

# 动态规划

---

- 动态规划
  - 问题索引
  - 线性 DP
    - 数字三角形
      - 基本
      - 变式
    - 最长上升子序列 (LIS)
      - 基本
      - 变式
    - 求可变序列与给定数同余的方案数
    - 将给定序列分段，保证每段和不超过给定数情况下，求每段中「所有数的最大值」之和的最小值
  - 背包
    - 基础
    - 变式
      - 体积定义为「至少」
      - 特殊化的「有依赖」背包问题
      - 一般化的「有依赖」背包问题
      - 求方案数与具体方案
      - 「贪心」将无限集缩小为有限集
      - 单调队列优化多重背包
      - 二维费用背包问题
  - 状态机 DP
    - 基础
    - 变式
  - 状态压缩 DP
    - 基础
    - 变式
  - 区间 DP
    - 基础
    - 变式
      - 环形问题的一般化处理思路
  - 树形 DP
    - 基础
    - 变式
  - 数位 DP
    - 基础
  - 单调队列优化
    - 基础
    - 变式

## 问题索引

单调队列中，只需考虑队头元素：单调队列优化多重背包

单调队列中，需要考虑所有元素：将给定序列分段，保证每段和不超过给定数情况下，求每段中「所有数的最大值」之和的最小值

## 线性 DP

### 数字三角形

#### 基本

AcWing 1015. 摘花生

#### 变式

AcWing 1018. 最低通行费

---

原题链接：AcWing 1027. 方格取数

这道题本质上是AcWing 1015. 摘花生的增强版，走的次数变为两次

考虑与上题同样的做法，设  $f[i_1, j_1, i_2, j_2]$  所表示集合为：所有从  $(1, 1), (1, 1)$  分别走到  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$  的方案数，集合的属性为所有方案中的价值最大值

由于同一个数只能取一次，因此当两条路线相交时，对应的数只能被加一次，考虑两条路线相交时的条件：

当两条路线第一次相交时，有  $i_1 = i_2, j_1 = j_2$ ，并且两条路线的长度相同，即  $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$

设  $i_1 + j_1 = i_2 + j_2 = k$ ，我们时刻用  $k$  来表示单条路径的长度

由于是同时走的，因此两条路线的长度始终相等，因此只要  $i_1 = i_2$ ，我们便可以判断二者是否重合

基于上述讨论，我们便可以省去一维，得以重新定义递推函数  $f[k][i_1][i_2]$ ，其中  $k$  表示路径长度

对于点  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，两条路线一共有四种走法：

- 均向下，即  $(i_1, j_1 - 1), (i_2, j_2 - 1)$  到  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，对应状态为  $f[k - 1][i_1][i_2]$
- 均向右，即  $(i_1 - 1, j_1), (i_2 - 1, j_2)$  到  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，对应状态为  $f[k - 1][i_1 - 1][i_2 - 1]$
- 一个向下，另一个向右，即  $(i_1 - 1, j_1), (i_2, j_2 - 1)$  或者  $(i_1, j_1 - 1), (i_2 - 1, j_2)$  到  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$ ，对应状态为  $f[k - 1][i_1 - 1][i_2]$  或者  $f[k - 1][i_1][i_2 - 1]$

完整代码：

```
#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 15;
int g[N][N], f[2 * N][N][N];
int n;

int main()
```

```

{
    cin >> n;
    int x, y, w;
    while(cin >> x >> y >> w, x || y || w)
        g[x][y] = w;
    for(int k = 2; k <= 2 * n; k++)
    {
        for(int i1 = 1; i1 <= n; i1++)
        {
            for(int i2 = 1; i2 <= n; i2++)
            {
                int j1 = k - i1, j2 = k - i2;
                if(j1 >= 1 && j1 <= n && j2 >= 1 && j2 <= n)
                {
                    int& v = f[k][i1][i2];
                    int t = g[i1][j1];
                    if(i1 != i2) t += g[i2][j2];
                    v = max(v, f[k - 1][i1 - 1][i2 - 1] + t);
                    v = max(v, f[k - 1][i1 - 1][i2] + t);
                    v = max(v, f[k - 1][i1][i2 - 1] + t);
                    v = max(v, f[k - 1][i1][i2] + t);
                }
            }
        }
    }
    cout << f[2 * n][n][n] << endl;
    return 0;
}

```

### AcWing 275. 传纸条

本题跟上一题一样，可以直接套上一题的代码

需要注意的是，当两条路线重合时，总可以通过对重合点进行微调，使得调整后的两条路径和的价值**大于等于**未调整前的，这其实是贪心的思路

需要注意的是，由于本题  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ，而  $j = k - i$ ，因此  $i \geq n - k, i \leq k - 1$

由于  $k$  会增大到  $m + n$ ，又可能导致越界，因此在赋初值时需要取  $max$ ，终点值需要取  $min$

完整代码：

```

#include <iostream>

using namespace std;
const int N = 55;
int g[N][N], f[2 * N][N][N];
int n, m;

int main()
{

```

```

cin >> m >> n;
for(int i = 1; i <= m; i++)
    for(int j = 1; j <= n; j++) cin >> g[i][j];
//j = k - i, 1 <= j <= n    ==>
//1 <= k - i <= n          ==>
//i >= n - k, i <= k - 1
for(int k = 2; k <= n + m; k++)
{
    for(int i1 = max(k - n, 1); i1 <= min(m, k - 1); i1++)
    {
        for(int i2 = max(k - n, 1); i2 <= min(m, k - 1); i2++)
        {
            int j1 = k - i1, j2 = k - i2;
            int t = g[i1][j1];
            if(i1 != i2) t += g[i2][j2];
            for(int a = 0; a <= 1; a++)
                for(int b = 0; b <= 1; b++)
                    f[k][i1][i2] = max(f[k][i1][i2], f[k - 1][i1 - a][i2 - b]
+ t);
        }
    }
}
cout << f[m + n][m][m] << endl;
return 0;
}

```

## 最长上升子序列 (LIS)

### 基本

[AcWing 895. 最长上升子序列](#)

[AcWing 896. 最长上升子序列 II](#)

[AcWing 897. 最长公共子序列](#)

### 变式

[AcWing 1017. 怪盗基德的滑翔翼](#)

[AcWing 1014. 登山](#)

[AcWing 482. 合唱队形](#)

[AcWing 1012. 友好城市](#)

[AcWing 1016. 最大上升子序列和](#)

[AcWing 1010. 拦截导弹](#)

[AcWing 187. 导弹防御系统](#)

[AcWing 272. 最长公共上升子序列](#)

## 求可变序列与给定数同余的方案数

原题链接: [AcWing 1214. 波动数列](#)

我们设数列第一项为  $x$  , 第二项为  $x + d_1$  , 第  $i$  项为  $x + d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1}$  , 那么对于长度为  $n$  的序列和为  $s = x + (x + d_1) + (x + d_1 + d_2) + \cdots + (x + d_1 + d_2 + \cdots + d_{i-1})$  , 即:

$$s = nx + (n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}, d_i \in \{a, -b\}$$

此时问题转变成: 对于给定的每个  $s$  与  $n$  , 在  $d_i$  任意取值的情况下, 等式成立的个数

由于  $x \in \mathbb{Z}$  , 并且当  $d_i$  全部唯一确定时,  $x$  也会唯一确定。此时我们需要确定的是, 当  $d_i$  取哪些值时  $x$  是合法的 (处于整数范围内) , 因此有如下等式:

$$x = \frac{s - [(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}]}{n}$$

如果  $x$  要落在整数范围内, 那么  $s$  与  $(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}$  必须模  $n$  同余

此时问题转换成: 对于序列  $(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)d_i + \cdots + d_{n-1}$  与  $s$  模  $n$  同余的个数

考虑动态规划,  $f[i][j]$  表示对第  $i$  个数选择, 模  $n$  余  $j$  的方案数

第  $i$  个数对应  $d_i$  , 系数为  $(n-i)$  , 因此:

- 若第  $i$  个数为  $a$  , 即  $d_i = a$  , 有  $(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \cdots + (n-i)a$  , 即  $f[i-1][\text{mod}((j - (n-i) * a), n)]$
- 同理, 若第  $i$  个数为  $-b$  , 有  $f[i-1][\text{mod}((j + (n-i) * b), n)]$

最终结果为  $f[n-1][\text{mod}(s, n)]$

完整代码如下:

```
#include <iostream>
using namespace std;

const int N = 1e3 + 10, mod = 1e8 + 7;

int get_mod(int a, int n)
{
    return (a % n + n) % n;
}

int f[N][N];

int n, s, a, b;

int main()
{
    cin >> n >> s >> a >> b;
    f[0][0] = 1;
```

```

    for(int i = 1; i <= n - 1; i++)
    {
        for(int j = 0; j < n; j++)
        {
            f[i][j] = get_mod(f[i][j] + f[i - 1][get_mod(j - (n - i) * a, n)],
mod);
            f[i][j] = get_mod(f[i][j] + f[i - 1][get_mod(j + (n - i) * b, n)],
mod);
        }
    }
    cout << f[n - 1][get_mod(s, n)] << endl;
    return 0;
}

```

将给定序列分段，保证每段和不超过给定数情况下，求每段中「所有数的最大值」之和的最小值

原题链接：[AcWing 299. 裁剪序列](#)

直观考虑，一共  $N$  个数，之间的空位有  $N - 1$  个，因此可以分段的选择一共有  $2^{n-1}$ ，考虑动态规划进行优化

设  $f[i]$  所表示的集合为：**所有将前  $i$  个数划分方案的集合**，集合的属性为价值的最小值，因此  $f[n]$  为最终答案

以**最后一段的长度**对整个集合进行划分。对序列  $f[i]$  而言，设最后一段的长度为  $k(0 \leq k \leq i)$ ，此时有：

$$f[i] = \min_{0 \leq k \leq i} f[i - k] + \max_{i - k + 1 \leq j \leq i} A_j$$

设  $j = i - k$ ，上式转换为：

$$f[i] = \min_{0 \leq j \leq i} f[j] + \max_{j + 1 \leq k \leq i} A_k$$

容易注意到以下性质：

- $f[i]$  随着  $i$  的增大而单调不减

证明：

假定存在两个序列  $k_1, k_2$ ，长度分别为  $L_1, L_2$ ，有  $L_2 > L_1$

我们将  $k_2$  的划分方案平移到  $k_1$  上，设划分段数为  $len$ ，有： $len_2 \geq len_1$ ，因此对于  $k_2$  而言，必然有  $f[k_2] \geq f[k_1]$ ，即  $f[i] \leq f[i + 1]$

其次，局部最优值  $f[j] + A_k$  合法的充要条件为：

- $\sum_{k=j+1}^i A_k \leq m$
- $\sum_{k=j}^i A_k \geq m$
- $A_k = \max_{j+1 \leq l \leq i} A_l$

第一条保证从  $j + 1$  到  $i$  的和全部小于  $m$

第二条保证  $j$  总会取到总和小于  $m$  的边界

第三条保证  $A_k$  为  $j + 1$  到  $i$  中所有数的最大值

下面我们给出第二条的证明（第一和第三可以直接从题目推出来）：

考虑反证法，设存在  $j' < j$  此时有：  $f[j'] + \max_{j' < k \leq i} A_k \leq f[j] + \max_{j < k \leq i} A_k$

由于  $f[i]$  随  $i$  增大而单调不减，即  $f[j'] \geq f[j]$

且  $\max_{j' < k \leq i} A_k \geq \max_{j < k \leq i} A_k$ ，因此上述假设不成立

因此若  $j' < j$ ，并且  $A_{j'} < A_j$ ，那么  $j'$  就是需要淘汰的策略

此时对于区间  $[j, i]$  而言，内部元素**单调不减**且  $i, j$  均具有单调性 ( $i, j$  会同步增大) 也就是「双指针」与「单调队列」

其次，由于单调队列中的**所有值**均是局部最优解，**需要全部考虑在内再取最小值**，因此我们需要额外维护一个**允许出现重复元素**的「平衡树」用于存储每个元素所对应的函数值，每次取出最小值即可

在这里我们需要注意一个边界问题，那就是只要当队列中至少存在一个元素时，才能够开始往 `multiset` 中插入元素

这是因为单调队列中单调不增的元素实际上表示的是**边界**，也就是  $f[i]$  在此处的取值，而对与第二项的最大值而言，需要至少存在两个元素才合法，因此 `multiset` 中的元素个数总会比单调队列中少一个

完整代码如下：

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <algorithm>
#include <set>

using namespace std;

typedef long long LL;

const int N = 1e5 + 10;

int w[N], q[N];
LL f[N];
multiset<LL> S;
LL n, m;

//multiset会直接将所有相同的元素全部删除，因此需要迭代器
void remove(int x)
{
    auto it = S.find(x);
    S.erase(it);
}
```

```

int main()
{
    cin >> n >> m;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        cin >> w[i];
        if(w[i] > m)
        {
            cout << "-1" << endl;
            return 0;
        }
    }

    int hh = 0, tt = -1;
    LL sum = 0;
    for(int i = 1, j = 1; i <= n; i++)
    {
        sum += w[i];
        while(sum > m)
        {
            sum -= w[j++];
            if(hh <= tt && q[hh] < j)
            {
                if(hh < tt) //保证队列中至少一个元素之后再去删除set中的元素
                    remove(f[q[hh]] + w[q[hh + 1]]); //此时q[hh]为边界，区间最大值需
要取后一个元素
                hh++;
            }
        }

        while(hh <= tt && w[q[tt]] <= w[i])
        {
            if(hh < tt)
                remove(f[q[tt - 1]] + w[q[tt]]); //此时队尾元素表示局部最大值，边界需
要取前一个元素
            tt--;
        }

        q[++tt] = i; //先将元素插入到队列中，再输出队列中的元素
        if(hh < tt) //以当前队头前一个元素为边界，当前队头认为是整个区间的最大值
            S.insert(f[q[tt - 1]] + w[q[tt]]);

        f[i] = f[j - 1] + w[q[hh]];
        if(S.size()) //当平衡树中不空时，我们取整个的最小值
            f[i] = min(f[i], *S.begin());
    }
    cout << f[n] << endl;
    return 0;
}

```



## 基础

[AcWing 2. 01背包问题](#)

[AcWing 3. 完全背包问题](#)

[AcWing 4. 多重背包问题 I](#)

[AcWing 5. 多重背包问题 II](#)

[AcWing 9. 分组背包问题](#)

[AcWing 7. 混合背包问题](#)

## 变式

[AcWing 423. 采药](#)

[AcWing 1024. 装箱问题](#)

[AcWing 1022. 宠物小精灵之收服](#)

[AcWing 278. 数字组合](#)

[AcWing 1019. 庆功会](#)

[AcWing 1023. 买书](#)

[AcWing 1013. 机器分配](#)

[AcWing 426. 开心的金明](#)

[AcWing 1021. 货币系统](#)

[AcWing 532. 货币系统](#)

## 体积定义为「至少」

[AcWing 1020. 潜水员](#)

## 特殊化的「有依赖」背包问题

[AcWing 487. 金明的预算方案](#)

## 一般化的「有依赖」背包问题

[AcWing 10. 有依赖的背包问题](#)

## 求方案数与具体方案

[AcWing 11. 背包问题求方案数](#)

[AcWing 12. 背包问题求具体方案](#)

## 「贪心」将无限集缩小为有限集

[AcWing 734. 能量石](#)

## 单调队列优化多重背包

[AcWing 6. 多重背包问题 III](#)

## 二维费用背包问题

[AcWing 8. 二维费用的背包问题](#)

## 状态机 DP

### 基础

[AcWing 1049. 大盗阿福](#)

### 变式

[AcWing 1057. 股票买卖 IV](#)

[AcWing 1058. 股票买卖 V](#)

## 状态压缩 DP

### 基础

[AcWing 1064. 小国王](#)

### 变式

[AcWing 327. 玉米田](#)

[AcWing 292. 炮兵阵地](#)

[AcWing 524. 愤怒的小鸟](#)

## 区间 DP

### 基础

[AcWing 282. 石子合并](#)

### 变式

## 环形问题的一般化处理思路

[AcWing 1068. 环形石子合并](#)

[AcWing 320. 能量项链](#)

[AcWing 1069. 凸多边形的划分](#)

[AcWing 479. 加分二叉树](#)

[AcWing 321. 棋盘分割](#)

## 树形 DP

### 基础

[AcWing 285. 没有上司的舞会](#)

[AcWing 1072. 树的最长路径](#)

[AcWing 1073. 树的中心](#)

### 变式

[AcWing 1075. 数字转换](#)

[AcWing 1074. 二叉苹果树](#)

[AcWing 323. 战略游戏](#)

[AcWing 1077. 皇宫看守](#)

## 数位 DP

### 基础

[AcWing 1081. 度的数量](#)

## 单调队列优化

### 基础

原题链接：[AcWing 135. 最大子序和](#)

由于我们需要求一段**连续**的子序列的和，考虑用前缀和

定义  $s[i] = w[1] + w[2] + \cdots + w[i]$ 。假设所求区间为  $[l, r]$ ，那么区间和为  $s[r] - s[l - 1]$

由于区间长度不超过  $m$ ，因此实际区间为  $[i - m + 1, i]$ ，区间和为  $s[i] - s[i - m]$

当我们枚举  $i$  时，我们期望  $s[i] - s[i - m]$  最大，由于  $s[i]$  固定，因此我们需要让  $s[i - m]$  最小，即所有局部最优解  $ans$  为：

$$tmp = s[i] - \min_{0 \leq k \leq m} s[i - k]$$

全局最优解为：

$$ans = \max_{n-m+1 \leq i \leq n} ans_i$$

由于我们需要求一段区间内的最小值，因此后者可以用单调队列优化，时间复杂度变为  $O(n)$

**单调队列内部维护元素个数为  $m + 1$** ，所维护元素为前缀和  $s[i]$ ，因此需要预先将  $s[0]$  插入进队列中

我们在对最终结果赋值时需要保证队列不空，由于我们预先给了队列一个初值，因此需要在调整队列前对  $ans$  赋值

完整代码：

```
#include <iostream>

using namespace std;
typedef long long LL;
const int N = 3e5 + 10;
int n, m;
LL s[N], q[N];

int main()
{
    cin >> n >> m;
    for(int i = 1; i <= n; i++) cin >> s[i], s[i] += s[i - 1];
    int hh = 0, tt = 0; // 预先将0插入进队列，因为前缀和
    LL ans = -1e18;
    for(int i = 1; i <= n; i++)
    {
        if(hh <= tt && q[hh] < i - m) hh++; // 最后一个元素为 i - m
        ans = max(ans, s[i] - s[q[hh]]);
        while(hh <= tt && s[q[tt]] >= s[i]) tt--;
        q[++tt] = i;
    }
    cout << ans << endl;
    return 0;
}
```

变式