Релация на Майхил-Нероуд

Иво Стратев

9 юни 2020 г.

1 Въведение

Нека L е език над Σ, тоест $L \subseteq \Sigma^*$. Релацията на Майхил-Нероуд за езика L бележим с $\approx_L$ и тя е бинарна релация над Σ^*. По дефиниция

$$\alpha \approx_L \beta \overset{\text{def}}{\iff} (\forall \gamma \in \Sigma^*)(\alpha.\gamma \in L \iff \beta.\gamma \in L)$$

От лекции знаем, че релацията $\approx_L$ е релация на еквивалетнст и ако индексът ѝ е краен, то L е регулярен, защото тогава имаме конструкция за КТДА, който е и минимален. Индексът на релацията $\approx_L$ е мощността на множеството от класовете на еквивалетност на релацията.

Множеството Σ^* е изброимо безкрайно понеже Σ е крайно и непразно. Така, че индексът на $\approx_L$ е или креан или изброимо безкраен. Значи ако покажем избройимо безкрайно подмножество на Σ^*, в което никой две думи не са в релация, то ще покажем и че L не е регулярен, защото тогава $\approx_L$ няма креан индекс.

2 Пример 1

Нека $L = \{c^n.a^k.b^s \mid n \in \mathbb{N}_+ \ \& \ s \in \mathbb{N}_+ \ \& \ (\exists l \in \mathbb{N}_+)(k = ls)\}$. Ще докажем, че L не е регулярен като използваме следното наблюдение.

Нека $\alpha, \beta \in \{a, b, c\}^*$. Тогава ако съществува $\gamma \in \{a, b, c\}^*$, такава че $\alpha.\gamma \in L \ \& \ \beta.\gamma \notin L$, то α и β не са в релация спрямо $\approx_L$.

Удобно е да конструираме по унифициран начин думи на база тяхната дължина. За конкретният пример изображение $\mathtt{word} : \mathbb{P} \to \{a, b, c\}^*$, такова че $\mathtt{word}(p) = a^p.c^p$ ще ни свърши работа. То очевидно е инективно, тоест по различен параметър, в случая просто число ни дава различна дума! Нека p и q са две различни прости числа. Ще покажем, че $word(p)$ и $word(q)$ не са в релация. Тоест $\neg\ c^p.a^p \approx_L c^q.a^q$. За целта трябва да посочим дума $\gamma \in \{a, b, c\}^*$, такава че $c^p.a^p.\gamma \in L$, но $c^q.a^q.\gamma \notin L$. Очевидно $b^p \in \{a, b, c\}^*$ и $c^p a^p b^p \in L$, защото $p = 1.p$ и $p \in \mathbb{N}_+$. Но $(c^q.a^q).b^p \notin L$, защото уравнението $q = xp$ няма целочислено решение.

Една от теоремите, които Евклид е доказал гласи, че множеството на простите числа не е крайно. Но понеже $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$, то $\mathbb{P}$ е изброимо безкрайно. Тогава изброимо безкрайно е и образа на $\mathbb{P}$ под инективна функция. Така излиза, че $Range(word)$ е изброимо безкрайно подмножество на $\{a, b, c\}^*$ от несравними спрямо $\approx_L$ думи, защото

$$Range(word) = word[\mathbb{P}] = \{a^t.b^t \mid t \in \mathbb{P}\}$$

Следователно $\approx_L$ няма креан индекс. Следователно от теорамата на Майхил-Нероуд L не е регулярен.

3 Пример 2

Нека $L = \{a^i.b^j.c^k \mid i \in \mathbb{N} \,\&\, j \in \mathbb{N} \,\&\, k \in \mathbb{N} \,\&\, i = j \lor j = k\}$.

Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n \neq k$ ще покажем, че думите a^{n+1} и a^{k+1} не са в релация на Майхил-Нероуд за L.

Очевидно $b^{n+1}.c^0 \in \{a, b, c\}^*$ и $a^{n+1}.(b^{n+1}.c^0) \in L$. Но $a^{k+1}.(b^{n+1}.c^0) \notin L$, защото $k \neq n$ и значи $k + 1 \neq n + 1$ и $n + 1 \neq 0$.

Очевидно множеството $\{a^{s+1} \mid s \in \mathbb{N}\}$ не е крайно. Следователно $\approx_L$ няма креан индекс. Следователно от теорамата на Майхил-Нероуд L не е регулярен.

4 Пример 3

Нека $L = \{a^i.b^j.c^k \mid i \in \mathbb{N} \,\&\, j \in \mathbb{N} \,\&\, k \in \mathbb{N} \,\&\, i \neq j \lor j \neq k \lor i \neq k\}$.

Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $n \neq k$ ще покажем, че думите a^n и a^k не са в релация на Майхил-Нероуд за L.

Очевидно $\mathsf{b}^k.\mathsf{c}^k \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}^*$ и $\mathsf{a}^n.(\mathsf{b}^k.\mathsf{c}^k) \in \mathsf{L}$, но $\mathsf{a}^k(\mathsf{b}^k.\mathsf{c}^k) \notin \mathsf{L}$.

Очевидно множеството $\{\mathsf{a}^s \mid s \in \mathbb{N}\}$ не е крайно. Следователно $\approx_{\mathsf{L}}$ няма креан индекс. Следователно от теорамата на Майхил-Нероуд L не е регулярен.