UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MATEMÁTICA DISCRETA- BCC101

NOTAS DE AULA: RECURSIVIDADE

Profª. Dayanne G. Coelho

Ouro Preto - MG
2017

Aula 23: Recursividade

BCC101- Matemática Discreta

(DECOM/UFOP)

1.1 Introdução

A recursividade é um conceito importante na matemática muito utilizado para definir sequências de objetos, funções e conjuntos. A ideia principal da recursividade consiste em utilizar o que se pretende definir na sua definição.

A Figura 1.1 apresenta um exemplo de uma ilustração definida recursivamente. Veja que são realizadas várias sobreposições de sucessivas centralizações de fotos menores sobre uma ilustração inicial.

Figura 1.1: Ilustração definida recursivamente. Fonte: estatisticacomr.uff.br.

Uma definição na qual a função que está sendo definida aparece como parte da definição é chamada de **definição recursiva**. Uma função é dita **recursiva** se a definição desta função se referir à própria função. As funções recursivas possuem:

Passo Básico: uma base, ou condição básica, em que alguns casos simples da função são conhecidos.

Passo Recursivo: ou passo indutivo, em que novos casos da função que está sendo definida são dados em função dos casos anteriores. Neste passo são construídos os novos casos a partir do passo básico.

> Note que as definições recursivas possuem uma estrutura similar a estrutura das estratégias de provas por indução. Assim, a indução matemática será utilizada para demonstrar as propriedades sobre recursividade.

1.2 Sequências Recursivas

Uma sequência é definida como uma lista infinita de objetos que estão numeradas em uma determinada ordem:

$$S = a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1.1}$$

onde a_1 e a_n são, respectivamente, o primeiro e o n-ésimo termo da sequência S, e a_n é chamado de termo geral da sequência.

Recursivamente, uma sequência é definida por:

Passo 1: Nomeia-se o primeiro termo (ou alguns primeiros valores da sequência), ou seja, especifique valor(es) base(s) da função.

Passo 2: Define-se valores subsequentes na sequência em termos de valores anteriores, ou seja, forneça uma regra para encontrar o valor da função a partir de valores anteriores.

Exemplo 1.1 Considere as sequências:

a) $\begin{cases} (1) \quad S(1) = 2 \\ (2) \quad S(n) = 2S(n-1) \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$

- Do item (1) temos que o primeiro elemento da sequência é o número 2.
- Do item (2) temos que o segundo elemento da sequência é $S(2) = 2S(2-1) = 2S(1) = 2(2) = 4$.
- Do item (2) temos que o terceiro elemento da sequência é $S(3) = 2S(3-1) = 2S(2) = 2(4) = 8$.
- Do item (2) temos que o quarto elemento da sequência é $S(4) = 2S(4-1) = 2S(3) = 2(8) = 16$.
- A sequência é: $2, 4, 8, 16, 32, \cdots$

b) $\begin{cases} (1) & f(1) = 3 \\ (2) & f(n) = f(n-1) + 3 \text{ para } n \geq 2 \end{cases}$

- Do item (1) temos que o primeiro elemento da sequência é o número 3.
- Do item (2) temos que o segundo elemento da sequência é $f(2) = f(2-1) + 3 = f(1) + 3 = (3) + 3 = 6$.
- Do item (2) temos que o terceiro elemento da sequência é $f(3) = f(3-1) + 3 = f(2) + 3 = (6) + 3 = 9$.
- Do item (2) temos que o quarto elemento da sequência é$f(4) = f(4-1) + 3 = f(3) + 3 = (9) + 3 = 12$.
- A sequência é: $3, 6, 9, 12, \cdots$

Exemplo 1.2 A famosa **sequência de Fibonacci**[1] é definida recursivamente por:

$$\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(2) = 1 \\ F(n) = F(n-2) + F(n-1) \text{ para } n > 2. \end{cases}$$

Nesta sequência são dados os dois primeiros valores e o n-ésimo termo é definido pela relação de recorrência em termos da soma de dois valores precedentes. Em outras palavras, cada termo para $n > 2$ é calculado pela soma dos dois termos anteriores a ele. Assim, cada termo da sequência é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{lllllll} F(1) & = & 1 & \quad & F(4) & = & 1+2=3 \\ F(2) & = & 1 & & F(5) & = & 2+3=5 \\ F(3) & = & 1+1=2 & & F(6) & = & 3+5=8 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

A sequência de Fibonacci é dada por: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$

A sequência de Fibonacci é famosa por causa das suas propriedades. A seguir serão listadas algumas delas e outras serão apresentadas como exercícios.

1. Todo número inteiro positivo pode ser escrito de maneira única como a soma de um ou mais números de Fibonacci distintos não consecutivos. Exemplo: $11 = 3 + 8$ onde $3 = F(4)$ e $8 = F(6)$.
2. $mdc(F(p), F(q)) = F(mdc(p, q))$. Por exemplo, se $p = 6$ e $q = 9$, então $F(6) = 8$, $F(9) = 34$ e $mdc(8, 34) = 2$. Por outro lado, $mdc(6, 9) = 3$ e $F(3) = 2$.
3. Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.
4. A razão áurea
$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339$$
pode ser aproximada pela razão entre dois números de Fibonacci consecutivos $F(n+1)/F(n)$, com precisão melhor para valores cada vez maiores de n.

[1] Sequência numérica introduzida pelo matemático Leonardo Pisa, mais conhecido como Fibonacci, no século XIII.

Exemplo 1.3 Prove que na sequência de Fibonacci

$$F(n+4) = 3F(n+2) - F(n)$$

para todo $n \geq 1$.

Do exemplo 1.2 os primeiros termos da sequência de Fibonacci são $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \cdots$.

Como o valor de $F(n)$ depende de dois valores anteriores ($F(n-1)$ e $F(n-2)$) usaremos a indução completa para demonstrar a propriedade.

Prova: (**Indução Completa**)

1. **Passo Base:** provar os casos $n = 1$ e $n = 2$:
   - Para $n = 1$, temos $F(5) = 3F(3) - F(1) = 3(2) - 1 \Rightarrow 5 = 5$
   - Para $n = 2$, temos $F(6) = 3F(4) - F(2) = 3(3) - 1 \Rightarrow 8 = 8$

   Logo, $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiros.
2. **Hipótese Indutiva:** suponha que para todo r, com $1 \leq r \leq k$, $F(r+4) = 3F(r+2) - F(r)$.
3. **Passo Indutivo:** mostrar o caso $k+1$ em que $k+1 \geq 3$ (já mostramos para $k = 1$ e $k = 2$):

   Caso $k+1$: $F(k+1+4) = 3F(k+1+2) - F(k+1) \quad \Rightarrow \quad F(k+5) = 3F(k+3) - F(k+1)$

   Da sequência de Fibonacci, temos que o valor de F é obtido pela soma de dois valores anteriores:

   $$F(k+5) = F(k+3) + F(k+4)$$

   Para $r = k-1$ e $r = k$, pela hipótese indutiva, temos respectivamente:

   $$F(k+3) = 3F(k+1) - F(k-1) \quad \text{e} \quad F(k+4) = 3F(k+2) - F(k).$$

   Assim,

   $$\begin{aligned} F(k+5) &= F(k+3) + F(k+4) \quad \textit{substituindo a H.I} \\ &= [3F(k+1) - F(k-1)] + [3F(k+2) - F(k)] \\ &= 3[F(k+1) + F(k+2)] - [F(k-1) + F(k)] \\ &= 3F(k+3) - F(k+1) \quad \textit{usando a relação de recorrência} \end{aligned}$$

   Provando a veracidade da sentença para $k+1$.

Portanto, temos por indução completa que a propriedade é verdadeira. ■

A propriedade também pode ser verificada pela prova direta.

Prova: (**Direta**) Considere a relação de recorrência da sequência de Fibonacci:

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1) \qquad (*)$$

A fórmula acima pode ser reescrita como $F(n+1) = F(n+2) - F(n) \quad (**)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
F(n+4) &= F(n+3) + F(n+2) \\
&= F(n+2) + F(n+1) + F(n+2) \;\; \textit{reescrevendo } F(n+3) \;\; (*) \\
&= F(n+2) + [F(n+2) - F(n)] + F(n+2) \;\; \textit{reescrevendo } F(n+1) \;\; (**) \\
&= 3F(n+2) - F(n)
\end{aligned}$$

Portando, da prova direta temos que a propriedade é verdadeira. ■

Exemplo 1.4 Prove que, para todo $n \geq 3$, $F(n) > a^{n-2}$ sendo $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Prova: (**Indução Completa**)

1. **Passo Base:** provar os casos $n = 3$ e $n = 4$:
   - Para $n = 3$, temos $F(3) = 2$ e $2 > a \approx 1,6180$
   - Para $n = 4$, temos $F(4) = 3$ e $3 > a^2 \approx 2,6180$

   Então, $P(3)$ e $P(4)$ são verdadeiras.
2. **Hipótese Indutiva:** Suponha para todo r, $3 \leq r \leq k$, que $F(r) > a^{r-2}$
3. **Passo Indutivo:** mostrar o caso $k+1$ em que $k+1 \geq 5$ (já provado para $k = 3$ e $k = 4$).

   Queremos mostrar que $F(k+1) > a^{(k+1)-2}$, ou seja, $F(k+1) > a^{(k-1)}$.

   Temos que:
   - a é uma solução da equação $x^2 - x - 1 = 0$
   - $a^2 = a+1$

   Logo,
   $$a^{k-1} = a^2.a^{k-3} = (a+1)a^{k-3} = a.a^{k-3} + 1.a^{k-3} = a^{k-2} + a^{k-3}$$

   Pela hipótese indutiva:
   $$F(k-1) > a^{k-3} \quad \text{e} \quad F(k) > a^{k-2}$$

   Assim:
   $$F(k+1) = F(k) + F(k+1) > a^{k-2} + a^{k-3} = a^{k-1}.$$

   Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, temos que a propriedade é verdadeira para todo $n \geq 3$. ■

Exercício: .

1. Escreva os cinco primeiros valores de cada sequência:

   (a) $S(1) = 10$
   $S(n) = S(n-1) + 10 \ \ para \ \ n \geq 2$

   (b) $C(1) = 5$
   $C(n) = 2C(n-1) + 5 \ \ para \ \ n \geq 2$

   (c) $S(1) = 1$
   $S(n) = S(n-1) + \frac{1}{n} \ \ para \ \ n \geq 2$

   (d) $T(1) = 1$
   $T(2) = 2$
   $T(3) = 3$
   $T(n) = T(n-1) + 2T(n-2) + 3T(n-3) \ \ para \ \ n > 3$

2. Prove a seguinte propriedade dos números de Fibonacci

$$F(n+1) + F(n-2) = 2F(n) \quad \text{para} \ \ n \geq 3$$

   a) Diretamente da Definição.

   b) Usando Indução Completa.

1.3 Funções Recursivas

Algumas funções também podem ser definidas de forma recursiva. A seguir serão apresentados exemplos de funções definidas recursivamente.

Exemplo 1.5 A função $g(n) = n(n+1) + 1$ é definida recursivamente como:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) = 2n + f(n-1) \end{cases}$$

Dizemos que as funções $f(n)$ e $g(n)$ são equivalentes. A tabela seguinte apresenta alguns valores para essas funções.

n	0	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	3	7	13	21	31	43
$g(n)$	1	3	7	13	21	31	43

A equivalência entre as funções $f(n)$ e $g(n)$ é verificada por indução matemática.

Prova: **(Indução Fraca)**

Provar que a função $f(n) = \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) = 2n + f(n-1) \end{cases}$ pode ser reescrita como $f(n) = n(n+1)+1$.

1. **Caso Base:** prova para $n = 0$:
   temos que $f(0) = 1 = 0(0+1)+1$.
2. **Hipótese Indutiva:** suponha para um $k \in \mathbb{N}$ que $f(k) = k(k+1)+1$.
3. **Passo Indutivo:** provar para $k+1$, ou seja, $f(k+1) = (k+1)(k+2)+1$.
   Temos:

$$\begin{aligned}
f(k+1) &= 2(k+1) + f(k+1-1) && \text{pela definição de f(n)} \\
&= 2(k+1) + f(k) \\
&= 2(k+1) + k(k+1)+1 && \text{pela hipótese indutiva} \\
&= (k+1)[2+k]+1 \\
&= (k+1)(k+2)+1 && \text{Provando } f(k+1)
\end{aligned}$$

Portanto, temos que a função recursiva $f(n)$ é equivalente a $f(n) = n(n+1)+1$. ■

DICA:
De maneira geral, para obter uma fórmula fechada (sem recursividade) para uma função recursiva deve-se seguir os seguintes passos:

1. Construir uma tabela contendo alguns valores da função $f(n)$.
2. Da tabela do passo 1, determinar qual função não recursiva produz os mesmos resultados para esses valores.
3. Provar, usando **indução matemática**, que a fórmula fechada encontrada é equivalente a função recursiva.

Exemplo 1.6 Seja a função $f(n)$ definida recursivamente como $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n) = 2f(n-1)+1 \end{cases}$ Encontre a uma fórmula fechada para $f(n)$.

Considere a segunda linha da tabela abaixo com os primeiros valores de $f(n)$. Veja que esses valores, como mostra a linha 3, se aproxima da função 2^n. Para obter os mesmos valores de $f(n)$, basta subtrair 1 da linha 3. Assim, temos que uma possível fórmula fechada para a função recursiva é $f(n) = 2^n - 1$. O próximo passo é provar, usando indução matemática, que essas duas funções são equivalentes.

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(n)$	0	1	3	7	15	31	63	$\cdots$
2^n	1	2	4	8	16	32	64	$\cdots$
$2^n - 1$	0	1	3	7	15	31	63	$\cdots$

Prova: (**Indução Fraca**) Provar que a função recursiva pode ser reescrita como $f(n) = 2^n - 1$.

1. **Caso Base:** prova para $(n = 0)$. Temos que $f(0) = 0 = 2^0 - 1$.
2. **Hipótese Indutiva:** suponha para um $k \in \mathbb{N}$ que $f(k) = 2^k - 1$.
3. **Passo Indutivo:** provar para $k+1$, ou seja, que $f(k+1) = 2^{k+1} - 1$.

   Temos:

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= 2f(k+1-1)+1 && \text{pela definição de f(n)} \\
&= 2f(k)+1 \\
&= 2(2^k - 1)+1 && \text{pela hipótese indutiva} \\
&= 2.2^k - 2 + 1 \\
&= 2^{k+1} - 1 && \text{Provando } f(k+1)
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $f(n) = 2^n - 1$. ■

Exemplo 1.7 Seja a função $f(n)$ definida recursivamente como $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n) = nf(n-1) \end{cases}$ Encontre uma fórmula fechada para $f(n)$.

Considere a tabela abaixo com os primeiros valores de $f(n)$. Veja que esses valores, como mostra a linha 3, também podem ser obtidos pela função $f(n) = n!$. O próximo passo é provar, usando indução matemática, que essas duas funções são equivalentes.

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$f(n)$	1	1	2	6	24	120	760	$\cdots$
$n!$	1	1	2	6	24	120	760	$\cdots$

Prove que $f(n) = n!$

Prova: (**Indução Fraca**) Provar que a função recursiva pode ser reescrita como $f(n) = n!$.

1. **Caso Base:** $(n = 0)$ temos que $f(0) = 1 = 0!$.
2. **Hipótese Indutiva:** suponha para um $k \in \mathbb{N}$ que $f(k) = k!$
3. **Passo Indutivo:** provar para $k+1$, ou seja, $f(k+1) = (k+1)!$

   Temos:

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= (k+1)f(k+1-1) && \text{pela definição def(n)} \\
&= (k+1)f(k) \\
&= (k+1)k! && \text{pela hipótese indutiva} \\
&= (k+1).k! \\
&= (k+1)! && \text{Provando } f(k+1)
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $f(n) = n!$. ■

No exemplo 1.7 temos uma definição recursiva para a operação fatorial.

> Para obter uma função recursiva a partir de uma fórmula fechada é necessário:
> 1. Determinar o primeiro termo da sequência.
> 2. Obter uma regra para $F(n)$ a partir do valor de $F(n-1)$ (ou mais funções anteriores).

Exemplo 1.8 Uma definição recursiva para operação de potenciação $f(n) = a^n$, em que a é um número real não nulo e n é um inteiro não negativo, é dada por:

1. **Passo Base:** primeiro termo é $a^0 = 1$.
2. **Passo Recursivo:** obter uma regra para a^n a partir de a^{n-1}.

   Sabe-s que $a^n = a^{n-1}.a$, para $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Então, é possível obter a seguinte definição recursiva:

$$\begin{cases} a^0 = 1 \\ a^n = a.a^{n-1}, \text{ para } n > 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.9 Para obter a definição recursiva da progressão aritmética:

$$S(n) = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \sum_{i=0}^{n} i$$

considere alguns termos da sequência:

$$\begin{aligned} S(0) &= 0 & S(3) &= 0+1+2+3 = S(2)+3 \\ S(1) &= 0+1 = S(0)+1 & &\vdots \\ S(2) &= 0+1+2 = S(1)+2 & S(n) &= S(n-1)+n \end{aligned}$$

Defini-se como:

1. **Passo Base:** primeiro termo é $s(0) = 0$.
2. **Passo Recursivo:** obter uma regra para $S(n)$ a partir de $S(n-1)$.

   A definição recursiva é dado por

$$f(n) = \begin{cases} S(0) = 0 \\ S(n) = S(n-1) + n, \text{ para } n \geq 1 \end{cases}$$

Exemplo 1.10 Marcos empresta dinheiro aos seus colegas a juros absurdos. Ele exige que um empréstimo seja pago com 10% de juros por semana. Suponha que você pegou $R\$10,00$ emprestado para pagar o seu almoço. Se você esperar um mês para pagar, quanto ficará devendo a Marcos?

Vamos calcular uma função recursiva pra determinar qual será o valor da dívida em 4 semanas. Veja:

1. **Passo Base:** primeiro termo é $F(0) = 10$.
2. **Passo Recursivo:** obter a regra para $F(n)$ a partir de $F(n-1)$. Como o juros cobrado por semana é de 10%, o valor da dívida em cada semana será calculado conforme os seguintes termos:

$$\begin{aligned} &\text{F(1) = 1,1F(0)} \\ &\text{F(2) = 1,1F(1)} \\ &\vdots \\ &\text{F(n) = 1,1F(n-1).} \end{aligned}$$

Assim, uma definição recursiva para o problema é $\begin{cases} F(0) = 10 \\ F(n) = 1,1F(n-1), \quad \text{para} \;\; n \geq 1 \end{cases}$

Logo, no final do mês a dívida será de $F(4) = R\$14,64$.

Exercício: .

1. Encontre relações de recorrência para as sequências:
   (a) $5, 10, 15, 20, 25, 30, ...$
   (b) $1, 7, 14, 22, 31, 41, \cdots$

2. Determine uma definição recursiva para Progressão Geométrica:

$$S(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

3. Seja $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ a soma dos n primeiros quadrados perfeitos. Encontre uma relação de recorrência para $S(n)$.

1.4 Exercícios Complementares

1. Escreva os cinco primeiros valores da sequência:
   (a) $B(1) = 1$
   $B(n) = B(n-1) + n^2 \;\; para \;\; n \geq 2$
   (b) $A(1) = 2$
   $A(n) = \frac{1}{A(n-1)} \;\; para \;\; n \geq 2$
   (c) $A(1) = 1$
   $A(n) = nA(n-1) + n \;\; para \;\; n \geq 2$
   (d) $M(1) = 2$
   $M(2) = 2$
   $M(n) = 2M(n-1) + M(n-2) \;\; para \;\; n > 2$
   (e) $M(1) = 2$
   $M(2) = 3$
   $M(n) = M(n-1)M(n-2) \;\; para \;\; n > 2$

2. Dê uma definição recursiva para as sequências.
   (a) $1, 3, 9, 27, 81, ...$
   (b) $1, 2, 4, 7, 11, 16, 22...$
   (c) $a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b$
3. Prove a propriedade dada dos números de Fibonacci diretamente da definição.
   (a) $F(n+1) + F(n-2) = 2F(n)$ para $n \geq 3$
   (b) $F(n+3) = 2F(n+1) + F(n)$ para $n \geq 1$
4. Prove a propriedade dada dos números de Fibonacci usando o primeiro princípio da indução (**indução fraca**):
   (a) $F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(n) = F(n+2) - 1$
   (b) $F(1) + F(3) + F(5) + \cdots + F(2n-1) = F(2n)$
5. Prove a propriedade dada dos números de Fibonacci usando o segundo princípio da indução (**indução completa**).
   (a) $F(n+3) = 2F(n+1) + F(n)$ para $n \geq 1$
   (b) $F(n) < 2^n$ para $n \geq 1$
6. Apresente uma definição recursiva para as seguintes funções:
   (a) $f(n) = 4n - 2$
   (b) $f(n) = n(n+1)$
   (c) $f(n) = 1 + (-1)^n$
   (d) $f(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2$
   (e) $f(n) = \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \cdots + \frac{2n-1}{n}$

7. Seja x um inteiro não negativo e suponha que F seja definida recursivamente como a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \;\; x = 0 \\ xf(x-1) & se \;\; x > 0 \end{cases}$$

   (a) Determine os valores de $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ e $f(3)$.

   (b) Qual propriedade matemática a função $f(x)$ representa?

8. Encontre uma fórmula fechada (sem recursividade) equivalente a cada uma das funções recursivas a seguir e prove que a fórmula encontrada é equivalente a função em questão.

   (a) $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 2T(n-1) + n \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} T(0) = 2 \\ T(n) = [T(n-1)]^2 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = \dfrac{T(n-1)}{1 + T(n-1)} \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} T(1) = \dfrac{1}{4} \\ T(2) = \dfrac{1}{8} \\ T(n) = \dfrac{T(n-1)T(n-2)}{2T(n-2) - T(n-1)} \end{cases}$

Aula 24: Recursividade

BCC101- Matemática Discreta
(DECOM/UFOP)

2.1 Conjuntos definidos recursivamente

Um conjunto de objetos é uma coleção na qual, diferente de uma sequência, não há nenhuma ordem imposta entre seus objetos.

Exemplo 2.1 Considere um subconjunto $S \subseteq \mathbb{Z}$ definido recursivamente por:

1. **Passo Base:** $3 \in \mathbb{S}$.
2. **Passo Recursivo:** Se $x \in \mathbb{S}$ e $y \in \mathbb{S}$, então $x + y \in \mathbb{S}$.

Os elementos do conjunto S são:

- Do passo base: 3.
- Da aplicação do passo recursivo: $3 + 3 = 6$.
- Da aplicação do passo recursivo novamente: $3 + 6 = 6 + 3 = 9$ e $6 + 6 = 12$
- $\vdots$
- Se continuarmos aplicando o passo recursivo, veremos que S é o conjunto dos números inteiros positivos múltiplos de 3.

Exemplo 2.2 O conjunto de todas as cadeias (de comprimento finito) dos símbolos de um alfabeto S é denotado por S^*. A definição recursiva de S^* é:

1. A **cadeia vazia** $\lambda \in S^*$ (cadeia sem nenhum símbolo).
2. Um único elemento qualquer de S pertence S^*.
3. Se $x, y \in S^*$ então $xy \in S^*$.

Os passos 1 e 2 constituem o passo base e o passo 3 o passo recursivo. Assim, dado o conjunto $S = \{0, 1\}$, temos que os elementos do conjunto S^* são definidos recursivamente por:

- Do passo base: 0 e 1.
- Da aplicação do passo recursivo 1 vez: 00, 01, 10 e 11.
- $\vdots$

Exemplo 2.3 O conjunto de **árvores com raiz**, em que uma árvore com raiz consiste em um conjunto de vértices que contém um vértice distinto (raiz) e arestas que conectam esses vértices, é definido recursivamente por:

1. **Passo Base:** um único vértice r é uma árvore com raiz.
2. **Passo Recursivo:** Suponha as árvores com raízes disjuntas $T_1, T_2, \cdots, T_n$ que possuem, respectivamente, as raízes $r_1, r_2, \cdots, r_n$. Então, o grafo formado começando com uma raiz r que não esteja em nenhuma das árvores $T_1, T_2, \cdots, T_n$ e adicionando uma aresta a partir de r a cada um dos vértices $r_1, r_2, \cdots, r_3$, também é uma árvore com raiz.

A Figura 2.1 ilustra as construção recursiva de árvores com raízes formadas a partir do passo 1 e aplicando o passo 2.

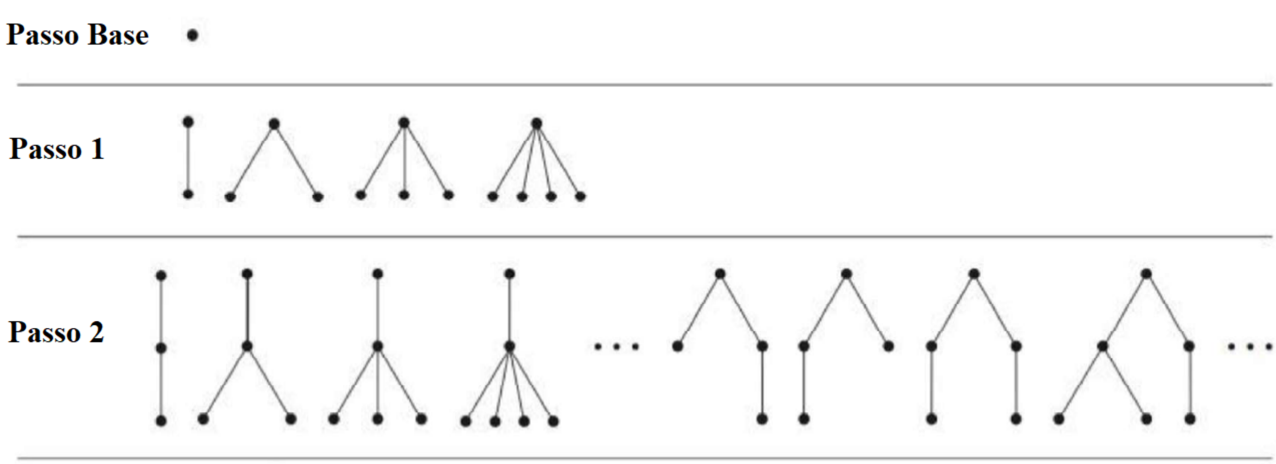

Figura 2.1: Construção recursiva de árvores com raízes. Fonte: [1]

Exemplo 2.4 No início do curso de matemática discreta I, vimos que certas cadeias de letras de proposição, conectivos lógicos e parênteses são consideradas legítimas (por exemplo: $\neg(A \vee B) \wedge C$) enquanto outras não (por exemplo: $\vee \vee (\neg A)B$). A sintaxe para arranjar os símbolos constitui a definição do conjunto de fórmulas bem formadas para proposições compostas. O conjunto $\mathcal{F}$ de fórmulas bem formadas da lógica proposicional é definido recursivamente da seguinte maneira:

1. **Passo Base:** as constantes lógicas $T,\ F \in \mathcal{F}$ e denotam verdadeiro e falso, respectivamente.
2. **Passo Base:** qualquer variável proposicional é uma fórmula bem formada.
3. **Passo Recursivo:** Se $\alpha,\ \beta \in \mathcal{F}$, então:
   (a) $\neg\alpha \in \mathcal{F}$.
   (b) $(\alpha \vee \beta); (\alpha \wedge \beta); (\alpha \rightarrow \beta); (\alpha \leftrightarrow \beta) \in \mathcal{F}$.

Começando com letras para representar as proposições e aplicando, repetidamente, o passo 3, podemos construir todos os elementos do conjunto $\mathcal{F}$. Considere por exemplo:

- Do passo base: p, q e r.

- 1^a aplicação do passo recursivo: $(p \vee q)$ e $(\neg q)$.
- 2^a aplicação do passo recursivo: $(p \vee q) \to (\neg q)$
- 3^a aplicação do passo recursivo: $\neg((p \vee q) \to (\neg q))$

Eliminando os parênteses temos: $\neg((p \vee q) \to \neg q)$.

2.2 Problemas Recursivos

A seguir são apresentados exemplos de problemas que podem ser modelados utilizando funções recursivas.

Exemplo 2.5 Suponha que uma pizzaria que possui a seguinte promoção:

> "**O cliente que conseguir descobrir o número máximo de pedaços que pode ser obtido ao se fazer $n \in \mathbb{N}$ cortes em uma pizza, não a pagará.**"

Como solucionar o problema para que seja possível comer uma pizza de graça?
Vamos chamar de $F(n)$ o número de fatias obtidas após fazermos o n-ésimo corte. Considere algumas instâncias para o problema:

- $n = 0$: não fizemos nenhum corte, temos então apenas uma fatia (pizza inteira) $T(0) = 1$.
- $n = 1$: ao fazer o primeiro corte, dividimos a pizza em duas fatias, ou seja, $T(1) = 2$.
- $n = 2$: ao fazer o segundo corte, dividimos a pizza em quatro fatias, ou seja, $T(2) = 4$.
- $n = 3$: Quantas fatias obtemos ao fazer o 3^o corte?
  Por intuição a resposta para esta pergunta será $T(3) = 6$, porém, conforme mostrado na Figura 2.2, isso não é verdade.

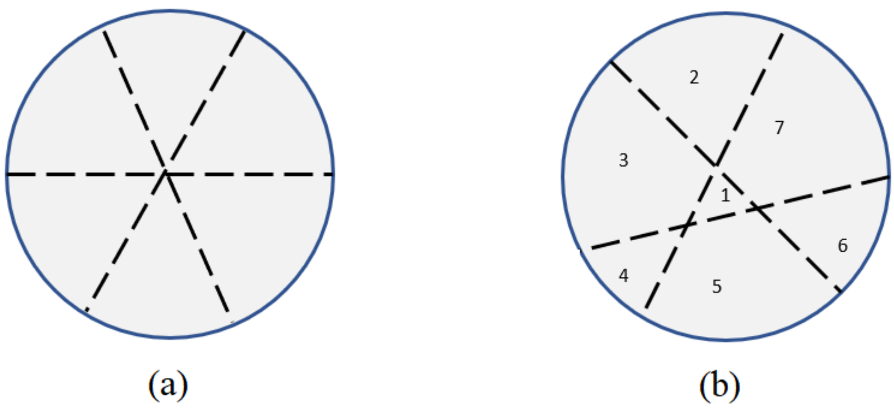

Figura 2.2: (a) Exemplo do corte intuitiva da pizza para $n = 3$. (b) Corte correto da pizza para $n = 3$ para que se tenha o número máximo de fatias.

Para obter a maior quantidade de fatias é necessário fazer com que o n-ésimo corte intercepte todos os cortes anteriores. Assim temos que:

- $n = 3$: ao fazer o terceiro corte, dividimos a pizza em sete fatias, ou seja, $F(3) = 4 + 3 = 7$.

A definição recursiva de $F(n)$ é dada por:

- **Passo Base:** $F(0) = 1$
- **Passo Recursivo:** $F(n) = F(n-1) + n$ para $n \geq 1$

A fórmula fechada obtida a partir da função recursiva:

$$\begin{aligned}
F(n) &= F(n-1) + n \\
&= [F(n-2) + (n-1)] + n \\
&= F(n-2) + (n-1) + n \\
&= [F(n-3) + (n-2)] + (n-1) + n \\
&= \vdots \\
&= F(0) + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} k
\end{aligned}$$

Por indução é possível verificar que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Assim, a fórmula fechada equivalente a função recursiva $\begin{cases} F(0) = 1 \\ F(n) = F(n-1) + n \end{cases}$ é:

$$F(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1. \tag{2.1}$$

Vamos verificar por indução que a fórmula fechada da Equação 2.1 é equivalente a função recursiva.

Prova: **(por indução)**

1. **Caso Base:** ($n = 0$) temos que $F(0) = \frac{0(0+1)}{2} + 1 = 1$.
2. **Hipótese Indutiva:** suponha $k \in \mathbb{N}$ arbitrário de tal forma que $F(k) = \frac{k(k+1)}{2} + 1$ é verdadeiro.
3. **Passo Indutivo:** Provar $F(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$. Veja que:

$$\begin{aligned}
F(k+1) &= F(k) + (k+1) && \text{pela definição recursiva de } F(n) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) && \text{pela hipótese de indução} \\
& \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} + 1 \\
& \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 && \text{Provando } F(k+1).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.6 Um grupo de n soldados deseja atravessar um rio largo e fundo que não possui ponte. Eles veem apenas uma pequena canoa, na margem onde estão, na qual estão dois meninos. Os meninos concordaram em ajudar os soldados. Porém, a canoa é tão pequena que nela só cabem 2 meninos ou 1 soldado. Dado que nenhum dos soldados sabe nadar:

- É possível atravessar os n soldados para a margem oposta, deixando, ao final, os 2 meninos na margem onde se encontravam originalmente?
- Qual é o menor número de travessias da canoa de uma margem para a outra?

Considere algumas instâncias para o problema:

- $n = 1$: temos que o número de travessias é $T(1) = 4$.
- $n = 2$: temos que o número de travessias é $T(2) = 4 + T(1)$
- $n = 3$: temos que o número de travessias é $T(3) = 4 + T(2)$

Assim, a definição recursiva do problema é dada por:

- **Passo Base:** primeiro termo: $T(1) = 4$
- **Passo Recursivo:** $T(n) = 4 + T(n-1)$ para $n > 1$
- A partir da função recursiva, é possível obter uma fórmula fechada equivalente?

$$\begin{aligned}
T(n) &= 4 + T(n-1) \\
&= 4 + [4 + T(n-2)] = 2 \times 4 + T(n-2) \\
&= 2 \times 4 + [4 + T(n-3)] = 3 \times 4 + T(n-3) \\
&= \vdots \\
&= k \times 4 + T(n-k) \\
&= n \times 4 + T(0) = 4n
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula fechada equivalente a função recursiva é $T(n) = 4n$. A veracidade da afirmação pode ser comprovada aplicando a prova por indução.

Exemplo 2.7 Considere um tabuleiro de tamanho $2^n \times 2^n$ no qual apenas um quadrado está coberto. Quantos triominós de formatos L [1] são necessários para cobrir os quadrados restantes, sem que os triominós se sobreponham?

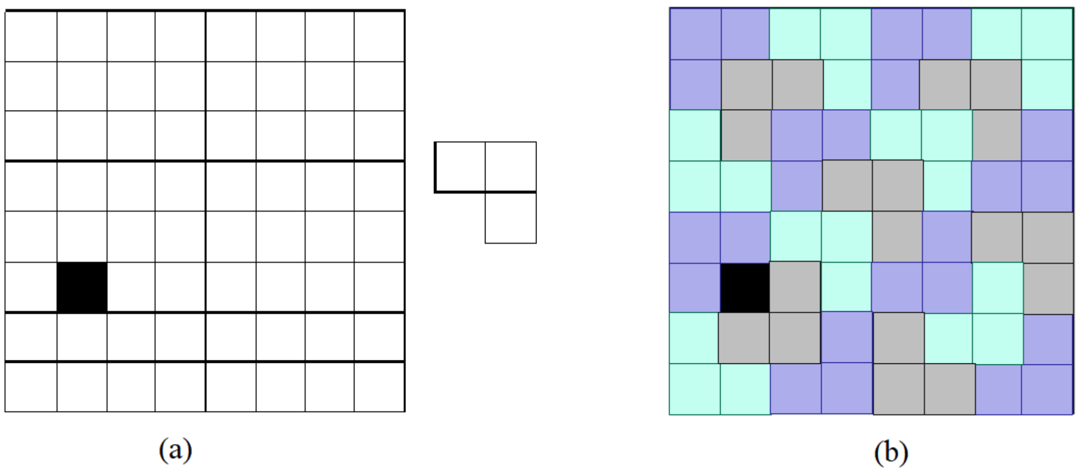

Figura 2.3: (a) Exemplo de um tabuleiro de tamanho $2^3 \times 2^3$. (b) Exemplo de uma solução para este tabuleiro.

Considere algumas instâncias para o problema:

[1] Um triominó de formato L é formado por 3 quadrados. A Figura 2.3 (a), que apresenta um exemplo de um tabuleiro de tamanho $2^3 \times 2^3$ e de um triominó.

- $n = 0$: tabuleiro possui dimensão $2^0 \times 2^0$ o número de triominós necessários para cobrir o tabuleiro são $T(0) = 0$
- $n = 1$: tabuleiro possui dimensão $2^1 \times 2^1$ o número de triominós necessários para cobrir o tabuleiro são $T(1) = 1$
- $n = 2$: tabuleiro possui dimensão $2^2 \times 2^2$ o número de triominós necessários para cobrir o tabuleiro são $T(2) = 5$
- $n = 3$: tabuleiro possui dimensão $2^3 \times 2^3$ o número de triominós necessários para cobrir o tabuleiro são $T(3) = 21$

A definição recursiva do problema é dada por:

- **Passo Base:** $T(0) = 0$
- **Passo Recursivo:** $T(n) = 4T(n-1) + 1$ para $n \geq 1$

A fórmula fechada pode então ser obtida a partir da função recursiva:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 4T(n-1) + 1 \\
&= 4[4T(n-2) + 1] + 1 = 4^2T(n-2) + 4 + 1 \\
&= 4^2[4T(n-3) + 1] + 4 + 1 = 4^3T(n-3) + 4^2 + 4 + 1 \\
&= \vdots \\
&= 4^kT(n-k) + 4^{k-1} + 4^{k-2} + \ldots + 4^2 + 4^1 + 4^0 \\
&= 4^nT(0) + \sum_{i=0}^{n-1} 4^i = \sum_{i=0}^{n} 4^i
\end{aligned}
$$

Veja que o último somatório obtido é uma progressão geométrica, onde $a_1 = 1$ e $q = 4$. Aplicando a fórmula da soma dos n termos de uma PG obtemos que:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

Assim, podemos concluir que a fórmula fechada equivalente a função recursiva é $T(n) = \frac{4^n-1}{3}$. A veracidade desta afirmação pode ser obtida usando a prova por indução.

2.3 Exercícios Complementares

Exercícios adaptados de [2, 3, 4]

1. Em um experimento, determinada colônia de bactérias tem uma população inicial de 50.000. A população é contada a cada 2 horas, e, ao final de cada intervalo de 2 horas, a população triplica.
   (a) Escreva uma definição recorrente para a sequência $A(n)$, o número de bactérias presentes no n-ésimo período de tempo.
   (b) No início de qual intervalo haverá 1.350.000 bactérias presentes?
2. Um determinado número m de caixas vazias são colocadas sobre uma mesa. Destas são selecionadas k caixas, dentro de cada uma das quais são colocadas 8 caixas médias vazias. Em seguida, k dentre as caixas médias são selecionadas e dentro de cada uma são colocadas 8 caixas pequenas vazias. E assim por diante, em cada passo.

(a) Defina recursivamente o número de caixas vazias existentes em cada passo.

(b) Defina recursivamente o número total de caixas existentes em cada passo.

(c) Supondo que temos inicialmente 11 caixas e que, ao final, teremos 102 caixas vazias, qual é o total de caixas ao final?

3. Sejam a e b inteiros positivos e suponha que Q é uma função definida recursivamente:

$$Q(a,b) = \begin{cases} 0 & se \ \ a < b \\ Q(a-b,b)+1 & se \ \ b \leq a \end{cases}$$

(a) Determine $Q(2,5)$ e $Q(12,5)$

(b) Qual propriedade matemática a função Q representa?

(c) Calcule $Q(5861,7)$.

4. O famoso quebra-cabeça da Torre de Hanói envolve três pinos e n discos de tamanhos variados empilhados em um dos pinos por ordem crescente do diâmetro, com o disco com o maior diâmetro debaixo de todos e o menor no topo da pilha. O problema consiste em empilhar os discos da mesma forma em outro pino, só podendo ser movido um pino por vez, e respeitando a regra de que um disco maior nunca poderá ficar em cima de um menor. Escreva um função recursiva para determinar o menor número de movimentos para resolver o quebra-cabeça da Torre de Hanói.

5. É possível obter uma fórmula fechada para a definição recursiva do exercício anterior? Em caso afirmativo, prove por indução a fórmula que a fórmula obtida é verdadeira.

6. Em um pátio fechado coloca-se um casal de coelhos. Suponha que em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos e que os coelhos não morrem. Ao fim de 6 meses, quantos casais de coelhos estarão no pátio? Utilize a sequência de Fibonacci para resolver o problema.

7. Seja A um conjunto. Representamos por $\mathcal{P}_2(A)$ o conjunto de todos os subconjuntos de A que contém 2 elementos. Prove que para todo conjunto A, se $|A| = n$, então $|\mathcal{P}_2(A)| = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Referências Bibliográficas

[1] ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.

[2] RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

[3] GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science.* 2. ed. Boston, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., 1994.

[4] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

[5] HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

[6] DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

Respostas dos Exercícios Complementares

Aula 23

1.4 - Recursividade

1. (a) $S = 1, 5, 14, 30, 55$
   (b) $S = 2, 1/2, 2, 1/2, 2$
   (c) $S = 1, 4, 15, 64, 325$
   (d) $S = 2, 2, 6, 14, 34$
   (e) $S = 2, 3, 6, 18, 108$

2. (a)
$$\begin{array}{rcl} F(1) & = & 1 \\ F(n) & = & 3 \times F(n-1) \quad \text{se} n > 1 \end{array}$$
   (b)
$$\begin{array}{rcl} F(1) & = & 1 \\ F(n) & = & F(n-1) + (n-1) \quad \text{se} n > 1 \end{array}$$
   (c)
$$\begin{array}{rcl} F(1) & = & a \\ F(2) & = & b \\ F(n) & = & F(n-2) + F(n-1) \quad \text{se} n > 2 \end{array}$$

3. Considere a relação de recorrência da sequência de Fibonacci:
$$F(n) = F(n-2) + F(n-1) \qquad (*)$$
   (a) (**Prova Direta**) Temos que:
$$\begin{array}{rcl} F(n+1) + F(n-2) & = & F(n-1) + F(n) + F(n-2) \;\; \textit{Reescrevendo F(n+1) usando a equação (*)} \\ & = & [F(n-2) + F(n-1)] + F(n) \\ & = & F(n) + F(n) \;\; \textit{pela equação (*)} \\ & = & 2F(n) \end{array}$$
   Por prova direta, temos que a propriedade é verdadeira, c.q.d.

   (b) (**Prova Direta**) Temos:
$$\begin{array}{rcl} F(n+3) & = & F(n+2) + F(n+1) \;\; \textit{substituindo (n+3) na equação (*)} \\ & = & [F(n+1) + F(n)] + F(n+1) \;\; \textit{reescrevendo F(n+2) usando a equação (*)} \\ & = & 2F(n+1) + F(n) \end{array}$$

Por prova direta, temos que a propriedade é verdadeira, c.q.d.

4. Considere a relação de recorrência da sequência de Fibonacci:

$$F(n) = F(n-2) + F(n-1) \qquad (*)$$

(a) **(Prova por Indução Fraca)**

1) **Passo Base:** ($n = 1$) $F(1) = F(3) - 1$, ou seja, $1 = 2 - 1 = 1$.

Portanto, para $n = 1$ a sentença é verdadeira.

2) **Hipótese Indutiva:** Suponha verdade para $n = k$ arbitrário, ou seja,

$$F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(k) = F(k+2) - 1$$

3) **Passo da Indução:** Provar para $n = k+1$, ou seja:

$$F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(k) + F(k+1) = F(k+3) - 1$$

Temos que:

$$\begin{aligned} F(1) \quad & +F(2) + F(3) + \cdots + F(k) + F(k+1) = \\ & = F(k+2) - 1 + F(k+1) && \textit{pela hipótese de indução} \\ & = F(k+3) - 1 && \textit{Aplicando a equação (*).} \end{aligned}$$

Provando que $k+1$ é verdadeira.

Portanto, por indução, temos que a propriedade é verdadeira, c.q.d.

(b) (**Prova por Indução Fraca**)

1) **Passo Base:** ($n = 1$) $F(1) = F(2)$, ou seja, $1 = 1$.

Portanto, para $n = 1$ a sentença é verdadeira.

2) **Hipótese Indutiva:** Suponha verdade para $n = k$ arbitrário, ou seja:

$$F(1) + F(3) + F(5) + \cdots + F(2k-1) = F(2k)$$

3) **Passo da Indução:** Provar para $n = k+1$, ou seja,

$$F(1) + F(3) + F(5) + \cdots + F(2k-1) + F(2(k+1)-1) = F(2(k+1))$$

Temos que:

$$\begin{aligned} F(1) \quad & +F(3) + F(5) + \cdots + F(2k-1) + F(2(k+1)-1) = \\ & = F(2k) + F(2(k+1)-1) && \textit{pela hipótese de indução} \\ & = F(2k) + F(2k+1) \\ & = F(2k+2) && \textit{aplicando a equação (*)} \\ & = F(2(k+1)) \end{aligned}$$

Provando que $k+1$ é verdadeira.

Portanto, por indução, temos que a propriedade é verdadeira, c.q.d.

5. Considere a relação de recorrência da sequência de Fibonacci:

$$F(n) = F(n-2) + F(n-1) \qquad (*)$$

(a) (**Prova por Indução Completa**)

1) **Passo Base:** provar os casos $(n=1)$ e $(n=2)$. Temos:

- $(n=1)$ $F(4) = 2F(2) + F(1)$, ou seja, $3 = 2(1) + 1$ é verdadeira.
- $(n=2)$ $F(5) = 2F(3) + F(2)$, ou seja, $5 = 2(2) + 1$ é verdadeira.

2) **Hipótese Indutiva:** Suponha para todo r tal que $1 \leq r \leq k$ que $F(r+3) = 2F(r+1) + F(r)$.

3) **Passo da Indução:** mostrar o caso $k+1$, em que $k+1 \geq 3$, pois já provamos para $(k=1)$ e $(k=2)$.

Vamos provar que $F(k+4) = 2F(k+2) + F(k+1)$. Então:

$$\begin{aligned}
F(k+4) &= F(k+2) + F(k+3) && \textit{aplicando a equação (*)} \\
&= [2F(k) + F(k-1)] + [2F(k+1) + F(k)] && \textit{pela hipótese indutiva.} \\
&= 2[F(k) + F(k+1)] + [F(k) + F(k-1)] \\
&= 2F(k+2) + F(k+1) && \textit{aplicando a equação (*)}
\end{aligned}$$

Provando que $k+1$ é verdadeira.

Portanto, por indução, temos que a propriedade é verdadeira, c.q.d.

(b) (**Prova por Indução Completa**)

1) **Passo Base:** provar $(n=1)$ e $(n=2)$. Temos:

- $(n=1)$ $F(1) < 2^1$, ou seja, $1 < 2$ é verdadeira.
- $(n=2)$ $F(2) < 2^2$, ou seja, $1 < 4$ é verdadeira.

2) **Hipótese Indutiva:** Suponha para todo r tal que $1 \leq r \leq k$ que $F(r) < 2^r$.

3) **Passo da Indução:** provar o caso $k+1$, em que $k+1 \geq 3$, pois já mostramos para $(k=1)$ e $(k=2)$.

Vamos provar que $F(k+1) < 2^{k+1}$. Então:

$$\begin{aligned}
F(k+1) &= F(k-1) + F(k) && \textit{aplicando a equação (*)} \\
&< 2^{k-1} + 2^k && \textit{pela hipótese indutiva} \\
&< 2^{k-1} + 2.2^{k-1} \\
&< 2^{k-1}(1+2) \\
&< 2^{k-1}(3) \\
&< 2^{k-1}(4) \\
&< 2^{k-1}2^2 && = 2^{k+1}
\end{aligned}$$

Provando que $k+1$ é verdadeira.

Portanto, por indução, temos que a propriedade é verdadeira, c.q.d.

6. (a)
$$\begin{aligned}
f(0) &= -2 \\
f(n) &= f(n-1) + 4 \quad \text{para } n > 0
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f(n) &= f(n-1) + 2n \quad \text{para } n > 0
\end{aligned}$$

(c) $\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(n) &= -f(n-1)+2 \quad \text{para } n>0 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(n) &= f(n-1)+n^2 \quad \text{para } n>0 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1)+(2n-1)/n \quad \text{para } n>1 \end{aligned}$

7. (a) $\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1.1=1 \\ f(2) &= 2.1=2 \\ f(3) &= 3.2=6 \end{aligned}$

   (b) Esta função fornece o fatorial de um número inteiro não negativo x.

8. (a) Fórmula Fechada pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1)+n \\ &= 2(2T(n-2)+n-1)+n \\ &= 4T(n-2)+2(n-1)+n \\ &= 8T(n-3)+4(n-2)+2(n-1)+n \\ &= 2^kT(n-k)+\sum_{j=0}^{k-1}2^j(n-j) \\ &= 2^{n-1}T(1)+\sum_{j=0}^{n-2}2^j(n-j) \\ &= 2^{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}2^j(n-j) \end{aligned}$$

Onde:
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-2}2^j(n-j) &= n\sum_{j=0}^{n-2}2^j-\sum_{j=0}^{n-2}j2^j \\ &= n(2^{n-1}-1)-\tfrac{n.2^n-3.2^n+4}{2} \\ &= n(2^{n-1}-1)-(n.2^{n-1}-3.2^{n-1}+2) \\ &= 3.2^{n-1}-n-2 \end{aligned}$$

Assim: $T(n)=2^{n-1}+3.2^{n-1}-n-2=2^{n+1}-n-2$

   (b)

   (c)

   (d)

Aula 24

2.3 - Recursividade

1. (a) $\begin{cases} A(1) = 50.000 \\ A(n) = 3A(n-1) \quad \text{para } n \geq 2 \end{cases}$

   (b) 4

2. (a) Seja $\mathtt{v}(n)$ o número de caixas vazias em cada passo. Temos: $\begin{cases} \mathtt{v}(0) = m \\ \mathtt{v}(n) = \mathtt{v}(n-1)+7k \end{cases}$

   (b) Seja $\mathtt{c}(n)$ o número total de caixas em cada passo. Temos: $\begin{cases} \mathtt{c}(0) = m \\ \mathtt{c}(n) = \mathtt{c}(n-1)+8k \end{cases}$

(c) A partir das equações recursivas para $\mathrm{v}(n)$ e $\mathrm{c}(n)$, podemos obter, as seguintes fórmulas fechadas para $\mathrm{v}(n)$ e $\mathrm{c}(n)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{v}(n) &= 7kn+m \\ \mathrm{c}(n) &= 8kn+m \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\mathrm{c}(0) = \mathrm{v}(0)$ e $\mathrm{c}(n) = \frac{8}{7}(\mathrm{v}(n)-m)+m$, para $n > 0$. Então, se restaram 102 caixas vazias, o total de caixas é 115.

3. (a) $Q(2,5) = 0$ pois $2 < 5$. Temos:

$$\begin{aligned} Q(12,5) &= Q(7,5)+1 \\ &= [Q(2,5)+1]+1 \\ &= Q(2,5)+2 = 2 \end{aligned}$$

(b) Cada vez que b é subtraído de a, o valor de Q aumenta em 1. Portanto a função determina o quociente da divisão de a por b.

(c) $Q(5861,7) = 837$.

4. Considere os casos iniciais:
   - ($n = 1$): a Torre de Hanói com apenas 1 disco. Neste caso, seria suficiente apenas um movimento, ou seja, $F(1) = 1$.
   - ($n = 2$): a Torre de Hanói com 2 discos. Neste caso, são necessários três movimentos (veja a Figura 3.1), ou seja, $F(2) = 3$.

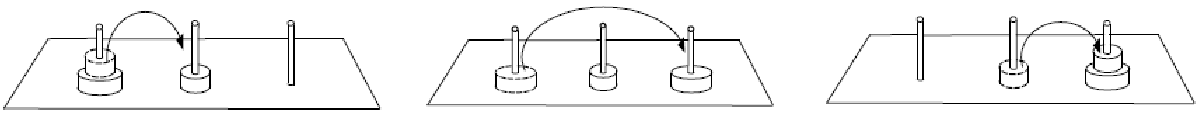

Figura 3.1: Solução da Torre de Hanói para $n = 2$.

   - ($n = 3$): a Torre de Hanói com 3 discos. Neste caso, são necessários sete movimentos (veja a Figura 3.2), ou seja, $F(2) = 3$.

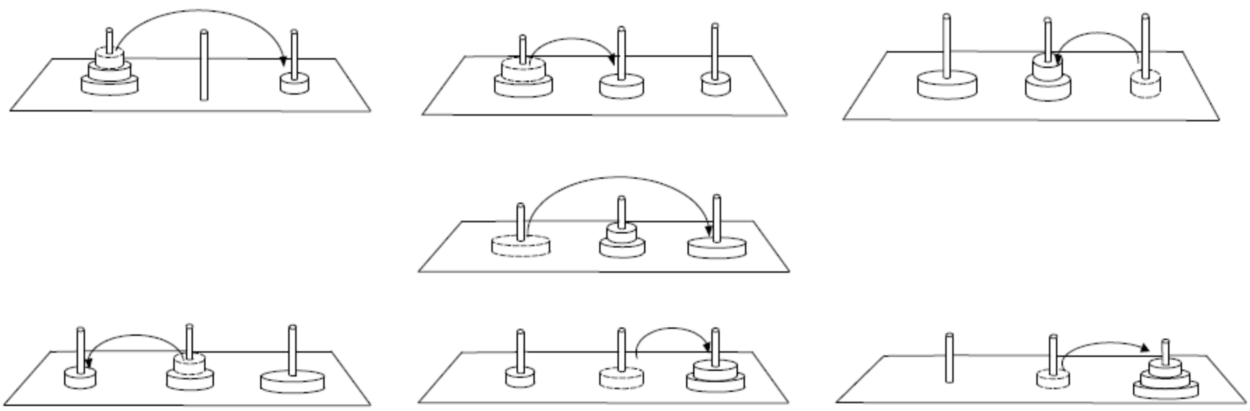

Figura 3.2: Solução da Torre de Hanói para $n = 3$.

Observe que para 3 discos, nos três primeiros e nos últimos movimentos, repetimos os movimentos feitos realizados quando ($n = 2$). Logo temos que $F(3) = 2F(2)+1 = 2(3)+1 = 7$.

Com, dois discos o mesmo efeito acontece: $F(2) = 2F(1) + 1 = 2(1) + 1 = 3$.

Seguindo este raciocínio, temos:

- $F(4) = 2F(3) + 1 = 2(7) + 1 = 15$ movimentos.
- $F(5) = 2F(4) + 1 = 2(15) + 1 = 31$ movimentos.
- $F(6) = 2F(5) + 1 = 2(31) + 1 = 63$ movimentos.

A função recursiva para n discos é dada por: $\begin{cases} \text{F(1)=1} \\ \text{F(n) = 2F(n-1)+1, se n¿1} \end{cases}$

5. A função recursiva é dada por: $\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(n) = 2F(n-1) + 1, \text{ para } n > 1 \end{cases}$

A fórmula direta é obtida por:

$$
\begin{aligned}
F(n) &= 2F(n-1) + 1 \\
&= 2[2F(n-2) + 1] + 1 = 2^2F(n-2) + 2 + 1 \\
&= 2^2[2F(n-3) + 1] + 2 + 1 = 2^3F(n-3) + 2^2 + 2 + 1 \\
&= \vdots \\
&= 2^kF(n-k) + 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\
&= \vdots \\
&= 2^nF(0) + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} 2^i
\end{aligned}
$$

Que é uma PG com $a_1 = 1$ e $q = 2$, então $f(n) = 2^n - 1$

Prova: **(por indução)**

1) **Caso Base:** para $(n = 0)$ temos $f(0) = 0 = 1 - 1 = 2^0 - 1$
2) **Hipótese Indutiva:** suponha $k \in \mathbb{N}$ arbitrário e que $f(k) = 2^k - 1$.
3) **Passo Indutivo:** Queremos provar para $n = k+1$, ou seja, $f(k+1) = 2^{k+1} - 1$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
f(k+1) &= 2f(k) + 1 && \text{pela definição recursiva de } f(n) \\
&= 2(2^k - 1) + 1 && \text{pela hipótese de indução} \\
&= 2^{k+1} - 2 + 1 \\
&= 2^{k+1} - 1 && \text{provando a veracidade de } f(k+1)
\end{aligned}
$$

■

---

6. Sejam algumas instâncias do problema:
   - $f(1) = 1$
   - $f(2) = 1$
   - $f(3) = 2$; o casal deu origem a um novo casal.
   - $f(4) = 3$; o casal inicial deu origem a um novo casal.
   - $f(5) = 5$; o casal nascido em $f(3)$ começa a reproduzir.
   - $f(6) = 8$; os casais nascidos em $f(4)$ começam a reproduzir

A função recursiva é: $\begin{cases} F(1) = 1 \\ F(2) = 1 \\ F(n) = F(n-2) + F(n-1), \ \ \text{para} \ \ n > 2 \end{cases}$

7.