

**FÍSICA COMPUTACIONAL ORIENTADA A LA FÍSICA ONDULATORIA Y
PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA**

**HERBERT DÁVILA BERMÚDEZ
NÉSTOR FABIO MONTOYA PALACIOS**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRÍA EN INSTRUMENTACIÓN FÍSICA
PEREIRA
2011**

**FÍSICA COMPUTACIONAL ORIENTADA A LA FÍSICA ONDULATORIA Y
PRINCIPIOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA**

**HERBERT DÁVILA BERMÚDEZ
NÉSTOR FABIO MONTOYA PALACIOS**

**ASESOR: WILLIAM ARDILA URUEÑA
MAGISTER EN FÍSICA**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
MAESTRÍA EN INSTRUMENTACIÓN FÍSICA
PEREIRA
2011**

NOTA DE ACEPTACIÓN

JURADO

JURADO

JURADO

Pereira, julio 2011

AGRADECIMIENTOS

A Dios por habernos permitido la salud y capacidad mental.

Agradecemos a los docentes y directivos de la Universidad Tecnológica de Pereira por su contribución al logro de nuestros objetivos académicos.

En especial agradecemos a nuestro asesor William Ardila Urueña, Magister en Física, quien se preocupó siempre por que el proceso de investigación se llevara a cabo correctamente y que nuestro proyecto fuera exitoso. Gracias por su constante apoyo y ánimo.

DEDICATORIA

Esta tesis es un logro mas de mi vida por eso la dedico a Dios y a mi sagrada familia compuesta por mi esposa, Dora Nidia Santa Dúque y mis hijos, Juan Pablo Davila Santa, Andrea Dávila Santa y Paula Dávila Santa quienes son fuente de motivación e inspiración.

Herbert Dávila Bermúdez

Dedico este trabajo de grado a mi familia, fuente de todos mis desvelos y esfuerzos. A mi esposa Marinella Velásquez y a mis hijos Marianela Montoya Velásquez y Santiago Montoya Velásquez, que son mi adoración y a quienes debo gran parte de mis logros

Néstor Fabio Montoya Palacios

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	14
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	16
1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	16
1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	16
2. JUSTIFICACIÓN	17
3. OBJETIVOS	18
3.1. OBJETIVO GENERAL	18
3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
4. MARCO REFERENCIAL	19
4.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN	19
4.2. MARCO CONCEPTUAL	21
4.2.1. Física ondulatoria.	21
4.3. MARCO TEÓRICO	25
4.3.1.1. Movimiento Armónico Simple.	25
4.3.1.2. Péndulo Simple.	32
4.3.3. Péndulo Cicloidal.	38
4.3.4. El péndulo cicloidal.	50
4.3.5. Péndulo Doble	54
4.3.6. Péndulo Compuesto.	68
4.3.7. Péndulo de Torsión.	74
4.3.8. Superposición de DOS M.A.S	75
4.3.9. Superposición de 2 M.A.S. Igual frecuencia.	81
4.3.10. Superposición de 2 M.A.S. Distinta frecuencia.	83
4.3.11. Figuras de lissajous.	87
4.3.12. Oscilaciones Acopladas.	88
4.3.13. Oscilaciones Amortiguadas.	112
4.3.14. Oscilaciones Forzadas.	120
4.3.15. Resonancia Pura.	128
4.3.16. Ondas en dos y tres Dimensiones	130
4.3.17. Ondas Esféricas.	134
4.3.18. Efecto Doppler.	147
4.3.19. Superposición de Ondas	151
4.3.20. Ondas estacionarias en una dimensión.	158
4.3.21. Ondas estacionarias y la ecuación de ondas	171
4.3.22. Superposición de ondas de diferente frecuencia	178
4.3.23. Interferencia.	182
4.3.24. Experimento de Young	189
4.3.25. Difracción de Fraunhofer en una rendija.	203
4.3.26. Difracción de fraunhofer en doble rendija.	215
4.3.27. Espectro de emisión y absorción.	219
4.3.28. Espectro de emisión.	222
4.3.29. Mecánica cuántica.	225

4.3.30	Oscilador armónico cuántico amortiguado	237
5.	MANUAL DEL USUARIO	242
5.1.	MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE	242
5.1.1.	Elongación	243
5.1.2.	Velocidad	244
5.1.3.	Aceleración	244
5.1.4.	Energía	245
5.2.	PÉNDULOS	245
5.2.1.	Péndulo simple.	245
5.2.2.	Péndulo cicloidal.	246
5.2.3.	Péndulo doble	247
5.2.4.	Péndulos acoplados.	247
5.3.	SUPERPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS SIMPLES	248
5.3.1.	Figuras de lissajous.	249
5.3.2.	Oscilaciones acopladas.	249
5.3.3.	Oscilaciones amortiguadas.	250
5.3.4.	Oscilaciones forzadas.	251
5.4.	ONDAS PLANAS	252
5.5.	ONDAS ESFÉRICAS	252
5.6.	EFFECTO DOPPLER	253
5.7.	SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE IGUAL FRECUENCIA	254
5.8.	SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE DISTINTA FRECUENCIA	255
5.9.	ONDAS ESTACIONARIAS EN CUERDAS	255
5.10.	REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS EN CUERDAS TENSAS	256
5.11.	ONDAS ESTACIONARIAS EN TUBOS ABIERTOS Y CERRADOS	257
5.12.	INTERFERENCIA CONSTRUCTIVA Y DESTRUCTIVA DE ONDAS CIRCULARES	257
5.13.	EXPERIMENTO DE YOUNG	258
5.14.	PRINCIPIO DE HUYGENS	259
5.15.	PRISMAS	260
5.16.	ESPEJOS ESFÉRICOS Y PARABÓLICOS	261
5.17.	LENTES DELGADAS CONVERGENTES Y DIVERGENTES	262
5.18.	DIFRACCIÓN DE LA LUZ RENDIJAS SIMPLES	263
5.18.1.	Red de difracción.	264
5.18.2.	Difracción de fraunhofer.	264
5.18.3.	Difracción en una abertura rectangular	266
5.18.4.	Difracción en una abertura circular	267
5.18.5.	Fuentes puntuales	268

5.19.	ESPECTROS DE EMISIÓN Y ABSORCIÓN	268
5. 20.	MECÁNICA CUÁNTICA	270
5. 20.1.	Escalón de potencial.	270
5. 20.2.	Caja de potencial	271
5. 20.3	Oscilador armónico cuántico.	272
	CONCLUSIONES	274
	BIBLIOGRAFÍA	275

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.	Gráficos del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo en el M.A.S.	27
Figura 2.	Relaciones de energía en el M.A.S.	30
Figura 3.	Movimiento oscilatorio de un péndulo.	32
Figura 4.	Movimiento de un disco que rueda sin deslizar.	38
Figura 5.	Gráfica de la cicloide.	40
Figura 6.	Cicloide invertida.	40
Figura 7.	Gráfica de la cicloide y de la evoluta.	47
Figura 8.	Gráfica de la cicloide y de la evoluta. El segmento de recta CT.	48
Figura 9.	Gráfica de la cicloide y de la evoluta invertidas.	49
Figura 10.	Gráfica del péndulo cicloidal.	50
Figura 11.	Diagrama de fuerzas en el péndulo cicloidal.	51
Figura 12.	Relación de ángulos en la cicloide 1.	52
Figura 13.	Relación de ángulos en la cicloide 2.	52
Figura 14.	Péndulo doble.	55
Figura 15.	Péndulo compuesto.	68
Figura 16.	Discos de radio R y r	70
Figura 17.	Relación de distancias.	70
Figura 18.	Posición del centro de masa.	72
Figura 19.	Péndulo de torsión	74
Figura 20.	Superposición de dos M.A.S en fase.	77
Figura 21.	Superposición de dos M.A.S en oposición.	77
Figura 22.	. Superposición de dos M.A.S en cuadratura.	78
Figura 23.	Vector rotante de la elongación en el M.A.S.	78
Figura 24.	Vectores rotantes de la elongación, la velocidad y la aceleración en el M.A.S.	79
Figura 25.	Superposición de dos M.A.S de igual frecuencia.	80
Figura 26.	Composición de dos M.A.S de frecuencias diferentes	82
Figura 27.	Fluctuación en amplitud o pulsaciones.	82
Figura 28.	Pulsaciones cuando las amplitudes son iguales.	83
Figura 29.	Composición de dos M.A.S de la misma frecuencia pero en direcciones perpendiculares	84
Figura 30.	Trayectorias elípticas para diferencias de fase selectas	87
Figura 31.	Mecanismo que permite obtener las figuras de Lissajous.	87
Figura 32.	Figuras de Lissajous.	88
Figura 33.	Varios tipos de osciladores acoplados.	89
Figura 34.	Sistema de masas unidas por resortes	89

Figura 35.	Osciladores acoplados	90
Figura 36.	Modos normales de oscilación de dos osciladores acoplados idénticos	94
Figura 37.	Osciladores acoplados	95
Figura. 38.	Diagrama de fuerzas de dos masas acopladas por resortes	100
Figura. 39.	Péndulos simples acoplados por un resorte.	107
Figura. 40.	Fuerzas en dos péndulos simples acoplados por un resorte.	107
Figura. 41.	Amplitud modulada.	112
Figura 42.	Movimiento sobreamortiguado	114
Figura 43.	Movimiento críticamente amortiguado.	115
Figura 44.	Movimiento subamortiguado.	116
Figura 45	Oscilaciones forzadas	124
Figura 46.	Variación de la amplitud con la frecuencia de la fuerza aplicada.	125
Figura 47.	Variación de la amplitud con la frecuencia de la fuerza aplicada para diferentes valores del amortiguamiento	126
Figura 48.	Variación de la amplitud de la velocidad de la oscilación con la frecuencia de la fuerza aplicada.	127
Figura 49.	Resonancia pura.	130
Figura 50.	Onda plana propagándose en dirección al eje X.	131
Figura 51.	Onda plana propagándose en una dirección arbitraria.	132
Figura 52.	Frentes de onda para una onda plana armónica.	133
Figura 53.	Exposición “cuádruple” de un pulso esférico.	138
Figura 54.	Intensidad física en una onda plana.	139
Figura 55.	Nivel de intensidad producido por dos fuentes.	142
Figura 56.	Fuente de sonido entre dos observadores.	143
Figura 57.	Onda superficial en una membrana elástica.	145
Figura 58.	Fuerzas que se ejercen sobre un elemento de superficie de una membrana tensa.	146
Figura 59.	Efecto doppler	148
Figura 60.	Dos barcos con velocidad diferente uno como fuente y otro como observador	150
Figura 61.	Superposición de dos perturbaciones.	152
Figura 62.	Superposición de ondas armónicas en fase.	155
Figura 63.	Superposición de ondas armónicas fuera de fase.	155
Figura 64.	Ondas fuera de fase en $k\Delta x$.	157
Figura 65.	Ondas fuera de fase en $k\Delta x$.	157
Figura 66.	Onda estacionaria	158
Figura 67.	Cambio de fase de una onda reflejada en una cuerda que tiene un extremo fijo.	169
Figura 68.	Ondas estacionarias en una cuerda.	161

Figura 69.	Ondas estacionarias en un tubo	175
Figura 70.	Ondas estacionarias en un tubo cerrado.abierto.	176
Figura 71.	Ondas estacionarias en una cuerda que pasa por dos poleas y diagrama de cuerpo libre.	177
Figura 72.	Superposición de dos ondas armónicas de diferente frecuencia.	180
Figura 73.	Suma de fasores.	181
Figura 74.	Líneas nodales y ventrales resultantes de la interferencia de ondas producidas por dos fuentes idénticas.	183
Figura 75.	Superficies de desfase constante para ondas esféricas producidas por dos fuentes puntuales coherentes	186
Figura 76.	Interferencia destructiva de dos sonidos producidos por dos altavoces idénticos.	187
Figura 77.	Interferencia producida por dos fuentes coherentes.	189
	Experimento de Young de la doble rendija	
Figura 78.	Dibujo esquemático e Imagen de las franjas de interferencia	191
Figura 79.	Distribución de intensidad en un diagrama de interferencia producido por dos fuentes coherentes.	191
Figura 80.	Serie lineal de fuentes coherentes equidistantes	193
Figura 81.	Amplitud resultante en un punto arbitrario debido a la interferencia de ondas generadas por fuentes coherentes equidistantes dispuestas linealmente.	194
Figura 82.	Amplitud resultante en un punto arbitrario debido a la interferencia de ondas generadas por dos fuentes coherentes.	195
Figura 83.	Amplitud resultante en un punto de desfase nulo en la interferencia producida por fuentes equidistantes dispuestas linealmente.	196
Figura 84.	Patrón de interferencia de múltiples rendijas	197
Figura 85.	Distribución angular de la intensidad en el diagrama de interferencia	198
Figura 86	Interferencia por reflexión y refracción en una película delgada.	199
Figura 87.	Dispositivo utilizado para observar los anillos de Newton	202
Figura 88.	Interferencia producida por un haz de luz	204
Figura 89.	Difracción de Fraunhofer	205
Figura 90.	Interferencia sobre una pantalla	208
Figura 91.	Patrón de interferencia por una rendija	209
Figura 92.	Rendija dividida en pequeños segmentos de igual longitud	212
Figura 93.	Difracción de Fraunhofer en doble rendija	216
Figura 94.	Única rendija, máximos de intensidad sobre una pantalla	217
Figura 95.	Espectro de emisión del hidrógeno	223

Figura 96.	Espectro de absorción del hidrógeno.	224
Figura 97.	Esquema del potencial para la caja unidimensional.	227
Figura 98.	Niveles de energía (líneas discontinuas) y funciones de onda (líneas continuas) de la partícula en una caja monodimensional	228
Figura 99.	Escalón de potencial. La región prohibida es la región sombreada	231
Figura 100.	Función de onda para un escalón de potencial de altura E_0 , cuando la energía E de la partícula es menor que E_0 .	234
Figura 101.	Pared de potencial. La partícula no puede penetrar en la región $x>0$	225
Figura 102.	Función de onda para una pared de potencial.	236
Figura 103	(a) Energía potencial de un oscilador armónico. (b) Niveles de energía.	238
Figura 104.	Funciones de onda de los primeros cuatro niveles de energía o oscilador armónico.	241
Figura 105.	Densidades de probabilidad de los cuatro primeros niveles de energía de un oscilador armónico.	241
Figura 106.	Movimiento Armónico Simple	242
Figura 107.	Elongación	243
Figura 108	Velocidad	244
Figura 109.	Aceleración	244
Figura 110.	Energía	245
Figura 111.	Péndulo simple	246
Figura 112.	Equivalente dinámico y péndulo cicloidal	246
Figura 113.	Péndulo Doble	247
Figura 114.	Péndulos Acoplados	248
Figura 115.	Superposición de movimientos armónicos simples	248
Figura 116.	Figuras de lissajous	249
Figura 117.	Oscilaciones acopladas	250
Figura 118.	Oscilaciones amortiguadas	251
Figura 119.	Oscilaciones forzadas	251
Figura 120.	Ondas planas estacionarias	252
Figura 121.	Ondas esféricas	252
Figura 122.	Efecto doppler	253
Figura 123.	Superposición de ondas de igual frecuencia	254
Figura 124.	Superposición de ondas de distinta frecuencia	255
Figura 125.	Ondas estacionarias en cuerdas	255
Figura 126.	Reflexión y refracción en ondas en cuerdas tensas	256
Figura 127.	Ondas estacionarias en tubos abiertos y cerrados	257

Figura 128.	Interferencia constructiva y destructiva.	258
Figura 129	Experimento de Yung	259
Figura 130.	Principio de Huygens	260
Figura 131.	Prisma	261
Figura 132.	Espejos esféricos y parabólicos	262
Figura 133.	Lentes delgadas convergentes y divergentes	263
Figura 134.	Difracción en una rendija	263
Figura 135.	Red de difracción	264
Figura 136.	Red de difracción	265
Figura 137.	Difracción en una abertura rectangular	266
Figura 138.	Difracción en una abertura circular	267
Figura 139.	Fuentes puntuales	268
Figura 140.	Espectros	269
Figura 141.	Escalón de potencial	271
Figura 142.	Caja de potencial	271
Figura 143.	Simulación del Oscilador Armónico Simple	273

RESUMEN

Para la explicación de algunos procesos o fenómenos físicos, se presenta una dificultad, ya sea porque no se cuenta con los instrumentos a mano o por carencia de ellos para realizar demostraciones. Por lo mencionado, se ve la necesidad de elaborar un trabajo que ayude al docente a mejorar el proceso de enseñanza, de tal manera que la información sea más clara y convincente, además de hacer más interactiva la clase.

Este trabajo se centra en la elaboración de simulaciones de la física ondulatoria y algunas de física cuántica construidas bajo la programación orientada a objetos usando (FLASH).

Junto a las simulaciones se elaboró un texto de conceptos básicos y todo el desarrollo matemático de cada fenómeno, con la información necesaria para el pleno entendimiento de cada simulación, además; un manual de usuario con definiciones básicas y con las recomendaciones que facilitan la utilización del software correspondiente.

Este trabajo será de gran utilidad para docentes y estudiantes, que deseen verificar el comportamiento de algunos fenómenos físicos y quizás profundizar en estos.

SUMMARY

In the execution of the course of The Physical III there is great difficulty to explain some processes or physical phenomena, since they need of suitable spaces and appropriate instruments of laboratory; in many occasions he does not arrange of the place where the instruments are or simply one does not possess them to realize the demonstrations.

This work is an alternative that helps the teacher to improve the process of education, in such a way that the information be clear and convincing, allowing major participation of the students.

The work centres on the production of simulations of wave Physics and some of quantum physics, Interactive all of them with a good graphical environment. Designed under programming orientated to objects (FLASH).

Close to the simulations a text is had by the concepts and the mathematical development of every phenomenon, by the information necessary for the comprehension of every simulation; also it is clear of a user's manual with basic definitions and with the recommendations that they facilitate the utilization of the corresponding software.

This work will be of great usefulness for all the teachers and students who want to check and to deepen into the behavior of some physical phenomena.

INTRODUCCIÓN

El siguiente trabajo se ha elaborado para facilitar la comprensión de la Física Ondulatoria y algunos conceptos de Física Cuántica, a través de modelos creados por computador, con simulaciones interactivas que obedecen al comportamiento de un indeterminado número de fenómenos físicos.

Esta fusión entre el computador y la Física se denomina actualmente, la Física Computacional, que se centra en la elaboración de modelos por computador de sistemas mecánicos de modelos microscópicos en los cuales las "partículas" obedecen a una dinámica simplificada.

Las simulaciones se fundamentan en las ecuaciones que gobiernan el sistema físico. La física computacional tiene sus aplicaciones más relevantes en física del estado sólido, magnetismo, estructura electrónica, dinámica molecular, cambios de fase, etc.), física no lineal, dinámica de fluidos y astrofísica (simulaciones del sistema solar, por ejemplo)¹.

A través de la implementación de modelos de la física clásica y moderna, es posible recrear fenómenos que permitan visualizar los fenómenos tal como ocurren en la realidad.

En la enseñanza de la física se han implementado nuevas técnicas que permiten una gran interacción de los educandos en los procesos de formación, si no también, incentivando el espíritu investigativo.

El interés de esta investigación está centrado en la implementación de software para la enseñanza de la física ondulatoria. El movimiento ondulatorio aparece en casi todos los campos de la Física. Sin duda alguna, la noción más intuitiva que se tiene del movimiento ondulatorio está asociada con las ondas producidas por el viento o alguna otra perturbación sobre la superficie del agua.

¹ FRANCO GARCÍA, Ángel. Física con ordenador. En línea en <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>

Se oye un foco sonoro por medio de las ondas (ondas sonoras) que se propagan en el aire o en cualquier otro medio material- y las vibraciones del propio foco (ejemplos: la cuerda de una guitarra, la columna de aire en un tubo sonoro, etc.) constituyen una onda denominada onda estacionaria. Muchas de las propiedades de la luz se explican satisfactoriamente por medio de una teoría ondulatoria, estando firmemente establecido hoy día que las ondas luminosas tienen la misma naturaleza que las ondas de radio, las radiaciones infrarrojas y ultravioletas, los rayos X y la radiación gamma.

Como continuación de la mecánica ondulatoria se aborda una parte de la mecánica cuántica, conocida también como mecánica ondulatoria y como física cuántica. La mecánica cuántica es una de las ramas principales de la física que explica el comportamiento de la materia. Su campo de aplicación pretende ser universal, pero es en lo pequeño donde sus predicciones divergen radicalmente de la llamada física clásica. Además, las velocidades de las partículas constituyentes no deben ser muy altas, o próximas a la velocidad de la luz.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Siempre que se trabaja la asignatura de Física III en la Universidad Tecnológica de Pereira se busca la manera de recrear ciertos fenómenos que ayuden a la comprensión de los conceptos, pero la mayoría de veces no es posible por los espacios y la disponibilidad de los instrumentos necesarios, también se deben realizar representaciones gráficas, las cuales requieren de un valioso tiempo de la clase, siendo un obstáculo para el buen desarrollo del curso. De ahí la idea de generar un proyecto que satisfaga completamente las dificultades, por esta razón se hace el siguiente cuestionamiento:

Después de una revisión exhaustiva de los conceptos y fundamentos necesarios en el curso de Física III, se decide crear modelos Físicos por computador, de sistemas mecánicos y microscópicos que permitan acercar el conocimiento a la realidad.

Este trabajo permitirá una gran interacción de los estudiantes y profesores en los procesos de formación, además de fomentar el espíritu investigativo.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Se podrá desarrollar un método efectivo y confiable en la creación de un software que garantice el buen desempeño de los estudiantes en la signatura de física III de la Universidad Tecnológica de Pereira?

2. JUSTIFICACIÓN

Siempre que se trabaja un curso de Física o se desea explorar en alguna rama de la física, existe la necesidad de contar con un espacio apropiado y planear con mucha anticipación demostraciones que faciliten el entendimiento y que promuevan el espíritu investigativo de los estudiantes. En el caso de exploraciones en física se necesita recrear las condiciones físicas que se parezcan o sean iguales a lo que acontece en la realidad.

Para realizar algunas demostraciones o explorar en determinados campos de la Física

Se requiere de un laboratorio equipado o de un software adecuado para laboratorio de Física virtual, lo cual se hace difícil por cuestiones de espacio o de presupuesto, además de que no siempre se puede disponer de los laboratorios en las instituciones que si están dotados apropiadamente.

Debido a los inconvenientes mencionados y el afán por hacer dela asignatura de FÍSICA III, un curso interactivo, que despierte más el interés de los estudiantes por el estudio de la física, se han creado una serie de simulaciones de algunos fenómenos físicos provistos de un adecuado y atractivo entorno gráfico, en el cual se puedan cambiar los valores de las variables físicas implicadas, para ver los posibles cambios en el fenómeno físico.

Con el trabajo será más fácil la comprensión y entendimiento de la Física ondulatoria; además permitirá la ejecución total del curso de FÍSICA III.

El trabajo inicialmente estará a disposición de los estudiantes y profesores de la Universidad Tecnológica de Pereira.

Próximamente se encontrará en la red, al servicio de la comunidad de nuestro país, como una herramienta útil en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Física Ondulatoria. También se espera que sirva de referente y estímulo para el desarrollo de nuevo software encaminado a mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje en diferentes ramas de la física.

3. OBJETIVOS

3.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar un software, que facilite la comprensión de la física ondulatoria.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Determinar el lenguaje de programación orientada a objetos apropiado para la implementación del software.

Utilizar técnicas adecuadas en la implementación de las simulaciones; que las hagan más atractivas e interactivas con el usuario.

Implementar un manual del usuario para el manejo del software.

4. MARCO REFERENCIAL

4.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Con relación a la computadora como herramienta esencial y que prácticamente se emplea en todos los campos de investigación, puede comentarse que desde finales de la década de los ochenta e inicios de los noventa, en la Física se han creado laboratorios virtuales con los programas Dinamic , Mobile y distintos simuladores desarrollados en el entorno Interactive Physics. La aplicación Dinamic se creó inicialmente bajo el sistema operativo MS- DOS, a partir de allí salieron nuevas versiones bajo WINDOWS. Dinamic trabaja la dinámica en dos dimensiones bajo distintos campos de fuerza. La aplicación Mobile se constituye técnicamente en una versión evolucionada de Dinamic. Mobile incorpora bases de datos, que son fuente de gran ayuda para los alumnos y docentes.

Interactive Physics programa educativo premiado por Desing Simulation Technologies. Aquí se puede modelar, simular y explorar una gran variedad de fenómenos físicos, sin necesidad de programar, sólo se debe manejar correctamente el entorno gráfico.

Actualmente, está el programa Algodoo, que permite hacer los gráficos y modelar los sistemas físicos. Una de las grandes ventajas de Algodoo, es que permite a través de pantallas táctiles crear los gráficos de los sistemas que se desean simular, sin necesidad de que sean líneas totalmente uniformes; es como hacer un dibujo a mano alzada.

Un importante antecedente de este trabajo se encuentra en el Curso Interactivo de Física en Internet, llamado física con computador². Es un curso de Física general que trata desde conceptos simples como el movimiento rectilíneo hasta otros más complejos como las bandas de energía de los sólidos. La interactividad se logra mediante los 545 applets insertados en sus páginas webs que son simulaciones de sistemas físicos, prácticas de laboratorio, experiencias de gran relevancia histórica, problemas interactivos, problemas-juego, etc.

² FRANCO GARCÍA, Ángel. Física con ordenador. En línea en <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm>

Así mismo, la revista mexicana de física en el artículo Física computacional: una propuesta educativa³ donde se muestra que hay problemas típicos en la enseñanza que no pueden ser completamente explicados y entendidos en el tablero, porque presentan comportamientos complejos, tales como no linealidades o muchos grados de libertad, razón por la cual, no tienen solución analítica. En este caso la física computacional es un método de enseñanza que, en la práctica, incluye el contenido de los cursos tradicionales de programación y métodos numéricos. En este artículo se pretende abordar algunos aspectos que permitan conformar lo que se llama "educación algorítmica". Presentando algunos problemas tradicionales de la enseñanza que, para la mejor comprensión de conceptos y elaboración de modelos apoyados en algoritmos numéricos y visuales que los mismos estudiantes pueden implementar.

Usando ciertos módulos elementales de programación se propone una estrategia para construir modelos a partir de una interpretación pre-diferencial que puede ser muy útil. La propuesta consiste en que, empleando pocos elementos y recursos matemáticos, se puedan construir modelos de simulación, cada vez más elaborados, de los sistemas tradicionales de la física. Específicamente al implementar la educación algorítmica, se usa el lenguaje python para desarrollar temas que van desde una partícula libre y un oscilador amortiguado, hasta un gas ideal o de esferas duras, además del movimiento browniano. En cada uno de los casos se usan los mismos módulos elementales de programación

Por último puede mencionarse el trabajo “Un Applet de nuevo tipo para la Física General”⁴ donde se analiza la simulación de un patrón de interferencia muy conocido en la Física general, específicamente en la óptica, obtenido con el dispositivo de Young de la doble abertura. La simulación permite comparar los patrones de interferencia de cuatro fuentes de luz, así como la dependencia de este con la separación entre las dos rendijas y con la distancia entre las pantallas.

³J.F. ROJAS y otros. Física computacional: una propuesta educativa. Revista mexicana de física. Volumen 55 n.1 México junio 2009

⁴A Carlos u ALFONSO, Alejandro. Un Applet de nuevo tipo para la Física General. Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Cuba. Departamento de Física. Autor: En línea en http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_1/nr_510/a_7082/7082.htm

A diferencia de otras similares publicadas en Internet, esta permite realizar mediciones precisas de las posiciones lineales de máximos o mínimos, con un micrómetro ocular muy similar a los que se encuentran en los laboratorios reales y por tanto permite aplicar la teoría de errores y expresar los resultados por intervalos de confianza.

4.2. MARCO CONCEPTUAL

La física computacional se centra en la elaboración de modelos por computador de sistemas mecánicos de modelos microscópicos y macroscópicos en los cuales las "partículas" obedecen a una dinámica simplificada.

Las simulaciones se basan en la solución de las ecuaciones que gobiernan el sistema físico a modelar.

A través de la implementación de modelos de la física clásica y moderna, es posible recrear fenómenos que permitan visualizar e interpretar los fenómenos tal como ocurren en el mundoreal.

En la enseñanza de la física se han implementado nuevas técnicas que permiten una gran interacción de los educandos en los procesos de formación, si no también, incentivando el espíritu investigativo.

El interés de este trabajo está centrado en la implementación de software para la enseñanza de física ondulatoria.

4.2.1. Física ondulatoria. El comportamiento ondulatorio se presenta en casi todos los fenómenos físicos, como por ejemplo, cuando golpeamos una campana o encendemos la radio, el sonido se escucha en lugares distantes de la campana o de la radio. Si arrojamos una piedra a un estanque se observa que en el agua se forma una ondulación y que esta se propaga. Cuando se enciende la lámpara de un cuarto este se ilumina. Las imágenes producidas en un estudio de televisión viajan a través del espacio hasta los receptores que se encuentran en nuestros hogares. Todo los procesos mencionados tienen algo en común: son situaciones físicas producidas en un punto del espacio que se propagan a través del mismo y se reciben en otro punto. Todos estos procesos son ejemplos del movimiento ondulatorio o dicho de otra manera son ondas.

Uno de los progresos más importantes de la Física del siglo XX ha sido el descubrimiento de que toda la materia está dotada de propiedades ondulatorias (*ondas de materia*) y que, por ejemplo, un cristal difracta del mismo modo un haz de electrones que un haz de rayos X.

En este tema se centra la atención en las ondas que se propagan en los medios deformables o medios elásticos. Tales ondas, entre las que se encuentran las ondas sonoras ordinarias, pueden denominarse ondas mecánicas y se originan al desplazarse alguna porción de un medio elástico de su posición normal, iniciándose así una oscilación respecto a su posición de equilibrio. Entonces, debido a las propiedades elásticas del medio material, la perturbación original se transmite a las porciones de materias vecinas, y de éstas a las siguientes, y así sucesivamente, de modo que la perturbación se *propaga* por el medio, alcanzando a todas las porciones de éste, que quedarán sometidas a movimientos análogos al del punto donde se inició la perturbación. Obviamente, todos los puntos del medio no serán alcanzados simultáneamente por la perturbación, ya que ésta se *propaga* con una velocidad finita que depende de las propiedades (elásticas e iniciales, como se verá más adelante) del medio, de modo que las partículas más alejadas del origen de la perturbación comenzarán a moverse con un cierto retraso. En definitiva, puede decirse que: la propagación de una perturbación en un medio constituye un movimiento ondulatorio.

El movimiento ondulatorio transporta energía. Este transporte de energía, que puede tener lugar a distancias considerables, se realiza sin *necesidad de desplazamiento* de materia a gran distancia, ya que cada elemento del medio transmite energía a los elementos vecinos.

Para que se propaguen las ondas mecánicas es necesario tener como soporte un medio material. Sin embargo, no es necesario tal medio para la propagación de ondas electromagnéticas, que pueden propagarse en el vacío, aunque también se propagan en los medios materiales. Las propiedades del medio material que determinan la velocidad de las ondas mecánicas en él son su *elasticidad* y su *inercia*. Todos los medios materiales (aire, agua, acero, etc.) poseen esas propiedades y en ellos pueden propagarse las ondas mecánicas. Es la *elasticidad* la que da lugar a las fuerzas restauradoras sobre cualquier elemento que se desplaza de su posición de equilibrio; es la *inercia* la que determina la respuesta a esas fuerzas restauradoras.

El término de onda, como se tendrá ocasión de comprobar, se refiere a un modelo matemático que sirve para interpretar de manera análoga fenómenos físicos de naturaleza muy diferente.

Como continuación de la mecánica ondulatoria se aborda una parte de la mecánica cuántica, conocida también como **mecánica ondulatoria** y como **física cuántica**. La mecánica cuántica es una de las ramas principales de la física que explica el comportamiento de la materia. Su campo de aplicación pretende ser universal, pero es en *lo pequeño* donde sus predicciones divergen radicalmente de la llamada física clásica. Su historia es inherente al siglo XX, ya que la primera formulación *cuántica* de un fenómeno fue dada a conocer un 17 de diciembre de 1900 en una sección de la Sociedad Física de la Academia de Ciencias de Berlín por el científico alemán Max Planck.

La mecánica cuántica rompe con cualquier paradigma de la física hasta ese momento, con ella se descubre que el mundo atómico no se comporta como se esperaba en la mecánica clásica. Los conceptos de incertidumbre, indeterminación o cuantización son introducidos por primera vez aquí. Además la mecánica cuántica es la teoría científica que ha proporcionado las predicciones experimentales más exactas hasta el momento, a pesar de su carácter probabilístico.

Para abordar el estudio de esta parte de la física se hace el siguiente cuestionamiento:

- ¿Se podrá desarrollar un método efectivo y confiable en la creación de un software que garantice el buen desempeño de los estudiantes en la signatura de física III de la Universidad Tecnológica de Pereira?
- ¿Qué lenguaje de programación orientada a objetos se va a utilizar?
- ¿Qué experimentos se van a simular?
- ¿Cómo debe ser la interfaz de usuario para la presentación del software ?.

Después de una revisión exhaustivase decidió orientar nuestro trabajo en la siguiente temática:

- Movimiento Armónico Simple.
- Péndulo Simple.
- Péndulo Cicloidal.

- Péndulo Doble.
- Péndulos Acoplados.
- Superposición de Movimientos Armónicos Simples.
- Figuras de Lissajous.
- Oscilaciones Acopladas.
- Oscilaciones Amortiguadas.
- Oscilaciones Forzadas.
- Resonancia.
- Ondas Planas.
- Ondas Esféricas.
- Efecto Doppler.
- Superposición de ondas de igual frecuencia.
- Superposición de ondas de distinta frecuencia.
- Ondas estacionarias en cuerdas.
- Reflexión y refracción de ondas en cuerdas tensas.
- Ondas estacionarias en tubos abiertos y cerrados.
- Interferencia constructiva y destructiva de ondas circulares.
- Experimento de Young.
- Principio de Huygens.
- Prismas.
- Espejos esféricos y parabólicos.
- Lentes delgadas convergentes y divergentes.
- Difracción de la luz en rendijas simples.
- Red de difracción.
- Difracción de Fraunhofer.
- Difracción en una abertura rectangular.
- Difracción en una abertura circular.
- Fuentes puntuales.
- Espectros de emisión y absorción.
- Ecuación de Schrödinger Caja de Potencial.
- Ecuación de Schrödinger Pozo de Potencial.
- Ecuación de Schrödinger Barrera de Potencial.
- Ecuación de Schrödinger Oscilador Armónico.

4.3. MARCO TEÓRICO

4.3.1. Movimiento Armónico Simple. Un móvil está animado de *movimiento vibratorio* u *oscilatorio* cuando se desplaza a uno y otro lado de una posición fija siguiendo una ley cualquiera. El émbolo de una locomotora, por ejemplo, está animado de movimiento oscilatorio.

De todos los movimientos oscilatorios, el más sencillo pero no menos importante, es el *movimiento armónico simple* (M.A.S), debido a que constituye una aproximación muy cercana de muchas oscilaciones encontradas en la naturaleza. Por definición, se dice que una partícula que se mueve a lo largo del eje de las X tiene un movimiento armónico simple cuando su desplazamiento x respecto al origen del sistema de coordenadas está dado en función del tiempo por la relación:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

La cantidad $\omega t + \alpha$ se denomina *fase*, y por ello α es la fase inicial; esto es su valor cuando $t = 0$. Aunque se ha definido el movimiento armónico simple en función de una expresión *senoidal*, puede igualmente expresarse en función de una expresión *cosenoidal*, el único cambio sería una diferencia inicial de fase en $\pi/2$.

La distancia x que separa la partícula del origen del sistema de referencia se denomina *elongación*, y puesto que la función seno o coseno varía entre +1 y -1, la elongación de la partícula varía entre $x = -A$ y $x = +A$. La elongación máxima a partir del origen, A , se define como la *amplitud* del movimiento armónico simple.

El M.A.S es periódico porque se reproduce exactamente cada vez que transcurre un intervalo de tiempo determinado T , llamado *período*. El período puede encontrarse por medio de la expresión:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (2)$$

En efecto, si en el tiempo t , la posición de la partícula es $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, entonces en un tiempo $t' = t + T$ la nueva posición será $x' = A \operatorname{sen}(\omega t' + \alpha)$, o bien:

$$x' = A \operatorname{sen}(\omega t' + \alpha) = A \operatorname{sen}[\omega(t+T) + \alpha] = A \operatorname{sen}[(\omega t + \alpha) + \omega T]$$

De la ecuación (2) se deduce que $\omega T = 2\pi$, por lo que:

$$x' = A \operatorname{sen}[(\omega t + \alpha) + 2\pi] = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \text{ y así: } x' = x$$

Entonces, después de transcurrido un tiempo igual a T , la partícula vuelve a ocupar la misma posición que tenía antes.

El movimiento de la partícula desde un extremo de la trayectoria hasta el otro se llamará *oscilación sencilla*, mientras que el movimiento desde un extremo al otro de la trayectoria y regreso al punto de partida se llamará *oscilación completa*. De esta manera, el período es el tiempo que tarda la partícula en efectuar una oscilación completa.

La *frecuencia* f de un movimiento armónico simple es igual al número de oscilaciones completas por unidad de tiempo; así $f = 1/T$. La cantidad ω , denominada *frecuencia angular* de la partícula oscilante, está relacionada con la frecuencia por medio de:

$$\omega = 2\pi f \quad (3)$$

La velocidad de la partícula se obtiene derivando respecto al tiempo la ecuación (1):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)]$$

$$v = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

Similarmente, la aceleración está dada por:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}[\omega A \cos(\omega t + \alpha)]$$

$$a = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (5) se ve fácilmente que.

$$a = -\omega^2 x \quad (6)$$

La cual indica que en el movimiento armónico simple la aceleración es siempre proporcional y opuesta al desplazamiento. En la figura 1, se ilustra x , v y a en función del tiempo.

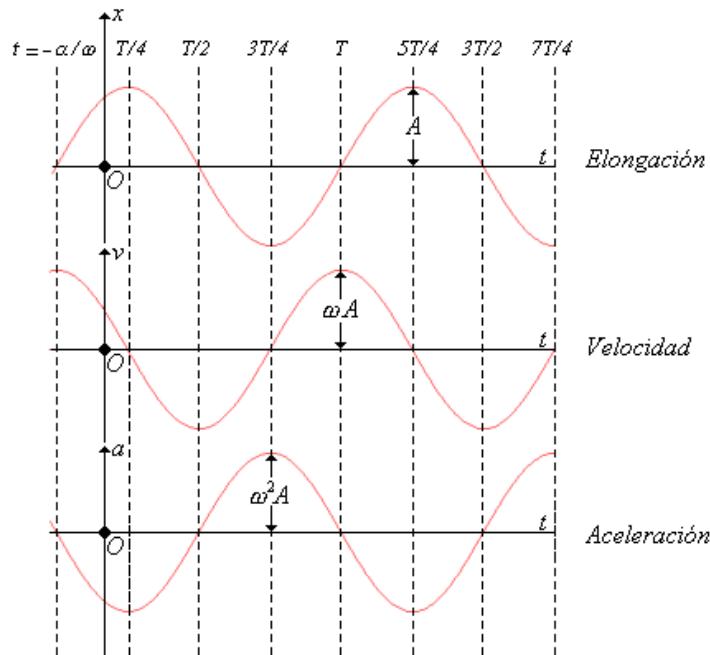


Figura 1. Gráficos del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en función del tiempo en el M.A.S.

Fuerza y energía en el movimiento armónico simple. Aplicando La segunda ley de Newton $F = ma$, y sustituyendo el resultado de la ecuación (6) el cual nos da la aceleración, se tiene:

$$F = -m\omega^2 x = -kx \quad (7)$$

donde se ha definido:

$$k = m\omega^2 \quad (8)$$

Y por tanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

La ecuación (7) indica que *en el movimiento armónico simple la fuerza es proporcional al desplazamiento, y opuesta a él*. Por ello siempre la fuerza está dirigida hacia el origen O. Este es el *punto de equilibrio* ya que en el origen $F = 0$, por ser $x = 0$. Se puede también decir que la fuerza F es de atracción, siendo el punto de atracción el punto O. La fuerza dada por la ecuación (7) es el tipo de fuerza que aparece cuando se deforma un cuerpo elástico tal como un resorte. La constante $k = m\omega^2$, llamada algunas veces *constante elástica*, representa la fuerza necesaria para desplazar la partícula una unidad de distancia. Combinada con las ecuaciones (2) y (3) se puede escribir las ecuaciones:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (10)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

Que expresan el período y la frecuencia de un movimiento armónico simple en función de la masa de la partícula y la constante elástica de la fuerza aplicada.

La energía cinética de la partícula es:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \quad (12)$$

O bien, ya que $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$, y usando la ecuación (1) para el desplazamiento, se puede también expresar la energía cinética en función del desplazamiento por medio de la relación:

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 [1 - \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha)] = \frac{1}{2} m \omega^2 \{A^2 - [A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)]^2\}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 - x^2) \quad (13)$$

Obsérvese que la energía cinética es un máximo en el centro ($x = 0$) y cero en los extremos de oscilación ($x = \pm A$).

Para obtener la energía potencial se usa el hecho (campo conservativo) $F = -dE_p / dx$. Teniendo en cuenta la ecuación (7) de la fuerza se obtiene:

$$dE_p / dx = kx$$

Integrando (escogiendo el cero de la energía potencial en el origen o posición de equilibrio) resulta:

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_0^x kx dx$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (14)$$

Por consiguiente, la energía potencial es un mínimo (cero) en el centro ($x = 0$) y aumenta a medida que la partícula se aproxima a los extremos de las oscilaciones ($x = \pm A$). Sumando las dos últimas ecuaciones se obtiene la siguiente expresión para la *energía total* del oscilador armónico simple:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (15)$$

La cual es una constante. Esto era de esperarse, ya que la fuerza es conservativa. Por lo tanto, se puede decir que, durante una oscilación hay un intercambio continuo de energías potencial y cinética. Al alejarse de la posición de equilibrio, la energía potencial aumenta a expensas de la energía cinética; lo inverso sucede cuando la partícula se acerca hacia la posición de equilibrio.

La figura 2, muestra la energía potencial, $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

Representada por una parábola. Para una energía total dada E , correspondiente a la línea horizontal, los límites de la oscilación están determinados por sus intersecciones con la curva de energía potencial.

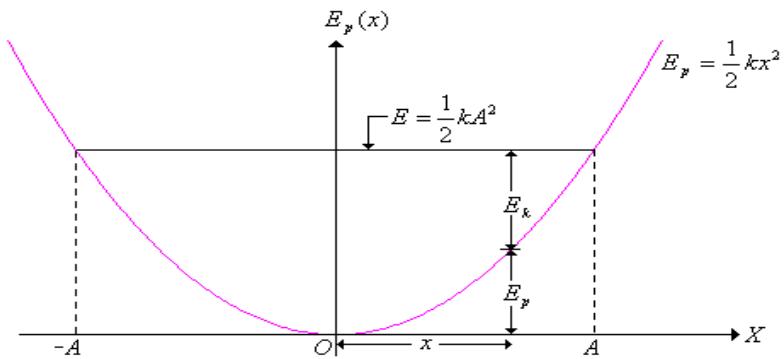


Figura 2. Relaciones de energía en el M.A.S.

Como la parábola E_p es simétrica, los límites de oscilación se encuentran a distancias iguales $\pm A$ del origen O . En cualquier punto x la energía cinética E_k está dada por la distancia entre la curva $E_p(x)$ y la línea E .

Dinámica del movimiento armónico simple. En la sección anterior se definió el movimiento armónico simple mediante sus propiedades cinemáticas expresadas por la ecuación (1). Sólo posteriormente se discute la clase de fuerza necesaria para producir tal movimiento (dada por la ecuación (7)). Sin embargo, es importante discutir el problema inverso: Se demostrará que dada una fuerza de atracción proporcional al desplazamiento (esto es, $F = -kx$), el movimiento resultante es armónico simple.

Un procedimiento consiste en usar la ecuación de movimiento, $F = ma$, considerando $F = -kx$, y, recordando que en un movimiento rectilíneo $a = d^2x/dt^2$, rescribir la ecuación:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

O bien:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Haciendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$, se puede escribir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (16)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal y homogénea cuyas soluciones se conocen que son funciones de senos o cosenos de ωt . Sustituyendo en lugar de x el valor de $A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, se puede verificar directamente que esta expresión de x , que corresponde al movimiento armónico simple, satisface la ecuación (16). Por consiguiente, se dice que $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$ es la solución general de la ecuación (16) ya que tiene dos constantes arbitrarias, la Amplitud A y la fase inicial α . Por lo tanto, se verifica el hecho de que una fuerza de atracción proporcional al desplazamiento produce movimiento armónico simple.

Ejemplo: Discutir la solución de la ecuación (16) del movimiento armónico simple en función del desplazamiento inicial x_o y la velocidad inicial v_o .

Solución: Se ha indicado que la solución general de la ecuación (16) es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

Luego, la velocidad es $v = dx/dt = \omega A \cos(\omega t + \alpha)$. Por tanto, para $t = 0$, tenemos:

$$x_o = A \operatorname{sen}\alpha$$

$$v_o = \omega A \cos\alpha$$

Dividiendo se obtiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_o}{v_o}$$

Además:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{x_o}{A} \right)^2 + \left(\frac{v_o}{\omega A} \right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega^2 x_o^2 + v_o^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$\omega^2 A^2 = \omega^2 x_o^2 + v_o^2$$

$$A = \sqrt{x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega} \right)^2} \quad , \text{ la energía total será: } E = \frac{1}{2} k \left[x_o^2 + \left(\frac{v_o}{\omega} \right)^2 \right]$$

4.3.2. Péndulo Simple. Un péndulo simple se define como una partícula de masa m suspendida del punto O por una cuerda de longitud l y de masa despreciable, ver figura 3.

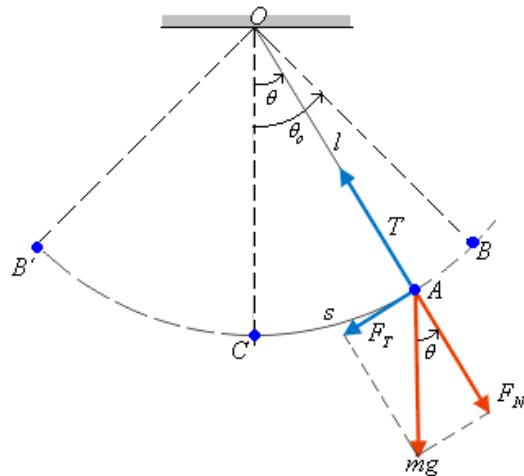


Figura 3 . Movimiento oscilatorio de un péndulo.

Si la partícula se lleva a la posición B de modo que la cuerda haga un ángulo θ , con la vertical OC , y luego se suelta, el péndulo oscilará entre B y la posición simétrica B' .

Para determinar la naturaleza de las oscilaciones, se debe escribir las ecuaciones, se debe escribir la ecuación de movimiento de la partícula. La partícula se mueve en un arco de círculo de radio $l = OA$. Las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso y la tensión a lo largo de la cuerda. De la figura 3, se ve que la componente tangencial de la fuerza es:

$$F_T = -mg \sin\theta$$

Donde el signo menos se debe a que se opone al desplazamiento $s = CA$. La ecuación del movimiento tangencial es $F_T = ma_T$, y como la partícula se mueve a lo largo de una circunferencia de radio l , se puede escribir:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(l\theta)}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} = l\omega$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega l)}{dt} = l \frac{d\omega}{dt} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La ecuación del movimiento tangencial es por consiguiente:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta$$

O bien:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (17)$$

Esta ecuación no es del mismo tipo que la ecuación (16) debido a la presencia del $\sin\theta$. Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, lo cual es cierto si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, se puede aproximar $\sin\theta \approx \theta$, para $\theta < 10^\circ$ medidos en radianes obteniéndose para la ecuación del péndulo simple:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Esta es la ecuación diferencial idéntica a la ecuación (16) si se reemplaza x por θ , esta vez refiriéndonos al movimiento angular y no al movimiento lineal. Por ello se puede llegar a la conclusión que, dentro de nuestra aproximación, el movimiento angular del péndulo es armónico simple con $\omega^2 = g/l$. El ángulo θ puede expresarse en la forma $\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$. Entonces, usando la ecuación $T = 2\pi/\omega$, el período de oscilación está dado por la expresión:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18)$$

Nótese que el período es independiente de la masa del péndulo. Para mayores amplitudes, la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ no es válida. En tal caso la fórmula general del período, depende de la amplitud θ_0 . Para obtener la fórmula general del período, se hace:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (17):

$$\omega \frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta$$

$$\omega d\omega = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta d\theta$$

Integrando, se obtiene:

$$\int \omega d\omega = -\frac{g}{l} \int \operatorname{sen}\theta d\theta + C$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{l} \cos\theta + C$$

Cuando $\theta = \theta_o$, $\omega = d\theta/dt = 0$, entonces: $C = -\frac{g}{l} \cos \theta_o$, y de esta manera:

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_o)$$

O bien:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_o)}$$

Si se restringe el movimiento de manera que el péndulo se mueva de $\theta = \theta_o$ a 0, lo cual corresponde en tiempo a una cuarta parte del período, se debe tomar el signo menos y entonces:

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\theta_o}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos \theta - \cos \theta_o)}}$$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_o}}$$

Haciendo uso de la identidad: $\cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$, se puede escribir:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_o} \frac{d\theta}{\sqrt{2\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta_o/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)}}}$$

Haciendo la sustitución: $\operatorname{sen}(\theta/2) = k \operatorname{sen}\phi$, siendo: $k = \operatorname{sen}(\theta_o/2)$

Se obtiene:

$$\operatorname{sen}^2(\theta_o/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2) = k^2 - k^2 \operatorname{sen}^2\phi = k^2(1 - \operatorname{sen}^2\phi) = k^2 \cos^2\phi$$

$$\frac{1}{2} \cos(\theta/2) d\theta = k \cos\phi d\phi$$

$$d\theta = \frac{2k \cos \phi \ d\phi}{\cos(\theta/2)}$$

$$d\theta = \frac{2k \cos \phi \ d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta/2)}}$$

$$d\theta = \frac{2k \cos \phi \ d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

Además, cuando $\theta = 0$, $\phi = 0$, y cuando $\theta = \theta_o$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, de esta manera:

$$T = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k \cos \phi} \frac{2k \cos \phi \ d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

Nótese que si se tienen pequeñas oscilaciones, es decir si k es cero o tiende a cero, entonces se obtiene para el período:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

El *teorema del binomio* establece que si $|x| < 1$, entonces:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Si $n = -\frac{1}{2}$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} x^3 + \dots$$

Haciendo $x = -k^2 \operatorname{sen}^2 \phi$, se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \phi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 \operatorname{sen}^4 \phi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} k^6 \operatorname{sen}^6 \phi + \dots$$

De esta manera:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \phi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} k^4 \operatorname{sen}^4 \phi + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} k^6 \operatorname{sen}^6 \phi + \dots \right] d\phi$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 k^6 + \dots \right]$$

donde se ha usado la fórmula de integración:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} \phi \, d\phi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2}$$

La fórmula del período del péndulo simple puede también escribirse como:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(\theta_o/2) + \frac{9}{64} \operatorname{sen}^4(\theta_o/2) + \frac{25}{256} \operatorname{sen}^6(\theta_o/2) + \dots \right] \quad (19)$$

Para pequeñas amplitudes es suficiente tomar el primer término correctivo, y aun sustituir $\frac{1}{2} \theta_o$ por $\operatorname{sen}(\theta_o/2)$, obteniéndose:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_o^2 \right) \quad (20)$$

donde θ_o se expresa en radianes. Esta es una aproximación suficiente para la mayor parte de las situaciones prácticas. De hecho, el término $\theta_o^2/16$ representa menos del 1% para amplitudes menores de 23° .

4.3.3. Péndulo Cicloidal. Como puede verse existe un diseño especial en el cual el período de un péndulo es independiente de la amplitud. Este diseño recibe el nombre de *péndulo cicloidal*.

La *cicloide* es una curva generada por un punto sobre un disco, cuando éste rueda sin deslizar a lo largo de una línea recta. Si a es el radio del disco y el punto se encuentra a una distancia b del centro, con $b < a$, la trayectoria descrita por el punto se denomina *trocoide* (en griego, “rueda” es *trocos*).

Para estudiar estos dos tipos de movimientos, se escoge como eje X a la línea sobre la cual rueda el disco, mientras que el eje Y se escoge de tal forma que pase por el punto más bajo de la trayectoria tal como se ilustra en la figura siguiente. Se acostumbra tomar como parámetro el ángulo φ girado por el vector de posición $\mathbf{r} = \mathbf{CP}$. Como el disco rueda sin deslizar, la distancia \overline{OM} recorrida por el disco horizontalmente es igual al arco circular $MQ = a\varphi$ (Si el disco gira hacia atrás, Q caerá en el origen O). Por tanto, las coordenadas x, y del punto P sobre la trocoide son:

$$x = \overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN} = \text{arco}(MQ) + \overline{CR} = a\varphi + \overline{CP} \cos \theta$$

$$y = \overline{PN} = \overline{PR} + \overline{RN} = \overline{PR} + \overline{CM} = \overline{CP} \sin \theta + a$$

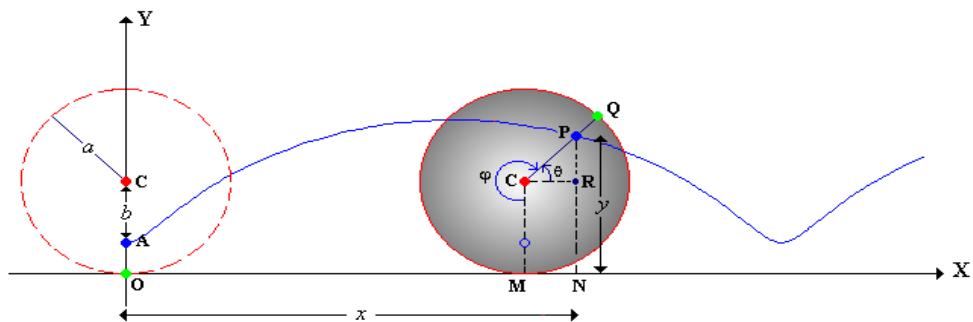


Figura 4. Movimiento de un disco que rueda sin deslizar.

Observando la figura anterior se deduce que:

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - \varphi$$

Además:

$$\overline{CA} = \overline{CP} = b$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la trocoide son:

$$x = a\varphi + b \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$y = b \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) + a$$

Teniendo en cuenta que:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -\sin \varphi$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = -\cos \varphi$$

Se pueden simplificar las ecuaciones de la trocoide de la siguiente manera:

$$x = a\varphi - b \sin \varphi \quad (21)$$

$$y = a - b \cos \varphi \quad (22)$$

Las ecuaciones paramétricas de la cicloide se obtienen de las ecuaciones anteriores haciendo $a = b$:

$$x = a(\varphi - \sin \varphi) \quad (23)$$

$$y = a(1 - \cos \varphi) \quad (24)$$

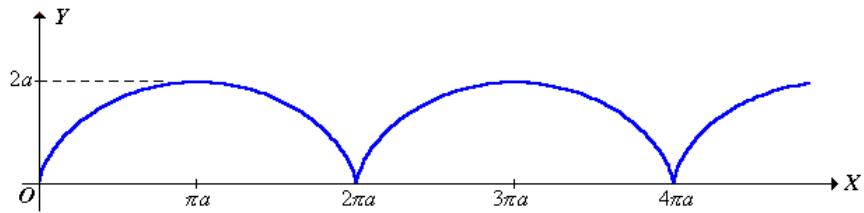


Figura 5. Gráfica de la cicloide.

Si se refleja la cicloide y el eje y respecto al eje x, las ecuaciones (23) y (24) siguen conservando su validez. La figura 5, resultante tiene varias propiedades interesantes, una de las cuales se discutirá ahora sin demostración. Las demostraciones pertenecen a una rama de las matemáticas conocida como el *cálculo de variaciones*. Gran parte de la teoría básica de este problema se debe a los hermanos *Bernoulli*, *Jhon* y *James*, que competían amistosamente y se estimulaban el uno al otro proponiéndose problemas matemáticos. Uno de estos problemas, el de la *braquistocróna*, que consiste en determinar la curva, entre todas las líneas suaves que unen dos puntos dados, para encontrar aquella en la cual una partícula sujetada solamente a la fuerza de la gravedad, deslice en el menor tiempo.

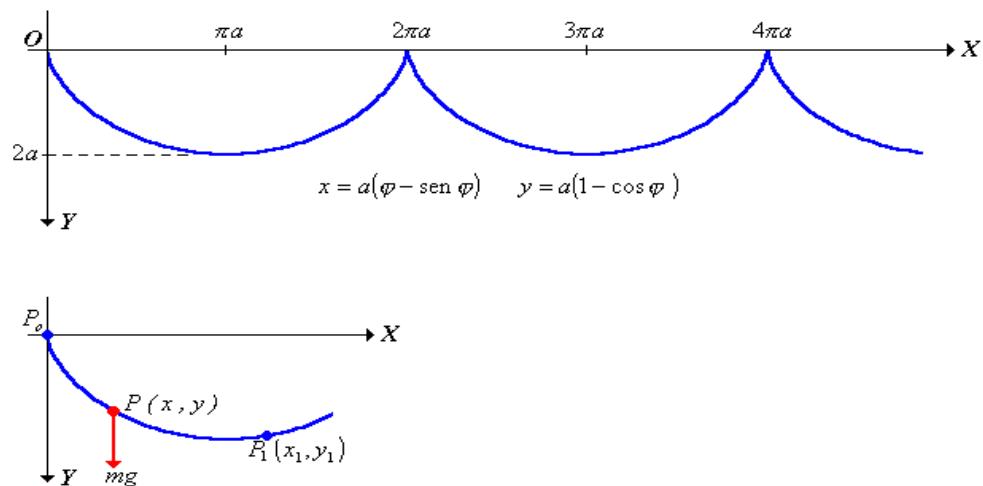


Figura 6. Cicloide invertida

Los dos puntos, rotulados P_o y P_1 (Fig. 6). Se hallan en un plano vertical, y se sitúan en el origen y en (x_1, y_1) , respectivamente. El problema se formula en términos matemáticos como sigue. La energía cinética de la partícula en el instante inicial es nula, ya que su velocidad es cero. El trabajo realizado por la gravedad para mover la partícula desde $(0,0)$ hasta un punto cualquiera (x, y) es mgy , que ha de ser igual al cambio en la energía cinética. Esto es,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

Así, la velocidad $v = ds/dt$ de la partícula cuando llega al punto $P(x, y)$ es $v = \sqrt{2gy}$

Esto es:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

O bien:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

El tiempo t_1 requerido por la partícula para ir desde P_o a P_1 depende de la curva particular $y = f(x)$ a lo largo de la cual se mueve, y esta dado por:

$$t_1 = \int_o^{x_1} \frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{2g f(x)}} dx \quad (25)$$

El problema consiste en hallar la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $P_o(0,0)$ y $P_1(x_1, y_1)$ y minimiza el valor de la integral (25).

A primera vista, cabría pensar que la recta que une P_o y P_1 produce también el menor tiempo, pero en realidad es un arco de cicloide que pasa por P_o y P_1 con una cúspide en el origen la que produce el menor tiempo.

Si se escribe la ecuación (25) en la forma equivalente:

$$t_1 = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2g y}}$$

y se sustituye luego en ésta las expresiones (23) y (24), resulta:

$$t_1 = \int_0^{\phi_1} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos\phi)}{2ga(1 - \cos\phi)}} d\phi = \phi_1 \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (26)$$

que es el tiempo requerido por la partícula para deslizarse de P_o a P_1 . El tiempo necesario para alcanzar el fondo del arco se obtiene tomando $\phi_1 = \pi$. Ahora bien, es un hecho notable que enseguida demostraremos, el que el tiempo requerido por la partícula, para deslizarse a lo largo de la cicloide desde (0,0) hasta el punto más bajo ($a\pi, 2a$) sea el mismo partiendo del reposo, que necesita para deslizarse desde cualquier punto intermedio del arco, (x_o, y_o) hasta $(a\pi, 2a)$. Para este último caso, la velocidad en $P(x, y)$ es:

$$v = \sqrt{2g(y - y_o)}$$

y el tiempo requerido es:

$$\begin{aligned} T &= \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos\phi)}{2ga(\cos\phi - \cos\phi_o)}} d\phi = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\phi}{\cos\phi - \cos\phi_o}} d\phi \\ T &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\phi_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2(\phi/2)}{[2\cos^2(\phi_o/2) - 1] - [2\cos^2(\phi/2) - 1]}} d\phi \\ T &= \sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1} \frac{\cos(\phi/2)}{\cos(\phi_o/2)} \right]_{\phi_0}^{\pi} = 2 \sqrt{\frac{a}{g}} (-\sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1) = \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned} \quad (27)$$

Como esta respuesta es independiente del valor de ϕ_0 se sigue que para alcanzar el mínimo de la cicloide se requiere el mismo tiempo, sea cual sea el punto del arco que parte la partícula desde el reposo. En este sentido, la cicloide es, una tautocrona (que significa “mismo tiempo”), además de una braquistocrona (“menor tiempo”).

Propiedades de la cicloide:

La tangente y la normal en un punto: La recta tangente a una curva plana cualquiera $y = f(x)$, en el punto $P(x_0, y_0)$ es de la forma:

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) \quad (28)$$

Y la ecuación de la normal en dicho punto:

$$y - y_0 = \frac{-1}{\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}} (x - x_0)$$

En el caso de la cicloide se tiene:

$$\frac{dx}{d\varphi} = a(1 - \cos \varphi) \quad \frac{dy}{d\varphi} = a \sin \varphi \quad (29)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)} \text{ en definitiva, al sustituir: } y - y_0 = \frac{\sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)} (x - x_0)$$

O bien,

$$y - a(1 - \cos \varphi) = \frac{\sin \varphi}{(1 - \cos \varphi)} (x - a(\varphi - \sin \varphi))$$

quitando denominadores y simplificando:

$$\sin \varphi (x - a(\varphi - \sin \varphi)) = y(1 - \cos \varphi) - a(1 - \cos \varphi)^2 \quad (30)$$

Tangente a la cicloide en el punto $P(x_0, y_0)$:

$$x \operatorname{sen} \varphi + y(\cos \varphi - 1) + a(2 - \varphi \operatorname{sen} \varphi - 2 \cos \varphi) = 0 \quad (31)$$

La recta normal viene dada por:

$$y - a(1 - \cos \varphi) = \frac{(\cos \varphi - 1)}{\operatorname{sen} \varphi} (x - a(\varphi - \operatorname{sen} \varphi)) \quad (32)$$

Quitando denominadores y simplificando:

$$\operatorname{sen} \varphi (x - a(\varphi - \operatorname{sen} \varphi)) = y(1 - \cos \varphi) - a(1 - \cos \varphi)^2 \quad (33)$$

Normal a la cicloide en el punto $P(x_0, y_0)$:

$$x(\cos \varphi - 1) - y \operatorname{sen} \varphi + a \varphi (1 - \cos \varphi) = 0 \quad (34)$$

Estas son por consiguiente las ecuaciones del haz de tangentes y del haz de normales a la cicloide. Hay, evidentemente, una tangente y una normal para cada valor del parámetro φ del haz.

Longitud del arco:

La longitud de arco de una curva entre dos puntos A y B, se puede calcular mediante la integral definida:

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (35)$$

Por tanto, en el caso de la cicloide, el arco entre dos puntos $A(0,0)$ y $B(2\pi a, 0)$ es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi} d\varphi \\ L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos\varphi)} d\varphi = \sqrt{2a} \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\varphi)} d\varphi \end{aligned} \quad (36)$$

Y de la fórmula del ángulo mitad:

$$\sin(\varphi/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} L &= 2a \int_0^{2\pi} \sin(\varphi/2) d\varphi = -4a \cos(\varphi/2) \Big|_0^{2\pi} \\ L &= 8a \end{aligned}$$

En definitiva, la longitud de un arco de cicloide resulta ser 8 veces la longitud del radio del círculo generador.

Área de un arco de la cicloide:

El área barrida por un arco $y=f(x)$ en el intervalo real $(0, 2\pi a)$ viene dada por la integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} y dx = a^2 \int_0^{2\pi a} (1-\cos\varphi)^2 d\varphi \\ A &= a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi - 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \\ A &= 2\pi a^2 + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\varphi)}{2} d\varphi \end{aligned} \quad (38)$$

$$A = 2\pi a^2 + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 2\pi a^2 + \pi a^2$$

$$A = 3\pi a^2$$

Es decir, el área barrida por un arco de cicloide resulta ser tres veces el área del círculo que la genera.

La envolvente de las normales. Ahora que se conoce la ecuación de las normales de una cicloide se va a hallar ahora la envolvente de estas rectas, es decir, la curva que es tangente a todas ellas. **Cómo se hace?** Sólo hay que derivar la ecuación de las rectas normales con respecto a φ y eliminar el parámetro φ entre la ecuación que resulta y la primera, la de las normales. Esta curva se denomina *evoluta* y también es el lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva.

Puesto que la ecuación del haz de normales es de la forma:

$$x(\cos \varphi - 1) - y \operatorname{sen} \varphi + a\varphi(1 - \cos \varphi) = 0 \quad (39)$$

Su derivada con respecto al parámetro φ :

$$x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi + a(\cos \varphi - \varphi \operatorname{sen} \varphi - 1) = 0$$

Si se elimina la y entre ambas ecuaciones mediante una simple reducción, multiplicando por ejemplo la primera por un coseno y la segunda por un seno, se obtiene al simplificar:

$$x = a\varphi + a\operatorname{sen} \varphi$$

Y al sustituir esta expresión se puede despejar y :

$$y = -a + a \cos \varphi$$

Se obtiene así, para las ecuaciones paramétricas de la evoluta:

$$x = a\varphi + a \operatorname{sen} \varphi \quad (40)$$

$$y = -a + a \cos \varphi \quad (41)$$

Lo curioso es que esta evoluta es, también una cicloide.

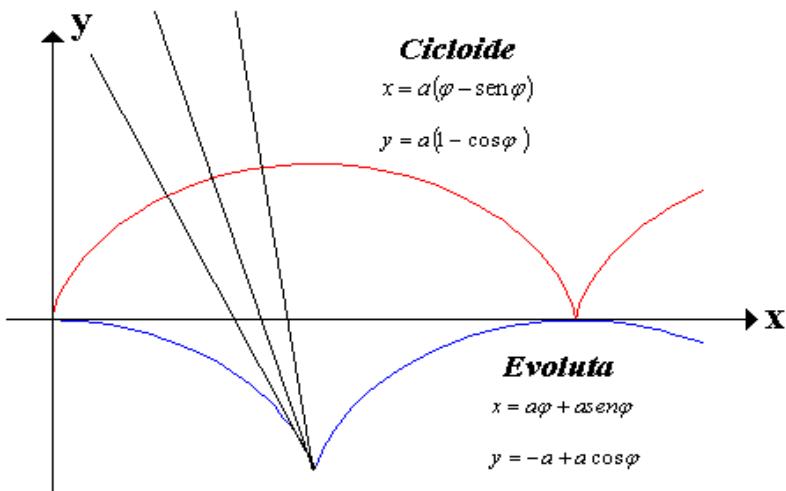


Figura 7. Gráfica de la cicloide y de la evoluta.

Existe un inesperado resultado en lo que respecta a las normales de la cicloide: La suma de la longitud del segmento de normal desde la curva hasta el punto de tangencia con la evoluta más el arco de evoluta que va desde dicho punto de tangencia hasta su vértice es constante, e igual a $4a$.

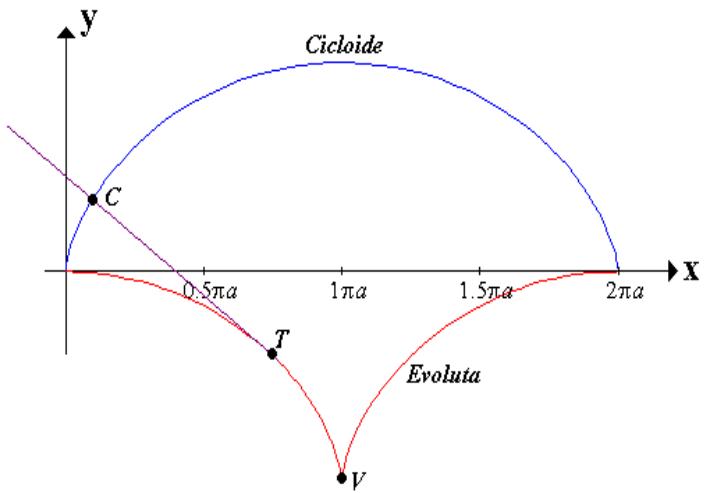


Figura 8. Gráfica de la cicloide y de la evoluta. El segmento de recta CT es normal a la cicloide.

El siguiente es el cálculo:

- a) **Cálculo de CT :** Las coordenadas del punto C al estar sobre la cicloide son $(a\varphi - a \operatorname{sen} \varphi, a - a \cos \varphi)$ y las coordenadas del punto T al estar sobre la evoluta son $(a\varphi + a \operatorname{sen} \varphi, -a + a \cos \varphi)$. Ver figura 8.

$$\overline{CT} = \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2} = \sqrt{(2a \operatorname{sen} \varphi)^2 + (2a - 2a \cos \varphi)^2} \quad (42)$$

$$\overline{CT} = \sqrt{8a^2(1 - \cos \varphi)} = \sqrt{16a^2} \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} = 4a \operatorname{sen}(\varphi/2) \quad (43)$$

- b) **Cálculo del arco TV :**

De las ecuaciones paramétricas de la evoluta:

$$x = a\varphi + a \operatorname{sen} \varphi, \quad y = -a + a \cos \varphi \quad (44)$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = a + a \cos \varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -a \operatorname{sen} \varphi$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2 = 2a^2 (1 + \cos \varphi) \quad (45)$$

Entonces:

$$TV = \int_{\varphi}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi} \right)^2} d\varphi = \int_{\varphi}^{\pi} \sqrt{2a^2 (1 + \cos \varphi)} d\varphi$$

$$TV = \int_{\varphi}^{\pi} \sqrt{4a^2 \frac{(1 + \cos \varphi)}{2}} d\varphi = 2a \int_{\varphi}^{\pi} \cos(\varphi/2) d\varphi$$

$$TV = 4a \sin(\varphi/2) \Big|_{\varphi}^{\pi} = 4a - \sin(\varphi/2) \quad (46)$$

Finalmente,

$$\overline{CT} + TV = \sin(\varphi/2) 4a - \sin(\varphi/2) = 4a \quad (47)$$

Esto quiere decir que la longitud anterior siempre es constante, esto es, que si se piensa físicamente en una cuerda, de longitud $4a$, que esté sujetada al punto V anterior y que se desplaza a modo de péndulo, apoyándose tangencialmente en los arcos de la evoluta el extremo del cordel describe siempre, una cicloide (Fig. 9).

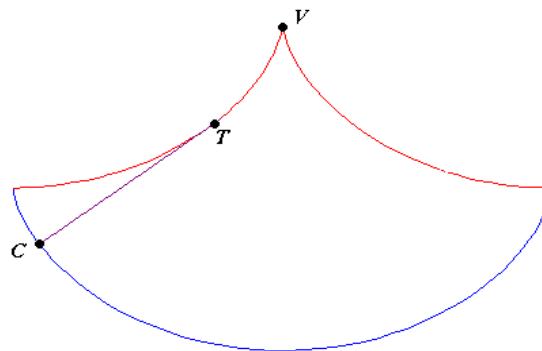


Figura 9. Gráfica de la cicloide y de la evoluta invertidas.

4.3.4. El péndulo cicloidal. La descripción del péndulo cicloidal se debe a Christian Huygens (1629-1695). Consiste en dos cicloides fijas de arcos AO y OB como se muestra en la figura 10:

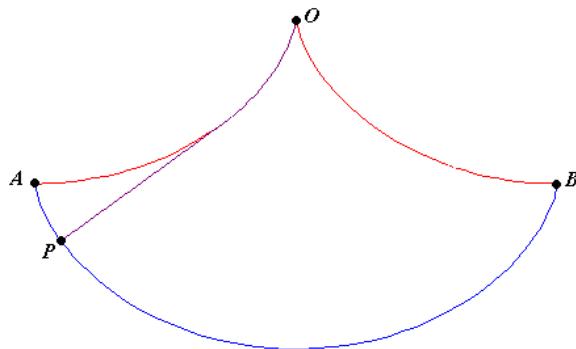


Figura 10. Gráfica del péndulo cicloidal.

El punto O es una cúspide, con vértices en A y B . Una partícula P de masa m se ata a una cuerda inextensible y de masa despreciable de longitud igual al arco $AO=4a$.

Donde a es el radio del círculo que generó AO y OB . La cuerda está fija en O . La masa y la cuerda pueden oscilar libremente entre los dos arcos.

Si la partícula gira de A a B entonces P describe una cicloide completa. Huygens descubrió que a diferencia del péndulo simple, este péndulo es isocrónico. Esto es, que el período de oscilación es independiente de la posición donde la partícula empieza su oscilación. Se demuestra este resultado a continuación.

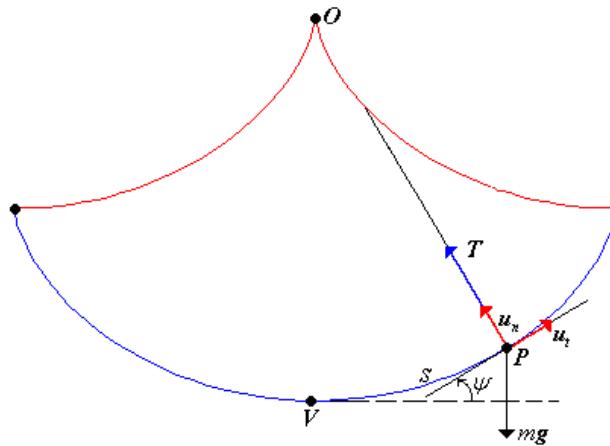


Figura 11. Diagrama de fuerzas en el péndulo cicloidal.

En la figura 11. Las fuerzas que actúan sobre la partícula en P son su peso mg y la tensión de la cuerda T .

Sea s la longitud del arco medida del vértice V al punto P . Se permite que ψ sea el ángulo que la tangente en P hace con la horizontal. Se puede probar que $s = 4a \operatorname{sen} \varphi$. En efecto, invirtiendo el dibujo anterior la longitud de arco de la cicloide entre el vértice y un punto cualquiera (Fig. 12):

$$s = \int_P^V \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{\varphi}^{\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \quad (48)$$

$$s = \int_{\varphi}^{\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos \varphi)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi$$

$$s = \int_{\varphi}^{\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos \varphi)} d\varphi = \sqrt{2a} \int_{\varphi}^{\pi} \sqrt{(1 - \cos \varphi)} d\varphi$$

Y de la fórmula del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}(\varphi/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} \quad (49)$$

$$s = 2a \int_{\varphi}^{\pi} \operatorname{sen}(\varphi/2) d\varphi = -4a \cos(\varphi/2) \Big|_{\varphi}^{\pi} = 4a \cos(\varphi/2) \quad (50)$$

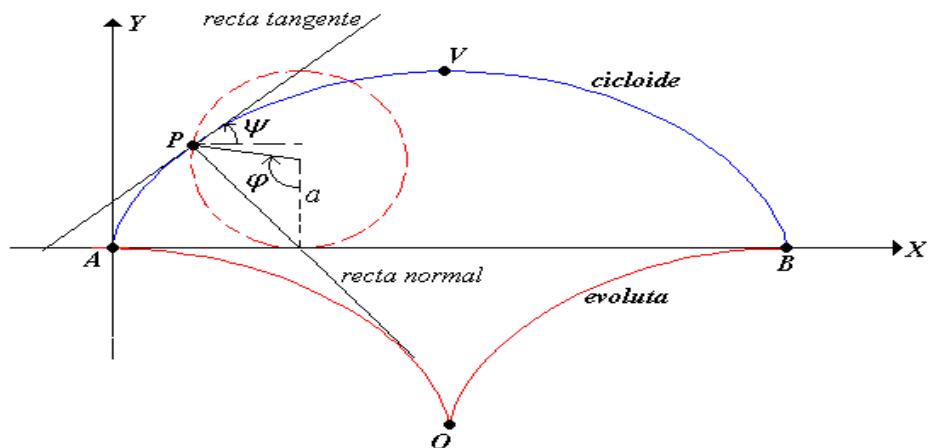


Fig. 12. Relación de ángulos en la cicloide 1.

Se puede relacionar el ángulo ψ que forma la recta tangente en P con la horizontal, con el parámetro φ observando la figura 13:

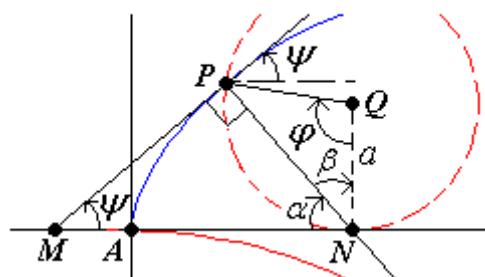


Fig. 13. Relación de ángulos en la cicloide 2.

Es evidente que:

$$\psi + \alpha = \alpha + \beta = \pi / 2 \quad (51)$$

Con lo cual: $\beta = \psi$. Además el triángulo ΔPQN es isósceles, y por tanto:

$$\begin{aligned} 2\beta + \varphi &= \pi \\ \varphi &= 180 - 2\beta = \pi - 2\psi \end{aligned} \quad (52)$$

Y así, la longitud de arco $s = PV$ puede escribirse como:

$$s = 4a \cos(\varphi / 2) = 4a \cos\left(\frac{\pi - 2\psi}{2}\right) = 4a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = 4a \operatorname{sen} \psi \quad (53)$$

Sea ahora, \mathbf{u}_t el vector tangente unitario y \mathbf{u}_n el vector normal unitario en P .

La fuerza total \mathbf{F} que actúa sobre la partícula es:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} \quad (54)$$

Por lo que se refiere a \mathbf{u}_t y \mathbf{u}_n :

$$m\mathbf{g} = -mg \operatorname{sen} \psi \mathbf{u}_t - mg \cos \psi \mathbf{u}_n \quad (55)$$

$$\mathbf{T} = T \mathbf{u}_n$$

Puede mostrarse que:

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} \ddots & \ddots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix}$$

Ahora por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = -mg \operatorname{sen} \psi \mathbf{u}_t + (T - mg \cos \psi) \mathbf{u}_n = m\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{u}_n$$

El igualando las componentes de u_n se tiene:

$$m'' = -m\omega^2 \cos \psi$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$m'' = -m\omega^2 \sin \psi$$

y usando $s = 4a \operatorname{sen} \psi$ se deduce:

$$\frac{\omega}{4a} s$$

Qué tiene la forma de un movimiento armónico simple:

$$.. \quad \ddot{s}$$

Siendo:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}}$$
(56)

El período del movimiento es entonces constante e igual a:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$
(57)

4.3.5. Péndulo Doble: Un péndulo doble oscila en un plano vertical bajo la acción de la gravedad como se muestra en la figura 14.

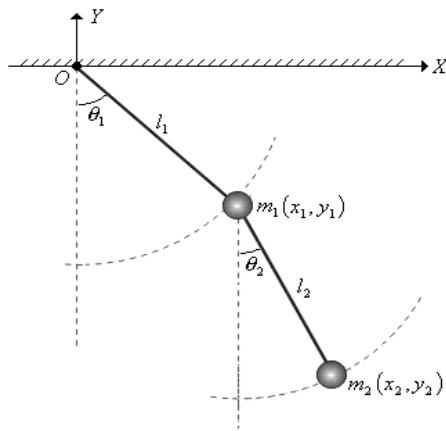


Figura 14. Péndulo doble.

Se pueden expresar las coordenadas de las dos partículas m_1 y m_2 como:

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 & y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 & y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (58)$$

Derivando estas ecuaciones respecto al tiempo:



La energía cinética de cada partícula es entonces:

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2} m_1 \left[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \right] = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ E_{k2} &= \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \right] = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned}$$

Las energías potenciales gravitatorias de las dos partículas m_1 y m_2 respecto al punto O , están dadas por:

$$U_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1$$

$$U_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)$$

La energía mecánica total del sistema es entonces:

$$E = (E_{k1} + E_{k2}) + (U_1 + U_2)$$

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g l_1 \cos \theta_1$$

$$- m_2 g l_2 \cos \theta_2$$

Por el principio de conservación de la energía, la derivada respecto al tiempo de la energía mecánica total debe ser cero. Esto es:

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$+ m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = 0$$

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$+ m_2 l_1 l_2 (\dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + m_2 g l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = 0$$

$$(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$$

$$+ m_2 g l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = 0$$

Reuniendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} & \left[(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 \right] \left(l_1 \dot{\theta}_1 \right) \\ & \left[m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 \right] \left(l_2 \dot{\theta}_2 \right) = 0 \end{aligned}$$

La independencia lineal de $\dot{\theta}_1$ y de $\dot{\theta}_2$ exige que:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0$$

Las dos ecuaciones anteriores son las ecuaciones de movimiento del sistema del péndulo doble.

Considerando solamente oscilaciones pequeñas, se pueden hacer las aproximaciones $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$, y si se desprecian términos que contengan $\dot{\theta}^2 \theta$ se obtiene:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g \theta_1 = 0 \quad (59)$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 g \theta_2 = 0 \quad (60)$$

Para obtener los modos normales y las frecuencias normales correspondientes a pequeñas oscilaciones del péndulo doble, hacemos:

$$\theta_1 = A \sin(\omega t + \alpha), \quad \theta_2 = B \sin(\omega t + \alpha)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= A \omega \cos(\omega t + \alpha), \quad \dot{\theta}_2 = B \omega \cos(\omega t + \alpha) \\ \ddot{\theta}_1 &= -A \omega^2 \sin(\omega t + \alpha), \quad \ddot{\theta}_2 = -B \omega^2 \sin(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados en las ecuaciones de movimiento (59), (60) y simplificando:

$$(m_1 + m_2)(g - \omega^2 l_1)A - m_2 \omega^2 l_2 B = 0 \quad (61)$$

$$-m_2 \omega^2 l_1 A + m_2 (g - \omega^2 l_2) B = 0 \quad (62)$$

Con el fin de que A y B sean diferentes de cero es necesario que el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones anterior sea cero:

$$\left| \begin{array}{cc} (m_1 + m_2)(g - \omega^2 l_1) & -m_2 \omega^2 l_2 \\ -m_2 \omega^2 l_1 & m_2 (g - \omega^2 l_2) \end{array} \right| = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}m_2(m_1 + m_2)(g - \omega^2 l_1)(g - \omega^2 l_2) - m_2^2 \omega^4 l_1 l_2 &= 0 \text{ O bien:} \\ (m_1 + m_2)(g - \omega^2 l_1)(g - \omega^2 l_2) - m_2 \omega^4 l_1 l_2 &= 0\end{aligned}$$

Simplificando:

$$m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2) g \omega^2 + (m_1 + m_2) g^2 = 0 \quad (63)$$

Resolviendo esta ecuación, se halla:

$$\omega^2 = \frac{m_2(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)g \pm \sqrt{[m_2(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)g]^2 - 4m_1 m_2^2(m_1 + m_2)l_1 l_2 g^2}}{2m_1 m_2 l_1 l_2}$$

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2) \left[(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - \frac{4m_1 l_1 l_2}{(m_1 + m_2)}} \right] g}{2m_1 l_1 l_2} \quad (64)$$

Se considera el caso especial en que $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$:

$$\omega^2 = (2 \pm \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}} \\ \omega_2 &= \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}}\end{aligned}$$

Luego, cuando $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$, las frecuencias normales son:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}} \quad (65)$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}} \quad (66)$$

Además, cuando $m_1 = m_2$ y $l_1 = l_2$, las ecuaciones (61) y (62) se simplifican notoriamente:

$$2(g - \omega^2 l)A - \omega^2 lB = 0$$

$$-\omega^2 lA + (gl - \omega^2 l)B = 0$$

De la primera ecuación de movimiento se obtiene:

$$\frac{A}{B} = \frac{\omega^2 l}{2(g - \omega^2 l)}$$

$$a) \text{ Tomando: } \omega^2 = \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

Resulta:

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{O bien: } B = \sqrt{2} A$$

Esto constituye el modo normal en que las masas se mueven en la misma dirección.

$$\theta_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$\theta_2 = \sqrt{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$b) \text{ Escogiendo ahora: } \omega^2 = \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}$$

Resulta:

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{-1 - \sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donde: } B = -\sqrt{2} A$$

Esto constituye el modo normal en que las masas se mueven en direcciones opuestas:

$$\theta_1 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\theta_2 = -\sqrt{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

La solución general del sistema del péndulo doble es una combinación de los dos modos normales de oscilación:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \theta_2(t) &= \sqrt{2} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{2} A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)\end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{(2-\sqrt{2}) \frac{g}{l}} \\ \omega_2 &= \sqrt{(2+\sqrt{2}) \frac{g}{l}}\end{aligned}$$

También se pueden obtener los resultados anteriores escribiendo en forma matricial las ecuaciones de movimiento (59) y (60):

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1 & m_2l_2 \\ m_2l_2 & m_2l_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (m_1+m_2)g & 0 \\ 0 & m_2g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si se considera el caso especial en que $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$:

$$\begin{pmatrix} 2ml & ml \\ ml & ml \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2mg & 0 \\ 0 & mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Llamando:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Se puede escribir:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{C}} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$$

Premultiplicando la ecuación anterior por $\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\ddot{\mathbf{C}} + \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

Siendo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$$

Donde \mathbf{C} se denomina *matriz dinámica*.

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para desacoplar este sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas se realizará una transformación de coordenadas normales, con la cual se pasa al espacio de las **coordenadas normales** $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$.

Se utiliza de nuevo la “**Transformación de semejanza o de similitud**” para diagonalizar la matriz dinámica \mathbf{C} , encontrando una matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

y su inversa \mathbf{T}^{-1} tal que la matriz $\mathbf{C}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{CT}$ sea diagonal.

Es preciso resolver el siguiente problema de valores propios:

$$\mathbf{CT}_i = \lambda_i \mathbf{T}_i \quad \text{con } i = 1, 2$$

Siendo λ_i los correspondientes valores propios, y \mathbf{T}_i los vectores propios:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix}$$

Siendo \mathbf{I} la matriz identidad, se puede reescribir la ecuación de valores propios como:

$$\mathbf{CT}_i = \lambda_i \mathbf{IT}_i$$

O bien:

$$(\mathbf{C} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{T}_i = \mathbf{0}$$

En forma equivalente:

$$\begin{pmatrix} \frac{2g}{l} - \lambda_i & -\frac{g}{l} \\ -\frac{2g}{l} & \frac{2g}{l} - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2g}{l} - \lambda_i \right) T_{1i} - \frac{g}{l} T_{2i} &= 0 \\ -\frac{2g}{l} T_{1i} + \left(\frac{2g}{l} - \lambda_i \right) T_{2i} &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución no trivial si:

$$\begin{vmatrix} \frac{2g}{l} - \lambda_i & -\frac{g}{l} \\ -\frac{g}{l} & \frac{2g}{l} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

Luego:

$$\left(\frac{2g}{l} - \lambda_i \right)^2 - \frac{2g^2}{l^2} = 0$$

$$\frac{2g}{l} - \lambda_i = \pm \sqrt{2} \frac{g}{l}$$

Los dos valores propios λ_1 y λ_2 son entonces:

$$\lambda_i = \frac{2g}{l} \mp \sqrt{\frac{2g^2}{l^2}}$$

$$\lambda_1 = \frac{g}{l} (2 - \sqrt{2})$$

$$\lambda_2 = \frac{g}{l} (2 + \sqrt{2})$$

A continuación se encontraran los valores propios T_1 y T_2 correspondientes a cada valor propio (λ_1 y λ_2) de la matriz C .

Para λ_1 , la ecuación de valores propios toma la forma:

$$\sqrt{2} \frac{g}{l} T_{11} - \frac{g}{l} T_{21} = 0$$

$$-\frac{2g}{l} T_{11} + \sqrt{2} \frac{g}{l} T_{21} = 0$$

De aquí se obtiene:

$$T_{21} = \sqrt{2}T_{11}$$

De manera que:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{pmatrix} = T_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Eligiendo $T_{11} = 1$:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para λ_2 , la ecuación de valores propios toma la forma:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}\frac{g}{l}T_{12} - \frac{g}{l}T_{22} &= 0 \\ -\frac{2g}{l}T_{12} - \sqrt{2}\frac{g}{l}T_{22} &= 0 \end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$T_{22} = -\sqrt{2}T_{12}$$

De manera que:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{pmatrix} = T_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Eligiendo $T_{12} = 1$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Se puede formar ahora, la matriz \mathbf{T} cuyas columnas son precisamente los vectores propios \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La inversa de \mathbf{T} es entonces:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Se puede verificar que efectivamente la matriz dinámica \mathbf{C} ha sido diagonalizada:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}' &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})\frac{g}{l} & 0 \\ 0 & (2+\sqrt{2})\frac{g}{l} \end{pmatrix} \\ \mathbf{C}' &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación matricial del movimiento:

$$\ddot{\mathbf{C}}' \cdot \underline{\underline{\omega}} = \mathbf{0}$$

Puede ser escrita como:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{C}}' \cdot \underline{\underline{\omega}} &= \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{C}}' \cdot \mathbf{T}^{-1} \underline{\underline{\Theta}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Premultiplicando por \mathbf{T}^{-1} :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} \ddot{\mathbf{C}}' \cdot \underline{\underline{\Theta}} &= \mathbf{T}(\mathbf{T}^{-1} \underline{\underline{\Theta}}) = \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{C}}' &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Siendo:

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 & 0 \\ \ddot{\varphi}_2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = 0$$

$$\ddot{\varphi}_2 = 0$$

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales anteriores son evidentemente:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ \dot{\phi}_2 &= A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Con las frecuencias angulares ω_1 y ω_2 dadas por:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{(2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}} \\ \omega_2 &= \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{(2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}} \end{aligned}$$

La solución general del movimiento de los dos péndulos se obtiene a partir de la transformación inversa:

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{T} \boldsymbol{\Phi}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\theta_1 = (\phi_1 + \phi_2)$$

$$\theta_2 = (\sqrt{2}\phi_1 - \sqrt{2}\phi_2)$$

$$\theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

$$\theta_2(t) = \sqrt{2}A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \sqrt{2}A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

4.3.6. Péndulo Compuesto. La figura 15, muestra un péndulo compuesto (o físico) es cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal bajo la acción de la gravedad. Sea ZZ' el eje horizontal y C el centro de masa del cuerpo. Cuando la línea OC hace un ángulo θ con la vertical, la componente Z del torque actuante sobre el cuerpo es $\tau_z = -mgb \operatorname{sen}\theta$, donde b es la distancia OC entre el eje Z y el centro de masa C.

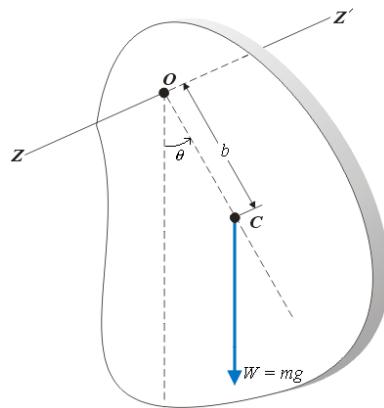


Figura 15. Péndulo compuesto.

Si I es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje Z, y $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ es la aceleración angular, la segunda ley de Newton para la rotación $\tau_z = I\alpha$ puede escribirse:

$$-mgbsen\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

O bien:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad (67)$$

Suponiendo que las oscilaciones son de pequeña amplitud, se puede suponer que $\sin\theta \approx \theta$, de modo que la ecuación del movimiento se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\theta = 0$$

O bien:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{K^2}\theta = 0 \quad (68)$$

Aquí se ha utilizado $I = mK^2$, donde K es el radio de giro, definido en la ecuación (69):

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (69)$$

Se puede ahora comparar la ecuación de movimiento (28) con la ecuación (16), demostrando que el movimiento angular oscilatorio es armónico simple, con $\omega^2 = gb/K^2$. Por consiguiente, el período de las oscilaciones es:

$$T = 2\pi\sqrt{K^2/gb} \quad (70)$$

La cantidad $l = K/b^2$ se denomina la longitud del péndulo simple equivalente, ya que un péndulo de tal longitud tiene el mismo período que el péndulo compuesto. Se nota que el período del péndulo compuesto es independiente de la masa, así como de su forma geométrica, siempre que el radio de giro K y la posición del centro de masa, dado b , permanezcan inalterables.

Un ejemplo sobre el movimiento pendular de un objeto rígido es:

Ejemplo: La figura 16, muestra un pequeño disco delgado de radio r y masa m que está rígidamente unido a la cara de un segundo disco delgado de radio R y masa M . El centro del disco pequeño se localiza en el borde del disco grande, el cual está montado en su centro sobre su eje sin fricción. El arreglo se hace girar un ángulo θ a partir de su posición de equilibrio y se suelta.

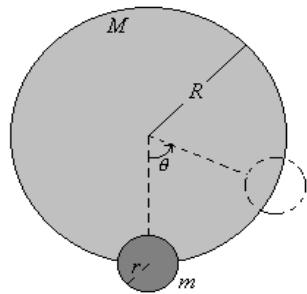


Figura 16. Discos de radio R y r

a) Demuestre que la velocidad del disco pequeño cuando pasa por la posición de equilibrio es:

$$v = 2 \left[\frac{Rg(1 - \cos \theta)}{\left(\frac{M}{m}\right) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 + 2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

b) Muestre que el período del movimiento es:

$$T = 2\pi \left[\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Solución:

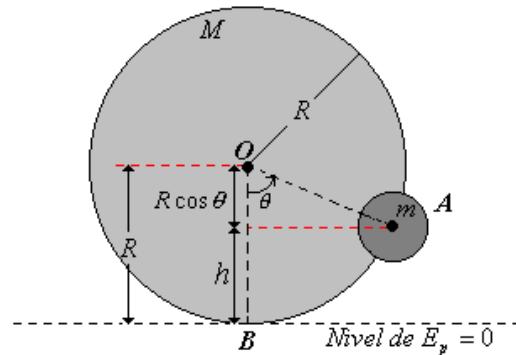


Figura 17 .Relación de distancias.

En la figura 17, se observa cuando el disco pequeño parte desde el reposo en A, entonces la energía mecánica total del sistema será solamente potencial e igual a:

$$E_A = \sum E_k + \sum E_p = 0 + MgR + mg h$$

O bien,

$$E_A = MgR + mgR(1 - \cos \theta)$$

Donde se ha tomado como nivel de referencia para la energía potencial ($E_p = 0$) el punto B (posición de equilibrio).

Cuando el disco pequeño llega a la posición B su energía potencial se transforma en energía cinética y por tanto:

$$E_B = \sum E_k + \sum E_p = \left(\frac{1}{2} I_M \omega^2 + \frac{1}{2} I_m \omega^2 \right) + MgR$$

Siendo $I_M = MR^2 / 2$ el momento de inercia del disco grande respecto a su centro de masa, e $I_m = (mr^2 / 2) + mR^2$ de acuerdo al teorema de Steiner, es el momento de inercia del disco pequeño respecto al punto O.

De esta manera:

$$E_B = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{2} mr^2 + mR^2 \right] \omega^2 + MgR$$

$$E_B = \frac{1}{4} [(M + 2m)R^2 + mr^2] \omega^2 + MgR$$

Aplicando el principio de la conservación de la energía, $E_B = E_A$:

$$\frac{1}{4} [(M + 2m)R^2 + mr^2] \omega^2 + MgR = MgR + mgR(1 - \cos \theta)$$

Simplificando y despejando ω :

$$\omega = 2 \left[\frac{mgR(1 - \cos \theta)}{(M + 2m)R^2 + mr^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega = 2 \left[\frac{gR(1 - \cos \theta)}{(2 + M/m)R^2 + r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

La velocidad del disco pequeño puede hallarse a partir de la relación $v = \omega R$:

$$v = 2R \left[\frac{gR(1 - \cos \theta)}{(2 + M/m)R^2 + r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

O bien:

$$v = 2 \left[\frac{gR(1 - \cos \theta)}{(M/m) + (r/R)^2 + 2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

b) El cálculo del período puede hacerse fácilmente con ayuda de la ecuación (70).

La distancia b del centro de masa al eje de giro (eje que pasa por O), de acuerdo a la figura 18, es $b = R - y_{CM}$.

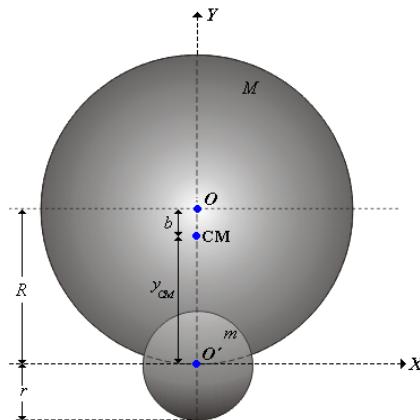


Figura 18 Posición del centro de masa.

Aquí y_{CM} es la altura del centro de masa respecto al punto O', el cual puede calcularse como sigue:

$$y_{CM} = \frac{m(0) + M(R)}{M + m} = \frac{MR}{M + m}$$

Así:

$$\begin{aligned} b &= R - \frac{MR}{M + m} \\ b &= \frac{mR}{M + m} \end{aligned}$$

El momento de inercia del sistema respecto al punto O está dado por:

$$\begin{aligned} I &= I_M + I_m = \frac{1}{2}MR^2 + \left(\frac{1}{2}mr^2 + mR^2 \right) \\ I &= I_M + I_m = \frac{1}{2}[R^2(M + 2m) + mr^2] \end{aligned}$$

El radio de giro K es pues:

$$K = \sqrt{\frac{I}{M + m}} = \sqrt{\frac{R^2(M + 2m) + mr^2}{2(M + m)}}^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente, el período puede calcularse como:

$$T = 2\pi\sqrt{K^2 / gb}$$

$$T = 2\pi \left\{ \frac{[R^2(M + 2m) + mr^2]}{2(M + m)} \middle/ \frac{g mR}{(M + m)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Simplificando:

$$T = 2\pi \left[\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR} \right]^{\frac{1}{2}}$$

4.3.7. Péndulo de Torsión. Otro ejemplo de movimiento armónico simple es el péndulo de torsión, consistente en un cuerpo suspendido por un alambre o fibra de tal manera que la línea OC pasa por el centro de masa del cuerpo, ver figura 19. Cuando el cuerpo se rota una ángulo θ a partir de su posición de equilibrio, el alambre se tuerce, ejerciendo sobre el cuerpo un torque τ alrededor de OC que se oponen al desplazamiento θ y de magnitud proporcional al ángulo, $\tau = -\kappa\theta$, donde κ es el coeficiente de torsión del alambre. Si I es el movimiento de inercia del cuerpo con respecto al eje OC, la ecuación del movimiento, usando la ecuación $\tau = I\alpha$ con $\alpha = d^2\theta/dt^2$, es:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta \text{ o bien: } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0$$

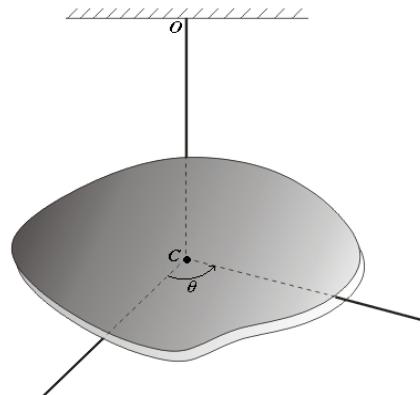


Figura 19. Péndulo de torsión

Nuevamente se encuentra la ecuación diferencial (16), de modo que el movimiento angular es armónico simple, con $\omega^2 = \kappa/I$; el período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa} \quad (71)$$

4.3.8. Superposición de DOS M.A.S

Igual dirección, igual frecuencia: Considerando ahora la superposición, o interferencia, de dos movimientos armónicos simples que producen un desplazamiento de la partícula a lo largo de la misma línea. Hay que discutir primero el caso en que ambos tienen la misma frecuencia. El desplazamiento de la partícula producido por cada movimiento armónico simple está dado por:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) \text{ y } x_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

El desplazamiento resultante de la partícula está dado por:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

Es preciso demostrar ahora que x corresponde a un movimiento armónico simple de la misma frecuencia.

Si se utriutiliza la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$, se puede escribir:

$$x = A_1 \operatorname{sen}(\omega t) \cos\alpha_1 + A_1 \cos(\omega t) \operatorname{sen}\alpha_1 + A_2 \operatorname{sen}(\omega t) \cos\alpha_2 + A_2 \cos(\omega t) \operatorname{sen}\alpha_2$$

$$x = [A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2] \operatorname{sen}(\omega t) + [A_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + A_2 \operatorname{sen}\alpha_2] \cos(\omega t)$$

Si se hace las sustituciones:

$$A \operatorname{sen}\alpha = A_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + A_2 \operatorname{sen}\alpha_2 \quad (72)$$

$$A \cos\alpha = A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2 \quad (73)$$

Puede escribirse:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad (74)$$

Dividiendo (72) entre la ecuación (73), se obtiene:

$$\tan \alpha = \frac{A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2} \quad (75)$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$A^2 = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \operatorname{sen} \alpha_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha_2)^2$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 \cos^2 \alpha_1 + 2A_1 A_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + A_2^2 \cos^2 \alpha_2 \\ &\quad + A_1^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_1 + 2A_1 A_2 \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + A_2^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_2 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) \quad (76)$$

Finalmente:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

O bien:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \delta} \quad (77)$$

Siendo $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$.

Las ecuaciones (75), (76) y (77) confirman efectivamente que la superposición de los dos movimientos armónicos simples da como resultado un movimiento armónico simple de igual frecuencia con una amplitud dada por la ecuación (77) y un desfase dado por la ecuación (76).

Considerando algunos casos importantes especiales. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, entonces $\delta = 0$, y se dice que los dos movimientos están en *fase*. Las ecuaciones (76) y (77) dan:

$$\alpha = \alpha_1, \quad A = A_1 + A_2$$

por consiguiente, los dos movimientos armónicos simples interfieren constructivamente ya que sus amplitudes se suman, observar figura 20..

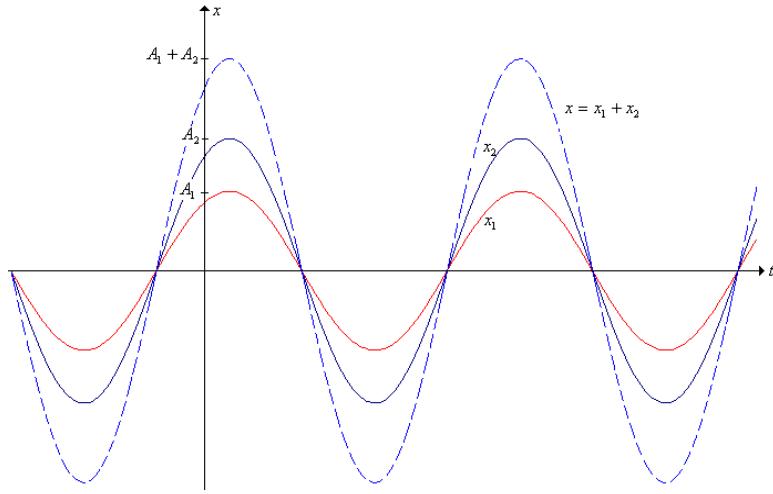


Figura 20. Superposición de dos M.A.S en fase.

Si $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$, entonces $\delta = \pi$, y se dice que los dos movimientos armónicos están en *oposición*. Y las ecuaciones (76) y (77) dan si $A_1 > A_2$:

$$\alpha = \alpha_1, \quad A = A_1 - A_2$$

Así, los dos movimientos armónicos simples interfieren atenuándose ya que sus amplitudes se sustraen. En particular, si $A_1 = A_2$, los dos movimientos armónicos simples se cancelan mutuamente. Ver figura 21.

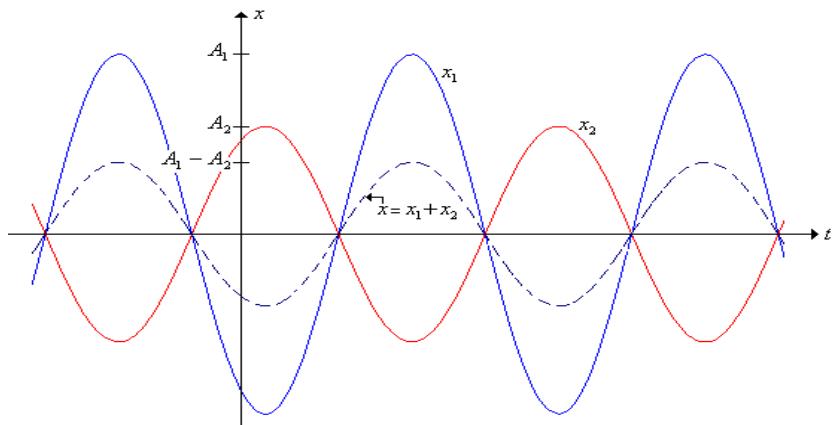


Figura 21. Superposición de dos M.A.S en oposición.

En la figura 22 se observa que si $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$, entonces $\delta = \pi/2$, y se dice que los dos movimientos armónicos están en *cuadratura*. Entonces, aplicando las ecuaciones (76) y (77), se obtiene:

$$\alpha = \alpha_1 + \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_2}{A_1}, \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

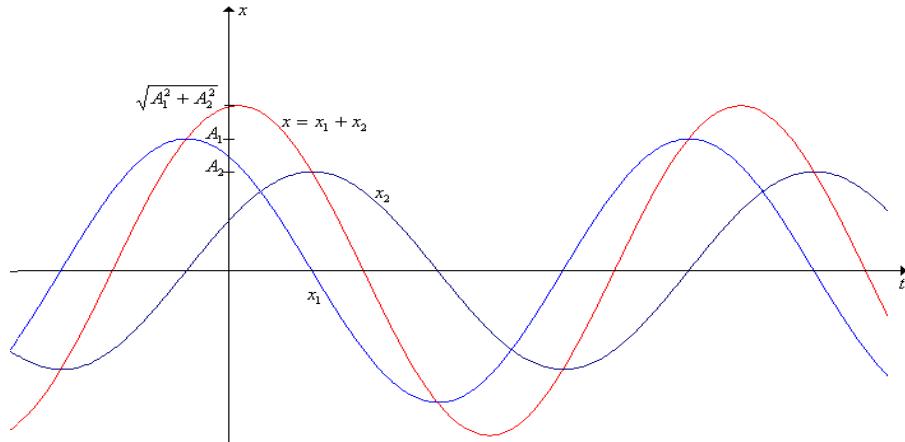


Figura 22. Superposición de dos M.A.S en cuadratura.

El desplazamiento de una partícula que se mueve con M.A.S puede también considerarse como la componente x de un vector $\mathbf{OP'}$, con $\|\mathbf{OP'}\| = A$, que rota alrededor de O en sentido contrario a las manecillas del reloj con una velocidad angular ω y formando (a cada instante) un ángulo $\omega t + \alpha$ con el eje negativo de las Y , medido también en sentido contrario a las manecillas del reloj. Ver figura 23.

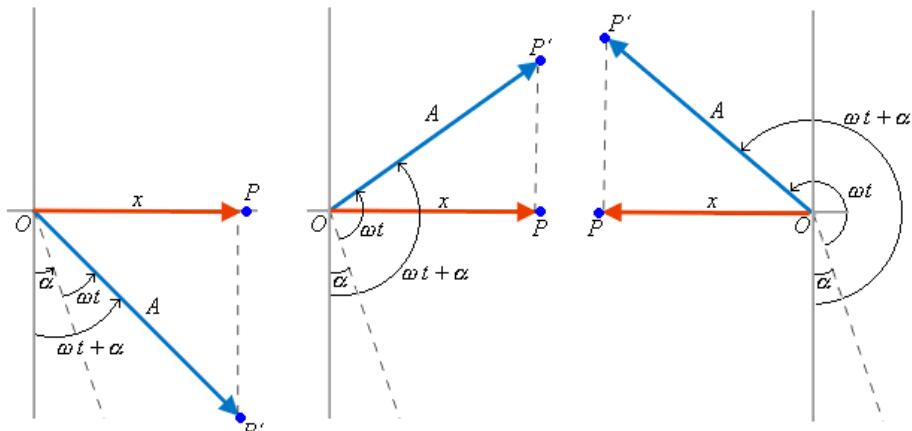


Figura 23. Vector rotante de la elongación en el M.A.S.

A través de La figura 24 se observa que la velocidad y la aceleración de la partícula también pueden representarse por los vectores rotantes **OV'** y **OA'**; cuyas longitudes son ωA y $\omega^2 A$, respectivamente, y cuyas componentes a lo largo del eje X dan la velocidad v y la aceleración a de la partícula que se mueve con M.A.S.

La orientación relativa de estos vectores se ilustra en la figura 24. Puede notarse que **OV'** está adelantado $\pi/2$ y **OA'** está adelantado π , ambos con respecto al vector rotante **OP'**.

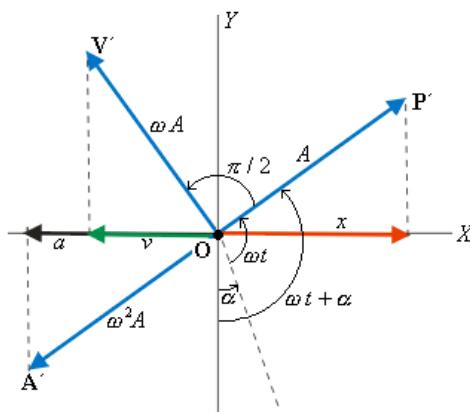


Figura 24. Vectores rotantes de la elongación, la velocidad y la aceleración en el M.A.S.

En la figura 25, se muestra la superposición de dos movimientos armónicos simples de igual frecuencia puede analizarse fácilmente con ayuda de los vectores rotantes. El desplazamiento de la partícula producido por cada movimiento armónico simple está dado por:

$$x_1 = OP_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) \quad \text{y} \quad x_2 = OP_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

El desplazamiento resultante de la partícula está dado por:

$$x = OP = x_1 + x_2 = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

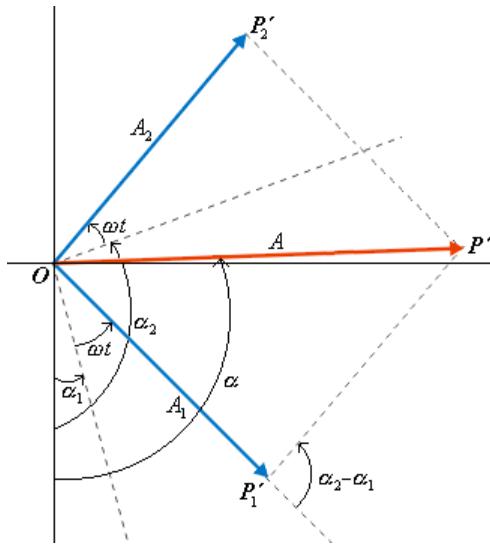


Figura 25. Superposición de dos M.A.S de igual frecuencia.

La componente x del vector suma \mathbf{OP}' de los vectores rotantes \mathbf{OP}'_1 y \mathbf{OP}'_2 (esto es, $x_1 + x_2$), y por ende es igual a x . También, ya que el ángulo entre \mathbf{OP}'_1 y \mathbf{OP}'_2 tiene el valor fijo $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$, el vector \mathbf{OP}' tiene una magnitud constante A , y rota también alrededor de O con velocidad angular ω . Por consiguiente el vector rotante \mathbf{OP}' genera un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω , se puede escribir:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

La magnitud del vector rotante $\mathbf{OP}',(A)$ puede hallarse a partir de la ley de cosenos, obteniéndose la ecuación (77).

La fase inicial α puede encontrarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{OP}' \cdot \mathbf{i} = A \operatorname{sen} \alpha$$

$$\mathbf{OP}' \cdot \mathbf{j} = A \cos \alpha$$

$$\mathbf{OP'} = \mathbf{OP'}_1 + \mathbf{OP'}_2 = [A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)] \mathbf{i} + [A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)] \mathbf{j}$$

$$\mathbf{OP'} \cdot \mathbf{i} = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\mathbf{OP'} \cdot \mathbf{j} = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

Obteniéndose de nuevo las ecuaciones (73) y (74).

4.3.9. Superposición de 2 M.A.S

Igual dirección, diferente frecuencia: El caso en el cual dos movimientos armónicos simples en la misma dirección pero con diferente frecuencia interfieren tiene también importancia. Se considera por simplicidad, el caso en el cual $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 0$; entonces los movimientos están descritos por las ecuaciones $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ y $x_2 = A_2 \sin \omega_2 t$.

El ángulo entre los vectores rotantes $\mathbf{OP'}_1$ y $\mathbf{OP'}_2$ es ahora $\omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t$ y no es constante. Por ello el vector resultante no tiene longitud constante. En consecuencia el movimiento resultante, $x = x_1 + x_2$ no es armónico simple. Sin embargo, como se observa en la figura 31, la “amplitud” del movimiento es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \quad (78)$$

y “oscila” entre los valores $A = A_1 + A_2$, cuando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi$ y $A = A_1 - A_2$, cuando $(\omega_1 - \omega_2)t = 2n\pi + \pi$.

Se dice entonces que la amplitud es *modulada*.

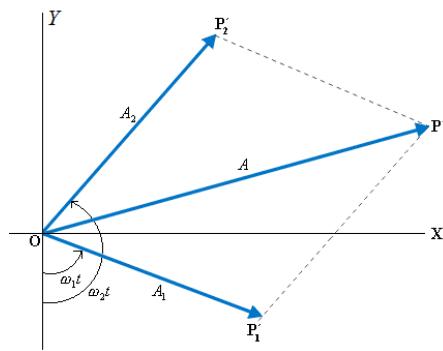


Figura 26. Composición de dos M.A.S de frecuencias diferentes

La frecuencia de la amplitud de oscilación se expresa por:

$$f = (\omega_1 - \omega_2) / 2\pi = f_1 - f_2 \quad (79)$$

y es igual a la diferencia de frecuencias de los movimientos que interfieren.

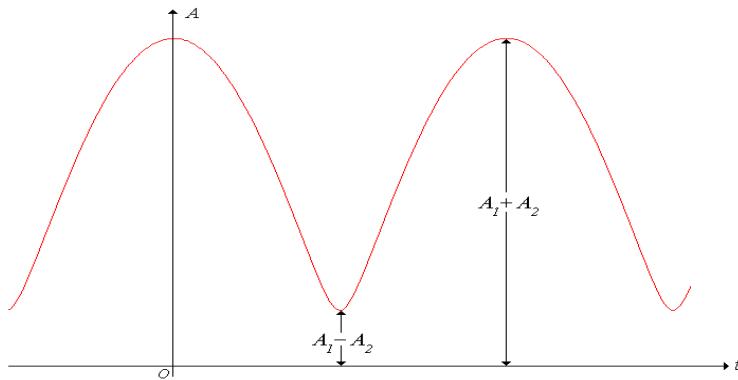


Figura 27. Fluctuación en amplitud o pulsaciones.

La figura 27, muestra la variación de A con t . La situación descrita tiene lugar cuando, por ejemplo, dos vibradores de frecuencias muy próximas están vibrando simultáneamente en lugares muy cercanos. Se observa una fluctuación en la intensidad de los sonidos, llamados *pulsaciones*, que se deben al cambio en la amplitud.

Una situación interesante ocurre cuando $A_1 = A_2$, esto es cuando las dos amplitudes son iguales. Entonces usando la ecuación $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, resulta:

$$\begin{aligned}x &= x_1 + x_2 = A_1 (\operatorname{sen} \omega_1 t + \operatorname{sen} \omega_2 t) \\x &= 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\end{aligned}\quad (80)$$

Indicando que el movimiento es oscilatorio con frecuencia angular $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ y amplitud:

$$A = 2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \quad (81)$$

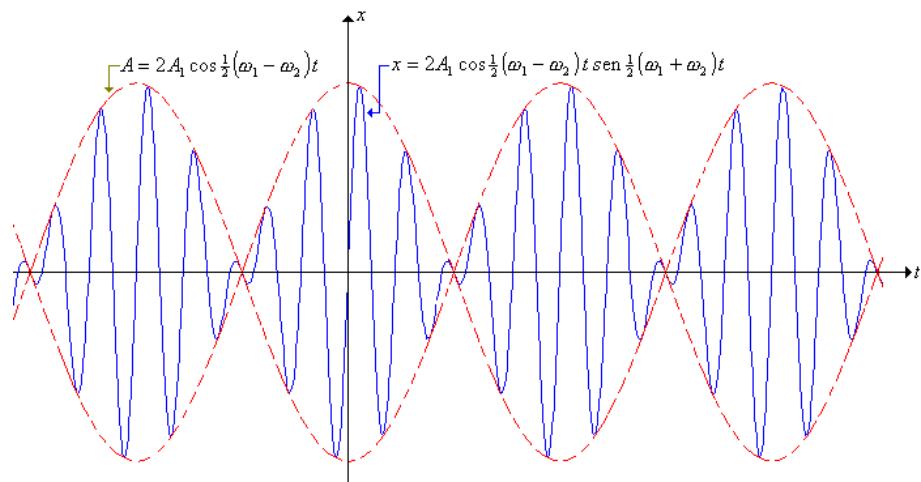


Figura 28. Pulsaciones cuando las amplitudes son iguales.

4.3.10. Superposición de 2 M.A.S.

Direcciones perpendiculares. Considerando ahora el caso en el que una partícula se mueve en un plano de tal modo que sus coordenadas x e y oscilan con movimiento armónico simple. Se examina primero el caso en el que los dos movimientos tienen la misma frecuencia. Escogiendo el origen del tiempo de modo que la fase inicial del movimiento a lo largo del eje X sea cero, se tiene para la coordenada x :

$$x = A \operatorname{sen} \omega t \quad (82)$$

El movimiento a lo largo del eje Y está descrito por la ecuación:

$$y = B \operatorname{sen}(\omega t + \delta) \quad (83)$$

Donde δ es ahora la diferencia de fase entre las oscilaciones x e y . Se ha supuesto que las amplitudes A y B son diferentes. La trayectoria de la partícula está obviamente limitada por las líneas $x = \pm A$ e $y = \pm B$.

Se considera ahora dos casos especiales. Si los movimientos están en fase, $\delta = 0$ e $y = B \operatorname{sen} \omega t$, que pueden combinarse con la ecuación 1.40 para dar:

$$y = (B/A)x$$

Esta es la ecuación de la recta PQ en la figura 29 y el movimiento que resulta es armónico simple con amplitud $\sqrt{A^2 + B^2}$, debido a que el desplazamiento a lo largo de la línea PQ es:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen} \omega t$$

Si los movimientos están en oposición, $\delta = -\pi$ e $y = -B \operatorname{sen} \omega t$. Combinando con la ecuación (82):

$$y = -(B/A)x$$

la cual es la ecuación de la línea RS . El movimiento es nuevamente armónico simple con amplitud $\sqrt{A^2 + B^2}$. Entonces se dice que cuando $\delta = 0$ ó $\delta = -\pi$, la frecuencia angular da lugar a una *polarización rectilínea*.

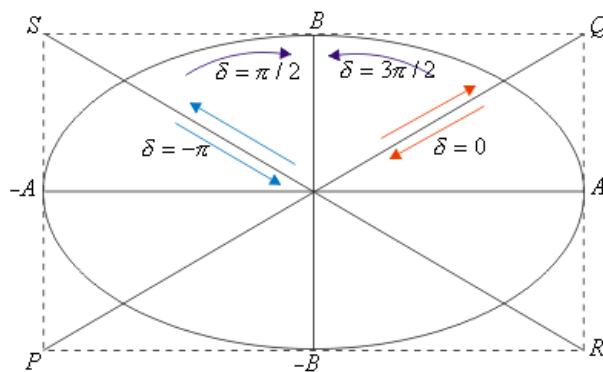


Figura 29. Composición de dos M.A.S de la misma frecuencia pero en direcciones perpendiculares.

Cuando $\delta = \pi/2$, se dice que los movimientos a lo largo de los ejes X e Y están en **cuadratura**; e

$$y = B \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2) = B \cos \omega t$$

Combinada con la ecuación (82) da:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

que es la ecuación de la elipse ilustrada en la figura 29. La elipse es recorrida en la dirección de las agujas del reloj. Esto puede verificarse encontrando la velocidad de la partícula en el punto $x = +A$, en la cual la velocidad es paralela al eje Y. En este punto, de la ecuación (82) se debe tener $\operatorname{sen} \omega t = 1$. La componente Y de la velocidad es $v_y = dy/dt = -B\omega \operatorname{sen} \omega t = -\omega B$. Por ser negativa, el punto pasa por A moviéndose hacia abajo. Lo cual corresponde a una rotación en el sentido de las agujas del reloj. Se obtiene la misma elipse si $\delta = 3\pi/2$ ó $\delta = -\pi/2$, pero el movimiento es al contrario a las agujas del reloj. Luego, se puede decir que cuando $\delta = \pm\pi/2$, la interferencia de dos movimientos armónicos simples de la misma frecuencia y direcciones perpendiculares da lugar a **polarización elíptica**, con los ejes de la elipse paralelos a las direcciones de los dos movimientos.

Cuando $A=B$, la elipse se transforma en un círculo y se tiene la **polarización circular**. Para un valor arbitrario de la diferencia de fase δ , la trayectoria es aún una elipse pero sus ejes están rotados con respecto a los ejes de coordenadas.

En efecto, desarrollando la ecuación (83):

$$\begin{aligned} y &= B[\operatorname{sen} \omega t \cos \delta + \cos \omega t \operatorname{sen} \delta] \\ y/B &= \cos \delta \operatorname{sen} \omega t + \operatorname{sen} \delta \cos \omega t \end{aligned}$$

De la ecuación(82) se obtiene: $x/A = \operatorname{sen} \omega t$. De esta manera:

$$\begin{aligned} y/B &= (x/A) \cos \delta + \operatorname{sen} \delta \cos \omega t \\ (y/B) - (x/A) \cos \delta &= \operatorname{sen} \delta \cos \omega t \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado:

$$(y/B)^2 - (2xy/AB)\cos\delta + (x/A)^2 \cos^2\delta = \sin^2\delta \cos^2\omega t$$

$$(y/B)^2 - (2xy/AB)\cos\delta + (x/A)^2 \cos^2\delta = \sin^2\delta (1 - \sin^2\omega t)$$

$$(y/B)^2 - (2xy/AB)\cos\delta + (x/A)^2 \cos^2\delta = \sin^2\delta (1 - x^2/A^2)$$

$$(y/B)^2 - (2xy/AB)\cos\delta + (x/A)^2 \cos^2\delta + (x/A)^2 \sin^2\delta = \sin^2\delta$$

Finalmente:

$$(x/A)^2 - (2xy/AB)\cos\delta + (y/B)^2 = \sin^2\delta \quad (84)$$

Ahora bien, cualquier ecuación cuadrática de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La figura 30, representa una parábola, una elipse o una hipérbola, dependiendo de la naturaleza del discriminante $B^2 - 4AC$ sea igual a cero, menor que cero, ó mayor que cero respectivamente.

Se observa que en la ecuación (84) el discriminante está dado por:

$$\frac{4}{A^2B^2} \cos^2\delta - \frac{4}{A^2B^2} = \frac{4}{A^2B^2} (\cos^2\delta - 1) = -\frac{4}{A^2B^2} \sin^2\delta < 0$$

Confirmando la afirmación de que la ecuación (84) representa una elipse.

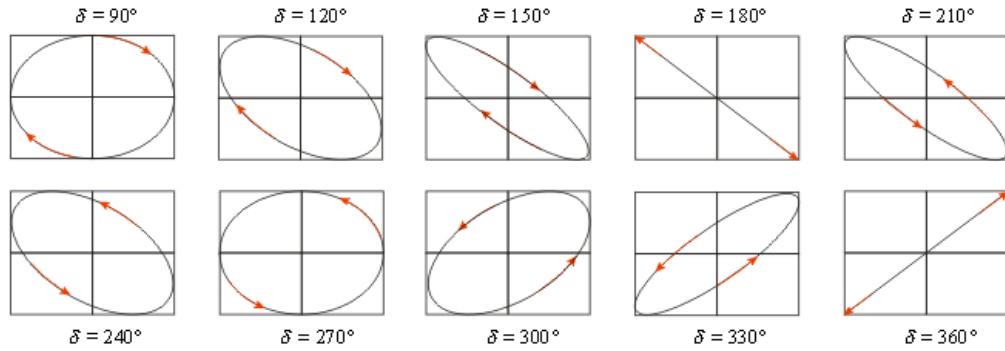


Figura 30. Trayectorias elípticas para diferencias de fase selectas.

4.3.11. Figuras de lissajous. Otra situación interesante es la interferencia de dos movimientos oscilatorios perpendiculares de frecuencias diferentes:

$$x = A_1 \operatorname{sen} \omega_1 t \quad (85)$$

$$y = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \delta) \quad (86)$$

En la figura 31, las amplitudes son A_1 y A_2 , las frecuencias angulares ω_1 y ω_2 , respectivamente, y δ es la diferencia de fase entre ambos movimientos.

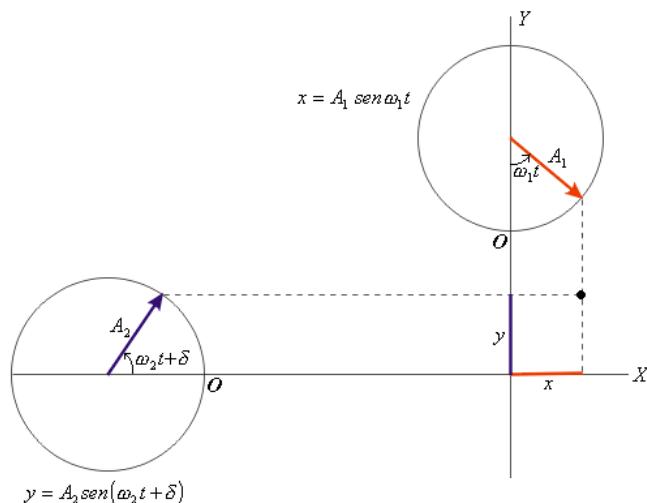


Figura 31. Mecanismo que permite obtener las figuras de Lissajous.

El M.A.S. representado por el vector rotatorio A_1 proyecta su extremo sobre el eje X, gira con velocidad angular ω_1 y el origen de ángulos está en la parte inferior de la circunferencia en el punto marcado por O. En el instante t , el ángulo girado es $\omega_1 t$. La proyección del extremo del vector es el segmento marcado en color rojo.

El M.A.S. representado por el vector rotatorio A_2 proyecta su extremo sobre el eje Y, gira con velocidad angular ω_2 y el origen de ángulos está en la parte derecha de la circunferencia en el punto marcado por O. En el instante t , el ángulo girado es $\omega_2 t + \delta$. La proyección del extremo del vector es el segmento marcado en color azul.

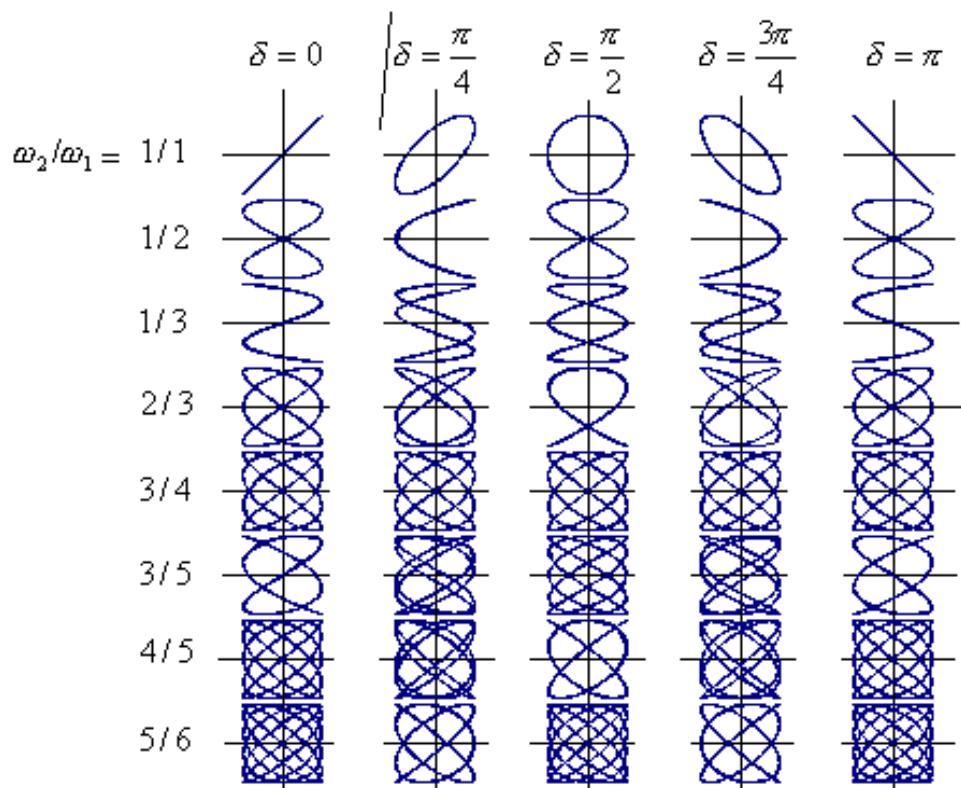


Figura 32. Figuras de Lissajous.

4.3.12. Oscilaciones Acopladas. Una situación frecuente en Física es aquella donde se presentan dos *osciladores acoplados*. En la figura 33, se ilustran tres casos posibles. La primera se tienen dos masas m_1 y m_2 unidas a dos resortes k_1 y k_2 y acopladas por el resorte k , de modo que el movimiento de las dos masas

m_1 y m_2 no son independientes. Luego se tiene dos péndulos acoplados a la cuerda AB . Por último, los cuerpos I_1 e I_2 están acoplados por la barra k , formando dos péndulos de torsión acoplados.

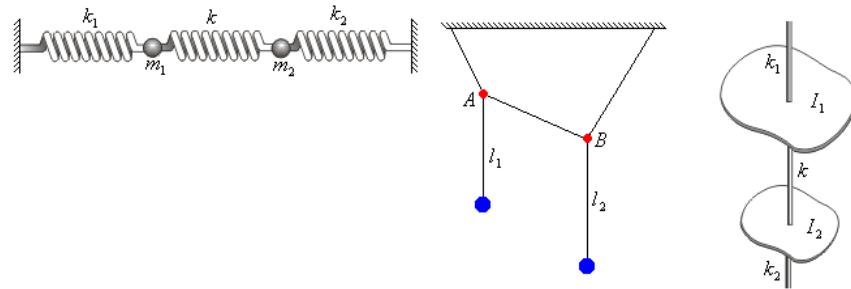


Figura 33. Varios tipos de osciladores acoplados.

Para discutir el problema dinámicamente, se debe establecer la ecuación de movimiento de cada oscilador. Se considera el caso especial de dos masas m_1 y m_2 unidas a resortes. Se llama x_1 y x_2 los desplazamientos de m_1 y m_2 a partir de su posición de equilibrio, medidos como positivos cuando están a la derecha.

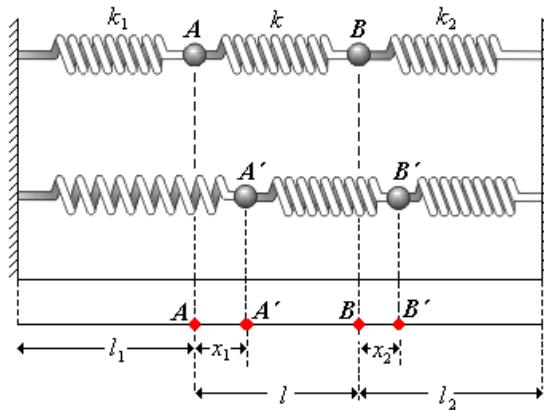


Figura 34. Sistema de masas unidas por resortes

En la figura 34, se observa que la deformación del resorte k_1 es igual a la distancia $AA'=x_1$, el resorte k_2 se comprime una distancia $BB'=-x_2$, finalmente, la deformación del resorte k es igual a la distancia $A'B'-AB=x_2-x_1$.

$$A'B' - AB = (A'B + BB') - (AA' + A'B) = BB' - AA' = x_2 - x_1$$

En la figura 35 se observa que el resorte k_1 ejerce una fuerza $-k_1x_1$ sobre m_1 , y similarmente k_2 ejerce una fuerza $-k_2x_2$ sobre m_2 . El resorte k ejerce una fuerza $k(x_2 - x_1)$ sobre m_1 , y una fuerza $-k(x_2 - x_1)$ sobre m_2 .

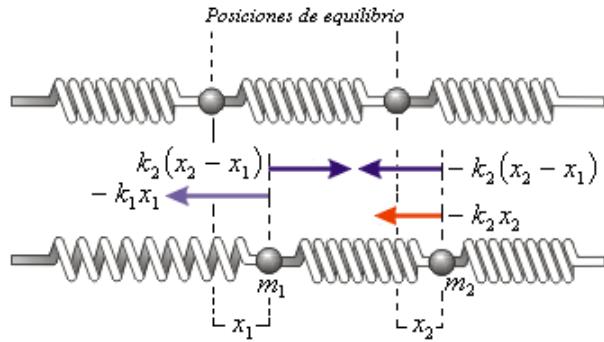


Figura 35. Osciladores acoplados.

La ecuación de movimiento de cada partícula usando la segunda ley de Newton es:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k(x_2 - x_1)$$

Agrupando términos semejantes:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m_1} x_1 = \frac{k}{m_1} x_2 \quad (87)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k_2 + k}{m_2} x_2 = \frac{k}{m_2} x_1 \quad (88)$$

En lugar de intentar obtener la solución general de las ecuaciones anteriores, se indica los resultados principales, limitándonos al caso particular de dos osciladores idénticos de modo que $m_1 = m_2 = m$ y $k_1 = k_2$. Este caso, aunque más simple, tiene esencialmente todas las características del caso general.

Entonces las ecuaciones (87) y (88) son:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m} x_1 = \frac{k}{m} x_2 \quad (89)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m} x_2 = \frac{k}{m} x_1 \quad (90)$$

Sumando y restando las dos ecuaciones anteriores:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m} (x_1 + x_2) = \frac{k}{m} (x_1 + x_2)$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m} (x_1 - x_2) = -\frac{k}{m} (x_1 - x_2)$$

Simplificando, obse tienelas ecuaciones diferenciales de las oscilaciones libres:

$$\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} + \frac{k_1}{m} (x_1 + x_2) = 0 \quad (91)$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{k_1 + 2k}{m} (x_1 - x_2) = 0 \quad (92)$$

Estas dos ecuaciones representan las ecuaciones diferenciales de dos movimientos armónicos simples de frecuencias:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad (93)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k}{m}} \quad (94)$$

Las soluciones de las ecuaciones (91) y (92) son entonces:

$$\Psi_1 = x_1 + x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1)$$

$$\Psi_2 = x_1 - x_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)$$

Donde las amplitudes A_1 y A_2 y las fases iniciales α_1 y α_2 , están determinadas por las condiciones iniciales: posición inicial y velocidad inicial de cada partícula.

Despejando x_1 y x_2 de las ecuaciones anteriores:

(95)

8

$$x_2 = \frac{1}{2}(\Psi_1 - \Psi_2) = \frac{1}{2}[A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)] \quad (96)$$

Las ecuaciones anteriores muestran que el movimiento general de dos osciladores acoplados puede considerarse como la superposición de dos modos normales de oscilación de frecuencias angulares ω_1 y ω_2 .

Las ecuaciones (95) y (96) también pueden escribirse como:

$$x_1 = \frac{1}{2}[(A_1 \cos \alpha_1) \sin \omega_1 t + (A_1 \sin \alpha_1) \cos \omega_1 t] + \frac{1}{2}[(A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega_2 t + (A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega_2 t]$$

$$x_2 = \frac{1}{2}[(A_1 \cos \alpha_1) \sin \omega_1 t + (A_1 \sin \alpha_1) \cos \omega_1 t] - \frac{1}{2}[(A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega_2 t + (A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega_2 t]$$

Supóngase que en el instante inicial $t = 0$, las posiciones iniciales de las dos partículas son respectivamente x_{o1} y x_{o2} y sus velocidades iniciales son cero. Bajo estas condiciones:

$$x_{o1} = \frac{1}{2} [A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2]$$

$$\dot{x}_{o2} = \frac{1}{2} [A_1 \sin \alpha_1 - A_2 \sin \alpha_2]$$

$$\dot{x}_1 \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} [A_1 \omega_1 \cos \alpha_1 + A_2 \omega_2 \cos \alpha_2] = 0$$

$$\dot{x}_2 \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} [A_1 \omega_1 \cos \alpha_1 - A_2 \omega_2 \cos \alpha_2] = 0$$

De estas ecuaciones se deduce:

$$A_1 \sin \alpha_1 = x_{o1} + x_{o2}$$

$$A_1 \cos \alpha_1 = 0$$

$$A_2 \sin \alpha_2 = x_{o1} - x_{o2}$$

$$A_2 \cos \alpha_2 = 0$$

Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones de x_1 y x_2 se obtiene:

$$x_1 = \frac{1}{2} (x_{o1} + x_{o2}) \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} (x_{o1} - x_{o2}) \cos \omega_2 t \quad (97)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (x_{o1} + x_{o2}) \cos \omega_1 t - \frac{1}{2} (x_{o1} - x_{o2}) \cos \omega_2 t \quad (98)$$

El primer modo normal de vibración de frecuencia ω_1 se obtiene cuando los dos osciladores se mueven en fase x_{o1} es igual a x_{o2} . El muelle central no sufre ninguna deformación y por tanto, no ejerce ninguna fuerza sobre las partículas, las cuales se mueven como si no estuvieran acopladas:

$$x_1 = x_{o1} \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = x_{o1} \cos \omega_1 t$$

El segundo modo normal de frecuencia ω_2 se obtiene cuando los dos osciladores se mueven en oposición de fase $x_{o1} = -x_{o2}$, y entonces la frecuencia es mayor que la frecuencia sin acoplamiento. Esto es fácilmente comprensible ya que ahora el resorte central se estira y se comprime, y esto equivale a aumentar la constante elástica de cada oscilador. Las ecuaciones del movimiento de cada oscilador se reducen a las siguientes:

$$x_1 = x_{o1} \cos \omega_2 t$$

$$x_2 = -x_{o1} \cos \omega_2 t$$

En la figura 36, Los dos modos normales corresponden a una situación en la cual las dos masas se mueven con diferencia de fase constante, al cual es cero en el primer modo y π en el segundo. Las dos masas pasan simultáneamente a través de su posición de equilibrio y alcanzan sus desplazamientos máximos simultáneamente.

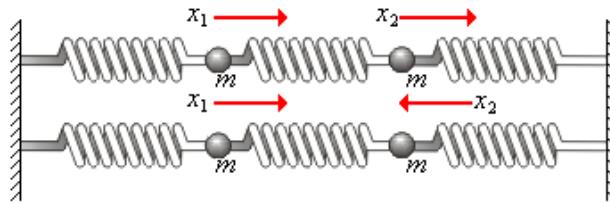


Figura 36. Modos normales de oscilación de dos osciladores acoplados idénticos.

Supóngase que $x_{o2} = 0$. Las ecuaciones de movimiento (97) y (98) se pueden escribir de forma más simple usando las relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B) \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)\end{aligned}$$

$$x_1 = [x_{o1} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t] \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \quad (99)$$

$$x_2 = [x_{o1} \sin \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t] \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t \quad (100)$$

Cuando la amplitud de un oscilador varía con el tiempo, se denomina amplitud modulada. La amplitud del primer oscilador $x_{o1} \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$ es una función coseno que está adelantada $\pi/2$ respecto de la amplitud modulada del segundo oscilador, que es una función seno. Debido a la diferencia de fase entre las dos amplitudes modulantes hay un intercambio de energía entre los dos osciladores. Durante un cuarto de periodo modulante, la amplitud de un oscilador disminuye y la del otro aumenta, dando lugar a una transferencia de energía del primero al segundo. Durante el siguiente cuarto de periodo, la situación se invierte y la energía fluye en dirección opuesta. El proceso se repite continuamente.

Las variaciones de x_1 y x_2 en función de t se ilustran en la figura 37.

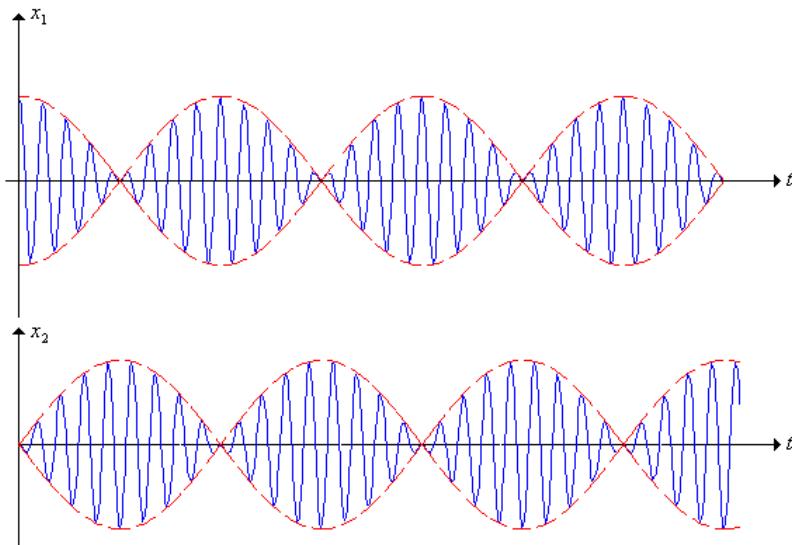


Figura 37. Osciladores acoplados.

4.3.13. Oscilaciones Acopladas

Método Matricial. La teoría general del movimiento oscilatorio de un sistema de partículas con un número finito de grados de libertad fue formulada por Lagrange entre los años 1762 y 1765, aunque el precursor fue Daniel Bernoulli (1700-1782) con un trabajo publicado en 1763. Cuando se conectan dos o más osciladores de tal forma que la energía pueda pasar de uno a otro (o de los unos a los otros) en uno y otro sentido, se está ante la situación más complicada que corresponde al caso de *oscilaciones acopladas*.

Un movimiento de esta clase puede ser sumamente complejo (incluso puede no ser periódico), pero como veremos, siempre es posible describir el movimiento de un sistema oscilante en función de las *coordenadas normales*, que tienen la propiedad de que cada una de ellas oscila con una frecuencia bien definida. Es decir, las coordenadas normales se construyen de manera tal que no existe acoplamiento entre ellos, aún cuando haya acoplamiento entre las coordenadas ordinarias o generalizadas que definen las posiciones de las partículas. Las condiciones iniciales del sistema pueden establecerse siempre de forma que en el movimiento subsiguiente sólo una de las coordenadas normales varíe con el tiempo; en estas circunstancias se dice que se ha excitado uno de los *modos normales del sistema*.

Cuando se necesitan n coordenadas linealmente independientes para determinar las posiciones de las masas de un sistema, se dice que el sistema es de n grados de libertad.

El movimiento vibratorio de un sistema de n grados de libertad se representa por n ecuaciones diferenciales de movimiento, las cuales se pueden obtener por la ley del movimiento de Newton, por la ley de la conservación de la energía, por las ecuaciones de Lagrange, etc.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema de n masas puede expresarse en general así:

$$\begin{aligned}
 m_{11} \ddot{q}_1 + \dots + k_{12}q_2 + \dots + k_{1n}q_1 &= 0 \\
 m_{21} \ddot{q}_2 + \dots + k_{21}q_1 + \dots + k_{2n}q_2 &= 0 \\
 \dots \\
 m_{n1} \ddot{q}_n + \dots + k_{n2}q_2 + \dots + k_{nn}q_1 &= 0
 \end{aligned}$$

En notación matricial, estas ecuaciones diferenciales se escriben así:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = 0$$

O sencillamente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Donde **M** se llama *matriz de inercia*, y **K** se denomina *matriz de rigidez*.

La ecuación matricial anterior puede expresarse también en la forma:

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{K})\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

O bien:

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} - \omega^2 \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Donde **C** se llama *matriz dinámica*.

El acoplamiento entre las ecuaciones de movimiento se debe a que la matriz de inercia **M** o la matriz dinámica **C** no son diagonales por lo general; de esta manera, si se logra diagonalizar esta matriz, las ecuaciones de movimiento se desacoplan. Esto se logra a través de un procedimiento llamado **transformación de semejanza o de similitud**, el cual implica encontrar una matriz **T** y su inversa **T⁻¹** tal que la matriz **K^{*} = T⁻¹KT** sea diagonal.

Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{I} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}$ la matriz identidad.

Entonces:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\ddot{\mathbf{x}}) - (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}) = \mathbf{0}$$

Haciendo la sustitución:

$$\Theta = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}$$

Y por ende, $\ddot{\mathbf{x}} = \Theta$

Se puede escribir:

$$(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{T})(\ddot{\mathbf{x}}) - (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T})\Theta = \mathbf{0}$$

Llamando:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{T} \\ \mathbf{K}^* &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{T} \end{aligned}$$

Luego:

$$\mathbf{M}^*\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}^*\Theta = \mathbf{0}$$

Para que en efecto, esta ecuación esté desacoplada, se construye la matriz \mathbf{T} de tal forma que sus columnas sean los **vectores propios eigenvectores** de la matriz \mathbf{K} ; es decir los vectores columna que satisfacen la ecuación de valores propios:

$$\mathbf{K}\mathbf{T}_i = \lambda_i \mathbf{T}_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Los coeficientes λ_i se denominan **valores propios o eigenvalores** de la matriz \mathbf{K} .

Siendo \mathbf{I} la matriz identidad, se puede reescribir la ecuación de valores propios como:

$$\mathbf{K}\mathbf{T}_i = \lambda_i \mathbf{I}\mathbf{T}_i$$

O equivalentemente:

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{T}_i = \mathbf{0}$$

En extenso:

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \lambda_i & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda_i & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1i} \\ T_{2i} \\ \vdots \\ T_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución no trivial si:

$$|\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0$$

Por consiguiente, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} k_{11} - \lambda_i & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - \lambda_i & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

La solución de este determinante nos permite obtener los valores propios λ_i y por ende los vectores propios T_i con los cuales se construye la matriz T .

En la figura 38, se ilustra lo anterior resolviendo el problema de dos masas iguales con resortes de igual constante de elasticidad:

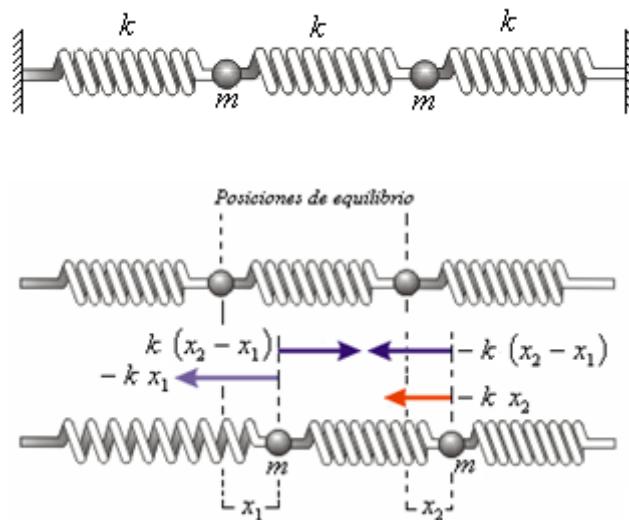


Fig. 38. Diagrama de fuerzas de dos masas acopladas por resortes.

Como ya se encontró anteriormente las ecuaciones de movimiento de este sistema a través de las leyes de Newton, se utiliza ahora el principio de la conservación de la energía:

$$\text{Energía cinética: } E_k = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}_2^2$$

$$\text{Energía potencial: } U = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2$$

La energía mecánica total del sistema es entonces:

$$E = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} k(x_2 - x_1)^2$$

Si el sistema es conservativo, la energía mecánica permanece constante en el tiempo y por tanto:

$$\frac{dE}{dt} = m \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_2 - kx_1 - kx_2 = 0$$

Agrupando términos semejantes:

$$m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 - kx_1 - kx_2 = 0$$

La independencia lineal de \ddot{x}_1 y \ddot{x}_2 obliga a que:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 - kx_2 &= 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 &= 0 \end{aligned}$$

Escribiendo este sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

En forma más compacta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Siendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \text{ "matriz de inercia"}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \text{ "matriz de rigidez"}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ "matriz de coordenadas"}$$

Como puede observarse, el acoplamiento se debe a que la matriz de rigidez no es diagonal.

Para poder diagonalizar la matriz \mathbf{K} , se resuelve la ecuación de valores propios:

$$\mathbf{K}\mathbf{T}_i = \lambda_i \mathbf{T}_i \quad i=1,2$$

O bien:

$$|\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k - \lambda_i & -k \\ -k & 2k - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

$$(2k - \lambda_i)^2 - k^2 = 0$$

$$\lambda_i^2 - 4k\lambda_i + 3k^2 = 0$$

Factorizando:

$$(\lambda_i - 3k)(\lambda_i - k) = 0$$

$$\lambda_i = 3k \vee \lambda_i = k$$

Entonces los valores propios son los siguientes:

$$\lambda_1 = 3k$$

$$\lambda_2 = k$$

Para $\lambda_1 = 3k$, la ecuación de vectores propios equivalente $(\mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{T}_1 = \mathbf{0}$ nos da:

$$\begin{bmatrix} 2k - \lambda_1 & -k \\ -k & 2k - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$-kT_{11} - kT_{21} = 0$$

$$T_{21} = -T_{11}$$

El vector propio de la matriz \mathbf{K} correspondiente al primer valor propio $\lambda_1 = 3k$ es entonces:

$$\mathbf{T}_1 = T_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = k$, la ecuación de vectores propios equivalente $(\mathbf{K} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{T}_2 = \mathbf{0}$ nos da:

$$\begin{bmatrix} 2k - \lambda_2 & -k \\ -k & 2k - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$kT_{12} - kT_{22} = 0$$

$$T_{22} = T_{12}$$

El vector propio de la matriz \mathbf{K} correspondiente al primer valor propio $\lambda_1 = 3k$ es entonces:

$$\mathbf{T}_2 = T_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores propios están indeterminados en una constante, a la cual se le puede asignar un valor exigiendo que los vectores propios estén normalizados:

$$\mathbf{T}_1^T \mathbf{T}_1 = T_{11}^2 (1 - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = T_{11}^2 (1 + 1) = 2T_{11}^2 = 1$$

Donde:

$$T_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y así:

$$\mathbf{T}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2^T \mathbf{T}_2 = T_{12}^2 (1 - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2T_{12}^2 = 1$$

Donde:

$$T_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Y así:

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se puede construir la matriz \mathbf{T} , cuyas columnas son precisamente los vectores propios \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es **unitaria**, para la cual se cumple que su inversa es igual a la transpuesta.

En efecto:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$$

Ahora ya se puede diagonalizar la matriz de rigidez por medio de la transformación de semejanza:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Se puede verificar fácilmente también que la matriz de inercia **M** no se ve afectada por una transformación de semejanza:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T} = \mathbf{M}$$

Ya conocidas las matrices **M*** y **K*** se retorna al sistema de ecuaciones desacopladas:

$$\mathbf{M}^* \ddot{\theta}_1 + \mathbf{K}^* \theta_1 = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 & \ddot{\theta}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas θ_1 y θ_2 se llaman las **coordenadas normales** del sistema.

Ahora, ya se puede ver que el sistema de ecuaciones quedó desacoplado:

$$\begin{aligned} m\ddot{\theta}_1 + k\theta_1 &= 0 \\ m\ddot{\theta}_2 + k\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución general de este sistema de ecuaciones diferenciales, el cual corresponde a M.A.S es evidentemente:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ \theta_2(t) &= A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)\end{aligned}$$

Siendo:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Las **frecuencias propias de oscilación**.

Finalmente, como:

$$\Theta = T^{-1}Q$$

Entonces:

$$Q = X = T\Theta$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix}$$

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)]$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2)]$$

Ejemplo: Dos péndulos simples están unidos por un resorte, como se muestra en la figura 39. Determine la frecuencia natural de cada péndulo.

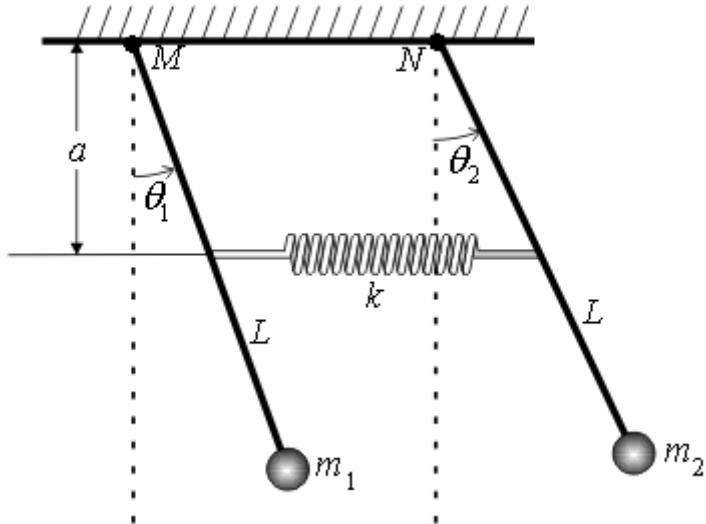


Fig. 39. Péndulos simples acoplados por un resorte.

La deformación del resorte está dada por:

$$\delta = \overline{BD} - \overline{AC} = (\overline{BC} + \overline{CD}) - (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{CD} - \overline{AB} = a\theta_2 - a\theta_1 = a(\theta_2 - \theta_1)$$

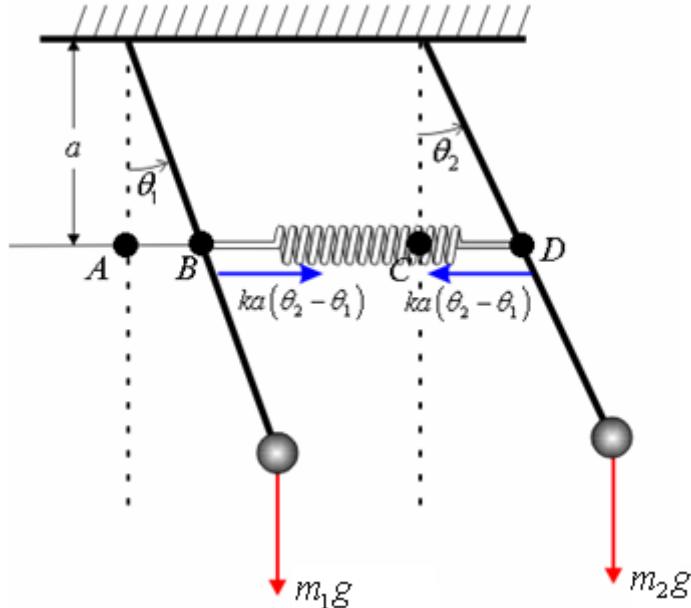


Fig. 40. Fuerzas en dos péndulos simples acoplados por un resorte.

Tomando momentos alrededor de los puntos articulados M y N , se tiene:

$$\sum \tau_M = -m_1gL\theta_1 + ka^2(\theta_2 - \theta_1) = m_1L^2\ddot{\theta}_1$$

$$\sum \tau_N = -m_2gL\theta_2 - ka^2(\theta_2 - \theta_1) = m_2L^2\ddot{\theta}_2$$

Reorganizando los términos de las expresiones anteriores en forma diferencial se tiene:

$$m_1L^2\ddot{\theta}_1 + (m_1gL + ka^2)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0$$

$$m_2L^2\ddot{\theta}_2 + (m_2gL + ka^2)\theta_2 - ka^2\theta_1 = 0$$

Reorganizando las expresiones obse tienelas ecuaciones diferenciales del movimiento armónico acoplado.

$$m_1L^2\ddot{\theta}_1 + (m_1gL + ka^2)(\theta_2 - \theta_1)$$

$$m_2L^2\ddot{\theta}_2 + (m_2gL + ka^2)(\theta_2 - \theta_1)$$

Sea $\theta_1 = A\text{sen}(\omega t)$ y $\theta_2 = B\text{sen}(\omega t)$. Reemplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento y suponiendo que $m_1 = m_2$, se obtiene:

$$\ddot{\theta}_1 \sim A\text{sen}(\omega t)$$

$$\ddot{\theta}_2 \sim B\text{sen}(\omega t)$$

Escribiendo las expresiones en términos de la frecuencia angular se obtiene:

$$-\omega^2mL^2A = -mgLA + ka^2(B - A)$$

$$-\omega^2mL^2B = -mgLB - ka^2(B - A)$$

Simplificando:

$$(-\omega^2mL^2 + mgL + ka^2)A - ka^2B = 0$$

$$(-\omega^2mL^2 + mgL + ka^2)B - ka^2A = 0$$

La ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B :

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 mL^2 + mgL + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & -\omega^2 mL^2 + mgL + ka^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$\omega^4 - 2\left(\frac{g}{L} + \frac{ka^2}{mL^2}\right)\omega^2 + \left(\frac{g^2}{L^2} + \frac{2ka^2 g}{mL^3}\right) = 0$$

Reorganizando los términos para encontrar las expresiones de las frecuencias de oscilación, se obtiene:

$$\omega^4 - 2\left(\frac{g}{L} + \frac{ka^2}{mL^2}\right)\omega^2 + \frac{g}{L}\left(\frac{g}{L} + \frac{2ka^2}{mL^2}\right) = 0$$

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{L}\right)\left(\omega^2 - \left(\frac{g}{L} + \frac{2ka^2}{mL^2}\right)\right) = 0$$

Finalmente, se obtienen las frecuencias de oscilación:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2ka^2}{mL^2}} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Analizando ahora con más detalle, el sistema de ecuaciones diferenciales que describen las ecuaciones de movimiento de los dos péndulos:

$$\begin{aligned} m_1 L^2 \ddot{\theta}_1 + (mgL + ka^2) \theta_1 - ka^2 \theta_2 &= 0 \\ m_2 L^2 \ddot{\theta}_2 + (-m_1 gL - ka^2) \theta_1 + (m_2 gL + ka^2) \theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Expresando en forma matricial el sistema anterior, obse tiene la representación de la matriz de inercia \mathbf{K} :

$$\begin{pmatrix} m_1 L^2 & 0 \\ 0 & m_2 L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 + gL + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & m_2 gL + ka^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma más compacta de la representación matricial \mathbf{K} es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$$

Lo anterior significa que en el segundo modo normal de oscilación, los dos osciladores se mueven en oposición con amplitudes iguales, y entonces la frecuencia es mayor que la frecuencia sin acoplamiento.

Esto es comprensible ya que ahora el resorte se estira y se comprime y esto equivale a aumentar la constante elástica de cada oscilador.

Los dos modos normales corresponden a una situación en la cual las dos masas se mueven con diferencia de fase constante, la cual es cero en el primer modo propio de oscilación y π en el segundo.

Las dos masas pasan simultáneamente a través de su posición de equilibrio y alcanzan sus desplazamientos máximos simultáneamente.

Las ecuaciones que mejor representan el movimiento de los péndulos son:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \\ \theta_2(t) &= -A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Puede verse que estas dos ecuaciones expresan la solución general de las ecuaciones diferenciales del movimiento de los dos péndulos, ya que contienen 4 constantes arbitrarias $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$ como corresponde a un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden. Estas dos ecuaciones indican que $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ son los resultados de la superposición de dos movimientos armónicos simples en la misma dirección pero de frecuencia y fase distintas.

Para una mejor comprensión de la física del problema se considera el caso especial de amplitudes iguales $A_1 = A_2$ y fases iniciales nulas $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$:

$$\theta_1(t) = A_1 [\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$

$$\theta_2(t) = A_1 [-\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]$$

Usando la identidad:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha \mp \beta}{2} \right)$$

Tenemos:

$$\theta_1(t) = \left[2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \right] \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

$$\theta_2(t) = \left[2A_1 \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \right] \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

Este modelo especial de movimiento se conoce como **fénómeno de pulsación**.

Comparando las expresiones dadas se ve que la amplitud modulada de $\theta_1(t)$ es

$$2A_1 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$$

Pero la amplitud modulada de $\theta_2(t)$ es:

$$2A_1 \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t = 2A_1 \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t - \frac{\pi}{2} \right]$$

Se ve entonces que las dos amplitudes moduladas tienen una diferencia de fase de $\pi/2$, o un cuarto de periodo modulante. Las variaciones de $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$ en función del tiempo se muestran en la figura 41.

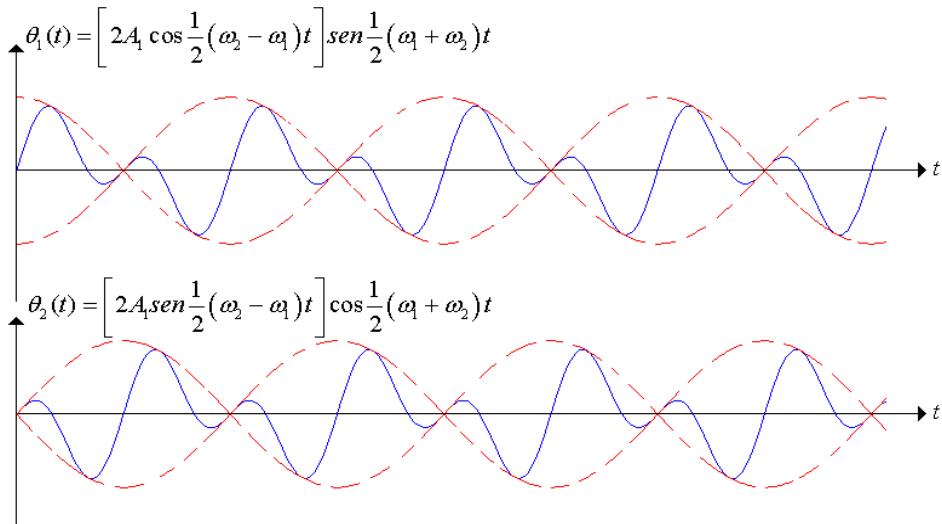


Fig. 41. Amplitud modulada.

Debido a la diferencia de fase entre las dos amplitudes modulantes hay un intercambio de energía entre los dos osciladores. Durante un cuarto de periodo modulante, la amplitud de un oscilador disminuye y la del otro aumenta, dando lugar a una transferencia de energía del primero al segundo.

Si se supone que las posiciones angulares iniciales de las dos masas son θ_{10} y θ_{20} y que inicialmente están en reposo, las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{1}{2}(\theta_{10} - \theta_{20})\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}(\theta_{10} + \theta_{20})\cos(\omega_2 t) \\ \theta_2(t) &= -\frac{1}{2}(\theta_{10} - \theta_{20})\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}(\theta_{10} + \theta_{20})\cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

4.3.13. Oscilaciones Amortiguadas. Lo estudiado hasta ahora sobre el M.A.S indica que las oscilaciones tienen amplitud constante, sin embargo, la experiencia muestra que la amplitud de un cuerpo vibrante como un resorte o un péndulo, decrece gradualmente hasta que se detiene.

Para explicar dinámicamente el movimiento amortiguado se puede suponer que, en adición a la fuerza estática $F = -kx$, actúa otra fuerza, opuesta a la velocidad. Se considera como ejemplo la fuerza de viscosidad del medio en el cual el movimiento tiene lugar, y se escribe esta fuerza como $f = -\beta v$, donde β es una constante y v es la velocidad.

La fuerza resultante sobre la partícula es $F + f$, y su ecuación de movimiento es:

$$ma = -kx - \beta v \quad (101)$$

o bien,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (102)$$

Esta ecuación se escribe usualmente en la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0 \quad (103)$$

Siendo $\lambda = \frac{\beta}{2m}$ Factor de amortiguamiento y $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la frecuencia angular natural.

Si se hace la sustitución $x = c e^{\eta t}$ y se reemplaza en (103) se tiene después de simplificar, la *ecuación auxiliar*:

$$\eta^2 + 2\lambda\eta + \omega_o^2 = 0$$

Las raíces de esta ecuación son evidentemente:

$$\eta = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_o^2}}{2}$$

Simplificando:

$$\eta = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} \quad (104)$$

Según el signo algebraico de $\lambda^2 - \omega_o^2$ se puede distinguir tres casos:

a) $\lambda^2 - \omega_o^2 > 0$ En esta situación se dice que el sistema está *sobreamortiguado*, puesto que el coeficiente de amortiguación β es grande comparado con la constante k del resorte. La correspondiente solución de (103) es:

$$x = c_1 e^{\eta_1 t} + c_2 e^{\eta_2 t}$$

o bien:

$$x = e^{-\lambda t} \left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_o^2} t} \right) \quad (105)$$

En la figura 42 se representa un movimiento suave y no oscilatorio.

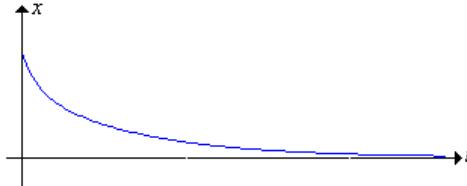


Figura 42. Movimiento sobreamortiguado.

b) $\lambda^2 - \omega_o^2 = 0$ En esta situación se dice que el sistema está *críticamente amortiguado*, ya que una pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento producirá un movimiento oscilatorio. La correspondiente solución de (103) es:

$$x = e^{-\lambda t} (c_1 + c_2 t) \quad (106)$$

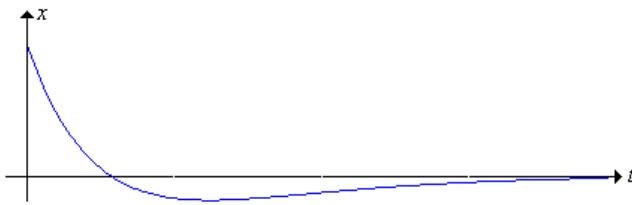


Figura 43. Movimiento críticamente amortiguado.

La ecuación anterior muestra que la partícula puede pasar a lo más una vez por la posición de equilibrio.

En la figura 43, se observa el gráfico del movimiento de un movimiento críticamente amortiguado.

c) $\lambda^2 - \omega_o^2 < 0$ En este caso se dice que el sistema está *subamortiguado*, ya que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño comparado con la constante del resorte. Las raíces de (1.72) son ahora complejas,

$$\eta_1 = -\lambda + \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} i, \quad \eta_2 = -\lambda - \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} i$$

y por tanto la solución general de la ecuación (103) es:

$$x = e^{-\lambda t} \left[c_1 e^{(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t)i} + c_2 e^{-(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t)i} \right]$$

Aplicando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, obse tiene finalmente:

$$x = e^{-\lambda t} \left(c_1 \cos \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + c_2 \sin \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t \right)$$

Tal como lo indica la ecuación anterior el movimiento es oscilatorio. Sin embargo, a causa del coeficiente $e^{-\lambda t}$, las amplitudes de vibración tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$. La ecuación anterior también puede escribirse:

$$x = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha\right)$$

O bien,

$$x = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \quad (107)$$

Donde A y α son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales, y:

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} \quad (108)$$

Como la función dada en la ecuación (107)(1.75) no es periódica, al coeficiente:

$$T_q = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} \quad (109)$$

Se le denomina **cuaiperíodo**, a $f_q = 1/T_q = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}/2\pi$ **cuaifrecuencia** y a la cantidad $Ae^{-\lambda t}$ amplitud amortiguada, como se observa en la figura 44.

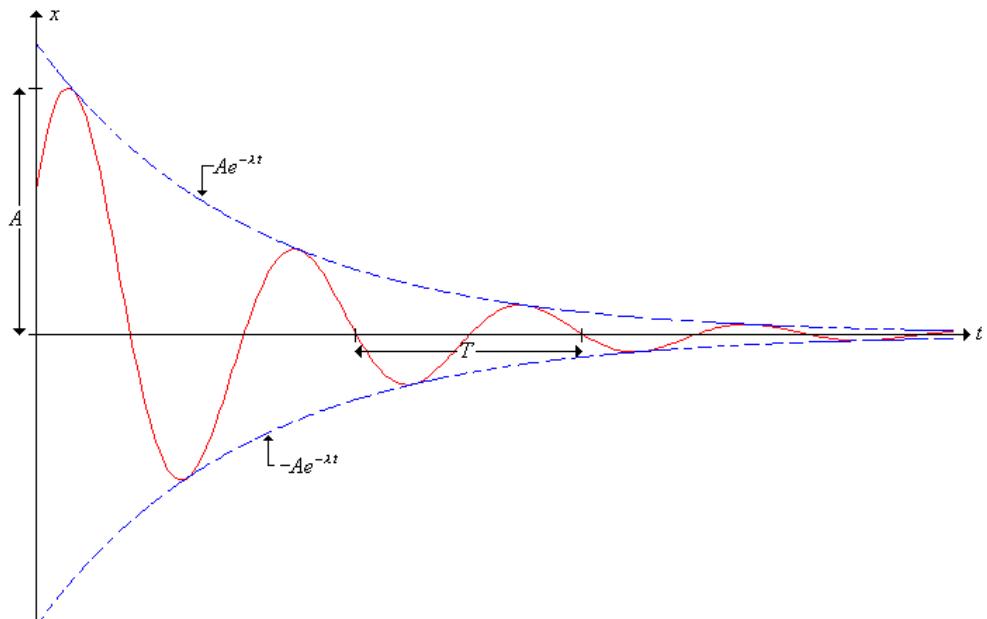


Figura 44. Movimiento subamortiguado.

Para trazar la gráfica anterior, primero se busca los valores de t para los cuales x vale cero. Esto es, para algún entero n se debe hallar t en la ecuación:

$$\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha = n\pi$$

Se obtiene:

$$t_n = \frac{n\pi - \alpha}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}$$

De la ecuación anterior se deduce que el intervalo de tiempo entre dos valores sucesivos del tiempo para los cuales la curva corta al eje t es la mitad del *cuasiperiodo*.

En efecto:

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n = \frac{(n+1)\pi - \alpha}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} - \frac{n\pi - \alpha}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} = T_q / 2$$

Además, se hace notar que $|x(t)| \leq Ae^{-\lambda t}$, puesto que $\left| \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha\right) \right| \leq 1$.

Entonces, la gráfica de (107) es tangente a las gráficas de $\pm Ae^{-\lambda t}$ en los valores de t para los cuales:

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha\right) = \pm 1$$

Esto significa que $\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha$ debe ser un múltiplo impar de $\pi/2$,

$$\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$t_n = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}}$$

El intervalo de tiempo entre dos valores sucesivos de t para los cuales la gráfica de $Ae^{-\lambda t}$ es tangente a la gráfica de la ecuación (107) también es igual a la mitad del *cuasiperíodo*:

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n = \frac{[2(n+1)+1]\frac{\pi}{2} - \alpha}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} - \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \alpha}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} = T_q / 2$$

Por último, se demostrará que el tiempo transcurrido entre dos máximos positivos sucesivos de la ecuación de movimiento es igual al *cuasiperíodo*:

Derivando respecto al tiempo la ecuación (107):

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-\lambda t} [\omega \cos(\omega t + \alpha) - \lambda \sin(\omega t + \alpha)]$$

Los puntos máximos (o mínimos) se obtienen igualando la derivada a cero:

$$\omega \cos(\omega t + \alpha) - \lambda \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

Lo cual implica que:

$$\tan(\omega t + \alpha) = \frac{\omega}{\lambda}$$

Entonces:

$$t_n = \frac{1}{\omega} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) + n\pi - \alpha \right]$$

la diferencia entre dos valores de t correspondientes a dos máximos (o mínimos) sucesivos es entonces:

$$\Delta t = t_{n+2} - t_n = \frac{1}{\omega} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) + (n+2)\pi - \alpha \right] - \frac{1}{\omega} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) + n\pi - \alpha \right]$$

$$\Delta t = \frac{(n+2)\pi}{\omega} - \frac{n\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = T_q$$

Un concepto muy importante en el movimiento *subamortiguado* es el de *decremento logarítmico* δ , el cual se define como el logaritmo de la razón entre dos desplazamientos máximos (o mínimos) consecutivos:

$$x_n / x_{n+2} = x(t) / x(t + T_q) = \frac{e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \alpha)}{e^{-\lambda(t+T_q)} \sin[\omega(t+T_q) + \alpha]}$$

$$x_n / x_{n+2} = e^{\lambda T_q}$$

Por lo tanto:

$$\delta = \ln(x_n / x_{n+2}) = \lambda T_q = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}} \quad (110)$$

Ejemplo: Un péndulo consiste de una esfera de aluminio de 0,005 m de radio suspendida de una cuerda de 1m de largo. Determinar cómo la viscosidad del aire afecta su amplitud y su período.

Solución: La fuerza viscosa que actúa sobre una esfera de radio R que se mueve en un fluido con velocidad v es de acuerdo a la ley de Stokes $F = -6\pi\eta R v$. Así se puede encontrar la ecuación del movimiento tangencial del péndulo agregando a la fuerza $F_T = -mg \sin\theta \approx -mg\theta$ para pequeñas amplitudes, la fuerza viscosa, con $v = ds/dt = l d\theta/dt$, donde l es la longitud del péndulo. Por consiguiente:

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta - 6\pi\eta R l \frac{d\theta}{dt}$$

o bien:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{6\pi\eta R}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

La cual es una ecuación diferencial matemáticamente idéntica a la ecuación (103). Poniendo $m = \rho V = (4\pi R^3 / 3)\rho$, donde ρ es la densidad de la esfera de aluminio, igual a $2,65 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^{-3}$, se llega a la conclusión que:

$$2\lambda = \frac{6\pi\eta R}{m}$$

$$\lambda = \frac{6\pi\eta R}{2m} = \frac{6\pi\eta R}{2(4\pi R^3 / 3)\rho} = \frac{9\eta}{4R^2}$$

La viscosidad del aire, suponiendo una temperatura de 20°C , es de $1,78 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \text{ Kg seg}^{-1}$. Así $\lambda = 6,43 \times 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$. Por tanto la amplitud decrece de acuerdo a la ley $Ae^{-\lambda t} = Ae^{-0,000643t}$. El tiempo necesario para que la amplitud se reduzca al 10 % se obtiene igualando el exponente a 0,9, donde $-6,43 \times 10^{-4} t = \ln(0,9)$. El tiempo es de $1,64 \times 10^3 \text{ seg}$, o alrededor de 27 minutos.

Para ver como la viscosidad del aire afecta el período de las oscilaciones se usa la ecuación (1.76) en la forma $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$, notando que $\omega_o^2 = g/l$, pero $g/l = 9,8 \text{ seg}^{-2}$, mientras que λ^2 en nuestro ejemplo es del orden de $4 \times 10^{-7} \text{ seg}^{-2}$, despreciable comparada con g/l . Así, se concluye que la viscosidad del aire prácticamente no afecta la frecuencia o el período del péndulo, aunque sí afecta su amplitud.

4.3.14. Oscilaciones Forzadas. Otro fenómeno de gran interés es aquel en el que una fuerza externa oscilatoria se aplica a una partícula sometida a una fuerza elástica.

Sea $F = F_o \cos \omega_f t$ la fuerza oscilante aplicada, siendo su frecuencia angular ω_f . Suponiendo que la partícula está sometida a una fuerza elástica $-kx$ y a una fuerza de amortiguamiento $-\beta v$, su ecuación de movimiento es $ma = -kx - \beta v + F_o \cos \omega_f t$. Realizando las sustituciones $v = dx/dt$ y $a = d^2x/dt^2$, tenemos:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos \omega_f t$$

La cual, si se hace $\lambda = \frac{\beta}{2m}$ y $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ se transforma en:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t \quad (111)$$

Esta es una ecuación diferencial similar a la ecuación (103), difiriendo solamente en que el término de la derecha no es cero.

En el caso de oscilaciones *subamortiguadas*, ya se ha demostrado que la solución *complementaria* u homogénea de (111) es

$$x_c = A e^{-\lambda t} \operatorname{sen}(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha) \quad (112)$$

La cual tiene la propiedad de que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_c = 0$$

Puesto que x_c tiende a cero cuando el tiempo es muy grande, se dice que es un *término transitorio* o una *solución transitoria*.

Suponga ahora que $x_p = A_1 \operatorname{sen} \omega_f t + A_2 \cos \omega_f t$ es una solución particular de (111).

Entonces:

$$\frac{dx_p}{dt} = A_1 \omega_f \cos \omega_f t - A_2 \omega_f \operatorname{sen} \omega_f t$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = -A_1 \omega_f^2 \operatorname{sen} \omega_f t - A_2 \omega_f^2 \cos \omega_f t$$

Reemplazando estos resultados en (111):

$$\begin{aligned} & -A_1 \omega_f^2 \operatorname{sen} \omega_f t - A_2 \omega_f^2 \cos \omega_f t + 2\lambda (A_1 \omega_f \cos \omega_f t - A_2 \omega_f \operatorname{sen} \omega_f t) \\ & + \omega_o^2 (A_1 \operatorname{sen} \omega_f t + A_2 \cos \omega_f t) = \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes:

$$[(\omega_o^2 - \omega_f^2)A_1 - 2\lambda A_2 \omega_f] \sin \omega_f t + \left[(\omega_o^2 - \omega_f^2)A_2 + 2\lambda A_1 \omega_f - \frac{F_o}{m} \right] \cos \omega_f t = 0$$

La independencia lineal de seno y coseno implica que:

$$(\omega_o^2 - \omega_f^2)A_1 - 2\lambda \omega_f A_2 = 0$$

$$2\lambda \omega_f A_1 + (\omega_o^2 - \omega_f^2)A_2 = \frac{F_o}{m}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2\lambda \omega_f \\ \frac{F_o}{m} & \omega_o^2 - \omega_f^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_o^2 - \omega_f^2 & -2\lambda \omega_f \\ 2\lambda \omega_f & \omega_o^2 - \omega_f^2 \end{vmatrix}} = \frac{2\lambda \omega_f F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}$$

$$A_2 = \frac{\begin{vmatrix} \omega_o^2 - \omega_f^2 & 0 \\ 2\lambda \omega_f & \frac{F_o}{m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_o^2 - \omega_f^2 & -2\lambda \omega_f \\ 2\lambda \omega_f & \omega_o^2 - \omega_f^2 \end{vmatrix}} = \frac{(\omega_o^2 - \omega_f^2)F_o / m}{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}$$

Sustituyendo estos valores en la solución particular $x_p = A_1 \sin \omega_f t + A_2 \cos \omega_f t$, resulta:

$$x_p = \left[\frac{2\lambda \omega_f}{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2} \sin \omega_f t - \frac{(\omega_f^2 - \omega_o^2)}{(\omega_o^2 - \omega_f^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2} \cos \omega_f t \right] \frac{F_o}{m}$$

Haciendo las sustituciones:

$$A_f \sin \theta = \frac{(\omega_f^2 - \omega_o^2) F_o / m}{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}$$

$$A_f \cos \theta = \frac{2\lambda \omega_f F_o / m}{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}$$

Elevando al cuadrado estas dos ecuaciones y sumando:

$$A_f^2 = \frac{[(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2] (F_o / m)^2}{[(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2]^2}$$

$$A_f = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}} \quad (112)$$

Dividiendo las dos ecuaciones previas se obtiene:

$$\tan \theta = \frac{\omega_f^2 - \omega_o^2}{2\lambda \omega_f} \quad (113)$$

Finalmente, se puede escribir:

$$x_p = \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}} \sin(\omega_f t - \theta) \quad (114)$$

O bien:

$$x_p = A_f \sin(\omega_f t - \theta) \quad (115)$$

En la figura 45 Nótese, que tanto la amplitud, como la fase inicial θ no son ya constantes arbitrarias, sino cantidades fijas que dependen de la frecuencia ω_f de la fuerza aplicada.

La ecuación (114) indica que las oscilaciones forzadas no están amortiguadas, pero tienen amplitud constante y frecuencia igual a aquella de la fuerza aplicada; por esta razón a la ecuación (114) se le llama *solución estacionaria* o de *estado permanente*. Esto significa que la fuerza aplicada supera a las fuerzas de amortiguamiento y proporciona la energía necesaria para mantener las oscilaciones.

La solución general de la ecuación (103) es entonces:

$$x = x_{transitorio} + x_{estacionaria}$$

$$x = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2} t + \alpha\right) + \frac{F_o / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}} \operatorname{sen}(\omega_f t - \theta) \quad (116)$$

Donde A y α son constantes que se determinan con las condiciones iniciales.

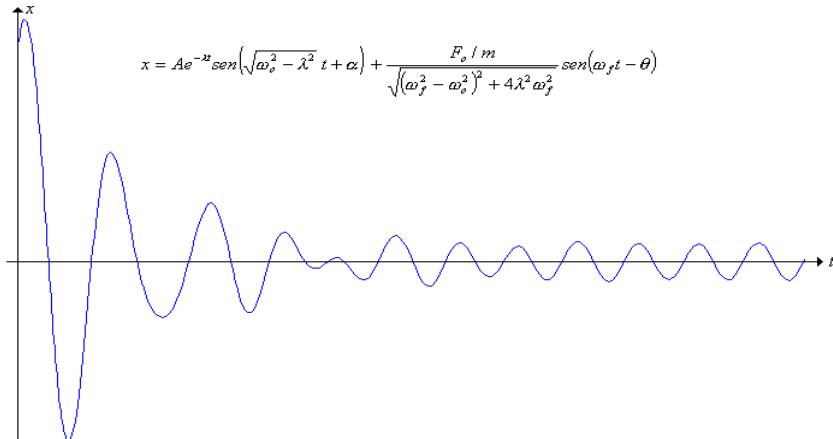


Figura 45 Oscilaciones forzadas.

En la figura 46, se representa la amplitud A_f en función de la frecuencia ω_f de la fuerza aplicada para un valor dado de λ .

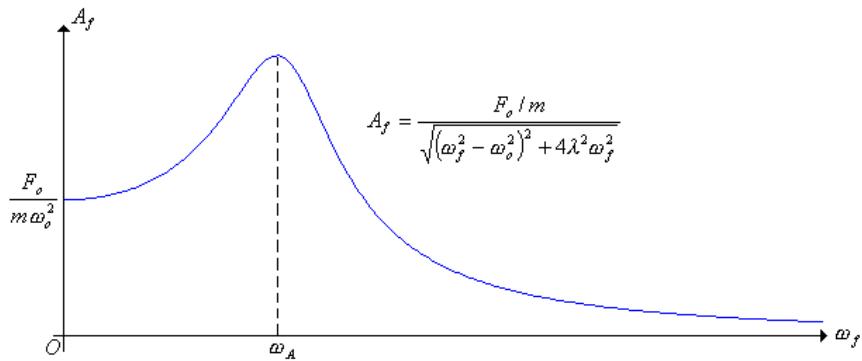


Figura 46. Variación de la amplitud con la frecuencia de la fuerza aplicada.

La amplitud tiene un valor máximo pronunciado cuando el denominador de la ecuación (112) tiene su valor mínimo. Esto ocurre para frecuencia ω_A dada por:

$$\omega_A = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{2m^2}} \quad (117)$$

En efecto, derivando la ecuación (112) respecto a ω_f :

$$\frac{dA_f}{d\omega_f} = -\frac{F_o}{2m} \frac{[4(\omega_f^2 - \omega_o^2)\omega_f + 8\lambda^2\omega_f]}{[(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2\omega_f^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Para que A_f sea un máximo se debe igualar su derivada a cero. De esta manera:

$$4(\omega_f^2 - \omega_o^2)\omega_f + 8\lambda^2\omega_f = 0$$

Simplificando:

$$\omega_f^2 - \omega_o^2 + 2\lambda^2 = 0$$

Despejando ω_f :

$$\omega_f = \omega_A = \sqrt{\omega_o^2 - 2\lambda^2}$$

Cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a ω_A , se dice que hay resonancia en la amplitud. Cuanto menor es el amortiguamiento más pronunciada es la resonancia, y cuando $\lambda = 0$, ($\beta = 0$), la amplitud de resonancia es infinita y ocurre para $\omega_A = \omega_o = k/m$. La figura 47, muestra la variación de la amplitud A_f en función de la frecuencia ω_f para diferentes valores del amortiguamiento λ .

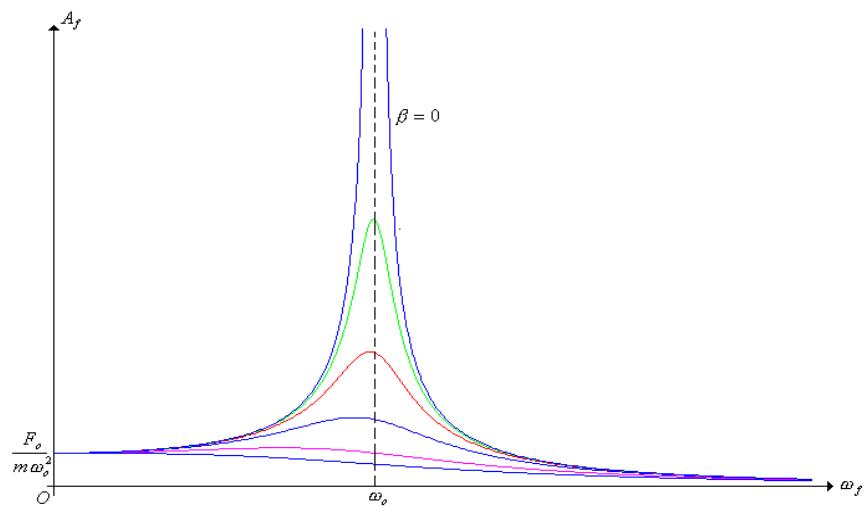


Figura 47. Variación de la amplitud con la frecuencia de la fuerza aplicada para diferentes valores del amortiguamiento

La velocidad del oscilador forzado es:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_f A_f \cos(\omega_f t - \theta) \quad (118)$$

Comparando con la expresión $F = F_o \cos \omega_f t$ de la fuerza aplicada, se ve que θ representa el desfase de la velocidad con respecto a la fuerza. La amplitud de la velocidad v_o es:

$$v_o = \omega_f A_f = \frac{\omega_f F_o / m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_o^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_f^2}}$$

La cual puede escribirse en la forma:

$$v_o = \frac{F_o}{\sqrt{(m\omega_f - k/m\omega_f)^2 + \beta^2}} \quad (119)$$

La cantidad v_o varía con ω_f , como se muestra en la figura 48, de abajo y adquiere su valor máximo cuando la cantidad dentro del paréntesis del denominador es cero, $m\omega_f - k/m\omega_f = 0$, o bien:

$$\omega_f = \sqrt{k/m} = \omega_o \quad (120)$$

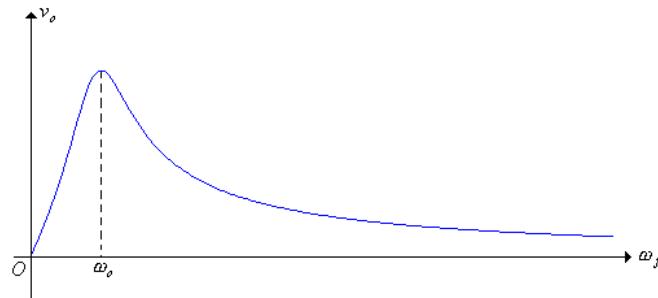


Figura 48. Variación de la amplitud de la velocidad de la oscilación con la frecuencia de la fuerza aplicada.

A esta frecuencia de la fuerza aplicada, la velocidad e igualmente la energía cinética de las oscilaciones son máximas, y se dice que hay resonancia en la energía. Nótese que cuando se sustituye (120) en (113), da $\theta = 0$. Es decir la resonancia en la energía ocurre cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a la frecuencia natural del oscilador sin amortiguamiento, y en este caso la velocidad se encuentra en fase con la fuerza aplicada. Estas son las condiciones más favorables para transferencia de energía al oscilador, ya que la variación con respecto al tiempo del trabajo hecho sobre el oscilador por la fuerza aplicada es Fv , y esta cantidad siempre es positiva cuando F y v están en fase. Por consiguiente:

Cuando hay resonancia en la energía la transferencia de energía de la fuerza aplicada al oscilador forzado está al máximo.

Cuando el amortiguamiento es muy pequeño no hay gran diferencia entre las frecuencias correspondientes a la resonancia en la amplitud y la resonancia en la energía.

4.3.15. Resonancia Pura. En ausencia de amortiguación ($\lambda = 0$), la ecuación de movimiento (179) toma la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \omega_f t$$

Si además, $\omega_f \rightarrow \omega_o$, la ecuación anterior puede escribirse:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \omega_o t \quad (121)$$

La solución complementaria de la ecuación anterior es evidentemente:

$$x_c = A \operatorname{sen}(\omega_o t + \alpha)$$

Se propone ahora como solución particular a la expresión:

$$x_p = A_1 t \operatorname{sen} \omega_o t + A_2 t \cos \omega_o t$$

Entonces:

$$\frac{dx_p}{dt} = A_1(t \omega_o \cos \omega_o t + \sin \omega_o t) + A_2(-t \omega_o \sin \omega_o t + \cos \omega_o t)$$

$$\frac{dx_p}{dt} = (A_1 - A_2 t \omega_o) \sin \omega_o t + (A_1 t \omega_o + A_2) \cos \omega_o t$$

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = (-A_1 t \omega_o^2 - 2A_2 \omega_o) \sin \omega_o t + (2A_1 \omega_o - A_2 t \omega_o^2) \cos \omega_o t$$

Reemplazando los resultados correspondientes en la ecuación (121):

$$(-2A_2 \omega_o) \sin \omega_o t + (2A_1 \omega_o) \cos \omega_o t = (F_o / m) \cos \omega_o t$$

De aquí se obtiene:

$$A_1 = \frac{F_o}{2m\omega_o} \quad y \quad A_2 = 0$$

La solución particular de la ecuación (121) es entonces:

$$x_p = \frac{F_o}{2m\omega_o} t \sin \omega_o t$$

Por tanto, la solución general de (121) es finalmente:

$$x = A \sin(\omega_o t + \alpha) + \frac{F_o}{2m\omega_o} t \sin \omega_o t \quad (122)$$

Supóngase que las condiciones iniciales del movimiento sean: $x(0) = 0$ y

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0 .$$

Bajo estas condiciones se obtiene la ecuación (123)1.92 que permite obtener la figura 49 correspondiente a la resonancia pura.

$$x = \frac{F_o}{2m\omega_o} t \operatorname{sen} \omega_o t \quad (123)$$

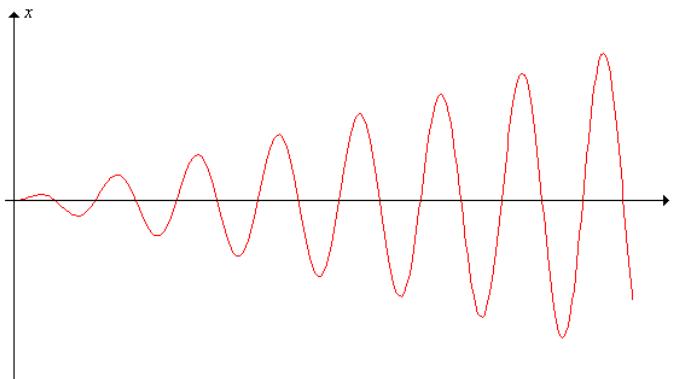


Figura 49. Resonancia pura.

Tal como se esperaba cuando $t \rightarrow \infty$, los desplazamientos se hacen muy grandes, de hecho $|x| \rightarrow \infty$. El fenómeno descrito es conocido como *resonancia pura*.

Si en la realidad un sistema mecánico fuera descrito por una función como la ecuación (123), el sistema fallaría necesariamente. A la larga, las grandes oscilaciones del cuerpo sujeto a la fuerza elástica forzarían a éste más allá de lo permitido por su límite elástico. También se puede afirmar que el modelo de resonancia que se muestra en la figura precedente es irreal puesto que ignora los efectos retardadores de las fuerzas de amortiguación, las cuales siempre están presentes. Aunque es cierto que si se tiene en cuenta la amortiguación, por mínima que sea, no puede haber resonancia pura, sin embargo, se ha visto anteriormente que pueden producirse grandes amplitudes de oscilación (aunque acotadas cuando $t \rightarrow \infty$) que sean destructivas en la misma manera.

4.3.16. Ondas en dos y tres Dimensiones:

Ondas Planas. Aunque $\xi = f(x - vt)$ representa un movimiento ondulatorio que se propaga según el eje $+X$, no se tienen necesariamente que interpretarla necesariamente como una onda concentrada sobre ese eje.

Si la perturbación física descrita por ξ se extiende sobre todo el espacio, se tiene que a un tiempo dado t , la función $\xi = f(x - vt)$ toma el mismo valor en todos los puntos de la abscisa x . Pero $x = \text{constante}$, representa un plano perpendicular al eje X (Fig. 50). Por lo tanto, $\xi = f(x - vt)$ describe en tres dimensiones una onda plana que se propaga paralelamente al eje X . Si ξ es un desplazamiento (o un campo vectorial), se tiene una onda longitudinal cuando ξ es paralelo a la dirección de propagación o eje X indicado por la flecha L , y se tiene una onda transversal cuando ξ es perpendicular a la dirección de propagación (o sea paralelo al plano YZ); en este último caso se puede también expresar como la superposición de dos desplazamientos según dos direcciones perpendiculares entre sí, tal como está indicado por las flechas T y T' .

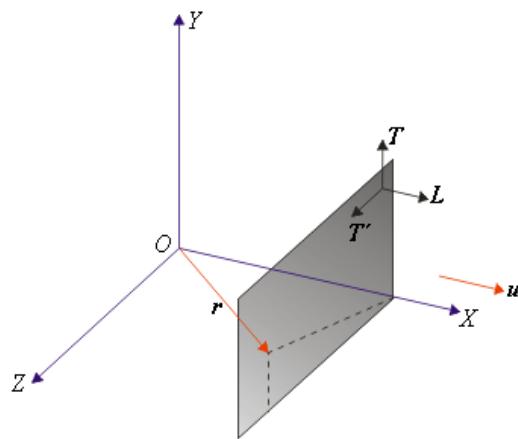


Figura 50. Onda plana propagándose en dirección al eje X .

Se observa que lo característico en una onda plana es la dirección de propagación, que se indica con un vector de onda unitario \mathbf{u} perpendicular al plano de la onda, siendo la orientación de los ejes coordinados arbitraria. Por consiguiente, es conveniente expresar la onda plana $\xi = f(x - vt)$ en una forma tal que sea independiente de la orientación de los ejes. En el caso de la figura 50, el vector de onda unitario \mathbf{u} es paralelo al eje X . Si \mathbf{r} es el vector de posición de cualquier punto P del frente de onda, se tiene que $x = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$, y por lo tanto, se puede escribir:

$$\xi = f(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad (124)$$

Cualquiera que sea la dirección de \mathbf{u} (Fig. 51), la cantidad $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$ es siempre la distancia medida desde el origen O según la dirección de propagación. Por lo tanto la ecuación (124)(1.93) representa una onda plana que se propaga en la dirección \mathbf{u} . En el caso de una onda plana armónica o sinusoidal propagándose en la dirección \mathbf{u} escribimos:

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad (125)$$

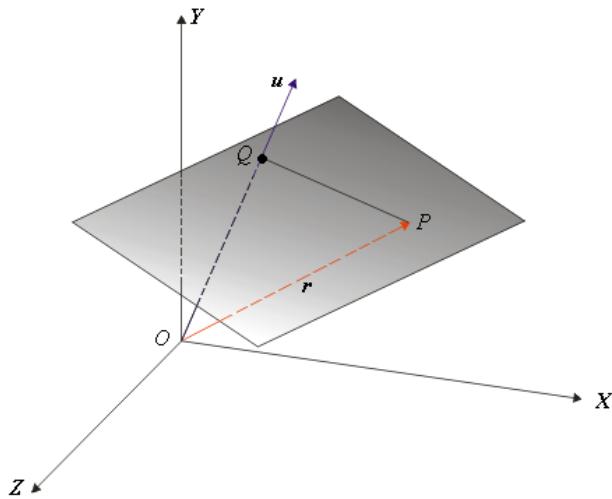


Figura 51. Onda plana propagándose en una dirección arbitraria.

Es conveniente definir un vector $\mathbf{k} = k \mathbf{u}$, llamado vector de propagación. Este vector tiene una magnitud $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$ y apunta en el sentido de la propagación. Como $\omega = k v$, una onda armónica plana se expresa por:

$$\xi = \xi_0 \operatorname{sen} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \xi_0 \operatorname{sen} (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \quad (126)$$

Donde, k_x , k_y , k_z son las componentes de \mathbf{k} que satisfacen la ecuación:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 / v^2 \quad (127)$$

La figura 56, es una representación un poco simple de la ecuación (126) en un tiempo particular.

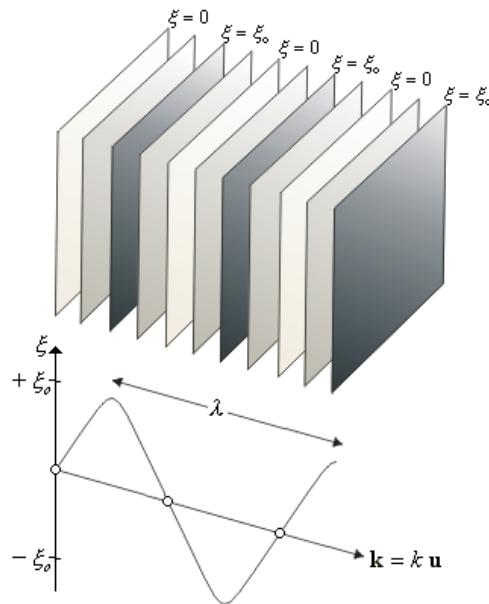


Figura 52. Frentes de onda para una onda plana armónica.

Cuando la propagación tiene lugar en un espacio tridimensional, la ecuación de onda se debe modificar en consecuencia; se convierte en:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \quad (128)$$

resultado que era de esperarse por razones de simetría solamente.

La ecuación (128) se escribe generalmente en una forma más concisa introduciendo el operador *Laplaciano*:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (129)$$

de donde queda simplemente:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (130)$$

Las ondas planas, aunque contienen las tres coordenadas x, y, z , son en realidad monodimensionales, ya que la propagación es según una dirección particular y la situación física es la misma en todos los planos perpendiculares a la dirección de propagación (Fig. 52). Pero en la naturaleza existen otras clases de ondas que se propagan en varias direcciones, de las cuales las más importantes son las ondas cilíndricas y esféricas.

4.3.17. Ondas Esféricas. Se arroja una piedra al agua. Las ondas superficiales que emanan del punto de impacto se esparcen hacia afuera, en ondas circulares bidimensionales. Extendiendo esta imagen a tres dimensiones, imagine una pequeña esfera pulsátil rodeada por un fluido. Al contraerse y expandirse la fuente, genera variaciones en la presión que se propaga hacia fuera como ondas esféricas.

Se considera ahora una fuente puntual ideal de luz. La radiación que emana de ellas fluye radialmente hacia fuera, uniformemente en todas direcciones. Se dice que la fuente es *isotrópica* y los frentes de onda resultantes son de nuevo esferas concéntricas con diámetro creciente cuando se expanden en el espacio que las rodea. La simetría obvia de los frentes de onda sugiere que podría ser más fácil describirlos matemáticamente, en términos de coordenadas esféricas polares. En esta representación el operador Laplaciano es:

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (131)$$

siendo: $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, y $z = r \cos \theta$.

Puesto que se está buscando una descripción de las ondas esféricas, de ondas que son esféricamente simétricas, es decir, aquellas caracterizadas por el hecho de que no dependen de θ ni de ϕ de modo que:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(r, \theta, \phi, t) = \xi(r, t)$$

Entonces, el Laplaciano de $\xi(r,t)$ es simplemente:

$$\nabla^2 \xi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \quad (132)$$

Este resultado se puede obtener sin necesidad de utilizar la ecuación (131). Se comienza con la forma cartesiana del Laplaciano ecuación (129), se opera sobre la función de onda $\xi(r,t)$ simétricamente esférica y se convierte cada término en coordenadas esféricas polares. Examinando solamente la dependencia de x , tenemos:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2$$

ya que: $\xi(\mathbf{r},t) = \xi(r,t)$, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Se obtiene:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (x) + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} + x \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} + x \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial r}$$

Ahora, teniendo $\partial^2 \xi / \partial y^2$, $\partial^2 \xi / \partial z^2$ y sumando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) + \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) + \left(1 - \frac{z^2}{r^2} \right) \right] \frac{\partial \xi}{\partial r} \\ \nabla^2 \xi &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \end{aligned}$$

la cual es equivalente a la ecuación (132). Este resultado se puede expresar en forma ligeramente diferente:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \xi) \quad (133)$$

La ecuación diferencial de onda (130) se puede escribir entonces como:

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \xi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Multiplicando ambos lados por r :

$$\frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r \xi)}{\partial t^2} \quad (134)$$

Obsérvese que esta expresión es precisamente la ecuación diferencial de onda unidimensional (119), donde la variable espacial es r y la función de onda es el producto $r \xi$. La solución de la ecuación (134) es simplemente:

$r \xi = f(r - vt)$ solución de D'Alembert o solución de onda viajera

o bien:

$$\xi(r,t) = \frac{f(r-vt)}{r} \quad (135)$$

Esto representa una onda esférica que progresó radialmente hacia fuera desde el origen, con una velocidad constante v , y que tiene una forma funcional arbitraria f . Otra situación está dada por:

$$\xi(r,t) = \frac{g(r+vt)}{r} \quad (136)$$

y en este caso la onda está convergiendo hacia el origen. El hecho de que esta expresión falla en el origen ($r = 0$) es de poca importancia práctica.

Un caso especial de la solución general:

$$\xi(r,t) = C_1 \frac{f(r-vt)}{r} + C_2 \frac{g(r+vt)}{r} \quad (137)$$

es la *onda esférica armónica*:

$$\xi(r,t) = \frac{\xi_o}{r} \operatorname{sen} k(r \mp vt) \quad (138)$$

donde la constante ξ_o se llama *intensidad de la fuente*. Para cualquier valor fijo del tiempo, esto representa una agrupación de esferas concéntricas que llenan todo el espacio. Cada frente de onda, o superficie de fase constante está dado por $kr = \text{constante}$.

Obsérvese que la amplitud de cualquier onda esférica es una función de r , donde el término r^{-1} sirve como factor de atenuación. Al contrario de una onda plana, una onda esférica disminuye en amplitud, con lo cual cambia su perfil, cuando se expande y se aleja del origen. La figura 58, ilustra esto gráficamente mostrando una exposición múltiple de un pulso esférico en cuatro tiempos diferentes. El pulso tiene la misma extensión en el espacio en cualquier punto a lo largo de cualquier radio r , es decir, el ancho del pulso a lo largo del eje r es constante.

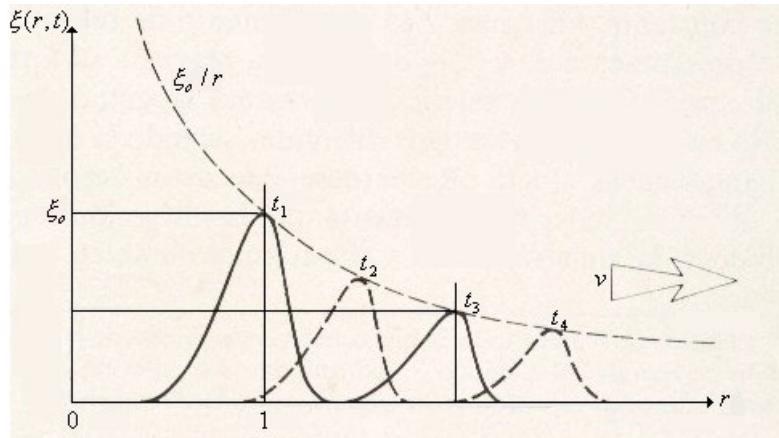


Figura 53. Exposición “cuádruple” de un pulso esférico.

Podría también haberse dibujado una onda armónica, en lugar de un pulso, (Fig. 53). En este caso, la perturbación estaría acotada por las curvas $\xi = \xi_o / r$ y $\xi = -\xi_o / r$.

Como ejemplo de ondas esféricas, se considera una onda de presión en un fluido homogéneo e isótropo. A primera vista se estaría tentado a decir que si r es la distancia desde el origen y p_o es la presión normal, la onda de presión podría describirse en la forma $p - p_o = f(r - vt)$, ya que r desempeña el mismo papel que en la onda plana. Sin embargo, del estudio que se hizo de una onda esférica se ve que esto no es así, y se debe examinar el asunto más detalladamente.

Se observa s que mientras una onda esférica se propaga, el frente de onda se extiende continuamente (crece como r^2). Consideremos, por ejemplo, una onda que se propaga en el interior de un ángulo sólido Ω (fig. 54). A una distancia r de la fuente, la onda superficial tiene un área A ; Las áreas de las superficies de onda a las distancias $2r, 3r, \dots, nr$ son $4A, 9A, \dots, n^2A$. Esto sugiere que la amplitud de la onda de presión debe disminuir a medida que la distancia de la fuente aumenta, ya que actúa sobre un área mayor, resultado confirmado experimentalmente y predicho en la ecuación (135). Por ejemplo, si el fluido es isótropo y la onda tiene la misma amplitud en todas las direcciones la onda de presión está dada por la expresión:

$$\Delta p = p - p_o = \frac{1}{r} f(r - vt) \quad (139)$$

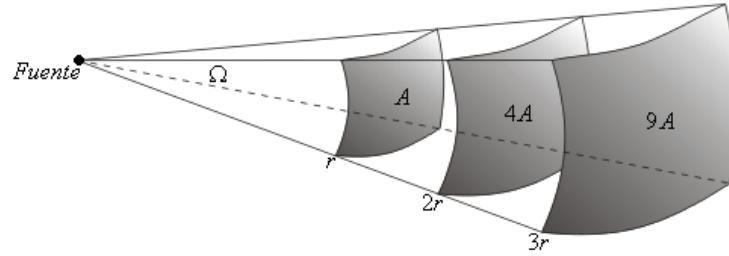


Figura 54. Intensidad física en una onda plana.

Se tiene ahora el factor geométrico $1/r$ que no aparecía en una onda plana, el cual explica porqué la presión disminuye con la distancia de la fuente. Cuando la amplitud (o intensidad) es diferente en cada dirección, se obtendrá una expresión más complicada. La ecuación(139) representa una onda esférica de presión saliente. se puede también tener una onda esférica de presión entrante la cual estará expresada por:

$$\Delta p = p - p_o = \frac{1}{r} f(r + vt) \quad (140)$$

La velocidad de propagación está dada por la misma expresión obtenida para las ondas planas, esto es:

$$v = \sqrt{\kappa / \rho_o} \quad (141)$$

Un caso particularmente interesante es el de una onda armónica esférica de presión dada por:

$$p = p_o + \frac{P_o}{r} \operatorname{sen}(kr - \omega t) \quad (142)$$

La amplitud de onda de presión es P_o/r y disminuye con la distancia a la fuente. El desplazamiento correspondiente a esta onda de presión está dado por una expresión más complicada.

Pero a grandes distancias de la fuente se puede expresar con muy buena aproximación por:

$$\xi = \frac{\xi_o}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (143)$$

Donde $\xi_o = P_o / v\rho_o\omega$, relación que es idéntica a la que se obtuvo para las ondas planas. Nótese que la amplitud de la onda de desplazamiento también disminuye con la distancia a la fuente, es decir como $1/r$.

Se considera a continuación la intensidad de una onda esférica. Se usa la ecuación(143) y se observa s que la amplitud es ahora ξ_o/r en lugar de ξ_o . A grandes distancias, la energía por unidad de volumen está dada, de acuerdo a la ecuación (144), por:

$$E = \frac{1}{2} \frac{\rho_o \omega^2 \xi_o^2}{r^2} = \frac{P_o}{2v^2 \rho_o r^2} \quad (144)$$

y disminuye como $1/r^2$. El flujo de energía por unidad de tiempo que pasa a través de una superficie esférica de radio r , si se usa la ecuación (144) con $A = 4\pi r^2$, es:

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = vA E = v(4\pi r^2) \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_o \omega^2 \xi_o^2}{r^2} \right)$$

$$\overline{\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)} = 2\pi v \rho_o \omega^2 \xi_o^2 = \frac{2\pi P_o^2}{\rho_o v} \quad (145)$$

Nótese que el factor r^2 se ha cancelado, resultando una expresión independiente del radio. Este es el resultado que esperábamos, ya que la conservación de la energía requiere que, en promedio, fluya la misma cantidad de energía por unidad de tiempo a través de cualquier superficie esférica, independientemente de su radio. Esto explica la presencia del factor $1/r$ en las ecuaciones (142) y (143).

De acuerdo con la ecuación (144), la intensidad de una onda esférica, o sea el promedio de energía que atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo, es:

$$I = \nu E = \frac{P_o}{2\nu\rho_o r^2} = \frac{I_o}{r^2} \quad (146)$$

Siendo:

$$I_o = \frac{P_o^2}{2\rho\nu} \quad (147)$$

Resultado que es idéntico a la ecuación (144). Se concluye entonces que:

En una onda esférica la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente.

Resultado que tiene muchas aplicaciones en acústica y en óptica. Este resultado es también compatible con la conservación de la energía, ya que, si la energía que fluye a través de cada superficie esférica debe ser la misma y el área de la esfera cambia como r^2 , la energía que fluye a través de la unidad de área en la unidad de tiempo debe variar como $1/r^2$.

Ejemplo: Dos pequeños altavoces emiten ondas sonoras de diferentes frecuencias. El altavoz A tiene una salida de 1.0 mW, en tanto que el altavoz B tiene una salida de 1.5 mW.

Determine el nivel de intensidad sonora (en dB) en el punto C, (Fig. 55) si: a) sólo el altavoz A emite sonido, b) sólo el altavoz B emite sonido, y c) ambos altavoces emiten sonido.

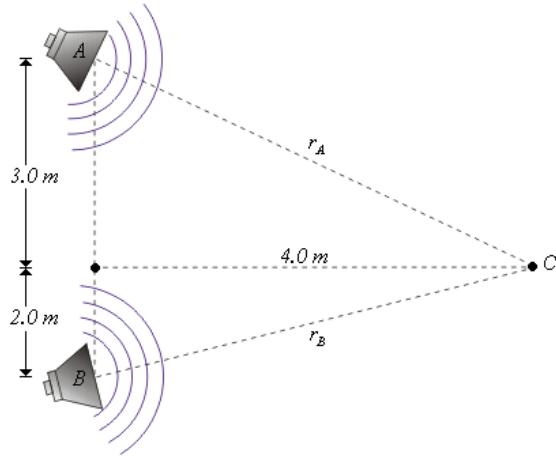


Figura 55. Nivel de intensidad producido por dos fuentes.

Solución: La potencia de las ondas sonoras emitidas por los parlantes *A* y *B* de acuerdo al enunciado del problema son respectivamente:

$$P_A = 1.0 \text{ mW}$$

$$P_B = 1.5 \text{ mW}$$

De acuerdo a la ecuación (147), las intensidades de los dos sonidos en el punto *C* debidas a los altavoces *A* y *B* son respectivamente:

$$I_A = \frac{P_A}{4\pi r_A^2} = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ W}}{4\pi (5\text{m})^2} = 3.18 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$$

$$I_B = \frac{P_B}{4\pi r_B^2} = \frac{1 \times 10^{-3} \text{ W}}{4\pi (2\sqrt{5}\text{m})^2} = 5.96 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$$

- a) Si sólo el altavoz *A* emite sonido, la intensidad sonora percibida en *C* es $I_A = 3.18 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$, y el nivel de intensidad sonora correspondiente será igual a:

$$\beta_A = 10 \log \left(\frac{I_A}{I_o} \right) = 10 \log \left(\frac{3.18 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}}{1.0 \times 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}} \right) = 65,02 \text{ dB}$$

- b) Si sólo el altavoz B emite sonido, la intensidad sonora percibida en C es $I_B = 5.96 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$, y el nivel de intensidad sonora correspondiente será igual a:

$$\beta_B = 10 \log\left(\frac{I_B}{I_o}\right) = 10 \log\left(\frac{5,96 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}}{1,0 \times 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}}\right) = 67,75 \text{ dB}$$

- c) Si los dos altavoces A y B emiten sonido, la intensidad sonora percibida en C es $I = I_A + I_B = 9.14 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}$, y el nivel de intensidad sonora correspondiente será igual a:

$$\beta_{total} = 10 \log\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10 \log\left(\frac{9,14 \times 10^{-6} \text{ Wm}^{-2}}{1,0 \times 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}}\right) = 69.61 \text{ dB}$$

Ejemplo: Un altavoz se coloca entre dos observadores separados por una distancia de 110 m , a lo largo de la línea que los une. Si un observador registra un nivel de intensidad de 60 dB y el otro registra un nivel de intensidad de 80 dB . ¿A qué distancia está el altavoz de cada observador?

Solución: En la figura (56) A y B son los puntos donde se encuentran los dos observadores y C el punto donde se encuentra el altavoz.

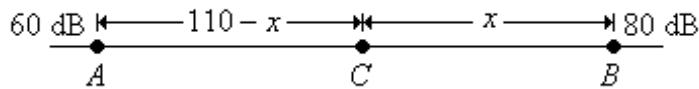


Figura 56. Fuente de sonido entre dos observadores.

Sean $\beta_A = 60 \text{ dB}$, $\beta_B = 80 \text{ dB}$ los niveles de intensidad percibidas en los puntos A y B respectivamente. Las intensidades respectivas I_A , I_B se pueden obtener a partir de la ecuación (151):

$$I_A = I_o \left(10^{\beta_A/10}\right) = 1 \times 10^{-12} Wm^{-2} (10^6) = 1 \times 10^{-6} Wm^{-2}$$

$$I_B = I_o \left(10^{\beta_B/10}\right) = 1 \times 10^{-12} Wm^{-2} (10^8) = 1 \times 10^{-4} Wm^{-2}$$

De aquí se obtiene:

$$\frac{I_B}{I_A} = 100$$

De la figura 56 y de la ecuación (145) se puede obtener la posición del altavoz:

$$I_o = I_A (110 - x)^2 = I_B x^2$$

Entonces:

$$\frac{I_B}{I_A} = \left(\frac{110 - x}{x} \right)^2 = 100$$

Este resultado implica que:

$$\frac{110 - x}{x} = 10$$

Despejando x obse tienefinalmente que $x = 10 m$. Se concluye entonces que, el altavoz está a una distancia de 10 m del observador en B , y a una distancia de 100 m del observador en A .

Ejemplo: Ondas en una membrana elástica y tensa.

Se considera una membrana delgada y tensa, la cual para simplificar se supone rectangular, aunque esta limitación no es necesaria (Fig. 57). La membrana está montada sobre un marco el cual ejerce la tensión T por unidad de longitud, expresada en Nm^{-1} . Si la membrana se deforma en algún punto particular y experimenta un desplazamiento en dirección perpendicular a ella; esta deformación se propaga por la membrana, resultando una onda superficial.

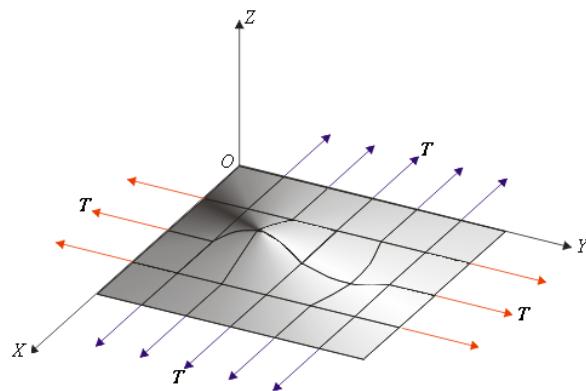


Figura 57. Onda superficial en una membrana elástica.

Para obtener la ecuación de este movimiento ondulatorio, se considera una superficie elemental de la membrana de lados dx, dy (Fig. 57). En un momento dado esta superficie experimenta un desplazamiento ξ hacia arriba; debido a que la membrana es curva, el desplazamiento ξ es una función de x e y y las fuerzas sobre los lados del área elemental no son directamente opuestas. Para obtener la fuerza vertical neta, se usa el mismo razonamiento que se aplica a las ondas transversales en una cuerda. Según este razonamiento se dice que los lados paralelos al eje Y están sujetos a fuerzas Tdy y la resultante vertical de estas fuerzas es:

$$(Tdy) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dxdy$$

Análogamente, los lados paralelos al eje X están sometidos a las fuerzas Tdx , cuya resultante vertical es:

$$(Tdx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dy = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dxdy$$

Por consiguiente, la fuerza neta vertical es la suma de las dos resultantes anteriores:

$$F_z = T \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) dxdy$$

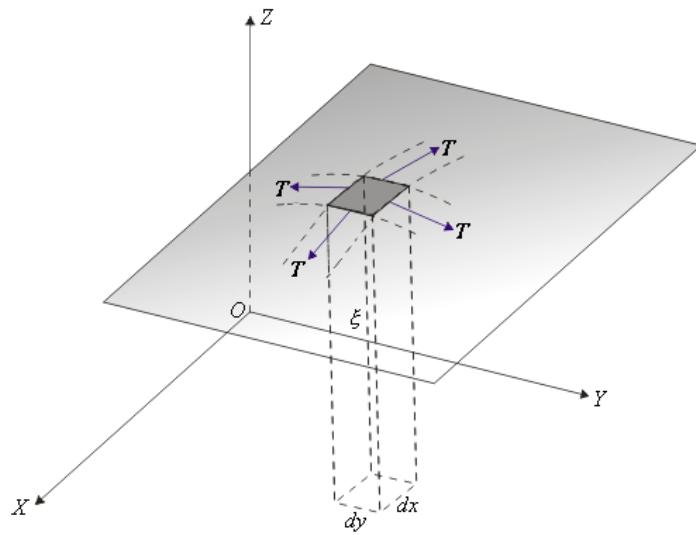


Figura 58. Fuerzas que se ejercen sobre un elemento de superficie de una membrana tensa.
 Si la masa por unidad de área (o *densidad superficial*, expresada en Kgm^{-2}) de la membrana es σ , la masa de esta porción de membrana es $\sigma dxdy$, y como su aceleración vertical es $\partial^2\xi/\partial t^2$, se puede escribir la ecuación de movimiento de esta porción de membrana en la forma:

$$(\sigma dxdy)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)dxdy$$

o sea,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (141) por lo cual se concluye que la perturbación se propaga por la membrana como una onda con una velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

4.3.18. Efecto Doppler. Cuando una fuente de ondas o un observador, o ambos, están en movimiento respecto al medio donde se propagan las ondas, la frecuencia percibida por el observador no es, en general, el mismo que si ambos se hallan en reposo. Este fenómeno se conoce con el nombre de efecto *Doppler*.

Se estudiará solo el caso especial en el cual las direcciones de las velocidades v_o y v_f del observador y de la fuente coinciden con la recta que los une. Puesto que estas velocidades pueden tener el mismo u opuesto sentido y el observador puede hallarse delante o detrás de la fuente, se requiere un convenio de signos. Se toma como sentido positivo de v_o y v_f el que va desde la posición del observador hacia la de la fuente. La velocidad c de propagación de las ondas se considera siempre positiva.

En la figura 59, un observador O se encuentra a la izquierda de una fuente de ondas F . El sentido positivo va de izquierda a derecha, y en la figura 59, tanto v_o como v_f son positivas. En el instante $t = 0$, la fuente se encuentra en el punto A , y en el instante t , en el B . La circunferencia exterior representa la superficie de la onda emitida en el instante $t = 0$. Esta superficie (en un medio homogéneo e isotropo) es una esfera cuyo centro coincide con A , y que se propaga en todos los puntos en sentido radial hacia fuera, con velocidad c . El hecho de que la onda sea generada por una fuente móvil no afecta su velocidad después de abandonar el foco. La velocidad c de la onda es sólo una propiedad del medio; las ondas se olvidan de la fuente tan pronto como la abandonan. El radio de esta esfera (distancia AD o AC) es por tanto, ct . La distancia AB es igual a $v_f t$; o sea,

$$BD = ct + v_f t = (c + v_f)t$$

$$BC = ct - v_f t = (c - v_f)t$$

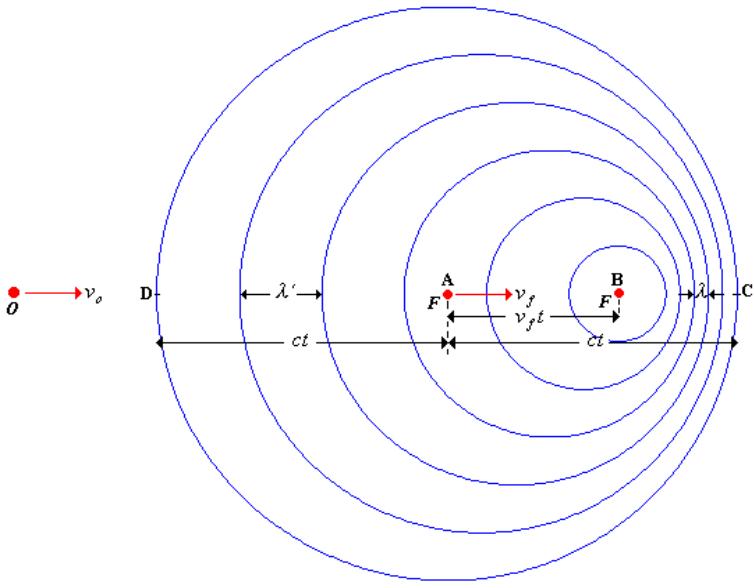


Figura 59. Efecto doppler

En el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ y $t = t$, el número de ondas emitidas por la fuente es $n = f_f t$, donde f_f es su frecuencia. Delante de la fuente estas ondas se aprietan dentro de la distancia BC , mientras que detrás de la fuente se espacian la distancia BD . Así, la longitud de onda delante de la fuente es:

$$\lambda = \frac{BC}{n} = \frac{(c - v_f)t}{f_f t} = \frac{c - v_f}{f_f}$$

Mientras que detrás es:

$$\lambda' = \frac{BD}{n} = \frac{(c + v_f)t}{f_f t} = \frac{c + v_f}{f_f}$$

Las ondas que se aproximan al observador móvil O poseen una velocidad de propagación respecto a él, $c + v_o$. La frecuencia con que encuentra estas ondas es:

$$f_o = \frac{\text{velocidad}}{\text{longitud de onda}} = \frac{c + v_o}{\lambda'} = \frac{c + v_o}{\frac{c + v_f}{f_f}} = \frac{(c + v_o)f_f}{c + v_f}$$

o sea,

$$\frac{f_o}{c + v_o} = \frac{f_f}{c + v_f} \quad (148)$$

Fórmula que expresa la frecuencia f_o percibida por el observador, en función de la frecuencia f_f de la fuente.

Si el medio en el cual se propagan las ondas tiene una velocidad v_m paralela a la línea que une el observador y el foco, se tiene:

$$\frac{f_o}{c + v_o - v_m} = \frac{f_f}{c + v_f - v_m} \quad (149)$$

La fórmula general del efecto Doppler es la siguiente

$$\frac{f_o}{c \pm v_o} = \frac{f_f}{c \mp v_f} \quad (150)$$

En esta expresión, los signos superiores ($+v_o$ y $-v_f$) se refieren al movimiento de uno hacia el otro, y los signos inferiores ($-v_o$ y $+v_f$) se refieren al movimiento de uno alejándose del otro.

Ejemplo: Dos barcos se mueven sobre una línea en dirección este. La embarcación que va atrás tiene una velocidad de v_1 en relación con un punto de observación situado en tierra, y el barco en la delantera tiene una velocidad v_2 ($v_2 < v_1$) respecto del mismo punto. Los dos barcos están en una región del océano donde la corriente se mueve de modo uniforme rumbo al oeste con una velocidad v_c . El barco de atrás emite una señal de sonar a una frecuencia f . ¿Qué frecuencia registra el barco delantero? (Emplee c como la velocidad del sonido en el agua del océano).

Solución: Sean v_{1O} y v_{2O} las velocidades del primer y segundo barco respecto al océano respectivamente. Entonces:

$$\mathbf{v}_{1T} = \mathbf{v}_{1O} + \mathbf{v}_{OT}$$

$$\mathbf{v}_{2T} = \mathbf{v}_{2O} + \mathbf{v}_{OT}$$

Como los dos barcos viajan hacia la derecha y la corriente se mueve hacia el oeste, las dos ecuaciones vectoriales anteriores pueden escribirse escalarmente como sigue:

$$v_1 = v_{1O} - v_c$$

$$v_2 = v_{2O} - v_c$$

De aquí, se obtiene:

$$v_{1O} = v_1 + v_c$$

$$v_{2O} = v_2 + v_c$$

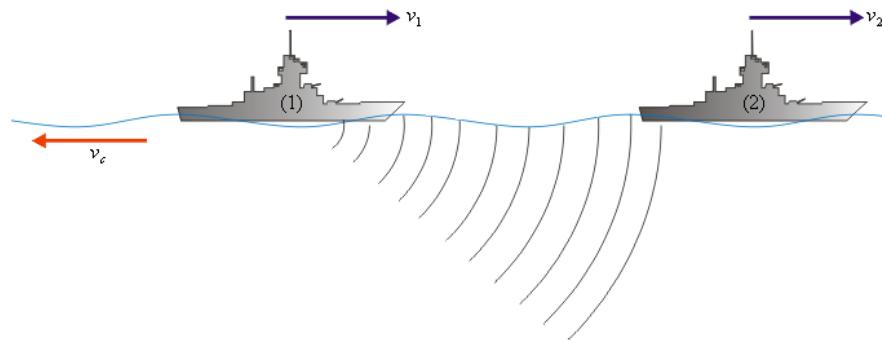


Figura 60. Dos barcos con velocidad diferente uno como fuente y otro como observador.

En este ejemplo, el observador (segundo barco) se aleja y la fuente (primer barco) se acerca, por lo que la (150) se debe aplicarla de la siguiente manera:

$$\frac{f_2}{c - v_{2O}} = \frac{f}{c - v_{1O}}$$

Con lo cual,

$$\frac{f_2}{c - (v_2 + v_c)} = \frac{f}{c - (v_1 + v_c)}$$

Obsérvese como este resultado también pudo haberse obtenido directamente de la ecuación (149)

Finalmente, la frecuencia registrada por el segundo barco está dada por:

$$f_2 = \left[\frac{c - (v_2 + v_c)}{c - (v_1 + v_c)} \right] f$$

4.3.19. Superposición de Ondas: En los apartados anteriores se describen las ondas armónicas. Las ondas que se observan en la naturaleza, sean de agua, sonoras, en cuerdas, en barras, u ondas luminosas, rara vez son sencillas como las ondas armónicas, que tienen formas senoidales o cosenoidales puras. Hasta las ondas unidimensionales que se pueden formar en una cuerda tienen una serie completa de formas. La cuerda de una guitarra adquiere un movimiento muy complicado, cuando se pulsa. Una sola agitación del extremo de una cuerda manda una onda viajera a lo largo de la misma, pero esta onda es un pulso único, y no una función senoidal.

Se pueden comprender ondas más complicadas en términos de las armónicas simples: Las ondas armónicas se pueden combinar, o superponer, para producir la variedad de ondas que se observan en la naturaleza. Las ondas superpuestas, que a veces se refuerzan y a veces se anulan entre sí, se dice que interfieren. Esta interferencia produce comportamientos regulares de refuerzo y anulación, como sucede por ejemplo en el caso de las ondas luminosas, como en los colores de las gotas de aceite, o como en las ondas marinas al penetrar a un puerto.

Aun cuando en la naturaleza aparecen ondas más complicadas, nuestra discusión sobre ondas armónicas tiene relevancia porque los medios elásticos que sufren pequeños desplazamientos presentan una propiedad importante. Esta propiedad es la *linealidad*, y quiere decir que si un medio admite dos o más ondas, también admite su suma algebraica en forma de una tercera onda.

Expresado matemáticamente, la suma (o combinación lineal) de dos o más soluciones a las ecuaciones de movimiento de estos sistemas también es una solución. Este hecho se conoce con el nombre de *principio de superposición*.

Para comprender cómo la suma de varias soluciones puede ser una solución, se recuerda que la ecuación diferencial de una onda tridimensional puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Una característica muy importante de esta ecuación es que es lineal, es decir, $\xi(\mathbf{r}, t)$ y sus derivadas aparecen solamente con la primera potencia. Por lo tanto, si $\xi_1(\mathbf{r}, t), \xi_2(\mathbf{r}, t), \dots, \xi_n(\mathbf{r}, t)$ son soluciones individuales de la ecuación diferencial de ondas, cualquier combinación lineal de éstas a su vez, será una solución. Entonces:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^n C_i \xi_i(\mathbf{r}, t)$$

Satisface la ecuación de onda, donde las constantes C_i son simplemente constantes arbitrarias. Esta propiedad es la que se ha denominado como el *principio de superposición*.

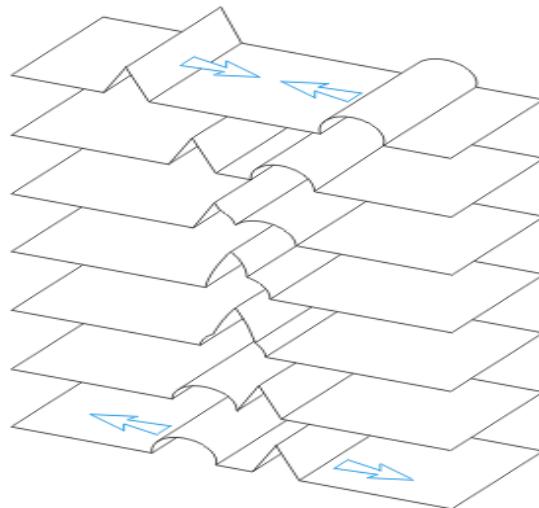


Figura 61. Superposición de dos perturbaciones.

Suma de ondas de la misma frecuencia. Se considera una solución de la ecuación diferencial de onda en la forma.

$$\xi(x, t) = \xi_o \operatorname{sen}[\omega t - (kx + \varepsilon)] \quad (150)$$

en la cual ξ_o es la amplitud de la perturbación armónica que se propaga a lo largo de la dirección positiva del eje x . Alternativamente, hagamos

$$\alpha(x, \varepsilon) = -(kx + \varepsilon) \quad (151)$$

tal que:

$$\xi(x, t) = \xi_o \operatorname{sen}[\omega t + \alpha(x, \varepsilon)] \quad (152)$$

Se supone entonces que se tienen dos de tales ondas:

$$\xi_1(x, t) = \xi_{o1} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) \quad (153)$$

$$\xi_2(x, t) = \xi_{o2} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2) \quad (154)$$

Las dos con la misma frecuencia y velocidad, superponiéndose en el espacio. La perturbación resultante es la superposición lineal de estas ondas. Entonces:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

Al desarrollar las ecuaciones (153) y (154).

$$\xi = \xi_{o1} (\operatorname{sen} \omega t \cos \alpha_1 + \cos \omega t \operatorname{sen} \alpha_1) + \xi_{o2} (\operatorname{sen} \omega t \cos \alpha_2 + \cos \omega t \operatorname{sen} \alpha_2)$$

Por lo tanto:

$$\xi = (\xi_{o1} \cos \alpha_1 + \xi_{o2} \cos \alpha_2) \operatorname{sen} \omega t + (\xi_{o1} \operatorname{sen} \alpha_1 + \xi_{o2} \operatorname{sen} \alpha_2) \cos \omega t$$

Ya que los términos entre paréntesis son constantes en el tiempo, se hace:

$$\xi_o \cos \alpha = \xi_{o1} \cos \alpha_1 + \xi_{o2} \cos \alpha_2 \quad (155)$$

$$\xi_o \sin \alpha = \xi_{o1} \sin \alpha_1 + \xi_{o2} \sin \alpha_2 \quad (156)$$

Esta no es una sustitución obvia pero será legítima siempre que se pueda despejar ξ_o y α . Con ese fin, se eleva al cuadrado y se suma (155) y (156) para obtener:

$$\xi_o^2 = \xi_{o1}^2 + \xi_{o2}^2 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (157)$$

Se divide la ecuación (156) por la ecuación (157) para obtener:

$$\tan \alpha = \frac{\xi_{o1} \sin \alpha_1 + \xi_{o2} \sin \alpha_2}{\xi_{o1} \cos \alpha_1 + \xi_{o2} \cos \alpha_2} \quad (158)$$

La perturbación total queda:

$$\xi = \xi_o \cos \alpha \sin \omega t + \xi_o \sin \alpha \cos \omega t$$

O bien:

$$\xi = \xi_o \sin(\omega t + \alpha) \quad (159)$$

La onda compuesta (159) es armónica y de la misma frecuencia que las constitutivas aunque su amplitud y fase son diferentes.

Cuando la diferencia de fase $\delta \equiv \alpha_2 - \alpha_1$ es un múltiplo entero de 2π , $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

La amplitud resultante es un máximo mientras que $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ da un mínimo.

En el primer caso, se dice que las dos ondas están en fase, cresta sobre cresta. En el último caso las ondas están 180° fuera de fase y los valles están sobre las crestas como se muestra en la figura 62. Obsérvese que la diferencia de fase puede aparecer por una diferencia en la longitud del camino atravesado por las dos ondas o también por una diferencia en la fase inicial, es decir:

$$\delta = (kx_1 + \varepsilon_1) - (kx_2 + \varepsilon_2) \quad (160)$$

O bien:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - x_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (161)$$

Aquí x_1 y x_2 son las distancias desde las fuentes de las dos ondas hasta el punto de observación y λ es la longitud de onda en el medio en que viajan. Si las ondas están inicialmente en fase en sus emisores respectivos, entonces $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, y:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - x_2) \quad (162)$$

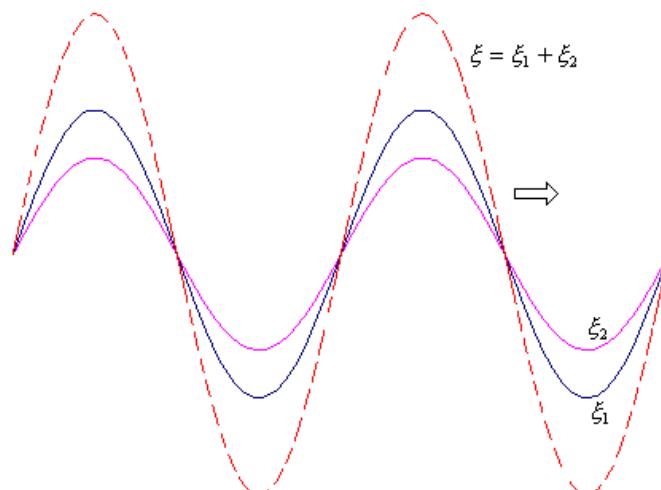


Figura 62. Superposición de ondas armónicas en fase.

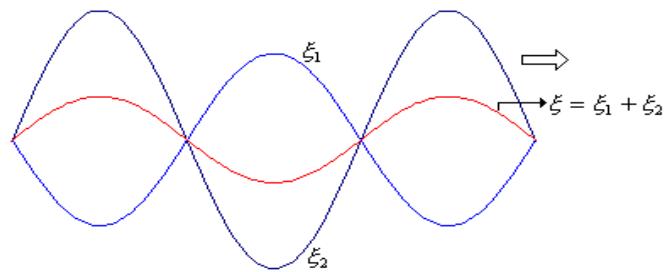


Figura 63. Superposición de ondas armónicas fuera de fase.

Existe un caso especial que es de algún interés y es la superposición de las ondas:

$$\begin{aligned}\xi_1(x,t) &= \xi_{o1} \operatorname{sen}[\omega t - k(x + \Delta x)] \\ &\quad y \\ \xi_2(x,t) &= \xi_{o2} \operatorname{sen}(\omega t - kx)\end{aligned}$$

donde en particular $\xi_{o1} = \xi_{o2}$ y $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = k\Delta x$. La onda resultante es entonces:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2$$

$$\xi = \xi_{o1} \left\{ \operatorname{sen}[\omega t - k(x + \Delta x)] + \operatorname{sen}(\omega t - kx) \right\}$$

Utilizando la identidad:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Tenemos:

$$\xi = 2\xi_{o1} \cos\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \operatorname{sen}\left[\omega t - k\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \quad (163)$$

Esto pone de manifiesto claramente el papel dominante que juega la diferencia de caminos, Δx , especialmente cuando las ondas emitidas están en fase ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$).

Si $\Delta x \ll \lambda$ la resultante tiene una amplitud muy cercana al valor $2\xi_{o2}$; mientras que es cero si $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$. En la primera situación se dice que hay *interferencia constructiva* mientras que en la última hay *interferencia destructiva*.

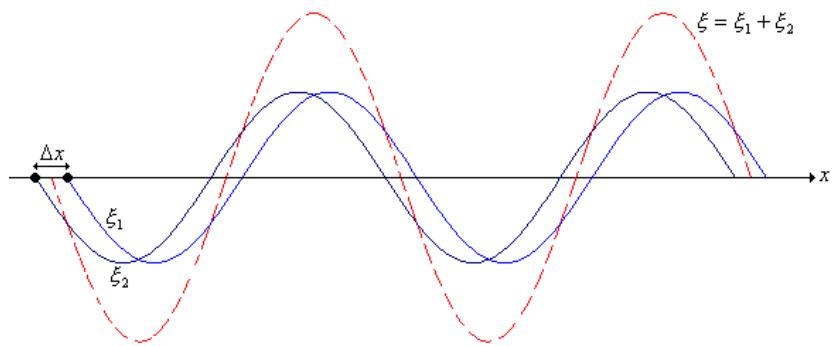


Figura 64. Ondas fuera de fase en $k\Delta x$.

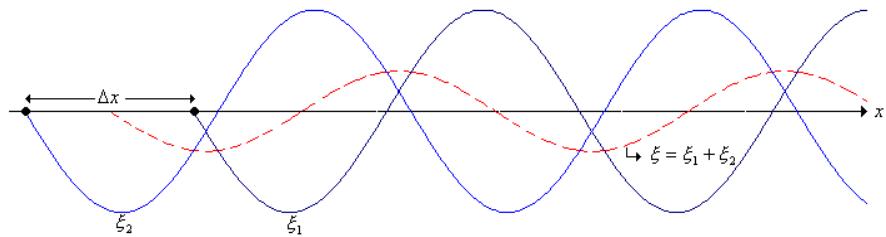


Figura 65. Ondas fuera de fase en $k\Delta x$.

Por aplicaciones sucesivas del procedimiento usado para llegar a la ecuación (159) se puede probar que la *superposición de cualquier número de ondas coherentes que tienen una frecuencia dada y viajan en la misma dirección lleva a una onda armónica de la misma frecuencia*. Entonces, en general la suma de N de tales ondas está dada por:

$$\xi = \sum_{i=1}^N \xi_{oi} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_i)$$

está dada por:

$$\xi = \xi_o \sin(\omega t + \alpha) \quad (164)$$

Obien:

$$\xi_o^2 = \sum_{i=1}^N \xi_{oi}^2 + 2 \sum_{j>i}^N \sum_{i=1}^N \xi_{oi} \xi_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) \quad (165)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_{oi} \operatorname{sen} \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \xi_{oi} \cos \alpha_i} \quad (166)$$

4.3.20. Ondas estacionarias en una dimensión. Se considera la situación en que una cuerda tiene un extremo fijo, como se indica en la figura (66) donde el extremo O es el punto fijo. Una onda transversal incidente moviéndose hacia la izquierda y de ecuación $\xi = \xi_o \sin(\omega t + kx)$ se refleja en O , originando una nueva onda que se propaga hacia la derecha y que tiene por ecuación $\xi = \xi'_o \sin(\omega t - kx)$. El desplazamiento en cualquier punto de la cuerda es el resultado de la interferencia o superposición de estas dos ondas, esto es,

$$\xi = \xi_o \sin(\omega t + kx) + \xi'_o \sin(\omega t - kx) \quad (167)$$

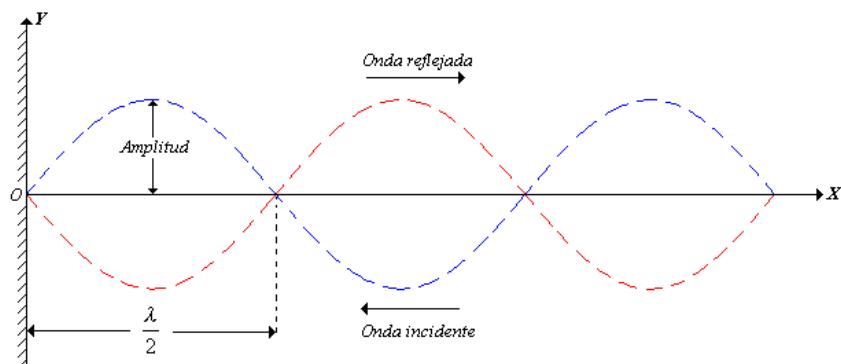


Figura 66. Onda estacionaria

En el punto O , se tiene $x = 0$, de modo que:

$$\xi = (\xi_o + \xi'_o) \sin \omega t$$

Pero O es fijo, lo cual significa que $\xi_{(x=0)} = 0$ en todo instante. Esto requiere que $\xi'_o = -\xi_o$. En otras palabras, la onda experimenta un cambio de fase de π cuando se refleja en el extremo fijo. Se puede ver este cambio de fase en las fotografías de la figura (66) las cuales muestran un pulso incidente y uno reflejado. Entonces la ecuación (167) se convierte en:

$$\xi = \xi_o [\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)]$$

y utilizando la relación trigonométrica: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, se obtiene:

$$\xi = 2 \xi_o \sin kx \cos \omega t \quad (168)$$



Figura 67. Cambio de fase de una onda reflejada en una cuerda que tiene un extremo fijo.

Las expresiones $\omega t \pm kx$ no aparecen más y la ecuación (168) no representa una onda viajera. Efectivamente esta última expresión representa un movimiento armónico simple cuya amplitud varía de punto a punto y está dada por:

$$A = 2\xi_0 \operatorname{sen} kx \quad (169)$$

Esta amplitud se indica con la línea de trazos de la figura (66). La amplitud es cero para $kx = n\pi$, donde n es un número entero. Puesto que $k = 2\pi/\lambda$, este resultado también se puede escribir en la forma:

$$x = \frac{1}{2}n\lambda. \quad (170)$$

Estos puntos se llaman *nodos*. Los nodos sucesivos están separados por una distancia de $\frac{1}{2}\lambda$. Cuando se recuerda la expresión $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, para la velocidad de propagación de las ondas a lo largo de una cuerda sometida a la tensión T y que tiene una densidad lineal de masa μ e (171)

y es arbitraria en tanto la frecuencia angular también lo sea.

Supóngase ahora que se impone una segunda condición: que el punto $x = L$, que es el otro extremo de la cuerda, sea también fijo. Esto significa que $x = L$, es un nodo y debe satisfacer la condición $kL = n\pi$. O si se usa la ecuación (170).

$$L = \frac{1}{2}n\lambda$$

$$\text{ó} \quad \lambda = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3} \dots \quad (172)$$

Esta segunda condición limita automáticamente las longitudes de onda de las ondas que se pueden propagar en esta cuerda a los valores dados en la ecuación (172), también están limitadas las frecuencias de oscilación a los valores:

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L} v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = f_1, 2f_1, 3f_1 \dots$$

Donde:

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

se llama *frecuencia fundamental*. De este modo las posibles frecuencias de oscilación (llamadas armónicos) son todos los múltiplos de la fundamental. se puede decir que las frecuencias y longitudes de onda están cuantizadas, y que la cuantización es el resultado de las condiciones de contorno impuestas en ambos extremos de la cuerda.

La figura 68 indica la distribución de amplitud para los tres primeros modos de vibración ($n = 1, 2, 3$). Los puntos de máxima amplitud son los *antinodos*. La distancia entre dos antinodos sucesivos es también $\frac{1}{2}\lambda$. Desde luego que la separación entre un nodo y un antinodo es $\frac{1}{4}\lambda$. Observar que mientras que $\xi = 0$ en los nodos, $\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0$ en los antinodos, ya que la amplitud es máxima.

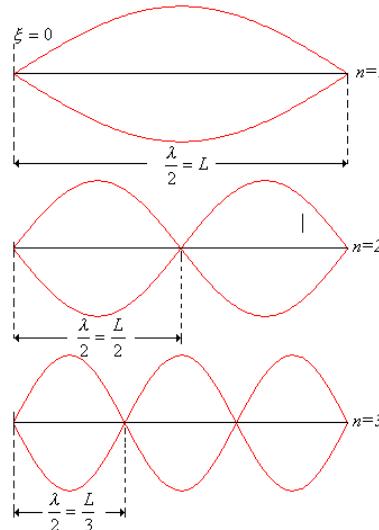


Figura 68. Ondas estacionarias en una cuerda.

MÉTODO DE FOURIER

Para determinar cómo se mueve la cuerda tensa, se resuelve la ecuación (168); más precisamente, se encuentra una solución $\xi(x,t)$ que también satisface las condiciones impuestas por el sistema físico. Como la cuerda se fija en los extremos $x=0$ y $x=L$, se tienen las dos condiciones en la frontera:

$$\xi(0,t)=0, \quad \xi(L,t)=0 \quad t \geq 0. \quad (173)$$

La forma del movimiento de la cuerda dependerá de la deflexión inicial (en $t=0$) y de la velocidad inicial (en $t=0$). Si en el tiempo $t=0$ la cuerda tiene la forma dada por $f(x)$, y la velocidad inicial es $u_o(x)$, obse tiene así las dos condiciones iniciales:

$$\xi(x,0)=f(x), \quad 0 < x < L \quad (174)$$

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0} = u_o(x)$$

Ahora el problema es encontrar una solución de la ecuación (168) que satisfaga las condiciones (173) y (174). Para tal fin, se procederá de la siguiente manera:

Primer paso: Al aplicar el método de **separación de variables**, se obtendrán dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Segundo Paso: Se determinarán soluciones de esas dos ecuaciones que satisfagan las condiciones de frontera.

Tercer paso: Se compondrán esas soluciones de modo que el resultado sea una solución de la ecuación de onda que satisfaga también las condiciones iniciales dadas.

A continuación se desarrolla el método.

Primer paso: El método de **separación de variables** consiste en suponer que $\xi(x,t)$ puede escribirse como el producto de dos funciones, cada una de las cuales solo depende de una de las variables x y t :

$$\xi(x,t) = F(x)G(t) \quad (175)$$

Si se deriva la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = F(x)\ddot{G}(t), \quad y \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dot{F}(x)\ddot{G}(t)$$

Al introducir estos resultados en la ecuación diferencial de la onda:

$$F(x)\ddot{G}(t) - \frac{\mu}{\rho} \dot{F}(x)\ddot{G}(t)$$

O bien, dado que la velocidad de propagación de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ Tenemos:}$$

$F(x)\ddot{G}(t) - v^2 \dot{F}(x)\ddot{G}(t)$ Dividiendo entre $v^2 FG$, se encuentra:

$$\frac{\ddot{G}(t)}{v^2 G(t)} = \frac{\dot{F}(x)}{F(x)}$$

La expresión de la izquierda comprende funciones que sólo dependen de t , en tanto que la derecha contiene funciones que sólo dependen de x . Por lo tanto, ambas expresiones deben ser iguales a una constante, por ejemplo λ :

$$\frac{\ddot{G}(t)}{v^2 G(t)} = \frac{\dot{F}(x)}{F(x)} = \lambda$$

Esto inmediatamente produce dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias, a saber:

$$\ddot{F}(x) = 0 \quad (176)$$

$$\ddot{U}_{xx} - v^2 G(t) = 0 \quad (177)$$

Hasta aquí λ todavía es arbitraria.

Segundo Paso: Ahora se determinan soluciones $F(x)$ y $G(t)$ de modo que $\xi(x,t) = F(x)G(t)$ satisfaga las condiciones de frontera. Es decir:

$$\xi(0,t) = F(0)G(t) = 0$$

$$\xi(L,t) = F(L)G(t) = 0 \quad \forall t$$

Es evidente que si $G(t) = 0$, entonces $\xi(x,t) = 0$, lo cual no tiene interés alguno. Por tanto, $G(t) \neq 0$, entonces:

$$F(0) = 0 \quad (178)$$

$$F(L) = 0 \quad (179)$$

Para $\lambda = 0$, la solución general de la ecuación (176) es $F(x) = ax + b$ y de (178) y (179) se obtiene $a = b = 0$. De donde $F(x) = 0$, lo cual no tiene sentido alguno porque entonces $\xi(x,t) = 0$. Para $\lambda = k^2$, positiva, la solución general de (176) es:

$$F(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

De (178) y de (179) se obtiene:

$$F(0) = A + B = 0$$

$$F(L) = Ae^{kL} + Be^{-kL} = 0 \text{ Entonces:}$$

$$B = -A$$

$$F(L) = A(e^{kL} - e^{-kL}) = 0$$

Es decir, $e^{kL} = e^{-kL}$ o bien $A = 0$. Como $k \neq 0$, se debe tener $A = 0$, con lo cual $\xi(x, t) = 0$.

Así, la única posibilidad que nos queda es hacer que $\lambda = -k^2$ (λ negativa). De esta manera, la ecuación (176) toma la forma:

$$F''(x) + k^2 F(x) = 0$$

Cuya solución general está dada por:

$$F(x) = A_1 \sin(kx) + B_1 \cos(kx)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera (178) y (179), tenemos:

$$F(0) = A_1 \sin(0) + B_1 \cos(0) = 0 \text{ Con lo cual } B_1 = 0.$$

$$F(L) = A_1 \sin(kL) = 0 \text{ Con lo cual:}$$

$$kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ O bien:}$$

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (180)$$

Así entonces, haciendo:

$$F_n(x) = A_{ln} \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (181)$$

Se obtienen una infinidad de soluciones. (Para un entero negativo, básicamente se obtienen las mismas soluciones, excepto por un signo menos).

Ahora se restringe λ a los valores $\lambda = -k^2 = -n^2 \pi^2 / L^2$ que resultan de (180). Para estos valores de λ , la ecuación (181) toma la forma:

$$\ddot{G}_n(t) = -\omega_n^2 G_n(t) = 0$$

Una solución general es:

$$G_n(t) = A_{2n} \sin(kvt) + B_{2n} \cos(kvt)$$

O bien:

$$G_n(t) = A_{2n} \sin(\omega_n t) + B_{2n} \cos(\omega_n vt)$$

Siendo $\omega_n = kv = n\pi v / L$

De donde, las funciones $\xi_n(x, t) = F_n(x)G_n(t)$, las cuales quedan expresadas como:

$$\xi_n(x, t) = A_{1n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [A_{2n} \sin(\omega_n t) + B_{2n} \cos(\omega_n vt)]$$

O bien, haciendo $A_{1n}A_{2n} = A_n$ y $A_{1n}B_{2n} = B_n$:

$$\xi_n(x, t) = [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n vt)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \text{"eigen"-funciones o funciones propias } n = 1, 2, 3, \dots \quad (182)$$

Son soluciones de (168) que satisfacen las condiciones de frontera (170) estas funciones se conocen como **funciones propias** y los valores $\omega_n = nv\pi / L$ se llaman **"eigen"-valores**, o **valores propios**, de la cuerda vibrante.

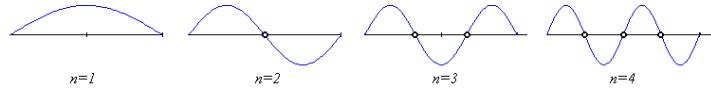
El conjunto $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ se llama **espectro**.

Se ve que cada $\xi_n(x, t)$ representa un movimiento armónico con la frecuencia $f_n = \omega_n / 2\pi = nv / 2L$ ciclos por unidad de tiempo. Este movimiento recibe el nombre de *n*-ésimo **modo normal** de la cuerda.

El primer nodo normal se conoce como **fundamental** ($n = 1$) y los demás son los **armónicos**. Como en (182),

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \text{ en } x = \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \frac{3L}{n}, \dots, \frac{(n-1)L}{n}$$

El n -ésimo modo normal tiene $n-1$ de los llamados nodos, es decir puntos de la cuerda que no se mueven.



Tercer paso: En general, una sola solución de $\xi_n(x,t)$ no satisface las condiciones iniciales de (174). Ahora bien, como la ecuación (168) es lineal y homogénea, se tiene que la superposición de un número finito, por grande que sea, de soluciones $\xi_n(x,t)$ es una solución de (168). Para obtener una solución que satisfaga las condiciones iniciales (174) se considera la serie infinita:

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (183)$$

A partir de este resultado y la condición inicial:

$$\xi(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L$$

Se concluye que:

$$\xi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

De donde para que $\xi(x,t)$ satisfaga las condiciones iniciales, deben escogerse los coeficientes B_n de modo que $\xi(x,0)$ se convierta en un desarrollo de medio rango de $f(x)$, a saber la serie senoidal de Fourier de $f(x)$; es decir:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (184)$$

De la misma manera, al derivar (183) con respecto a t y al aplicar la segunda condición inicial, se encuentra:

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) = u_o(x)$$

De donde, para que (183) satisfaga (168), den elegirse los coeficientes A_n de modo que, para $t = 0$, $\partial \xi / \partial t$ se convierta en la serie senoidal de Fourier de $u_o(x)$; así entonces:

$$A_n \omega_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_o(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

O bien, como $\omega_n = n\pi v / L$:

$$A_n = \frac{2}{vn\pi} \int_0^L u_o(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (185)$$

Se deduce que $\xi(x,t)$ dada por (183) con coeficientes dados por (184) y (185) es una solución de (168) que satisface las condiciones de frontera y las condiciones iniciales. Para simplificar, se considera el caso en que la velocidad inicial u_o sea cero. Entonces la ecuación (183) se reduce a:

$$\xi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{vn\pi t}{L} \right)$$

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{vn\pi t}{L} \right) \quad (186)$$

Si se utiliza la identidad trigonométrica:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \{ \sin(A - B) + \sin(A + B) \}$$

Tenemos:

$$\sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left(\frac{vn\pi t}{L} \right) = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{n\pi}{L} (x - vt) \right] + \frac{1}{2} \left[\sin \frac{n\pi}{L} (x + vt) \right]$$

Con lo cual:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\sin \frac{n\pi}{L} (x - vt) \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[\sin \frac{n\pi}{L} (x + vt) \right]$$

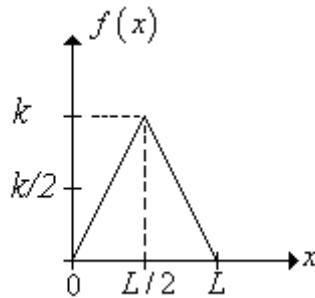
Estas dos series son las que se obtienen al sustituir x de la serie senoidal de Fourier para $f(x)$, por $x - vt$ y $x + vt$. Por lo tanto:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - vt) + f(x + vt)] \quad (187)$$

Ejemplo: Encontrar la solución de la ecuación de onda correspondiente a la deflexión inicial triangular:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L}x & \text{cuando } 0 < x < L/2 \\ \frac{2k}{L}(L-x) & \text{cuando } L/2 < x < L \end{cases}$$

Y velocidad inicial cero.



Solución:

Los coeficientes B_n vienen dados por:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$B_n = \frac{4k}{L^2} \left[\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{L/2}^L (L-x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

$$B_n = \frac{4k}{L^2} \left[\int_0^{L/2} x \sin \frac{n\pi x}{L} dx + L \int_{L/2}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx - \int_{L/2}^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

Usando la fórmula: $\int x \sin(ax) dx = -\frac{1}{a}x \cos(ax) + \frac{1}{a^2} \sin(ax)$

Se obtiene:

$$B_n = \frac{8k}{n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Finalmente:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{vn\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos \frac{vn\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

O bien:

$$\xi(x,t) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos \frac{v\pi t}{L} \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2} \cos \frac{3v\pi t}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5v\pi t}{L} \sin \frac{5\pi x}{L} - \dots \right)$$

$$\xi(x,t) = \frac{4k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \left[\sin \frac{n\pi(x-vt)}{L} + \sin \frac{n\pi(x+vt)}{L} \right]$$

4.3.21. Ondas estacionarias y la ecuación de ondas

Se sabe que la ecuación que regula la propagación de una onda es:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (188)$$

y que su solución es de la forma:

$$\xi(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt) \quad (189)$$

Cuando la onda se propaga en una dirección, se usa $f_1(x-vt)$ o $f_2(x+vt)$, pero no ambas. Sin embargo, se ha visto que cuando una onda se refleja en un punto, resultan dos ondas que se propagan en sentidos opuestos, y se debe usar la ecuación (189). Esto fue lo que se hizo en la ecuación (167) para el caso de una cuerda con un extremo fijo. Entonces se ha obtenido la ecuación (168) para el movimiento resultante. La característica importante de la ecuación (168) (esto es, $\xi = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$) es que las variables x y t están separadas, con lo cual resulta una amplitud variable a lo largo de la cuerda, pero fija para cada punto. Esto es la característica de las ondas estacionarias. Se debe entonces explorar la posibilidad de hacer una formulación más general de una onda armónica estacionaria. Es posible satisfacer nuestro requerimiento con una expresión de la forma:

$$\xi = f(x) \operatorname{sen} \omega t \quad (190)$$

Donde $f(x)$ es la amplitud de la onda en un punto x . Como ξ

La trayectoria es entonces, la hipérbola ξ dado en la ecuación (190) en la ecuación (188) para determinar la condición sobre la amplitud $f(x)$ para que las ondas sean estacionarias. Ahora bien, por derivación encontramos:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \operatorname{sen} \omega t$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \operatorname{sen} \omega t$$

Por consiguiente, sustituyendo estos valores en la ecuación (188) y cancelando el factor común, se obtiene:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f = 0 \quad \text{O, como } k = \frac{\omega}{v},$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad (191)$$

Esta es entonces la ecuación diferencial que debe satisfacer la amplitud $f(x)$ si la onda estacionaria dada por la ecuación (190) debe ser una solución de la ecuación de onda.

La solución general de la ecuación (191) es:

$$f(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx, \quad (192)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Por consiguiente la ecuación (190) se convierte en:

$$\xi(x,t) = (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx) \operatorname{sen} \omega t \quad (193)$$

Desde luego que se podría haber usado $\cos \omega t$ en lugar de $\operatorname{sen} \omega t$ con el mismo resultado. En otras palabras, la fase del factor que depende del tiempo no tiene importancia en nuestra discusión.

Las constantes de la ecuación (193) se determinan con las condiciones de contorno. Se ilustra esto con el problema de la cuerda con extremos fijos estudiado en la sección precedente. Las condiciones son que $\xi = 0$ para $x = 0$ y $x = L$. Haciendo $x = 0$ en la ecuación (193), tenemos:

$$\xi_{(x=0)} = B \operatorname{sen} \omega t = 0 \text{ Por lo tanto, } B = 0 \text{ y la ecuación (193) se reduce a:}$$

$$\xi(x,t) = A \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \text{ Ahora si se hace } x = L, \text{ la ecuación anterior da:}$$

$$\xi_{(x=L)} = A \operatorname{sen} kL \operatorname{sen} \omega t = 0$$

Pero ahora no se puede hacer $A = 0$, porque ello haría que ξ fuera cero en todos los puntos; esto es, no habría onda. Nuestra única elección es hacer $\operatorname{sen} kL = 0$, lo cual requiere que:

$$kL = n\pi \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{2L}{n} \text{ donde } n \text{ es un entero, de conformidad con la ecuación (172).}$$

Se considera ahora un tubo abierto en ambos extremos. Se sopla por uno de ellos a través de la boquilla, y se producen ondas estacionarias debido a la reflexión que ocurre en el otro extremo. La diferencia fundamental entre este caso y el anterior, es que ambos extremos son libres y por consiguiente ξ tiene valor máximo en estos extremos; en otras palabras, hay un antinodo en cada extremo. Nuestras condiciones de contorno correspondientes a antinodos en ambos extremos, son ahora $\xi = \text{máximo}$ ó $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ para $x = 0$ y $x = L$. En la ecuación (193),

tenemos: $\frac{\partial \xi}{\partial x} = k(A \cos kx - B \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \quad (194)$ Haciendo $x = 0$, hallamos:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=0} = kA \operatorname{sen} \omega t = 0,$$

de modo que $A = 0$. Entonces la ecuación (194) se convierte en:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -kB \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} \omega t \text{ Si ahora se hace } x = L, \text{ tenemos:}$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x=L} = -kB \operatorname{sen} kL \operatorname{sen} \omega t = 0$$

Ahora bien, como en el caso de la cuerda, no puede ser $B = 0$, porque no habría onda, por lo tanto debe ser $\operatorname{sen} kL = 0$, lo cual nos da de nuevo:

$$kL = n\pi \quad \text{ó} \quad \lambda = \frac{2L}{n} \quad (195)$$

Esta es idéntica a la ecuación (172). Las frecuencias de las ondas estacionarias son:

$$f_n = \frac{v}{\lambda} = n \left(\frac{v}{2L} \right) = f_1, 2f_1, 3f_1, \dots \quad (196)$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$, y por tanto las frecuencias posibles comprenden todos los armónicos correspondientes al tono fundamental de frecuencia $f_1 = v/2L$.

En la ecuación (193), se ve en este caso, con $A = 0$, $\xi(x, t) = B \cos kx \operatorname{sen} \omega t$.

En la figura 74 las líneas de trazos indican la distribución de amplitud para los casos: $n = 1, 2, 3$. Se concluye entonces que las oscilaciones de una columna de aire abierta en ambos extremos son equivalentes a las de una cuerda con ambos extremos fijos, pero las posiciones de nodos y antinodos están intercambiadas.

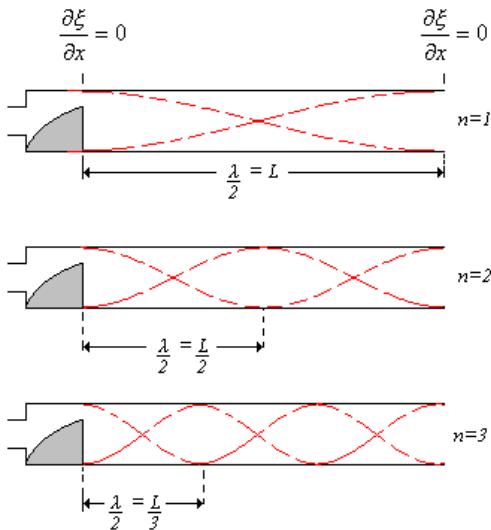


Figura 69. Ondas estacionarias en un tubo abierto.

Como segundo ejemplo, se considera un tubo con el extremo opuesto al de la boquilla cerrado. Las condiciones físicas en ese extremo se han cambiado, mientras que en la boquilla son las mismas que en el caso anterior. Por consiguiente en la boquilla se debe tener de nuevo un antinodo:

$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ para $x = 0$ pero en el extremo cerrado ($x = L$) se debe tener un nodo,

O bien, $\xi = 0$ para $x = L$. La primera condición en $x = 0$, requiere, como en el ejemplo previo que $A = 0$, de modo que la ecuación (193) se convierte en:

$$\xi(x, t) = B \cos kx \operatorname{sen} \omega t$$

Aplicando las condiciones de contorno al extremo cerrado, $x = L$, se obtiene:

$\xi_{(x=L)} = B \cos kL \operatorname{sen} \omega t = 0$ Esto requiere que $\cos kL = 0$, en otras palabras:

$$kL = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad \lambda = \frac{4L}{2n+1} \quad (197) \quad \text{con la frecuencia correspondiente:}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = (2n+1) \frac{v}{4L} = f_1, 3f_1, 5f_1 \dots$$

Los modos de vibración son ahora diferentes de los dados por la ecuación (196) que corresponden a un tubo abierto en ambos extremos. La siguiente figura muestra los puntos nodales y ventrales en el caso de un tubo abierto-cerrado para $n = 0, 1, 2$. La característica más importante es que un tubo cerrado en un extremo puede vibrar sólo con armónicos impares del fundamental $f_1 = \frac{v}{4L}$.

Para longitudes iguales, la frecuencia fundamental de un tubo cerrado es la mitad de la de un tubo abierto.

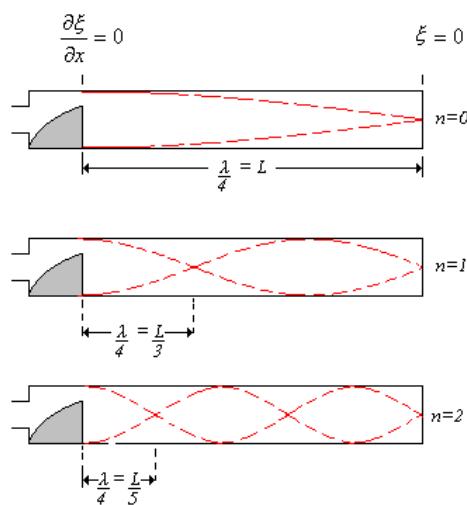


Figura 70. Ondas estacionarias en un tubo cerrado.

Ejemplo: Una masa m cuelga en equilibrio de una cuerda de longitud L y densidad de masa lineal μ . La cuerda pasa por dos poleas ligeras sin fricción que están separadas por una distancia d . a) Determine la tensión en la cuerda. b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria mostrado en la figura?

Solución:

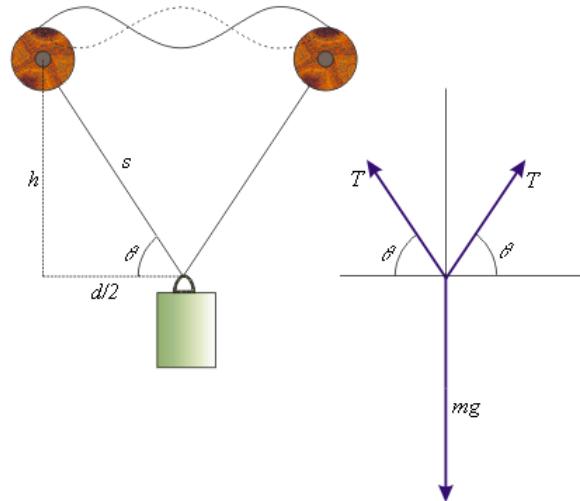


Figura 71. Ondas estacionarias en una cuerda que pasa por dos poleas y diagrama de cuerpo libre.

Con relación a la figura anterior se puede afirmar que:

$$\operatorname{sen} \theta = h / s = \frac{\sqrt{s^2 - d^2 / 4}}{s} = \frac{\sqrt{\left(\frac{L-d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}}}{\frac{L-d}{2}}$$

Obsérvese que la longitud de la cuerda L es igual a $2s+d$, y por esta razón: $s = (L-d)/2$.

Entonces:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{L(L-2d)}}{L-d}$$

Puesto que la masa m está en equilibrio, la suma de las componentes en x y en y debe ser cero. De aquí que:

$$\sum F_y = 2T \sin\theta - mg = 0$$

Despejando la tensión T de la cuerda:

$$T = \frac{mg}{2 \sin\theta}$$

O bien:

$$T = \frac{mg(L-d)}{2\sqrt{L(L-2d)}}$$

La frecuencia a la cual debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria mostrado en la figura es obviamente igual a la frecuencia del tercer armónico, por lo que:

$$f_3 = \frac{3}{2d} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

4.3.22. SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE DIFERENTE FRECUENCIA

Hasta ahora solamente se ha considerado superposición de ondas de la misma frecuencia. Sin embargo es muy frecuente e importante considerar ondas de frecuencias diferentes. En tal sentido, se considera la perturbación compuesta que aparece de la combinación de las ondas:

$$\xi_1 = \xi_{o1} \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad (198)$$

$\xi_2 = \xi_{o2} \sin(\omega_2 t - k_2 x) \quad (199)$ las cuales tienen amplitudes iguales y fase inicial cero. La onda neta:

$$\xi = \xi_{o1} [\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x)] \quad \text{Usando la identidad:}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad \text{puede escribirse:}$$

$$\xi = 2\xi_{o1} \operatorname{sen} \frac{1}{2} [(\omega_1 t - k_1 x) + (\omega_2 t - k_2 x)] \cos \frac{1}{2} [(\omega_1 t - k_1 x) - (\omega_2 t - k_2 x)] \text{ O bien:}$$

$$\xi = 2\xi_{o1} \operatorname{sen} \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x] \cos \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]$$

Ahora se definen las cantidades $\bar{\omega}$ y \bar{k} , que son la *frecuencia angular promedio* y el *número de propagación promedio* respectivamente. Similarmente las cantidades ω_m y k_m se designan como la *frecuencia de modulación* y el *número de propagación de modulación*. Por lo tanto, se hace:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad (200)$$

$$\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad k_m = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \quad (201)$$

Entonces:

$$\xi = 2\xi_{o1} \operatorname{sen} \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x] \cos \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 - k_2)x]$$

Finalmente:

$$\xi = 2\xi_{o1} \cos(\omega_m t - k_m x) \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \bar{k} x) \quad (202)$$

La perturbación total se puede considerar como una onda viajera de frecuencia $\bar{\omega}$ que tiene una amplitud modulada o variable en el tiempo $\xi_o(x, t)$ tal que:

$$\xi_o(x, t) = 2\xi_{o1} \cos(\omega_m t - k_m x) \quad (203)$$

De esta manera:

$$\xi = \xi_o(x, t) \operatorname{sen}(\bar{\omega} t - \bar{k} x) \quad (204)$$

En las aplicaciones de interés aquí ω_1 y ω_2 siempre serán muy grandes. Además si ellas son comparables entre sí, $\omega_1 \approx \omega_2$, entonces $\bar{\omega} \gg \omega_m$ y $\xi_o(x, t)$ cambiaría lentamente mientras que $\xi(x, t)$ variaría muy rápidamente.

La intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud:

$$\xi_o^2(x, t) = 4 \xi_{o1}^2 \cos^2(\omega_m t - k_m x)$$

O bien:

$$\xi_o^2(x, t) = 2 \xi_{o1}^2 [1 + \cos 2(\omega_m t - k_m x)]$$

Obsérvese que $\xi_o^2(x, t)$ oscila alrededor de un valor de $2\xi_{o1}^2$ con una frecuencia $2\omega_m$ o simplemente $\omega_1 - \omega_2$ que se conoce como la *frecuencia de pulsación*. En otras palabras, la frecuencia de modulación, que corresponde a la envolvente de la curva, es la mitad de la frecuencia de pulsación.

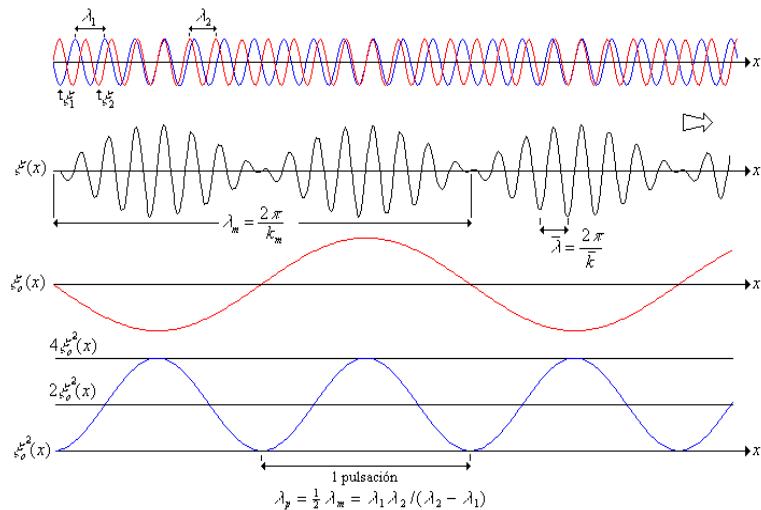


Figura 72. Superposición de dos ondas armónicas de diferente frecuencia.

Por ejemplo, si dos diapasones vibran en forma individual con frecuencia de 438 y 442 Hz, respectivamente, la onda sonora de la resultante de la superposición tiene una frecuencia de:

$$\bar{f} = \bar{\omega} / 2\pi = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) / 2\pi = \frac{1}{2}(2\pi f_1 + 2\pi f_2) / 2\pi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) = 440 \text{ Hz}$$

(La nota musical la) y una frecuencia de pulsación de:

$$f = \omega_p / 2\pi = (\omega_1 - \omega_2) / 2\pi = (2\pi f_1 + 2\pi f_2) / 2\pi = (f_1 - f_2) = 4 \text{ Hz}.$$

Es decir, el oyente escucharía que la onda sonora de 440 Hz alcanzaría una intensidad máxima cuatro veces por segundo.

SUMA DE FASORES. La suma de dos o más ondas armónicas de igual frecuencia se puede representar gráficamente como la suma de vectores en el plano complejo. La amplitud compleja se conoce como *fasor* y se especifica por su magnitud y fase; a menudo se escribe simplemente en la forma $\xi_o \angle \alpha$.

Imagine que se tiene una perturbación descrita por:

$$\xi_1 = \xi_{o1} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1)$$

En la figura 73, se representa la onda por un vector de longitud ξ_{o1} girando en sentido contrario a las manecillas del reloj con una velocidad angular ω tal que su proyección en el eje vertical es $\xi_1 = \xi_{o1} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$. Si se hubiera empleado ondas cosenoidales, se habría tomado la proyección sobre el eje horizontal. El vector rotatorio es por supuesto el fasor $\xi_{o1} \angle \alpha_1$ y las notaciones R e I denotan los ejes real e imaginario.

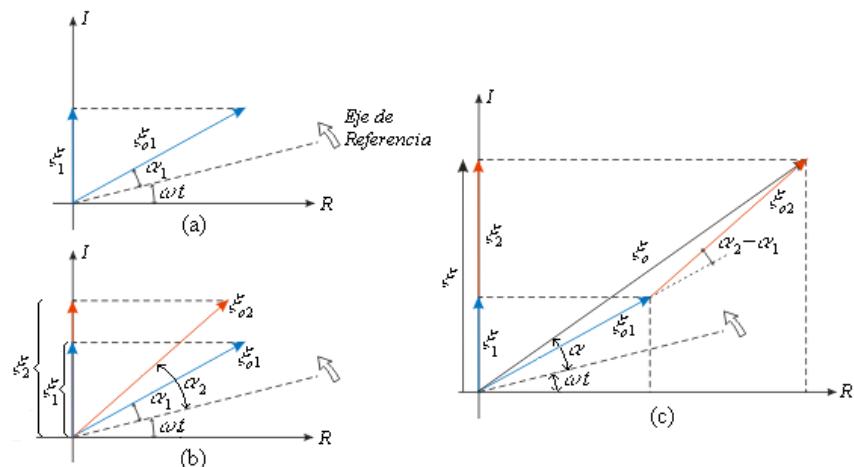


Figura 73. Suma de fasores.

Similarmente, una segunda onda:

$$\xi_2 = \xi_{o2} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

se muestra junto con ξ_1 en la figura 73 (b). La suma algebraica, $\xi = \xi_1 + \xi_2$, es la proyección en el eje l del fasor resultante determinado por la suma de vectores de los fasores componentes, como en la figura (73) (c). La ley de cosenos aplicada al triángulo de lados ξ_{o1} , ξ_{o2} y ξ_o da:

$$\xi_o^2 = \xi_{o1}^2 + \xi_{o2}^2 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

De la figura 73 (c), también se ve que:

$$\tan(\omega t + \alpha) = \frac{\xi_{o1} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_1) + \xi_{o2} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha_2)}{\xi_{o1} \cos(\omega t + \alpha_1) + \xi_{o2} \cos(\omega t + \alpha_2)}$$

Con lo cual, si $t = 0$, se tiene:

$$\tan \alpha = \frac{\xi_{o1} \operatorname{sen} \alpha_1 + \xi_{o2} \operatorname{sen} \alpha_2}{\xi_{o1} \cos \alpha_1 + \xi_{o2} \cos \alpha_2}$$

4.3.23. Interferencia. Una característica muy importante del movimiento ondulatorio es el fenómeno de interferencia. Este ocurre cuando dos o más movimientos ondulatorios coinciden en el espacio y el tiempo.

Se considera dos fuentes puntuales S_1 y S_2 que oscilan en fase con la misma frecuencia angular ω y amplitudes ξ_{o1} y ξ_{o2} . Sus ondas esféricas respectivas son:

$$\xi_1 = \xi_{o1} \operatorname{sen}(\omega t - kr_1) \quad (205)$$

$$\xi_2 = \xi_{o2} \operatorname{sen}(\omega t - kr_2) \quad (206)$$

Donde r_1 y r_2 son las distancias desde cualquier punto a S_1 y S_2 , respectivamente. Obsérvese que aunque las dos fuentes son idénticas, no producen la misma amplitud en P si r_1 y r_2 son diferentes, porque se sabe que la amplitud de una onda esférica disminuye según la ley $1/r$.

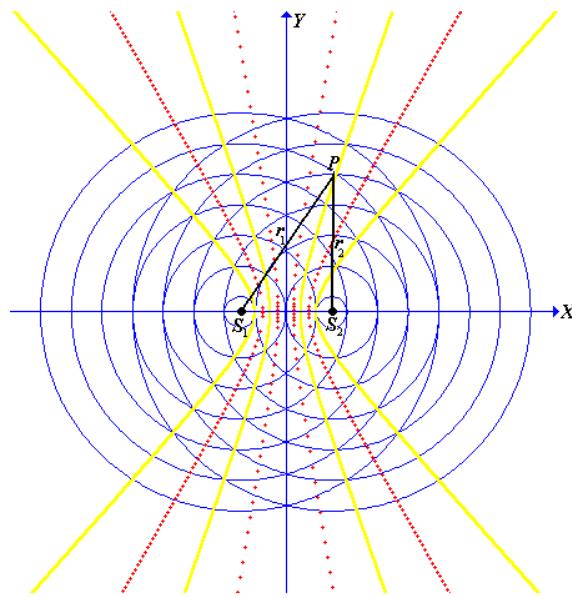


Figura 74. Líneas nodales y ventrales resultantes de la interferencia de ondas producidas por dos fuentes idénticas.

Supóngase que ξ es una cantidad escalar, tal como una perturbación de la presión. Si ξ corresponde a una cantidad vectorial, se supone que ξ_1 y ξ_2 tienen la misma dirección de modo que la combinación de las dos ondas puede ser tratada escalarmente.

La situación descrita es tal, que en cada punto del espacio, el movimiento ondulatorio resultante $\xi = \xi_1 + \xi_2$ tiene una amplitud característica ξ_o dada por:

$$\xi_o = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 \cos k(r_1 - r_2)} \quad (207)$$

de modo que:

$$\xi = \xi_o \sin(\omega t - \alpha) \quad (208)$$

Donde α es el ángulo de fase resultante dado por:

$$\tan \alpha = \frac{\xi_{o1} \sin kr_1 + \xi_{o2} \sin kr_2}{\xi_{o1} \cos kr_1 + \xi_{o2} \cos kr_2} \quad (209)$$

Por consiguiente, el resultado de la interferencia de un movimiento ondulatorio no tiene la apariencia de un movimiento ondulatorio progresivo, sino una situación *estacionaria* en el cual el movimiento tiene una amplitud fija en cada punto del espacio. La razón de esto es que las dos fuentes oscilan con la misma frecuencia y mantienen un desfase constante, y por lo tanto se dice que son *coherentes*. Pero si las fuentes no son de la misma frecuencia, o si sus desfases cambian erráticamente con el tiempo, no se observa el diagrama de interferencia estacionario, y las fuentes se dice que son *incoherentes*.

Ahora se probará las ecuaciones (207) y (208). A partir de las ecuaciones (205), (206) y (208) se obtiene:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_o \sin(\omega t - \alpha)$$

$$\xi = \xi_o \sin(\omega t - \alpha) = \xi_{o1} \sin(\omega t - kr_1) + \xi_{o2} \sin(\omega t - kr_2)$$

$$\xi_o \sin(\omega t - \alpha) = \xi_{o1} \sin \omega t \cos kr_1 - \xi_{o1} \cos \omega t \sin kr_1 + \xi_{o2} \sin \omega t \cos kr_2 - \xi_{o2} \cos \omega t \sin kr_2$$

$$\xi_o \sin(\omega t - \alpha) = (\xi_{o1} \cos kr_1 + \xi_{o2} \cos kr_2) \sin \omega t - (\xi_{o1} \sin kr_1 + \xi_{o2} \sin kr_2) \cos \omega t$$

De modo que:

$$\xi_o \sin \alpha = \xi_{o1} \sin kr_1 + \xi_{o2} \sin kr_2$$

$$\xi_o \cos \alpha = \xi_{o1} \cos kr_1 + \xi_{o2} \cos kr_2$$

Dividiendo estas dos ecuaciones se obtiene (209) y si eleva al cuadrado cada una de las ecuaciones anteriores y se suma:

$$\begin{aligned}\xi_o^2 = & \xi_{o1}^2 \operatorname{sen}^2 kr_1 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} \operatorname{sen} kr_1 \operatorname{sen} kr_2 + \xi_{o2}^2 \operatorname{sen}^2 kr_2 \\ & + \xi_{o1}^2 \cos^2 kr_1 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} \cos kr_1 \cos kr_2 + \xi_{o2}^2 \cos^2 kr_2\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\xi_o^2 = \xi_{o1}^2 + \xi_{o2}^2 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} (\operatorname{sen} kr_1 \operatorname{sen} kr_2 + \cos kr_1 \cos kr_2)$$

$$\xi_o^2 = \xi_{o1}^2 + \xi_{o2}^2 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} \cos k(r_1 - r_2)$$

Con lo cual queda demostrado la ecuación

En la ecuación (207), se ve que ξ está comprendido entre los valores

La trayectoria es entonces, la hipérbola y $\xi_{o1} - \xi_{o2}$ dependiendo de que sea:

$$\cos \delta = +1 \text{ ó } -1$$

$$\text{ó } \delta = 2n\pi \quad \text{ó } \delta = (2n+1)\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

donde $\delta = kr_1 - kr_2 = k(r_1 - r_2)$ es el desfase entre los dos movimientos ondulatorios $\xi_1 = \xi_{o1} \operatorname{sen}(\omega t - kr_1)$ y $\xi_2 = \xi_{o2} \operatorname{sen}(\omega t - kr_2)$ en cualquier punto P .

En el caso $\delta = 2n\pi$ se tiene máximo refuerzo de los dos movimientos ondulatorios, o *interferencia constructiva* y en el caso $\delta = (2n+1)\pi$ hay máxima atenuación, o *interferencia destructiva*. Esto es:

$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \text{interferencia constructiva} \\ (2n+1)\pi & \text{interferencia destructiva} \end{cases}$$

Puesto que $\delta = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$, se puede escribir:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \begin{cases} 2n\pi & \text{interferencia constructiva} \\ (2n+1)\pi & \text{interferencia destructiva} \end{cases}$$

o sea,

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n\lambda & \text{interferencia constructiva} \\ (2n+1)\frac{\lambda}{2} & \text{interferencia destructiva} \end{cases} \quad (210)$$

Pero $r_1 - r_2 = \text{constante}$ define una hipérbola cuyos focos son S_1 y S_2 , como el problema es realmente en el espacio esta ecuación define superficies hiperbólicas de revolución, como en la siguiente figura.

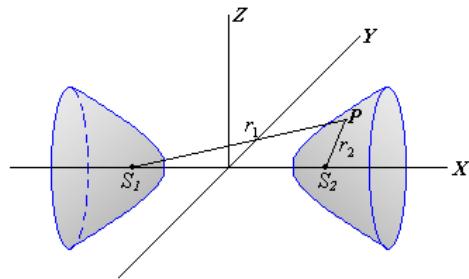


Figura 75. Superficies de desfase constante para ondas esféricas producidas por dos fuentes puntuales coherentes.

Por consiguiente se concluye de la ecuación (210) que en las superficies hiperbólicas cuyas ecuaciones son $r_1 - r_2 = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \dots$, los dos movimientos interfieren reforzándose. Estas superficies se denominan *superficies ventrales o antinodales*. En las superficies hiperbólicas cuyas ecuaciones son $r_1 - r_2 = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \dots$ los dos movimientos interfieren atenuándose. Estas superficies se denominan *nodales*.

El diagrama en su totalidad es de este modo una sucesión de superficies ventrales y nodales alternadas. Las hipérbolas que se ilustran en la figura 82, son las interacciones de estas superficies con un plano que pasa por el eje X.

Ejemplo: Dos altavoces idénticos separados por una distancia de 10 m se excitan por medio del mismo oscilador con una frecuencia de $f = 21.5 \text{ Hz}$ (Fig. 76). a) Explique por qué un receptor en el punto A registra un mínimo en la intensidad sonora de estos altavoces. b) Si el receptor se mueve en el plano horizontal de los altavoces, ¿qué trayectoria debe seguir de manera que la intensidad se mantenga en un mínimo? Esto es, determine la relación entre x y y (las coordenadas del receptor) que provoca que el receptor registre un mínimo en la intensidad sonora. Considere la velocidad del sonido igual a 344 m/seg .

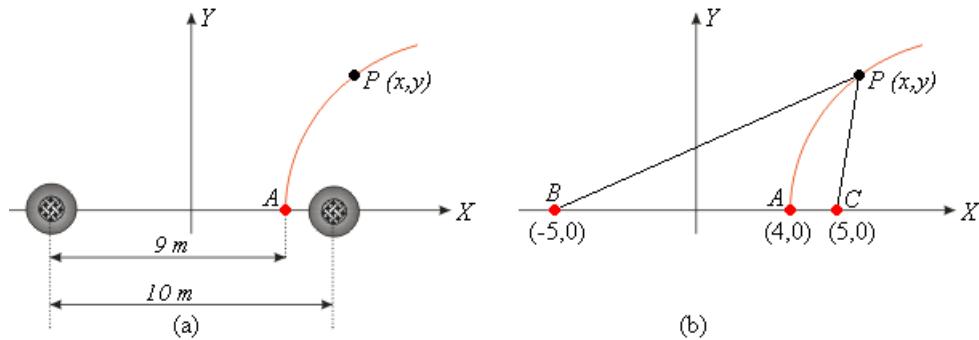


Figura 76. Interferencia destructiva de dos sonidos producidos por dos altavoces idénticos.

Solución:

De la relación $v = \lambda f$, se encuentra que la longitud de onda del sonido producido por los dos altavoces es igual a 16 m.

Si en el punto A existe un mínimo, la diferencia de caminos $BA - CA = 9 \text{ m} - 1 \text{ m} = 8 \text{ m}$ debe ser igual a un múltiplo impar de media longitud de onda, esto es:

$$8 \text{ m} = (2n + 1)\lambda / 2$$

$$8 = 8 \cdot (2n + 1)$$

De esta manera $n = 0$, con lo cual se evidencia que en el punto A se percibe un mínimo en la intensidad sonora. Ahora bien, si en el punto $P(x, y)$ existe otro mínimo:

$$r_2 - r_1 = (2n+1)\lambda/2 = 8, \text{ ya que } n = 0 \text{ y } \lambda = 16 \text{ m}.$$

O bien, teniendo en cuenta la figura 78 (b):

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8$$

Transponiendo el segundo radical al miembro derecho y elevando al cuadrado:

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8 + \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

$$(x+5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + (x-5)^2 + y^2$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x-5)^2 + y^2} + x^2 - 10x + 25 + y^2$$

Simplificando:

$$20x - 64 = 16\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

Dividiendo por cuatro, y elevando de nuevo al cuadrado:

$$5x - 16 = 4\sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

$$25x^2 - 160x + 256 = 16[(x-5)^2 + y^2]$$

$$25x^2 - 160x + 256 = 16(x^2 - 10x + 25 + y^2)$$

Agrupando términos semejantes:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

La trayectoria es entonces, la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$, la cual tiene sus focos en los puntos $(-5,0)$, $(5,0)$, centro en el origen y vértice en el punto $A(4,0)$.

4.3.24. Experimento de Young: Un dispositivo muy simple utilizado para producir interferencia entre dos fuentes coherentes (igual frecuencia y desfase constante) y que sirvió para demostrar la naturaleza ondulatoria de la luz es el usado por Thomas Young (1773-1829), el cual consistía en dos pequeños agujeros o rendijas, S_1 y S_2 muy cercanos, en una pantalla con una fuente de luz S colocada detrás de ella (Fig. 77) (6.4). De acuerdo con el principio de Huygens, S_1 y S_2 se comportan como fuentes secundarias coherentes cuyas ondas interfieren sobre la región a la derecha de la pantalla.

En el caso de la luz, el diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla colocada paralelamente a las dos fuentes S_1 y S_2 , como se indica en la figura 78(a). Una serie de franjas brillantes y oscuras dispuestas alternadamente aparecen sobre la pantalla debido a la intersección de ésta con las superficies hiperbólicas ventrales y nodales como se muestra en la figura 78(b). Para otras regiones del espectro electromagnético, se usan diferentes tipos de detectores para observar el diagrama de interferencia.

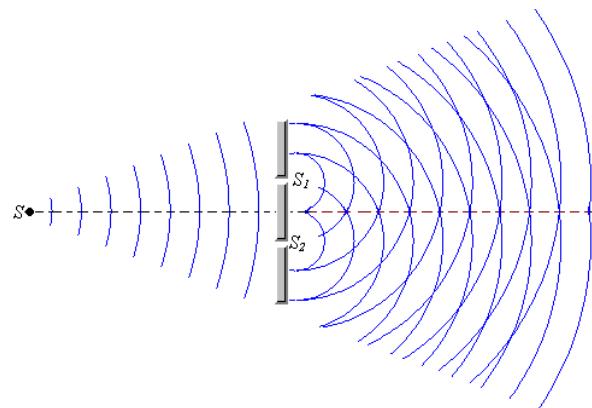


Figura 77. Interferencia producida por dos fuentes coherentes. Experimento de Young de la doble rendija.

Si la separación a de las fuentes S_1 y S_2 es pequeña comparada con la distancia D , se puede despreciar la pequeña diferencia entre r_1 y r_2 y suponer que las amplitudes ξ_{o1} y ξ_{o2} son prácticamente iguales. Se puede entonces volver a escribir la ecuación (6.3) como:

$$\xi_o = \xi_{o1} \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = 2 \xi_{o1} \cos \frac{1}{2} \delta$$

Ahora, de la geometría de la figura 6.4a, considerando que el ángulo θ es pequeño, de modo que $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta = x/D$, obse tiene $r_1 - r_2 = S_1 B = a \operatorname{sen}\theta = ax/D$, y por tanto

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} a \operatorname{sen}\theta = \frac{2\pi ax}{D\lambda} \quad (211)$$

La intensidad del movimiento resultante en los puntos de la pantalla es proporcional a ξ_o^2 . Por consiguiente:

$$I = I_o \cos^2 \frac{1}{2} \delta = I_o \cos^2 \left(\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} \right) = I_o \cos^2 \left(\frac{\pi ax}{D\lambda} \right) \quad (212)$$

Donde I_o es la intensidad para $\theta = 0$. En la figura 86, se ilustra la ley \cos^2 para la distribución de intensidad. Los puntos de intensidad máxima corresponden a:

$$\frac{\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} = n\pi \quad \text{o} \quad a \operatorname{sen}\theta = n\lambda$$

$$\text{y también a: } \frac{\pi ax}{D\lambda} = n\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{nD}{a} \lambda \quad (213)$$

Donde n es un entero positivo o negativo.

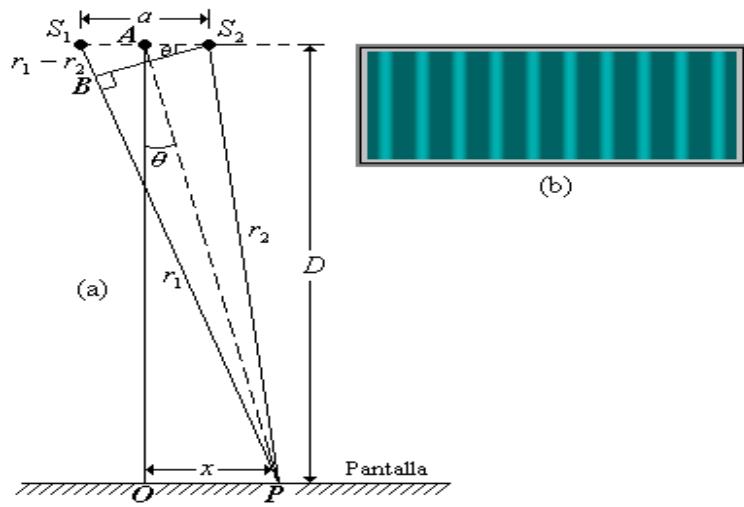


Figura 78.

- (a) Dibujo esquemático para determinar la intensidad del movimiento ondulatorio resultante sobre una pantalla producida por dos fuentes coherentes.
- (b) Imagen de las franjas de interferencia producidas sobre una pantalla por un par de rendijas iluminadas por una fuente puntual de luz monocromática.

La separación entre dos franjas brillantes consecutivas es $\Delta x = \frac{D}{a} \lambda$. Por lo tanto, midiendo Δx , D y a , se puede obtener la longitud de onda λ .

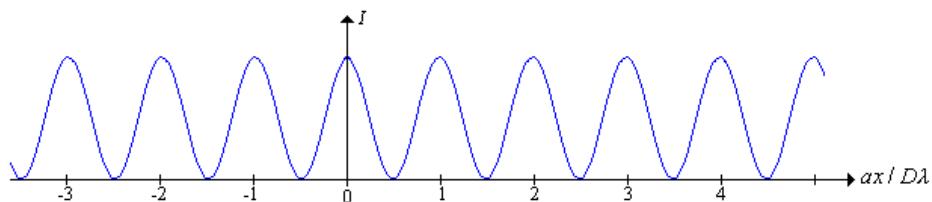


Figura 79. Distribución de intensidad en un diagrama de interferencia producido por dos fuentes coherentes.

Ejemplo: Discutir el diagrama de interferencia producido por dos fuentes no coherentes de la misma frecuencia.

Solución: La no coherencia se debe en este caso a que la diferencia de fase es variable. En consecuencia escribimos, en lugar de las ecuaciones (205) y (206):

$$\xi_1 = \xi_{o1} \operatorname{sen}(\omega t - kr_1 - \phi), \quad \xi_2 = \xi_{o2} \operatorname{sen}(\omega t - kr_2)$$

Donde ϕ es el desfase adicional que varía con el tiempo al azar. Entonces el desfase es:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi$$

La amplitud resultante en el punto de interferencia es entonces:

$$\xi_o^2 = \xi_{o1}^2 + \xi_{o2}^2 + 2\xi_{o1}\xi_{o2} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi\right]$$

Pero ahora ξ_o no es constante en el tiempo debido a los cambios en ϕ . Por consiguiente, en su lugar se debe hallar $\overline{\xi_o^2}$. Pero debido a la variación al azar de ϕ , se tiene que el valor promedio del término cosenoideal es:

$$\overline{\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi\right]\right\}} = 0$$

Por lo tanto:

$$\overline{(\xi_o^2)} = \xi_1^2 + \xi_2^2$$

Y como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud:

$$\bar{I} = I_1 + I_2$$

Por consiguiente la intensidad media resultante es la suma de las intensidades individuales y no se observan fluctuaciones en la intensidad. La intensidad media es la misma en todos los puntos.

Esta es la razón por la cual, por ejemplo, no se observan franjas de interferencia con la luz proveniente de dos bombillos eléctricos, porque las diferencias de fase de sus respectivos átomos radiantes están distribuidas al azar.

IMPORTANTE: El experimento de la doble rendija es la entrada para la mecánica cuántica como lo explica Feynman en el libro III de lecturas en física

INTERFERENCIA DE ONDAS PRODUCIDAS POR VARIAS FUENTES SINCRÓNICAS:

Se considera la situación de varias fuentes sincrónicas idénticas distribuidas linealmente, como se muestra en la figura 80. Para simplificar el análisis se supone que se observa el movimiento ondulatorio resultante a una distancia muy lejana comparada con la separación de las fuentes, de modo que efectivamente los rayos que interfieren son paralelos. Entre los rayos sucesivos hay un desfase constante dado por:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \theta \quad (214)$$

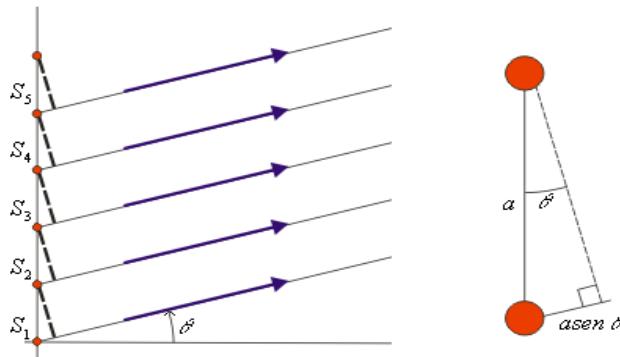


Figura 80. Serie lineal de fuentes coherentes equidistantes

Para obtener la amplitud resultante en la dirección de observación dada por el ángulo θ , se debe evaluar la suma vectorial de los correspondientes vectores rotantes de cada fuente.

Si las fuentes son todas iguales, sus vectores rotantes (fasores) tienen la misma longitud ξ_o y los vectores sucesivos están desviados el mismo ángulo δ (fig. 81). Designando el números de fuentes por N , se tiene entonces un polígono regular de N lados que tiene su centro en C , radio ρ , y el ángulo OCP es $N\delta$. En el triángulo ΔCOP se ve que:

$$\xi_o = OP = 2QP = 2\rho \sin \frac{1}{2}N\delta$$

Análogamente, en el triángulo ΔCOR , que corresponde a uno de los lados del polígono, tenemos:

$$\xi_{o1} = 2\rho \sin \frac{1}{2}\delta$$

Dividiendo las dos expresiones para eliminar ρ , tenemos:

$$\xi_o = \xi_{o1} \frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} \quad (215)$$

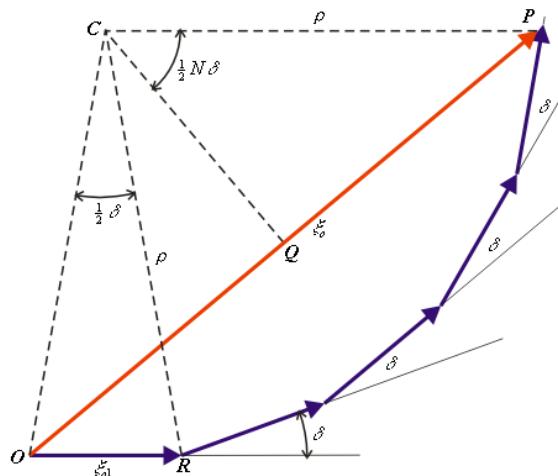


Figura 81. Amplitud resultante en un punto arbitrario debido a la interferencia de ondas generadas por fuentes coherentes equidistantes dispuestas linealmente.

Para $N = 2$, se obtiene:

$$\xi_o = \xi_{o1} \frac{\sin \frac{1}{2}(2\delta)}{\sin \frac{1}{2}\delta} = \xi_{o1} \frac{\sin \delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} = 2\xi_{o1} \cos \frac{1}{2}\delta$$

Este resultado está de acuerdo con el resultado previo del experimento de la doble rendija. Se observa también que el diagrama de fasores correspondiente es el que se ilustra en la figura 82.

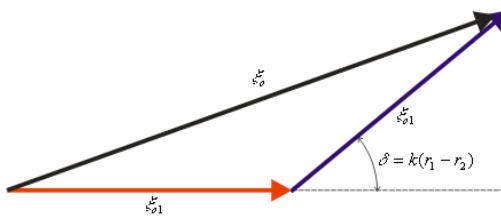


Figura 82. Amplitud resultante en un punto arbitrario debido a la interferencia de ondas generadas por dos fuentes coherentes.

La intensidad de las ondas resultantes siendo proporcional a ξ_o^2 , de acuerdo con la ecuación (215) y al hecho de que $\delta = 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda = 2\pi a \sin\theta/\lambda$ es entonces:

$$I = I_o \left(\frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} \right)^2 = I_o \left[\frac{\sin(N\pi a \sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi a \sin\theta/\lambda)} \right]^2 \quad (216)$$

La expresión (215) da un máximo muy pronunciado, igual a $N^2 I_o$, para $\delta = 2n\pi$ o bien, $\delta = 2\pi a \sin\theta/\lambda = 2n\pi$, con lo cual:

$$a \sin\theta = n\lambda \quad (217)$$

Esto se debe a que $\sin(N\alpha)/\sin\alpha = \pm N$ para $\alpha = n\pi$ y en nuestro caso $\alpha = \delta/2$. El valor de I es entonces $N^2 I_o$.

Este resultado es comprensible observando la figura 6.10, porque cuando $\delta = 2n\pi$ todos los vectores ξ_{o1} son paralelos, como se indica en la figura 81, y la amplitud resultante es $\xi_o = N\xi_{o1}$ de conformidad con la ecuación (217). La ecuación (217) concuerda con la ecuación (213) deducida para dos fuentes bajo hipótesis similares. La intensidad es nula para $\frac{1}{2}N\delta = n'\pi$, o bien:

$$\delta = 2\pi a \operatorname{sen}\theta / \lambda = \frac{2n'\pi}{N}$$

con lo cual:

$$a \operatorname{sen}\theta = \frac{n'\lambda}{N} \quad (218)$$

donde n' toma los valores 1 a $N-1$, $N+1$ a $2N-1$, etc; los valores $n' = 0, N, 2N, \dots$ se excluyen, ya que de lo contrario la ecuación (288) se transforma en la ecuación (289). Entre dos mínimos siempre debe haber un máximo. Por consiguiente, se concluye que también hay $N-2$ máximos adicionales entre los máximos principales dados por la ecuación (217). Sus amplitudes son sin embargo relativamente pequeñas, especialmente si N es grande. El máximo principal corresponde a la dirección según la cual las ondas emitidas por fuentes adyacentes están en fase.

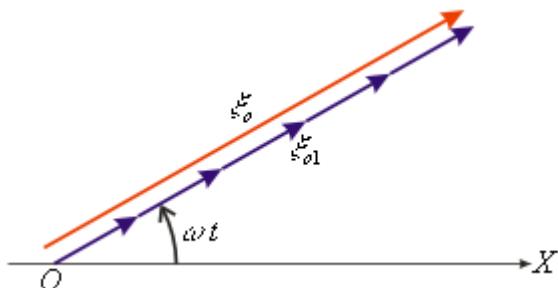


Figura 83. Amplitud resultante en un punto de desfase nulo en la interferencia producida por fuentes equidistantes dispuestas linealmente.

El gráfico de I/I_o en función de δ se muestra en la figura 82, para $N=2,4,8$ y N muy grande. Se ve que cuando N aumenta el sistema se hace altamente direccional, porque el movimiento ondulatorio resultante es importante sólo para bandas estrechas de valores de δ , o para bandas estrechas del ángulo θ .

Estos resultados son ampliamente usados en las estaciones de radio transmisión o recepción cuando se desea un efecto direccional. En este caso se agrupan varias antenas en tal forma que la radiación emitida (recibida) sea máxima sólo para ciertas direcciones.

Por ejemplo, para cuatro antenas lineales separadas por $a = \lambda/2$, la ecuación (217) da $\sin\theta = 2n$. Entonces, sólo $n = 0$ es posible para el máximo principal, dando $\theta = 0$ y π . Para los ceros o planos nodales, la ecuación (218) da $\sin\theta = n'/2$, permitiendo para n' los valores ± 1 y ± 2 (ya que si $n' = \pm 3$ daría $\sin\theta = \pm 3/2$, lo que es imposible) ó $\theta = \pm\pi/3$ y $\pm\pi/2$. Esta situación se ilustra en el diagrama polar de la figura 83, donde la intensidad está en función del ángulo. Esta disposición de antena transmite y recibe principalmente en dirección perpendicular a la línea que une las fuentes y se llama por consiguiente *disposición en batería*.

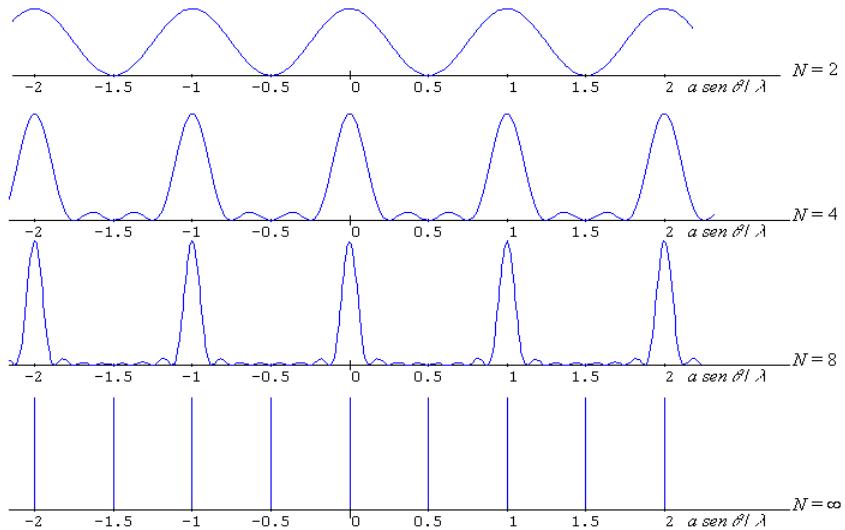


Figura 84. Patrón de interferencia de múltiples rendijas. Cuando el número de rendijas aumenta, los máximos primarios (las bandas más intensas) se vuelven más estrechos pero permanecen fijos en su posición. La separación a entre las fuentes se mantiene constante.

INTERFERENCIA EN PELÍCULAS DELGADAS: Otro método para obtener dos fuentes coherentes desdoblando una sola fuente y producir interferencia consiste en hacer reflejar un haz de luz sobre las dos caras de una película delgada.

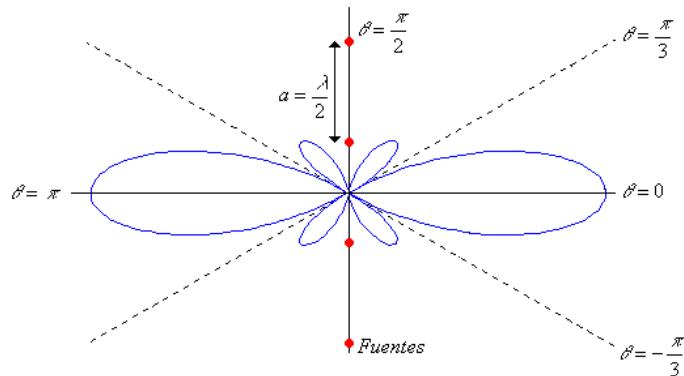


Figura 85. Distribución angular de la intensidad en el diagrama de interferencia producido por ondas generadas por cuatro fuentes coherentes en línea recta y separadas entre sí por media longitud de onda.

Suponga tres medios de índices de refracción n_1 , n_2 y n_3 separados por superficies planas y Supóngase que el medio de índice de refracción n_2 tenga un espesor a pequeño. La figura 84, muestra varias ondas planas incidiendo sobre la película con un ángulo de incidencia igual a θ_i . Parte de un rayo tal como \overline{AB} se srefleja según \overline{BG} y se refracta según \overline{BC} . El rayo \overline{BC} se refleja parcialmente en C según \overline{CD} y se transmite parcialmente según \overline{CH} . El rayo \overline{CD} , de nuevo se refleja parcialmente en D, según \overline{DK} superponiéndose con el rayo refractado en D del incidente \overline{FD} . Este mismo rayo \overline{CD} se refracta en D y el rayo refractado se superpone con el reflejado de \overline{FD} . Análogamente el rayo reflejado \overline{BG} también contiene contribuciones de los varios rayos a su izquierda. Por lo tanto ocurren fenómenos de interferencia a lo largo de los rayos reflejados y refractados. La situación es entonces similar a la interferencia de varias fuentes sincrónicas con N muy grande, pero con una diferencia importante: los rayos que interfieren no tienen todas las mismas intensidades porque en cada reflexión o refracción sucesiva la intensidad disminuye.

Si no se tiene en cuenta este cambio de intensidad, los máximos debidos a la interferencia por reflexión o refracción ocurren cuando el desfase δ entre rayos sucesivos satisface la ecuación $\delta = 2n\pi$. Para calcular δ para la interferencia por reflexión, se considera los rayos \overline{AB} y \overline{FD} . Trazando el frente de onda $\overline{BB'}$, el desfase según \overline{DE} se debe a que los caminos $\overline{B'D}$ y $\overline{BC} + \overline{CD}$ seguidos por los rayos son recorridos en diferentes tiempos. Ahora bien, en la figura 85, se ve que:

$$\overline{B'D} = \overline{BD} \operatorname{sen} \theta_i$$

$$\overline{BD} = 2a \tan \theta_r$$

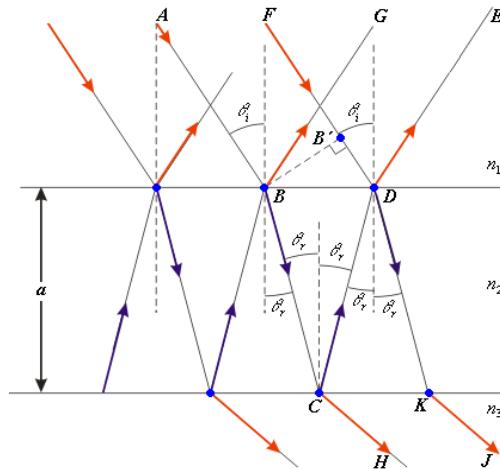


Figura 86. Interferencia por reflexión y refracción en una película delgada.

Por consiguiente:

$$\overline{B'D} = 2a \tan \theta_r \operatorname{sen} \theta_i = \frac{2a n_2 \operatorname{sen}^2 \theta_r}{n_1 \cos \theta_r}$$

Ya que por la ley de Snell: $n_1 \operatorname{sen} \theta_i = n_2 \operatorname{sen} \theta_r$. Además $\overline{BC} + \overline{CD} = 2\overline{BC} = 2a / \cos \theta_r$. Entonces, $t_1 = \overline{B'D} / v_1 = 2a n_2 \operatorname{sen}^2 \theta_i / c \cos \theta_r$ y $t_2 = (\overline{BC} + \overline{CD}) / v_2 = 2a n_2 / c \cos \theta_r$, debido a que $v_1 = c / n_1$ y $v_2 = c / n_2$. La diferencia de tiempo es entonces:

$$t_2 - t_1 = \frac{2a n_2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_i)}{c \cos \theta_r}$$

O bien:

$$t_2 - t_1 = \frac{2a n_2 \cos \theta_r}{c}$$

y la diferencia de fase, ya que $\lambda = c/f = 2\pi c/\omega$, es:

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2a\omega n_2 \cos \theta_r}{c} = \frac{4\pi a n_2 \cos \theta_r}{\lambda}$$

Este no puede ser el desfase total porque, algunas veces la reflexión da lugar a un desfase adicional de π . Esto ocurre por ejemplo, en el caso de ondas electromagnéticas cuando luz polarizada perpendicularmente al plano de incidencia va de un medio donde su velocidad es mayor a otro donde es menor ($n_1 < n_2$). De modo que en este caso, si $n_1 < n_2$ hay un cambio de fase de π para el rayo \overline{FD} cuando se refleja en D (no habría cambio de fase para el rayo \overline{FD} si $n_1 > n_2$), también habría un cambio de fase de π para el rayo \overline{BC} si $n_2 < n_3$, pero no lo hay para el rayo \overline{BC} cuando se refleja en C si $n_2 > n_3$.

De modo que cuando una de las ondas presenta desfase por reflexión se puede escribir:

$$\delta = \frac{4\pi a n_2 \cos \theta_r}{\lambda} + \pi$$

Y haciendo $\delta = 2N\pi$, donde N es un entero, obse tiene interferencia constructiva cuando:

$$2a n_2 \cos \theta_r = \frac{1}{2}(2N-1)\lambda \quad (\text{Reflexión máxima, transmisión mínima}) \quad (219)$$

Si se hace $\delta = (2N+1)\pi$, donde $N = 0, 1, 2, \dots$, obse tieneinterferencia destructiva cuando:

$$2a n_2 \cos \theta_r = N\lambda \quad (\text{Reflexión máxima, transmisión mínima}) \quad (220)$$

Estas relaciones nos permiten encontrar para cuales espesores de la película se presenta interferencia constructiva o destructiva.

Por ejemplo, si se supone que la onda incidente sea aproximadamente normal a la superficie, o sea $\theta_i \approx 0$, se tendrá también $\theta_r \approx 0$, lo que implica $\cos \theta_r \approx 0$ y las condiciones de interferencia pueden escribirse así:

$$2a n_2 = \frac{1}{2}(2N-1)\lambda \quad \text{Interferencia constructiva.}$$

$$2a n_2 = N\lambda \quad \text{Interferencia destructiva.}$$

El fenómeno de la interferencia en películas delgadas se observa frecuentemente en la vida cotidiana; los brillantes colores de las burbujas de jabón o los colores que presentan las manchas de aceite que flotan sobre un charco de agua son los ejemplos más comunes de este tipo de interferencia.

Sin embargo efectuar experimentos cuantitativos, en estos casos, presenta alguna dificultad que puede resolverse utilizando un dispositivo de anillos de Newton en el cual el espesor de la película puede determinarse en cada punto a través de una simple relación matemática.

El dispositivo de Newton está constituido por una lente plana convexa puesta sobre una lámina plana (Fig. 87); la película en la cual ocurre la interferencia está constituida (en este caso) por el aire u otra sustancia que queda esférica de la lente y la superficie plana de la lámina.

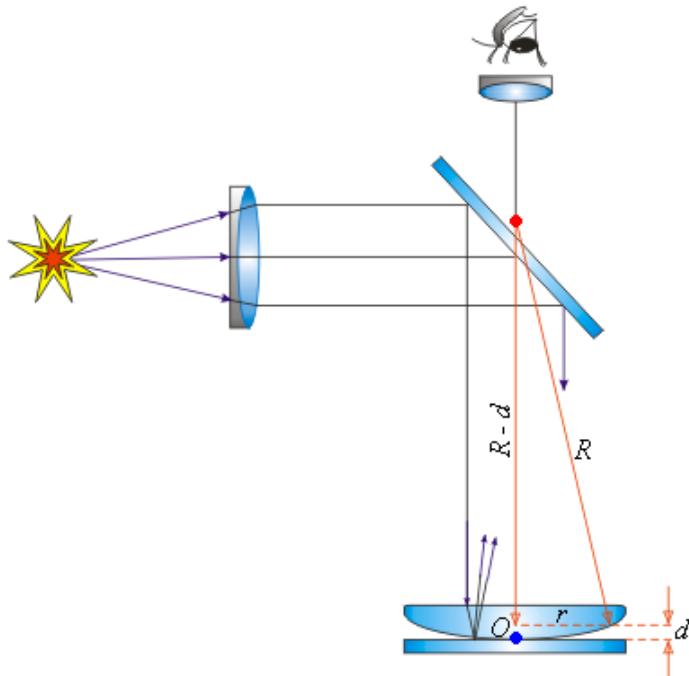


Figura 87. Dispositivo utilizado para observar los anillos de Newton.

Debido a la forma geométrica del instrumento, el espesor de la película atrapada entre la lente y la lámina plana aumenta con la distancia r con respecto al punto de contacto central O y puede calcularse fácilmente en cada punto de la película cuando se conozca el radio de curvatura R de la superficie esférica de la lente plano convexa.

Con relación a la figura 87:

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2$$

Luego:

$$2dR + d^2 = r^2$$

Despreciando d^2 , que es un infinitésimo de segundo orden ($R \gg d$):

$$d = r^2 / 2R$$

Evidentemente en todos los puntos situados a la misma distancia r con respecto al punto de contacto O , la película tendrá el mismo espesor; de manera que los lugares geométricos de los puntos en los cuales la película tiene el mismo espesor serán círculos con centro en O . Dado que las condiciones de interferencia dependen del espesor de la película, las franjas de interferencia constructiva y destructiva serán círculos con centro en O .

Se considera entonces una película de una sustancia de índice de refracción n_2 atrapada entre la lente y la lámina que supone de índice de refracción n_1

4.3.25. Difracción de Fraunhofer en una rendija. En la sección anterior se ha estudiado el patrón de difracción producido por una red formada por un número enorme de rendijas paralelas. Cada una de estas rendijas se ha supuesto muy estrecha de forma que actúe como un foco puntual emisor de frentes de ondas perfectamente cilíndricos (aunque ahora la anchura de la rendija ya no va a ser cero, se sigue considerando que su longitud es infinita).

Pero qué sucede cuando la rendija no es tan estrecha, aunque siempre manteniendo una anchura que no sea excesivamente grande en comparación con las longitudes de onda que llegan a la rendija ya que de lo contrario no habría difracción.

Se considera el caso de una única rendija de anchura a pequeña pero no despreciable que está iluminada perpendicularmente por una luz puntual monocromática coherente (por ejemplo, la de un láser) de longitud de onda λ . Esta rendija difracta la luz en todas las direcciones y nosotros se observa la luz que llega desde una dirección θ . Como ahora la rendija no es tan estrecha, la difracción que provoca, aunque se sigue propagando en todas las direcciones ya no es con frentes de onda cilíndricos. De acuerdo con el Principio de Huygens, se supone que dentro de la anchura de la rendija ``caben'' muchos (infinitos) focos emisores puntuales de frentes de ondas cilíndricos que al superponerse unos con otros dan como resultado el frente de onda de la luz difractada por la rendija.

Puesto que la luz que ilumina la rendija es coherente, estos focos emisores están en fase unos con otros; y, repitiendo, la luz que nos llegue a un punto determinado será el resultado de la interferencia entre las ondas emitidas en cada foco contenido dentro del ancho de la rendija. Notar que ahora cada uno de los focos puntuales emisores de ondas cilíndricas no está en diferentes rendijas infinitesimalmente estrechas (como era el caso de la red de difracción) sino dentro de una sola rendija de anchura no despreciable.

Para facilitar más el estudio de este caso se va a considerar que el punto donde se observa la imagen está muy alejado de la rendija, para que así se pueda considerar que los rayos, que van a parar e interfieren en el punto donde se coloca el ojo o el detector, sean prácticamente paralelos. Tal caso se denomina difracción de Fraunhofer para una rendija.

Supóngase que la dirección θ bajo la que llegan los rayos cumple la condición $a \operatorname{sen} \theta = \lambda$ (Fig. 88): en tal caso se ve claramente que el rayo difractado justo en el borde superior de la rendija interfiere destructivamente (=está desfasado en media longitud de onda) con el rayo difractado en la mitad de la rendija; y este rayo a su vez interfiere destructivamente con el rayo difractado en el borde inferior de la rendija.

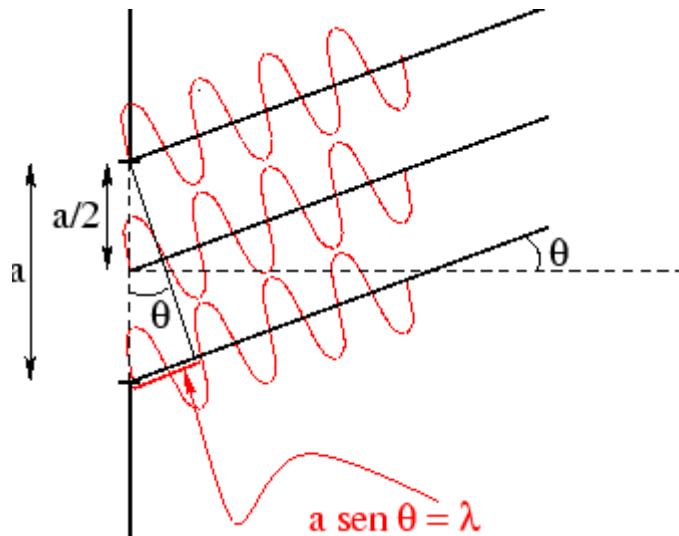


Figura 88. Interferencia producida por un haz de luz

De ello se deduce que en la dirección θ considerada habrá un cero en la intensidad de la luz difractada. Si ahora se considera otro ángulo θ' que cumpla $a \operatorname{sen} \theta' = 2\lambda$, se tendrá un caso similar: el rayo difractado en el

$$a \operatorname{sen} \theta = m\lambda$$

orde superior interfiere destructivamente con el rayo difractado una distancia $a/4$ más abajo; este segundo rayo interfiere destructivamente con el rayo difractado en la mitad de la rendija; éste a su vez, destructivamente con el rayo difractado una distancia $a/4$ más abajo; y finalmente, este último rayo interfiere destructivamente con el rayo difractado en el borde inferior. Generalizando, la condición de intensidad cero para la difracción de luz monocromática por una rendija de anchura a es

$$a \operatorname{sen} \theta|_{\text{intensidad}0} = m\lambda \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (221)$$

Caso especial es el ángulo $\theta = 0$: en tal caso la discusión precedente ya no se cumple puesto que ya no hay ningún desfase entre los rayos que salen de cada foco emisor dentro de la anchura de la rendija. Por ello, para $\theta = 0$ habrá un máximo en la intensidad del patrón de interferencia que se forme en el punto de observación; este máximo se llama máximo central.

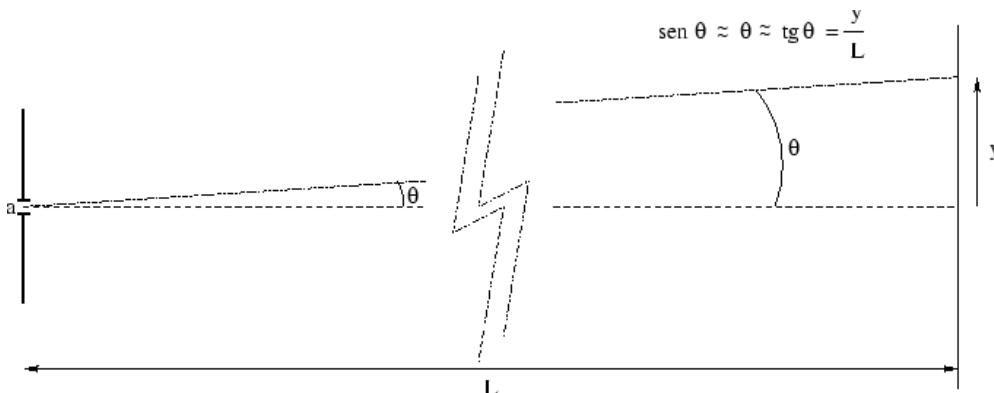


Figura 89. Difracción de Fraunhofer

En la mayoría de los casos cuando se estudia la difracción de Fraunhofer, la situación es la representada en la figura 89, en la que se está observando el patrón de interferencia sobre una pantalla muy alejada de la rendija. El ángulo θ , en el que llegan los rayos que van a interferir en un punto a una distancia y del máximo

central, es lo suficientemente pequeño para poder aproximar su seno por su tangente, con lo que las posiciones y_m sobre la pantalla para intensidad nula es, según la ecuación (221).

$$m\lambda = a \operatorname{sen} \theta \Big|_{\text{intensidad } 0} \approx a \frac{y_m}{L} = m\lambda \Rightarrow y_m \Big|_{\text{intensidad } 0} = m \frac{\lambda}{a} \cdot L \quad (222)$$

Importante. No confundir la rendija única de anchura a , que es lo que se está viendo, con la red de difracción, que está formada por muchísimas rendijas siendo la anchura de cada rendija prácticamente cero. Mientras que $a \operatorname{sen} \theta = m\lambda$ (con m entero *distinto de cero*) indica los ángulos para intensidad **cero** en la difracción de Fraunhofer de **una** única rendija, la relación $d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$ (con m entero *cualquiera*) da los ángulos para **máximo** en una **red** de difracción.

La discusión anterior para la difracción de Fraunhofer en una única rendija ha sido, aunque correcta, sólo cualitativa: de hecho, a pesar de saber que dentro de la anchura de la rendija hay infinitos focos emisores de ondas cilíndricas, para la condición de interferencia completamente destructiva sólo se ha considerado tres focos (extremos superior, centro y extremo inferior). Esto es así ya que lo mismo va a ocurrir con un foco un poco por debajo del extremo superior y su correspondiente foco desplazado en la misma distancia por debajo del punto medio. Aun así la discusión anterior sólo nos ha permitido obtener los puntos de intensidad cero, y el máximo central para $\theta = 0$. Pero la intensidad para otros ángulos que no sean ni cero ni que cumplan la condición (3) hay que obtenerla por un procedimiento más preciso, y su resultado es

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{2\pi a \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \right)} \right)^2, \quad (223)$$

donde I_0 es la intensidad del máximo central. La deducción de esta fórmula se propone como ejercicio en seis sencillos pasos más adelante. Ahora se ve qué conclusiones se pueden deducir de (223).

En primer lugar, el resultado cualitativo (221) sigue siendo completamente válido: para $\theta \neq 0$ se cumple que la intensidad es cero para

$$\theta = 0$$

$$(\delta = 0)$$

$$E_0$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \beta \operatorname{sen} \alpha$$

$$\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} d \operatorname{sen} \theta$$

$$I_0 = E_0^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\theta)$$

$$E = \frac{E_0}{N} \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

$$\operatorname{sen} \delta = \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i}$$

$$y = 20, 40, \dots mm$$

$$\theta \neq 0$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2$$

$$e^{i\delta} = \cos \delta + i \operatorname{sen} \delta$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right) \underset{\theta \approx 0}{\approx} \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}\right)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(\theta \neq 0) = I_0 \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}}{\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2}} \right)^2 = 0$$

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \text{ o equivalentemente para } a \operatorname{sen}\theta = m\lambda \text{ con } m=1, 2, 3, \dots$$

Para $\theta=0$ se cumple que la intensidad es la máxima posible, esto es, la intensidad I_0 : para valores de θ que tiendan a cero, el seno que aparece en (223) se puede aproximar por el ángulo con lo que

$$en \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin \theta}{2} \right)^{\theta \approx 0} \approx \left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin \theta}{2} \right)$$

$$I(\theta = 0) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} I_0 \left(\frac{\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin \theta}{2}}{\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin \theta}{2}} \right)^2 = I_0 \quad (224)$$

Notar que este máximo central para $\theta = 0$ ocurre **independientemente** de la longitud de onda o de la anchura de la rendija.

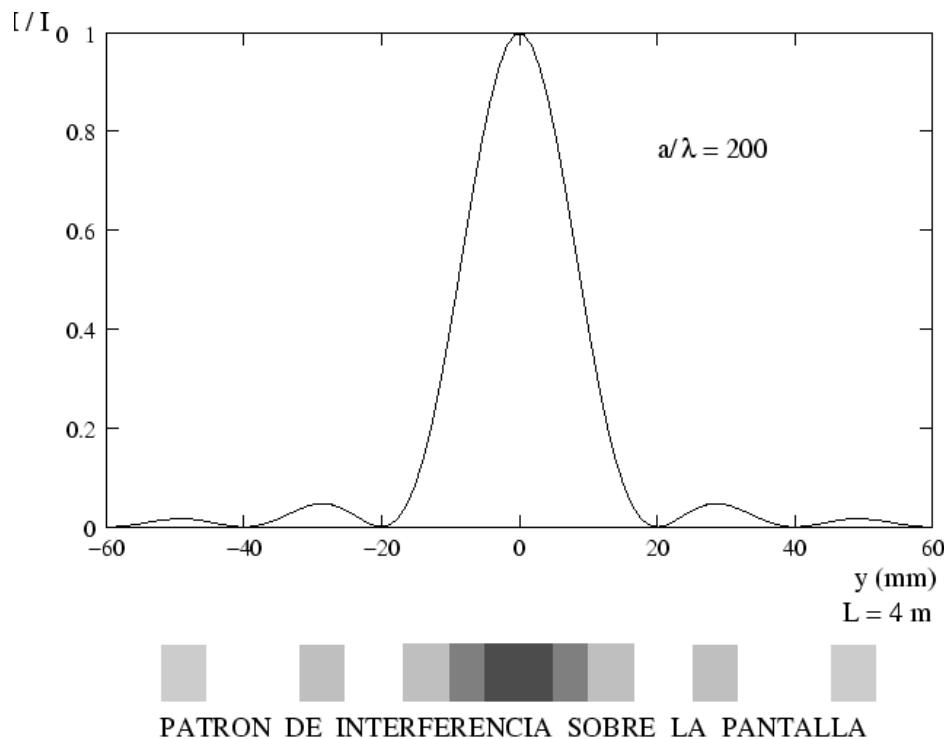


Figura 90. Interferencia sobre una pantalla

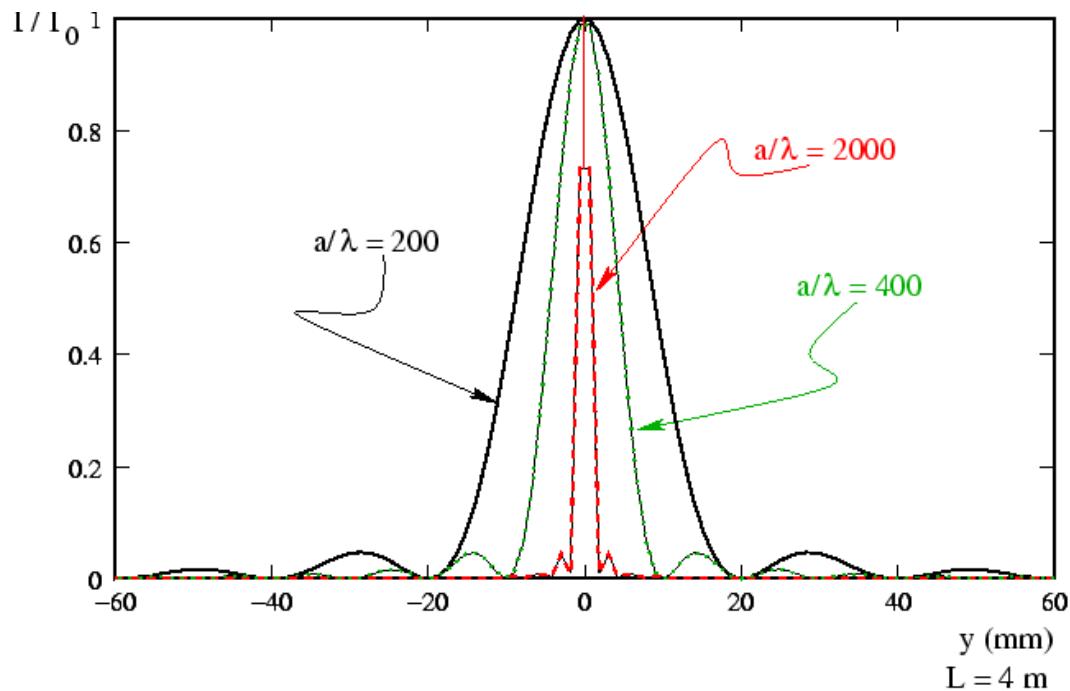


Figura 91. Patrón de interferencia por una rendija

Como se ve de la ecuación (223), la intensidad en un punto sobre la pantalla depende del ángulo θ que forme tal punto con la perpendicular a la rendija. Para un montaje como en la figura 90, con $L=4$ metros y con $a/\lambda = 200$, se observa en la pantalla un patrón de interferencia para la difracción por una rendija en la forma de la figura 91. Los mínimos de intensidad cero ocurren, según la ecuación (222), para $y = 20, 40, \dots \text{mm}$

Sin embargo, la intensidad no sólo depende del ángulo sino también de la anchura de la rendija, como se ve en la figura 91, para tres valores crecientes de la anchura de la rendija frente a la longitud de onda de la luz monocromática que ilumina la rendija. Notar que a medida que aumenta la anchura de la rendija el patrón decae a una única mancha puntual central: el punto que corresponde a la fuente puntual coherente (por ejemplo, el láser) que iluminaba la rendija. Esta propiedad se deriva directamente de la ecuación (223): salvo para el ángulo $\theta = 0$ que como ya se sabe corresponde a la máxima intensidad independientemente de la anchura de la rendija -- el límite de a tiendiendo a infinito produce

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(\theta \neq 0) = I_0 \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda}}{\frac{2\pi a \operatorname{sen}\theta}{\lambda} + 2} \right)^2 = 0$$

ya que el seno como mucho vale uno mientras que el denominador diverge a infinito (para $\theta \neq 0$). Luego

$$\lim_{a \rightarrow \infty} I(\theta) = \begin{cases} I_0 & \theta=0 \\ 0 & \text{cualquier } \theta \neq 0 \end{cases} \quad (225)$$

Este resultado es lógico, ya que como se sabe desde el comienzo, la difracción es tanto más clara cuanto más pequeña sea la anchura de la rendija frente a la longitud de onda.

Deducción de la expresión (225) en seis pasos

En clase de teoría ya habrás visto que una manera gráfica de visualizar la interferencia de muchas ondas es utilizando fasores. En el fondo estos fasores no es otra cosa que el representar números complejos de módulo unidad. Aunque este sistema es bastante inmediato de entender, aquí vamos a utilizar los números complejos directamente, ya que es más cómodo, rápido y exacto. Por otra parte, los siguientes resultados matemáticos que vas a obtener te pueden ser útiles al sumar funciones trigonométricas.

Paso 1

A partir de la definición de una exponencial compleja $e^{i\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \cos\delta + i\operatorname{sen}\delta$, con $i = \sqrt{-1}$, demostrar que el número complejo $z = e^{i\delta}$ tiene módulo 1, es decir, que el módulo al cuadrado, definido como zz^* siendo z^* el número complejo que resulta de z al cambiar de signo la parte multiplicada por i , es 1.

Paso 2

Demostrar a partir de $e^{i\delta} = \cos \delta + i \sin \delta$ las siguientes igualdades:

$$\sin \delta = \frac{e^{i\delta} - e^{-i\delta}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos \delta = \frac{e^{i\delta} + e^{-i\delta}}{2} \quad (226)$$

Paso 3

Utilizando la fórmula para una serie finita de razón r ,

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1 - r^N}{1 - r},$$

obtener que

$$1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} = \frac{e^{i\frac{N}{2}\delta}}{e^{i\frac{\delta}{2}}} \frac{e^{i\frac{N}{2}\delta} - e^{-i\frac{N}{2}\delta}}{e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}},$$

y que esto, recordando (226), es igual a

$$1 + e^{i\delta} + e^{i2\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} = e^{i\frac{(N-1)}{2}\delta} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right). \quad (227)$$

Con el resultado del Paso 1, ver que el módulo al cuadrado de la anterior

ecuación (227) es igual a $\left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right)^2$. En los siguientes pasos veremos que

este último resultado es precisamente la intensidad de la luz que llega a la pantalla infinitamente alejada de una rendija en la que cabe un número finito N de focos emisores coherentes de frentes de onda cilíndricos

Paso 4

A partir de la definición $e^{i\delta} = \cos \delta + i \sin \delta$ también se puede escribir

$$1 + e^{i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} = 1 + \cos \delta + \dots + \cos((N-1)\delta) \\ + i \sin \delta + \dots + i \sin((N-1)\delta)$$

donde en la primera línea son todos términos reales mientras que en la segunda línea son todos imaginarios. Por ello, tomando la parte real y la parte imaginaria por separado del resultado (227), demostrar las siguientes relaciones:

$$1 + \cos \delta + \dots + \cos((N-1)\delta) = \cos\left(\frac{(N-1)\delta}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right), \quad (228)$$

$$\sin \delta + \dots + \sin((N-1)\delta) = \sin\left(\frac{(N-1)\delta}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right).$$

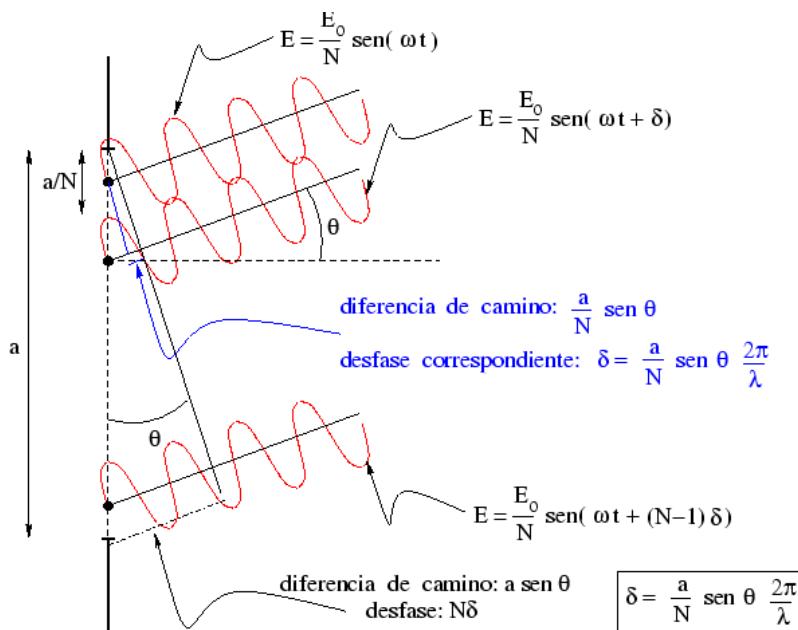


Figura 92. Rendija dividida en pequeños segmentos de igual longitud

Paso 5

Ahora ha llegado ya el momento de aplicar los resultados matemáticos anteriores al problema de la refracción de Fraunhofer para una única rendija. Se considera por sencillez que la rendija de anchura a está dividida en N segmentos pequeños de igual longitud y que cada segmento contiene sólo un foco puntual emisor de ondas cilíndricas; en el siguiente paso se verá como tomar el límite en el que N tiende a infinito de forma que los focos puntuales están infinitesimalmente próximos.

Como se ve en la figura 92, para una dirección θ en la que llegan los rayos paralelos de cada uno de los focos emisores, el desfase entre dos rayos consecutivos es $\delta = \frac{a}{N} \operatorname{sen} \theta \frac{\lambda}{2\pi}$: así si tomamos que $E = \frac{E_0}{N} \operatorname{sen}(\omega t)$ es la onda difractada por el foco emisor localizado en el primer segmento de longitud a/N , entonces la onda emitida por el siguiente foco está descrita por $E = \frac{E_0}{N} \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$ y así sucesivamente; el significado de E_0 se verá un poco más adelante. Notar al aumentar el número de divisiones de la rendija para llegar finalmente a una distribución continua de focos emisores, el desfase y la amplitud de cada onda disminuye.

Sobre la pantalla interfieren todas estas ondas que van desfasadas en δ una con la siguiente: utilizando la relación $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ en las funciones seno que contienen algún desfase, se obtiene que la onda resultante de tal interferencia viene dada por

$$E_{\text{resul}} = \frac{E_0}{N} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{E_0}{N} \operatorname{sen}(\omega t) \cos \delta + \dots + \frac{E_0}{N} \operatorname{sen}(\omega t) \cos((N-1)\delta) + \\ + \frac{E_0}{N} \cos(\omega t) \operatorname{sen} \delta + \dots + \frac{E_0}{N} \cos(\omega t) \operatorname{sen}((N-1)\delta),$$

y por tanto, teniendo en cuenta los resultados (228) demostrar que

$$E_{\text{resul}} = \frac{E_0}{N} \sin(\omega t) \left[\cos\left(\frac{(N-1)\delta}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right] + \\ + \frac{E_0}{N} \cos(\omega t) \left[\sin\left(\frac{(N-1)\delta}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right],$$

o lo que es lo mismo

$$E_{\text{resul}}(\theta) = \left[\frac{E_0}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right] \sin\left(\omega t + \frac{(N-1)\delta}{2}\right). \quad (229)$$

La amplitud de la onda resultante sobre la pantalla es por tanto

$$A(\theta) = \left[\frac{E_0}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\delta\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right) \right] = \frac{E_0}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{N} \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2}\right)} \right). \quad (230)$$

Paso 6

Finalmente tomarás el límite de una distribución continua ($N \rightarrow \infty$) de focos puntuales emisores dentro de la anchura de la rendija, que es la situación real. Puesto que el ángulo en el denominador tiende a cero, se puede sustituir su seno por el ángulo mismo, tal y como se ha hecho en la ecuación (231). Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} A(\theta)$ es igual a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A(\theta) = E_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2}\right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2}\right)} \right), \quad (231)$$

y que

$$E_{\text{resul}}(\theta) = E_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right)} \right) \sin \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right). \quad (232)$$

La intensidad sobre la pantalla, que es el cuadrado del resultado anterior, es entonces igual a la ecuación (233) que queríamos demostrar.

En cuanto al significado de E_0 hay que notar que para el caso $\theta=0$ no hay desfase ($\delta=0$) entre cada uno de los rayos que llegan en perpendicular a la pantalla desde cada uno de los focos emisores:

$$E_{\text{resul}}(\theta = 0) = N \frac{E_0}{N} \sin (\omega t + 0) = E_0 \sin (\omega t), \quad (233)$$

Por ello, E_0 es la amplitud de la onda correspondiente al máximo central $\theta = 0$ para la difracción de Fraunhofer en una rendija. Y por ello también la amplitud de las ondas emitidas por cada foco puntual situado en el segmento de longitud a/N es $\frac{E_0}{N}$, para que así la amplitud total en el centro sea E_0 . Notar que $I_0 = E_0^2$ **no** es la intensidad de la luz del láser que ilumina la rendija.

4.3.26. Difracción de fraunhofer en doble rendija. Para el caso del sistema formado por dos rendijas de anchura a cada una y separadas una distancia d , la extensión de los resultados del caso anterior es directa. Seguimos suponiendo que la distancia a la pantalla es infinita de forma que los rayos difractados por cada rendija son paralelos (Fig. 100).

Para un punto sobre la pantalla donde interfieren estos dos rayos que llegan en una dirección θ , la diferencia de camino entre los dos rayos es $d \sin \theta$.

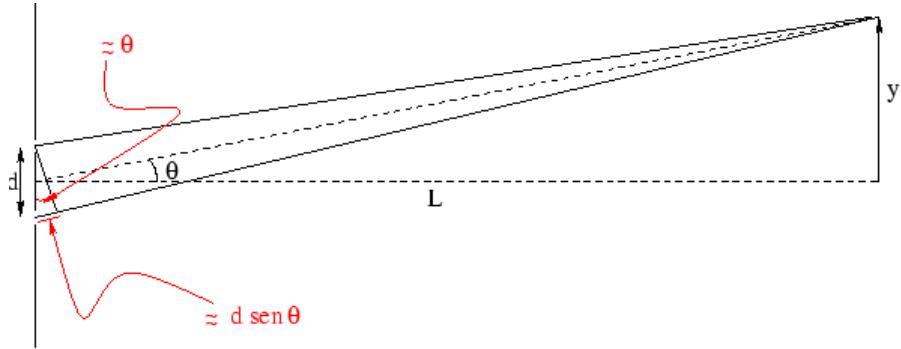


Figura 93. Difracción de Fraunhofer en doble rendija

Y por lo tanto, si la onda difractada en la primera rendija (de anchura no despreciable) viene dada por (232), entonces la onda difractada en la otra rendija estará desfasada en $\delta' = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\text{rend}_1}(\theta) \stackrel{\text{ec. (14)}}{=} E_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right)} \right) \sin \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right), \\ E_{\text{rend}_2}(\theta) = E_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right)} \right) \sin \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} + \delta' \right). \end{array} \right. \quad (234)$$

Puesto que $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ entonces $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \beta \sin \alpha$; y aplicando este resultado con

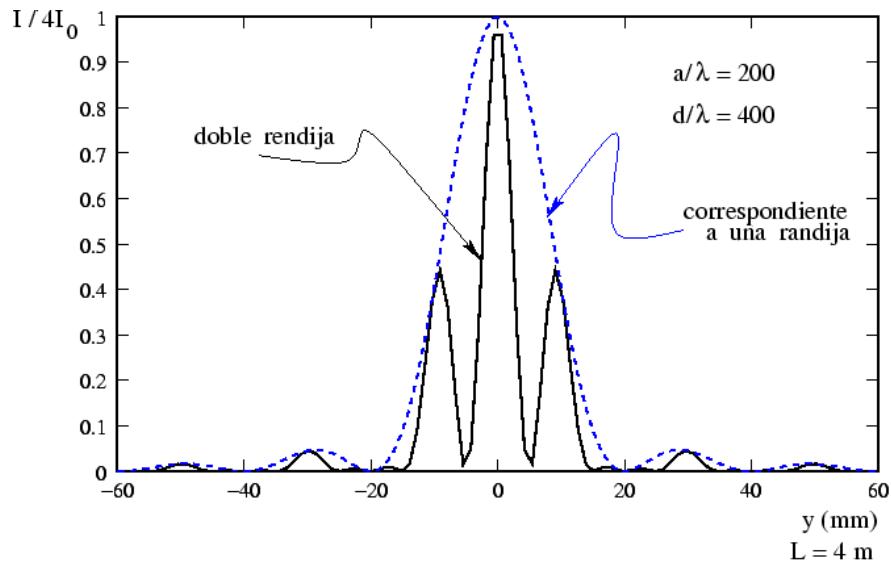
$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} \right) \\ \alpha - \beta = \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} + \delta' \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \left(\omega t + \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2} + \frac{\delta'}{2} \right), \\ \beta = -\frac{\delta'}{2} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \frac{2}{2}. \end{array} \right.$$

a la suma de las dos ondas en (234) se obtiene inmediatamente que la onda sobre la pantalla muy alejada resultante de la interferencia entre los dos rayos difractados en la doble rendija es

$$2E_o \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)}{\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}} \right) \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{2\pi(a+d)}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right) \quad (235)$$

La amplitud es la parte subrayada y la intensidad sobre la pantalla se obtiene de elevar al cuadrado esta parte subrayada

$$I_{\text{doble ren.}}(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right)} \right)^2 \cos^2\left(\frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\sin\theta}{2}\right). \quad (236)$$



$$\sin\theta \approx \frac{y}{L}$$

$$\frac{d}{\lambda} = 400$$

$$(2E_0)^2 = 4I_0$$

Figura 94. Única rendija, máximos de intensidad sobre una pantalla

La representación de la intensidad sobre la pantalla para ángulos muy pequeños, tal que $\operatorname{sen}\theta \approx \frac{y}{L}$ se puede ver en la figura 101, para el caso $L=4$ m, $\frac{a}{2}=200$ y

$\frac{d}{\lambda}=400$. Darse cuenta del factor 4 en la intensidad ya que ahora al tener dos rendijas, a cada una le corresponde una amplitud de máximo central igual a E_0 y por tanto el máximo central resultante tendrá una amplitud de $2E_0$ y una intensidad de $(2E_0)^2=4I_0$.

Es importante notar que para una única rendija los máximos de intensidad sobre la pantalla tienen un ancho más grande que para el montaje experimental con dos rendijas de las mismas dimensiones: comparar la figura 98 para una rendija con la figura 101, para la doble rendija y ver como el máximo central para el primer caso ocupa el espacio sobre la pantalla en el que para la doble rendija cabe el máximo central y un máximos secundarios más a cada lado. Notar además que la distribución de los máximos para la doble rendija quedan ``envueltos'' (=modulados) por la curva correspondiente a la intensidad de la única rendija.

La posición de los mínimos de intensidad cero corresponden a cuando (236) sea cero:

$$\text{intensidad 0 para : } \begin{cases} \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} = \pi, 2\pi, \dots, \\ \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \end{cases}$$

o bien

$$\text{intensidad 0 para : } \begin{cases} a \operatorname{sen}\theta = \lambda, 2\lambda, \dots, \\ d \operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \dots \end{cases} \quad (237)$$

4.3.27. Espectro de emisión y absorción. En determinadas condiciones, los cuerpos emiten energía en forma de radiación. También los cuerpos absorben la radiación que emiten otros cuerpos, asimilando energía.

¿Cómo medir la radiación emitida o la radiación absorbida por los cuerpos?. Un aparato capaz de obtener el espectro de una radiación, es decir, de separar la radiación en sus componentes, se llama un espectroscopio. Si el aparato es capaz de fotografiarla se llama un espectrógrafo, y si es capaz de medirla diremos que se trata de un espectrómetro. Cuando es capaz de medir también la intensidad de la radiación, se llama espectrofotómetro.

La principal emisión de radiación de los cuerpos es la radiación electromagnética en forma de luz visible.

Se dice que el arco iris es el espectro de la luz visible procedente del sol. En el ejemplo del espectro constituido por el arco iris, son las gotas de lluvia y el aire atmosférico lo que hacen de espectroscopio.

La longitud de onda de la radiación puede ser desde muy pequeña, en el caso de la llamada radiación gamma, hasta muy grande en las ondas de radio. Se mide, pues, usando desde nanómetros y ángstroms hasta cientos de metros.

Recordemos que un nanómetro es la milmillonésima parte de un metro ($1\text{ m} = 10^9\text{ nm}$) y que un Ángstrom es la diez mil millonésima parte de un metro ($1\text{ m} = 10^{10}\text{ A}$), por lo que un nanómetro equivale a 10 Ángstrom ($1\text{ nm} = 10\text{ A}$)

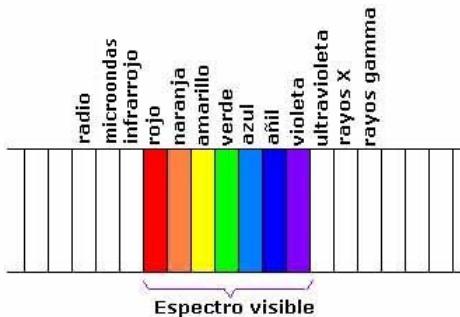
La luz que recibimos del Sol es radiación electromagnética que se desplaza a 300.000 kms/s, en su totalidad, pero la longitud de onda no es la misma en todos los fotones luminosos, sino que varía entre los 4000 Å y los 7000 Å, aproximadamente, o lo que es lo mismo, entre los 400 nm y los 700 nm. La luz blanca se descompone, en definitiva, en un espectro de diferentes bandas coloreadas, cada una definida por una longitud de onda distinta. Así, la luz de menor longitud de onda es la luz violeta, que es de alrededor de unos 4000 Ángstroms, y la luz de mayor longitud de onda es la luz roja, que es de alrededor de unos 7000 Ángstroms.

Sin embargo, hay radiaciones de mayor y también de menor longitud de onda, es decir, que tienen una longitud de onda inferior a 4000 Angstroms y que tienen una longitud de onda superior a los 7000 Angstroms.

Las radiaciones que van desde el violeta al rojo se dice que forman el espectro visible, pues procede de la descomposición de la luz blanca.

Las radiaciones de longitud de onda inferior al violeta se llaman radiación ultravioleta, rayos X, y rayos gamma, por orden decreciente en la longitud de onda.

Las radiaciones de longitud de onda superior al rojo son las denominadas infrarrojo, microondas y ondas de radio, por orden creciente en longitud de onda.



EL ESPECTRO DE LA RADIACION

TIPO DE RADIACION	Intervalos de las longitudes de onda
Rayos Gamma	inferiores a 10^{-2} nanómetros
Rayos X	entre 10^{-2} nanómetros y 15 nanómetros
Ultravioleta	entre 15 nanómetros y $4 \cdot 10^2$ nanómetros
ESPECTRO VISIBLE	entre $4 \cdot 10^2$ nanómetros y $7,8 \cdot 10^2$ nanómetros (4000 Angstroms y 7800 Angstroms)
Infrarrojo	entre $7,8 \cdot 10^2$ nanómetros y 10^6 nanómetros
Región de Microondas	entre 10^6 nanómetros y $3 \cdot 10^8$ nanómetros
Ondas de Radio	mayores de $3 \cdot 10^8$ nanómetros

$$(1 \text{ metro} = 10^2 \text{ cms} = 10^3 \text{ mms} = 10^9 \text{ nanómetros} = 10^{10} \text{ angstroms})$$

Series espectrales.

Las diferentes líneas que aparecieron en el espectro del hidrógeno se podían agrupar en diferentes series cuya longitud de onda es más parecida:

- Serie **Lyman**: zona ultravioleta del espectro.
- Serie **Balmer**: zona visible del espectro.
- Serie **Paschen**: zona infrarroja del espectro.
- Serie **Brackett**: zona infrarroja del espectro.
- Serie **Pfund**: zona infrarroja del espectro.

Ley de Rydberg .

La relación entre las longitudes de onda de las distintas rayas del espectro del hidrógeno viene dada por la expresión:

$$1/\lambda = R_H \cdot [(1/n_{12}) - (1/n_{22})]$$

Donde n_1 y n_2 son números naturales, cumpliéndose siempre que $n_2 > n_1$, con lo que el paréntesis queda positivo. R es una constante llamada constante de Rydberg cuyo valor es: $R = 1,0968 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$.

- Si $n_1 = 1$; $n_2 = 2, 3, 4, 5, \dots$ Serie **Lyman**
- Si $n_1 = 2$; $n_2 = 3, 4, 5, 6, \dots$ Serie **Balmer**
- Si $n_1 = 3$; $n_2 = 4, 5, 6, 7, \dots$ Serie **Paschen**
- Si $n_1 = 4$; $n_2 = 5, 6, 7, 8, \dots$ Serie **Brackett**
- Si $n_1 = 5$; $n_2 = 6, 7, 8, 9, \dots$ Serie **Pfund** .

Serie	n_f	n_i	Región del espectro
Lyman	1	2,3,4,...	Ultravioleta
Balmer	2	3,4,5,...	Visible y UV
Paschen	3	4,5,6,...	Infrarrojo
Brackett	4	5,6,7,...	Infrarrojo

Bohr, basándose en la interacción electrostática y en las leyes del movimiento de Newton demostró que la energía que tiene el electrón en el átomo de hidrógeno viene dado por:

$$E_n = -R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

Donde R_H la constante de Rydberg tiene un valor de: $R_H = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
La variación de energía de una transición vendrá dada, según la ecuación de Planck por:

$$\Delta E = E_f - E_i = h \cdot v = h \cdot \frac{c}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

Relación entre la energía de un fotón (quantum de energía electromagnética) y la frecuencia de la onda electromagnética:

Ecuación de Planck:

$$E = h \cdot v = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

donde h es la constante de Planck: $h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

v frecuencia

c velocidad de la luz en el vacío

λ longitud de onda

E energía de la partícula

4.3.28 Espectro de emisión. Cuando a los elementos en estado gaseoso se les suministra energía (descarga eléctrica, calentamiento...) éstos emiten radiaciones de determinadas longitudes de onda.

Todos los cuerpos no tienen el mismo espectro de emisión. Esto es, hay cuerpos que emiten en el infrarrojo, por ejemplo, y otros cuerpos no.

Estas radiaciones dispersadas en un prisma de un espectroscopio se ven como una serie de rayas, y el conjunto de las mismas es lo que se conoce como espectro de emisión.

Es un proceso de emisión de energía, pues $n_f < n_i$. Cómo $n_i = 2$, esta transición da lugar a una líneapectral de la serie de Balmer en la región del visible.

Böhr, basándose en la interacción electrostática y en las leyes del movimiento de Newton demostró que la energía que tiene el electrón en el átomo de hidrógeno viene dado por:

$$E_n = -R_H \cdot \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

La variación de energía de una transición vendrá dada, según la ecuación de Plank por:

Donde R_H la constante de Rydberg tiene un valor de $2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$

$$\Delta E = E_f - E_i = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_f^2} \right)$$

Sustituyendo obse tiene que:

$$\Delta E = 2,18 \cdot 10^{-18} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{2^2} \right) = -4,58 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Con lo que la longitud de onda correspondiente a dicha transición, vendrá dada por:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c \cdot h}{\Delta E} = \frac{(3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})}{4,58 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 4,34 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 4,34 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \left(\frac{10^9 \text{ nm}}{1 \text{ m}} \right) = 434 \text{ nm}$$

Solución: $\lambda = 434 \text{ nm}$

La cual corresponde a la región visible de la radiación electromagnética.

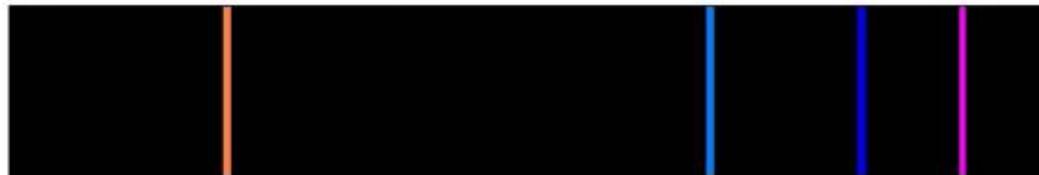


Figura 95. Espectro de emisión del hidrógeno

Diremos que el hidrógeno emite, dentro del visible, en una cierta longitud de onda del naranja (6560 Å), en otra del azul (4858 Å), otra del añil (4337 Å) y otra del violeta (4098 Å).

Espectro de absorción

Los cuerpos absorben radiación emitida desde otros cuerpos, eliminando del espectro de radiación que reciben aquellas bandas absorbidas, que quedan de color negro. Son lo que se llaman “rayas negras” o simplemente “rayas” del espectro.

También ocurre con la absorción, que unos cuerpos absorben la radiación de unas determinadas longitudes de onda y no absorben la radiación de otras longitudes de onda, por lo que cada cuerpo, cada elemento químico en realidad, tiene su propio espectro de absorción, correspondiéndose con su espectro de emisión, cual si fuera el negativo con el positivo de una película.

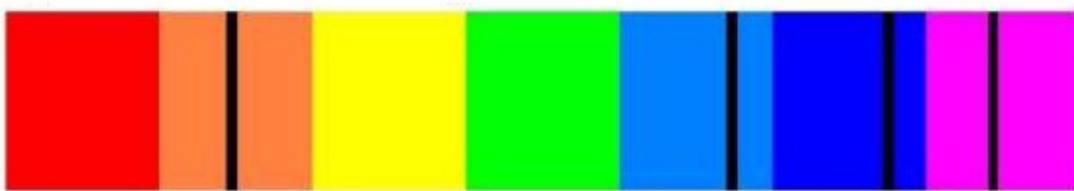


Figura 96. Espectro de absorción del hidrógeno.

Las líneas del espectro de absorción de una muestra dada ocupan posiciones que se corresponden con algunas de las líneas del espectro de emisión de esa misma muestra. Como sucede con los espectros de emisión, los de absorción son también característicos de cada elemento químico; su análisis permite, por tanto, la identificación del elemento que en forma gaseosa se interpuso entre la fuente de luz blanca y el espectroscopio.

El físico alemán Fraunhofer fue el primero en detectar un espectro de absorción. Analizando la luz solar observó la presencia de más de setecientas líneas oscuras distribuidas a lo largo del espectro visible. Del análisis de este espectro pudo identificarse un grupo de líneas que no correspondía a ningún elemento conocido, deduciéndose así la existencia en la atmósfera solar de un nuevo elemento gaseoso, el helio, que en griego significa Sol.

APLICACIÓN DE LA FÓRMULA DE RYDBERG

Sabiendo que la raya H_b de la serie de Balmer del espectro del hidrógeno corresponde a una transición entre el nivel $n_2 = 4$ y $n_1 = 2$, a) calcular la longitud de onda, la frecuencia y el número de ondas correspondientes. b) Determinar, a

partir de los resultados anteriores, en qué zona del espectro visible aparecerá dicha línea.

a) De acuerdo con la fórmula de Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = 109\,677,6 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

En este caso la línea H corresponde a la transición ($n_2 = 4$) ($n_1 = 2$), por lo que sustituyendo en la anterior ecuación resulta, para el número de ondas $1/\lambda$:

$$\frac{1}{\lambda} = 109\,677,6 \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} \right) = 20\,564,55 \text{ cm}^{-1}$$

Para la longitud de onda λ :

$$\lambda = 4,861 \times 10^{-7} \text{ m} = 4\,861 \text{ Å}$$

Para la frecuencia f :

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4,86 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 6,17 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

El espectro visible está comprendido entre 4 000 y 7 000 Å, siendo la menor longitud de onda correspondiente al violeta y la mayor al rojo. Dado que el espectro completo consta de siete colores (rojo, amarillo, anaranjado, verde, azul, añil y violeta) que varían de uno a otro de una forma continua, cada color corresponderá aproximadamente a una variación en λ de

$$\frac{7\,000 - 4\,000}{7} = 428 \text{ Å}$$

Por tanto, la línea de 4 861 Å estará situada en la zona azul.

4.3.29. Mecánica cuántica. La mecánica cuántica es una de las ramas principales de la física, y uno de los más grandes avances del siglo veinte para el conocimiento humano, que explica el comportamiento de la materia y de la energía. Para la comprensión, emplearemos el comportamiento de una partícula dentro de un potencial: caja de potencial y pozo de potencial.

La caja de potencial

En física, la **partícula en una caja**, es un problema muy simple que consiste de una sola partícula que rebota dentro de una caja inmóvil de la cual no puede escapar, y donde no pierde energía al colisionar contra sus paredes. En mecánica clásica, la solución al problema es trivial: la partícula se mueve en una línea recta a una velocidad constante hasta que rebota en una de las paredes. Al rebotar, la velocidad cambia de sentido cambiando de signo la componente paralela a la dirección perpendicular a la pared y manteniéndose la velocidad paralela a la pared, sin embargo, no hay cambio en el módulo de la misma velocidad.

Descripción cuántica del problema

El problema se vuelve muy interesante cuando se intenta resolver dentro de la mecánica cuántica, ya que es necesario introducir muchos de los conceptos importantes de esta disciplina para encontrar una solución. Sin embargo, aun así es un problema simple con una solución definida. Este artículo se concentra en la solución dentro de la mecánica cuántica.

El problema puede plantearse en cualquier número de dimensiones, pero el más simple es el problema unidimensional, mientras que el más útil es el que se centra en una caja tridimensional. En una dimensión, se representa por una partícula que existe en un segmento de una línea, siendo las paredes los puntos finales del segmento.

En términos de la física, la partícula en una caja se define como una partícula puntual, encerrada en una caja donde no experimenta ningún tipo de fuerza (es decir, su energía potencial es constante, aunque sin pérdida de generalidad se puede considerar que vale cero). En las paredes de la caja, el potencial aumenta hasta un valor infinito, haciéndola impenetrable. Usando esta descripción en términos de potenciales nos permite usar la ecuación de Schrödinger para determinar una solución.

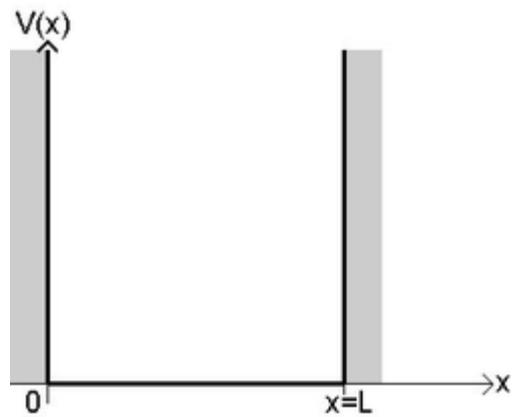


Figura 97. Esquema del potencial para la caja unidimensional.

Como se menciona más arriba, si estuviéramos estudiando el problema bajo las reglas de la mecánica clásica, deberíamos aplicar las leyes del movimiento de Newton a las condiciones iniciales, y el resultado sería razonable e intuitivo. En mecánica cuántica, cuando se aplica la ecuación de Schrödinger, los resultados no son intuitivos. En primer lugar, la partícula sólo puede tener ciertos niveles de energía específicos, y el nivel cero no es uno de ellos. En segundo lugar, las probabilidades de detectar la partícula dentro de la caja en cada nivel específico de energía no son uniformes - existen varias posiciones dentro de la caja donde la partícula puede ser encontrada, pero también hay posiciones donde es imposible hacerlo. Ambos resultados difieren de la manera usual en la que percibimos al mundo, incluso si están fundamentados por principios extensivamente verificados a través de experimentos.

Caja monodimensional

La versión más sencilla se da en la situación idealizada de una "caja monodimensional", en la que la partícula de masa m puede ocupar cualquier posición en el intervalo $[0, L]$. Para encontrar los posibles estados estacionarios es necesario plantear la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo en una dimensión para el problema. Considerando que el potencial es cero dentro de la caja e infinito fuera, la ecuación de Schrödinger dentro de la caja es:

$$(238) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad \text{con } 0 < x < L$$

con las siguientes condiciones de contorno, consecuencia que la función de onda se anula fuera de la caja

$$(239) \quad \begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(L) = 0 \end{cases}$$

y donde

\hbar es la Constante reducida de Planck,

m es la masa de la partícula,

$\psi(x)$ es la función de onda estacionaria independiente del tiempo¹ que queremos obtener (autofunciones) y

E es la energía de la partícula (autovalor).

Las autofunciones y autovalores de una partícula de masa m en una caja monodimensional de longitud L son:

(240)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}n^2, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

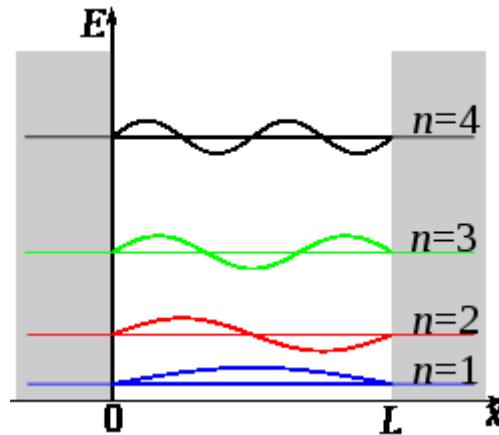


Figura 98. Niveles de energía (líneas discontinuas) y funciones de onda (líneas continuas) de la partícula en una caja monodimensional.

Nótese que sólo son posibles los niveles de energía "cuantizados". Además, como n no puede ser cero (ver más adelante), el menor valor de la energía tampoco puede serlo.

Esta energía mínima se llama energía del punto cero y se justifica en términos del principio de incertidumbre. Debido a que la partícula se encuentra restringida a moverse en una región finita, la varianza de la posición tiene un límite superior (la longitud de la caja, L). Así, de acuerdo con el principio de incertidumbre, la varianza del momento de la partícula no puede ser cero y, por tanto, la partícula debe tener una cierta cantidad de energía que aumenta cuando la longitud de la caja L disminuye.

Deducción

A continuación ilustramos la deducción de los anteriores valores de la energía y forma de las funciones de onda por su valor didáctico. La ecuación de Schrödinger anterior es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes, cuya solución general es:

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), \quad \text{donde } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Donde, A y B son, en general, números complejos que deberán escogerse para cumplir las condiciones de contorno. Por otra parte el número k se conoce como número de onda y es un número real, al serlo E . Por otro, lado la solución particular del problema, se obtiene imponiendo las condiciones de contorno apropiadas, lo que permite obtener los valores de A y B . Si se considera la primera de las condiciones de contorno, $\psi(0) = 0$, entonces $B = 0$ (debido a que $\sin(0) = 0$ y $\cos(0) = 1$). Por tanto, la función de onda debe de tener la forma:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A\sin(kx) \\ \text{y en } x &= L \text{ se obtiene:} \\ \psi(L) &= A\sin(kL) = 0 \end{aligned}$$

La *solución trivial* es $A = 0$, que implica que $\psi = 0$ en cualquier lugar (es decir, la partícula no está en la caja). Si $A \neq 0$ entonces $\sin(kL) = 0$ si y sólo si:

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z}^+$$

El valor $n = 0$ se elimina porque, en este caso, $\psi = 0$ en cualquier lugar, lo que corresponde con el caso en el que la partícula no está en la caja. Los valores negativos también se omiten, debido a que la función de onda está definida salvo una fase consecuencia de que la densidad de probabilidad, representada por el cuadrado de la función de onda $\psi^* \psi$, es independiente del valor de dicha fase. En este caso, los valores negativos de n suponen un mero cambio de signo de $\sin(nx)$, por tanto, no representan nuevos estados.

El siguiente paso es obtener la constante A para lo cual se tiene que normalizar la función de onda. Como se sabe que la partícula se encuentra en algún lugar del espacio, y como $|\psi(x)|^2$ representa la probabilidad de encontrar la partícula en un punto particular del espacio (densidad de probabilidad), la integral de la densidad de probabilidad en todo el espacio x debe de ser igual a 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = |A|^2 \int_0^L \sin^2(kx) dx = |A|^2 \frac{L}{2} \quad \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

De aquí se deduce que A es cualquier número complejo con valor absoluto $\sqrt{(2/L)}$; todos los valores diferentes de A proporcionan el mismo estado físico, por lo que se elegirá por simplicidad el valor real. $A = \sqrt{(2/L)}$

Por último, sustituyendo estos resultados en la solución general obse tiene el conjunto completo de autofunciones y energías para el problema de la partícula en una caja monodimensional, resumido en (240).

Escalón de potencial

El escalón de potencial consiste en una región $x < 0$ en la que la energía potencial es nula, seguida de una región $x > 0$ en la que la energía potencial es constante y de valor E_0 .

Desde el punto de vista físico ningún potencial presenta tal cambio abrupto o rápido; es más razonable esperar que el cambio sea suave. Ver figura 106.

Un ejemplo claro, es el de los electrones libres en un metal, donde experimentan este cambio suave en las vecindades de la superficie del mismo. Sin embargo, el escalón de potencial no físico es matemáticamente más simple y los resultados son aplicables a los casos reales como una indicación de la situación física. Es necesario considerar separadamente los casos en los cuales $E < E_0$ Y $E > E_0$.

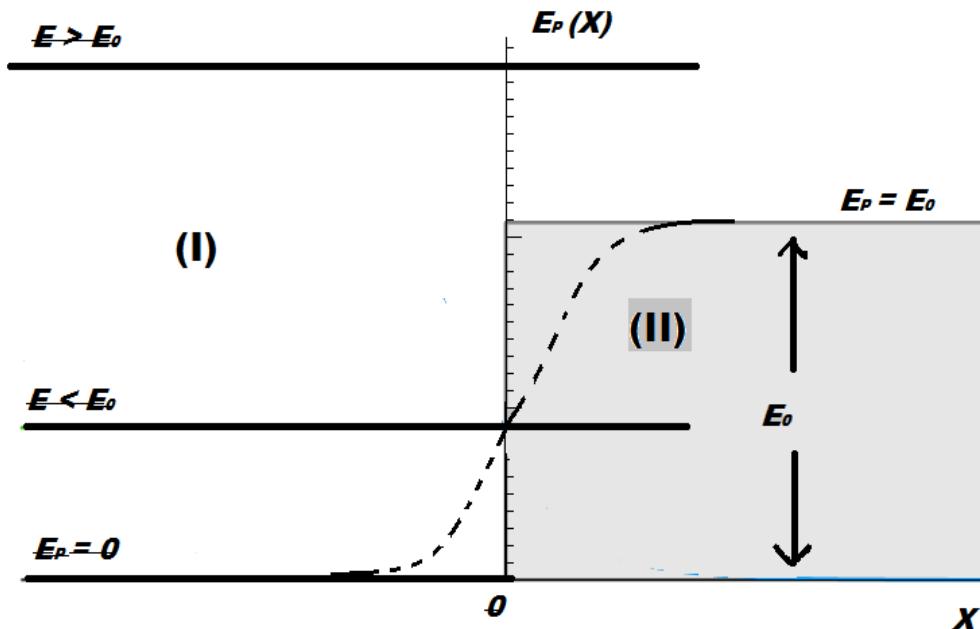


Figura 99. Escalón de potencial. La región prohibida es la región sombreada

- a) $E < E_0$. En este caso, la mecánica clásica nos dice que la partícula no puede estar a la derecha de 0, entonces la energía $E_k = E - E_0$ sería negativa, lo que es imposible. De este modo $x > 0$ es una región clásicamente prohibida si $E < E_0$. En el caso de los electrones libres en un metal, esto significa que aquellos electrones con $E < E_0$ no pueden escapar del metal sino que cuando llegan a su superficie son devueltos al interior.

Para obtener $\psi(x)$ para un escalón de potencial se debe escribir la ecuación de Schrödinger para las regiones $x < 0$ (o I) y para $x > 0$ (o II). Para la región (I) en la cual $E_p = 0$, quedando

$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi_1 = 0$, para una partícula libre y cuya solución general está dada por la ecuación (241)

$$\Psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad \text{con } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (241)$$

Tal como está escrita, esta ecuación representa una partícula incidente (e^{ikx}) y una reflejada (e^{-ikx}). Se está asignando una amplitud diferente a a la partícula reflejada para tomar en cuenta cualquier haz incidente como consecuencia de la reflexión en $x = 0$. Para la región (II), en el cual $E_p(x) = E_0$, la ecuación de Schrödinger es

$$\frac{d^2\Psi_2}{dx^2} + \frac{2m(E - E_0)}{\hbar^2} \Psi_2 = 0$$

$$\Psi_2(x) = Ce^{ik'x} \quad \text{con } k'^2 = \frac{2m(E - E_0)}{\hbar^2} \quad (242)$$

La solución de esta ecuación diferencial es una combinación de las funciones e^{ax} y e^{-ax} como se puede verificar por sustitución directa. Pero la función creciente en e^{ax} no es aceptable porque se sabe que la amplitud del campo es muy pequeña en la región (II); experimentalmente se sabe que no es probable encontrar una partícula en esa región (recordar nuestra proposición de que, desde el punto de vista clásico eso es imposible). Por consiguiente, se debe usar solo la función exponencial decreciente e^{-ax} ó

$$\Psi_2(x) = Ce^{-ax}$$

El hecho de que $\Psi_2(x)$ sea diferente de cero significa que hay alguna probabilidad de encontrar la partícula en la región (II). Esto constituye una de las más interesantes peculiaridades que distinguen la mecánica cuántica de la mecánica clásica: en la mecánica cuántica, la región en la cual una partícula puede moverse no tiene porque ser, en general, de fronteras bien definidas sin embargo, como $\Psi(x)$ está dada por una exponencial negativa (o decrecientes) la probabilidad de encontrar la partícula con $E < E_0$ a la derecha del escalón de potencial (esto es,

donde $x > 0$) disminuye rápidamente cuando x crece . en general, por lo tanto, la partícula no puede penetrar mucho dentro de la región prohibida clásicamente . Se puede determinar las constantes A , B y C aplicando la condición de continuidad de campo de materia o función de onda para $x = 0$, obviamente es un requisito físico. Esto es, la función de onda debe cambiar suavemente al cruzar el escalón de potencial. Esto requiere que

$$\Psi_1 = \Psi_2 \quad \text{y} \quad \frac{d\Psi_1}{dx} = \frac{d\Psi_2}{dx} \quad \text{para } x = 0$$

Estas condiciones dan $A + B = C$, $ik(A - B) = -\alpha C$, las cuales, a su vez, dan

$$B = \frac{(ik + \alpha)A}{ik - \alpha} \quad \text{Y} \quad C = \frac{2ikA}{ik - \alpha},$$

De modo que

$$\Psi_1(x) = A \left(e^{ikx} + \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} e^{-ikx} \right), \quad \Psi_2(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} A e^{-\alpha x}$$

En la forma que se ha escrito Ψ_1 , la intensidad del campo incidente es $|A|^2$. la intensidad del campo reflejado es

$$|B|^2 = \left| \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} A \right|^2 = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \frac{-ik + \alpha}{-ik - \alpha} |A|^2 = |A|^2.$$

Por consiguiente, ambos campos el incidente y el reflejado tiene la misma intensidad se puede interpretar este resultado diciendo que todas las partículas que alcanzan el escalón de potencial con $E < E_0$ rebotan, incluyendo aquellas que penetran ligeramente en la región (II). Esta interpretación está de acuerdo con la descripción física del proceso.

La función $\Psi_1(x)$ se puede también escribir en la forma equivalente

$$\Psi_1(x) = \frac{A}{ik - \alpha} [(ik - \alpha)e^{ikx} + (ik + \alpha)e^{-ikx}]$$

Y recordando que $e^{\pm ikx} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$, obse tiene después de efectuar la multiplicación.

$$e^{\pm ikx} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx,$$

De este modo, no se toma en cuenta el factor complejo $2ik / (ik - \alpha)$

que multiplica Ψ_1 y Ψ_2 . Se puede representar ambas funciones por las curvas de la figura 107. A mayor energía potencia E_0 , mayor valor para α y más rápido lo función Ψ_2 tiende a cero para $x > 0$ y para una energía dada E . En el límite en que E_0 se hace muy grande, de modo que α a también muy grande, la función Ψ_2 es idénticamente igual a cero ($\Psi_2 \equiv 0$) y ninguna partícula puede

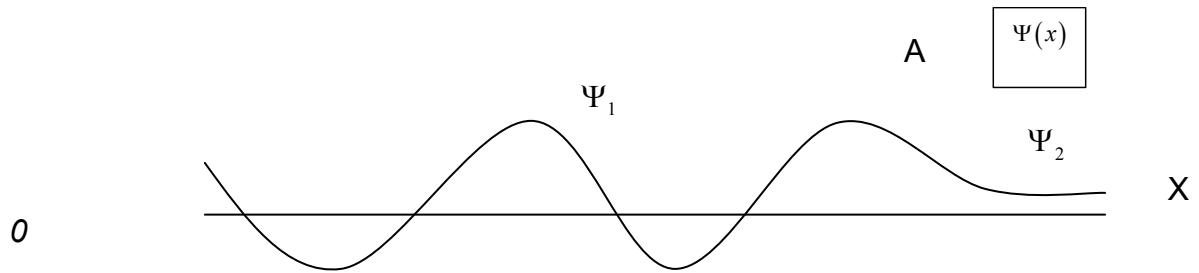


Figura 100. Función de onda para un escalón de potencial de altura E_0 , cuando la energía E de la partícula es menor que E_0 ,

Penetrar en la región clásicamente prohibida de la derecha ($x > 0$) en otras palabras, todas las partículas se reflejan en $x = 0$. Este caso, la expresión anterior para Ψ_1 se convierte en

$$\Psi_1 = 2iA \operatorname{sen} kx = C \operatorname{sen} kx,$$

Como se ilustra en la figura 108. (El estudiante debe comparar en esta situación con la de las ondas en una cuerda con un extremo fijo).

(b) $E > E_0$. En este caso, si de nuevo se supone que las partículas proceden de la izquierda, la descripción clásica sería que todas ellas prosiguen dentro de la región (II), aunque moviéndose con velocidad menor que en la región(I) en $x=0$ experimenta una repentina desaceleración, porque la energía cinética es menor en (II) que en (I). La situación según la mecánica cuántica es diferente para la región (I) la solución está dada también por la ecuación (241).

$\Psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ si se supone que es posible que algunas partículas se reflejen (hipótesis que se verifica más adelante). Sin embargo para la región (II) la solución es diferente, porque ahora $E > E_0$ y se debe definir la cantidad $k'^2 = 2m(E - E_0)/h^2$ de modo que la ecuación (242) se transforma en

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k'^2\Psi = 0.$$

La solución es ahora también similar a la solución de la ec. (241). en este caso una cosa es cierta: en la región (II) solo se tienen partículas viajando hacia la derecha por lo que se debe escribir

$$\Psi_2(x) = Ce^{ik'x}. \quad \Psi_1(0)\Psi_2(0) \equiv 0 \quad (243)$$

Aplicando las condiciones de contorno en $x = 0$ para las funciones dadas por las ecs. (241) y (242), se tiene entonces

$$A + B = C, \quad k(A - B) = k'C,$$

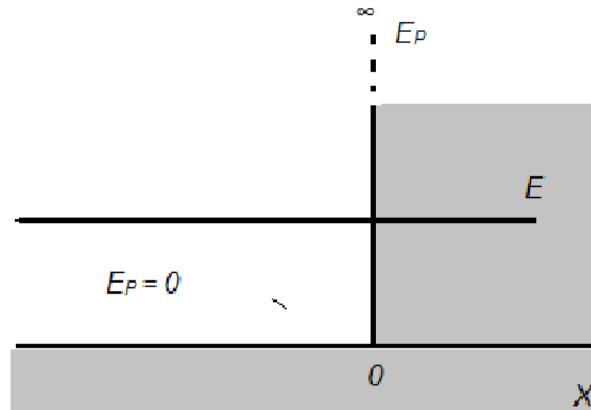


Figura 101. Pared de potencial. La partícula no puede penetrar en la región $x>0$

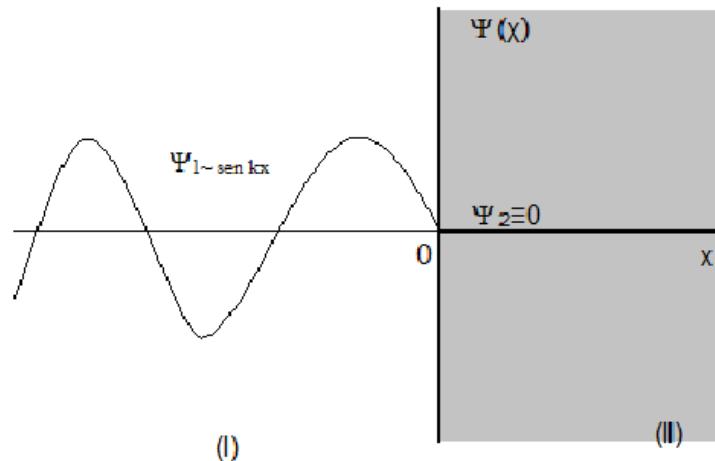


Figura 102. Función de onda para una pared de potencial.

Cuyas soluciones son $B = \frac{(k - k')A}{(k + k')}$ y $C = \frac{2kA}{(k + k')}$, de modo que

El hecho de que B no sea cero es una indicación de que algunas partículas se reflejan en $x=0$, que es otro resultado diferente del predicho por la mecánica clásica. Esta reflexión es una propiedad característica de todos los campos cuando al propagarse encuentran una zona de discontinuidad de las propiedades físicas del medio. Este comportamiento es bien conocido para el caso de las ondas elásticas y electromagnéticas.

4.3.30 Oscilador armónico cuántico amortiguado

Un problema físico importante es el oscilador armónico. Para el cual la energía potencial es $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, ilustrada en la figura 110 (a). Este problema suministra importante información acerca de las vibraciones atómicas en las moléculas y en los sólidos, ya que en primera aproximación, se debe suponer que el movimiento relativo de los átomos en las moléculas y en los sólidos es oscilatorio armónico. La ecuación de Schrödinger es ahora

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\Psi = E\Psi.$$

Siendo: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

La intención no es resolver esta ecuación de un modo normal; antes se dará solo los principales resultados. Recordando que para un oscilador armónico la frecuencia es

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se encuentra que los valores posibles de la energía para los estados estacionarios son

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

Donde n es cero o un entero positivo, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Entonces $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$, $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$, etc. Los niveles de energía que se indican en la figura 110 (b), están igualmente separados entre sí por la cantidad $\hbar\omega$ (o $\hbar\omega/2\pi$, ya que $\omega = 2\pi\nu$).

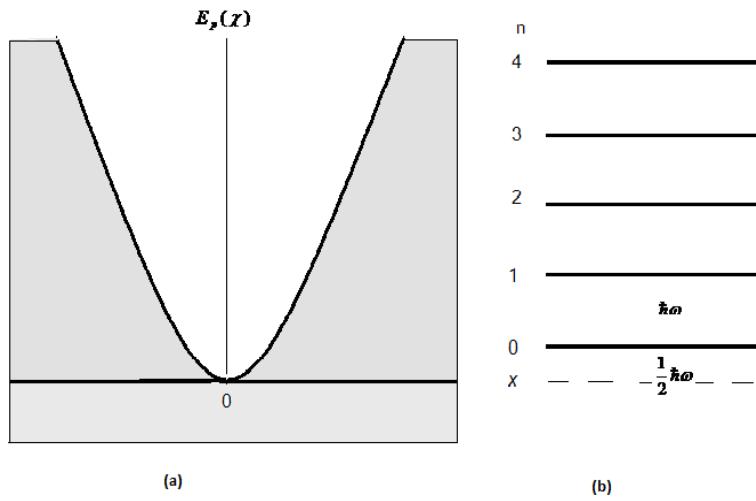


Figura 103 .(a) Energía potencial de un oscilador armónico. (b) Niveles de energía.

Un resultado interesante es que la energía mínima del oscilador armónico es

$\frac{1}{2}\hbar\omega$ ó $\frac{1}{2}h\nu$. Esta se llama *energía en el punto cero* del oscilador por que corresponde a $n = 0$. Este resultado, así como el análogo obtenido para la caja de potencial, está íntimamente relacionado con el principio de indeterminación.

La energía mínima, desde el punto de vista clásico, corresponde al punto 0 al fondo de la curva de la energía potencial. Sin embargo, en este punto se tiene $x = 0$ y también $p = 0$. Debido a que no habría oscilaciones en tal situación, podría conocerse simultáneamente y con absoluta precisión la posición y el momentum de la partícula, lo cual contradice el principio de indeterminación.

Por consiguiente, el primer nivel de energía o estado fundamental deberá ser el nivel de energía compatible con el principio de indeterminación. Para ver esto, se observa que para este nivel particular, la amplitud χ_0 de las oscilaciones es muy pequeña, y se puede hacer $\chi_0 \ll \frac{1}{2}$. También la amplitud p_0 del cambio de momentum es muy pequeño y se puede poner $p_0 \ll \frac{1}{2}$.

La energía de un oscilador clásico de amplitud χ_0 es $E = \frac{1}{2}m\omega^2\chi_0^2$; notando

$$p_0 = \frac{1}{2}m\omega\chi_0, \text{ se tiene}$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\chi_0^2 = \frac{1}{2}\omega(\chi_0)(m\omega\chi_0) = \frac{1}{2}\omega\chi_0 p_0 \hbar \quad \square \frac{1}{8} \quad \square \frac{1}{8} \quad \square \frac{1}{2} \hbar .$$

No se dará aquí la expresión general de las funciones de onda para el oscilador armónico simple.

La tabla 1, presenta las primeras funciones de onda, correspondiendo ψ_0 al estado fundamental. Estas funciones se ilustran en la figura 111. Obsérvese que ellas no se anulan abruptamente en los límites clásicos de oscilación, indicados por el segmento vertical en cada caso. Antes bien, se extienden más allá de estos límites, aunque decreciendo muy rápidamente, como se encuentra previamente para el caso del escalón de potencial en la sección 27.2 cuando $E < E_0$ (fig 109). Esto significa que la amplitud de un oscilador no está definida precisamente en la mecánica cuántica, como lo está en el caso clásico.

TABLA 1. Funciones de onda de un oscilador armónico ($a^2 = m\omega/\hbar$)

n	E_n	$\psi_n(\chi)$
0	$\frac{1}{2}\hbar$	$\psi_0(\chi) = (\frac{a}{\sqrt{\pi}})^{\frac{1}{2}} e^{-a\chi^2/2}$
1	$\frac{3}{2}\hbar$	$\psi_1(\chi) = (\frac{a}{2\sqrt{\pi}})^{\frac{1}{2}} 2a\chi e^{-a\chi^2/2}$
2	$\frac{5}{2}\hbar$	$\psi_2(\chi) = (\frac{a}{8\sqrt{\pi}})^{\frac{1}{2}} (4a^2\chi^2 - 2)e^{-a^2\chi^2/2}$
3	$\frac{7}{2}\hbar$	$\psi_3(\chi) = (\frac{a}{48\sqrt{\pi}})^{\frac{1}{2}} (8a^3\chi^3 - 12a\chi)e^{-a^2\chi^2/2}$

En la mecánica cuántica la partícula se puede encontrar en un instante dado en una región en la cual, según el formalismo más rígido de la mecánica clásica, su movimiento se considera imposible. Existen, sin embargo, muchos experimentos que apoyan esta conclusión. En la figura 112 se indica la densidad de probabilidad $p = |\psi(\chi)|^2$ para los estados correspondientes a las funciones de onda que se muestra en la figura 111.

Notese que, aunque existe una probabilidad finita de observar la partícula fuera de los límites clásicos de oscilación, esta partícula está principalmente confinada a la región clásica.

Hasta aquí se ha estudiado un oscilador lineal, es decir, un oscilador en una sola dimensión. En el caso general de tres dimensiones, como es el de un átomo en un sólido, los niveles de energía están dados por

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right)\hbar$$

La sola diferencia es que ahora la energía en el punto cero es $\frac{3}{2}\hbar$ en lugar de $\frac{1}{2}\hbar$, porque se debe agregar las energías en el punto cero para los oscilaciones según los ejes X , Y , Z , que corresponden a una energía de $\frac{1}{2}\hbar$ para cada coordenada.

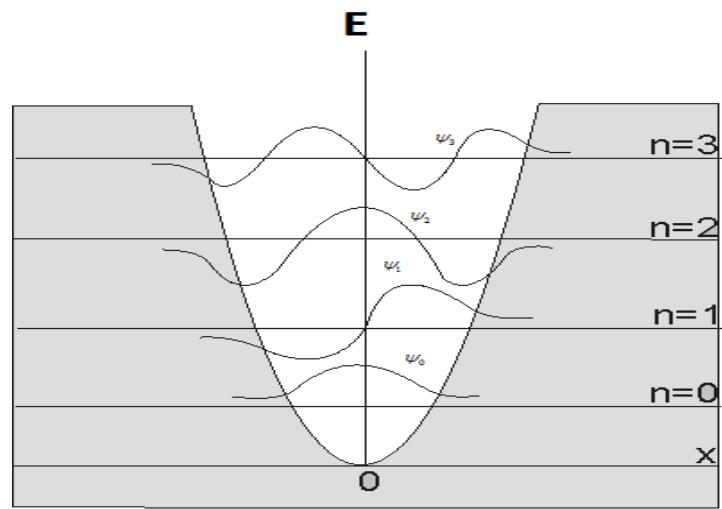


Figura 104. Funciones de onda de los primeros cuatro niveles de energía de un oscilador armónico.

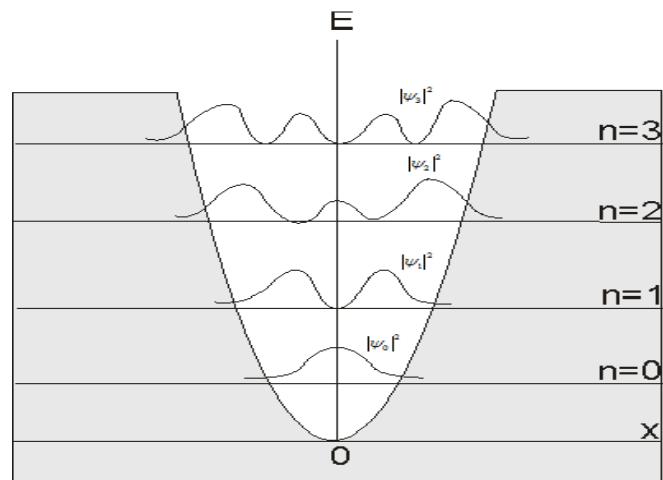


Figura 105. Densidades de probabilidad de los cuatro primeros niveles de energía de un oscilador armónico.

5. MANUAL DEL USUARIO

Con el diseño de estas simulaciones como ayuda en la asignatura de Física III, se logra una transformación en el modo de actuar de los Docentes, al contar con un nuevo medio de enseñanza Interactivo y versátil; además se brinda al estudiante la información para construir su Conocimiento y desarrollar habilidades propias en el proceso de aprendizaje, como son las estrategias cognoscitivas que contribuyen a formar hábitos de superación permanente y de trabajo en Colectivo. También, se puede lograr que los estudiantes se apropien de herramientas que Le permiten hacer un mejor análisis de las teorías y leyes.

Éste trabajo será de gran utilidad, porque puede hacerse algunas demostraciones a las cuales no se tiene acceso directo en los laboratorios.

5.1. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

El Movimiento Armónico Simple se caracteriza por proceder de fuerzas variables en el sistema que cambian continuamente la aceleración, por tal motivo se le da un tratamiento diferente, al empleado en cinemática y dinámica para fuerzas constantes. Es decir, las expresiones que se usaban en el movimiento con aceleración constante no se pueden utilizar en este análisis.

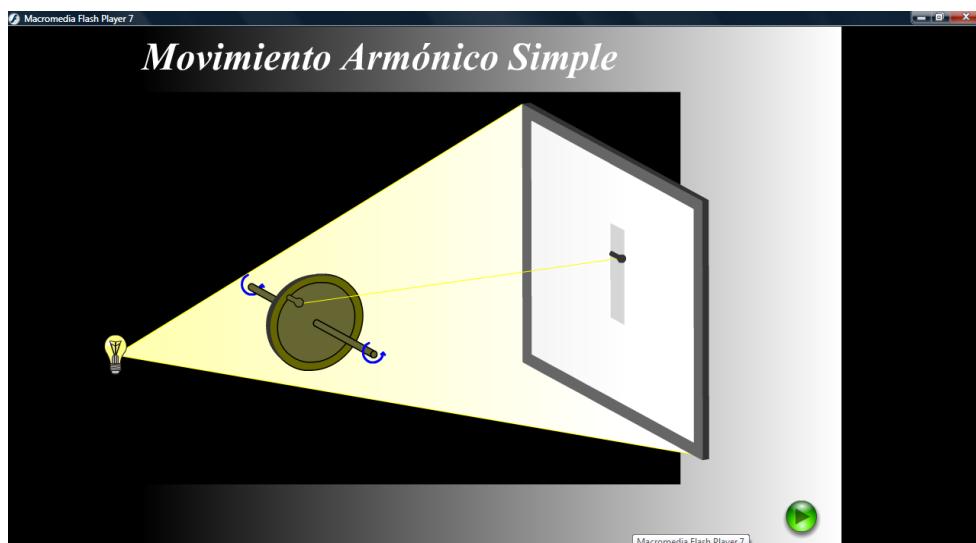


Figura 106. Movimiento Armónico Simple

En el gráfico se observa el comportamiento de un movimiento circular uniforme proyectado sobre una pantalla, en el cual se describe una trayectoria lineal, que en el tiempo es una función sinusoidal.

Avanzar con clic izquierdo a pantalla siguiente y escoger la opción Elongación con clic sobre la palabra.

5.1.1. Elongación

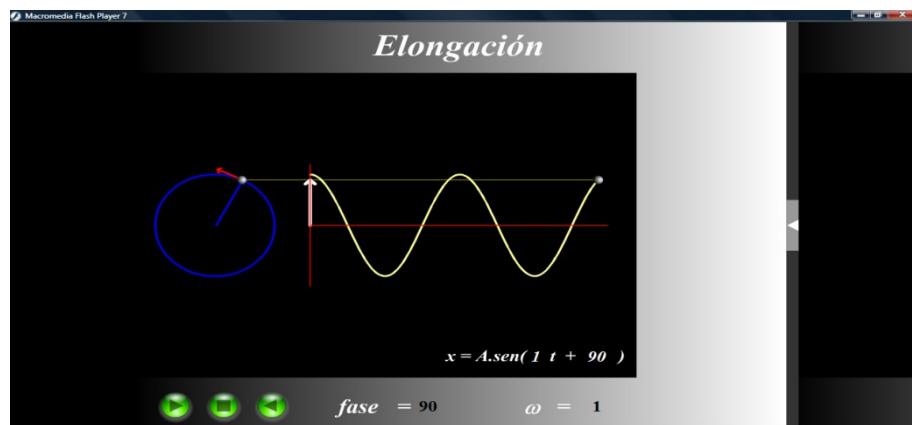


Figura 107. Elongación

En la animación se puede observar el gráfico de desplazamiento en función del tiempo.

Se puede acceder a otro pantallazo con la flecha de la derecha . Donde aparecen las variables comprometidas en el movimiento rotacional. Para regresar

se emplea la flecha que está en sentido opuesto . Para acceder a estas opciones la animación debe estar en ejecución.

Cambiar el valor de la fase entre 0° y 90° .

Cambiar el valor de frecuencia angular entre 1 rad/s y 100 rad/s.

Escriba que observó en cada caso.

5.1.2. Velocidad

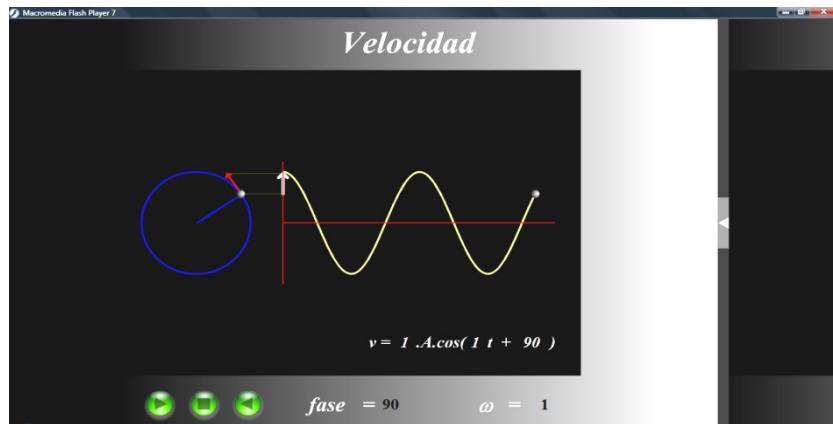


Figura 108 Velocidad

En la animación se muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo.

Cuando se accede a la siguiente pantalla con la flecha que está a la derecha , se podrá observar los vectores de las variables que están en movimiento circular uniforme.

Se regresa del pantallazo pulsando .

Cambiar el valor de la fase entre 0° y 90° .

Cambiar el valor de frecuencia angular entre 1 rad/s y 100 rad/s.

Escriba que observó en cada caso.

5.1.3. Aceleración

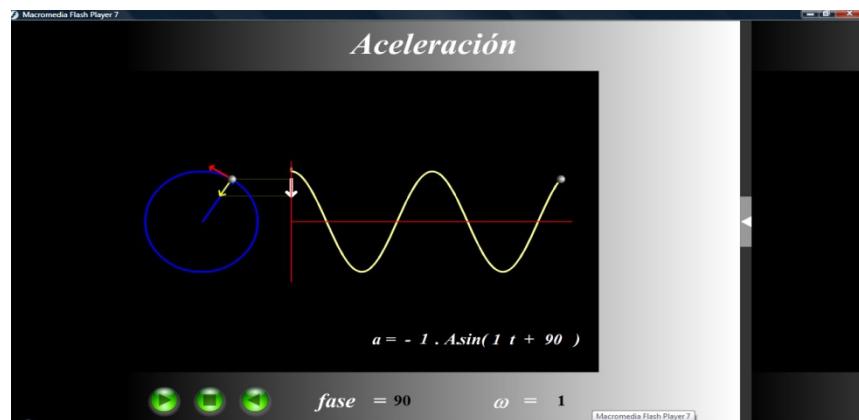


Figura 109. Aceleración

Repita los pasos de la velocidad y escriba lo que observó.

5.1.4. Energía

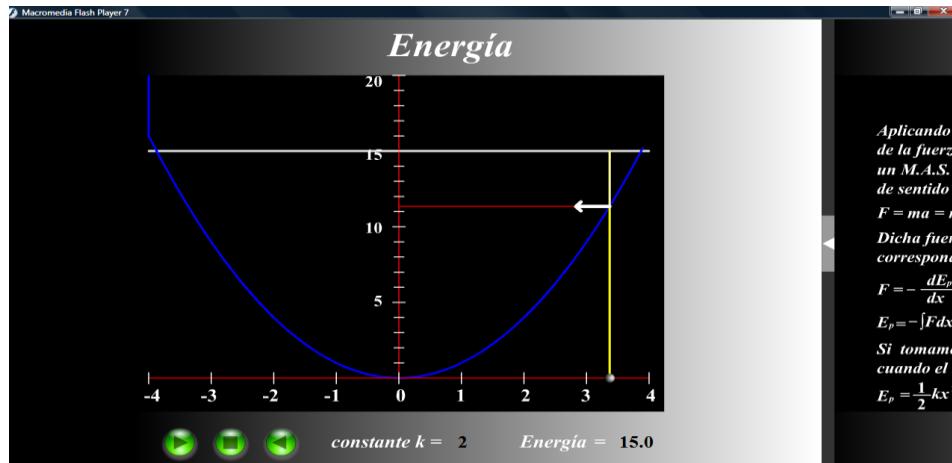


Figura 110. Energía

Los valores de la constante elástica deben estar entre 2 y 20 N/m.

Los valores de energía no deben ser mayores a 20 J, debido a que se sale de la escala dibujada.

Aquí cuando se cambia de pantallazo en la animación se ven las ecuaciones que se utilizan en el Movimiento Armónico Simple.

5. 2. PÉNDULOS

Un péndulo es aquel objeto o cuerpo que puede moverse repetidamente alrededor de un punto fijo. En la práctica existen varios tipos de péndulos los cuales se podra observar a través de las presentaciones que se muestran a continuación.

5.2.1. Péndulo simple. Consiste en una masa rígida suspendida de un hilo inextensible (longitud fija), que cuelga de un punto fijo y que se mueve sucesivamente de un lado a otro de su posición de equilibrio.

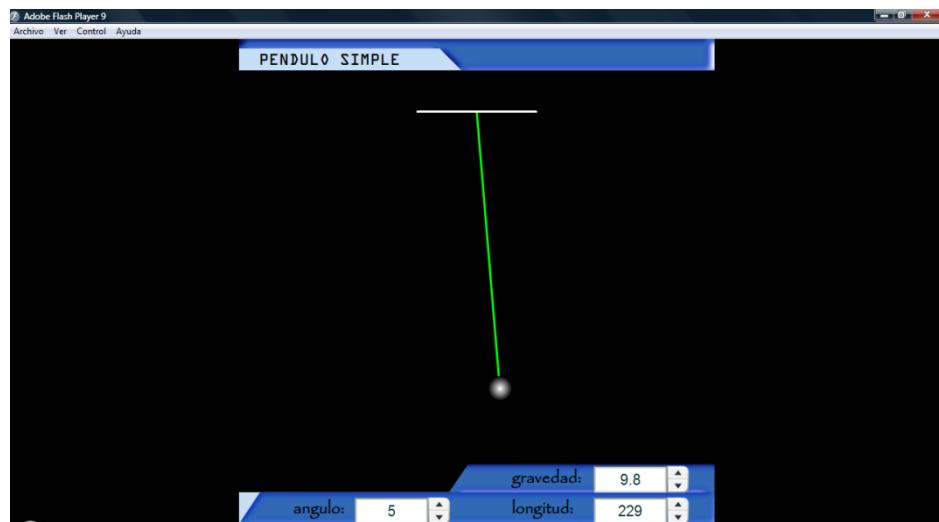
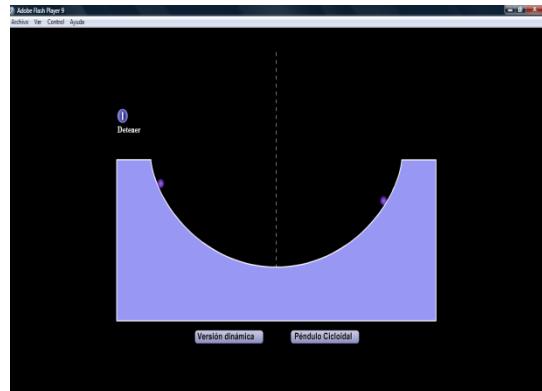


Figura 111. Péndulo simple

Aquí usted podrá apreciar el movimiento del péndulo cuando cambia cada una de las variables presentadas en pantalla. Así comprobar  los conceptos vistos en clase de una manera visual y sencilla.

5.2.2. Péndulo cicloidal. Aquí usted podrá ver el comportamiento de un péndulo cicloidal, así como su equivalencia dinámica, que trata de dos partículas que se mueven en direcciones contrarias sobre una superficie circular exenta de fricción donde el radio de la trayectoria corresponde a la longitud del péndulo.

EQUIVALENTE DINÁMICO



PÉNDULO CICLOIDAL

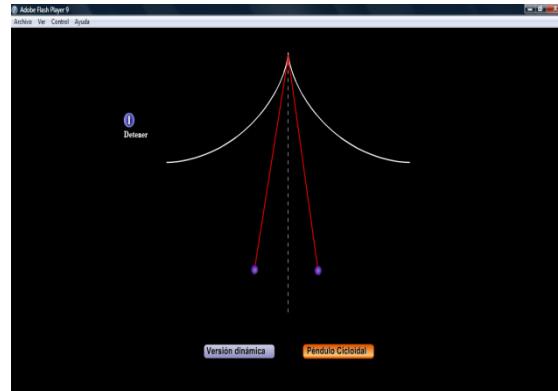


Figura 112. Equivalente dinámico y péndulo cicloidal

En cada pantallazo usted tendrá la opción de regresar o detener la simulación.

5.2.3. Péndulo doble

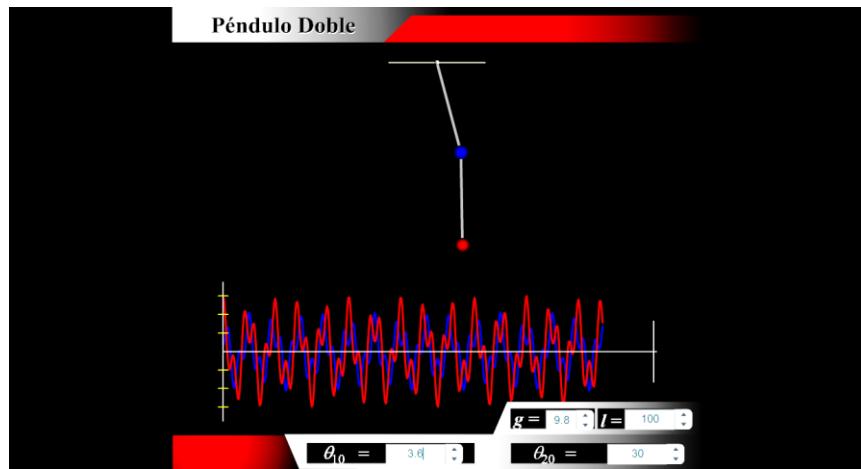


Figura 113. Péndulo Doble

En el gráfico se ven dos péndulos de igual longitud, que pueden tener ángulos diferentes y a los cuales se les hace el gráfico correspondiente de la elongación en función del tiempo.

Cada color en la gráfica representa el respectivo péndulo. Con la tecla escape usted podrá salir de la animación.

5.2.4. Péndulos acoplados. Dos péndulos de igual longitud unidos por un resorte de constante K.

Cada péndulo tiene la opción de variar su ángulo y frecuencia angular.

En la gráfica cada color representa la elongación en función del tiempo del respectivo péndulo.

Cambiando los ángulos se puede ver el comportamiento de los péndulos en fase y contrafase.

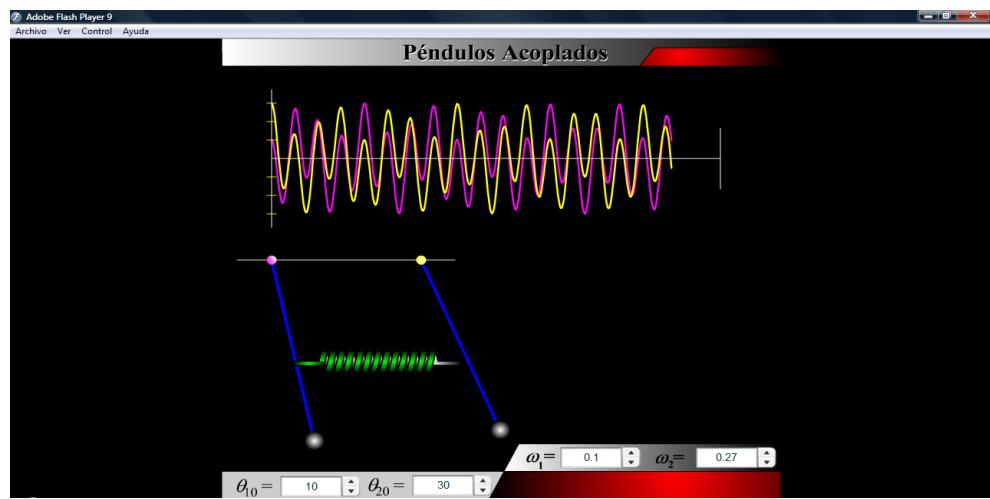


Figura 114. Péndulos Acoplados

Las frecuencias angulares varían desde 0.1 rad/s a 1 rad/s y los ángulos entre -30° y 30°.

5. 3. SUPERPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS SIMPLES

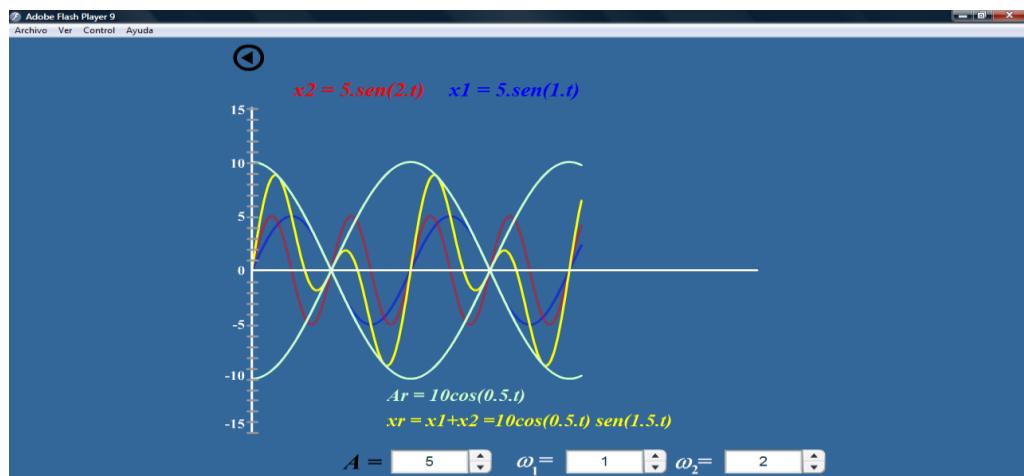


Figura 115. Superposición de movimientos armónicos simples

El gráfico muestra la superposición de dos ondas de igual amplitud, se pueden tener dos casos.

Igual frecuencia y frecuencia diferente. En ambos casos se muestra la interferencia constructiva y destructiva. También recordar que cuando las frecuencias son ligeramente diferentes se observa la formación de las pulsaciones.

En las opciones usted puede tener frecuencias angulares diferentes entre 1 rad/s y 10 rad/s.

Usted puede cambiar el valor de la amplitud sin sobrepasar el valor de siete(7).

5.3.1. Figuras de lissajoux

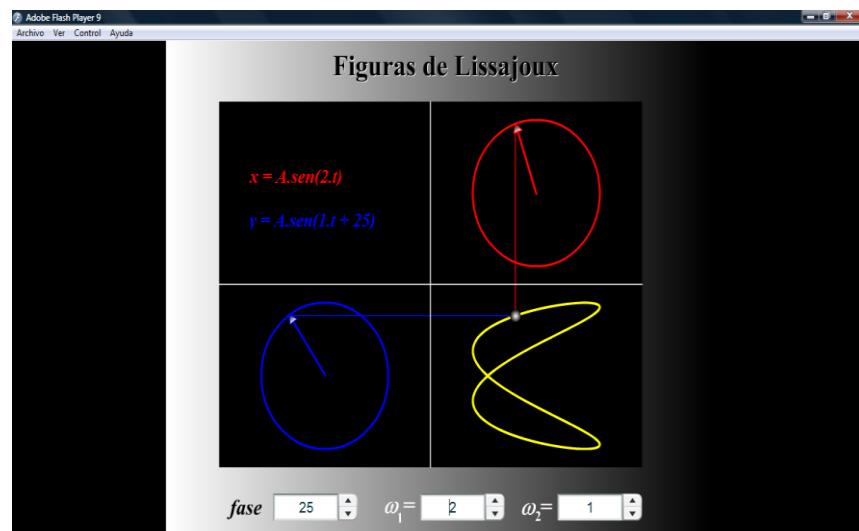


Figura 116. Figuras de lissajous

Las figuras de lissajous son el resultado de dos movimientos armónicos simples perpendiculares de frecuencias ligeramente distintas. Usted podrá variar la fase de -90° a 90° y las frecuencias (ω) con un valor inferior a 10. Así visualmente tendrá el resultado de la superposición y hacer su respectivo análisis.

5.3.2. Oscilaciones acopladas. La unión de dos osciladores donde los movimientos de las masas no son independientes, muestran que el movimiento general de dos osciladores acoplados puede considerarse como la superposición de dos modos normales de oscilación de frecuencias angulares ω_1 y ω_2 .

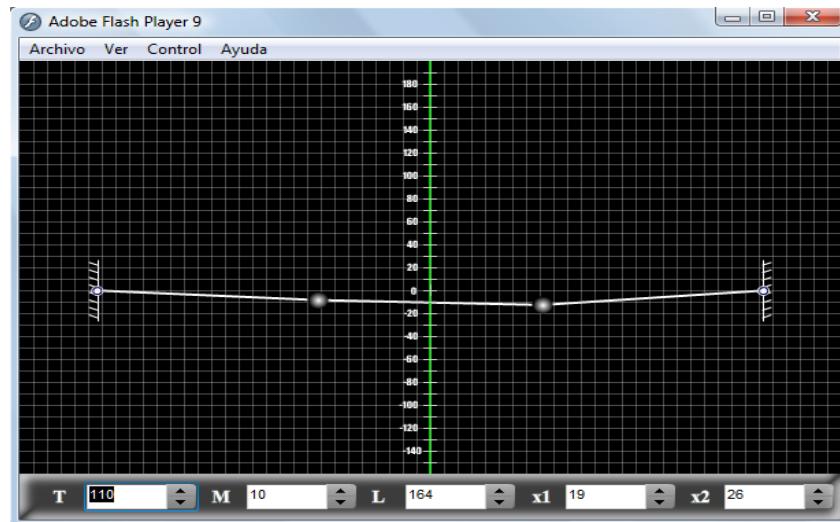


Figura 117. Oscilaciones acopladas

Valores para la simulación. Periodo (T) entre 1s y 1000s.

Masa (m) entre 0.1Kg y 10 Kg.

Longitud (L) máxima entre los péndulos 180 cm .

Amplitud en cada péndulo (X) entre -50 cm y 50 cm.

5.3.3. Oscilaciones amortiguadas. La amplitud de las oscilaciones en la mayoría de los sistemas de un cuerpo vibrante no ideal como un resorte o un péndulo, decrece gradualmente hasta que se detiene.

En la figura se observa el comportamiento de un sistema amortiguado, donde la amplitud de las oscilaciones decrece exponencialmente con el tiempo hasta que su amplitud se hace cero.

El factor de amortiguamiento β puede tomar valores entre 0 y 4.

La constante elástica K puede tomar valores entre 0.01 y 10.

Masa del sistema m entre 0 y 100 Kg.

Angulo α valores entre 0° y 360° .

Amplitud A entre 0 cm y 15 cm.

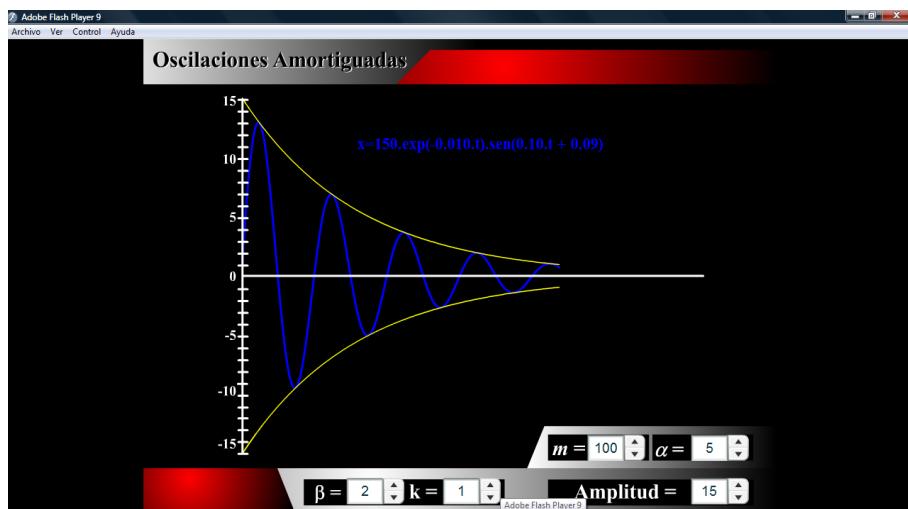


Figura 118. Oscilaciones amortiguadas

5.3.4. Oscilaciones forzadas. Un caso especial en las oscilaciones es cuando una fuerza externa oscillatoria se aplica a una partícula sometida a una fuerza elástica.

En estas condiciones el sistema la amplitud de las oscilaciones sufre variaciones.

El factor de amortiguamiento β puede tomar valores entre 0 y 4.

La constante elástica K puede tomar valores entre 0.01 N/m y 10 N/m.

Frecuencia angular ω entre 0 rad/s y 1 rad/s.

Masa m entre 1Kg y 100Kg.

Angulo de fase entre 0° y 360° .

Amplitud entre 0cm y 10cm.

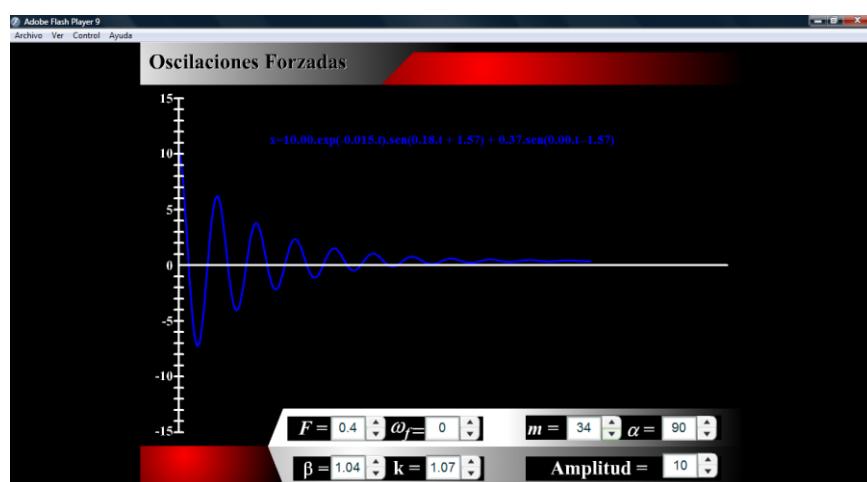


Figura 119. Oscilaciones forzadas

5.4. ONDAS PLANAS

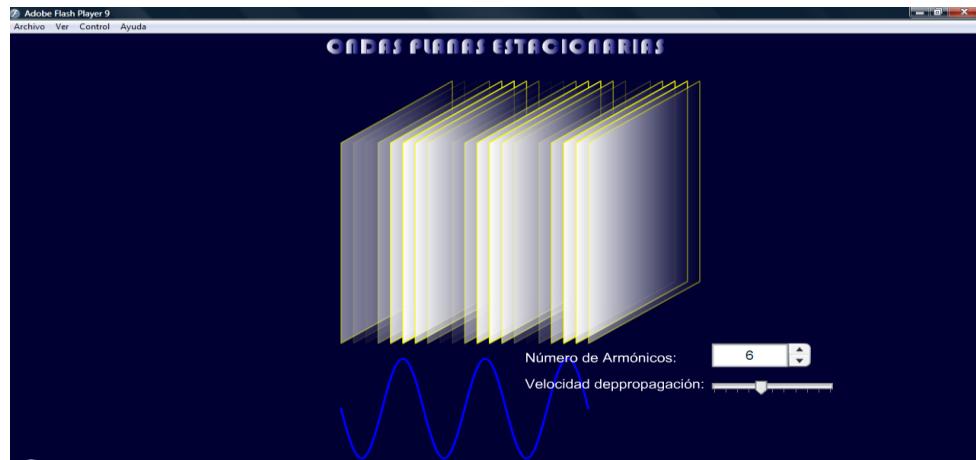


Figura 120. Ondas planas estacionarias

Representación del movimiento ondulatorio desplazándose paralelamente al eje x.

Los armónicos varían entre 0 y 10.

La velocidad de propagación está entre 0 cm/s y 10 cm/s.

5.5. ONDAS ESFÉRICAS

Las ondas esféricas son aquellas que se alejan radialmente del lugar de donde se genera la perturbación y pueden ser bidimensionales (como las ondas en el agua) o tridimensionales como la (Radiación generada por una fuente puntual de luz). En este caso se ve el pulso generado por una fuente puntual.

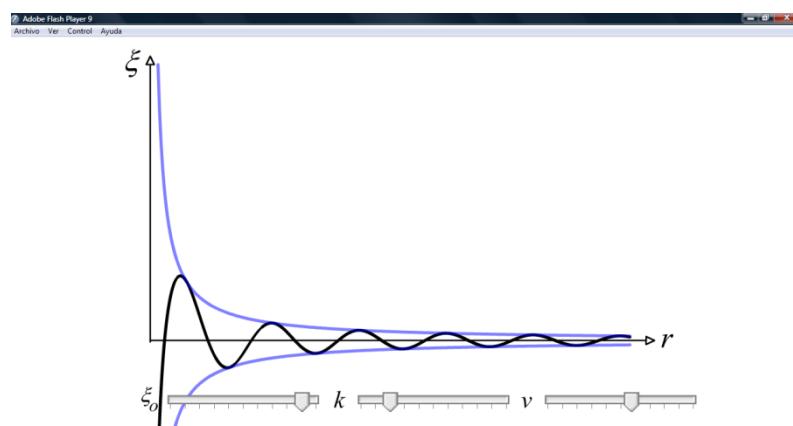


Figura 121. Ondas esféricas

Ξ_0 Intensidad de la fuente.

K superficie de fase constante o frente de onda.

V velocidad de propagación de La onda.

Todos los valores están entre 0 y 10.

Al cambiar los valores, usted tendrá claro el comportamiento de los frentes de onda en un sistema tridimensional.

5.6. EFECTO DOPPLER

Cuando una fuente de ondas o un observador, o ambos, están en movimiento respecto al medio donde se propagan las ondas, la frecuencia percibida por el observador no es, en general, el mismo que si ambos se hallan en reposo. En este caso la fuente es el sonido generado por la sirena de un automóvil que se mueve con velocidad constante. La velocidad de propagación de la onda y la fuente varían entre 0 m/s y 50 m/s.



Figura 122. Efecto doppler

5.7. SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE IGUAL FRECUENCIA

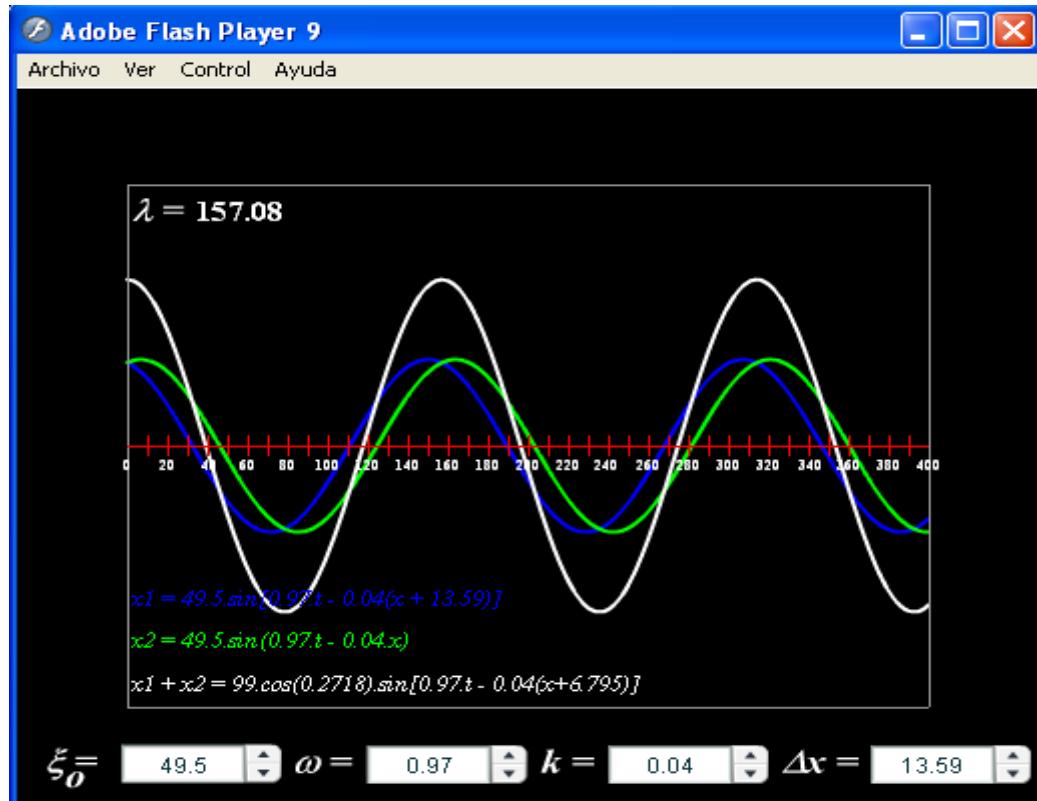


Figura 123. Superposición de ondas de igual frecuencia

Dos ondas que comparten el mismo espacio generan una nueva onda que varía de acuerdo a las características de las otras dos.

Existe un caso especial que es de algún interés y es la superposición de las ondas:

Cuando tienen igual frecuencia.

E_o amplitud de la ondas entre 0 y 100.

ω Frecuencia angular entre 0 y 10 rad/s.

k Constante de fase entre 0 y 0,1.

Δx Desplazamiento de fase entre 0.01 y 400.

5. 8. SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE DISTINTA FRECUENCIA

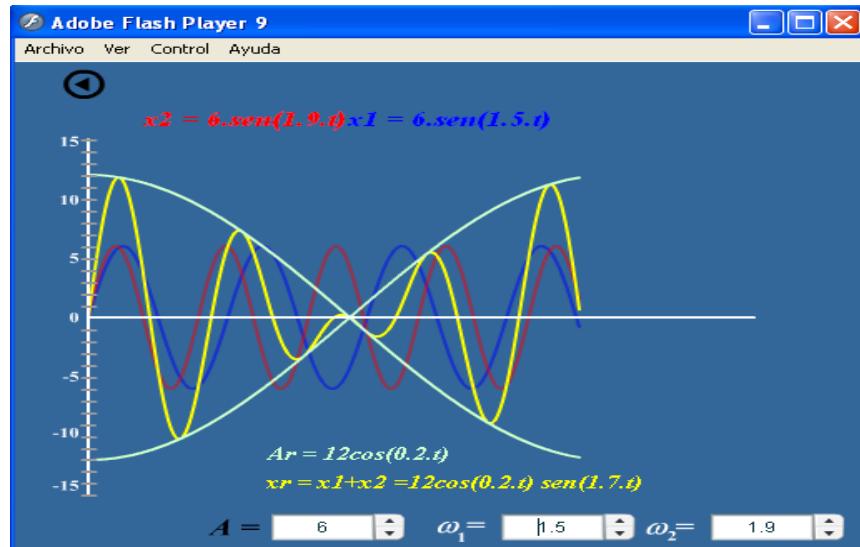


Figura 124. Superposición de ondas de distinta frecuencia

Cuando dos ondas de frecuencias ligeramente distintas e igual amplitud comparten el mismo medio se genera una nueva onda llamada pulso de frecuencia constante.

Las frecuencias ω_1 y ω_2 van de 1 rad/s a 10 rad/s. La amplitud A varía de 1 a 10.

5.9. ONDAS ESTACIONARIAS EN CUERDAS

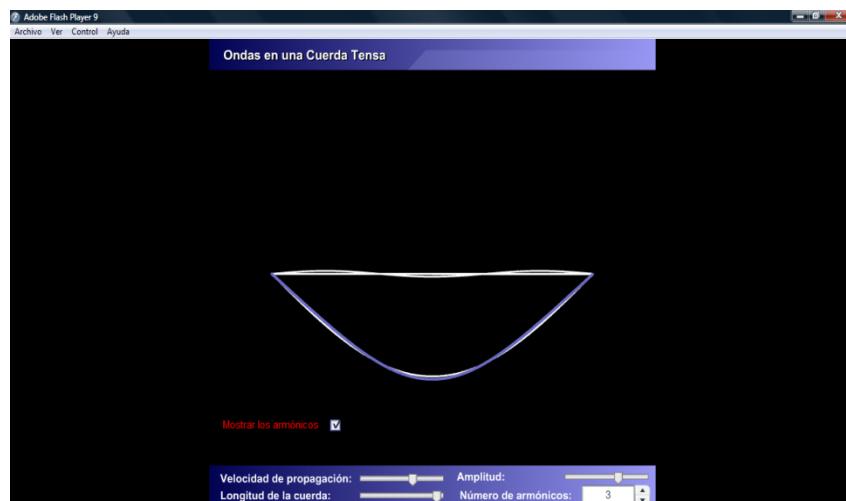


Figura 125. Ondas estacionarias en cuerdas

Las ondas estacionarias en cuerdas sujetas firmemente en los extremos, generan un patrón de forma de onda que son múltiplos de la frecuencia fundamental. Las ondas estacionarias se presentan fijas en el medio como resultado de las ondas incidentes y reflejadas. Los puntos cerrados se llaman nodos y los abiertos antinodos o vientres.

De este modo las posibles frecuencias de oscilación (llamadas armónicos) son todos los múltiplos de la fundamental. Se puede decir que las frecuencias y longitudes de onda están cuantizadas, y que la cuantización es el resultado de las condiciones de contorno impuestas en ambos extremos de la cuerda.

5. 10. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS EN CUERDAS TENSAS

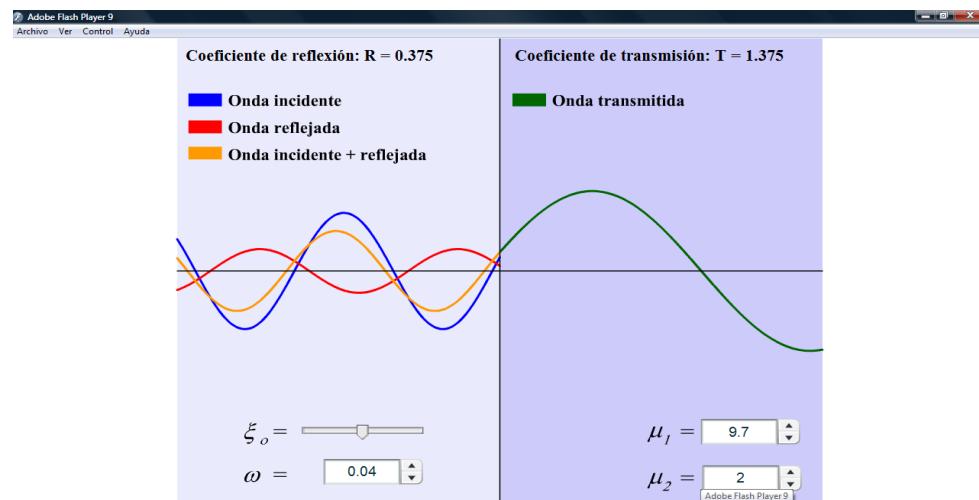


Figura 126. Reflexión y refracción en ondas en cuerdas tensas

Una perturbación en una cuerda transmite su energía a través de la cuerda, generando una onda que puede disminuir su amplitud cuando encuentra un medio diferente, como puede ser un grueso diferente o un material diferente.

Valores posibles en la simulación.

ξ_0 amplitud de la onda entre 0 y 10.

ω frecuencia angular entre 0.01 y 1.

μ_1 y μ_2 índice de refracción entre 1 y 100.

5. 11. ONDAS ESTACIONARIAS EN TUBOS ABIERTOS Y CERRADOS

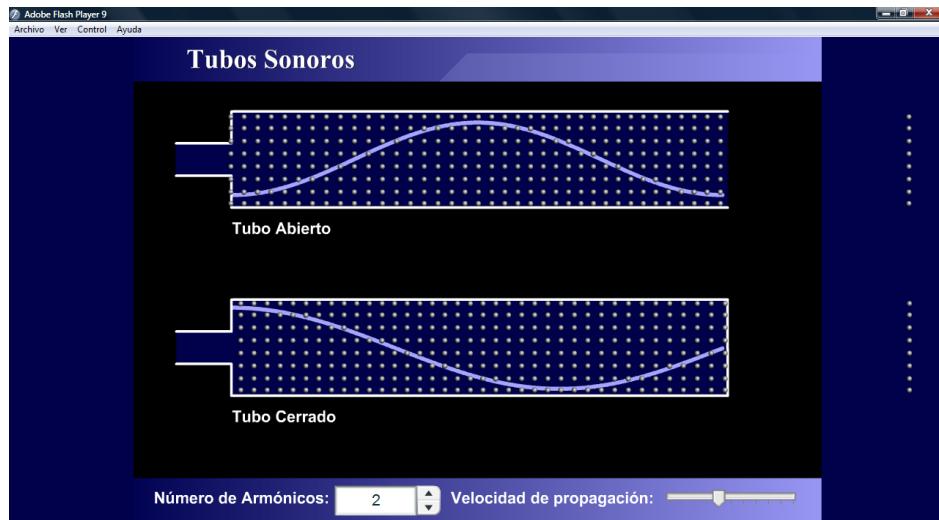


Figura 127.Ondas estacionarias en tubos abiertos y cerrados

Las oscilaciones en una columna de aire generan ondas estacionarias, las oscilaciones en una columna de aire abierta en ambos extremos son equivalentes a las de una cuerda con ambos extremos fijos, pero las posiciones de nodos y antinodos están intercambiadas.

Los puntos en un extremo cerrado corresponden a un sitio de alta presión o equivalente a un desplazamiento muy pequeño de las partículas, de tal manera que en las ondas estacionarias corresponde a un nodo en el extremo cerrado.

El número de los armónicos puede variar entre 1 y 100.

La velocidad de propagación entre 0 y 10.

5. 12. INTERFERENCIA CONSTRUCTIVA Y DESTRUCTIVA DE ONDAS CIRCULARES

Una característica muy importante del movimiento ondulatorio es el fenómeno de interferencia. Esto ocurre cuando dos o más movimientos ondulatorios coinciden en el espacio y el tiempo.

Por consiguiente, el resultado de la interferencia de un movimiento ondulatorio no tiene la apariencia de un movimiento ondulatorio progresivo, sino una situación estacionaria en la cual el movimiento tiene una amplitud fija en cada punto del espacio. La razón de esto es que las dos fuentes oscilan con la misma frecuencia

y mantienen un desfase constante, y por lo tanto se dice que son **coherentes**. Pero si las fuentes no son de la misma frecuencia, o si sus desfases cambian erráticamente con el tiempo, no se observa el diagrama de interferencia estacionario, y las fuentes se dice que son **incoherentes**.

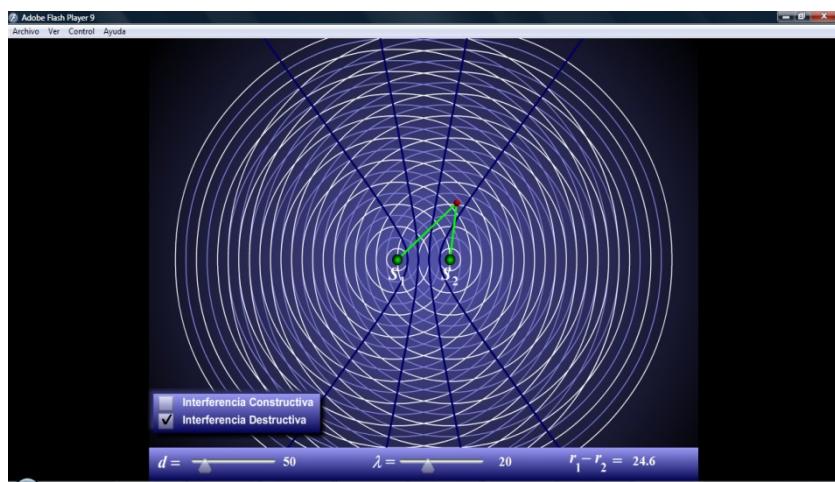


Figura 128. Interferencia constructiva y destructiva.

Con los siguientes valore usted podrá hacer un análisis del comportamiento de las ondas cuando se cruzan.

d distancia entre los focos. Varía entre 0mm y 300mm.

λ Longitud de onda, generada por los focos. Varía entre 10mm y 40mm.

Nota: Haciendo clic en los enlaces interferencia constructiva o interferencia destructiva usted podrá ver el trazo de las líneas donde se forma el tipo de interferencia seleccionado.

5. 13. EXPERIMENTO DE YOUNG

El cual consistía en dos pequeños agujeros o rendijas, S_1 y S_2 muy cercanos, en una pantalla con una fuente de luz S colocada detrás de ella. De acuerdo con el principio de Huygens, S_1 y S_2 se comportan como fuentes secundarias coherentes cuyas ondas interfieren sobre la región a la derecha de la pantalla.

En el caso de la luz, el diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla colocada paralelamente a las dos fuentes S_1 y S_2 . Una serie de franjas brillantes y oscuras dispuestas alternadamente aparecen sobre la pantalla debido a la

intersección de ésta con las superficies hiperbólicas ventrales y nodales. Para otras regiones del espectro electromagnético, se usan diferentes tipos de detectores para observar el diagrama de interferencia. Véase el comportamiento en el gráfico.

Valores de simulación.

λ Longitud de onda, generada por los focos. Varía entre 10nm y 50nm.

D Distancia entre los focos y la pantalla. Entre 50mm y 450mm.

A Distancia entre los focos. Varía entre 20mm y 200mm.

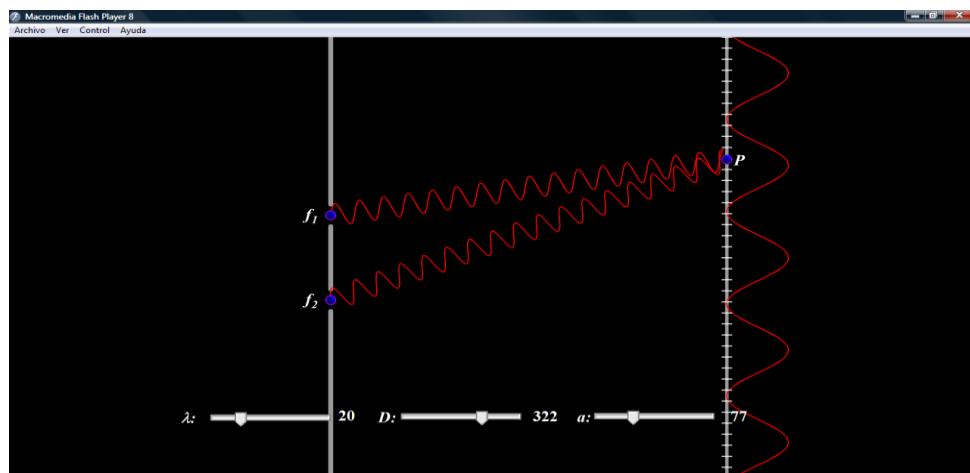


Figura 129 Experimento de Yung

5. 14. PRINCIPIO DE HUYGENS

El **principio de Huygens** es un método de análisis aplicado a los problemas de propagación de ondas.

Afirma que todo punto de un frente de onda inicial puede considerarse como una fuente de ondas esféricas secundarias que se extienden en todas las direcciones con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que el frente de onda del que proceden.

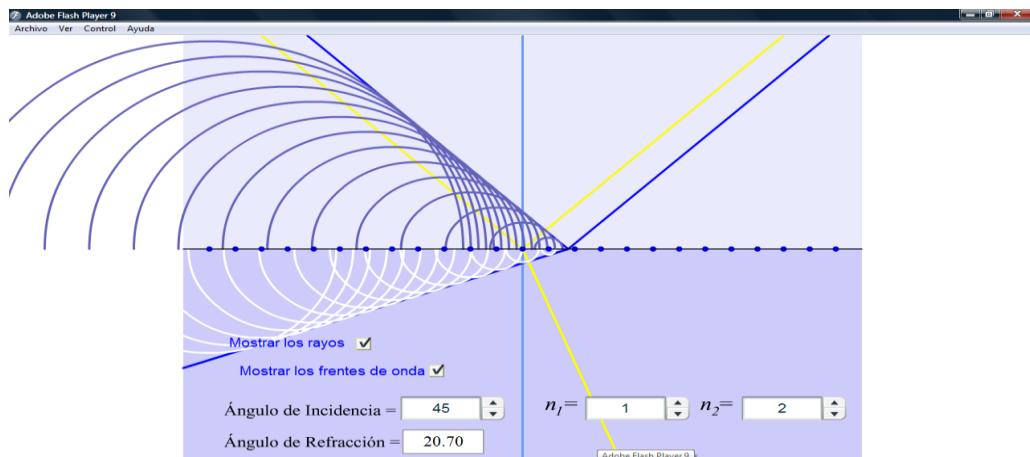


Figura 130. Principio de Huygens

Los valores de simulación son:

Ángulo de incidencia entre 0° y 90° .

Índice de refracción (n_1 y n_2) entre 1 y 5.

Además seleccionando las opciones mostradas usted podrá ver los rayos de luz y los frentes de ondas.

5. 15. PRISMAS

En óptica, un **prisma** es un objeto capaz de refractar, reflejar y descomponer la luz en los colores del arco iris. Generalmente, estos objetos tienen la forma de un prisma triangular, de ahí su nombre.

De acuerdo con la ley de Snell, cuando la luz pasa del aire al vidrio del prisma disminuye su velocidad, desviando su trayectoria y formando un ángulo con respecto a la interface.

Como consecuencia, se refleja o se refracta la luz. El ángulo de incidencia del haz de luz y los índices de refracción del prisma y el aire determinan la cantidad de luz que será reflejada, la cantidad que será refractada o si sucederá exclusivamente alguna de las dos cosas.

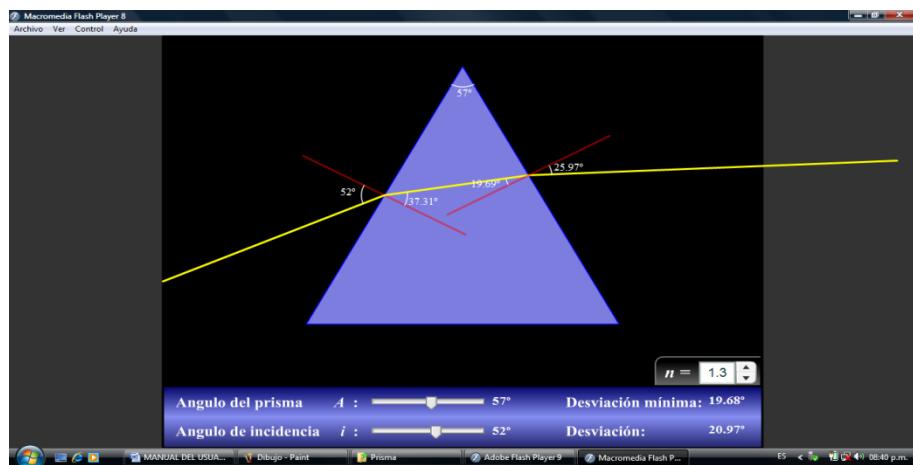


Figura 131. Prisma

Valores de simulación:

El ángulo de abertura en el prisma (A) varía entre 20° y 90° .

El ángulo de incidencia (I) varía entre 0° y 90° . Perpendicular a la superficie de una de las caras del prisma.

Índice de refracción (n) entre 1 y 10.

5. 16. ESPEJOS ESFÉRICOS Y PARABÓLICOS

Los espejos son superficies altamente reflectivas a los rayos de luz. Estos tipos de espejos tienen forma circular, corresponden en la mayoría de los casos al corte de una esfera y pueden ser cóncavos lado interno de la esfera y convexo lado externo de la esfera.

Cuando un objeto se coloca frente al espejo y sobre el objeto se hace incidir luz, esta se refleja en la superficie del espejo y forma la imagen en el lugar donde se concentran los rayos reflejados.

Los valores usados en la simulación son:

Altura objeto (h_o) entre 0cm y 40cm.

Foco (f) entre 20cm y 200cm.

Las demás variables distancia imagen (d_i) y distancia objeto (d_o), cambian automáticamente.

Si usted desea ver el espejo esférico haga clic y seleccione la opción.

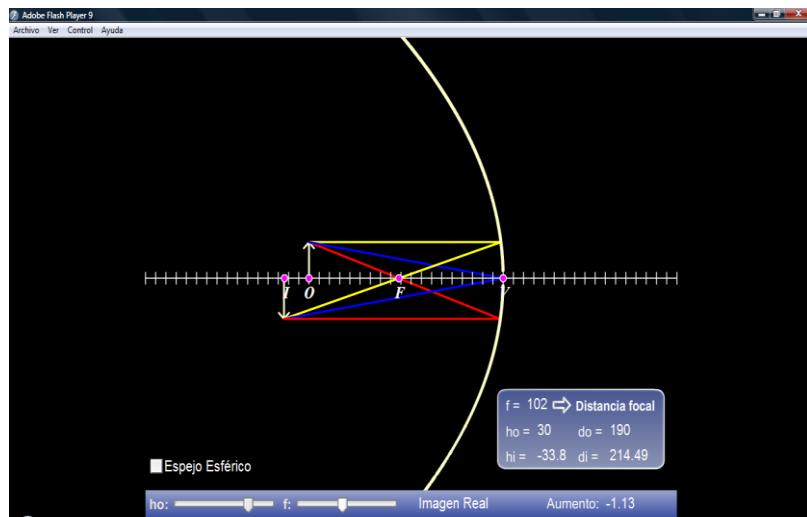


Figura 132. Espejos esféricos y parabólicos

5. 17. LENTES DELGADAS CONVERGENTES Y DIVERGENTES

Cuando la luz pasa de un medio a otro, sufre una desviación que se debe al cambio de velocidad de propagación de la luz. Este fenómeno se llama Refracción y es como operan las lentes.

La lente es el dispositivo óptico simple más importante. En la actualidad se encuentra lentes en anteojos, cámaras, lupas, telescopios, binoculares, microscopios e instrumentos médicos. Según la superficie de la lente pueden ser cóncavas, convexas o planas.

En la simulación usted puede observar el comportamiento de una lente convergente y divergente seleccionando la opción en la parte superior.

Sólo con cambiar la altura del objeto deslizando la barra, usted podrá ver directamente lo que ocurre con los rayos de luz refractados en la lente.

(I) representa el sitio donde se forma la imagen.

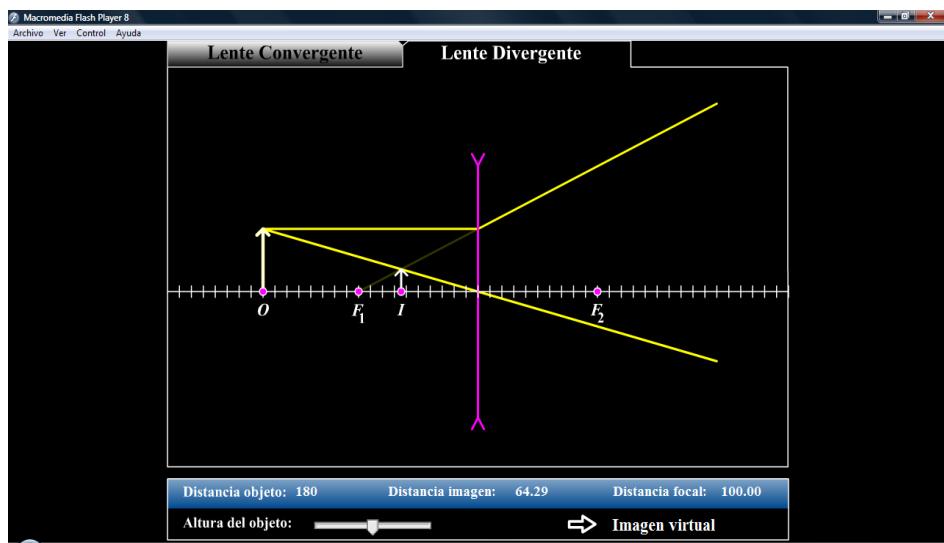


Figura 133. Lentes delgadas convergentes y divergentes

5. 18. DIFRACCIÓN DE LA LUZ RENDIJAS SIMPLES

Cuando un haz de luz monocromático coherente se hace pasar por una abertura muy pequeña, ésta se descompone y forma nuevos focos, produciendo interferencia constructiva y destructiva, por tal razón se observan puntos brillantes y opacos sobre la pantalla.

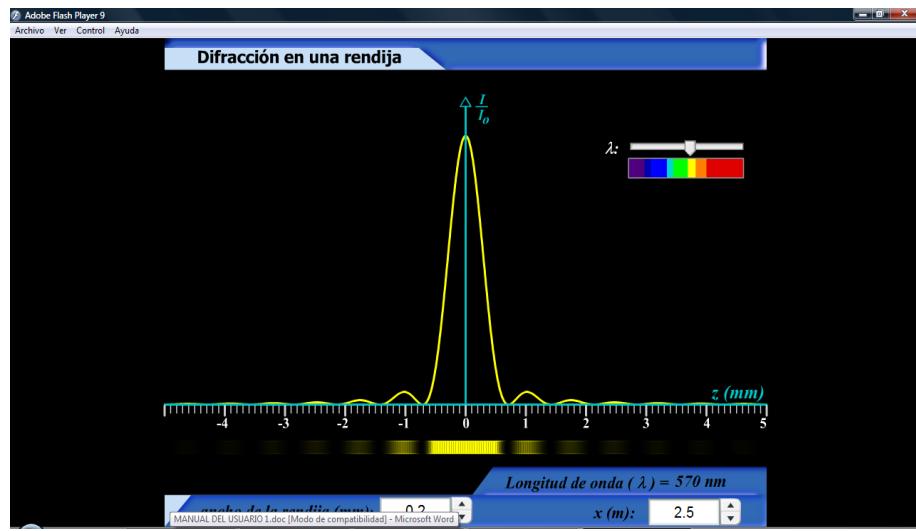


Figura 134. Difracción en una rendija

Valores de simulación:

Ancho de la rendija entre 0,001mm y 10mm.

Distancia de la rendija a la pantalla (X) entre 1m y 10m.

La longitud de onda (λ) se varía desplazando la barra sobre los colores primarios y está en nm.

5. 18.1. Red de difracción. Se llama red de difracción a la sucesión de rendijas muy estrechas separadas entre sí por la misma distancia d . donde se hace incidir un haz de luz monocromático, de tal forma que se pueda considerar que cada rendija es una fuente de frente de ondas cilíndricas perfectas.

En la simulación se pueden tener los siguientes intervalos de valores :

Número de fuentes entre 1 y 10.

Ancho de las rendijas entre (λ) , 0,01 y 10.

Separación entre las rendijas (d), 0,01 y 10.

Cambiando los valores en cada una de las opciones usted verá el comportamiento de las ondas cuando se encuentran en la pantalla.

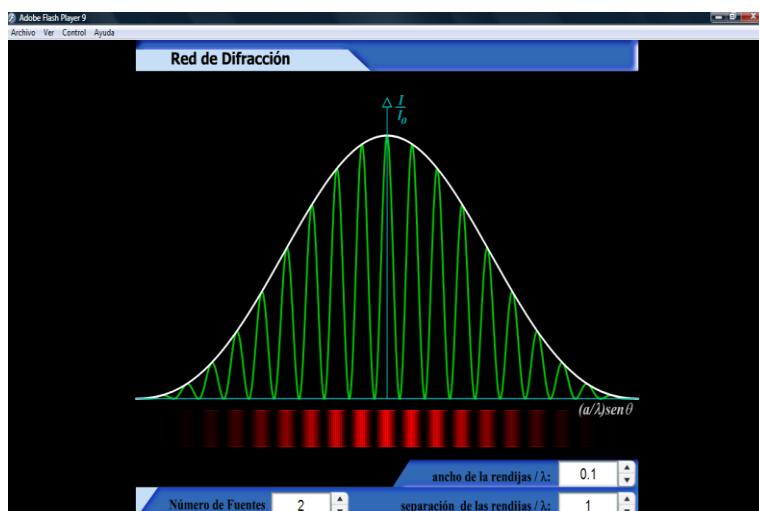


Figura 135. Red de difracción

5. 18.2. Difracción de fraunhofer. En la simulación anterior se ha estudiado el patrón de difracción producido por una red formada por un número enorme de rendijas paralelas. Cada una de estas rendijas la se ha supuesto muy, muy estrecha de forma que actúe como un foco puntual emisor de frentes de ondas perfectamente cilíndricos (aunque ahora la anchura de la rendija ya no va a ser cero, se sigue considerando que su longitud es infinita).

Pero qué sucede cuando la rendija no es tan estrecha, aunque siempre manteniendo una anchura que no sea excesivamente grande en comparación con la(s) longitud(es) de onda que llega(n) a la rendija (ya que de lo contrario no habría difracción).

Se considera el caso de **una** única rendija de anchura a pequeña pero no despreciable que está iluminada perpendicularmente por una luz puntual monocromática coherente (por ejemplo, la de un láser) de longitud de onda λ .

Esta rendija difracta la luz en todas las direcciones y nosotros se observa la luz que llega desde una dirección θ . Como ahora la rendija no es tan estrecha, la difracción que provoca, aunque se sigue propagando en todas las direcciones ya no es con frentes de onda cilíndricos.

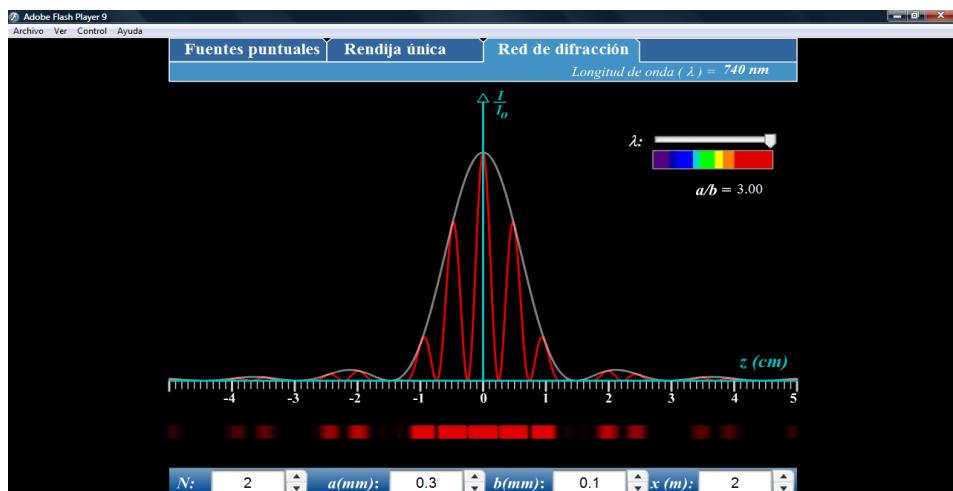


Figura 136. Red de difracción

En la simulación usted tiene tres opciones, que son:

Fuentes puntuales.

Valores para la simulación.

Número de fuentes (N) entre 2 y 10.

Abertura de las rendijas (a) entre 0,001mm y 10mm.

Rendija única.

Valores de simulación.

Ancho de la rendija (a), entre 0,001mm y 10mm.

Distancia de la rendija a la pantalla (x), entre 1m y 10m.

Red de difracción.

Valores de simulación.

Número de fuentes (N), entre 1 y 10.

Ancho de las rendijas (a), entre 0,001mm y 10mm.

Distancia entre las rendijas (b), entre 0.001mm y 10mm.

Distancia entre las rendijas y la pantalla (x), entre 1m y 10m.

Distancia de la rendija a la pantalla (x) entre 1m y 10m.

Nota: Usted puede variar la longitud de onda de la luz incidente deslizando el cursor por cada uno de los colores del espectro visible en la descomposición de la luz blanca.

5. 18.3. Difracción en una abertura rectangular

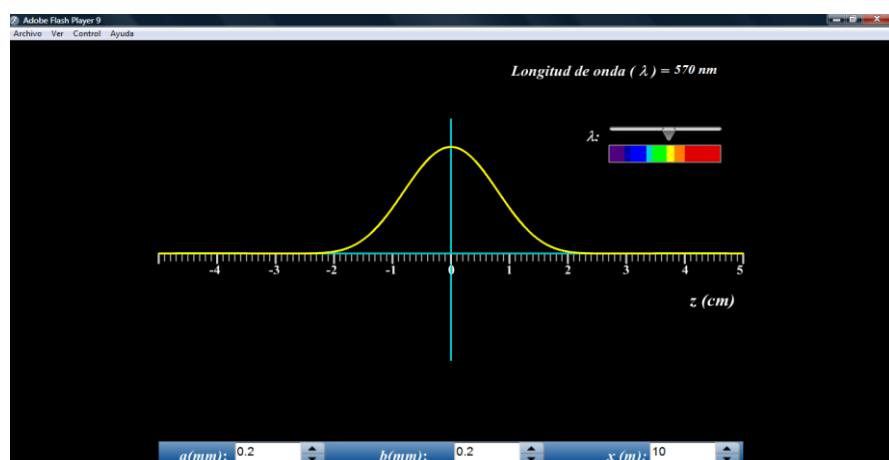


Figura 137. Difracción en una abertura rectangular

La simulación muestra el patrón de difracción producido cuando un haz de luz monocromático pasa por una rendija rectangular. Un gran máximo central y otros secundarios de menor amplitud.

En la simulación los valores son:

Ancho de la abertura (a) de 0,01 mm a 10 mm.

Alto de la abertura (b) de 0,01 mm a 10 mm.

Distancia de la abertura a la pantalla (x) de 1 m a 10 m.

Longitud de onda (λ) de 380 nm a 740 nm.

5. 18.4. Difracción en una abertura circular



Figura 138. Difracción en una abertura circular

Cuando un haz de luz monocromática pasa por una rendija circular lo suficientemente pequeña, este se difracta y forma en la pantalla una serie de anillos concéntricos que alternan entre blanco y negro. Lo suficientemente nítidos como para poder realizar las mediciones de longitud. En el fenómeno de Difracción en un orificio circular se tienen las siguientes variables:

θ el ángulo formado hasta el primer anillo oscuro.

D = diámetro del orificio realizado.

λ = Longitud de onda de la luz.

X = Distancia del orificio a la pantalla.

En la simulación los valores son:

(D) entre 0,1mm a 10mm.

(X) entre 1 m a 10 m.

(λ) entre 380 nm a 740 nm.

5. 18.5. Fuentes puntuales

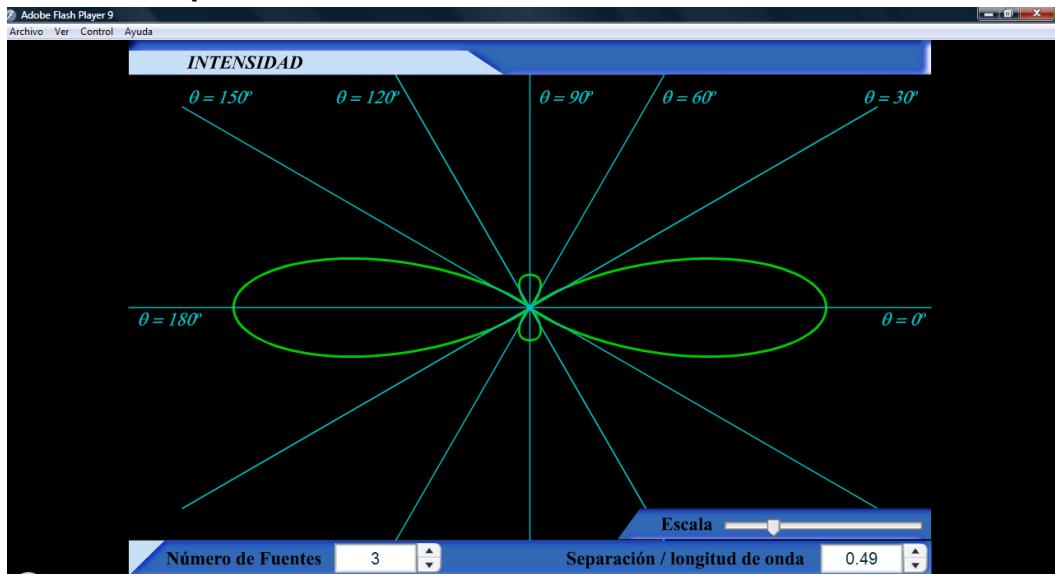


Figura 139. Fuentes puntuales

Cuando hay varias fuentes puntuales y se hace pasar un haz de luz monocromática se desarrollan ondas que interfieren y así producen franjas en la pantalla.

Se puede cuantificar el espaciamiento entre franjas en una pantalla puesta a una distancia detrás, donde se ve la interferencia constructiva y destructiva. Los valores de la simulación son:

Número de fuentes entre 1 y 5

Relación separación y longitud de onda entre 0,01 y 1

La escala o factor de ampliación se realiza deslizando con clic sostenido el cursor.

5.19. ESPECTROS DE EMISIÓN Y ABSORCIÓN

Cuando se hace pasar la luz a través de un prisma óptico se produce el efecto llamado dispersión que consiste en la separación de las distintas longitudes de onda que forman el rayo incidente.

La luz blanca produce al descomponerla lo que se llama un espectro continuo, que contiene el conjunto de colores que corresponde a la gama de longitudes de onda que la integran.

En un elemento químico, cada átomo es capaz de emitir o absorber radiación electromagnética, aunque solamente en algunas frecuencias que son características propias de cada uno de los diferentes elementos químicos. Si, mediante suministro de energía calorífica, se estimula un determinado elemento en su fase gaseosa, sus átomos emiten radiación en ciertas frecuencias del visible, que constituyen su espectro de emisión.

Si el mismo elemento, también en estado de gas, recibe radiación electromagnética, absorbe en ciertas frecuencias del visible, precisamente las mismas en las que emite cuando se estimula mediante calor. Este será su espectro de absorción.

Sin embargo, los elementos químicos en estados gaseosos y sometidos a temperaturas elevadas producen espectros discontinuos en los que se aprecia un conjunto de líneas que corresponden a emisiones de sólo algunas longitudes de onda. Si se hace pasar la luz blanca por una sustancia antes de atravesar el prisma sólo pasarán aquellas longitudes de onda que no hayan sido absorbidas por dicha sustancia y se obtendrá el espectro de absorción de dicha sustancia.

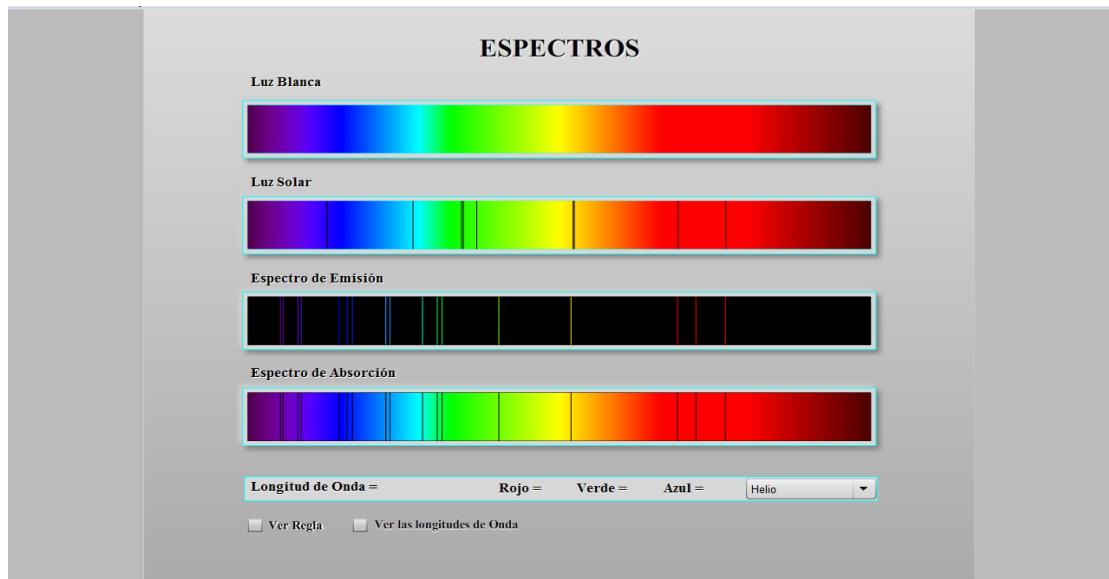


Figura 140. Espectros

La figura muestra el espectro del helio.

En la simulación se puede escoger entre 20 elementos diferentes.

En ver regla se observará la escala de la regleta en nanómetros (nm).

En ver tabla podrá ver la intensidad relativa de las longitudes de onda

5. 20. MECÁNICA CUÁNTICA

Se verán algunas simulaciones del comportamiento de los átomos, como estructura básica de la materia, aquí se estudiara la cuantización de la energía de las partículas confinadas en una cierta región: la caja de potencial y el pozo de potencial.

5. 20.1. Escalón de potencial. el escalón de potencial es un ejemplo simple para resolver la ecuación de Schrödinger, pero que presenta importantes consecuencias que contradicen el comportamiento clásico de las partículas. Aquí se verá el comportamiento de una partícula cuya energía es menor que la del escalón de potencial. Este ejemplo nos servirá para introducir el efecto túnel, una de las consecuencias más sorprendentes de la Mecánica Cuántica.

Desde el punto de vista clásico, la partícula tiene una energía cinética igual a la energía total E , a la izquierda del origen, ya que la energía potencial es cero. Sin embargo, tiene una energía cinética negativa a la derecha del origen ya que la energía potencial es mayor que la energía total. De acuerdo con la interpretación de la Mecánica Clásica, la partícula no podrá moverse en la región $x>0$, la partícula rebotará en el origen $x=0$.

La solución de la ecuación de Schrödinger en ambas regiones, indica que toda partícula incidente se refleja, pero existe una probabilidad no nula de encontrar partículas a la derecha de origen, en la región clásicamente prohibida, y esta probabilidad disminuye rápidamente a medida que se adentra en la citada región. En concreto, la probabilidad disminuye exponencialmente con la distancia x al origen.

El fenómeno análogo ondulatorio es la reflexión total, más allá de la superficie de separación entre los dos medios se puede detectar movimiento ondulatorio. La onda transmitida se amortigua exponencialmente en la dirección perpendicular a la superficie de separación. Sin embargo, el flujo medio de energía en la dirección normal es nulo, lo que quiere decir que toda la intensidad de la onda incidente se refleja.

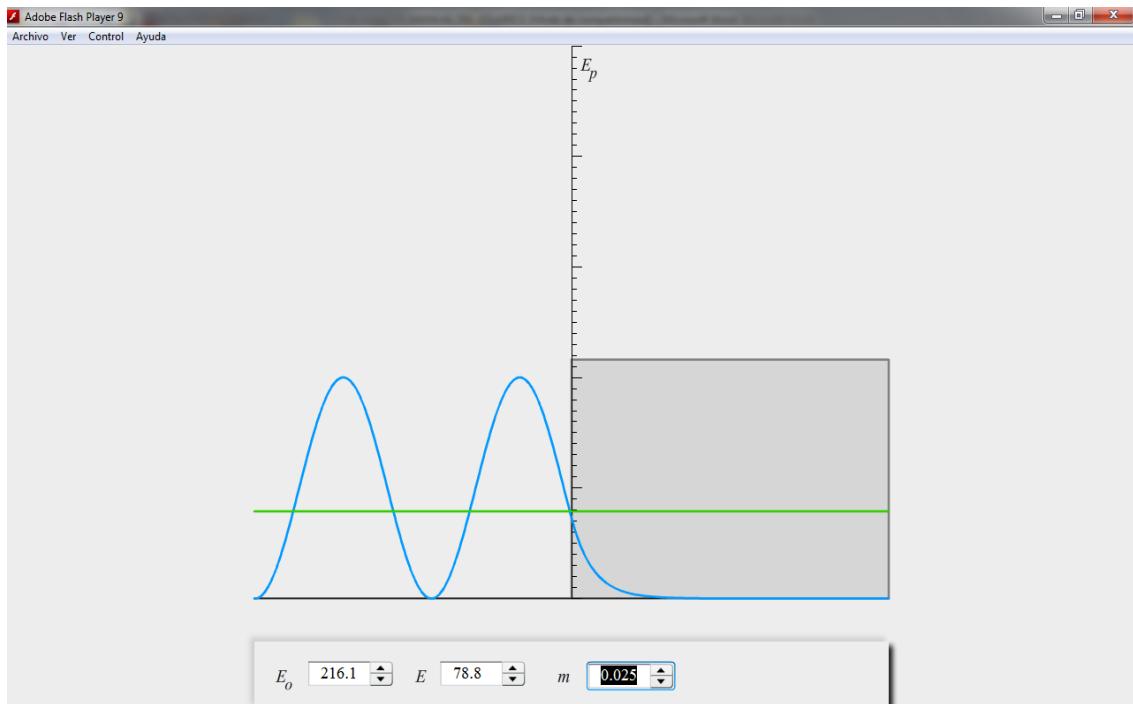


Figura 141. Escalón de potencia

5. 20.2. Caja de potencial

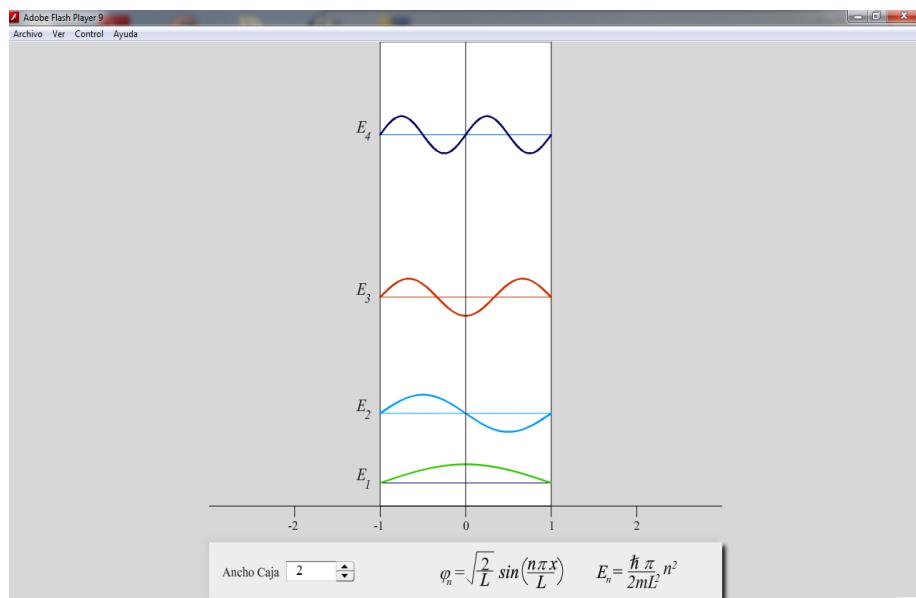


Figura 142. Caja de potencia

Una partícula confinada en cierta región del espacio, donde existen fuerzas muy grandes, como si fueran las paredes de una caja que no permiten el libre movimiento de la partícula. Para analizar el comportamiento se emplea un caso especial que es la caja monodimensional idealizada en donde se pueden encontrar los posibles niveles de energía cuantizados en ciertos niveles de energía donde están los posibles estados estacionarios. Todo se logra empleando la ecuación de Schrödinger.

En la gráfica se ven las funciones de onda estacionaria, independientes del tiempo en ciertos niveles de energía.

\hbar es la Constante reducida de Planck,
 m es la masa de la partícula,

$\psi(x)$ es la función de onda estacionaria independiente del tiempo¹ que se quiere obtener (autofunciones).

$\psi(x)$

E es la energía de la partícula (autovalores).

Las autofunciones y autovalores de una partícula de masa m en una caja monodimensional de longitud L son:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}n^2, \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots$$

En la simulación se puede cambiar el ancho de la caja entre 0,5 y 6 para observar el comportamiento en los estados cuantificados de energía de la partícula de masa m .

5. 20.3 Oscilador armónico cuántico. El **oscilador armónico cuántico** es el análogo mecano cuántico del oscilador armónico clásico. Es uno de los sistemas modelo más importante en mecánica cuántica, ya que cualquier potencial se puede aproximar por un potencial armónico en las proximidades del punto de equilibrio estable (mínimo). Además, es uno de los sistemas mecano cuánticos que admite una solución analítica sencilla.

En este caso los valores propios del hamiltoniano están uniformemente espaciados y son proporcionales a la frecuencia del oscilador teniendo como constante de proporcionalidad la constante de Planck. Aún cuando aparece un

término adicional de un medio en la fórmula de los valores propios del hamiltoniano del oscilador armónico

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega,$$

Esta fórmula es claramente reminiscente de la fórmula original de Planck.

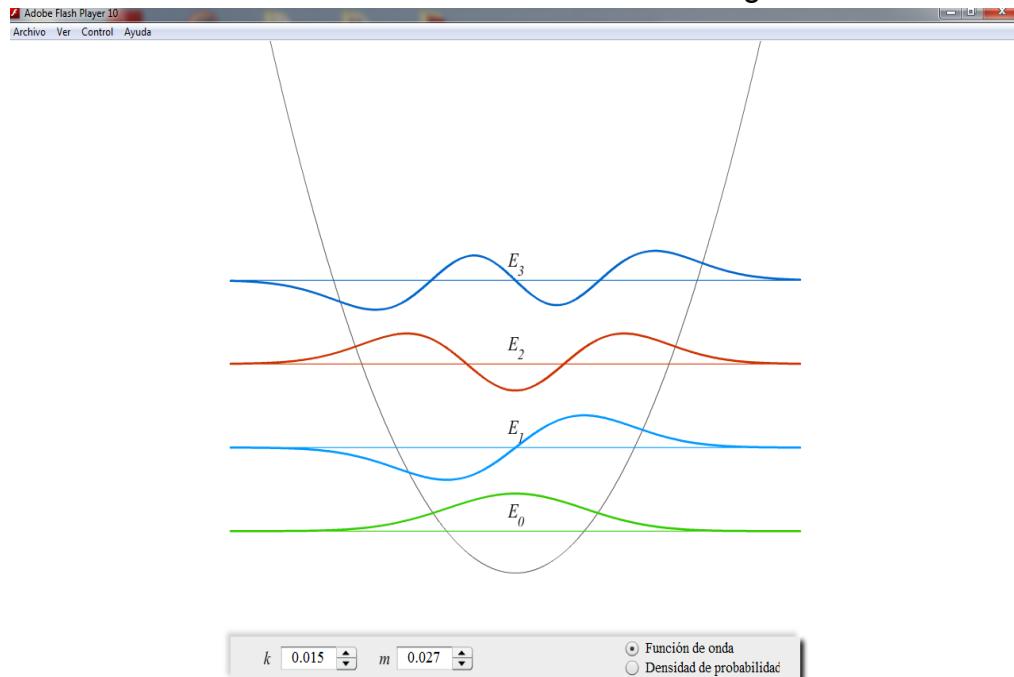


Figura 143. Simulación del Oscilador armónico cuántico

En la simulación se podrá observar el comportamiento de una partícula en diferentes niveles de energía (energía potencial).

En la simulación se recomienda trabajar con valores entre 0.001 y 0.1 para la constante (k) y la masa (m). De esta manera se visualizará mejor el comportamiento ondulatorio en cada nivel de energía.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha creado un software que recrea muchos fenómenos ondulatorios y parte del comportamiento de las partículas confinadas en lugares de altos niveles de energía. Las simulaciones se diseñaron en el lenguaje de programación Flash, ya que tiene un gran motor de velocidad en los cálculos, obteniendo resultados rápidos en el proceso de ejecución y visualización de cada fenómeno.

Cada simulación se hizo con un entorno gráfico que permite al usuario modificar la mayoría de las variables físicas involucradas en cada fenómeno y observar de manera inmediata lo que ocurre cuando es alterada una o varias variables.

Las simulaciones cuentan con un manual de usuario, que indica los valores permitidos en cada variable, para que la ejecución de la simulación sea la correcta y acorde con los datos que están en el código fuente de cada simulación.

En el trabajo se encuentra todo el contenido teórico y el desarrollo matemático de los fenómenos simulados. En las simulaciones se emplearon las mismas expresiones matemáticas que aparecen en el texto escrito.

Para ejecutar las simulaciones se requiere de una computadora con el reproductor de flash (flash player) instalado, además de contar con al menos 1GB de memoria RAM, para que las simulaciones operen rápidamente.

BIBLIOGRAFÍA

- Beer, E.R. Johnston, JR. Mecánica Vectorial para Ingenieros, Dinámica Quinta Edición, Mc.Graw Hill, 1990.
- Ceballos, Francisco Javier. Visual C#. Edit Alfaomega.
- Ceballos, Francisco Javier. Interfaces gráficas y aplicaciones para internet. Edit Alfaomega.
- Darwin, Ian F. Curso de Java. Editorial Amaya Multimedia 2005.
- D.C. Giancoli. Física General, Volumen II, Prentice Hall Hispanoamericana, 1988.
- E. Hect; A. Zajac. Ó. Fondo Educativo Interamericano, 1977.
- Erwin Kre Kryszig. Matemáticas avanzadas para ingeniería. 1. Editorial Limusa, 1980.
- F.A. Jenkins, H.E. White. Fundamentals of Optics, Third Edition, Mc Graw Hill.
- F.W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young. Física Universitaria, Sexta Edición, Fondo Educativo Interamericano, 1986.
- George, Arfken. Mathematical Methods for Physicists. Segunda Edición. Academic Press.
- Gettis W.E., Keller, F. J., Skove. M.J. Física Clásica y Moderna, Editorial Mc.Graw Hill, 1991.
- Goldemberg. Física general y experimental. Segunda edición. Interamericana, 1972.
- Harvey M. Deitel, Paul J. Deitel. Cómo programar en Java. Edit Prentice Hall.
- Harvey M. Deitel, Paul J. Deitel. Cómo programar en C# Edit Prentice Hall.
- Jerry B. Marion. Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas. Editorial Reverté.S.A.
- Keith R. Symon. Mecánica. Adison Wesley.

Marcelo Alonso, Edward J Finn. Fundamentos Cuánticos y Estadísticos.Vol 3. Adison Wesley Iberoamericana.

Lea, S.M., Burke,J.R. Física, Vol. 1, International Thomson Editores, 1991

P.M. Fishbane, S. Gasiorowicz, S.T. Thornton. Physics for Scientists anEngineers, Second Edition, Extended. Editorial Prentice Hall, 1996.

Resnick,R. Halliday, D., S. Kenneth K. Física, Vol. 1, Cuarta Edición, Editorial Cecsa, 1993.

Rick Decker, Stuart Hirsfield. Programación con Java. Edit Thomson.

Robert Eisberg y Robert Resnick. Física Cuántica. Editorial Limusa.

Serway, R.A. Física I, Cuarta Edición. Editorial Mc.Graw Hill, 1998.

Tipler, P.A.. Física I, Tercera Edición, Editorial Reverté, S.A., 1994.

Virgilio Acosta,Clyde L.Cowan,B.J Graham. Curso de Física Moderna. Editorial Harla.

WEBGRAFIA

http://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_arm%C3%B3nico_simple

http://es.wikipedia.org/wiki/P%C3%A9ndulo_de_torsi%C3%B3n

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/pulsacion/pulsacion.htm>

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/acoplados2/acoplados2.htm>

<http://www.ehu.es/acustica/espanol/basico/suones/suones.html>

[http://es.wikipedia.org/wiki/Onda_\(f%C3%ADsisica\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Onda_(f%C3%ADsisica))

<http://www.hiru.com/fisica/difraccion-de-ondas>

http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_1/nr_510/a_7082/7082.htm

http://www.quadernsdigitals.net/datos_web/hemeroteca/r_1/nr_510/a_7082/7082.htm

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/ondas/interferencia/Interferencia.html>