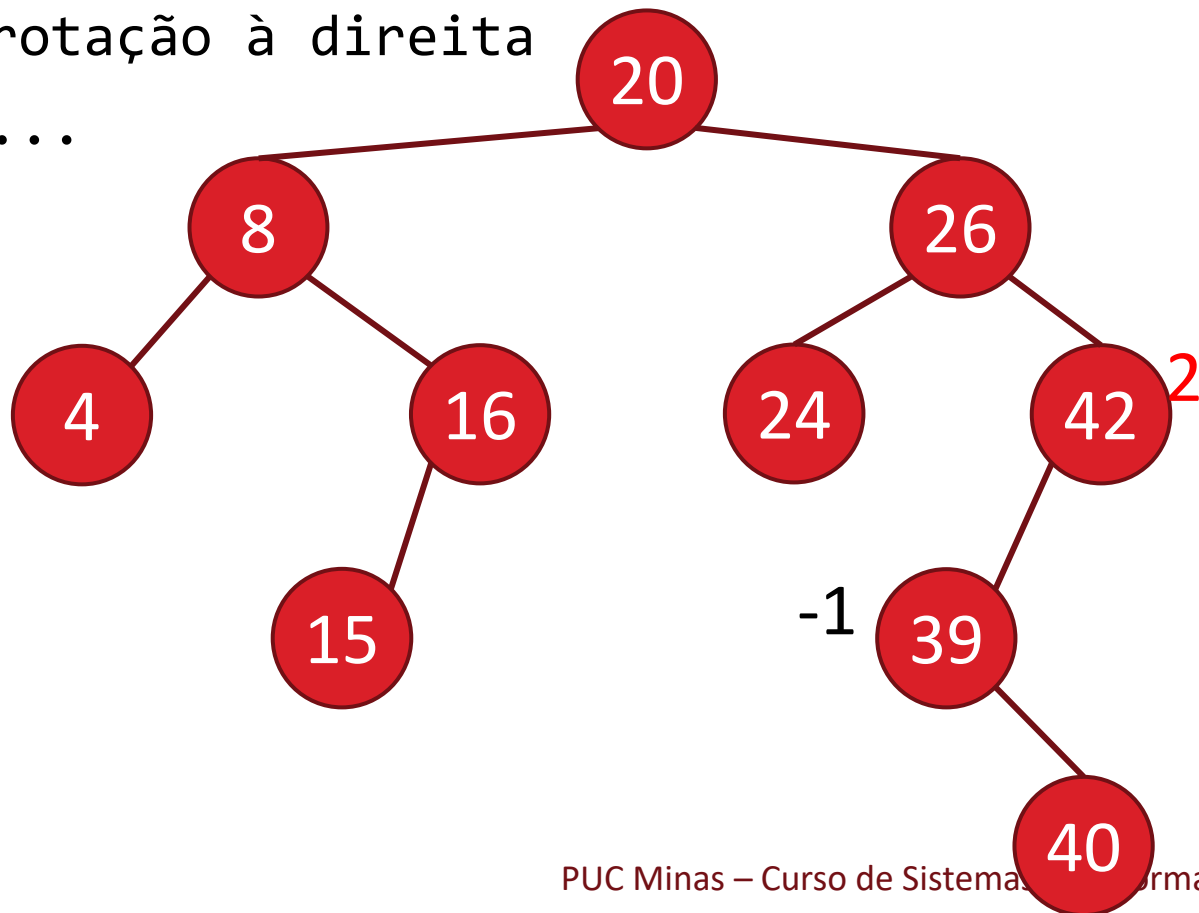
Conferir fatores



AVL: exemplo adicional

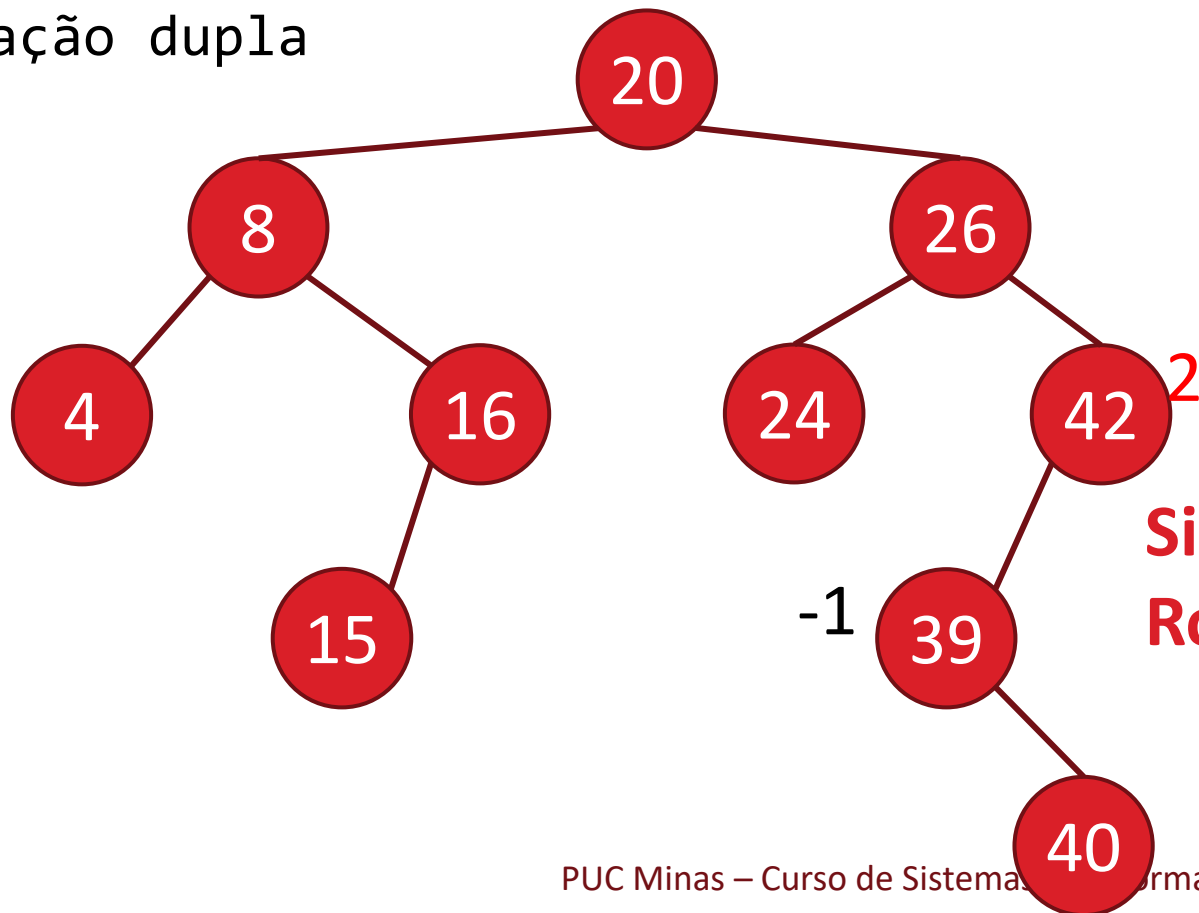
2: rotação à direita

Mas...



AVL: exemplo adicional

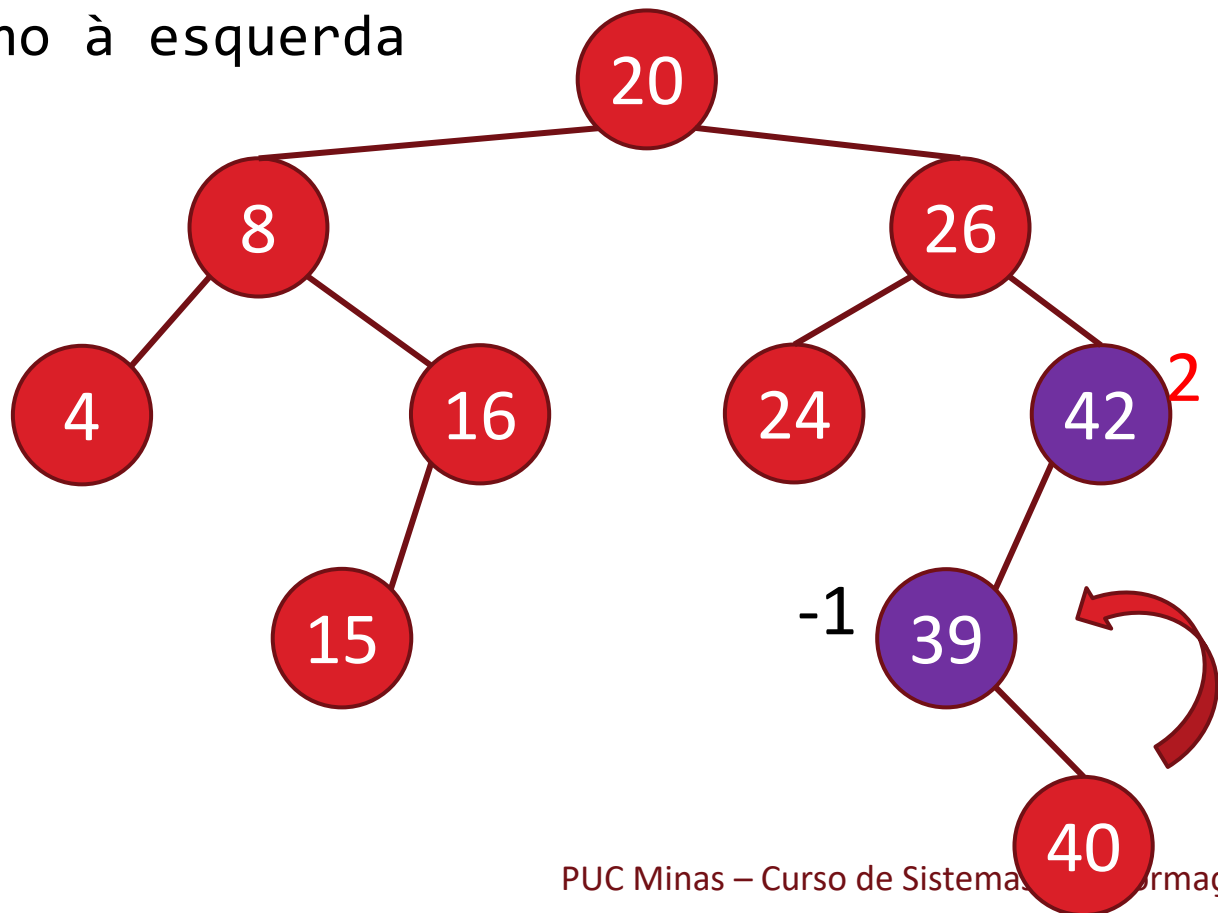
Rotação dupla



**Sinais trocados:
Rotação dupla!**

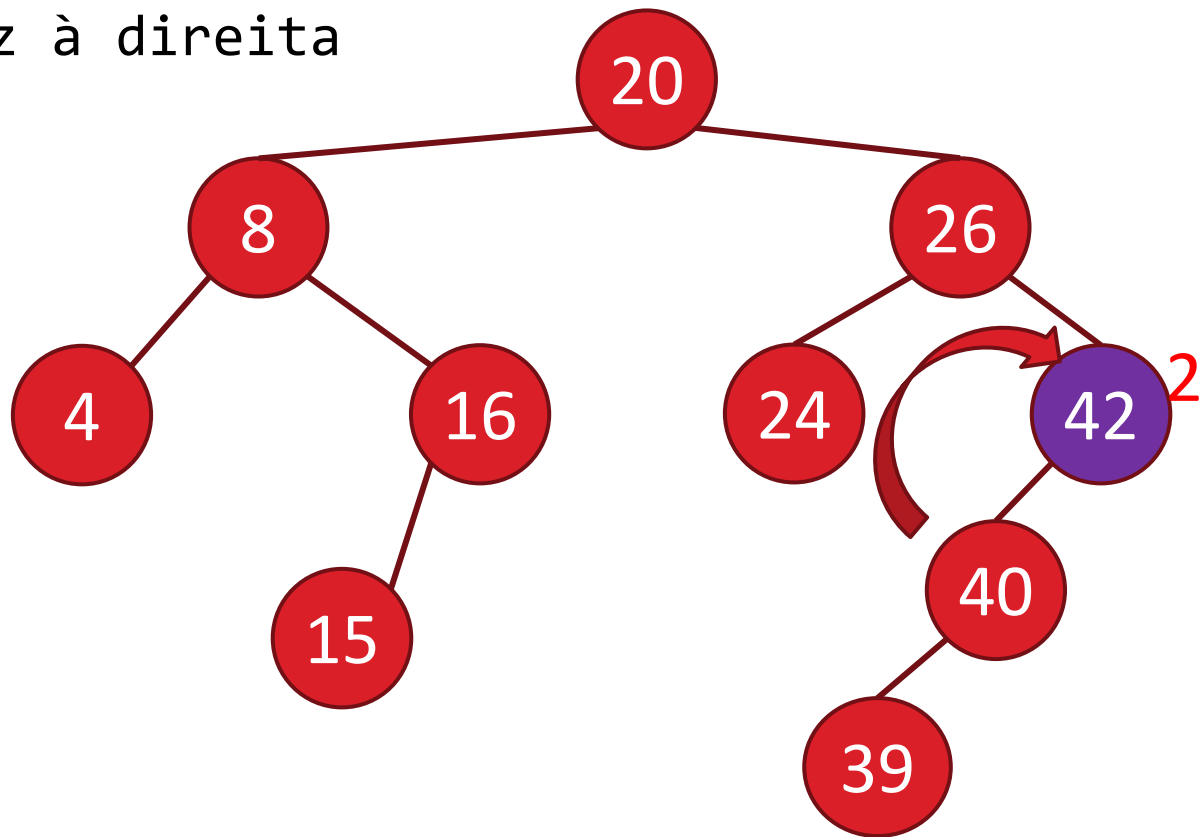
AVL: exemplo adicional

Filho à esquerda



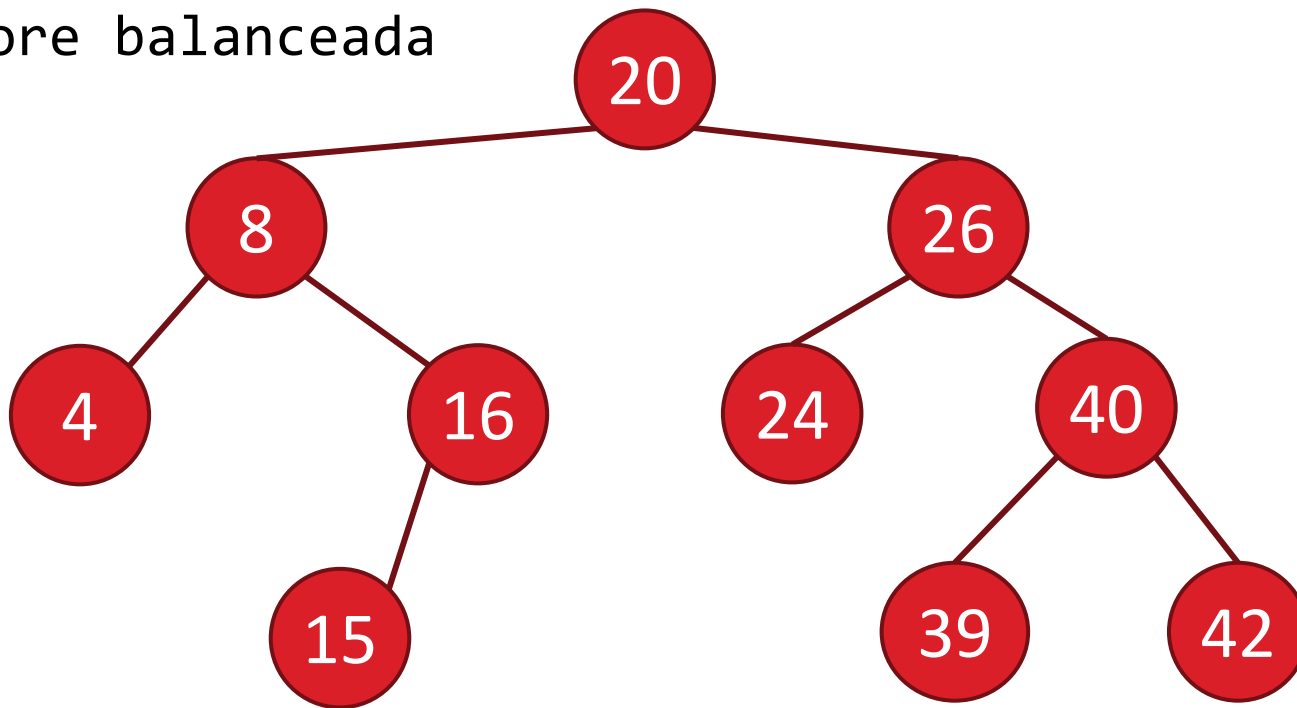
AVL: exemplo adicional

Raiz à direita



AVL: exemplo adicional

Árvore balanceada



Obrigado.

Dúvidas?