

姓名	学号	班级	选题	论述	结论	总分

# 台球的边界碰撞问题

卢昌朋 2014301020131 14 级选修

**摘要：**本文分析了台球的多种运动形式，解释了台球的复杂运动情况，并给出台球受桌面阻力的情形下撞击桌边的运动图像。由此可以推出边界碰撞后的台球运动轨迹与是否有摩擦阻力无关，因此简化台球边界碰撞模型，省去摩擦阻力，用标准欧拉法模拟匀速直线运动的质点与边界的碰撞问题。给出方形和圆形边界条件下的质点轨迹，并给出其他边界形状的质点轨迹，有切开的圆形边界、方形边界中含有圆形禁区、圆形边界中含圆形禁区等，得出这些边界条件会带来混沌效应，并改变有关系数，试图找寻混沌效应的影响因素及条件。本文为计算物理课程的期末结课论文，文中相关图片与程序均上传于 Github 本人软件池中。

**关键词：**计算物理；碰撞；边界；混沌

## I 研究背景

### 1.1 台球的复杂运动

通过调查相关资料可以得知，台球运动具有相对复杂的规则。用球杆击打白色主球后，使主球与彩球相撞，试图让彩球落入台球桌四角的球袋中。

首先，台球的体积不可忽略，我们应将其看作刚体。那么，台球与球杆的接触以及台球的相互接触产生的作用效果应当看作刚体的运动效果。因此，当球杆撞击白色主球时，若受力点不同，主球的运动也会截然不同，见图 1。

如果设主球球心为 $G$ ，主球与桌面接触点为 $P$ ，受力点至桌面的垂直距离为 $h$ ，那么从图中我们很容易看出，当球杆击打上下半球的位置，对主球产生的旋转效果将大于向前的效果，主球会发生滑动；当球杆击打中间部位，对主球将主要起向前推进的效果，主球应作纯滚动。然而十分有趣的是，主球作纯滚动的受力点并不是位于正中间的位置，稍后我们会给出解析情况。

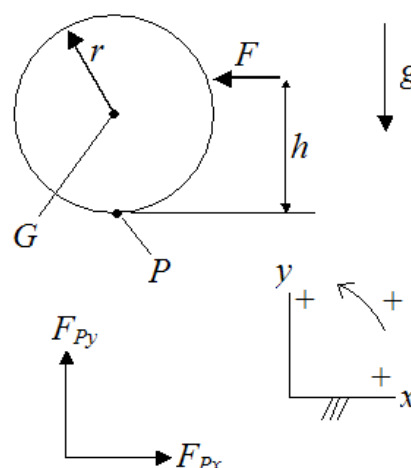


图1 不同受力点对主球运动的影响

接下来，主球将与彩球发生相撞。这部分的运动情况显得较为明晰。由于台球质地光滑坚硬，具有很好的弹性，因此球与球碰撞过程可以简单的看作完全弹性碰撞，见图 2。

相关分析可由经典力学的碰撞知识解决，在此略去。

接着，彩球运动到落入球袋的过程中会有多种可能的运动形式。除了发生与主球被撞击时运动相仿的情况外，它还有可能与台球桌桌壁相撞，进而改变运动轨迹。起初的台球桌边利用毛屑或棉花包裹，仅能起到缓冲撞击的作用，然而弹性基本为零。现今桌边以良好弹性的橡胶制成，因此彩球与桌边碰撞亦可看作完全弹性碰撞。那么，撞击桌边的初始速度方向与法线方向的夹角应和离开桌边时刻的速度方向与法线的夹角大小相等，并位于法线两侧。

综上所述，台球运动有很多问题值得研究和探讨，在这里我们将从研究纯滚动的条件入手，研究台球在纯滚动及滑动条件下的边界碰撞问题。

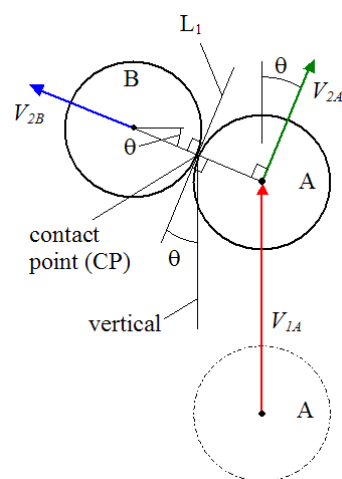


图2 两个台球斜碰受力分析示意图

## II 研究内容

### 2.1 非匀速边界碰撞

由上述内容可知，台球发生滑动是由于外力的受力点偏离过球心与桌面平行的水平线，在这个情况下，桌面对台球产生的滑动摩擦阻力不能忽略。在这里，我们假设角速度的方向垂直于台球前进速度的平面，即角速度在前进速度方向没有分量，对摩擦阻力没有影响，则可得摩擦阻力表达式

$$f = \mu mg \quad (1)$$

受力方向与速度方向相反；

在匀减速情况下，我们可以使用欧拉法进行数值解的运算，并将加速度沿x轴y轴方向进行分解，即

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x + a_x t, \\ \frac{dy}{dt} &= v_y + a_y t \end{aligned} \quad (2)$$

通过上述二式很容易得到匀减速情况下台球边界碰撞的运动轨迹（见图3）。从中我们发现，台球的运动轨迹仅受初始速度的方向和大小影响，与加速度的快慢无关，因此从计算的角度来说，我们可以忽略（2）式中 $a_x$ 与 $a_y$ 项，以简化计算和缩减计算量。

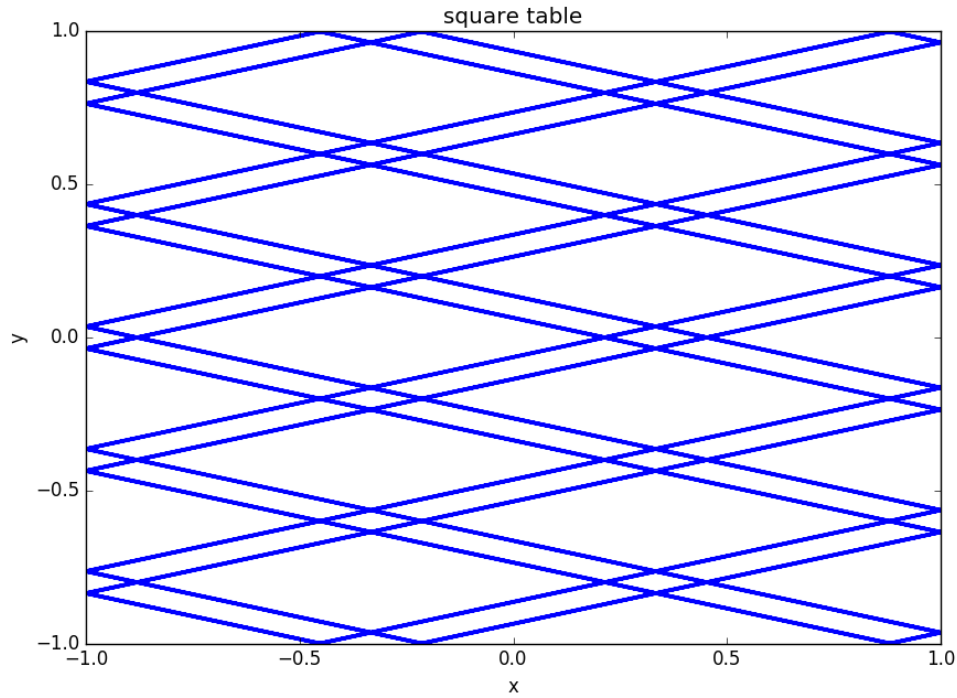


图3 匀减速情况下台球边界碰撞的运动轨迹图。在这里，设  $x$  与  $y$  边界坐标范围均为  $[-1, 1]$ ，初始速度假定为单位速度  $1\text{m/s}$ ，与  $x$  轴的夹角设为  $\theta = \arctan(0.3)$ ，时间间隔  $dt=0.1$ ，初始位置为  $(0.2, 0)$ 。当简化为匀速运动，增加迭代次数，运动轨迹不会改变。需要注意的是，每次迭代需要进行是否碰撞的检查，相关问题在后文进行说明。

虽然从计算上来讲，加速度取值不影响台球最终运动轨迹，但我们仍需要从物理的角度来探讨台球运动是否可以简化为质点作匀速直线运动的边界碰撞模型。

## 2.2 纯滚动条件

接下来，我们将紧接上一部分的内容，从物理的角度来分析台球的匀速运动情况。我们利用刚体力学的知识可以得知，若台球在桌面的运动仅仅只有滚动而不发生相对滑动，即处于纯滚动状态，台球将不受额外阻力作用而做匀速运动。我们先考虑外加力，利用图2进行受力分析。

由于竖直方向上平衡，所以根据牛顿第二定律可得

$$F = ma \quad (3)$$

其中  $m$  为台球的质心质量， $a$  为外力产生的加速度；

又因为刚体力矩满足以下表达式

$$M = I\theta \quad (4)$$

在这个情况下，可以改写为

$$F \cdot (h - r) = I\theta \quad (5)$$

在纯滚动的条件下，转动角和加速度有如下关系：

$$\theta = \frac{a}{r} \quad (6)$$

又因为球关于圆心的转动惯量为

$$I = \frac{2}{5}mr^2 \quad (7)$$

所以联立(3)(5)(6)(7)式，可以得到

$$h = \frac{7r}{5} \quad (8)$$

综上所述，我们得到了台球纯滚动条件下  $h$  的具体数值(8)，即外力作用点距地面的垂直距离满足(8)式时，台球将做无阻力的纯滚动。这个结论亦证明了纯滚动条件下的台球边界碰撞研究是可行的，台球的边界碰撞问题可以被简化为匀速运动的质点与边界的碰撞问题。

### 2.3 匀速边界碰撞问题

在这里，我们讨论匀速运动的台球与不同形状的边界碰撞会产生怎样不同的效果。并根据最后的分析结果分成非混沌体系、混沌体系以及综合模型来探讨。

#### 2.3.1 非混沌体系（规则边界）

在第一部分，我们已给出了方形边界情况下的运动轨迹图。从中可以发现，对于方形边界条件下，质点的运动轨迹呈绝对对称的，再根据光的反射定律，我们很容易可以预测质点下一个时刻的运动。又由于边界的两边与  $x$  轴  $y$  轴互相平行，碰撞后的速度也很容易得到。因此，假设边界从方形变为圆形，我们需要引入法线方向速度  $v_{i,n}$  与切线方向速度  $v_{i,\tau}$ 。令法线方向单位向量为  $\hat{n}$ ，那么可以得到碰撞时的初始速度分量为

$$\begin{aligned} \vec{v}_{i,n} &= (\vec{v}_{i,n} \cdot \hat{n})\hat{n} \\ \vec{v}_{i,\tau} &= \vec{v}_0 - \vec{v}_{i,n} \end{aligned} \quad (9)$$

再根据反射定律，易得碰撞后反射速度  $v$  分量  $v_{f,n}$  和  $v_{f,\tau}$  为

$$\begin{aligned} \vec{v}_{f,n} &= -\vec{v}_{i,n} \\ \vec{v}_{f,\tau} &= \vec{v}_{i,\tau} \end{aligned} \quad (10)$$

经过上述的公式推导，我们可以画出质点在圆形边界条件下的运动轨迹：

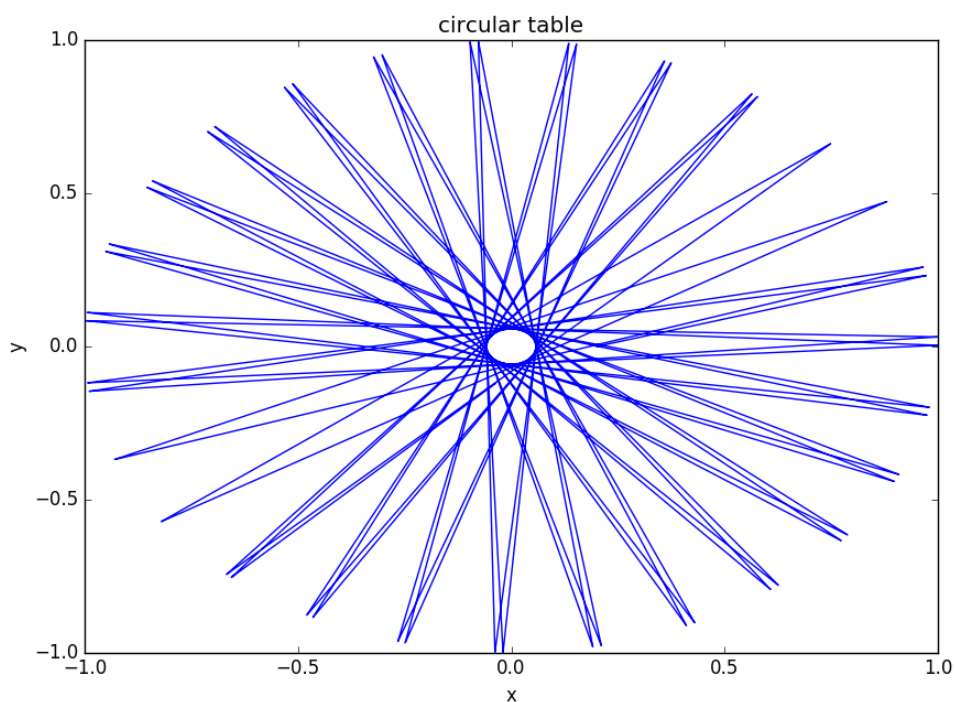


图 4 在这里，我们令圆形边界的半径为单位 1，其余条件均与图 3 一致。我们可以发现，圆形边界的碰撞问题依旧是非混沌体系。

必须需要说明的一点是，由于程序所取迭代数值不是无限的，不可能包含平面上的每一个点，因此不能保证碰撞的瞬时点一定能被程序捕捉到。所以在这里，我们需要在每一次迭代的时候进行检查，得到的新数值是否超过了边界；如果超过了边界，需要从数据中移除，并在与之前的一个数据点之间继续进行一次分割（在本文中这一次分割选取的迭代次数均为 100 次），在这次子迭代过程中继续检查数据点是否超过边界，若超过了边界，同样剔除该数据点，那么该数据点之前的一个数据点可以被认为是离边界最近的点，并用它作为质点与边界碰撞的作用点。

图 4 揭示了圆形边界碰撞问题和方形边界碰撞问题类似，都产生绝对对称的运动轨迹，即它们均为非混沌体系。

### 2.3.2 混沌体系（被切开的圆形边界）

在教材 *Computer Physics*; Nicholas J. Giordano, Hisao Nakanishi 中给出了一例典型的质点边界碰撞问题的混沌体系模型，为了方便，我们拿该模型来进行更多的讨论。

该模型的主体是一个圆形边界，沿  $x$  轴方向从中间部分切割开来，并沿  $y$  轴方向拉开一段距离  $2\alpha r$ 。在此，我们生成了  $x$ - $y$  轴的运动轨迹图，见图 5。

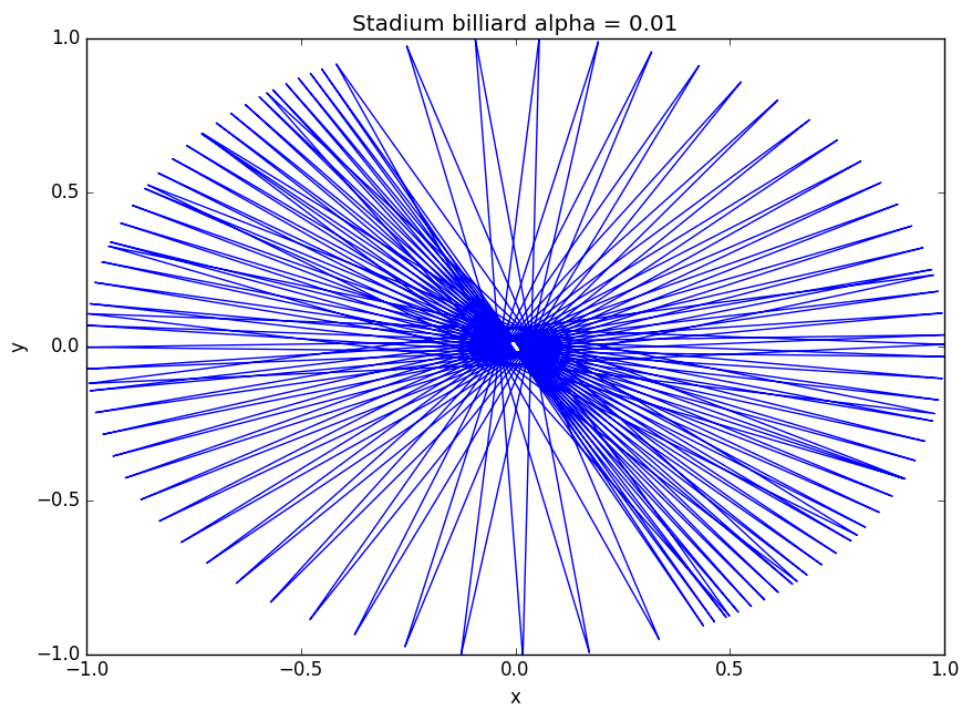


图 5 圆形边界仍然以单位长度作为半径， $\alpha$ 值根据书上所给，取为 0.01。从图中可以看出，主对角线的运动比副对角线的运动更频繁，运动轨迹并不是呈绝对对称的，并无法预测出一段时间后的运动轨迹图，因此是混沌体系。

我们可以把 $\alpha$ 看作是混沌程度的系数，对它进行一些调整可以表现出不同的混沌程度（见图 6）。

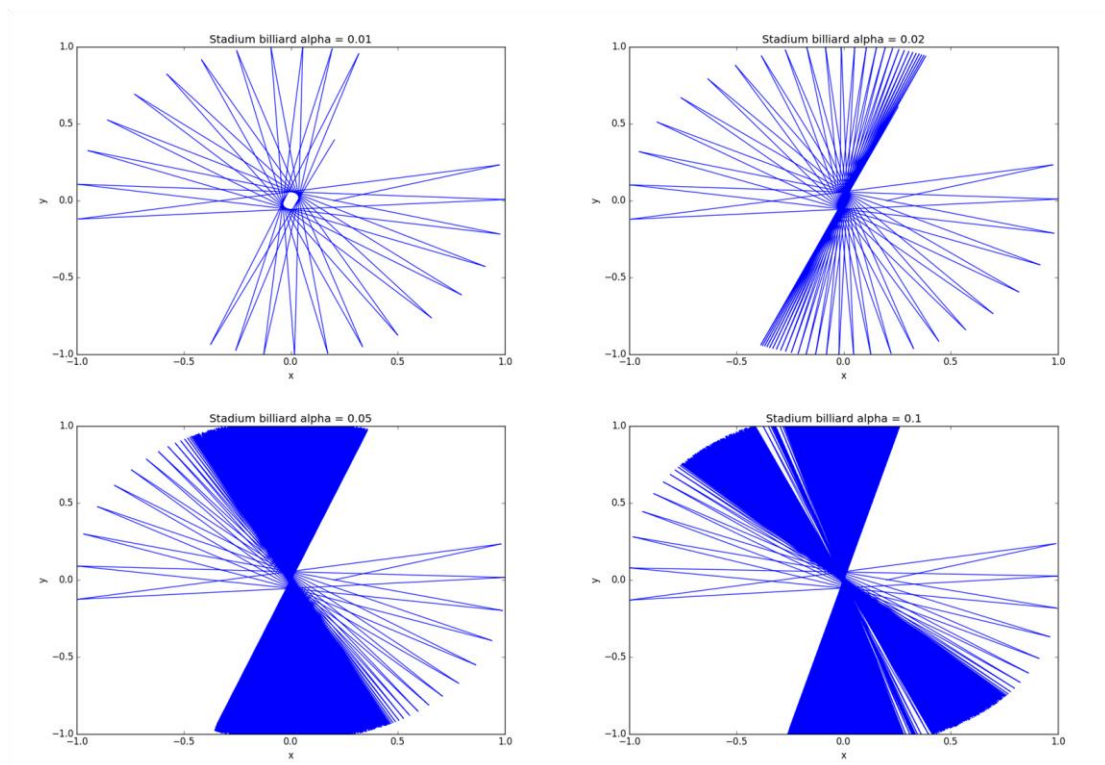




图 6 为了更好地控制变量，使得结果具有可比性，图中迭代次数均为 4000 次，分别取  $\alpha = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$ ，我们可以看到， $\alpha$  值越大 ( $\leq 0.2$ )，运动轨迹越密集，对混沌程度的贡献也就越大。

从图 6 可以得到结论， $\alpha$  的确可以反映混沌的程度，即当两个半圆间隔越大时，混沌运动越明显。运用先前的知识我们知道，混沌效应对初始值的设定非常敏感，当初始值发生微小变化时，会从非混沌变成混沌效应，或是对结果产生巨大的影响。那么，为什么仅仅是分隔开圆形就会产生混沌效应？我们放在下一部分进行讨论和猜测。

### 2.3.3 综合模型

所谓综合模型，是指将多种边界组合在一起，来研究质点在此边界条件下的运动轨迹。我们分析了几种情况，分别是圆形边界中包含圆形禁区，方形边界中包含圆形禁区，并将该禁区位置移离中心一个微小距离（见图 7）。

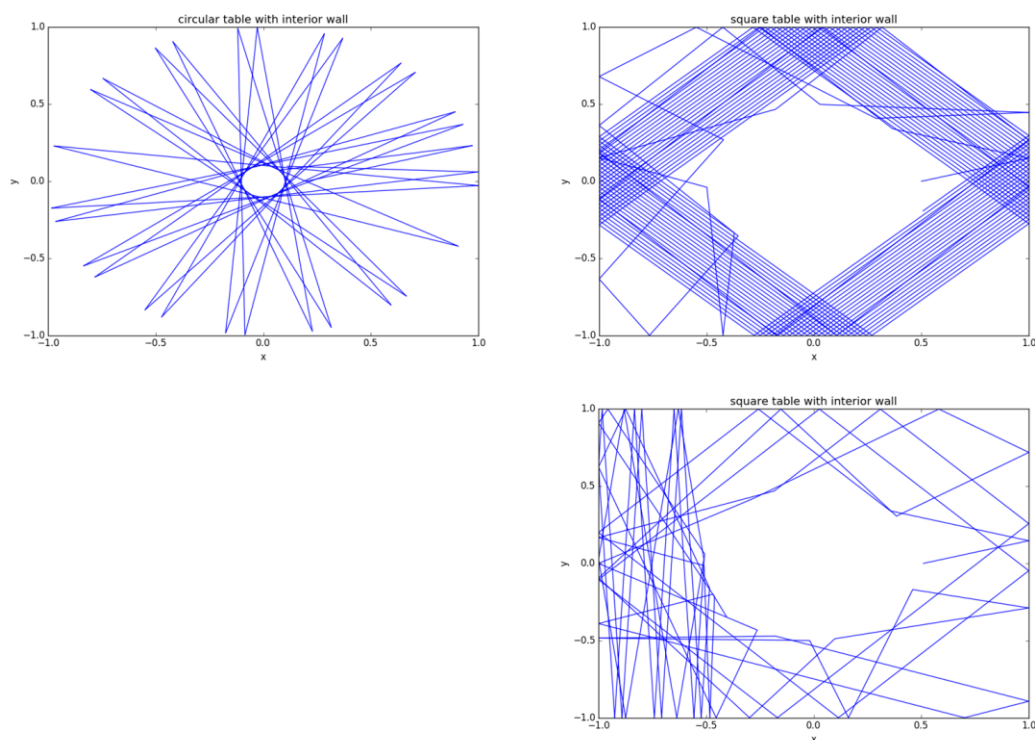


图 7 在圆形边界中包含圆形禁区 (a) 的情况下，设禁区半径为 0.1；方形边界中包含圆形禁区 (b) 的情况下，设禁区半径为 0.5；将该禁区位置移离中 (c) 的微小距离为 0.01。可以发现，(a) 中运动轨迹几乎对称，不对称性微乎其微，而 (b) 中运动轨迹大部分是对称的，但可以看出有不规则的运动轨迹出现，(c) 图中很明显的看出图左侧右侧运动轨迹条数不同，左侧非常密集，而右侧较为稀疏。

经过对上图的分析，我们发现凡是组合图形边界都会有混沌效应，而相同性质的图形 (如 (a) 情况) 的混沌效应最小，当组合图形边界中一个大小不变，另一个增大时，混沌效应也会随着变大。而在第二部分讨论中，我们可以将被切开的圆形看作两个半圆边界和一个长方形

边界的组合，当半圆边界大小不变时，增加长方形边界的宽的长度( $\alpha$ )，混沌效应也会随之变大。因此我们可以有如下的大胆假设：

- \* 凡是组合图形（不规则图形）构成的边界都会有混沌效应；
- \* 混沌效应程度大小与组合边界的种类有关，且相同种类的组合边界混沌效应最小；
- \* 组合边界的大小决定混沌效应的程度。组合边界越大，混沌效应越明显。

然而，这些粗略简单的分析与研究是远远不够的，还有问题等待解决，例如：

- \* 边界种类相同与不同的判定条件；
- \* 两个边界与多个边界对混沌效应的影响比较；
- \* 不同边界对混沌效应的影响的定量分析；

等等。

### III 结论

在分析台球边界碰撞问题时，台球的运动在一般情况下可看作处于纯滚动状态，因此可利用简化模型分析质点在匀速运动下的边界碰撞。当边界为规则图形时，不会产生混沌效应；不规则时，会产生混沌效应，且不规则间隙越大，混沌越显著。依据数值分析和猜测，可以获得一些简单的结论，以揭示边界不同对混沌的影响。在此感谢李明皓同学对选题的建议以及对碰撞相关知识的解释。

### IV 引用

[1]Computer Physics;Nicholas J.Giordano, Hisao Nakanishi

[2]The physics of billiards

[3]Real world physics problems;Franco Normani

[4] Ralph Hickok (2001). Sports History: Pocket Billiards. Retrieved 22 February 2007.

[5] "History". brunswickbilliards.com.

[6] "Equipment", World Snooker Association, publication date unknown (Retrieved 28 January 2007), London, UK.

[7]Python tutorial

[8]Codecogs Latex