Aula 1 - Lógica Proposicional, de Predicados e Dedução Natural

Tutoria de BCC101 - Matemática Discreta I

Departamento de Computação. Universidade Federal de Ouro Preto.

Lógica Proposicional

1. Determine se as sentenças a seguir são proposições ou não. Para as sentenças que forem proposições, classifique-as em simples ou compostas; caso contrário, justifique porque ela não é uma proposição.
   (a) Taipei é a capital de Taiwan
   (b) Eles visitaram a praia de Copacabana e comeram camarão
   (c) $3 + 9$
   (d) $4 > 5$
   (e) Essa sentença é falsa
   (f) Nenhum solteiro é casado ou todas as flores são plantas, ou ambos
   (g) Visite Atenas!
   (h) x é par, para todo $x > 1$
   (i) $2 + 3 = 5$ e um século são 100 anos
   (j) $x = 2k + 1$

2. Escreva as seguintes proposições utilizando símbolos da Lógica Proposicional ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\oplus$).
   (a) Se há carros, há fumaça
   (b) Ou Leibniz escreveu *O Pequeno Príncipe*, ou Spinoza escreveu a *Ética*, mas Arendt escreveu *Sobre a Violência*
   (c) Cenoura faz bem à saude ou cogumelos são tóxicos, ou ambos
   (d) 3 ser um número irracional é necessário para que elefantes possam subir em árvores, e frases não precisam fazer sentido.
   (e) Platão ter escrito sobre Sócrates é suficiente para que Sócrates tenha existido, mas Perrault ter escrito sobre Cinderela não é suficiente para que ela tenha existido.

3. Considere as seguintes proposições:

   $A =$ "Alice entende o gato"
   $C =$ "Alice entende o chapeleiro maluco"
   $L =$ "Alice poderá sair do labirinto"
   $M =$ "Alice está louca"

   Qual das seguintes fórmulas representa corretamente a sentença "Se Alice não entende o gato, nem o chapeleiro maluco, ou ela não poderá sair do labirinto ou ela está louca"?

   (a) $\neg(A \vee \neg C) \rightarrow L \vee M$

   (b) $\neg(A \vee C) \rightarrow (L \wedge M)$

   (c) $\neg A \wedge \neg C \rightarrow \neg L \wedge \neg M \vee L \wedge M$

   (d) $(A \leftrightarrow M) \wedge (C \leftrightarrow L)$

4. Utilize tabelas-verdade para determinar se as seguintes fórmulas são satisfazíveis, contradições ou tautologias:

   (a) $P \vee \neg P \leftrightarrow \neg P \vee Q \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$

   (b) $P \wedge Q \wedge (\neg P \vee Q \rightarrow \neg(P \wedge \neg Q))$

   (c) $(\neg P \wedge Q \leftrightarrow P \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)$

5. Mostre, usando álgebra booleana, as seguintes equivalências:

   (a) $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$

   (b) $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) \equiv P \rightarrow (Q \vee R)$

Lógica de Predicados

1. Reescreva as sentenças a seguir como fórmulas da Lógica de Predicados. Considere os predicados, em que o universo de discurso são personagens da série animada *Bob Esponja Calça Quadrada*:

   $A(x, y) = x$ é amigo de y
   $T(x) = x$ trabalha no Siri Cascudo

   (a) Bob Esponja é amigo de Patrick e trabalha no Siri Cascudo.

   (b) Lula Molusco não é amigo de quem trabalha no Siri Cascudo.

   (c) Ninguém que é amigo de Pérola é amigo de Sandy nem trabalha no Siri Cascudo.

   (d) Alguém que trabalha no Siri Cascudo é amigo de alguém que não trabalha no Siri Cascudo.

   (e) Os funcionários do Siri Cascudo são amigos de Seu Siriguejo.

(f) Nem todos os amigos do Homem Sereia trabalham no Siri Cascudo, mas nenhum funcionário do Siri Cascudo é amigo do Mexilhãozinho.

(g) Se os amigos de Lula Molusco são amigos de Patrick, então os amigos de Bob Esponja não são amigos de algum amigo de Sandy que trabalha no Siri Cascudo

2. Mostre as seguintes equivalências usando raciocínio algébrico:

   (a) $\exists x.P(x) \vee Q(x) \equiv \neg\forall x.\neg P(x) \vee \neg\forall x.\neg Q(x)$

   (b) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \neg\exists x.\neg(\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$

   (c) $\neg\forall x.\exists y(A(y) \wedge B(x, y)) \equiv \exists x.\forall y(A(y) \rightarrow \neg B(x, y))$

Dedução Natural

1. Demonstre os seguintes sequentes, utilizando um sistema de Dedução Natural. Considere $\mathbb{U} = \{u, v, ...\}$ (infinito) como o universo de discurso dos predicados:

   (a) $\neg A \vdash (A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

   (b) $\vdash (A \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$

   (c) $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

   (d) $P \vee (Q \rightarrow R), Q \vdash P \vee R$

   (e) $\neg A \vee B \vdash \neg(A \wedge \neg B)$

   (f) $\vdash \exists x(R(x) \wedge P \rightarrow P)$

   (g) $\forall x(P(x) \wedge S(x)) \vdash (\forall x P(x)) \wedge (\forall y P(y))$