Три техники за доказване на регулярност

Иво Стратев

9 юни 2020 г.

Техника 1: Доказване, че езика съвпада с регулярен

Нека $L = \{\alpha.\beta.\alpha^{Rev} \mid \alpha \in \{c, d\}^+ \ \& \ \beta \in \{c, d\}^*\}$. Да видим на кой език е подмножество L. Нека $\omega \in L$ и нека $\alpha \in \{c, d\}^+$ и $\beta \in \{c, d\}^*$ са такива, че $\omega = \alpha.\beta.\alpha^{Rev}$. Нека тогава $x \in \{c, d\}$ и $\gamma \in \{c, d\}^*$ са такива, че $\alpha = x.\gamma$. Тогава $\alpha^{Rev} = \gamma^{Rev}.x$. Тогава $\omega = (x.\gamma).\beta.(\gamma^{Rev}.x)$ и $\gamma.\beta.\gamma^{Rev} \in \{c, d\}^*$. Следователно $\omega \in \{c\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{c\} \cup \{d\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{d\}$. Следователно $L \subseteq \{c\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{c\} \cup \{d\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{d\}$. Очевидно $\{c\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{c\} \cup \{d\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{d\} \subseteq L$. Следователно $L = \{c\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{c\} \cup \{d\} \cdot \{c, d\}^* \cdot \{d\}$. Следователно L е регулярен, защото е обединение от конкатенации на регулярни езици.

Забележка: езикът $\{a^n.b.a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен, това лесно се доказва с лемата за покачването. Разликата с L е, че тук има явен разделител между двете думи и той разделя две думи, които са свързани с връзка, която не може да бъде хваната от КТДА. Докато при L разделителят същност може да "обхване" почти цялата дума и да е от регулярен език, а думите, които биват разделени да са с фиксирана дължина. Тоест да са от креан език, а всеки краен език е регулярен.

Втори пример

Нека $L = \{\alpha.\beta.\gamma.\beta \mid \alpha, \beta, \gamma \in \{c, d\}^+\}$. Ще покажем, че L съвпада с регулярен език. Нека $\omega \in L$ и нека $\alpha, \beta, \gamma \in \{c, d\}^+$ са такива, че $\omega = \alpha.\beta.\gamma.\beta$. Нека тогава $u \in \{c, d\}$ и $\xi \in \{c, d\}^*$ са такива, че $\beta = \xi.u$. Тогава $\omega = (\alpha.\xi).u.(\gamma.\xi).u$ и $\alpha.\xi, \gamma.\xi \in \{c, d\}^+$. Следователно

$\omega \in (\{c, d\}^+ \cdot \{c\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{c\}) \cup (\{c, d\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{d\})$.
Следователно $L \subseteq (\{c, d\}^+ \cdot \{c\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{c\}) \cup (\{c, d\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{d\})$.
Очевидно $(\{c, d\}^+ \cdot \{c\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{c\}) \cup (\{c, d\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{d\}) \subseteq L$.
Следователно $L = (\{c, d\}^+ \cdot \{c\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{c\}) \cup (\{c, d\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{c, d\}^+ \cdot \{d\})$.
Тоест $L = \{\alpha.\beta.\gamma.\beta \mid \alpha, \beta, \gamma \in \{c, d\}^+ \ \& \ |\beta| = 1\}$.
Следователно L е регулярен.

Техника 2: Прилагане на еквивалетни преобразувания до достигане на изразяване чрез регулярните конструкции

Нека Σ е азбука. Ако $\omega \in \Sigma^*$, то

$$\mathrm{substrs}_\Sigma(\omega) = \{\beta \in \Sigma^* \mid (\exists \alpha \in \Sigma^*)(\exists \gamma \in \Sigma^*)(\omega = \alpha.\beta.\gamma)\}$$

Тогава очевидно ако $\gamma \in \Sigma^*$, то

$$\{\omega \in \Sigma^* \mid \gamma \in \mathrm{substrs}_\Sigma(\omega)\} = \Sigma^* \cdot \{\gamma\} \cdot \Sigma^*$$

Нека $u, v \in \Sigma$ и нека

$$L_{u,v} = \{\omega \in \Sigma^* \mid u.v \in \mathrm{substrs}_\Sigma(\omega) \implies v.u \in \mathrm{substrs}_\Sigma(\omega)\}$$

Ще докажем, че езика $L_{u,v}$ е регулярен прилагайки еквивалетни преобразувания.

$$L_{u,v} = \{\omega \in \Sigma^* \mid \neg u.v \in \mathrm{substrs}_\Sigma(\omega) \ \vee \ v.u \in \mathrm{substrs}_\Sigma(\omega)\}$$

$$L_{u,v} = \{\omega \in \Sigma^* \mid \neg u.v \in \mathrm{substrs}_\Sigma(\omega)\} \cup \{\omega \in \Sigma^* \mid v.u \in \mathrm{substrs}_\Sigma(\omega)\}$$

$$L_{u,v} = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* \cdot \{u.v\} \cdot \Sigma^*) \cup (\Sigma^* \cdot \{v.u\} \cdot \Sigma^*)$$

Следователно $L_{u,v}$ е регулярен език.

Техника 3: Свеждане до езици, които са регулярни / автоматни, като връзките са: сечение, обединени, разлика, конкатенация или звезда на Клини

Нека $L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \mathcal{N}_a(\omega) \equiv \mathcal{N}_b(\omega) \pmod 2\}$. Ще покажем, че L е регулярен. Нека с M_i означим езика

$$\{\omega \in \{a, b\}^* \mid \mathcal{N}_a(\omega) \equiv i \pmod 2 \;\&\; \mathcal{N}_b(\omega) \equiv i \pmod 2\}$$

Тогава $L = M_0 \cup M_1$. Нека $T_{x,i} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \mathcal{N}_x(\omega) \equiv i \pmod 2\}$. Тогава $M_i = T_{a,i} \cap T_{b,i}$ и значи $L = (T_{a,0} \cap T_{b,0}) \cup (T_{a,1} \cap T_{b,1})$.

$T_{x,i}$ е регулярен, защото има автомат с 2 състояния, който го разпознава. Следователно L е регулярен, защото е сечение от обединения на автоматни езици.