Universidade Federal de Ouro Preto
Instituto de Ciencias Exatas e Biologicas
Departamento de Matemática

Prof. *Jéssica Xavier*
Cálculo Diferencial e Integral I
Nome:____

Lista de exercício

1. Organize o polinômio e indique seu grau:

(a) $x^2 - 2x - 2x^3 + 1$

(b) $x^2 - x^4 + x - 3$

(c) $2x - 1 + 3x^2$

(d) $1 - x^2$

2. Multiplique os seguintes polinômios:

(a) $(x^2 - 3x + 7)(3x^2 + 5x - 3)$

(b) $2x(x^2 - x + 3)$

(c) $-3x(4x - 1)$

3. Simplifique as seguintes expressões algébricas:

(a) $\dfrac{x^3}{x^2 - 2x}$

(b) $\dfrac{z^2 - 3z}{9 - z^2}$

(c) $\dfrac{y^2 - y - 30}{y^2 - 3y - 18}$

(d) $\dfrac{8z^3 - 1}{2z^2 + 5z - 3}$

(e) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x - 6}{x^3 + 2x^2}$

4. Resolva as seguintes expressões algébricas:

(a) $\dfrac{4x}{y} \div \dfrac{8y}{x}$

(b) $\dfrac{7x - 7y}{4y} \div \dfrac{14x - 14y}{3y}$

(c) $\dfrac{x^2 - y^2}{2xy} \div \dfrac{y^2 - x^2}{4x^2y}$

(d) $\dfrac{3}{x - 2} + \dfrac{x + 1}{x - 2}$

5. Um grupo de jovens aluga, por 342 reais, uma van para um passeio, sendo que três deles saíram sem pagar. Por isso, os outros tiveram que completar o total pagando, cada um deles, 19 reais a mais. Qual o número inicial de jovens no grupo?

6. Encontre os valores de a para os quais a equação $x^2 - ax + 1 = 0$ não possui raízes reais.

7. Resolva as seguintes equações:

(a) $1 - x = 1$

(b) $x^2 = 1$

(c) $\dfrac{1}{x} = x + 1$

(d) $(x+1)(x-7) = 0$

(e) $x = x$

(f) $x = x^2$

(g) $6x^3 - 1 = 3x(1 + 2x^2)$

(h) $(x+6)(x+1) = 1$

8. Verifique se -1, 2 ou 5 são raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$.

9. Simplifique as expressões e represente os conjuntos na reta real.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$

(b) $B = \{x : x \geq 0\} \cap \{x : x < 1\}$

(c) $C = \{x : x \leq 1\} \cap \{x : x < 0\}$

(d) $D = \{x : x \geq 1\} \cap \{x : x \leq -1\}$

(e) $E = \{x : x \leq 2\} \cup [0, +\infty)$

(f) $F = [1, 2] \cap (-\infty, 1)$

10. Determine o conjunto domínio, D, das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 40}$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x}$

(c) $f(x) = |x - 1|$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \frac{1+x}{x}}$

(e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

(f) $f(x) = \sqrt{x-1}$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x-1}}$

(i) $f(x) = \dfrac{8x}{1 - x^2}$

(j) $f(x) = \dfrac{8x}{\sqrt{1 - x^2}}$

(k) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$

11. Determine a equação da reta que passa pelos pontos:

(a) $P = (0, 0)$ e $Q = (1, 1)$

(b) $R = (-2, 1)$ e $S = (100, 1)$

(c) $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 3)$

(d) $F = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ e $G = \left(\frac{-1}{2}, 5\right)$

12. Faça um esboço, no plano cartesiano, das retas descritas pelas equações abaixo:

(a) $r_1 : x + 2y = 0$

(b) $r_2 : y = 2x - 3$

13. Determine quais funções a seguir são pares ou ímpares, justificando. Quando a função não for nem par, nem ímpar, dê um contra-exemplo.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^5}$

(b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = \sqrt{x^2} - |x|$

14. Estude a variação das seguintes funções (intervalos de crescimento e de decrescimento):

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

15. Sejam $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ e $h(x) = x + 1$, calcule:

(a) $(f \circ g)(x)$

(b) $(f \circ g)(0)$

(c) $(g \circ f)(x)$

(d) $(g \circ f)(1)$

(e) $(f \circ h)(x)$

(f) $(f \circ h)(-1)$

(g) $(h \circ g)(x)$

(h) $(h \circ g)(0)$

16. Determine o conjunto imagem, $Im(f)$, das seguintes funções:

(a) $f(x) = -2x + 1$, com $D = \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = -2x + 1$, com $D = [-1, 1]$.

(c) $f(x) = x^2 + 1$, com $D = \mathbb{R}$.

(d) $f(x) = 1 - x^2$, com $D = \mathbb{R}$.

17. Considere $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

(a) Determine o conjunto imagem da função, $Im(f)$.

(b) Esboce o gráfico de f. (Dica: é parecido com o gráfico da função $\frac{1}{x}$, mas preste atenção ao domínio)

(c) Verifique que $f : (-1, +\infty) \to Im(f)$ é injetiva.

(d) Verifique que $f : (-1, +\infty) \to Im(f)$ é sobrejetiva.

(e) Escreva explicitamente a função inversa de f, $f^{-1} : Im(f) \to (-1, +\infty)$.

18. Determine o domínio, a imagem e obtenha a função inversa das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{3}$

(b) $f(x) = x + 1$

(c) $f(x) = x^2$

(d) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

19. Calcule os seguintes limites, quando $x \to \infty$:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5 - x^2 + 1}{2x^5 + 3\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + 2x^2}{1 + x^4}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

20. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

(d) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(e) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(f) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

21. Simplifique as expressões e então calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-9x+14}$

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

22. Considere a função $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, com o domínio adequado. Estude os limites relevantes e encontre as assíntotas (verticais e horizontais) de f.

23. É possível tomarmos $b \in \mathbb{R}$ para que a função abaixo seja contínua em todos os pontos? Em caso afirmativo, qual deve ser o valor de b?

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{se } x \leq 0 \\ x+b, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

24. Determine os pontos em que as funções abaixo são contínuas:

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x = 0 \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right), & \text{se } x > 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 5-x, & \text{se } x \geq 2 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{se } x < 2 \end{cases}$

25. Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$ para determinar se cada uma das quantidades seguintes é positiva, negativa ou zero:

(a) $f'(1)$

(b) $f'(2)$

(c) $f'(0)$

(d) $f'(-1)$

(e) $f'(-2)$

(f) $f'(5)$

Esboce as retas cujas inclinações são dadas pelos itens acima.

26. Considere $f(x) = x^2 - x$. Usando a definição, calcule a derivada de f nos pontos $a = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$, $a = 1$. Esboce o gráfico de f e interprete as derivadas geometricamente.

27. Usando a definição, calcule a derivada de f no ponto dado.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$.

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $a = 0$.

(d) $f(x) = x^4$, $a = -1$.

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 2$.

28. Dê a equação da reta tangente ao gráfico da função no(s) ponto(s) dado(s):

(a) $f(x) = 3x + 9$, $P = (4, 21)$.

(b) $f(x) = x - x^2$, $P = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$.

(c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $P = (0, 1)$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $P = (-1, -1)$ e $Q = (1, 1)$.

29. Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 5$

(b) $f(x) = 5x + 13$

(c) $f(x) = x^{-12}$

(d) $f(x) = 8x^3$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

(f) $f(x) = 6x^3 + 4x^2 - 2x$

(g) $f(x) = 3x^2 + 7x + 9$

(h) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{12}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$

(i) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2x}$

(j) $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes.

30. Use as regras de derivação para calcular as derivadas das seguintes funções. Quando for possível, simplifique a expressão obtida.

(a) $f(x) = (x+1)^2$

(b) $f(x) = sen(x^2)$

(c) $f(x) = \ln(1 - x)$

(d) $f(x) = -4 \cdot 3^x$

(e) $f(x) = \left(3 + \dfrac{1}{x}\right)^2$

(f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(g) $f(x) = 2e^{-x}$

(h) $f(x) = e^{2x}$

(i) $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{x}$

(j) $f(x) = \ln(\cos x)$

(k) $f(x) = 5x \cdot \ln x$

(l) $f(x) = x \cdot e^{5-2x}$

31. A temperatura Y, em graus Fahrenheit, de uma batata num forno t minutos depois de ser colocada é dada por

$$Y(t) = 350(1 - 0,7e^{-0,008t}).$$

(a) Qual era a temperatura da batata quando foi colocada no forno?

(b) Qual é a temperatura do forno?

(c) Quando a batata chegará à temperatura de $175F$?

(d) Avalie a taxa à qual está crescendo a temperatura da batata quando $t = 20$.

32. Calcula-se que, daqui a t meses, a população de uma certa comunidade será de $P(t) = t^2 + 20t + 8000$ habitantes.

(a) Qual é a taxa (instantânea) de variação da população da comunidade hoje?

(b) Qual será a taxa de variação da população desta comunidade daqui a 15 meses?

(c) Qual será a variação real da população durante o décimo sexto mês?

33. Calcule y' quando y é definido implicitamente pela equação dada:

(a) $y = \cos(3x + y)$

(b) $y = x^3y^2$

(c) $x = \sqrt{x^2 + y}$

(d) $\dfrac{x - y^3}{x} = y + 2$

(e) $x\operatorname{sen}x + y\cos y$

(f) $x\cos y = y$

34. Calcule a equação da reta tangente à curva no ponto dado:

(a) $x^2 + (x + y)^3$, $P = (1, 3)$

(b) $x^2y + y^4 = 4 + 2x$, $P = (-1, 1)$

35. Estude a concavidade das funções a seguir:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$

(b) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 6x$

(c) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 10x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

36. Calcule os limites abaixo. Se quiser usar a Regra de Bernoulli-l'Hôpital, verifique primeiro se as hipóteses são satisfeitas.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x - 2}$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x}$

37. Usando as informações obtidas através das derivadas primeira e segunda, esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 2$

(b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$

(c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

38. Esboce o gráfico de uma função com um único ponto crítico (em $x = 5$) e um único ponto de inflexão (em $x = 10$).

39. Esboce o gráfico de uma função com dois máximos locais e dois mínimos locais. Qual é o menor número de pontos de inflexão que esta função deve ter? Marque os pontos de inflexão no gráfico.

40. Um reservatório de base quadrada e sem tampa deve ser construído com a capacidade de armazenar um volume de $32\,m^3$ de água. Determine as dimensões desse reservatório que minimizam a quantidade de material a ser usado para construí-lo.

41. Determine os valores máximo e mínimo globais de $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$, definida no intervalo $[-4, 2]$.

42. Uma pesquisa de opinião revela que x meses após anunciar sua candidatura, certo político terá o apoio de

$$S(x) = \frac{1}{29}\left(-x^3 + 6x^2 + 63x + 1080\right)\%$$

dos eleitores, sendo $0 \leq x \leq 12$. Se a eleição estiver marcada para novembro, qual o melhor mês para anunciar a candidatura?

43. A reação do organismo à administração de um medicamento é frequentemente representada por uma função da forma

$$R(d) = d^2\left(\frac{C}{2} - \frac{d}{3}\right),$$

onde d é a dose e C (uma constante) é a dose máxima que pode ser administrada. A taxa de variação de R em relação à d é chamada de sensibilidade. Determine o valor de d para o qual a sensibilidade é máxima.

44. Calcule a área da região finita delimitada pelo gráfico da função $f(x) = e^x$, pelo eixo x e pelas retas $x = -1$, $x = 2$. Faça um gráfico representando essa região.

45. Suponha que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 8$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 2$. Ache o valor das seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$

(b) $\displaystyle\int_a^b (f(x) - 3g(x))\,dx$

(c) $\displaystyle\int_a^b 5f(x)dx$

46. Determine a função $f(x)$ que passa pelo ponto $(9, 4)$ e cujo coeficiente angular em cada ponto é $3\sqrt{x}$.

47. Encontre a primitiva para cada item e verifique sua resposta.

(a) $f(x) = 6x$

(b) $f(x) = x^{-4} + 2x + 3$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2x^5}$

(d) $f(x) = -\pi \text{sen}(\pi x)$

(e) $f(x) = e^{-x} - 4^x$

(f) $f(x) = 7\text{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right)$

48. Calcule cada integral usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{0} \left(x^2 - 4x + 7\right) dx$

(b) $\displaystyle\int_{4}^{9} 2x\sqrt{x}dx$

(c) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{3} 5e^x dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x)dx$

49. Usando a técnica de substituição, resolva as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int x\text{sen}(2x^2)dx$

(b) $\displaystyle\int 28(7x-2)^{-5}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$

(d) $\displaystyle\int \cos(8x)dx$

(e) $\displaystyle\int x^2 e^{-2x^3} dx$

50. Calcule as primitivas das funções abaixo. (Obs.: às vezes, pode ser preciso integrar por partes duas vezes.)

(a) $\displaystyle\int x\text{sen}(x)dx$

(b) $\displaystyle\int x\cos(5x)dx$

(c) $\displaystyle\int x^2\cos(x)dx$

(d) $\displaystyle\int xe^x dx$