**Analytische rekenmethode**

Het hart van de GGOR is de dynamiek van de grondwaterstand en de afvoer. Deze wordt in de GGOR-tool benaderd door simulatie van het doorsnede-gemiddelde grondwaterstandsverloop in een perceeldoorsnede tussen twee parallelle sloten. De dynamiek voor een gebied wordt samengesteld uit die van alle percelen die tot dit gebied behoren, alle met hun individuele eigenschappen als bodemparameters, slootdiepte, maaiveldhoogte en slootafstand. De invloed van dwarssloten aan het eind van de langerekt veronderstelde percelen wordt verwaarloosbaar geacht voor de bepaling van de GGOR-dynamiek

De ligging van het freatisch vlak wordt bepaald door de dynamiek van neerslag, verdamping, slootpeilen en diepe grondwaterstijghoogte. In de GGOR berekening wordt aangenomen dat de oplossing voor de stationaire stroming ook geldt voor de niet stationaire situatie, Dit betekent dat de grondwaterstand altijd de vorm heeft van het verloop bij evenwicht, maar dat de mate van opbolling dynamisch is. De fout die hierbij wordt gemaakt blijkt beperkt, mits de dynamiek wordt berekend op basis van de over de doorsnede gemiddelde grondwaterstand (Olsthoorn, 2011).

De karakteristieke situatie die in de GGOR tool tot dusverre wordt beschreven is een deklaag op en regionale watervoerende pakket in een doorsnede in een langgerekt perceel ingeklemd tussen twee sloten, met gegeven weerstand tussen de deklaag en de onderliggende regionale aquifer, waarin het stijghoogte uniform wordt verondersteld.

Deze benadering blijkt in de praktijk goed te voldoen, mits het doorlaatvermogen van de regionale watervoerende pakket relatief groot is en in elk geval veel groter dan dat van de deklaag. Een andere mits is dat de sloten niet door de deklaag heen mogelijk snijden. Een andere beperking is dat de intrede- en de uittredeweerstand van de sloten zeer beperkt zijn; zij worden hierna verwaarloosd. Tenslotte wordt aangenomen dat het doorlaatvermogen van de deklaag evenals de weerstand tussen deklaag en regionaal watervoerend pakket constant zijn in ruimte en tijd. Voor wat betreft het doorlaatvermogen is deze eis equivalent aan de voorwaarde dat de variatie van de natte dikte van de deklaag klein is, bijvoorbeeld minder dan 20% van de dikte van de deklaag.

Bovenstaande bevat heel wat beperkingen, maar de oplossing is desondanks goed toepasbaar in grote delen van het werkgebied van Waternet. Waar de beperkende aannemen niet gelden, kan gebruik worden gemaakt van meer geavanceerde analytische en numerieke benaderingen (zie Olsthoorn, 2010).

De stijghoogte van het grondwater *h* [m] tussen twee parallelle sloten op onderlinge afstand $L = 2b$ zonder intredeweerstand, in een deklaag met constant doorlaatvermogen *kD* [m$^2$/d] en constant positief of negatief neerslagoverschot *N* [m/d], die zich bevindt op een regionale aquifer met constante

$$kD\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -N + \frac{h - \phi}{c}$$

stijghoogte $\phi$ [m] waarvan de deklaag is gescheiden door een weerstand *c* [d], wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijking

De oplossing hiervan is

$$h = \phi + A\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + B\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

met $\lambda = \sqrt{kDc}$ de karakteristieke lengte van het grondwatersysteem.
De coëfficiënten *A* en *B* dienen bepaald te worden uit de randvoorwaarden. Als we de *x*-as bij de linker sloot laten beginnen, dan zijn deze randvoorwaarden als volgt:

$$x = 0 \rightarrow h = h_L$$

en

$$x = L \rightarrow h = h_R$$

Dit levert als oplossing:

$$h - (\phi + Nc) = \frac{(h_L - (\phi + Nc))\sinh\left(\frac{L-x}{\lambda}\right)(h_R - (\phi + Nc))\sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\sinh(L\lambda)}$$

In het geval dat het slootpeil links en rechts gelijk zijn en de *x*-as begint in het centrum van de doorsnede met *b=L/2*, gaat bovenstaande oplossing over in

$$h - (\phi + Nc) = (h_{LR} - (\phi + Nc))\,\frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{b}{\lambda}\right)}$$

De gemiddelde grondwaterstand in de doornsnede, $\overline{h}$, wordt verkregen door integratie van *h* over de doorsnede en deling door de breedte daarvan. Vanwege de symmetrie integreren we over de halve doorsnede en delen door *b*:

$$\overline{h} - (\phi + Nc) = \frac{1}{b}\,(h_{LR} - (\phi + Nc)) \int_0^{x=b} \frac{\cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right)}{\cosh\left(\frac{b}{\lambda}\right)}\,dx$$

ofwel

$$\overline{h} - (\phi + Nc) = (h_{LR} - (\phi + Nc))\,\frac{\tanh\left(\frac{b}{\lambda}\right)}{\frac{b}{\lambda}}$$

waarbij $\overline{h}$ de doorsnede-gemiddelde grondwaterstand is.

In de regel is niet zozeer de regionale stijghoogte $\phi$ alswel de regionale kwel *q* [m/d] gegeven. Deze is bijvoorbeeld afkomstig van een regionaal grondwatermodel. Het heeft grote voordelen om te rekenen met een gegeven kwel (of wegzijging) in plaats van diepe stijghoogte, dit omdat bij een gegeven stijghoogte bij dynamisch rekenen de daaruit volgende kwel of wegzijging in zekere zin onbeperkt is. Men kan ook zeggen, in de regionale context past de stijghoogte zich eerder aan de regionale kwel aan dan omgekeerd. Men ziet dit ook in het gemeten verloop van stijghoogten en  grondwaterstanden, deze volgen elkaar doorgaans in de tijd, hetgeen daarvan een gevolg is.

Om kunnen de diepe stijghoogte uit de vergelijking verwijderen ten gunste van de kwel, door heerst $\overline{h} - \overline{h}$ toe te voegen als hulpstap

$$\overline{h} - \left(\overline{h} - \overline{h} + \phi + Nc\right) = \left(h_{LR} - \left(\overline{h} - \overline{h} + \phi + Nc\right)\right)\frac{\tanh\left(\frac{b}{\lambda}\right)}{\frac{b}{\lambda}}$$

en dan $\overline{\phi} - h = qc$ te schrijven met *q* [m/d] de kwel (opwaarts positief gerekend). Hiermee gaat de vergelijking over in

$$\overline{h} - \left(\overline{h} + qc + Nc\right) = \left(h_{LR} - \left(\overline{h} + qc + Nc\right)\right)\frac{\tanh\left(\frac{b}{\lambda}\right)}{\frac{b}{\lambda}}$$

Waardoor de gemiddelde grondwaterstand links weg valt en we de gemiddelde grondwaterstand die rechts overblijft naar links kunnen brengen. Uitgewerkt, met $\Lambda = \frac{\tanh\left(\frac{b}{\lambda}\right)}{\frac{b}{\lambda}}$ krijgen we vervolgens:

$$\overline{h} = h_{LR} + (qc + Nc)\,\frac{1 - \Lambda}{\Lambda}$$

Deze eenvoudige vergelijking geeft de doorsnede-gemiddelde grondwaterstand in de deklaag bij gegeven slootpeil $h_{LR}$ links en rechts, gegeven kwel *q* [m/d] en gegeven neerslagoverschot *N* [m/d]. De overige parameters, $\Lambda$ [dimensieloos] en c [d] zijn constanten die de eigenschappen van de bodem en de breedte van de doorsnede bevatten.

Voor de berekening van de dynamiek schrijven we deze vergelijking eerst om een in de vorm van een stationaire waterbalans, waar links de gegeven inkomende posten staan, $N + q$ en rechts de afstroming, die afhankelijk is van de grondwaterstand, dus in de vorm van *In=Uit*:

$$N + q = \left(\overline{h} - h_{LR}\right) \frac{\Lambda}{1 - \Lambda}$$

Omdat het neerslagoverschot *N*, de kwel *q* en mogelijk ook het slootpeil $h_{LR}$ steeds veranderen, is er voortdurend onbalans. Daarom schrijven we de waterbalans in de vorm *In=Uit+Berging*
met \mu de freatische bergingscoëfficiënt. Hiermee is de dynamiek ingebracht, maar wel zo dat de vorm van het grondwaterstandsverloop steeds overeenkomt met dat van e stationaire oplossing waarbij de gemiddelde grondwaterstand gelijk is aan de gemiddelde actuele grondwaterstand. Met andere woorden de afvoer via de sloten wordt uitsluitend gedicteerd door de actuele gemiddelde grondwaterstand, die nu dynamisch is.

$$N + q = \left(\overline{h} - h_{LR}\right) \frac{\Lambda}{c\left(1 - \Lambda\right)} + \mu \frac{d\overline{h}}{dt}$$

Deze gewone differentiaalvergelijking kan exact worden opgelost onder de voorwaarde dat neerslagoverschot *N*, kwel *q,* en slootpeil $h_{LR}$ constant zijn. De oplossing verkrijgen we door de differentiaalvergelijking als volgt te schrijven:

$$-\mu c \frac{1 - \Lambda}{\Lambda} \frac{d\left(-\frac{\Lambda}{c(1-\Lambda)}\left(\overline{h} - h_{LR}\right) + N + q\right)}{dt} = -\frac{\Lambda}{c\left(1 - \Lambda\right)}\left(\overline{h} - h_{LR}\right) + N + q$$

Zodat de factor onder het d-teken gelijk is aan het rechterlid van de vergelijking. Dit levert een logaritme op, met een integratieconstante (niet getoond). Deze constante bepalen we uit de beginvoorwaarde, namelijk de eis dat $\overline{h} = \overline{h}_{t_0}$ op $t = t_0$ aan het begin van de nieuwe tijdstap. De oplossing wordt hiermee

$$\overline{h} = h_{LR} + \left(\overline{h}_{t_0} - h_{LR}\right) e^{-\frac{t - t_0}{T}} + \left(N + q\right) c \frac{1 - \Lambda}{\Lambda} \left(1 - e^{-\frac{t - t_0}{T}}\right)$$

Deze dynamische vergelijking drukt uit dat de grondwaterstand verandert door twee tegengestelde processen 1) het streven van de grondwaterstand naar het slootpeil en 2) het streven van de grondwaterstand naar een nieuw evenwicht behorende bij de som van actueel neerslagoverschot en kwel. De factor *T* in de noemer van de exponent kan gezien worden als de karakteristieke tijd van de dynamiek van dit grondwatersysteem. *T* is gelijk aan

$$T = \mu c \frac{1 - \Lambda}{\Lambda}$$

Met deze vergelijking kunnen we dor de tijd heen rekenen met willekeurig korte of lange tijdstappen, zolang neerslagoverschot, kwel en slootpeil constant zijn.

In de werkelijkheid zullen neerslagoverschot, kwel en slootpeil voortdurend variëren. In dat geval verdelen we de tijd in stappen waarbinnen genoemde grootheden wel als constant kunnen worden beschouwd. Zodra een ervan verandert begint een nieuwe tijdstap. De gemiddelde grondwaterstand aan het begin van de nieuwe tijdstap die dan gelijk is aan die aan het einde van de voorgaande tijdstap. De lengte van de tijdstappen doet er niet toe, alleen de vraag of genoemde grootheden veranderen. In de praktijk zullen neerslagoverschot, kwel en slootpeil binnen en dag constant worden genomen, maar van dag tot dag in principe variabel zijn, zodat met constante tijdstappen van een dag wordt gewerkt. Maar dat hoeft niet.

Aangezien de grondwaterstand tijdens de simulatie in principe rekenkundig ook boven maaiveld zou kunnen komen, zullen we deze mogelijkheid moeten checken. Wanneer dit gebeurt wordt de te hoog berekende waterstand afgetopt op maaiveldhoogte en het water dat boven maaiveld werd berekend als oppervlaktetafvoer beschouwen.
if



$$h > h_{mv} \rightarrow q_{afvoer} = \mu\left(\overline{h} - h_{mv}\right)$$

en $\overline{h} \rightarrow h_m v$.

De afvoer naar de sloten

$$q_{sloten} = \left(\overline{h} - h_{LR}\right) \frac{\Lambda}{c\,(1-\lambda)}$$

en de berging is

$$q_{berging} = \mu\left(\overline{h}_{t+t_0} - \overline{h}_{t_0}\right)$$

Samen met de opgegeven kwel q en neerslagoverschot N zijn dus ook alle waterbalanstermen per tijdstap bekend en verkrijgen we dus zowel het dynamische verloop van de grondwaterstand als de in de tijd voortschrijdende, dynamische waterbalans. De implementatie hiervan vergt niet meer dan enkele regels in een programmeertaal Matlab of Python.

In de literatuurlijst toevoegen

Olsthoorn, T.N. (2011) Regionale modellering van waterbalansen en grondwater regime binnen Waternet. Waternet, Amsterdam 2011, ca. 1504pp.