UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO
MATEMÁTICA DISCRETA- BCC101

NOTAS DE AULA: SEQUÊNCIA, INDUÇÃO MATEMÁTICA E RECURSIVIDADE

Prof[a]. Dayanne G. Coelho

Ouro Preto - MG
2017

Aula T: Sequência

BCC101- Matemática Discreta

(DECOM/UFOP)

1.1 Sequências Numéricas

Definição 1.1 (Sequência Numérica) Seja $m \in \mathbb{N}$. Chamamos de sequência númerica uma função f, cujo o domínio é $D_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$ ou $D_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$ e que associa a cada elemento deste conjunto um número real.

Uma sequência é finita se possui um número finito de termos (domínio é D_2) e é infinita se possui um número infinito de termos (domínio é D_1). Cada elemento da sequência, representado por a_k é chamado de **termo**. O número real associado por f ao natural n é chamado de **termo geral** é denotado simbolicamente por a_n. Usaremos a notação $\{a_n\}_{n \geq m}$ ou $\{a_n\}_{n \leq m}$ para representar a sequência que possui o termo geral a_n.

A **fórmula geral** ou **fórmula explícita** para uma sequência é uma regra que mostra como os valores de cada termo a_k são obtidos de k.

Exemplo 1.1 Considere as seguintes sequências:

1. $\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$. Temos uma sequência infinita, cujos termos são $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1, \cdots$. Podemos representar a sequência por $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots\}$.

2. $\left\{\dfrac{k}{k+1}\right\}_{k \geq 1}$. Temos uma sequência infinita, cujos termos são $a_0 = 1/2,\ a_1 = 2/3,\ a_2 = 3/4,\ a_3 = 4/5, \cdots$, ou seja, $\{1/2, 2/3, 3/4, 4/5, \cdots\}$.

3. $\{n\}_{n\leq 3}$. Temos uma sequência infinita, cujos termos são $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$, ou seja, $\{0,1,2,3\}$.

Exercício: Escreva os cinco primeiros termos de cada sequência:

1. $\left\{\dfrac{k}{10+k}\right\}_{k\geq 1}$

2. $\left\{\dfrac{5-k}{5+k}\right\}_{k\geq 1}$

3. $a_k = \dfrac{(-1)^k}{3^k}$, para todos os inteiros $k \geq 0$.

4. $b_i = 1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^i$, para todos os inteiros $i \geq 0$.

Exemplo 1.2 Observe a seguinte sequência:

$$1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \cdots$$

Para escrever a fórmula geral, vamos escrever o termo geral como o termo a_k e o primeiro termo da sequência como a_1. Reescrevendo os termos da sequência temos:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ \frac{1}{1^2} & \frac{(-1)}{2^2} & \frac{1}{3^2} & \frac{(-1)}{4^2} & \frac{1}{5^2} & \frac{(-1)}{6^2} & \cdots \end{array}$$

Note que o denominador de cada termo é um quadrado perfeito e que o numerador é igual a 1 quando k é ímpar e (-1) quando k é par, assim podemos escrever o termo geral como $a_k = \dfrac{\pm 1}{k^2}$.

Para alcançar a oscilação ± 1 do numerador deve ser inserido o fator $(-1)^{k+1}$ na fórmula geral (observe que quando k for ímpar, $k+1$ será par e, portanto, $(-1)^{par} = 1$). Logo:

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}, \quad \text{para todos os inteiros } k \geq 1$$

ou ainda, $a_k = \dfrac{(-1)^k}{(k+1)^2}$, para todos os inteiros $k \geq 0$.

1.2 Notações

1.2.1 Somatório

Definição 1.2 (Somatório) Sejam m e n inteiros e $m \leq n$. O símbolo

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

é a soma de todos os termos $a_m,\ a_{m+1},\ a_{m+2},\ \cdots,\ a_n$.

Dizemos que $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$ é a forma expandida do somatório e escrevemos:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n,$$

onde k é o índice, m é limite inferior e n o limite superior do somatório.

Se o limite superior de um somatório é uma variável, o somatório pode ser escrito usando uma forma expandida.

Exemplo 1.3 Considere o somatório:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1}$$

sua forma expandida pode ser obtida:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1} &= \tfrac{(-1)^0}{0+1} + \tfrac{(-1)^1}{1+1} + \tfrac{(-1)^2}{2+1} + \tfrac{(-1)^3}{3+1} + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \tfrac{1}{1} + \tfrac{(-1)}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{(-1)}{4} + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{n+1} \\
&= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{(-1)^n}{n+1}.
\end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: O somatório pode ser definido recursivamente como: Se m é um inteiro qualquer inteiro, então

$$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n \quad \text{para todos os inteiros } n > m$$

Em alguns problemas será necessário reescrever o somatório usando a forma da definição recursiva, ou seja, separando o termo final de um somatório ou adicionando um termo final ao somatório.

(Propriedades dos Somatórios) Sejam $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots$ e $b_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \cdots$ sequências de números reais e seja c um número real qualquer. Então, são válidas as equações para qualquer número inteiro $n \geq m$:

1. $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$

2. $c \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c \cdot a_k$

Exercícios Complementares

1. Calcule os somatórios.
   (a) $\sum_{k=1}^{5} (k+1)$
   (b) $\sum_{k=1}^{1} k(k+1)$
   (c) $\sum_{m=0}^{3} \frac{1}{2^m}$
   (d) $\sum_{k=-1}^{1} (k^2+3)$
2. Assuma $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = -2, a_3 = 1$ e $a_4 = 0$. Calcule os somatórios:
   (a) $\sum_{i=0}^{4} a_i$
   (b) $\sum_{i=0}^{0} a_i$
   (c) $\sum_{i=2}^{3} a_i$
3. Escreva os somatórios usando a forma expandida.
   (a) $\sum_{i=1}^{n} (-2)^i$
   (b) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$
   (c) $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}$
   (d) $\sum_{k=1}^{n+1} k(k!)$
4. Reescreva os somatórios separando o termo final.
   (a) $\sum_{i=1}^{k+1} i(i!)$
   (b) $\sum_{i=1}^{k+1} i^2$
   (c) $\sum_{i=1}^{k+1} i(1+1)$
5. Reescreva as expressões como um somatório único:
   (a) $\sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3$
   (b) $\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{k+1} + \frac{m+1}{m+2}$
   (c) $\sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k + (n+2)2^{n+1}$

(d) $3\sum_{k=1}^{n}(2k-3)+\sum_{k=1}^{n}(4-5k)$

(e) $2\sum_{k=1}^{n}(3k^2+4)+5\sum_{k=1}^{n}(2k^2-1)$

6. Reescreva as expressões usando a notação de somatório.

(a) $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+7^2$

(b) $(1^3-1)-(2^3-1)+(3^3-1)-(4^3-1)+(5^3-1)$

(c) $\frac{2}{3\cdot 4}-\frac{3}{4\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 6}-\frac{5}{6\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 8}$

(d) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

(e) $n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$

(f) $n+\frac{(n-1)}{2!}+\frac{(n-2)}{3!}+\frac{(n-3)}{4!}\cdots+\frac{1}{n!}$

7. Reescreva os somatórios fazendo a mudança de variável indicada.

(a) $\sum_{k=0}^{5}k(k-1)$ e $i=k+1$

(b) $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(i-1)^2}{i.n}$ e $j=i-1$

(c) $\sum_{i=3}^{n}\frac{i}{i+n-1}$ e $j=i-1$

1.2.2 Produtório

Definição 1.3 Sejam $m,n\in\mathbb{Z}$ e $m\leq n$. O símbolo $\prod_{k=m}^{n}a_k$ é o produto dos termos $a_m,a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_n$. Escrevemos:

$$\prod_{k=m}^{n}a_k=a_m\cdot a_{m+1}\cdot a_{m+2}\cdots a_n$$

OBSERVAÇÕES:

- A definição recursiva para a notação de produtório é: se m é um inteiro qualquer inteiro, então

$$\prod_{k=m}^{m}a_k=a_m \quad \text{e} \quad \prod_{k=m}^{n}a_k=\left(\prod_{k=m}^{n-1}a_k\right)a_n \quad \text{para todos os inteiros } n>m$$

- Sejam $a_m,a_{m+1},a_{m+2},\cdots$ e $b_m,b_{m+1},b_{m+2},\cdots$ sequências de números reais. Então, vale a seguinte propriedade para qualquer número inteiro $n\geq m$:

$$\left(\prod_{k=m}^{n}a_k\right)\cdot\left(\prod_{k=m}^{n}b_k\right)=\prod_{k=m}^{n}(a_k\cdot b_k)$$

Exercícios Complementares

1. Calcule os produtórios.

(a) $\prod_{k=1}^{5}k^2$

(b) $\prod_{k=0}^{4}(-1)^k$

(c) $\prod_{i=2}^{5}\frac{i(i+2)}{(i-1)(i+1)}$

2. Assuma $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = -2, a_3 = 1$ e $a_4 = 0$. Calcule os produtórios:

   (a) $\prod_{i=0}^{4}a_i$

   (b) $\prod_{i=2}^{2}a_i$

   (c) $\prod_{i=2}^{3}a_i$

3. Reescreva as expressões usando a notação de produtório.

   (a) $(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)$

   (b) $(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^4)$

4. Reescreva os produtórios fazendo a mudança de variável indicada.

   (a) $\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+4}$ e $i = k+1$

   (b) $\prod_{i=n}^{2n}\frac{n-i+1}{n+i}$ e $j = i-1$

5. Reescreva a expressão como um produtório único:

   (a) $\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k+1}\right)$

1.2.3 Fatorial

Definição 1.4 (Fatorial) Para cada inteiro positivo n, a quantidade n fatorial, denotada por $n!$, é definida como o produto de todos os inteiros de 1 até n:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

o **zero fatorial** é definido sendo 1, ou seja, $0! = 1$.

Exercícios Complementares

1. Calcule

   (a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

   (b) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

   (c) $\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}$

   (d) $\frac{n!}{(n-k)!}$

   (e) $\frac{n!}{(n-k+1)!}$

1.2.4 Coeficiente Binomial

O coeficiente binomial de um número n, na classe k, consiste no número de combinações de n termos, k a k.

Definição 1.5 (Número Binomial) Para todos números inteiros n e k com $0 \leq k \leq n$, temos que o número binomial pode ser escrito como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exercícios Complementares

1. Calcule
   (a) $\binom{7}{4}$
   (b) $\binom{n}{n-1}$
   (c) $\binom{n+1}{n-1}$

Aula 20: Indução Matemática

BCC101- Matemática Discreta

(DECOM/UFOP)

2.1 Introdução

Indução, do latim "*in*" + "*ducere*", significa conduzir a uma determinada direção. É um tipo de raciocínio que vai do particular ao geral e que consiste em afirmar uma lei universal a partir da observação de premissas particulares, por exemplo:

- Ferro conduz energia. Cobre conduz energia. Zinco conduz energia. Ferro, cobre e zinco são metais, logo, todo metal conduz energia.
- João é brasileiro e gosta de futebol. Pedro, Joaquim, Maria e Ana também são brasileiros e gostam de futebol. Portanto, todo brasileiro gosta de futebol.

A **indução matemática** é uma técnica de prova usada para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições. Vamos apresentar exemplos aplicados à matemática e a computação.

A forma mais simples da aplicação da técnica de indução matemática consiste em provar estruturas na forma

$$\forall n, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow P(n)$$

ou seja, consiste em provar que um enunciado $P(n)$ é verdadeiro para todos os n números inteiros positivos. Usaremos a notação $P(n)$ para indicar que o inteiro positivo n tem a propriedade P.

Para provar a fórmula anterior, é necessário verificar que a propriedade P é verdadeira para todos os elementos do conjunto $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$. Como não é possível fazer tal verificação para todos os elementos, visto que o conjunto dos números naturais é infinito, vamos validar a fórmula usando indução matemática.

A indução matemática está fundamentada na própria estrutura do conjunto dos números naturais[1]. Para mostrar que todos os elementos do conjunto $\mathbb{N}^*$ possuem uma certa propriedade P é necessário:

- Mostrar que o elemento 1 possui essa propriedade, ou seja, mostrar que $P(1)$ é verdadeiro.
- Mostrar que sempre que um número natural n possuir a propriedade P, o seu sucessor $n+1$ também irá possuir essa propriedade. Ou seja, deve-se provar que $\forall n, n \in \mathbb{N}^* \wedge P(n) \rightarrow P(n+1)$.

Assim, a estratégia de prova é dividida em três etapas:

Caso base: mostrar que o enunciado vale para $n = 1$, ou seja, $P(1)$.

Hipótese de indução: supor $P(n)$ verdadeiro, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Passo indutivo: mostrar que, se o enunciado vale para $P(n)$, então o mesmo enunciado vale para $P(n+1)$.

Tendo provado o passo indutivo, podemos concluir que a propriedade também pode ser verificada para qualquer valor pertencente ao universo do discurso, aplicando uma repetição deste processo.

Para ilustrar os passos da indução matemática considere a Figura 2.1 que representa o efeito dominó. Na figura, onde uma longa fila de dominós estão em pé, é possível assegurar que:

1. O primeiro dominó cairá na direção da segunda peça.
2. Se qualquer peça está próxima da seguinte da fila, então, sempre que um dominó cair, a próxima peça vizinha também cairá.

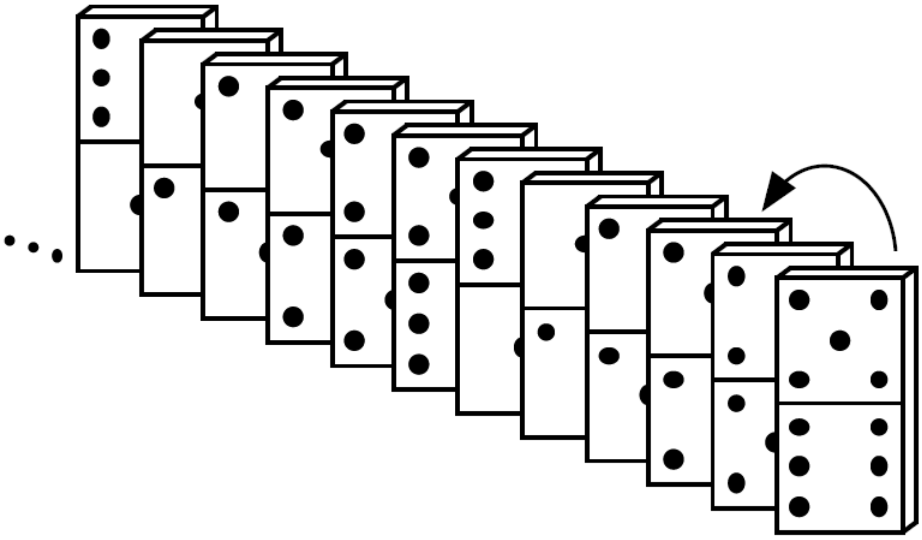


Figura 2.1: Efeito Dominó. Fonte:[1]

Assim, temos que de (1.) a primeira peça cairá. De (2.) a segunda peça cairá, de (2.) a terceira peça cairá, ..., de (2.) a i-ésima peça e cairá, e assim sucessivamente. O que permite concluir que para qualquer quantidade n, o $n-$ésimo dominó cairá.

[1] Para listar todos os valores do conjunto $\mathbb{N}$, basta iniciar com o primeiro elemento $0 \in \mathbb{N}$ e repetidamente somar 1, produzindo a cada soma, um novo número natural.

2.2 Indução Matemática

> "*O Princípio de Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização.*" Elon Lages Lima.

Os **Axiomas de Peano**[2] são os pilares de toda teoria que envolve o conjunto dos números naturais. Estes axiomas formalizam a ideia de que qualquer número natural pode ser obtido a partir do número 1 utilizando a propriedade de sucessor. A seguir é apresentada uma breve descrição dos Axiomas de Peano, para maiores detalhes consultar o livro [2].

Definição 2.1 (Axiomas de Peano) :

Axioma 1. Todo número natural possui um único sucessor[a] que também é um número natural.

Axioma 2. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.

Axioma 3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de "número um".

Axioma 4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessor de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, o conjunto contém todos os números naturais.

[a] O conceito de um número sucessor de $n \in \mathbb{N}$ é um número $n' \in \mathbb{N}$, tal que $n' = n + 1$.

O último axioma também é conhecido como o **Axioma da Indução** e possui um importante papel na teoria dos números, assim como em toda Matemática. Este axioma configura uma poderosa ferramenta de demonstração, conhecida como **Prova Indutiva** (também chamada por outros autores de **Prova por Indução Matemática**, ou **Princípio da Indução Finita**, ou apenas **Princípio da Indução Matemática**).

De forma sucinta, dada uma sentença matemática $P(x)$ aberta sobre o conjunto $\mathbb{N}$, a qual se torna verdadeira ou falsa quando substituímos x por elemento qualquer deste conjunto, a Indução Matemática será usada para provar que $P(x)$ é verdadeiro para todos os números pertencentes ao domínio.

2.2.1 Indução Fraca

O Primeiro Princípio da Indução Matemática ou **Indução Fraca** consiste em uma técnica de demonstração para implicações cuja tese é uma sentença na forma "$P(n)$ é verdadeira para todos os inteiros positivos":

$$\forall n, n \in \mathbb{N}^* \rightarrow P(n)$$

[2] Axiomas propostos pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932).

Definição 2.2 (Indução Fraca) Seja $P(n)$ uma proposição relativa ao conjunto $\mathbb{N}^*$. Suponha que:

1. $P(1)$ é verdadeiro.
2. $\forall n, [P(n)$ é verdadeiro $\rightarrow P(n+1)$ é verdadeiro$]$

Então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Vários teoremas podem ser provados aplicando esta técnica de demonstração. Se destacam os teoremas que incluem fórmulas de somatório, inequações, identidades para combinações de conjuntos, resultados de divisibilidade e provas de exatidão de algoritmos. Os exemplos seguintes seguem os passos da prova indutiva.

Passos da Prova Indutiva:

1. **Base:** estabelecer a veracidade da sentença para o primeiro elemento do domínio (se o domínio for $\mathbb{N}^*$ verifique $P(1)$).
2. **Hipótese Indutiva:** supor $P(k)$ verdadeira com o objetivo de demonstrar o passo indutivo.
3. **Passo Indutivo:** estabelecer a veracidade de $P(k) \rightarrow P(k+1)$.

Concluir que $P(n)$ é verdadeiro para todo o domínio.

Exemplo 2.1 Prove que a equação

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \tag{2.1}$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

Observações:

- A propriedade $P(n)$, representada pela equação (2.1), indica que a soma de todos os inteiros positivos ímpares menores que n é igual ao quadrado de n.
- A demonstração por exaustão não se aplica neste caso, pois embora possamos verificar a veracidade da equação para um determinado n, substituindo n na equação, não é possível substituir n para todos os inteiros positivos que existem.

Prova: (**Indução Fraca**)

1. **Base:** Verificar se $P(1)$ é verdadeiro.

   Provar $P(1)$ significa verificar se a equação (2.1) é verdadeira quando $n=1$.

   - A soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 1 é igual a 1.
   - Substituindo $n=1$ em n^2, também obtemos 1.

   Logo, $P(1): 1 = 1^2$, e portanto é verdadeiro.
2. **Hipótese Indutiva:** Supor $P(k)$ para algum inteiro positivo arbitrário k.

   Esta etapa representa a equação (2.1) quando $n=k$:

   $$1+3+5+...+(2k-1)=k^2 \tag{2.2}$$
3. **Passo Indutivo:** Provar que $P(k+1)$ é verdadeiro usando a hipótese indutiva.

- Provar que $P(k+1)$ é verdadeiro equivale a verificar a veracidade da equação (2.1) quando $n = k+1$.

  Queremos provar que $1+3+5+...+[2(k+1)-1] = (k+1)^2$
- É preciso relacionar o que se deseja provar ($P(k+1)$) com a hipótese de indução ($P(k)$): Escrevendo $P(k+1)$ usando a primeira parte da equação (2.1), temos:

$$\begin{aligned}
1+3+5+...+(2k-1)+[2(k+1)-1] &= \\
\underbrace{1+3+5+...+(2k-1)}_{k^2}+[2(k+1)-1] &= \{\text{Aplicando a hipótese indutiva}\} \\
k^2+[2(k+1)-1] &= \\
k^2+2k+1 &= \\
(k+1)^2 &
\end{aligned}$$

Logo,

$$1+3+5+...+[2(k+1)-1] = (k+1)^2$$

o que comprova a validade de $P(k+1)$. Assim, temos que a equação (2.1) é verdadeira. ■

Exemplo 2.2 Mostre que se n for um número inteiro positivo, então $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Prova: **(Indução Fraca)**

1. **Base:** Verificar $P(1)$ substituindo $n = 1$ na equação:
   - $1 = 1$
   - $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.

   Logo, $P(1)$ é verdadeiro.
2. **Hipótese Indutiva:** Vamos assumir que $P(k)$ é verdadeira para algum inteiro positivo k: Substituindo k na equação temos $1+2+3+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$.
3. **Passo Indutivo:** Provar que $P(k+1)$ é verdadeiro usando a hipótese indutiva. Queremos provar que $P(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$.

   Reescrevendo $P(k+1)$ usando a hipótese indutiva temos:

$$\begin{aligned}
1+2+3+...+k+(k+1) &= \\
\underbrace{1+2+3+...+k}_{\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1) &= \{\text{Aplicando a hipótese indutiva }\} \\
\frac{k(k+1)}{2}+k+1 &= \\
\frac{k^2+k}{2}+k+1 &=
\end{aligned}$$

$$\frac{k^2+k+2(k+1)}{2} =$$
$$\frac{(k^2+k)+(k+1)+(k+1)}{2} =$$
$$\frac{(k^2+2k+1)+(k+1)}{2} =$$
$$\frac{(k+1)^2+(k+1)}{2} =$$
$$\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Logo,

$$1+2+3+...+k+(k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}.$$

Assim, pela indução matemática, temos que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n, ou seja, $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

■

Generalização da Indução Fraca

Para provar um enunciado $P(n)$ relativo a todos os números inteiros não negativos maiores ou iguais a um determinado número a, deve ser feita uma generalização da estratégia de prova por indução realizando os seguintes passos:

Passos da Indução Fraca

1. Mostre que $P(n)$ é verdadeiro quando $n = a$.
2. Mostre que $\forall k, [P(k)$ é verdadeiro $\rightarrow P(k+1)$ é verdadeiro $]$, ou seja, mostre que se o enunciado vale para $n = k \geq a$, então o mesmo enunciado vale para $n = k+1$.

De forma geral, dizemos que $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e $n \geq a$.

Exemplo 2.3 Prove que $n^2 > 3n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$.

Prova: **(Indução Fraca)**

1. **Base:** Do enunciado, o teorema é válido $\forall n, n \geq 4$. Então, vamos verificar $P(4)$:
   - $(4)^2 = 16$
   - $3(4) = 12$

   Como $(4)^2 > 3(4)$, temos que $P(4)$ é verdadeiro.
2. **Hipótese Indutiva:** Assumindo que $P(k)$ é verdadeiro para algum k. Substituindo k na inequação, temos que:
   $$k^2 > 3k$$
3. **Passo Indutivo:** Mostrar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$.
   Sabe-se que $(k+1)^2 = k^2+2k+1$.

Somando $2k+1$ em ambos os lados da hipótese indutiva $k^2 > 3k$ temos :

$$k^2+2k+1 > 3k+2k+1 \qquad (1)$$

Como $k \geq 4$, temos que $2k+1 > 3$ para todo k. Logo:

$$3k+2k+1 > 3k+3 = 3(k+1) \qquad (2)$$

De (1) e (2) conclui-se que:

$$(k+1)^2 > 3(k+1).$$

Portanto $P(k+1)$ é verdadeira.

■

Exemplo 2.4 Prove que $n < 2^n$ para todo número natural.

Prova: **(Indução Fraca)**

1. **Passo Base:** $P(1)$ é verdadeiro, pois:
   - $1 < 2^1 = 2$
2. **Hipótese Indutiva:** Assumindo $P(k)$ verdadeiro, para algum $k \in \mathbb{Z}^+$ e substituindo k na inequação temos:
$$k < 2^k$$
3. **Passo Indutivo:** Queremos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, provar que $(k+1) < 2^{(k+1)}$.
   Adicionando 1 em ambos os lados da hipótese indutiva ($k < 2^k$), obtemos $k+1 < 2^k+1$.
   Além disso, sabe-se que $1 < 2^k$, para qualquer k inteiro positivo. Logo
$$k+1 < 2^k+1 < 2^k+2^k$$
   Aplicando as propriedades de potência: $2^k+2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$.
   Então, $k+1 < 2^{k+1}$. Provando assim que $P(k+1)$ é verdadeiro.
   Logo, pelo princípio da indução matemática, mostramos que $n < 2^n$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos n.

■

Exemplo 2.5 Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} ar^i = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}, \quad \text{quando} \quad r \neq 1.$$

Seja $P(n)$ a seguinte proposição "a soma dos $n+1$ termos de uma progressão geométrica é $\frac{ar^{n+1}-a}{r-1}$".

Prova: (**Indução Fraca**)

1. **Passo Base:** Verificar $P(0)$:

   (I) a

   (II) $\frac{ar^{0+1} - a}{r-1} = \frac{ar - a}{r-1} = \frac{a(r-1)}{r-1} = a$

   Portanto, como $(I) = (II)$ temos que $P(0)$ é verdadeiro.

2. **Hipótese Indutiva:** Assumindo $P(k)$ verdadeiro, para algum valor arbitrário k não negativo temos:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^k = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1}$$

3 **Passo Indutivo:** Precisamos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro, ou seja:

$$P(k+1) = a + ar + ar^1 + \quad + ar^k + ar^{k+1} = \frac{ar^{k+2} - a}{r-1}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^k + ar^{k+1} &= \\
\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^k}_{\frac{ar^{k+1}-a}{r-1}} + ar^{k+1} &= \{\text{da hipótese indutiva}\} \\
\frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + \frac{(r-1)ar^{k+1}}{r-1} &= \\
\frac{ar^{k+1} - a}{r-1} + \frac{ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r-1} &= \\
\frac{ar^{k+1} - a + ar^{k+2} - ar^{k+1}}{r-1} &= \\
\frac{ar^{k+2} - a}{r-1}
\end{aligned}$$

Portanto, pela indução matemática, $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros não negativos. ∎

2.2.2 Exercícios Complementares

1. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $1+3+6+9+...+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
2. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + ... + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$
3. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$
4. Prove que para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$
5. Prove que $n^2 \geq 2n+3$ para $n \geq 3$
6. Prove que $n^2 > n+1$ para todo $n > 1$
7. Prove que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$
8. Prove que para todo $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$
9. Prove que $n! > n^2$ para $n \geq 4$

Aula 21: Indução Fraca

BCC101- Matemática Discreta
(DECOM/UFOP)

3.1 Indução Fraca

Exemplo 3.1 Prove que para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n}-1$ é divisível por 3.

Prova: (**Indução Fraca**)

1. **Passo Base:** $P(1)$ é verdadeiro, pois $2^{2(1)}-1=3$ é divisível por 3.
2. **Hipótese Indutiva:** Vamos assumir que $P(k)$ é verdadeiro para algum k arbitrário. Substituindo k na fórmula temos que $2^{2k}-1$. Observações:
   - $2^{2k}-1$ ser divisível por 3 significa que $2^{2k}-1=3m$, para algum $m \in \mathbb{Z}$.
   - Então, $2^{2k}=3m+1$ (**Esta reescrita da hipótese é um truque muito usado nos problemas que envolve divisibilidade**)
3. **Passo Indutivo:** Usando a hipótese de indução, precisamos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, $2^{2(k+1)}-1$ é divisível por 3:

$$\begin{aligned}
2^{2(k+1)}-1 &= 2^{2k+2}-1 \\
&= 2^{2k}.2^2-1 \\
&= (3m+1)4-1 && \text{usando o truque da hip. da indução} \\
&= 12m+4-1 \\
&= 12m+3 \\
&= 3(4m+1) && \text{em que } 4m+1 \text{ é um número inteiro}
\end{aligned}$$

Pelo princípio da indução matemática, verificamos que $2^{2(k+1)} - 1$pode ser escrito como $3t$, onde $t \in \mathbb{Z}$ e $t = 4m + 1$. Logo, $2^{2(k+1)} - 1$ também é divisível por 3. Portanto, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

■

Exemplo 3.2 Um determinado número de linhas retas são desenhadas em um papel de maneira que o papel seja dividido em um determinado número de regiões. Prove que é possível colorir cada região de preto ou de branco, de modo que regiões adjacentes[1] tenham cores distintas.

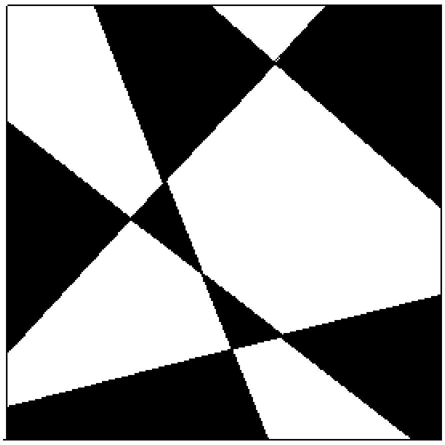


Figura 3.1: Mapa de Cor

Prova: (**Indução Fraca**)

1. **Passo Base:** Precisamos provar que $P(1)$ é verdadeiro.
   Esta prova é trivial! Basta desenhar o mapa de linhas com apenas uma reta. Então ele pode trivialmente ser colorido da seguinte maneira: de um lado da reta seria colorido de branco e do outro lado de preto.
2. **Hipótese Indutiva:** Suponha que um plano cortado por k retas seja colorido conforme o enunciado. A hipótese da indução está ilustrada na Figura 3.1.
3. **Passo Indutivo:** Queremos mostrar que o enunciado também vale para um mapa onde estejam desenhadas $k+1$ retas.
   Vamos traçar mais uma reta no mapa de linhas, como ilustrado na Figura 3.2 (II) pela reta em vermelho.
   Em seguida, como apresentado na Figura 3.2 (III), inverta as cores de todas as regiões em um dos lados da reta vermelha.
   Temos que todos os lados continuam coloridos conforme o enunciado e quaisquer duas regiões que tenha a reta em vermelho como fronteira comum terão cores opostas.

■

[1] Adjacente na geometria é um termo usado para dizer que uma figura que, colocada em sentido contrário a outra, contém lado(s) em comum(s).

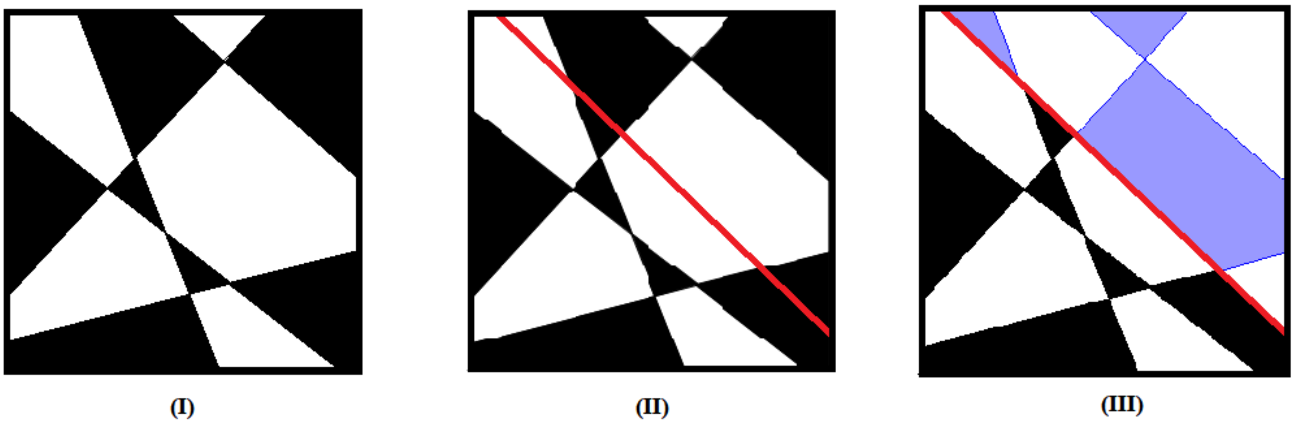


Figura 3.2: Raciocínio indutivo na demonstração do teorema das cores de um mapa de linhas.

Exemplo 3.3 Em um conjunto de 2^n moedas de ouro, temos uma moeda que é falsa. A moeda falsa pesa menos que as outras. Prove por indução, que é possível encontrar a moeda falsa com n pesagens usando uma balança de dois pratos sem usar o peso.

Prova: (**Indução Fraca**)

1. **Passo Base:** Prova de que $P(1)$ é verdadeira:
   Para $n = 1$, temos duas moedas e, portanto, basta colocar cada uma em cada prato da balança e descobrir qual é a falsa.
2. **Hipótese Indutiva:** Assumindo $P(k)$ verdadeira temos: para um conjunto de 2^k moedas são necessárias k pesagens para descobrir qual é a moeda falsa.
3. **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja, para um conjunto de 2^{k+1} moedas são necessárias $k+1$ pesagens para descobrir qual é a moeda falsa.
   Temos o seguinte:
   (I) Divida o conjunto de 2^{k+1} moedas em dois conjuntos de 2^k moedas. Coloca-se cada conjunto em um prato da balança e descobre-se em qual conjunto se encontra a moeda falsa.
   (II) O conjunto que sobrou possui 2^k moedas. Pela hipótese de indução, é possível encontrar a moeda falsa deste conjunto com k pesagens.
   A pesagem do passo (I) mais as k pesagens do passo (II) resultam em total de $k+1$. Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Segue que o enunciado é verdadeiro. ∎

Exemplo 3.4 Prove que se em n gavetas $(n \geq 1)$ forem colocados mais de n objetos, então alguma gaveta conterá mais de um objeto. [2]

Prova: (**Indução Fraca**)

1. **Passo básico:** Vamos provar que $P(1)$ é verdadeira:
   Para $n = 1$, o resultado é trivial. Se há mais que um objetivo e apenas uma gaveta, então essa gaveta terá mais de um objeto.
2. **Hipótese de indução:** Assumindo $P(k)$ verdadeira temos: para algum número $k \geq 1$ de objetos e k gavetas, alguma gaveta terá mais de um objeto.
3. **Passo Indutivo:** Queremos provar que o resultado é válido para $k+1$ gavetas contendo mais do que $k+1$ objetos.
   Temos o seguinte:
   Sejam $m > k+1$ o número de objetos. Escolha uma gaveta ao acaso:
   - Se essa gaveta contiver mais de um objeto, a proposição está provada.
   - Se a gaveta estiver vazia, nas k gavetas restantes estão acomodadas $k < k+1 < m$ objetos. Pela hipótese da indução, uma delas deve conter mais de um objeto.
   - Se a gaveta possui apenas um objeto, temos que nas k gavetas restantes estão distribuídos $(k+1)-1 < m-1$ objetos, o que, pela hipótese de indução, implica que uma das gavetas contém mais de um objeto.

   Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Segue que o enunciado é verdadeiro. ∎

[2] A versão mais famosa deste teorema é conhecida como o Princípio da Casa de Pombos e foi enunciado em 1834 pelo matemático alemão Johann Dirichlet: "Seja dada um casa de pombos com n buracos e suponha que haja m pombos querendo ocupá-los. Se $m > n$, então algum buraco deverá ser ocupado por mais de um pombo."

Exemplo 3.5 (Torre de Hanói) A Torre de Hanói é um jogo formado por n discos de diâmetros distintos com um furo no seu centro e uma base onde são fincadas três hastes. Numa das hastes, estão enfiados os discos, de modo que nenhum disco esteja sobre um outro cujo diâmetro é menor. O jogo consiste em transferir a pilha de discos para um outra haste, deslocando um disco por vez, de modo que, a cada passo, a regra acima seja observada.

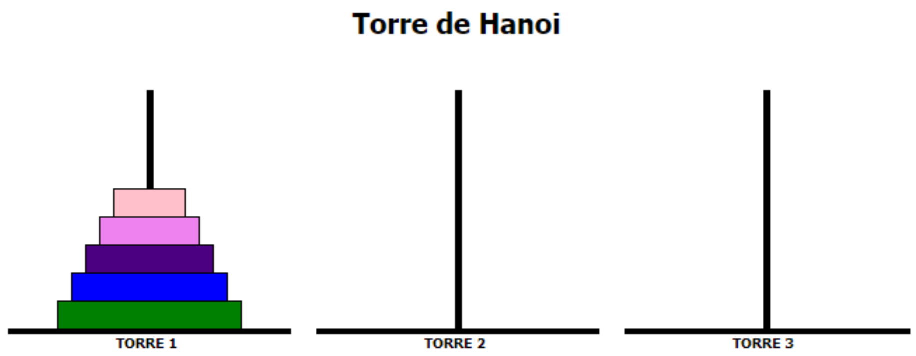


Figura 3.3: A Torre de Hanói é um quebra-cabeça que foi inventada pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883. Para resolver o problema são necessários no mínimo $2^n - 1$ movimentos, sendo n o número de discos. Fonte: http://www.somatematica.com.br/jogos/hanoi/.

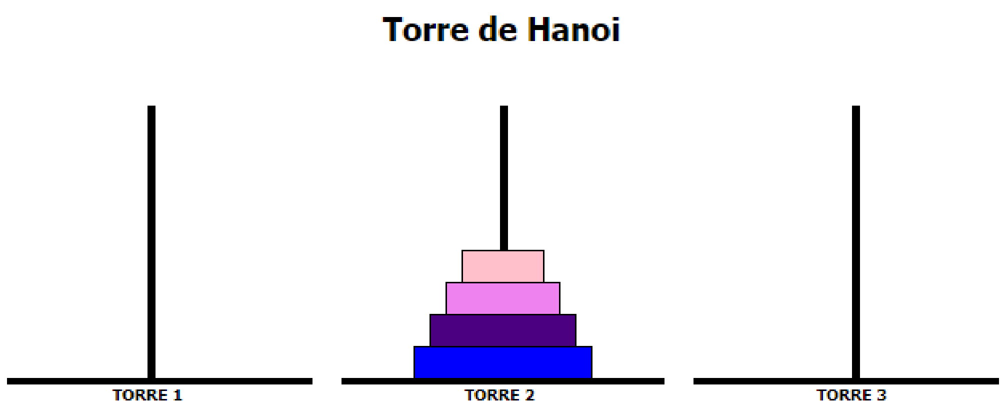
ESTE JOGO POSSUI SOLUÇÃO PARA TODO $n \in \mathbb{N}$?

Prove, usando indução matemática, que este jogo possui solução para qualquer quantidade de discos.

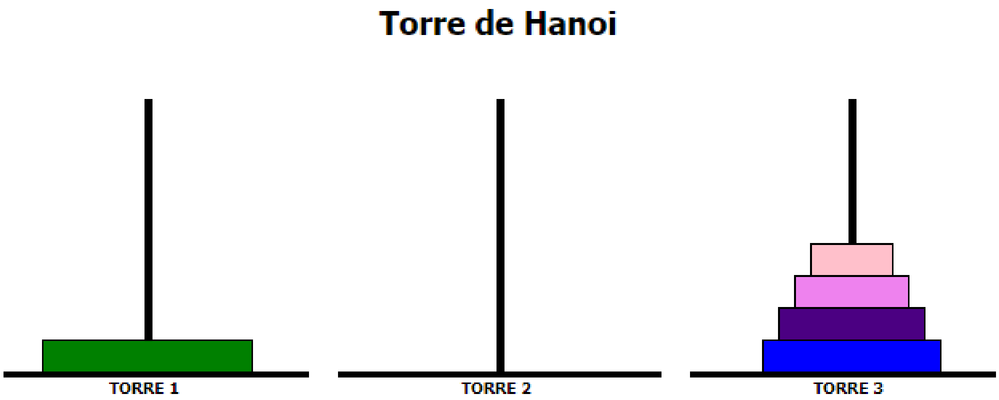
Prova: (**Indução Fraca**)

Considere a seguinte sentença $P(n)$ "o jogo com n discos possui solução".

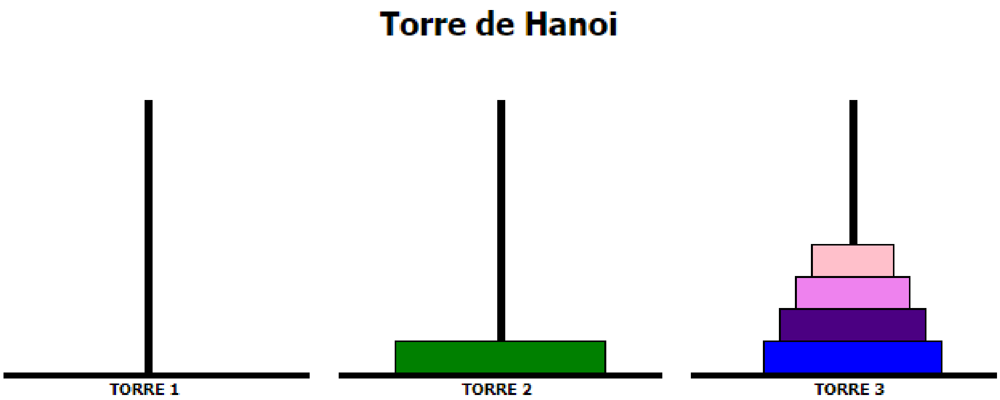
1. **Passo Base:** $P(1)$ é trivialmente verdadeira.
2. **Hipótese Indutiva:** Suponha que $P(k)$ é verdadeira, para algum k arbitrário. Ou seja, o jogo com k discos possui solução.



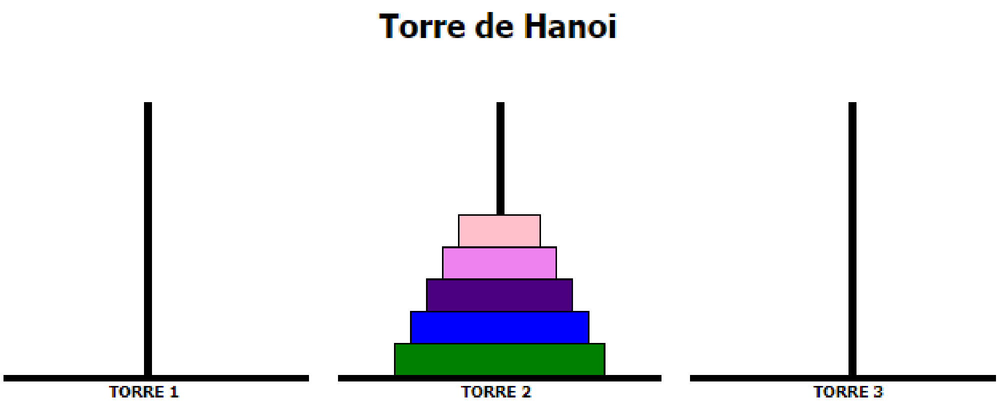
3. **Passo Indutivo:** Vamos provar que o jogo possui solução para $k+1$ discos.
   I- Vamos resolver o problema para os n discos superiores da pilha, transferindo-os para uma das hastes livres. Este passo é possível pela hipótese da indução:



II- Transfira o disco restante para a haste vazia:



III- Resolva novamente o problema para os n discos que estão juntos.



Temos então que o problema considerando $k+1$ discos também possui solução. Portanto, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

■

Exemplo 3.6 Use a indução matemática para provar que se S for um conjunto finito com n elementos, em que n é um número inteiro não negativo, então S possui 2^n subconjuntos.

Prova: (**Indução Fraca**)

Considere $P(n)$: um conjunto com n elementos que possui 2^n subconjuntos.

1. **Passo Base:** $P(0)$ é verdadeira, pois um conjunto com zero elementos (conjunto vazio) possui exatamente $2^0 = 1$ subconjunto, ou seja, ele mesmo $P(\emptyset) = \emptyset$.
2. **Hipótese Indutiva:** Vamos assumir que $P(k)$ é verdadeira, para algum k. Ou seja, assumimos que todo conjunto com k elementos possui 2^k subconjuntos.
3. **Passo Indutivo:** Usando a hipótese de indução, queremos mostrar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que todo conjunto com $k+1$ elementos possui 2^{k+1} subconjuntos.

   Suponha os seguintes conjuntos:

   - $A = \{1,2,3,4,...,k\}$
   - $B = \{1,2,3,4,...,k,k+1\}$

   Pela hipótese da indução o conjunto A possui $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$ subconjuntos.

   - Temos que $\mathcal{P}(A)$ são todos os subconjuntos de B que não possuem o elemento $k+1$.
   - Os demais subconjuntos de B são os que possuem o elemento $k+1$.
   - Resultando em mais 2^k conjuntos.

   Logo, o número de subconjuntos do conjunto B é:

$$|\mathcal{P}(B)| = |\mathcal{P}(A)| + 2^k = 2^k + 2^k = 2.2^k = 2^{k+1}$$

   Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

■

3.1.1 Exercícios Complementares

1. Prove que $n^3 - n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$
2. Prove que $2^{3n} - 1$ é divisível por 7, para todo $n \geq 1$
3. Prove que, para todo ângulo θ e todo $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, temos:

$$(cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta)^n = cos\,n\theta + i\,sen\,n\theta$$

   Dica: lembre-se das seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} cos(\alpha+\beta) &= cos\,\alpha\, cos\,\beta\ -\ sen\,\alpha\, sen\,\beta \\ sen(\alpha+\beta) &= sen\,\alpha\, cos\,\beta\ +\ cos\,\alpha\, sen\,\beta \end{aligned}$$

4. Prove que, para todo conjunto A, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ (o conjunto de todos os subconjuntos de A) tem 2^n elementos.

5. Prove que para todo polígono convexo com n vértices e $n \geq 4$, o número máximo de diagonais que podem ser traçadas é $\dfrac{n(n-3)}{2}$.
   Dica: Um polígono é dito **convexo** *quando todos os pontos de um segmento de reta que possui*

   as extremidades em seu interior também estão dentro do polígono. Caso contrário, ou seja, se for possível encontrar pelo menos um segmento de reta com as extremidades dentro do polígono e, ao mesmo tempo, um ponto fora dele, dizemos que esse polígono é **não convexo**.
6. Prove que, para todo conjunto A, se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ (o conjunto de todos os subconjuntos de A) tem 2^n elementos.
7. Seja $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Prove que $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$.

3.1.2 Erros em Demonstrações por Indução

Como nas demais técnicas estudadas é importante verificar cada passo da prova para que não se chegue a conclusões absurdas. Veja os seguintes exemplos:

Exemplo 3.7 Prove que para todo número natural $n \geq 1$, o número $n^2 + n$ é ímpar.

Prova por Indução Fraca:

- **Hipótese Indutiva:** Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum k arbitrário, ou seja, $k^2 + k$ é ímpar para algum $k \geq 1$.
- **Passo Indutivo:** Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, $(k+1)^2 + (k+1)$ é ímpar.
  Temos que:
  $$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + 2k) + 2(k+1)$$
  Temos que $2(k+1)$ é par e pela hipótese de indução que $(k^2 + 2k)$ é ímpar. Como a soma de um número par com um número ímpar é ímpar, temos que o resultado de $P(k+1)$ é ímpar.

Erro: O erro nesta demonstração se encontra na falta do passo da base da indução.

Exemplo 3.8 Seja um conjunto de n moradores da aldeia da folha. Se pelo menos uma pessoa é um ninja, então todos os demais também são.

Prova por Indução Fraca:

Vamos provar por indução que a sentença é verdadeira para todo $n \geq 1$:

- **Passo Base:** $P(1)$ é trivialmente verdadeira.Em outras palavras, temos que para $n = 1$ todos os moradores da aldeia da folha que contém um ninja é ninja.
- **Hipótese Indutiva:** Suponha que para algum k arbitrário que todos k moradores da aldeia da folha são ninjas.
- **Passo Indutivo:** Vamos provar que em todo conjunto de $k+1$ moradores, todos são ninjas.
  Para mostrar que todos os moradores da aldeia da folha $M_1, M_2, \cdots, M_k, M_{k+1}$ são ninjas, considere os seguintes conjuntos A e B ambos contendo k moradores:
  $$A = \{M_1, M_2, M_3, \cdots, M_k\} \quad \text{e} \quad B = \{M_2, M_3, \cdots, M_{k+1}\}$$

Pela hipótese da indução, todos os moradores do conjunto A são ninjas.

Alguns elementos, como por exemplo M_2, pertencem a ambos os conjuntos. O que permite concluir que os moradores do conjunto B também são ninjas. Portanto, temos que todos os moradores da aldeia da folha são ninjas.

ERRO: Precisamos tomar cuidado com a generalização na hora de fazer a demonstração, pois ela deve valer para qualquer caso. Este problema é uma adaptação do problema **Paradoxo do Cavalo**[3] criada por Hugo Silva de Matos. O erro nesta prova acontece quando fazemos a suposição de que os subconjuntos de moradores, aos quais se aplicou a suposição de indução, possuem um elemento comum. Veja que essa prova não é válida para $n = 2$, pois se o conjunto possuir apenas dois moradores, quando for dividido em dois subconjuntos, cada um dele terá apenas um elemento, não possuindo, portanto, moradores em comum.

[3] O paradoxo do cavalo é um paradoxo que surge pela falsa demonstração da sentença "Todos os cavalos são da mesma cor", para a qual se usa o princípio da indução matemática.

Aula 22: Indução Forte

BCC101- Matemática Discreta

(DECOM/UFOP)

4.1 Segundo Princípio da Indução Matemática

Em algumas situações não é possível realizar uma demonstração por indução usando apenas o Primeiro Princípio da Indução Matemática. Para esses casos é necessário o uso do Segundo Princípio da Indução Matemática ou **INDUÇÃO COMPLETA**.

Definição 4.1 (Segundo Princípio da Indução Matemática (Indução Completa)) Seja $P(n)$ uma proposição sobre os números naturais. Suponha que:

1. $P(1)$ é verdade.
2. $\forall k, [P(r)$ é verdade para todo r, $1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1)$ é verdade]

Então, $P(n)$ é verdadeira para todos os n inteiros positivos.

A diferença entre a indução fraca e a indução forte está na execução da etapa 2: enquanto na indução fraca é provado para um inteiro arbitrário $k$que $P(k+1)$ é verdadeira com base na hipótese de indução de que $P(k)$ é verdadeira, na indução forte é provado que se $P(r)$ é verdadeira para todos os inteiros r entre 1 e um inteiro arbitrário k, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

Para mostrar que $P(n)$ é verdadeira para todos os números inteiros positivos, usando a indução forte, deve-se seguir os seguintes passos:

1. **Passo Base:** Provamos $P(1)$.
2. **Hipótese Indutiva:** Supor que, para algum $k \in \mathbb{N}$ $P(1), \cdots, P(r), \cdots, P(k)$ são verdadeiros.
3. **Passo Indutivo:** Provar $P(k+1)$.

> OBSERVAÇÃO: Use a Indução Completa quando não conseguir uma demonstração direta de $P(k) \rightarrow P(k+1)$. Ou seja, quando não conseguir provar a veracidade de $P(k+1)$ sabendo que $P(k)$ é verdadeira, mas for possível provar $P(k+1)$ se souber que $P(r)$ é válido para um ou mais valores de r menores que k.

Exemplo 4.1 Prove que para todo $n \geq 2$, n é um número primo ou é um produto de números primos.

Prova: (**Prova por Indução Fraca**)

1. **Passo Base:** Prova de $P(2)$: para $n = 2$ temos que que 2 é primo. Portanto $P(2)$ é verdadeiro.
2. **Hipótese Indutiva:** Supor $P(k)$: para um k arbitrário, temos que k é primo ou produto de primos.

   Considere os seguintes casos:

   I. k **é primo** $\rightarrow$ provar que $k+1$ é primo ou produto de primos.

   II. k **é produto de primos** $\rightarrow$ provar que $k+1$ é primo ou produto de primos.

   No caso I., não podemos garantir que $k+1$ será sempre primo ou produto de primos: Veja, se $k = 2$ =2, temos que $k+1 = 3$ é primo. Porém, se $k = 5$, temos que $k+1 = 6$ que não é primo. Já no caso II., temos que $k+1$ pode ser ou não primo. Se k não é primo, necessariamente existem a e b tais que $1 < a; b < k$ e $k = ab$, em que a e b podem ser ou não números primos:

   - Se ambos forem primos, temos que k será um produto de primos.
   - Se a ou b for um produto de primos, temos que n também será produto de primos.

   Apesar das afirmações estarem corretas, não podemos utilizar este raciocínio em uma prova por indução, pois a hipótese de indução supõe que a propriedade que desejamos provar é verdadeira para um valor fixo k qualquer e não para qualquer valor.

■

Nas situações em que precisamos aplicar a hipótese de indução para mais de um valor, devemos usar a indução forte. Por sua vez, esta estratégia permite supor que a propriedade a ser demonstrada é válida para todos os números naturais menores que um valor arbitrário para k.

Prova: (**Prova por Indução Completa**)

1. **Passo Base:** Prova de $P(2)$: para $n = 2$ temos que que 2 é primo. Portanto $P(2)$ é verdadeiro.
2. **Hipótese Indutiva:** Supor $P(k)$: para um k arbitrário e para todo $r \in \mathbb{N}$ com $2 \leq r \leq k$, temos que r é primo ou é um produto de números primos.
3. **Passo Indutivo:** Provar $P(k+1)$: "$k+1$ é primo ou é um produto de dois números primos".

   Tome agora o número $k+1$:

   I- Se $k+1$ é primo, verificamos $P(k+1)$.

   II- Se $k+1$ não é primo, então ele é um número composto e pode ser escrito como $k+1 = a.b$, onde $1 < a; b < k+1$:

   - Temos que $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$.
   - Observe que a hipótese da indução pode ser aplicada sobre a e b:

* a e b são primos, então $k+1=ab$ é um produto de primos.
* a e b não são primos. Então pela Hipótese indutiva um dos dois (ou ambos) são produtos de primos. Logo, $k+1=ab$ é um produto de primos.

Logo, a e b são primos ou são produtos de números primos, verificando $P(k+1)$.

Portanto, temos que a proposição $P(n)$ é verdade para todo $n \geq 2$.

■

Exemplo 4.2 Prove que todo inteiro $n \geq 8$, pode ser representado pela somas de números 3 e 5.

Prova: (**Prova por Indução Completa**)

1. **Passo Base:** $P(8)$ é verdadeiro. Temos que $8=3+5$.
   Vamos estabelecer dois casos adicionais: $P(9)$ e $P(10)$:
   - $P(9): \quad 9=3+3+3$
   - $P(10): \quad 10=5+5$
2. **Hipótese Indutiva:** Suponha $P(r)$:"para qualquer $r \in \mathbb{N}$ com $8 \leq r \leq k$, temos que r resulta da soma de 3s e 5s.
3. **Passo Indutivo:** Vamos provar $P(k+1)$: "$k+1$ pode ser representado pela soma de 3s e 5s".
   Vamos supor que $k+1$ é pelo menos 11 ($k+1 \geq 11$), já que sabemos da veracidade de $P(8), P(9)$ e $P(10)$.
   - Subtraindo 3 dos dois lados de $k+1 \geq 11$:
   $$(k+1)-3 \geq 11-3 \quad \Rightarrow k-2 \geq 8$$
   - Então $k-2$ é pode ser um valor legítimo para r. E pela hipótese da indução $P(k-2)$ é verdade.
   - Então, $k-2$ pode ser escrito como a soma de números iguais a 3 e 5.
   - Adicionando mais um 3 ao número $k-2$, obtemos $k+1$, que também pode ser escrito como a soma de números 3 e 5.
   - Verificamos que $P(k+1)$ é verdade.

Portanto, temos que a proposição $P(n)$ é verdade para todo $n \geq 8$. ■

OBSERVAÇÃO: No exemplo 4.2, para verificar o passo $P(k+1)$ foi subtraído 3 de $k+1$. E para que a hipótese da indução seja válida é necessário ter $(k+1)-3 \geq 8$, ou seja, $k+1 \geq 11$. Assim, temos que não é possível usar a hipótese indutiva para verificar $P(9)$ e $P(10)$, mas estes valores podem ser verificados diretamente.

Exercício: Prove que qualquer quantia maior ou igual a 2 pode ser obtida pela soma de números 2 e 3.

4.2 Princípio da Boa Ordenação

A Indução Fraca e Indução Forte são válidas e seguem de uma propriedade dos números naturais conhecida como o **Princípio da Boa Ordenação**. Como consequência temos que os três princípios são equivalentes e a validade de cada um deles pode ser comprovada a partir da demonstração de cada um dos outros dois. Assim, aceitar qualquer um deles como verdadeiro implica que os outros dois também são.

Temos que os seguintes condicionais são verdadeiros:

$$\text{Indução Forte} \rightarrow \text{Indução Fraca}$$
$$\text{Indução Fraca} \rightarrow \text{Princípio da Boa Ordenação}$$
$$\text{Princípio da Boa Ordenação} \rightarrow \text{Indução Forte}$$

O Princípio da Boa Ordenação diz que **toda coleção de inteiros não negativos que contém algum elemento tem um menor elemento**. Formalmente podemos definir o seguinte teorema:

Teorema 4.2.1 (Princípio da Boa Ordenação (PBO)) Seja S um conjunto de números reais. Um elemento mínimo de S é um $y \in S$ tal que para todo $x \in S$, $y \leq x$. O Princípio da Boa Ordenação diz que **Todo subconjunto não vazio S de $\mathbb{Z}+$ tem um elemento mínimo.**

OBSERVAÇÃO: Note que o teorema acima acima não vale para subconjuntos de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.3 **Algoritmo da Divisão de Euclides:** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}+$, com $b \neq 0$. Então existem $q, r \in \mathbb{Z}+$ tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < b$.

Prova: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}+$, com $b \neq 0$. Considere S como o conjunto de números inteiros não negativos na forma $a - bq$

$$S = \{a - bq \mid q \in \mathbb{Z}+,\ a - bq \geq 0\}$$

Observe que:

- $S \subseteq \mathbb{Z}+$ pois $a - bk \geq 0$;
- $S \neq \emptyset$ pois contém o elemento $a = a - b0$.

Então, pelo PBO, o conjunto S tem um elemento mínimo $r = a - bq$.
O número inteiro r não é negativo ($r = a - bq \geq 0$) e precisamos provar que $r < b$. Se ele não for, então existe um elemento não negativo menor que ele em S.
Suponha que $r \geq b$: Subtraindo b de $r = a - bq \geq 0$ temos:

$$r - b = a - bq - b \geq 0$$

$$r - b = a - b(q + 1) \geq 0$$

Então, temos que $r - b$ também está em S.
Como $b > 0$ temos que $r - b < r$. Isso contraria a escolha de r como menor elemento de S.

Portanto $r < b$.

4.3 Resumo

Seja $P(n)$ uma proposição relativa aos números naturais. Então, a prova de que $P(n)$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq a$, pode ser feita usando:

Primeiro Princípio da Indução (Indução Fraca)

1. **Passo básico:** Prove que $P(a)$.
2. **Hipótese da indução:** Suponha $P(k)$.
3. **Passo indutivo:** Prove $P(k+1)$.

Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $P(n)$ é verdadeira.

Segundo Princípio da Indução (Indução Completa)

1. **Passo básico:** Prove que $P(a)$.
2. **Hipótese da indução:** Suponha $P(r)$ é verdadeira para todo $1 \leq r \leq k$.
3. **Passo indutivo:** Prove $P(k+1)$.

Então, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ temos que $P(n)$ é verdadeira.

4.3.1 Exercícios Complementares

1. O DECOM está patrocinando uma competição de quebra-cabeças. Os quebra-cabeças são formados juntando-se duas peças para formar um pequeno bloco, adicionando-se uma peça a um bloco já formado ou juntando-se dois blocos. Cada um desses movimentos é considerando um passo da solução. Use o segundo princípio da indução para provar que o número de passos necessários para se completar um quebra-cabeça com n peças é igual a $n-1$.

2. Suponha uma sequência definida pela seguinte regra: $\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_1 = 16 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \;\; \forall n \geq 2. \end{cases}$

   Prove que $a_n = 5 \times 2^n + 2 \times 3^n$ para todo $n \geq 0$.

3. Suponha uma sequência definida pela seguinte regra: $\begin{cases} P_0 = 200 \\ P_1 = 220 \\ P_n = 3P_{n-1} - 2P_{n-2}, \;\; \forall n \geq 2. \end{cases}$

   Prove que $P_n = 5 \times 2^{n+2} + 180$ para todo $n \geq 2$.

4. Os Números de Lucas $A_1, A_2, \cdots$, são definidos pela seguinte regra $\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 3 \\ A_n = A_{n-1} + A_{n-2}, \;\; \forall n \geq 3. \end{cases}$

   Prove que $A_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ para todo $n \geq 1$.

Referências Bibliográficas

[1] MENEZES, P. B. *Matemática Discreta para a Computação e Informática*. 4ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

[2] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. 14ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA: Projeto Euclides, 2016. v. 1.

[3] HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. Virginia: Richard Hammack, 2013. v. 1.

[4] DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

[5] RIBEIRO, R. G. *Notas de Aula de Matemática Discreta*. [S.l.]: Universidade Federal de Ouro Preto, 2016.

Respostas dos Exercícios Complementares

Aula T

1.2.1 - Somatório

Exercícios Complementares

1. (a) $2+3+4+5+6=20$
   (b) $1(2)=2$
   (c) R: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$
   (d) $(1+3)+(0+3)+(1+3)=11$
2. (a) $2+3-2+1+0=4$
   (b) $2=2$
   (c) $-2+1=-1$
3. (a) $(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n=-2+2^2-2^3+\cdots+(-1)^n2^n$
   (b)
   (c) $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}$
   (d)
4. (a) $\sum_{i=1}^{k+1} i(i!)=\sum_{i=1}^{k} i(i!)+(k+1)(k+1)!$
   (b)
   (c)
5. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
6. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)
   (f)
7. (a) Quando $k=0$ temos que $i=1$. Quando $k=5$ temos que $i=6$. Então, quando $i=k+1$, então $k=i-1$. Assim:
   $$k(k-1)=(i-1)((i-1)-1)=(i-1)(i-2)$$

Logo: $\sum_{k=0}^{5} k(k-1) = \sum_{i=1}^{6} (i-1)(i-2)$

(b)

(c)

1.2.2 - Produtorio

Exercícios Complementares

1. (a) $1.4.9.16.25 = 14400$
   (b) $1(-1)(1)(-1)(1) = 1$
   (c) x
2. (a) $(2)(3)(-2)(1)(0) = 0$
   (b) $2 = 2$
   (c) $(-2)(1) = -2$
3. (a)
   (b)
4. (a)
   (b)
5. (a)

1.2.3 - Fatorial

Exercícios Complementares

1. (a)
   (b)
   (c)
   (d)
   (e)

1.2.4 - Coeficiente Binomial

Exercícios Complementares

1. (a)
   (b)
   (c)

Aula 20

2.2.2 - Princípio da Indução Matemática

1. **Prova por Indução Fraca:**

- **Base** Provar $P(n)$ para $(n=1)$:
$$1 = \frac{1(1+1)(1+2)}{6} = 1.$$
Portanto, $P(1)$ é verdadeira.
- **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}^*$, que:
$$1+3+6+9+...+\frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}$$
.
- **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja:
$$1+3+6+9+...+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$$
Temos que:
$$\begin{aligned} 1+3+6+9+ & ...+\frac{k(k+1)}{2}+\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\ & = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2} && \text{(pela hipótese da Indução.)} \\ & = (k+1)(k+2)\left(\frac{k}{6}+\frac{1}{2}\right) && \text{(Distrib. da multi. sobre a adição.)} \\ & = (k+1)(k+2)\frac{k+3}{6} \\ & = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} \end{aligned}$$
Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}^*$, vale que $1+3+6+9+...+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

2. **Prova por Indução Fraca:**
- **Base** Provar $P(n)$ para $(n=1)$:
$$1 \times 3 = \frac{1(1+1)(2(1)+7)}{6} = 3.$$
Portanto, $P(1)$ é verdadeira.
- **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}^*$, que:
$$1\times 3+2\times 4+3\times 5+...+k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$
.
- **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja:
$$1\times 3+2\times 4+3\times 5+...+k(k+2)+(k+1)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+7)}{6}$$

. Temos que:

$$
\begin{aligned}
1\times 3+2\times 4+3\times 5+ \quad & \ldots ++k(k+2)+(k+1)(k+3) = \\
&= \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3) \qquad \text{(pela hipótese da Indução.)} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+7)+6(k+1)(k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+7)+6(k+3)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+7)+6k+18]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+7)+2k+4k+18]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+7+2)+4k+18]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+9)+2(2k+9)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+2+7)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+7)}{6}
\end{aligned}
$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}^*$, vale que $1\times 3+2\times 4+3\times 5+\ldots+n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

3. **Prova por Indução Fraca:**
   - **Base** Provar $P(n)$ para $(n=1)$:

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1 = 1^2$$

   . Portanto, $P(1)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}^*$, que: $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$.
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja, $\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$.

   Temos que:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \textstyle\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+2(k+1)-1 \\
&= k^2+2(k+1)-1 \qquad \text{(pela H. I.)} \\
&= k^2+2k+1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}^*$, vale que $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

4. **Prova por Indução:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 0)$:

$$\sum_{i=0}^{0} a^i = a^0 = 1 = \frac{a^{0+1}-1}{a-1}$$

   Portanto, $P(0)$ é verdadeira.

   - **Hipótese da Indução:** Seja $k \geq 0$ arbitrário e suponha $\sum_{i=0}^{k} a^i = \frac{a^{k+1}-1}{a-1}$.
   - **Passo Indutivo:**Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja:

$$\sum_{i=0}^{k+1} a^i = \frac{a^{k+2}-1}{a-1}$$

   Temos:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=0}^{k+1} a^i & = & \sum_{i=0}^{k} a^i + a^{k+1} & \\ & = & \frac{a^{k+1}-1}{a-1} + a^{k+1} & \text{(pela hipótese indutiva)} \\ & = & \frac{a^{k+1}(a-1)+a^{k+1}-1}{a-1} & \\ & = & \frac{a^{(k+1)+1}-1}{a-1} & \end{array}$$

   Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 0$, vale que $\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

5. **Prova por Indução:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 3)$: $3^2 = 9 \geq 2.3 + 3$.

     Portanto, $P(3)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}$, que: $k^2 \geq 2k + 3$.
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja, $(k+1)^2 \geq 2(k+1) + 3$.

     Temos que:

$$\begin{array}{rcll} (k+1)^2 & = & k^2 + 2k + 1 & \\ & \geq & (2k+3) + 2k + 1 & \text{(pela hipótese indutiva.)} \\ & \geq & (2k+2) + 3 & \text{(pois } k \geq 3\text{)} \\ & = & 2(k+1) + 3 & \end{array}$$

   Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 3$, vale que $n^2 \geq 2n + 3$.

6. **Prova por Indução:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $n = 2$ (menor n para o qual a propriedade é válida):

     $2^2 = 4 > 3 = 2 + 1$. Portanto, $P(2)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$, que: $k^2 > k + 1$.
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja, $(k+1)^2 > (k+1) + 1$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2+2k+1 && \text{(produto notável.)}\\
&> k+1+2k+1 && \text{(pela hipótese da indução.)}\\
&\geq (k+1)+1 && \text{(pois } k \text{ é natural.)}
\end{aligned}$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, vale que $n^2 > n+1$.

7. **Prova por Indução:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 5)$:

     $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Portanto, $P(5)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}$, que: $2^k > k^2$.
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar que $2^{k+1} > (k+1)^2$.

     Temos que:

$$\begin{aligned}
2^{(k+1)} &= 2.2^k\\
&> 2.k^2 && \text{(pela hipótese indutiva.)}\\
&> k^2+2k+1 && \text{(pois } k^2 > 2k+1 \text{, para } k \geq 5)\\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

     Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Logo, para $n \in \mathbb{N}$, vale que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$

8. **Prova por Indução:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 1)$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$$

     Portanto, $P(1)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}$, que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{k}.$$

   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i^2} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\\
&\leq 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} && \text{(pela hipótese indutiva)}\\
&= 2 - \frac{(k+1)^2 - k}{k(k+1)^2}\\
&= 2 - \frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\\
&\leq 2 - \frac{k^2+k}{k(k+1)^2}\\
&= 2 - \frac{k(k+1)}{k(k+1)^2}\\
&= 2 - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, vale que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

9. **Prova por Indução:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 4)$:

     $4! = 24 > 16 = 4^2$. Portanto, $P(4)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Seja $k \geq 4$ arbitrário e suponha $k! > k^2$.
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja, $(k+1)! > (k+1)^2$.

     Temos:

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)k! \\
&> (k+1)k^2 && \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= k^2 + k^3 \\
&> k^2 + 2k + 1 && \text{(pois } k^3 \geq 2k+1 \text{ para } k \geq 4) \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

     Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Logo, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$, vale que $n! > n^2$.

Aula 21

3.1.1 - Princípio da Indução Matemática

1. **Prova por Indução Fraca:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 1)$: $1^3 - 1 = 0 = 0.3$, que é divisível por 3.

     Portanto, $P(1)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}$, que $k^3 - k$ divisível por 3, isto é, $k^3 - k = 3m$, para algum inteiro não negativo m.
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar que $(k+1)^3 - (k+1)$ divisível por 3.

     Temos que:

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3 - (k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 \\
&= (k^3 - k) + 3(k^2 + k) && \text{(associatividade da soma)} \\
&= 3m + 3(k^2 + k) && \text{(pela hipótese indutiva)} \\
&= 3(m + k^2 + k)
\end{aligned}
$$

     Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Logo, para $n \in \mathbb{N}$ vale que $n^3 - n$ é divisível por 3.

2. **Prova por Indução Fraca:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 1)$:

     $2^{3.1} - 1 = 8 - 1 = 7$, que é divisível por 7. Portanto, $P(1)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Seja $k \geq 1$ arbitrário e suponha $2^{3k} - 1$ divisível por 7, isto é, $2^{3k} - 1 = 7m$, para algum inteiro não negativo m.
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja, $2^{3(k+1)} - 1$ divisível por 7.

Temos:

$$\begin{aligned} 2^{3(k+1)}-1 &= 2^{3k}.2^3-1 \\ &= 2^{3k}.8-1 \\ &= 2^{3k}.(7+1)-1 \\ &= 7.2^{3k}+(2^{3k}-1) \\ &= 7.2^{3k}+7m \qquad \text{(pela hipótese da indução)} \\ &= 7(2^{3k}+m) \end{aligned}$$

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, vale que $2^{3n}-1$ é divisível por 7.

3. **Prova por Indução Fraca:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n=0)$:

     $$(cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta)^0 = 1$$
     $$cos\,0\theta + i\,sen\,0\theta = cos\,0 + i\,sen\,0 = 1 + i\,0 = 1$$

     Portanto, $P(0)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Seja $k \geq 0$ arbitrário e suponha $(cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta)^k = cos\,k\theta + i\,sen\,k\theta$
   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja,

     $$(cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta)^{k+1} = cos\,(k+1)\theta + i\,sen\,(k+1)\theta$$

     Temos:

     $$\begin{aligned} (cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta)^{k+1} &= (cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta)^k\,(cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta) \\ &= (cos\,k\theta\ +\ i\,sen\,k\theta)\,(cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta) \text{ (pela H.I.)} \\ &= cos\,k\theta\ .\ cos\,\theta +\ i\,sen\,k\theta\ .\ cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta\ .\ cos\,k\theta\ -\ sen\,k\theta\ .\ sen\,\theta \\ &= (cos\,k\theta\ .\ cos\,\theta\ -\ sen\,k\theta\ .\ sen\,\theta) + i\,(sen\,k\theta\ .\ cos\,\theta\ +\ sen\,\theta\ .\ cos\,k\theta) \\ &= cos\,(k+1)\theta\ +\ i\ sen\,(k+1)\theta \end{aligned}$$

     Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Logo, para todo ângulo θ e todo $n \in \mathbb{Z}$ e $n \geq 0$, vale que $(cos\,\theta\ +\ i\,sen\,\theta)^n = cos\,n\theta + i\,sen\,n\theta$.

4. **Prova por Indução Fraca:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n=0)$:

     Nesse caso, $A = \emptyset$ e $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

     Portanto, se A tem 0 elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem $1 = 2^0$ elementos.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha para um k arbitrário que se A tem k elementos então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^k elementos.
   - **Passo Indutivo:** Queremos provar $P(k+1)$, ou seja, que se A tem $k+1$ elementos então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^{k+1} elementos.

     Considere um conjunto A com $k+1$ elementos e retire de A um elemento $a$arbitrário. Como $A-\{a\}$ tem k elementos, temos, pela hipótese de indução, que $\mathcal{P}(A-\{a\})$ tem 2^k elementos.

     O conjunto de todos os subconjuntos de A pode ser dividido em dois grupos:

     1) os subconjuntos que não contém a, e

     2) os subconjuntos que contêm a.

Os conjuntos do primeiro grupo são, claramente, todos os subconjuntos de $A - \{a\}$. Os conjuntos do segundo grupo são todos aqueles que podemos obter tomando um subconjunto de $A - \{a\}$ e adicionando a este o elemento a. Portanto, o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é igual a 2 vezes o número de elementos de $\mathcal{P}(A - \{a\})$, isto é, $2.2^k = 2^{k+1}$.

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$, vale que se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

5. **Prova por Indução Fraca**

(a) **Passo básico:** Prova da veracidade de $P(4)$:

Se $n = 4$ temos que o polígono é um quadrilátero. Portanto possui apenas 2 diagonais. Substituindo $n = 4$ na equação temos:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4(1)}{2} = 2$$

(b) **Hipótese de indução:** Suponha $P(k)$ verdadeiro: Considere que o número de diagonais de um polígono com k vértices é:

$$\frac{k(k-3)}{2}$$

(c) **Passo Indutivo:** Queremos provar que o número de diagonais para um polígono com $k+1$ vértices é igual a $\frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Dos conhecimentos prévios de geometria, sabemos que se adicionarmos mais um vértice ao polígono com k vértices, novas diagonais poderão ser traçadas do vértice extra a cada um dos outros vértices não adjacentes a ele, o que fornece um total de $k-2$ novas diagonais, veja a Figura 5.1.

Além disso, veja a figura novamente, temos que um dos lados do polígono com k vértices passa a ser uma diagonal do polígono com $k+1$ vértices, tal fato está representado pela diagonal na cor vermelha.

Então, com a adição de um novo vértice, temos um total de uma adição de $k-1$ diagonais. Logo:

$$\frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3)+2(k-1)}{2} = \frac{k^2-3k+2k-2}{2} = \frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

O que completa o passo indutivo. Portanto, o teorema é verdadeiro para todo $n \geq 4$

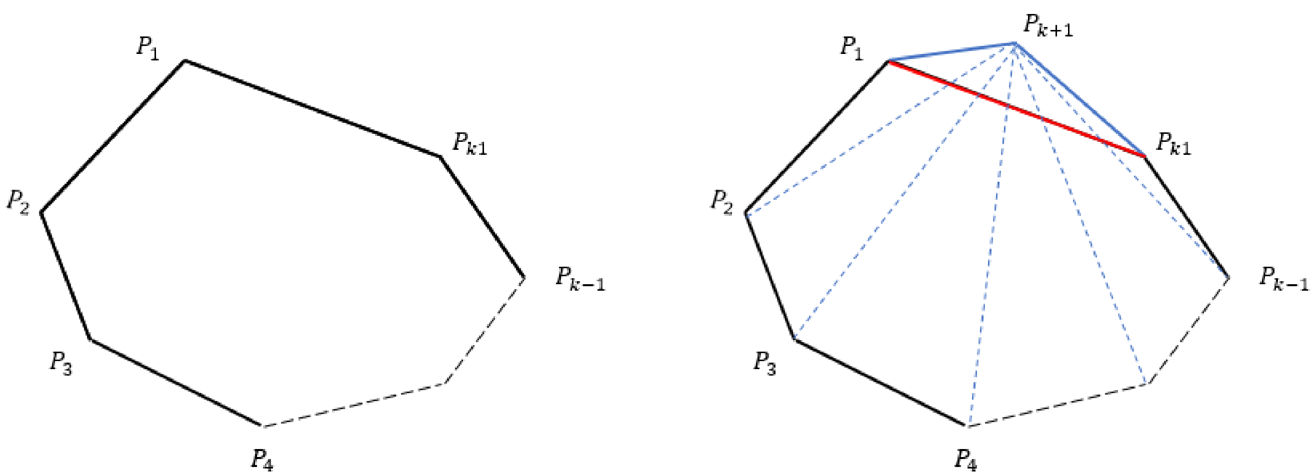


Figura 5.1: Exemplo do cálculo de diagonais de um polígono convexo.

6. **Prova por Indução Fraca:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 0)$:
     Nesse caso, $A = \emptyset$ e $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
     Portanto, se A tem 0 elementos, $\mathcal{P}(A)$ tem $1 = 2^0$ elementos.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha para um k arbitrário que se A tem k elementos então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^k elementos.
   - **Passo Indutivo:** Queremos provar $P(k+1)$, ou seja, que se A tem $k+1$ elementos então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^{k+1} elementos.
     Considere um conjunto A com $k+1$ elementos e retire de A um elemento $a$arbitrário. Como $A - \{a\}$ tem k elementos, temos, pela hipótese de indução, que $\mathcal{P}(A - \{a\})$ tem 2^k elementos.
     O conjunto de todos os subconjuntos de A pode ser dividido em dois grupos:
     1) os subconjuntos que não contém a, e
     2) os subconjuntos que contêm a.
     Os conjuntos do primeiro grupo são, claramente, todos os subconjuntos de $A - \{a\}$. Os conjuntos do segundo grupo são todos aqueles que podemos obter tomando um subconjunto de $A - \{a\}$ e adicionando a este o elemento a. Portanto, o número de elementos de $\mathcal{P}(A)$ é igual a 2 vezes o número de elementos de $\mathcal{P}(A - \{a\})$, isto é, $2.2^k = 2^{k+1}$.
     Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Logo, para $n \in \mathbb{N}$, vale que se A tem n elementos, então $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

7. **Prova por Indução Fraca:**
   - **Base:** Provar $P(n)$ para $(n = 1)$:

     $$\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = \frac{1}{1} = 1 = 2 - 1 = (1+1)H_1 - 1$$

     Portando, $P(1)$ é verdadeira.
   - **Hipótese da Indução:** Suponha, para $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$ que:

     $$\sum_{i=1}^{k} H_i = (k+1)H_k - k$$

   - **Passo Indutivo:** Precisamos provar $P(k+1)$, ou seja:

     $$\sum_{i=1}^{k+1} H_i = (k+2)H_{k+1} - (k+1)$$

     Temos

     $$\begin{aligned}
     \textstyle\sum_{i=1}^{k+1} H_i &= \textstyle\sum_{i=1}^{k} H_i + H_{k+1} && \{\text{pela definição de somatório}\} \\
     &= (k+1)H_k - k + H_{k+1} && \{\text{pela hipótese de indução}\} \\
     &= (k+1)(H_{k+1} - \tfrac{1}{k+1}) - k + H_{k+1} && \{\text{pela definição de } H_n\ \} \\
     &= (k+1)H_{k+1} - 1 - k + H_{k+1} \\
     &= (k+2)H_{k+1} - (k+1)
     \end{aligned}$$

     Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Logo, para $n \in \mathbb{N}$, vale que $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$.

Aula 22

4.3.1 - Segundo Princípio da Indução Matemática

1. **Prova por Indução Completa:**
   (a) **Passo Base:** Vamos provar que $P(1)$ é verdadeira: um quebra-cabeça com 1 peça precisa de 0 passo para ser completado.
   (b) **Hipótese Indutiva:** Suponha que qualquer bloco com $1 \leq r \leq k$ precisa de $r-1$ passos para ser completado.
   (c) **Passo Indutivo:** Considere um quebra-cabeça com $k+1$ peças.
      - O último passo para completar o quebra-cabeça consiste em juntar dois blocos com r_1 e r_2 peças, respectivamente, em que $1 \leq r_1 \leq k$, $1 \leq r_2 \leq k$ e $r_1 + r_2 = k+1$
      - Pela hipótese da indução, esses blocos precisam de $r_1 - 1$ e $r_2 - 1$ passos para serem completados, respectivamente.
      - O número total de passos para completar o quebra-cabeças é:

$$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + 1 = (r_1 + r_2) - 1 = k$$

   Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

   Portanto, temos que a sentença é válida.

2. **Prova por Indução Completa:** Seja $P(n)$ a sentença aberta $a_n = 5 \times 2^n + 2 \times 3^n$.
   (a) **Passo Base:** $a_0 = 7$ e $P(0) = a_0 = 5 \times 2^0 + 2 \times 3^0 = 5 + 2 = 7$. Portanto, $P(0)$ é verdadeiro.
   (b) **Hipótese Indutiva:** Supor $P(k): \ \forall\, r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r \leq k$ temos que $P(k): a_k = 5 \times 2^k + 2 \times 3^k$.
   (c) **Passo Indutivo:** Provar $P(k+1): a_{k+1} = 5 \times 2^{k+1} + 2 \times 3^{k+1}$.
   Pela definição, temos que:

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 5a_{k+1-1} - 6a_{k+1-2} && \text{pela definição} \\
&= 5a_k - 6a_{k-1} && P(k), P(k-1)\text{se verificam pela Hipótese indutiva} \\
&= 5\left[5 \times 2^k + 2 \times 3^k\right] - 6\left[5 \times 2^{k-1} + 2 \times 3^{k-1}\right] \\
&= 25 \times 2^k + 10 \times 3^k - 30 \times 2^{k-1} - 12 \times 3^{k-1} \\
&= 25 \times 2^k + 10 \times 3^k - 30 \times \tfrac{2^k}{2} - 12 \times \tfrac{3^k}{3} \\
&= 25 \times 2^k + 10 \times 3^k - 15 \times 2^k - 4 \times 3^k \\
&= 10 \times 2^k + 6 \times 3^k \\
&= 5 \times 2 \times 2^k + 2 \times 3 \times 3^k \\
&= 5 \times 2^{k+1} + 2 \times 3^{k+1} && \text{verificandoP(k+1).}
\end{aligned}$$

   Portanto, temos que a sentença é válida.

3. **Prova por Indução Completa:** Seja $P(n)$ a sentença aberta $P_n = 5 \times 2^{n+2} + 180$.
   (a) **Passo Base:**
      - $P_2 = 3P_{2-1} - 2P_{2-2} = 3P_1 - 2P_0 = 3(220) - 2(200) = 260$

- $P(2) = 5 \times 2^{2+2} + 180 = 80 + 180 = 260$

  Portanto, $P(2)$ é verdadeiro.

(b) **Hipótese Indutiva:** Supor $P(k)$: $\forall\, r \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq r \leq k$ temos que $P(k) : P_k = 5 \times 2^{k+2} + 180$.

(c) **Passo Indutivo:** Provar $P(k+1) : P_{k+1} = 5 \times 2^{k+2+1} + 180$.

Pela definição, temos que:

$$
\begin{aligned}
P_{k+1} &= 3P_{k+1-1} - 2P_{k+1-2} && \text{pela definição} \\
&= 3P_k - 2P_{k-1} && P(k), P(k-1) \text{se verificam pela Hipótese indutiva} \\
&= 3\left[5 \times 2^{k+2} + 180\right] - 2\left[5 \times 2^{k-1+2} + 180\right] \\
&= 3\left[5 \times 2^{k+2} + 180\right] - 2\left[5 \times \frac{2^{k+2}}{2} + 180\right] \\
&= 3(5 \times 2^{k+2}) + 3(180) - 2(5 \times \tfrac{2^{k+2}}{2}) - 2(180) \\
&= 3(5 \times 2^{k+2}) + 3(180) - (5 \times 2^{k+2}) - 2(180) \\
&= (5 \times 2^{k+2})(3-1) + 180(3-2) \\
&= (5 \times 2^{k+2})(2) + 180 \\
&= 5 \times 2^{k+2+1} + 180 && \text{verificandoP(k+1).}
\end{aligned}
$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, temos que a sentença é válida.

4. **Prova por Indução Completa:**

Seja $P(n)$ a sentença aberta "$A_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$."

(a) **Passo Base:**

- $P(1)$ é verdade pois $A_1 = 1 < \frac{7}{4}$.
- $P(2)$ é verdade pois $A_2 = 3 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.

(b) **Hipótese Indutiva:** Suponha que, para algum inteiro, $k \geq 2$, $P(i)$ é verdade para todo $i \in \mathbb{N}$ com $1 \leq i \leq k$.

(c) **Passo Indutivo:** Vamos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$

Como $k+1 \geq 3$, pela definição temos que $A_{k+1} = A_k + A_{k-1}$.

Pela H. I. temos:

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4} + 1\right)\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \frac{11}{4}\left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}$$

Como $\frac{11}{4} < 3 < (\frac{7}{4})^2$, temos que:

$$A_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^2 \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$$

Logo, $P(k+1)$ é verdadeira.

Portanto, temos que a sentença é válida.