Exercícios – BCC101

Entrega: 14/11/2019 até às 19 horas no Moodle

Nome: Marcus Vinícius Souza Fernandes **Matrícula**: 19.1.4046

Prove as sentenças abaixo:

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ é divisível por 3.
Prova por Indução:

Caso Base:
$P(0) = (0^3 - 0) = 0$
$3|0$
Então P(0) é verdadeiro.

Hipótese Indutiva:
Suponha P(k) para algum $k \in N$
$P(k) = k^3 - k$
Passo Indutivo:
$3|\ (k+1)^3 - (k+1)$
Seja a hipótese de indução $(k+1)^3 - (k+1)$
$= (k^2 +2k+1)\ (k+1) - (k+1)$
$= k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + k + k + 1 - (k + 1)$
$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$
$= k^3 - k + 3k^2 + 3k$
$= 3a + 3k^2 + 3k$
$= 3\ (a + k^2 + k)$

2. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$
Prova por Indução:

Caso Base:
$P(0) = 2^1 - 1$
$P(0) = 2 - 1 = 1$

Hipótese Indutiva:
Suponha P(k) para algum $k \in N$
P(k) = 2 k+1 − 1

Passo Indutivo:

2 + k+1 − 1 2 k+1

$2 * 2^{k+1} - 1$

$2^{k+2} - 1$

3. A soma dos cubos de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 9.
Prova por Indução:

Caso Base:

P(0): 9 / 9 = 0, portanto P(0) é verdade.

Hipótese Indutiva:

Suponha P(k) para algum $k \in \mathbb{N}$

P(k): $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = 9t$, para $t \in \mathbb{N}$

Passo Indutivo:

P(k+1): $(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 9u$, para $u \in \mathbb{N}$

Temos que:

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = 3(k^3 + 6k^2 + 13k + 12)$

Como 9 u pode ser escrito na forma 3(T), sendo $T \in \mathbb{N}$, temos que

$3(k^3 + 6k^2 + 13k + 12)$ pode ser também reescrito nesta forma, portanto temos que $3(k^3 + 6k^2 + 13k + 12)$ é divisível por 3 e por 9.

Assim, a hipótese é verdadeira.

4. Se $n \in \mathbb{N}$, então 133 divide $11^{n+1} + 12^{2n-1}$.
Prova por Indução:

Caso base:

P(1): $11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133$

Hipótese Indutiva:

Suponha P(n) para algum $n \in \mathbb{N}*$

P(k):

$11^{n+1} + 12^{2n-1} = 133x$, para $x \in Z$

Passo Indutivo:

$11^{n+1} + 12^{2n-1} = 11 . 11^{n+1} + 12 . 12^{2n-1}$

$= 11 . 11^{n+1} + 144 . 12^{2n-1}$

$= 11 . 11^{n+1} + 11 . 12^{2n-1} + 133 . 12^{2n-1}$

$= 11 (11^{n+1} + 12^{2n-1}) + 133 . 12^{2n-1}$

$= 11 \cdot 133x + 133 \cdot 12^{2n-1}$

$= 133\,(11x + 12^{2n-1})$

- Logo, a hipótese é verdadeira.