

Algoritmos e Estruturas de Dados

Árvores de pesquisa

Prof. João Caram

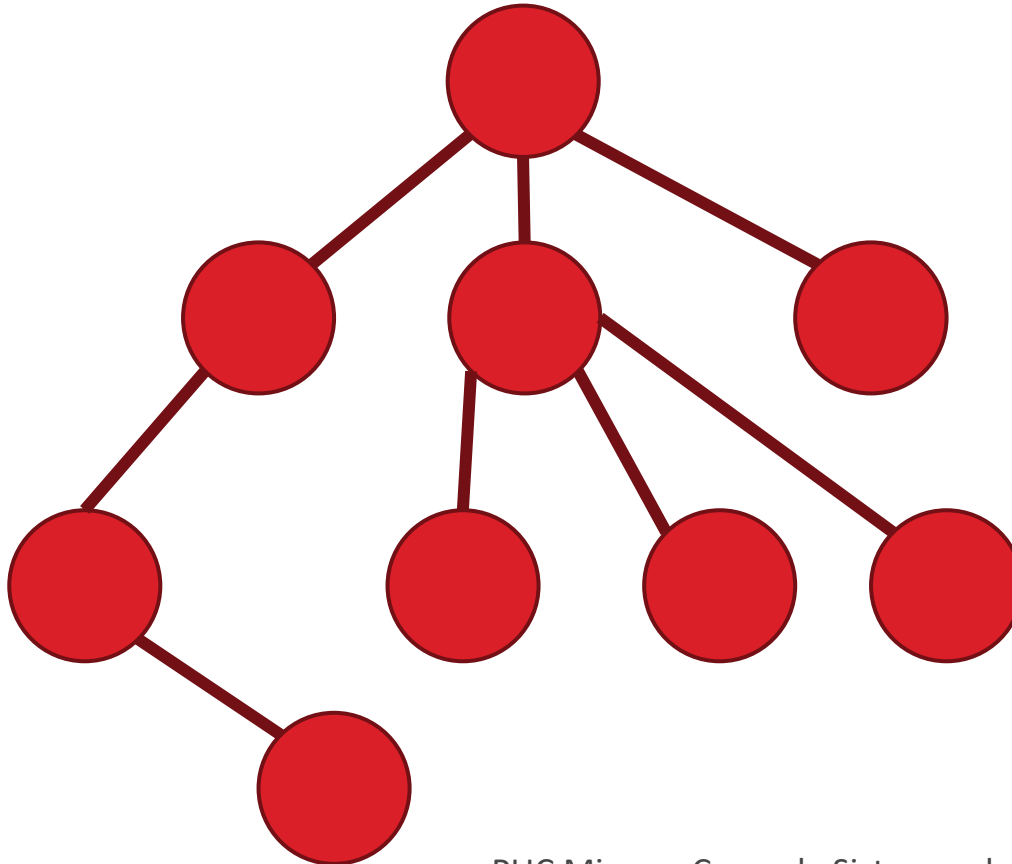
Árvores

2

- Árvores são estruturas de dados *não-lineares*
- Os dados possuem um relacionamento *hierárquico*
 - Mãe/pai e filho
 - Ancestrais e descendentes
 - Nível superior e nível inferior

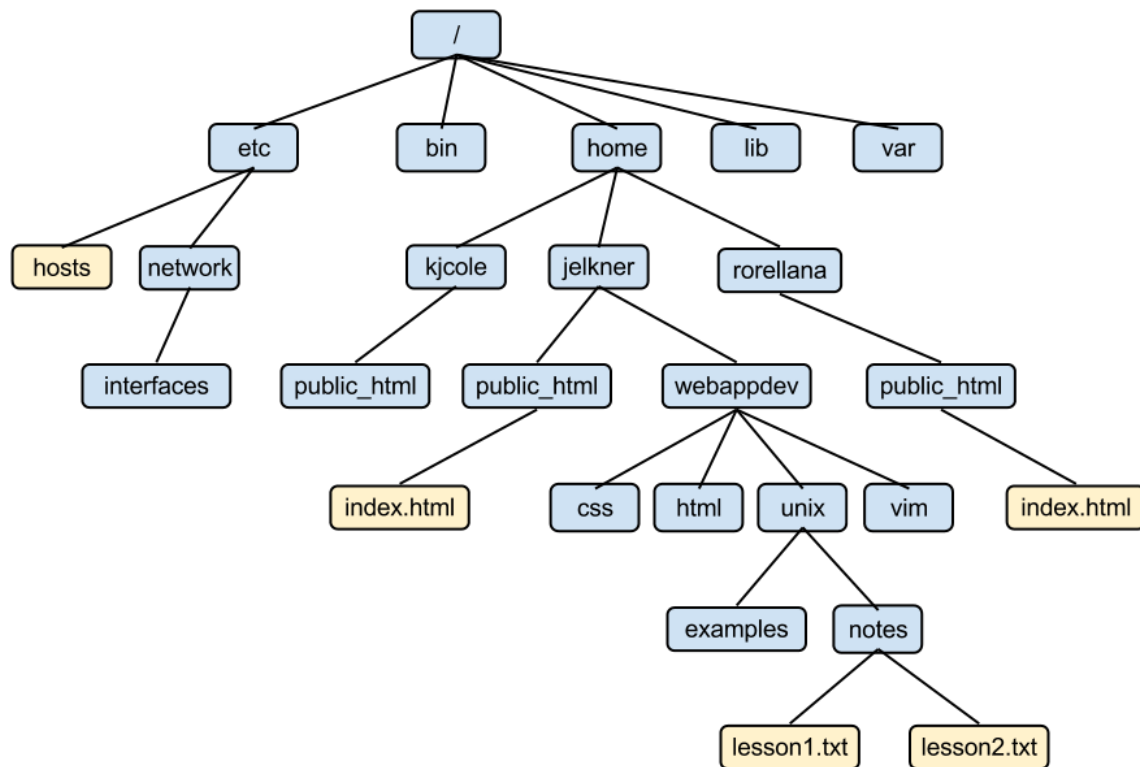
Uma árvore genérica

3



Árvore em sistema de arquivos

4



Elkner, Jeffrey. Getting Down With the Unix CLI: Files and the file system. Disponível em <
<http://www.openbookproject.net/tutorials/getdown/unix/lesson2.html>
>

Árvore genérica - definições

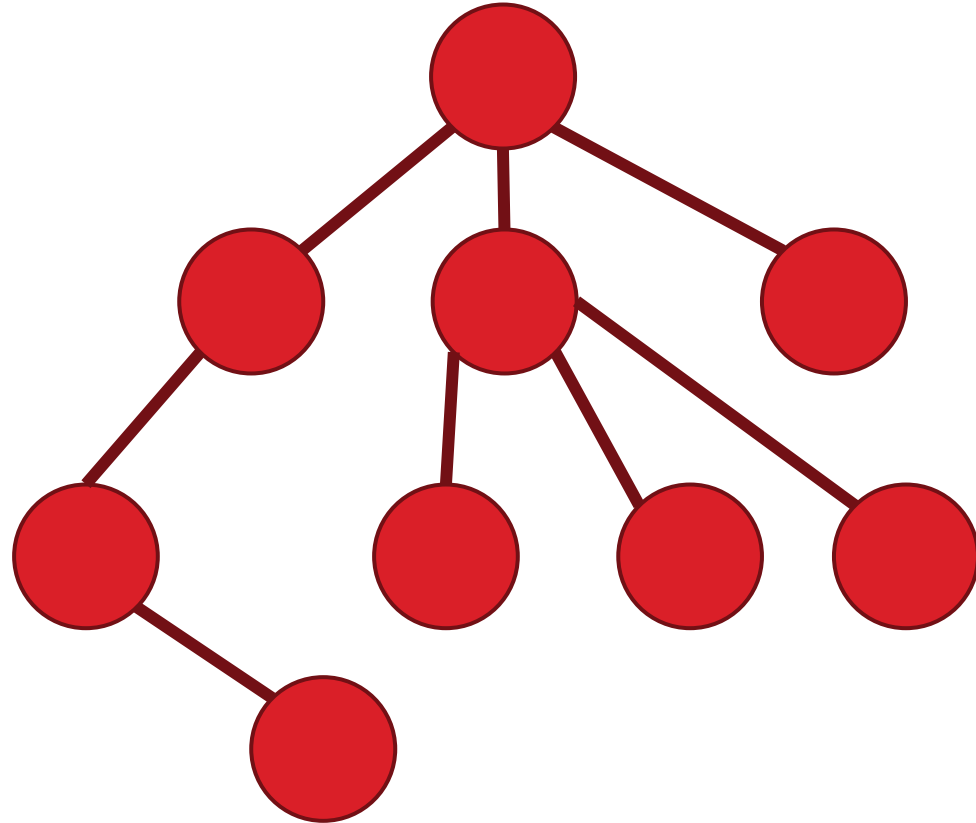
5

- Toda árvore tem um elemento **raiz**, por meio do qual é possível se acessar qualquer outro elemento
- Os elementos de uma árvore são chamados **nodos** (**nós**) ou **vértices**
- Excetuando a raiz, todo nodo tem um elemento **pai** e zero ou mais **filhos**

Árvore genérica - definições

6

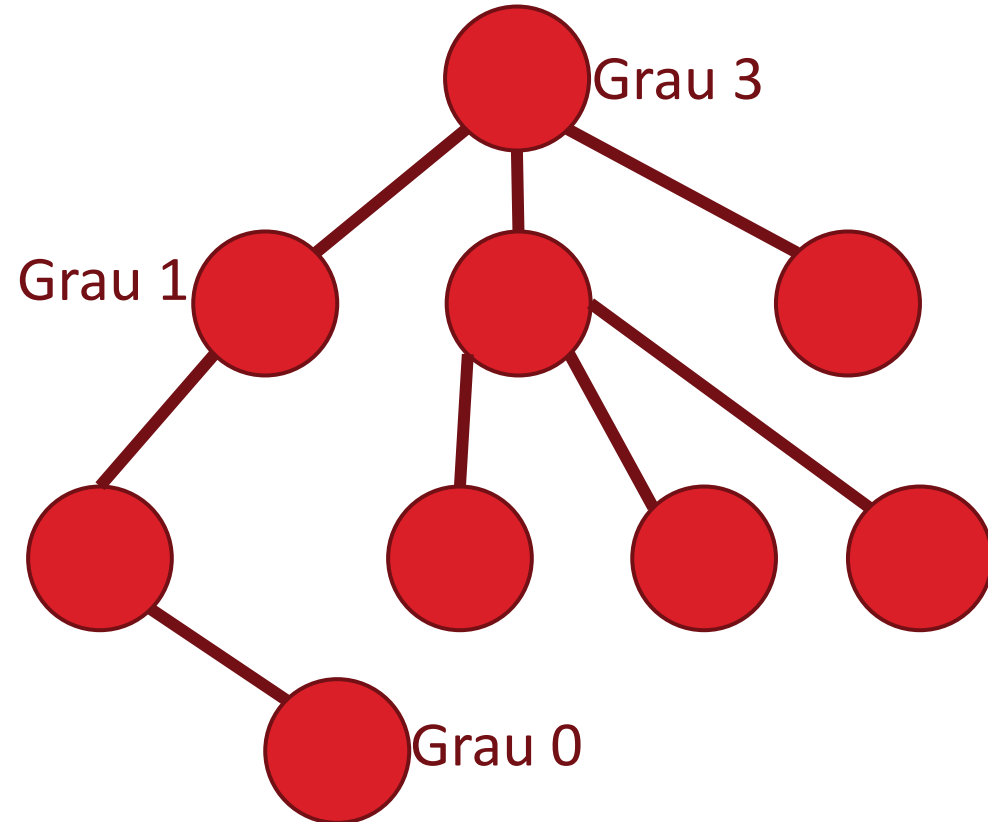
□ **Grau** de um nodo



Árvore genérica - definições

7

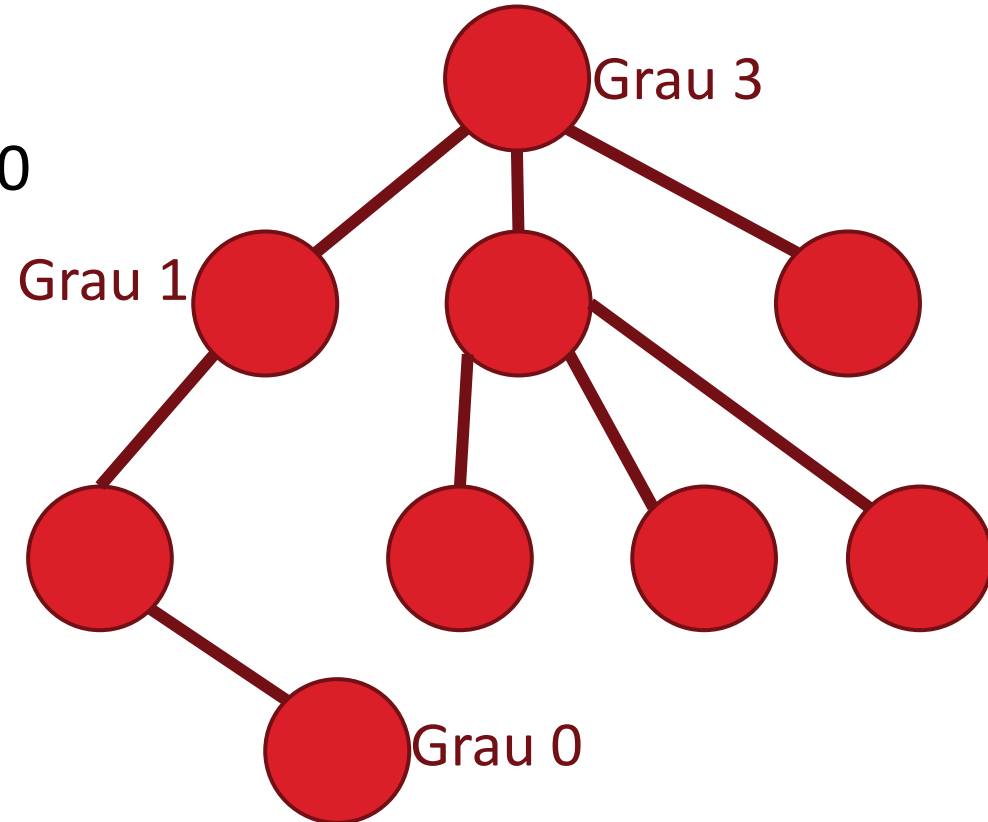
□ **Grau** de um nodo



Árvore genérica - definições

8

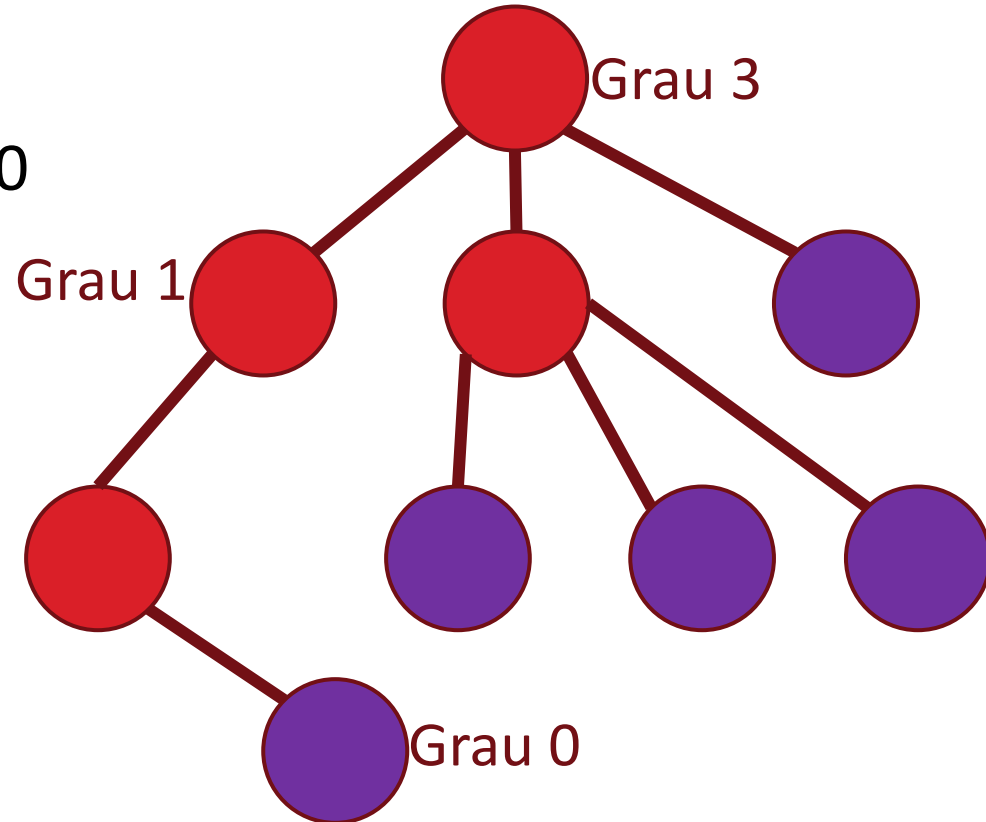
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0



Árvore genérica - definições

9

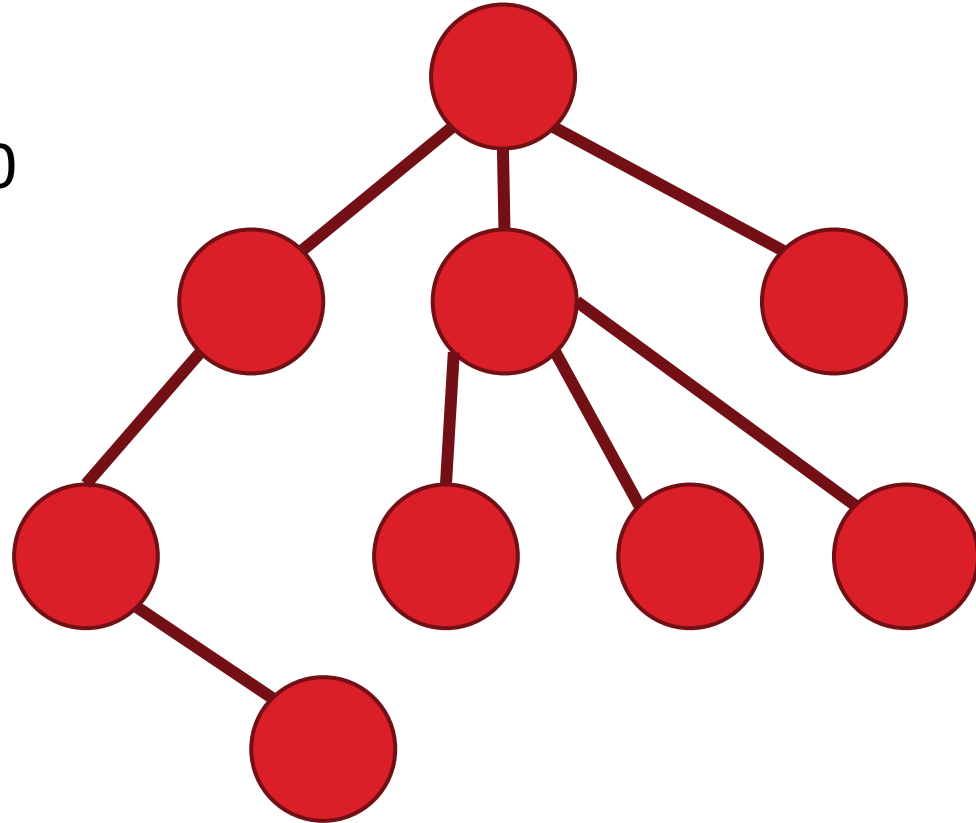
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0



Árvore genérica - definições

10

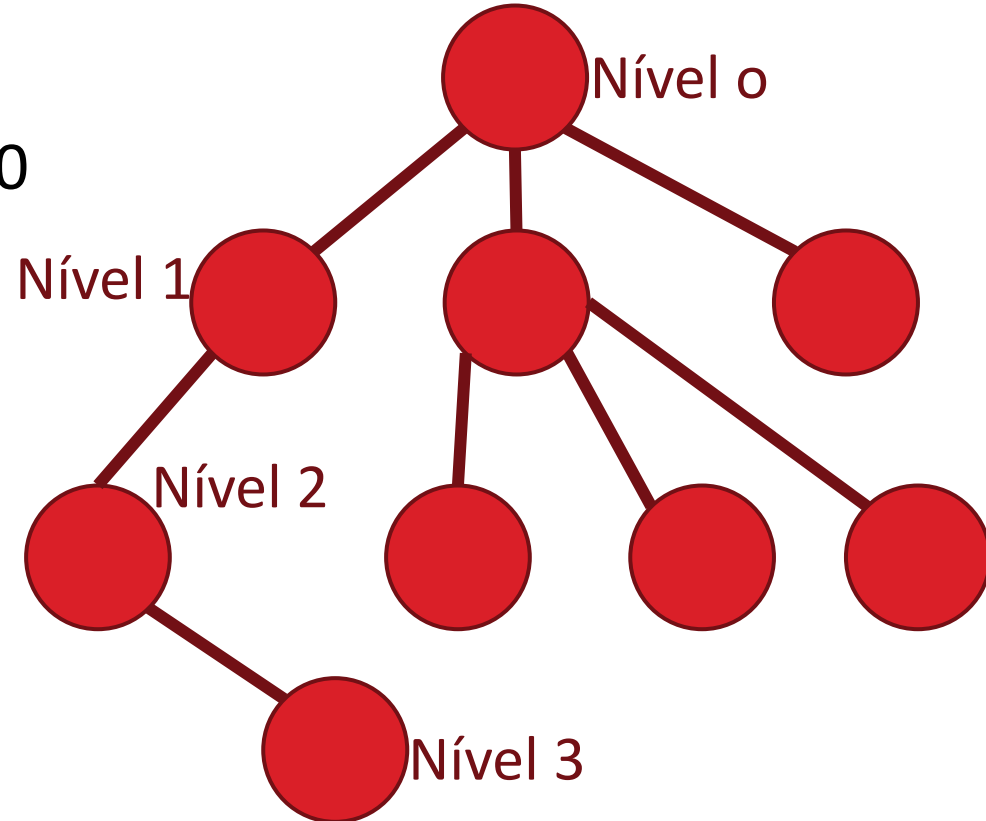
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo



Árvore genérica - definições

11

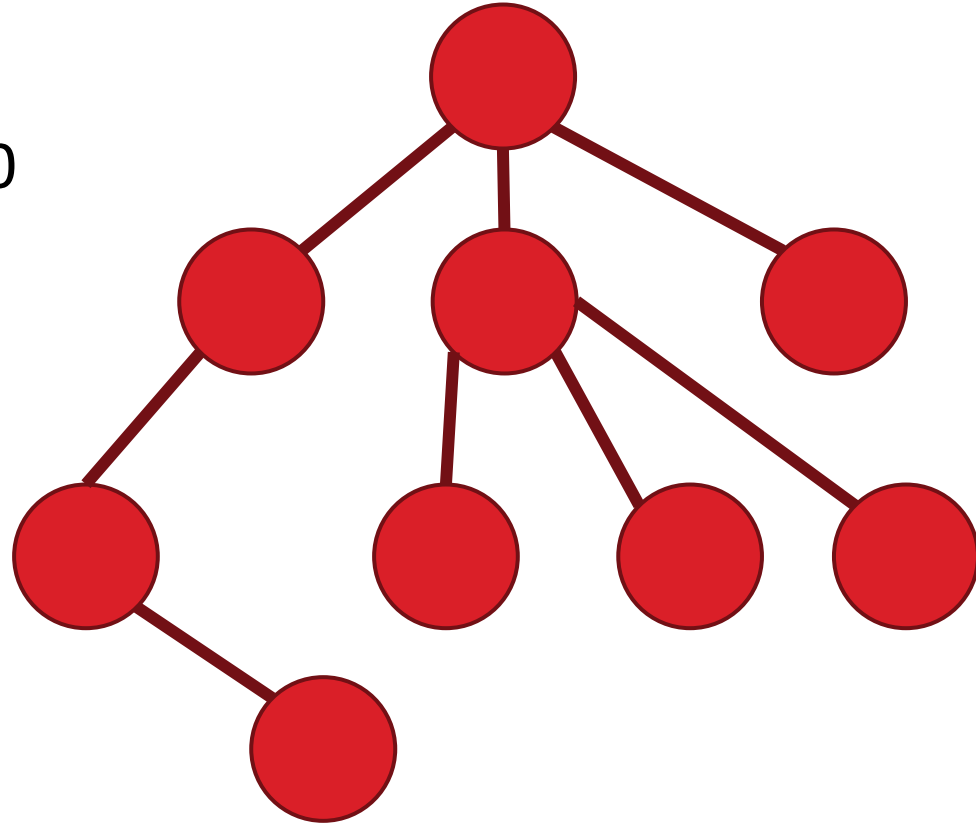
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo



Árvore genérica - definições

12

- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo



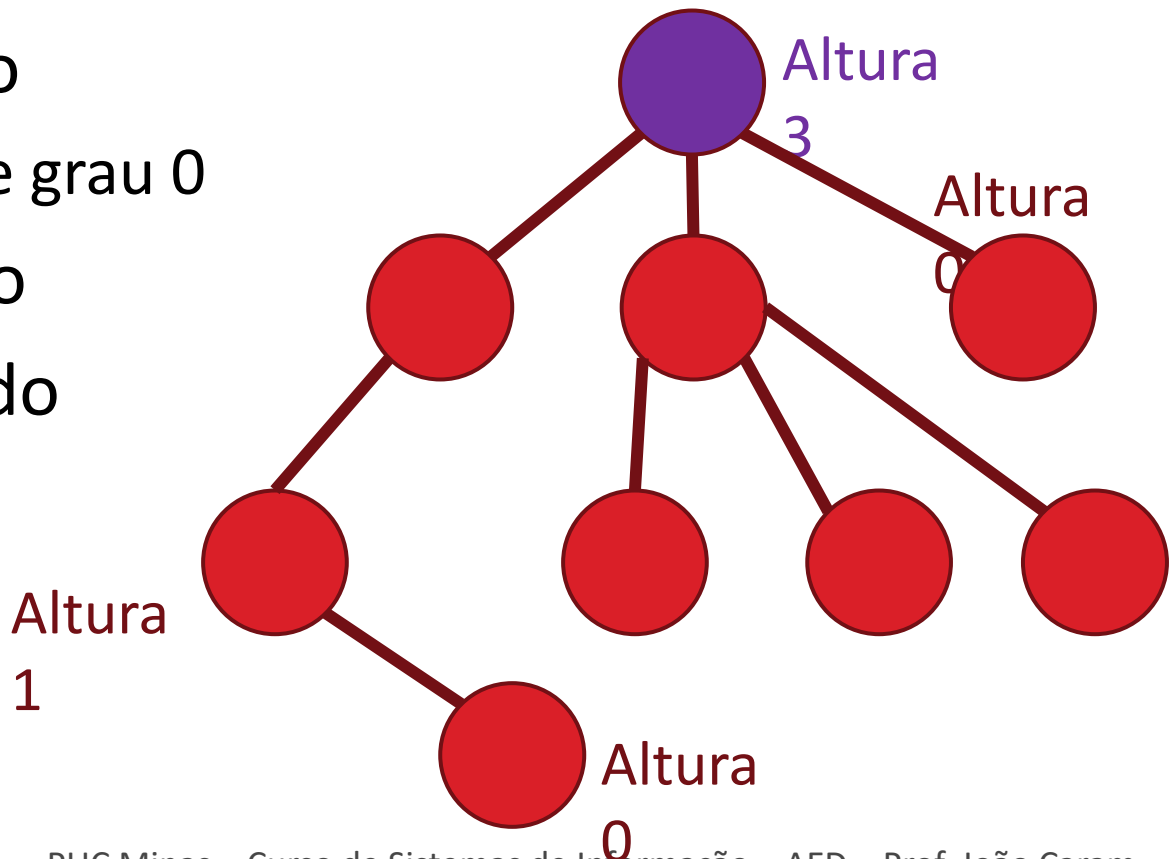
13

-

Árvore genérica - definições

14

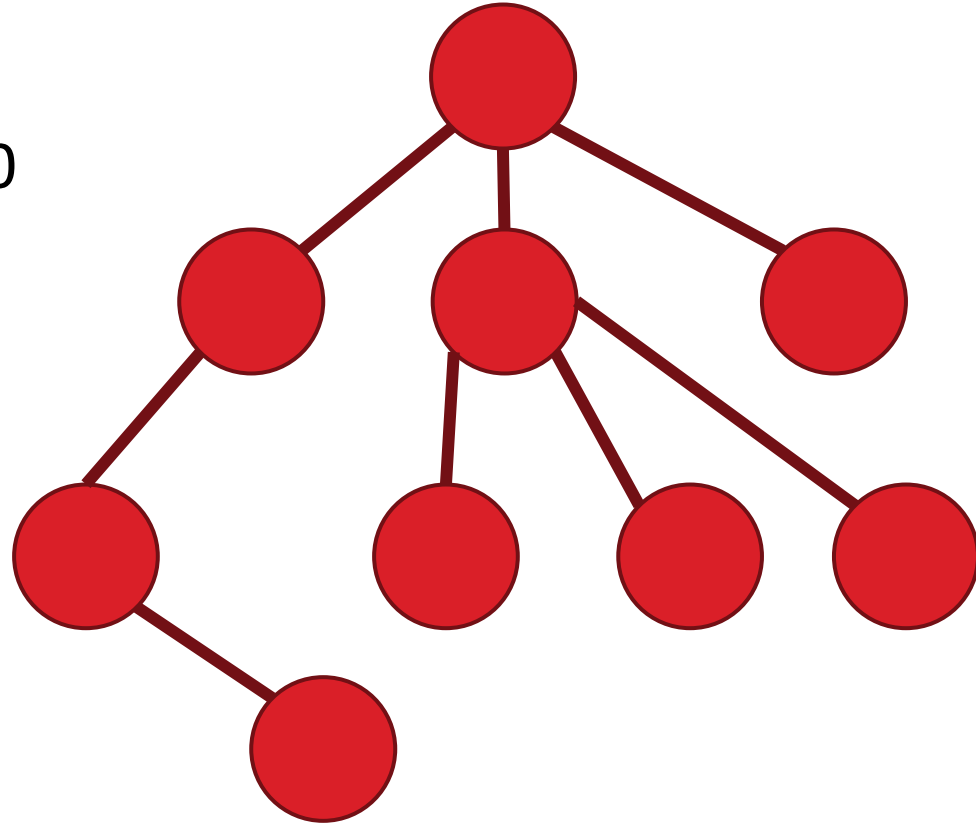
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ **Altura da árvore**



Árvore genérica - definições

15

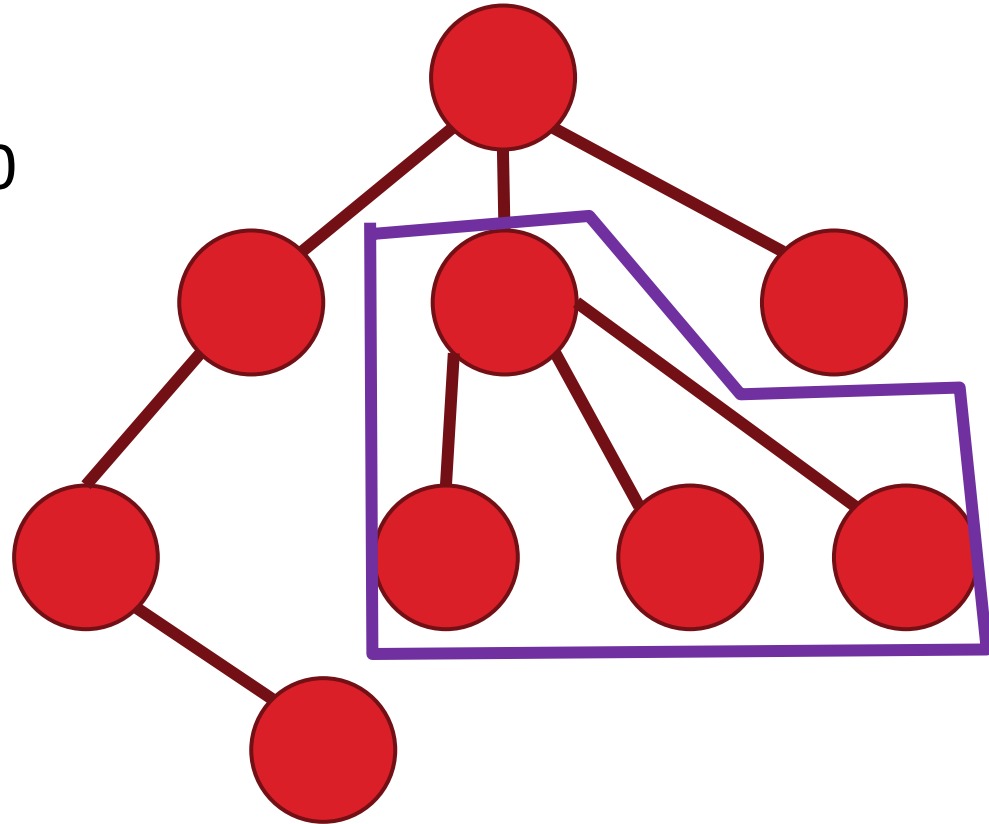
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

16

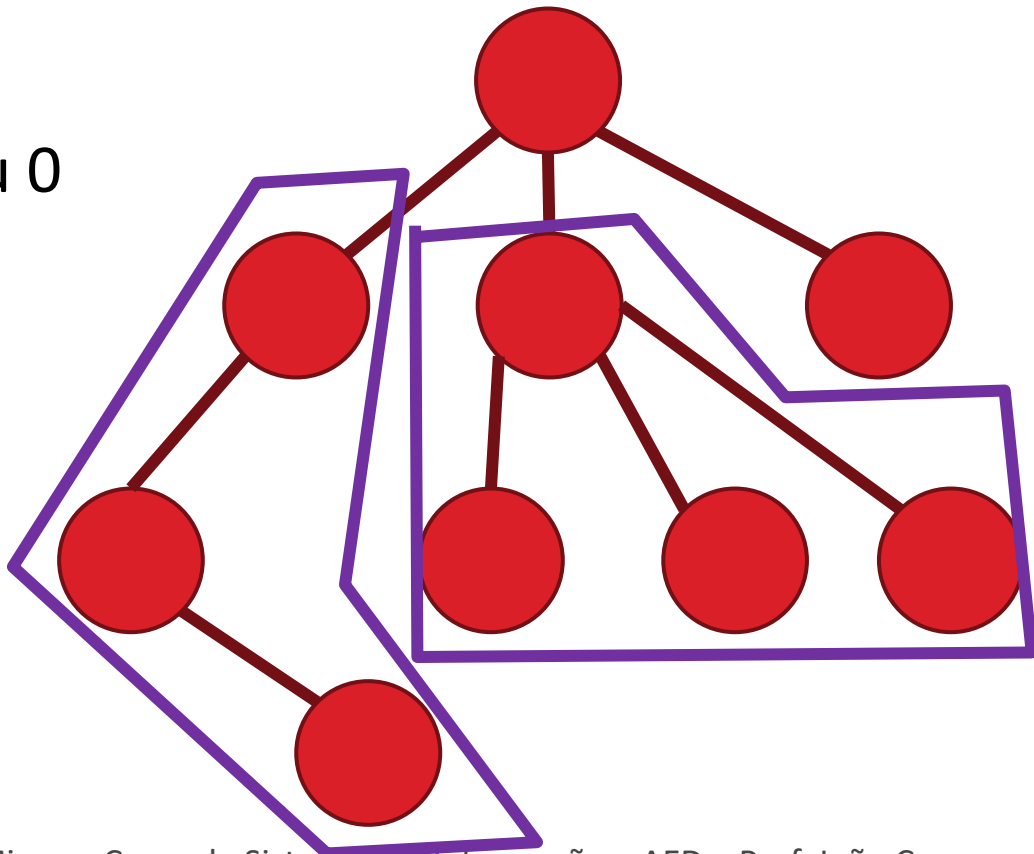
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

17

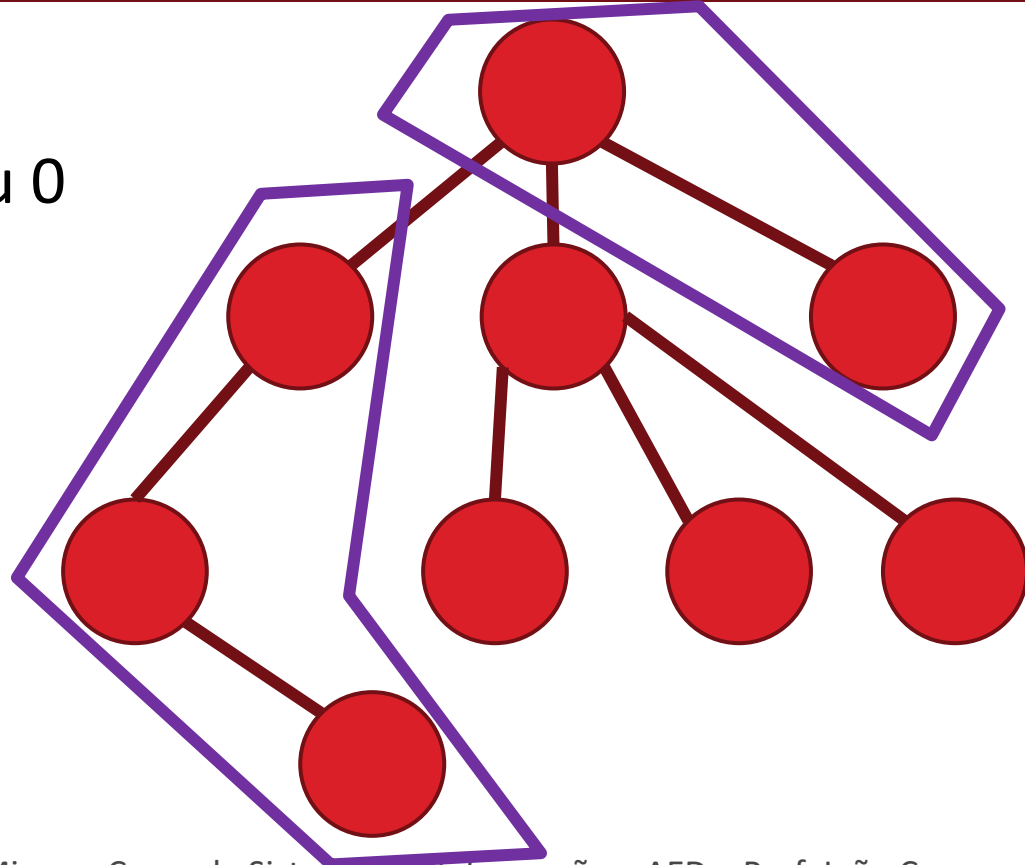
- Grau de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- Nível de um nodo
- Altura de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- Subárvore



Árvore genérica - definições

18

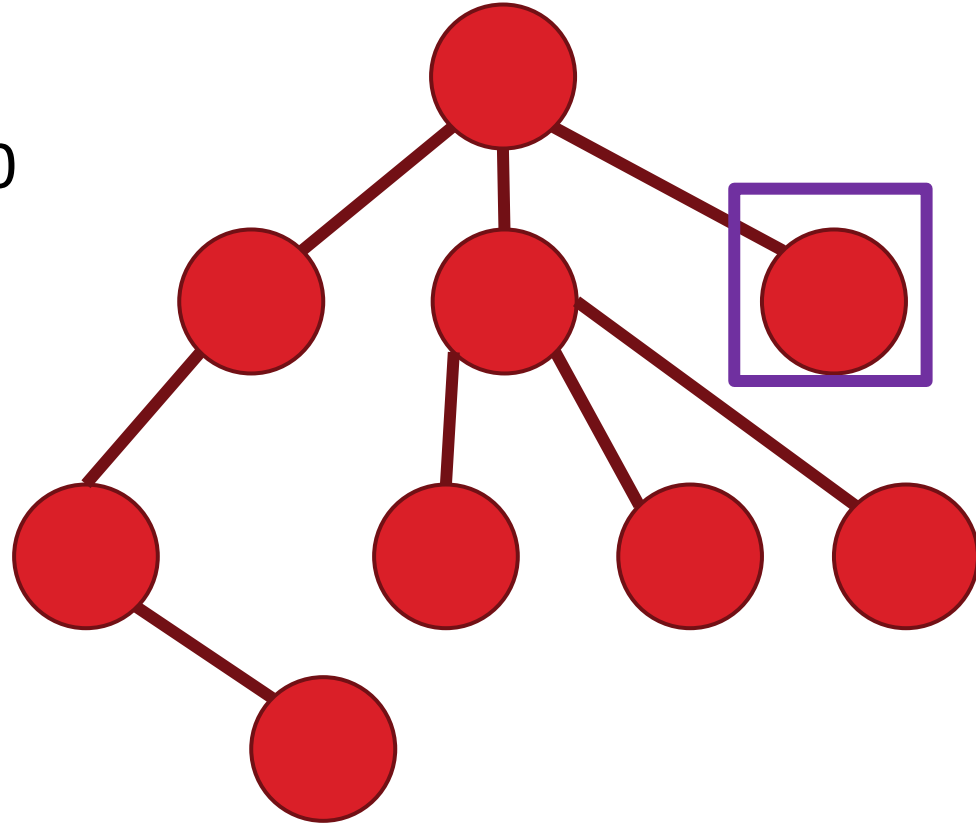
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

19

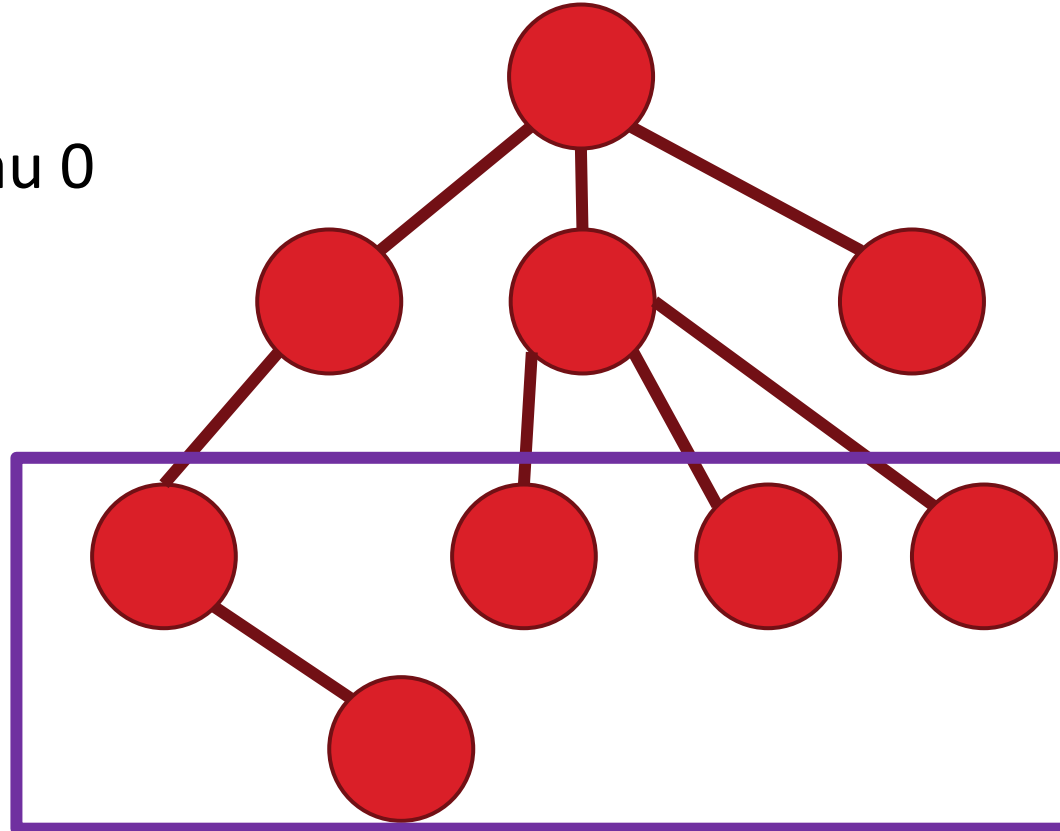
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

20

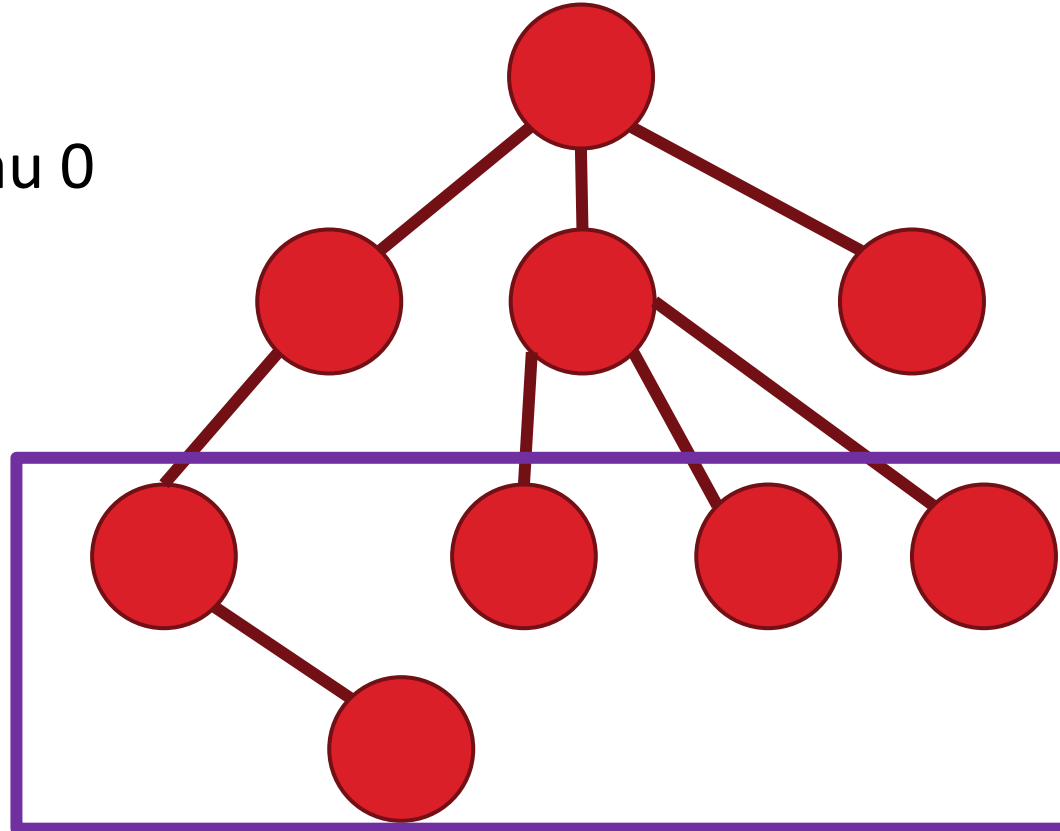
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

21

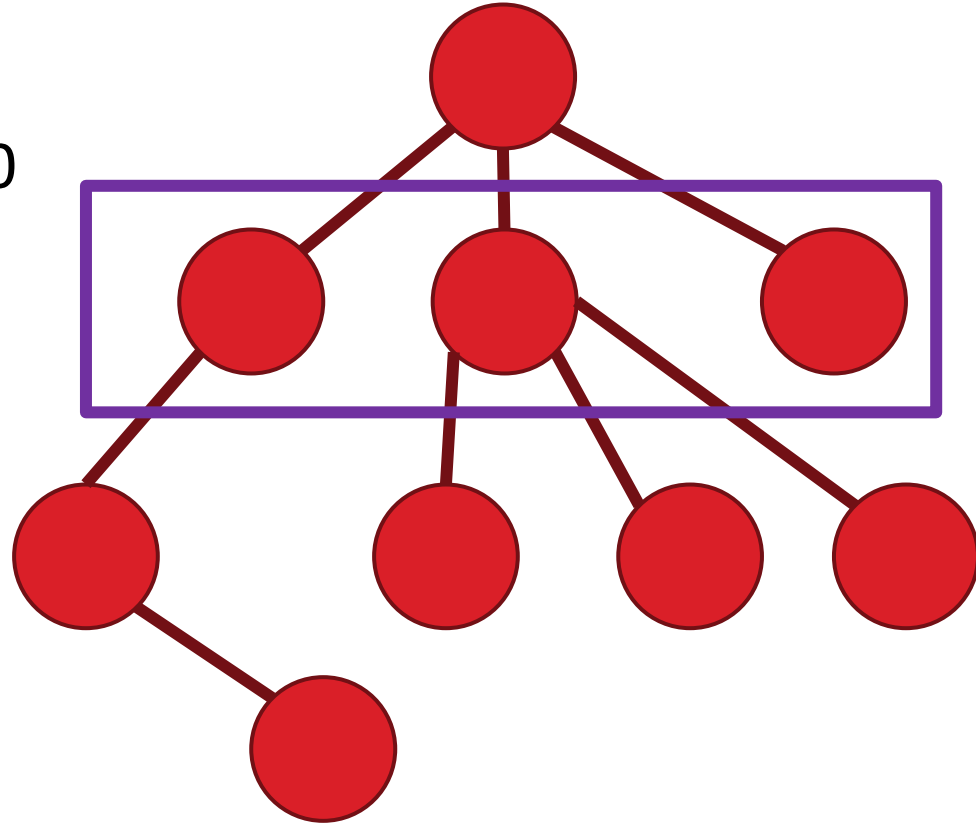
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

22

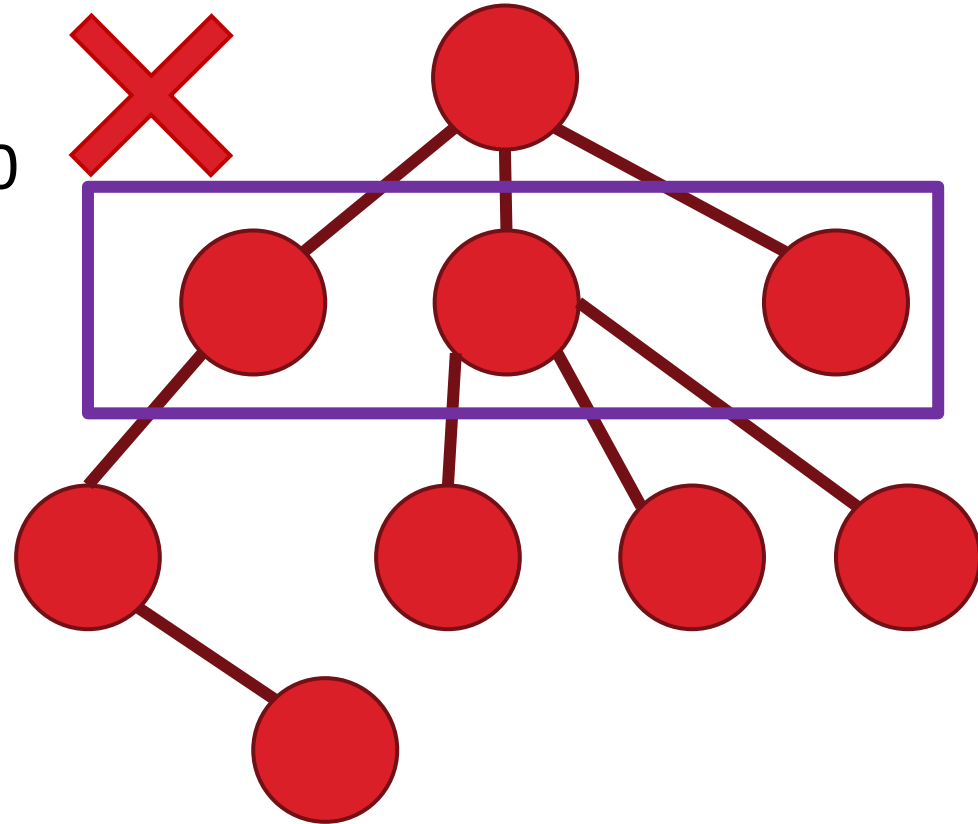
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

23

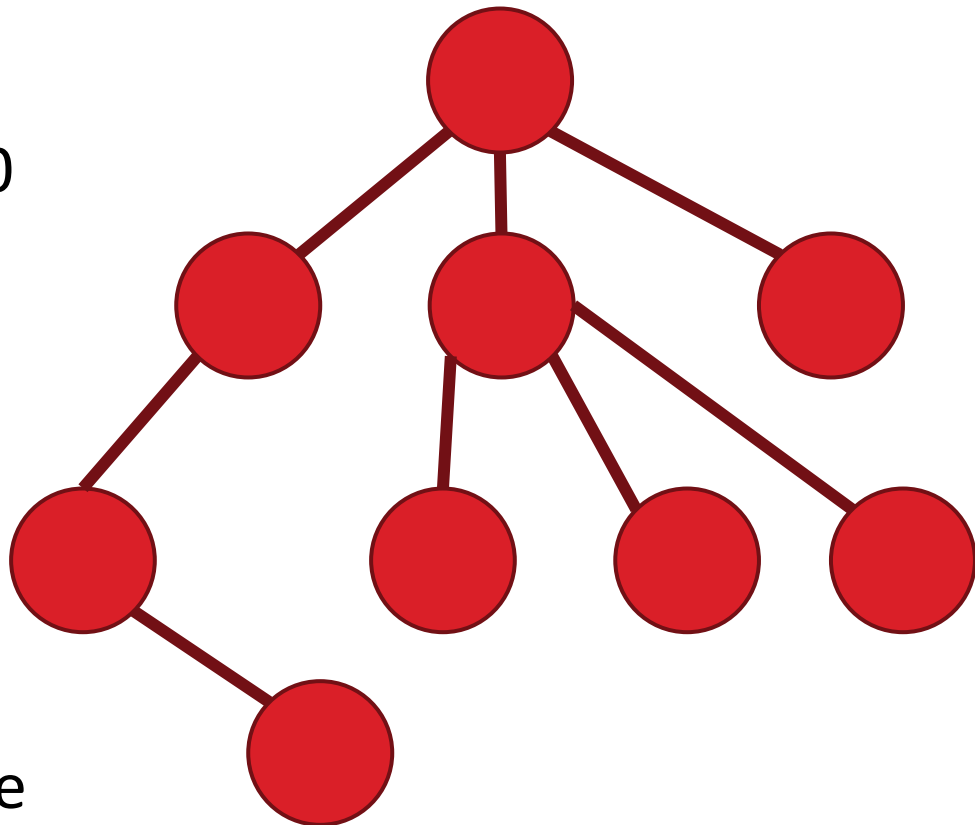
- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**



Árvore genérica - definições

24

- **Grau** de um nodo
 - ▣ *Folhas*: nodos de grau 0
- **Nível** de um nodo
- **Altura** de um nodo
 - ▣ Altura da árvore
- **Subárvore**
 - ▣ Estrutura/definição recursiva de uma árvore



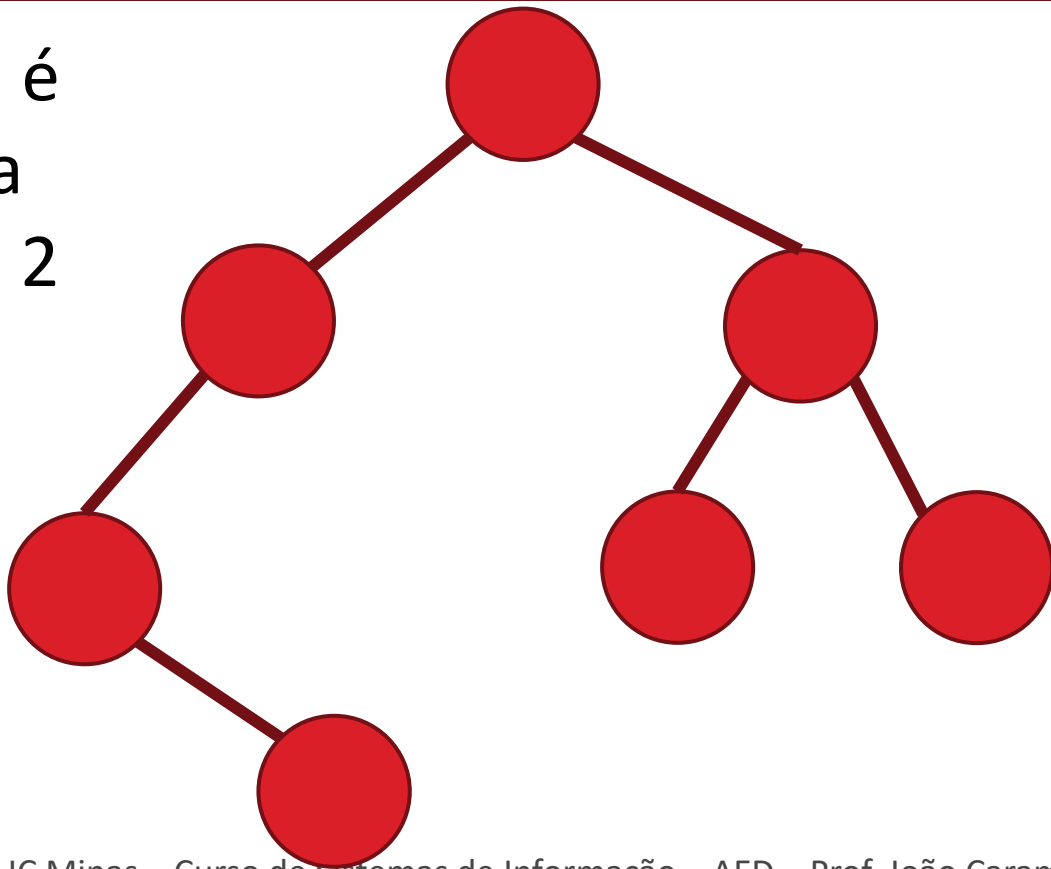
25

Árvores Binárias de Busca

Árvores binárias

26

- Uma árvore binária é aquela na qual cada nodo tem entre 0 e 2 filhos



Árvores e busca

27

- Até o momento, estudamos *estruturas lineares*
- Qual a complexidade da operação de busca em uma estrutura linear (por exemplo, uma fila?)
 - E se esta operação precisar ser repetida constantemente?

Árvores binárias de busca

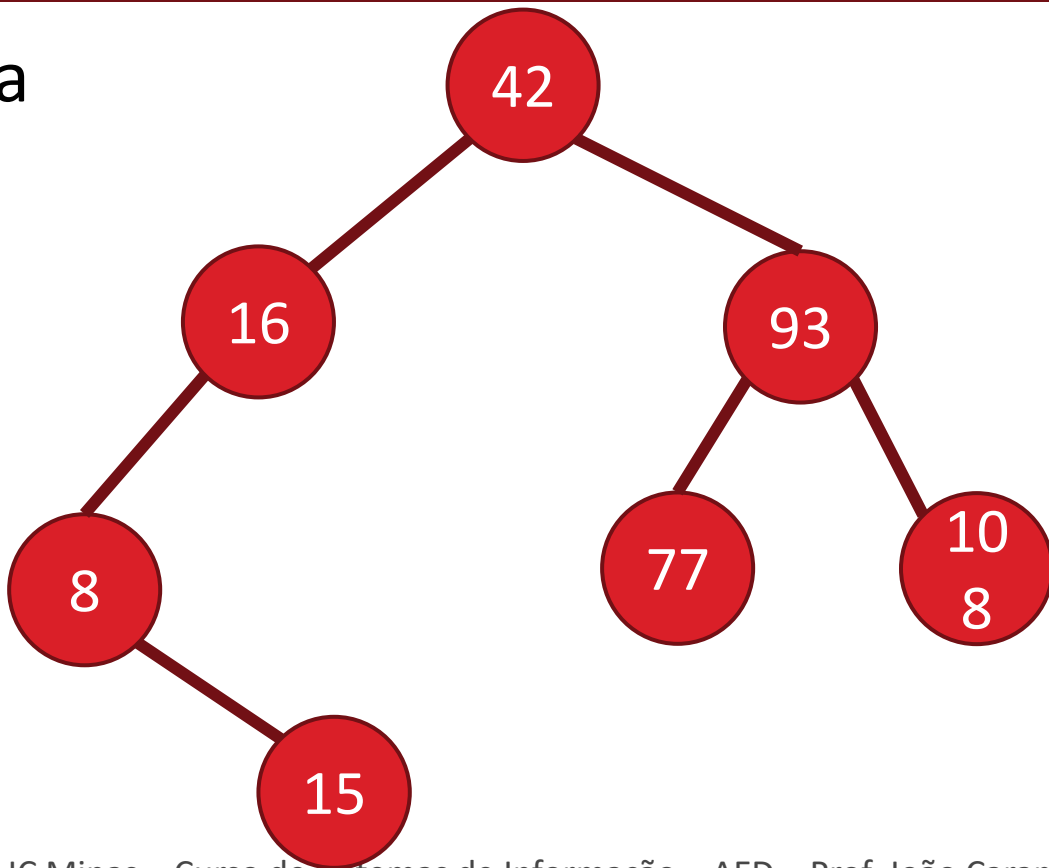
28

- Nos interessam as **árvores binárias de busca** (ABB ou BST – *binary search trees*)
 - ▣ Busca eficiente
- Nas ABBs, os elementos-filhos são nomeados como **filho da esquerda** e **filho da direita**
 - ▣ Valores menores à esquerda
 - ▣ Valores maiores à direita

Árvores binárias de busca

29

- Subárvore esquerda
- Subárvore direita
- Estrutura recursiva
 - ▣ Uma raiz
 - ▣ Duas subárvores (que são uma raiz)



Implementação – Classe ABB

30

- Elemento raiz
 - Não usaremos elemento sentinela. Por quê?

Implementação – Classe ABB

31

- Elemento raiz
 - Não usaremos elemento sentinela. Por quê?
- Métodos podem variar. Sugestões:
 1. inserir
 2. retirar
 3. buscar
 4. vazia
 5. caminhar
 6. esquerda(nodo)
 7. direita(nodo)
 8. tamanho
 9. altura

Implementação – Classe ABB

32

- Elemento da árvore: nodo
 - ▣ Objeto com dados
 - ▣ Duas referências/ponteiros (esquerda e direita)
- Uma árvore é composta pelo nodo raiz e...
 - ▣ Suas subárvores (estrutura recursiva!)

ABB - Operações

33

- ❑ Criação: raiz \rightarrow nulo
- ❑ Verificação de vazia: raiz $==$ nulo

ABB - Busca

34

- ❑ Utilizamos a estrutura recursiva a nosso favor
- ❑ A busca sempre é iniciada pela raiz da árvore
- ❑ A busca continua (recursivamente) pela raiz da subárvore correspondente

ABB - Busca

Buscar 18

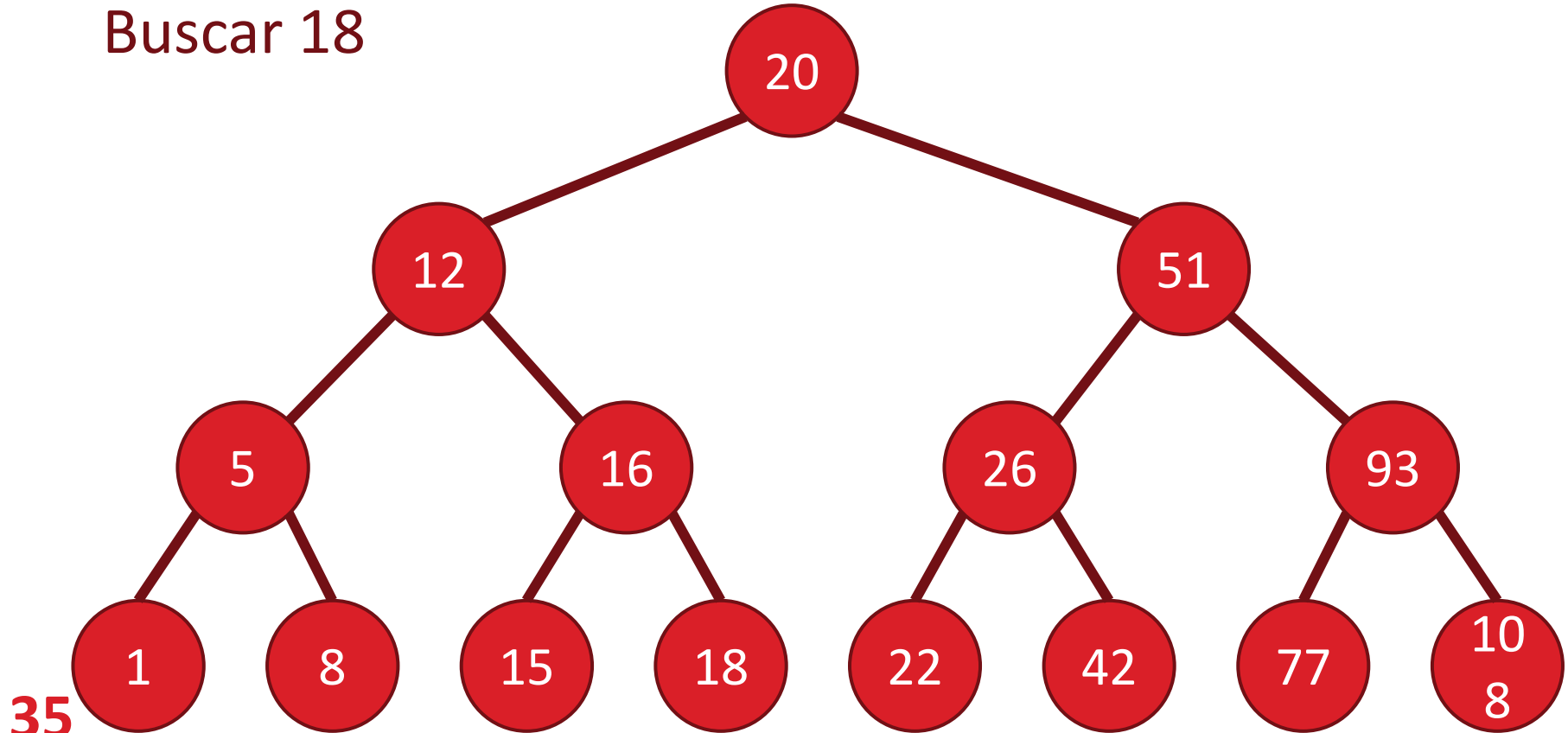


ABB - Busca

Buscar 18

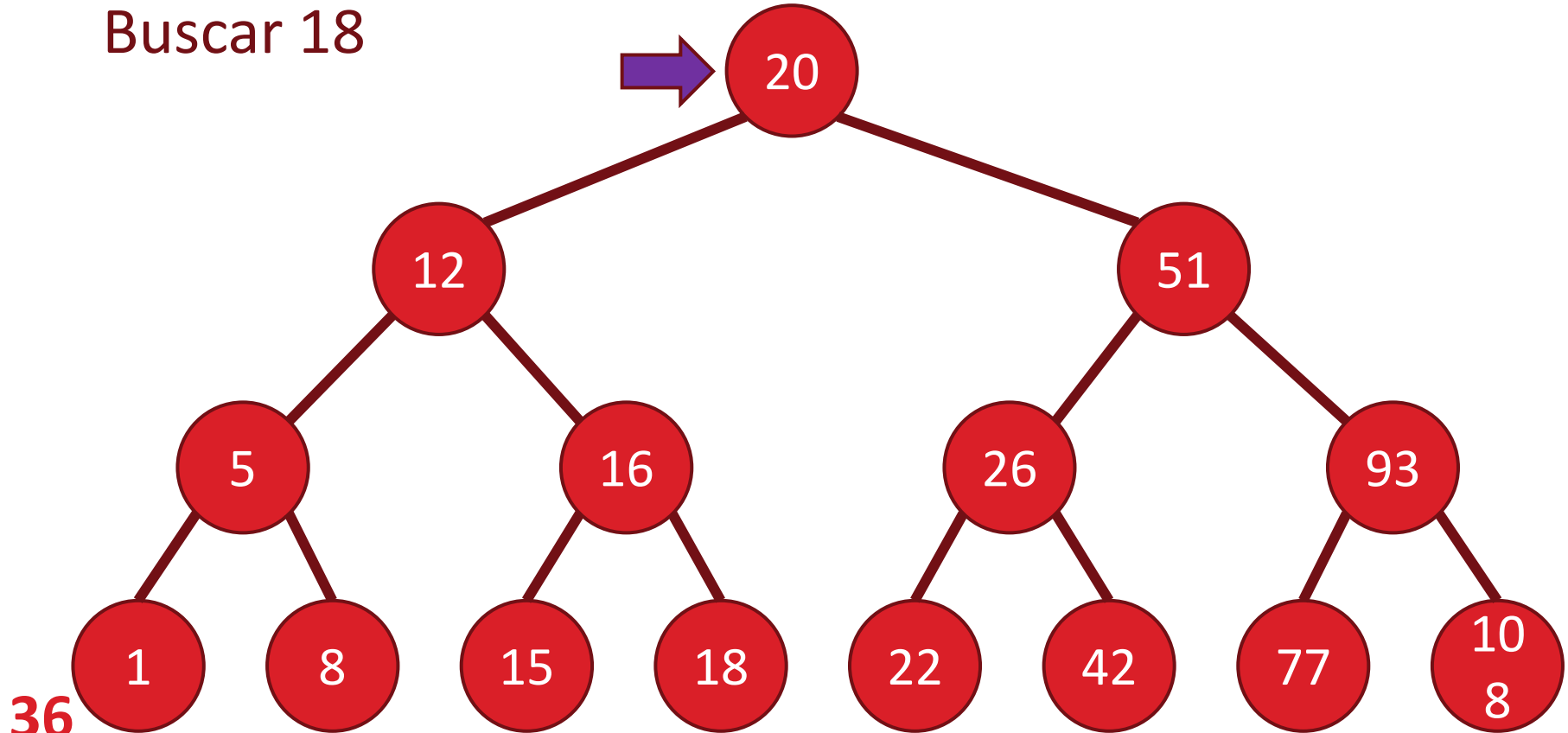


ABB - Busca

Buscar 18

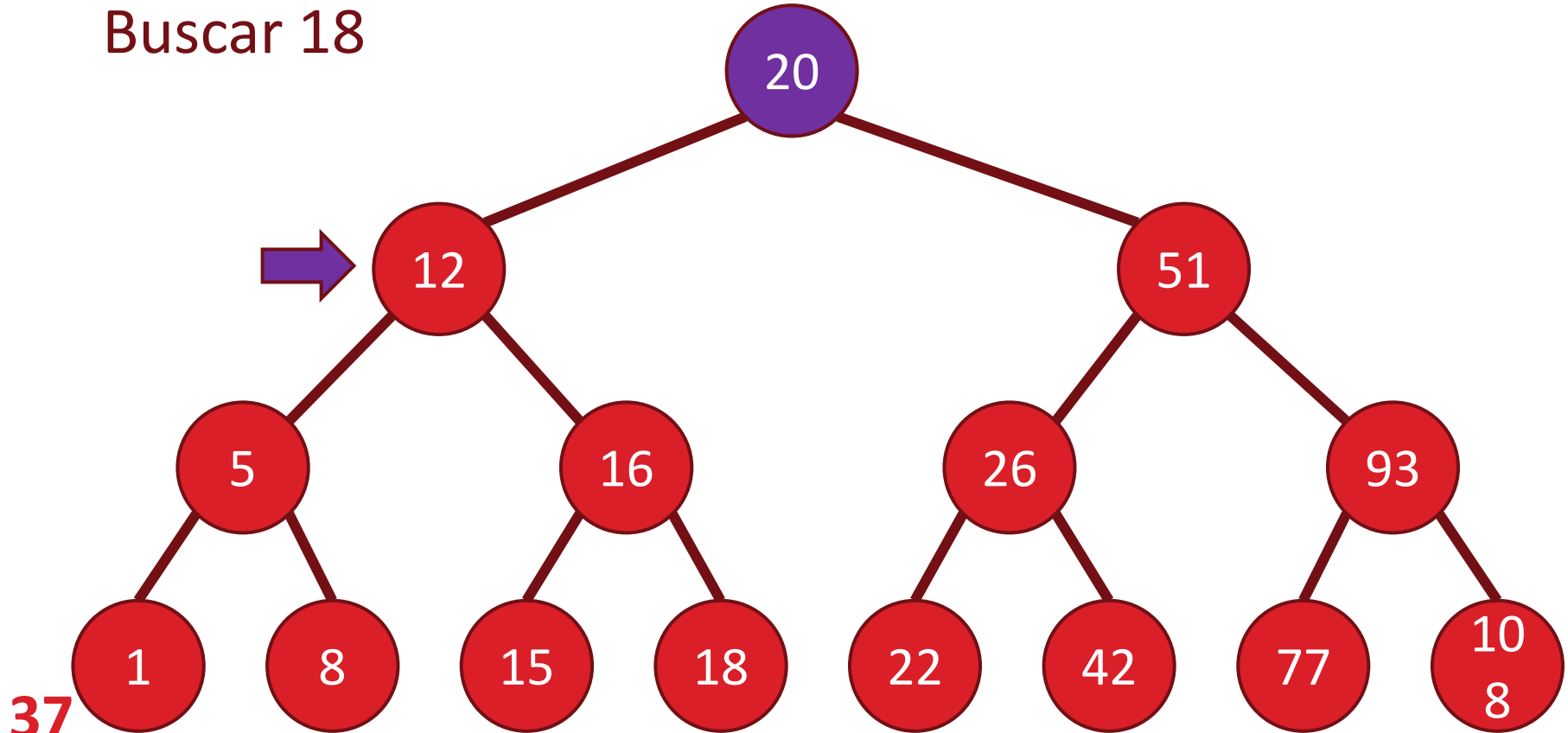


ABB - Busca

Buscar 18

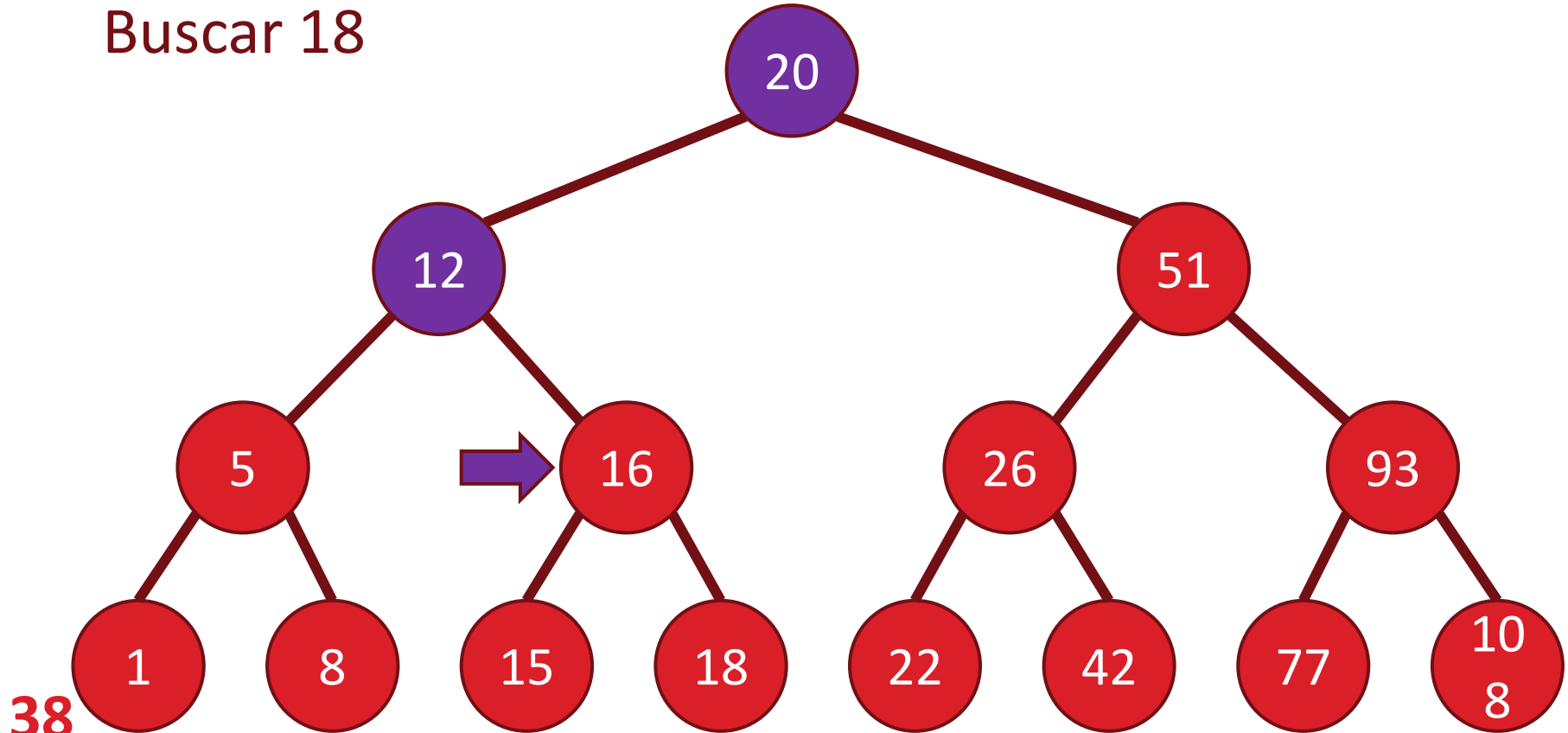


ABB - Busca

Buscar 18

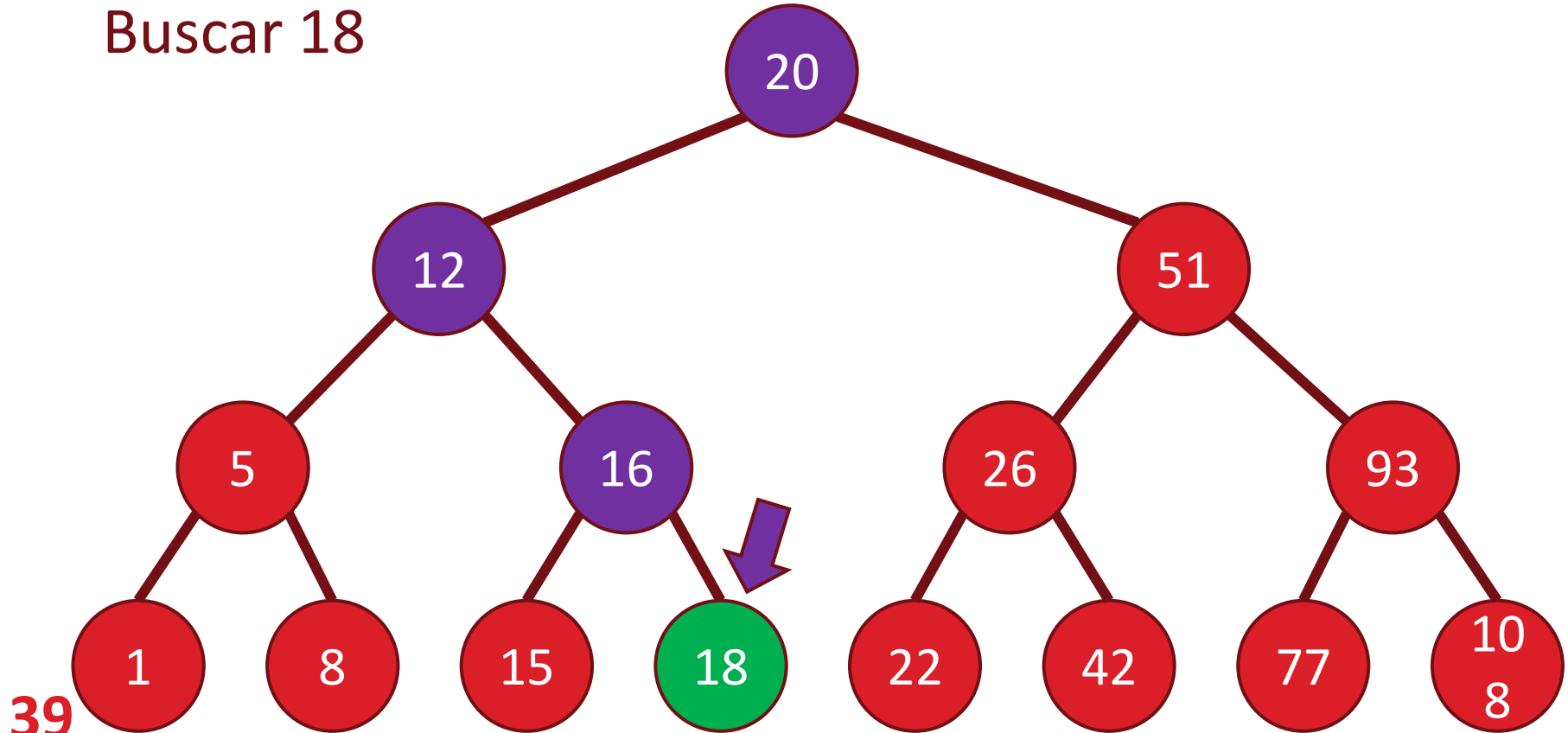


ABB - Busca

Buscar 16

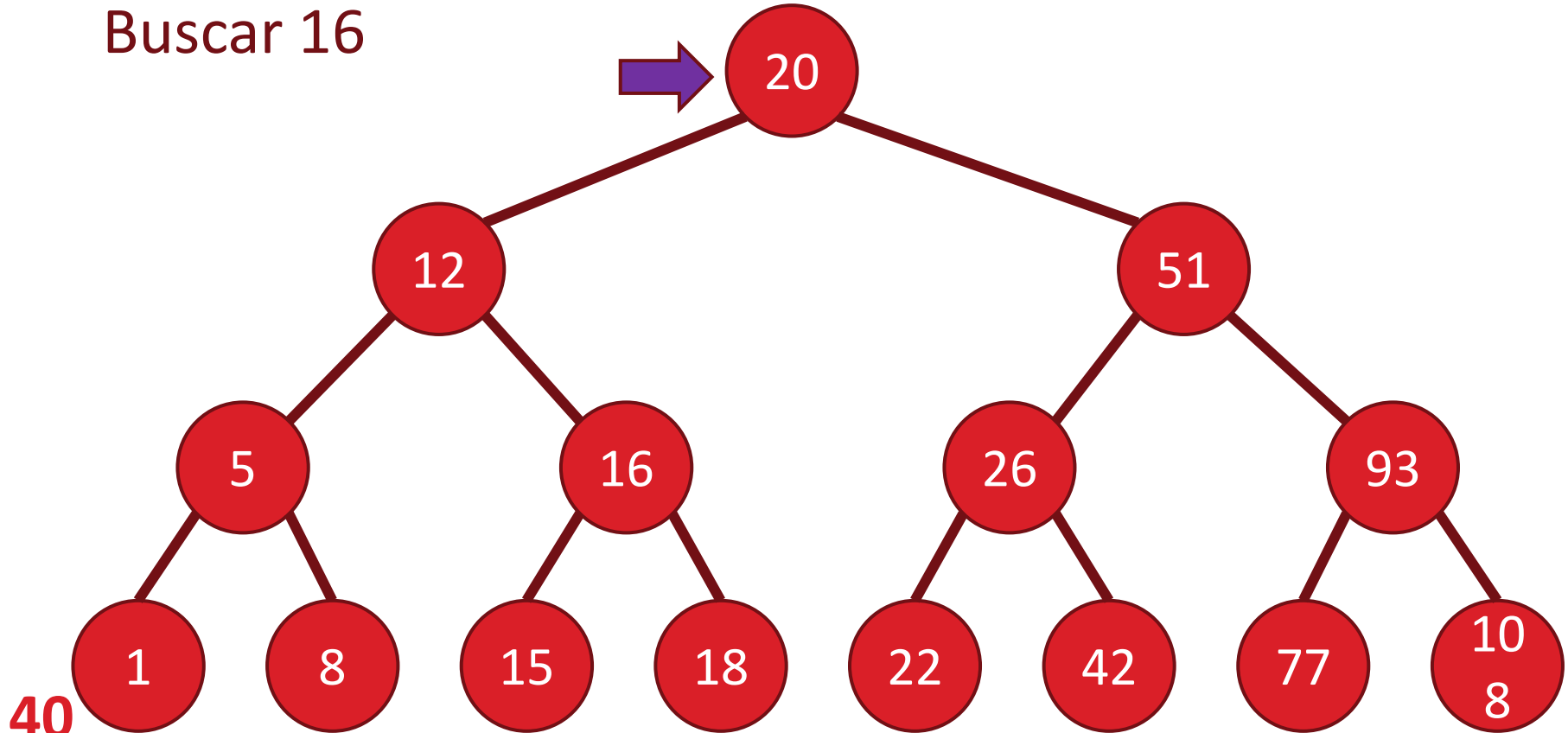


ABB - Busca

Buscar 16

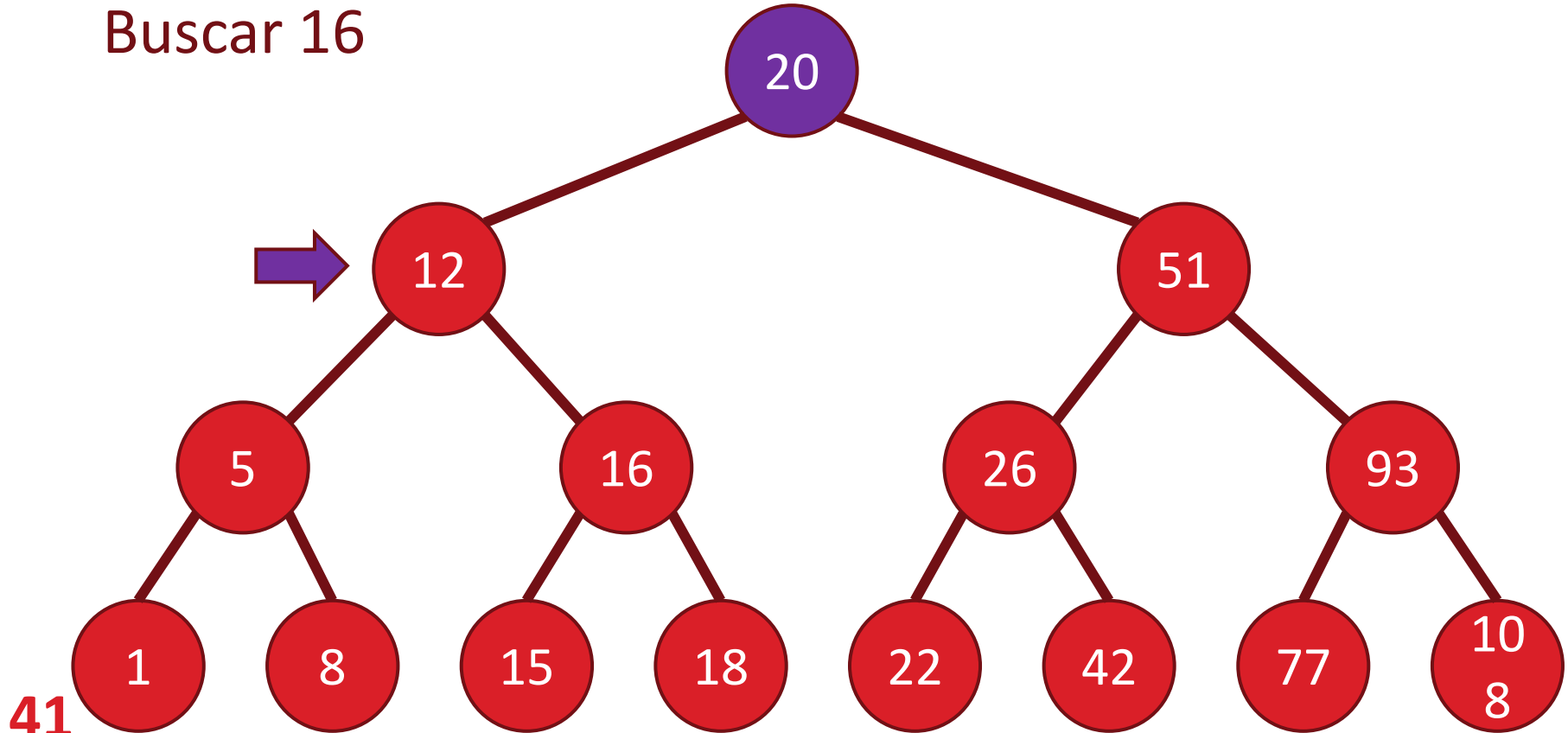


ABB - Busca

Buscar 16

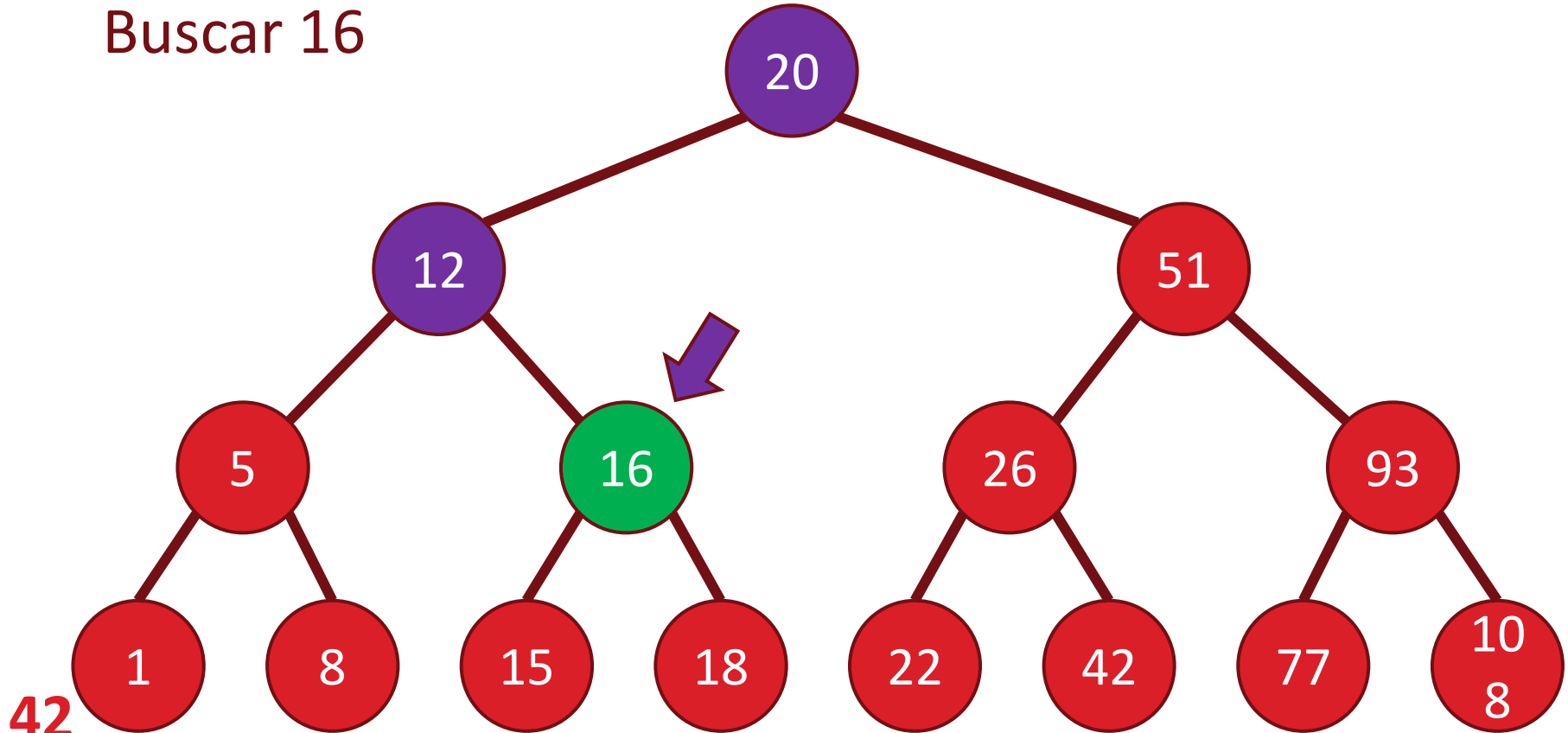


ABB - Busca

Buscar 50

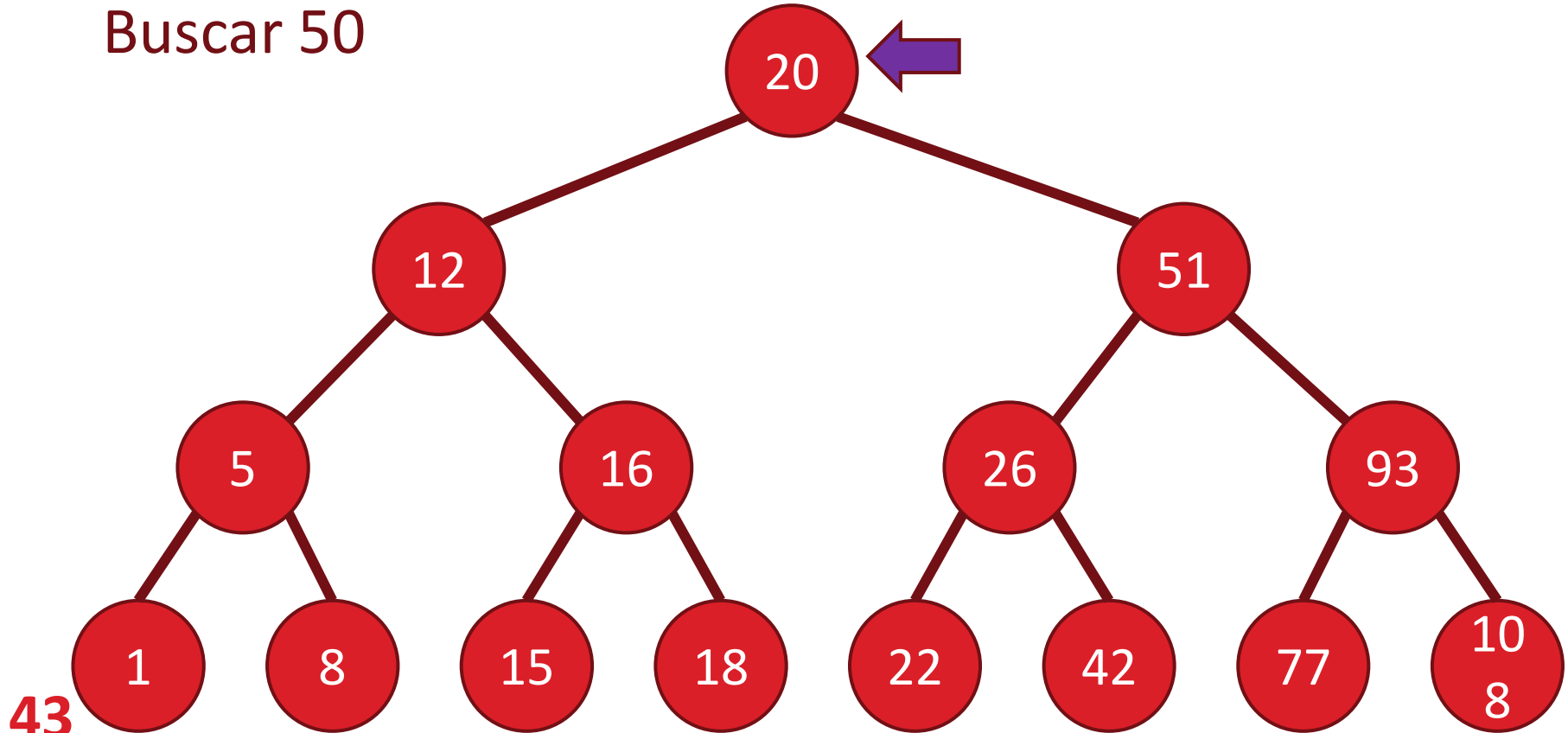


ABB - Busca

Buscar 50

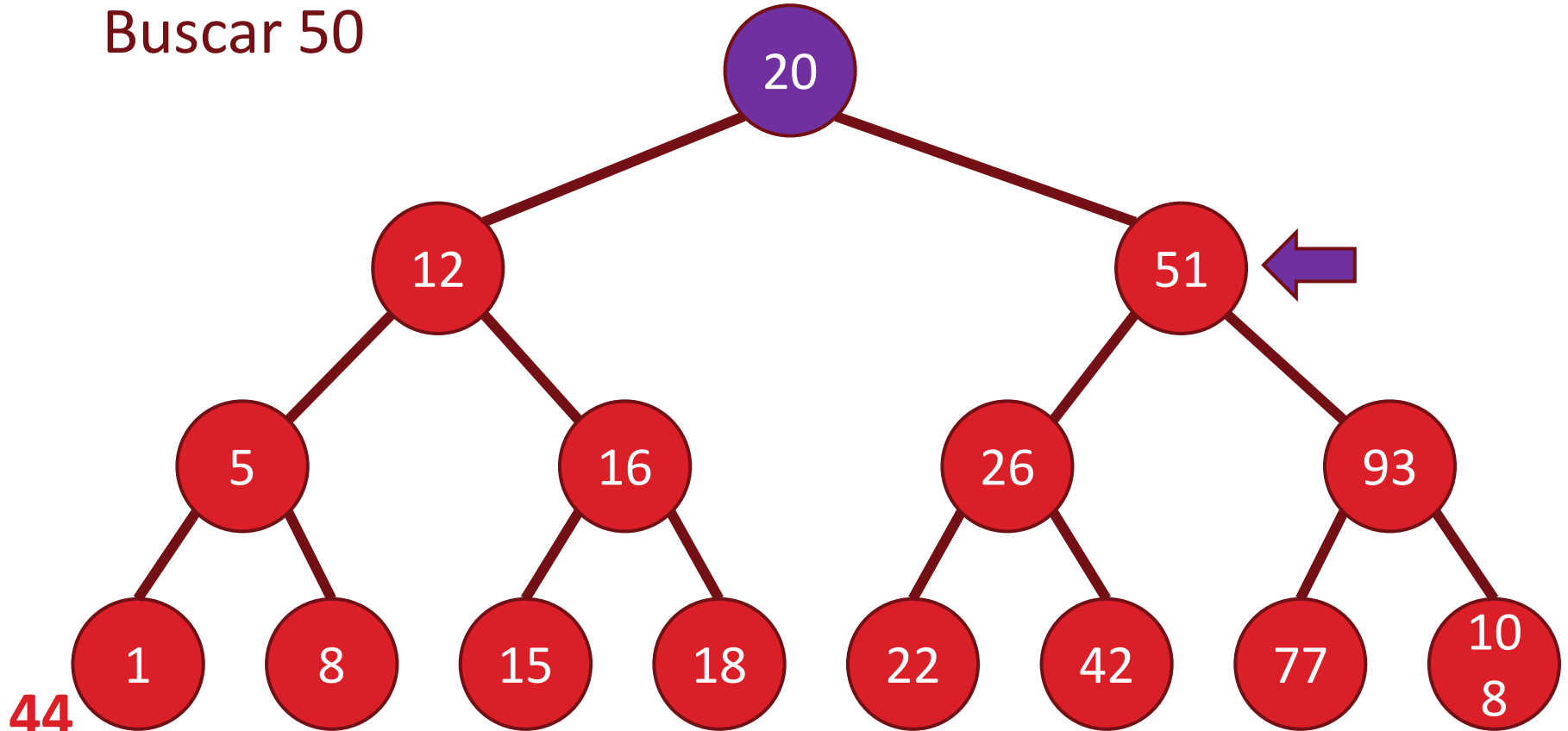


ABB - Busca

Buscar 50

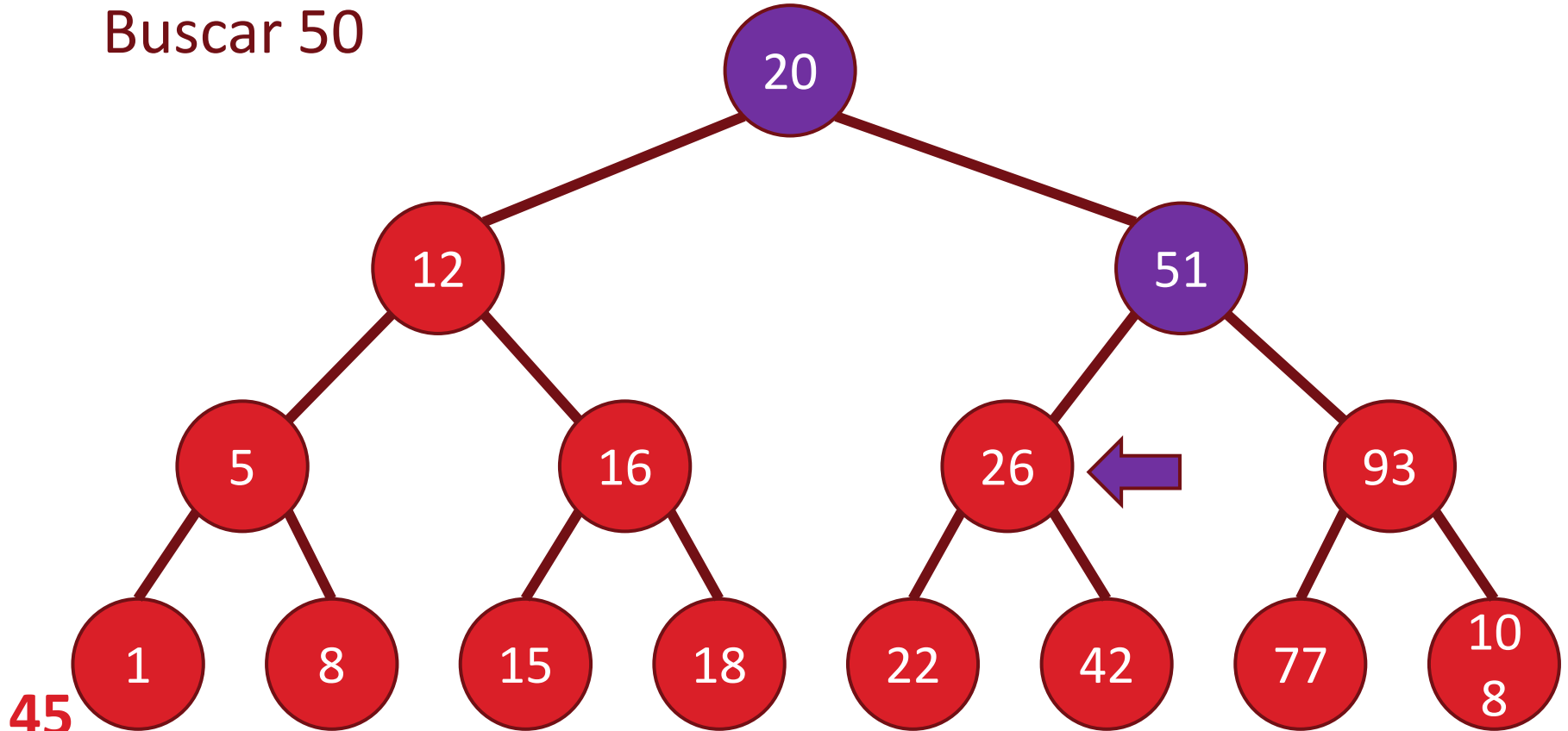


ABB - Busca

Buscar 50

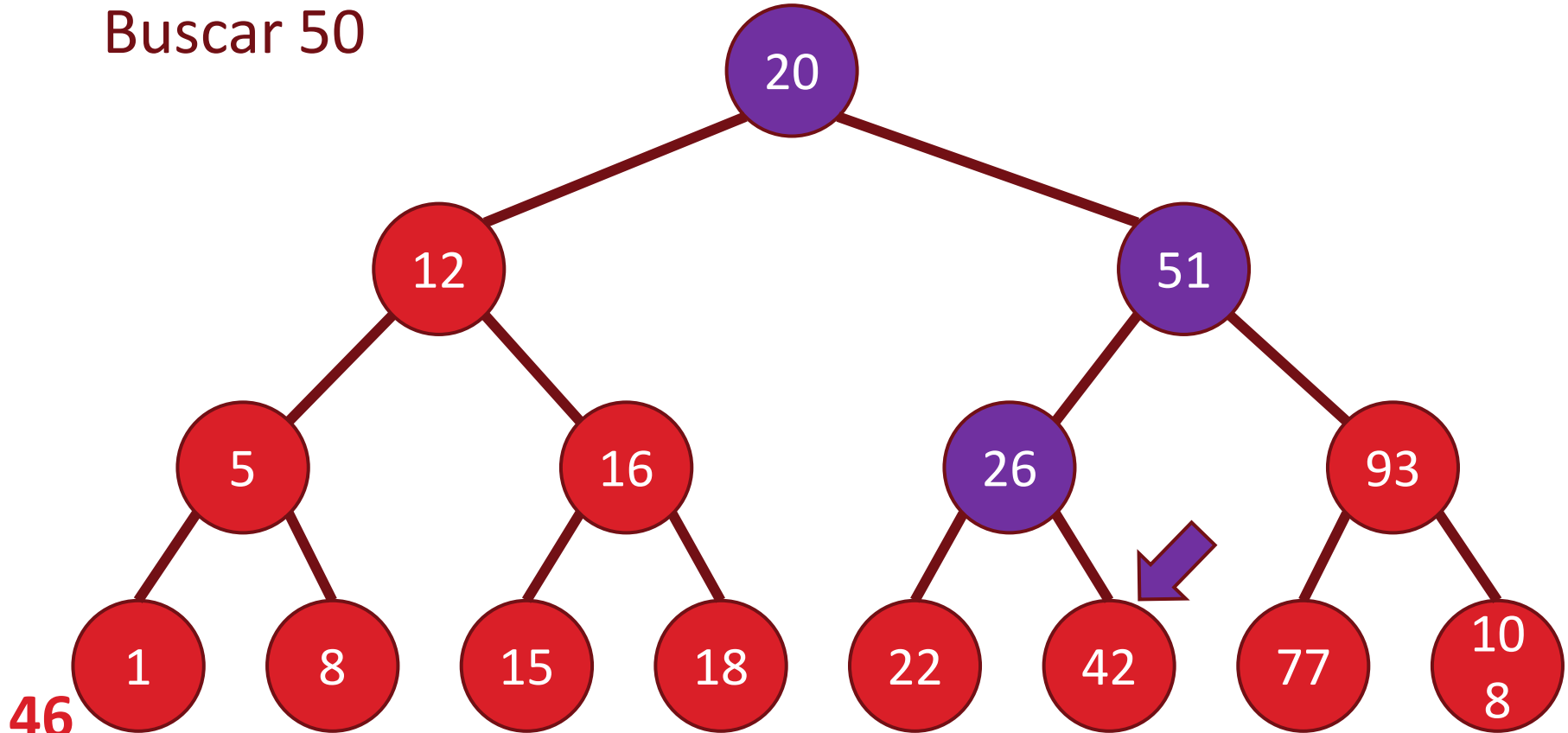


ABB - Busca

Buscar 50

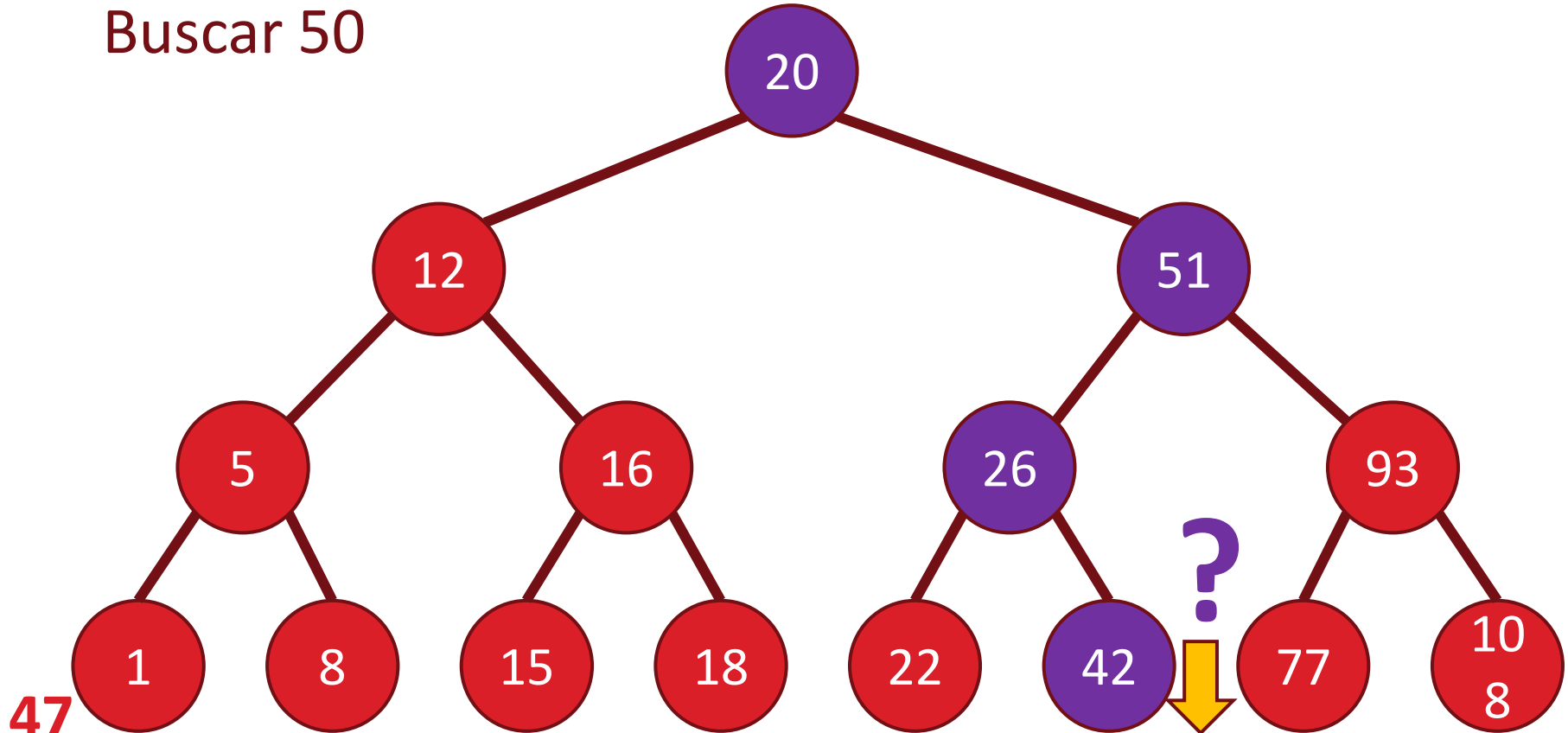


ABB – Busca / algoritmo

48

- Chamada inicial: raiz da árvore
 - Encapsulamento da busca

- Recursivamente:
 - Se chegarmos ao nulo, elemento não existe.
 - Se o elemento atual não é o desejado,
 - Se o desejado é menor: buscar na subárvore esquerda
 - Se o desejado é maior: buscar na subárvore direita

ABB - Inserção

49

- ❑ Inserção é precedida de uma busca:
 - ▣ Regra de organização menor/maior
- ❑ Inserção recursiva
 - ▣ Busca por um local vazio/nulo
 - ▣ Criação do novo elemento e retorno para a subárvore do elemento pai

ABB – Inserção / exemplo

ABB – Inserção / algoritmo

51

- Se encontrar uma referência nula,
 - Retornar o novo elemento para o pai

- Caso contrário,
 - Se **novο é menor** que a raiz, inserir na subárvore esquerda (recursivo) e atribuí-la ao filho da esquerda;
 - Se **novο é maior** que a raiz, inserir na subárvore direita (recursivo) e atribuí-la ao filho da direita;

ABB – Complexidade das operações

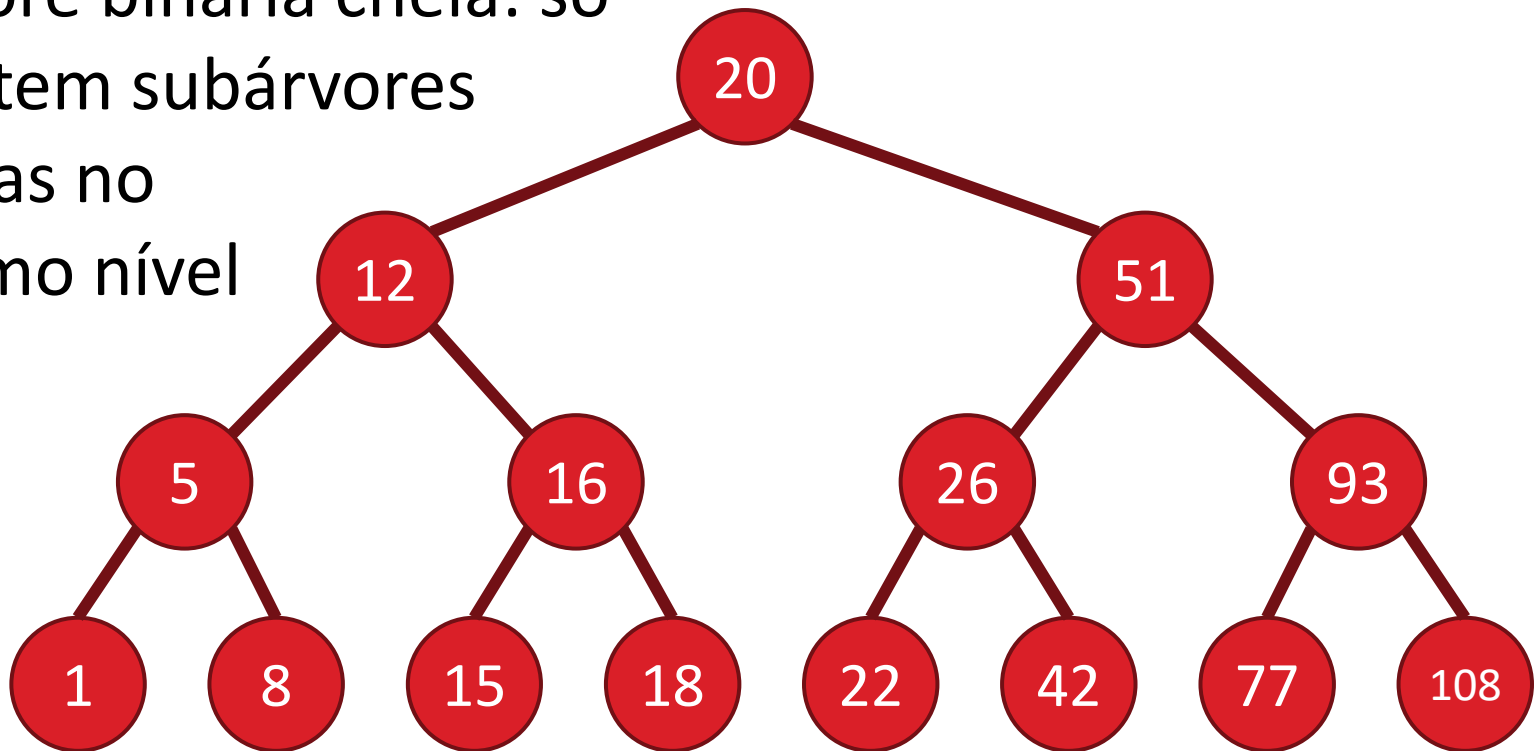
52

- Perguntas – chave:
 - qual é a altura de uma árvore binária de busca cheia, se ela tem N nodos?
 - se uma árvore binária de busca tem altura X , quantos nodos ela comporta, no máximo?

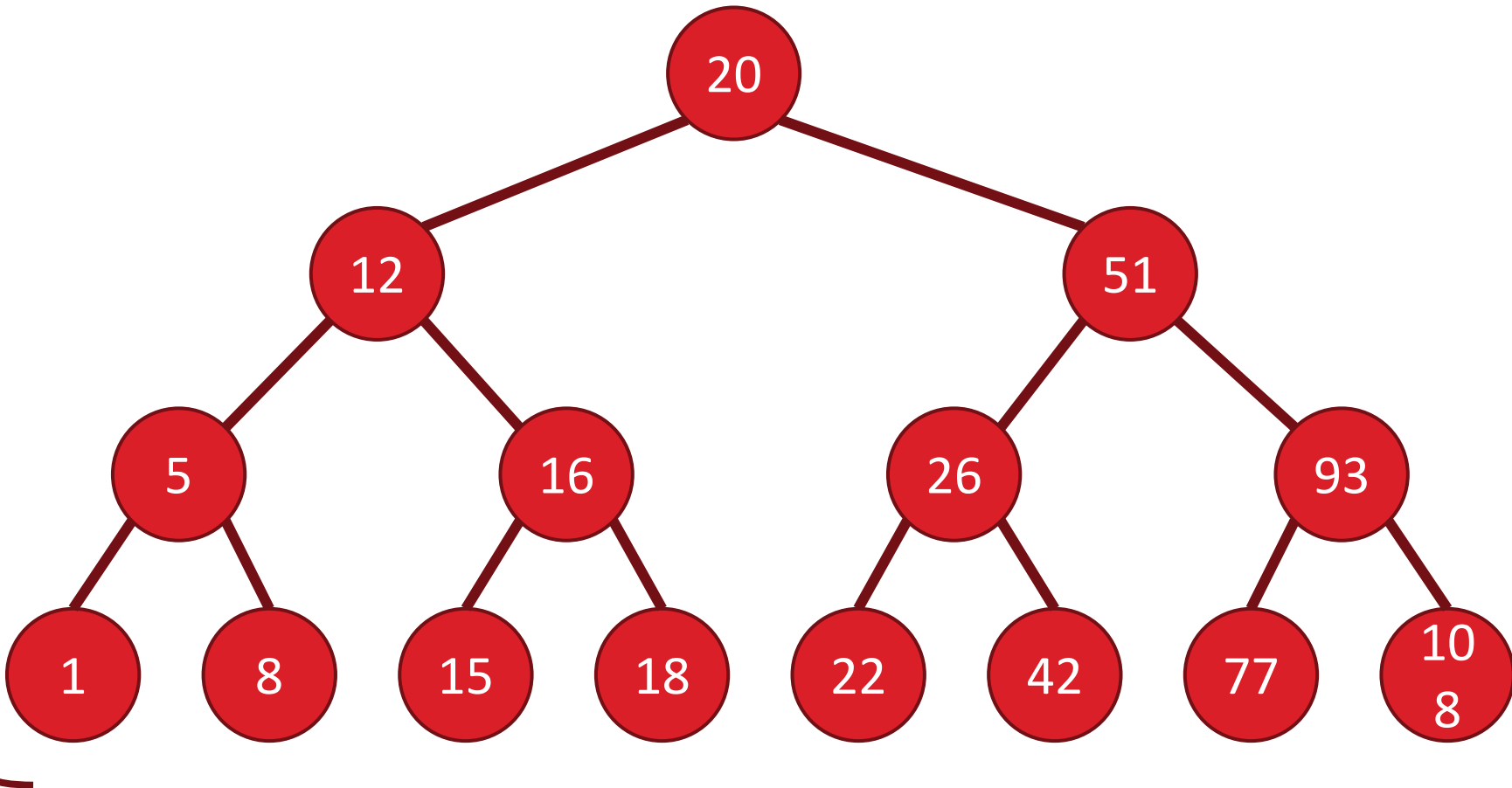
Árvore binária cheia

53

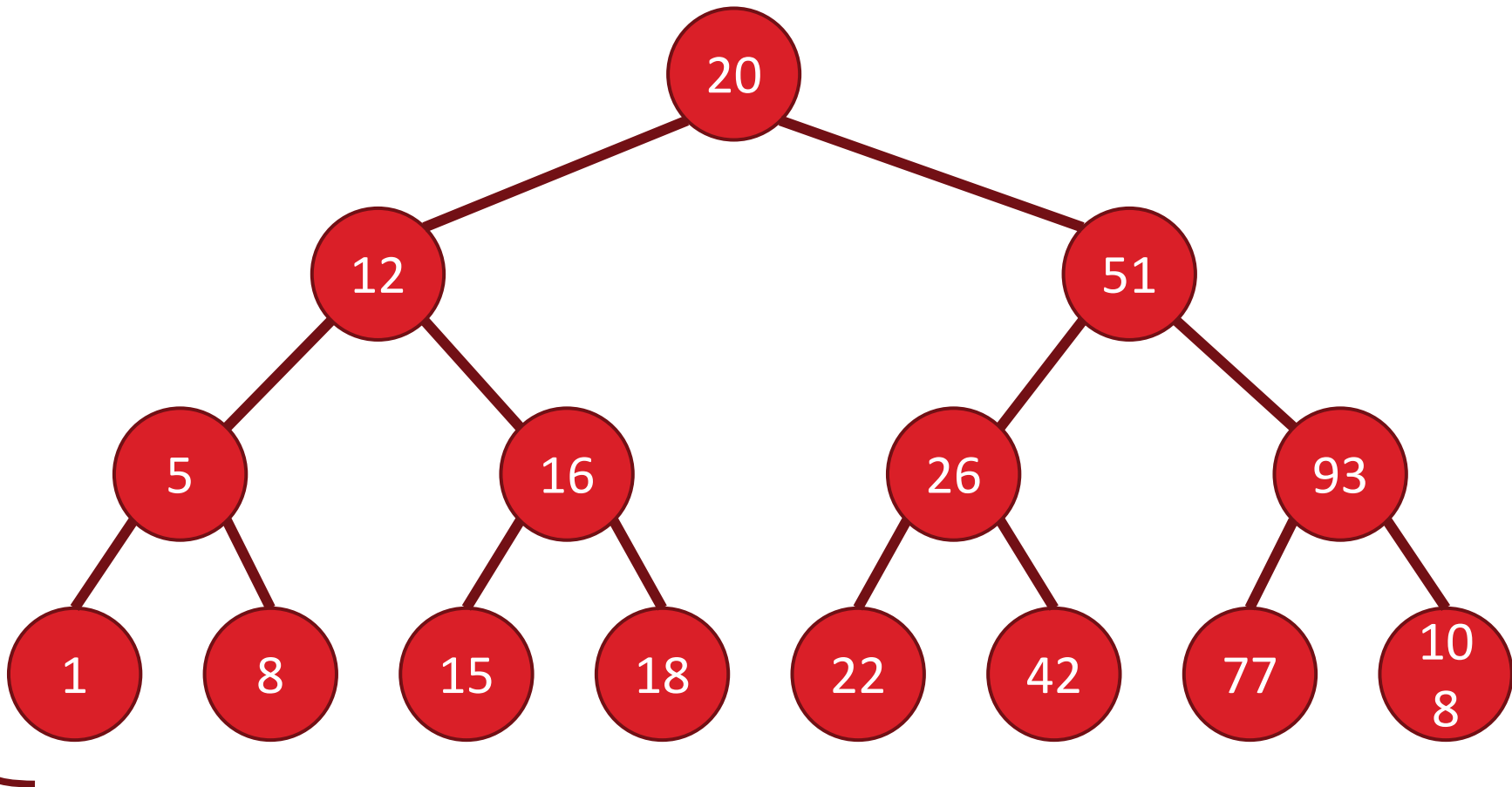
- Árvore binária cheia: só existem subárvores vazias no último nível

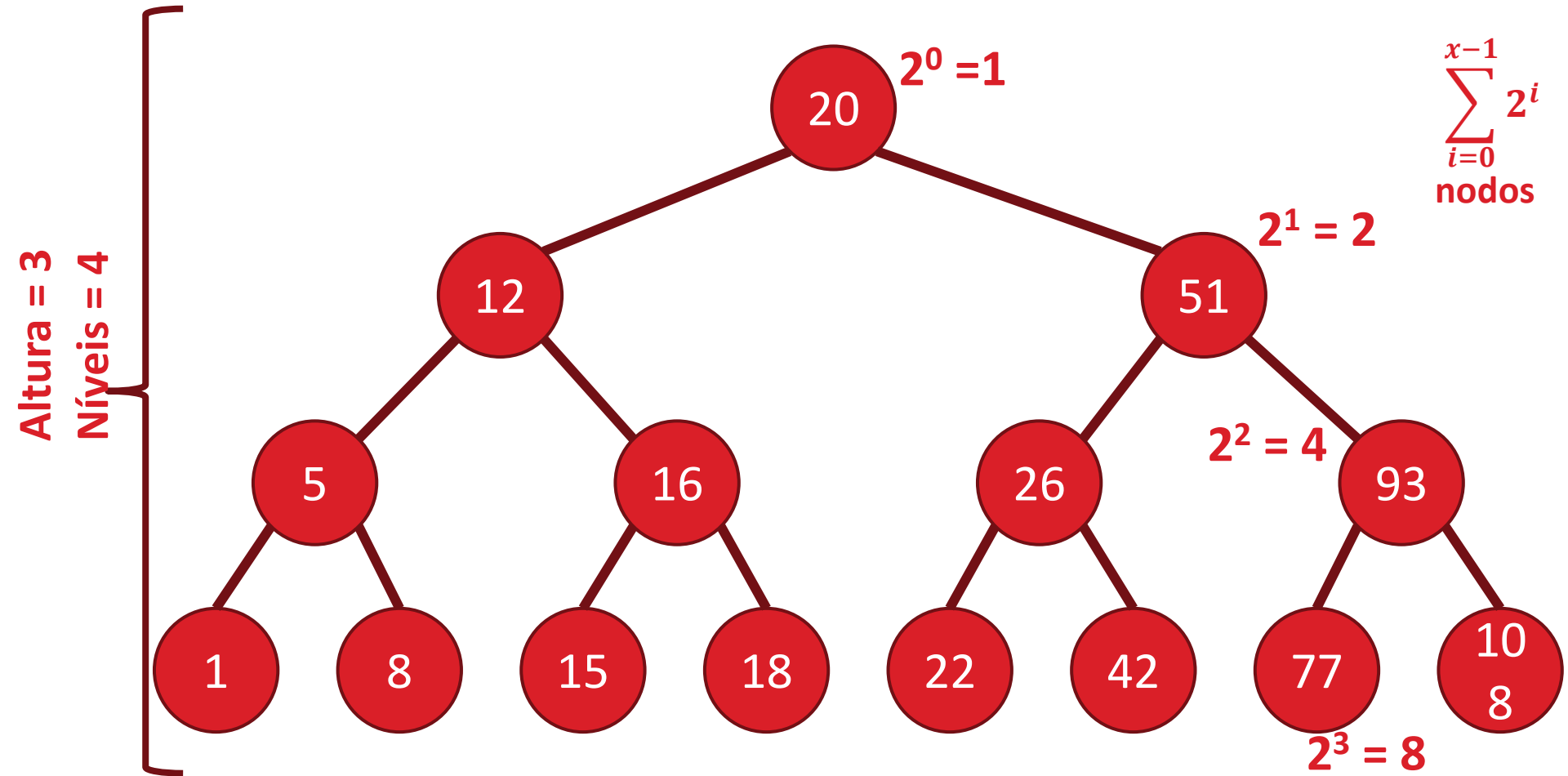


Altura X: X+1 níveis



Altura 3: 4 níveis





Número de nodos

57

$$\sum_{i=0}^{x-1} 2^i = \frac{2(2^{x-1} - 2^{0-1})}{2 - 1} = 2^{x-1+1} - 2^{1-1} = 2^x - 1$$

Nodos e níveis

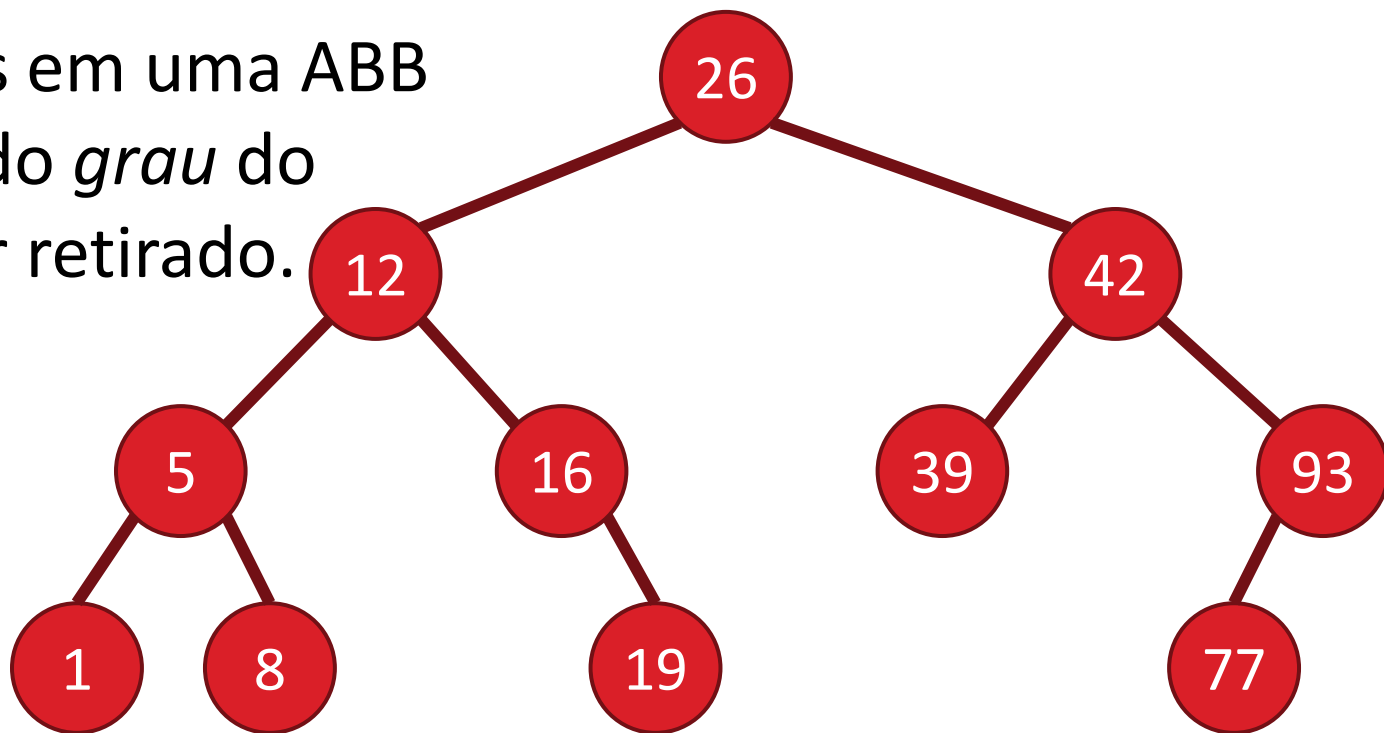
58

- Uma árvore com x níveis tem $n = 2^x - 1$ nodos
 - $x = \log_2 n$, e a altura é $(\log_2 n) - 1$
- Ou seja: pior caso da árvore cheia é $O(\log n)$

Remoção

59

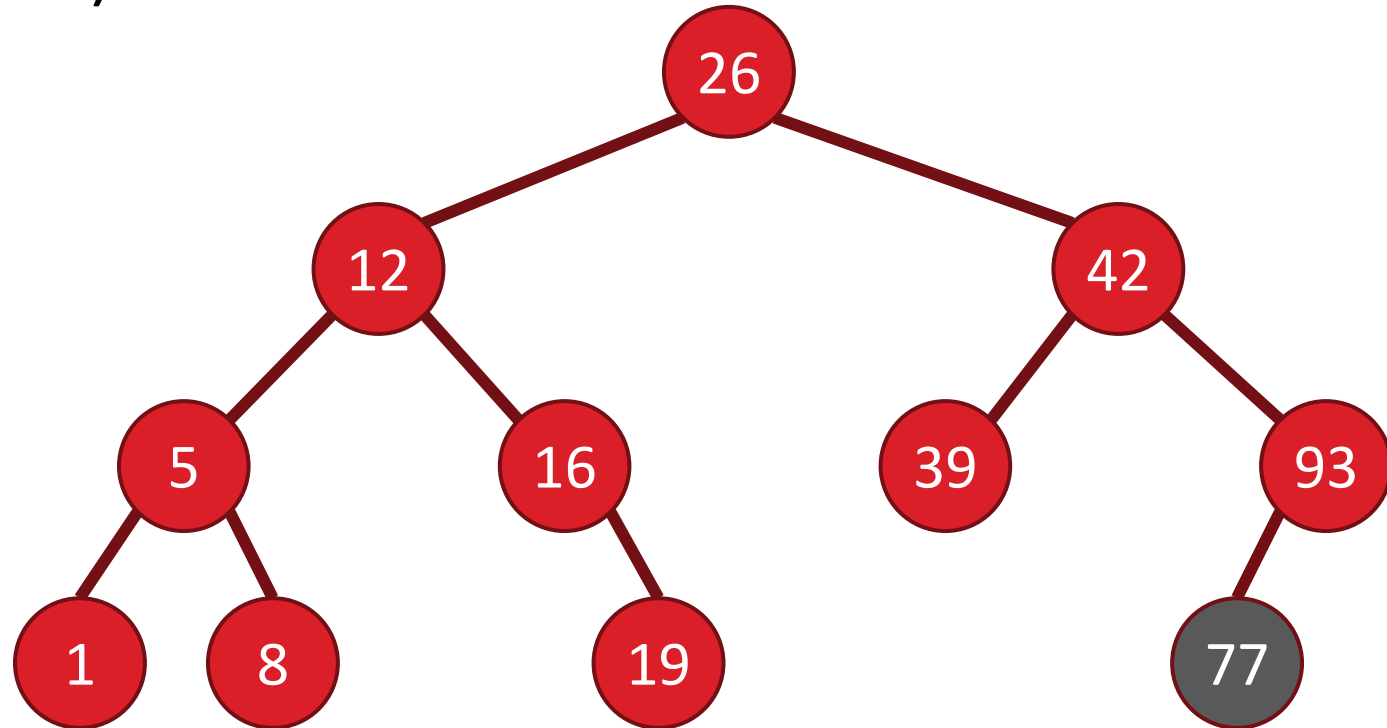
- A remoção de elementos em uma ABB depende do *grau* do nodo a ser retirado.



Remoção

60

- Grau 0 (folha)

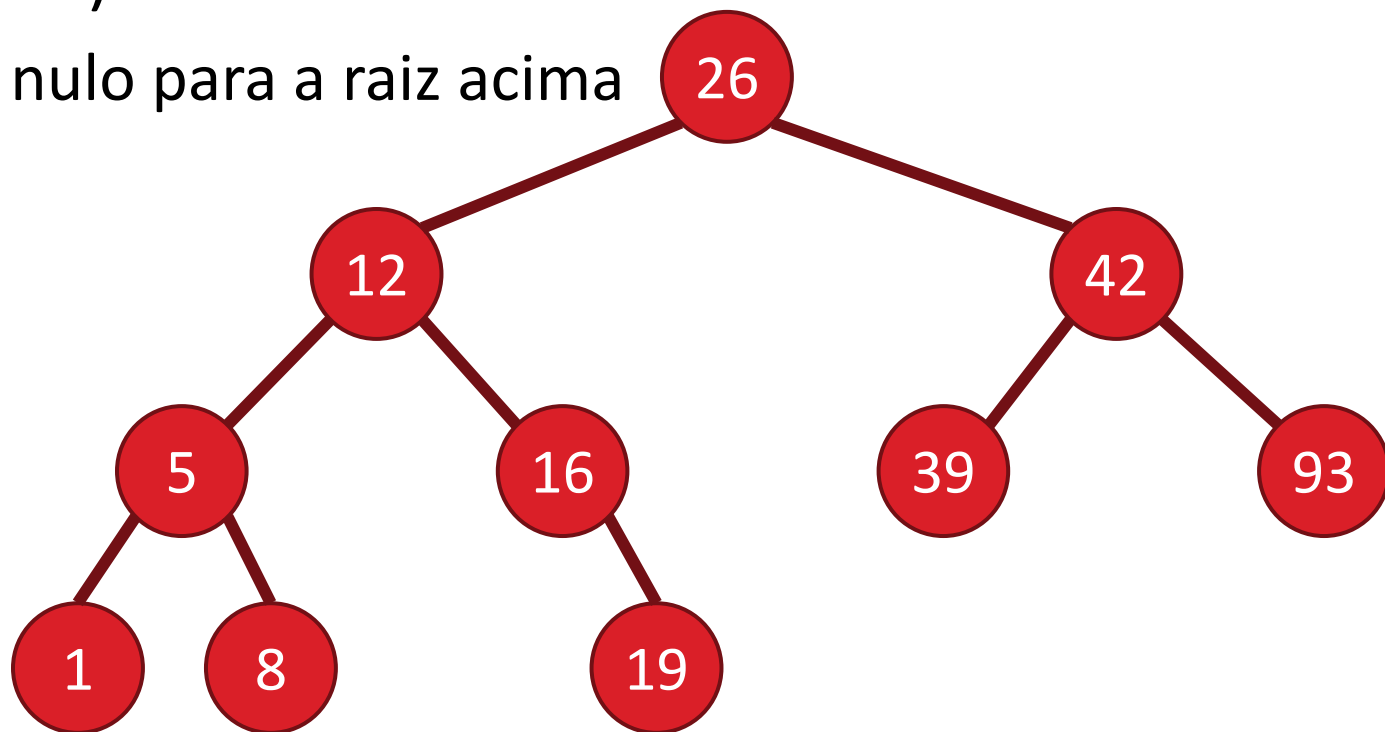


Remoção

61

□ Grau 0 (folha)

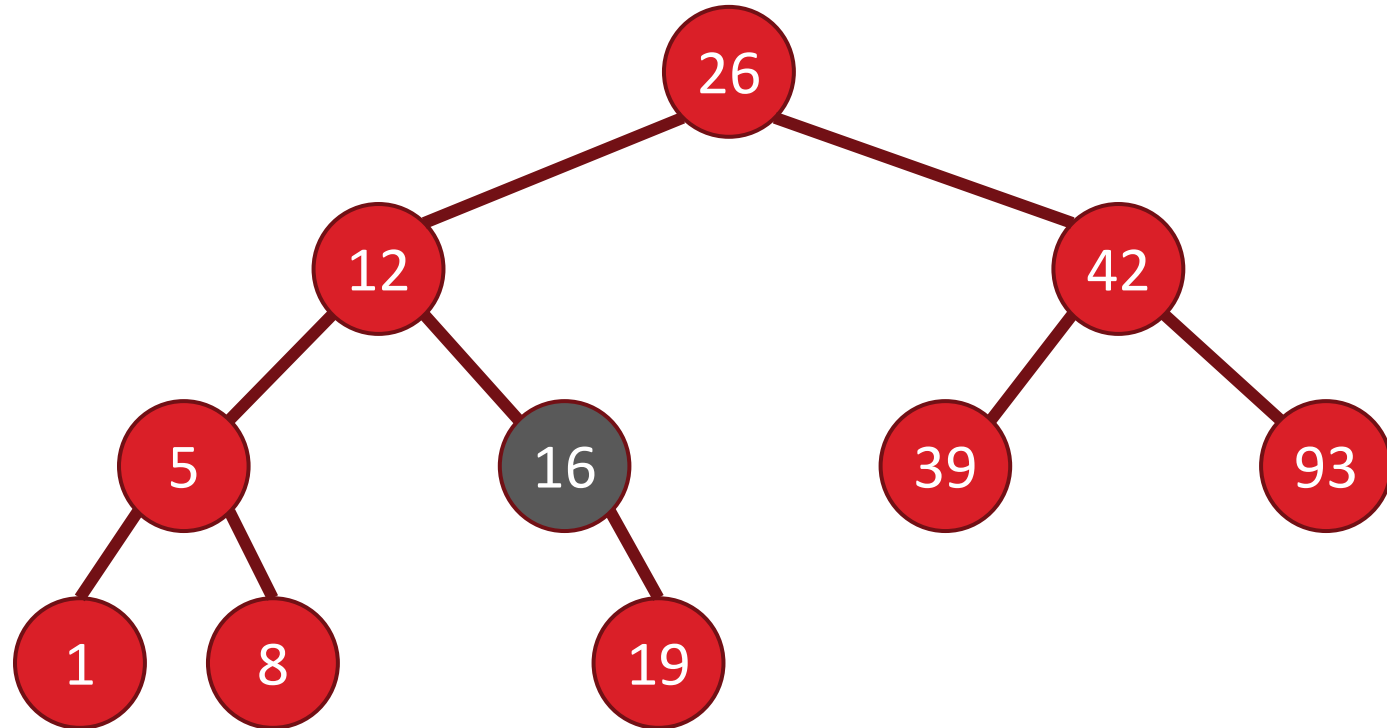
▣ Retornar nulo para a raiz acima



Remoção

62

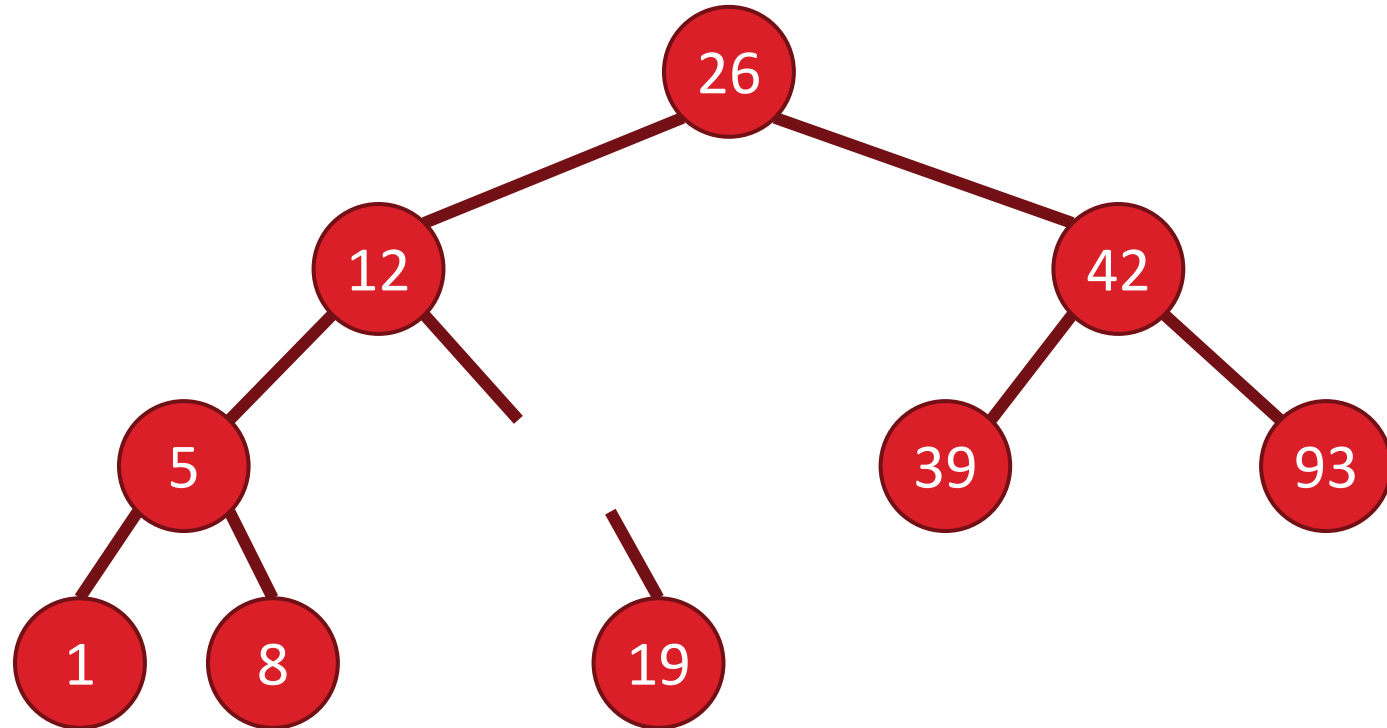
□ Grau 1



Remoção

63

□ Grau 1

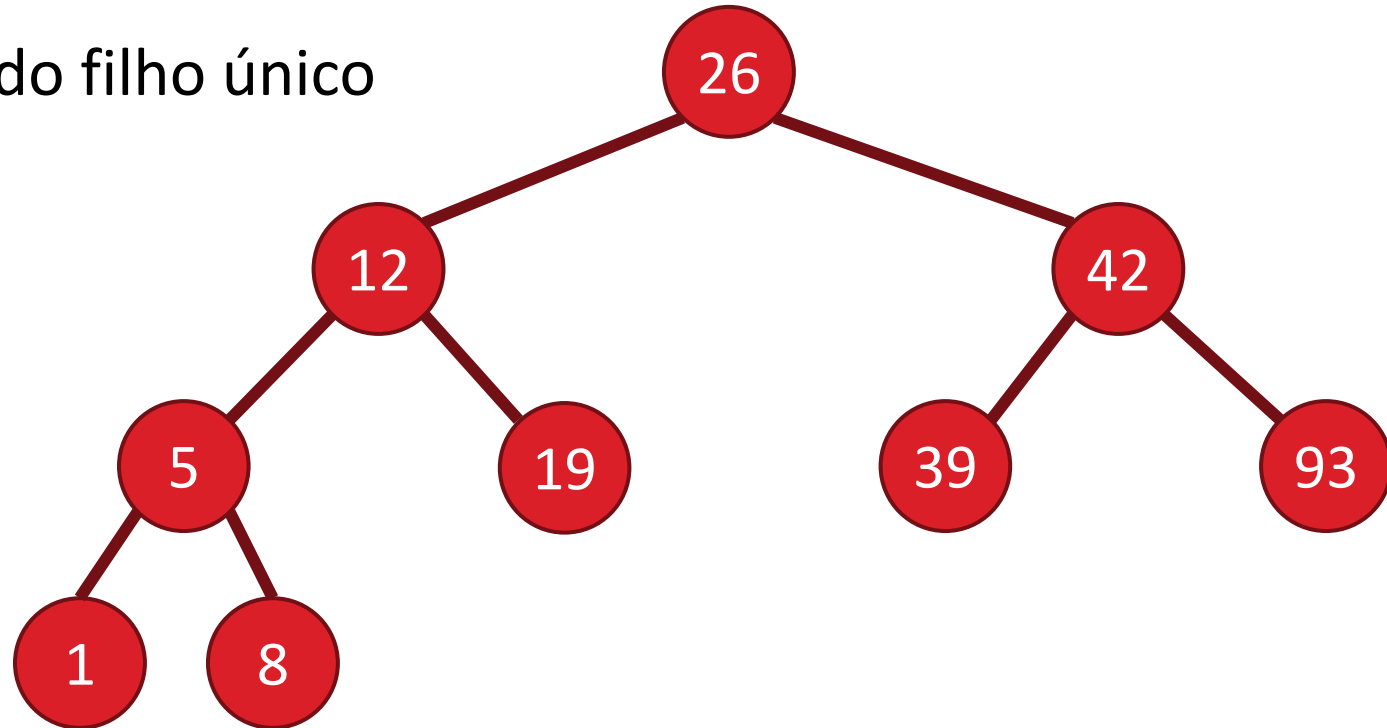


Remoção

64

□ Grau 1

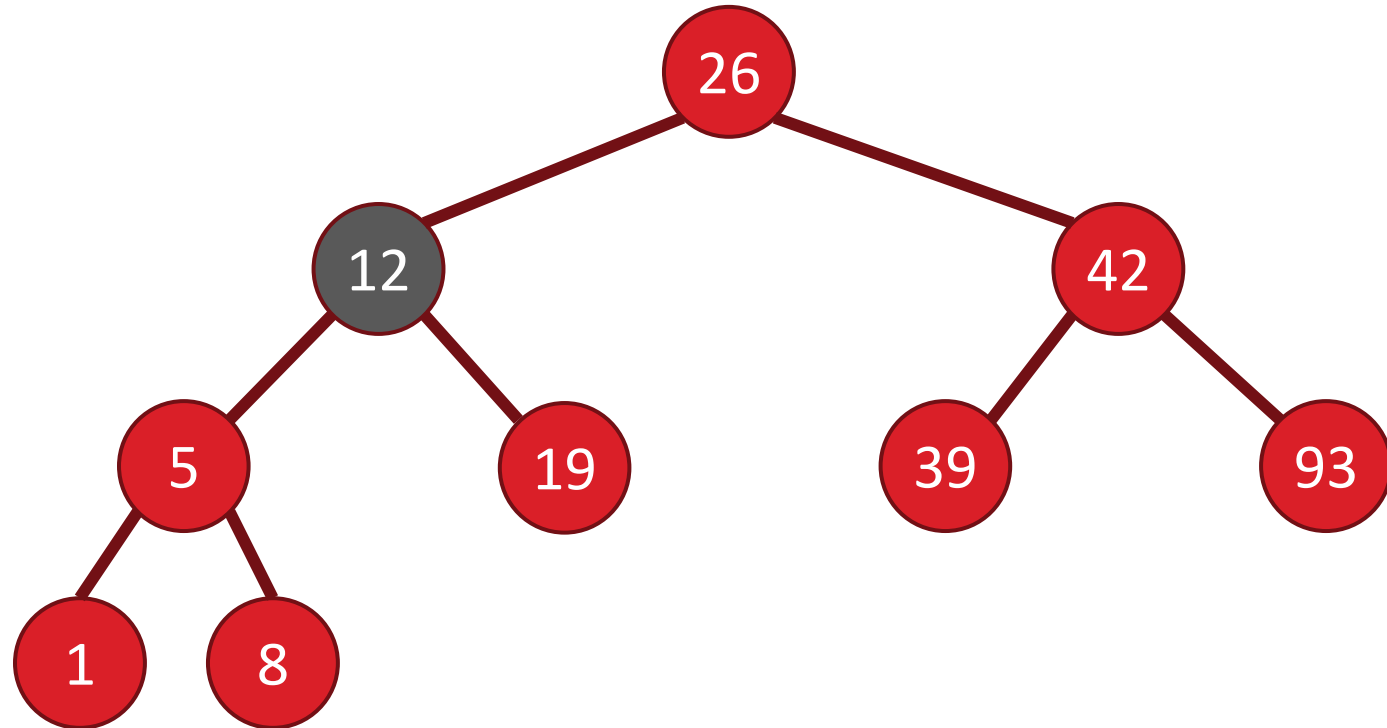
▣ Retorno do filho único



Remoção

65

□ Grau 2

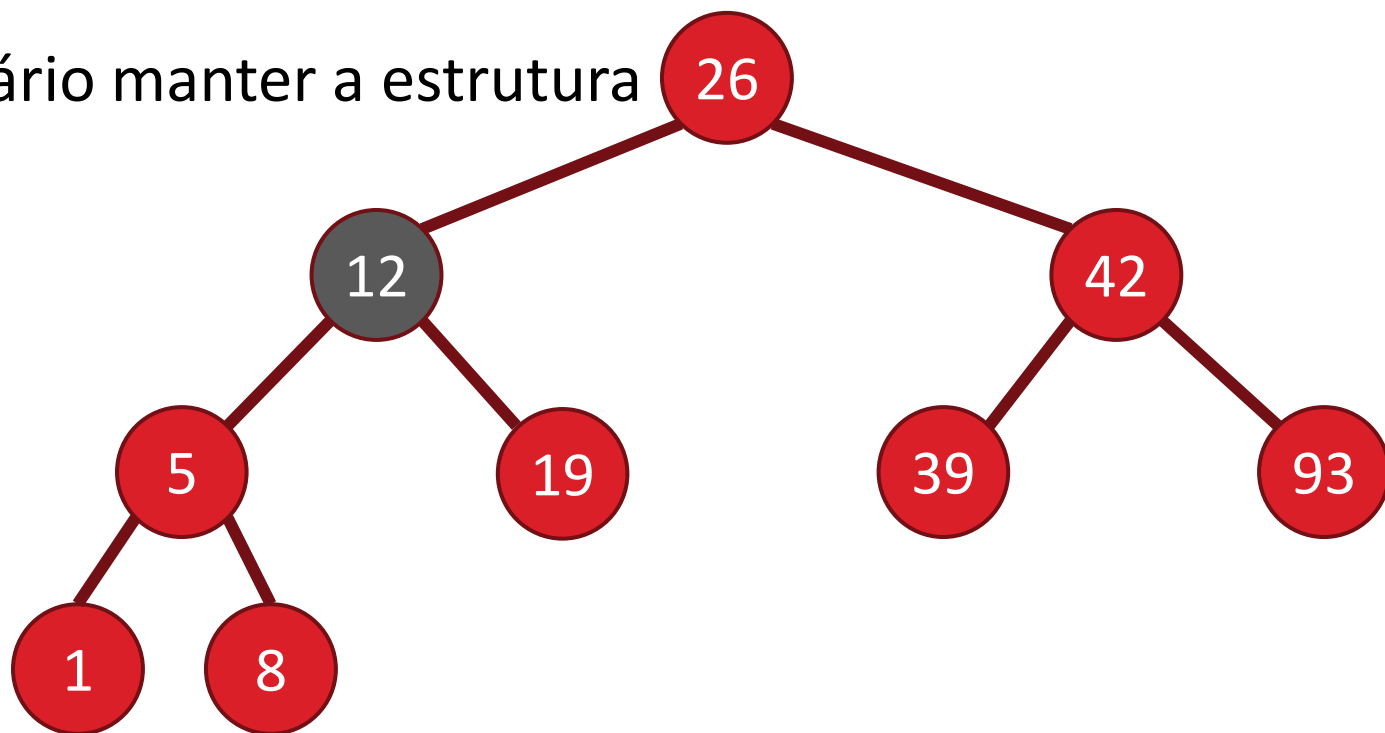


Remoção

66

□ Grau 2

■ É necessário manter a estrutura

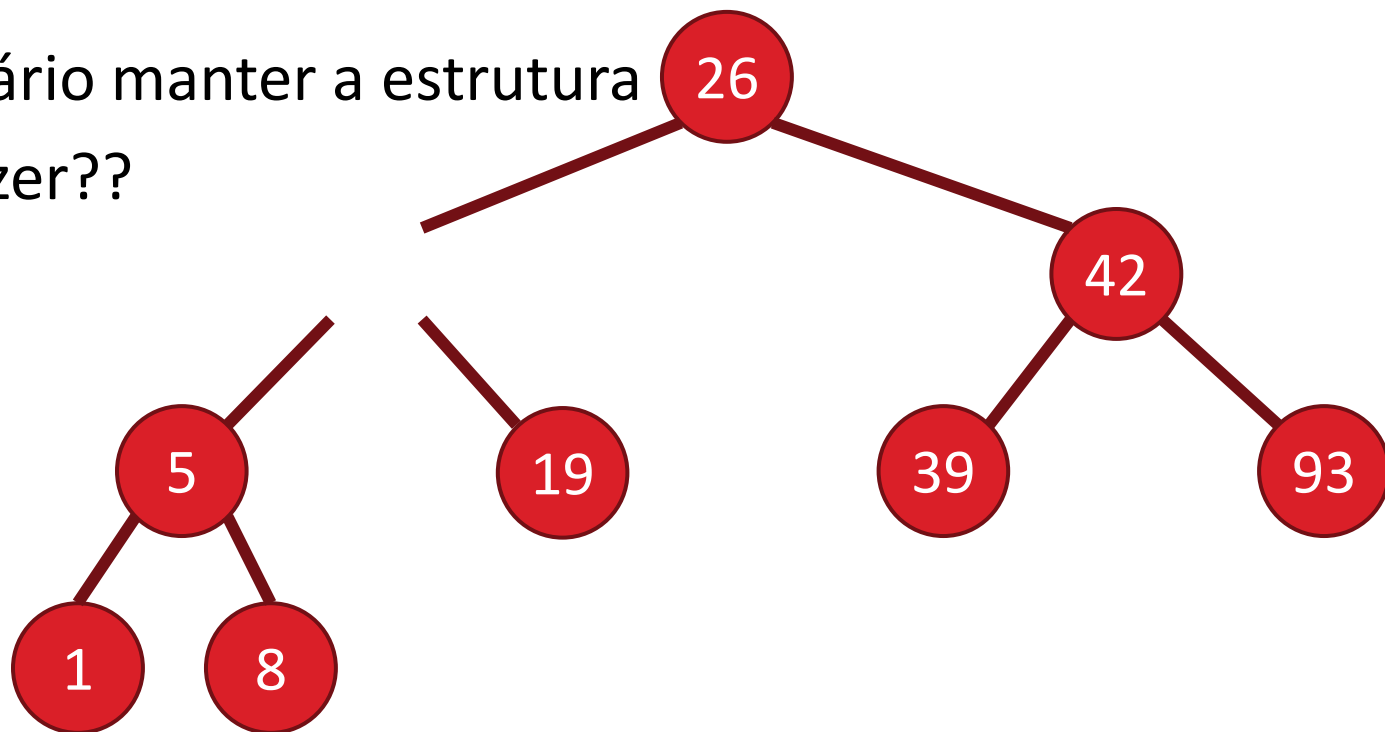


Remoção

67

□ Grau 2

- É necessário manter a estrutura
- O que fazer??

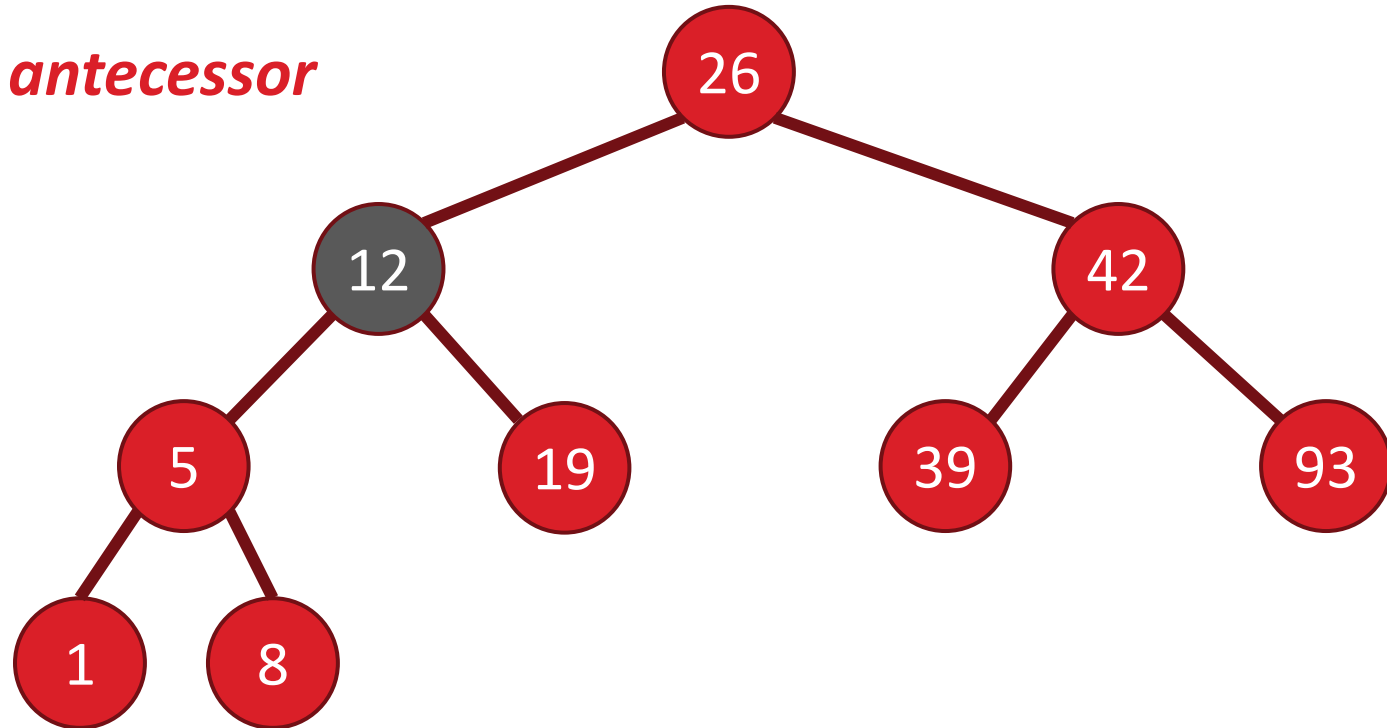


Remoção

68

□ Grau 2

▣ Localizar *antecessor*

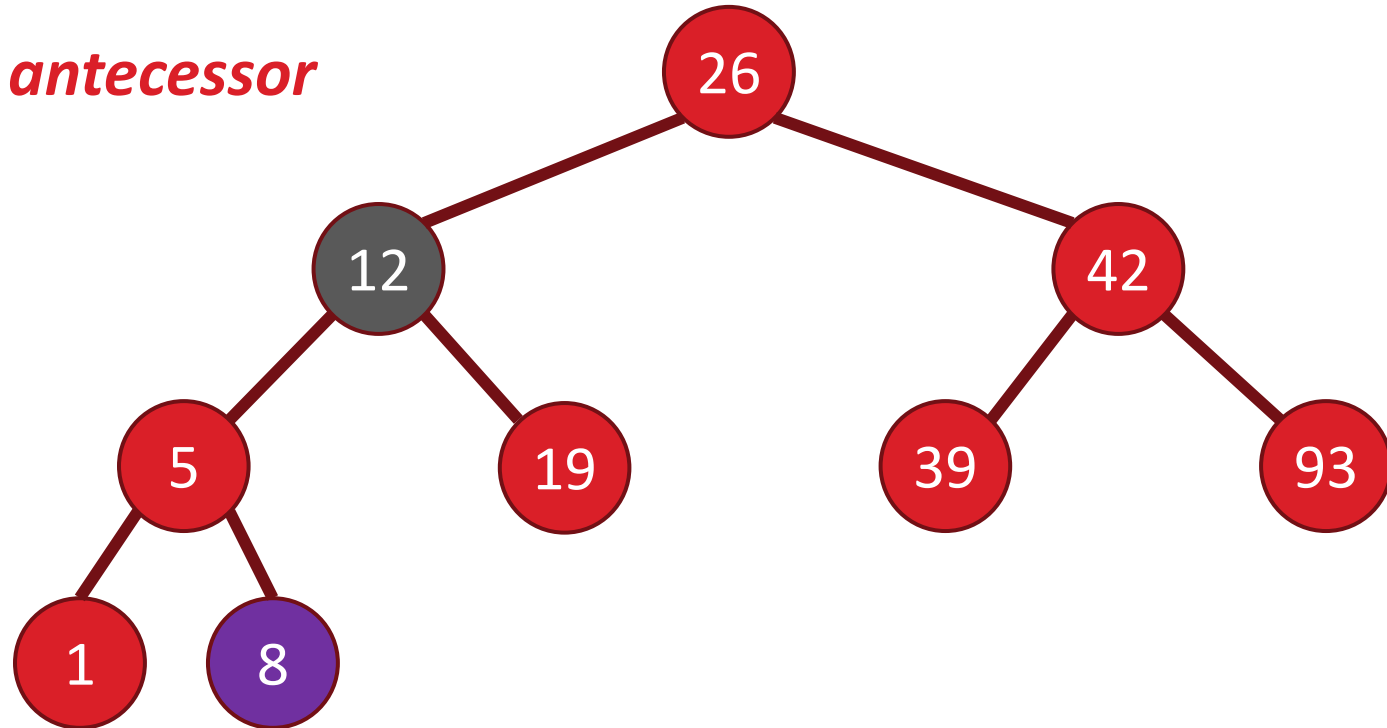


Remoção

69

□ Grau 2

▣ Localizar *antecessor*



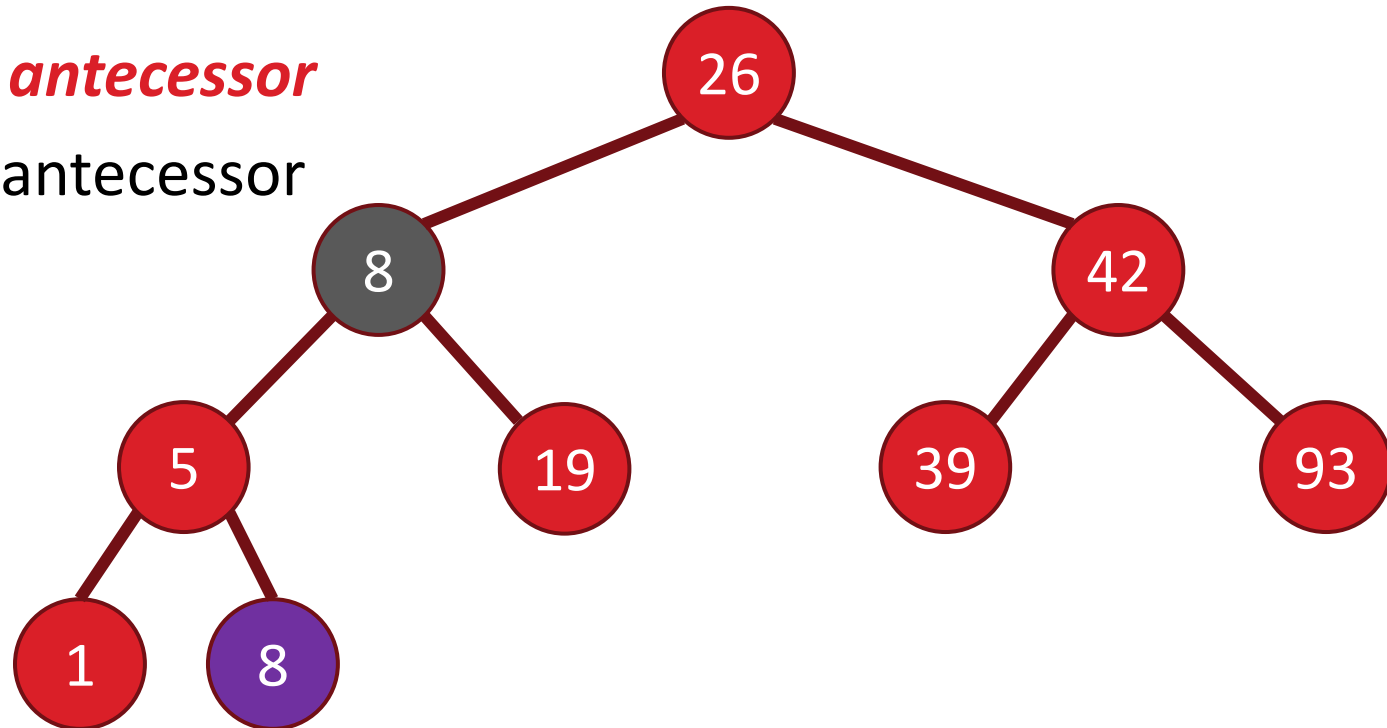
Remoção

70

□ Grau 2

▣ Localizar *antecessor*

▣ Copiar o antecessor



Remoção

71

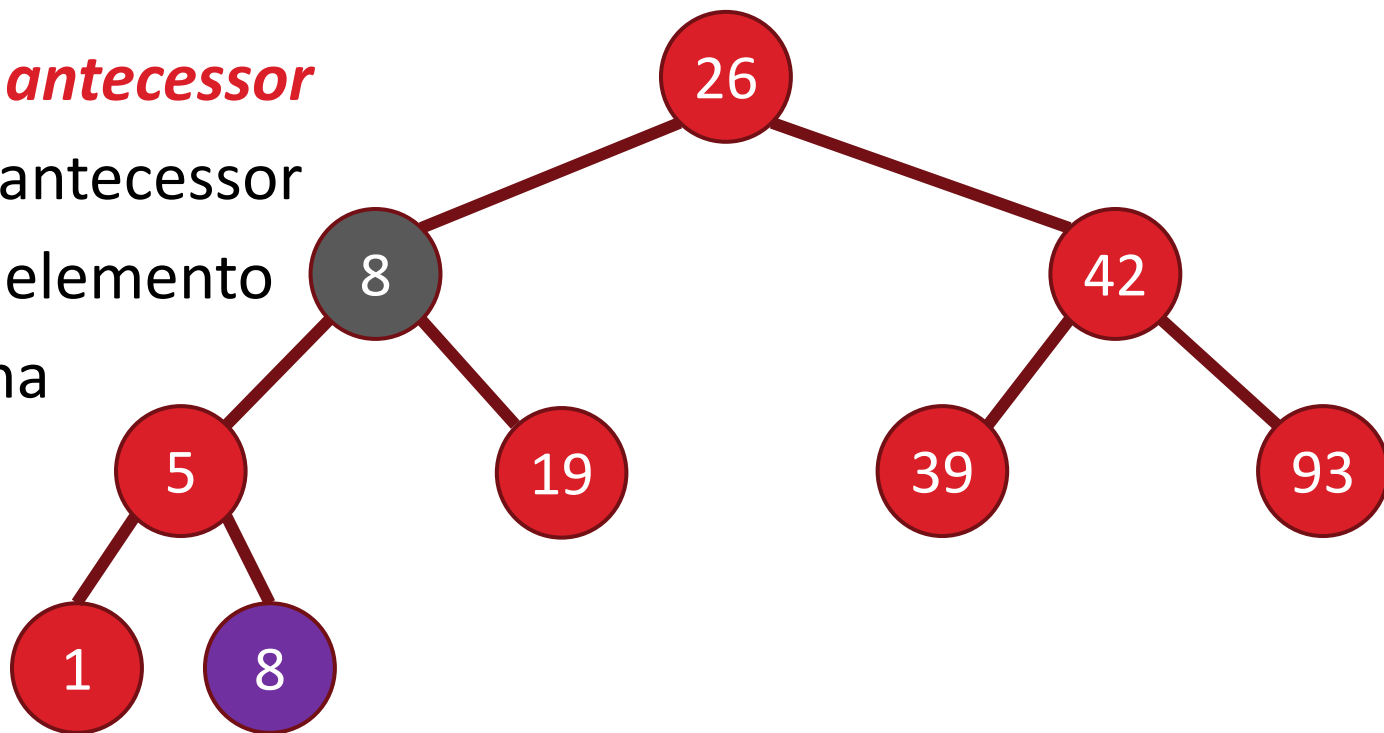
□ Grau 2

▣ Localizar *antecessor*

▣ Copiar o antecessor

▣ Retirar o elemento

duplicado na
esquerda



Remoção

72

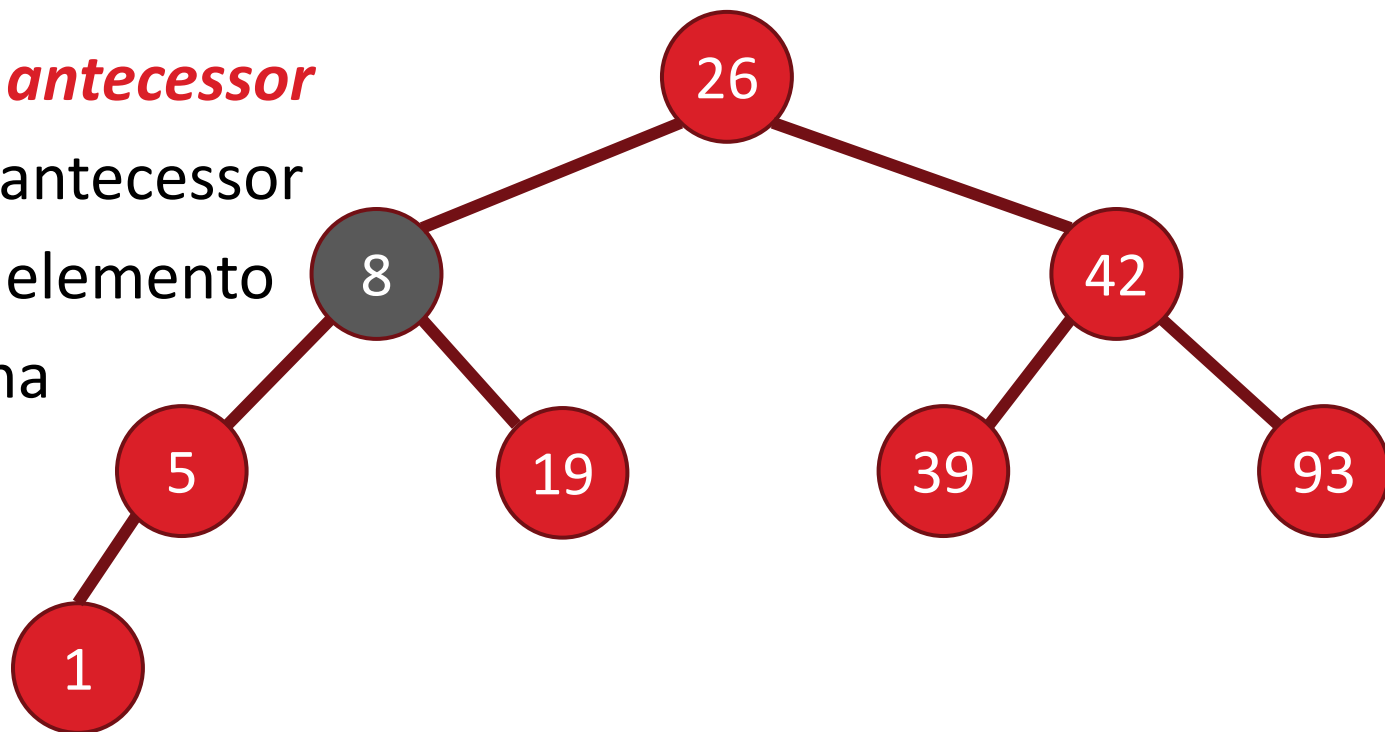
□ Grau 2

▣ Localizar *antecessor*

▣ Copiar o antecessor

▣ Retirar o elemento

duplicado na
esquerda



Remoção

73

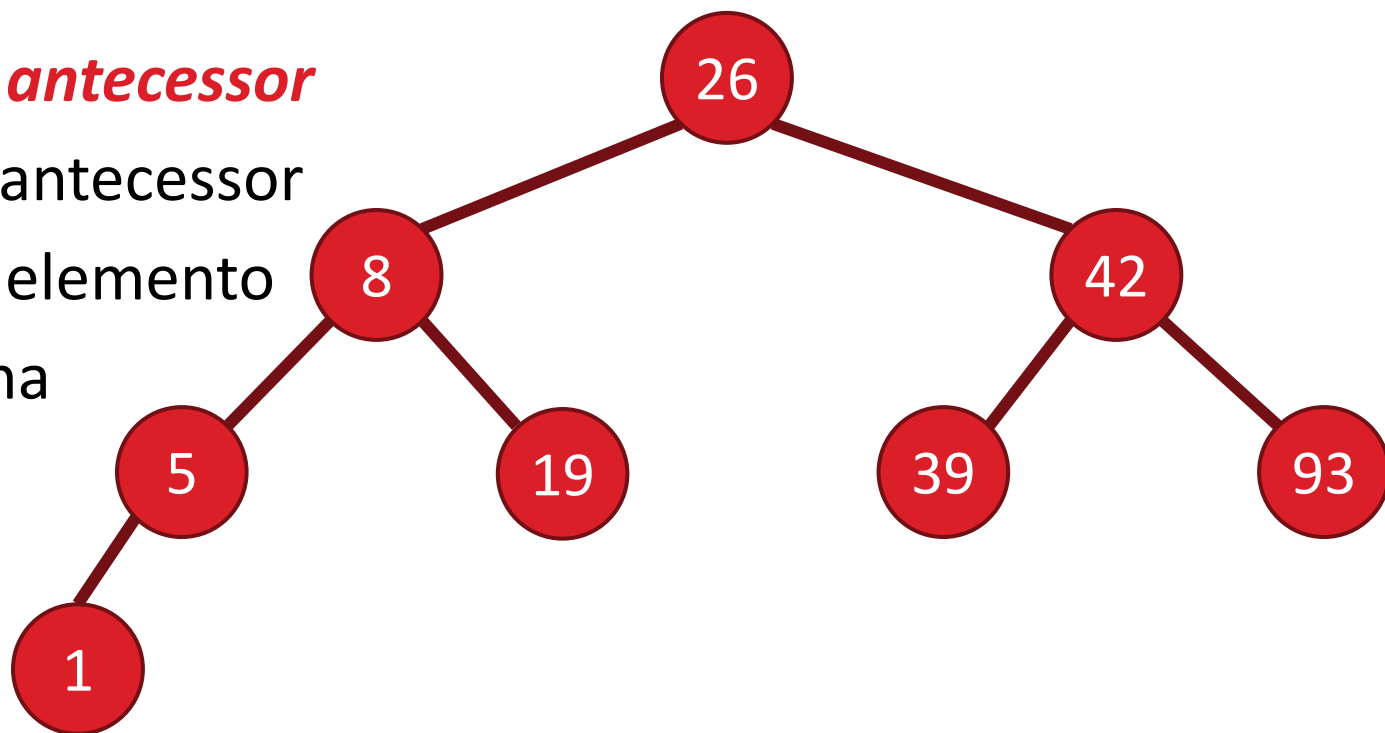
□ Grau 2

▣ Localizar *antecessor*

▣ Copiar o antecessor

▣ Retirar o elemento

duplicado na
esquerda



Caminhamento na árvore

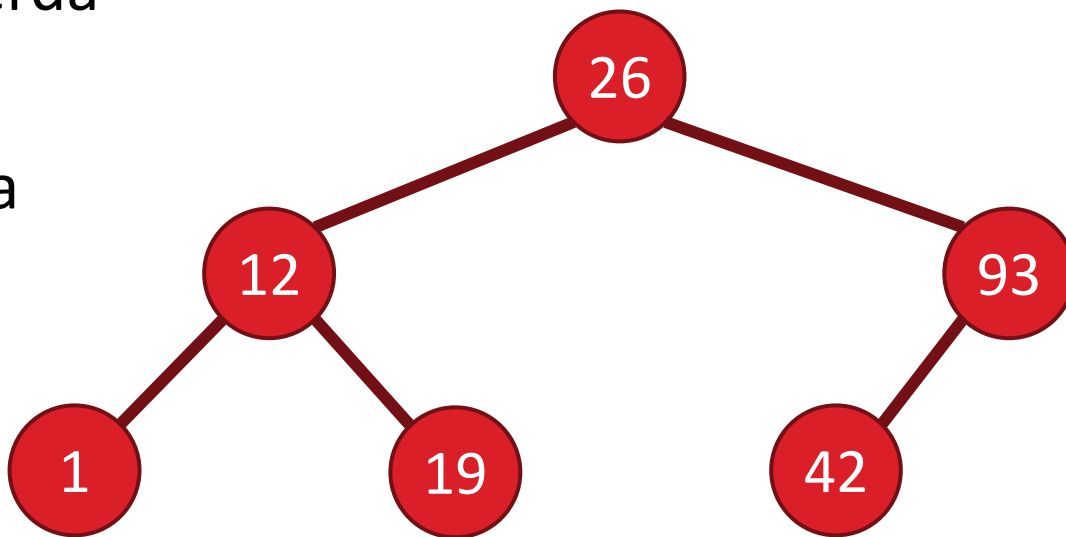
74

- Operação que lista todos os nodos de uma árvore
- A ordem de visita às subárvores determina resultados diferentes para o caminhamento
 - Em-ordem, pré-ordem e pós-ordem

Caminhamento em-ordem

75

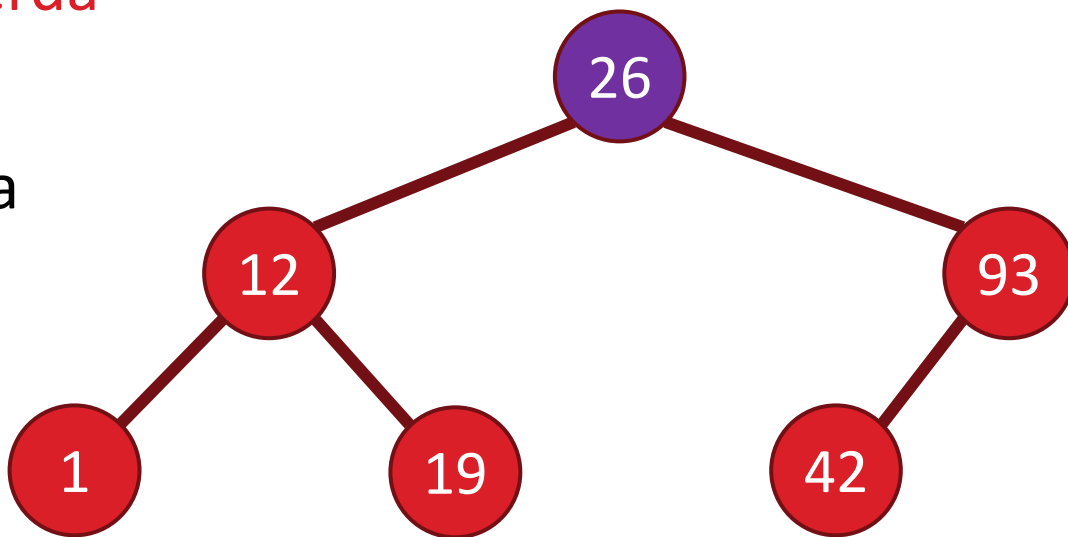
- Recursivamente:
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

76

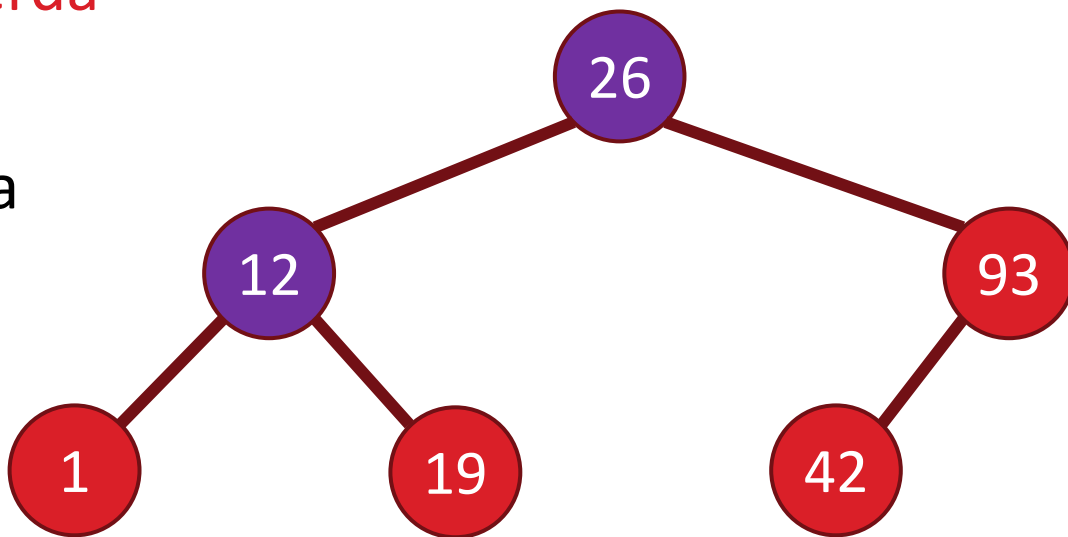
- Recursivamente:
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

77

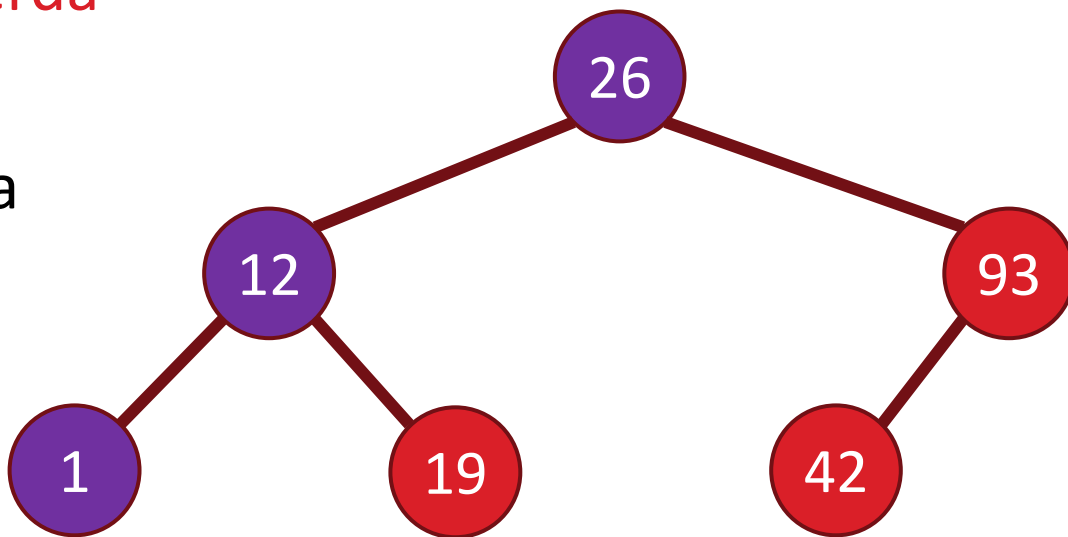
- Recursivamente:
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

78

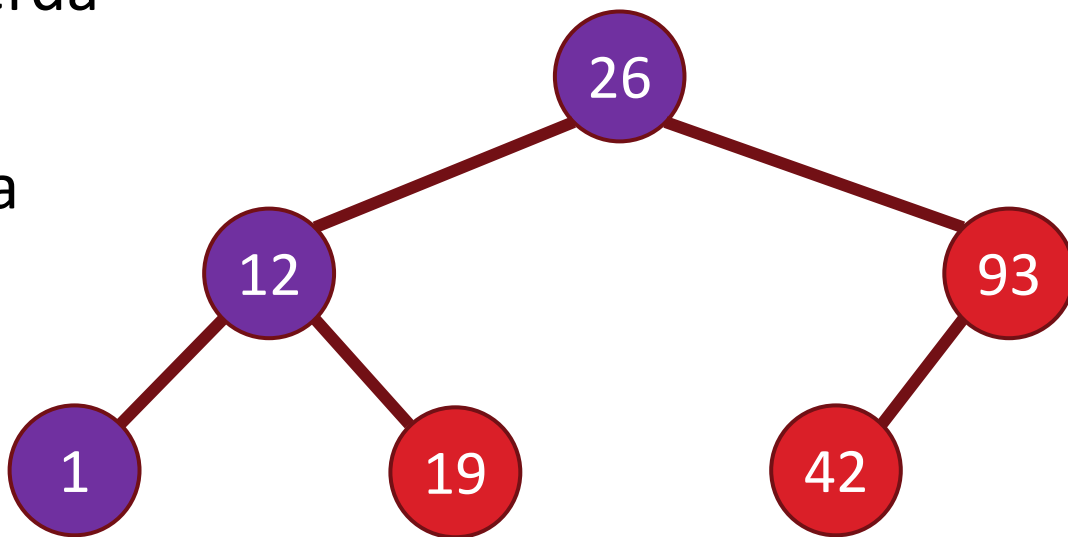
- Recursivamente:
 - Subárvore esquerda
 - Valor da raiz
 - Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

79

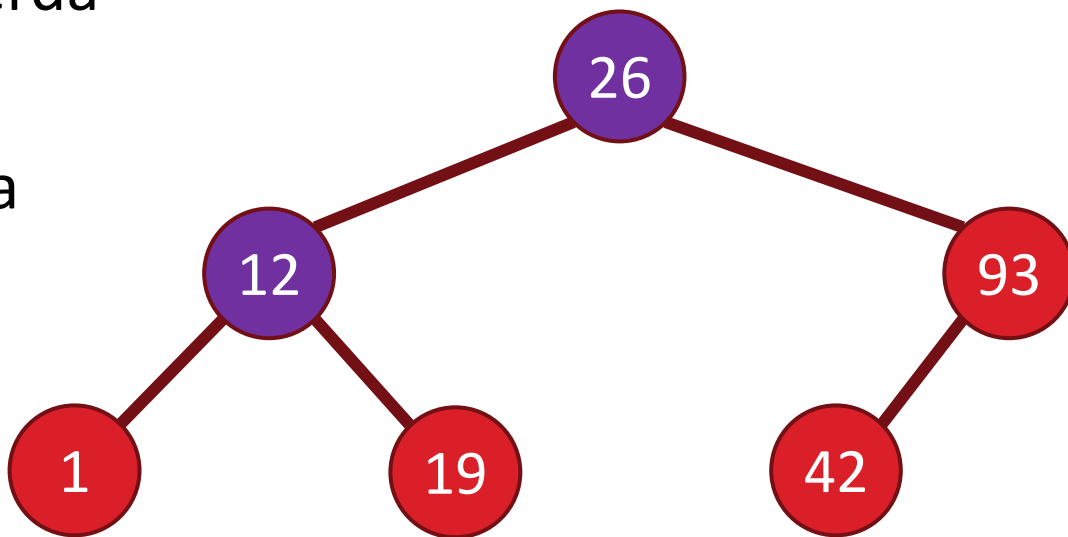
- Recursivamente: 1 -
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

80

- Recursivamente: 1 - 12
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

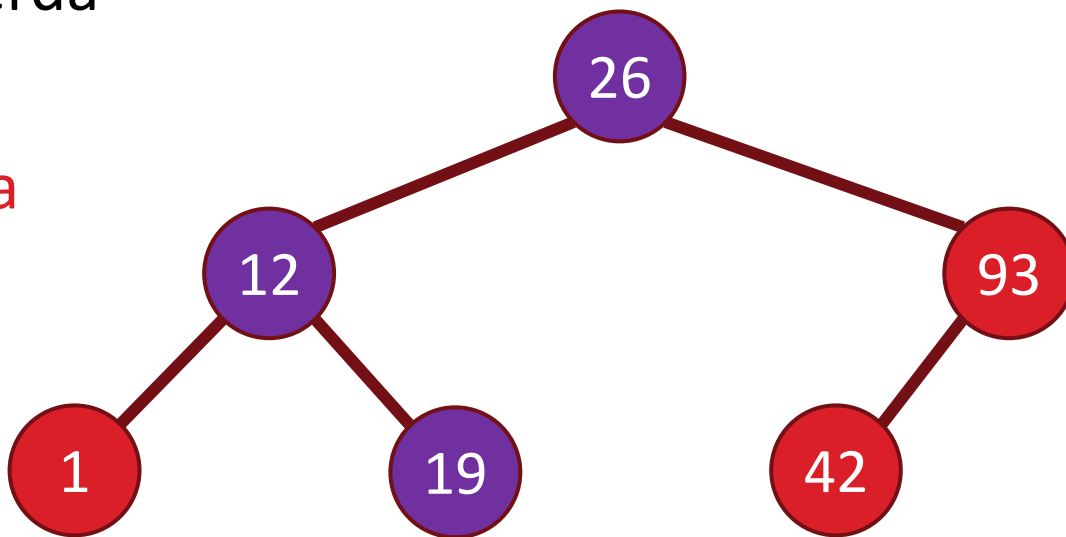
81

□ Recursivamente: 1 - 12

▣ Subárvore esquerda

▣ Valor da raiz

▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

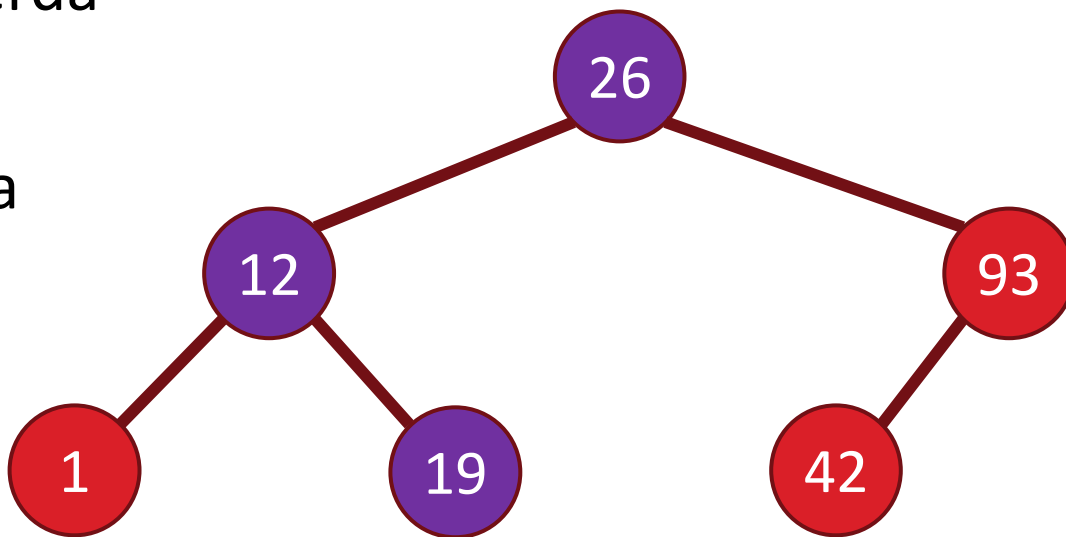
82

□ Recursivamente: 1 – 12 - 19

▣ Subárvore esquerda

▣ Valor da raiz

▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

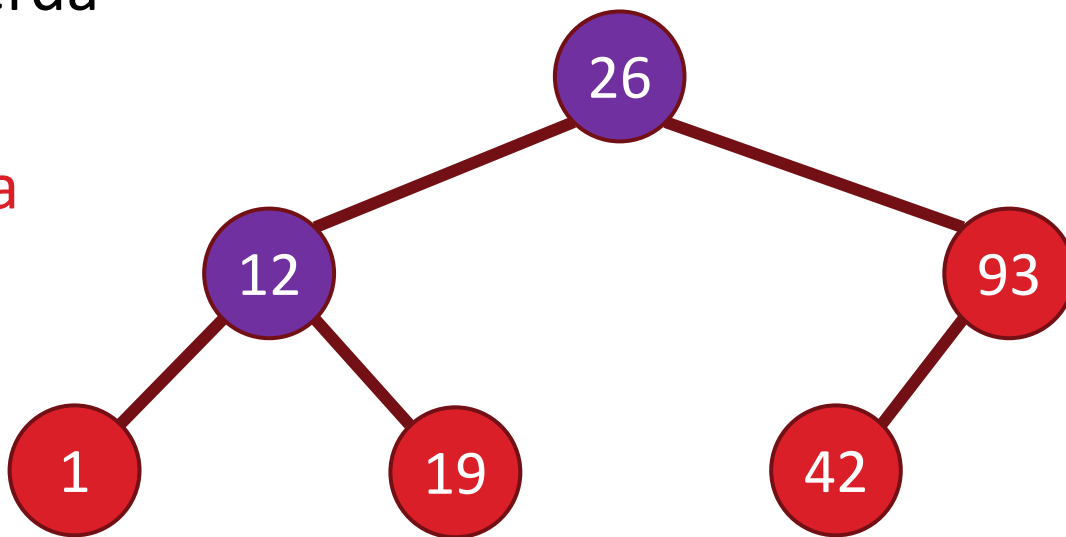
83

□ Recursivamente: 1 – 12 - 19

▣ Subárvore esquerda

▣ Valor da raiz

▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

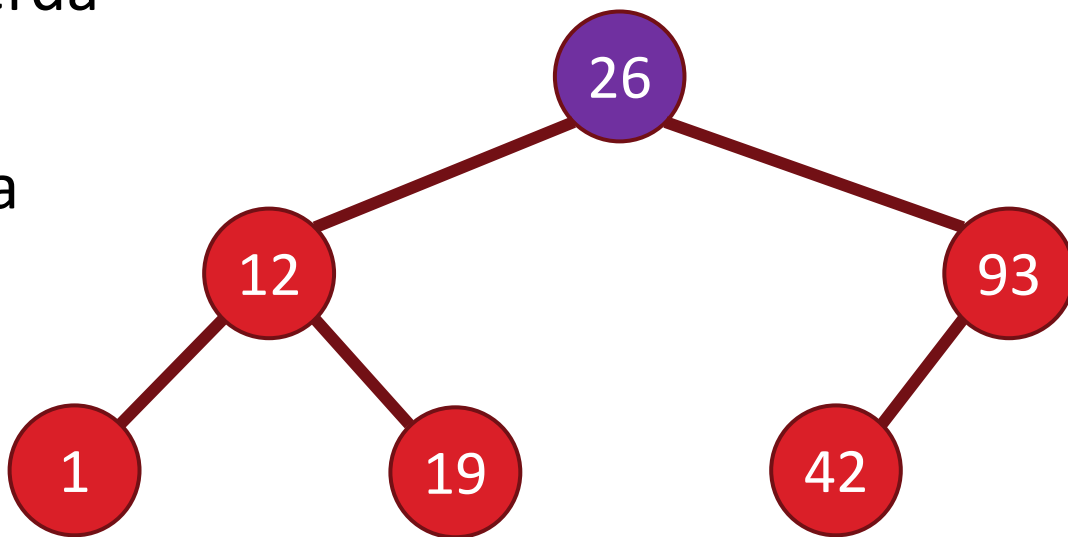
84

□ Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26

▣ Subárvore esquerda

▣ Valor da raiz

▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

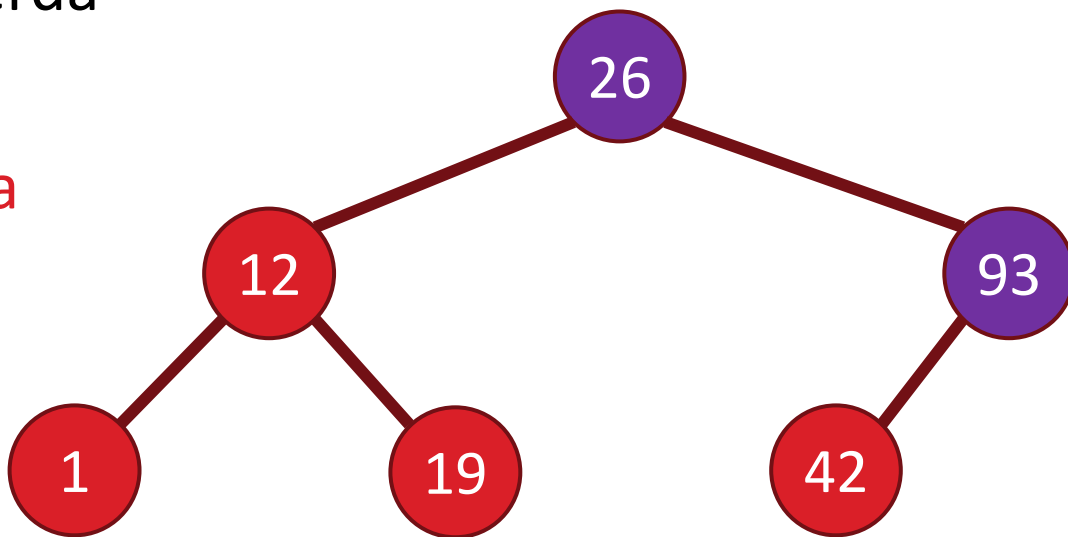
85

□ Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26

▣ Subárvore esquerda

▣ Valor da raiz

▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

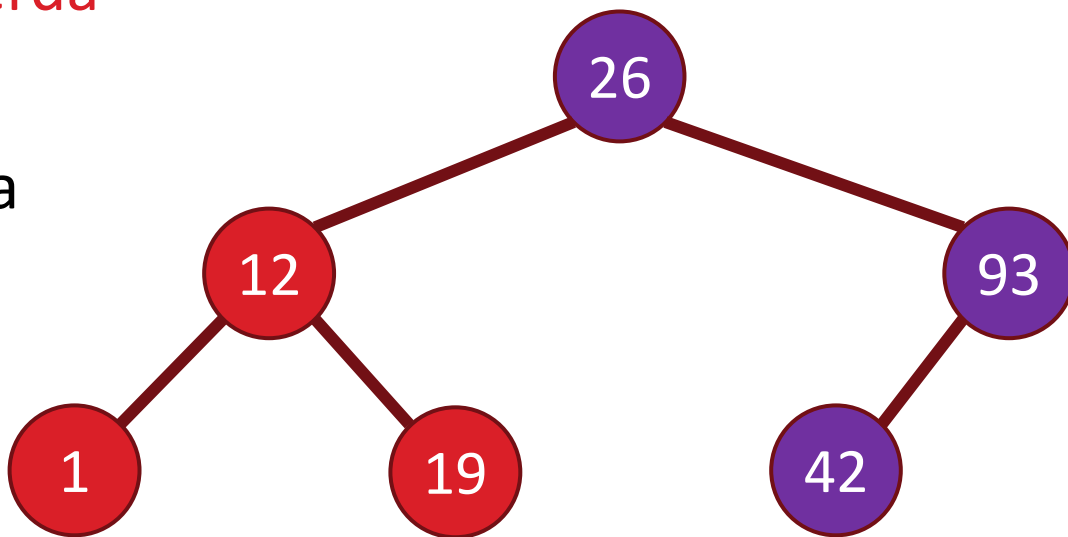
86

□ Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26

▣ Subárvore esquerda

▣ Valor da raiz

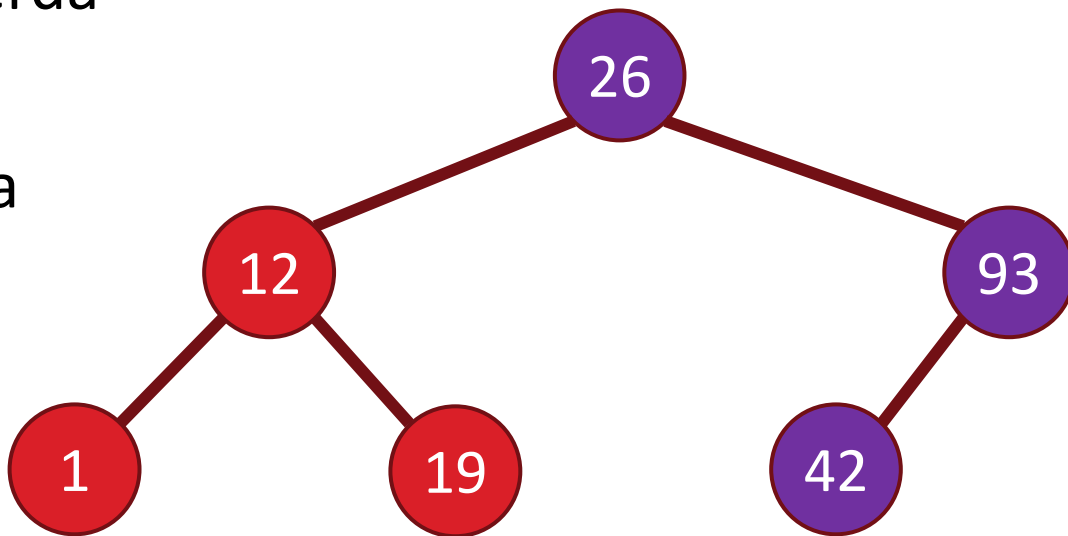
▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

87

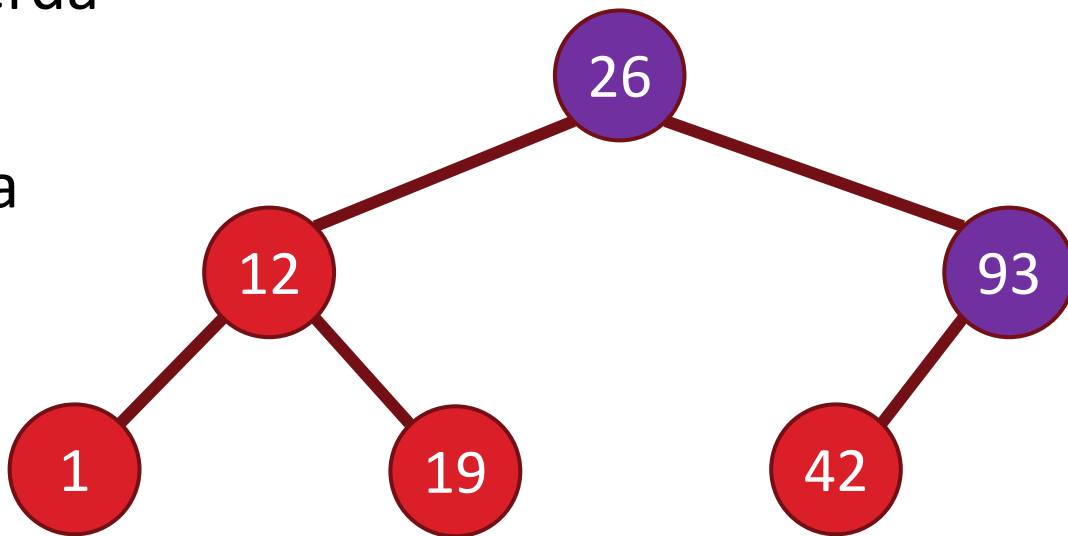
- Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26 – 42
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

88

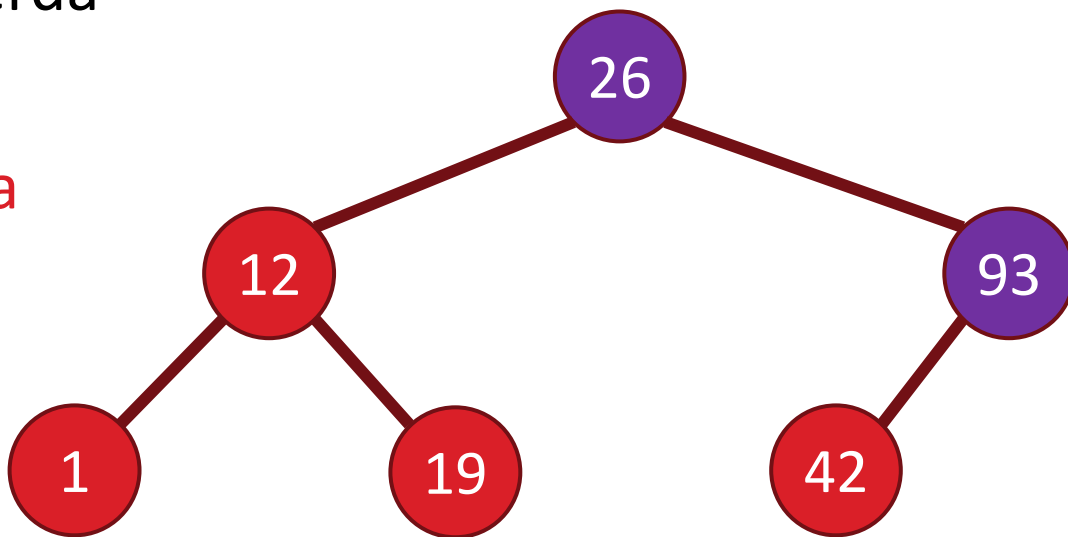
- Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26 – 42 – 93
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

89

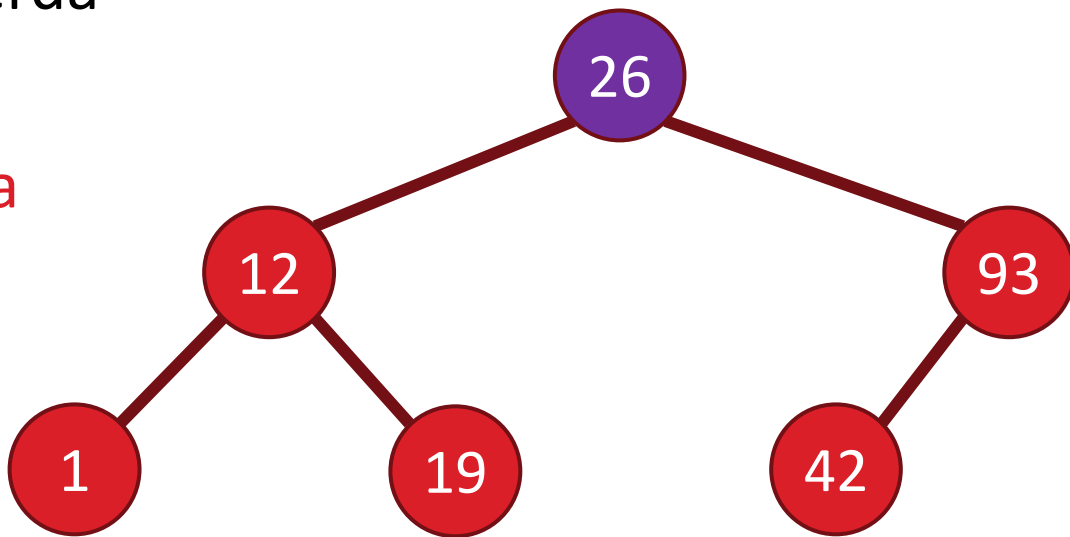
- Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26 – 42 – 93
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

90

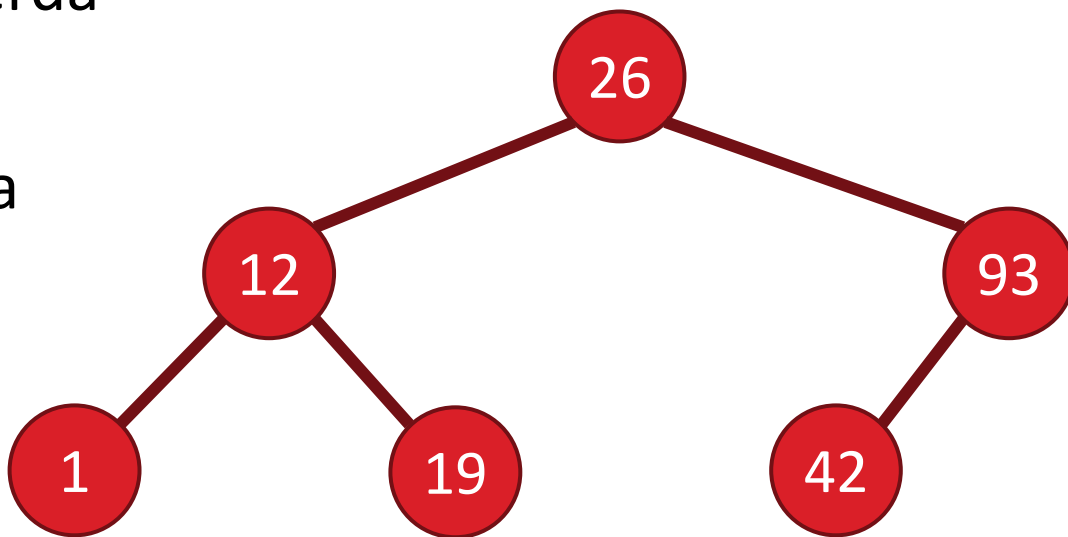
- Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26 – 42 – 93
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento em-ordem

91

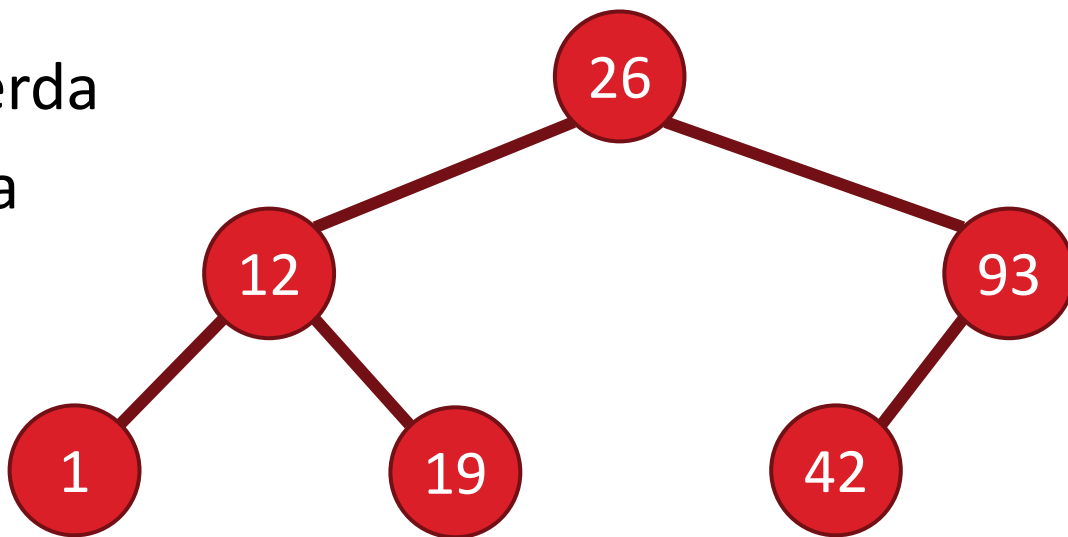
- Recursivamente: 1 – 12 – 19 – 26 – 42 – 93
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore direita



Caminhamento pré-ordem

92

- Recursivamente:
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Subárvore direita

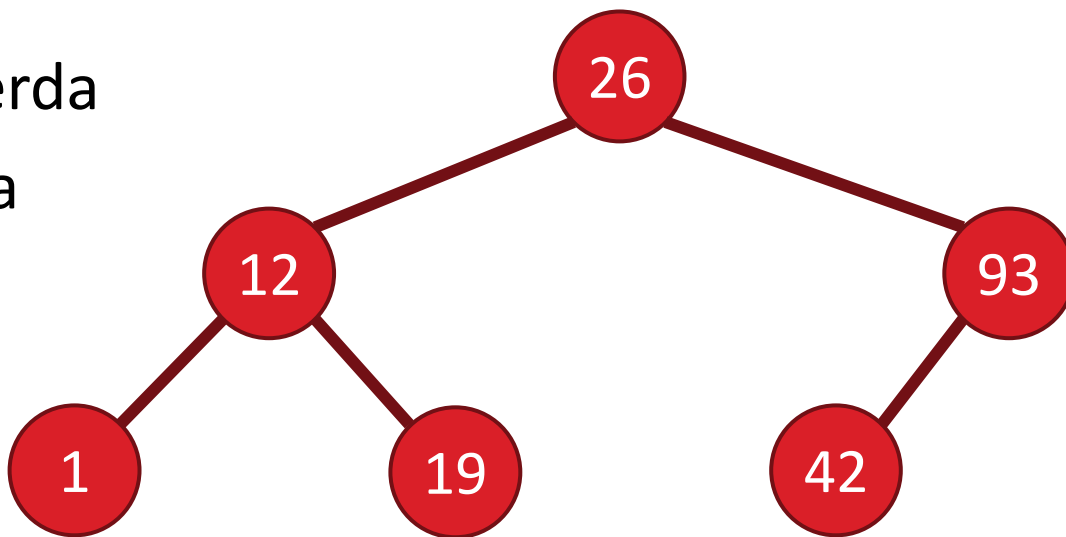


Caminhamento pré-ordem

93

- Recursivamente:
 - ▣ Valor da raiz
 - ▣ Subárvore esquerda
 - ▣ Subárvore direita

- Como fica?
- Para que serve?



Obrigado.

Dúvidas?