Алгоритъм за минимизация

Иво Стратев

9 юни 2020 г.

Алгоритъма, който предстой да разгледаме се базира на следното наблюдение: състоянията на един тотален КДА, които имат едни и същи езици могат да бъдат сляти в едно състояние.

Нека $\mathcal{A} = \langle \Sigma, Q, s, \delta, F \rangle$. Нека $q \in Q$ тогава езикът на q ще дефинираме по обратен начин на този когато правихме коректност на автомат. Тоест като множеството от думите, които от състояние q водят до някое финално състояние.

$$\mathcal{L}ang_{\mathcal{A}}(q) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \delta(q, \alpha) \in F\}$$

Като идеята е че по този начин $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}ang_{\mathcal{A}}(s)$.

Въвеждаме релация в множеството на състоянията на автомата, така че две състояния да са в релация ТСТК имат един и същ език.

$$p \equiv_{\mathcal{A}} q \overset{\text{def}}{\iff} \mathcal{L}ang_{\mathcal{A}}(q) = \mathcal{L}ang_{\mathcal{A}}(p)$$

Релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$ е релация на еквивалетност и ако тръгнем да сливаме състояния, то сливането ще бъде точно спрямо разбиването на класове на еквивалетност спрямо $\equiv_{\mathcal{A}}$.

Както знаем от курса по ДС релациите на еквивалетност над едно множество са в съотвествие с начините за разбиване на това множество. Е алгоритъма се състой в апроксимирането (приближаването) на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$ чрез разбивания на множеството от състоянията. Тоест чрез апроксимиране на разбиването съотвестващо на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$.

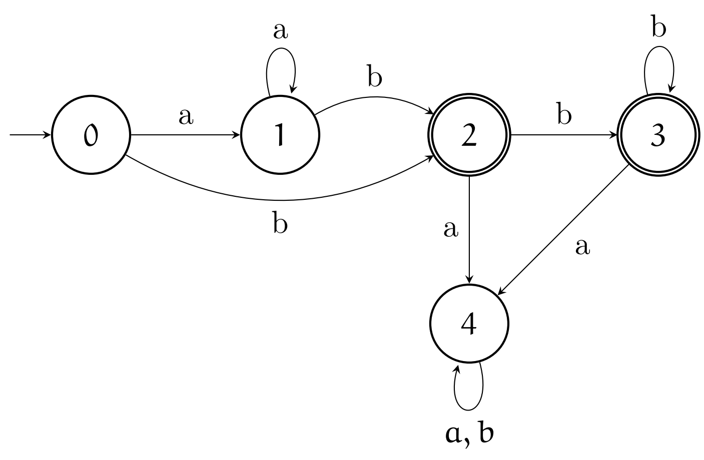
Като за апроксимацията ще са ни необходими най-много $|Q|$ стъпки, защото в най-лошият случай всеки клас на еквивалетност е едноелементно множество.

Започваме само с два класа на еквивалетност: F и $Q \setminus F$. След, което постепенно опитваме да разбием всеки клас на еквивалетност. Като ако на някоя стъпка получим едно елементно множество, то разбира се не пробваме да го разбием.

Разбиването става спрямо преходите на автомата. Ако за едно множества от състояния има буква от азбуката, с която две състояния отиват в различен клас на еквивалетност от предната стъпка, то се разбива. Ако дори само един клас бъде разбит, то на следващата стъпка пробваме да разбием всеки от получените. Независимо, че на предната стъпка, някое множество може да не се е разбивало, това не значи, че новата стъпка гарантирано няма да се разбие.

Така в началото започваме от една груба релация, зададена чрез класовете си на еквивалетност, които са два: финални и нефинални състояния и постепенно пробваме да изтъняваме релацията, като в резултат получаваме евентуално по-финно разбиване. Спираме когато на някоя стъпка нито един клас на еквивалетност не може да бъде разбит, това разбиване задава релацията, която търсим.

Нека минимизираме следният креан **тотален** детерминиран автомат:



Нека $A_0 = \{0, 1, 4\}$ и $A_1 = \{2, 3\}$. Тогава началното разбиване е $\{A_0, A_1\}$. Пробваме дали можем да разбием всяко от двете множества.

A_0	a	b	
0	A_0	A_1	B_0
1	A_0	A_1	B_0
4	A_0	A_0	B_1
	✓		

A_1	a	b	
2	A_0	A_1	B_2
3	A_0	A_1	B_2
	✓	✓	

Чавки има в колоните, в които имаме пълно съвпадение. Както се вижда в таблицата относно A_0 в колоната за буквата b има разлика и значи множеството се разбива. Разбиването е на множества спрямо редовете на таблицата. Тоест еднакивте редове попадат в един клас на екивалетност.

Така получаваме три класа на еквивалетност $B_0 = \{0, 1\}$, $B_1 = \{4\}$ и $B_2 = \{2, 3\}$. Ясно е, че B_1 няма как да бъде разбито понеже релацията, която апроксимираме е рефлексивна. Пробваме да разбием другите две.

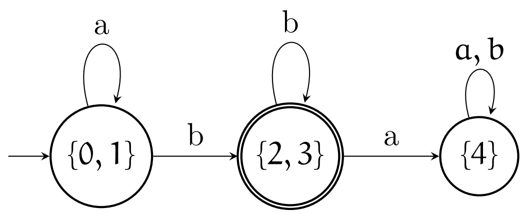
B_0	a	b	
0	B_0	B_2	
1	B_0	B_2	
	✓	✓	

$\hat{\delta}$	a	b	kind
B_0	B_0	B_2	start
B_1	B_1	B_1	error
B_2	B_1	B_2	final

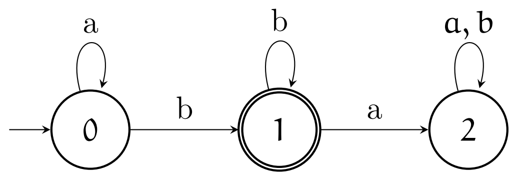
Получаваме пълни съвпадения във всяка колона. Следователно нито едно множество не може да бъде разбито. Така разбиването $\{B_0, B_1, B_2\}$ задава релацията, която търсим. Всеки един клас на екивалетност ще бъде състояние в минималният автомат. За това е удобно да си направим таблица, на базата на която да построим минимален автомат. Таблицата същност ще описва функцията на преходите и вида на всяко състояние.

$\hat{\delta}$	a	b	kind
B_0	B_0	B_2	start
B_1	B_1	B_1	error
B_2	B_1	B_2	final

Така получаваме автомата

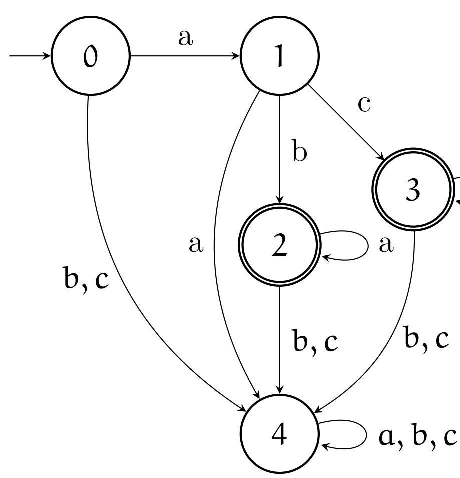


Полученият автомат е изоморфен на автомата



Вече лесно се съобразява че езкът на двата минилимални автомата и първоначалният е $\{\mathsf{a}\}^* \cdot \{\mathsf{b}\}^+$. Това не би трябвало да бъде изненада, защото това е тотален автомат на базата автомат за същия език получен чрез основните конструкции за строене на недетерминиран автомат по регулярен език. В конкретният случай конструираният автомат на предходно упражнение е детерминиран, но не е тотален.

Нека минимизираме следният автомат



Започваме от разбиването $\{A_0, A_1\}$, където $A_0 = \{0, 1, 4\}$ и $A_1 = \{2, 3\}$. Пробваме да разбием всяко едно от двете множества.

A_0	a	b	c	
0	A_0	A_0	A_0	B_0
1	A_0	A_1	A_1	B_1
4	A_0	A_0	A_0	B_0
	✓			

A_1	a	b	c	
2	A_1	A_0	A_0	B_2
3	A_1	A_0	A_0	B_2
	✓	✓	✓	

A_0 се разбива на две.

Нека $B_0 = \{0, 4\}$, $B_1 = \{1\}$ и $B_2 = \{2, 3\}$. Пробваме да разбием B_0 и B_2.

B_0	a	b	c	
0	B_1	B_0	B_0	C_0
4	B_0	B_0	B_0	C_1
		✓	✓	

B_2	a	b	c	
2	B_1	B_0	B_0	C_2
3	B_1	B_0	B_0	C_2
	✓	✓	✓	

B_0 се разбива на две. Нека $C_0 = \{0\}$, $C_1 = \{4\}$, $C_2 = \{2, 3\}$ и $C_3 = \{1\}$. Пробваме да разбием само C_2 понеже другите са едноелементни.

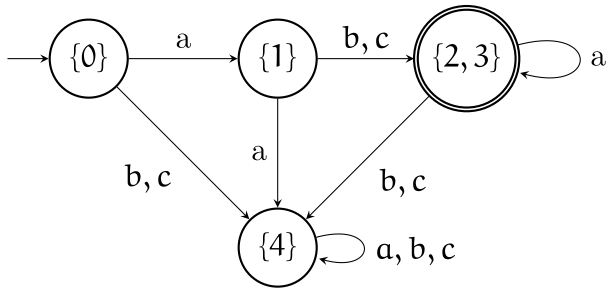
C_2	a	b	c	
2	C_2	C_1	C_1	
3	C_2	C_1	C_1	
	✓	✓	✓	

C_2 не се разбива така, че получаваме разбиването $\{C_0, C_1, C_2, C_3\}$, което задава релацията спрямо, която сливаме състоянията.

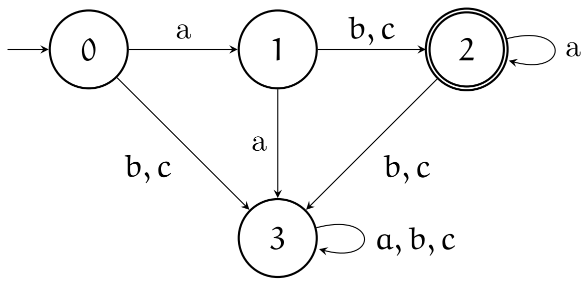
Правим таблица за функцията на преходите на минимизирания автомат.

$\hat{\delta}$	a	b	c	kind
C_0	C_3	C_1	C_1	start
C_1	C_1	C_1	C_1	error
C_2	C_2	C_1	C_1	final
C_3	C_1	C_2	C_2	

По нея строим (дигарамата на) минимизирания автомат.



Изоморфен на него е следния автомат:



Този път езикът е $\{a\} \cdot \{b, c\} \cdot \{a\}^*$.