

# Задачи за упражнение върху (не)Определимост

Иво Стратев

14 ноември 2020 г.

## 1 Любима задача на Иво

Нека  $\mathcal{N}$  е структура с универсум  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  (степенното множество на  $\mathbb{N}$ ) за език с единствен двуместен претикатен символ  $p$ .

Където  $\langle A, B \rangle \in p^{\mathcal{N}} \iff A \subseteq B$ .

Да се докаже, че са определими множествата:

- $\{\emptyset\}$
- $\{\mathbb{N}\}$
- $\emptyset$
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$
- $\{\langle A, A \rangle \mid A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$
- $\{\langle A, B, C \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^3 \mid C = A \cup B\}$
- $\{\langle A, B, C \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^3 \mid C = A \cap B\}$
- $\{\langle A, B \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid B = \mathbb{N} \setminus A\}$
- $\{\langle A, B, C \rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^3 \mid C = A \setminus B\}$
- $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{n, m\} \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ m \in \mathbb{N} \ \& \ n \neq m\}$

Поглеждайки само домейна на структурата може ли да кажем, че има неопределими елементи ? Защо ?

Вярно ли е, че неопределимите елементи са повече от определените елементи ? В какъв смисъл повече ?

Докажете, че единствените определени елементи са  $\emptyset$  и  $\mathbb{N}$ .

## 2 Хубава задача за усещане що е то Авто-морфизъм

На първото упражнение разгледахме следната структура  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, f^{\mathcal{N}}, g^{\mathcal{N}} \rangle$  за език с формално равенство и два функционални символа  $f$  (двуместен) и  $g$  (едноместен). Където

$$\begin{aligned} f^{\mathcal{N}}(a, b) &= a \cdot_{\mathbb{N}} b \\ g^{\mathcal{N}}(a) &= \text{mod}(a, 7) \end{aligned}$$

Първо докажете, че има два неопределими елемента, след това докажете, че има изброимо (безкрайно) много неопределими елементи. Като подсказка забележете, че тази структура е някак по-богата от структурата на естествените числа разгледани само с умножението им (и равенство разбира се).