Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Computação
Matemática Discreta- BCC101

Notas de Aula: Teoria de Conjuntos

Prof^{a}. Dayanne G. Coelho

Ouro Preto - MG
2017

Aula 18: Introdução aos Conjuntos

BCC101- Matemática Discreta

(DECOM/UFOP)

1.1 Introdução a Teoria dos Conjuntos

Definimos **conjunto** como uma coleção de objetos, sem repetição e não ordenada, em que seus elementos possuem uma propriedade em comum (além de pertencerem ao mesmo conjunto). Assim, qualquer objeto que possui essa propriedade pertence ao conjunto e qualquer objeto que não possui essa propriedade não pertence ao conjunto [1]. Um objeto pertencente a um conjunto é chamado de **elemento do conjunto**.

Usaremos, como convenção, letras maiúsculas para representar conjuntos e letras minúsculas para representar seus elementos. O símbolo $\in$ será usado para denotar pertinência em um conjunto. Assim, $x \in A$ significa que um elemento x pertence ao conjunto A, ou seja, x é um elemento deste conjunto. De forma similar, $x \notin A$ significa que x não pertence ao conjunto A.

Tabela 1.1: Utilização do símbolo $\in$

Notação Simbólica	**Tradução para o português**
$x \in A$	"x pertence a A"
$x \in A$	"x é elemento de A"
$x \notin A$	"x não pertence a A"
$x \notin A$	"x não é elemento de A"

Como os elementos podem ocorrer uma única vez em um conjunto, a operação determinar se um elemento pertence ou não a um conjunto possui um valor lógico (verdadeiro ou falso).

1.1.1 Notação de Conjuntos

Um conjunto pode ser definido de várias maneiras. Vamos apresentar de forma sucinta algumas delas.

Por enumeração

Se um conjunto possui poucos elementos, vamos representá-lo por enumeração listando todos os seus elementos, um a um, entre chaves.

Exemplo 1.1 Conjuntos definidos por enumeração:

$$\begin{aligned}
&A = \{\text{azul, verde, vermelho, amarelo}\}\\
&V = \{\text{a, e, i, o, u}\}\\
&P = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\\
&J = \{\ \ \}
\end{aligned}$$

- Proposições sobre pertinências verdadeiras nestes conjuntos:
  - $azul \in A$
  - $preto \notin A$
  - $5 \in P$
- Proposições sobre pertinências falsas nestes conjuntos:
  - $l \in V$
  - $azul \notin A$
  - $5 \in J$

Em termos de uma propriedade

Um conjunto pode ser representado em termos de uma propriedade que descreve quais são os seus elementos. De maneira simples, a representação do conjunto será na forma $S = \{\text{variável} \mid \text{propriedade}\}$:

$$A = \{x \in \ C \mid P(x)\} \tag{1.1}$$

em que x é uma variável arbitrária, C um conjunto e $P(x)$ é uma sentença matemática (fórmula da lógica de predicados). A Equação (1.1) significa que $\forall x, [(x \in C \to P(x)) \wedge (P(x) \to x \in C)]$.

Exemplo 1.2 Considere os seguintes conjuntos:

- A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 3\}$.
  Este conjunto possui os seguintes elementos: $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.
- Conjunto de todos os números naturais pares.
  Este conjunto possui os seguintes elementos: $P = \{0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$ e também pode ser representado por $P = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k, k \in \mathbb{N} \wedge x = 2k\}$.

Observe que a representação de conjunto em termos de uma propriedade está diretamente ligada as fórmulas da linguagem de primeira ordem com variável livre. A fórmula para representar o conjunto dos números pares $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists k, k \in \mathbb{N} \wedge x = 2k\}$, por exemplo, possui x como variável livre.

Gottlob Frege (1948-1925) propôs uma formalização que unifica a lógica matemática e conjuntos, relacionando um conjunto como uma propriedade que descreve seus elementos. Em 1903, ele publicou o segundo volume do livro Leis básicas da Aritmética (em alemão *Grundgesetze der Arithmetik*), em que expunha um sistema lógico no qual seu contemporâneo Bertrand Russell (1872-1970) encontrou uma contradição, que ficou conhecida como o **Paradoxo**[1] **de Russell**.

Definição 1.1 (Paradoxo de Russell) Se qualquer propriedade determina um conjunto, então podemos definir o conjunto S como o "*o conjunto de todos os conjuntos que não possuam a si próprios como elementos*". A questão é: S pertence a si próprio?

Se todos os conjuntos estão formando outro conjunto, então ele não pode ser um conjunto, daí surge o paradoxo: não existe conjunto de todos os conjuntos. Quando se diz que um conjunto está dentro de todos os outros, então estamos afirmando que ele é maior que ele mesmo. Chegamos então a uma contradição! Formalmente definimos o conjunto S como:

$$S = \{A | A \notin A\}$$

Temos que $A \in A$ ou $S \notin S$. Considere os seguintes casos:

- Caso $S \in S$: Se $S \in S$, pela definição de S, temos que $S \notin S$, o que constitui uma contradição.
- Caso $S \notin S$: Logo, pela definição de S, temos que $S \in S$, o que constitui uma contradição.

[1] Paradoxo é uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum. Em termos simples, um paradoxo é uma palavra usada para designar uma contradição verdadeira e irresolúvel.

> Como ambos os casos cobrem todas as possibilidades, temos que $S \in S$ não pode ser uma proposição lógica, já que esta não pode ser determinada como verdadeira ou falsa.

Uma aplicação semelhante ao paradoxo de Russel é o Paradoxo do barbeiro .

Exemplo 1.3 (Paradoxo do Barbeiro:) Considere uma cidade em que existe apenas um barbeiro e que este faz a barba de todos que não fazem a própria barba. O barbeiro faz sua própria barba?

Temos as seguintes considerações:

- Se o barbeiro não faz a própria barba, ele deveria fazê-la, já que ele faz a barba apenas de quem não faz a própria barba.
- Porém se ele faz a própria barba, pela definição, ele não deveria fazê-la.

Ou seja, a sentença sobre o barbeiro desta cidade é um paradoxo.

Por definição recursiva

Conjuntos definidos por recursão são muito utilizados em computação para a definição de estruturas de dados e algoritmos. De forma sucinta, para definir um conjunto recursivamente devemos especificar três partes: casos base, passos recursivos e regra de fechamento.

- **Casos base:** consistem de afirmativas simples.
- **Passos recursivos:** consistem de afirmativas envolvendo implicações e quantificadores universais.
- **Regras de fechamento:** especificam que todo elemento do conjunto pode ser obtido a partir de um número finito de utilizações das regras anteriores.

Exemplo 1.4 Como um primeiro exemplo de definição de um conjunto recursivo, vamos considerar o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. O conjunto $\mathbb{N}$ é representado utilizando a operação de sucessor e uma constante para representar o número 0. Utilizaremos a mesma ideia para a definição recursiva de $\mathbb{N}$:

- Caso base: $0 \in \mathbb{N}$.
- Passo recursivo: $\forall n, n \in \mathbb{N} \rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$
- Regra de fechamento: Todo $n \in \mathbb{N}$ pode se obtido por um número finito de aplicações das regras anteriores.

Exercício: Descreva os conjuntos a seguir:

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 < x \leq 7\}$

2. $B = \{x \mid x \text{ é um mês com exatamente 30 dias}\}$

3. $C = \{x \mid x \text{ é a capital de Minas Gerais}\}$

4. $D = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y, y \in \{0,1,2\} \;\; e \;\; x = y^3\right\}$

5. $E = \{x \in \mathbb{Z}- \mid \exists y, y \in \mathbb{Z}- \ \ e \ \ x \leq y\}$

6. $F = \{x \in \mathbb{Z}- \mid \forall y, y \in \mathbb{Z}- \wedge x \leq y\}$

Os conjuntos numéricos frequentemente usados na matemática e seus respectivos nomes simbólicos:

$\mathbb{Z}$: Conjunto de todos os números inteiros.

$\mathbb{N}$: Conjunto de todos os números naturais ou conjunto de todos os números inteiros positivos.

$\mathbb{Q}$: Conjunto de todos os números racionais.

$\mathbb{R}$: Conjunto de todos os números reais.

$\mathbb{C}$: Conjunto de todos os números complexos.

OBSERVAÇÕES

- O conjunto dos números inteiros é formado pelos inteiros positivos, negativos e o zero.
- A adição do sobrescrito $*$ indica a ausência do número zero no conjunto. Assim, o conjunto $\mathbb{Z}* = \{\cdots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \cdots\}$
- A adição de um sobrescrito $+$ ou $-$ indica que somente os elementos não negativos ou não positivos do conjunto, respectivamente, devem ser incluídos. Assim, $\mathbb{Z}+$ denota o conjunto dos números inteiros não negativos, ou seja, $\mathbb{Z}+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$. Alguns autores referem-se ao conjunto $\mathbb{Z}+$ como o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.
- Os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ podem, por exemplos, ser escritos como:

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{Q} = \{x, y \in \mathbb{Z} \mid \ \frac{x}{y} \ \wedge \ y \neq 0\}$$

1.1.2 Cardinalidade

Um conjunto A é dito um **conjunto finito** se ele possui uma quantidade finita de elementos, ou seja, possui um número n de elementos, onde $n \in \mathbb{N}$. Este número é chamado de **cardinalidade** de A e será denotado por $|A|$.

Exemplo 1.5 Sejam os conjuntos:

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $B = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

onde $|A| = 4$ e $|B| = 2$.

Um conjunto A é dito um **conjunto infinito** se ele não é um conjunto finito. Exemplos de conjuntos infinitos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

1.1.3 Conjunto Vazio

Existe um único conjunto A tal que $|A| = 0$ (não possui elementos). Este conjunto é chamado de **conjunto vazio** e será denotado pelos símbolos $\emptyset$ ou $\{\ \}$.

Exemplo 1.6 Sejam o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$. Então, temos que:

- $A = \emptyset$
- $|A| = 0$
- $3 \notin A$
- $x \notin A$
- $\emptyset \in A$

OBSERVAÇÃO: Note que $\emptyset$ é diferente de $\{\emptyset\}$.
A segunda expressão significa que temos um conjunto com um único elemento, e esse elemento é o conjunto vazio. Segue que:

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|\{\emptyset\}| = 1$
3. $|A| = 0 \leftrightarrow A = \emptyset$

1.1.4 Exercícios Complementares

1. Liste os elementos dos conjuntos seguintes:
   (a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar} \land x < 10\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y, y \in \mathbb{N} \land x = 2y + 1\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$
   (d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 2 = 1\}$
   (e) $E = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid x < 10\}$
   (f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2\}$
2. Use a notação em termos de uma propriedade para reescrer os conjuntos abaixo:

(a) $A = \{0,3,6,9,12,15,18\}$
(b) $B = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$
(c) $C = \{1,4,9,16,25,36,\cdots\}$
(d) $D = \{MTM123,\ BCC101,\ EAD700,\ BCC324,\ BCC202,\ BCC266\}$
(e) $E = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$
(f) $F = \emptyset$

1.2 Relações Sobre Conjuntos

Existem algumas operações que podem ser aplicadas a conjuntos. Nessa seção estudaremos algumas delas.

1.2.1 Subconjunto

Definição 1.2 (Continência) Sejam os conjuntos A e B. Dizemos que A é um **subconjunto** de B se, e somente se, todo elemento do conjunto A é um elemento do conjunto B, ou seja:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \quad \forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$$

ou, $A \subseteq B \quad \leftrightarrow \quad$ para todo x, se $\ x \in A\ $ então $\ x \in B$. A notação $A \subseteq B$ significa que A é subconjunto de B.

De forma análoga, se existe um elemento de A que não pertence a B, dizemos que A não é subconjunto de B (notação: $A \nsubseteq B$). A Tabela 1.2 apresenta a tradução de algumas notações para subconjuntos.

Tabela 1.2: Resumo de notações para subconjuntos.

Notação Simbólica	Tradução para o português
$A \subseteq B$	"A está contido em B"
$A \subseteq B$	"A é subconjunto de B"
$A \nsubseteq B$	"A não está contido B"
$A \nsubseteq B$	"A não é subconjunto de B"
$B \supseteq A.$	"B contém A"
$B \nsupseteq A.$	"B não contém A"

Exemplo 1.7 Sejam os conjuntos $A = \{1,2\}$ e $B = \mathbb{N}$.
Temos que A é subconjunto de B.

Algumas considerações importantes:

- Todo conjunto está contido em si próprio ($A \subseteq A$).
- Todo conjunto contém o conjunto vazio ($\emptyset \subseteq A$).
- O símbolo $\subseteq$ é um hibridismo dos símbolos $\subset$ e $=$, se quisermos eliminar a igualdade dos dois conjuntos, podemos dizer que A é um subconjunto *estrito* ou *próprio* de B.

Definição 1.3 (Subconjunto Próprio) Sejam dois conjuntos arbitrários A e B. Dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B, e escrevemos como $A \subset B$, se e somente se $A \subseteq B$ e $A \neq B$.

Em outras palavras, A é um subconjunto próprio de B se existe pelo menos um elemento de B que não pertence a A. A notação $A \not\subset B$ significa que A não é um subconjunto próprio de B.

1.2.2 Diagrama de Venn

Sejam dois conjuntos A e B. Esses conjuntos e as relações entre eles podem ser representadas por desenhos (círculos ou outras figuras geométricas) chamados de **Diagramas de Venn**[2].

A Figura 1.1 apresenta dois exemplos de representação dos conjuntos usando o Diagrama de Venn. Em (a) está a representação de um conjunto único $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, 5\}$ e em (b) está a representação da relação $A \subseteq B$.

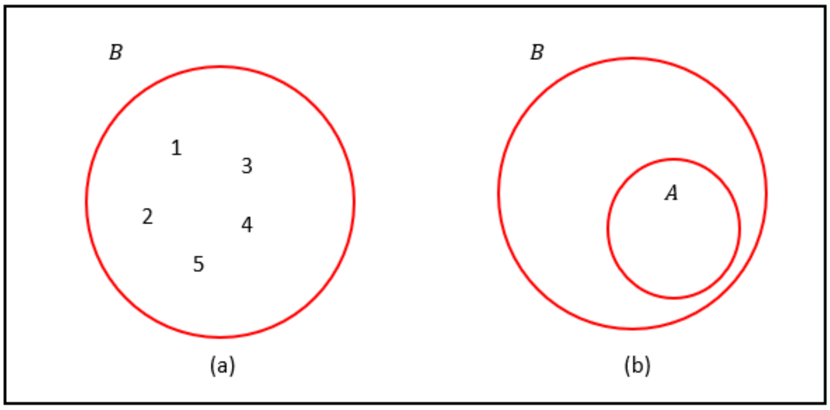

Figura 1.1: Exemplo da aplicação do Diagrama de Venn.

1.2.3 Igualdade de Conjuntos

Definição 1.4 (Igualdade:) Sejam dois conjuntos quaisquer A e B. Dizemos que A e B são **iguais** (denotamos por $A = B$) se, e somente se os dois conjuntos possuem exatamente os mesmos elementos:

$$A = B \ \leftrightarrow \ (A \subseteq B) \ e \ (B \subseteq A)$$

Em outras palavras, dizemos que um conjunto A é igual a um conjunto B se, e somente se todo elemento de A é elemento de B, e todo elemento de B é elemento de A. Usando a notação da lógica dos predicados, temos que $A = B$ significa que:

$$(\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

De forma análoga, dois conjuntos A e B são ditos diferentes (denotamos por $A \neq B$) se, e somente se existe um elemento de A que não pertence a B ou um elemento de B que não pertence a A.

[2]Nome dado em homenagem ao matemático britânico do século XIX Jhon Venn.

Exemplo 1.8 Sejam os conjuntos:

- $A = \{x \in \mathbb{Z} : \text{x é par}\}$
- $B = \{z \in \mathbb{Z} : z = a + b, \text{em que a e b são ímpares}\}$

Temos que os conjuntos A e B são iguais.

1.2.4 Exercícios Complementares

1. Sejam os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A&: \quad \{x : x \in \mathbb{N} \;\; e \;\; x \geq 5\} \\ B&: \quad \{\ 10, 12, 16, 20\} \\ C&: \quad \{x : (\exists x)(y \in \mathbb{N} \;\; e \;\; x = 2y)\} \end{aligned}$$

   Verifique o valor lógico das proposições seguintes.

   (a) $B \subseteq C$
   (b) $B \subset A$
   (c) $A \subseteq C$
   (d) $26 \in C$
   (e) $\{11, 12, 13\} \subseteq A$
   (f) $\{11, 12, 13\} \subset C$
   (g) $\{12\ \} \in B$
   (h) $\{12\ \} \subseteq B$
   (i) $\{x : x \in \mathbb{N} \;\; e \;\; x < 20\} \not\subseteq B$
   (j) $5 \subseteq A$
   (k) $\{\emptyset\} \subseteq B$
   (l) $\emptyset \notin A$

2. Determine se os conjuntos a seguir são iguais.

   (a) $\{1,2,3\}, \{1,1,2,3\}, \{1,1,2,3,1\}, \{2,1,3\}, \{1,2,2,3\}$
   (b) $\{\{1\}\}, \{1,\{1\}\}, \{1\}$
   (c) $\{\emptyset\}, \emptyset$
   (d) $\{x : x \in \mathbb{N}, x < 3\}, \{1,2\}, \{1,2,1\}$
   (e) $\{3,1\}, \{x : x \in \mathbb{N}, x^2 - 4x + 3 = 0\}, \{1,3,3\}$

3. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.

   (a) ( ) $0 \in \emptyset$
   (b) ( ) $\emptyset \in \{0\}$
   (c) ( ) $\{0\} \subset \emptyset$
   (d) ( ) $\emptyset \subset \{0\}$
   (e) ( ) $\{0\} \in \{0\}$
   (f) ( ) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
   (g) ( ) $x \in \{x\}$
   (h) ( ) $\emptyset \subseteq \{x\}$

(i) ( ) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

4. Sejam os conjuntos A, B e C arbitrários. Determine se cada uma das proposições abaixo é verdadeira ou falsa.
   (a) ( ) $A \in \{A\}$
   (b) ( ) $A \subseteq \{A\}$
   (c) ( ) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$
   (d) ( ) $(A \cup B) - B = A$
   (e) ( ) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$
   (f) ( ) $A \cap \emptyset = A$
5. Sejam os conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$ e $C = \{1,\{1\}\}$. Determine se cada uma das proposições é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.
   (a) ( ) $A \subset B$
   (b) ( ) $A \subseteq B$
   (c) ( ) $A \in B$
   (d) ( ) $A = B$
   (e) ( ) $A \subset C$
   (f) ( ) $A \in C$
   (g) ( ) $\{1\} \in A$
   (h) ( ) $\emptyset \subseteq A$

1.3 Operações Sobre Conjuntos

O **conjunto universo** ou **universo do discurso** é um conjunto que contém todos os elementos no contexto no qual estamos trabalhando e também contém todos os conjuntos deste contexto. Vamos denotar o conjunto universo pela letra $\mathcal{U}$.

É possível definir operações sobre conjuntos pertencentes ao universo do discurso $\mathcal{U}$. Para tanto, considere os conjuntos $A,\ B \in \mathbb{U}$.

1.3.1 União e Interseção

A união e a interseção são as operações mais fundamentais sobre conjuntos.

- A **união** dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto de todos os elementos que estão em pelo menos um dos conjuntos, A ou B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- A **interseção** dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em ambos os conjuntos, A e B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \ e \ \ x \in B\}$$

A Figura 1.2 representa as operações de união e interseção pelo diagrama de Venn. As áreas sombreadas representam os conjuntos resultantes das operações (a) $A \cup B$ e (b) $A \cap B$.

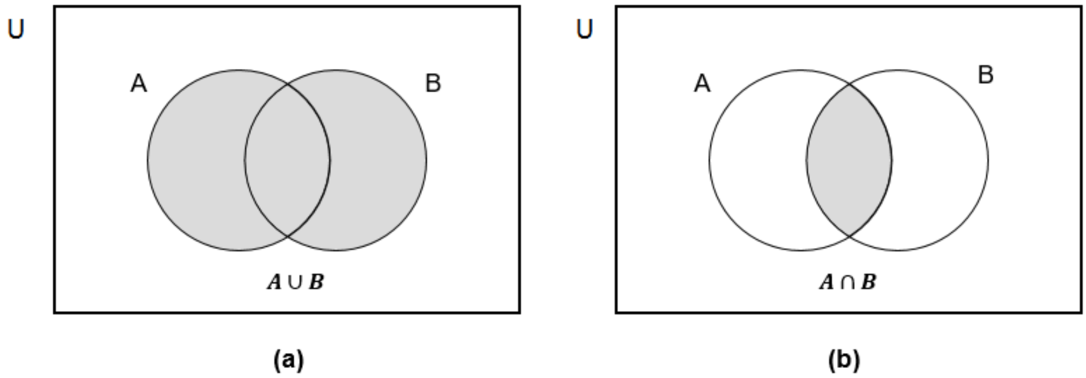

Figura 1.2: Diagrama de Venn das operações (a) união e (b) interseção nos conjuntos A e B.

Definição 1.5 (Conjunto Disjunto) Dois conjuntos são chamados de **conjuntos disjuntos** se, e somente se $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 1.9 Sejam os conjuntos:

- $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ e $B = \{\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 11\}$
  - $A \cup B = \{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11\}$
  - $A \cap B = \{\ 3,\ 5\}$
  - $\emptyset \cup A = A$
  - $\emptyset \cap A = \emptyset$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\{\{\emptyset\}\}\}$
  - $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

1.3.2 Diferença

A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que estão no conjunto A, mas não estão no conjunto B, ou seja:

$$A - B = \{x \mid x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\} \tag{1.2}$$

essa operação pode ainda ser reescrita como $A - B = A \cap \overline{B}$.

Exemplo 1.10 Considere as seguintes operações:

- $\{2, 3, 5, 7\} - \{2, 7, 11\} = \{3, 5\}$
- $A - \emptyset = A$
- $\emptyset - A = \emptyset$

Dois conjuntos A e B são ditos **disjuntos** quando $A \cap B = \emptyset$. Dessa forma, temos que $A - B$ e $B - A$ são exemplos de conjuntos disjuntos.

Definição 1.6 (Diferença Simétrica) Chamamos de **Diferença Simétrica** entre dois conjuntos A e B, e denotamos por $A \Delta B$, o conjunto de todos os elementos que estão em A, mas não estão em B, ou que estão em B, mas não estão em A:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Exemplo 1.11 Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{3,4,5,6\}$.

- $A - B = \{1,2\}$
- $B - A = \{5,6\}$
- $A \Delta B = \{1,2,5,6\}$

A Figura 1.3 apresenta o diagrama de Venn para as operações diferenças sobre dois conjuntos A e B. As áreas sombreadas na figura ilustram os seguintes resultados: (a) $A - B$, (b) $B - A$ e (c) $A \Delta B$.

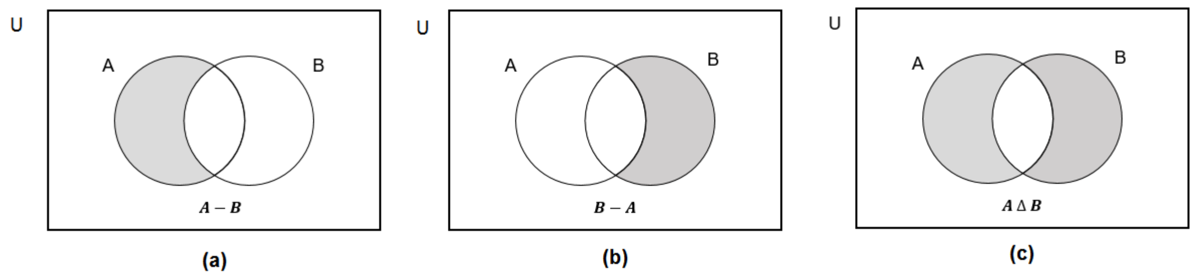

Figura 1.3: Diagrama de Venn das operações diferenças entre conjuntos (a) $A - B$, (b) $B - A$ e (c) $A \Delta B$.

1.3.3 Complemento

O **complemento** de um conjunto A, denotado por $\overline{A}$ ou A^c, é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto universo $\mathcal{U}$ e não pertencem ao conjunto A ($\overline{A} = \mathbb{U} - A$):

$$\overline{A} = \{x \mid x \in \mathbb{U} \wedge x \notin A\}$$

.

A Figura 1.4 ilustra o conjunto resultante da operação $\overline{A} = \mathbb{U} - A$ usando o diagra de Venn.

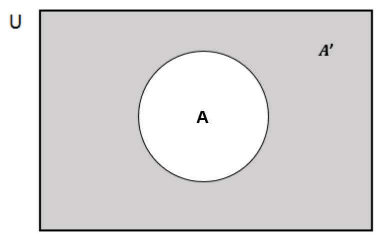

Figura 1.4: A área sombreada no diagrama de Venn representa a operação complemento de um conjunto.

Exemplo 1.12 Considere como universo do discurso o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

- $\overline{\{2,3,4,5\}} = \{0,1\} \cup \{6,7,8,\cdots\}$
- $\overline{\{2x : x \in \mathbb{N}\}} = \{2x+1 : x \in \mathbb{N}\}'$

1.3.4 Produto Cartesiano

Definição 1.7 (Produto Cartesiano) O Produto cartesiano de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (lista de dois elementos) formados tomando-se o primeiro elemento do conjunto A e o segundo elemento do conjunto B. Ou seja:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B$$

Exemplo 1.13 Sejam os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{5,7\}$, então:
$A \times B = \{(1,5),(1,7),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7)\}$
$B \times A = \{(5,1),(5,2),(5,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$

Algumas considerações importantes:

- A notação $A^2 = A \times A$.
- $A \times B \neq B \times A$, ou seja, o produto cartesiano de conjuntos não é uma operação comutativa.
- Se A e B são conjuntos finitos, então $|A \times B| = |A| \times |B|$.

1.3.5 Família de Conjuntos

Chamamos de **Família de conjuntos** os conjuntos que possuem como elementos outros conjuntos pertencentes ao conjunto universo $\mathcal{U}$.

Definição 1.8 (Família de Conjuntos) Uma família de conjuntos é um conjunto $\mathcal{F}$ cujos elementos são conjuntos.

Um exemplo de família de conjuntos é conhecido conjunto potência.

Definição 1.9 (Conjunto Potência) Chamamos de **conjunto potência** ou **conjunto das partes** do conjunto A, simbolicamente representado por $\mathcal{P}(A)$, o conjunto de todos os subconjuntos de A:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

Exemplo 1.14 O conjunto potência do conjunto $A = \{a,b,c\}$ é o conjunto

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

Teorema 1.3.1 (Contagem de Subconjuntos) Seja A um conjunto finito. O número de subconjuntos de A é dado por $2^{|A|}$.

A demonstração deste teorema será feita nas aulas seguintes usando a técnica de **demonstração por indução**. O exemplo seguinte ilustra o teorema da contagem de subconjuntos.

Exemplo 1.15 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a,b,c\}$?

- Para resolver este problema é necessário listar todos os possíveis subconjuntos de A.
- Como $|A| = 3$, temos que qualquer subconjunto de A poderá ter de zero a quatro elementos.
- A Tabela 1.3 apresenta de forma organizada todas as possibilidades existentes.
- O conjunto A possui 2^3 (oito) subconjuntos.

Tabela 1.3: Contagem de subconjuntos do conjunto $A = \{a,b,c\}$.

n^{o} de elementos	**Subconjuntos**	**Quantidade**
0	$\emptyset$	1
1	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$	3
2	$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$	3
3	$\{a,b,c\}$	1
Total		8

OBSERVAÇÕES:

Para qualquer conjunto A, o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$:

- tem pelo menos os conjuntos $\emptyset$ e A como elementos, já que é sempre verdade que $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$.
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

Definição 1.10 (União e Interseção de Famílias de Conjuntos) Seja $\mathcal{F}$ uma família de conjuntos não vazia. As operações de união e interseção da família $\mathcal{F}$ são definidas como:

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists A, A \in \mathcal{F} \land x \in A\}$$
$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid \forall A, A \in \mathcal{F} \rightarrow x \in A\}$$

Exemplo 1.16 Considere a seguinte família de conjuntos $\mathcal{F} = \{\{1\},\{1,3,5\},\{1,2,3\}\}$. Logo:

$$\begin{aligned}\bigcup \mathcal{F} &= \{1\} \cup \{1,3,5\} \cup \{1,2,3\} &= \{1,2,3,5\}\\ \bigcap \mathcal{F} &= \{1\} \cap \{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} &= \{1\}\end{aligned}$$

Uma outra maneira de especificar uma família de conjuntos é através de um conjunto de índices, que são conhecidas como *famílias indexadas*.

Definição 1.11 (Famílias Indexadas) Seja I um conjunto de índices (não vazio). Denomina-se por família indexada de conjuntos o conjunto

$$\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\}$$

onde cada A_i é definido em termos dos elementos do conjunto de índices.

Exemplo 1.17 Considere o seguinte conjunto de índices $I = \{1,2,3\}$ e a família indexada $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I0\}$, em que $A_i = \{i, i+1, i+2\}$. Logo, temos que:

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}$$

As operações de união e interseção de famílias indexadas é formalizada por:

- **União:** $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid \exists i, i \in I \ \wedge \ x \in A_i\}$
- **Interseção:** $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid \forall i, i \in I \ \rightarrow \ x \in A_i\}$

Exemplo 1.18 Considere o exemplo anterior em que $\mathcal{F} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,4,5\}\}$. Logo, temos que:

- $\bigcup_{i\in\{1,2,3\}} = \{1,2,3,4,5\}$
- $\bigcap_{i\in\{1,2,3\}} = \{3\}$

1.3.6 Exercícios Complementares

1. Suponha o conjunto universo $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e sejam os conjuntos: $A = \{2,4,5,6,8\}$, $B = \{1,4,5,9\}$ e $C = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge 2 \leq x < 5\}$. Determine:
   (a) $A \cup B$
   (b) $C \cap B$
   (c) $A - B$
   (d) $A \, \Delta \, B$
   (e) $B - A$
   (f) $\overline{C}$
   (g) $\overline{(A \cap B)}$
   (h) $(C \cap B) \cup \overline{A}$
   (i) $B \times C$
   (j) $A \times B$
   (k) $\mathcal{P}(A)$

1.4 Leis Algébricas para Conjuntos

Existem igualdades entre conjuntos envolvendo as operações de união, interseção, diferença e complemento que são verdadeiras para quaisquer subconjuntos pertencentes ao universo do discurso $\mathcal{U}$.

Essas igualdades são chamadas de **leis algébricas** para conjuntos.

A seguir são listadas as principais equivalências algébricas para conjuntos.

1. Idempotência:

$$A \cup A = A \tag{1.3}$$

$$A \cap A = A \tag{1.4}$$

2. Comutatividade:

$$A \cup B = B \cup A \tag{1.5}$$

$$A \cap B = B \cap A \tag{1.6}$$

3. Associatividade:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{1.7}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{1.8}$$

4. Distributividade:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.9}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{1.10}$$

5. Existência do Conjunto Universo:

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \tag{1.11}$$

$$A \cap \mathcal{U} = A \tag{1.12}$$

6. Existência do Conjunto Vazio:

$$A \cup \emptyset = A \tag{1.13}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset \tag{1.14}$$

7. Propriedades do Complemento:

$$A = \overline{\overline{A}} \tag{1.15}$$

$$\overline{U} = \emptyset \tag{1.16}$$

$$\overline{\emptyset} = \overline{U} \tag{1.17}$$

$$A \cup \overline{A} = \mathcal{U} \tag{1.18}$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \tag{1.19}$$

$$A - B = A \cap \overline{B} \tag{1.20}$$

8. Leis de De Morgan:

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{1.21}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{1.22}$$

Exemplo 1.19 Prove que a lei algébrica para conjuntos (1.9) é verdadeira.

Prova: Mostrar que a equação $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ é verdadeira é equivalente a provar que:

(1) $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$, e que

(2) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

Demonstrando a primeira parte: seja x um elemento qualquer de $A \cup (B \cap C)$. Então temos que:

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) \quad & \rightarrow \quad x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C) \\
& \rightarrow \quad x \in A \text{ ou } (\, x \in B \text{ e } x \in C) \\
& \rightarrow \quad (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\
& \rightarrow \quad x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \\
& \rightarrow \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Para mostrar (2) basta refazer o argumento de trás para frente. ■

Existe uma correspondência entre os conectivos lógicos e as operações sobre conjuntos e as relações lógicas com as relações sobre conjunto. De forma sucinta, temos que:

Relação Lógica	**Relação sobre Conjuntos**
Implicação ($p \rightarrow q$) Equivalência ($p \leftrightarrow q$)	continência ($A \subseteq B$) igualdade ($A = B$)
Conectivo Lógico	**Operação sobre Conjuntos**
negação disjunção conjunção	complemento união interseção

Assim, para fazer a demonstração de equivalência podemos partir do princípio de que a equivalência (igualdade de conjuntos) pode ser definida em termos de uma dupla implicação (dupla continência, no caso dos conjuntos), ou seja, mostramo que um conjunto $X = Y$ se, e somente se, $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

As propriedades introduzidas sobre os conectivos lógicos também são válidas para a teoria dos conjuntos, basta substituirmos cada conectivo lógico pela sua operação sobre conjuntos correspondente:

Conectivo Lógico	**Operação sobre Conjuntos**
idempotência: $\wedge$ e $\vee$	idempotência: $\cap$ e $\cup$
comutatividade: $\wedge$ e $\vee$	comutatividade: $\cap$ e $\cup$
associatividade: $\wedge$ e $\vee$	associatividade: $\cap$ e $\cup$
distributividade $\wedge$ sobre $\vee$ $\vee$ sobre $\wedge$	distributividade $\cap$ sobre $\cup$ $\cup$ sobre $\cap$
dupla negação $\neg(\neg p)$	duplo complemento $\overline{\overline{A}} = A$
Leis de De Morgan	Leis de De Morgan
Absorção	Absorção

Exemplo 1.20 Prove que: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Vamos organizar a prova da seguinte maneira:

I) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$

II) $A \cup \emptyset = A$

Prova: **Parte I:** Vamos mostrar que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$. Para tanto, precisamos provar que $A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A$ e que $\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset$.

Seja $x \in A \cup \emptyset$

$x \in A \cup \emptyset$	$\Rightarrow$	$x \in A \vee x \in \emptyset$	definição de união
	$\Rightarrow$	$x \in \emptyset \vee x \in A$	comutatividade da disjunção
	$\Rightarrow$	$x \in \emptyset \cup A$	definição de união

Portanto temos que:

$$A \cup \emptyset \subseteq \emptyset \cup A \qquad (1)$$

Seja $x \in \emptyset \cup A$

$x \in \emptyset \cup A$	$\Rightarrow$	$x \in \emptyset \vee x \in A$	definição de união
	$\Rightarrow$	$x \in A \vee x \in \emptyset$	comutatividade da disjunção
	$\Rightarrow$	$x \in A \cup \emptyset$	definição de união

Portanto temos que

$$\emptyset \cup A \subseteq A \cup \emptyset \qquad (2)$$

De (1) e (2), concluímos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$.

Parte II) Vamos mostrar que $A \cup \emptyset = A$. Ou seja, precisamos provar que $A \cup \emptyset \subseteq A$ e que $A \subseteq A \cup \emptyset$.

Seja $x \in A \cup \emptyset$

$x \in A \cup \emptyset$	$\Rightarrow$	$x \in A \vee x \in \emptyset$	definição de união
	$\Rightarrow$	$x \in A \vee F$	$x \in \emptyset$ é sempre falso
	$\Rightarrow$	$x \in A$	

Portanto temos que:

$$A \cup \emptyset \subseteq A \qquad (3)$$

Agora, considere $x \in A$

$x \in A$	$\Rightarrow$	$x \in A \vee x \in \emptyset$	adição $p \Rightarrow p \vee q$
	$\Rightarrow$	$x \in A \cup \emptyset$	definição de união

Portanto temos que

$$A \subseteq A \cup \emptyset \qquad (4)$$

De (3) e (4), concluímos que $A \cup \emptyset = A$

Logo, por transitividade da igualdade, podemos concluir que

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

■

De forma similar à aplicação das leis fundamentais da lógica para provar equivalências lógicas, podemos aplicar às leis algébricas para conjuntos para provar novas equivalências.

Exemplo 1.21 Prove as equivalências seguintes:

1. $[A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cup (B \cap C)] \cap \overline{(B \cap C)}\} \equiv \emptyset$

Prova: Seja:

$$
\begin{array}{ll}
[A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cup (B \cap C)] \cap \overline{(B \cap C)}\} & \equiv \text{ Distributividade (1.10)} \\
[A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}] \cup [(B \cap C) \cap \overline{(B \cap C)}]\} & \equiv \text{ Prop. Complemento (1.19)} \\
[A \cup (B \cap C)] \cap \{[\overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}] \cup \emptyset\} & \equiv \text{ Exist. Conjunto Vazio (1.13)} \\
[A \cup (B \cap C)] \cap [\overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}] & \equiv \text{ Leis de De Morgan (1.21)} \\
[A \cup (B \cap C)] \cap \overline{[A \cup (B \cap C)]} & \equiv \text{ Prop. Complemento (1.19)} \\
\emptyset &
\end{array}
$$

■

1.4.1 Exercícios Complementares

Exercícios adaptados dos livros [2, 3, 4]

1. Sejam os conjuntos arbitrários A, B e C e o conjunto universo $\mathcal{U}$. Prove as seguintes equivalências algébricas para conjuntos.
   (a) $A \cup A \equiv A$
   (b) $A \cap A \equiv A$
   (c) $A \cup B \equiv B \cup A$
   (d) $A \cap B \equiv B \cap A$
   (e) $\overline{(A \cap B)} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$
   (f) $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (g) $A \cap \mathcal{U} \equiv A$
   (h) $A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$
2. Prove as seguintes equivalências algébricas para conjuntos.
   (a) $(A \cup B) \cap \overline{A} \equiv B \cap \overline{A}$
   (b) $A \cup (\overline{A} \cap B) \equiv A \cup B$
   (c) $\overline{((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))} \equiv (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
   (d) $A \cap (B \cup \overline{A}) \equiv B \cap A$

Aula 19: Teoremas Envolvendo Conjuntos

BCC101- Matemática Discreta

(DECOM/UFOP)

2.1 Teoremas envolvendo Conjuntos

As técnicas de demonstração estudas nas aulas anteriores podem ser utilizadas para provar diversos fatos que envolvem a teoria de conjuntos. [1].

Exemplo 2.1 Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Então se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

- **Hipóteses:**
  - A, B e C são conjuntos.
  - $A \subseteq B$
  - $B \subseteq C$
- **Conclusão:** $A \subseteq C$

Pela definição de contingência (1.2) temos que $A \subseteq B \leftrightarrow \quad \forall x, (x \in A \rightarrow x \in B)$.

Prova: (**Direta**)

1. Sejam $A,\ B$ e C conjuntos quaisquer.
2. Suponha as relações $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$.
3. Seja $x \in A$. Como $A \subseteq B$, pela definição de contingência temos que $x \in B$.
4. Como $x \in B$ e $B \subseteq C$, pela definição de contingência temos que $x \in C$.
5. Como x é um elemento arbitrário, podemos concluir que $A \subseteq C$.
6. Portanto, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$.

Logo, dados os conjuntos A, B e C. Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$. ■

[1] Os exemplos e exercícios apresentados foram retirados e adaptados de [4, 5]

Exemplo 2.2 Seja U um conjunto infinito e seja S um subconjunto finito de U. Seja também T o complemento de S em relação a U. Então, T é infinito.

Considere as seguintes definições úteis:

- **S é finito:** $\exists$ um inteiro n tal que $|S| = n$.
- **U é infinito:** Para nenhum inteiro p podemos dizer que $|U| = p$.
- **T é o complemento de S em relação a U:** Então $S \cup T = U$ e $S \cap T = \emptyset$.

Prova: (por Contradição)

1. Da afirmação "seja U um conjunto infinito e seja S um subconjunto finito de U" temos que se S é finito, então $|S| = n$ para algum n e, como U é infinito, não existe inteiro p tal que $|U| = p$.
2. Da afirmação "seja T o complemento de S em relação a U" temos que $S \cup T = U$ e que S e T são disjuntos. Assim, $|S| + |T| = |U|$.
3. Suponha que T seja finito. (negando a tese)
4. Assim, $|T| = m$ para algum inteiro m.
5. Então, $|U| = |S| + |T| = n + m$, onde $m + n \in \mathbb{Z}$. Tal fato contradiz a afirmação de não existe nenhum inteiro p igual a $|U|$.
6. Portanto, T é infinito.

Logo, se U é um conjunto infinito, S é um subconjunto finito de Ue T é o complemento de S em relação a U, então T é infinito. ■

Exemplo 2.3 Suponha que $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$. Então, $a \notin A - B$.

- **Hipóteses:**
  - $A \cap C \subseteq B$
  - $a \in C$
- **Conclusão:** $a \notin A - B$.

Da definição da operação diferença (Equação 1.2) temos que $A - B = \{x \mid x \in A \;\; \wedge \;\; x \notin B\}$.

Então, a conclusão $a \notin A - B$ pode ser reescrita como a seguinte fórmula da lógica $\neg(a \in A \wedge a \notin B)$. Utilizando equivalências algébricas, podemos verificar que:

$$
\begin{array}{lcl}
\neg(a \in A \;\wedge\; a \notin B) & \equiv & \{\wedge - \text{De Morgan}\}. \\
\neg(a \in A) \;\vee\; \neg(a \notin B) & \equiv & \{\text{Negação}\} \\
\neg(a \in A) \;\vee\; a \in B & \equiv & \{\text{Implicação}\} \\
(a \in A) \;\rightarrow\; a \in B & &
\end{array}
$$

Vamos provar que dados $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$, se $a \in A$ então $a \in B$.

Prova: **(Direta)**

1. Sejam $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$.
2. Suponha que $a \in A$.
3. Como a é um elemento arbitrário e $a \in A$ e $a \in C$, temos que $a \in A \cap C$.
4. Como $a \in A \cap C$ e $A \cap C \subseteq B$, então $a \in B$.
5. Portando, se $a \in A$ então $a \notin A - B$.

Logo, se $A \cap C \subseteq B$ e $a \in C$, então $a \notin A - B$. ■

2.1.1 Exercícios Complementares

1. Mostre que $A = \{2,3,5,7\}$ não é subconjunto de $B = \{x : x \in \mathbb{N},\ \text{x é ímpar}\}$
2. Mostre que $A = \{2,3,5,7\}$ é um subconjunto próprio de $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
3. Suponha que $A \times B = \emptyset$. O que você pode concluir?
4. Prove que, se $\overline{A} \subseteq \overline{B}$então $B \subseteq A$
5. Prove que, se $A \subseteq B$ então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
6. Prove que, se $A \cup B = A - B$ então $B = \emptyset$
7. Prove que, se $A \cap B = A$ então $A \subseteq B$
8. Suponha que $A \subseteq C$ e que B e C são disjuntos. Prove que, se $x \in A$ então $x \notin B$

Referências Bibliográficas

[1] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

[2] MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

[3] ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.

[4] RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

[5] HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

[6] DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

Respostas dos Exercícios Complementares

Aula 18

1.1.4 - Introdução a Teoria dos Conjuntos

1. (a) $A = \{1,3,5,7,9\}$
   (b) $B = \{1,3,5,7,9,\cdots\}$
   (c) $C = \{-3,3\}$
   (d) $D = \emptyset$
   (e) $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
   (f) $F = \emptyset$
2. (a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x \wedge 0 \leq x \leq 6\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 4\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \wedge x > 1\}$
   (d) Seja $\mathbb{U}$ o conjunto das disciplinas oferecidas pelo DECOM.
   $D = \{x \in \mathbb{U} \mid x$ é uma disciplina do 2º período
   (e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x \text{ é primo}) \wedge x < 20\}$.
   (f) $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 5.\}$

1.2.4 - Relações sobre Conjuntos

1. (a) V
   (b) V
   (c) F
   (d) V
   (e) V
   (f) F
   (g) F
   (h) V
   (i) V
   (j) F
   (k) F
   (l) V
2. (a) Todos os conjuntos são iguais. A repetição e reordenação não alteram o conjunto.
   (b) Não são iguais.

(c) Não são iguais.

(d) São iguais.

(e) São iguais

3. (a) (F)

   (b) (F)

   (c) (F)

   (d) (V)

   (e) (F)

   (f) (V)

   (g) (V)

   (h) (V)

   (i) (V)

4. (a) (V)

   (b) (V)

   (c) (V)

   (d) (F)

   (e) (F)

   (f) (F)

5. (a) (V) Pois temos que $2 \in B$ e $2 \notin A$.

   (b) (V) Pois $A \subset B$.

   (c) (F) Todos os elementos de A também são elementos de B, porém A é um conjunto.

   (d) (F) Existe um elemento $2 \in B$ tal que $2 \notin A$, logo $B \not\subseteq A$.

   (e) (V) Temos que A é subconjunto próprio de C, pois $\{1\} \in C$ e $\{1\} \notin A$.

   (f) (V) Temos que $A = \{1\}$ e $\{1\} \in C$

   (g) (F) O único elemento de A é o número 1 e não o conjunto $\{1\}$.

   (h) (V) O conjunto vazio esta contido em qualquer conjunto.

1.3.6 - Operações sobre Conjuntos

1. (a)

   (b)

   (c)

   (d)

   (e)

   (f)

   (g)

   (h)

   (i)

   (j)

   (k)

1.4.1 - Leis Algébricas para Conjuntos

1. (a) **Prova:** Para mostrar que $A \cup A \equiv A$, precisamos mostrar que 1) $A \cup A \subseteq A$ e que 2) $A \subseteq A \cup A$.

   Prova da primeira parte $A \cup A \subseteq A$:

   Seja $x \in A \cup A$. Então:

   $$\begin{array}{llll} x \in A \cup A & \Rightarrow & x \in A \vee x \in A & \text{definição de união} \\ & \Rightarrow & x \in A & \text{idempotência da disjunção} \end{array}$$

   Portanto $A \cap A \subseteq A$. A Prova da parte (2) é de forma análoga.

   (b) **Prova:** Para mostrar que $A \cap A \equiv A$, precisamos mostrar que 1) $A \cap A \subseteq A$ e que 2) $A \subseteq A \cap A$.

   Prova da segunda parte $A \subseteq A \cap A$:

   Seja $x \in A$. Então:

   $$\begin{array}{llll} x \in A & \Rightarrow & x \in A \wedge x \in A & \text{idempotência da conjunção} \\ & \Rightarrow & x \in A \cap A & \text{definição de interseção} \end{array}$$

   Portanto $A \cap A \subseteq A$. A Prova da parte (1) é de forma análoga.

   (c) **Prova:** Para mostrar que $A \cup B \equiv B \cup A$, precisamos mostrar que 1) $A \cup B \subseteq B \cup A$ e que 2) $B \cup A \subseteq A \cup B$.

   Prova da primeira parte $A \cup B \subseteq B \cup A$:

   Seja $x \in A \cup B$. Então:

   $$\begin{array}{llll} x \in A \cup B & \Rightarrow & x \in A \vee x \in B & \text{definição de união} \\ & \Rightarrow & x \in B \vee x \in A & \text{Comutatividade da disjunção} \\ & \Rightarrow & x \in B \cup A & \text{Definição de União} \end{array}$$

   Portanto $A \cup B \subseteq B \cup A$. A Prova da parte (2) é de forma análoga.

   (d) **Prova:** Para mostrar que $A \cap B \equiv B \cap A$, precisamos mostrar que 1) $A \cap B \subseteq B \cap A$ e que 2) $B \cap A \subseteq A \cap B$.

   Prova da primeira parte $A \cap B \subseteq B \cap A$:

   Seja $x \in A \cap B$. Então:

   $$\begin{array}{llll} x \in A \cap B & \Rightarrow & x \in A \wedge x \in B & \text{definição de interseção} \\ & \Rightarrow & x \in B \wedge x \in A & \text{Comutatividade da conjunção} \\ & \Rightarrow & x \in B \cup A & \text{Definição de interseção} \end{array}$$

   Portanto $A \cap B \subseteq B \cap A$. A Prova da parte (2) é de forma análoga.

   (e) **Prova:** Para mostrar a validade da segunda lei de De Morgan para conjuntos, precisamos mostrar que 1) $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ e que 2) $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{(A \cap B)}$.

   Prova da primeira parte $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$:

   Seja $x \in \overline{(A \cap B)}$. Então:

   $$\begin{array}{llll} x \in \overline{(A \cap B)} & \Rightarrow & x \notin A \cap B & \text{definição de complemento} \\ & \Rightarrow & \neg(x \in A \cap B) & \text{definição de não pertence} \\ & \Rightarrow & \neg(x \in A \wedge x \in B) & \text{definição de interseção} \\ & \Rightarrow & \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) & \text{primeira lei de De Morgan para equivalências} \\ & \Rightarrow & x \notin A \vee x \notin B & \text{definição de não pertence} \\ & \Rightarrow & x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} & \text{definição de complemento} \\ & \Rightarrow & x \in (\overline{A} \cup \overline{B}) & \text{definição de união} \end{array}$$

   Portanto $\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. A Prova da parte (2) é de forma análoga.

   (f) **Prova:** Para mostrar a validade da propriedade $A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C)$, precisamos mostrar que 1) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e que 2) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$.

Prova da primeira parte $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

Seja $x \in A \cap (B \cup C)$. Então:

$x \in A \cap (B \cup C)$	$\Rightarrow$	$x \in A \wedge x \in B \cup C$	definição de interseção
	$\Rightarrow$	$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$	definição de união
	$\Rightarrow$	$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$	distributividade da disjunção
	$\Rightarrow$	$(x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)$	propriedade da interseção
	$\Rightarrow$	$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$	propriedade da união

Portanto $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. A Prova da parte (2) é de forma análoga.

(g) **Prova:** Para mostrar a validade da propriedade $A \cap \mathcal{U} \equiv A$, precisamos mostrar que 1) $A \cap \mathcal{U} \subseteq A$ e que 2) $A \subseteq A \cap \mathcal{U}$.

Prova da primeira parte $A \cap \mathcal{U} \subseteq A$:

Seja $x \in A \cap \mathcal{U}$. Então:

$x \in A \cap \mathcal{U}$	$\Rightarrow$	$x \in A \wedge x \in \mathcal{U}$	definição de interseção
	$\Rightarrow$	$x \in A \wedge V$	$x \in \mathcal{U}$ é sempre V
	$\Rightarrow$	$x \in A$	Propriedade elemento neutro

Portanto $A \cap \mathcal{U} \subseteq A$. A Prova da parte (2) é de forma análoga.

(h) **Prova:** Para mostrar a validade da propriedade $A \cap (B \cap C) \equiv (A \cap B) \cap C$, precisamos mostrar que 1) $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ e que 2) $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$.

Prova da primeira parte $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$:

Seja $x \in A \cap (B \cap C)$. Então:

$x \in A \cap (B \cap C)$	$\Rightarrow$	$x \in A \wedge x \in (B \cap C)$	definição de interseção
	$\Rightarrow$	$x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$	definição de interseção
	$\Rightarrow$	$(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$	associatividade da conjunção
	$\Rightarrow$	$x \in (A \cap B) \wedge x \in C$	definição de interseção
	$\Rightarrow$	$x \in (A \cap B) \cap C$	definição de interseção

Portanto $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$. A Prova da parte (2) é de forma análoga.

2. (a) **Prova:**

$(A \cup B) \cap \overline{A}$	$\equiv$	$\overline{A} \cap (A \cup B)$	comutatividade da interseção
	$\equiv$	$(\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)$	distributividade da interseção sobre a união
	$\equiv$	$\emptyset \cup (\overline{A} \cap B)$	Propriedade do complemento
	$\equiv$	$(\overline{A} \cap B)$	Existência do conjunto vazio
	$\equiv$	$(B \cap \overline{A})$	comutatividade da interseção

Portanto $(A \cup B) \cap \overline{A} \equiv B \cap \overline{A}$.

(b) **Prova:**

$A \cup (\overline{A} \cap B)$	$\equiv$	$(A \cup \overline{A}) \cap (A \cup B)$	distributividade da união sobre a união
	$\equiv$	$\mathbb{U} \cap (A \cup B)$	Propriedade do complemento
	$\equiv$	$(A \cup B)$	Existência do conjunto universo

Portanto $A \cup (\overline{A} \cap B) \equiv A \cup B$.

(c) **Prova:**

$$
\begin{array}{rll}
 & \overline{((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))} & \text{Leis de De Morgan} \\
\equiv & \overline{(A\cap B)}\cap\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})} & \text{Leis de De Morgan} \\
\equiv & \overline{(A\cap B)}\cap(\overline{(\overline{A})}\cup\overline{(\overline{B})}) & \text{Duplo complemento} \\
\equiv & \overline{(A\cap B)}\cap(A\cup B) & \text{Distb. da } \cap \text{ sobre a } \cup \\
\equiv & (\overline{(A\cap B)}\cap A)\cup(\overline{(A\cap B)}\cap B) & \text{Leis de De Morgan} \\
\equiv & ((\overline{A}\cup\overline{B})\cap A)\cup((\overline{A}\cup\overline{B})\cap B) & \text{Distb. da } \cap \text{ sobre a } \cup \\
\equiv & ((\overline{A}\cap A)\cup(\overline{B}\cap A))\cup((\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap B)) & \text{Prop. do complemento} \\
\equiv & (\emptyset\cup(\overline{B}\cap A))\cup((\overline{A}\cap B)\cup\emptyset) & \text{Prop. conjunto vazio} \\
\equiv & (\overline{B}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B) & \text{Comutatividade da união} \\
\equiv & (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A) & \text{Comutatividade da interseção} \\
\equiv & (\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B}) &
\end{array}
$$

Portanto $\overline{((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B}))}\equiv(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$.

(d) **Prova:**

Aula 19

2.1.1 - Teoremas Envolvendo Conjuntos

1. Para mostrar que A não é subconjunto de B, basta mostrar que pelo menos um elemento de A não pertence a B. Temos que $2\in A$ e $2\notin B$, logo A não é subconjunto de B.
2. A é subconjunto próprio de B se $A\subseteq B$ e $A\neq B$. Como todo elemento $x\in A$ também pertence a B, temos que $A\subseteq B$. Por outro lado, considere o elemento 1, onde $1\in B$ e $1\notin A$. Desta parte, temos que $A\neq B$. Portanto, temos que A é um subconjunto próprio de B.
3. Podemos concluir que $A=\emptyset\vee B=\emptyset$. Sejam as possibilidades:
   $A=\emptyset$, então $\emptyset\times B=\{(x,y): x\in\emptyset \;\; e \;\; y\in B\}=\emptyset$
   $B=\emptyset$, então $A\times\emptyset=\{(x,y): x\in A \;\; e \;\; y\in\emptyset\}=\emptyset$
   $A=B=\emptyset$, então $\emptyset\times\emptyset=\{(x,y): x\in\emptyset \;\; e \;\; y\in\emptyset\}=\emptyset$
4.
5.
6.
7. **Prova Direta:**

1. Suponha que $A\cap B=A$
2. Seja um x arbitrário e suponha que $x\in A$.
3. Como $x\in A$ e $A\cap B=A$, temos que $x\in A\cap B$
4. De$x\in A\cap B$, temos que $x\in B$.
5. Como x é um elemento arbitrário e $x\in A$ e $x\in B$, temos que $A\subseteq B$.

   Portanto, se $A\cap B=A$ então $A\subseteq B$.

8.