UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MATEMÁTICA DISCRETA I- BCC101

NOTAS DE AULA: LÓGICA PROPOSICIONAL

Prof^{a}. Dayanne G. Coelho

Ouro Preto - MG
2017

Aula 1: Introdução à Lógica Proposicional

BCC101- Matemática Discreta I

(DECOM/UFOP)

1.1 Introdução à Lógica Formal

O **Cálculo Proposicional** é a parte da lógica matemática que estuda a validade de argumentos apresentados em uma linguagem própria, a linguagem proposicional. Nessa linguagem é possível distinguir dois aspectos: o sintático e o semântico. O sintático estabelece símbolos, regras de formação e regras de dedução de validade. O aspecto semântico consiste na valoração das fórmulas com atribuição da propriedade de verdadeiro ou falso [1].

A lógica formal é usada para representar as afirmações que fazemos na linguagem natural para expor fatos ou transmitir informações. Podemos dizer ainda que a lógica consiste no estudo dos princípios e aspectos cognitivos da linguagem, com o objetivo de elaborar e distinguir um argumento correto de um argumento incorreto.

A lógica matemática (lógica simbólica) é uma sub-área da matemática caracterizada pela axiomatização, simbolismo e formalismo das aplicações da lógica formal. Inclui o estudo de sistemas formais e o poder dedutivo de sistemas de prova matemática, analisando o raciocínio segundo operações e relações de cálculo proposicional e/ou predicados.

Definição 1.1 (Proposição) Uma proposição (ou declaração) é qualquer sentença declarativa que é verdadeira ou falsa, mas não ambas.

Por exemplo, são proposições as frases "*três é menor que quatro*" e "*três é maior que quatro*", a primeira porque é uma declaração verdadeira e a segunda porque é uma declaração falsa.

Exemplo 1.1 São exemplos de proposições as seguintes sentenças:

a) dois mais três é igual a quatro. É uma proposição, já que possui valor falso.

b) O Atlético é o melhor time de Minas Gerais. É uma proposição, já que possui valor verdadeiro.

c) Existe vida em Marte. É uma proposição.

d) A lua é feita de queijo verde. É uma proposição, já que possui valor falso.

e) Dois é um número primo. É uma proposição, já que possui valor verdadeiro.

f) Belo Horizonte é capital de Minas Gerais. É uma proposição, já que possui valor verdadeiro.

g) Para todo inteiro $n > 1$, $2^n - 1$ é primo. É uma proposição, já que possui valor falso.

Observe que não é preciso saber com exatidão se o valor da sentença é verdadeiro ou falso.

Exemplo 1.2 São exemplos de não proposições as seguintes sentenças:

a) Ele é um homem alto. Não é uma proposição, pois "ele" não está especificado.

b) Não Corra tão rápido! Não é uma proposição, é uma sentença imperativa

c) $x + 1 = 2$. Não é uma proposição, pois o valor "x" não está especificado

d) Quantas vezes preciso repetir a mesma coisa? Não é uma proposição, é uma sentença interrogativa.

e) Pelo amor de Deus! Não é uma proposição, é uma sentença exclamativa.

f) Venha aqui! Não é uma proposição, é uma sentença imperativa.

Note que não é possível estabelecer um valor verdadeiro ou falso para cada uma das frases acima.

1.1.1 Princípios da Lógica Clássica

A lógica matemática na sua versão clássica assume como regras fundamentais três princípios básicos:

Princípio da identidade: Toda proposição é idêntica a si mesma.

Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do Terceiro Excluído: Toda proposição é verdadeira ou falsa, não existe um terceiro valor que ela pode assumir.

Definição 1.2 (Proposição Simples) Uma proposição é dita simples se, e somente se, contiver uma única afirmação. Em outras palavras, uma proposição simples não pode ser subdividida em proposições menores.

Exemplo 1.3 São exemplos de proposições simples:

a) Dez é menor que sete.

b) Hoje vai chover.

c) José está feliz.

Definição 1.3 (Proposição Composta) Uma proposição é dita composta quando for constituída por uma sequência finita de pelo menos duas proposições simples.

Exemplo 1.4 São exemplos de proposições compostas:

a) Os mineiros fabricam os melhores queijos e os gaúchos, o melhor vinho.

Proposição composta de uma combinação de duas proposições simples:

- Os mineiros fabricam os melhores queijos.
- Os gaúchos fabricam o melhor vinho.

b) Se fizer todos os exercícios, então tirarei boa nota na prova.

Proposição composta de uma combinação de duas proposições simples:

- Vou fazer todos os exercícios.
- Vou tirar boa nota na prova.

c) Se Temer assumir o governo, os impostos serão reduzidos.

Proposição composta de uma combinação de duas proposições simples:

- Temer assume o governo.
- Os impostos são reduzidos.

d) Se toda mulher dessa classe é aluna da ciência da computação e se toda aluna da ciência da computação é inteligente, então toda mulher dessa sala é inteligente.

Proposição composta de uma combinação de três proposições simples:

- Toda mulher dessa classe é aluna da ciência da computação.
- Toda aluna da ciência da computação é inteligente.
- Toda mulher dessa classe é inteligente.

Ao escrevermos uma proposição composta, estamos combinando proposições simples utilizando

conectivos lógicos. Os conectivos mais usados na lógica matemática são os **conectivos binários** (conjunção, disjunção, condicional e bicondicional) que juntam duas sentenças produzindo uma terceira expressão, e o **conectivo unário** (negação), que age em uma única sentença produzindo uma segunda expressão.

Várias palavras da língua portuguesa podem ser utilizadas para denotar os conectivos. A Tabela 1.1 mostra algumas expressões comuns em português e os conectivos que elas representam.

Conectivo Lógico	**Expressão em Português**
Conjunção	A **e** B; A **também** B; A **mas** B; A **além disso** B.
Disjunção	A **ou** B.
Condicional	**Se** A, **então** B; A **implica** B; A **logo,** B; **basta** A **para** B; A **só se** B; A **somente se** B; B **segue de** A; A **é condição suficiente para** B; B **é condição necessária para** A.
Bicondicional	A **se e somente se** B; A **é condição necessária e suficiente para** B.
Negação	**não** A; **é falso que** A; **Não é verdade que** A.

Tabela 1.1: Palavras em português relacionadas aos conectivos lógicos. Extraído de [2].

Devido a riqueza da língua portuguesa, uma proposição pode ser escritas de várias maneiras:

- A sentença "Colocarei créditos na carteirinha do RU se e somente se minha bolsa cair" também pode ser dita como "A minha bolsa cair é condição necessária e suficiente para que eu coloque créditos na carteirinha do RU."
- A sentença "Basta fazer todos os exercícios para tirar boa nota na prova" também pode ser dita como "Se eu fizer todos os exercícios, então tirarei boa nota na prova."
- A sentença "Joaquim não foi aprovado em matemática discreta" também pode ser dita como "Não é verdade que Joaquim foi aprovado em matemática discreta."

Exemplo 1.5 Identifique os conectivos presentes nas proposições compostas:

a) Os mineiros fabricam os melhores queijos e os gaúchos, o melhor vinho. (Conjunção.)

b) Basta fazer todos os exercícios para tirar boa nota na prova. (Condicional.)

c) Amanhã vou estudar matemática discreta ou estrutura de dados. (Disjunção.)

d) Colocarei créditos na carteirinha do RU se e somente se minha bolsa cair. (Bicondicional.)

e) Joaquim não foi aprovado em matemática discreta. (Negação.)

1.1.2 Formalização

O processo de formalização das proposições consiste em converter um conjunto de proposições interligadas em uma estrutura composta de:

- **Letras de Proposição:** A, B, $\cdots$, P, Q. (A maioria dos livros utilizam letras maiúsculas do alfabeto.)
- **Conectivos Lógicos:** os conectivos binários e o conectivo unário que são substituídos pelos símbolos $(\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg)$ como apresentados na Tabela 1.2.

Conectivo	Símbolo	Expressão lógica
Negação	$\neg$	$\neg A$
Conjunção	$\wedge$	$A \wedge B$
Disjunção	$\vee$	$A \vee B$
Condicional	$\rightarrow$	$A \rightarrow B$
Bicondicional	$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$

Tabela 1.2: Notação para os conectivos.

- **Símbolos de pontuação:** parênteses (ou colchetes).

Exemplo 1.6 Considere as seguintes sentenças:

a) Os mineiros fabricam os melhores queijos e os gaúchos, o melhor vinho.

- Proposições simples:
  A: Os mineiros fabricam os melhores queijos.
  B: Os gaúchos fabricam o melhor vinho.
- Formalização: $A \wedge B$

b) Basta fazer todos os exercícios para tirar boa nota na prova.

- Proposições simples:
  A: Fazer todos os exercícios.
  B: Tirar boa nota na prova.
- Formalização: $A \rightarrow B$

c) Amanhã vou estudar matemática discreta ou estrutura de dados.

- Proposições simples:
  A: Amanhã vou estudar matemática discreta.
  B: Amanhã vou estudar estrutura de dados.
- Formalização: $A \vee B$

d) Colocarei créditos na carteirinha do RU se e somente se minha bolsa cair.

- Proposições simples:
  A: Vou colocar créditos na carteirinha do RU.
  B: Minha bolsa caiu.
- Formalização: $A \leftrightarrow B$

e) Joaquim não foi aprovado em matemática discreta.

- Proposição simples:

A: Joaquim foi aprovado em matemática discreta.

- Formalização: $\neg A$

f) Se todos os homens são mortais e Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal.

- Proposições simples:

  R: Todos os homens são mortais.

  S: Sócrates é um homem.

  T: Sócrates é mortal.

- Formalização: $R \wedge S \rightarrow T$

1.1.3 Exercícios

Os exercícios foram retirados e adaptados dos livros [2, 3, 4]. Para mais exercícios consulte as referências.

1. Quais dessas sentenças são proposições?
   (a) Belo horizonte é capital de Minas Gerais.
   (b) Curitiba é capital de Santa Catarina.
   (c) $2+3=5$
   (d) $5+7=10$
   (e) $x+2=11$
   (f) Responda esta questão.
   (g) Que horas são?
   (h) $2^n \geq 100$
2. Traduza as proposições seguintes usando a notação simbólica.
   (a) Se Alfredo escrever para a Maria, ela não irá para outra cidade.
   (b) Ou Alfredo escreve para Maria ou ela irá para outra cidade.
   (c) Alfredo não escreveu para Maria e ela irá para outra cidade.
   (d) O gerente despedirá Maria ou despedirá João.
   (e) O número de acidentes diminuirá nas estradas se, e somente se, houver mais policiamento e os motoristas forem mais conscientes.
   (f) Todos acertaram todas as questões, mas isso não significa que não devam estudar mais.
   (g) Se Eduardo não apresentar uma queixa, então, nem Fernando investigará, nem Geraldo será desclassificado.
3. Considere as proposições:

$$A: \text{ Carlos é Argentino}$$
$$B: \text{ João é Brasileiro}$$

   Traduza para a linguagem natural as seguintes proposições simbólicas:
   (a) $A \vee B$
   (b) $\neg A \wedge B$
   (c) $A \rightarrow B$

(d) $A \rightarrow \neg B$

(e) $\neg A \leftrightarrow B$

(f) $\neg A \wedge \neg B$

4. Escreva as afirmações compostas a seguir utilizando a notação simbólica.

    (a) x é menor que 3 e maior que 0 ou x não é igual a 7.

    (b) Se x é menor que 4 e maior que 2, então x é igual a 3.

    (c) Ou x é maior que 0, ou x é menor que 3 e y é maior que 0.

    (d) x é maior que 3 se, e somente se, y for maior que 0.

5. Dadas as letras indicadas para as proposições componentes, escreva as afirmações compostas usando a notação simbólica.

    (a) Se os preços subirem, então haverá muitas casas disponíveis e caras; mas se as casas não estiverem caras, ainda assim haverá muitas disponíveis.
    A : preços subirem;
    B : haverá muitas casas disponíveis;
    C : as casas estarão caras.

    (b) Ir para cama ou ir nadar é uma condição suficiente para trocar de roupa; no entanto, mudar de roupa não significa que você vai nadar.
    A : ir para a cama;
    B : ir nadar;
    C : trocar de roupa.

    (c) Irá chover ou irá nevar, mas não os dois ao mesmo tempo.
    A : irá chover;
    B : irá nevar.

    (d) Se Janete vencer ou se perder, ela ficará cansada.
    A : Janete vence;
    B : Janete perde;
    C : Janete ficará cansada.

6. Dadas as seguintes proposições:
    A : Rosas são vermelhas.
    B : Violetas são azuis.
    C : Açúcar é doce.
    Reescreva as proposições compostas na notação simbólica.

    (a) Rosas são vermelhas e violetas são azuis.

    (b) Rosas são vermelhas, e ou violetas são azuis ou açúcar é doce.

    (c) Sempre que violetas forem azuis, rosas serão vermelhas e açúcar será doce.

    (d) Rosas só serão vermelhas se violetas não forem azuis ou se açúcar for amargo.

    (e) Rosas são vermelhas, e, se açúcar for amargo, então ou violetas não são azuis ou açúcar é doce.

7. Dadas as seguintes proposições:

A : Rosas são vermelhas.

B : Violetas são azuis.

C : Açúcar é doce.

Reescreva as proposições compostas usando a linguagem natural.

(a) $B \vee \neg C$

(b) $\neg B \vee (A \to C)$

(c) $(C \wedge \neg A) \to B$

(d) $C \wedge (\neg A \to B)$

8. Qual é a negação de cada proposição a seguir?

    (a) Hoje é quinta-feira.

    (b) Não há poluição em Ouro Preto.

    (c) $2+1=3$

1.2 Sintaxe da Lógica Proposicional

Para evitar ambiguidades nas proposições compostas deve-se estabelecer uma pontuação adequada, que segue as seguintes regras de precedência dos conectivos.

Definição 1.4 A ordem de precedência dos conectivos é dada por:

1. Cada parêntese aberto deve ser fechado; e para os conectivos dentro de vários parênteses, efetuam-se primeiros as expressões dentro dos parênteses mais internos.
2. $\neg$
3. $\wedge$
4. $\vee$
5. $\rightarrow$
6. $\leftrightarrow$

O uso dos parênteses na formação das novas expressões é fundamental.

Exemplo 1.7 Considere as seguintes situações:

- $P \wedge Q \vee R$: Neste caso, a expressão é interpretada como $(P \wedge Q) \vee R$. Se quiser fazer a operação desta forma, $P \wedge (Q \vee R)$, é necessário indicar o parêntese.
- $A \vee \neg B$: Neste caso, a expressão significa $A \vee (\neg B)$ e não $\neg(A \vee B)$.
- $A \vee B \rightarrow C$: Neste caso, a expressão é o mesmo que $(A \vee B) \rightarrow C$ e não $A \vee (B \rightarrow C)$.

Para evitar o excesso de parênteses aplica-se critérios de associatividade aos operadores:

- Os conectivos conjunção e disjunção associam à esquerda: a expressão $A \vee B \vee C$ é similar à $(A \vee B) \vee C$.
- Os conectivos condicional e bicondicional associam à direita: a expressão $A \rightarrow B \rightarrow C$ é similar à $A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Exemplo 1.8 Elimine os parênteses desnecessários:

1. $((P \vee Q) \vee (R \vee S))$ $P \vee Q \vee (R \vee S)$
2. $(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)))$ $P \rightarrow Q \rightarrow P \wedge Q$
3. $\neg(P \vee (Q \wedge R))$ $\neg(P \vee Q \wedge R)$

1.2.1 Fórmulas Bem Formadas

Uma sequência qualquer de elementos (uma cadeia que forma uma expressão válida) do vocabulário do cálculo proposicional constitui uma fórmula. Uma fórmula aceitável para o cálculo proposicional é denominada **fórmula bem formada (fbf)**.

A cadeia $A)) \wedge \vee \rightarrow BC$, por exemplo, não é considerada uma fbf. Para obter uma fbf é preciso definir as regras de formação para o cálculo proposicional.

Definição 1.5 (Fórmulas Bem Formadas) O conjunto de fórmulas bem formadas da lógica proposicional é definido pelas seguintes regras de formação:

1. Uma letra proposicional isolada é uma fbf.
2. Se P é uma fbf, então $\neg P$ também é.
3. Se P e Q são fbf, então $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \rightarrow Q)$ e $(P \leftrightarrow Q)$ também são.

Exemplo 1.9 Considere as seguintes fórmulas:

a) $P \rightarrow Q \wedge R$ É uma fbf! Neste caso não há necessidade de colocação do parênteses, visto que a conjunção tem precedência sobre a condicional.

b) $P \rightarrow Q \leftrightarrow$ Não é uma fbf! Pois desobedece a regra 3.

c) $(A \wedge (B \leftrightarrow C)$ Não é uma fbf! Pois possui parêntese aberto que não foi fechado.

d) $A \wedge \rightarrow B$ Não é uma fbf! Pois desobedece a regra 3.

e) $A \rightarrow \neg A$ É uma fbf!

Definição 1.6 Em uma fórmula bem formada com diversos conectivos, aplicando a regra de precedência, o último conectivo a ser aplicado recebe o nome de conectivo principal.

Exemplo 1.10 Considere as seguintes fórmulas:

a) Na expressão $A \wedge \neg(B \rightarrow C)$ o conectivo principal é a conjunção ($\wedge$).

b) Na expressão $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow (B \vee (\neg C))$ o conectivo principal é o condicional ($\rightarrow$).

c) Na expressão $(P \rightarrow P \vee Q) \vee (R \leftrightarrow Q)$ o conectivo principal é a disjunção ($\vee$).

1.2.2 Exercícios

1. Para cada um dos termos a seguir, determine se é ou não uma fórmula bem formada (fbf).
   (a) A
   (b) $(A \rightarrow B) \wedge C$
   (c) $B \wedge (C \vee D)$
   (d) $A \wedge B \vee C$
   (e) $\neg(A \vee B) \vee C \rightarrow D$
   (f) $(\neg((A \vee B) \wedge C \leftrightarrow ((D \vee \neg E) \rightarrow F))$
   (g) $((\neg(A \vee (\neg B) \leftrightarrow D) \vee E)$

Aula 2: Semântica da Lógica Proposicional

BCC101- Matemática Discreta I
(DECOM/UFOP)

2.1 Semântica da Lógica Proposicional

A semântica na lógica matemática considera as possibilidades de **valores lógicos** (ou valor verdade) que uma variável pode assumir, como mostra a Tabela 2.1. Existem dois resultados possíveis: a verdade e a falsidade, que são indicados respectivamente pelas constantes *true* (T ou $\top$) ou *false* (F ou $\bot$).

A
T
F

Tabela 2.1: Uma variável pode assumir um dos valores lógicos: verdadeiro (T) ou falso (F).

Para determinar o valor verdade de uma proposição composta, usa-se um instrumento denominado **tabela verdade**. Nesta tabela é apresentada todas as possíveis combinações dos valores lógicos que as proposições simples podem assumir. O valor verdade de uma proposição composta depende do valor lógico de suas proposições simples e do significado do conectivo lógico que liga essas proposições.

2.1.1 Conjunção

A conjunção é o resultado da combinação de duas proposições ligadas pela palavra **e**, que será substituída pelo símbolo $\wedge$. A expressão $A \wedge B$ é chamada de conjunção de A e B, onde A e B são denominados elementos (ou fatores) desta expressão.

A conjunção $A \wedge B$ possui seu valor lógico (T) se, e somente se, as duas proposições que a compõem forem verdadeiras ($A = B = T$). O valor verdade da conjunção será falso nos demais casos, como indicado na tabela verdade:

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

2.1.2 Disjunção

A disjunção é o resultado da combinação de duas proposições ligadas pela palavra **ou**, que será substituída pelo símbolo $\vee$. A expressão $A \vee B$ (leia A ou B) é chamada de disjunção de A e B, onde A e B são denominados elementos (ou fatores) dessa expressão.

A disjunção $A \vee B$ possui valor verdade (F) se, e somente se, ambas as proposições que a compõem forem falsas ($A = B = F$). O valor lógico da disjunção será verdadeiro nos demais casos, como indicado na tabela verdade:

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Na linguagem coloquial, a palavra **ou** pode ser empregada em dois sentidos, **inclusivo** ou **exclusivo**. A tabela anterior trata-se do primeiro caso.

Disjunção Exclusiva

A disjunção exclusiva é representado simbolicamente por $A \oplus B$ (leia “ou A, ou B” ou ainda “A ou B, mas não ambas”). Como o próprio nome “exclusiva” diz a proposição indica que ocorre um termo ou o outro, mas não ambos.

A disjunção exclusiva $A \oplus B$ possui valor falso (F) se, e somente se, ambas as proposições possuírem o mesmo valor lógico ($A = B = T$ ou $A = B = F$). O valor lógico da disjunção exclusiva será verdadeiro nos demais casos, como indicado na tabela verdade:

A	B	$A \oplus B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Exemplo 2.1 Exemplos de proposições compostas usando a disjunção:

- Paulo é matemático ou físico.
  Disjunção inclusiva, simbolicamente representada por $A \vee B$.
- Maria será cantora ou seguirá a carreira de cientista da computação.
  Disjunção inclusiva, simbolicamente representada por $P \vee Q$.
- Mateus é mineiro ou paulista.
  Disjunção exclusiva, simbolicamente representada por $A \oplus B$.
- O elefante é macho ou fêmea.
  Disjunção exclusiva, simbolicamente representada por $P \oplus Q$.

2.1.3 Condicional

A expressão "**se** A, **então** B" é representada simbolicamente por $A \rightarrow B$ (leia "A condicional B"). A proposição A é chamada de **antecedente** e a proposição B de **consequente**.

A proposição condicional é falsa (F) se, e somente se, a proposição antecedente for verdadeira (T) e a consequente for falsa (F) ($A = T$ e $B = F$). O valor lógico da condicional será verdadeiro nos demais casos, como indicado na tabela verdade:

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

2.1.4 Bicondicional

A expressão "A **se, e somente se,** B" é representada simbolicamente por $A \leftrightarrow B$. Além disso, é uma abreviatura da conjunção de dois condicionais, ou seja, $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

A proposição bicondicional possui valor lógico (T) se, e somente se, as duas proposições que a compõem tiverem o mesmo valor ($A = B = T$ ou $A = B = F$). O valor lógico do bicondicional será falso nos demais casos, como indicado na tabela verdade:

A	B	$A \leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

2.1.5 Negação

Este conectivo nega a afirmação da proposição que o precede. É representado pelo símbolo ($\neg$) que deve ser usado antes da letra que traduz a proposição. Assim, a negação de A é simbolizada pela fórmula $\neg A$ (leia "não A").

A fórmula $\neg A$ significa que a negação de uma proposição verdadeira (T) é uma proposição falsa (F) e a negação de uma proposição falsa (F) é uma proposição verdadeira (T), como indicado pela seguinte tabela verdade:

A	$\neg A$
T	F
F	T

A aplicação do conectivo negação em uma proposição composta deve ser feita sempre com muito cuidado. Por exemplo, considere a negação das seguintes expressões:

- Pedro é alto e magro.

Negação	**Proposição**	**Justificativa**
Incorreta:	Pedro não é alto e não é magro. Pedro é baixo e gordo.	É uma proposição muito forte. A negação diz que Pedro não tem ambas as propriedades (ser magro e ser alto), mas ele ainda pode ter uma delas.
Correta:	É falso que Pedro seja alto e magro. Pedro não é alto ou não é magro. Pedro é baixo ou gordo.	

- A comida é ruim ou está salgada.

Negação:	**Proposição**	**Justificativa**
Incorreta:	A comida não é ruim ou não está salgada.	É uma proposição fraca. A negação diz que a comida não tem nenhuma das propriedades e não que ela deixa de ter apenas uma delas.
Correta:	É falso que a comida esteja ruim ou salgada. A comida não é ruim nem salgada. A comida é boa e não está salgada.	

2.1.6 Valor Lógico

O Valor Lógico (valor verdade) de uma proposição composta pode ser obtido analisando os valores lógicos das proposições simples que a compõe e das operações lógicas entre esses valores. Considere as seguintes expressões:

a) O Brasil foi colônia de Portugal, mas hoje é um país independente.

- Proposições simples e valor verdade:
  - A: O Brasil foi colônia de Portugal. (T)
  - B: Hoje (O Brasil) é um país independente. (T)
- Formalização : $A \wedge B$
- Valor verdade:

$$A \wedge B$$
$$\underbrace{T \wedge T}_{T}$$

b) Vivemos em um país da América Latina, portanto, nosso idioma é proveniente do latim.

- Proposições simples e valor verdade:
  - A: Vivemos em um país da América Latina. (T)
  - B: Nosso idioma é proveniente do latim. (T)
- Formalização : $A \rightarrow B$
- Valor verdade:

$$A \rightarrow B$$
$$\underbrace{T \rightarrow T}_{T}$$

c) Se D. Pedro proclamou a independência do Brasil, ou declarou guerra à Inglaterra, então o Brasil foi colônia da Inglaterra.

- Proposições simples e valor verdade:
  - A: D. Pedro proclamou a independência do Brasil. (T)
  - B: D. Pedro declarou guerra à Inglaterra (F)
  - C: O Brasil foi colônia da Inglaterra (F)
- Formalização : $A \vee B \rightarrow C$
- Valor verdade:

$$A \vee B \rightarrow C$$
$$T \vee F \rightarrow F$$
$$\underbrace{V \rightarrow F}_{F}$$

Resumo:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$\neg A$
T	T	T	T	F	T	T	F
T	F	F	T	T	F	F	
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	F	F	F	T	T	

Tabela 2.2: Resumo dos valores verdades dos conectivos lógicos.

2.1.7 Exercícios

Os exercícios foram retirados e adaptados dos livros [2, 3, 4]. Para mais exercícios consulte as referências.

1. Determine os valores verdade das proposições.
   (a) Belo horizonte é capital de Minas Gerais.
   (b) Curitiba é capital de Santa Catarina.
   (c) $2+3=5$
   (d) $5+7=10$
   (e) A lua é feita de queijo verde.
   (f) Todo número divisível por 5 termina em 0.
2. Determine se as proposições condicionais são verdadeiras ou falsas.
   (a) Se 1+1 =3, então unicórnios existem.
   (b) Se 1+1=3, então peixes podem nadar.
   (c) Se 1+1=2, então cachorros podem voar.
   (d) Se 2+2=4, então 1+2=3.
3. Qual o valor lógico de cada uma das proposições a seguir?
   (a) 8 é ímpar e 6 é ímpar.
   (b) Se 8 for ímpar, então 6 é ímpar.
   (c) Se 8 for par, então 6 será ímpar.
   (d) Se 8 for ímpar, então 6 será par.
   (e) Se 8 for ímpar e 6 for par, então $8 < 6$.
   (f) 8 é par se, e somente se, 6 for par.
   (g) É falso que 8 é par e 6 é ímpar.
4. Dados os valores lógicos A verdadeiro, B falso e C verdadeiro, determine o valor lógico das fórmulas bem formadas.
   (a) $A \wedge (B \vee C)$
   (b) $(A \wedge B) \vee C$
   (c) $\neg(A \wedge B) \vee C$
   (d) $\neg A \vee \neg(\neg B \wedge C)$

   (e) $\neg(A \leftrightarrow (\neg B \wedge C))$
   (f) $(A \rightarrow \neg(B \rightarrow C)) \rightarrow A$
   (g) $\neg A \vee \neg(B \wedge C)$
5. Para cada uma das sentenças, determine se o conectivo se trata de uma **disjunção inclusiva** ou **disjunção exclusiva**. Explique sua resposta.
   (a) Café ou chá virá com o jantar.
   (b) Uma senha deve ter ao menos três dígitos ou oito caracteres de comprimento.
   (c) O pré-requisito para o curso é um curso em teoria dos números ou um curso em criptografia.
   (d) Você pode jogar usando dólares americanos ou euros.
   (e) Você viajará para São Paulo ou Belo Horizonte.
6. Escreva a negação das fórmulas bem formadas.
   (a) Se a comida for boa, então o serviço será excelente.
   (b) Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente.
   (c) Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro.
   (d) Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente.
   (e) Se for caro, então a comida será boa e o serviço será excelente.
   (f) O verão em Ouro Preto é quente e ensolarado.

2.2 Tabelas Verdade

A tabela verdade é uma tabela matemática usada na lógica analisar os valores lógicos de proposições compostas.

Vimos que se a proposição composta possui apenas duas proposições simples a tabela verdade terá exatamente quatro linhas. **Mas, se a proposição composta possuir três ou mais proposições componentes,quantas linhas a tabela verdade terá?**

De forma geral, o número de linhas da tabela verdade é dado por 2^n, onde n é o número de letras de proposição. Assim, se fórmula composta possuir 2 letras de proposição, então o número de linhas da tabela verdade será $2^2 = 4$. De forma análoga, se a fórmula composta possuir 3 letras de proposição, então o número de linhas da tabela verdade será $2^3 = 8$. E assim, por diante.

Dica: Construa a tabela verdade adicionando colunas para os “resultados intermediários” da fbf. O conectivo principal deve aparecer na última coluna da tabela.

Exemplo 2.2 Construção da tabela verdade para a fbf $A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$. O conectivo principal é o condicional (veja as regras de precedência).

A	B	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T	T

Exemplo 2.3 Construção da tabela verdade para a fbf $(P \to P \vee Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)$. O conectivo principal é a conjunção (veja as regras de precedência).

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \to P \vee Q$	$R \leftrightarrow Q$	$(P \to P \vee Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T	V
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	V
F	T	T	T	T	T	V
F	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T	V

2.2.1 Exercícios

Os exercícios foram retirados e adaptados dos livros [2, 4]. Para mais exercícios consulte as referências.

1. Construa tabelas verdade para cada uma das proposições compostas.
   (a) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$
   (b) $P \vee Q \to P \oplus Q$
   (c) $(P \vee Q) \oplus (P \wedge Q)$
   (d) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (R \leftrightarrow S)$
2. O operador lógico **ou exclusivo** ($\oplus$) é definido pela seguinte tabela-verdade:

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

   (a) Prove que $P \oplus Q \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ construindo uma tabela verdade para a segunda fórmula e comparando-a com a tabela verdade da fórmula $(P \oplus Q)$.
   (b) Prove também que $P \oplus Q \equiv (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

2.3 Classificação das Fórmulas

As proposições compostas podem ser classificadas em tautológicas, contraditórias e contingentes.

Definição 2.1 (Tautologia) Uma proposição composta é uma tautologia se, e somente se, o seu valor lógico é sempre verdadeiro, independentemente do valor lógico das proposições simples que a compõem. Em outras palavras, tautologia é uma fórmula que sempre é verdadeira.

Exemplo 2.4 Exemplos de fórmulas tautológicas:

a) $\neg(P \wedge \neg P)$

Este exemplo traduz a ideia do Princípio da Não Contradição: **"uma proposição não pode ser verdadeira e falsa".**

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\neg(P \wedge \neg P)$
T	F	F	T
F	T	F	T

b) $P \vee \neg P$

Este exemplo envolve o Princípio do Terceiro Excluído: **"uma proposição ou é verdadeira ou é falsa"**. Um exemplo na linguagem natural é a frase "Hoje vai ter sol ou hoje não vai ter sol".

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

c) $P \leftrightarrow P$

Este exemplo envolve o Princípio da Identidade: **"Toda proposição é idêntica a ela mesma"**.

P	$P \leftrightarrow P$
T	T
F	T

Exercício: Verifique que a fórmula $((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ é uma tautologia.
Para tanto, considere a tabela verdade:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$	$Q \rightarrow R$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	$((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

Definição 2.2 (Contradição) Uma proposição composta é uma contradição se, e somente se, o seu valor lógico é sempre falso, independentemente do valor lógico das proposições simples que a compõem. Em outras palavras uma contradição é uma fórmula que é sempre falsa.

Exemplo 2.5 Exemplos de fórmulas que são contradições:

a) $(P \wedge \neg P)$ (Na linguagem natural: "Hoje é quarta-feira e hoje não é quarta-feira".)

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
T	F	F
F	T	F

b) $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F

Exercício: Verifique que a fórmula $\neg(P \rightarrow (\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q)))$ é uma contradição.
Seja a tabela verdade:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	$\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q)$	$P \rightarrow (\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q))$	$\neg(P \rightarrow (\neg P \rightarrow (Q \vee \neg Q)))$
T	T						
T	F						
F	T						
F	F						

Definição 2.3 (Fórmula Satisfazível, Falseável e Contingente) As fórmulas podem ainda ser classificas em falseável ou satisfazível. Uma **fórmula falseável** possui pelo menos uma atribuição de valores às suas variáveis que a tornem falsa, e uma **fórmula satisfazível** tem pelo menos uma atribuição de valores às suas variáveis que a tornem verdadeira. Uma **fórmula é contingente** se é falseável e satisfazível ao mesmo tempo, ou seja, quando o seu valor lógico pode ser T ou F dependendo do valor lógico de suas proposições componentes.

Exemplo 2.6 Exemplos de fórmulas contingentes:

a) $(P \to \neg P)$

P	$\neg P$	$P \to \neg P$
T	F	F
F	T	T

b) $P \leftrightarrow (P \land Q)$

P	Q	$P \land Q$	$P \leftrightarrow (P \land Q)$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

Exercício: Verifique que a fórmula $(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee R) \wedge \neg P$ é uma contingência.

Seja a tabela verdade:

P	Q	R	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$P \vee R$	$(P \vee R) \wedge \neg P$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee R) \wedge \neg P$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	F	F					

2.3.1 Exercícios

Os exercícios foram retirados e adaptados dos livros [2, 4]. Para mais exercícios consulte as referências.

1. Construa tabelas verdade para as fórmulas bem formadas e classifique, cada uma delas, em tautologia, contradição ou contingência.
   (a) $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$
   (b) $(A \wedge B) \vee C \rightarrow A \wedge (B \vee C)$
   (c) $(\neg(A \vee B) \vee \neg A) \wedge A$
   (d) $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)]$
   (e) $A \vee (B \rightarrow C)$

Aula 3: Álgebra Booleana para Lógica Proposicional

BCC101- Matemática Discreta I
(DECOM/UFOP)

3.1 Equivalência Lógica

Definição 3.1 (Equivalência Lógica) Duas fórmulas α e β são ditas equivalentes, $\alpha \equiv \beta$, se possuem o mesmo valor lógico para uma mesma atribuição de valores para as suas variáveis. Em outras palavras, dizemos que duas fórmulas α e β são equivalentes, se a fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$ for uma tautologia.

Exemplo 3.1 A e $\neg\neg A$ são exemplos de fórmulas equivalentes. Veja:

A	$\neg A$	$\neg\neg A$	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
F	T	F	T
T	F	T	T

Uma maneira de determinar se duas proposições compostas são equivalentes é usando a tabela-verdade. Veja que neste exemplo, as proposições compostas A e $\neg\neg A$ são equivalentes, pois as colunas que fornecem seus valores-verdade são idênticas (indicado na tabela pela cor azul). Também podemos dizer que a fórmula $A \leftrightarrow \neg\neg A$ é uma tautologia, pois a coluna que a representa na tabela possui todos os valores lógicos verdadeiro (indicado na tabela pela cor vermelha).

Observações:

- O símbolo $\equiv$ não é conectivo lógico e $\alpha \equiv \beta$ não é proposição composta.
- O símbolo é usado apenas para indicar que $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia.
- Podemos determinar se duas proposições compostas são equivalentes usando tabela-verdade: Duas proposições compostas α e β serão equivalentes se, e somente se, as colunas que fornecem seus valores-verdade são idênticas.

Exemplo 3.2 Verifique se as fórmulas seguintes são equivalentes:

- $(A \wedge B) \wedge C$ e $A \wedge (B \wedge C)$

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T
F	T	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	T

Temos que $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ pois as colunas da tabela verdade que representam essas fórmulas são idênticas. Além disso, $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ é uma tautologia.

- $\neg(A \vee B)$ e $\neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T	T	T

Temos que $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, pois as colunas da tabela verdade que representam essas fórmulas são idênticas. Além disso, $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ é uma tautologia.

3.1.1 Exercícios

1. Use a tabela verdade para mostrar que as proposições são equivalentes.
   (a) $P \leftrightarrow Q$ e $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
   (b) $P \leftrightarrow Q$ e $\neg P \leftrightarrow \neg Q$
   (c) $\neg(P \leftrightarrow Q)$ e $P \leftrightarrow \neg Q$
   (d) $P \leftrightarrow Q$ e $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
2. Verifique se as fórmulas seguintes são ou não equivalentes.
   (a) $P \leftrightarrow Q$ e $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)$

(b) $P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ e $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
(c) $\neg(P \vee (\neg P \wedge Q))$ e $\neg P \wedge \neg Q$

3.2 Álgebra Booleana

A **Álgebra Booleana**, que recebe este nome em homenagem ao matemático inglês George Boole, é uma estrutura algébrica que compreende as propriedades essenciais tanto da lógica proposicional como da teoria dos conjuntos. É uma forma de raciocínio algébrico sobre fórmulas, que permite de maneira simples mostrar que duas fórmulas são iguais por meio de uma sequência de igualdades e substituições.

Uma álgebra Booleana pode ser definida com um conjunto de operadores e um conjunto de axiomas, que são assumidos verdadeiros sem necessidade de prova, e que permitem determinar se duas fórmulas são equivalentes. A tabela verdade também pode ser usada para este propósito. Porém, o seu uso pode se tornar restrito devido a quantidade de linhas que ela deverá ter (2^n, onde n é o número de variáveis da fórmula bem formada).

3.2.1 Leis Fundamentais da Álgebra Booleana

Existem um conjunto de equações, normalmente chamadas de **leis da álgebra booleana**, que descreve propriedades algébricas de proposições. Dizemos que uma proposição é uma lei se a equação que ela representa é uma tautologia, ou seja, se o seu valor lógico é sempre verdadeiro, independente dos valores lógicos de suas variáveis.

As leis da álgebra booleana dizem respeito aos valores lógicos e as operações elementares sobre uma fórmula bem formada, e podem ser usadas na simplificação de expressões lógicas. Vamos apresentar algumas equivalências lógicas básicas e como elas serão identificadas.

Leis envolvendo Constantes:

As primeiras leis apresentadas envolvem constantes. Essas leis, especificam como as constantes lógicas ($true$ e $false$) interagem com os conectivos lógicos conjunção ($\wedge$) e disjunção ($\vee$).

Equivalências	**Nomes**
$P \wedge false \equiv false$	$\{\wedge - \text{Dominação}\}$
$P \vee true \equiv true$	$\{\vee - \text{Dominação}\}$
$P \wedge true \equiv P$	$\{\wedge - \text{Identidade}\}$
$P \vee false \equiv P$	$\{\vee - \text{Identidade}\}$

A seguir são apresentadas as demonstrações das equivalências $\{\wedge - \text{Dominação}\}$ e $\{\wedge - \text{Identidade}\}$.

Prova: .

- $\{\wedge - \text{Dominação}\}$: $P \wedge false \equiv false$

P	$false$	$P \wedge false$	$P \wedge false \leftrightarrow false$
T	F	F	T
F	F	F	T

- $\{\wedge - \text{Identidade}\}$: $P \wedge true \equiv P$

P	$true$	$P \wedge true$	$P \wedge true \leftrightarrow P$
T	T	T	T
F	T	F	T

■

Exemplo 3.3 Mostre que as fórmulas $(A \vee false) \wedge (B \vee true)$ e A são equivalentes.

Solução:

$$\begin{array}{rcll} (A \vee false) \wedge (B \vee true) & \equiv & A \wedge (B \vee true) & \{\vee - \text{Identidade}\} \\ & \equiv & A \wedge true & \{\vee - \text{Dominação}\} \\ & \equiv & A & \{\wedge - \text{Identidade}\} \end{array}$$
.

Portanto, temos que $(A \vee false) \wedge (B \vee true) \equiv A$.

Leis elementares dos conectivos $\wedge$ e $\vee$:

Equivalências	**Nomes**
$P \wedge P \equiv P$	$\{\wedge - \text{Idempotência}\}$
$P \vee P \equiv P$	$\{\vee - \text{Idempotência}\}$
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$\{\wedge - \text{Comutatividade}\}$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$\{\vee - \text{Comutatividade}\}$
$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$\{\wedge - \text{Associatividade}\}$
$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	$\{\vee - \text{Associatividade}\}$
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\{\wedge - \text{Distributividade} - \vee\}$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\{\vee - \text{Distributividade} - \wedge\}$
$(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$	$\{\vee - \text{Absorção}\}$
$(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$	$\{\wedge - \text{Absorção}\}$

Prova: das leis $\wedge - \{\text{Idempotência}\}$ e $\{\vee - \text{Comutatividade}\}$.

- $\wedge - \{\text{Idempotência}\}$: $P \wedge P \equiv P$

P	$P \wedge P$	$P \wedge P \leftrightarrow P$
T	T	T
F	F	T

- $\{\vee - \text{Comutatividade}\}$: $P \vee Q \equiv Q \vee P$

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

■

Exemplo 3.4 Mostre que as fórmulas $(false \wedge A) \vee B$ e B são equivalentes.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(false \wedge A) \vee B &\equiv (A \wedge false) \vee B && \{\wedge - \text{comutatividade}\} \\
&\equiv false \vee B && \{\wedge - \text{Dominação}\} \\
&\equiv B \vee false && \{\vee - \text{Comutatividade}\} \\
&\equiv B && \{\vee - \text{Identidade}\}
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $(false \wedge A) \vee B \equiv B$.

Leis de De Morgan:

Duas equivalências lógicas muito úteis são as Leis de De Morgan, assim nomeadas em honra ao matemático inglês do século XIX Augustus De Morgan, que foi o primeiro a enunciá-las. Essas leis envolvem os conectivos $\wedge$ e $\vee$ e a negação $\neg$.

Equivalências	**Nomes**
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\{\wedge - \text{DeMorgan}\}$
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$\{\vee - \text{DeMorgan}\}$

Prova: (lei $\{\wedge - \text{DeMorgan}\}$) Vamos provar que $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

■

Observações:

- Regra $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
  - A proposição $\neg(P \wedge Q)$ especifica que "não é verdade que P e Q são simultaneamente verdadeiros". Essa proposição é equivalente a dizer que "ou P é falso ou Q é falso".

- Regra $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
  - A proposição $\neg(P \vee Q)$ especifica que "não é verdade que P ou Q sejam verdadeiros", em outras palavras, "não é verdade que uma das proposições seja verdadeira". Essa proposição é equivalente a dizer que "P e Q são falsos".

Exemplo 3.5 Use as Leis de De Morgan para negar as seguintes afirmações:

a) **"Miguel tem um celular e um notebook."**
- P : Miguel tem um celular.
- Q : Miguel tem um notebook.
- $P \wedge Q$: Miguel tem um celular e um notebook.
- Negação: $\neg P \vee \neg Q$: Miguel não tem um celular ou não tem um notebook.

b) **"Rodrigo vai ao concerto ou Carlos vai ao concerto."**
- P : Rodrigo vai ao concerto.
- Q : Carlos vai ao concerto.
- $P \vee Q$: Rodrigo vai ao concerto ou Carlos vai ao concerto.
- Negação: $\neg P \wedge \neg Q$: Rodrigo não vai ao concerto e Carlos não vai ao concerto.

Leis envolvendo a negação ($\neg$):

Equivalências	Nomes
$\neg true \equiv false$	$\{T-$Negação$\}$
$\neg false \equiv true$	$\{F-$Negação$\}$
$\neg(\neg P) \equiv P$	$\{$Dupla Negação$\}$
$P \wedge \neg P \equiv false$	$\{$Contradição$\}$
$P \vee \neg P \equiv true$	$\{$Terceiro Excluído$\}$

Prova: ($\{$Contradição$\}$) $P \wedge \neg P \equiv false$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$false$	$P \wedge \neg P \leftrightarrow false$
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T

■

Exemplo 3.6 Mostre que as fórmulas $A \wedge \neg(B \vee A)$ e $false$ são equivalentes.

Solução:

$$\begin{array}{rcll} A \wedge \neg(B \vee A) & \equiv & A \wedge \neg B \wedge \neg A & \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\ & \equiv & \neg B \wedge A \wedge \neg A & \{\wedge - \text{Comutatividade}\} \\ & \equiv & \neg B \wedge F & \{\wedge - \text{Contradição}\} \\ & \equiv & false & \{\wedge - \text{Dominação}\} \end{array}$$

Portanto, temos que $A \wedge \neg(B \vee A) \equiv false$.

Resumo das Regras de Equivalências

A tabela seguinte apresenta um resumo com algumas equivalências lógicas básicas da álgebra booleana.

Tabela 3.1: Equivalências lógicas básicas

Equivalências	**Nomes**
$P \wedge false \equiv false$	$\{\wedge -$ Dominação$\}$
$P \vee true \equiv true$	$\{\vee -$ Dominação$\}$
$P \wedge true \equiv P$	$\{\wedge -$ Identidade$\}$
$P \vee false \equiv P$	$\{\vee -$ Identidade$\}$
$P \wedge P \equiv P$	$\{\wedge -$ Idempotência$\}$
$P \vee P \equiv P$	$\{\vee -$ Idempotência$\}$
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$\{\wedge -$ Comutatividade$\}$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$\{\vee -$ Comutatividade$\}$
$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$\{\wedge -$ Associatividade$\}$
$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	$\{\vee -$ Associatividade$\}$
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\{\wedge -$ Distributividade $- \vee\}$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\{\vee -$ Distributividade $- \wedge\}$
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\{\wedge -$ DeMorgan$\}$
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$\{\vee -$ DeMorgan$\}$
$\neg true \equiv false$	$\{T -$ Negação$\}$
$\neg false \equiv true$	$\{F -$ Negação$\}$
$\neg(\neg P) \equiv P$	$\{$Dupla Negação$\}$
$P \wedge \neg P \equiv false$	$\{$Contradição$\}$
$P \vee \neg P \equiv true$	$\{$Terceiro Excluído$\}$
$(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$	$\{\vee -$ Absorção$\}$
$(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$	$\{\wedge -$ Absorção$\}$

3.2.2 Exercícios

Os exercícios foram retirados e adaptados dos livros [2, 3, 4]. Para mais exercícios consulte as referências.

1. Prove as leis fundamentais da álgebra booleana usando a tabela verdade.
   (a) $\neg(\neg P) \equiv P$
   (b) $P \vee T \equiv T$
   (c) $P \wedge F \equiv F$
   (d) $P \vee P \equiv P$
   (e) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
   (f) $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
   (g) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
   (h) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
   (i) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
   (j) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
   (k) $P \wedge \neg P \equiv F$

(l) $P \vee \neg P \equiv T$

2. Use as leis de De Morgan para encontrar a negação de cada uma das proposições abaixo:
   (a) João trabalhará na indústria ou irá para a faculdade.
   (b) Camila conhece Java e C++.
   (c) Paulo é Atleticano e Cruzeirense.
   (d) Júlia mudará para Belo Horizonte ou Rio de Janeiro.
3. Abaixo está uma prova de equivalência entre fórmulas proposicionais, usando Álgebra Booleana. A justificativa de cada passo da prova está omitida. Complete a derivação indicando em cada passo da derivação qual lei algébrica foi utilizada:

$$
\begin{aligned}
A \vee \neg(A \wedge \neg B) &= A \vee (\neg A \vee \neg\neg B) && \underline{\hspace{6cm}} \\
&= (A \vee \neg A) \vee \neg\neg B && \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \text{true} \vee \neg\neg B && \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \text{true} \vee B && \underline{\hspace{6cm}} \\
&= B \vee \text{true} && \underline{\hspace{6cm}} \\
&= \text{true} && \underline{\hspace{6cm}}
\end{aligned}
$$

4. Prove as seguintes equivalências lógicas, usando a tabela 3.1.
   (a) $A \vee (A \wedge A) = A$
   (b) $A \vee (B \wedge \neg A) = A \vee B$
   (c) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) = A$
5. Deduza a tabela-verdade do $\wedge$, usando o axiomas da Álgebra Booleana e a tabela-verdade da negação (derivada anteriormente a partir dos axiomas). O caso **true** $\wedge$ **true** é apresentado abaixo, como exemplo. Você deve deduzir os demais casos, ou seja, **true** $\wedge$ **false**, **false** $\wedge$ **true**, **false** $\wedge$ **false**.

$$
\begin{aligned}
\text{true} \wedge \text{true} &= \neg\text{false} \wedge \neg\text{false} && \{\text{tabela}\neg\} \\
&= \neg(\text{false} \vee \text{false}) && \{\vee - \text{ DeMorgan}\} \\
&= \neg\text{false} && \{\vee - \text{Idempotência}\} \\
&= \text{true} && \{\text{tabela}\neg\}
\end{aligned}
$$

6. Deduza a regra $\{\wedge -$ DeMorgan$\}$ usando os axiomas da Álgebra Booleana.
7. Deduza a regra $\{\wedge -$ Distributividade$\}$ usando os axiomas da Álgebra Booleana e a regra $\{\wedge -$ DeMorgan$\}$ (deduzida no item anterior).

Aula 4: Álgebra Booleana para Lógica Proposicional

BCC101- Matemática Discreta I

(DECOM/UFOP)

4.1 Equivalências lógicas

4.1.1 Envolvendo sentenças implicação e bi-implicação

A tabela seguinte apresenta algumas equivalências lógicas envolvendo sentenças condicionais e bi-condicionais

Equivalências	**Nomes**
$P \rightarrow P \equiv true$	{auto-implicação}
$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	{Implicação}
$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	{Contrapositivo}
$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	{Bi-implicação}

Prova: ({**Implicação**}) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

■

Prova: ({**Contrapositivo**}) $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$

Por tabela verdade:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Usando as equivalências lógicas estudadas até aqui:

$$\begin{aligned}
P \rightarrow Q &\equiv \neg P \vee Q && \{\text{Implicação}\} \\
&\equiv \neg P \vee \neg(\neg Q) && \{\text{Dupla Negação}\} \\
&\equiv \neg(\neg Q) \vee \neg P && \{\vee - \text{Comutatividade}\} \\
&\equiv \neg Q \rightarrow \neg P && \{\text{Implicação}\}
\end{aligned}$$

■

A Tabela 4.1 apresenta algumas derivações das equivalências lógicas envolvendo as sentenças condicionais e bicondicionais.

Tabela 4.1: Equivalências lógicas envolvendo as sentenças condicionais e bicondicionais

Equivalências	
$\{1 \rightarrow\}$	$P \vee Q \equiv \neg P \rightarrow Q$
$\{2 \rightarrow\}$	$P \wedge Q \equiv \neg(P \rightarrow \neg Q)$
$\{3 \rightarrow\}$	$\neg(P \rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$

Equivalências	
$\{1 \leftrightarrow\}$	$P \leftrightarrow Q \equiv \neg P \leftrightarrow \neg Q$
$\{2 \leftrightarrow\}$	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
$\{3 \leftrightarrow\}$	$\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \leftrightarrow \neg Q$

4.1.2 Construção de novas equivalências lógicas

As equivalências lógicas podem ser usadas para construir equivalências lógicas adicionais, isto porque uma proposição composta pode ser substituída por outra proposição composta que é logicamente equivalente a ela, sem alterar o valor verdade da proposição original.

Exemplo 4.1 Verifique se as proposições $\neg(P \rightarrow Q)$ e $P \wedge \neg Q$ são logicamente equivalentes.
Seja:

$$
\begin{array}{rcll}
\neg(P \rightarrow Q) & \equiv & \neg(\neg P \vee Q) & \{\text{Implicação}\} \\
 & \equiv & \neg(\neg P) \wedge \neg Q & \{\vee - \text{ DeMorgan}\} \\
 & \equiv & P \wedge \neg Q & \{\text{Dupla negação}\}
\end{array}
$$

Logo, temos que $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

Exemplo 4.2 Mostre que a sentença $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$ é uma tautologia.

Prova: seja:

$$
\begin{array}{rcll}
(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q) & \equiv & \neg(P \wedge Q) \vee (P \vee Q) & \{\text{Implicação}\} \\
 & \equiv & (\neg P \vee \neg Q) \vee (P \vee Q) & \{\wedge - \text{ DeMorgan}\} \\
 & \equiv & (\neg P \vee P) \vee (\neg Q \vee Q) & \{\vee - \text{associatividade e comutatividade}\} \\
 & \equiv & (P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg Q) & \{\vee - \text{comutatividade}\} \\
 & \equiv & true \ \vee \ true & \{\text{Terceiro excluído}\} \\
 & \equiv & true & \{\vee - \text{Dominação}\}
\end{array}
$$

Portanto, temos que $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$ é uma tautologia. ■

4.1.3 Exercícios

Os exercícios foram retirados e adaptados dos livros [2, 4]. Para mais exercícios consulte as referências.

1. Prove as leis fundamentais da álgebra booleana usando a tabela verdade.
   (a) $P \rightarrow P \equiv T$
   (b) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
   (c) $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
   (d) $P \vee Q \equiv \neg P \rightarrow Q$
   (e) $P \wedge Q \equiv \neg(P \rightarrow \neg Q)$
   (f) $P \leftrightarrow Q \equiv \neg P \leftrightarrow \neg Q$
   (g) $P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
   (h) $\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \leftrightarrow \neg Q$
   (i) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \equiv P \rightarrow (Q \wedge R)$

(j) $(P \to R) \land (Q \to R) \equiv (P \lor Q) \to R$

(k) $(P \to Q) \lor (P \to R) \equiv P \to (Q \lor R)$

(l) $(P \to R) \lor (Q \to R) \equiv (P \land Q) \to R$

2. Abaixo está uma prova de equivalência entre fórmulas proposicionais, usando Álgebra Booleana. A lei algébrica a ser usada em cada passo já foi dada. Aplique a regra indicada em cada passo e escrever a fórmula obtida:

$$
\begin{aligned}
B \land (A \to \neg B) &= \underline{\hspace{8cm}} && \{\text{Implicação}\} \\
&= \underline{\hspace{8cm}} && \{\land \text{ Distributividade}\} \\
&= \underline{\hspace{8cm}} && \{\text{Contradição}\} \\
&= \underline{\hspace{8cm}} && \{\lor\text{Identidade}\}
\end{aligned}
$$

3. Prove as seguintes equivalências lógicas usando as propriedades da álgebra booleana.
   (a) $\neg(A \to \neg B) \equiv A \land B$
   (b) $\neg(P \lor (\neg P \land Q)) \equiv \neg P \land \neg Q$
   (c) $(P \to Q) \lor (P \to R) \equiv P \to (Q \lor R)$
4. Verifique se as sentenças “quem tem dinheiro, não compra fiado” e “quem não tem dinheiro, compra fiado” são equivalentes.
5. Considere a seguinte sentença:
$$S = (P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$
   (a) Construa a tabela verdade para S.
   (b) Encontre uma expressão simplificada que seja logicamente equivalente a S.
6. Mostre que a sentença é $[P \land (P \land Q)] \land \neg(P \lor Q)$ é uma contradição.

4.2 Proposições associadas a uma condicional

Definição 4.1 As proposições seguintes são chamadas de proposições associadas a proposição condicional $P \to Q$:

1. **Proposição Contrapositiva:** $\neg Q \to \neg P$
2. **Proposição Recíproca:** $Q \to P$
3. **Proposição Inversa:** $\neg P \to \neg Q$

Considere o seguinte teorema: **Teorema 1:** Se um quadrilátero tem um par de lados paralelos, então ele tem um par de ângulos suplementares. Cujas proposições simples são:

P: O quadrilátero tem um par de lados paralelos.

Q: O quadrilátero tem um par de ângulos suplementares.

e que pode ser escrito na forma simbólica pela condicional $P \to Q$. Considere uma segunda versão deste teorema, representada simbolicamente por $\neg Q \to \neg P$: **Teorema 2:** Se um quadrilátero não tem um par de ângulos suplementares, então ele não tem um par de lados paralelos.

O segundo teorema é logicamente equivalente ao primeiro, veja a tabela verdade seguinte.

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

Logo, temos que $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$. Em outras palavras, se o primeiro teorema é verdadeiro, o segundo também é.

Considere agora uma terceira versão do mesmo teorema, representada simbolicamente por $Q \to P$: **Teorema 3:** Se um quadrilátero tem um par de ângulos suplementares, então ele tem um par de lados paralelos. Como mostra a próxima tabela verdade, o terceiro teorema não é logicamente equivalente ao primeiro.

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

Definição 4.2 Define-se então as seguintes propriedades em relação as proposições associadas:

- A condicional $P \to Q$ é equivalente a contrapositiva $\neg Q \to \neg P$.
- A recíproca $Q \to P$ é equivalente a inversa $\neg P \to \neg Q$.

Exemplo 4.3 Seja a seguinte sentença

S: Se está chovendo, então o chão está molhado.

Apresente:

a) A recíproca de S: Se o chão está molhado, então está chovendo.

b) A contrapositiva de S: Se o chão não está molhado, então não está chovendo.

c) A inversa de S: Se não está chovendo, então o chão não está molhado.

4.2.1 Exercícios

1. Prove, usando as equivalências lógicas já estudadas, que $Q \to P \equiv \neg P \to \neg Q$
2. Considere a sentença S : "Se o cachorro é um mamífero, então ele não voa." Escreva:
   (a) a contrapositiva de S:
   (b) a recíproca de S:
   (c) a inversa de S:

4.3 Exemplos Complementares

Exemplo 4.4 Considere a seguinte proposição:

Se Alcides está atrasado, então Belmiro está atrasado, e, se Alcides e Belmiro estão ambos atrasados, então a aula de BCC101 é chata. Suponha que a aula de BCC101 não seja chata. O que você pode concluir a respeito de Alcides?

A tradução da frase "Se Alcides está atrasado, então Belmiro está atrasado, e, se Alcides e Belmiro estão ambos atrasados, então a aula de BCC101 é chata" para a linguagem simbólica é dada considerando as seguintes proposições simples:

- P: Alcides está atrasado.
- Q: Belmiro está atrasado.
- R: A aula de BCC101 é chata.

e simbolicamente pode ser escrita como: $(P \to Q) \wedge [(P \wedge Q) \to R]$.

A tabela-verdade da sentença $(P \to Q) \wedge [(P \wedge Q) \to R]$ é dada por:

P	Q	R	$P \to Q$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \to R$	$(P \to Q) \wedge [(P \wedge Q) \to R]$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	V	F	T	T
F	T	F	V	F	T	T
F	F	T	V	F	T	T
F	F	F	V	F	T	T

Como a pergunta em questão é "**O que você pode concluir a respeito de Alcides?**", estamos interessados no valor lógico da proposição P. Temos que:

- É necessário analisar as sentenças válidas. Então vamos, excluir as linhas 2, 3 e 4, cujo valor lógico é F.
- Vamos assumir que a aula não é chata ($R = F$). Então podemos eliminar todas as linhas em que R é verdadeiro, ou seja, as linhas 1, 3, 5 e 7.

As linhas restantes são 6 e 8. Como estamos interessados no valor de P e em ambas esse valor é falso, podemos concluir que Alcides não está atrasado.

Exercício: Considere as seguintes sentenças simples:

P: Amauri está com fome.

Q: A geladeira está vazia.

R: Amauri está zangado.

1. Escreva na forma simbólica a seguinte sentença "Se Amauri está com fome e a geladeira está vazia, então Amauri esta zangado"
   Forma simbólica:

2. Construa a tabela verdade para a sentença anterior.

P	Q	R	
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

3. Suponha que a sentença dada em (1) seja verdadeira. Suponha também que Amauri não esteja zangado e a geladeira esteja vazia. Diante destas suposições, é possível dizer que Amauri está com fome?

4.3.1 Exercícios

1. Se Hugo é culpado, então Maria é inocente. Se Hugo é culpado, Ricardo é inocente. Se Hugo é inocente, então Ricardo é culpado. Se Maria é inocente, então Ricardo é culpado. Se Maria é culpada, então Ricardo é inocente. Logo, Hugo, Maria e Ricardo são, respectivamente:
   (a) Culpado, culpado, culpado.
   (b) Inocente, culpado, culpado.
   (c) Inocente, culpado, inocente.

   (d) Inocente, inocente, culpado.
   (e) Culpado, culpado, inocente.

2. Um técnico suspeita que um ou mais dos processadores de um sistema distribuído não está funcionando corretamente. Os processadores A, B e C são capazes de relatar informações sobre o estado (funcionando ou não funcionando) de processadores do sistema. O técnico não tem certeza se um processador de fato não funciona, ou se o problema está nas rotinas de transmissão de estado de um ou mais processadores. Depois de sondar cada processador, o técnico recebeu o seguinte relatório de estados.

   - O processador A relata que o processador B não está funcionando e que o processador C está funcionando.
   - O processador B relata que A está funcionando se e somente se B está funcionando.
   - O processador C relata que pelo menos um dos outros dois processadores não está funcionando.

   Ajude o técnico a resolver as seguintes questões:

   (a) Sejam a :"A está funcionando", b :"B está funcionando", e c :"C está funcionando". Escreva os três relatórios de estado nos termos a, b e c, usando símbolos da lógica formal.
   (b) Complete a tabela verdade:

a	b	c	Relatório A		Relatório B	Relatório C	
			$\neg b$	$\neg b \wedge c$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$\neg a \vee \neg b$
T	T	T					
T	T	F					
T	F	T					
T	F	F					
F	T	T					
F	T	F					
F	F	T					
F	T	F					

   (c) Assumindo que todos esses relatórios sejam verdadeiros, que processador(es) não está(estão) funcionando?
   (d) Assumindo que todos os processadores estejam funcionando, que relatório(s) de estado é(são) falso(s)?

3. Dizer que "Guilherme não é músico ou Marcelo é professor" é, do ponto de vista lógico, dizer o mesmo que:

   (a) Se Marcelo é professor, então Guilherme é músico.
   (b) Se Guilherme é músico, então Marcelo é professor.
   (c) Se Guilherme não é músico, então Marcelo é professor.
   (d) Se Guilherme é músico, então Marcelo não é professor.
   (e) Se Guilherme não é músico, então Marcelo não é professor.

Aula 5: Forma Normal

BCC101- Matemática Discreta I

(DECOM/UFOP)

5.1 Forma Normal das Proposições

Uma proposição está na **forma normal** se é formada apenas pelos conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Existem duas formas normais que são amplamente utilizadas na ciência da computação: a forma normal disjuntiva e a forma normal conjuntiva.

5.1.1 Forma Normal Conjuntiva

A **formal normal conjuntiva** (FNC) é utilizada como entrada para algoritmos para teste de satisfazibilidade.

Definição 5.1 Dizemos que uma fórmula bem formada da lógica proposicional está na forma normal conjuntiva se, e somente se são verificadas as seguintes condições:

1. As constantes lógicas (T e F) são fórmulas na forma normal conjuntiva.
2. Contém apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
3. A $\neg$ não aparece repetida (como $\neg\neg$) e só incide sobre letras proposicionais (isto é, não é usado sobre fórmulas com os conectivos $\wedge$ e $\vee$).
4. A $\vee$ incide apenas sobre as variáveis ou negação das variáveis (ou seja, não ocorre em nível mais externo da fórmula, como está apresentado aqui: $P \vee (Q \wedge R)$).
5. A $\wedge$ incide sobre fórmulas que consistem de disjunção de variáveis ou negação de variáveis.

Sejam P, Q e R variáveis da lógica proposicional. São exemplos de fórmulas na forma normal conjuntiva:

- T, F, P, $\neg P$.
- $P \vee Q$, $\neg Q \vee R$, $P \vee Q \vee R$ e $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$.
- $(P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$.

Exemplo 5.1 Considere as seguintes fórmulas:

1. $A \to (B \vee C)$, não está na forma normal conjuntiva, pois possui o conectivo de implicação.
2. $\neg(A \wedge B)$, não está na forma normal conjuntiva, pois a negação não incide sobre fórmulas, e não apenas variáveis.
3. $A \vee (B \wedge C)$, não está na forma normal conjuntiva, pois o conectivo $\vee$ deve ocorrer apenas em variáveis.

Exemplo 5.2 Determine a forma normal conjuntiva da proposição $\neg[((A \vee B) \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)]$

$$
\begin{aligned}
\neg[((A \vee B) \wedge \neg B) \vee (B \wedge C)] &\equiv \neg[(A \vee B) \wedge (\neg B)] \wedge \neg(B \wedge C) && \{\vee - \text{DeMorgan}\}\\
&\equiv [\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg B)] \wedge (\neg B \vee \neg C) && \{\wedge - \text{DeMorgan}\}\\
&\equiv [\neg(A \vee B) \vee B] \wedge (\neg B \vee \neg C) && \{\text{Dupla Negação}\}\\
&\equiv [(\neg A \wedge \neg B) \vee B] \wedge (\neg B \vee \neg C) && \{\vee - \text{DeMorgan}\}\\
&\equiv [(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee B)] \wedge (\neg B \vee \neg C) && \{\vee - \text{Distributividade}\}\\
&\equiv [(\neg A \vee B) \wedge T] \wedge (\neg B \vee \neg C) && \{\text{Terceiro Excluído}\}\\
&\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C) && \{\wedge - \text{Identidade}\}
\end{aligned}
$$

A fórmula $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg C)$ está na forma normal conjuntiva.

5.1.2 Forma Normal Disjuntiva

A formal normal disjuntiva é aplicada em minimização de fórmulas lógicas.

Definição 5.2 Dizemos que uma fórmula bem formada da lógica proposicional está na forma normal disjuntiva se, e somente se são verificadas as seguintes condições:

1. As constantes lógicas (T e F) são fórmulas na forma normal disjuntiva.
2. Contém apenas os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$.
3. A $\neg$ não aparece repetida (como $\neg\neg$) e só incide sobre letras proposicionais (isto é, não tem alcance sobre fórmulas com os conectivos $\wedge$ e $\vee$).
4. A $\wedge$ incide apenas sobre as variáveis ou negação das variáveis (isto é, não ocorre em nível mais externo de fórmulas, como apresentado em $P \wedge (Q \vee R)$).
5. $\vee$ incide sobre fórmulas que consistem de conjunções de variáveis ou negação de variáveis.

Sejam P, Q e R variáveis da lógica proposicional. São exemplos de fórmulas na forma normal disjuntiva:

- T, F, P, $\neg P$.
- $P \wedge Q$, $Q \wedge \neg R$, $\neg P \wedge Q \wedge R$ e $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$.

- $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$.

Exemplo 5.3 Considere as seguintes fórmulas:

1. $(A \wedge B) \leftrightarrow C$, não está na forma normal disjuntiva, pois possui o conectivo de bi-implicação.
2. $\neg(A \vee B)$, não está na forma normal disjuntiva, pois a negação não está incide sobre fórmulas, e não apenas variáveis.
3. $A \wedge (B \vee C)$, não está na forma normal disjuntiva, pois o conectivo $\wedge$ deve ocorrer apenas em variáveis.

Exemplo 5.4 Determine a forma normal disjuntiva da proposição $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

$$
\begin{array}{rcll}
(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) & \equiv & (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) & \{\text{Implicação}\} \\
& \equiv & [\neg A \wedge (\neg B \vee A)] \vee [B \wedge (\neg B \vee A)] & \{\wedge - \text{Distrib.}\} \\
& \equiv & [(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A)] \vee [(B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)] & \{\wedge - \text{Distrib.}\} \\
& \equiv & [(\neg A \wedge \neg B) \vee F] \vee [F \vee (B \wedge A)] & \{\text{Contradição.}\} \\
& \equiv & (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A) & \{\vee - \text{Identidade.}\}
\end{array}
$$

A fórmula $(\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$ está na forma normal disjuntiva.

5.1.3 Exercícios

1. Determine uma forma normal conjuntiva equivalente para as proposições.
   (a) $P \rightarrow Q$
   (b) $P \rightarrow \neg P$
   (c) $P \leftrightarrow \neg P$
   (d) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
2. Determine uma forma normal disjuntiva equivalente para as proposições seguintes:
   (a) $\neg(\neg P \vee \neg Q)$
   (b) $\neg(P \rightarrow Q)$
   (c) $(P \rightarrow P) \wedge \neg P$
   (d) $\neg(P \vee Q)$
   (e) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
   (f) $\neg(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Aula 6: Argumentos

BCC101- Matemática Discreta I

(DECOM/UFOP)

6.1 Argumentos

A *lógica proposicional* é um formalismo matemático composto por uma linguagem formal e por um conjunto de regras de inferência, que permitem analisar um argumento de forma precisa e decidir a sua validade. Para ser um argumento, uma sequência de enunciados precisa: ser finita; ter ao menos dois enunciados e ter exatamente um dos enunciados destacado como conclusão.

Exemplo 6.1 Exemplos de sequências de enunciados que são argumentos:

a) O aluno só aprovado em BCC101 se estudar para as provas.
O aluno foi aprovado em BCC101.
Então, o aluno estudou para as provas.

b) Todos os atleticanos são mineiros.
Logo, alguns mineiros são atleticanos.

c) Sempre que chove em Ouro Preto, faz muito frio.
Está chovendo em Ouro Preto.
Logo, hoje está fazendo frio.

Exemplo 6.2 Exemplos de sequências de enunciados que não são argumentos:

a) Nenhum dos enunciados está destacado como conclusão:

Professores do DECOM lecionam disciplinas para a ciência da computação.
Dayanne é uma professora que leciona disciplina para a ciência da computação.
Existem professores do DECOM que não lecional disciplinas para a ciência da computação.

b) Possui apenas um enunciado:

Se Toda função polinomial é diferenciável e se toda função diferenciável é contínua, então toda função polinomial é contínua.

c) Possui infinitos enunciados (neste caso, indicado pelo símbolo $\vdots$):

2 é um número par.

4 é um número par.

6 é um número par.

$\vdots$

Logo, dado $n \in \mathbb{N}$, todo número escrito na forma $2n$ é par.

Definição 6.1 (Argumento) é uma afirmação que dada uma sequência finita de proposições $P_1, P_2, \cdots, P_n$, chamadas de premissas (**ou hipóteses**), tem como consequência uma outra proposição Q, chamada de conclusão (**ou tese**).

Notação:

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline Q \end{array}$$

O símbolo $\vdash$ é chamado de traço de asserção e indica que a proposição Q pode ser deduzida através das premissas $P_1, P_2, \cdots, P_n$. Em outras palavras, o argumento pode ser definido como uma sequência de premissas seguidas de uma conclusão.

A notação $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$ é denominada **sequente** e pode ser lida como:

- $P_1, P_2, ..., P_n$ acarretam Q
- Q decorre de $P_1, P_2, ..., P_n$
- Q se deduz de $P_1, P_2, ..., P_n$
- Q se infere de $P_1, P_2, ..., P_n$

A identificação de uma premissa e conclusão em uma sequência de enunciados faz parte dos procedimentos que permitem verificar se o argumento está ou não bem construído. Alguns indicadores de premissa e conclusão são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Indicadores de premissa e conclusão

Indicadores de Premissa	**Indicadores de Conclusão**
se, pois; porque; dado que; como foi dito; a razão é que; pela razão de que; admitindo assumindo que; pelo fato de; como; pois que; visto que; devido a; atendendo a que; que; sabendo-se que; ora; uma vez que; etc.	por isso; por conseguinte; implica que; daí que; segue-se que; pode-se inferir que; deste modo; assim; verifica-se; logo; então; o que aponta para; portanto; o que mostra que; consequentemente; por essa razão; concluo; etc.

Exemplo 6.3 Considere o seguinte argumento:

P_1 : Sócrates é homem.
P_2 : Todos os homens são mortais.
Q : Logo, Sócrates é mortal.

onde P_1 e P_2 são as **premissas do argumento** e Q é a **conclusão do argumento**. Este exemplo representa um tipo de argumento conhecido como **silogismo**.

Definição 6.2 (Silogismo) O silogismo é um modelo de raciocínio lógico baseado na ideia da dedução e composto por duas premissas que geram uma conclusão.

Fonte: @hqqisso?

6.1.1 Formalização de um Argumento

O argumento demonstra como a partir dos dados de um problema é possível chegar a uma determinada conclusão. Assim, o objetivo do estudo de **argumentos lógicos** é justificar uma afirmação, ou dar as razões para que se tire uma conclusão.

A lógica proposicional pode ser usada para formalizar um argumento. Neste processo é necessário que sejam reconhecidas todas as proposições e conectivos que compõem a sequência de afirmações, para que cada uma delas possa ser escrita na forma simbólica por uma fórmula bem formada.

Exemplo 6.4 Considere o seguinte argumento:

(1) Se o time vence todos os jogos, ganha o campeonato.
(2) Se o time não ganha o campeonato, os torcedores ficam zangados.
(3) Os torcedores estão contentes.
(4) Logo, o time ganhou o campeonato.

As proposições envolvidas neste argumento são:

p : "o time vence todos os jogos"

q : "o time ganha o campeonato"

r : "os torcedores ficam zangados"

Reescrevendo cada proposição do argumento como uma fórmula bem formada, temos:

(1) $p \to q$

(2) $\neg q \to r$

(3) $\neg r$

(4) q

O argumento pode então ser representado como: $p \to q, \neg q \to r, \neg r \vdash q$

6.1.2 Validade de um argumento

Os argumentos lógicos podem ser válidos ou inválidos. Um **argumento é válido** (ou bem construído) se a sua conclusão é uma consequência necessária das suas premissas (hipóteses). Um **argumento é inválido** ou mal construído (falacioso), quando a veracidade das premissas não é suficiente para garantir a verdade da conclusão.

A validade de um argumento depende da sua estrutura, ou seja, de como este argumento está organizado. A validade de um argumento não é uma garantia da verdade da sua conclusão. Um argumento válido pode ter premissas falsas e uma conclusão falsa.

Exemplo 6.5 Exemplos de argumentos válidos:

a) Todo mamífero é vertebrado.
Os gatos são mamíferos.
Portanto, os gatos são vertebrados.

b) Maria é professora de português.
Toda professora de português é alfabetizada.
Logo, Maria é alfabetizada.

c) Todos os alunos da UFOP estudam programação.
Nenhum estudante de programação cursa engenharia.
Portanto, nenhum aluno da UFOP cursa engenharia.

Alguns argumentos, mesmo que possuam premissas e a conclusão visivelmente falsas, ainda assim são considerados argumentos válidos. O estudo de argumentos leva em consideração a validade da sua construção. Na letra c)do exemplo anterior, o argumento é válido, embora a veracidade das premissas e da conclusão sejam questionáveis.

Uma forma de verificar a validade do argumento da letra c) é utilizando diagramas de Venn. A afirmação "Todos os alunos da UFOP estudam programação", representada na Figura 6.1, indica que todos os elementos do conjunto menor (alunos da UFOP) pertencem ao conjunto maior (estudantes de programação). Já a afirmação "Nenhum estudante de programação cursa engenharia", representada na Figura 6.2, possui a palavra-chave nenhum, que indica que não existe interseção entre os dois conjuntos (estudantes de programação e estudantes de engenharia).

Figura 6.1: Representação gráfica da frase **"Todo A é B".**

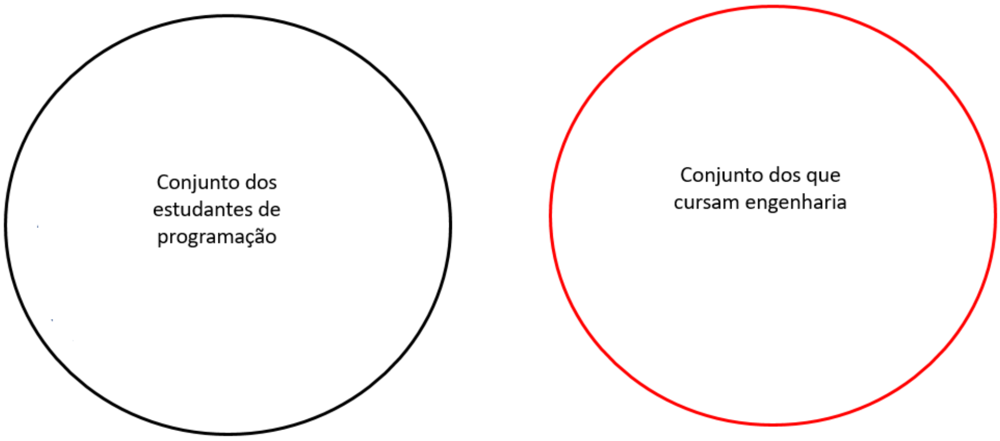

Figura 6.2: Representação gráfica da frase **"Nenhum A é B".**

A análise gráfica das duas premissas em conjunto está representada na Figura 6.3. Comparando a conclusão "nenhum aluno da UFOP cursa engenharia" com a Figura 6.3, pode-se verificar que a conclusão é uma consequência das premissas. Portanto o argumento é bem construído (**válido**)!

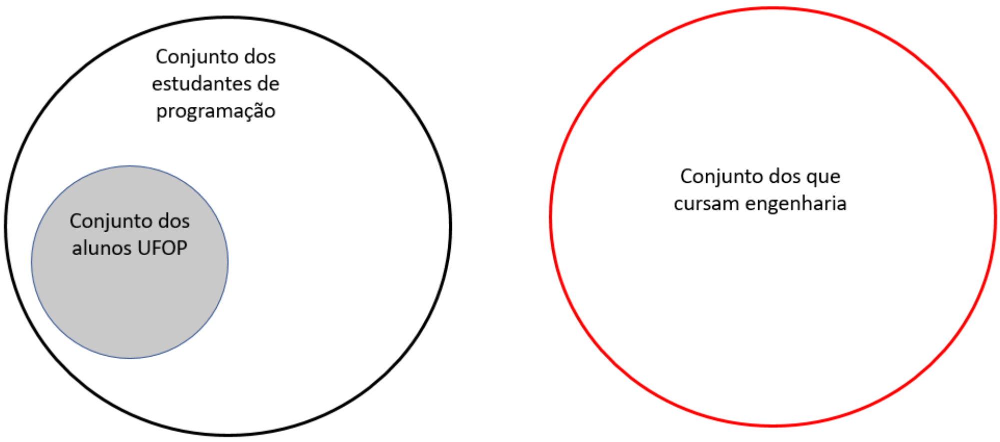

Figura 6.3: Representação gráfica das premissas P_1 e P_2.

Exemplo 6.6 Considere o argumento:

Todos os alunos de Ciência da Computação gostam de lógica.
Joaquim não é aluno de Ciência da Computação.
Então, Joaquim não gosta de lógica.

Neste caso, como as premissas não garantem a veracidade da conclusão, dizemos que o argumento é inválido (**ou mal construído**).

Vamos verificar se o argumento do exemplo anterior realmente é inválido através do diagrama de Venn. A premissa "Todos os alunos de Ciência da Computação gostam de lógica", representada na Figura 6.4, indica que todos os elementos do conjunto menor (alunos de ciência da computação) pertencem ao conjunto maior (alunos que gostam de lógica).

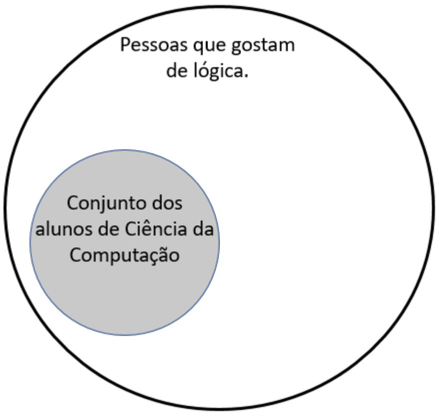

Figura 6.4: Representação gráfica da frase **"Todo A é B".**

A segunda premissa, "Joaquim não é aluno da Ciência da Computação", indica que o único lugar que Joaquim não pode estar localizado é dentro do conjunto de alunos de Ciência da Computação. Assim, como apresentado na Figura 6.5, Joaquim pode estar em dois lugares distintos do diagrama: fora do conjunto maior ou dentro do conjunto maior, porém fora do conjunto de alunos de Ciência da Computação. Mas claramente, as premissas não são suficientes para afirmar que Joaquim não gosta de lógica.

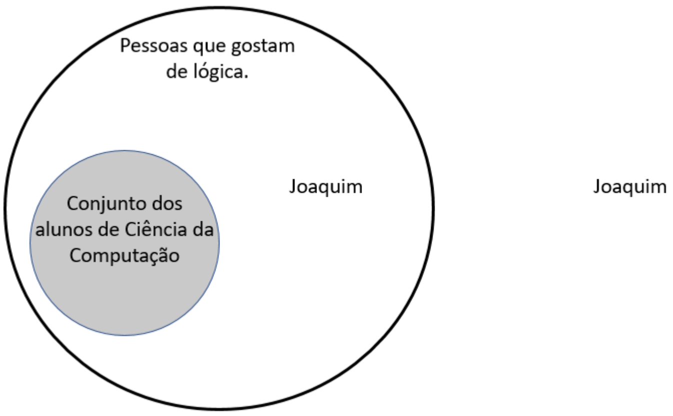

Figura 6.5: Representação gráfica das premissas P_1 e P_2.

De forma sucinta, dizemos que um **argumento é válido** se todas as suas premissas são verdadeiras (no contexto em que ele é proferido) e as premissas garantem a conclusão: um argumento válido não pode ter premissas verdadeiras e uma conclusão falsa. Um argumento será inválido se ao menos uma de suas premissas é falsa (no contexto em que ele é proferido) ou as premissas não garantem a conclusão.

Definição 6.3 (Argumento Válido) Um argumento

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$$

é dito válido se, e somente se, a conclusão Q tiver valor lógico **V** sempre que todas as premissas tiverem valor lógico **V**. Um argumento que não é válido é dito uma **falácia**.

Dizemos ainda que um argumento é válido se a veracidade das premissas implica que a conclusão seja verdadeira, ou ainda que, a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão. De forma simbólica, um argumento também pode ser representado por:

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

onde $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são as proposições (**hipóteses**) e Q é a **conclusão** do argumento. O argumento é considerado válido sempre que a verdade das proposições $P_1, P_2, \ldots, P_n$ implicar a verdade de Q, em outras palavras, quando o condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ for verdadeiro. De forma equivalente é possível dizer que:

- Q pode ser deduzido logicamente de $P_1, P_2, \ldots P_n$.
- Q é uma conclusão lógica de $P_1, P_2, \ldots P_n$.
- $P_1, P_2, \ldots P_n$ implica logicamente Q.
- Q segue logicamente de $P_1, P_2, \ldots P_n$.

Teorema 6.1.1 Um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é válido se, e somente se, a condicional

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

é uma tautologia.

Em um **raciocínio dedutivo**, que faz uso das regras da lógica para se chegar a uma conclusão, não é possível estabelecer a verdade de uma conclusão se as premissas não forem consideradas todas verdadeiras. Estabelecendo as premissas verdadeiras e aplicando de forma correta as leis, então a conclusão do argumento será necessariamente verdadeira.

Exemplo 6.7 Considere o seguinte argumento:

Se você tem uma senha atualizada, então você pode entrar na rede.
Você tem uma senha atualizada.
Portanto, você pode entrar na rede.

O argumento pode ser reescrito, usando P para representar "você tem uma senha atualizada" e Q para representar "você pode entrar na rede", nas formas:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ P \\ \hline \therefore Q \end{array} \qquad \text{ou} \qquad (P \to Q) \wedge P \to Q$$

Para que o argumento seja válido, as premissas $P \to Q$ e P e a conclusão Q devem ser verdadeiras.

Uma outra forma de verificar a validade do argumento é mostrando que a fórmula $(P \to Q) \wedge P \to Q$ é uma tautologia. A tabela verdade 6.2 apresenta tal verificação. Logo, este argumento é válido.

Tabela 6.2: Tabela verdade da fórmula bem formada $(p \to q) \wedge p \to q$.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Exemplo 6.8 Considere o seguinte argumento:

George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos.
Thomas Jefferson escreveu a declaração de independência.
Portanto, todo dia tem 24 horas.

Considere as letras de proposição P para representar "George Washington foi o primeiro presidente dos Estados Unidos", Q para representar "Thomas Jefferson escreveu a declaração de independência" e R para representar "todo dia tem 24 horas". O argumento pode ser reescrito na forma simbólica por:

$$P \wedge Q \to R$$

A tabela-verdade 6.3 apresenta os possíveis valores lógicos que o argumento pode assumir.

Tabela 6.3: Tabela-verdade da sentença $p \wedge q \to r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \to r$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

Note que a fórmula $p \wedge q \to r$ não é uma tautologia. Embora as proposições, assim como a conclusão, sejam verdadeiras, este argumento **não é válido!** A conclusão é um fato isolado, que não está relacionado e nem segue das hipóteses.

Para verificar se o argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia podem ser usados dois procedimentos: tabelas verdade ou o sistema de **regras de dedução**. A tabela verdade deve ser usada da seguinte maneira:

1. construção da tabela destacando uma coluna para cada uma das premissas e para a conclusão.
2. verificação apenas as linhas cujos valores lógicos de todas as premissas são verdadeiros:
   - **argumento válido:** se todas as linhas com premissas verdadeiras possuir os valores lógicos da coluna da conclusão também verdadeiros.
   - **argumento inválido:** se ao menos um valor da coluna da conclusão, em que todas premissas são verdadeiras, for falso.

Exemplo 6.9 Considere os seguintes argumentos:

a) $p, p \rightarrow q \vdash q$ **(Modus Ponens)**

A tabela verdade deste argumento é dada por:

1ª premissa p	q	2ª premissa $p \rightarrow q$	Conclusão q
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

Note que apenas a primeira linha da tabela possui todos os valores lógicos das premissas verdadeiros **(T)**. Como a conclusão também é verdadeira nesta linha, temos que o **argumento é válido!**.

b) Se um homem é solteiro, é infeliz. Se um homem é infeliz, morre jovem. Então, solteiros morrem jovens.

Considere as proposições: p : "Ele é um solteiro"; q : "Ele é infeliz" e r : "Ele morre jovem". O argumento pode ser reescrito na forma:

$$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

A tabela verdade do argumento é:

Tabela 6.4: Lei do Silogismo

p	q	r	1ª Premissa $p \rightarrow q$	2ª Premissa $q \rightarrow r$	Conclusão $p \rightarrow r$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Note que nas linhas 1, 5, 7 e 8 as premissas apresentam valores lógicos verdadeiros e conclusão verdadeira. Portanto, o **argumento é válido!**

Definição 6.4 (Lei do Silogismo) A lei do silogismo

$$p \to q, q \to r \vdash p \to r$$

é um princípio fundamental dos argumentos lógicos. A fórmula acima pode ser lida como: "**Se** p **implica** q **e** q **implica** r**, então** p **implica** r**.**"

A verificação da definição **Lei do Silogismo** também esta apresentada na Tabela 6.4.

6.1.3 Exercícios

1. Determine se os argumentos são válidos. Justifique sua resposta.
   (a) P_1 : Paulo Coelho é escritor.
   P_2 : Todos os escritores são alfabetizados.
   Q : Logo, Paulo Coelho é alfabetizado.
   (b) P_1 : Todo mamífero é vertebrado.
   P_2 : Os gatos são mamíferos.
   Q : Portanto, os gatos são vertebrados.
   (c) P_1 : Todos os atleticanos são mineiros.
   Q : Logo, alguns mineiros são flamenguistas.
   (d) P_1 : Se não existir vida após a morte, então a vida não faz sentido.
   P_2 : Mas a vida faz sentido.
   Q : Então, há vida após a morte.
   (e) P_1 : Alguns números são pares.
   P_2 : Alguns números são ímpares.
   Q : Então, existem números que são pares e ímpares.
2. Verifique utilizando tabela verdade se os seguintes argumentos são válidos.
   (a) $p \to \neg q, q, \neg p \to r \wedge s \vdash r \wedge s$
   (b) $p \vee q, q \to r, \neg r \vee s \vdash s$
   (c) $p \to q, r \to s, p \vee s \vdash q \vee r$
3. Considere o seguinte raciocínio:

H_1:	O computador está ok, ou está com vírus.
H_2:	O computador não está com vírus.
H_3:	Se o computador está ok, então eu vou programar.
C:	Eu vou programar.

Nas perguntas a seguir considere as seguintes variáveis proposicionais e seus respectivos significados:

O: O computador está ok.
N: O computador está com vírus.
P: Eu vou programar.

(a) Preencha a tabela abaixo com a fórmula correspondente a cada uma das sentenças acima.

H_1 :	
H_2 :	
H_3 :	
C :	

(b) Escreva um sequente que representa o argumento anterior.

(c) Verifique, por meio da tabela verdade que o sequente que você escreveu no item anterior é um argumento válido.

Aula 7: Dedução Natural para a Lógica Proposicional

BCC101- Matemática Discreta I
(DECOM/UFOP)

7.1 Dedução Natural para a Lógica Proposicional

A dedução natural é um método de demonstração que foi introduzido de forma independente pelos lógicos Gerhard Gentzen (1935) e Stanislaw Jaskowski (1934). Os sistemas de dedução natural são caracterizados por um conjunto de regras de inferência, projetadas em modelos de regras de introdução e eliminação de conectivos e quantificadores, que são combinadas para a construção de uma demonstração (ou prova).

O processo de **dedução natural**, comumente utilizado na lógica formal, estabelece de maneira rigorosa a validade dos argumentos derivando a **conclusão do argumento** a partir das **premissas do argumento**. O processo de construção de uma demonstração envolve encontrar um conjunto de premissas que seja suficiente para apoiar o que precisamos provar e elaborar uma cadeia de raciocínio que nos conduza a uma conclusão verdadeira.

Para verificar se o argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia deve-se impor que todas premissas sejam verdadeiras e, por meio da aplicação das regras de inferência, constatar que a conclusão também é verdadeira. As provas (demonstrações) podem ser realizadas fazendo uso de:

- **árvores de dedução:** neste modelo as provas formam uma estrutura de árvore, onde as folhas representam as hipóteses, os ramos as regras de inferências e a raiz a conclusão. A demonstração por meio da árvore de dedução apresenta o seguinte formato:

Demonstração:

$$\frac{\text{Hipóteses e Provas}}{\text{Conclusão}}\{regra\}$$

- **método linear:** neste modelo as linhas devem ser numeradas para facilitar a organização da demonstração. Cada linha deve indicar a regra de inferência aplicada nesta etapa da prova. Assim, as primeiras linhas apresentam as premissas, as linhas intermediárias os passos de aplicação das regras de dedução que conduzem as premissas à conclusão, e, por fim, a última linha apresenta a conclusão. A demonstração usando o método linear apresenta o seguinte formato:

Demonstração:

Linhas	**Fórmulas**	**Regra Usada**
1.	P_1	hipótese 1
2.	P_2	hipótese 2
	...	
n.	P_n	hipótese n
$n+1$.	fbf_1	fbf obtida aplicando-se uma regra de dedução
$n+2$.	fbf_2	fbf obtida aplicando-se uma regra de dedução
	...	
m.	Q	conclusão obtida aplicando-se uma regra de dedução

Independente da forma escolhida para fazer a demonstração, o sistema lógico deve conter apenas argumentos válidos e demonstráveis, e deve-se usar o menor número de regras de dedução possível.

7.2 Regras de Inferência

Os argumentos básicos são usados para estabelecer as **inferências**, que são relações que permitem passar das premissas para a conclusão. A palavra inferência vem do latim, *inferre*, e significa “conduzir para”. As regras de inferência:

- são usadas para executar os passos de uma demonstração transformando as fórmulas bem formadas;
- só devem ser aplicadas quando a fórmula estiver exatamente no formato descrito pela regra usada;
- preservam os valores lógicos das fórmulas bem formadas, permitindo gerar novas proposições verdadeiras a partir das proposições precedentes; e
- diferente das regras de equivalência, **não funcionam em ambas as direções!**

O sistema de **Dedução Natural** é formado por regras básicas de inferência, que podem ser divididas em regras de eliminação e de introdução. As **regras de eliminação** mostram como retirar os conectivos para gerar as derivações e as **regras de introdução** como introduzir os conectivos lógicos nas derivações.

7.2.1 Regra para identidade

A regra para **identidade** será simbolicamente representada por $\{ID\}$. Esta regra diz que se uma fórmula P faz parte de um conjunto de premissas, então você pode concluir que ela é verdadeira. Esta regra se apresenta na forma:

$$\frac{P}{P}\{ID\} \qquad \text{ou} \qquad P \vdash P$$

7.2.2 Regras para a conjunção

Introdução da Conjunção

A regra para **introdução da conjunção** será simbolicamente representada por $\{\wedge I\}$. Esta regra diz que dadas duas premissas verdadeiras, P e Q, deriva-se como conclusão a conjunção dessas premissas, ou seja, $P \wedge Q$ ou $Q \wedge P$. Esta regra apresenta a forma:

$$\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}\{\wedge I\} \qquad \frac{P \quad Q}{Q \wedge P}\{\wedge I\}$$

ou

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline Q \wedge P \end{array}$$

ou ainda, nas formas $P, Q \vdash P \wedge Q$ ou $P, Q \vdash Q \wedge P$.

Exemplo 7.1 :

a) Sou mineira. Sou brasileira. Portanto, sou mineira e brasileira.

b)
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg r \\ \hline (p \vee q) \wedge \neg r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ q \vee r \\ \hline (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array} \qquad \begin{array}{l} x < 10 \\ x > 3 \\ \hline (x > 3) \wedge (x < 10) \end{array}$$

Eliminação da Conjunção

A regra para **eliminação da conjunção**, também conhecida por **regra da simplificação**, será simbolicamente representada por $\{\wedge E\}$. Esta regra diz que se a conjunção ($P \wedge Q$) é verdadeira, então P é verdadeira e Q é verdadeira. Logo, pode-se eliminar uma parte dela (a parte mais à direita ou a parte mais à esquerda) e deduzir uma das proposições (P ou Q). Esta regra apresenta a forma:

$$\frac{P \wedge Q}{P}\{\wedge Ee\} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q}\{\wedge Ed\}$$

ou ainda, nas forma $P \wedge Q \vdash P$ ou $P \wedge Q \vdash Q$.

Exemplo 7.2 :

a) Sou mineira e brasileira. Logo, sou mineira.

b) $\dfrac{(p \vee q) \wedge r}{(p \vee q)}$ $\quad \dfrac{(p \vee q) \wedge r}{r}$ $\quad \dfrac{(p \wedge \neg q)}{p}$ $\quad \dfrac{(p \wedge \neg q)}{\neg q}$ $\quad \dfrac{x \in A \wedge x \in B}{x \in A}$

7.2.3 Regras para a disjunção

Introdução da Disjunção

A regra para **introdução da disjunção**, também conhecida por **regra da adição**, será simbolicamente representada por $\{\vee I\}$. Esta regra diz que caso uma dada proposição P seja verdadeira, então é possível deduzir uma disjunção com qualquer outra proposição que o resultado também será verdadeiro, ou seja, é possível inferir $P \vee Q$, $Q \vee P$, $R \vee P$, $P \vee S$, etc.

A proposição $P \rightarrow (P \vee Q)$ é uma tautologia e pode ser lida como: "se P é verdadeira, então $P \vee Q$ também é verdadeira" ou "de P concluímos $P \vee Q$". Esta regra apresentada a forma:

$$\frac{P}{P \vee Q}\{\vee I\} \qquad\qquad P \vdash P \vee Q$$

Exemplo 7.3 :

a) Sou mineira. Portanto, sou mineira ou paulista.

b) $\dfrac{p}{p \vee q}$ $\quad \dfrac{\neg p}{q \vee \neg p}$ $\quad \dfrac{p \vee q}{(r \wedge s) \vee (p \vee q)}$ $\quad \dfrac{p \wedge q}{(p \wedge q) \vee r}$

Eliminação da Disjunção

A regra da **eliminação da disjunção**, ou **dilema**, será simbolicamente representada por $\{\vee E\}$ e especifica o que podemos deduzir da disjunção $P \vee Q$ quando esta possui valor lógico verdadeiro.

Se $P \vee Q$ é verdadeira, da tabela verdade da disjunção, temos que P é verdadeira ou Q é verdadeira ou ambas. Porém não é possível afirmar com certeza que P ou Q são verdadeiras.

Se $P \vee Q$ é verdadeira e existem premissas $P \rightarrow T$ e $Q \rightarrow T$ também verdadeiras, então podemos eliminar a disjunção e deduzir T. Essa regra indica uma prova por **divisão de dois casos** e apresentar a forma:

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ P \rightarrow T \\ Q \rightarrow T \\ \hline T \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{(P \vee Q) \quad (P \rightarrow T) \quad (Q \rightarrow T)}{T}\{\vee E\}$$

ou ainda, na forma $P \vee Q, P \rightarrow T, Q \rightarrow T \vdash T$.

Exemplo 7.4 :

a) João é paulista ou mineiro. Se João é paulista, então é brasileiro. Se é João é mineiro, então é brasileiro. Logo, João é brasileiro.

b)

x é par $\vee$ y é par	$x > 0 \vee x < 0$
x é par $\rightarrow$ xy é par	$x > 0 \rightarrow x^2 > 0$
y é par $\rightarrow$ xy é par	$x < 0 \rightarrow x^2 > 0$
xy é par	$x^2 > 0$

7.2.4 Regras para a negação

As regras para negação equivalem a duas regras de substituições válidas na lógica formal: "se a premissa P é verdadeira, então $\neg\neg P$ também é verdadeira" e "se $\neg\neg P$ é verdadeira, podemos deduzir que P é verdadeira".

Introdução da Negação

A regra da **introdução da negação** será simbolicamente representada por $\{\neg I\}$. Esta regra apresenta a forma:

$$\frac{P}{\neg\neg P}\ \{\neg I\} \qquad \text{ou} \qquad P \vdash \neg\neg P$$

Eliminação da Negação

A regra da **eliminação da negação** será simbolicamente representada por $\{\neg E\}$. Esta regra apresenta a forma:

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \{\neg E\} \qquad \text{ou} \qquad \neg\neg P \vdash P$$

7.2.5 Regras para a implicação

Eliminação da implicação

A regra da **eliminação da implicação**, também conhecida como *Modus Ponens*, será simbolicamente representada por $\{\rightarrow E\}$. Esta regra consiste na resolução de implicações lógicas.

A condicional $(P \rightarrow Q)$ significa que se P tem valor lógico verdadeiro, então Q também é verdadeiro (tabela verdade da implicação). Assim, a regra *Modus Ponens*, ocorre quando sabemos que as premissas $(P \rightarrow Q)$ e P são ambas verdadeiras. Assim, por consequência lógica, podemos deduzir que Q também é verdadeira. A regra é definida da forma:

$$\begin{array}{l} P \\ P \rightarrow Q \\ \hline Q \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \rightarrow Q \qquad P}{Q}\ \{\rightarrow E\}$$

ou ainda, na forma $P, P \rightarrow Q \vdash Q$.

Exemplo 7.5 :

a) Vou estudar para prova. Se estudo para a prova, então sou aprovada na disciplina. Logo, serei aprovada na disciplina.

b) Se chover, então fico em casa. Choveu. Então, fiquei em casa.

c)
$$\frac{\begin{array}{l}\neg p \\ \neg p \rightarrow \neg q\end{array}}{\neg q} \qquad \frac{\begin{array}{l}(p \wedge q) \rightarrow r \\ (p \wedge q)\end{array}}{r} \qquad \frac{\begin{array}{l}x > 0 \text{ e } y > 0 \rightarrow x.y > 0 \\ x > 0 \text{ e } y > 0\end{array}}{x.y > 0}$$

7.2.6 Regras derivadas

As regras de introdução e eliminação dos conectivos $\wedge, \vee$ e $\rightarrow$ nem sempre determinam as provas mais simples ou curtas. Para simplificar a tarefa de dedução, novas regras derivadas são obtidas a partir das regras anteriores.

Modus Tollens

A regra *Modus Tollens*, assim como *Modus Ponens*, também consiste na resolução de implicações lógicas. Vamos representar esta regra simbolicamente por $\{\rightarrow E_{MT}\}$ ou {Modus Tollens}.

Esta regra ocorre quando especificamos que as proposições $P \rightarrow Q$ e a negação do consequente ($\neg Q$) são verdadeiras. Logo, necessariamente a negação do antecedente ($\neg P$) também é verdadeira. A regra é definida na forma:

$$\frac{\begin{array}{l}\neg Q \\ P \rightarrow Q\end{array}}{\neg P} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \rightarrow Q \qquad \neg Q}{\neg P}\ \{\rightarrow E_{MT}\}$$

ou ainda, como $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

Exemplo 7.6 :

a) Eu não estudei para a prova. Serei aprovada na disciplina somente se estudar para a prova. Portanto, não serei aprovada na disciplina.

b) Se o fogo está aceso, então tem oxigênio. Não tem oxigênio. Então o fogo não está aceso.

c)
$$\frac{\begin{array}{l}\neg s \\ p \wedge r \rightarrow s\end{array}}{\neg (p \wedge r)} \qquad \frac{\begin{array}{l}p \rightarrow (q \vee r) \\ \neg (q \vee r)\end{array}}{\neg p} \qquad \frac{\begin{array}{l}\text{x é par} \rightarrow x^2 \text{ é par} \\ x^2 \text{ é ímpar}\end{array}}{\text{x é ímpar.}}$$

De forma sucinta, a diferença entre as regras *Modus Ponens* e *Modus Tollens* consistem em:

- *Modus Ponens* a implicação é usada para provar que a consequência é verdadeira ao verificar que a premissa é verdadeira.
- *Modus Tollens* a implicação é usada para provar que a premissa é falsa ao verificar que a consequência é falsa.

Silogismo Disjuntivo

A regra **silogismo disjuntivo** ($\{SD\}$) permite deduzir da disjunção de duas proposições $P \vee Q$ e da negação de uma delas $\neg P$ (ou $\neg Q$), a outra proposição Q (ou P). Esta regra é representada na forma:

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg Q \\ \hline P \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \vee Q \qquad \neg P}{Q}\,\{SD\}$$

ou ainda, como $P \vee Q, \neg P \vdash Q$ ou $P \vee Q, \neg Q \vdash P$.

Exemplo 7.7 :

a) Sou cruzeirense ou atleticana. Não sou cruzeirense. Então, sou atleticana.

b) $$\begin{array}{l} (p \wedge q) \vee r \\ \neg r \\ \hline (p \wedge q) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg p \vee \neg q \\ \neg(\neg p) \\ \hline \neg q \end{array}$$

Silogismo Hipotético

A regra **silogismo hipotético** ($\{SH\}$) permite deduzir de duas premissas condicionais $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow R$, tais que o consequente da primeira premissa coincide com o antecedente da segunda, uma terceira condicional $P \rightarrow R$, em que o antecedente e o consequente são respectivamente, o antecedente da primeira e o consequente da segunda premissa. Esta regra é representada na forma:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \rightarrow R \\ \hline P \rightarrow R \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \rightarrow Q \qquad Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}\,\{SH\}$$

ou ainda, na forma $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$.

Exemplo 7.8 :

a) Se vou ao cinema, então assisto um filme. Se assisto um filme, então como pipoca. Portanto, se vou ao cinema eu como pipoca.

b) $$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \neg q \\ \neg q \rightarrow \neg r \\ \hline \neg p \rightarrow \neg r \end{array} \qquad \begin{array}{l} (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ r \rightarrow (q \wedge s) \\ \hline (p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge s) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3 \in A \rightarrow 3 \subset A \\ 3 \subset A \rightarrow A \neq \emptyset \\ \hline 3 \in A \rightarrow A \neq \emptyset \end{array}$$

Regra da Absorção

A **regra da absorção** ($\{RA\}$) permite dada uma premissa condicional, deduzir como conclusão uma outra condicional com o mesmo antecedente e cujo consequente é uma conjunção das proposições que compõem a premissa. Esta regra é representada na forma:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \hline P \rightarrow P \wedge Q \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow P \wedge Q}\,\{RA\}$$

ou ainda, na forma $P \to Q \vdash P \to P \wedge Q$.

Exemplo 7.9 :

a) $\dfrac{p \to (q \wedge s)}{p \to p \wedge (q \wedge s)}$ $\qquad$ $\dfrac{x \in A \to x \in B}{x \in A \to x \in A \wedge x \in B}$

Dilema Construtivo

A regra **Dilema Construtivo** ($\{DC\}$) permite dadas duas premissas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes, deduzir como conclusão a disjunção dos consequentes destes condicionais. Esta regra é representada na forma:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ R \to S \\ P \vee R \\ \hline Q \vee S \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \to Q \quad R \to S \quad P \vee R}{Q \vee S}\ \{DC\}$$

ou ainda, na forma $P \to Q, R \to S, P \vee R \vdash Q \vee S$.

Exemplo 7.10 :

a) $\begin{array}{l} p \to (q \wedge s) \\ r \to \neg s \\ p \vee r \\ \hline (q \wedge s) \vee \neg s \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} x > 0 \to x = 1 \\ x < 0 \to x = -1 \\ x > 0 \vee x < 0 \\ \hline x = 1 \vee x = -1 \end{array}$

Dilema Destrutivo

O **Dilema Destrutivo** ($\{DD\}$) permite dadas duas premissas condicionais e a disjunção da negação dos seus consequentes, deduzir como conclusão a disjunção da negação dos antecedentes destes condicionais. Esta regra é representada na forma:

$$\begin{array}{l} P \to Q \\ R \to S \\ \neg Q \vee \neg S \\ \hline \neg P \vee \neg R \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \to Q \quad R \to S \quad \neg Q \vee \neg S}{\neg P \vee \neg R}\ \{DD\}$$

ou ainda, na forma $P \to Q, R \to S, \neg Q \vee \neg S \vdash \neg P \vee \neg R$

Exemplo 7.11 :

a) $\begin{array}{l} p \to (q \wedge s) \\ r \to \neg s \\ \neg(q \wedge s) \vee \neg s \\ \hline \neg p \vee \neg\neg r \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} x + y = 6 \to y = 1 \\ x - y = 4 \to x = 5 \\ y \neq 1 \vee x \neq 5 \\ \hline x + 1 \neq 6 \vee x - y \neq 4 \end{array}$

Regra da Resolução

A **regra da resolução** ($\{RR\}$) permite dadas duas premissas disjuntivas $P \vee Q$ e $\neg P \vee R$, deduzir a disjunção $Q \vee R$. Esta regra é representada na forma:

$$\begin{array}{c} P \vee Q \\ \neg P \vee R \\ \hline Q \vee R \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \frac{P \vee Q \qquad \neg P \vee R}{Q \vee R}\ \{RR\}$$

ou na forma $P \vee Q, \neg P \vee R \vdash Q \vee R$.

Exemplo 7.12 :

a) Está chovendo ou Ana está correndo. Não está chovendo ou José está feliz. Então, Ana está correndo ou José está feliz.

b) $$\begin{array}{c} x > 0 \vee x < 10 \\ x \leq 0 \vee x > -3 \\ \hline x < 10 \vee x > -3 \end{array}$$

Contradição

Definição 7.1 (Contradição) A constante F ($\perp$) será usada para identificar uma contradição:

$$P, \neg P \vdash \perp$$

A regra da contradição, que será representada por $\{CTR\}$, permite deduzir qualquer fórmula a partir de uma de uma dedução de falso. Esta regra é representada pela forma:

$$\frac{F}{P}\ \{CTR\}$$

ou pela forma $F \vdash P$.

7.2.7 Regras Hipotéticas

Em Dedução Natural, chamamos de **premissas adicionais** quaisquer fórmulas bem formadas que inserimos no processo de dedução sem derivá-las de outras fórmulas.

As regras seguintes diferem das demais por usarem um raciocínio hipotético, onde a prova de uma sentença é construída utilizando uma premissa adicional, que é descartada após a aplicação da regra. Cada premissa, assim como a regra que a introduziu, devem ser numeradas e para facilitar a legibilidade das deduções.

Redução ao Absurdo

A regra da **Redução ao Absurdo** ($\{RRA\}$) permite mostrar que se a suposição da falsidade de uma premissa ($P = F$) leva logicamente a uma contradição (F), então podemos deduzir que esta premissa é verdadeira ($P = T$). Geralmente esta regra é usada quando nenhuma outra estratégia imediata tem sucesso. Esta regra é representada pela forma:

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg P]\\ \vdots \\ F\end{array}}{P}$$

Esta regra é bastante utilizada na matemática. Em resumo, em uma demonstração indireta, para demonstrar a validade de um argumento pode-se introduzir a negação da conclusão, como **premissa adicional** e a partir desta suposição obter um resultado absurdo, ou seja, deduzir uma contradição ($Q \wedge \neg Q$). Se a partir da introdução da premissa adicional derivamos uma contradição, podemos então descartá-la e deduzir a sua negação.

Exemplo 7.13 : Deduzir P

1.	P	hipótese
2.	$\{\neg P\}$	introdução de uma premissa adicional
3.	$P \wedge \neg P$	1,2 $\{\wedge I\}$
4.	F	3, $\{\perp I\}$
5.	$\neg\neg P$	2,3 $\{RRA\}$
6.	P	Conclusão

Prova por Condicional

A regra da prova por condicional (**introdução da** $\rightarrow$) será representada simbolicamente por $\{RPC\}$. Esta regra diz que podemos deduzir um condicional $P \rightarrow Q$, dada uma premissa Q e utilizando P como uma premissa adicional. Esta regra é representada pela forma:

$$\frac{\begin{array}{c}Q\\ \vdots \\ [P]^1\end{array}}{P \rightarrow Q} \quad \text{ou} \quad \frac{Q \quad [P]^1}{P \rightarrow Q}\{RPC\}^1$$

Exemplo 7.14 : Deduzir $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

1.	$P \rightarrow Q$	hipótese 1
2.	$Q \rightarrow R$	hipótese 2
3.	$[P]^1$	hipótese adicional
4.	Q	1,3 $\{\rightarrow E\}^1$
5.	R	2,4 $\{\rightarrow E\}$
6.	$P \rightarrow R$	3,5 $\{\rightarrow I\}$

Resumo

A Tabela 7.1 apresenta um resumo das regras de dedução.

Tabela 7.1: Regras de Inferência

Nome da Regra	**Regra de Inferência**	**Abr.**
Introdução da Conjunção	$P,Q \vdash P \land Q$ $P,Q \vdash Q \land P$	$\{\land I\}$ $\{\land I\}$
Eliminação da Disjunção, ou (Regra da Simplificação)	$P \land Q \vdash P$ $P \land Q \vdash Q$	$\{\land Ee\}$ $\{\land Ed\}$
Introdução da Disjunção	$P \vdash P \lor Q$	$\{\lor I\}$
Eliminação da Disjunção (Dilema)	$P \lor Q, P \rightarrow T, Q \rightarrow T \vdash T$	$\{\lor E\}$
Eliminação da Implicação (*Modus Ponens*)	$P, P \rightarrow Q \vdash Q$	$\{\rightarrow E\}$
Eliminação da Negação	$\neg\neg P \vdash P$	$\{\neg E\}$
Introdução da Negação	$P \vdash \neg\neg P$	$\{\neg I\}$
Modus Tollens	$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$	$\{\rightarrow E_{MT}\}$ ou {Modus Tollens}
Silogismo Disjuntivo	$P \lor Q, \neg P \vdash Q$ $P \lor Q, \neg Q \vdash P$	$\{SD\}$
Silogismo Hipotético	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$	$\{SH\}$
Dilema Construtivo	$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \lor R \vdash Q \lor S$	$\{DC\}$
Dilema Destrutivo	$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg Q \lor \neg S \vdash \neg P \lor \neg R$	$\{DD\}$
Regra da Absorção	$P \rightarrow Q, \vdash P \rightarrow P \land Q$	$\{RA\}$
Regra da Resolução	$P \lor Q, \neg P \lor R \vdash Q \lor R$	$\{RR\}$
Introdução do F	$P, \neg P \vdash F$	$\{\bot I\}$
Regra da Contradição	$F \vdash P$	$\{CTR\}$
Redução ao Absurdo	$\dfrac{[\neg P] \vdash F}{P}$	$\{RRA\}$
Prova por Condicional	$\dfrac{Q \quad [P]}{P \rightarrow Q}$	$\{RPC\}$

7.2.8 Exercícios

Exercícios adaptados dos livros [5, 4, 2]

1. Indique a regra de inferência usada em cada uma dos argumentos.
   (a) Esta esfriando e chovendo agora. Portanto, esta esfriando agora.
   (b) Se chover, então não haverá festa da turma hoje. Se não houver festa da turma hoje, haverá amanhã. Portanto, se chover hoje, então haverá festa da turma amanhã.
   (c) Alice é graduada em matemática. Por isso, Alice é graduada em matemática ou em ciência da computação.
   (d) João é um estudante de matemática e ciência da computação. Por isso, João é um estudante de matemática.
   (e) Se o dia estiver chuvoso, então a piscina estará fechada. O dia está chuvoso. Então, a piscina esta fechada.

(f) Se for paralisação hoje, a universidade estará fechada. A universidade não está fechada hoje. Então, não tem paralisação.

2. Indique a regra de Inferência que justifica a validade dos argumentos abaixo:

   (a) $p \to q \vdash (p \to q) \vee \neg t$

   (b) $x > 0 \vee x = 0, x \neq 0 \vdash x > 0$

   (c) $x \neq 0, x + y > 4 \vdash x \neq 0 \wedge x + y > 4$

   (d) $p \to q, q \to \neg s \vdash p \to \neg s$

   (e) $(q \vee s) \to \neg p, \neg\neg p \vdash \neg(q \vee s)$

   (f) $(x, y \in \mathbb{R}) \to (x + y \in \mathbb{R}), (x, y \in \mathbb{R}) \vdash (x + y \in \mathbb{R})$

   (g) $p \to q, r \vdash p \to q \wedge r$

   (h) $x > 0 \vdash x > 0 \vee x^2 > 0$

   (i) $p \to q \vee s \vdash p \to p \wedge (q \vee s)$

   (j) $\neg p \wedge (q \to r) \vdash \neg p$

   (k) $a \to b, b \to (c \vee d) \vdash a \to (c \vee d)$

   (l) $x \in A \wedge x \in B \vdash x \in B$

3. Deduza a conclusão dos conjuntos de argumentos abaixo e indique qual foi a regra de inferência usada.

   (a)
   $$\begin{array}{l} (x > y \wedge y > z) \to x > z \\ x > y \wedge y > z \\ \hline \end{array}$$

   (b)
   $$\begin{array}{l} (p \leftrightarrow q) \to \neg(r \wedge s) \\ \neg\neg(r \wedge s) \\ \hline \end{array}$$

   (c)
   $$\begin{array}{l} \neg p \wedge \neg q \\ \neg\neg q \\ \hline \end{array}$$

   (d)
   $$\begin{array}{l} xy = 6 \to xy - 4 = 2 \\ xy - 4 = 2 \to x = 2 \\ \hline \end{array}$$

   (e)
   $$\begin{array}{l} x = 2 \to y = 4 \\ x = 3 \to y = 9 \\ y \neq 4 \vee y \neq 9 \\ \hline \end{array}$$

   (f)
   $$\begin{array}{l} x = 2 \to x^2 = 4 \\ x = 2 \vee y = 3 \\ y = 3 \to y^2 = 9 \\ \hline \end{array}$$

Aula 8: Dedução Natural para a Lógica Proposicional

BCC101- Matemática Discreta I
(DECOM/UFOP)

8.1 Validando Argumentos por meio das Regras de Inferência

Uma forma eficiente para demonstrar a validade de um argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ consiste em deduzir a conclusão Q a partir das premissas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ através das regras de inferência. Para os exemplos seguintes consulte a Tabela 7.1.

As deduções podem ser representadas usando o formato de árvore ou um formato linear. Os exemplos 8.1 e 8.2 apresentam demonstrações usando os dois formatos, nos demais exemplos são usados apenas o formato linear.

Exemplo 8.1 Teorema da Comutatividade da Conjunção:

$$p \land q \vdash q \land p$$

Demonstração usando árvore:

$$\cfrac{\cfrac{p \land q}{q}\{\land Ed\} \qquad \cfrac{p \land q}{p}\{\land Ee\}}{q \land p}\{\land I\}$$

Demonstração Linear:

1.	$p \wedge q$	Hipótese 1
2.	q	1, $\{\wedge Ed\}$
3.	p	1, $\{\wedge Ee\}$
4.	$q \wedge p$	2, 3 $\{\wedge I\}$ - Conclusão

Exemplo 8.2 Prove o seguinte argumento:

$$a \wedge b, a \rightarrow c, b \rightarrow d \vdash c \wedge d$$

Demonstração usando árvore:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a \wedge b}{a}\{\wedge Ee\} \quad a \rightarrow c}{c}\{\rightarrow E\} \quad \dfrac{\dfrac{a \wedge b}{b}\{\wedge Ed\} \quad b \rightarrow d}{d}\{\rightarrow E\}}{c \wedge d}\{\wedge I\}$$

Demonstração Linear:

1.	$a \wedge b$	Hipótese 1
2.	$a \rightarrow c$	Hipótese 2
3.	$b \rightarrow d$	Hipótese 3
4.	a	1, $\{\wedge Ee\}$
5.	b	1, $\{\wedge Ed\}$
6.	c	4,2, $\{\rightarrow E\}$
7.	d	5,3 $\{\rightarrow E\}$
8.	$c \wedge d$	6,7, $\{\rightarrow I\}$ - Conclusão

Exercício: Verifique se o argumento é válido.

$$[(p \wedge q) \wedge r] \wedge (s \wedge t) \rightarrow (q \wedge s)$$

Exercício: Verifique se o argumento é válido.

$$A \wedge (B \rightarrow C) \wedge [(A \wedge B) \rightarrow (D \vee \neg C)] \wedge B \rightarrow D$$

Exemplo 8.3 Verifique se o argumento abaixo é válido:

Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. Ou a taxa federal de descontos vai cair, ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair.

	p	A taxa de juros vai cair.
Sejam as proposições:	q	O mercado imobiliário vai melhorar.
	r	A taxa federal de descontos vai cair.

O argumento pode ser escrito como: $(p \rightarrow q), (r \vee \neg q), p \vdash r$

A demonstração da validade do argumento é dada por:

1.	$(p \rightarrow q)$	hipótese 1
2.	$(r \vee \neg q)$	hipótese 2
3.	p	hipótese 3
4.	$\neg q \vee r$	$\{\vee -$ comutatividade$\}$
5.	$q \rightarrow r$	$\{$implicação$\}$
6.	$p \rightarrow r$	1,5 $\{SH\}$
7.	r	3,6, $\{\rightarrow E\}$

Exemplo 8.4 Mostre que as hipóteses:

H_1 : Não esta ensolarada esta tarde e está mais frio que ontem.

H_2 : Vamos nadar se estiver ensolarado.

H_3 : Se não formos nadar, então vamos fazer um passeio de barco.

H_4 : Se fizermos um passeio de barco, então estaremos em casa ao anoitecer.

Levam à conclusão: **Estaremos em casa ao anoitecer**.

Solução: Sejam as proposições:

$p =$ está ensolarada esta tarde;
$q =$ está mais frio que ontem;
$r =$ vamos nadar;
$s =$ vamos fazer um passeio de barco;
$t =$ estaremos em casa ao anoitecer.

Então, o argumento para mostrar que as hipóteses levam à conclusão é dado por:

1.	$\neg p \wedge q$	hipótese 1
2.	$r \to p$	hipótese 2
3.	$\neg r \to s$	hipótese 3
4.	$s \to t$	hipótese 4
5.	$\neg p$	1 $\{\wedge Ee\}$
6.	$\neg r$	5,2, $\{\to E_{MP}\}$
7.	s	6,3, $\{\to E\}$
8.	t	7,4, $\{\to E\}$

8.1.1 Exercícios

Exercícios adaptados dos livros [5, 4, 2]

1. Para cada grupo de premissas abaixo, escreva quais as conclusões que podem ser retiradas. Explique as regras de inferência utilizadas para obter cada conclusão.
   (a) Se eu tiro o dia de folga, chove ou faz frio. Eu tirei folga na terça-feira ou na quinta-feira. Fez sol na terça-feira. Não nevou na quinta-feira.
   (b) Se eu como comida apimentada, então tenho pesadelos. Eu tenho pesadelos quando chove enquanto eu durmo. Eu não tive pesadelos.
   (c) Eu sou esperto ou sortudo. Eu não tenho sorte. Se eu tivesse sorte, então ganharia na loteria.
2. Considere o seguinte raciocínio:

   H_1: O computador está ok, ou está com virus.
   H_2: O computador não está com virus.
   H_3: Se o computador está ok, então eu vou programar.
   C: Eu vou programar.

   Nas perguntas a seguir considere as seguintes variáveis proposicionais e seus respectivos significados:

O: O computador está ok.
N: O computador está com virus.
P: Eu vou programar.

(a) Preencha a tabela abaixo com a fórmula correspondente a cada uma das sentenças acima:

H_1 :	
H_2 :	
H_3 :	
C :	

(b) Escreva um sequente que representa o argumento.

(c) Mostre o raciocínio anterior está correto, provando o sequente que você escreveu no item anterior, por meio das regras do Sistema de Dedução Natural.

3. Escreva o argumento usando fórmulas bem formadas (use as letras de proposições fornecidas). Em seguida, prove que o argumento é valido.

   (a) Se o programa for eficiente, executará rapidamente.O programa é eficiente ou tem algum *bug*. No entanto, o programa não executa rapidamente. Logo, ele tem algum *bug*. E, Q, B.

   (b) Se houver frango no cardápio, não peça peixe, mas você deve pedir peixe ou salada. Logo, se houver frango no cardápio, peça salada. C(frango), F(peixe), S.

   (c) Se o anúncio for bom, o volume de vendas aumentará. O anúncio é bom ou a loja vai fechar. O volume de vendas não vai aumentar. Portanto, a loja vai fechar. A, S(vendas), C(loja).

4. Prove cada um dos subsequentes seguintes, usando as regras de inferência de Dedução Natural ou os teoremas já demonstrados em aula.

   (a) $(A \land \neg A) \vdash False$
   (b) $B \lor (\neg B), A \to B \vdash (\neg A) \lor B$
   (c) $(A \land (B \land C)) \vdash ((A \land B) \land C)$
   (d) $\neg(A \lor \neg B) \land (B \to C) \to (\neg A \land C)$
   (e) $\neg A \land (A \lor B) \to B$
   (f) $(P \lor Q), \neg P \vdash Q$
   (g) $(\neg Q \to \neg P), P \vdash Q$
   (h) $(P \to Q) \land (\neg P \to Q) \to Q$
   (i) $[(A \lor \neg B) \to C] \land (C \to D) \land A \to D$
   (j) $A \lor B \vdash B \lor A$
   (k) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$
   (l) $P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$
   (m) $P \lor Q, \neg Q \vdash P$
   (n) $\neg(A \lor B) \vdash \neg(B \lor A)$
   (o) $\neg(A \lor B) \vdash \neg A$
   (p) $\neg(A \lor B) \vdash \neg B$

(q) $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

(r) $\neg P \wedge \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$

5. Você está indo para a faculdade de manhã e percebe que não está usando os óculos. Ao tentar descobrir onde estão os óculos você começa a pensar sobre os seguintes fatos que são verdadeiros:

   a) Se os óculos estão na mesa da cozinha, então eu os vi no café da manhã;

   b) Eu estava lendo o jornal na sala de estar ou eu estava lendo o jornal na cozinha;

   c) Se eu estava lendo o jornal na sala de estar, então meus óculos estão na mesa do café;

   d) Eu não vi meus óculos no café da manhã;

   e) Se eu estava lendo um livro na cama, então meus óculos estão no criado-mudo;

   f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão na mesa da cozinha.

   Diante dos fatos, onde estão os seus óculos?

8.2 Falácias

Defini-se por falácia um argumento falso ou um argumento mal conduzido (falha num argumento). Em outras palavras, um erro no raciocínio que resulta em um argumento inválido é chamado de **falácia**.

As falácias se assemelham com as regras de inferência, mas baseiam-se em contingências em vez de tautologias. As mais comuns acontecem quando:

- usa-se uma premissa vaga ou ambígua;
- assume-se como verdadeiro o que deve ser provado;
- conclui-se uma premissa sem a argumentação adequada; ou
- comete-se um erro oposto ou erro inverso.

Para mostrar que um argumento é inválido basta construir a tabela verdade e mostrar que o argumento trata-se de uma contingência. Em outras palavras, encontre **uma linha da tabela verdade com premissas verdadeiras e conclusão falsa**.

Exemplo 8.5 Erro Oposto:
Considere o argumento:

Se João é um inteligente, então João senta na primeira carteira na sala de aula.
João senta na primeira carteira na sala de aula.
João é inteligente.

Escrito na forma simbólica por:
$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

Este argumento lembra a regra *Modus Ponens*. Porém, como mostra a tabela-verdade é uma forma de argumento inválida, pois a linha 3 possui premissas verdadeiras e a conclusão é falsa.

			P_1	P_2	Q
	p	q	$p \to q$	q	p
1.	T	T	T	T	T
2.	T	F	F	F	T
3.	F	T	T	T	F
4.	F	F	T	F	F

Exemplo 8.6 Erro Inverso:
Considere o argumento:

> Se fizer todos os exercícios de Matemática Discreta, então será aprovado na disciplina.
> Você não fez todos os exercícios de BCC101.
> Portanto, você não foi aprovado na disciplina.

Escrito na forma simbólica por:
$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \neg q \end{array}$$

Este argumento lembra a regra *Modus Tollens*. Porém, como mostra a tabela-verdade trata-se de uma contingência e portanto não é uma forma de argumento inválida. Isto é verificado na linha linha 3 onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.

			P_1	P_2	Q
	p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$
1.	T	T	T	F	F
2.	T	F	F	F	T
3.	F	T	T	T	F
4.	F	F	T	T	T

8.2.1 Exercícios

1. Determine se cada um dos argumentos abaixo é correto ou incorreto e explique o porquê.
   (a) Todos os estudantes nesta sala entendem lógica. Flávia é uma aluna desta sala. Por isso, Flávia entende lógica.
   (b) Todo graduando em ciência da computação faz matemática discreta. Lucas está fazendo matemática discreta. Por isso, Lucas é um graduando em ciência da computação.
   (c) Todos que comem granola todo dia são saudáveis. Alan não é saudável. Por isso, Alan não come granola todos os dias.

Referências Bibliográficas

[1] BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; SOUZA FILHO, O. M. *Introdução à Lógica Matemática*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2011.

[2] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

[3] HUNTER, D. J. *Fundamentos da Matemática Discreta*. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[4] ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.

[5] FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

[6] HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

[7] DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

[8] RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

Formulário de Matemática Discreta (BCC101) - DECOM/UFOP

Equivalências lógicas básicas

Equivalências	Nomes
$P \wedge false \equiv false$	$\{\wedge -$ Dominação$\}$
$P \wedge true \equiv P$	$\{\wedge -$ Identidade$\}$
$P \wedge P \equiv P$	$\{\wedge -$ Idempotência$\}$
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$\{\wedge -$ Comutatividade$\}$
$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$\{\wedge -$ Associatividade$\}$
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\{\wedge -$ Distributividade$\}$
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\{\wedge -$ DeMorgan$\}$
$(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$	$\{\vee -$ Absorção$\}$
$\neg true \equiv false$	$\{T -$ Negação$\}$
$P \wedge \neg P \equiv false$	$\{$Contradição$\}$
$\neg(\neg P) \equiv P$	$\{$Dupla Negação$\}$
$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	$\{$Implicação$\}$

Equivalências	Nomes
$P \vee true \equiv true$	$\{\vee -$ Dominação$\}$
$P \vee false \equiv P$	$\{\vee -$ Identidade$\}$
$P \vee P \equiv P$	$\{\vee -$ Idempotência$\}$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$\{\vee -$ Comutatividade$\}$
$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	$\{\vee -$ Associatividade$\}$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\{\vee -$ Distributividade$\}$
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$\{\vee -$ DeMorgan$\}$
$(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$	$\{\wedge -$ Absorção$\}$
$\neg false \equiv true$	$\{F -$ Negação$\}$
$P \vee \neg P \equiv true$	$\{$Terceiro Excluído$\}$
$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	$\{$Bi-implicação$\}$
$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	$\{$Contrapositivo$\}$

Equivalências lógicas derivadas envolvendo condicionais e bicondicionais

Nomes	Equivalências
$\{1 \to\}$	$P \vee Q \equiv \neg P \to Q$
$\{2 \to\}$	$P \wedge Q \equiv \neg(P \to \neg Q)$

Nomes	Equivalências
$\{3 \to\}$	$\neg(P \to Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$
$\{1 \leftrightarrow\}$	$P \leftrightarrow Q \equiv \neg P \leftrightarrow \neg Q$

Nomes	Equivalências
$\{2 \leftrightarrow\}$	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
$\{3 \leftrightarrow\}$	$\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \leftrightarrow \neg Q$

Regras de Inferência - Dedução Natural

Regras de Inferência	Nomes
$P \vdash P$	$\{ID\}$
$P \vdash \neg\neg P$	$\{\neg I\}$
$\neg\neg P \vdash P$	$\{\neg E\}$
$P, Q \vdash P \wedge Q$ ou $P, Q \vdash Q \wedge P$	$\{\wedge I\}$
$P \wedge Q \vdash P$	$\{\wedge Ee\}$
$P \wedge Q \vdash Q$	$\{\wedge Ed\}$
$P \vdash P \vee Q$	$\{\vee I\}$
$P \vee Q, P \to T, Q \to T \vdash T$	$\{\vee E\}$
$F \vdash P$	$\{CTR\}$
$\dfrac{[\neg P] \vdash F}{P}$	$\{RRA\}$

Regras de Inferência	Nomes
$P \vee Q, \neg Q \vdash P$ ou $P \vee Q, \neg P \vdash Q$	$\{SD\}$
$P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$	$\{SH\}$
$P \to Q, R \to S, P \vee R \vdash Q \vee S$	$\{DC\}$
$P \to Q, R \to S, \neg Q \vee \neg S \vdash \neg P \vee \neg R$	$\{DD\}$
$P \to Q \vdash P \to P \wedge Q$	$\{RA\}$
$P \vee Q, \neg P \vee R \vdash Q \vee R$	$\{RR\}$
$P, \neg P \vdash F$	$\{\bot I\}$
$P, P \to Q \vdash Q$	$\{\to E\}$ ou $\{$Modus Ponens$\}$
$P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$	$\{\to E_{MT}\}$ ou $\{$Modus Tollens$\}$
$\dfrac{Q \quad [P]}{P \to Q}$	$\{RPC\}$

Respostas Dos Exercícios

Aula 1

1.1.3 Introdução à Lógica Proposicional

1. (a) É Proposição
   (b) É Proposição
   (c) É Proposição
   (d) É Proposição
   (e) Não é Proposição
   (f) Não é Proposição
   (g) Não é Proposição
   (h) Não é Proposição
2. (a) $A \rightarrow \neg B$
   (b) $A \vee B$
   (c) $\neg A \wedge B$
   (d) $A \vee B$
   (e) $A \leftrightarrow B \wedge C$
   (f) $P \wedge \neg Q$
   (g) $\neg A \rightarrow \neg B \wedge \neg C$
   (a) Carlos é argentino ou João é brasileiro.
   (b) Carlos não é argentino e João é brasileiro.
   (c) Se Carlos é argentino, então João é brasileiro.
   (d) Carlos é argentino, logo João não é brasileiro.
   (e) Carlos não é argentino se, e somente se, João é brasileiro.
   (f) Carlos não é argentino e João não é brasileiro.
3. (a) $((x < 3) \wedge (x > 0)) \vee \neg(x = 7)$
   (b) $(x < 4) \wedge (x > 2) \rightarrow (x = 3)$
   (c) $(x > 0) \vee ((x < 3) \wedge (y > 0))$
   (d) $(x = 3) \leftrightarrow (y > 0)$
4. (a) $(A \rightarrow B \wedge C) \wedge (\neg C \rightarrow B)$
   (b) $[(A \vee B) \rightarrow C] \wedge \neg(C \rightarrow B)$
   (c) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
   (d) $(A \vee B) \rightarrow C$
5. (a) $A \wedge B$

(b) $A \wedge (B \vee C)$
(c) $B \rightarrow (A \wedge C)$
(d) $A \rightarrow (\neg B \vee \neg C)$
(e) $A \wedge [\neg C \rightarrow (\neg B \vee C)]$

6. (a) Violetas são azuis ou o açúcar é azedo.
   (b) Violetas não são azuis ou, se as rosas forem vermelhas, então o açúcar será doce.
   (c) Se o açúcar é doce e as rosas não são vermelhas, então as violetas são azuis.
   (d) O açúcar será doce e, as rosas não são vermelhas somente se as violetas forem azuis.
7. (a) Hoje não é quinta-feira.
   (b) Há poluição em Ouro Preto.
   (c) $2+1 \neq 3$

1.2.2 - Sintaxe da Lógica Proposicional

1. (a) É uma fbf.
   (b) É uma fbf.
   (c) É uma fbf.
   (d) É uma fbf.
   (e) É uma fbf.
   (f) Não é uma fbf.
   (g) Não é uma fbf.

Aula 2

2.1.7 - Semântica da Lógica Proposicional

1. (a) T
   (b) F
   (c) T
   (d) F
   (e) F
   (f) F
2. (a) $F \rightarrow F = T$
   (b) $F \rightarrow T = T$
   (c) $T \rightarrow F = F$
   (d) $T \rightarrow T = T$
3. (a) $F \wedge F = F$
   (b) $F \rightarrow F = T$
   (c) $T \rightarrow F = F$
   (d) $F \rightarrow T = T$
   (e) $(F \wedge T) \rightarrow F = T$
   (f) $T \leftrightarrow T = T$

(g) $\neg(T \wedge F) = T$

4. (a) $T \wedge (F \vee T) = T$
   (b) $(T \wedge F) \vee T = T$
   (c) $\neg(T \wedge F) \vee T = T$
   (d) $\neg T \vee \neg(\neg F \wedge T) = F$
   (e) $\neg(T \leftrightarrow (\neg F \wedge T)) = F$
   (f) $(T \rightarrow \neg(F \rightarrow T)) \rightarrow T$
   (g) $\neg T \vee \neg(F \wedge T) = T$

5. (a) disjunção exclusiva.
   (b) disjunção inclusiva.
   (c) disjunção inclusiva
   (d) ambas as interpretações
   (e) disjunção exclusiva.

6. (a) A comida é boa, mas o serviço é ruim.
   (b) A comida é ruim e o serviço também.
   (c) A comida é ruim ou o serviço é ruim, mas é barato.
   (d) A comida é boa ou o serviço é excelente.
   (e) É caro, mas a comida é ruim ou o serviço é ruim
   (f) O verão em Ouro Preto não é quente ou não é ensolarado.

2.2.1 - Tabela Verdade

1. (a)

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

(b)

P	Q	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \vee Q \rightarrow P \oplus Q$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

(c)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$(P \vee Q) \oplus (P \wedge Q)$
T	T	T	T	F
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	F	F

(d)

P	Q	R	S	$P \leftrightarrow Q$	$R \leftrightarrow S$	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (R \leftrightarrow S)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	F
F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F
F	F	F	F	T	T	T

2. (a)

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F	F

(b)

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F

2.3.1 - Classificação das Fórmulas

1. (a) Tautologia.

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg A \vee B$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

(b) Contingência.

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$(A \wedge B) \vee C \rightarrow A \wedge (B \vee C)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	F	F	F	F	T

(c) Contradição.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg(A \vee B) \vee \neg A$	$(\neg(A \vee B) \vee \neg A) \wedge A$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F

(d) Tautologia.

A	B	C	$A \rightarrow B$	$A \vee C$	$B \vee C$	$(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$	$(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \vee C) \rightarrow (B \vee C)]$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T	T

(e) Contingência.

A	B	C	$B \rightarrow C$	$A \vee (B \rightarrow C)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

Aula 3

3.1.1 - Equivalência Lógica

1. (a)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

(b)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

(c)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$\neg Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	F

(d)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
T	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T

2. (a)

(b)

(c)

3.2.2 - Álgebra Booleana

1. (a) Caso 1: Considere P verdadeiro. A negação de P será falsa e consequentemente a negação de uma proposição falsa é verdadeira. Portanto $\neg(\neg P)$ e P são logicamente equivalentes.

Caso 2: Considere P falso. A negação de P é verdadeira e consequentemente a negação de uma proposição verdadeira é falsa. Portanto $\neg(\neg P)$ e P são logicamente equivalentes.

Os casos 1 e 2 estão indicados na tabela verdade:

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

(b)

(c)

(d)

(e)

(f)

(g)

(h)

(i)

(j)

(k)

(l)

2. (a) João não vai trabalhar na indústria e não irá para a faculdade.
   (b) Camila não conhece Java ou não conhece C++.
   (c) Paulo não é Atleticano ou não é cruzeirense.
   (d) Júlia não se mudará para Belo Horizonte e não se mudará para o Rio de Janeiro.

3.

$$
\begin{array}{lcll}
A \vee \neg(A \wedge \neg B) & = & A \vee (\neg A \vee \neg\neg B) & \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\
 & = & (A \vee \neg A) \vee \neg\neg B & \{\vee - \text{ Associatividade}\} \\
 & = & \text{true} \vee \neg\neg B &
\end{array}
$$

Terceiro Excluído}

$$
\begin{array}{lcll}
 & = & \text{true} \vee B & \{\text{Dupla negação}\} \\
 & = & B \vee \text{true} & \{\vee - \text{Comutatividade}\} \\
 & = & \text{true} & \{\vee - \text{Dominação}\}
\end{array}
$$

4. (a)

$$
\begin{array}{lcll}
A \vee (A \wedge A) & = & A \vee A & \{\wedge - \text{Idempotência}\} \\
 & = & A & \{\vee - \text{Idempotência}\}
\end{array}
$$

(b)

$$
\begin{array}{lcll}
A \vee (B \wedge \neg A) & = & (A \vee B) \wedge (A \vee \neg A) & \{\vee - \text{ Distributividade}\} \\
 & = & (A \vee B) \wedge \text{true} & \{\text{Terceiro Excluído}\} \\
 & = & A \vee B & \{\wedge - \text{ Identidade}\}
\end{array}
$$

(c)

$$
\begin{array}{lcll}
(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) & = & A \vee (B \wedge \neg B) & \{\vee - \text{ Distributividade}\} \\
 & = & A \vee \text{false} & \{\text{Contradição}\} \\
 & = & A & \{\vee - \text{ Identidade}\}
\end{array}
$$

5.

$$
\begin{array}{lll}
\text{true} \wedge \text{true} & = \neg\text{false} \wedge \neg\text{false} & \{\text{tabela}\neg\} \\
 & = \neg(\text{false} \vee \text{false}) & \{\vee \text{ DeMorgan}\} \\
 & = \neg\text{false} & \{\vee \text{ Idempotência}\} \\
 & = \text{true} & \{\text{tabela}\neg\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{true} \wedge \text{false} & = \neg\text{false} \wedge \neg\text{true} & \{\text{tabela}\neg\} \\
 & = \neg(\text{false} \vee \text{true}) & \{\vee \text{ DeMorgan}\} \\
 & = \neg\text{true} & \{\vee \text{ Zero}\} \\
 & = \text{false} & \{\text{tabela}\neg\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{false} \wedge \text{true} & = \neg\text{true} \wedge \neg\text{false} & \{\text{tabela}\neg\} \\
 & = \neg(\text{true} \vee \text{false}) & \{\vee \text{ DeMorgan}\} \\
 & = \neg\text{true} & \{\vee \text{ Ident}\} \\
 & = \text{false} & \{\text{tabela}\neg\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\text{false} \wedge \text{false} & = \neg\text{true} \wedge \neg\text{true} & \{\text{tabela}\neg\} \\
 & = \neg(\text{true} \vee \text{true}) & \{\vee \text{ DeMorgan}\} \\
 & = \neg\text{true} & \{\vee \text{ Idemp}\} \\
 & = \text{false} & \{\text{tabela}\neg\}
\end{array}
$$

6.

$$\begin{aligned}
\neg(p \wedge q) &= \neg(\neg\neg p \wedge \neg\neg q) && \{\text{Dupla Negação}\} \\
&= \neg\neg(\neg p \vee \neg q) && \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\
&= \neg p \vee \neg q && \{\text{Dupla Negação}\}
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
p \wedge (q \vee r) &= \neg\neg(p \wedge (q \vee r)) && \{\text{Dupla Negação}\} \\
&= \neg(\neg p \vee \neg(q \vee r)) && \{\wedge\ \text{DeMorgan}\} \\
&= \neg(\neg p \vee (\neg q \wedge \neg r)) && \{\vee\ \text{DeMorgan}\} \\
&= \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r)) && \{\vee\ \text{Distributividade}\} \\
&= \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg r) && \{\wedge\ \text{DeMorgan}\} \\
&= (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg\neg r) && \{\vee\ \text{DeMorgan}\} \\
&= (p \wedge q) \vee (p \wedge r) && \{\ \text{Dupla Negação}\}
\end{aligned}$$

Aula 4

4.1.3 - Equivalência Lógica

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
   (f)
   (g)
   (h)
   (i)
   (j)
   (k)
   (l)
2.

$$\begin{aligned}
B \wedge (A \Rightarrow \neg B) &= B \wedge (\neg A \vee \neg B) && \{\text{Implicação}\} \\
&= (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B) && \{\wedge - \text{Distributividade}\} \\
&= (B \wedge \neg A) \vee \text{false} && \{\text{Contradição}\} \\
&= B \wedge \neg A && \{\vee - \text{Identidade}\}
\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}
\neg(A \Rightarrow \neg B) &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) && \{\text{Implicação}\} \\
&\equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B && \{\vee -\ \text{DeMorgan}\} \\
&\equiv A \wedge B && \{\text{Dupla negação}\}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) &\equiv \neg P \wedge \neg(\neg P \wedge Q)) && \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\
&\equiv \neg P \wedge [\neg(\neg P) \vee \neg Q] && \{\wedge - \text{ DeMorgan}\} \\
&\equiv \neg P \wedge [P \vee \neg Q] && \{\text{Dupla negação}\} \\
&\equiv (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q) && \{\text{Distributividade}\} \\
&\equiv F \vee (\neg P \wedge \neg Q) && \{\text{Negação}\} \\
&\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee F && \{\text{Comutatividade}\} \\
&\equiv \neg P \wedge \neg Q && \{\text{Elem. Neutro}\}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) &\equiv (\neg P \vee Q) vee (\neg P \vee R) && \{\text{Implicação}\} \\
&\equiv (\neg P \vee \neg P) \vee (Q \vee R) && \{\vee - \text{Associatividade}\} \\
&\equiv \neg(P \wedge P) \vee (Q \vee R) && \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\
&\equiv \neg P \vee (Q \vee R) && \{\wedge - \text{Idempotência}\} \\
&\equiv P \rightarrow (Q \vee R) && \{\text{Implicação}\}
\end{aligned}$$

4. Simbolicamente as frases podem ser reescritas por $P \rightarrow \neg Q$ e $\neg P \rightarrow Q$. As sentenças não são equivalentes, como pode ser visto na tabela verdade:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow \neg Q$	$\neg P \rightarrow Q$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F

5. (a) Tabela verdade de S:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F

(b) Solução:

$$\begin{aligned}
(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) &\equiv P \wedge (Q \vee \neg Q) && \{\wedge - \text{distributividade}\} \\
&\equiv P \wedge (true) && \{\text{Terceiro Excluído}\} \\
&\equiv P && \{\wedge - \text{Identidade}\}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
[P \wedge (P \wedge Q)] \wedge \neg(P \vee Q) &\equiv [P \wedge (P \wedge Q)] \wedge (\neg P \wedge \neg Q) && \{\wedge - \text{DeMorgan}\} \\
&\equiv [(P \wedge P) \wedge Q] \wedge (\neg P \wedge \neg Q) && \{\wedge - \text{ Comutatividade}\} \\
&\equiv (P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q) && \{\wedge - \text{Idempotência}\} \\
&\equiv (P \wedge \neg P) \wedge (Q \wedge \neg Q) && \{\wedge - \text{Associatividade}\} \\
&\equiv F \wedge F && \{\text{Contradição}\} \\
&\equiv F && \{\wedge - \text{Tabela verdade}\}
\end{aligned}$$

Portanto, temos que $[P \wedge (P \wedge Q)] \wedge \neg(P \vee Q)$ é uma contradição.

4.2.1 - Proposições Associadas a uma Condicional

1. Prova:

$$\begin{aligned} Q \rightarrow P &\equiv \neg Q \vee P && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv \neg Q \vee \neg(\neg P) && \{\text{Dupla Negação}\} \\ &\equiv \neg(\neg P) \vee \neg Q && \{\vee - \text{Comutatividade}\} \\ &\equiv \neg P \rightarrow \neg Q && \{\text{Implicação}\} \end{aligned}$$

2. (a) Se o cachorro voa, então ele não é mamífero.
   (b) Se o cachorro não voa, então ele é mamífero.
   (c) Se o cachorro não é um mamífero, então ele voa.

4.3.1 - Exemplos Complementares

1. Letra e) Culpado, culpado, inocente. Dica: Faça a tabela verdade e verifique os valores lógicos em que as sentenças são todas equivalentes.
2. (a)
   - $\neg b \wedge c$
   - $a \leftrightarrow b$
   - $\neg a \vee \neg b$

   (b)

a	b	c	Relatório A		Relatório B	Relatório C	
			$\neg b$	$\neg b \wedge c$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a$	$\neg a \vee \neg b$
T	T	T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	F	T	F	F
T	F	T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T

   (c) Os processadores a e b (linha 7 da tabela verdade).
   (d) Os relatórios A e C (linha 1 da tabela verdade).
3. Letra b) Se Guilherme é músico, então Marcelo é professor. Dica: Escreva as frases na forma simbólica e verifique se as sentenças são equivalentes.

Aula 5

5.1.3 - Forma Normal

1. (a) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ $\{\text{Implicação}\}$

(b) Seja:

$$\begin{aligned} P \rightarrow \neg P &\equiv \neg P \vee \neg P && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv \neg P && \{\vee - \text{Idempotência}\} \end{aligned}$$

(c) Seja:

$$\begin{aligned} P \leftrightarrow \neg P &\equiv (P \rightarrow \neg P) \wedge (\neg P \rightarrow P) && \{\text{Bi-implicação}\} \\ &\equiv (\neg P \vee \neg P) \wedge (\neg\neg P \vee P) && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv (\neg P \vee \neg P) \wedge (P \vee P) && \{\text{Dupla Negação}\} \end{aligned}$$

(d) Seja: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) \equiv$

$$\begin{aligned} &\equiv [(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \rightarrow \neg P)] \vee [\neg(P \rightarrow Q) \wedge \neg(\neg Q \rightarrow \neg P)] && \{2 \leftrightarrow\} \\ &\equiv [(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow Q)] \vee [\neg(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)] && \{\text{Contropositiva}\} \\ &\equiv (P \rightarrow Q) \vee \neg(P \rightarrow Q) && \{\wedge - \text{Idempotência}\} \\ &\equiv (\neg P \vee Q) \vee \neg(P \rightarrow Q) && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv (\neg P \vee Q) \vee (P \wedge \neg Q) && \{3 \rightarrow\} \\ &\equiv [(\neg P \vee Q) \vee P] \wedge [(\neg P \vee Q) \vee \neg Q)] && \{\vee - \text{Distributividade}\} \end{aligned}$$

2. (a) Seja:

$$\begin{aligned} \neg(\neg P \vee \neg Q) &\equiv \neg\neg P \wedge \neg\neg Q && \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\ &\equiv P \wedge Q && \{\text{Dupla Negação}\} \end{aligned}$$

(b) Seja:

$$\begin{aligned} \neg(P \rightarrow Q) &\equiv \neg(\neg P \vee Q) && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv \neg\neg P \vee \neg Q && \{\vee - \text{DeMorgan}\} \\ &\equiv P \vee \neg Q && \{\text{Dupla Negação}\} \end{aligned}$$

(c) Seja:

$$\begin{aligned} (P \rightarrow P) \wedge \neg P &\equiv (\neg P \vee P) \wedge \neg P && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv T \wedge \neg P && \{\text{Terceiro Excluído}\} \\ &\equiv \neg P && \{\wedge - \text{Identidade}\} \end{aligned}$$

(d) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q \quad \{\vee - \text{DeMorgan}\}$

(e) Seja: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv$

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv [(\neg P \vee Q) \wedge \neg Q] \vee [(\neg P \vee Q) \wedge P] && \{\vee - \text{Distributividade}\} \\ &\equiv [(\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q)] \vee [(\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)] && \{\wedge - \text{Distributividade}\} \\ &\equiv [(\neg P \wedge \neg Q) \vee F] \vee [F \vee (Q \wedge P)] && \{\text{Contradição}\} \\ &\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) && \{\vee - \text{Identidade}\} \end{aligned}$$

Outra Resolução:

$$\begin{aligned} (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) &\equiv (P \leftrightarrow Q) && \{\text{bi-implicação}\} \\ &\equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) && \{2 \leftrightarrow\} \end{aligned}$$

(f) Seja: $\neg(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv$

$$\begin{aligned} &\equiv (P \wedge \neg Q) \wedge (Q \rightarrow P) && \{3 \leftrightarrow\} \\ &\equiv (P \wedge \neg Q) \wedge (\neg Q \vee P) && \{\text{Implicação}\} \\ &\equiv [(P \wedge \neg Q) \wedge \neg Q] \vee [(P \wedge \neg Q) \wedge P] && \{\wedge - \text{Distributividade}\} \\ &\equiv [P \wedge (\neg Q \wedge \neg Q)] \vee [(P \wedge P) \wedge \neg Q] && \{\wedge - \text{Associatividade e Comutatividade.}\} \\ &\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg Q) && \{\wedge - \text{Idempotência}\} \\ &\equiv P \wedge \neg Q && \{\vee - \text{Idempotência}\} \end{aligned}$$

Aula 6

6.1.3 - Argumentos

1. (a) É um argumento válido.
   (b) É um argumento válido.
   (c) É um argumento inválido. A premissa não garante a conclusão.
   (d) É um argumento válido.
   (e) É um argumento inválido, pois a conclusão é falsa.
2. (a) Argumento válido
   (b) Argumento válido
   (c) Argumento inválido
3. (a) .

H_1 :	$O \vee N$
H_2 :	$\neg N$
H_3 :	$O \rightarrow P$
C :	P

   (b) $O \vee N, \neg N, O \rightarrow P \vdash P$

   (c) Solução:

	Conclusão		H_1	H_2	H_3
O	P	N	$O \vee N$	$\neg N$	$O \rightarrow P$
T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T

Aula 7

7.2.8 - Regras de Inferência

1. (a) Regra da simplificação.
   (b) Regra da silogismo hipotético.
   (c) Introdução da disjunção
   (d) Eliminação da conjunção
   (e) Modus Ponens
   (f) Modus Tollens

2. (a) Introdução da Disjunção
   (b) Silogismo Disjuntivo
   (c) Introdução da Conjunção
   (d) Silogismo Hipotético
   (e) Modus Tollens
   (f) Modus Ponens
   (g) Introdução da Conjunção
   (h) Introdução da Disjunção
   (i) Regra da Absorção
   (j) Eliminação da Disjunção
   (k) Silogismo Hipotético
   (l) Eliminação da Disjunção

3. (a) $$\begin{array}{l} (x > y \wedge y > z) \rightarrow x > z \\ x > y \wedge y > z \\ \hline x > z \end{array} \quad \text{Modus Ponens}$$

   (b) $$\begin{array}{l} (p \leftrightarrow q) \rightarrow \neg(r \wedge s) \\ \neg\neg(r \wedge s) \\ \hline \neg(p \leftrightarrow q) \end{array} \quad \text{Modus Tollens}$$

   (c) $$\begin{array}{l} \neg p \wedge \neg q \\ \neg\neg q \\ \hline \neg p \end{array} \quad \text{Silogismo Disjuntivo}$$

   (d) $$\begin{array}{l} xy = 6 \rightarrow xy - 4 = 2 \\ xy - 4 = 2 \rightarrow x = 2 \\ \hline xy = 6 \rightarrow x = 2 \end{array} \quad \text{Silogismo Hipotético}$$

   (e) $$\begin{array}{l} x = 2 \rightarrow y = 4 \\ x = 3 \rightarrow y = 9 \\ y \neq 4 \vee y \neq 9 \\ \hline x \neq 2 \vee x \neq 3 \end{array} \quad \text{Dilema Destrutivo}$$

   (f) $$\begin{array}{l} x = 2 \rightarrow x^2 = 4 \\ x = 2 \vee y = 3 \\ y = 3 \rightarrow y^2 = 9 \\ \hline x^2 = 4 \vee y^2 = 9 \end{array} \quad \text{Dilema Construtivo}$$

Aula 8

8.1.1 - Validando Argumentos por meio das Regras de Inferência

1. (a) Conclusões válidas: “Eu não tirei folga na terça-feira.”, “Eu tirei folga na quinta-feira”. “Choveu na quinta-feira”
   (b) Conclusões válidas: “Eu não comi comida apimentada e não choveu”.
   (c) Conclusões válidas: “Eu sou esperto.”

2. (a) Tabela:

H_1 :	$O \vee N$
H_2 :	$\neg N$
H_3 :	$O \rightarrow P$
C :	P

   (b) $O \vee N, \neg N, O \rightarrow P \vdash P$

   (c) Prova:

   1. $O \vee N$ hipótese 1
   2. $\neg N$ hipótese 2
   3. $O \rightarrow P$ hipótese 3
   4. O 1,2, $\{SD\}$
   5. P 3,4, $\{\rightarrow E\}$

3. (a) O argumento é: $(E \rightarrow Q) \wedge (E \vee B) \wedge \neg Q \rightarrow B$

   Demonstração:

   1. $E \rightarrow Q$ hip
   2. $E \vee B$ hip
   3. $\neg Q$ hip
   4. $\neg Q \rightarrow \neg Q$ Contrapositiva (1)
   5. $\neg E$ Modus Ponens de (3) e (4)
   6. $\neg(\neg E) \vee B$ Dupla negação de (2)
   7. $\neg E \rightarrow B$ Condicional de (6)
   8. B Modus Ponens de (5) e (7)

   (b) O argumento é: $(C \rightarrow \neg F) \wedge (F \vee S) \rightarrow C \rightarrow S$

   Demonstração:

   1. $C \rightarrow \neg F$ hip
   2. $F \vee S$ hip
   3. $\neg F \rightarrow S$ $\{1 \rightarrow\}$ em (2)
   4. $C \rightarrow S$ $\{SH\}$ de (1) e (3)

   (c) O argumento é: $[(A \rightarrow S) \wedge (A \vee C) \wedge \neg S] \rightarrow C$

   Demonstração:

   1. $(A \rightarrow S)$ hip
   2. $(A \vee C)$ hip
   3. $\neg S$ hip
   4. $\neg A$ Modus Tollens de (1) e (3)
   5. C Silogismo Disjuntivo de (2) e (4)

4. (a) Prova:

   1. $A \wedge \neg A$ hipótese
   2. A (1) (E$\wedge$)
   3. $\neg A$ (1) (E$\wedge$)
   4. FALSE (1) (I$\perp$)

   (b) Prova:

1. $B \vee (\neg B)$ hipótese
2. $A \rightarrow B$ hipótese
3. B premissa adicional 1
4. $\neg B$ premissa adicional 1
5. $\neg A$ MT (2,4)
6. $\neg A \vee B$ (I$\vee$) (5,3)

(c) Prova:

1. $A \wedge (B \wedge C)$ hipótese
2. A (E$\wedge$) linha 1
3. $B \wedge C$ (E$\wedge$) linha 1
4. B (E$\wedge$) linha 3
5. $(A \wedge B)$ (I$\wedge$) linhas (2,4)
6. C (E$\wedge$) linha 3
7. $(A \wedge B) \wedge C$ (I$\wedge$) linhas (5,6)

(d) Prova:

1. $\neg(A \vee \neg B)$ hip
2. $(B \rightarrow C)$ hip
3. $\neg A \wedge \neg\neg B$ De Morgan a partir de (1)
4. $\neg A \wedge B$ Dupla Negação (3)
5. $\neg A$ (E$\wedge$) em (4)
6. B (E$\wedge$) em (4)
7. C Modus Ponens em (2) e (6)
8. $\neg A \wedge C$ (I$\wedge$) em (5) e (7)

(e) Prova:

1. $\neg A$ hipótese
2. $A \vee B$ hipótese
3. $\neg\neg A \vee B$ dupla negação de (2)
4. $\neg A \rightarrow B$ condicional de (3)
5. B Modus Ponens de (1) e (4)

(f) Prova:

1. $P \vee Q$ hipótese
2. $\neg P$ hipótese
3. $\neg\neg P \vee Q$ dupla negação de (1)
4. $\neg P \rightarrow Q$ Condicional de (3)
5. Q Modus Ponens de (2) e (4)

(g) Prova:

1. $\neg Q \rightarrow \neg P$ hipótese
2. P hipótese
3. $\neg(\neg P)$ dupla negação de (2)
4. $\neg(\neg Q)$ Modus Tollens de (1) e (3)
5. Q dupla negação de (4)

(h) Prova:

1.	$P \to Q$	hip
2.	$\neg P \to Q$	hip
3.	$\neg Q \to \neg P$	Contrapositiva de (1)
4.	$\neg Q \to Q$	Sil. Hipotético de (4) e (3)
5.	$\neg\neg Q \vee Q$	Condicional de (4)
6.	$Q \vee Q$	Dupla negação de (5)
7.	Q	idempotência de (6)

(i) Prova:

1.	$[(A \vee \neg B) \to C]$	hipótese 1
2.	$(C \to D)$	hipótese 2
3.	A	hipótese 3
4.	$(A \vee \neg B)$	(3) (I$\vee$)
5.	C	(1,4) (I$\to$)
6.	D	(2,5) (I$\to$)

(j) Prova:

(k) Prova:

(l) Prova:

(m) Prova:

(n) Prova:

(o) Prova:

(p) Prova:

(q) Prova:

(r) Prova:

5. Considere as seguintes proposições:

p : Os meus óculos estão na mesa da cozinha.
q : Eu vi meus óculos no café da manhã.
r : Eu estava lendo o jornal na sala de estar.
s : Eu estava lendo o jornal na cozinha.
t : Meus óculos estão na mesa do café.
u : Eu estava lendo um livro na cama.
v : Meus óculos estão no criado-mudo.

Traduzindo cada uma das hipóteses para a linguagem simbólica, é possível fazer as seguintes deduções:

1.	$p \rightarrow q$	hipótese a
2.	$r \vee s$	hipótese b
3.	$r \rightarrow t$	hipótese c
4.	$\neg q$	hipótese d
5.	$u \rightarrow v$	hipótese e
6.	$s \rightarrow p$	hipótese f
7.	$\neg p$	1, 4, $\{\rightarrow E_{MT}\}$
8.	$\neg s$	6, 7, $\{\rightarrow E_{MT}\}$
9.	r	2, 8, $\{SD\}$
10.	t	3, 9, $\{\rightarrow E\}$

A conclusão da dedução acima é t. Portanto, os óculos estão na mesa do café.

8.2.1 - Falácias

1. (a) Argumento Correto. Use as regras de instanciação universal e Modus Ponens.
   (b) Falácia.
   (c) Argumento Correto. Use instanciação universal e Modus Tollens.