Universidade Federal de Ouro Preto
Departamento de Computação
Matemática Discreta- BCC101

Notas de Aula:
Lógica Proposicional

Prof^{a}. Dayanne G. Coelho

Ouro Preto - MG
2017

Aula 9: Lógica dos Predicados

BCC101- Matemática Discreta
(DECOM/UFOP)

1.1 Lógica dos Predicados

A **Lógica dos Predicados** pode ser usada para expressar o significado de um amplo grupo de proposições na linguagem matemática de modo que nos permita raciocinar e relacionar objetos a uma determinada propriedade. Para estabelecer o conceito de predicado, considere as seguintes frases declarativas:

- Todo computador do Lab13 está funcionando perfeitamente.
- Para todo x, temos que $x > 0$.
- Existe um aluno na turma de BCC101 que não foi aprovado em Introdução a Programação.
- Existe um x, tal que $x - 5 > 3$.

A lógica proposicional não permite simbolizar essas sentenças de forma adequada usando apenas proposições, parênteses e conectivos lógicos. Nessas sentenças, diferente do que foi estudado até o momento, são introduzidos novos conceitos: elementos de um certo conjunto (**universo do discurso**); predicados (que representam as propriedades das variáveis), quantificadores (indicados pelas expressões "**todo**", "**para todo**", "**existe um**") e variáveis (ou **parâmetros**).

1.1.1 Predicados

Os predicados, ou **funções proposicionais**, descrevem propriedades que os elementos do universo de discurso podem ou não possuir. No cálculo dos predicados os elementos de análise correspondem às funções proposicionais.

Definição 1.1 (Sentença aberta) Seja $\mathbb{U} \neq \emptyset$ o universo de discurso. **Sentença aberta** ou **função proposicional** é uma expressão $P(x)$ que depende da variável $x \in \mathbb{U}$.

Uma sentença aberta são frases declarativas que:

- contém uma ou mais variáveis; e
- não é uma proposição; e
- torna-se uma proposição apenas quando suas variáveis são substituídas por constantes que pertencem a $\mathbb{U}$.

Exemplo 1.1 sentenças abertas:

1. $x > 3$
2. $x = y + 3$
3. *O computador x do Lab13 está funcionando perfeitamente.*
4. y é uma cidade.

A declaração (1) pode ser dividida em duas partes: o sujeito da declaração (variável x) e uma propriedade do sujeito P ("é maior que 3") que pode ser representada simbolicamente por $P(x)$. Note que, não é possível dizer se esta sentença é verdadeira ou falsa.

A declaração $P(x)$ refere-se ao valor da função proposicional P na variável x. $P(x)$ só recebe valor verdade quando é atribuído valores para x.

Definição 1.2 (Predicado) O predicado é uma sentença $P(x)$ que se torna uma proposição quando é atribuído a x um valor do universo de discurso. O predicado terá valor verdadeiro ou falso dependendo do valor assumido por suas variáveis.

Exemplo 1.2 Considere os seguintes predicados:

1. $P(x) : x > 3$
   - Obtemos a proposição $P(4)$ substituindo $x = 4$ na declaração. Assim, $P(4)$ representa a proposição "$4 > 3$" e possui valor verdadeiro.
   - Obtemos a proposição $P(2)$ substituindo $x = 2$ na declaração. Assim, $P(2)$ representa a

proposição "$2 > 3$" e possui valor falso.

2. "$x = y + 3$"
   - A afirmação possui mais de uma variável.
   - Sua representação simbólica é dada por $Q(x,y)$, onde x e y são as variáveis e Q é o predicado.
   - Para $x = 1$ e $y = 2$ o valor verdade de $Q(1,2)$ é falso, pois a proposição $Q(1,2)$ significa que "$1 = 2 + 3$".
   - Para $x = 3$ e $y = 0$ o valor verdade de $Q(3,0)$ é verdadeiro, pois a proposição $Q(3,0)$ significa que "$3 = 0 + 3$".
3. $A(c,n)$ é a representação de "O computador c está conectado à rede n". Supondo que o computador $COM23$ está conectado à rede $UFOP2$, mas não a rede $UFOP1$, os valores verdade das proposições $A(COM23, UFOP1)$ e $A(COM23, UFOP2)$ são:
   - $A(COM23, UFOP1)$ é falsa, pois $COM23$ não está conectado à rede $UFOP1$.
   - $A(COM23, UFOP1)$ é verdadeira, pois $COM23$ está conectado à rede $UFOP2$.

Os predicados quando envolvem propriedades de uma única variável são chamados de **predicados unários**, de duas variáveis são chamados de **predicados binários**, de três variáveis são chamados de **predicados ternários** e quando envolvem propriedades de n variáveis são chamados de **predicados n-ários**.

Definição 1.3 Uma afirmação que envolve n variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ é representada por $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, onde P é um predicado n-ário. A declaração $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é chamada de valor da função proposicional P para a n-úpla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Um predicado que não possui variável é chamado de variável proposicional.

1.1.2 Universo de Discurso

O universo de discurso é uma ferramenta analítica usada na lógica de predicados para indicar o conjunto relevante de entidades as quais os quantificadores se referem. De forma geral, qualquer conjunto não vazio pode ser considerado como um universo de discurso para interpretação de uma fórmula. Dizemos que o universo de discurso (ou **domínio**) em um predicado são os valores que as variáveis podem assumir.

Usaremos o termo "**universo de discurso**" para representar o conjunto completo de termos num discurso específico. São exemplos de universos de discursos válidos os conjuntos {Todos os números naturais}, $\{a\}$, {Maria, Paulo} e {Todas as mulheres da UFOP}.

Definição 1.4 Seja $\mathbb{U}$ um conjunto dado. Uma função proposicional (**predicado**) definida em $\mathbb{U}$ é uma expressão $P(a)$ que tem a propriedade que $P(a)$ é verdadeira ou falsa para cada $a \in \mathbb{U}$. O conjunto $\mathbb{U}$ é chamado de **universo de discurso** (domínio) de $P(x)$. O conjunto T_p de todos os elementos de $\mathbb{U}$, para os quais os valores de $P(x)$ são verdadeiros, é chamado de conjunto verdade de

$P(x)$ e é escrito como:

$$T_p = \{x : x \in \mathbb{U},\ P(x)\ \text{ é verdade}\} \qquad \text{ou} \qquad T_p = \{x : P(x)\}$$

Exemplo 1.3 Considere os predicados:

$$P(x) = \text{“x é par”} \qquad \text{e} \qquad Q(x,y) = \text{“x é mais pesado que y”}.$$

onde a sentença $P(8)$ é verdadeira e $Q(pena, tijolo)$ é falsa. O domínio de $P(x)$ pode ser dado pelo conjunto dos números inteiros e o domínio de $Q(x,y)$ pode ser dado por alguma coleção de objetos físicos.

Exercício: Obtenha o conjunto verdade de $P(x)$ definido no conjunto dos números inteiros positivos ($\mathbb{N}^*$):

1. $P(x):\ x+2>7$

2. $P(x):\ x+5<3$

1.1.3 Fórmulas

Podemos definir o conjunto de fórmulas bem formadas da lógica de predicados, aplicando os conectivos da lógica proposicional como operações em declarações. Nesta seção, vamos usar os conectivos como operações em predicados.

Exemplo 1.4 Sejam as sentenças $P(x)$ e $Q(x)$. Podemos escrever as seguintes fórmulas bem formadas:

$$\neg P(x),\ P(x) \wedge Q(x),\ P(x) \vee Q(x),\ P(x) \rightarrow Q(x),\ P(x) \leftrightarrow Q(x)$$

Em termos de conjunto verdade, as fórmulas:

- $\neg P(x)$ significa que a declaração $\neg P(a)$ é verdadeira quando $P(a)$ é falsa e vice-versa. Temos que $\neg P(x)$ é o complemento de $P(x)$.
- $P(x) \wedge Q(x)$ significa que a declaração $P(x) \wedge Q(x)$ é verdadeira quando $P(x)$ e $Q(x)$ são verdadeiras. $P(x) \wedge Q(x)$ é a interseção de $P(x)$ e $Q(x)$.
- $P(x) \vee Q(x)$ significa que a declaração $P(x) \vee Q(x)$ é verdadeira quando $P(x)$ ou $Q(x)$ é verdadeira. $P(x) \vee Q(x)$ é a união de $P(x)$ e $Q(x)$.

As leis de De Morgan também são válidas para predicados:

$$\neg[P(x) \wedge Q(x)] \equiv \neg P(x) \vee \neg Q(x) \quad \text{e} \quad \neg[P(x) \vee Q(x)] \equiv \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$$

1.1.4 Exercícios

1. Considere $P(x)$ a proposição "$x \leq 4$". Determine os valores verdade das proposições:
   (a) $P(0)$
   (b) $P(4)$
   (c) $P(6)$
2. Considere $P(x)$ a proposição "$x = x^2$". Se o domínio forem os números inteiros, quais serão os valores verdade das proposições?
   (a) $P(0)$
   (b) $P(1)$
   (c) $P(2)$
   (d) $P(-1)$
3. Para cada uma das proposições, encontre um domínio para que a proposição seja verdadeira e um domínio para que a proposição seja falsa.
   (a) Todos estão estudando matemática discreta.
   (b) Todos têm mais de 18 anos.

1.2 Quantificadores

Os predicados sozinhos não são considerados sentenças pelo fato de possuírem **variáveis livres**. Para transformá-los em proposições é necessário substituir essas variáveis por constantes pertencentes ao universo de discurso. No entanto, existem situações em que é possível obter uma proposição a partir de funções proposicionais sem usar constantes específicas, esse processo é chamado de **quantificação**.

A quantificação nos permite concluir se um dado predicado P é verdadeiro para um conjunto de elementos. Os **quantificadores** são expressões do tipo "**para todo**", ou "**para cada**", "**para algum**" ou "**existem**" que dizem quantos objetos, em algum sentido, tem determinada propriedade. Existem dois tipos de quantificadores na lógica dos predicados:

- **O universal ($\forall$):** que significa que um predicado é verdadeiro para todos os elementos em consideração.
- **O existencial ($\exists$):** que indica que existe um ou mais elementos para os quais o predicado é verdadeiro.

A área da lógica que estuda predicados e quantificadores é chamada de **cálculo de predicados**.

1.2.1 Quantificador Universal

Algumas afirmações matemáticas referem à uma propriedade que é verdadeira **para todos** os valores que uma variável pode assumir em um determinado domínio. A quantificação universal de $P(x)$ para um domínio particular, que sempre deve ser especificado, é a proposição que afirma que $P(x)$ é válido para todos os valores de x que pertencem ao domínio.

Definição 1.5 (Quantificação Universal) Uma quantificação universal de $P(x)$ é toda declaração do tipo "todo x possui a propriedade $P(x)$" e é representada por:

$$\forall x.P(x) \qquad ou \qquad (\forall x \in \mathbb{U})P(x)$$

em que o símbolo $\forall$ (**para todo**) é chamado de quantificador universal e as notações $\forall x.P(x)$ e $(\forall x \in \mathbb{U})P(x)$ são lidas, respectivamente, como "para todo x, $P(x)$" e "para todo x em $\mathbb{U}$, $P(x)$ é verdadeira".

OBSERVAÇÕES:

- A declaração $\forall x.P(x)$ é equivalente à expressão $T_p = \{x|x \in \mathbb{U}, P(x)\} = \mathbb{U}$ e significa que o conjunto verdade de $P(x)$ é todo o conjunto $\mathbb{U}$. Ou seja, $\forall x.P(x)$ é verdadeira se, para todo elemento do conjunto $\mathbb{U}$, a propriedade P é verdadeira.
- A expressão $P(x)$ é uma sentença aberta, e portanto, não tem valor lógico. Entretanto, $\forall x.P(x)$ ($P(x)$ precedido pelo quantificador universal) possui o seguinte valor lógico:

$$\text{se } \{x|x \in \mathbb{U}, P(x)\} = \mathbb{U}, \text{ então } \forall x.P(x) \text{ é verdadeiro, caso contrário } \forall x.P(x) \text{ é falso}$$

- Um quantificador $\forall x.P(x)$ é falso se, e somente se, $P(x)$ não é verdadeiro para pelo menos um elemento do domínio, esse elemento é chamado de **contra-exemplo**. Para mostrar que $P(x)$ é falso, basta apresentar um contra-exemplo para a declaração $\forall x.P(x)$.
- A quantificação universal $\forall$ pode ser expressa na língua portuguesa pelas palavras **para todo, todo os, para cada, dado qualquer, arbitrariamente, para cada e para qualquer**.

Exemplo 1.5 : Determine o valor lógico da expressão $\forall x.P(x)$ em cada uma das declarações:

1. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n+4 > 3)$
   Verdadeira. Pois $\{n|n+4 > 3\} = \{1,2,3,\cdots\} = \mathbb{N}^*$
2. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n+2 > 8)$
   Falsa. Pois $\{n|n+2 > 8\} = \{7,8,9,\cdots\} \neq \mathbb{N}^*$. Temos que $x = 5$ é um contra-exemplo para $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(n+2 > 8)$
3. $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x+1 > x)$
   Verdadeira. Pois, $P(x)$ é verdadeiro para todo número real x.
4. $\forall x[P(x) \to Q(x)]$, onde o conjunto universo do discurso é o conjunto dos números naturais e as sentenças abertas são $P(x) : x^2 \geq 0$ e $Q(x) : x+2 > 8$.
   Falsa. A sentença na linguagem natural é dada por "para todo número real, se $x^2 \geq 0$ então

$x+2>8$". Considere como contra-exemplo $x=1$. Substituindo esse valor nas sentenças temos que $P(1):(1)^2 \geq 0$ é verdadeiro e $Q(1):1+2>8$ é falso. Logo, existe um valor para x para o qual $[P(x) \rightarrow Q(x)]$ é falso.

5. $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x<2)$

   Falsa. Considere como contra-exemplo $x=3$, que representa a declaração $Q(3):3<2$, que por sua vez é falsa.

6. $\forall x.Q(x)$, em que $Q(x):x^2<20$ e $\mathbb{U}=\{x \in \mathbb{N}|x \leq 4\}$.

   Verdadeira. O universo do discurso é o conjunto $\mathbb{U}=\{0,1,2,3,4\}$ e a declaração $\forall x.P(x)$ é verdadeira somente se à conjunção $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$ for verdadeira. Como a conjunção é verdadeira, temos que a quantificação também é verdadeira.

Observe que o símbolo $\wedge$ pode, às vezes, ser usado no lugar do símbolo $\forall$. Porém, esta substituição só pode ser feita quando o universo de discurso for um conjunto finito. Caso o conjunto seja infinito a declaração na forma $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$ não poderá ser feita, uma vez que a sentença não terminará.

1.2.2 Quantificador Existencial

Algumas expressões matemáticas afirmam que existe um elemento que assume uma determinada propriedade no domínio em que é proferido. A quantificação existencial de $P(x)$ para um domínio particular, que sempre deve ser especificado, é a proposição que afirma que $P(x)$ é válido para pelo menos um valor de x neste domínio.

Definição 1.6 (Quantificação Existencial) Uma quantificação existencial de $P(x)$ é toda declaração do tipo "algum x possui a propriedade $P(x)$" e é representada por:

$$\exists x.P(x) \qquad ou \qquad (\exists x \in \mathbb{U})P(x)$$

em que o símbolo $\exists$ (**existe**) é chamado de quantificador existencial e as notações $\exists x.P(x)$ e $(\exists x \in \mathbb{U})P(x)$ são lidas, respectivamente, como "existe um x tal que $P(x)$" e "para algum x em $\mathbb{U}$, $P(x)$ é verdadeiro".

OBSERVAÇÕES:

- A declaração $\exists x.P(x)$ é equivalente à expressão $T_p=\{x|x \in \mathbb{U}, P(x)\} \neq \emptyset$ e significa que o conjunto verdade de $P(x)$ não é vazio. Ou seja, $\exists x.P(x)$ é verdadeira se a propriedade P é verdadeira para pelo menos um elemento do conjunto $\mathbb{U}$.
- A expressão $\exists x.P(x)$ possui o seguinte valor lógico:

  se $\{x|x \in \mathbb{U}, P(x)\} \neq \emptyset$, então $\exists x.P(x)$ é verdadeiro, caso contrário, $\exists x.P(x)$ é falso.

- Um quantificador $\exists x.P(x)$ é falso se, e somente se, o conjunto verdade de $P(x)$ for um conjunto vazio ($T_p=\emptyset$).
- A quantificação existencial ($\exists$) pode ser expressa na língua portuguesa pelas palavras **existe,**

há pelo menos um, existe um, para algum, entre outros.

Exemplo 1.6 : Determine o valor lógico da expressão $\exists x.P(x)$ em cada uma das declarações:

1. $(\exists n \in \mathbb{N})(n+4<7)$
   Verdadeira. Pois $\{n|n+4<7\} = \{1,2\} \neq \emptyset$
2. $(\exists n \in \mathbb{N})(n+6<4)$
   Falsa. Pois $\{n|n+6<4\} = \emptyset$
3. $\exists x.P(x)$, onde o domínio é o conjunto dos números reais e $P(x) = x > 3$.
   Verdadeira, pois $P(x)$ é verdadeira para alguns elementos do conjunto, como por exemplo $x = 4$ ou $x = 5$.
4. $\exists x.Q(x)$, onde o domínio é o conjunto dos números reais e $Q(x) = x = x+1$.
   Falsa. Pois $Q(x)$ é falsa para todos os números reais.
5. $\exists x.Q(x)$, em que $Q(x)$: x é primo e $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{N}|2 \leq x \leq 6\}$.
   Verdadeira. O universo do discurso é o conjunto $\mathbb{U} = \{2,3,4,5,6\}$ e a declaração $\exists x.P(x)$ é verdadeira somente se à disjunção $P(2) \vee P(3) \vee P(4) \vee P(5) \vee P(6)$ for verdadeira. Como $P(3)$ é verdadeiro, temos que a quantificação é verdadeira.
6. $\exists x.P(x)$, em que $P(x) : x^2 > 20$ e $\mathbb{U} = \{x \in \mathbb{N}^*|x \leq 4\}$.
   Falsa. O universo do discurso é o conjunto $\mathbb{U} = \{1,2,3,4\}$ e a declaração $\exists x.P(x)$ é verdadeira somente se à disjunção $P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ for verdadeira. Como $P(x)$ é falso para todos os elementos do conjunto $\mathbb{U}$, temos que a quantificação é falsa.

Observe que o símbolo $\vee$ pode, às vezes, ser usado no lugar do símbolo $\exists$.

Observações em relação ao conjunto universo de discurso:

- (**Conjunto Finito**) Se o conjunto universo de discurso $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ é um conjunto finito com n elementos, então a proposição
  $$\forall x, P(x)$$
  é verdadeira se a conjunção $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$ for verdadeira.
  De forma equivalente, a proposição
  $$\exists x, P(x)$$
  é verdadeira se a disjunção $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$ for verdadeira.
- (**Conjunto Vazio**) Se o conjunto universo de discurso for vazio, independente da proposição aberta $P(x)$, temos que:
  - $\forall x, P(x)$ é verdadeira.
  - $\exists x, P(x)$ é falsa.

A tabela 1.1 apresenta um resumo dos valores lógicos dos quantificadores.

Tabela 1.1: Resumo dos valores lógicos dos quantificadores

Sentença	Quanto é verdadeira?	Quando é falsa?
$\forall x.P(x)$	quando $P(x)$ é verdadeiro **para todo** x	quando **existe pelo menos um** x tal que $P(x)$ é falso.
$\exists x.P(x)$	quando **existe um** x tal que $P(x)$ é verdadeiro	quando $P(x)$ é falso **para todo** x

Exercício: Determine o valor lógico das declarações.

Para as declarações seguintes considere a expressão $\forall x.P(x)$ nas interpretações:

1. $P(x)$ é a propriedade de que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores.

2. $P(x)$ é a propriedade de que x é uma planta e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores.

3. $P(x)$ é a propriedade de que x é positivo e o conjunto universo é o conjunto de todos os números inteiros.

Para as declarações seguintes considere $A = \{1,2,3,4,5\}$:

1. $(\exists x \in A)(x+3 = 10)$

2. $(\exists x \in A)(x+3 < 5)$

3. $(\forall x \in A)(x+3 < 10)$

4. $(\forall x \in A)(x+3 \leq 7)$

Outras Quantificações:

Os quantificadores universal e existencial são os mais importantes quantificadores na matemática e na ciência da computação. Porém, outros quantificadores também podem ser definidos, tais como: "**existem exatamente dois**", "**existem não mais de três**", "**existem pelo menos 100**", entre outros.

Dentre todos os quantificadores conhecidos, o **quantificador de unicidade**, indicado simbolicamente por $\exists!$, também é comumente usado na matemática.

> **Definição 1.7 (Quantificador de Unicidade)** o quantificador de unicidade cuja notação é dada por $\exists! x.P(x)$ indica que "**existe um único** x **tal que** $P(x)$ **é verdadeiro.**".

A quantificação de unicidade também é expressa na língua portuguesa pelas palavras **existe exatamente um**, **existe um e somente um**.

1.2.3 Exercícios

1. Seja $P(x)$ a proposição "$x = x^2$" e o universo de discurso o conjunto dos números inteiros. Determine os valores verdade das expressões quantificadas.
   (a) $\exists x, P(x)$
   (b) $\forall x, P(x)$
2. Seja o universo de discurso o conjunto dos números inteiros. Determine o valor verdade de cada uma das proposições.
   (a) $\forall n, (n+1 > n)$
   (b) $\exists n, (2n = 3n)$
   (c) $\exists n, (n = -n)$
   (d) $\forall n, (n^2 \geq n)$
3. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x)$ seja o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Desenvolva as proposições abaixo usando conjunções, disjunções e negações.
   (a) $\exists x, P(x)$
   (b) $\forall x, P(x)$
   (c) $\forall x, \neg P(x)$
   (d) $\exists x, \neg P(x)$
   (e) $\neg \forall x, P(x)$
   (f) $\neg \exists x, P(x)$
4. Encontre um contra-exemplo, se possível, para as proposições quantificadas universalmente, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.
   (a) $\forall x, (x^2 \geq x)$
   (b) $\forall x, (x > 0 \wedge x < 0)$
   (c) $\forall x, (x = 1)$
5. Verifique a veracidade das sentenças.
   (a) $\exists! x \in \mathbb{N}, (x^2 = 9)$

(b) $\exists! x \in \mathbb{Z}, (x^2 = 25)$
(c) $\exists! x \in \mathbb{N}, (x! < 10)$
(d) $\exists! x \in \mathbb{Z}, (2x \text{ é primo})$

1.3 Sintaxe e Semântica da Lógica dos Predicados

1.3.1 Precedência dos Quantificadores

Vamos utilizar precedências entre conectivos lógicos e os quantificadores para evitar o uso excessivo de parênteses. Para os conectivos, utilizaremos as mesmas regras de precedência da lógica proposicional e consideraremos que os quantificadores $\forall$ e $\exists$ possuem prioridade sobre operadores lógicos do cálculo proposicional.

Exemplo 1.7 A expressão

$$\forall x, P(x) \vee Q(x)$$

deve ser interpretada como a disjunção de $\forall x, P(x)$ e $Q(x)$.

- Interpretação correta: $(\forall x, P(x)) \vee Q(x)$
- Interpretação incorreta:$\forall x, (P(x) \vee Q(x))$.

1.3.2 Quantificadores com Domínio Restrito

Uma notação abreviada é frequentemente usada para restringir o domínio de um quantificador. Nessa notação, uma condição que a variável deve satisfazer é incluída depois do quantificador:

$$\forall(\text{restrição}).P(x) \qquad \textit{ou} \qquad \exists(\text{restrição}).P(x)$$

Exemplo 1.8 Considere como domínio o conjunto dos números reais. Então, a declaração:

1. $\forall x < 0, (x^2 > 0)$ diz que para todo número real x com $x < 0$, temos que $x^2 > 0$. Ou seja, "o quadrado de todo número negativo é positivo". Esta proposição é equivalente a $\forall x.(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$
2. $\forall x \neq 0, (x^2 \neq 0)$ diz que para todo número real x com $x \neq 0$, temos que $x^2 \neq 0$. Ou seja, "o quadrado de um número não nulo também é não nulo". A proposição é equivalente a $\exists x.(x \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 0)$
3. $\exists x > 0, (x^3 = 8)$ diz que existe um número real x com $x > 0$, tal que $x^3 = 8$. Ou seja, "existe uma raiz cúbica positiva de 8". Esta proposição é equivalente a $\exists x, (x > 0 \wedge x^3 = 8)$.

OBSERVAÇÕES:

- A restrição de um quantificador universal é a mesma que um quantificador universal de uma proposição condicional.
- A restrição de um quantificador existencial é a mesma que um quantificador existencial de uma conjunção.

1.3.3 Variáveis Livres e Ligadas

A parte da expressão lógica à qual um quantificador é aplicado é chamada de escopo do quantificador.

Definição 1.8 Seja α uma fórmula.

- Se $\forall x, \beta$ é uma sub-fórmula de α, então o escopo de $\forall x$ em α é β
- Se o quantificador $\exists x, \alpha$ é uma sub-fórmula de α, então o escopo de $\exists x$ em α é β

Dizemos que a variável x é livre quando ela não ocorre em α, dentro do escopo de um quantificador, $\forall x$ ou $\exists x$. Em outras palavras, a variável x é dita livre em α se não for quantificada. Caso contrário ela é dita ligada. Uma variável é dita ligada, quando ela está no escopo do quantificador.

Exemplo 1.9 Nas afirmações

1. $\forall x.P(x)$, temos que x é uma variável ligada.
2. $\exists x, P(x,y)$, temos que x é uma variável ligada e y é uma variável livre.
3. $\exists y, (y = 3x)$, temos que y é uma variável ligada e x é uma variável livre.

1.3.4 Negação dos Quantificadores

Considere as expressões:

1. "**Todo estudante desta classe foi aprovado em introdução a ciência da computação**"
   - Esta declaração é uma quantificação universal do tipo $\forall x, P(x)$, em que $P(x)$ é o sentença "x foi aprovado em introdução a ciência da computação" e o domínio consiste em todos os alunos desta classe.
   - A negação desta proposição é: "Não é o caso de todos os alunos de sua classe terem sido aprovados em cálculo."
   - A negação é equivalente a dizer que "Existe um aluno em sua classe que não foi aprovado em cálculo."
   - Esta última expressão é fácil ver a quantificação existencial da negação da função proposicional original, ou seja $\exists x.\neg P$
2. "**Existe pelo menos um aluno nesta sala que cursa engenharia.**"
   - Esta declaração é uma quantificação universal do tipo $\exists x, Q(x)$, em que $Q(x)$ é o sentença "x cursa engenharia" e o domínio consiste em todos os alunos desta classe.
   - A negação desta proposição é: "Não existe alunos nesta sala que cursa engenharia."
   - A negação é equivalente a dizer que "Todos aluno nesta sala não cursa engenharia."
   - Esta última expressão é fácil ver a quantificação universal da negação da função proposicional original, ou seja $\forall x.\neg Q$

As regras para negações de quantificadores são chamadas de **leis de De Morgan para quantificadores** e são dadas por:

Quantificador	Negação	Quando a negação é verdadeira?	Quando a negação é falsa?
$\neg\exists x, P(x)$	$\forall x, \neg P(x)$	Para todo x, $P(x)$ é falso	Existe um x, para o qual $P(x)$ é verdadeiro
$\neg\forall x, P(x)$	$\exists x, \neg P(x)$	Existe um x, para o qual $P(x)$ é falso	Para todo x, $P(x)$ é verdadeiro

Observação: A proposição "$\exists x, P(x)$", em alguns casos, pode ser verdadeira para um único $x \in \mathbb{U}$. Quando isto acontecer, é comum escrever a proposição como "$\exists! x, P(x)$".

Exemplo 1.10 Considere a declaração:

Todos os grandes cientistas da computação são do sexo masculino.

- Sua negativa é:
  - Não ocorre que todos os grandes cientistas da computação são do sexo masculino, ou
  - Existe pelo menos um grande cientista da computação é do sexo feminino
- Usando M para denotar o conjunto de grandes cientistas da computação, as expressões acima podem ser escritas simbolicamente como: $\neg(\forall x \in M)(\text{x é masculino})$ ou $(\exists x \in M)(\text{x não é masculino})$.
- São expressões equivalentes:

$$\neg(\forall x \in M)(\text{x é masculino}) \equiv (\exists x \in M)(\text{x não é masculino})$$

Exercício: Escreva a negação das seguintes declarações:

1. Para todos os inteiros positivos n, temos $n+2 > 8$.
2. Existe uma pessoa (viva) com 150 anos.
3. Existe um político honesto.
4. Todos os brasileiros comem churrasco.

1.3.5 Exercícios

1. Suponha que o domínio de $Q(x,y,z)$ sejam as três variáveis x, y e z, em que $x = 0,1$ ou 2, $y = 0$ ou 1 e $z = 0$ ou 1. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.
   (a) $\forall y, Q(0,y,0)$
   (b) $\exists x, Q(x,1,1)$
   (c) $\exists z, \neg Q(0,0,z)$
   (d) $\exists x, \neg Q(x,0,1)$

Aula 10: Lógica dos Predicados

BCC101- Matemática Discreta

(DECOM/UFOP)

2.1 Sintaxe e Semântica da Lógica dos Predicados

2.1.1 Quantificadores Aninhados

Definição 2.1 Uma função proposicional com n variáveis definida em um conjunto produto $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é uma expressão do tipo $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, que possui a propriedade que $P(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ é verdadeira ou falsa para uma n-úpla $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in A$.

A função proposicional precedida por um quantificador para cada variável é uma declaração e possui valor lógico.

Exemplo 2.1 A declaração:

- $x+1 < y$ é um exemplo de uma sentença aberta em $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- $\exists x \forall y, (x+1 < y)$ é um exemplo de função proposicional precedida por quantificadores aninhados.

Nas declarações que envolvem dois quantificadores aninhados, o quantificador mais interno é tratado como uma função proposicional. A sentença $\exists x \forall y, (x+1 < y)$ por exemplo, é o mesmo que $\exists x Q(x)$, onde $Q(x)$ significa que $\forall y P(x,y)$ e $P(x,y) = x+1 < y$.

Exemplo 2.2 Assuma que o domínio para as variáveis x e y consiste em todos os números reais. E seja a sentença $Q(x,y) = x+y = 0$

a) $\forall x \forall y, Q(x,y)$ é equivalente a afirmação "para todo número real x e para todo número real y, temos que $x+y=0$". Esta sentença é falsa, pois existem valores para x e y para os quais a soma deste números não resulta em zero.

b) $\forall x \exists y, Q(x,y)$ é equivalente a afirmação "para todo número real x existe um número real y, tal que $x+y=0$" ou que "todo número real tem um número oposto". Esta sentença é verdadeira, pois para todo x, existe um $y=-x$ tal que $x+y=0$.

c) $\exists x \forall y, Q(x,y)$ é equivalente a afirmação "existe um número real x para todo número real y, tal que $x+y=0$ " . Esta sentença é falsa, pois não existe um número real x que somado a todo número real y resulte em $x+y=0$.

d) $\exists x \exists y, Q(x,y)$ é equivalente a afirmação "existe um número real x e existe um número real y, tal que $x+y=0$." . Esta sentença é verdadeira, pois existe um valor de x e existe um valor de $y=-x$ de forma que $x+y=0$.

A Tabela 2.1 apresenta de forma sucinta os valores lógicos de sentenças quantificadas com duas variáveis.

Tabela 2.1: Quantificações de Duas Variáveis

Sentença	**Quando é verdadeira?**	**Quando é fasa?**
$\forall x \forall y, P(x,y)$	$P(x,y)$ é verdadeira para todo par x,y	Existe um par x,y para o qual $P(x,y)$ é falsa.
$\forall x \exists y, Q(x,y)$	Para todo x existe um y para o qual $P(x,y)$ é verdadeira	Existe um x tal que $P(x,y)$ é falsa para todo y.
$\exists x \forall y, Q(x,y)$	Existe um x tal que $P(x,y)$ é verdadeira para todo y	Para todo x existe um y para o qual $P(x,y)$ é falsa
$\exists x \exists y, Q(x,y)$	Existe um par x,y para o qual $P(x,y)$ é verdadeira.	$P(x,y)$ é falsa para todo par x,y.

Exercício: Sejam $B = \{1,2,3,\cdots,9\}$ e $P(x,y)$ a fórmula "$x+y=10$". Determine o valor lógico das sentenças, justificando sua resposta.

1. $\forall x \forall y, P(x,y)$

2. $\forall x \exists y, P(x,y)$

3. $\exists x \forall y, P(x,y)$

4. $\exists x \exists y, P(x,y)$

A mesma análise realizada para sentenças com dois quantificadores aninhados pode ser aplicada em sentenças com três ou mais quantificadores. É preciso apenas tomar cuidado com a ordem em que os quantificadores aparecem, visto que a ordem pode afetar o valor verdade da declaração.

Exemplo 2.3 Sejam $x,y,z \in \mathbb{R}$. A declaração:

a) $\forall x \forall y \forall z, (x+(y+z) = (x+y)+z)$ (propriedade associativa da adição para números reais): é verdadeira e pode ser traduzida na linguagem natural por "para todos os números reais x,y e z temos que $x+(y+z) = (x+y)+z$.

b) $\forall x \forall y \exists z, (x+y = z)$: é verdadeira e é equivalente a dizer que "para todos os números reais x e y, existe um número real z tal que $x+y = z$", ou seja, "a soma de dois números reais é um número real."

c) $\exists x \forall y \forall z$: é equivalente a dizer que "existe um número real x tal que para todo número y e z, $x = y+z$". Como não existe um valor x que é obtido desta foram, temos que a sentença é falsa.

2.1.2 Negação de Quantificadores Aninhados

As declarações com dois ou mais quantificadores aninhados podem ser negadas pela aplicação sucessiva das leis de DeMorgan para negar quantificadores. Aplicando as leis de DeMorgan, cada quantificador $\forall$ é transformado em $\exists$ e cada $\exists$ é trocado para $\forall$, quando o símbolo da negação é colocado da esquerda para a direita.

Exemplo 2.4 Declaração:

- "Para todos os números reais x e y, existe um número real z tal que $x+y = z$":
  Negação: Existem números reais x e y, tal que para todo número real z, $x+y \neq z$
- $\forall x, \forall y, \exists z, (x+y = z)$

$$
\begin{aligned}
\neg[\forall x, \forall y, \exists z, (x+y=z)] &\equiv \exists x, \neg[\forall y, \exists z, (x+y=z)] \\
&\equiv \exists x, \exists y, \neg[\exists z, (x+y=z)] \\
&\equiv \exists x, \exists y, \forall z, \neg(x+y=z) \\
&\equiv \exists x, \exists y, \forall z, (x+y \neq z)
\end{aligned}
$$

- "Todo estudante faz pelo menos uma disciplina em que o professor é um professor substituto.":
  Negação: Existe um estudante, tal que toda disciplina que ele faz o professor não é um professor substituto.

Exercício: Negue as declarações:

1. $\exists x \forall y, x+y<10$

2. $\forall x \forall y, x^2=2y$

3. $\exists x \exists y \forall z, x+y=z$

4. Todos os estudantes da UFOP moram em repúblicas.

5. Alguns estudantes têm 25 anos de idade ou mais.

2.1.3 Exercícios

1. Determine o valor lógico da proposição $\forall x \exists y (xy=1)$, considerando o domínio para as variáveis:
   (a) Os números reais diferentes de zero.
   (b) Os números inteiros diferentes de zero.
   (c) Os números reais positivos.
2. Para cada uma das fórmulas a seguir, indique se ela é verdadeira ou falsa, para cada um dos domínios de discurso indicados.

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	$\{0,1\}$
$\forall x \exists y, (x>y)$			
$\forall x \exists y, (y>x)$			
$\exists x \forall y, (x>y)$			
$\exists x \forall y, (x \geq y)$			
$\exists y \forall x, (x \geq y)$			
$\exists y \exists z \forall x, (x=y \vee x=z)$			
$\forall x \exists y, (x-y=0)$			
$\forall x \forall y \forall z, (x=y \wedge y=z \rightarrow x=z)$			
$\forall x \forall y, (x \neq x \rightarrow y=0)$			
$\forall x \exists y \exists z, (x+y=z \rightarrow x=1 \vee x=0)$			

3. Suponha que o domínio da função proposicional $P(x,y)$ são os pares x e y, em que x é $1,\ 2$ ou 3 e y é $1,\ 2$ ou 3. Desenvolva as proposições abaixo usando disjunções e conjunções.

(a) $\forall x \forall y, P(x,y)$
(b) $\exists x \exists y, P(x,y)$
(c) $\exists x \forall y, P(x,y)$
(d) $\forall y \exists x, P(x,y)$

4. Expresse as negações das proposições abaixo, tal que todos os símbolos de negação precedam imediatamente os predicados.
   (a) $\forall x \exists y \forall z, T(x,y,z)$
   (b) $\forall x \exists y, P(x,y) \vee \forall x \exists y, Q(x,y)$
   (c) $\forall x \exists y, [P(x,y) \wedge \exists z R(x,y,z)]$
   (d) $\forall x \exists y, [P(x,y) \rightarrow Q(x,y)]$
5. Encontre um contra-exemplo, se possível, para estas proposições de quantificadores universais, em que o domínio para todas as variáveis são todos os números inteiros.
   (a) $\forall x \exists y, (x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$
   (b) $\forall x \exists y, (y^2 = x)$
   (c) $\forall x \forall y, (xy \geq x)$

2.2 Equivalências Lógicas Envolvendo Quantificadores

Definição 2.2 Sentenças que envolvem predicados e quantificadores são **logicamente equivalentes** se, e somente se, elas possuem o mesmo valor verdade para quaisquer que sejam os predicados substituídos nessas sentenças e qualquer que seja o domínio das variáveis nessas funções proposicionais. Será usada a notação $S \equiv T$ para indicar que as duas declarações que envolvem predicados e quantificadores são logicamente equivalentes

Exemplo 2.5 Mostre que sobre o mesmo domínio as expressões $\forall x, [P(x) \wedge Q(x)]$ e $\forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ são logicamente equivalentes.

OBSERVAÇÕES:

- Para mostrar que as sentenças são logicamente equivalentes, devemos mostrar que elas possuem o mesmo valor verdade, não importando o que são os predicados (P e Q) e não importando também o domínio em que estão inseridos.
- A estratégia de prova consiste em supor predicados particulares P e Q com domínio comum e mostrar que as sentenças são logicamente equivalentes provando: 1º) que se $\forall x, [P(x) \wedge Q(x)]$ é verdadeira, então $\forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ também é verdadeira e 2º) que se $\forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ é verdadeira, então $\forall x, [P(x) \wedge Q(x)]$ também é verdadeira.

Prova: Dividindo em duas partes:

1. (**1ª parte**) Suponha que $\forall x, [P(x) \wedge Q(x)]$ seja verdadeira. Então, se a está no domínio, então $P(a) \wedge Q(a)$ é verdadeira. Logo, $P(a)$ é verdadeira e $Q(a)$ é verdadeira. Como $P(a)$ e $Q(a)$ são

verdadeiras para todo elemento do domínio, então podemos concluir que $\forall x, P(x)$e $\forall x, Q(x)$ são ambas verdadeiras. Logo, temos que $\forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ é verdadeira.

2. (**2ª parte**) Suponha que $\forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ seja verdadeira. Então, segue que $\forall x, P(x)$ e $\forall x, Q(x)$ são ambas verdadeiras. Logo, se a está no domínio, então $P(a)$ é verdadeira e $Q(a)$ é verdadeira. Como $P(a)$ e $Q(a)$ são verdadeiras, então $P(a) \wedge Q(a)$ também é verdadeira. Logo, temos que $\forall x, [P(x) \wedge Q(x)]$ é verdadeira.

Portanto, temos que $\forall x, [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$ ■

2.2.1 Exercícios

1. Quais das sentenças a seguir são equivalentes a frase " **Todos os círculos são redondos.**"
   a) Se for redondo, será um círculo.
   b) Ser redondo é uma propriedade necessária dos círculos.
   c) Um coisa que não é redonda não pode ser um círculo.
   d) Algumas coisas redondas são círculos.
2. Determine se as expressões seguintes são logicamente equivalentes. Justifique sua resposta.
   (a) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$
   (b) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$
3. Estabeleça se as sentenças seguintes são equivalências lógicas. Considere que x não aparece como uma variável livre em A e assuma que o domínio é não vazio.
   (a) $(\forall xP(x)) \wedge A \equiv \forall x(P(x) \wedge A)$
   (b) $(\exists xP(x)) \wedge A \equiv \exists x(P(x) \wedge A)$
   (c) $\forall x(P(x) \rightarrow A) \equiv \exists xP(x) \rightarrow A$
   (d) $\exists x(P(x) \rightarrow A) \equiv \forall xP(x) \rightarrow A$
4. Mostre que $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ e $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ não são logicamente equivalentes.
5. Mostre que as proposições $\neg[\exists x \forall y P(x,y)]$ e $\forall x \exists y \neg P(x,y)$, em que os dois quantificadores das variáveis x e y têm o mesmo domínio, são logicamente equivalente.

2.3 Formalização das Sentenças

Formalizar as sentenças na língua portuguesa para expressões lógicas é uma tarefa crucial na matemática e na ciência da computação. Traduzir do português para expressões lógicas torna-se uma tarefa mais complicada quando quantificadores são necessários. Para a formalização de sentenças quantificadas precisamos especificar o universo de discurso, a propriedade dos predicados e dos símbolos lógicos.

Considere por exemplo a frase "**todo mineiro é atleticano**". Esta frase significa que "dado um universo de discurso, se é um mineiro, então é atleticano." Vamos denotar por $P(x)$ a frase "x é mineiro" e por $T(x)$ a frase "x é atleticano" e escrever simbolicamente esta declaração como:

$$\forall x, [P(x) \rightarrow T(x)]$$

- outras variações para esta frase em português são “Todos os mineiros são atleticanos” ou “Cada mineiro é atleticano.”
- Forma incorreta de representação: $\forall x, P(x) \wedge T(x)$. Esta sentença é muito mais forte que a primeira, pois diz que todo mundo do domínio é mineiro e atleticano.

A frase “**existe um mineiro e atleticano**” significa que existe alguma coisa no domínio, que é ao mesmo tempo mineiro e atleticano. Vamos escrever esta frase simbolicamente por

$$\exists x, P(x) \wedge T(x)$$

- Outras variações para esta frase em português são “Alguns mineiros são atleticanos” e “Existem mineiros atleticanos.”
- Forma incorreta de representação: $\exists x, P(x) \rightarrow T(x)$. Esta sentença significa que “existe um elemento no universo de discurso que, se é um mineiro, então é atleticano”. Esta sentença só será verdadeira se existir pelo menos um mineiro que é atleticano.

Dicas para formalização de sentenças

- Procure por palavras-chave que indique o tipo de quantificador:
  $\forall$: para todo, para qualquer, para cada.
  $\exists$: para algum, existe.
- Algumas vezes o quantificador universal está **subentendido**: “cachorro têm pulga” é o mesmo que “todo cachorro tem pulga”.
- Se você usar um quantificador universal, **quase sempre** o conectivo que irá acompanhá-lo será um condicional.
- Se você usar um quantificador existencial, **quase sempre** o conectivo que irá acompanhá-lo será uma conjunção.
- Qualquer coisa que venha depois de “só”, “somente” ou “apenas” será a conclusão de um condicional; ou seja, a conclusão vem depois de um “então” em uma afirmação do tipo “se... então”.
- Siga a ordem das palavras em português.

Exemplo 2.6 Considere as proposições com apenas um quantificador:

1. Se x é par, então x^2 também é par.
   - Nessa afirmação está implícito que $\mathbb{Z}$ é o conjunto universo de discurso e $\forall$ o quantificador da sentença.
   - A forma correta de escrever a expressão é: “**Para todo** $x \in \mathbb{Z}$**, se** x **é par, então** x^2 **também é par.**”
   - Forma simbólica: $\forall x, P(x)$, em que $P(x)$ é “x é par, então x^2 também é par.”
2. Seja x um número inteiro. Se x é par, então x^2 também é par.
   - Na primeira frase, x é um número inteiro fixo e sem nenhuma característica que os difere dos demais elementos do domínio. Então, se a propriedade vale para ele, vale para todos os demais elementos do domínio.

- A palavra "seja" pode ser interpretada como quantificador universal "para todo". Nesse caso, a forma correta de escrever a expressão é: "**Para todo $x \in \mathbb{Z}$, se x é par, então x^2 é par.**"
- Forma simbólica: $\forall x, P(x)$.

3. Todos os alunos de computação gostam de matemática discreta.
   - Nessa afirmação está implícito que $\mathbb{U} = \{\text{Todos os Alunos}\}$ é o conjunto universo de discurso e $\forall$ o quantificador da sentença.
   - O predicado $P(x)$ significa "x é um aluno de computação".
   - O predicado $Q(x)$ significa "x gosta de matemática discreta".
   - Expressão equivalente: "**Para todo estudante, se o estudante é da computação, então este estudante gosta de matemática discreta.**"
   - Em termos formais podemos escrever a expressão como: $\forall x \in \mathbb{U}, P(x) \rightarrow Q(x)$.
   - **Escrever na forma $\forall x, P(x) \wedge Q(x)$ não está correto. Pois essa expressão representa a frase "todo estudante é da computação e gosta de matemática discreta."**
4. Alguns alunos de computação gostam de matemática discreta.
   - Nessa afirmação está implícito que $\mathbb{U} = \{\text{Todos os Alunos}\}$ é o conjunto universo de discurso e $\exists$ o quantificador da sentença.
   - O predicado $P(x)$ significa "x é um aluno de computação".
   - O predicado $Q(x)$ significa "x gosta de matemática discreta".
   - Expressão equivalente: "**Existe pelo menos um estudante que é da computação e gosta de matemática discreta.**"
   - Em termos formais podemos escrever a expressão como: $\exists x \in \mathbb{U}, P(x) \wedge Q(x)$.
   - **Escrever na forma $\exists x, P(x) \rightarrow Q(x)$ não está correto. Pois pode acontecer de não haver alunos de computação no conjunto universo de discurso (pode acontecer de não ter procura pelo curso e dos poucos alunos ingressantes, muitos serem reprovados na disciplina). Então a expressão só será verdadeira se existir pelo menos um aluno de computação que gosta de matemática discreta.**
5. Todos gostam da mãe de Carlos.
   - Nessa afirmação está implícito que $\mathbb{U} = \{\text{Todas as pessoas}\}$ é o conjunto universo de discurso e $\forall$ o quantificador da sentença.
   - A função $MAE(x)$.
   - O predicado $G(x,y)$ significa "x gosta de y".
   - Em termos formais podemos escrever a expressão como: $\forall x \in \mathbb{U}, G(x, MAE(CARLOS))$.
6. Todos que conhecem Carlos, não gostam da mãe dele.
   - Nessa afirmação está implícito que $\mathbb{U} = \{\text{Todas as pessoas}\}$ é o conjunto universo de discurso e $\forall$ o quantificador da sentença.
   - A função $MAE(x)$.
   - O predicado $G(x,y)$ significa "x gosta de y".
   - O predicado $C(x,y)$ significa "x conhece y".
   - Em termos formais podemos escrever a expressão como:

$\forall x \in \mathbb{U}, C(x, CARLOS) \rightarrow \neg G(x, MAE(CARLOS))$.

Exemplo 2.7 Considere as proposições com mais de um quantificador:

1. Seja A o conjunto de todas as pessoas e $P(x,y)$ a proposição que é verdadeira se x gosta de y. A proposição
   - $\forall x, \exists y, P(x,y)$ significa que "para toda pessoa x existe uma pessoa y, tal que x gosta de y", em outras palavras,"Todo mundo gosta de alguém".
   - $\exists x, \forall y P(x,y)$ significa que "existe uma pessoa x, tal que para toda pessoa y, temos que x gosta de y", ou seja, "existe alguém que gosta de todo mundo".
   - $\neg\exists x, \forall y, P(x,y)$ significa que "não existe um x, tal que para toda pessoa y, x gosta de y", ou seja, "não existe alguém que gosta de todo mundo".
2. "Se uma pessoa é do sexo feminino e tem filhos, então ele é mãe de alguém"
   - Podemos reescrever como: "Para toda pessoa x, se x é do sexo feminino e x tem filhos, então existe uma pessoa y tal que x é mãe de y".
   - Podemos separar a sentença nas seguintes proposições: $F(x)$ representa "x é do sexo feminino", $P(x)$ representa "x tem filhos" e $M(x,y)$ representa "x é mãe de y".
   - Forma simbólica: $\forall x[F(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y, M(x,y)]$

Resumo:

- Considere a declaração "$P(x)$: x foi aprovado em Matemática Discreta". As seguintes sentenças são interpretadas como:

$P(Maria)$:	Maria foi aprovada em Matemática Discreta
$\forall x P(x)$:	Todos foram aprovados em Matemática Discreta
$\exists x P(x)$:	Alguém foi aprovado em Matemática Discreta

- O valor lógico de fbf predicada depende da interpretação considerada.
- Fbfs predicadas válidas são particularmente verdadeiras para todas as interpretações.

2.3.1 Exercícios

1. Considere $P(x)$ como a proposição "x passa mais do que cinco horas em aula todos os dias", em que o domínio de x são todos os estudantes. Expresse as quantificações em português:
   (a) $\exists x, P(x)$
   (b) $\forall x, P(x)$
   (c) $\exists x, \neg P(x)$
   (d) $\forall x, \neg P(x)$
2. Considerando que $C(x)$ é "x é comediante", $F(x)$ é "x é divertido" e o domínio são todas as pessoas, transcreva as proposições seguintes para o português:

(a) $\forall x, (C(x) \to F(x))$
(b) $\forall x, (C(x) \vee F(x))$
(c) $\exists x, (C(x) \to F(x))$
(d) $\exists x, (C(x) \vee F(x))$

3. Traduza cada uma das seguintes sentenças da linguagem natural para a linguagem simbólica da Lógica de Predicados:
   (a) 10 é múltiplo de 5.
   (b) Todo número divisível por 10 é divisível por 5.
   (c) Todo número par é maior que 20.
   (d) Nenhum número impar é maior que 10.
4. Transcreva cada uma das proposições em expressões lógicas usando predicados, quantificadores e conectivos lógicos.
   (a) Ninguém é perfeito.
   (b) Nem todos são perfeitos.
   (c) Todos os seus amigos são perfeitos.
   (d) Pelo menos um dos seus amigos é perfeito.
   (e) Todos são seus amigos e são perfeitos.
   (f) Nem todos são seus amigos ou alguém não é perfeito.
5. Transcreva as proposições abaixo para o português. Considere como universo de discurso o conjunto dos números reais.
   (a) $\forall x \exists y, (x < y)$
   (b) $\forall x \forall y, (((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \to (xy \geq 0))$
   (c) $\forall x \forall y \exists z, (xy = z)$
6. Escreva as sentenças quantificadas na forma simbólica.
   (a) Todo estudante de ciência da computação precisa de um curso de matemática discreta.
   (b) Há um estudante nesta sala que possui seu próprio computador.
   (c) Todo estudante nesta sala cursou de pelo menos uma disciplina de ciência da computação.
   (d) Há um estudante nesta sala que cursou de pelo menos uma disciplina de ciência da computação.
   (e) Todo estudante desta sala já esteve em todos os prédios do campus.
   (f) Há um estudante desta sala que já esteve em todas as salas de pelo menos um prédio do campus.
   (g) Todo estudante nesta sala já esteve em pelo menos uma sala de todos os prédios do campus.
7. Usando os símbolos predicados indicados e quantificadores apropriados, escreva cada uma das frases em português como uma fórmula bem formada predicada, considerando o mundo inteiro como universo de discurso.

$$
\begin{aligned}
D(x)&: \quad x \text{ é um dia.}\\
S(x)&: \quad x \text{ é ensolarado.}\\
R(x)&: \quad x \text{ é chuvoso.}\\
M&: \quad \text{segunda-feira.}\\
T&: \quad \text{terça-feira.}
\end{aligned}
$$

(a)
(b) Todos os dias são ensolarados.
(c) Alguns dias não são chuvosos.
(d) Todo dia ensolarado não é chuvoso.
(e) Alguns dias são ensolarados e chuvosos.
(f) Nenhum dia é, ao mesmo tempo, ensolarado e chuvoso.
(g) É sempre um dia ensolarado só se for um dia chuvoso.
(h) Nenhum dia é ensolarado.
(i) A segunda-feira foi ensolarada; portanto, todos os dias serão ensolarados.
(j) Choveu na segunda-feira e na terça-feira.
(k) Se algum dia for ensolarado, então todos os dias serão ensolarados.

8. Considere o universo de discurso constituído por um conjunto de pessoas e os seguintes símbolos predicados:

$$
\begin{aligned}
A(x,y)&: \quad x \text{ é amigo de } y\\
I(x)&: \quad x \text{ é inteligente}
\end{aligned}
$$

Traduza cada uma das seguintes sentenças para fórmulas da Lógica de Predicados:
(a) João tem um amigo.
(b) João tem um amigo inteligente.
(c) Todo mundo tem um amigo.
(d) Todo mundo tem um amigo inteligente.
(e) Todo amigo de João é inteligente.
(f) Todo amigo de João, que não é amigo de Maria é inteligente.
(g) João é amigo de quem não é amigo de Maria e é inteligente.
(h) Nem todo mundo tem um amigo inteligente.

9. Dê a versão em português para as fórmulas a seguir:

$$
\begin{aligned}
L(x,y)&: \quad x \text{ ama } y.\\
H(x)&: \quad x \text{ é vistoso.}\\
M(x)&: \quad x \text{ é um homem.}\\
P(x)&: \quad x \text{ é bonita.}\\
W(x)&: \quad x \text{ é mulher.}\\
j&: \quad \text{João.}\\
k&: \quad \text{Kátia.}
\end{aligned}
$$

(a) $H(j) \wedge L(k, j)$

(b) $\forall x, [M(x) \to H(x)]$

(c) $\forall x, [W(x) \to (\forall x)(L(x, y) \to M(y) \wedge H(y))]$

(d) $(\exists x)(M(x) \wedge H(x) \wedge L(x, k))$

(e) $(\exists x)(W(x) \wedge P(x) \wedge (\forall x)[L(x, y) \to H(y) \wedge M(y)])$

(f) $\forall x, [W(x) \wedge P(x) \to L(j, x)]$

10. Use predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos para expressar a proposição de que "**Todo número inteiro positivo é a soma dos quadrados de quatro números inteiros**."

11. Use quantificadores e conectivos lógicos para expressar o fato de que todo polinômio linear (ou seja, de grau 1) com coeficientes reais e no qual o coeficiente de x é diferente de zero tem exatamente uma raiz real.

12. Expresse cada uma das proposições matemáticas abaixo usando predicados, quantificadores, conectivos lógicos e operadores matemáticos.

    (a) O produto de dois números reais negativos é positivo.

    (b) A diferença entre um número real e ele mesmo é zero.

    (c) Todo número real positivo tem exatamente duas raízes quadradas.

    (d) Um número real negativo não tem uma raiz quadrada que seja um número real.

Para exercícios extras consulte as seções

- 1.3 do livro [1]
- 1.3 e 1.4 do livro [2].

Aula 11: Dedução Natural para a Lógica de Predicados

BCC101- Matemática Discreta
(DECOM/UFOP)

3.1 Regras de Inferência para Lógica dos Predicados

As regras de equivalência e de inferência da lógica proposicional também podem ser aplicadas na lógica dos predicados. Considere por exemplo o seguinte argumento:

$$\forall x P(x) \land [\forall x P(x) \to \forall x Q(x)] \vdash \forall x Q(x)$$

cuja demonstração pode ser feita apenas com a aplicação das regras de inferência da lógica proposicional.

Prova: .

1.	$\forall x P(x)$	hipótese
2.	$\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$	hipótese
3.	$\forall x Q(x)$	1,2 - {Modus Ponens}

■

Existem situações em que os argumentos com fórmulas bem formadas quantificadas não são tautologias, porém são válidas devido à sua estrutura e o significado dos quantificadores que a formam (**a fórmula bem formada quantificada é válida se for verdadeira para todas as interpretações**).

Exemplo 3.1 Determine a validade das fórmulas seguintes:

- $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$ é uma fórmula válida em qualquer interpretação. Pois se todos os elementos do conjunto possui determinada propriedade, então existe um elemento do conjunto que tem essa propriedade.
- $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$ não é uma fórmula válida! Considere por exemplo, o domínio o conjunto dos inteiros e a declaração "$P(x)$: x é par". "Existe um número inteiro que é par" é verdadeiro, porém é falso dizer que todo número inteiro é par.

Para estes casos, o procedimento de demonstração consistirá em retirar os quantificadores, manipular as fórmulas, e só então colocar os quantificadores no lugar.

O sistema de Dedução Natural para a lógica dos predicados consiste no acréscimo de quatro novas regras de inferência que fornecem mecanismos para a retirada e a inserção dos quantificadores universal e existencial. A seguir são apresentadas e descritas as quatros regras básicas de inferência para sentenças quantificadas.

3.1.1 Regras para o quantificador universal

Eliminação do quantificador universal

A **instanciação universal**, representada simbolicamente por $\{\forall_E\}$, é a regra de inferência em que se a é um elemento particular do universo do discurso e a premissa $\forall x, P(x)$ é verdadeira, então podemos concluir que $P(a)$ também é verdadeira.

$$\frac{\forall x, P(x)}{P(a)} \{\forall_E\}$$

Em outras palavras, essa regra diz que podemos deduzir $P(y), P(z)$ ou $P(a)$ de $\forall x P(x)$, retirando o quantificador universal. A justificativa é que, se P é verdadeira para todos os elementos do universo de discurso, podemos nomear um desses elementos por uma variável arbitrária, por exemplo a, que $P(a)$ ainda é verdadeira para todas essas coisas.

Exemplo 3.2 Considere as seguintes sentenças:

a) Se todas as mulheres são inteligentes, então Maria é inteligente.

Seja a sentença "Todas as mulheres são inteligentes" e considere o elemento Maria que pertence ao universo do discurso (Conjunto das Mulheres). Então, podemos concluir que "Maria é inteligente".

b) $\dfrac{\forall x[A(x) \rightarrow B(x)]}{A(a) \rightarrow B(a)}$

Exemplo 3.3 Considere o argumento

"**Todos os homens são mortais. Sócrates é humano. Portanto, Sócrates é mortal.**"

que é um dos "silogismos" clássicos da lógica formal. A instanciação universal pode ser usada para prová-lo.

Prova: Seja:

- $H(x)$ para denotar "x é humano".
- $M(x)$ para denotar "x é mortal."
- a= Sócrates.

O argumento pode ser reescrito como:

$$(\forall x)[H(x) \to M(x)] \land H(a) \to M(a)$$

e validado pela seguinte dedução:

1.	$(\forall x)[H(x) \to M(x)]$	hipótese
2.	$H(a)$	hipótese
3.	$H(a) \to M(a)$	1, $\{\forall_E\}$
4.	$M(a)$	2,3 {Modus Ponens}

■

Introdução do quantificador universal

A **generalização universal**, representada simbolicamente por $\{\forall_I\}$, é a regra de inferência que diz que $\forall x, P(x)$ é verdadeira, dada como premissa que $P(a)$ é verdadeira para todos os elementos a do universo de discurso.

Essa regra é usada para mostrar que $\forall x, P(x)$ é verdadeira tomando um elemento a qualquer do domínio e mostrando que $P(a)$ é verdadeira.

$$\frac{P(a) \text{ para um } a \text{ arbitrário}}{\forall x, P(x)} \; \{\forall_I\}$$

Em outras palavras, sabendo que $P(a)$ é verdadeiro e que a é um elemento arbitrário, ou seja, a pode ser qualquer elemento do universo de discurso, então podemos fazer a inserção de um quantificador universal e deduzir $\forall x, P(x)$.

Exemplo 3.4 Considere os seguintes argumentos:

a) Se qualquer mulher é inteligente, então todas as mulheres são inteligentes.

Seja a sentença "x é inteligente". Para um elemento arbitrário c do universo de discurso a sentença $P(c)$ é verdadeira (ou seja, a declaração "qualquer mulher é inteligente" é verdadeira), então podemos concluir que "todas as mulheres são inteligentes".

b) $$\frac{A(c) \to B(c)}{\forall x[A(x) \to B(x)]}$$

OBSERVAÇÃO: É preciso ter cuidado ao usar essa regra! Supor que o elemento x possui a propriedade P não garante que todo elemento do domínio também possui a propriedade P.

Exemplo 3.5 Uso incorreto da regra:

1. $P(x)$ hipótese
2. $\forall x, P(x)$ 1, $\{\forall_I\}$

O argumento $P(x) \vdash \forall x P(x)$ não é válido.

O elemento x pode ter a propriedade P, mas isso não significa que todos os elementos do domínio também possuem essa propriedade.

Por exemplo, considere como universo de discurso o conjunto de todos os carros e $P(x)$ a sentença "x é amarelo". Neste caso, algum carro particular pode ser amarelo, mas isso não significa que todos os carros sejam amarelos.

3.1.2 Regras para o quantificador existencial

Eliminação do quantificador existencial

A regra **instanciação existencial**, representada simbolicamente por $\{\exists_E\}$, permite concluir que existe um elemento c no domínio para o qual $P(c)$ é verdadeira, se sabemos que $\exists x, P(x)$ é verdadeira. Neste caso, não é necessário tomar um valor de c arbitrário, pode ser apenas um valor qualquer que torne $P(c)$ verdadeira.

$$\frac{\exists x, P(x)}{P(c) \text{ para algum elemento } c}\ \{\exists_E\}$$

Em outras palavras, essa regra diz que a partir de $\exists x, P(x)$ podemos deduzir $P(a), P(b)$ ou $P(c)$, desde que essas sejam novas constantes, retirando um quantificador existencial. A justificativa é que, se $P(x)$ é verdadeira para algum elemento do universo de discurso podemos dar um nome específico a esse elemento, porém não podemos supor mais nada sobre ele.

Exemplo 3.6 Considere os seguintes argumentos:

a) Se existe pelo menos uma mulher inteligente, então alguma mulher é inteligente.

Seja a sentença "x é inteligente". Existe um elemento c no domínio que torna a sentença verdadeira ("existe pelo menos uma mulher inteligente"), então podemos concluir que "alguma mulher é inteligente".

b) $$\frac{\exists x[A(x) \wedge B(x)]}{A(c) \wedge B(c)}$$

Introdução do quantificador existencial

A regra **generalização existencial**, representada simbolicamente por $\{\exists_I\}$, é usada para concluir que $\exists x, P(x)$ é verdadeira quando é conhecido um elemento particular c no domínio para o qual $P(c)$ verdadeira.

$$\frac{P(c) \text{ para algum elemento } c}{\exists x, P(x)}\ \{\exists_I\}$$

Esta regra diz que: de $P(x)$ ou $P(c)$ podemos fazer a inserção de um quantificador existencial e deduzir $\exists x, P(x)$, ou seja, alguma coisa foi nomeada como tendo a propriedade P, então, podemos dizer que existe alguma coisa que possui a propriedade P.

Exemplo 3.7 Considere os seguintes argumentos:

a) Se Maria é inteligente, então existe pelo menos uma mulher inteligente.

Seja a sentença "x é inteligente" e Maria um elemento que pertence ao domínio conjunto de mulheres. Da sentença verdadeira " Maria é inteligente" podemos concluir que "existe pelo menos uma mulher inteligente".

b) $\dfrac{A(c) \wedge B(c)}{\exists x[A(x) \wedge B(x)]}$

A tabela 3.1 apresenta um resumo das regras de inferência para quantificadores e as restrições para o uso dessas regras.

Tabela 3.1: Regras de Inferência para quantificadores.

Regra	**De**	**Podemos deduzir**	**Restrição**
$\{\forall_E\}$	$\forall x, P(x)$	$P(a)$, em que a é uma variável arbitrária ou um símbolo constante.	Se a for uma variável, não deve estar dentro do escopo de um quantificador ...
$\{\exists_E\}$	$\exists x, P(x)$	$P(c)$, em que c é um símbolo constante não utilizado anteriormente.	É necessário que seja a primeira regra a usar.
$\{\forall_I\}$	$P(x)$	$\forall x, P(x)$	$P(x)$ não pode ser deduzida de nenhuma hipótese na qual x é uma variável livre. Também não pode ser deduzida por meio do $\{\exists_E\}$ de uma fórmula onde x é variável livre.
$\{\exists_I\}$	$P(x)$ ou $P(c)$	$\exists x, P(x)$	Para ir de $P(c)$ a $\exists x, P(x)$, temos que x não pode aparecer em $P(c)$.

Aplique as regras de inferência para o lógica dos predicados quando a fórmula possuir o mesmo formato que a regra. A sequência de demonstração consiste nos seguintes passos:

1. Retirar os quantificadores.
2. Manipular as fórmulas bem formulada.
3. Inserir os quantificadores quando necessário.

Exemplo 3.8 Prove o argumento:

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$$

Prova:

1.	$\forall x P(x)$	hipótese
2.	$P(x)$	1, $\{\forall_E\}$
3.	$\exists x P(x)$	2, $\{\exists_I\}$

■

Exemplo 3.9 Mostre que as premissas:"Todos os alunos desta turma de BCC101 estão fazendo um curso de ciência da computação" e "Hugo é um aluno desta da turma de BCC101" implica na conclusão "Hugo está frequentando o curso de ciência da computação".

Solução

Sejam as declarações:

$P(x)$:	x está na turma de BCC101.
$Q(x)$:	x está fazendo o curso de ciência da computação.
$P(Hugo)$:	Hugo está na turma de BCC101.
$Q(Hugo)$:	Hugo está fazendo o curso de ciência da computação.

As premissas são representadas simbolicamente por $\forall x[P(x) \to Q(x)]$ e $P(Hugo)$ e a conclusão por $Q(Hugo)$.

A conclusão pode ser obtida a partir dos seguintes passos:

1	$\forall x[P(x) \to Q(x)]$	Hipótese
2	$P(Hugo)$	Hipótese
3	$P(Hugo) \to Q(Hugo)$	1, $\{\forall_E\}$
4	$Q(Hugo)$	3,2, {Modus Ponens}

Exemplo 3.10 Faça a dedução do argumento

$$\begin{array}{c} \exists x[P(x) \land Q(x)] \\ \forall x[P(x) \to S(x)] \\ \hline \exists x[S(x) \land Q(x)] \end{array}$$

Prova: .

1	$\exists x[P(x) \land Q(x)]$	Hipótese
2	$\forall x[P(x) \to S(x)]$	Hipótese
3	$P(a) \land Q(a)$	1, $\{\exists_E\}$
4	$P(a) \to S(a)$	2, $\{\forall_E\}$
5	$P(a)$	3, $\{\land Ee\}$
6	$S(a)$	4,5, {Modus Ponens}
7	$Q(a)$	3, $\{\land Ed\}$
8	$S(a) \land Q(a)$	6,7, $\{\land I\}$
9	$\exists x[S(x) \land Q(x)]$	8, $\{\exists_I\}$

■

Exercício: Prove o argumento

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$

3.2 Combinando a Dedução Natural para Proposições e Predicados

A regra **modus ponens universal** é uma combinação da aplicação das regras instanciação universal e *modus ponens*. Esta regra diz que se $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ é verdadeira, e se $P(a)$ é verdadeira para algum elemento particular a no domínio do quantificador universal, então $Q(a)$ deve ser verdadeira. Esta regra é escrita como:

$$\begin{array}{l} \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \\ P(a), \text{ em que } a \text{ é um elemento particular no domínio} \\ \hline Q(a) \end{array}$$

De forma análoga, a regra **modus tollens universal** é uma combinação da aplicação das regras instanciação universal e *modus tollens*, que pode ser expressa por:

$$\begin{array}{l} \forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \\ \neg Q(a), \text{ em que } a \text{ é um elemento particular no domínio} \\ \hline \neg P(a) \end{array}$$

3.3 Equivalências Algébricas

As leis algébricas estudadas na lógica proposicional também são válidas para lógica de predicados. A seguir são apresentadas mais novas leis para manipulação dos quantificadores universal e existencial.

Equivalências	Nomes
$\neg\forall, P(x) \equiv \exists x, \neg P(x)$	$\{\neg\forall\}$
$\forall x, P(x) \wedge Q(x) \equiv \forall x, P(x) \wedge \forall x, Q(x)$	$\{\wedge\forall\}$

Equivalências	Nomes
$\neg\exists, P(x) \equiv \forall x, \neg P(x)$	$\{\neg\exists\}$
$\exists x, P(x) \vee Q(x) \equiv \exists x, P(x) \vee \exists x, Q(x)$	$\{\vee\exists\}$

Exemplo 3.11 Prove que

$$\forall x, [F(x) \wedge \neg G(x)] \equiv \forall x, F(x) \wedge \neg\exists x, G(x)$$

Prova: .

$$\begin{aligned} \forall x, [F(x) \wedge \neg G(x)] &\equiv \\ &\equiv \forall x, F(x) \wedge \forall, \neg G(x) && \{\wedge\forall\} \\ &\equiv \forall x, F(x) \wedge \neg\exists x, G(x) && \{\neg\forall\} \end{aligned}$$

■

3.4 Exercícios

Exercícios adaptados dos livros [3, 2, 1]

1. Use as regras de inferência para mostrar que:
   (a) Se $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ e $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ são verdadeiras, então $\forall(R(x) \wedge S(x))$ também é verdadeira, em que os domínios de todos os quantificadores são os mesmos.
   (b) Se $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \forall x(\neg Q(x) \vee S(x)), \forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ e $\exists x \neg P(x)$ são verdadeiras, então $\exists x \neg R(x)$ é verdadeira.
2. Verifique se as fórmulas bem formadas são argumentos válidos.
   (a) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]$
   (b) $\exists x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \exists x P(x,y)$
   (c) $\forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$
3. Prove as equivalências:
   (a) $\forall x, [P(x) \rightarrow \neg Q(x)] \equiv \neg\exists x, [P(x) \wedge Q(x)]$
   (b) $\neg\forall x, \exists y, [R(x,y) \wedge \neg P(x,y)] \equiv \exists x, \forall y, [R(x,y) \rightarrow P(x,y)]$

Referências Bibliográficas

[1] GERSTING, J. L. *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Matemática Discreta e suas Aplicações*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

[2] ROSEN, K. H. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6ª. ed. Porto Alegre: Mc Graw Hill, 2010.

[3] FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

[4] HAMMACK, R. H. *Book of Proof*. 2ª. ed. [S.l.]: Richard Hammack, 2013. v. 1.

[5] DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4ª. ed. São Paulo: atlas, 2016.

[6] LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Matemática Discreta*. 2ª. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

Formulário de Matemática Discreta (BCC101) - DECOM/UFOP

Equivalências lógicas básicas

Equivalências	Nomes
$P \wedge false \equiv false$	$\{\wedge -$ Dominação$\}$
$P \wedge true \equiv P$	$\{\wedge -$ Identidade$\}$
$P \wedge P \equiv P$	$\{\wedge -$ Idempotência$\}$
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$\{\wedge -$ Comutatividade$\}$
$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$\{\wedge -$ Associatividade$\}$
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$\{\wedge -$ Distributividade$\}$
$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\{\wedge -$ DeMorgan$\}$
$(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$	$\{\vee -$ Absorção$\}$
$\neg true \equiv false$	$\{T -$ Negação$\}$
$P \wedge \neg P \equiv false$	$\{$Contradição$\}$
$\neg(\neg P) \equiv P$	$\{$Dupla Negação$\}$
$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	$\{$Implicação$\}$

Equivalências	Nomes
$P \vee true \equiv true$	$\{\vee -$ Dominação$\}$
$P \vee false \equiv P$	$\{\vee -$ Identidade$\}$
$P \vee P \equiv P$	$\{\vee -$ Idempotência$\}$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$\{\vee -$ Comutatividade$\}$
$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$	$\{\vee -$ Associatividade$\}$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\{\vee -$ Distributividade$\}$
$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$\{\vee -$ DeMorgan$\}$
$(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$	$\{\wedge -$ Absorção$\}$
$\neg false \equiv true$	$\{F -$ Negação$\}$
$P \vee \neg P \equiv true$	$\{$Terceiro Excluído$\}$
$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$\{$Bi-implicação$\}$
$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	$\{$Contrapositivo$\}$

Equivalências lógicas derivadas envolvendo condicionais e bicondicionais

Nomes	Equivalências
$\{1 \rightarrow\}$	$P \vee Q \equiv \neg P \rightarrow Q$
$\{2 \rightarrow\}$	$P \wedge Q \equiv \neg(P \rightarrow \neg Q)$

Nomes	Equivalências
$\{3 \rightarrow\}$	$\neg(P \rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$
$\{1 \leftrightarrow\}$	$P \leftrightarrow Q \equiv \neg P \leftrightarrow \neg Q$

Nomes	Equivalências
$\{2 \leftrightarrow\}$	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
$\{3 \leftrightarrow\}$	$\neg(P \leftrightarrow Q) \equiv P \leftrightarrow \neg Q$

Regras de Inferência - Dedução Natural

Regras de Inferência	Nomes
$P \vdash P$	$\{ID\}$
$P \vdash \neg\neg P$	$\{\neg I\}$
$\neg\neg P \vdash P$	$\{\neg E\}$
$P, Q \vdash P \wedge Q$ ou $P, Q \vdash Q \wedge P$	$\{\wedge I\}$
$P \wedge Q \vdash P$	$\{\wedge Ee\}$
$P \wedge Q \vdash Q$	$\{\wedge Ed\}$
$P \vdash P \vee Q$	$\{\vee I\}$
$P \vee Q, P \rightarrow T, Q \rightarrow T \vdash T$	$\{\vee E\}$
$F \vdash P$	$\{CTR\}$
$\dfrac{[\neg P] \vdash F}{P}$	$\{RRA\}$

Regras de Inferência	Nomes
$P \vee Q, \neg Q \vdash P$ ou $P \vee Q, \neg P \vdash Q$	$\{SD\}$
$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$	$\{SH\}$
$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R \vdash Q \vee S$	$\{DC\}$
$P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg Q \vee \neg S \vdash \neg P \vee \neg R$	$\{DD\}$
$P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow P \wedge Q$	$\{RA\}$
$P \vee Q, \neg P \vee R \vdash Q \vee R$	$\{RR\}$
$P, \neg P \vdash F$	$\{\bot I\}$
$P, P \rightarrow Q \vdash Q$	$\{\rightarrow E\}$ ou $\{$Modus Ponens$\}$
$\neg Q, P \rightarrow Q \vdash \neg P$	$\{\rightarrow E_{MT}\}$ ou $\{$Modus Tollens$\}$
$\dfrac{Q \quad [P]}{P \rightarrow Q}$	$\{RPC\}$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(a)}\{\forall_E\} \qquad \frac{P(a) \text{ para um } a \text{ arbitrário}}{\forall x.P(x)}\{\forall_I\} \qquad \frac{\exists x.P(x)}{P(c) \text{ para um } c}\{\exists_E\} \qquad \frac{P(c) \text{ para um } c}{\exists x.P(x)}\{\exists_I\}$$

Equivalências para a lógica dos predicados

Equivalências	Nomes
$\neg\forall x.P(x) \equiv \exists x.\neg P(x)$	$\{\neg\forall\}$
$\forall x.P(x) \wedge Q(x) \equiv \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$	$\{\wedge\forall\}$

Equivalências	Nomes
$\neg\exists x.P(x) \equiv \forall x.\neg P(x)$	$\{\neg\exists\}$
$\exists x.P(x) \vee Q(x) \equiv \exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$	$\{\vee\exists\}$

Respostas Dos Exercícios

Aula 9

1.1.4 - Lógica dos Predicados

1. (a) V
   (b) V
   (c) F
2. (a) V
   (b) V
   (c) F
   (d) F
3. (a) A = {Todos estudantes no curso de matemática discreta} e B = {Todos os estudantes na UFOP}
   (b) A = {Todos os professores da UFOP } e B = {Todas os alunos da UFOP}

1.2.3 - Quantificadores

1. (a) V
   (b) F
2. (a) V
   (b) V
   (c) V
   (d) V
3. (a) $P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$
   (b) $P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$
   (c) $\neg P(0) \wedge \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4)$
   (d) $\neg P(0) \vee \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$
   (e) $\neg(P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4))$
   (f) $\neg(P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4))$
4. (a) Não existe contra-exemplo.
   (b) Contra-exemplo: $x = 0$
   (c) Contra-exemplo: $x = 2$.
5. (a) A proposição é verdadeira, pois o número 3 é o único elemento no conjunto dos números naturais que satisfaz a sentença.
   (b) A proposição é falsa, pois os número -5 e 5 do conjunto dos números inteiros satisfazem a sentença.

(c) A proposição é falsa, pois os números 0, 1, 2, e 3 do conjunto dos números naturais possuem fatorial menores que 10.

(d) A proposição é verdadeira, pois o número 2 do conjunto dos números inteiro é o único elemento que torna a sentença verdadeira.

1.3.5 - Sintaxe e Semântica da Lógica dos Predicados

1. (a) $Q(0,0,0) \land Q(0,1,0)$
   (b) $Q(0,1,1) \lor Q(1,1,1) \lor Q(2,1,1)$
   (c) $\neg Q(0,0,0) \lor \neg Q(0,0,1)$
   (d) $\neg Q(0,0,1) \lor \neg Q(1,0,1) \lor \neg Q(2,0,1)$

Aula 10

2.1.3 - Sintaxe e Semântica da Lógica dos Predicados

1. (a) T
   (b) F
   (c) T
2.

	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$	$\{0,1\}$
$\forall x \exists y, (x > y)$	T	F	F
$\forall x \exists y, (y > x)$	T	T	F
$\exists x \forall y, (x > y)$	F	F	F
$\exists x \forall y, (x \geq y)$	F	F	T
$\exists y \forall x, (x \geq y)$	F	T	T
$\exists y \exists z \forall x, (x = y \lor x = z)$	F	F	T
$\forall x \exists y, (x - y = 0)$	T	F	F
$\forall x \forall y \forall z, (x = y \land y = z \to x = z)$	T	T	T
$\forall x \forall y, (x \neq x \to y = 0)$	T	T	T
$\forall x \exists y \exists z, (x + y = z \to x = 1 \lor x = 0)$	F	F	T

3. (a) $P(1,1) \land P(1,2) \land P(1,3) \land P(2,1) \land P(2,2) \land P(2,3) \land P(3,1) \land P(3,2) \land P(3,3)$
   (b) $P(1,1) \lor P(1,2) \lor P(1,3) \lor P(2,1) \lor P(2,2) \lor P(2,3) \lor P(3,1) \lor P(3,2) \lor P(3,3)$
   (c) $(P(1,1) \land P(1,2) \land P(1,3)) \lor (P(2,1) \land P(2,2) \land P(2,3)) \lor (P(3,1) \land P(3,2) \land P(3,3))$
   (d) $(P(1,1) \lor P(1,2) \lor P(1,3)) \land (P(2,1) \lor P(2,2) \lor P(2,3)) \land (P(3,1) \lor P(3,2) \lor P(3,3))$
4. (a) $\exists x \forall y \exists z, \neg T(x,y,z)$
   (b) $\exists x \forall y, \neg P(x,y) \land \exists x \forall y, \neg Q(x,y)$
   (c) $\exists x \forall y, [\neg P(x,y) \lor \forall z \neg R(x,y,z)]$
   (d) $\exists x \forall y, [P(x,y) \land \neg Q(x,y)]$
5. (a) $x = 2,\ y = -2$
   (b) $x = -4$
   (c) $x = 17,\ y = -1$

2.2.1 - Equivalências Lógicas Envolvendo Quantificadores

1. Sentenças b) e c).
2. (a) Não são equivalentes. Seja P(x) qualquer função proposicional que pode ser verdadeira ou falsa, se seja Q(x) qualquer função proposicional falsa. Então $\forall x(P(x) \to Q(x))$ é falsa, mas $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ é verdadeira.

   (b) São equivalentes. Ambas as sentenças são verdadeiras, se para pelo menos um valor de x no domínio, pelo menos uma entre P(x) e Q(x) for verdadeira.
3. (a) Se A for verdadeira, então ambos os lados são logicamente equivalentes a $\forall x, P(x)$. Se A for falsa, o lado esquerdo é falso. Além disso, para todo $x, P(x) \wedge$ é falsa, de modo que o lado direito é falso. Logo os dois lados são equivalentes.

   (b) Se A for verdadeira, então ambos os lados são logicamente equivalentes a $\exists x, P(x)$. Se A for falsa, o lado esquerdo é falso. Além disso, para todo $x, P(x) \wedge A$ é falsa, de modo que $\exists x(P(x) \wedge A)$ é falsa. Logo os dois lados são logicamente equivalentes.

   (c) Vamos provar que as sentenças são equivalentes argumentando que um lado é verdadeiro se, e somente se, o outro lado for verdadeiro. Suponha que A seja verdadeira. Então, para casa $x, P(x) \to A$ é verdadeira e portanto, o lado esquerdo é sempre verdadeiro. De forma análoga, o lado direito também é sempre verdadeiro. Assim, para o caso em que A é verdadeira, as duas proposições são logicamente equivalentes. Suponha agora que A seja falsa. Existem dois subcasos: 1) Seja P(x) falsa para todo x, então $P(x) \to A$ é trivialmente verdadeira e portanto, o lado esquerdo é verdadeiro. De forma análoga, o lado direito também é verdadeiro, pois $\exists x, P(x)$ é falso. 2) Seja P(x) verdadeira para algum x. Então, para cada $x, P(x) \to A$ é falsa de modo que lado esquerdo é falso. De forma análoga, o lado direito também é falso, pois $\exists x, P(x)$ é verdadeira mas A é falsa. Dessa forma, podemos concluir que em todos os casos temos que as duas proposições possuem o mesmo valor-verdade e portanto são logicamente equivalentes.

   (d) Vamos provar que as sentenças são equivalentes argumentando que um lado é verdadeiro se, e somente se, o outro lado for verdadeiro. Se A for verdadeira, então ambos os lados são verdadeiros pois as afirmações condicionais têm conclusões verdadeiras. Se A for falsa, então existem dois subcasos: 1) Se P(x) for falsa para algum x, então $P(x) \to A$ é verdadeira para este x, de modo que o lado esquerdo é verdadeiro. O mesmo raciocínio mostra que o lado direito também é verdadeiro, pois $\forall x P(x)$ é falso. 2) Se P(x) for verdadeira para todo x, então para todo $x, P(x) \to A$ é falsa, de modo que o lado esquerdo é falso (não existe nenhum x que torne a afirmação condicional verdadeira). O lado direito também é falso, pois se trata de uma afirmação condicional com hipótese verdadeira e uma conclusão falsa. Assim, em todos os casos, temos que as duas proposições possuem o mesmo valor-verdade.
4. Para mostrar que estas proposições não são logicamente equivalentes, seja $P(x)$ a afirmação "x é positivo" e seja $Q(x)$ a afirmação "x é negativo" com domínio no conjunto dos números inteiros. Então $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ é verdadeira, porém $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ é falsa.
5.
$$\begin{aligned} \neg[\exists x \forall y P(x,y)] &\equiv \forall x, \neg[\forall y P(x,y)] \\ &\equiv \forall x \exists y, \neg P(x,y) \end{aligned}$$

2.3.1 - Formalização das Sentenças

1. (a) Existe um estudante que passa mais que 5 horas em aula todos os dias da semana.
   (b) Todo estudante passa mais que 5 horas em aula todos os dias da semana.
   (c) Existe um estudante que não passa mais que 5 horas em aula todos os dias da semana.
   (d) Nenhum estudante passa mais que 5 horas em aula todos os dias da semana.
2. (a) Todo comediante é divertido.
   (b) Todo mundo é comediante
   (c) Existe uma pessoa tal que se ela for comediante, então ela será divertida.
   (d) Alguns comediantes são divertidos.
3. (a) $\exists n \in \mathbb{Z}.10 = 5n$
   (b) $\forall x.\exists n \in \mathbb{Z}.x = 10n \rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}.x = 5n$
   (c) $\forall x.\exists n \in \mathbb{Z}.x = 2n \rightarrow x > 20$
   (d) $\neg\exists x.\exists n \in \mathbb{Z}.x = 2n+1 \wedge x > 10$
4. (a) Seja $P(x)$ "x é perfeito", $F(x)$ "x é seu amigo" e considere o domínio de todas as pessoas. Então $\forall x, \neg P(x)$.
   (b) $\neg\forall x, P(x)$
   (c) $\forall x, (F(x) \rightarrow P(x))$
   (d) $\exists x, (F(x) \wedge P(x))$
   (e) $\forall x, (F(x) \wedge P(x))$ ou $(\forall x, F(x)) \wedge (\forall x, P(x))$
   (f) $(\neg\forall x, F(x)) \vee (\exists x, \neg P(x))$
5. (a) Para todo número real x existe um número real y tal que x é menor que y
   (b) Para todo número real x e todo número real y, se x e y forem ambos não negativos, então seu produto é não negativo.
   (c) Para todo número real x e todo número real y, existe um número real z tal que $xy = z$.
6. (a) $\forall x P(x)$, onde $P(x)$ é "x precisa de um curso de matemática discreta" e o domínio consiste em todos os estudantes de ciência da computação.
   (b) $\exists x P(x)$, onde $P(x)$ é "x possui seu próprio computador" e o domínio consiste em todos os estudantes desta sala.
   (c) $\forall x \exists y, P(x,y)$, onde $P(x,y)$ é "x cursou a disciplina y" e o domínio para x consiste em todos os estudantes nesta sala e para y consiste em todas as disciplinas de ciências da computação.
   (d) $\exists x \exists y, P(x,y)$, onde $P(x,y)$ e o domínio são os mesmos para a letra c).
   (e) $\forall x \forall y, P(x,y)$, onde $P(x,y)$ é "x já esteve em y ", o domínio para x consiste em todos os estudantes desta sala e o domínio para y consiste em todos os prédios do campus.
   (f) $\exists x \exists y \forall z, [P(z,y) \rightarrow Q(x,z)]$, onde $P(z,y)$ é "z está em y " e $Q(x,z)$ é " x já esteve em z", o domínio para x consiste em todos os estudantes na sala, para y consiste em todos os prédios do campus e para z consiste em todas as salas.
   (g) $\forall x \forall y \exists z, [P(z,y) \wedge Q(x,z)]$, para o mesmo ambiente da letra f).
7. (a)
   (b) $(\forall x)(D(x) \rightarrow S(x))$
   (c) $(\exists x)(D(x) \wedge \neg R(x))$ ou $\neg[(\forall x)(D(x) \rightarrow R(x))]$
   (d) $(\forall x)(D(x) \wedge S(x) \rightarrow \neg R(x))$

(e) $(\exists x)(D(x) \wedge S(x) \wedge R(x))$

(f) $(\forall x)[D(x) \rightarrow \neg(S(x) \wedge R(x))]$

(g) $(\forall x)(D(x) \wedge S(x) \rightarrow D(x) \wedge R(x))$

(h) $(\forall x)[D(x) \rightarrow \neg S(x)]$

(i) $S(M) \rightarrow (\forall x)(D(x) \rightarrow S(x))$

(j) $R(M) \wedge R(T)$

(k) $(\exists x)(D(x) \wedge R(x)) \rightarrow (\forall x)(D(x) \rightarrow S(x))$

8. (a) $\exists x, A(\text{João}, x)$

   (b) $\exists x, (A(\text{João}, x) \wedge I(x))$

   (c) $\forall x \exists y, A(x,y)$

   (d) $\forall x \exists y, (A(x,y) \wedge I(y))$

   (e) $\forall x, (A(x, \text{João}) \rightarrow I(x))$

   (f) $\forall x, (A(x, \text{João}) \wedge \neg A(x, \text{Maria}) \rightarrow I(x))$

   (g) $\forall x, (\neg A(x, \text{Maria}) \wedge I(x) \rightarrow A(\text{João}, x))$

   (h) $\neg \forall y \exists x, (A(x,y) \wedge I(x))$

9. (a) João é vistoso e Kátia ama João.

   (b) Todos os homens são vistosos.

   (c) Todas as mulheres amam apenas homens vistosos.

   (d) Um homem vistoso ama kátia.

   (e) Algumas mulheres bonitas amam apenas homens vistosos.

   (f) João ama todas as mulheres bonitas.

10. $\forall x \exists a \exists b \exists c \exists d, [(x > 0) \rightarrow x = a^2 + b^2 + c^2 + d^2]$, em que o domínio consiste de todos os números inteiros.

11. $\forall m \forall b, (m \neq 0 \rightarrow \exists x, (mx + b = 0 \wedge \forall c, (mc + b = 0 \rightarrow c = x)))$

12. (a) $\forall x \forall y, [(x < 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy > 0)]$

    (b) $\forall x, (x - x = 0)$

    (c) $\forall x \exists a \exists b [a \neq b \wedge \forall c (c^2 = x \leftrightarrow (c = a \vee c = b))]$

    (d) $\forall x, [(x < 0) \rightarrow \neg \exists y, (x = y^2)]$

Aula 11

3.4 - Dedução Natural para Lógica dos Predicados

1. (a)

1.	$\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$	hipótese
2.	$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	hipótese
3.	$P(a) \wedge R(a)$	2, $\{\forall_E\}$
4.	$P(a)$	3, $\{\wedge Ee\}$
5.	$P(a) \rightarrow (Q(a) \wedge S(a))$	1, $\{\forall_E\}$
6.	$Q(a) \wedge S(a)$	4,5, $\{\rightarrow E\}$ ($\{ModusPonens\}$)
7.	$S(a)$	6, $\{\wedge Ed\}$
8.	$R(a)$	3, $\{\wedge Ed\}$
9.	$R(a) \wedge S(a)$	7,8, $\{\wedge I\}$
10.	$\forall (R(x) \wedge S(x))$	9, $\{\forall_I\}$

(b)

1.	$\forall x(P(x) \vee Q(x))$	hipótese
2.	$\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$	hipótese
3.	$\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$	hipótese
4.	$\exists x \neg P(x)$	hipótese
5.	$\neg P(a)$	4, $\{\forall_E\}$
6.	$P(c) \vee Q(c)$	1, $\{\forall_E\}$
7.	$Q(c)$	5,6, $\{SD\}$
8.	$\neg Q(c) \vee S(c)$	2, $\{\forall_E\}$
9.	$S(c)$	7,8, $\{SD\}$
10.	$R(c) \rightarrow \neg S(c)$	3, $\{\forall_E\}$
11.	$\neg R(c)$	9,10, {Modus Tollens}
12.	$\exists x \neg R(x)$	11, $\{\exists_I\}$

2. (a)

1.	$\forall x P(x)$	hipótese
2.	$P(x)$	1, $\{\forall_E\}$
3.	$P(x) \vee Q(x)$	2, $\{\vee I\}$
4.	$\forall x[P(x) \vee Q(x)]$	4, $\{\forall_E\}$

(b)

1.	$\exists x \exists y P(x,y)$	hipótese
2.	$\exists y P(a,y)$	1, $\{\exists_E\}$
3.	$P(a,b)$	2, $\{\exists_E\}$
4.	$\exists x P(x,b)$	3, $\{\exists_I\}$
5.	$\exists y \exists x P(x,y)$	4, $\{\exists_I\}$

(c)

1.	$\forall x P(x)$	hipótese
2.	$\exists x \neg P(x)$	hipótese
3.	$\neg P(a)$	2, $\{\exists_E\}$
4.	$P(a)$	1, $\{\forall_E\}$
5.	F	3,4, $\{\perp I\}$
6.	$Q(a)$	5, $\{CTR\}$
7.	$\exists x Q(x)$	6, $\{\exists_I\}$

3. (a)

(b)