Безконтекстни граматики

Иво Стратев

9 юни 2020 г.

Въведение

Нека Σ и Γ са крайни азбуки, такива че $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$. Нека $S \in \Gamma$ и нека $R \in \mathcal{P}(\Gamma \times (\Sigma \cup \Gamma)^*)$. Тогава $\langle \Gamma, \Sigma, S, R \rangle$ е безконтекстна граматика. Σ ще наричаме множество на терминалите или символна азбука, а Γ множество на нетерминалите или множество на променливите. R ще наричаме множеството от правилата на граматиката. S начален нетерминал или начална променлива.

Съкращения

Ако $\langle V, \alpha \rangle \in \Gamma \times (\Sigma \cup \Gamma)^*$, то ще пишем $V \longrightarrow \alpha$ и ще казваме, че V може да се замени с α. Ако $V \in \Gamma$, $\alpha, \beta, \omega \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$ и $\langle V, \alpha \rangle, \langle V, \beta \rangle, \langle V, \omega \rangle \in R$, то ще пишем $V \longrightarrow \alpha \mid \beta \mid \omega$, което ще ни казва, че V може да бъде заменена с коя да е от думите α, β и γ.

Език на безконтекстна граматика

Нека M е непразно множество и $t \in \mathbb{N}$ тогава със $\mathrm{seq}(t, M)$ ще означаваме множеството на функциите от $\{1, 2, \ldots, t\}$ в M (крайните редиците от t на брой елемента от M).

Нека $G = \langle \Gamma, \Sigma, S, R \rangle$. С рекурсия по естествените числа дефинираме релации $\overset{n}{\underset{G}{\rightsquigarrow}}$ между Γ и $(\Sigma \cup \Gamma)^*$. Като идеята ни е следната искаме
$V \overset{n}{\underset{G}{\rightsquigarrow}} \alpha$ ТСТК има извод на думата α от променливата V с височина n

по граматиката G. Дефинираме

$$\overset{0}{\underset{G}{\rightsquigarrow}} := \mathrm{Id}_\Gamma = \{\langle V, V\rangle \mid V \in \Gamma\}$$

Следвайки идеята ни с височина 0 от една промнелива можем да изведем самата променлива, защото няма как да приложим правило.

Ако $V \in \Gamma$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathrm{seq}(k+1, \Sigma^*)$, $\beta \in \mathrm{seq}(k, (\Sigma \cup \Gamma)^*)$, $E \in \mathrm{seq}(k, \Gamma)$, $V \to \left(\prod_{i=1}^{k} \alpha(i).E(i)\right).\alpha(k+1) \in R$, $l \in \mathrm{seq}(k, \mathbb{N})$,

$n = \max\{l(i) \mid i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ и $(\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\})(E(i) \overset{l(i)}{\underset{G}{\rightsquigarrow}} \beta(i))$,

то $V \overset{n+1}{\underset{G}{\rightsquigarrow}} \left(\prod_{i=1}^{k} \alpha(i).\beta(i)\right).\alpha(k+1)$.

Тоест всеки път когато имаме променлива V, редица от k променливи: $E(1), E(2), \ldots, E(k)$, редица от $k+1$ думи над $\Sigma \cup \Gamma$: $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(k+1)$, редица от k думи над $\Sigma \cup \Gamma$: $\beta(1), \beta(2), \ldots, \beta(k)$,
правило $V \to \alpha(1).E(1).\alpha(2).E(2).\alpha(3)\ldots\alpha(k).E(K).\alpha(k+1)$ в граматиката, редица от k естесвени числа $l(1), l(2), \ldots l(k)$ и n е максималното число в крайната редица l и имаме, че от променливата $E(i)$ се извежда думата $\beta(i)$ с височина $l(i)$ за i от 1 до k, то от променливата V се извежда думата $\alpha(1).\beta(1).\alpha(2).\beta(2).\alpha(3)\ldots\alpha(k).\beta(K).\alpha(k+1)$ с височина на извода $n+1$. Тоест позволяваме при прилагане на едно правило да направим едновременна замяна на всяка участваща променлива в дясната част на правилото, като можем да изберем и тривиалната замяна, а именно да не правим замяна на дадена променлива. Така реално си даваме пълна свобода на действие.

Накрая дефинираме $\overset{\star}{\underset{G}{\rightsquigarrow}}$ като $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} \overset{s}{\underset{G}{\rightsquigarrow}}$. Така $V \overset{\star}{\underset{G}{\rightsquigarrow}} \alpha$ ТСТК от променливата V е изводима думата α по граматиката G. Помислите защо $\overset{\star}{\underset{G}{\rightsquigarrow}}$ реално играе ролята на **рефлексивното** и **транзитивно** затваряне на релацията определена от множеството R.

Пример

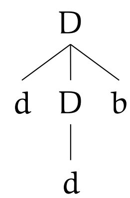
Нека $\Gamma = \{S, D, B\}$, $\Sigma = \{d, b\}$ и

$R = \{S \to BDS \mid B, D \to dDb \mid d, B \to bdB \mid b\}$.

Разглеждаме граматиката $\langle \Gamma, \Sigma, S, R \rangle$.

Имаме $B \overset{1}{\rightsquigarrow} b$ и $D \overset{1}{\rightsquigarrow} d$. Значи $B \overset{1}{\rightsquigarrow} b$ и $D \overset{1+1}{\rightsquigarrow} ddb$.

На диаграма:

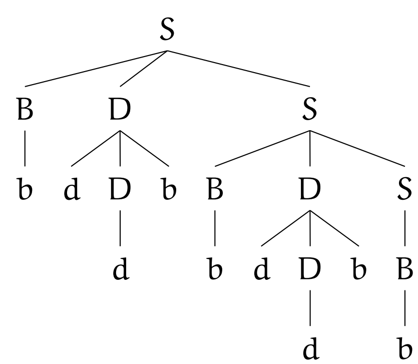


Фигура 1: Дърво на извод за думата ddb

Вижда се, че в дясната част на правилото $D \to dDb$ сме заменили D с d. Тоест за извода на думата ddb от промеливата D сме приложили последователно правилата $D \to dDb$ и $D \to d$.

Имаме правило $S \to B$ и $B \overset{1}{\rightsquigarrow} b$ следователно $S \overset{2}{\rightsquigarrow} b$.
Така имаме $B \overset{1}{\rightsquigarrow} b$, $D \overset{2}{\rightsquigarrow} ddb$, $S \overset{2}{\rightsquigarrow} b$ и правило $S \to BDS$, получаваме $S \overset{1+max(1,2,2)}{\rightsquigarrow} b(ddb)b$.

До тук имаме $B \overset{1}{\rightsquigarrow} b$, $D \overset{2}{\rightsquigarrow} ddb$, $S \overset{3}{\rightsquigarrow} bddbb$ и правило $S \to BDS$, получаваме $S \overset{1+max(1,2,3)}{\rightsquigarrow} b(ddb)(bddbb)$. Тоест $S \overset{4}{\rightsquigarrow} bddbbddbb$. Получихме, че от S с височина на извода 4 се извежда думата $bddbbddbb$.



Фигура 2: Дърво на извод за думата $bddbbddbb$

Дефиниция (език на променлива)

Нека $G = \langle \Gamma, \Sigma, S, R \rangle$ е безконтекстна граматика. Нека $V \in \Gamma$. Тогава езикът на V спрямо G е $\{\omega \in \Sigma^* \mid V \underset{G}{\overset{\star}{\rightsquigarrow}} \omega\}$. Ще го белжим с $\mathcal{CFL}_G(V)$. Така $\mathcal{CFL}_G(V)$ е множеството на думите над символната азбука, които са изводими по граматиката G от променливата V.

Дефиниция (език на безконтекстна граматика)

Тогава езикът на G е точно $\mathcal{CFL}_G(S)$ и ще го бележим с $\mathcal{CFL}(G)$. Тоест езикът на граматиката G е езикът на началната променлива на граматиката.

Дефиниция (крайна апроксимация на език на променлива)

Нека $G = \langle \Gamma, \Sigma, S, R \rangle$ е безконтекстна граматика. Нека $V \in \Gamma$. Нека $l \in \mathbb{N}$ и нека $\mathcal{CFL}^l_G(V) := \{\omega \in \Sigma^* \mid (\exists s \in \mathbb{N})(s \leq l \;\&\; V \underset{G}{\overset{s}{\rightsquigarrow}} \omega)\}$. Множеството $\mathcal{CFL}^l_G(V)$ е l-тата крайна апроксимация на езика $\mathcal{CFL}_G(V)$. Това са думите над символната азбука, изводими от V с височина на извода не по-голяма от l. Понеже с височина на извода 0 от V се извежда само V и $V \notin \Sigma$, то $\mathcal{CFL}^l_G(V) = \emptyset$.

Основна задача :)

Нека $G = \langle \Gamma, \Sigma, S, R \rangle$ е безконтекстна граматика. Нека $V \in \Gamma$. Тогава

$$\mathcal{CFL}_G(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{CFL}^n_G(V)$$

Доказателство:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{V})\\
&= \{\omega \in \Sigma^* \mid \mathsf{V} \overset{\star}{\underset{\mathsf{G}}{\rightsquigarrow}} \omega\}\\
&= \left\{\omega \in \Sigma^* \mid \mathsf{V} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overset{k}{\underset{\mathsf{G}}{\rightsquigarrow}} \omega\right\}\\
&= \{\omega \in \Sigma^* \mid (\exists k \in \mathbb{N})(\mathsf{V} \overset{k}{\underset{\mathsf{G}}{\rightsquigarrow}} \omega)\}\\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Sigma^* \mid \mathsf{V} \overset{k}{\underset{\mathsf{G}}{\rightsquigarrow}} \omega\}\\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Sigma^* \mid (\exists l \in \mathbb{N})(l \leq k \;\&\; \mathsf{V} \overset{l}{\underset{\mathsf{G}}{\rightsquigarrow}} \omega)\}\\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega \in \mathcal{CFL}^k_{\mathsf{G}}(\mathsf{V})\}\\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{CFL}^k_{\mathsf{G}}(\mathsf{V})
\end{aligned}
$$

Индуктивен принцип

Нека $\mathsf{G} = \langle \Gamma, \Sigma, \mathsf{S}, \mathsf{R} \rangle$ е безконтекстна граматика. Нека P е свойство на думите над Σ. Тоест P е предикат над Σ^*. Тогава е в сила следната импликация (индуктивен принцип)

$$((\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}^k_{\mathsf{G}}(\mathsf{V}))\ \mathsf{P}(\omega)) \implies ((\forall \omega \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{V}))\ \mathsf{P}(\omega))$$

Доказателство: Нека е в сила предпоставката на импликацията. Тоест нека $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}^k_{\mathsf{G}}(\mathsf{V}))\ \mathsf{P}(\omega)$ е истина. Ще докажем, че е истина и $(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{V}))\ \mathsf{P}(\omega)$. Нека $\omega \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{V})$. Тогава по основната задача $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{CFL}^n_{\mathsf{G}}(\mathsf{V})$. Нека тогава $n \in \mathbb{N}$ е такова, че $\omega \in \mathcal{CFL}^n_{\mathsf{G}}(\mathsf{V})$. Тогава $\mathsf{P}(\omega)$ от предпостаката. Обобщаваме и получаваме $(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{V}))\ \mathsf{P}(\omega)$.

Следствие:

Искаме да докажем, че $\mathcal{CFL}_G(V) \subseteq L$. Тогава вземаме свойство $P(\omega) \stackrel{\text{def}}{\iff} \omega \in L$. Доказваме по индукция

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}^k_G(V))(\omega \in L)$$

От където от индуктивният принцип получаваме $(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G(V))(\omega \in L)$. Тоест $\mathcal{CFL}_G(V) \subseteq L$.

Два основни примера за безкрайни безконтекстни езици

Пример 1. Всевъзжмони конкатенации (итерации) на дума / звезда на Клини на език от една дума

Нека Σ е азбука. Нека $\alpha \in \Sigma^*$. Нека $S \notin \Sigma$.

Нека $G = \langle \{S\}, \Sigma, S, \{S \to \alpha.S,\ S \to \varepsilon\} \rangle$.

Твърдим, че $\mathcal{CFL}(G) = \{\alpha\}^*$.

С индукция ще докажем, че $(\forall k \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}^k_G(S) \subseteq \{\alpha\}^*)$, доказвайки $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}^k_G(S))(\omega \in \{\alpha\}^*)$.

Имаме следната рекуретна връзка

$$\mathcal{CFL}^0_G(S) = \emptyset$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}^{n+1}_G(S) = \{\alpha\} \cdot \mathcal{CFL}^n_G(S) \cup \{\varepsilon\})$$

База:

$\mathcal{CFL}^0_G(S) = \emptyset \subseteq \{\alpha\}^*$.

И.Х.

Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека $(\forall \omega \in \mathcal{CFL}^k_G(S))(\omega \in \{\alpha\}^*)$.
Тоест нека $\mathcal{CFL}^k_G(S) \subseteq \{\alpha\}^*$.

И.С.

Нека $\omega \in \mathcal{CFL}_G^{k+1}(S)$. Тогава от връзката следва, че
$\omega \in \{\alpha\} \cdot \mathcal{CFL}_G^{k}(S) \cup \{\varepsilon\}$. Възможи са два случая.
Ако $\omega \in \{\varepsilon\}$, то $\omega = \alpha^0 \in \{\alpha\}^*$.
Ако $\omega \in \{\alpha\} \cdot \mathcal{CFL}_G^{k}(S)$, то $\omega \in \{\alpha\} \cdot \{\alpha\}^* = \{\alpha\}^+ \subseteq \{\alpha\}^*$. Така получихме, че $\omega \in \{\alpha\}^*$. Обобщаваме и получаваме $(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^{k+1}(S))(\omega \in \{\alpha\}^*)$.

Заключение:

$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^{k}(S))(\omega \in \{\alpha\}^*)$. Така от следствивето на индукционни принцип получаваме $\mathcal{CFL}_G(S) \subseteq \{\alpha\}^*$.

Сега ще докажем обратното включване. Тоест $(\forall \omega \in \{\alpha\}^*)(\omega \in \mathcal{CFL}_G(S))$. Понеже $\{\alpha\}^* = \{\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ще докажем $(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha^n \in \mathcal{CFL}_G(S))$. Като вземем предвид, че $\mathcal{CFL}_G(S) = \{\omega \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\rightsquigarrow} \omega\}$, което е еквивалетно с $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(S \overset{k}{\rightsquigarrow} \alpha^n)$.

База:

Имаме правило $S \to \varepsilon$ следователно $S \overset{1}{\rightsquigarrow} \alpha^0$. Следователно $\alpha^0 \in \mathcal{CFL}_G(S)$.

И.Х.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $\alpha^n \in \mathcal{CFL}_G(S)$ т.е. $S \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha^n$.

И.С.

Щом $S \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha^n$, то нека $l \in \mathbb{N}$ е такова, че $S \overset{l}{\rightsquigarrow} \alpha^n$. Имаме правило $S \to \alpha S$. Следователно $S \overset{1+l}{\rightsquigarrow} \alpha.\alpha^n$. Така $S \overset{1+l}{\rightsquigarrow} \alpha^{n+1}$. Следователно $S \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha^{n+1}$. Следователно $\alpha^{n+1} \in \mathcal{CFL}_G(S)$.

Заключение:

$(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha^n \in \mathcal{CFL}_G(S))$. Следователно $\{\alpha\}^* \subseteq \mathcal{CFL}_G(S)$.

Така $\mathcal{CFL}(G) = \mathcal{CFL}_G(S) = \{\alpha\}^*$.

Пример 2. Основен безконтекстен

Нека Σ е азбука. Нека $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Нека $S \notin \Sigma$.

Нека $G = \langle \{S\}, \Sigma, S, \{S \to \alpha.S.\beta,\ S \to \varepsilon\} \rangle$.

Твърдим, че $\mathcal{CFL}(G) = \{\alpha^n \beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Нека $L = \{\alpha^n \beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Трябва да покажем
$\mathcal{CFL}_G(S) \subseteq L$ и $L \subseteq \mathcal{CFL}_G(S)$.

С индукция ще докажем, че $(\forall k \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}_G^k(S) \subseteq L)$, доказвайки $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^k(S))(\omega \in L)$.

Имаме следната рекуретна връзка

$$\mathcal{CFL}_G^0(S) = \emptyset$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}_G^{n+1}(S) = (\{\alpha\} \cdot \mathcal{CFL}_G^n(S) \cdot \{\beta\}) \cup \{\varepsilon\})$$

База:

$\mathcal{CFL}_G^0(S) = \emptyset \subseteq L$.

И.Х.

Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека $(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^k(S))(\omega \in L)$.
Тоест нека $\mathcal{CFL}_G^k(S) \subseteq L$.

И.С.

Нека $\omega \in \mathcal{CFL}_G^{k+1}(S)$. Тогава от връзката следва, че
$\omega \in (\{\alpha\} \cdot \mathcal{CFL}_G^k(S) \cdot \{\beta\}) \cup \{\varepsilon\}$. Възможи са два случая.
Ако $\omega \in \{\varepsilon\}$, то $\omega = \alpha^0 \beta^0 \in L$.
Ако $\omega \in \{\alpha\} \cdot \mathcal{CFL}_G^k(S) \cdot \{\beta\}$, то $\omega \in \{\alpha\} \cdot L \cdot \{\beta\} = \{\alpha^{n+1}\beta^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq L$.
Така получихме, че $\omega \in L$. Обобщаваме и получаваме
$(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^{k+1}(S))(\omega \in L)$.

Заключение:

$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^k(S))(\omega \in L)$. Така от следствивето на индукционни принцип получаваме $\mathcal{CFL}_G(S) \subseteq L$.

Сега ще докажем обратното включване. Тоест $(\forall \omega \in L)(\omega \in \mathcal{CFL}_G(S))$.

Понеже $\mathsf{L} = \{\alpha^n\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ще докажем $(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha^n\beta^n \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S}))$. Като вземем предвид, че $\mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S}) = \{\omega \in \Sigma \mid \mathsf{S} \overset{*}{\rightsquigarrow} \omega\}$, което е еквивалетно с $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\mathsf{S} \overset{k}{\rightsquigarrow} \alpha^n\beta^k)$.

База:

Имаме правило $\mathsf{S} \to \varepsilon$ следователно $\mathsf{S} \overset{1}{\rightsquigarrow} \alpha^0\beta^0$.
Следователно $\alpha^0\beta^0 \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S})$.

И.Х.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $\alpha^n\beta^n \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S})$ т.е. $\mathsf{S} \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha^n\beta^n$.

И.С.

Щом $\mathsf{S} \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha^n\beta^n$, то нека $l \in \mathbb{N}$ е такова, че $\mathsf{S} \overset{l}{\rightsquigarrow} \alpha^n\beta^n$.
Имаме правило $\mathsf{S} \to \alpha\mathsf{S}\beta$. Следователно $\mathsf{S} \overset{1+l}{\rightsquigarrow} \alpha(\alpha^n\beta^n)\beta$.
Така $\mathsf{S} \overset{1+l}{\rightsquigarrow} \alpha^{n+1}\beta^{n+1}$. Следователно $\mathsf{S} \overset{*}{\rightsquigarrow} \alpha^{n+1}\beta^{n+1}$.
Следователно $\alpha^{n+1}\beta^{n+1} \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S})$.

Заключение:

$(\forall n \in \mathbb{N})(\alpha^n\beta^n \in \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S}))$. Следователно $\mathsf{L} \subseteq \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S})$.
Така $\mathcal{CFL}(\mathsf{G}) = \mathcal{CFL}_{\mathsf{G}}(\mathsf{S}) = \mathsf{L} = \{\alpha^n\beta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Операции с граматики

Сума на граматики

Нека $\mathsf{G}_1 = \langle \Gamma_1, \Sigma_1, \mathsf{S}_1, \mathsf{R}_1\rangle$ и $\mathsf{G}_2 = \langle \Gamma_2, \Sigma_2, \mathsf{S}_2, \mathsf{R}_2\rangle$ са КСГ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.
Нека $\mathsf{S} = \langle \Gamma_1, \Gamma_2\rangle$ очевидно $\mathsf{S} \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и
$\mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2 := \langle \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\mathsf{S}\},\ \Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ \mathsf{S},\ \mathsf{R}_1 \cup \mathsf{R}_2 \cup \{\mathsf{S} \to \mathsf{S}_1, \mathsf{S} \to \mathsf{S}_2\}\rangle$.
Тогава $\mathcal{CFL}(\mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2) = \mathcal{CFL}(\mathsf{G}_1) \cup \mathcal{CFL}(\mathsf{G}_2)$.
$\mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2$ е сумата на граматиките G_1 и G_2.
Очевидно $\mathsf{G}_2 \oplus \mathsf{G}_1 \neq \mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2$, защото $\langle \Gamma_1, \Gamma_2\rangle \neq \langle \Gamma_2, \Gamma_1\rangle$,
но $\mathcal{CFL}(\mathsf{G}_2 \oplus \mathsf{G}_1) = \mathcal{CFL}(\mathsf{G}_1 \oplus \mathsf{G}_2)$!

Произведение на граматики

Нека $G_1 = \langle \Gamma_1, \Sigma_1, S_1, R_1 \rangle$ и $G_2 = \langle \Gamma_2, \Sigma_2, S_2, R_2 \rangle$ са КСГ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Нека $S = \langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ очевидно $S \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и

$G_1 \odot G_2 := \langle \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\},\ \Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ S,\ R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1 S_2\} \rangle$.

Тогава $\mathcal{CFL}(G_1 \odot G_2) = \mathcal{CFL}(G_1) \cdot \mathcal{CFL}(G_2)$.

$G_1 \odot G_2$ е произведението на граматиките G_1 и G_2.

Звезда (итерация) на безконтекстна граматика

Нега $G = \langle \Gamma, \Sigma, S, R \rangle$.

Нека $P = \Gamma$, очевидно $P \notin \Gamma$.

Нека $G^{\circledast} := \langle \Gamma \cup \{P\},\ \Sigma,\ P,\ R \cup \{P \to S.P,\ P \to \varepsilon\} \rangle$.

Тогава $\mathcal{CFL}(G^{\circledast}) = \mathcal{CFL}(G)^*$.

Пример 1

Нека $L = \{a^n.b^k.c^s \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N} \ \&\ s \in \mathbb{N} \ \&\ n + k \leq s\}$. Искаме да покажем, че L е безконтекстен език. За да си цел трябва да построим безконтекстна граматика, която го генерира.

Преди да строим граматика ще изразим L в удобен за генериране вид. Възползваме се от практическото правило, че лесно се правят правила за генерира от вън на вътре!

$$L = \{a^n.b^k.c^{n+k+t} \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N} \ \&\ t \in \mathbb{N}\}$$
$$L = \{a^n.b^k.c^k.c^n.c^t \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N} \ \&\ t \in \mathbb{N}\}$$
$$L = \{a^n.b^k.c^k.c^n.\omega \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N} \ \&\ \omega \in \{c\}^*\}$$
$$L = \{a^n.(b^k.c^k).c^n \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N}\} \cdot \{c\}^*$$

Нека $T = \{a^n.b^k.c^k.c^n \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N}\}$. Тогава $L = T \cdot \{c\}^*$.

Нека $G_1 = \langle \{A, B\}, \{a, b\}, A, \{A \to aAc,\ A \to B,\ B \to bBc,\ B \to \varepsilon\} \rangle$.

Тогава $\mathcal{CFL}_{G_1}(B) = \mathcal{CFL}_{\langle \{B\}, \{b,c\}, B, \{B \to bBc,\ B \to \varepsilon\} \rangle}(B) = \{b^k.c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Така получаваме

$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}^n_{G_1}(B) = \{b^s.c^s \mid s \in \mathbb{N} \ \&\ s < n\} \subseteq \{b^k.c^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq T)$.

В сила е следната рекуретна връзка между крайните апроксимации на $\mathcal{CFL}_{G_1}(A)$.

$$\mathcal{CFL}^0_{G_1}(A) = \emptyset$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}^{n+1}_{G_1}(A) = (\{a\} \cdot \mathcal{CFL}^n_{G_1}(A) \cdot \{c\}) \cup \mathcal{CFL}^n_{G_1}(B))$$

С индукция ще докажем, че
$(\forall h \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}^h_{G_1}(A) \subseteq T = \{a^n.b^k.c^k.c^n \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N}\})$.

База:

Имаме $\mathcal{CFL}^0_{G_1}(A) = \emptyset \subseteq T$.

И.Х.

Нека $h \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{CFL}^h_{G_1}(A) \subseteq T = \{a^n.b^k.c^k.c^n \mid n \in \mathbb{N} \ \&\ k \in \mathbb{N}\}$.

И.С.

Нека $\omega \in \mathcal{CFL}^{h+1}_{G_1}(A)$. Възможни са два случая.

Случай 1. $\omega \in \{a\} \cdot \mathcal{CFL}^h_{G_1}(A) \cdot \{c\}$

Тогава нека $\beta \in \mathcal{CFL}^h_{G_1}(A)$ и $\omega = a.\beta.c$. От хипотезата получаваме $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(\beta = a^n.b^k.c^k.c^n)$. Нека тогава $n, k \in \mathbb{N}$ и са такива, че $\beta = a^n.b^k.c^k.c^n$. Така $\omega = a.\beta.c = a^{n+1}.b^k.c^k.c^{n+1} \in T$.

Случай 2. $\omega \in \mathcal{CFL}^h_{G_1}(B)$

Тогава $\omega \in \{b^k.c^k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq T$.

Следователно $\omega \in T$ и значи $\mathcal{CFL}^{h+1}_{G_1}(A) \subseteq T$.

Заключение:

$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}^k_{G_1}(A))(\omega \in T)$. Така от следствивето на индукционни принцип получаваме $\mathcal{CFL}_{G_1}(A) \subseteq T$.

Сега ще покажем обратното включване чрез индукция по дължината на думата (брой букви a). Твърдението, което ще докажем е
$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(a^n.b^k.c^k.c^n \in \mathcal{CFL}(G_1))$.

База:

Нека $k \in \mathbb{N}$. Имаме $B \overset{k+1}{\rightsquigarrow} b^k.c^k$. Имаме правило $A \to B$. Следователно $A \overset{1+k+1}{\rightsquigarrow} b^k.c^k$. Следователно $a^0.b^k.c^k.c^0 \in \mathcal{CFL}_{G_1}(A)$.

Следователно $(\forall k \in \mathbb{N})(a^0.b^k.c^k.c^0 \in \mathcal{CFL}_{G_1}(A))$.

И.Х.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $(\forall k \in \mathbb{N})(a^n.b^k.c^k.a^n \in \mathcal{CFL}(G_1))$.

И.С.

Стъпка. Нека $k \in \mathbb{N}$. От хипотезата $a^n.b^k.c^k.c^n \in \mathcal{CFL}(G_1)$.

Нека тогава $l \in \mathbb{N}$ е такова, че $A \overset{l}{\rightsquigarrow} a^n.b^k.c^k.c^n$.

Имаме правило $A \to aAc$, следователно $A \overset{1+l}{\rightsquigarrow} a^{n+1}.b^k.c^k.c^{n+1}$.

Следователно $(\forall k \in \mathbb{N})(a^{n+1}.b^k.c^k.c^{n+1} \in \mathcal{CFL}(G_1))$.

Заключение:

$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(a^n.b^k.c^k.c^n \in \mathcal{CFL}(G_1))$.

Следователно $T \subseteq \mathcal{CFL}(G_1)$. Следователно $\mathcal{CFL}(G_1) = T$.

Конструиране на граматика

Нека $G_2 = \langle \{C\}, \{c\}, C, \{C \to cC,\ C \to \varepsilon\} \rangle$. Тогава $\mathcal{CFL}(G_2) = \{c\}^*$.

Нека $G = G_1 \odot G_2$. Тогава

$\mathcal{CFL}(G) = \mathcal{CFL}(G_1 \odot G_2) = \mathcal{CFL}(G_1) \cdot \mathcal{CFL}(G_2) = T \cdot \{c\}^* = L$.

Следователно L е безконтекстен.

Пример 2

Нека $L = \{a^n.b^k.c^s \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, k \in \mathbb{N} \,\&\, s \in \mathbb{N} \,\&\, n+k \geq s\}$. Ще докажем, че L е безконтекстен. Първо ще изразим L в удобен за генериране вид като отново следваме правилото: Лесно се генерира от вън на вътре.

$$L = \{a^n.b^k.c^s \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, k \in \mathbb{N} \,\&\, s \in \mathbb{N} \,\&\, (\exists t \in \mathbb{N})(n + k = s + t)\}$$
$$L = \{a^n.b^k.c^{s_a+s_b} \mid n, k, s_a, s_b \in \mathbb{N} \,\&\, (\exists t \in \mathbb{N})(n + k = s_a + s_b + t)\}$$
$$L = \{a^n.b^k.c^{s_a+s_b} \mid n, k, s_a, s_b \in \mathbb{N} \,\&\, (\exists t_a, t_b \in \mathbb{N})(n + k = s_a + s_b + t_a + t_b)\}$$
$$L = \{a^{s_a+t_a}.b^{s_b+t_b}.c^{s_a+s_b} \mid t_a, t_b, s_a, s_b \in \mathbb{N}\}$$
$$L = \{a^{s_a}.(a^{t_a}.b^{t_b}).(b^{s_b}.c^{s_b}).c^{s_a} \mid t_a, t_b, s_a, s_b \in \mathbb{N}\}$$
$$L = \{a^t.(a^n b^k).(b^l.c^l).c^t \mid n, k, t, l \in \mathbb{N}\}$$

Нека $M = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{b^k.c^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
Тогава $L = \{a^n.\omega.c^n \mid n \in \mathbb{N} \,\&\, \omega \in M\}$.
Нека $G_1 = \langle \{A\}, \{a\}, A, \{A \to aA,\ A \to \varepsilon\} \rangle$.
Нека $G_2 = \langle \{B\}, \{b\}, B, \{B \to bB,\ B \to \varepsilon\} \rangle$.
Нека $G_3 = \langle \{F\}, \{b, c\}, F, \{F \to bFc,\ F \to \varepsilon\} \rangle$.
Нека $G_4 = (G_1 \odot G_2) \odot G_3$. Тогава
$\mathcal{CFL}(G_4) = \mathcal{CFL}((G_1 \odot G_2) \odot G_3) = (\mathcal{CFL}(G_1) \cdot \mathcal{CFL}(G_2)) \cdot \mathcal{CFL}(G_3) = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{b^k.c^k \mid k \in \mathbb{N}\} = M$.
Ще хакнем граматиката за G_4, която е за M за да направим граматика за L. Нека $\langle \Gamma,\ \{a, b, c\},\ I,\ R \rangle = G_4$ (декомпозираме G_4).
Нека $G = \langle \Gamma \cup \{S\},\ \{a, b, c\},\ S,\ R \cup \{S \to aSc,\ S \to I\} \rangle$.
В сила е $\mathcal{CFL}_G(I) = \mathcal{CFL}_{G_4}(I) = \mathcal{CFL}(G_4) = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{b^k.c^k \mid k \in \mathbb{N}\} = M \subseteq L$
В сила е и следната рекуретна връзка

$$\mathcal{CFL}^0_G(S) = \emptyset$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}^{n+1}_G(S) = \{a\} \cdot \mathcal{CFL}^n_G(S) \cdot \{c\} \cup \mathcal{CFL}^n_G(I))$$

С индукция ще докажем, че $(\forall h \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}^h_G(S) \subseteq L)$.

База:

Имаме $\mathcal{CFL}^0_G(S) = \emptyset \subseteq L$.

И.Х.

Нека $h \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{CFL}^h_G(S) \subseteq L$.

И.С.

Нека $\omega \in \mathcal{CFL}_G^{h+1}(S)$. Възможни са два случая.

Случай 1. $\omega \in \{a\} \cdot \mathcal{CFL}_G^{h}(S) \cdot \{c\} \subseteq \{a\} \cdot L \cdot \{c\}$

Но $L = \{a^n.b^k.c^s \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; k \in \mathbb{N} \;\&\; s \in \mathbb{N} \;\&\; n + k \geq s\}$ и $\{a\} \cdot L \cdot \{c\} = \{a^{n+1}.b^k.c^{s+1} \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; k \in \mathbb{N} \;\&\; s \in \mathbb{N} \;\&\; n + 1 + k \geq s + 1\} \subset L$.

Случай 2. $\omega \in \mathcal{CFL}_G^{h}(I)$

Тогава $\omega \in M \subseteq L$.

Следователно $\omega \in L$ и значи $\mathcal{CFL}_G^{h+1}(S) \subseteq L$.

Заключение:

$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^{k}(S))(\omega \in L)$. Така от следствивето на индукционни принцип получаваме $\mathcal{CFL}_G(S) \subseteq L$.

Имаме $L = \{a^n.\omega.c^n \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; \omega \in M\}$. Сега ще покажем $L \subseteq \mathcal{CFL}_G(S))$ като по индукция докажем $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \omega \in M)(a^n.\omega.c^n \in \mathcal{CFL}_G(S))$.

База.

Нека $\omega \in M$. Тогава $\omega \in \mathcal{CFL}(G_4)$. Нека тогава $k \in \mathbb{N}$ е такова, че $I \underset{G_4}{\overset{k}{\rightsquigarrow}} \omega$. Тогава $I \underset{G}{\overset{k}{\rightsquigarrow}} \omega$. Имаме правило $S \to I$. Следователно $S \underset{G}{\overset{1+k}{\rightsquigarrow}} \omega$.

Следователно $a^0.\omega.c^0 \in \mathcal{CFL}(G)$.
Следователно $(\forall \omega \in M)(a^0.\omega.c^0 \in \mathcal{CFL}(G))$.

И.Х.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $(\forall \omega \in M)(a^n.\omega.c^n \in \mathcal{CFL}(G))$.

И.С.

Нека $\omega \in M$. От хипотезата $a^n.\omega.c^n \in \mathcal{CFL}(G)$.

Нека тогава $j \in \mathbb{N}$ е такова, че $S \overset{j}{\underset{G}{\rightsquigarrow}} a^n.\omega.c^n$.

Имаме правило $S \to aSc$, следователно $S \overset{1+j}{\underset{G}{\rightsquigarrow}} a^{n+1}.\omega.c^{n+1}$.

Следователно $(\forall \omega \in M)(a^{n+1}.\omega.c^{n+1} \in \mathcal{CFL}(G))$.

Заключение.

$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \omega \in M)(a^n.\omega.c^n \in \mathcal{CFL}_G(S))$.

Следователно $L \subseteq \mathcal{CFL}(G)$. Значи $\mathcal{CFL}(G) = L$.

Следователно L е безконтекстен.

Пример 3

Нека $L = \{\alpha\#\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^+ \ \&\ (\exists i \in \mathbb{N})(\alpha_i \neq \beta_i)\}$.

Ще покажем, че L е безконтекстен. Започваме с анализ на езика.

Нека $\mathtt{flip} : \{a, b\} \to \{a, b\}$ е такава, че $\mathtt{flip}(a) = b$ и $\mathtt{flip}(b) = a$.

Ако $\alpha, \beta \in \{a, b\}^+$ и $(\exists i \in \mathbb{N})(\alpha_i \neq \beta_i)$, то съществуват $\rho \in \{a, b\}^*$ и $u \in \{a, b\}$ такива, че $\rho.u$ е префикс на α и $\rho.\mathtt{flip}(u)$ е префикс на β, тоест има позиция, на която буквите са различни. Но също така е вярно и, че ако $\alpha, \beta \in \{a, b\}^+$ и $(\exists i \in \mathbb{N})(\alpha_i \neq \beta_i)$, то съществуват $\gamma, \omega \in \{a, b\}^*$ и $u \in \{a, b\}$ такива, че $|\gamma| = |\omega|$ и $\gamma.u$ е префикс на α и $\omega.\mathtt{flip}(u)$ е префикс на β. Тоест ако α и β са различни думи, то трябва да се различават поне на някоя позиция. Ще го докажем формално. Тоест ще докажем, че $L = \{\alpha\#\beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^+ \ \&\ \{a, b\}^+ \ \&\ (\exists i \in \mathbb{N})(\alpha_i \neq \beta_i)\} =$
$\{(\alpha.u.\gamma\#\beta).\mathtt{flip}(u).\omega \mid \alpha, \beta, \gamma, \omega \in \{a, b\}^* \ \&\ u \in \{a, b\} \ \&\ |\alpha| = |\beta|\}$.

Първо включването $\subseteq$

Нека $\alpha, \beta \in \{a, b\}^+$ и нека $(\exists i \in \mathbb{N})(\alpha_i \neq \beta_i)$. Нека тогава

$i = \min\{k \in \{1, 2, \ldots \min(|\alpha|, |\beta|)\} \mid \alpha_i \neq \beta_i\}$.

Тогава $(\forall j \in \{1, 2, \ldots, i-1\})(\alpha_j = \beta_j)$. Нека тогава γ е префикса на α с дължина $i - 1$. Нека означим с x буквата α_i. Тогава нека ρ и ω са суфиксите на α и β с дължини $|\alpha| - i$ и $|\beta| - i$ съответно. Тогава понеже $x = \alpha_i \neq \beta_i$ и $\beta_i \in \{a, b\}$, то $\beta_i = \mathtt{flip}(x)$. Така $\alpha\#\beta = \gamma.x.\rho\#\gamma.\mathtt{flip}(x).\omega$. Понеже $|\gamma| = |\gamma|$, то $\alpha\#\beta$ е във втория език.

Включването $\supseteq$

Нека $\alpha, \beta, \gamma, \omega \in \{a, b\}^*$, нека $u \in \{a, b\}$ и нека $|\alpha| = |\beta|$,

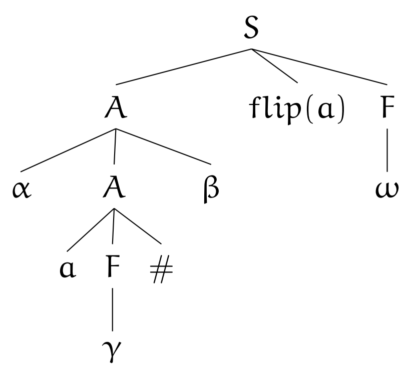
тогава $|\alpha.u.\gamma| \geq |u| = 1$ и $|\beta.\mathtt{flip}(u).\omega| \geq 1$.

Следователно $\alpha.u.\gamma, \beta.\mathtt{flip}(u).\omega \in \{a, b\}^+$. Нека $n = |\alpha| + 1$.

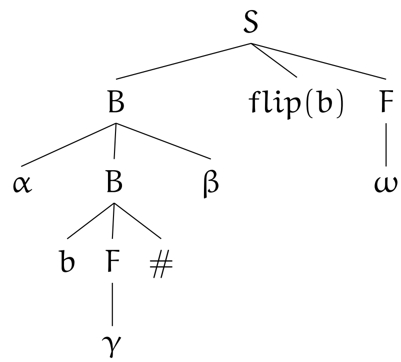
Но тогава $(\alpha.u.\gamma)_n = u \neq \mathtt{flip}(u) = (\beta.\mathtt{flip}(u).\omega)_n$ и $n \in \mathbb{N}$.

Следователно $\alpha.u.\gamma\#\beta.\mathtt{flip}(u).\omega \in L$.

Схематично са възможни две ситуации за думите от L представен по втория начин.



Фигура 3: Случай $u = a$



Фигура 4: Случай $u = b$

Променливата S ще е начална, A и B ще служат за генериране на лявата част на думата, тази в която има някаква връзка и да помним, която буква сме избрали за позицията, в която се различават думите разделени от $\#$. Променливата F ще служи за генериране на дума от $\{a, b\}^*$. Нека $G = \langle \{S, A, B, F, X\},\ \{a, b\},\ S,\ R \rangle$, където R е множеството от правила

$$
\begin{aligned}
S &\to AbF \mid BaF \\
A &\to XAX \mid aF\# \\
B &\to XBX \mid bF\# \\
X &\to a \mid b \\
F &\to XF \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Ясно е, че $\mathcal{CFL}_G(X) = \{a, b\}$ и $\mathcal{CFL}_G(F) = \{a, b\}^*$ също така $\mathcal{CFL}_G^0(X) = \emptyset$ и $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}_G^{n+1}(X) = \{a, b\})$.
Нека $var : \{a, b\} \to \{A, B\}$ е такава, че $var(a) = A$ и $var(b) = B$.
Нека $u \in \{a, b\}$ и нека $V = var(u)$. Ще докажем, че
$\mathcal{CFL}_G(V) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{a, b\}^k \cdot \{u\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a, b\}^k$.
Нека $L_V^k = \{a, b\}^k \cdot \{u\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a, b\}^k$ и $L_V = \bigcup \{L_V^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.
По индукция доказваме, че $(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}_G^n(V) \subseteq L_V)$.
Като ползваме, че $(\forall k \in \mathbb{N})(L_V^k \subseteq L_V)$.

В сила е следната рекуретна връзка

$$\mathcal{CFL}_G^0(V) = \emptyset$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}_G^{n+1}(V) = (\mathcal{CFL}_G^n(X) \cdot \mathcal{CFL}_G^n(V) \cdot \mathcal{CFL}_G^n(X)) \cup (\{u\} \cdot \mathcal{CFL}_G(F) \cdot \{\#\}))$$

След заместване получаваме

$$\mathcal{CFL}_G^0(V) = \emptyset$$
$$\mathcal{CFL}_G^1(V) = \emptyset$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}_G^{n+2}(V) = (\{a, b\} \cdot \mathcal{CFL}_G^{n+1}(V) \cdot \{a, b\}) \cup (\{u\} \cdot \mathcal{CFL}_G^{n+1}(F) \cdot \{\#\}))$$

Правим индукцията.

База.

Нека $n \in \{0, 1\}$. Тогава $\mathcal{CFL}_G^n(V) = \emptyset \subseteq L_V$.

И.Х.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 1$. Нека $\mathcal{CFL}_G^n(V) \subseteq L_V$.

И.С.

$\mathcal{CFL}_G^{n+1}(V) = \{a, b\} \cdot \mathcal{CFL}_G^n(V) \cdot \{a, b\} \cup \{u\} \cdot \mathcal{CFL}_G^n(F) \cdot \{\#\} \subseteq$

$$\{a, b\} \cdot \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{a, b\}^k \cdot \{u\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a, b\}^k \right) \cdot \{a, b\} \cup \{u\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{\#\} \subseteq$$
$$\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{a, b\}^{k+1} \cdot \{u\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a, b\}^{k+1} \right) \cup \{\varepsilon\} \cdot \{u\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{\varepsilon\} \subseteq$$

$L_V \cup L_V^0 \subseteq L_V \cup L_V = L_V$. Следователно $\mathcal{CFL}_G^{n+1}(V) \subseteq L_V$.

Заключение.

$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \omega \in \mathcal{CFL}_G^n(V))(\omega \in L_V)$. Така от следствивето на индукционни принцип получаваме $\mathcal{CFL}_G(V) \subseteq L_V$.

За да докажем $L_V \subseteq \mathcal{CFL}_G(V)$ по индукция ще докажем, че $(\forall k \in \mathbb{N})(L_V^k \subseteq \mathcal{CFL}_G(V))$.

База.

Тогава $L_V^0 = \{a,b\}^0 \cdot \{u\} \cdot \{a,b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a,b\}^0 = \{u\} \cdot \{a,b\}^* \cdot \{\#\}$.

Нека тогава $\omega \in \{a,b\}^*$. Искаме да покажем, че $V \overset{\star}{\rightsquigarrow} u.\omega.\#$.

Но $\omega \in \mathcal{CFL}_G(F)$. Нека тогава $t \in \mathbb{N}$ е такова, че $F \overset{t}{\rightsquigarrow} \omega$.

Имаме правило $V \to uF\#$. Следователно $V \overset{1+k}{\rightsquigarrow} u\omega\#$.

Следователно $u\omega\# \in \mathcal{CFL}_G(V)$. Следователно $L_V^0 \subseteq \mathcal{CFL}_G(V)$.

И.Х.

Нека $k \in \mathbb{N}$. Нека $L_V^k \subseteq \mathcal{CFL}_G(V)$.

И.С.

$L_V^{k+1} = \{a,b\}^{k+1} \cdot \{u\} \cdot \{a,b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a,b\}^{k+1} = \{a,b\} \cdot L_V^k \cdot \{a,b\}$.

Нека тогава $\omega \in L_V^k$ и нека $x, y \in \{a,b\}$. Тогава $x.\omega.y \in L_V^{k+1}$.

Тогава от И.Х. $\omega \in \mathcal{CFL}_G(V)$. Нека тогава $m \in \mathbb{N}$ е такова, че $V \overset{m}{\rightsquigarrow} \omega$.

Но $X \overset{1}{\rightsquigarrow} x, y$ и имаме правило $V \to XVX$.

Следователно $V \overset{1+max(1,m,1)}{\rightsquigarrow} x\omega y$. Следователно $x\omega y \in \mathcal{CFL}_G(V)$.

Заключение.

$(\forall k \in \mathbb{N})(L_V^k \subseteq \mathcal{CFL}_G(V))$.

Следователно $L_V = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} L_V^s \subseteq \mathcal{CFL}_G(V)$.

Следователно $\mathcal{CFL}_G(V) = L_V$.

Следователно $\mathcal{CFL}_G(A) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{a,b\}^k \cdot \{a\} \cdot \{a,b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a,b\}^k$

и $\mathcal{CFL}_G(B) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{a,b\}^k \cdot \{b\} \cdot \{a,b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a,b\}^k$.

В сила е рекурентната връзка.

$$\mathcal{CFL}_G^0(S) = \emptyset$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{CFL}_G^{n+1}(S) = (\mathcal{CFL}_G^n(A) \cdot \{b\} \cdot \mathcal{CFL}_G^n(F)) \cup (\mathcal{CFL}_G^n(B) \cdot \{a\} \cdot \mathcal{CFL}_G^n(F)))$$

Диреткно ще покажем, че $\mathcal{CFL}_G(S) \subseteq$
$\{(\alpha.u.\gamma\#\beta).\mathtt{flip}(u).\omega \mid \alpha, \beta, \gamma, \omega \in \{a, b\}^* \ \&\ u \in \{a, b\} \ \&\ |\alpha| = |\beta|\} = L$.

Нека $\omega \in \mathcal{CFL}_G(S)$. Тогава от основната задача следва, че
$(\exists n \in \mathbb{N})(\omega \in \mathcal{CFL}^n_G(S))$. Нека тогава $n \in \mathbb{N}$ е такова, че
$\omega \in \mathcal{CFL}^n_G(S)$. Понеже $\mathcal{CFL}^0_G(S) = \emptyset$, то $n > 0$.
Нека тогава $k = n - 1$. Тогава $k \in \mathbb{N}$ и $n = k + 1$.
Тогава $u \in \{a, b\}$, $V = var(u)$ и $\omega \in \mathcal{CFL}^k_G(V) \cdot \{\mathtt{flip}(u)\} \cdot \mathcal{CFL}^k_G(F)$.
Тогава $\omega \in \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{a, b\}^k \cdot \{u\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{\#\} \cdot \{a, b\}^k\right) \cdot \{\mathtt{flip}(u)\} \cdot \{a, b\}^*$
$= \{(\alpha.u.\gamma\#\beta).\mathtt{flip}(u).\sigma \mid \alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \{a, b\}^* \ \&\ |\alpha| = |\beta|\} \subseteq L$.
След обобщение получаваме $(\forall\omega \in \mathcal{CFL}_G(S))(\omega \in L)$.
Следователно $\mathcal{CFL}_G(S) \subseteq L$.

Сега с индукция ще докажем, че $L \subseteq \mathcal{CFL}_G(S)$. Доказвайки
$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall u \in \{a, b\})(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \{a, b\}^*)(|\alpha| = n \implies$
$\alpha.u.\beta\#\alpha.\mathtt{flip}(u).\gamma \in \mathcal{CFL}_G(S))$. Тоест ще използваме първото наблюдение за думите от L в индукцията понеже там по-лесно се параметризира дължината на думата.

База.

Трябва да покажем, че
$(\forall u \in \{a, b\})(\forall \beta, \gamma \in \{a, b\}^*)(u\beta\#\mathtt{flip}(u)\gamma \in \mathcal{CFL}_G(S))$.
Нека $u \in \{a, b\}$. Нека $\beta, \gamma \in \{a, b\}^* = \mathcal{CFL}_G(F)$.
Нека $m, t \in \mathbb{N}$ са такива, че $F \overset{s}{\rightsquigarrow} \beta$ и $F \overset{t}{\rightsquigarrow} \gamma$.
Нека $V = var(u)$. Тогава имаме правило $V \to uF\#$.
Следователно $V \overset{1+s}{\rightsquigarrow} u\beta\#$.
Имаме правило $S \to V.\mathtt{flip}(u).F$.
Следователно $S \overset{1+max(1+s,t)}{\rightsquigarrow} (u\beta\#).\mathtt{flip}(u).\gamma$.
Имаме правило $S \to V.\mathtt{flip}(u).F$.
Следователно $u\beta\#.\mathtt{flip}(u).\gamma \in \mathcal{CFL}_G(S)$.

И.Х.

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека

$(\forall u \in \{a, b\})(\forall \alpha, \beta, \gamma \in \{a, b\}^*)(|\alpha| = n \implies \alpha.u.\beta\#\alpha.flip(u).\gamma \in \mathcal{CFL}_G(S))$

И.Х.

Нека $u \in \{a, b\}$. Нека $\alpha, \beta, \gamma \in \{a, b\}^*$. Нека $|\alpha| = n + 1$.

Нека тогава $y, z \in \mathbb{N}$ и нека $\rho, \xi \in \Sigma^*$ са такива, че $\rho.y = \alpha = z.\xi$.

Така $\alpha.u.\beta\#\alpha.flip(u).\gamma = (z.\xi).u.\beta\#(\rho.y).flip(u).\gamma$.

Имаме $|\xi| = |\rho|$ и значи $\xi.u.\beta\# \in \mathcal{CFL}_G(var(u))$.

Нека $V = var(u)$ и нека $m \in \mathbb{N}$ е такова, че $V \overset{m}{\rightsquigarrow} \xi.u.\beta\#\rho$.

Имаме правило $V \to XVX$ и значи $V \overset{1+max(1,m,1)}{\rightsquigarrow} z\xi.u.\beta\#\rho.y$.

Имаме $\gamma \in \{a, b\}^* = \mathcal{CFL}_G(F)$. Нека тогава $t \in \mathbb{N}$ е такова, че $F \overset{t}{\rightsquigarrow} \gamma$.

Имаме правило $S \to V.flip(u).F$. Нека $h = 1 + max(1 + max(1, m), t)$.

Така $S \overset{h}{\rightsquigarrow} \alpha.u.\beta\#\alpha.flip(u).\gamma = (z.\xi).u.\beta\#(\rho.y).flip(u).\gamma$.

Следователно $\alpha.u.\beta\#\alpha.flip(u).\gamma \in \mathcal{CFL}_G(S)$.

Заключение.

От индукцията получаваме $(\forall \omega \in L)(\omega \in \mathcal{CFL}_G(S))$.

Следователно $L \subseteq \mathcal{CFL}_G(S)$. Следователно $\mathcal{CFL}_G(S) = L$.

Следователно $\mathcal{CFL}(G) = L$ и значи L е безконтекстен.