Algebra Booleana

Operadores, axiomas, propriedades, expressões lógicas

Álgebra de Boole

- Operadores lógicos

Operador lógico	Operação
+	OU lógico (Soma lógica – função OR)
.	E lógico (Multiplicação lógica – função AND)
$\overline{}$	Inversão lógica (também se utiliza ! ou ’ – função NOT)
$\oplus$	OU-exclusivo (Função XOR)
$\odot$	Não ou-exclusivo (também chamado de coincidência – função XNOR)

Álgebra de Boole

- Tipos de lógica

Lógica positiva	Operação
VERDADEIRO	Nível lógico “1”
Falso	Nível lógico “0”

Lógica negativa	Operação
VERDADEIRO	Nível lógico “0”
Falso	Nível lógico “1”

Álgebra de Boole

- Sendo A uma variável lógica, tem-se

- A = 1   => $\overline{A}$ = 0
- A = 0   => $\overline{A}$ = 1

- ($\overline{A}$ é o inverso, ou complemento de A)

Álgebra de Boole

- Axiomas

1) 0 + 0 = 0	5) 1 + 1 = 1
2) 0 + 1 = 1	6) 1 . 1 = 1
3) 0 . 0 = 0	7) A + 0 = A
4) 0 . 1 = 0	8) A . 0 = 0

Álgebra de Boole

- Axiomas

9)	$\overline{(\overline{A})} = A$
10)	$A \bullet A = A$
11)	$A \bullet \overline{A} = 0$

Álgebra de Boole

- Propriedades

12)	A + B = B + A	Comutativa em relação à operação ou
13)	A . B = B . A	Comutativa em relação à operação E
14)	A + (B + C) = (A + B) + C	Associativa em relação à operação ou
14)	A . (B . C) = (A . B) . C	Associativa em relação à operação ou
15)	A . (B + C) = A . B + A . C	Distribuiva da operação E em relação à operação ou
16)	A + (B . C) = (A + B).(A + C)	Distribuiva da operação OU em relação à operação E

Álgebra de Boole

- Propriedades

17) $A + \overline{A}.B = A + B$
18) $\overline{A} + A.B = \overline{A} + B$

Teoremas de DeMorgan

O complemento de uma soma lógica é o produto dos complementos dos termos da soma:

$$\overline{(A+B)} = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

$$\overline{(A+B+C)} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}$$

O complemento de uma multiplicação lógica é a soma dos complementos dos termos da multiplicação:

$$\overline{(A \bullet B)} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{(A \bullet B \bullet C)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

Operações Básicas – Portas Lógicas

- Operação **NOT**: Altera o valor de uma variável de 0 para 1 ou de 1 para 0.
- Tabela Verdade: Combinações dos bits de entrada e respectivos bits de saída após a operação lógica.

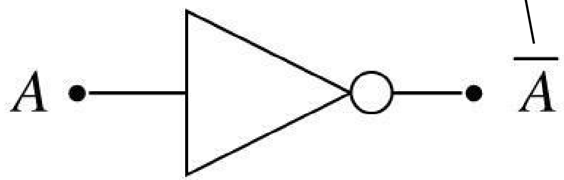
Tabela Verdade

Entrada Saída

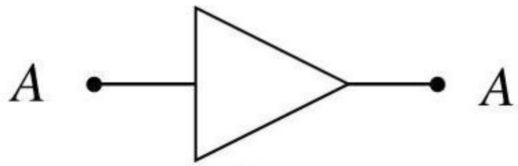
A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Esta barra Significa inversão

- O símbolo lógico (porta lógica) que representa a operação **NOT** é o seguinte:



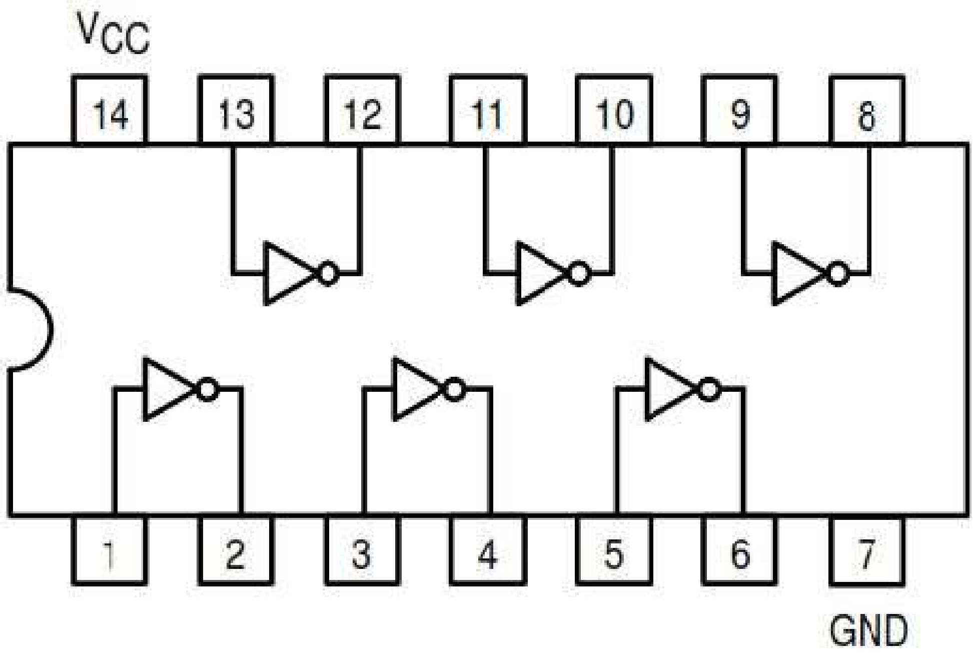
- O segundo símbolo não é de um inversor, mas de um buffer. Repare que um buffer não possui um círculo na saída. Este círculo representa a inversão do bit de entrada e pode ser encontrado nas entradas e saídas de qualquer porta lógica, conforme veremos ainda nesta unidade.



Qual a função de um buffer? Procure!

Circuitos Lógicos

- Porta NÃO (NOT)



74LS04

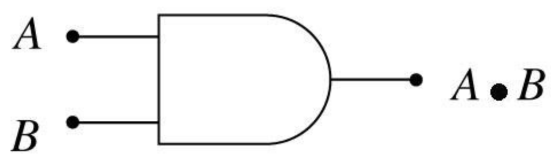
Operações Básicas – Portas Lógicas

Porta AND

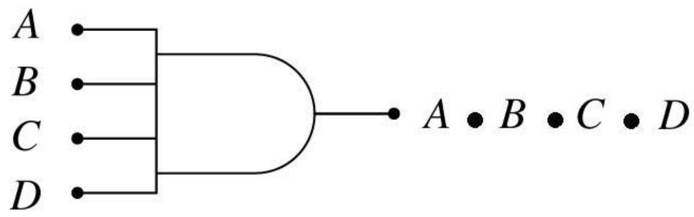
Tabela Verdade

A	B	$A \bullet B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

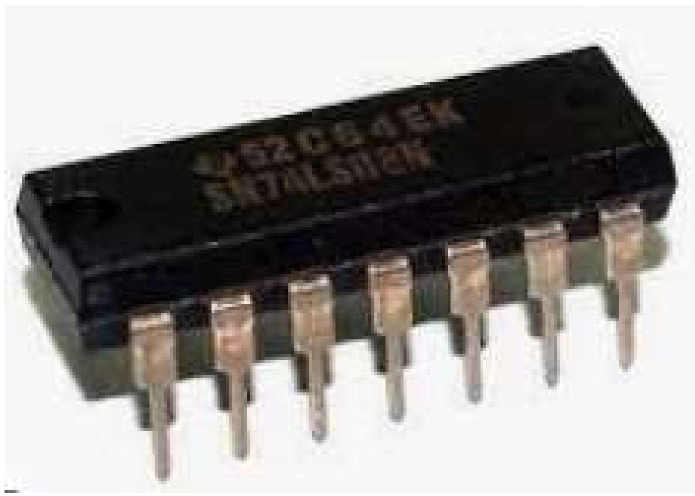
Símbolos

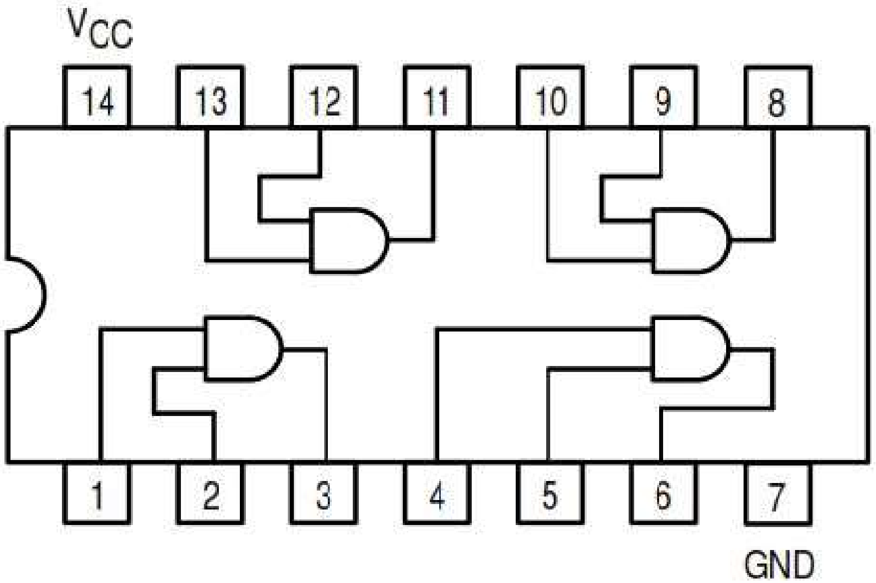


Duas entradas



Quatro entradas. Uma porta lógica pode ter N entradas.





74LS08

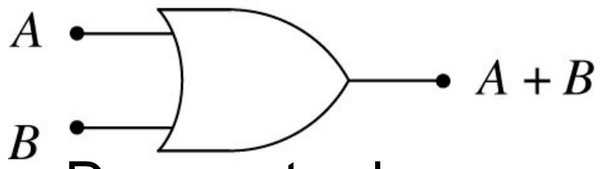
Operações Básicas – Portas Lógicas

Porta OR

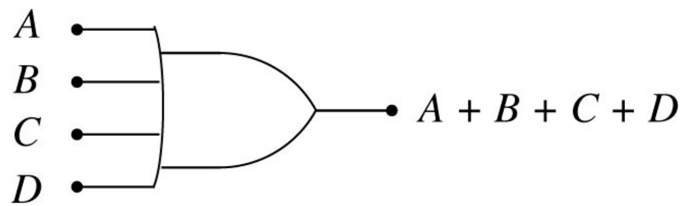
Tabela Verdade

A	B	$A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

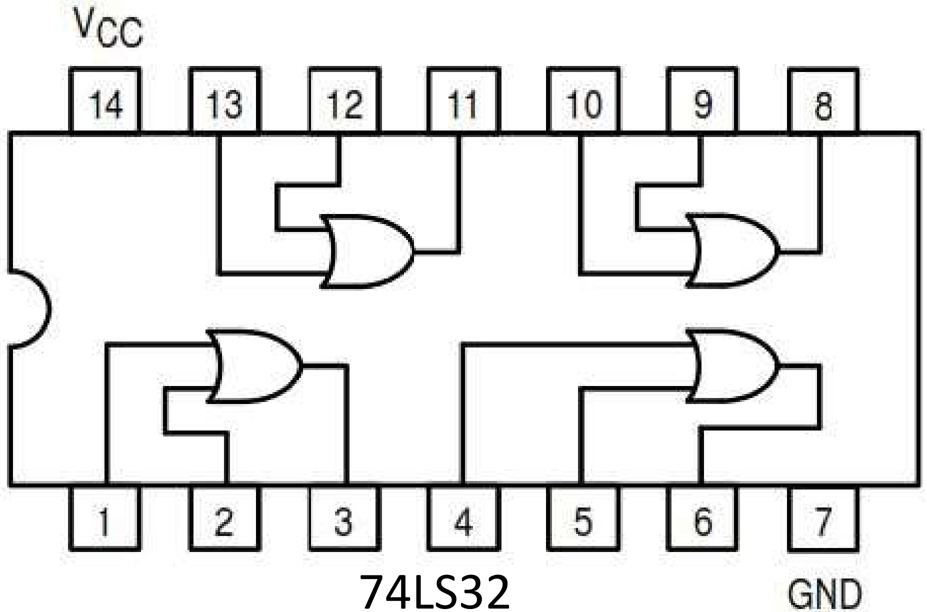
Símbolos



Duas entradas



Quatro entradas. Uma porta lógica pode ter N entradas.



74LS32

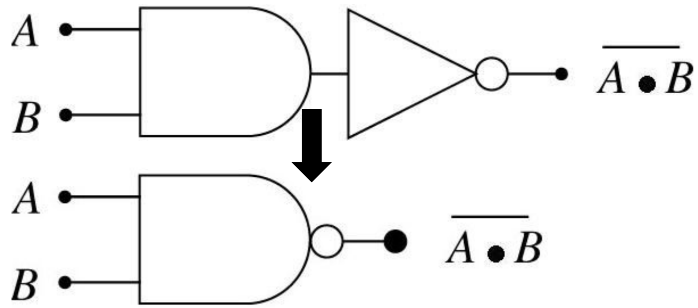
Operações Básicas – Portas Lógicas

Porta NAND

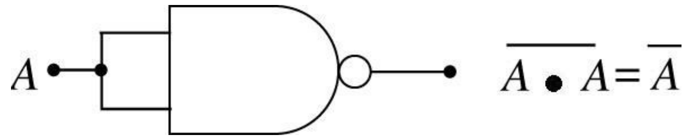
Tabela Verdade

A	B	$\overline{A \bullet B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

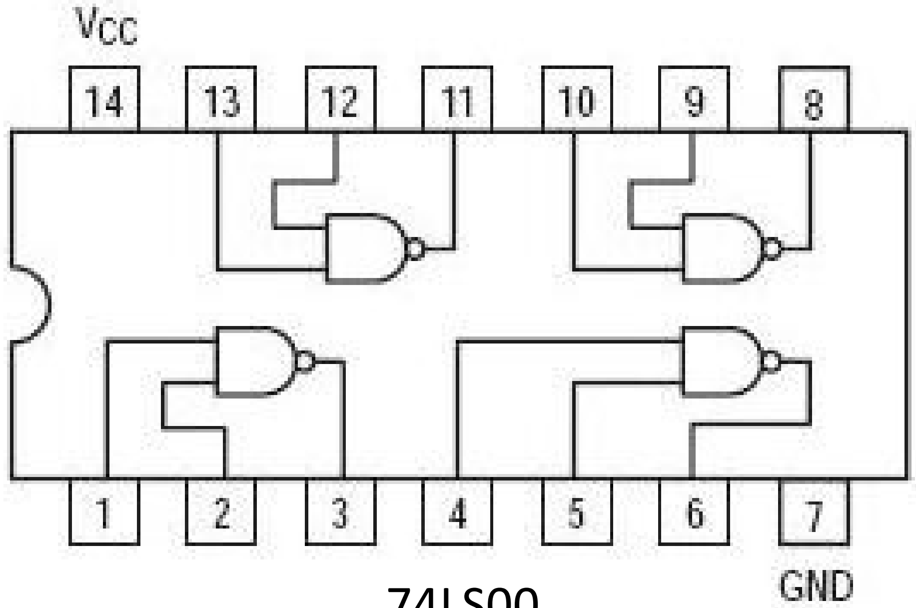
Símbolos



Símbolo resultante.



Transformando uma NAND em uma NOT.



74LS00

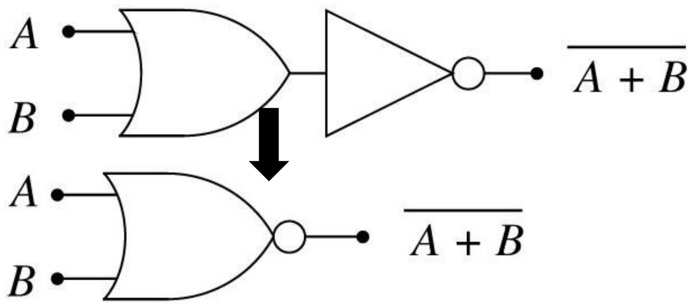
Operações Básicas – Portas Lógicas

Porta NOR

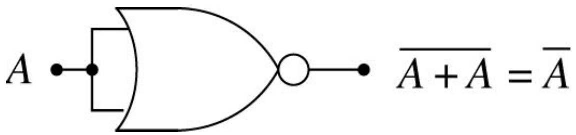
Tabela Verdade

A	B	$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

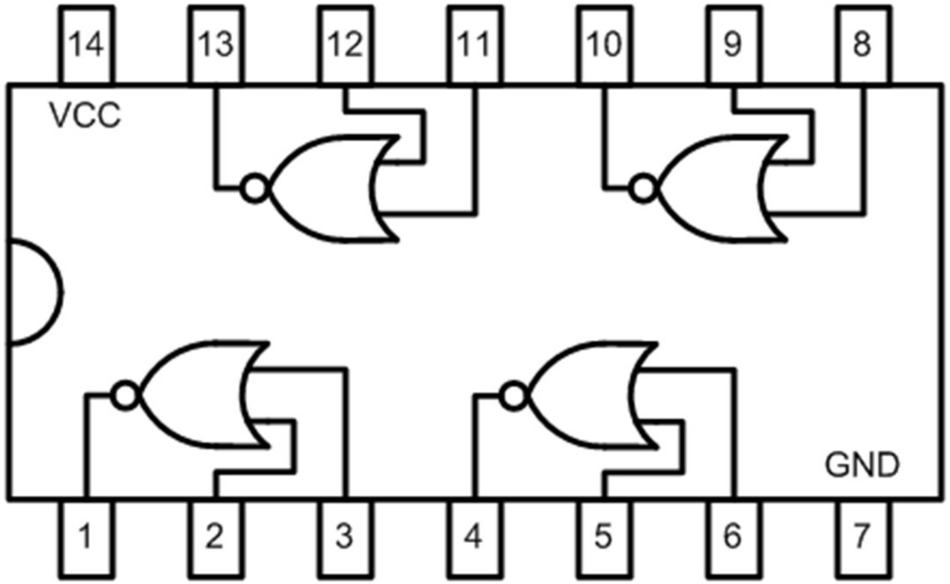
Símbolos



Símbolo resultante.



Transformando uma NOR em uma NOT.



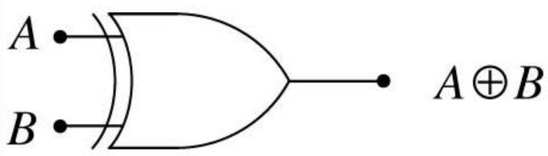
74LS28

Operações Básicas – Portas Lógicas

- A operação **XOR** significa Exclusive-OR (OU Exclusivo).
- A saída de uma porta XOR de duas entradas será 1 se somente uma das for igual a 1.
- Em um XOR de três entradas. Duas entradas são comparadas entre si e o resultado é comparado com a outra entrada.

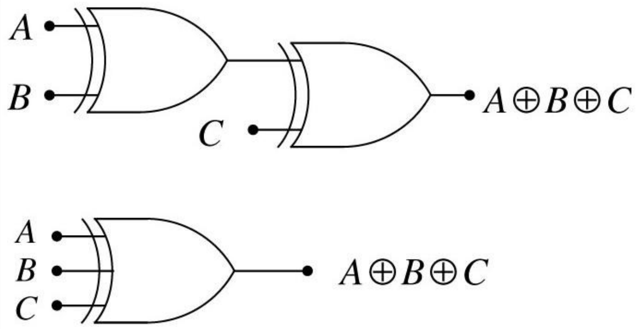
XOR

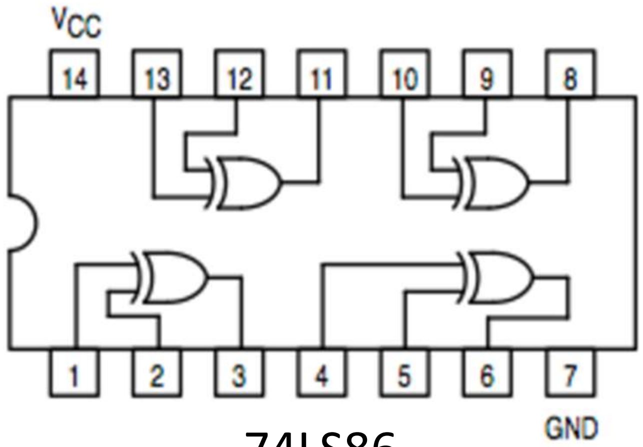
A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



XOR
3 entradas

A	B	C	$A \oplus B \oplus C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1





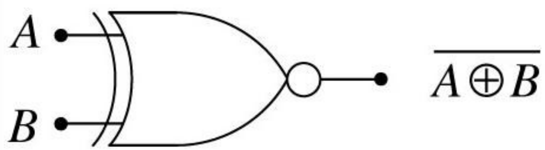
74LS86

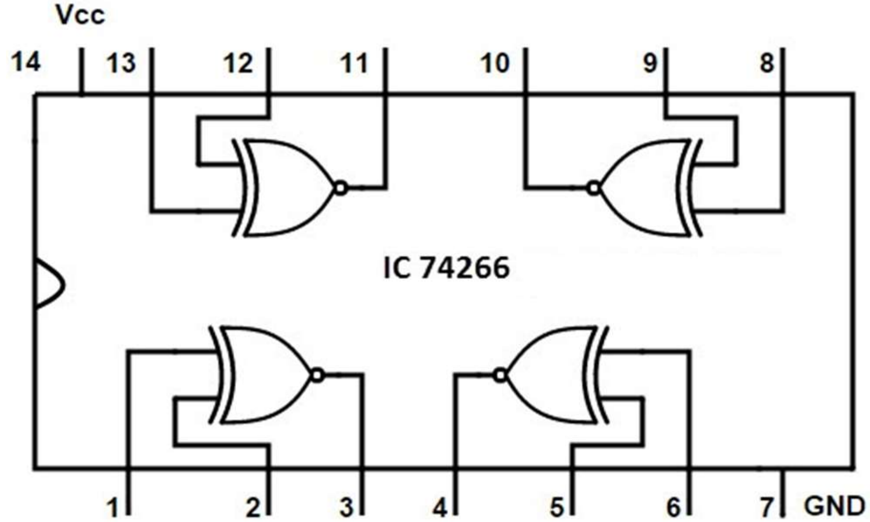
Operações Básicas – Portas Lógicas

- A operação **XNOR** significa Exclusive-NOR. A saída de uma XNOR de duas entradas é zero quando **uma** das entradas for igual a 1.

XNOR

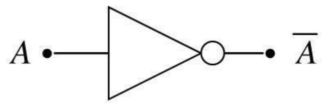
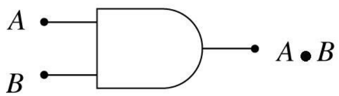
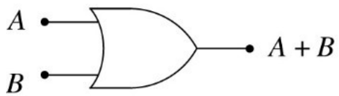
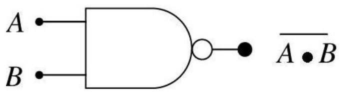
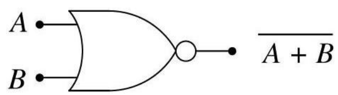
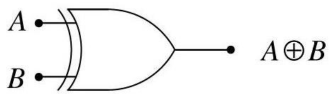
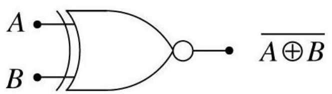
A B	$\overline{A \oplus B}$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1





Operações Básicas – Portas Lógicas

Portas lógicas

	NOT: Operação que inverte o sinal de entrada
	AND: Saída igual a 1, se todas as entradas forem iguais a 1.
	OR: Saída igual a 1, se qualquer entrada for igual a 1.
	NAND: Saída igual a 1, se qualquer entrada for igual a 0.
	NOR: Saída igual a 1, se todas as entradas forem iguais a 0.
	XOR: Saída igual a 1, se as entradas forem diferentes.
	XNOR: Saída igual 1, quando todas as entradas forem iguais.

Álgebra de Boole

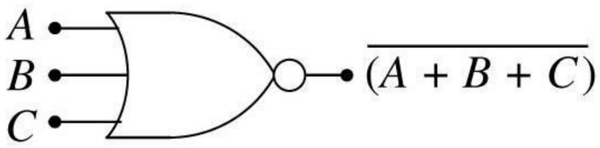
- Durante o projeto de um circuito lógico algumas expressões complexas são obtidas e é necessário que sejam simplificadas, para se obter um circuito mais simples.

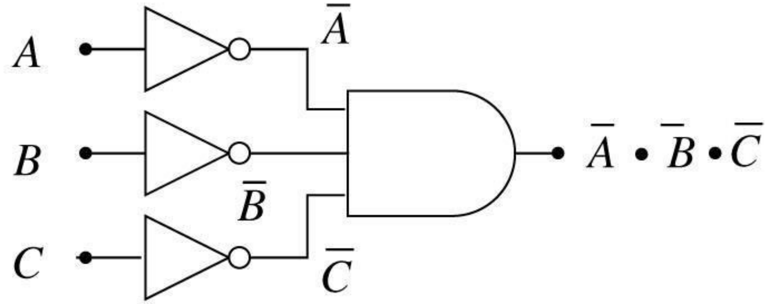
- Uma vez que o circuito lógico pode ser resultado da expressão e vice-e-versa.

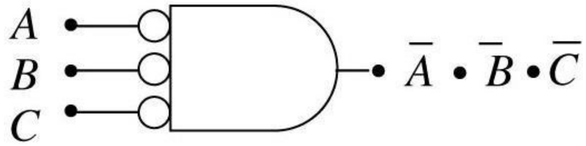
Teoremas de DeMorgan

Circuitos resultantes

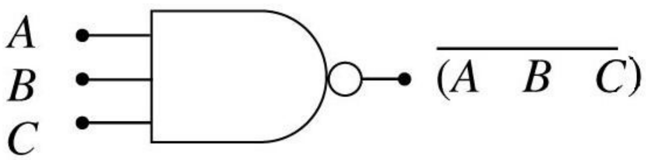
$$\overline{(A+B+C)}=\overline{A}\bullet\overline{B}\bullet\overline{C}$$

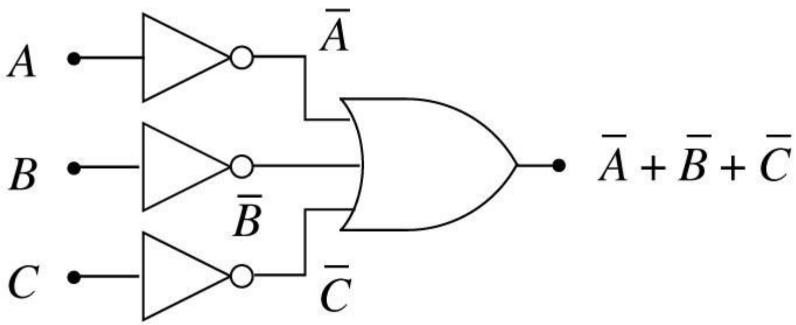


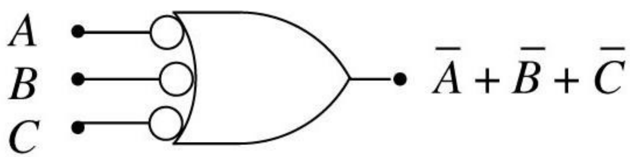




$$\overline{(A\bullet B\bullet C)}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$







Identidades Booleanas Úteis

$$A + A \bullet B = A$$

A	B	$A \bullet B$	$A + A \bullet B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

$$A + \overline{A} \bullet B = A + B$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \bullet B$	$A + \overline{A} \bullet B$	$A + B$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

- As identidades booleanas apresentadas acima são confirmadas através de suas respectivas tabelas verdades.

- Podemos também verificar a primeira identidade através de atribuição de valores às variáveis:

$$A + A \bullet 0 = A + 0 = A$$

$$A + A \bullet 1 = A + A = A$$

- Ou através da lei distributiva:

$$A + A \bullet B = A \bullet (1 + B)$$

$$= A \bullet (1) = A$$

Exercícios

Simplificações Algébricas

Exemplo:

$$f = A \bullet B + A \bullet \overline{B}$$

$$f = A \bullet \left(B + \overline{B}\right)$$

$$f = A \bullet 1 = A$$

O exemplo ao lado apresenta uma situação onde possuímos duas entradas no circuito: A e B.

No entanto, ao simplificarmos a equação verificamos que o circuito precisa apenas de uma das entradas, somente a entrada A.

Exercícios

Simplificações Algébricas

- Utilize os axiomas e propriedades da Algebra de Boole para resolver os exercícios abaixo:

$$(1) f = A \bullet B \bullet C + B \bullet C$$

$$(2) f = \overline{\left(A + \overline{B} + C\right) + \left(B + \overline{C}\right)}$$

$$(3) f = \left(A + B + C\right) \bullet (A + B)$$

$$(4) f = A \bullet B + A \bullet B \bullet C + A \bullet B \bullet \overline{C}$$

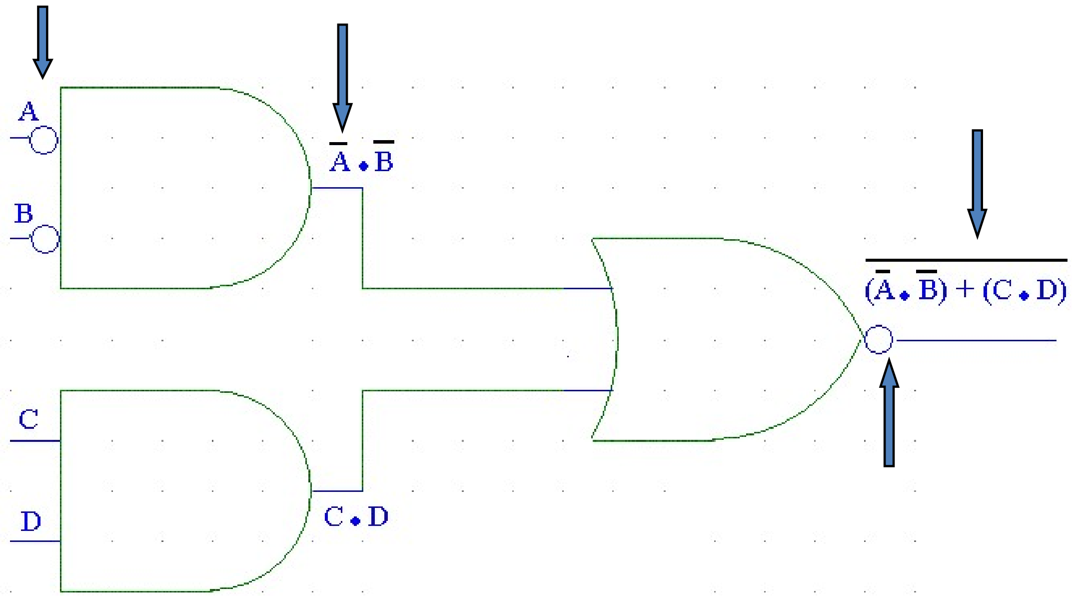
$$(5) f = 1 + A \bullet \left(A + \overline{B} + C + \overline{D} + \overline{E}\right) \bullet \left(\overline{B + A}\right) \bullet C \bullet D$$

$$(6) f = \left(\overline{\left(\overline{A + B}\right) \bullet \left(\overline{B + C}\right)}\right) \bullet \left(A + B + C\right) \bullet 0$$

Exercícios

Extrair expressões booleanas de circuitos lógicos

Exemplo



- O primeiro passo é escrever a expressão de saída de cada bloco básico (porta lógica).
- Se a entrada de uma porta lógica possui o círculo que representa a inversão, somente esta entrada (letra no desenho) receberá a barra que identifica sinal invertido:

$$A = \overline{A} \quad \text{ou} \quad B = \overline{B}$$

- Se a saída de uma porta lógica possui o círculo, símbolo que representa a inversão, toda a expressão de saída desta porta lógica receberá a barra que identifica sinal invertido:

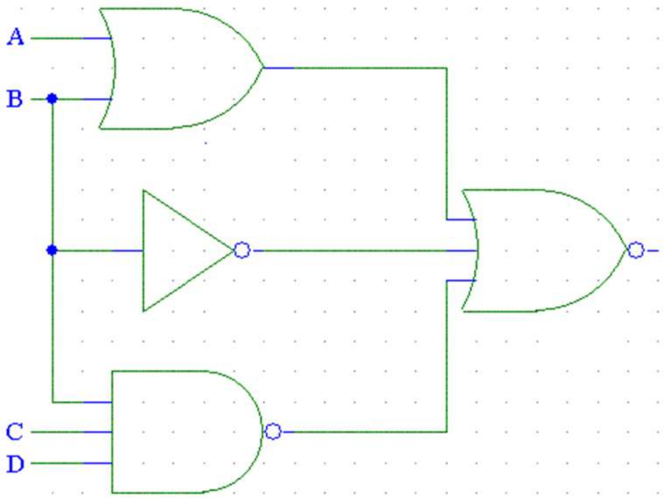
$$\overline{\left(\overline{A} \bullet \overline{B}\right) + \left(C \bullet D\right)}$$

Exercícios

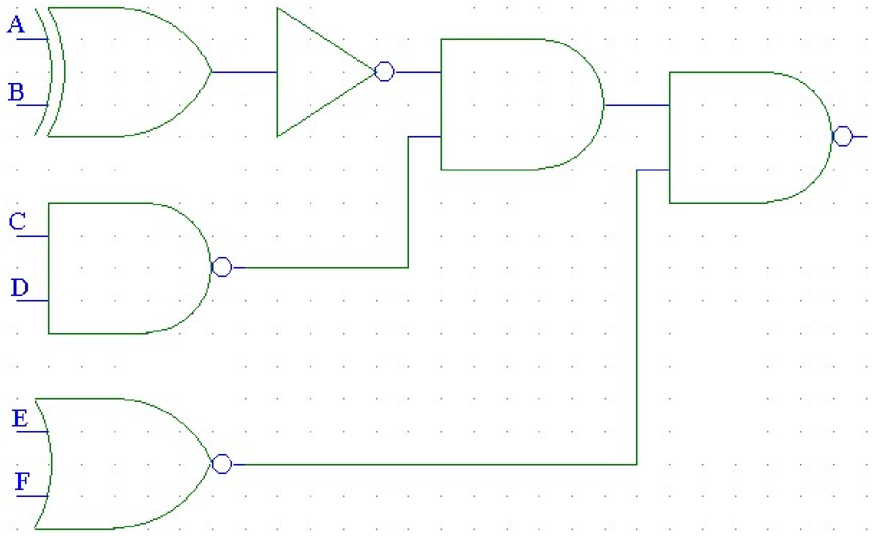
Extrair expressões booleanas de circuitos lógicos

- Resolva os exercícios a seguir:

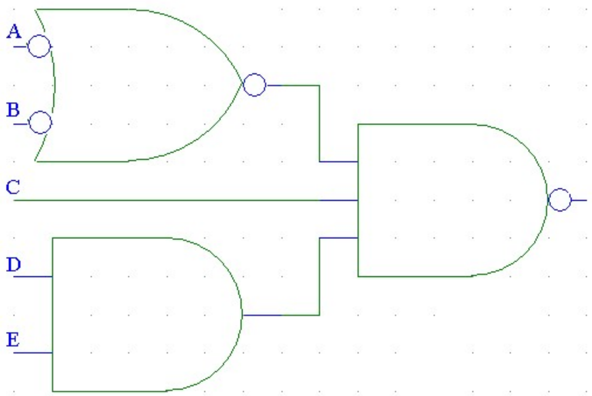
(7)



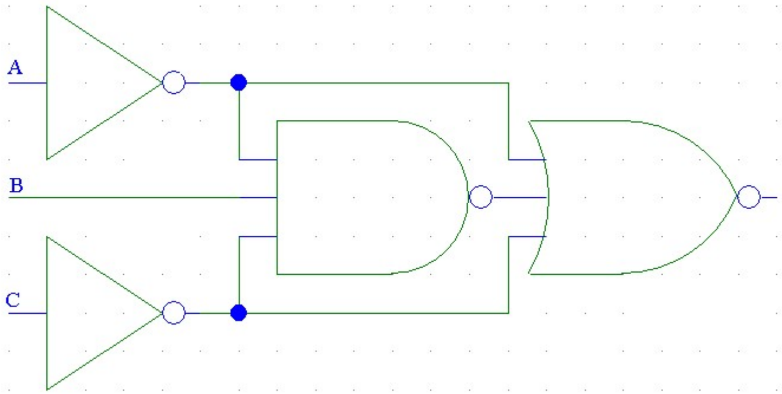
(9)



(8)



(10)

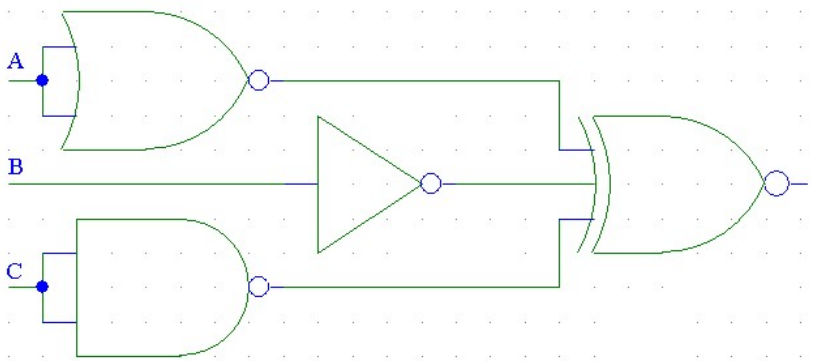


Exercícios

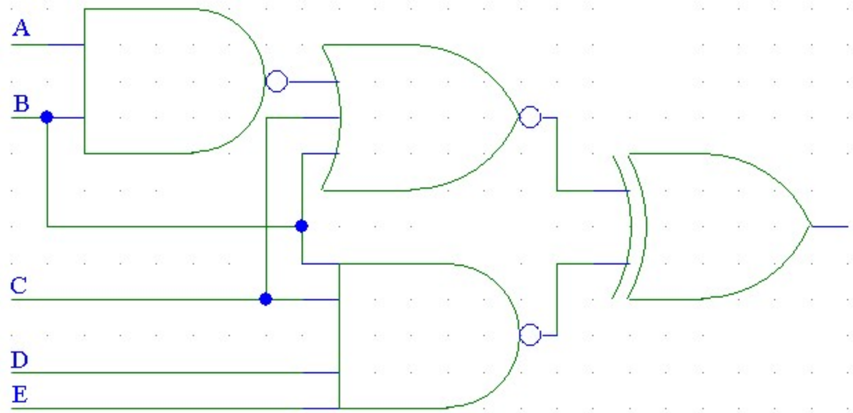
Extrair expressões booleanas de circuitos lógicos

- Resolva os exercícios a seguir:

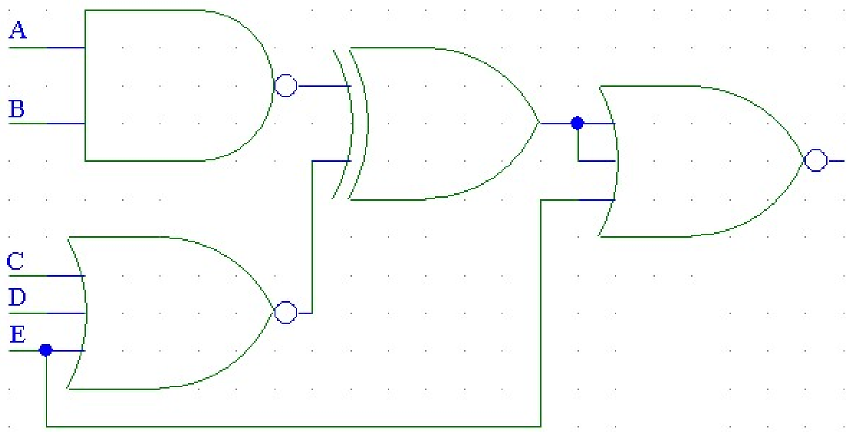
(11)



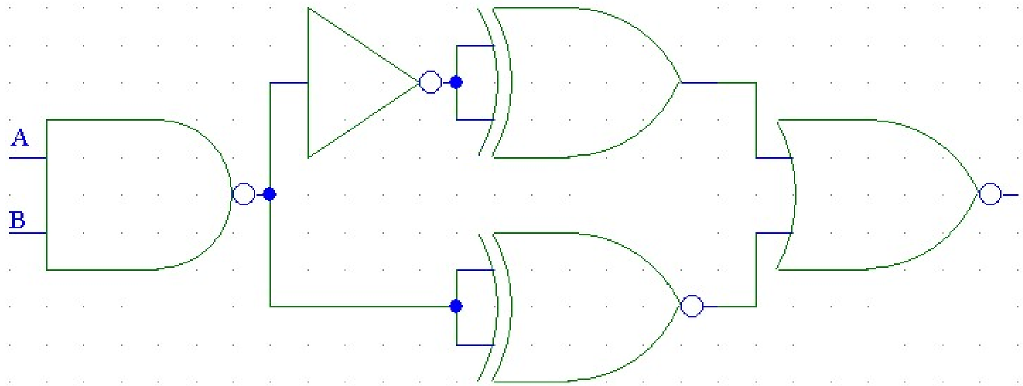
(13)



(12)



(14)



Exercícios

Circuitos lógicos obtidos de expressões booleanas

Entrada C invertida. Operação **NOT**

Exemplo

$$f = \overline{\left(A + B\right) \bullet \overline{C} \bullet \overline{\left(B + D\right)}}$$

Operação **OR** Operação **NOR**

Operação **AND**

- Primeiro passo: extrair o circuito representado pelas operações entre parênteses.
- Segundo passo: extrair o circuito invertendo os sinais de entrada ou saída onde houver uma barra na expressão.
- Terceiro passo: extrair o circuito representado pelas operações que estão fora dos parênteses.
- Quarto passo: extrair o circuito invertendo os sinais de entrada ou saída onde houver uma barra na expressão.
- **Observação:** Quando não houver parênteses deve ser respeitado a prioridade de operação entre os sinais. Por exemplo: Primeiro AND depois OR. Os passos acima **não** são uma regra! É necessário identificar os termos prioritários em cada expressão lógica.

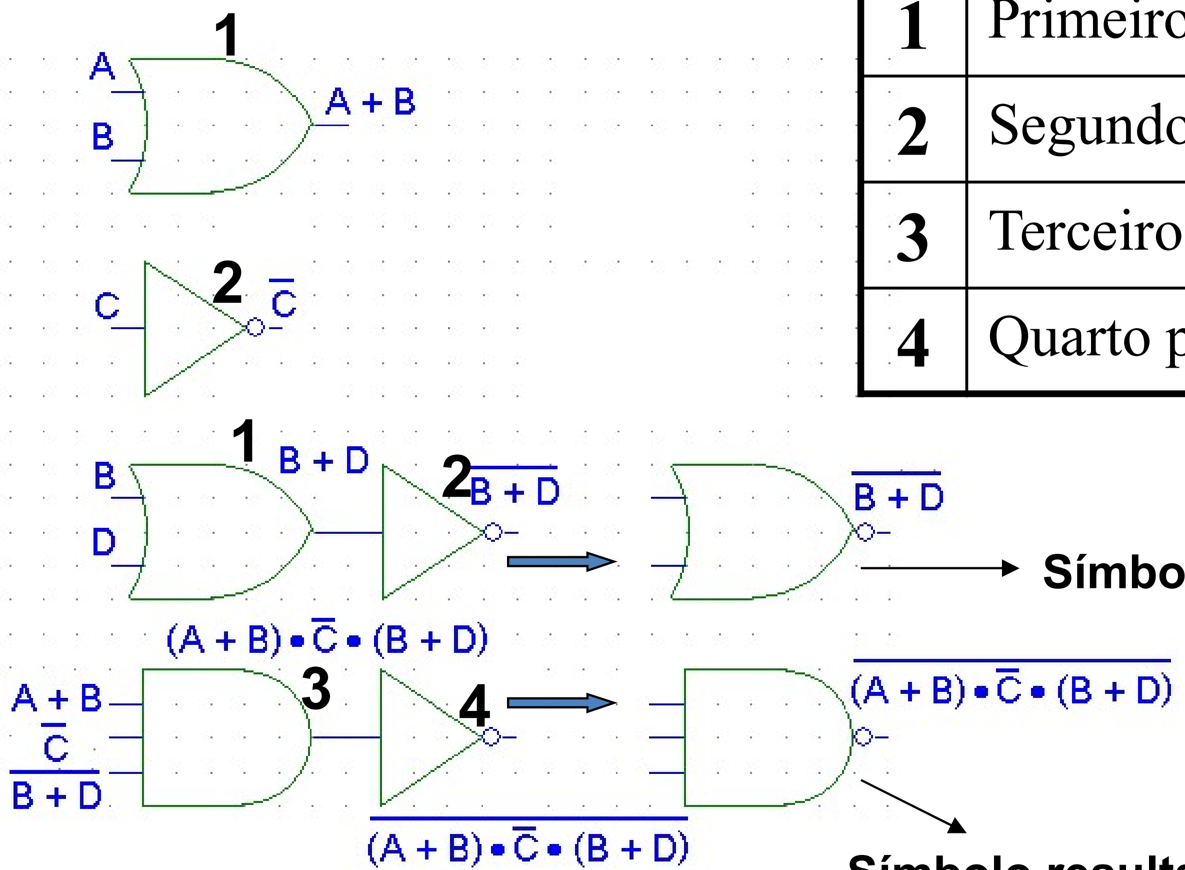
Exercícios

Circuitos lógicos obtidos de expressões booleanas

Exemplo

$$f=\overline{\left(A+B\right)\bullet\overline{C}\bullet\overline{\left(B+D\right)}}$$

1	Primeiro passo
2	Segundo passo
3	Terceiro passo
4	Quarto passo



Símbolo resultante = NOR (2 entradas)

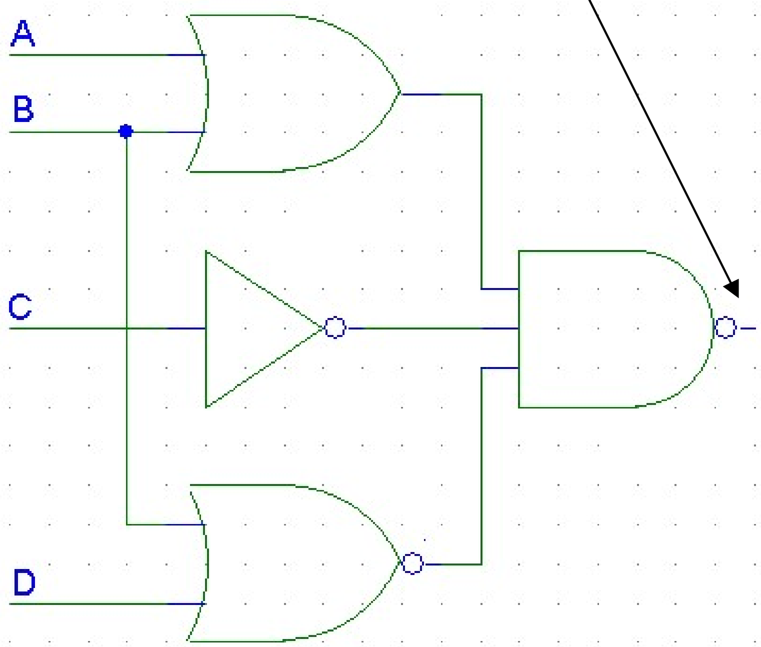
Símbolo resultante = NAND (3 entradas)

Exercícios

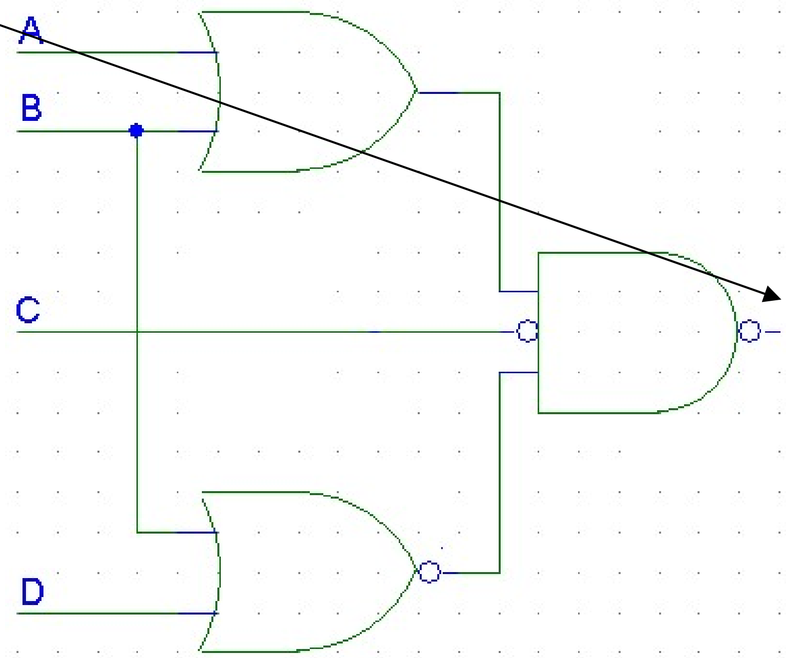
Circuitos lógicos obtidos de expressões booleanas

Exemplo

$$f=\overline{\left(A+B\right)\bullet\overline{C}\bullet\left(\overline{B+D}\right)}$$



Ou



Circuitos resultantes

Exercícios

Circuitos lógicos obtidos de expressões booleanas

- Resolva os exercícios a seguir:

$$(15)\, f = A \bullet B \bullet C + (A + B) \bullet C$$

$$(16)\, f = \overline{\left(\overline{A \bullet B} + \overline{C \bullet D}\right)}$$

$$(17)\, f = \left(\left(\overline{\overline{A} + B}\right) + \left(\overline{\overline{C} + D}\right)\right) \bullet \overline{D}$$

$$(18)\, f = \overline{\left(\overline{\left(\overline{A} \bullet B\right)} + \overline{\left(C \bullet \overline{D}\right)}\right)} \bullet E + \left(\left(A \bullet \overline{D} \bullet \overline{E}\right) + \left(C \bullet D \bullet E\right)\right) \bullet \overline{A}$$

$$(19)\, f = \overline{(A \oplus B)} + C + D \bullet E + A + (C \oplus D)$$

$$(20)\, f = \overline{\left(\overline{A} + \left(\overline{B} \oplus \overline{C}\right)\right) \bullet (A + B) \bullet \overline{(A + C)}}$$

Lembrar da observação anterior! Quem tem prioridade?

Exercícios

Tabela Verdade obtida de uma expressão booleana

$$f = \underline{A \bullet B \bullet C} + \underline{A \bullet D} + \underline{A \bullet B \bullet D}$$

Exemplo

				Primeiro membro	Segundo membro	Terceiro membro	Resultado
A	B	C	D	A . B . C	A . D	A . B . D	Saída
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Exercícios

Tabela Verdade obtida de uma expressão booleana

- Resolva os exercícios a seguir:

$$(21) f = \overline{A} + B + A \bullet B \bullet \overline{C}$$

$$(22) f = (A \oplus B) + \overline{C \bullet D} + \overline{B}$$

$$(23) f = C \bullet B + B \bullet A + (\overline{A} + \overline{C})$$

$$(24) f = A + B \bullet \overline{C} \bullet A + B$$

$\overline{C}$

Exercícios

Expressão booleana obtida de uma tabela verdade

- Existem duas formas para se obter a expressão booleana através de tabelas verdades. Elas são conhecidas como soma de produtos e produto de somas. A forma mais intuitiva e portanto, mais usual é a soma de produtos..

Resolver os seguintes exercícios:

(25)

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

(26)

A	B	C	S1	S2	S3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

As saídas estão identificadas pela letra S.

Exercícios

Expressão booleana obtida de uma tabela verdade

Resolver os seguintes exercícios:

(27)

A	B	C	S1	S2	S3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0

(28)

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

As saídas estão identificadas pela letra S.