

动态规划

- 动态规划
 - 问题索引
 - 线性 DP
 - 数字三角形
 - 基础
 - 变式
 - 最长上升子序列 (LIS)
 - 基础
 - 变式
 - 用多少个最长上升子序列可以覆盖一个给定的序列
 - LICS
 - 求可变序列与给定数同余的方案数
 - 将给定序列分段, 保证每段和不超过给定数情况下, 求每段中「所有数的最大值」之和的最小值
 - 背包
 - 基础
 - 变式
 - 体积定义为「至少」
 - 特殊化的「有依赖」背包问题
 - 一般化的「有依赖」背包问题
 - 求方案数与具体方案
 - 「贪心」将无限集缩小为有限集
 - 单调队列优化多重背包
 - 二维费用背包问题
 - 状态机 DP
 - 基础
 - 变式
 - 状态压缩 DP
 - 基础
 - 变式
 - 区间 DP
 - 基础
 - 变式
 - 环形问题的一般化处理思路
 - 树形 DP
 - 基础
 - 变式
 - 数位 DP
 - 基础
 - 单调队列优化
 - 基础
 - 变式

问题索引

单调队列中，只需考虑队头元素：[单调队列优化多重背包](#)

单调队列中，需要考虑所有元素：[将给定序列分段，保证每段和不超过给定数情况下，求每段中「所有数的最大值」之和的最小值](#)

线性 DP

数字三角形

基础

[AcWing 1015. 摘花生](#)

变式

原题链接：[AcWing 1018. 最低通行费](#)

题解链接：[AcWing 1018. 最低通行费](#)

原题链接：[AcWing 1027. 方格取数](#)

这道题本质上是[AcWing 1015. 摘花生](#)的增强版，走的次数变为两次

考虑与上题同样的做法，设 $f[i_1, j_1, i_2, j_2]$ 所表示集合为：所有从 $(1, 1), (1, 1)$ 分别走到 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ 的方案数，集合的属性为所有方案中的价值最大值

由于同一个数只能取一次，因此当两条路线相交时，对应的数只能被加一次，考虑两条路线相交时的条件：

当两条路线第一次相交时，有 $i_1 = i_2, j_1 = j_2$ ，并且两条路线的长度相同，即 $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$

设 $i_1 + j_1 = i_2 + j_2 = k$ ，我们时刻用 k 来表示单条路径的长度

由于是同时走的，因此两条路线的长度始终相等，因此只要 $i_1 = i_2$ ，我们便可以判断二者是否重合

基于上述讨论，我们便可以省去一维，得以重新定义递推函数 $f[k][i_1][i_2]$ ，其中 k 表示路径长度

对于点 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，两条路线一共有四种走法：

- 均向下，即 $(i_1, j_1 - 1), (i_2, j_2 - 1)$ 到 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，对应状态为 $f[k - 1][i_1][i_2]$
- 均向右，即 $(i_1 - 1, j_1), (i_2 - 1, j_2)$ 到 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，对应状态为 $f[k - 1][i_1 - 1][i_2 - 1]$
- 一个向下，另一个向右，即 $(i_1 - 1, j_1), (i_2, j_2 - 1)$ 或者 $(i_1, j_1 - 1), (i_2 - 1, j_2)$ 到 $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，对应状态为 $f[k - 1][i_1 - 1][i_2]$ 或者 $f[k - 1][i_1][i_2 - 1]$

完整代码：

```
#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 15;
```

```

int g[N][N], f[2 * N][N][N];
int n;

int main()
{
    cin >> n;
    int x, y, w;
    while(cin >> x >> y >> w, x || y || w)
        g[x][y] = w;
    for(int k = 2; k <= 2 * n; k++)
    {
        for(int i1 = 1; i1 <= n; i1++)
        {
            for(int i2 = 1; i2 <= n; i2++)
            {
                int j1 = k - i1, j2 = k - i2;
                if(j1 >= 1 && j1 <= n && j2 >= 1 && j2 <= n)
                {
                    int& v = f[k][i1][i2];
                    int t = g[i1][j1];
                    if(i1 != i2) t += g[i2][j2];
                    v = max(v, f[k - 1][i1 - 1][i2 - 1] + t);
                    v = max(v, f[k - 1][i1 - 1][i2] + t);
                    v = max(v, f[k - 1][i1][i2 - 1] + t);
                    v = max(v, f[k - 1][i1][i2] + t);
                }
            }
        }
    }
    cout << f[2 * n][n][n] << endl;
    return 0;
}

```

AcWing 275. 传纸条

本题跟上一题一样，可以直接套上一题的代码

需要注意的是，当两条路线重合时，总可以通过对重合点进行微调，使得调整后的两条路径和的价值**大于等于**未调整前的，这其实是贪心的思路

需要注意的是，由于本题 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ，而 $j = k - i$ ，因此 $i \geq n - k, i \leq k - 1$

由于 k 会增大到 $m + n$ ，又可能导致越界，因此在赋初值时需要取 max ，终点值需要取 min

完整代码：

```

#include <iostream>

using namespace std;
const int N = 55;
int g[N][N], f[2 * N][N][N];

```

```

int n, m;

int main()
{
    cin >> m >> n;
    for(int i = 1; i <= m; i++)
        for(int j = 1; j <= n; j++) cin >> g[i][j];
    //j = k - i, 1 <= j <= n    ==>
    //1 <= k - i <= n          ==>
    //i >= n - k, i <= k - 1
    for(int k = 2; k <= n + m; k++)
    {
        for(int i1 = max(k - n, 1); i1 <= min(m, k - 1); i1++)
        {
            for(int i2 = max(k - n, 1); i2 <= min(m, k - 1); i2++)
            {
                int j1 = k - i1, j2 = k - i2;
                int t = g[i1][j1];
                if(i1 != i2) t += g[i2][j2];
                for(int a = 0; a <= 1; a++)
                    for(int b = 0; b <= 1; b++)
                        f[k][i1][i2] = max(f[k][i1][i2], f[k - 1][i1 - a][i2 - b]
+ t);
            }
        }
    }
    cout << f[m + n][m][m] << endl;
    return 0;
}

```

最长上升子序列 (LIS)

基础

原题链接: [AcWing 895. 最长上升子序列](#)

题解链接: [AcWing 895. 最长上升子序列](#)

AcWing 896. 最长上升子序列 II

考虑贪心思路, 如果我期望一条上升子序列尽可能长, 那么我应当让结尾的数尽可能小, 这样才能够让更多的数接在当前这条子序列的后面

我们设 $q[i]$ 表示长度为 i 的上升子序列的结尾的数, 显然 $q[i]$ 单调上升

当前遍历到的数为 $w[i]$, 我们考虑将 $w[i]$ 加到最后一个「严格」比其小的元素的后面, 由于 $q[i]$ 具有二分性, 因此这一步可以使用二分

完整代码:

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1e5 + 10;

int n;
int w[N], q[N];

int main()
{
    cin >> n;
    for(int i = 1; i <= n ; i++) cin >> w[i];
    int len = 0;
    q[0] = -1e9; //这里我们设定一个初值, 不设也可以
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        int l = 0, r = len;
        while(l < r)
        {
            int mid = l + r + 1 >> 1;
            if(q[mid] < w[i]) l = mid;
            else r = mid - 1;
        }
        q[l + 1] = w[i];
        len = max(len, l + 1);
    }
    cout << len << endl;
    return 0;
}
```

原题链接: [AcWing 897. 最长公共子序列](#)

题解链接: [AcWing 897. 最长公共子序列](#)

变式

[AcWing 1017. 怪盗基德的滑翔翼](#)

[AcWing 1014. 登山](#)

[AcWing 482. 合唱队形](#)

[AcWing 1012. 友好城市](#)

[AcWing 1016. 最大上升子序列和](#)

用多少个最长上升子序列可以覆盖一个给定的序列

[AcWing 1010. 拦截导弹](#)

我们需要的是，对于给定的序列，**最少**需要用多少递减子序列才能将其覆盖

由于我们期望用**最少**的子序列个数来覆盖整个序列，也就是要求每个子序列都**尽可能长**

采取贪心的角度考虑，假设我们当前遍历到的数为 x ，对于前面的数我们已经构成了不同的递减子序列，我们当前考虑的是 x 应该如何处理

直观上来讲，子序列下降速度越慢，那么它就可能越长。也就是每次将 x 接到**所有比其大的数中最小的那个的后面**，这样可以保证子序列下降的速度最慢

如果实在找不到，那么只能令开一条以 x 为结尾的子序列

以上便是贪心思路，下面我们给出证明：

假设贪心解对应子序列个数为 A ，最优解对应子序列个数为 B ，只需证明 $A = B$ 即可

由于 B 是最优解，因此 $B \leq A$

不失一般性地，设最优解与贪心解所构成的子序列集合中，子序列 S **第一个不同的数为 x** ， x 前面的数二者均相同

设最优解中 x 前面的数为 a_m ，贪心解中 x 前面的数为 a_t ，由于贪心做法总是将 x 接在所有比其大的数中最小的数的后面，因此有： $a_t \geq a_m$

因此，将贪心解中 x 及其之后的所有数均可以接在 a_m 的后面而总子序列个数不发生改变

所有对应任意一个 x ，贪心解总能够转化为最优解，即 $A \leq B$

所以有： $A = B$

在代码的实现上，我们用 $g[i]$ 表示编号为 i ($i \geq 1$) 的递减子序列的结尾的数

我们每次找到第一个比 $w[i]$ 大的数，并将其替换掉（相当于接在该序列的后面，并不会新增子序列个数），这一步可以直接枚举，也可以用二分

由于子序列单调不增，因此 $g[i]$ 数组一定单调上升（这一点很好证明， $g[i]$ 数组如果要新增元素一定是没有比该元素更大的数，因此 $g[i]$ 必然单调上升）

完整代码：

枚举做法：

```
#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1e3 + 10;

int w[N], f[N], g[N]; // g数组从左往右一定单调上升，表示编号为i的子序列结尾的数
int n;

int main()
{
```

```

while(cin >> w[n]) n++;
int ans = 0;
for(int i = 0; i < n; i++)
{
    f[i] = 1;
    for(int j = 0; j < i; j++)
        if(w[j] >= w[i]) f[i] = max(f[i], f[j] + 1);
    ans = max(ans, f[i]);
}
cout << ans << endl;

int cnt = 0; //子序列的个数

for(int i = 0; i < n; i++)
{
    int idx = 0;
    while(idx < cnt && g[idx] < w[i]) idx++; //找到第一个比w[i]大的数，并将其替换
    g[idx] = w[i];
    if(idx >= cnt) cnt++;
}
cout << cnt << endl;
return 0;
}

```

掉

二分做法:

```

#include <iostream>

using namespace std;

const int N = 1e3 + 10;

int w[N], f[N], g[N]; //g数组从左往右一定单调上升，表示编号为i的子序列结尾的数
int n;

int main()
{
    while(cin >> w[n]) n++;
    int ans = 0;
    for(int i = 0; i < n; i++)
    {
        f[i] = 1;
        for(int j = 0; j < i; j++)
            if(w[j] >= w[i]) f[i] = max(f[i], f[j] + 1);
        ans = max(ans, f[i]);
    }
    cout << ans << endl;

    int cnt = 0; //子序列的个数

    for(int i = 0; i < n; i++)

```

```

{
    int l = 0, r = cnt;
    while(l < r)
    {
        int mid = l + r >> 1;
        if(g[mid] >= w[i]) r = mid;
        else l = mid + 1;
    }
    g[l] = w[i];
    if(l >= cnt) cnt++; //如果当前位置已经超过子序列个数，那么直接新开一个
}
cout << cnt << endl;
return 0;
}

```

AcWing 187. 导弹防御系统

LICS

AcWing 272. 最长公共上升子序列

求可变序列与给定数同余的方案数

原题链接: [AcWing 1214. 波动数列](#)

我们设数列第一项为 x ，第二项为 $x + d_1$ ，第 i 项为 $x + d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1}$ ，那么对于长度为 n 的序列和为 $s = x + (x + d_1) + (x + d_1 + d_2) + \cdots + (x + d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1})$ ，即：

$$s = nx + (n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}, d_i \in \{a, -b\}$$

此时问题转变成：对于给定的每个 s 与 n ，在 d_i 任意取值的情况下，等式成立的个数

由于 $x \in \mathbb{Z}$ ，并且当 d_i 全部唯一确定时， x 也会唯一确定。此时我们需要确定的是，当 d_i 取哪些值时 x 是合法的（处于整数范围内），因此有如下等式：

$$x = \frac{s - [(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}]}{n}$$

如果 x 要落在整数范围内，那么 s 与 $(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}$ 必须模 n 同余

此时问题转换成：对于序列 $(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}$ 与 s 模 n 同余的个数

考虑动态规划， $f[i][j]$ 表示对第 i 个数选择，模 n 余 j 的方案数

第 i 个数对应 d_i ，系数为 $(n-i)$ ，因此：

- 若第 i 个数为 a ，即 $d_i = a$ ，有 $(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)a$ ，即 $f[i-1][\text{mod}((j - (n-i) * a), n)]$
- 同理，若第 i 个数为 $-b$ ，有 $f[i-1][\text{mod}((j + (n-i) * b), n)]$

最终结果为 $f[n-1][\text{mod}(s, n)]$

完整代码如下：

```
#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 1e3 + 10, mod = 1e8 + 7;

int get_mod(int a, int n)
{
    return (a % n + n) % n;
}

int f[N][N];

int n, s, a, b;

int main()
{
    cin >> n >> s >> a >> b;
    f[0][0] = 1;
    for(int i = 1; i <= n - 1; i++)
    {
        for(int j = 0; j < n; j++)
        {
            f[i][j] = get_mod(f[i][j] + f[i - 1][get_mod(j - (n - i) * a, n)],
mod);
            f[i][j] = get_mod(f[i][j] + f[i - 1][get_mod(j + (n - i) * b, n)],
mod);
        }
    }
    cout << f[n - 1][get_mod(s, n)] << endl;
    return 0;
}
```

将给定序列分段，保证每段和不超过给定数情况下，求每段中「所有数的最大值」之和的最小值

原题链接：[AcWing 299. 裁剪序列](#)

直观考虑，一共 N 个数，之间的空位有 $N - 1$ 个，因此可以分段的选择一共有 2^{n-1} ，考虑动态规划进行优化

设 $f[i]$ 所表示的集合为：**所有将前 i 个数划分方案的集合**，集合的属性为价值的最小值，因此 $f[n]$ 为最终答案

以**最后一段的长度**对整个集合进行划分。对序列 $f[i]$ 而言，设最后一段的长度为 $k(0 \leq k \leq i)$ ，此时有：

$$f[i] = \min_{0 \leq k \leq i} f[i - k] + \max_{i - k + 1 \leq j \leq i} A_j$$

设 $j = i - k$ ，上式转换为：

$$f[i] = \min_{0 \leq j \leq i} f[j] + \max_{j+1 \leq k \leq i} A_k$$

容易注意到以下性质：

- $f[i]$ 随着 i 的增大而单调不减

证明：

假定存在两个序列 k_1, k_2 ，长度分别为 L_1, L_2 ，有 $L_2 > L_1$

我们将 k_2 的划分方案平移到 k_1 上，设划分段数为 len ，有： $len_2 \geq len_1$ ，因此对于 k_2 而言，必然有 $f[k_2] \geq f[k_1]$ ，即 $f[i] \leq f[i+1]$

其次，局部最优值 $f[j] + A_k$ 合法的充要条件为：

- $\sum_{k=j+1}^i A_k \leq m$
- $\sum_{k=j}^i A_k \geq m$
- $A_k = \max_{j+1 \leq l \leq i} A_l$

第一条保证从 $j+1$ 到 i 的和全部小于 m

第二条保证 j 总会取到总和小于 m 的边界

第三条保证 A_k 为 $j+1$ 到 i 中所有数的最大值

下面我们给出第二条的证明（第一和第三可以直接从题目推出来）：

考虑反证法，设存在 $j' < j$ 此时有： $f[j'] + \max_{j' < k \leq i} A_k \leq f[j] + \max_{j < k \leq i} A_k$

由于 $f[i]$ 随 i 增大而单调不减，即 $f[j'] \geq f[j]$

且 $\max_{j' < k \leq i} A_k \geq \max_{j < k \leq i} A_k$ ，因此上述假设不成立

因此若 $j' < j$ ，并且 $A_{j'} < A_j$ ，那么 j' 就是需要淘汰的策略

此时对于区间 $[j, i]$ 而言，内部元素**单调不减**且 i, j 均具有单调性 (i, j 会同步增大) 也就是「双指针」与「单调队列」

其次，由于单调队列中的**所有值**均是局部最优解，**需要全部考虑在内再取最小值**，因此我们需要额外维护一个**允许出现重复元素**的「平衡树」用于存储每个元素所对应的函数值，每次取出最小值即可

在这里我们需要注意一个边界问题，那就是只要当队列中至少存在一个元素时，才能够开始往 `multiset` 中插入元素

这是因为单调队列中单调不增的元素实际上表示的是**边界**，也就是 $f[i]$ 在此处的取值，而对与第二项的最大值而言，需要至少存在两个元素才合法，因此 `multiset` 中的元素个数总会比单调队列中少一个

完整代码如下：

```
#include <iostream>
#include <cstring>
```

```

#include <algorithm>
#include <set>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int N = 1e5 + 10;

int w[N], q[N];
LL f[N];
multiset<LL>S;
LL n, m;

//multiset会直接将所有相同的元素全部删除，因此需要迭代器
void remove(int x)
{
    auto it = S.find(x);
    S.erase(it);
}

int main()
{
    cin >> n >> m;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        cin >> w[i];
        if(w[i] > m)
        {
            cout << "-1" << endl;
            return 0;
        }
    }

    int hh = 0, tt = -1;
    LL sum = 0;
    for(int i = 1, j = 1; i <= n; i++)
    {
        sum += w[i];
        while(sum > m)
        {
            sum -= w[j++];
            if(hh <= tt && q[hh] < j)
            {
                if(hh < tt) //保证队列中至少一个元素之后再去删除set中的元素
                    remove(f[q[hh]] + w[q[hh + 1]]); //此时q[hh]为边界，区间最大值需
要取后一个元素
                hh++;
            }
        }

        while(hh <= tt && w[q[tt]] <= w[i])
        {
            if(hh < tt)

```

```
        remove(f[q[tt - 1]] + w[q[tt]]); //此时队尾元素表示局部最大值，边界需  
        要取前一个元素  
        tt--;  
    }  
  
    q[++tt] = i; //先将元素插入到队列中，再输出队列中的元素  
    if(hh < tt) //以当前队头前一个元素为边界，当前队头认为是整个区间的最大值  
        S.insert(f[q[tt - 1]] + w[q[tt]]);  
  
    f[i] = f[j - 1] + w[q[hh]];  
    if(S.size()) //当平衡树中不空时，我们取整个的最小值  
        f[i] = min(f[i], *S.begin());  
}  
cout << f[n] << endl;  
return 0;  
}
```

背包

基础

[AcWing 2. 01背包问题](#)

[AcWing 3. 完全背包问题](#)

[AcWing 4. 多重背包问题 I](#)

[AcWing 5. 多重背包问题 II](#)

[AcWing 9. 分组背包问题](#)

[AcWing 7. 混合背包问题](#)

变式

[AcWing 423. 采药](#)

[AcWing 1024. 装箱问题](#)

[AcWing 1022. 宠物小精灵之收服](#)

[AcWing 278. 数字组合](#)

[AcWing 1019. 庆功会](#)

[AcWing 1023. 买书](#)

[AcWing 1013. 机器分配](#)

[AcWing 426. 开心的金明](#)

[AcWing 1021. 货币系统](#)

[AcWing 532. 货币系统](#)

体积定义为「至少」

[AcWing 1020. 潜水员](#)

特殊化的「有依赖」背包问题

[AcWing 487. 金明的预算方案](#)

一般化的「有依赖」背包背包问题

[AcWing 10. 有依赖的背包问题](#)

求方案数与具体方案

[AcWing 11. 背包问题求方案数](#)

[AcWing 12. 背包问题求具体方案](#)

「贪心」将无限集缩小为有限集

[AcWing 734. 能量石](#)

单调队列优化多重背包

[AcWing 6. 多重背包问题 III](#)

二维费用背包问题

[AcWing 8. 二维费用的背包问题](#)

状态机 DP

基础

[AcWing 1049. 大盗阿福](#)

变式

[AcWing 1057. 股票买卖 IV](#)

[AcWing 1058. 股票买卖 V](#)

状态压缩 DP

基础

[AcWing 1064. 小国王](#)

变式

[AcWing 327. 玉米田](#)

[AcWing 292. 炮兵阵地](#)

[AcWing 524. 愤怒的小鸟](#)

区间 DP

基础

[AcWing 282. 石子合并](#)

变式

环形问题的一般化处理思路

[AcWing 1068. 环形石子合并](#)

[AcWing 320. 能量项链](#)

[AcWing 1069. 凸多边形的划分](#)

[AcWing 479. 加分二叉树](#)

[AcWing 321. 棋盘分割](#)

树形 DP

基础

[AcWing 285. 没有上司的舞会](#)

[AcWing 1072. 树的最长路径](#)

[AcWing 1073. 树的中心](#)

变式

[AcWing 1075. 数字转换](#)

[AcWing 1074. 二叉苹果树](#)

[AcWing 323. 战略游戏](#)

[AcWing 1077. 皇宫看守](#)

数位 DP

基础

[AcWing 1081. 度的数量](#)

单调队列优化

基础

原题链接: [AcWing 135. 最大子序和](#)

由于我们需要求一段**连续**的子序列的和, 考虑用前缀和

定义 $s[i] = w[1] + w[2] + \cdots + w[i]$ 。假设所求区间为 $[l, r]$, 那么区间和为 $s[r] - s[l - 1]$

由于区间长度不超过 m , 因此实际区间为 $[i - m + 1, i]$, 区间和为 $s[i] - s[i - m]$

当我们枚举 i 时, 我们期望 $s[i] - s[i - m]$ 最大, 由于 $s[i]$ 固定, 因此我们需要让 $s[i - m]$ 最小, 即所有局部最优解 ans 为:

$$tmp = s[i] - \min_{0 \leq k \leq m} s[i - k]$$

全局最优解为:

$$ans = \max_{n-m+1 \leq i \leq n} ans_i$$

由于我们需要求一段区间内的最小值, 因此后者可以用单调队列优化, 时间复杂度变为 $O(n)$

单调队列内部维护元素个数为 $m + 1$, 所维护元素为前缀和 $s[i]$, 因此需要预先将 $s[0]$ 插入进队列中

我们在对最终结果赋值时需要保证队列不空, 由于我们预先给了队列一个初值, 因此需要在调整队列前对 ans 赋值

完整代码:

```
#include <iostream>

using namespace std;
typedef long long LL;
const int N = 3e5 + 10;
int n, m;
LL s[N], q[N];

int main()
{
    cin >> n >> m;
    for(int i = 1; i <= n; i++) cin >> s[i], s[i] += s[i - 1];
    int hh = 0, tt = 0; // 预先将0插入进队列, 因为前缀和
    LL ans = -1e18;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        if(hh <= tt && q[hh] < i - m) hh++; // 最后一个元素为 i - m
        ans = max(ans, s[i] - s[q[hh]]);
        while(hh <= tt && s[q[tt]] >= s[i]) tt--;
        q[++tt] = i;
    }
    cout << ans << endl;
    return 0;
}
```

变式