Cálculo Aplicado 1

Aplicações das Derivadas

5 APLICAÇÕES DA DERIVADA

O cálculo é usado em todos os ramos das ciências físicas, na ciência da computação, estatística, engenharia, economia, medicina e em outras áreas sempre que um problema possa ser modelado matematicamente e uma solução ótima é desejada.

A Física faz uso intensivo do cálculo. Todos os conceitos na mecânica clássica são inter-relacionados pelo cálculo. A massa de um objeto de densidade conhecida, o momento de inércia dos objetos, assim como a energia total de um objeto dentro de um sistema fechado podem ser encontrados usando o cálculo. Nos subcampos da eletricidade e magnetismo, o cálculo pode ser usado para encontrar o fluxo total de campos eletromagnéticos. Um exemplo mais histórico do uso do cálculo na física é a segunda lei de Newton que usa a expressão "taxa de variação" que se refere à derivada: A taxa de variação do momento de um corpo é igual à força resultante que age sobre o corpo e na mesma direção. Até a expressão comum da segunda lei de Newton como Força = Massa × Aceleração envolve o cálculo diferencial porque a aceleração pode ser expressada como a derivada da velocidade. A teoria do eletromagnetismo de Maxwell e a teoria da relatividade geral de Einstein também são expressas na linguagem do cálculo diferencial. A química também usa o cálculo para determinar as variações na velocidade das reações e no decaimento radioativo.

O cálculo pode ser usado em conjunto com outras disciplinas matemáticas. Por exemplo, ele pode ser usado com a álgebra linear para encontrar a reta que melhor representa um conjunto de pontos em um domínio.

Na esfera da medicina, o cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação, e até mesmo determinar o tamanho máximo de moléculas que são capazes de atravessar a membrana plasmática em uma determinada situação, normal ou induzida, em células.

Na geometria analítica, o estudo dos gráficos de funções, o cálculo é usado para encontrar pontos máximos e mínimos, a inclinação, concavidade e pontos de inflexão.

Na economia o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal.

O cálculo pode ser usado para encontrar soluções aproximadas de equações, em métodos como o método de Newton, iteração de ponto fixo e aproximação linear. Por exemplo, naves espaciais usam uma variação do método de Euler para aproximar trajetórias curvas em ambientes de queda livre.

5.1 FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTES

Dizemos que uma função $f(x)$ *é crescente num certo intervalo do eixo x se, nesse intervalo,* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1) < f(x_2)$ *. Em linguagem geométrica, isto significa que o gráfico da função é ascendente quando o ponto que o traça se move da esquerda para a direita. De maneira similar, a função é dita decrescente (gráfico descendente) se* $x_1 < x_2$ *implica* $f(x_1) > f(x_2)$.

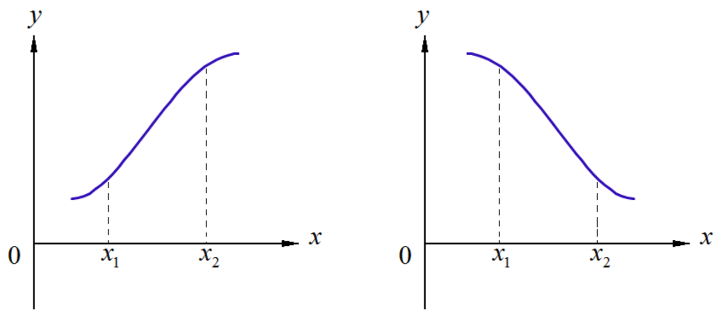


Figura 38. Função crescente e função decrescente

Através da derivada primeira de uma função podemos determinar se uma função é crescente ou decrescente.

Uma função $f(x)$ é crescente nos intervalos em que $f'(x) > 0$ e é decrescente nos intervalos em que $f'(x) < 0$.

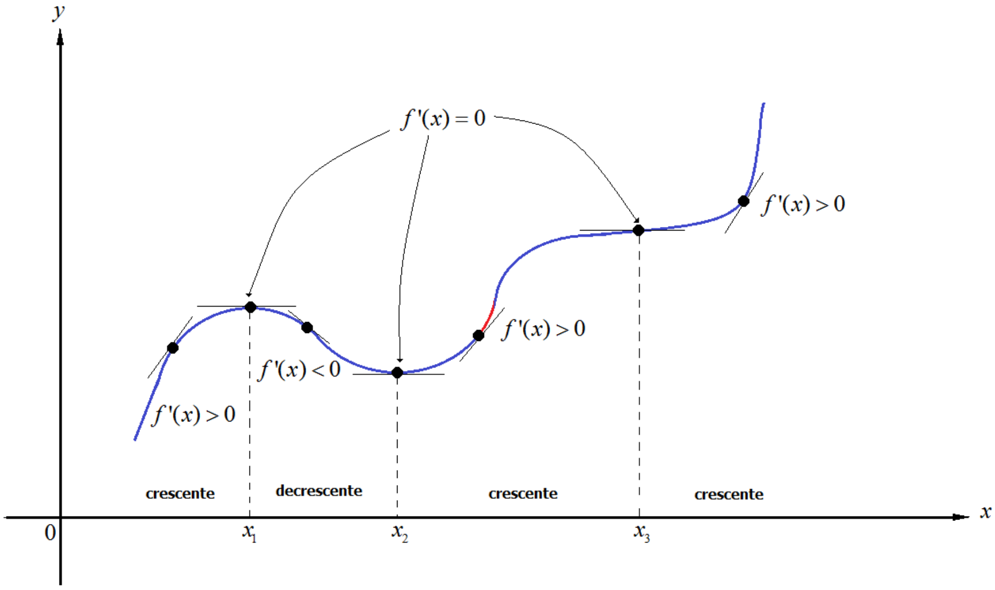


Figura 39. Relação entre a derivada e o aspecto de uma função

É obvio que uma curva lisa só pode se transformar de crescente em decrescente passando por um pico onde o coeficiente angular da reta tangente é zero. Da mesma maneira, uma curva lisa só pode mudar de decrescente para crescente passando por uma depressão em que o coeficiente angular da reta tangente é zero.

Exemplo 20 - Determine os intervalos onde a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ é monótona (isto é, ou crescente ou decrescente)

Solução:

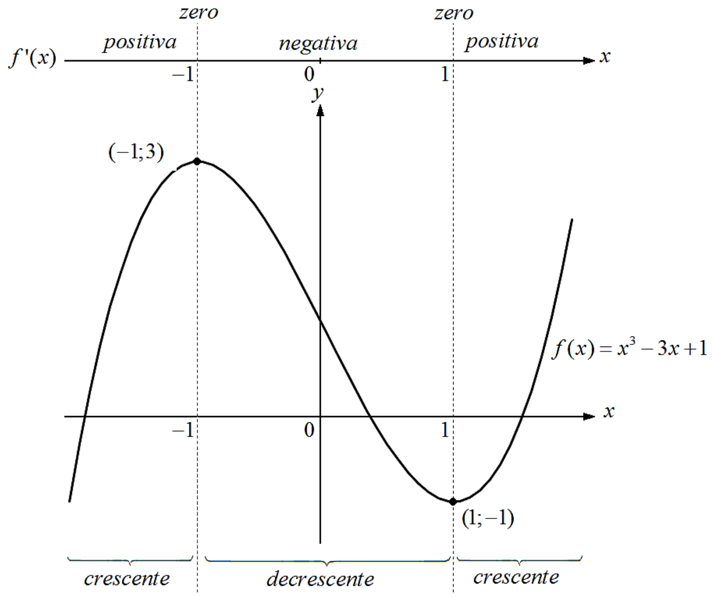
Derivando $f(x)$ temos

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$$

Observando $f'(x)$ temos que

$$\begin{array}{lll} f'(x) > 0 & para & x < -1 \\ f'(x) < 0 & para & -1 < x < 1 \\ f'(x) > 0 & para & x > 1 \end{array}$$

Logo f é crescente nos intervalos $(-\infty;-1)$ e $(1;\infty)$ e é decrescente no intervalo $(-1;1)$.



5.2 Valores Máximo e Mínimo Relativos

Seja, por exemplo, a seguinte função polinomial

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

Observando seu gráfico podemos notar que o ponto (0,5) está mais alto que qualquer outro ponto vizinho (pela esquerda e pela direita). Um ponto tal como este é denominado ***ponto de máximo relativo*** *do gráfico de f.*

De maneira similar, verificamos que o ponto (2,1) é o mais baixo em relação a todos os pontos vizinhos. O ponto (2,1) é dito ***ponto de mínimo relativo*** *do gráfico de f.*

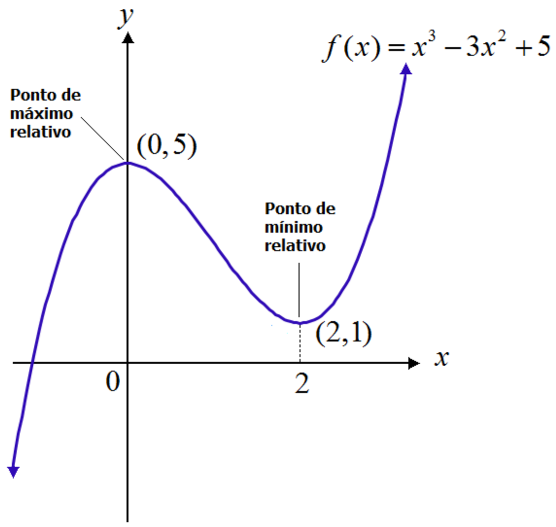


Figura 40. Gráfico da função polinomial $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

Máximo Relativo

Uma função f possui um máximo relativo (ou máximo local) em um ponto c se existir um intervalo aberto I contendo c tal que f seja definida em I e $f(c) \geq f(x)$ seja verdadeira para todo x em I.

Mínimo Relativo

Uma função f possui um mínimo relativo (ou mínimo local) em um ponto c se existir um intervalo aberto I contendo c tal que f seja definida em I e $f(c) \leq f(x)$ seja verdadeira para todo x em I .

Ponto Crítico

Diz-se que um ponto c é um ponto crítico para a função f quando f é definida em c mas não é diferenciável em c, ou $f'(c)=0$.

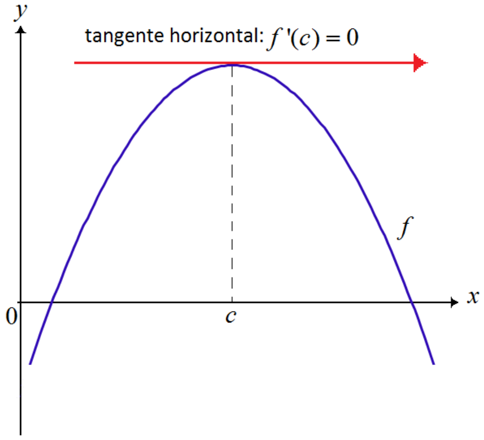


Figura 41. Ponto Crítico

Teorema 9. *Condição necessária para extremos relativos*

Se a função f possui um extremo relativo em um ponto c , então c é um ponto crítico para f .

Considere o gráfico da função a seguir.

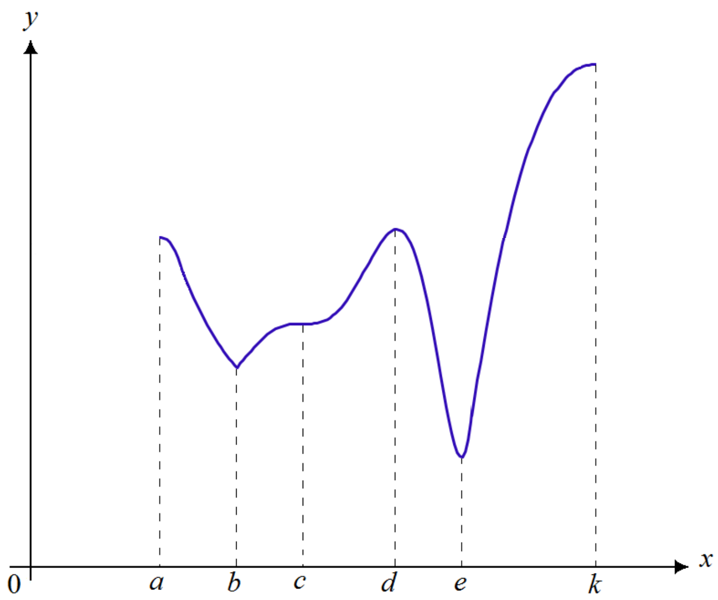


Figura 42. Gráfico com máximos e mínimos relativos

Os pontos a, b, c, d, e e k *são críticos para a função* f *. Neste caso* a, b e k *estão qualificados como pontos críticos de* f *porque* f *não é diferenciável nestes pontos (embora* f *possua derivadas em* a e k *). Podemos observar que* f *não possui extremos relativos em* a *ou* k*, uma vez que nenhum dos intervalos abertos em relação a esses pontos estão contidos no domínio de* f *. De qualquer modo,* f *possui um mínimo relativo no ponto crítico* b *(onde f deixa de ser diferenciável). Por outro lado,* f *é diferenciável nos três pontos críticos restantes* c*,* d *e* e*, então*

$$f'(c) = f'(d) = f'(e) = 0$$

Claramente, podemos observar que, f *possui um máximo relativo em* d *e um mínimo em* e*. Contudo, apesar do gráfico de* f *possuir uma tangente horizontal em* $(c, f(c))$ *,* f *não tem um extremo relativo em* c*.*

Para encontrarmos todos os extremos relativos de uma função f *podemos começar achando todos os pontos críticos para* f *. Estes pontos críticos se constituem nos "candidatos" a pontos nos quais* f *tem extremo relativo; entretanto, cada ponto crítico precisa ser testado para ver quando* f *realmente possui um extremo relativo lá. O teste mais simples para extremos relativos pode ser realizado utilizando-se a derivada primeira ou segunda derivada de* f *.*

5.2.1 Testes da derivada primeira para extremos relativos

Seja a função continua f apresentada no gráfico da Figura 4a. Esta função apresenta uma derivada primeira positiva no intervalo (a, c) *e uma derivada primeira negativa no intervalo* (c, b)*. A função* f *é crescente no intervalo* $(a, c]$ *e decrescente no intervalo* $[c, a)$*; logo* f ***tem um máximo relativo em*** c *. Na Figura 4b, a função continua* f *tem uma derivada primeira negativa no intervalo* (a, c) *e uma derivada primeira positiva no intervalo* (c, b)*; logo* f ***tem um mínimo relativo em*** c *.*

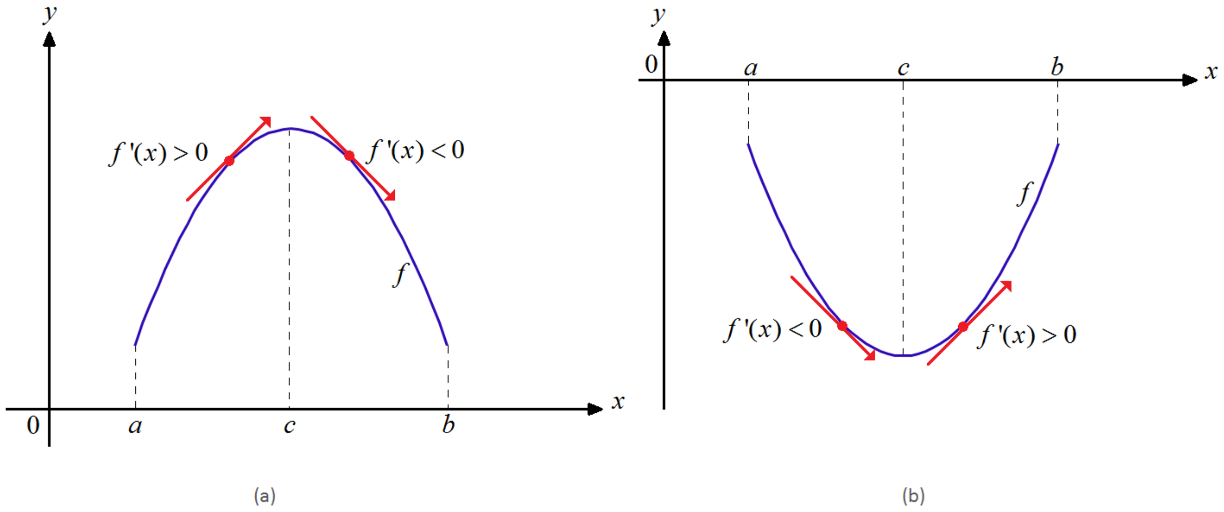


Figura 43. Teste da primeira derivada

Teorema 10. *Teste da primeira derivada para extremos relativos*

Seja a função f definida e contínua no intervalo aberto (a,b); considere que o ponto c pertence a (a,b) e suponha que f seja diferenciável em todo ponto em (a,b) exceto, possivelmente, em c.

i. *Se $f'(x)>0$ para todo x em (a,c) e $f'(x)<0$ para todo ponto x em (c,b), então f possui um máximo relativo em c.*

ii. *Se $f'(x)<0$ para todo x em (a,c) e $f'(x)>0$ para todo ponto x em (c,b), então f possui um mínimo relativo em c.*

Exemplo 21 - Se $f(x)=x^3-2x^2+x+1$, use o teste da primeira derivada para achar todos os pontos nos quais f possua um extremo relativo e esboce o gráfico.

Solução:

Derivando a função temos

$$f'(x)=3x^2-4x+1=(x-1)(3x-1)$$

Os únicos pontos críticos para f são as raízes $x=1$ e $x=1/3$ da equação $f'(x)=0$.
Devemos analisar o comportamento de f ' em três intervalos:

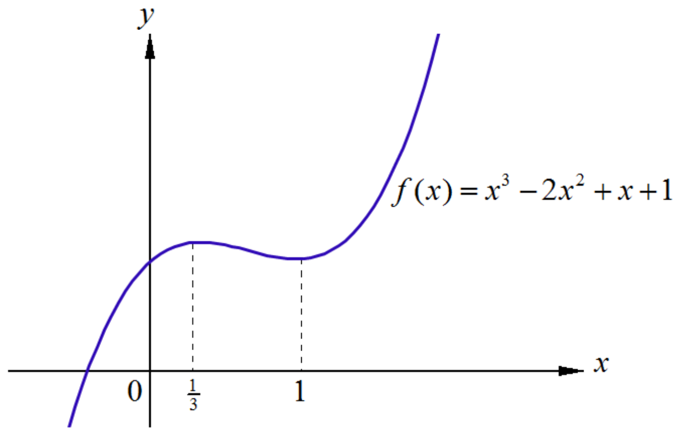
- *Para $x<1/3$: $(x-1)<0$ e $(3x-1)<0$, assim $f'(x)>0$*
- *Para $1/3<x<1$: $(x-1)<0$ e $(3x-1)>0$, assim $f'(x)<0$*
- *Para $x>1$: $(x-1)>0$ e $(3x-1)>0$, assim $f'(x)>0$*

$(x-1)<0$	$(x-1)<0$	$(x-1)>0$
$(3x-1)<0$	$(3x-1)>0$	$(3x-1)>0$
$- \times - = +$	$- \times + = -$	$+ \times + = +$

$0 \quad \frac{1}{3} \quad 1$

$f'(x)>0$	$f'(x)<0$	$f'(x)>0$

Portanto f possui um máximo relativo em $1/3$ e um mínimo relativo em 1.
Calculando alguns pontos para a função f podemos esboçar seu gráfico.



5.2.2 Extremos Absolutos

Observemos a função da Figura 7 a seguir.

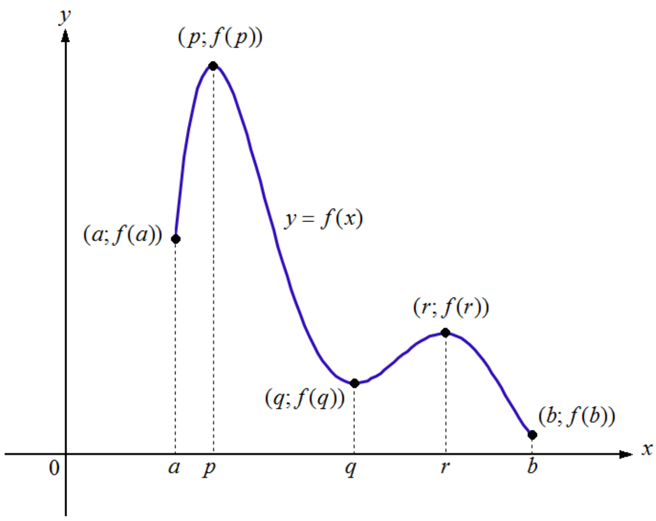


Figura 44. Definição de Extremos Absolutos

É fácil notar que os pontos $(p; f(p))$ e $(r; f(r))$ são pontos de máximo relativos de f; entretanto, o valor $f(p)$ é maior que o valor $f(r)$. Na realidade, $f(p)$ é maior que qualquer outro valor $f(x)$ da função no intervalo fechado $[a;b]$. Desse modo, dizemos que a função f ***possui um valor máximo absoluto $f(p)$ em p***.

Na Figura 7, f possui um mínimo em $(q; f(q))$; entretanto, o valor $f(b)$ da função é menor que $f(q)$ — de fato, é menor que qualquer outro valor $f(x)$ da função no intervalo fechado $[a;b]$. Desse modo, dizemos que a função f ***possui um valor mínimo absoluto $f(b)$ em b****. Observe que, embora $f(b)$ seja um valor mínimo de f, não representa um mínimo relativo, visto que a função f não é definida a direita de b.*

Extremos Absolutos – Máximo e Mínimo Absoluto

Suponha que a função f seja definida (pelo menos) no intervalo I, e seja c um ponto do intervalo I. Se $f(c) \geq f(x)$ (respectivamente, $f(c) \leq f(x)$) vale para todos os valores de x em I, então dizemos que, no intervalo I, a função f atinja o seu valor máximo absoluto (respectivamente, seu valor mínimo absoluto) $f(c)$ no ponto c.

Se f atinge um valor máximo absoluto ou mínimo absoluto em c, então dizemos que possui um extremo absoluto em c.

Teorema 11. *Existência de extremos absolutos*

Se uma função f é definida e continua no intervalo fechado $[a;b]$, então f atinge um valor máximo absoluto em algum ponto em $[a;b]$ e f atinge um valor mínimo absoluto em algum ponto em $[a;b]$.

Exemplo 22 - Determine os extremos absolutos da função f dada no intervalo indicado e esboce o gráfico.

$$f(x) = \frac{2+x-x^2}{2-x+x^2} \quad para \ [-2,1]$$

Solução:

A função é definida e continua no intervalo fechado $[-2,1]$. Derivando a função temos

$$f'(x) = \frac{\left(2-x+x^2\right)(1-2x)-\left(2+x-x^2\right)(-1+2x)}{\left(2-x+x^2\right)^2} = \frac{4(1-2x)}{\left(2-x+x^2\right)^2}$$

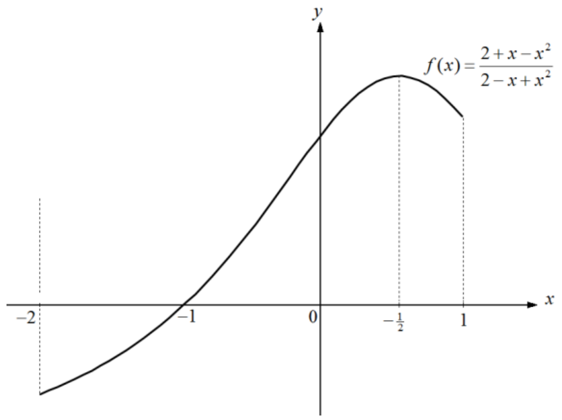
O denominador $\left(2-x+x^2\right)^2$ *não é nulo para todos os valores no intervalo* $[-2,1]$ *, logo, o único ponto crítico no intervalo* $(-2,1)$ *é* $1/2$ *. Calculando os valores da função nos pontos extremos de* $[-2,1]$ *e no ponto crítico* $1/2$ *, obtemos*

$$f(-2)=\frac{2+(-2)-(-2)^2}{2-(-2)+(-2)^2}=-\frac{1}{2}$$

$$f(\tfrac{1}{2})=\frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{9}{7}$$

$$f(1)=\frac{2+(1)-(1)^2}{2-(1)+(1)^2}=1$$

Então $f(x)$ *atinge o valor máximo absoluto em* $x=1/2$ *e o valor mínimo em* $x=-2$.



5.2.3 Teste da segunda derivada: Concavidade e Pontos de Inflexão

Um dos aspectos mais marcantes de uma função é o sentido em que ela se curva. Uma derivada segunda positiva, $f''(x)>0$*, indica que o coeficiente angular de* $f'(x)$ *é uma função crescente de* x*. Isto significa que a tangente à curva gira no sentido anti-horário quando nos movemos ao longo da curva, da esquerda para a direita (Figura 8). Neste caso, a curva é dita **côncava para cima**.*

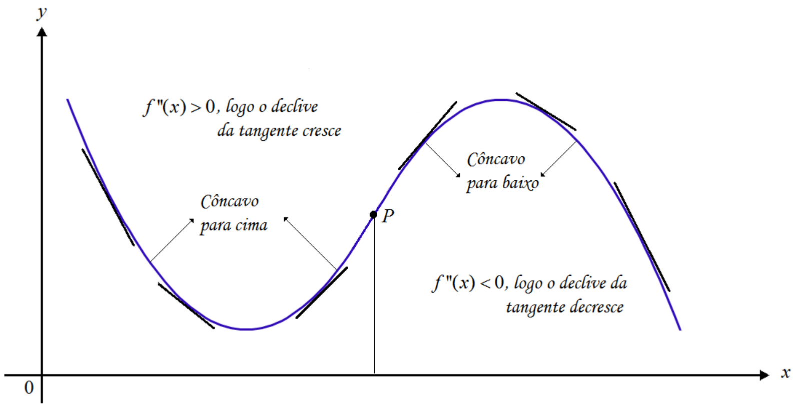


Figura 45. Relação entre a derivada segunda e a concavidade de uma curva

Analogamente, se a derivada segunda é negativa, $f''(x)<0$, indica que o coeficiente angular de $f'(x)$ é uma função decrescente e a tangente à curva gira no sentido horário quando nos movemos da esquerda para a direita sobre a curva. Nestas circunstâncias a curva é **côncava para baixo**.

A maioria das curvas é côncava para cima em alguns intervalos e côncava para baixo em outros. O ponto no qual a curva muda o sentido de concavidade (ponto *P* no gráfico da Figura 8) é chamado de Pontos de Inflexão. Se $f''(x)$ é continua e tem sinais opostos em cada lado de *P*, deve-se anular no próprio ponto *P*. Para se determinar os pontos de inflexão de uma curva basta resolver a equação $f''(x)=0$, isto é, determinar as raízes da equação da derivada segunda.

Teorema 12. *Teste da segunda derivada para extremos relativos*

Seja a função f *diferenciável no intervalo aberto* I *e suponha que* c *seja um ponto em* I *tal que* $f'(c)=0$ *e* $f''(c)$ *exista.*

i. *Se* $f''(c)>0$, *então* f *possui um mínimo relativo em* c *e o gráfico de* f *é côncavo para cima em* I.

ii. *Se* $f''(c)<0$, *então* f *possui um máximo relativo em* c *e o gráfico de* f *é côncavo para baixo em* I.

Exemplo 23 - Investigue a função $f(x)=2x^3-12x^2+18x-2$ *determinando seus pontos críticos, pontos de máximo e mínimo relativos, concavidade e pontos de inflexão.*

Solução:

Derivando a função dada temos

$$f'(x)=6x^2-24x+18=6(x-1)(x-3)$$

e

$$f''(x)=12x-24=12(x-2)$$

Os pontos críticos são obtidos através das raízes de $f'(x)=0$. *As raízes são* $x=1$ *e* $x=3$. *Substituindo estes pontos na equação de* y *temos*

$$f(2)=2\times 1^3-12\times 1^2+18\times 1-2=6$$
$$f(3)=2\times 3^3-12\times 3^2+18\times -3=-2$$

Assim os pontos críticos são $(1;6)$ *e* $(3;-2)$.

Aplicando o teste da derivada primeira temos

- *Para* $x<1$ *temos* $(x-1)<0$ *e* $(x-3)<0$, *logo* $f'(x)>0$ *(crescente)*
- *Para* $1<x<3$ *temos* $(x-1)>0$ *e* $(x-3)<0$, *logo* $f'(x)<0$ *(decrescente)*
- *Para* $x>3$ *temos* $(x-1)>0$ *e* $(x-3)>0$, *logo* $f'(x)>0$ *(crescente)*

Assim, podemos afirmar que o ponto $(1;6)$ *é um ponto de máximo relativo e o ponto* $(3;-2)$ *é um mínimo relativo.*

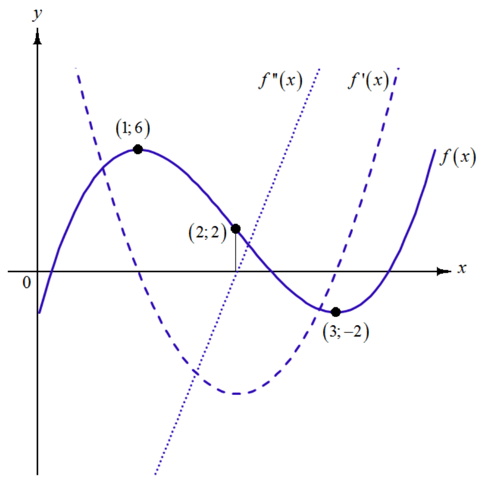
Os pontos de inflexão são determinados pelas raízes de $f''(x)=0$. *A raiz desta equação é* $x=2$ *e* $f(2)=2$. *Analisando* $f''(x)$ *nos arredores de* $x=2$ *temos*

- *Para* $x<2$ *temos* $f''(x)<0$
- *Para* $x>2$ *temos* $f''(x)>0$

Portanto $f(x)$ *é côncava para baixo quando* $x<2$ *e* $f(x)$ *é côncava para cima quando* $x>2$

Como a curva muda de concavidade em $x=2$ *podemos dizer que o ponto* $(2;2)$ *é um ponto de inflexão.*

O gráfico a seguir ilustra todos estes aspectos.



5.3 Exercícios

Nos exercícios de 1 a 31 (a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente. (b) Encontre os valores máximos e mínimos locais de f. (c) Encontre os intervalos onde f é côncava para cima e onde é côncava para baixo. (d) Ache os pontos de inflexão de f.

1. $f(x) = 20 - x - x^2$
2. $f(x) = x^3 - x + 1$
3. $f(x) = x^3 + x + 1$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$
5. $f(x) = 2x^2 - x^4$
6. $f(x) = x^2(1-x)^2$
7. $f(x) = x^3(x-4)^4$
8. $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$
9. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
10. $f(x) = x^{\frac{1}{5}}(x+1)$
11. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2)^2$
12. $f(x) = x\sqrt{x-x^2}$
13. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$
14. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$
15. $f(x) = x^5 + 4x^3 - 6$
16. $f(x) = 6x^2 - 2x^3 - x^4$
17. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$
18. $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^2}$

19. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3}$

20. $f(x)=x^6+192x+17$

21. $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$

22. $f(x)=x-3x^{1/3}$

23. $f(x)=x^{1/3}(x+3)^{2/3}$

24. $f(x)=2e^x+e^{-x}$

25. $f(x)=\ln(1+x^2)$

26. $f(x)=x\ln x$

27. $f(x)=x\ln^2 x$

28. $f(x)=\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x \quad , 0\le x\le 2\pi$

29. $f(x)=x\operatorname{sen}x+\cos x \quad , -\pi\le x\le\pi$

30. $f(x)=2\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$

31. $f(x)=2\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}^2 x \quad , 0\le x\le 2\pi$

Nos exercícios de 32 até 49 encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

32. $f(x)=8-3x,\quad x\ge 1$

33. $f(x)=3-2x,\quad X\le 5$

34. $f(x)=1+(x+1)^2,\quad -2\le x<5$

35. $f(x)=2-x^4$

36. $f(x)=x^2-2x+2 \quad , [0, 3]$

37. $f(x)=1-2x-x^2 \quad , [-4, 1]$

38. $f(x)=x^3-12x+1 \quad , [-3, 5]$

39. $f(x)=4x^3-15x^2+12x+7 \quad , [0, 3]$

40. $f(x)=2x^3+3x^2+4 \quad , [-2, 1]$

41. $f(x)=18x+15x^2-4x^3 \quad , [-3, 4]$

42. $f(x)=x^4-4x^2+2 \quad , [-3, 2]$

43. $f(x)=3x^5-5x^3-1 \quad , [-2, 2]$

44. $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x} \quad , \left[\tfrac{1}{2}, 2\right]$

45. $f(x)=\sqrt{9-x^2} \quad , [-1, 2]$

46. $f(x)=\dfrac{x}{x+1} \quad , [1, 2]$

47. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1},\quad [0, 2]$

48. $f(x)=xe^{-x},\quad [0, 2]$

49. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\quad [1, 3]$

5.4 Teorema do Valor Intermediário e Teorema do Valor Médio

Sejam as afirmações:

I. *Se uma curva continua tem ponto inicial num semiplano determinado por uma reta l e termina no outro semiplano, é preciso que ela intercepte l, pelo menos, em um ponto I (Figura 9).*

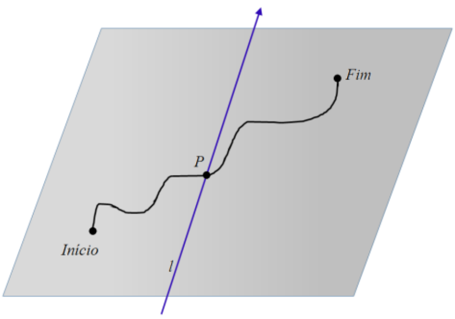


Figura 46. Interceção entre uma curva e uma reta

II. *Se A e B são as extremidades de uma curva contínua, e se a curva tem uma reta tangente para cada ponto intermediário, então existe pelo menos um ponto intermediário P no qual a linha tangente é paralela à reta que contém A e B (Figura 10).*

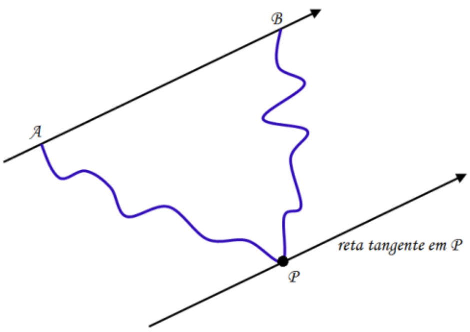


Figura 47. Reta paralela a uma curva no ponto P

Estas afirmações serão usadas para embasar os teoremas do valor intermediário e do valor médio.

Teorema 13. Teorema do Valor Intermediário

Seja a função f continua no intervalo fechado $[a;b]$ e suponha que $f(a) \neq f(b)$. Então, se k é qualquer número real estritamente entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um número c, estritamente entre a e b tal que $f(c) = k$.

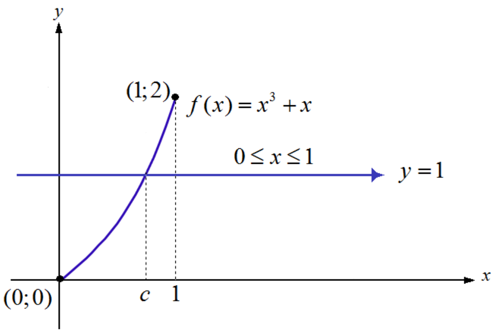


Figura 48. Exemplo para o Teorema do Valor Intermediário

Um caso particular do Teorema do Valor Intermediário surge quando fazemos $k = 0$. Neste caso o Teorema afirma: **se f é uma função continua em $[a;b]$, e se $f(a)$ e $f(b)$ possuem sinais opostos, então existe um zero de f no intervalo aberto $(a;b)$**, isto é. Existe um número c, tal que $a < c < b$ e $f(c) = 0$. Neste caso a abcissa $x = c$ do ponto P é dita uma **raiz.**

Teorema 14. Teorema do Valor Médio

Se a função f é definida e continua no intervalo fechado $[a;b]$ e diferenciável no intervalo aberto $(a;b)$, então existe pelo menos um número c com $a < c < b$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De acordo com a afirmação II, existe pelo menos um ponto – por exemplo o ponto I na Figura 12 – no gráfico de f entre A e B no qual a linha tangente é paralela à reta que contem A e B. Sendo c a abscissa de P, vemos que $a < c < b$ e que o coeficiente angular da tangente em P é $f'(c)$. Se duas retas são paralelas, elas possuem mesmo coeficiente angular. Então

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

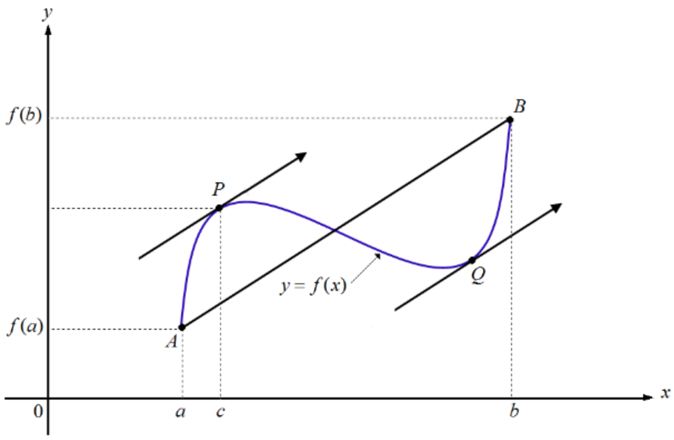


Figura 49. Exemplo para o Teorema do Valor Médio

É importante salientar que pode existir mais que um valor de c para o qual $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Por exemplo, a reta tangente que passa pela abscissa de Q no gráfico da Figura 12 possui o mesmo coeficiente angular.

Exemplo 24 - Seja a função definida por $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$. Por cálculo direto, encontre um número c entre 0 e 3 tal que a tangente ao gráfico de f no ponto $(c; f(c))$ seja paralela à secante entre os dois pontos $(0; f(0))$ e $(3; f(3))$ e determine a equação da reta tangente.

Solução:

Derivando a função temos

$$f'(x) = 3x^2 + 4x$$

No ponto c temos

$$f'(c) = 3c^2 + 4c$$

A inclinação da reta tangente será

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{\left(3^3 + 2\times 3^2 + 1\right) - \left(0^3 + 2\times 0 + 1\right)}{3} = \frac{45}{3} = 15$$

Assim

$$3c^2 + 4c = 15$$

Calculando as raízes temos

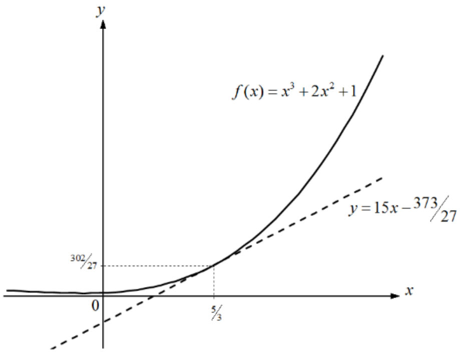
$c_1 = 5/3$ e $c_2 = -3$. Como c deve pertencer ao intervalo $(0,3)$ a raiz $c_2 = -3$ deve ser desconsiderada.
Portanto o ponto procurado é $c_1 = 5/3$
O valor de $f(x)$ no ponto c é

$$f(c) = f(5/3) = (5/3)^3 + 2(5/3)^2 + 1 = \frac{125}{27} + 2\frac{25}{9} + 1 = \frac{302}{27}$$

Logo o ponto $(c; f(c))$ *é* $(5/3, 302/27)$

A equação da reta tangente será

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 302/27 = 15(x - 5/3)$$
$$y = 15x - \frac{373}{27}$$



Um caso partícula do Teorema do Valor Médio – em que $f(a) = f(b)$ *– é denominado* **Teorema de Rolle**.

Teorema 15. *Teorema de Rolle*

Seja f *uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:*

1. f *é continua no intervalo fechado* $[a;b]$;
2. f *é diferenciável no intervalo aberto* $(a;b)$;
3. $f(a) = f(b)$.

Então existe pelo menos um número c, *em* $(a;b)$, *tal que* $f'(c) = 0$

Exemplo 25 - Mostre que as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas para a função $f(x) = 6x^2 - x^3$ *no intervalo* $[a,b] = [0,6]$, *ache o valor de* c *no intervalo aberto* (a,b) *para o qual* $f'(c) = 0$.

Solução:

Como f *é uma função polinomial, ela é continua e diferenciável em todo ponto. Claramente,* $f(a) = f(0) = 0$ *e* $f(b) = f(6) = 0$, *então* $f(a) = f(b)$.

$$f'(x) = 12x - 3x^2$$

Resolvendo a equação $f'(c) = 12c - 3c^2 = 3c(4 - c) = 0$

As raízes são $c = 0$ *e* $c = 4$. *Como* $c = 0 \notin (0,6)$ *temos apenas* $c = 4$ *que pertence ao intervalo* $(0,6)$.

5.5 Exercícios

Nos exercícios de 50 a 59 verifique que a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

50. $f(x)=2x^3, \quad [0,2]$
51. $f(x)=\sqrt{x}, \quad [1,4]$
52. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, \quad [0,3]$
53. $f(x)=\sqrt{x+1}, \quad [3,8]$
54. $f(x)=x^2-4x+5, \quad [1,5]$
55. $f(x)=x^3-2x+1, \quad [-2,3]$
56. $f(x)=1-x^2, \quad [0,3]$
57. $f(x)=2x^3+x^2-x-1, \quad [0,2]$
58. $f(x)=\dfrac{1}{x}, \quad [1,2]$
59. $f(x)=\sqrt{25-x^2}, \quad [-3,4]$

Nos exercícios de 60 a 67 verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema de Rolle.

60. $f(x)=x^2-2, \quad [1{,}4;1{,}5]$
61. $f(x)=2x^3-x^2+x-3, \quad [1,2]$
62. $f(x)=x^2-4x+1, \quad [0,4]$
63. $f(x)=x^3-3x^2+2x+5, \quad [0,2]$
64. $f(x)=x^3-x, \quad [-1,\ 1]$
65. $f(x)=x^3+x^2-2x+1, \quad [-2,0]$
66. $f(x)=\cos 2x, \quad [0,\pi]$
67. $f(x)=\operatorname{sen} x+\cos x, \quad [0,2\pi]$

5.6 Formas Indeterminadas e Regra de L'Hôspital

Consideremos o limite

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Se tanto o numerador como o denominador tendem para valores finitos quando $x\to a$, *por exemplo* α *e* β *e* $\beta\neq 0$, *então pela álgebra dos limites temos que*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Mas o que acontece quando ambas as funções tendem para zero? Neste caso, não podemos garantir de início qual o valor do limite. De facto, nem podemos garantir que este limite exista.
Em geral, para um limite da forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Em que $f(x)\to 0$ *e* $g(x)\to 0$ *quando* $x\to a$, *então o limite pode ou não existir, e é chamado* ***forma indeterminada do tipo*** $0/0$. *Se* $f(x)\to\infty$ *e* $g(x)\to\infty$ *quando* $x\to a$, *então o limite pode ou não existir, e é chamado* ***forma indeterminada do tipo*** ∞/∞. *Nestes casos a Regra de l'Hôspital será usada para solução destas formas indeterminadas.*

REGRA de L'HÔSPITAL

Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ seja deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a). Suponha que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

temos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ ou do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite da direita existir (ou for $\pm\infty$).

Exemplo 26 - Determine $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

Solução:

$$\lim_{x \to 1}(\ln x) = \ln(1) = 0 \;\; e \;\; \lim_{x \to 1}(x-1) = 0$$

podemos aplicar l'Hôspital

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(x-1)}\right) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{1/x}{1}\right) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

5.6.1 Produtos indeterminados

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ *então não está claro o valor de* $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)]$, *se houver algum. Um cabo de guerra se forma entre* f *e* g. *Dependendo de qual das duas funções prevalecer o resultado pode ser* 0, $\pm\infty$ *ou até mesmo um valor finito. Este tipo de limite é chamado* ***forma indeterminado do tipo*** $0 \cdot \infty$.

Para converter o limite dado numa forma na qual podemos aplicar a regra de l'Hôspital basta escrevermos o produto fg *na forma de um quociente.*

$$fg = \frac{f}{1/g} \quad ou \quad fg = \frac{g}{1/f}$$

Exemplo 27 - Encontre $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$

Solução:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{1/x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(1/x)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right)=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

5.6.2 Diferenças indeterminadas

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ *então não está claro o valor de* $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right]$, *se houver algum. Novamente existe uma disputa entre* f *e* g. *Dependendo de qual das duas funções prevalecer o resultado pode ser* 0, $\pm\infty$ *ou, se houver um equilíbrio entre as funções, o limite tenderá a um valor finito. Este tipo de limite é chamado* ***forma indeterminado do tipo***. $\infty-\infty$.

Para converter o limite dado numa forma na qual podemos aplicar a regra de l'Hôspital tenta-se escrevermos a diferença $f-g$ *na forma de um quociente, de maneira a se obter uma forma indeterminada do tipo* $0/0$ *ou* ∞/∞.

Exemplo 28 - Encontre $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\operatorname{tg} x)$

Solução:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{\frac{d}{dx}(1-\operatorname{sen} x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)}\right)=\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x}=0$$

5.6.3 Potencias indeterminados

Neste caso temos várias formas de indeterminadas

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ *tipo* 0^0
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ *tipo* ∞^0
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\pm\infty$ *tipo* $1^{\pm\infty}$

Cada um destes casos pode ser tratado tanto tomando o logaritmo natural

$$\text{Seja } y=\left[f(x)\right]^{g(x)},\ \text{então } \ln y = g(x)\ln f(x)$$

quanto escrevendo a função como uma exponencial

$$\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Exemplo 29 - Encontre $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}4x)^{\operatorname{cotg} x}$

Solução:

Quando $x \to 0^+$ *temos* $1+\operatorname{sen}4x \to 1$ *e* $\operatorname{cotg} x \to \infty$ *logo tem-se uma forma indeterminada do tipo* 1^∞.

Seja

$$y=(1+\operatorname{sen}4x)^{\operatorname{cotg} x}$$

Então

$$\ln y = \ln\left[(1+\operatorname{sen}4x)^{\operatorname{cotg} x}\right] = \operatorname{cotg}(x)\ln(1+\operatorname{sen}4x)$$

Assim, temos

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\left[\operatorname{cotg} x\ln(1+\operatorname{sen}4x)\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\operatorname{sen}4x)}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\left[\ln(1+\operatorname{sen}4x)\right]}{\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4\cos 4x}{1+\operatorname{sen}4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{sen}4x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y} = e^4$$

5.7 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 68 a 74 encontre o limite. Use l'Hôspital quando for apropriado.

68. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

69. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9}$

70. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$

71. $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^+}\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$

72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{sen} x}$

73. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

74. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{x/10}}{x^3}$

5.8 Construção de Gráficos de Funções

Muitas vezes ao se esboçar um gráfico detalhes importantes podem ser perdidos, o que levaria a uma interpretação errônea do comportamento da função. A seguir são apresentados alguns passos que nos ajudam a minimizar essas perdas. Observe que algumas vezes todos os passos são relevantes para uma determinada função.

A. ***Domínio:*** *Conjunto de valores de x para os quais $f(x)$ é definida;*

B. ***Interseções com os Eixos:*** *A interseção com o eixo y é $f(0)$. A interseção com o eixo x é obtida fazendo $y=0$ na função e isolando x;*

C. ***Simetria:***
   i. *Se $f(-x)=f(x)$ para todo x em D então a função f é **par**, e a curva é simétrica em relação ao eixo y.*
   ii. *Se $f(-x)=-f(x)$ para todo x em D então a função f é **ímpar**, e a curva é simétrica em relação à origem dos eixos.*
   iii. *Se $f(x+p)=f(x)$ para todo x em D, onde p é uma constante positiva, então a função f é dita **periódica**, e o menor desses números p é chamado **período**.*

D. ***Assíntotas:***
   i. *Assíntotas Horizontais: Se $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$ então a reta L é uma assíntota horizontal da curva $y=f(x)$. Se $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (ou $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$) então não existe assíntota à direita (ou à esquerda)*
   ii. *Assíntotas verticais: A reta $x=a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira*

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

E. ***Intervalos de Crescimento e decrescimento:*** *Encontre os intervalos onde $f'(x)>0$ (f é crescente) e os intervalos onde $f'(x)<0$ (f é decrescente)*

F. ***Valores Máximo e Mínimo:*** *Encontre todos os pontos críticos de f (pontos onde $f'(c)=0$ e $f'(c)$ não existe). Use o Teste da Primeira Derivada para verificar se $f'(x)$ muda de sinal. Se $f'(x)$ muda de positiva para negativa em um ponto crítico c, então $f(c)$ é um ponto de máximo local. Se $f'(x)$ muda de negativa para positiva em um ponto crítico c, então $f(c)$ é um ponto de mínimo local*

G. ***Concavidade e Pontos de Inflexão:*** *Calcule $f''(x)$ e use o Teste da Concavidade. A curva será côncava para cima se $f''(c)>0$, e côncava para baixo se $f''(c)<0$. Os pontos inflexão ocorrem quando muda a direção da concavidade.*

Realizados todos os passos relevantes faremos o esboço do gráfico. Use linhas tracejadas para plotar as assíntotas. Assinale as interseções com os eixos, os pontos de máximo e mínimo e os pontos de inflexão. Trace a curva passando por esses pontos, subindo ou descendo dependendo dos intervalos onde a curva é crescente ou decrescente e de acordo com sua concavidade e tendendo às assíntotas.

Exemplo 30 - Esboce o gráfico da função $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Solução:

→ **Domínio:** *Como* $\sqrt{x^2+1}>0$ *para todos valores de* x *o Domínio da função é* $\Re$

→ **Interseção com os eixos:**

Quando $x=0$ *a curva corta o eixo* y *em* $y=0$

Quando $y=0$ *a curva corta o eixo* x *em* $x=0$

→ **Simetria:**

$f(-x)=\dfrac{(-x)}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-f(x)$. *A função é ímpar* $\Rightarrow$ *simétrica em relação à origem*

→ **Assíntotas:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$$

De maneira análoga, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1$

Logo as retas $y=1$ *e* $y=-1$ *são assíntotas horizontais*

O denominador da função é sempre positivo, logo não há assíntotas verticais

→ **Intervalos de crescimento e decrescimento:**

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x^2+1\right)^{-1/2}(2x)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

Como $\left(x^2+1\right)^{3/2}$ *é sempre positivo* $\Rightarrow f'(x)>0$ *em* $\Re$. *A função é sempre crescente*

→ **Valores de Máximo e Mínimo:** *Não existem valores de* x *em que* $f'(x)=0$, *logo não existem máximos e mínimos locais no Domínio da função*

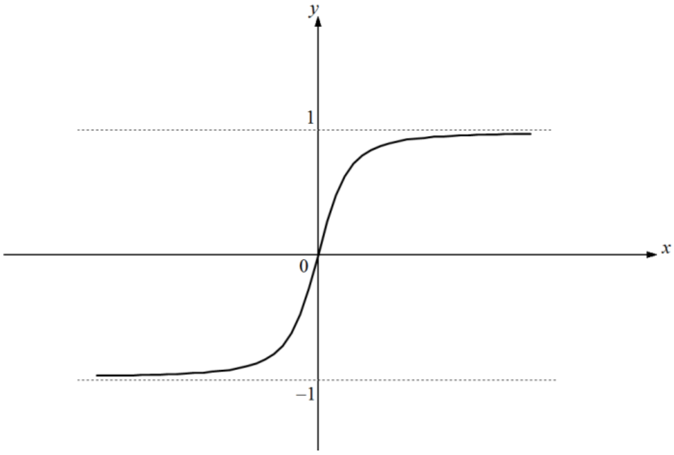
→ ***Concavidade:***

$$f''(x) = -\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{-5/2}(2x) = -\frac{3x}{\left(x^2+1\right)^{5/2}}$$

Observando a derivada segunda vemos que

$f''(x) > 0$ *se* $x < 0$ $\Rightarrow$ *Côncava para cima*

$f''(x) < 0$ *se* $x > 0$ $\Rightarrow$ *Côncava para baixo*



Exemplo 31 - Esboce o gráfico da função $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

<u>Solução</u>

Podemos escrever

$$f(x) = x(x^2 - 12x + 36) = x(x-6)^2$$

→ ***Domínio:*** $f(x)$ *é uma função polinomial, logo o Domínio da função é* $\Re$

→ ***Interseção com os eixos:***

Quando $x = 0$ *a curva corta o eixo* y *em* $y = 0$

Quando $y = 0$ *a curva corta o eixo* x *em* $x = 0$ *e* $x = 6$ *(raízes da função)*

→ ***Simetria:***

$f(-x) = (-x)^3 - 12(-x)^2 + 36(-x) = -x^3 - 12x^2 - 36$

$f(-x) \neq f(x)$ *e* $f(-x) \neq -f(x)$, *logo a função não nem par nem ímpar*

→ ***Assíntotas:***

$$\lim_{x\to\infty} x(x-6)^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x(x-6)^2 = -\infty$$

Logo a função não tem assíntotas horizontais

$$\lim_{x\to 0^-} x(x-6)^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} x(x-6)^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 6^-} x(x-6)^2 = 0$$
$$\lim_{x\to 6^+} x(x-6)^2 = 0$$

Logo a função não possui assíntotas verticais

→ ***Intervalos de crescimento e decrescimento:***

$$f'(x) = (x-6)^2 + x(2)(x-6) = x^2 - 12x + 36 + 2x^2 - 12x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x^2 - 8x + 12)$$
$$f'(x) = 3(x-2)(x-6)$$

Vamos analisar $f'(x)$ *nos intervalos* $(-\infty, 2)$, $(2,6)$ *e* $(6,\infty)$

Para $(-\infty,2)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ *crescente*
Para $(2,6)$: $f'(x) < 0 \Rightarrow$ *decrescente*
Para $(6,\infty)$: $f'(x) > 0 \Rightarrow$ *crescente*

→ ***Valores de máximo e mínimo:***

Para $x = 2$ *temos:* $f(2) = 2^3 - 12\times 2^2 + 36\times 2 = 32$
Para $x = 6$ *temos:* $f(6) = 6^3 - 12\times 6^2 + 36\times 6 = 0$
Assim $x = 2$ *é um máximo local e* $x = 6$ *é um mínimo local*

→ ***Concavidade:***

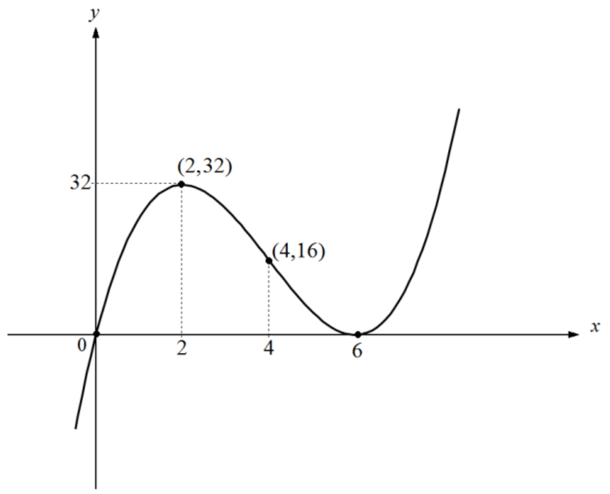
$f''(x) = 6x - 24$, *cuja raiz é* $x = 4$

Para $x < 4 \Rightarrow f''(x) < 0$, *a função é côncava para baixo*
Para $x > 4 \Rightarrow f''(x) > 0$, *a função é côncava para cima*

Como a função muda de sinal temos um ponto de inflexão

$$f(4) = 4^3 - 12\times 4^2 + 36\times 4 = 16$$

Logo o ponto de inflexão é $(4,16)$



Exemplo 32 - Esboce o gráfico da função $f(x)=e^{2x}-e^{x}$

Solução:

→ ***Domínio:*** *A função é continua em todo eixo* X *e o domínio é* $\Re$

→ ***Interseção com os eixos:***

Quando $x=0$ *a curva corta o eixo* y *em* $y=0$

Quando $y=0$ *temos*

$e^{2x}-e^{x}=0 \Rightarrow e^{2x}=e^{x} \Rightarrow e^{x}e^{x}=e^{x} \Rightarrow e^{x}=1 \Rightarrow \ln(e^{x})=\ln(1) \Rightarrow x=0$

logo a curva corta o eixo X *em* $x=0$

→ ***Simetria:***

$f(-x)=e^{2(-x)}-e^{(-x)}$

Logo a função não nem par nem ímpar

→ ***Assíntotas:***

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-e^{x}\right)=0$

Logo a reta $y=0$ *é uma assíntota horizontal. A curva não possui assíntotas verticais*

→ ***Intervalos de crescimento e decrescimento:***

$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}=e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$

e^{x} *é sempre positiva, assim a curva será positiva ou negativa dependendo de* $\left(2e^{x}-1\right)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\frac{1}{2}$. *A função é crescente no intervalo* $\left(\ln\frac{1}{2}, \infty\right)$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln\frac{1}{2}$. *A função é decrescente no intervalo* $\left(-\infty, \ln\frac{1}{2}\right)$

→ ***Valores máximo e mínimo***

$f'(x) = 0$ *em* $x = \ln\frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = e^{2\ln\frac{1}{2}} - e^{\ln\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

Como a derivada passa de negativa para positiva o ponto $\left(\ln\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ *é um ponto de mínimo local*

→ ***Concavidade***

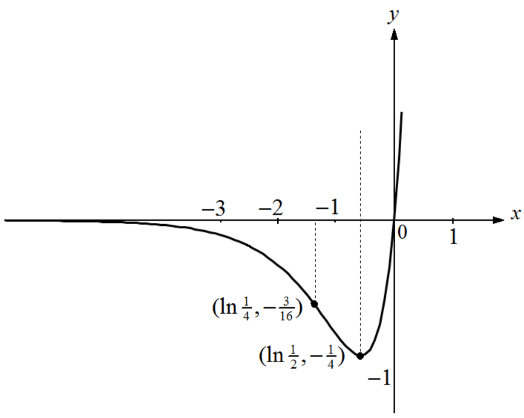
$f''(x) = 4e^{2x} - e^x = e^x\left(4e^x - 1\right)$

Assim $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln\frac{1}{4}$ *e* $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln\frac{1}{4}$,

portanto a função é côncava para baixo em $\left(-\infty, \ln\frac{1}{4}\right)$ *e côncava para cima em* $\left(\ln\frac{1}{4}, \infty\right)$

$f(\ln\frac{1}{4}) = e^{2\ln\frac{1}{4}} - e^{\ln\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{16}$

O ponto $\left(\ln\frac{1}{4}, -\frac{3}{16}\right)$ *é um ponto de inflexão*



5.9 Exercícios

Nos exercícios de 68 a 112 use o roteiro para construção de gráficos para esboçar a curva.

75. $y = 1 - 3x + 5x^2 - x^3$
76. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$
77. $y = 4x^3 - x^4$
78. $y = 2 - x - x^9$

79. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}$

80. $y=\dfrac{1}{x^2(x+3)}$

81. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

82. $y=\dfrac{4}{(x-5)^2}$

83. $y=\dfrac{x-3}{x+3}$

84. $y=\dfrac{1}{4x^3-9x}$

85. $y=\dfrac{x^3-1}{x}$

86. $y=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$

87. $y=\sqrt[4]{x^2-25}$

88. $y=x\sqrt{x^2-9}$

89. $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

90. $y=x+3x^{2/3}$

91. $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$

92. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

93. $y=\cos x-\operatorname{sen} x$

94. $y=2x+\operatorname{cotg} x,\quad 0<x<\pi$

95. $y=2\cos x+\operatorname{sen}^2 x$

96. $y=\operatorname{sen} x+\cos x$

97. $y=\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x$

98. $y=2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x$

99. $y=e^{-1/(x+1)}$

100. $y=x\,e^{x^2}$

101. $y=\ln(\cos x)$

102. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

103. $y=\ln\left(x^2-x\right)$

104. $y=\ln\left(1+x^2\right)$

105. $y=\ln\left(\operatorname{tg}^2 x\right)$

106. $y=x^2\,e^{-x}$

107. $y=x^2\ln x$

108. $y=x\,e^{1/x}$

109. $y=x^2\,e^{-x^2}$

110. $y=\dfrac{e^x}{x^2}$

111. $y=x^2\,e^{-1/x}$

112. $y=x-\ln(1+x)$

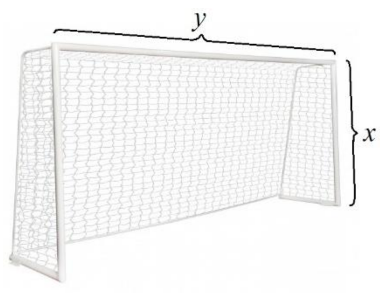
5.10 Problemas de Otimização

São chamados de problemas de otimização pelo fato de que as soluções encontradas com esta técnica são as melhores possíveis para cada caso, ou seja, resolver estes problemas com as técnicas de máximos e mínimos significa encontrar a solução ótima para eles.

Exemplo 33 - Deseja-se confeccionar uma trave para um campo de futebol com uma viga de 18 m de comprimento. Encontre as dimensões para que a área do gol seja máxima.

Solução:

Vamos esboçar um desenho de uma trave genérica:



Pelos dados fornecidos pelo enunciado do problema, temos que

$$y+2x=18 \Rightarrow y=18-2x$$

A área do gol é dada pela fórmula da área do retângulo formado

$$A=xy$$

Substituímos y na equação da área, obtendo

$$A=x(18-2x)$$
$$A=18x-2x^2$$

Calculamos, agora, a derivada da função $A(x)$

$$A'(x)=18-4x$$

Igualando a zero, obtermos uma equação linear que nos leva ao ponto crítico

$$18-4x=0$$
$$4x=18$$
$$x=4,5$$

Como $x>0$ e $y>0$ e não há como a área ser menor que zero, concluímos que o ponto crítico encontrado é um ponto de máximo. Assim, a trave deve ter uma altura de 4,5 m. Para acharmos sua largura basta substituir o valor de x na equação de y.

$$y=18-2x$$
$$y=18-2\times 4,5$$
$$y=9$$

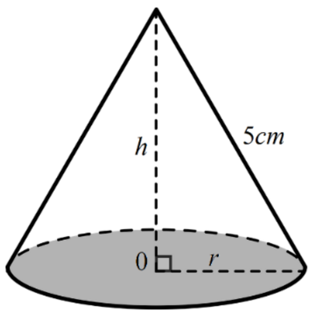
Portanto, a trave deverá ter altura de 4,5m e largura de 9m para que a área de gol seja a maior possível.

Observação: As dimensões oficiais de uma trave de futebol é 7,32m de largura entre os postes e 2,44m de altura.

Exemplo 34 - Dado um cone de geratriz igual a 5 cm, determinar suas dimensões de modo que se tenha o maio volume possível.

Solução:

Primeiramente, vamos esboçar um cone genérico, destacando o triângulo retângulo:



Lembremos que o volume de um cone é dado por:

$$V = \frac{1}{3} h\pi r^2$$

Dos dados fornecidos no enunciado do problema, temos que:

$$5^2 = h^2 + r^2$$

$$r^2 = 25 - h^2$$

Substituímos na fórmula do volume de cone temos

$$V = \frac{1}{3} h\pi \left(25 - h^2\right)$$

$$V = \frac{25\pi h}{3} - \frac{\pi h^3}{3}$$

A derivada de $V(h)$ *é*

$$V'(h) = \frac{25\pi}{3} - \pi h^2$$

Igualamos a zero para obtermos os valores críticos temos:

$$\frac{25\pi}{3} - \pi h^2 = 0 \Rightarrow \pi h^2 = \frac{25\pi}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{25}{3}$$

$$h = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cong 2,8868$$

Já encontramos a altura h *do cone. Para encontrarmos o raio* r *de sua base, substituímos o valor de* h *na equação do raio*

$$r^2 = 25 - h^2$$

$$r^2 = 25 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 25 - \frac{25 \times 3}{9} = 25 - \frac{25}{3}$$

$$r^2 = \frac{75 - 25}{3} = \frac{50}{3}$$

$$r = \pm\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Como o raio do cone não pode ser negativo consideramos apenas a raiz positiva.
*Assim, para que um cone que possui geratriz igual a 5*cm *possuir o maior volume suas medidas devem ser*

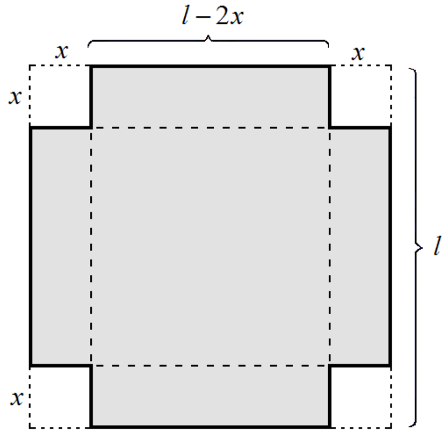
$$r = \frac{5\sqrt{6}}{3} \cong 4{,}08\ cm$$

$$h = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cong 2{,}89\ cm$$

Exemplo 35 - Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas sem tampas a partir de folhas quadradas de cartão com área igual a 576 cm^2, cortando quadrados iguais nos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Determinar o lado do quadrado que deve ser cortado para se obter uma caixa com o maior volume possível.

<u>Solução:</u>

Interpretando o enunciado, podemos esboçar:



*Como a área total é de 576*cm^2*, o lado da folha é:*

$$A = 576$$
$$l^2 = 576$$
$$l = 24\ cm$$

O volume da caixa será dado por:

$$V = Ab \times h$$

Onde Ab é a base da caixa com lado $l-2x$ *, isto é,* $24-2x$ *. A altura da caixa é* $h=x$ *. Assim*

$$V=(24-2x)^2\times x$$
$$V=(576-96x+4x^2)x$$
$$V=4x^3-96x^2+576x$$

Derivando a função $V(x)$ *temos*

$$V'(x)=12x^2-192x+576$$

Fazendo $V'(x)=0$ *encontraremos os pontos críticos*

$$12x^2-192x+576=0$$

Dividindo por 12 e calculando as raízes da equação temos

$$x^2-16x+48=0$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\times1\times48}}{2}$$
$$x=\frac{16\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{16\pm8}{2}$$
$$x_1=4 \text{ e } x_2=12$$

Encontramos dois valores para x *mas somente* x_1 *satisfaz o problema, já que se temos o lado da folha igual a* $l=24-2x$ *, se substituirmos* x_2 *obtermos um lado nulo.*

Então a caixa deverá ter as dimensões de:

Lado:

$$l=24-2x$$
$$l=24-8$$
$$l=16\ cm$$

Altura:

$$h=x$$
$$h=4\ cm$$

Os cortes devem ter 4 cm para que a caixa tenha o maior volume possível.

5.11 Exercícios

113. Encontre dois números cuja diferença seja 100 e cujo produto seja mínimo.
114. Encontre dois números positivos cujo produto seja 100 e cuja soma seja mínima.
115. A soma de dois números positivos é 16. Qual é o menor valor possível para a soma de seus quadrados?

116. Qual é a distância vertical máxima entre a reta $y = x + 2$ e a parábola $y = x^2$ para $-1 \le x \le 2$?
117. Qual é a distância vertical mínima entre as parábolas $y = x^2 + 1$ e $y = x - x^2$?
118. Encontre as dimensões de um retângulo com perímetro de 100 m cuja área seja a maior possível.
119. Encontre as dimensões de um retângulo com área de 1.000 m^2 cujo perímetro seja o menor possível.
120. Considere o seguinte problema: um fazendeiro com 300 m de cerca quer cercar uma área retangular e então dividi-la em quatro partes com cercas paralelas a um lado do retângulo. Qual é a maior área total possível das quatro partes?
121. Um fazendeiro quer cercar uma área de 15 000 m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?
122. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de 32 000 cm^3. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.
123. Se 1 200 cm^2 de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.
124. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m^3. O comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa $ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa $ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato desses contêineres.
125. Encontre o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem.
126. Encontre o ponto sobre a curva $y = \sqrt{x}$ que está mais próximo do ponto (3, 0).
127. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.
128. Encontre as dimensões do retângulo com a maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero com lado L se um dos lados do retângulo estiver sobre a base do triângulo.
129. Encontre a área do maior trapézio que pode ser inscrito num círculo com raio 1 e cuja base é o diâmetro do círculo.
130. Encontre as dimensões do triângulo isósceles de maior área que pode ser inscrito em um círculo de raio r.
131. Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 cm, se dois lados do retângulo estiverem sobre os catetos.
132. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.
133. Um cilindro circular reto é inscrito em um cone com altura h e raio da base r. Encontre o maior volume possível para este cilindro.
134. Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior superfície possível para este cilindro.
135. Uma janela normanda tem a forma de um retângulo tendo em cima um semicírculo. (O diâmetro do semicírculo é igual à largura do retângulo). Se o perímetro da janela for 10 m, encontre as dimensões da janela que deixam passar a maior quantidade possível de luz.
136. As margens superiores e inferiores de um pôster têm 6 cm e cada margem lateral tem 4 cm. Se a área do material impresso no pôster é de 384 cm2, encontre as dimensões do pôster com a menor área.
137. Um pôster deve ter uma área de 900 cm2 com uma margem de 3 cm na base e nos lados, e uma margem de 5 cm em cima. Que dimensões darão a maior área impressa?
138. Um pedaço de fio com 10 m de comprimento é cortado em duas partes. Uma parte é dobrada no formato de um quadrado, ao passo que a outra é dobrada na forma de um triângulo equilátero. Como deve ser cortado o fio de forma que a área total englobada seja: (a) máxima? (b) mínima?
139. Uma lata cilíndrica sem o topo é feita para receber V cm3 de líquido. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para fazer a lata.
140. Uma cerca de 2 m de altura corre paralela a um edifício alto, a uma distância de 1 m do edifício. Qual o comprimento da menor escada que se apoie no chão e na parede do prédio, por cima da cerca?

5.12 Problemas de Taxas de Variação Relacionadas

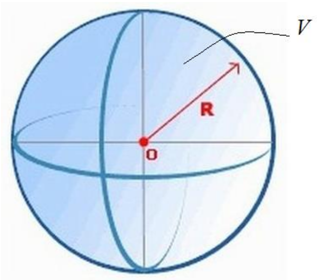
Quando temos duas ou mais quantidades variando em relação a uma outra, temos um problema de taxas relacionadas, onde o objetivo é determinar a taxa de variação de uma grandeza em relação à taxa de variação de uma outra (que pode ser determinada mais facilmente). Em algumas situações práticas, a quantidade em estudo é dada através de uma função composta e, nesse caso, devemos utilizar a regra da cadeia para determinar a taxa de variação.

Exemplo 36 - Um grande balão esférico de borracha está sendo cheio de gás a uma taxa constante de $8\ m^3/min$. Calcule com que velocidade o raio r do balão cresce quando

a) $r = 2\ m$

b) $r = 4\ m$

Solução:



O volume da esfera é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Temos que $\frac{dV}{dt} = 8$ *e precisamos achar* $\frac{dr}{dt}$ *para dois valores específicos de* r.

Derivando a fórmula do volume da esfera em relação ao tempo t

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Assim

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2} \times 8 = \frac{2}{\pi r^2}$$

Pois $\frac{dV}{dt} = 8$

a) *Para* $r = 2\ m$ *temos*

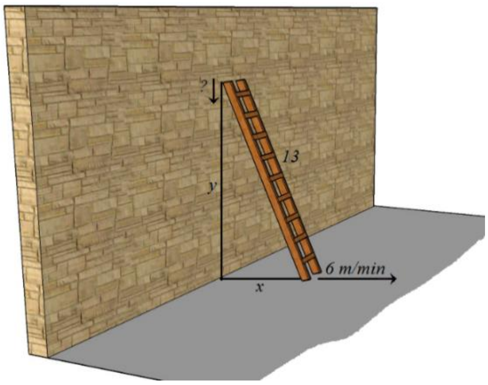
$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi (2)^2} = \frac{1}{2\pi} \cong 0,16$$

b) *Para* $r = 4\ m$ *temos*

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2}{\pi (4)^2} = \frac{1}{8\pi} \cong 0,04$$

Exemplo 37 - Uma escada de 13 m está apoiada em uma parede. A base da escada está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede, a uma taxa constante de 6 m/min. Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo, encostado à parede, quando a base da escada está a 5 m da parede?

Solução:



Temos que

$$\frac{dx}{dt}=6 \qquad e \qquad -\frac{dy}{dt}=?\ \text{quando}\ x=5$$

O sinal negativo pode ser melhor entendido pensando em $\frac{dy}{dt}$ *como a taxa com que* y *está "crescendo", e* $-\frac{dy}{dt}$ *como a taxa com que* y *está "decrescendo", que é o caso em questão.*

A equação que relaciona as variáveis x *e* y *é*

$$x^2+y^2=13^2$$

Derivando em relação a t *temos*

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \qquad ou \qquad \frac{dy}{dt}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \qquad ou \qquad -\frac{dy}{dt}=\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Como $\frac{dx}{dt}=6$ *tem-se*

$$-\frac{dy}{dt}=\frac{6x}{y}$$

Da equação que relaciona as variáveis temos, para $x=5$

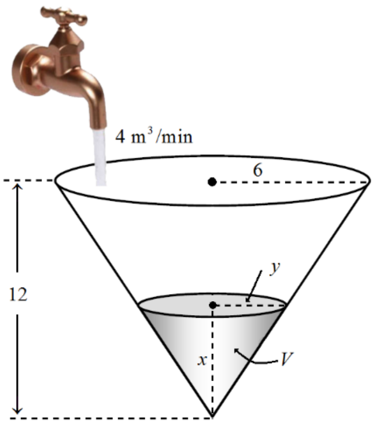
$$5^2+y^2=13^2$$
$$y=12$$

Portanto $$-\frac{dy}{dt}=\frac{6\times 5}{12}=2{,}5\ m/min$$

Exemplo 38 - Um tanque em forma de cone com o vértice para baixo mede 12 m de altura e tem no topo um diâmetro de 12 m. Bombeia-se água à taxa de $4\ m^3/min$. Ache a taxa com que o nível da água sobe

a) *Quando a água tem 2 m de profundidade*
b) *Quando a água tem 8 m de profundidade*

Solução:



Do enunciado temos

$$\frac{dV}{dx}=4\,,\qquad \frac{dx}{dt}=?\ quando\ \ x=2\ \ e\ \ x=8$$

O volume variável da água no tanque tem a forma de um cone; logo, nosso ponto de partida é a fórmula

$$V=\frac{1}{3}\pi y^2 x$$

As únicas variáveis dependentes que nos interessam são V e x; logo, devemos eliminar y. Usando semelhança de triângulos temos

$$\frac{y}{x}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{x}{2}$$

Substituindo na equação do volume, temos

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 x=\frac{\pi}{12}x^3$$

Derivando em relação a t

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{\pi}x^2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{4}{\pi x^2}\frac{dV}{dt}=\frac{16}{\pi x^2}$$

uma vez que $\dfrac{dV}{dx}=4$. Assim, para $x=2$

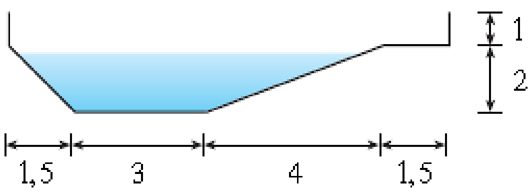
$$\frac{dx}{dt}=\frac{16}{\pi x^2}=\frac{16}{\pi 2^2}=\frac{4}{\pi}\cong 1{,}27\ m/min$$

e, para $x = 8$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{16}{\pi x^2} = \frac{16}{\pi 8^2} = \frac{1}{4\pi} \cong 0{,}08 \text{ m/min}$$

5.13 EXERCÍCIOS

141. Cada lado de um quadrado está aumentado a uma taxa de 6 cm/s. A que taxa a área do quadrado está aumentando quando a área do quadrado for 16 cm^2?
142. O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8 cm/s e sua largura está aumentando numa taxa de 3 cm/s. Quando o comprimento for 20 cm e a largura for 10 cm, quão rápido a área do retângulo está aumentando?
143. Um tanque cilíndrico com raio de 5 m está sendo enchido com água a uma taxa de 3 m^3/min. Quão rápido a altura da água está aumentando?
144. O raio de uma esfera está aumentando a uma taxa de 4 mm/s. Quão rápido o volume está aumentando quando o diâmetro for 80 mm?
145. 11. Um avião voa horizontalmente a uma altitude de 2 km, a 800 km/h, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Encontre a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta quando ele está a 3 km além da estação.
146. Uma luz de rua é colocada no topo de um poste de 6 metros de altura. Um homem com 2 m de altura anda afastando-se do poste com velocidade de 1,5 m/s ao longo de uma trajetória reta. Com que velocidade se move a ponta de sua sombra quando ele está a 10 m do poste?
147. Ao meio-dia, o navio A está a 150 km a oeste do navio B. O navio A está navegando para o leste a 35 km/h e o navio B está navegando para norte a 25 km/h. Quão rápido a distância entre os navios está variando às 16h?
148. Um holofote sobre o solo ilumina uma parede 12 m distante dele. Se um homem de 2 m de altura anda do holofote em direção à parede a uma velocidade de 1,6 m/s, quão rápido o comprimento de sua sombra diminui sobre a parede quando ele está a 4 m dela?
149. Um homem começa a andar para o norte a 1,2 m/s a partir de um ponto P. Cinco minutos depois uma mulher começa a andar para o sul a 1,6 m/s de um ponto 200 m a leste de P. A que taxa as pessoas estão se distanciando 15 min após a mulher começar a andar?
150. Está vazando água de um tanque cônico invertido a uma taxa de 10.000 cm /min. Ao mesmo tempo, água está sendo bombeada para dentro do tanque a uma taxa constante. O tanque tem 6 m de altura e o diâmetro no topo é de 4 m. Se o nível da água estiver subindo a uma taxa de 20 cm/min quando a altura da água for 2 m, encontre a taxa segundo a qual a água está sendo bombeada dentro do tanque.
151. Um cocho tem 6 m de comprimento, e suas extremidades têm a forma de triângulos isósceles com 1 m de base e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 1,2 m^3/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?
152. Um cocho de água tem 10 m de comprimento e uma secção transversal com a forma de um trapezoide isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se o cocho for preenchido com água a uma taxa de 0,2 m^3/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando ela tiver 30 cm de profundidade?
153. Uma piscina tem 5 m de largura por 10 m de comprimento, 1 m de profundidade na parte rasa e 3 m na parte mais funda. Sua secção transversal está mostrada na figura. Se a piscina for enchida a uma taxa de 0,1 m^3/min, quão rápido o nível da água estará subindo quando sua profundidade no ponto mais profundo for de 1 m?



5.14 POLINÔMIO DE TAYLOR

A Fórmula de Taylor (ou Polinômio de Taylor) é uma expressão que permite o cálculo do valor de uma função por aproximação local através de uma função polinomial. Supondo f uma função derivável num intervalo contendo um ponto a, a Fórmula de Taylor fornece uma regra para determinar um polinômio de grau n que melhor aproxima uma a função f ao redor do ponto a pertencente ao domínio de f.

Polinômio de Taylor

Seja f uma função que possui derivadas $f^{(n)}$ de ordem $n \geq 1$ num intervalo aberto I e seja a um número fixo pertencente a I. Então o polinômio de Taylor do n-ésimo grau da função f em a é a função polinomial P_n definida por

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exemplo 39 - Encontre o termo P_4 do polinômio de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$ para $a = \pi/4$.

Solução:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = \operatorname{sen} x & & f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
f'(x) = \cos x & & f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
f''(x) = -\operatorname{sen} x & \Rightarrow & f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
f'''(x) = -\cos x & & f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{array}$$

Então

$$P_4(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

$$P_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

Exemplo 40 - Encontre o termo P_3, de grau 3, do polinômio de Taylor para a função $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ para $x>-1$ em $a=0$.

Solução:

$$\begin{array}{ll} f(x)=(1+x)^{-1} & f(0)=1 \\ f'(x)=-(1+x)^{-2} & f'(0)=-1 \\ f''(x)=2(1+x)^{-3} & f''(0)=2 \\ f'''(x)=-6(1+x)^{-4} & f'''(0)=-6 \end{array}$$

Assim,

$$P_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$
$$P_3(x)=1-x+x^2-x^3$$

O polinômio de Taylor de P_n da função f em a sempre tem a seguinte propriedade:

Os valores das derivadas sucessivas de P_n em a, inclusive a de ordem n, são iguais aos valores das derivadas sucessivas correspondentes de f em a.

Assim

$$f'(a)=P'_n(a);\, f''(a)=P''_n(a);\, f'''(a)=P'''_n(a);\ \cdots;\ f^{(n)}(a)=P_n^{(n)}(a)$$

Um dos aspectos mais importante do polinômio de Taylor P_n de uma função f em a é sua utilização para se determinar o valor de f, especialmente se tomamos n suficientemente grande e x próximo de a.

$$f(x)\approx P_n(x)$$

Exemplo 41 - Determine o valor de $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ para $x=\pi/6$.

Solução:

Do exemplo 20 temos que

$$P_4(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{\sqrt{2}}{48}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

Fazendo $x=\pi/6$ obtemos

$$P_4\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{\sqrt{2}}{48}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^4$$

$$P_4\left(\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5000075508$$

Usando uma calculadora obtemos $\operatorname{sen}(\pi/6)=0{,}5$

A diferença entre o valor real de $f(x)$ *e o valor obtido por* $P_n(x)$ *é chamado Resto de Taylor*

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$$

Teorema 16. *Extensão do Teorema do Valor Médio*

Seja n *um número inteiro positivo e suponha que* f *é uma função que tem derivada* $f^{(n+1)}$ *de ordem* $n+1$, *no intervalo aberto* I. *Então, se* a *e* b *são dois valores distintos de* I, *existirá um número* c *entre* a *e* b *tal que*

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+r_n$$

Onde $r_n=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

Observe que se fizermos $n=0$ *no Teorema 1, obteremos* $f(b)=f(a)+r_0$, *onde* $r_0=\dfrac{f'(c)}{1!}(b-a)^1$, *isto é,* $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$, *onde c é um número entre* a *e* b. *Assim, para* $n=0$, *o Teorema 1 coincide com a do Teorema do Valor Médio.*

Podemos agora usar o Teorema 1 para obter uma expressão para o resto de Taylor R_n

Teorema 17. *A fórmula de Taylor com o Resto de Lagrange*

Seja f *uma função que contém derivada* $f^{(n+1)}$ *de ordem* $n+1$ *num intervalo aberto* I *e seja* a *um número fixo de* I. *Denote o polinômio de Taylor do n-ésimo grau de* f *em* a *e o correspondente resto de Taylor por* P_n *e* R_n, *respectivamente. Então, para qualquer* x *em* I, *teremos*

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

Se $x\neq a$, *existirá um número* c *entre* a *e* x *tal que*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Exemplo 42 - *Encontre o polinômio de Taylor do quarto grau* P_4 *e o correspondente resto de Taylor de ordem quatro* R_4 *na forma de Lagrange para a função* f *definida por* $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ *sendo* $x>-2$ *em* $a=1$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=-(x+2)^{-2}\\
f''(x)&=2(x+2)^{-3}\\
f'''(x)&=-6(x+2)^{-4}\\
f^{(4)}(x)&=24(x+2)^{-5}\\
f^{(5)}(x)&=-120(x+2)^{-6}
\end{aligned}
$$

Onde

$$
\begin{aligned}
f(1)&=\tfrac{1}{3}\\
f'(1)&=-\tfrac{1}{9}\\
f''(1)&=\tfrac{2}{27}\\
f'''(1)&=-\tfrac{6}{81}\\
f^{(4)}(1)&=\tfrac{24}{243}
\end{aligned}
$$

então

$$P_4(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$P_4(x)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}(x-1)+\frac{1}{27}(x-1)^2-\frac{1}{81}(x-1)^3+\frac{1}{243}(x-1)^4$$

O resto, na forma de Lagrange, será:

$$R_4(x)=\frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-1)^5=-\frac{120(x-1)^5}{5!(c+2)^6}=-\frac{(x-1)^5}{(c+2)^6}$$

Onde c *é um número entre* 1 *e* x.

Exemplo 43 - *Use o polinômio de Taylor do terceiro grau da função* $f(x)=\ln(1+x)$ *em* $a=0$ *para estimar o valor de* $\ln(1{,}1)$, *e então use a forma de Lagrange do resto que possibilite definir limite de erro nessa estimativa.*

Solução:

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=(1+x)^{-1}\\
f''(x)&=-(1+x)^{-2}\\
f'''(x)&=2(1+x)^{-3}\\
f^{(4)}(x)&=-6(1+x)^{-4}
\end{aligned}
$$

$$f(0)=0$$
$$f'(0)=1$$
$$f''(0)=-1$$
$$f'''(0)=2$$

O polinômio será

$$P_3(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$
$$P_3(x)=0+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

Fazendo $x=0,1$ *na aproximação* $f(x)\approx P_3(x)$ *temos*

$$\ln(1,1)=f(0,1)\approx P_3(0,1)=0,1-\frac{1}{2}(0,1)^2+\frac{1}{3}(0,1)^3=0,095333\ldots$$

Ou

$$\ln(1,1)\approx 0,095333\ldots$$

O erro envolvido nesta estimativa é dado pelo resto na forma de Lagrange

$$f(0,1)-P_3(0,1)=R_3(0,1)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(0,1-0)^4$$
$$R_3(0,1)=\frac{-6(1+c)^{-4}}{4!}10^{-4}=\frac{-1}{4\times 10^4(1+c)^4}$$

Onde $0<c<0,1$

Como $c>0$ *temos que*

$$|R_n(0,1)|=\frac{1}{4\times 10^4(1+c)^4}<\frac{1}{4\times 10^4}$$
$$|R_n(0,1)|=\frac{1}{40000}=0,000025$$

Observe que $R_3(0,1)$ *é negativo, isto significa que o valor estimado é um pouco maior que o valor real de* $\ln(1,1)$.

O teorema seguinte pode ser usado para se determinar o grau do polinômio de Taylor necessário para garantir que o valor do erro absoluto envolvido na estimação não ultrapasse um valor específico.

Teorema 18. *Limite do erro na aproximação polinomial de Taylor*

Seja f uma função que contém derivada $f^{(n+1)}$ de ordem $n+1$ num intervalo aberto I e sejam a e b dois valores distintos em I. Suponha que M_n é um valor constante (dependendo apenas de n) e que $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \le M_n$ seja verdade para todo valor de c entre sejam a e b. Então se P_n é o polinômio de Taylor de grau n de f em a, o valor absoluto do erro envolvido na estimativa $f(b) \approx P_n(b)$ não deve exceder a

$$M_n \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemplo 44 - Estime o valor de $\ln(0{,}99)$, de forma que o erro não deva exceder a 10^{-7} em seu valor absoluto.

Solução:

Fazendo $f(x) = \ln x$; $a-1$ e $b = 0{,}99$ ($a = 1$ é próximo de 0,99 e $\ln(1) = 0$) temos:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = x^{-1}\\
&f''(x) = -x^{-2}\\
&f'''(x) = 2x^{-3}\\
&f^{(4)}(x) = -6x^{-4}\\
&\quad\vdots\\
&f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}\\
&f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n}\, n!\,x^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

Donde $0{,}99 < c < 1$

$$\left|f^{(n+1)}(c)\right| = \left|(-1)^n\, n!\,c^{-(n+1)}\right| = \frac{n!}{c^{n+1}} < \frac{n!}{0{,}99^{n+1}}$$

Do teorema 2 temos $R_n(b) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$

$$|R_n(b)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\right| = \left|f^{(n+1)}(c)\right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \le M_n \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Logo $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \le M_n$

Então podemos dizer quer $M_n = \dfrac{n!}{0{,}99^{n+1}}$. Assim o valor absoluto do erro envolvido na estimativa $\ln 0{,}99 = f(b) \approx P_n(b)$ não deve exceder

$$M_n \frac{|0,99-1|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{n!}{0,99^{n+1}} \frac{0,01^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(99)^{n+1}} \leq 10^{-7}$$

Por tentativa vemos que o menor valor de n *em que* $\frac{1}{(n+1)(99)^{n+1}} \leq 10^{-7}$ *é* $n=3$*. Assim* $P_3(0,99)$ *aproxima o valor de* $\ln(0,99)$ *com a precisão desejada.*

$$P_3(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$P_3(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$$

$$\ln(0,99) \approx P_3(0,99) = (0,99-1) - \frac{1}{2}(0,99-1)^2 + \frac{1}{3}(0,99-1)^3 = -0,010050333\ldots$$

Como o erro envolvido nesta aproximação não pode exceder a 10^{-7} *em valor absoluto, podemos concluir que a aproximação de* $\ln(0,99) \approx -0,0100503$ *tem a precisão desejada com 06 casas decimais (O valor verdadeiro, arredondado para 8 dígitos decimais é* $\ln(0,99) = -0,01005034$ *).*

Exemplo 45 - Estime o valor de $\operatorname{sen}(2\pi/9)$ *com um erro menor que* 10^{-5} *em valor absoluto.*

Solução:

No Teorema 3 faremos $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \frac{\pi}{4}$ *e* $b = \frac{2\pi}{9}$.

Como $f^{(n+1)}(c)$ *é ora* $\pm\operatorname{sen}(c)$*, ora* $\pm\cos(c)$ *implica que* $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$*, portanto podemos fazer* $M_n = 1$ *no Teorema 3. Assim, o valor absoluto do erro não pode exceder a*

$$M_n \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} = (1)\frac{\left|\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\left|-\frac{\pi}{36}\right|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$$

Vemos que $n=3$*, logo devemos achar* $P_3(x)$

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \operatorname{sen} x & & f(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ f'(x) = \cos x & & f'(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & \Rightarrow & f''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\ f'''(x) = -\cos x & & f'''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2 \\ f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x & & f^{(4)}\,\pi/4 = \sqrt{2}/2 \end{array}$$

$$P_3(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \frac{\cos(\pi/4)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\cos(\pi/4)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right) \approx P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{2\pi}{9} - \frac{\pi}{4}\right)^3 = 0{,}64278759$$

5.15 Exercícios

Nos exercícios de 113 a 127, encontre o polinômio de Taylor de grau n no número a indicado para cada função e escreva o correspondente resto de Taylor na forma de Lagrange.

113. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 2$, $n = 6$

114. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $n = 5$

115. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 100$, $n = 4$

116. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 1000$, $n = 4$

117. $g(x) = (x-2)^{-2}$, $a = 3$, $n = 5$

118. $f(x) = (1-x)^{-1/2}$, $a = 0$, $n = 3$

119. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $n = 6$

120. $g(x) = \cos x$, $a = -\pi/3$, $n = 3$

121. $g(x) = \operatorname{tg} x$, $a = \pi/4$, $n = 4$

122. $f(x) = e^{2x}$, $a = 0$, $n = 5$

123. $f(x) = xe^{x}$, $a = 1$, $n = 3$

124. $f(x) = e^{-x^2}$, $a = 0$, $n = 3$

125. $f(x) = 2^{x}$, $a = 1$, $n = 3$

126. $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $n = 4$

127. $f(x) = \ln(\cos x)$, $a = \pi/3$, $n = 3$

Nos exercícios de 128 a 138, use um polinômio de Taylor adequado para aproximar o valor de cada função com erro inferior a 10^{-5} em valor absoluto. Em cada caso, escreva a resposta arredondada para quatro casas decimais.

128. $\operatorname{sen} 1$

129. $\cos 29°$

130. $\operatorname{sen} 35°$

131. $tg\,\dfrac{\pi}{3}$

132. e

133. $e^{-1,1}$

134. $e^{0,9}$

135. $\ln 0{,}97$

136. $\ln(17)$ (sugestão: $\ln 17 = \ln 16\left(1 + \frac{1}{16}\right) = 4\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{16}\right)$)

137. $\sqrt{9{,}04}$

138. $\sqrt[3]{2{,}1}$