

动态规划

- 动态规划
 - 问题索引
 - 线性 DP
 - 数字三角形
 - 基本
 - 变式
 - 最长上升子序列 (LIS)
 - 基本
 - 变式
 - 求可变序列与给定数同余的方案数
 - 将给定序列分段，保证每段和不超过给定数情况下，求每段中「所有数的最大值」之和的最小值
 - 背包
 - 基础
 - 变式
 - 体积定义为「至少」
 - 特殊化的「有依赖」背包问题
 - 一般化的「有依赖」背包问题
 - 求方案数与具体方案
 - 「贪心」将无限集缩小为有限集
 - 单调队列优化多重背包
 - 二维费用背包问题
 - 状态机 DP
 - 基础
 - 变式
 - 状态压缩 DP
 - 基础
 - 变式
 - 区间 DP
 - 基础
 - 变式
 - 环形问题的一般化处理思路
 - 树形 DP
 - 基础
 - 变式
 - 数位 DP
 - 基础
 - 单调队列优化

问题索引

单调队列中，只需考虑队头元素：单调队列优化多重背包

单调队列中，**需要考虑所有元素**：将给定序列分段，保证每段和不超过给定数情况下，求每段中「所有数的最大值」之和的最小值

线性 DP

数字三角形

基本

[AcWing 1015. 摘花生](#)

变式

[AcWing 1018. 最低通行费](#)

[AcWing 1027. 方格取数](#)

[AcWing 275. 传纸条](#)

最长上升子序列 (LIS)

基本

[AcWing 895. 最长上升子序列](#)

[AcWing 896. 最长上升子序列 II](#)

[AcWing 897. 最长公共子序列](#)

变式

[AcWing 1017. 怪盗基德的滑翔翼](#)

[AcWing 1014. 登山](#)

[AcWing 482. 合唱队形](#)

[AcWing 1012. 友好城市](#)

[AcWing 1016. 最大上升子序列和](#)

[AcWing 1010. 拦截导弹](#)

[AcWing 187. 导弹防御系统](#)

[AcWing 272. 最长公共上升子序列](#)

求可变序列与给定数同余的方案数

原题链接：[AcWing 1214. 波动数列](#)

► 题目

1, 3, 0, 2, − 1, 1, − 2, ...

这个数列中后一项总是比前一项增加2或者减少3，且每一项都为整数。

栋栋对这种数列很好奇，他想知道长度为 n 和为 s 而且后一项总是比前一项增加 a 或者减少 b 的整数数列可能有多少种呢？

输入格式

共一行，包含四个整数 n,s,a,b ，含义如前面所述。

输出格式

共一行，包含一个整数，表示满足条件的方案数。

由于这个数很大，请输出方案数除以 100000007 的余数。

数据范围

$1 \leq n \leq 1000, -10^9 \leq s \leq 10^9, 1 \leq a, b \leq 10^6$

输入样例

4 10 2 3

输出样例

2

样例解释:

两个满足条件的数列分别是2 4 1 3和7 4 1 -2。

我们设数列第一项为 x ，第二项为 $x + d_1$ ，第 i 项为 $x + d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1}$ ，那么对于长度为 n 的序列和为 $s = x + (x + d_1) + (x + d_1 + d_2) + \cdots + (x + d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1})$ ，即：

$$s = nx + (n - 1)d_1 + (n - 2)d_2 + \cdots + (n - i)d_i + \cdots + d_{n-1}, d_i \in \{a, -b\}$$

此时问题转变成：对于给定的每个 s 与 n ，在 d_i 任意取值的情况下，等式成立的个数

由于 $x \in Z$ ，并且当 d_i 全部唯一确定时， x 也会唯一确定。此时我们需要确定的是，当 d_i 取哪些值时 x 是合法的（处于整数范围内），因此有如下等式：

$$x = \frac{s - [(n - 1)d_1 + (n - 2)d_2 + \cdots + (n - i)d_i + \cdots + d_{n-1}]}{n}$$

如果 x 要落在整数范围内，那么 s 与 $(x - 1)d_1 + (n - 2)d_2 + \cdots + (n - i)d_i + \cdots + d_{n-1}$ 必须模 n 同余

此时问题转换成：对于序列 $(n - 1)d_1 + (n - 2)d_2 + \cdots + (n - i)d_i + \cdots + d_{n-1}$ 与 s 模 n 同余的个数

考虑动态规划， $f[i][j]$ 表示对第 i 个数选择，模 n 余 j 的方案数

第 i 个数对应 d_i ，系数为 $(n - i)$ ，因此：

- 若第 i 个数为 a , 即 $d_i = a$, 有 $(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \dots + (n-i)a$, 即 $f[i-1][\text{mod}((j-(n-i)*a), n)]$
- 同理, 若第 i 个数为 $-b$, 有 $f[i-1][\text{mod}((j+(n-i)*b), n)]$

最终结果为 $f[n-1][\text{mod}(s, n)]$

完整代码如下:

```
#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 1e3 + 10, mod = 1e8 + 7;

int get_mod(int a, int n)
{
    return (a % n + n) % n;
}

int f[N][N];

int n, s, a, b;

int main()
{
    cin >> n >> s >> a >> b;
    f[0][0] = 1;
    for(int i = 1; i <= n - 1; i++)
    {
        for(int j = 0; j < n; j++)
        {
            f[i][j] = get_mod(f[i][j] + f[i-1][get_mod(j-(n-i)*a, n)],
mod);
            f[i][j] = get_mod(f[i][j] + f[i-1][get_mod(j+(n-i)*b, n)],
mod);
        }
    }
    cout << f[n-1][get_mod(s, n)] << endl;
    return 0;
}
```

将给定序列分段, 保证每段和不超过给定数情况下, 求每段中「所有数的最大值」之和的最小值

原题链接: [AcWing 299. 裁剪序列](#)

► 题目

给定一个长度为 N 的序列 A , 要求把该序列分成若干段, 在满足“每段中所有数的和”不超过 M 的前提下, 让“每段中所有数的最大值”之和最小。

试计算这个最小值。

输入格式

第一行包含两个整数 N 和 M

第二行包含 N 个整数，表示完整的序列 A

输出格式

输出一个整数，表示结果

如果结果不存在，则输出 -1

数据范围

$0 \leq N \leq 10^5, 0 \leq M \leq 10^{11}$ ，序列 A 中的数非负，且不超过 10^6

输入样例：

8 17 2 2 2 8 1 8 2 1

输出样例：

12

直观考虑，一共 N 个数，之间的空位有 $N - 1$ 个，因此可以分段的选择一共有 2^{n-1} ，考虑动态规划进行优化

设 $f[i]$ 所表示的集合为：**所有将前 i 个数划分方案的集合**，集合的属性为价值的最小值，因此 $f[n]$ 为最终答案

以**最后一段的长度**对整个集合进行划分。对序列 $f[i]$ 而言，设最后一段的长度为 $k(0 \leq k \leq i)$ ，此时有：

$$f[i] = \min_{0 \leq k \leq i} f[i - k] + \max_{i - k + 1 \leq j \leq i} A_j$$

设 $j = i - k$ ，上式转换为：

$$f[i] = \min_{0 \leq j \leq i} f[j] + \max_{j + 1 \leq k \leq i} A_k$$

容易注意到以下性质：

- $f[i]$ 随着 i 的增大而单调不减

证明：

假定存在两个序列 k_1, k_2 ，长度分别为 L_1, L_2 ，有 $L_2 > L_1$

我们将 k_2 的划分方案平移到 k_1 上，设划分段数为 len ，有： $len_2 \geq len_1$ ，因此对于 k_2 而言，必然有 $f[k_2] \geq f[k_1]$ ，即 $f[i] \leq f[i + 1]$

其次，局部最优值 $f[j] + A_k$ 合法的充要条件为：

- $\sum_{k=j+1}^i A_k \leq m$

- $\sum_{k=j}^i A_k \geq m$
- $A_k = \max_{j+1 \leq l \leq i} A_l$

第一条保证从 $j+1$ 到 i 的和全部小于 m

第二条保证 j 总会取到总和小于 m 的边界

第三条保证 A_k 为 $j+1$ 到 i 中所有数的最大值

下面我们给出第二条的证明（第一和第三可以直接从题目推出来）：

考虑反证法，设存在 $j' < j$ 此时有： $f[j'] + \max_{j' < k \leq i} A_k \leq f[j] + \max_{j < k \leq i} A_k$

由于 $f[i]$ 随 i 增大而单调不减，即 $f[j'] \geq f[j]$

且 $\max_{j' < k \leq i} A_k \geq \max_{j < k \leq i} A_k$ ，因此上述假设不成立

因此若 $j' < j$ ，并且 $A_{j'} < A_j$ ，那么 j' 就是需要淘汰的策略

此时对于区间 $[j, i]$ 而言，内部元素**单调不减**且 i, j 均具有单调性（ i, j 会同步增大）也就是「双指针」与「单调队列」

其次，由于单调队列中的**所有值**均是局部最优解，**需要全部考虑在内再取最小值**，因此我们需要额外维护一个**允许出现重复元素**的「平衡树」用于存储每个元素所对应的函数值，每次取出最小值即可

在这里我们需要注意一个边界问题，那就是只要当队列中至少存在一个元素时，才能够开始往 `multiset` 中插入元素

这是因为单调队列中单调不增的元素实际上表示的是**边界**，也就是 $f[i]$ 在此处的取值，而对与第二项的最大值而言，需要至少存在两个元素才合法，因此 `multiset` 中的元素个数总会比单调队列中少一个

完整代码如下：

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <algorithm>
#include <set>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int N = 1e5 + 10;

int w[N], q[N];
LL f[N];
multiset<LL>S;
LL n, m;

//multiset会直接将所有相同的元素全部删除，因此需要迭代器
void remove(int x)
{
```

```

    auto it = S.find(x);
    S.erase(it);
}

int main()
{
    cin >> n >> m;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        cin >> w[i];
        if(w[i] > m)
        {
            cout << "-1" << endl;
            return 0;
        }
    }

    int hh = 0, tt = -1;
    LL sum = 0;
    for(int i = 1, j = 1; i <= n; i++)
    {
        sum += w[i];
        while(sum > m)
        {
            sum -= w[j++];
            if(hh <= tt && q[hh] < j)
            {
                if(hh < tt) //保证队列中至少一个元素之后再去删除set中的元素
                    remove(f[q[hh]] + w[q[hh + 1]]); //此时q[hh]为边界，区间最大值需
要取后一个元素
                hh++;
            }
        }

        while(hh <= tt && w[q[tt]] <= w[i])
        {
            if(hh < tt)
                remove(f[q[tt - 1]] + w[q[tt]]); //此时队尾元素表示局部最大值，边界需
要取前一个元素
            tt--;
        }

        q[++tt] = i; //先将元素插入到队列中，再输出队列中的元素
        if(hh < tt) //以当前队头前一个元素为边界，当前队头认为是整个区间的最大值
            S.insert(f[q[tt - 1]] + w[q[tt]]);

        f[i] = f[j - 1] + w[q[hh]];
        if(S.size()) //当平衡树中不空时，我们取整个的最小值
            f[i] = min(f[i], *S.begin());
    }
    cout << f[n] << endl;
    return 0;
}

```

背包

基础

[AcWing 2. 01背包问题](#)

[AcWing 3. 完全背包问题](#)

[AcWing 4. 多重背包问题 I](#)

[AcWing 5. 多重背包问题 II](#)

[AcWing 9. 分组背包问题](#)

[AcWing 7. 混合背包问题](#)

变式

[AcWing 423. 采药](#)

[AcWing 1024. 装箱问题](#)

[AcWing 1022. 宠物小精灵之收服](#)

[AcWing 278. 数字组合](#)

[AcWing 1019. 庆功会](#)

[AcWing 1023. 买书](#)

[AcWing 1013. 机器分配](#)

[AcWing 426. 开心的金明](#)

[AcWing 1021. 货币系统](#)

[AcWing 532. 货币系统](#)

体积定义为「至少」

[AcWing 1020. 潜水员](#)

特殊化的「有依赖」背包问题

[AcWing 487. 金明的预算方案](#)

一般化的「有依赖」背包问题

[AcWing 10. 有依赖的背包问题](#)

求方案数与具体方案

[AcWing 11. 背包问题求方案数](#)

[AcWing 12. 背包问题求具体方案](#)

「贪心」将无限集缩小为有限集

[AcWing 734. 能量石](#)

单调队列优化多重背包

[AcWing 6. 多重背包问题 III](#)

二维费用背包问题

[AcWing 8. 二维费用的背包问题](#)

状态机 DP

基础

[AcWing 1049. 大盗阿福](#)

变式

[AcWing 1057. 股票买卖 IV](#)

[AcWing 1058. 股票买卖 V](#)

状态压缩 DP

基础

[AcWing 1064. 小国王](#)

变式

[AcWing 327. 玉米田](#)

[AcWing 292. 炮兵阵地](#)

[AcWing 524. 愤怒的小鸟](#)

区间 DP

基础

[AcWing 282. 石子合并](#)

变式

环形问题的一般化处理思路

[AcWing 1068. 环形石子合并](#)

[AcWing 320. 能量项链](#)

[AcWing 1069. 凸多边形的划分](#)

[AcWing 479. 加分二叉树](#)

[AcWing 321. 棋盘分割](#)

树形 DP

基础

[AcWing 285. 没有上司的舞会](#)

[AcWing 1072. 树的最长路径](#)

[AcWing 1073. 树的中心](#)

变式

[AcWing 1075. 数字转换](#)

[AcWing 1074. 二叉苹果树](#)

[AcWing 323. 战略游戏](#)

[AcWing 1077. 皇宫看守](#)

数位 DP

基础

[AcWing 1081. 度的数量](#)

单调队列优化

► 题目

输入一个长度为 n 的整数序列，从中找出一段长度不超过 m 的连续子序列，使得子序列中所有数的和最大。

注意：子序列的长度至少是 1。

输入格式

第一行输入两个整数 n, m 。

第二行输入 n 个数，代表长度为 n 的整数序列。

同一行数之间用空格隔开。

输出格式

输出一个整数，代表该序列的最大子序和。

数据范围

$$1 \leq n, m \leq 300000$$

输入样例:

6 4 1 -3 5 1 -2 3

输出样例:

7

AcWing 135. 最大子序和

由于我们需要求一段**连续**的子序列的和，考虑用前缀和

定义 $s[i] = w[1] + w[2] + \dots + w[i]$ 。假设所求区间为 $[l, r]$ ，那么区间和为 $s[r] - s[l - 1]$

由于区间长度不超过 m ，因此实际区间为 $[i - m + 1, i]$ ，区间和为 $s[i] - s[i - m]$

当我们枚举 i 时，我们期望 $s[i] - s[i - m]$ 最大，由于 $s[i]$ 固定，因此我们需要让 $s[i - m]$ 最小，即所有局部最优解 ans 为：

$$tmp = s[i] - \min_{0 \leq k \leq m} s[i - k]$$

全局最优解为：

$$ans = \max_{n-m+1 \leq i \leq n} ans_i$$

由于我们需要求一段区间内的最小值，因此后者可以用单调队列优化，时间复杂度变为 $O(n)$

单调队列内部维护元素个数为 $m + 1$ ，所维护元素为前缀和 $s[i]$ ，因此需要预先将 $s[0]$ 插入进队列中

我们在对最终结果赋值时需要保证队列不空，由于我们预先给了队列一个初值，因此需要在调整队列前对 ans 赋值

完整代码：

```
#include <iostream>

using namespace std;
typedef long long LL;
const int N = 3e5 + 10;
int n, m;
LL s[N], q[N];

int main()
{
    cin >> n >> m;
    for(int i = 1; i <= n; i++) cin >> s[i], s[i] += s[i - 1];
    int hh = 0, tt = 0; // 预先将0插入进队列，因为前缀和
    LL ans = -1e18;
```

```
for(int i = 1; i <= n; i ++)  
{  
    if(hh <= tt && q[hh] < i - m) hh++; //最后一个元素为 i - m  
    ans = max(ans, s[i] - s[q[hh]]);  
    while(hh <= tt && s[q[tt]] >= s[i]) tt--;  
    q[++tt] = i;  
}  
cout << ans << endl;  
return 0;  
}
```