



## Lista de Exercícios 03

### Recursividade

1) Dado os algoritmos recursivos abaixo, apresente suas funções de complexidade de tempo.

a)

```
void Pesquisa(int n)
{
    if (n > 1)
    {
        Inspeccione n*n*n elementos; // custo n^3
        Pesquisa (n/3);
    }
}
```

b)

```
void Pesquisa(n)
{
    if ( n <= 1 )
        return;
    else
    {
        obtenha o maior elemento dentre os n elementos;
        /* de alguma forma isto permite descartar 2/5 dos */
        /* elementos e fazer uma chamada recursiva no resto*/
        Pesquisa(3n/5);
    }
}
```

c)

```
void Pesquisa(int A[n], int n);
{
    if ( n <= 1 )
        return;
    else
    {
        ordena os n elementos;
        /* de alguma forma isto permite descartar 1/3 dos */
        /* elementos e fazer uma chamada recursiva no resto*/
        Pesquisa (2n/3);
    }
}
```

d)

```
int fib(int n)
{
    if ( n == 0 || n == 1 )
        return n;
    else
        return Fib(n-1) + Fib(n-2);
}
```

e)

```
void Proc( int n )
{
    if ( n == 0)
        return 1;
    else
        return Proc(n-1) + Proc(n-1);
}
```

f)

```
/* n é uma potencia de 2 */
void Sort (int A[n],int i, int j)
{
    if ( i < j )
    {
        m = (i + j - 1)/2;

        Sort(A,i,m);    /* custo = T(N/2) */
        Sort(A,m+1,j);  /* custo = T(N/2) */
        Merge(A,i,m,j); /* custo = N-1 comparacoes no */
        /* pior caso */
        /* Merge intercala A[i..m] e A[m+1..j] em A[i..j] */
    }
}
```

g)

```
/* n uma potencia de 3 */
void Sort2 (int A[n], int i, int j)
{
    if ( i < j )
    {
        m = ( (j - i) + 1 )/3;
        Sort2(A,i,i+m-1);
        Sort2(A,i+m,i+ 2m -1);
        Sort2(A,i+2m,j);
        Merge(A,i,i+m,i+2m, j);
        /* Merge intercala A[i..(i+m-1)], A[(i+m)..(i+2m-1)] e A[i+2m..j] em A[i..j] a um
        custo ( (5n/3) -2 ) */
    }
}
```

- 2) Implemente uma função recursiva que, dados dois números inteiros  $x$  e  $n$ , calcula o valor de  $x^n$ . Escreva e resolva a equação de recorrência dessa função. Qual é a ordem de complexidade da sua função? Qual seria a ordem de complexidade dessa mesma função implementada sem utilizar recursividade? O que você conclui?

- 3) Considere a função abaixo:

```
int X(int a)
{
    if ( a <= 0 )
        return 0;
    else
        return a + X(a-1);
}
```

- O que essa função faz?
- Calcule a sua ordem de complexidade. Mostre como você chegou a esse resultado.
- Escreva uma função não-recursiva que resolve o mesmo problema. Qual é a ordem de complexidade da sua função? Explique.
- Qual implementação é mais eficiente? Justifique.

- 4) Vários algoritmos em computação usam a técnica de “Dividir para Conquistar”: basicamente eles fazem alguma operação sobre todos os dados, e depois dividem o problema em sub-problemas menores, repetindo a operação. Uma equação de recorrência típica para esse tipo de algoritmo é mostrada abaixo. Resolva essa equação de recorrência.

$$\begin{aligned}T(n) &= 2T(n/2) + n; \\T(1) &= 1;\end{aligned}$$

- 5) Um problema típico em ciência da computação consiste em converter um número da sua forma decimal para a forma binária. Por exemplo, o número 12 tem a sua representação binária igual a 1100. A forma mais simples de fazer isso é dividir o número sucessivamente por 2, onde o resto da *i-ésima* divisão vai ser o dígito *i* do número binário (da direita para a esquerda).

Por exemplo:  $12 / 2 = 6$ , resto **0** (1º dígito da direita para esquerda),  $6 / 2 = 3$ , resto **0** (2º dígito da direita para esquerda),  $3 / 2 = 1$  resto **1** (3º dígito da direita para esquerda),  $1 / 2 = 0$  resto **1** (4º dígito da direita para esquerda). Resultado: **12 = 1100**

- Escreva um procedimento recursivo `Dec2Bin(n: integer)` que dado um número decimal imprima a sua representação binária corretamente.
  - Calcule qual é a ordem de complexidade do seu procedimento. Para isso, **determine e resolva** a equação de recorrência desse procedimento recursivo.
  - Utilizando um dos tipos abstratos de dados vistos em sala, implemente um procedimento que faça a mesma coisa, ou seja, dado um número decimal imprima a sua representação binária.
- 6) Considere um sistema numérico que não tenha a operação de adição implementada e que vc disponha somente dos operadores (funções) sucessor e predecessor. Então, pede-se para escrever uma função recursiva que calcule a soma de dois números *x* e *y* através desses dois operadores: sucessor e predecessor.

- 7) O máximo divisor comum (**MDC**) de dois números inteiros *x* e *y* pode ser calculado usando-se uma definição recursiva:

$$MDC(x, y) = MDC(x - y, y), \text{ se } x > y.$$

Além disso, sabe-se que:

$$MDC(x, y) = MDC(y, x)$$

$$MDC(x, x) = x$$

Exemplo:

$$MDC(10, 6) = MDC(4, 6) = MDC(6, 4) = MDC(2, 4) = MDC(4, 2) = MDC(2, 2) = 2$$

Então, pede-se que seja criada uma função recursiva para descrever tal definição. Crie, também, um algoritmo que leia os dois valores inteiros e utilize a função criada para calcular o **MDC** de *x* e *y*, e imprima o valor computado.

- 8) Pode-se calcular o resto da divisão, **MOD**, de *x* por *y*, dois números inteiros, usando-se a seguinte definição:

$$MOD(x, y) = \begin{cases} MOD(|x| - |y|, |y|), & \text{se } |x| > |y| \\ |x| & \text{se } |x| < |y| \\ 0 & \text{se } |x| = |y| \end{cases}$$

Então, pede-se que seja criada uma função recursiva para descrever tal definição. A função deve retornar -1 caso não seja possível realizar o cálculo. Além disso, crie um algoritmo que leia os dois valores inteiros e utilize a função criada para calcular o resto da divisão de  $x$  por  $y$ , e imprima o valor computado.

- 9) Pode-se calcular o quociente da divisão, **DIV**, de  $x$  por  $y$ , dois números inteiros, usando-se a seguinte definição:

$$DIV(x, y) = \begin{cases} 1 + DIV(|x| - |y|, |y|), & \text{se } |x| > |y| \\ 0 & \text{se } |x| < |y| \\ 1 & \text{se } |x| = |y| \end{cases}$$

Então, pede-se que seja criada uma função recursiva para descrever tal definição. A função deve retornar -1 caso não seja possível realizar o cálculo. Além disso, crie um algoritmo que leia os dois valores inteiros e utilize a função criada para calcular o quociente de  $x$  por  $y$ , e imprima o valor computado.

- 10) O mínimo múltiplo comum (**M.M.C.**) entre dois números inteiros e positivos  $X$  e  $Y$  é definido como sendo o menor inteiro positivo, que seja múltiplo comum a  $X$  e  $Y$ . Pede-se que seja criada uma função recursiva (não serão aceitas funções não recursivas) para o cálculo do **M.M.C.**, onde a função deverá retornar 0 caso não seja possível computar o **M.M.C.** e o valor do **M.M.C.** entre  $X$  e  $Y$  em caso contrário. Então, apresenta-se a seguinte definição recursiva que deve ser implementada:

$$\begin{aligned} M.M.C.(X, Y) &= \begin{cases} Z * M.M.C.(X/Z, Y/Z), & \text{se } X \bmod Z = 0 \text{ e } Y \bmod Z = 0 \text{ para } 1 < Z \leq X, Y \\ Z * M.M.C.(X/Z, Y) & \text{se } X \bmod Z = 0 \text{ e } Y \bmod Z \neq 0 \text{ para } 1 < Z \leq X, Y \\ Z * M.M.C.(X, Y/Z) & \text{se } X \bmod Z \neq 0 \text{ e } Y \bmod Z = 0 \text{ para } 1 < Z \leq X, Y \end{cases} \\ M.M.C.(1, 1) &= 1 \end{aligned}$$

Escreva também um algoritmo para testar a função criada.

- 11) Implemente uma função recursiva `soma(n)` que calcula o somatório dos  $n$  primeiros números inteiros. Escreva e resolva a equação de recorrência dessa função. Qual é a ordem de complexidade da sua função? Qual seria a ordem de complexidade dessa mesma função implementada sem utilizar recursividade? O que você conclui?