Две техники за доказване на нерегулярност

Иво Стратев

9 юни 2020 г.

Техника 1: Сечение с регулярен

Нека $L = \{a^i.b^j.c^k \ \mid \ i \in \mathbb{N} \ \& \ j \in \mathbb{N} \ \& \ k \in \mathbb{N} \ \& \ i = j \ \vee \ j = k\}$. Да допуснем, че L е регулярен. Тогава е регулярен и $L \cap \{a\}^* \cdot \{b\}^*$. Но $L \cap \{a\}^* \cdot \{b\}^* = \{a^n.b^n.c^0 \ \mid \ n \in \mathbb{N}\} = \{a^n.b^n \ \mid \ n \in \mathbb{N}\}$. Както знаем обаче езикът $\{a^n.b^n \ \mid \ n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен. Достигнахме до Абсурд! Следователно L не е регулярен.

Техника 2: Допълнение и сечение с регулярен

Нека $L = \{a^i.b^j.c^k \ \mid \ i \in \mathbb{N} \ \& \ j \in \mathbb{N} \ \& \ k \in \mathbb{N} \ \& \ i \neq j \ \vee \ j \neq k \ \vee \ i \neq k\}$. Да допуснем, че L е регулярен. L е език над азбуката $\{a, b, c\}$. Тогава допълнението на L е $\{a, b, c\}^* \setminus L$, което е регулярен език, защото автоматните и регулрните езици съвпадат, а автоматните са затворени относно допълнение.

Тогава е регулярен и $(\{a, b, c\}^* \setminus L) \cap (\{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*)$. Но това значи, че $\{a^n.b^n.c^n \ \mid \ n \in \mathbb{N}\}$ е регулярен език, а той не е (помислете защо). Достигнахме до Абсурд! Следователно L не е регулярен.

Забележка: В случая не можем да използваме само сечение с $\{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$, защото сечението съвпада с L. Но не можем да използваме и само допълнение, защото допълнението на L е строго надмножество на езика $\{a^i.b^j.c^k \ \mid \ i \in \mathbb{N} \ \& \ j \in \mathbb{N} \ \& \ k \in \mathbb{N} \ \& \ i = j \ \& \ j = k \ \& \ i = k\}$. Например в него се съдържат думите ba, $babc$, $cabcba$ и тн. Налага да пресечем допълнението с $\{\mathtt{a}\}^* \cdot \{\mathtt{b}\}^* \cdot \{\mathtt{c}\}^*$, за да фиксираме реда на буквите в думите.