Подготовка за изпит по Логическо

Иво Стратев

14 ноември 2020 г.

1 Изпълнимост

1.1 Директен модел

Докажете, че е изпълнимо множеството от формули $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$, където

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(\neg p(x,x) \ \&\ \exists y\, p(x,y)) \\
\varphi_2 &= \forall x \forall y (p(x,y) \lor p(y,x) \lor x \doteq y) \\
\varphi_3 &= \forall x \forall y (p(x,y) \implies \exists z (p(x,z) \ \&\ p(z,y))) \\
\varphi_4 &= \forall x \forall y (p(x,y) \implies f(x,y) \doteq y) \\
\varphi_5 &= \exists x \forall y (\neg x \doteq y \implies p(x,y)) \\
\varphi_6 &= \forall x \forall y (f(x,y) \doteq y \implies (p(x,y) \lor x \doteq y))
\end{aligned}$$

1.1.1 Решение

Нека с $\mathcal{S}$ означим структурата $\langle \mathbb{Q}_{\geqslant 0},\ max,\ < \rangle$. Тя е модел за множеството от затворени формули $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$. Това, че в $\mathcal{S}$ формулите $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ са истина оставяме за упражнение. Ще покажем, че $\mathcal{S}$ е модел за останалите формули.

Първо ще покажем за φ_3. Семантиката на формулата е:

> за всяко $a \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$, за всяко $b \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ ако $a < b$, то съществува $c \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$, такова че $a < c$ и $c < b$.

Нека $a \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Нека $b \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Нека $a < b$. Да означим с c елемента $\dfrac{a+b}{2}$. Тогава в сила са

- $a = \dfrac{a+a}{2} < \dfrac{a+b}{2} = c$
- $c = \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{b+b}{2} = b$

Така показахме, че $a < c$ и $c < b$. След обобщение на разсъждението, следва че $\mathcal{S}$ е модел за φ_3.

Сега ще покажем за φ_5. Семантиката на формулата е:

> съществува $a \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$, такова, че за всяко $b \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ ако $a \neq b$, то $a < b$.

Очевидно $0 \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Нека $b \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ и нека b е произволно. Нека $0 \neq b$, тогава $b \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \setminus \{0\} = \mathbb{Q}_{>0}$ и значи $b > 0$ от където следва, че $0 < b$. Следователно $\mathcal{S}$ е модел за φ_5.

Остава да видим за φ_6. Семантиката на формулата е:

> за всяко $a \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$, за всяко $b \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$ ако $max(a, b) = b$,
> то $a < b$ или $a = b$.

Нека $a \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Нека $b \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Нека $max(a, b) = b$. Тогава $a \leqslant b$ и значи $a < b$ или $a = b$. Следователно $\mathcal{S}$ е модел за φ_6.

За упражнение: Докажете, че е изпълнимо множеството от формули $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$, където

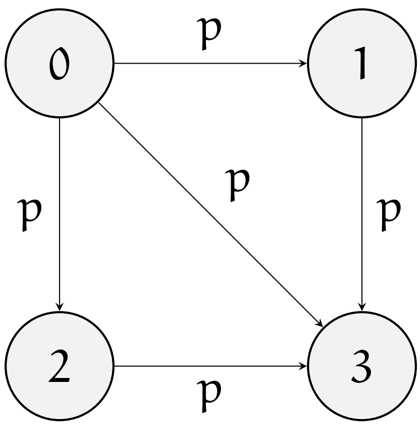
$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x \forall y \forall z\ f(y, z, x) \doteq f(z, y, x) \\
\varphi_2 &= \forall z\ f(a, z, b) \doteq z \\
\varphi_3 &= \forall z \exists t\ f(a, z, t) \doteq b \\
\varphi_4 &= \forall z(\neg z \doteq b \implies \exists t\ f(t, z, b) \doteq a) \\
\varphi_5 &= \exists x \exists y \exists z\ (\neg x \doteq y\ \&\ \neg y \doteq z\ \&\ \neg z \doteq x)
\end{aligned}$$

1.2 Метод на крайните графи

Докажете, че е изпълнимо множеството от формули
$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6\}$, където

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x \forall y \, \neg p(x, y) \\
\varphi_2 &= \exists x \forall y \, \neg p(y, x) \\
\varphi_3 &= \exists x \forall y \, (x \neq y \implies p(x, y)) \\
\varphi_4 &= \exists x \forall y \, (x \neq y \implies p(y, x)) \\
\varphi_5 &= \exists x \exists y \exists z \, (\neg x \doteq y \mathbin{\&} \neg y \doteq z \mathbin{\&} \neg z \doteq x) \\
\varphi_6 &= \neg \exists x \exists y (p(x, y) \mathbin{\&} p(y, x))
\end{aligned}$$

1.2.1 Решение



Да означим с $\mathcal{T}$ структурата

$$\langle \{0, 1, 2, 3\}, \ \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 0, 3\rangle\}\rangle$$

Кратка аргуметация, защо тя е модел.

- φ_1: връх 3 не сочи никой връх;
- φ_2: връх 0 не е сочен от никой връх;
- φ_3: връх 0 сочи всеки друг връх;
- φ_4: връх 3 е сочен от всеки друг връх;
- φ_5: има поне 3 върха;
- φ_6: няма два върха, които да се сочат един друг.

2 Определимост

Нека $\mathcal{L}$ е ЕПСПР с формално равенство и единствен триместен функционален символ f. Разглеждаме структурата $\mathcal{S}$ за езика $\mathcal{L}$, която е с универсум $\mathbb{Z}_3$ и в която интерпретацията на f се задава с правилото $f^{\mathcal{S}}(a, b, c) = ab + c$.

Докажете, че за всяко естествено число n, което е по-голямо от 2, всяко подмножество на $\mathbb{Z}_3^n$ е определимо множество.

2.1 Решение

Първо ще покажем, че всеки елемент е определим. Тоест всеки синглетон е определимо множество.

2.1.1 $\overline{0}$

$$\varphi_{\overline{0}}(x) \leftrightharpoons x \doteq f(x, x, x)$$

Коректност на формулата:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \models \varphi_{\overline{0}}[a] &\longleftrightarrow \\
a = f^{\mathcal{S}}(a, a, a) &\longleftrightarrow \\
a = aa + a &\longleftrightarrow \\
a^2 = \overline{0} &\longleftrightarrow \\
a = \overline{0} &\longleftrightarrow \\
a &\in \{\overline{0}\}
\end{aligned}$$

2.1.2 $\overline{1}$

$$\varphi_{\overline{1}}(x) \leftrightharpoons \exists y(\varphi_{\overline{0}}(y) \ \&\ \forall z\, z \doteq f(x, z, y))$$

Коректност на формулата: Нека $a \in \mathbb{Z}_3$ и $\mathcal{S} \models \varphi_{\overline{1}}[a]$. Тогава е в сила $\overline{1} = a.\overline{1} + \overline{0}$ и значи $a = \overline{1}$. Тоест $a \in \{\overline{1}\}$. Сега ще видим и че $\mathcal{S} \models \varphi_{\overline{1}}[\overline{1}]$. Нека $b \in \mathbb{Z}_3$. Тогава $f^{\mathcal{S}}(\overline{1}, b, \overline{0}) = \overline{1}.b + \overline{0} = b$. Така $\mathcal{S} \models \varphi_{\overline{1}}[\overline{1}]$.

2.1.3 $\overline{2}$

$$\varphi_{\overline{2}}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z(\varphi_{\overline{0}}(y) \,\&\, \varphi_{\overline{1}}(z) \,\&\, z \doteq f(x,x,y) \,\&\, \neg x \doteq z)$$

Коректност на формулата:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \models \varphi_{\overline{2}}[a] &\longleftrightarrow \\
\overline{1} = f^{\mathcal{S}}(a, a, \overline{0}) \,\&\&\, a \neq \overline{1} &\longleftrightarrow \\
\overline{1} = aa + \overline{0} \,\&\&\, a \neq \overline{1} &\longleftrightarrow \\
a^2 = \overline{1} \,\&\&\, a \neq \overline{1} &\longleftrightarrow \\
a \in \{\overline{1}, \overline{2}\} \,\&\&\, a \notin \{\overline{1}\} &\longleftrightarrow \\
a \in \{\overline{2}\} &
\end{aligned}$$

Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $\geqslant 3$. Нека $M \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_3^n)$. Възможни са три случая.

2.1.4 $M = \varnothing$

Тогава една формула, с която можем да го определим е формулата

$$\neg x_1 \doteq x_1 \ \vee\ \neg x_2 \doteq x_2 \ \vee\ \ldots \ \vee\ \neg x_n \doteq x_n$$

2.1.5 $M = \mathbb{Z}_3^n$

Тогава една формула, с която можем да го определим е формулата

$$x_1 \doteq x_1 \,\&\, x_2 \doteq x_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \doteq x_n$$

2.1.6 $\varnothing \subset M \subset \mathbb{Z}_3^n$

Понеже $M \subset \mathbb{Z}_3^n$, то M е крайно. Нека $t = |M|$ и нека $M = \{\langle a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}\rangle, \ldots, \langle a_{t,1}, a_{t,2}, \ldots, a_{t,n}\rangle\}$. Тогава една формула, с която можем да определим M е формулата

$$\begin{gathered}
(\varphi_{a_{1,1}}(x_1) \,\&\, \varphi_{a_{1,2}}(x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_{a_{1,n}}(x_n)) \\
\hfill \vee \ \ldots \ \vee \\
(\varphi_{a_{t,1}}(x_1) \,\&\, \varphi_{a_{t,2}}(x_2) \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_{a_{t,n}}(x_n))
\end{gathered}$$

3 Prolog

3.1 Разпознавател

Да се дефинира на Prolog двуместен предикат $\mathtt{canEval}$, който по даден списък от цели числа $[A_1, A_2, \ldots, A_N]$ и цяло число Z проверява дали е възможно в редицата от числа $A_1, A_2, \ldots, A_N$ да се вмъкнат по такъв начин символи

- (
-)
- -

че да се получи коректен аритметичен израз със стойност Z.

3.2 Генератор

Да се дефинира на Prolog четириместен предикат $\mathtt{genVectors}$, който по дадени две положителни цели числа N и K генерира два N-елементни списъка A и B, от цели числа в интервала $[-K, K]$, такива че $\sum_{I=1}^{N}(A_I \cdot B_I) = 0$ и $\prod_{I=1}^{N}|B_I| \cdot \sum_{I=1}^{N} A_I^2$ е максимално.