

Dik freatisch pakket infiltreert niet lekker
Kees Maas, H2O 28(1995)5, 152-153
Theo Olsthoorn en Bram Bot H2O 28(1995)7, 203

T.N.Olsthoorn

June 11, 2025

1 Intro

Het was een mooi en belangwekkend artikel van [Maas (1995a)] in H2O waarin hij liet zien dat infiltratie via een sloot van een vaste volumestroom moeilijker gaat naarmate het pakket, bij vaste doorlatendheid dikker werd. Dit is zo ondanks het feit dat het doorlaatvermogen daarbij toeneemt. Dit leek tegen de intuïtie en er kwam dan ook commentaar op van verschillende kanten, waaronder van mij en van Bram Bot ([Olsthoorn (1995), Bot (1995)]) waarna de auteur van het artikel in zijn nawoord ([Maas (1995b)]) getiteld „Dun blijft de mode ...” liet zien dat het toch echt zo was.

Kees had natuurlijk gelijk, want de wiskunde bedriegt niet. Ik vond het vanwege de gebruikte Swarz-Christoffeltransformatie destijds lastig om de afleiding helemaal te volgen, en heb het verder laten rusten, maar sindsdien wel altijd in het achterhoofd gehouden, om het ongenschijnlijk tegen-intuïtieve fenomeen in de toekomst toch nog eens keer zelf na te rekenen. En dat moment was nu, 35 jaar later en 10 jaar na mijn pensionering.

En nu kom ik, ook al klopt de wiskunde van Kees Maas als een bus, toch tot een wat andere conclusie, die wel past bij mijn intuïtie van destijds.

Kees had zijn infiltratiesloot in een oneindig uitgestrekte watervoerend pakket, waarin links op oneindig de stijghoogte gelijk aan nul werd gehouden en het geïnfiltreerde water naar rechts afstroomde met vast debiet Q [m²/d].

Ik vond de door Kees gebruikte conforme transformatie lastig omdat er aan twee zijden oneindig in het spel was. Ik leid hierna de praktisch identieke situatie af langs een iets eenvoudiger weg, ook met een conforme transformatie. Ik laat de aquifer niet beginnen op $-\infty$ maar op een gesloten rand, op een afstand links van de sloot die groot genoeg is om daar de stroming zo klein te laten zijn dat die van nul niet is te onderscheiden. Omdat daar geen stroming meer aanwezig is, is daar de stijghoogte gelijk aan niet meer afhankelijk van de plaats van deze gesloten rand en is de situatie daar hetzelfde als bij Kees. Echter bij mij is de stijghoogte op de linker rand niet nul zoals bij Kees; bij mij is de stijghoogte in de sloot gelijk aan nul. De slootweerstand bij Kees is de stijghoogte in de sloot ϕ_A/Q en bij mij is dat $(0 - \phi_R)/Q$ met R het referentiepunt op de linker rand van de doorsnede. Het verschil is echter precies hetzelfde en daar gaat het om.

2 Teken van de complexe functies

We leiden hierna een complexe functie af die we ook gaan afbeelden. Voor het afbeelden we op twee manieren te werk gaan.

1. We kunnen we een grid kiezen in het z -vlak (de werkelijke doorsnede) en vervolgens voor elke z -waarde de complexe potentiaal Ω uitrekenen, en tenslotte van de potentiaal $\Phi = \Re(\Omega)$ en $\Psi = \Im(\Omega)$ contouren tekenen.

2. We kunnen ook beginnen met een grid in het Ω -vlak, waar de lijnen van gelijke Φ en Ψ de horizontale en verticale gridlijnen zijn. Vervolgens rekenen we dan $z = f(\Omega)$ uit, waarna voor elke rechte Φ -lijn en Ψ -lijn in het Ω -vlak de corresponderende kromme potentiaal- en stroomlijnen in het z -vlak verkrijgen, die we direct kunnen tekenen zonder contourlijnen te gebruiken.

Beide methoden werken uitstekend, en heb ik gebruikt maar ik vind de methode via het tekenen van contourlijnen wat mooier en die gebruik ik hieronder.

3 De conforme afbeelding

Er zijn minimaal drie manieren om de conforme afbeelding van de voorliggende situatie te maken. In de eerste plaats kan dit middels de zogenoemde Schwarz-Christoffel transformatie. In de tweede plaats kan dit via een exponentiële transformatie en in de derde via een sinus-transformatie. Ik laat de wat lastige Schwarz-Christoffel transformatie achterwege en verwijs daarvoor naar [Maas (1995a)] en voor verdere achtergrond naar [Verruijt (1970)].

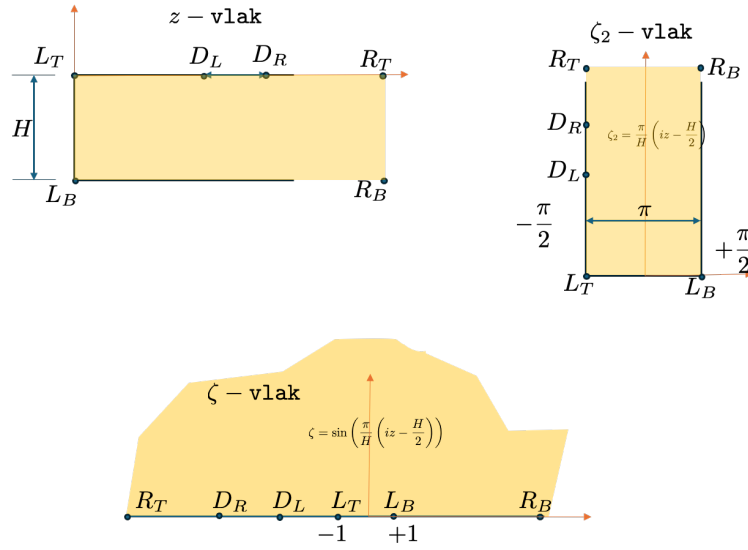
Het nu voorliggende iets eenvoudiger probleem kan worden opgelost met een conforme transformatie zonder de Schwarz-Christoffeltransformatie, met alleen wat schuiven en de sinus-transformatie, zoals eveneens uitgelegd in [Verruijt (1970)].

3.1 Via de sinus-transformatie

Voor deze transformatie gaan we uit van een half-oneindige aquifer met $0 \leq x \leq \infty$ en $-H \leq y \leq 0$ en een sloot tussen vaste coördinaten $x_{sL} \leq x \leq x_{sR}$ zodat de slootbreedte $b = x_{sR} - x_{sL}$ gegeven is. Het enige dat we van situatie tot situatie veranderen is de pakketdikte H . We zorgen ervoor dat $x_{sL} > 3H$ in alle situaties zodat er praktisch geen stroming is in de buurt van $x = 0$. Voor de controle zullen we de doorsnedes tekenen. Bovendien zullen we de beoordeling berekenen wat de potentiaal Φ in het pakketmidden tegen de linker zijde van de doorsnede. Zonder stroming moet de potentiaal tegen $x = 0$ over de gehele pakketdikte dezelfde waarde hebben. Deze waarde moet bovendien gelijk zijn aan minus de stijghoogte die [Maas (1995a)] in de sloot berekende, namelijk de waarde boven het vaste peil dat bij [Maas (1995a)] gelijk aan nul is op $x = -\infty$.

De transformatie verloopt in een aantal stappen beginnend met de doorsnede, het zogenoemde z -vlak tot het w -vlak, waarin de stroomlijnen horizontale lijnen zijn die verlopen van 0 tot Q en de potentiaallijnen verticale lijnen, die verlopen vanaf 0 tot zover we willen gaan.

De conforme afbeelding verloopt in een aantal stappen die zijn weergegeven in fig. 1 en fig. 2.



Figuur 1: De eerste 3 transformaties: Van de doorsnede, het z -vlak naar de gekantelde en verschaalde doorsnede, het ζ_1 -vlak, naar de platgeslagen doorsnede, het ζ -vlak.

De doorsnede in het z -vlak wordt eerst linksom om 90 graden gekanteld door vermenigvuldiging met i en dan verschaald to het ζ_2 -vlak, waarin punt L_t dus $z = 0$ overgaat in $\zeta_2 = -\frac{\pi}{2}$ en punt L_b d.w.z. punt $z = -iH$ overgaat in $\zeta_2 = +\frac{\pi}{2}$. Door hier de sinus transformatie op los te laten worden de lijnen $L_t - R_r$ en $L_b - R_b$ uitgekapt op de horizontale as in het ζ -vlak

$$\zeta = \sin\left(\frac{\pi}{H}\left(iz - \frac{H}{2}\right)\right)$$

De volgende stap is om ζ te schalen en te verschuiven naar ζ_3 , waarbij linker en rechter oever van de sloot, ζ_L en ζ_R op $\zeta_3 = -1$ en $\zeta_3 = +1$ komen te liggen. Dit kan met een lineaire transformatie

$$p\zeta_{D_R} + q = -1$$

$$p\zeta_{D_L} + q = +1$$

Dit geeft

,

$$p = \frac{2}{\zeta_{D_L} - \zeta_{D_R}}$$

$$q = 1 - p\zeta_{D_L}$$

zodat

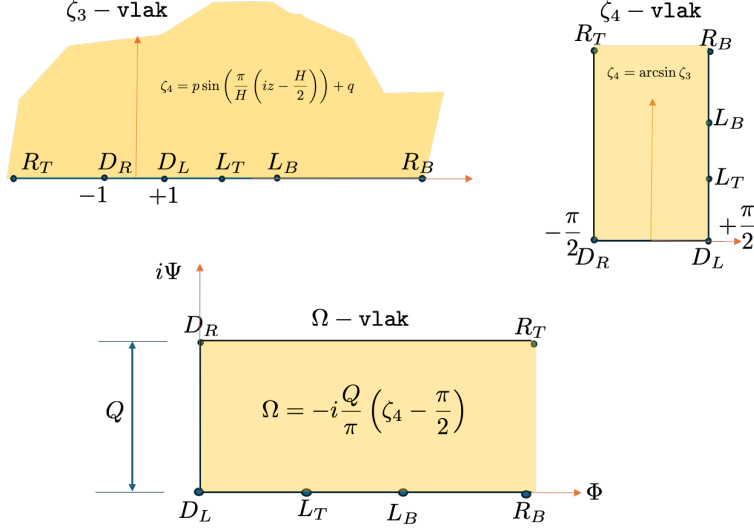
$$\zeta_3 = p\zeta + q$$

Het ζ_3 -vlak is weergegeven in fig. 2

Met de arcsin-functie losgelaten op het ζ_3 -vlak worden de horizontale as links van D_R en rechts van D_L omhoog geklapt en krijgen deze twee punten respectievelijk de coördinaten $-\frac{\pi}{2}$ en $+\frac{\pi}{2}$ in het ζ_4 -vlak.

$$\zeta_4 = \arcsin(\zeta_3) = \arcsin(p\zeta + q)$$

Door de uiteindelijke verscaling van het ζ_4 -vlak naar het Ω -vlak moeten eerst de punten $\zeta_4 = -\frac{\pi}{2}$ en $\zeta_4 = \frac{\pi}{2}$ overgaan in respectievelijk $-Q$ en 0 waarna dit vlak door vermenigvuldiging met $-i$ nog een kwartslag rechtsom wordt gerooteerd tot het uiteindelijke Ω -vlak



Figuur 2: Visualisatie van de laatste 3 stappen, van het ζ -vlak in de voorgaande figuur naar het ζ_3 -vlak, waarin de sloot op de coördinaten -1 en $+1$ is gelegd, naar het ζ_4 -vlak, waarin de rand $Rt - D_R$ en $D_L - R_B$ omhoog geklapt zijn, naar het uiteindelijke geroteerde en verschaalde Ω -vlak, waarin D_R op iQ en D_L op 0 zijn gelegd. Door de uitdrukking voor elk vlak in de laatste formule in te vullen verkrijgt men de uiteindelijke conforme afbeelding van het oorspronkelijke z -vlak (de doorsnede) naar het Ω -vlak, waarin de horizontale lijnen stroomlijnen zijn en de verticale potentiaallijnen.

$$\Omega = -i \frac{Q}{\pi} \left(\zeta_4 - \frac{\pi}{2} \right)$$

Voegen we al deze stappen samen dan krijgen we de volgende transformatie in een formule

$$\Omega = -i \frac{Q}{\pi} \left(\arcsin \left(p \sin \left(\frac{\pi}{H} \left(iz - \frac{H}{2} \right) \right) + q \right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

Hierin zijn p en q berekend met de coördinaten van de hoekpunten van de sloot in het ζ -vlak zoals afgeleid.

De formule hiervoor is handig om de complexe potentiaal te berekenen bij gegeven coördinaten in het vlak van de oorspronkelijke doorsnede. Het omgekeerde is ook mogelijk, namelijk om bij een gegeven complexe potentiaal het bijbehorende punten in het z -vlak uit te rekenen. Daarvoor keren we de zojuist afgeleide vergelijking binnenste buiten en maken z expliciet

$$z = -iH \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \left(\frac{\sin \left(i \frac{\pi}{Q} \Omega + \frac{\pi}{2} \right) - q}{p} \right) \right)$$

3.2 Slootweerstand

De slootweerstand is in feite de stijghoogte in de sloot minus die op een referentiepunt waar geen stroming is. Het meest geschikte punt lijkt $z = -0.5iH$, halverwege de hoogte van het watervoerende pakket op $x = 0$. Met $z = -0.5iH$ wordt $iz - \frac{H}{2} \rightarrow -0.5i^2H - 0.5H = 0$ zodat

$$\Omega_{z=-0.5iH} = -i \frac{Q}{\pi} \left(\arcsin(q) - \frac{\pi}{2} \right)$$

Met $p = 0$ volgt uit de voorgaande lineaire transformatie $p\zeta + q$ dat

$$q = -\frac{\zeta_{D_L} + \zeta_{D_R}}{\zeta_{D_L} - \zeta_{D_R}}$$

Door $\zeta = \sin\left(\frac{\pi}{H}\left(iz - \frac{H}{2}\right)\right)$ in te vullen voor de linker en rechter oever van de infiltratiesloot, resp. $x_{D_L} = a$ en $x_{D_R} = a + b$ vinden we

$$q = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{H}\left(ia - \frac{H}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{H}\left(i(a+b) - \frac{H}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{H}\left(ia - \frac{H}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{H}\left(i(a+b) - \frac{H}{2}\right)\right)}$$

$$\sin(\xi) = \frac{\exp(+i\xi) - \exp(-i\xi)}{2i}$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{H}\left(ic - \frac{H}{2}\right)\right) &= \frac{\exp\left(+i\frac{\pi}{H}\left(ic - \frac{H}{2}\right)\right) - \exp\left(-i\frac{\pi}{H}\left(ic - \frac{H}{2}\right)\right)}{2i} \\ &= \frac{\exp\left(-\pi\frac{c}{H} - i\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(+\pi\frac{c}{H} - i\frac{\pi}{2}\right)}{2i} \\ &= \frac{\exp\left(-\pi\frac{c}{H}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(+\pi\frac{c}{H}\right)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)}{2i} \\ &= \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) \frac{\exp\left(-\pi\frac{c}{H}\right) - \exp\left(+\pi\frac{c}{H}\right)}{2i} \end{aligned}$$

met $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i$ volgt

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{H}\left(ic - \frac{H}{2}\right)\right) &= -\frac{\exp\left(-\pi\frac{c}{H}\right) - \exp\left(+\pi\frac{c}{H}\right)}{2} \\ &= \sinh\left(-\pi\frac{c}{H}\right) \end{aligned}$$

voor $c = a + b$ volgt

$$\begin{aligned} q &= \frac{-\sinh\left(-\pi\frac{a}{H}\right) - \sinh\left(-\pi\frac{a+b}{H}\right)}{-\sinh\left(-\pi\frac{a}{H}\right) + \sinh\left(-\pi\frac{a+b}{H}\right)} \\ &= \frac{\sinh\left(\pi\frac{a}{H}\right) + \sinh\left(\pi\frac{a+b}{H}\right)}{\sinh\left(\pi\frac{a}{H}\right) - \sinh\left(\pi\frac{a+b}{H}\right)} \\ &= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha} + e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{e^\alpha + e^{-\alpha} - e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}} \\ &= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha} + e^\alpha e^\beta - e^{-\alpha} e^{-\beta}}{e^\alpha + e^{-\alpha} - e^\alpha e^\beta + e^{-\alpha} e^{-\beta}} \\ &= \frac{1 + e^{-2\alpha} + e^\beta - e^{-2\alpha} e^{-\beta}}{1 + e^{-2\alpha} - e^\beta + e^{-2\alpha} e^{-\beta}} \end{aligned}$$

Voor $a \rightarrow \infty$

$$q = \frac{1 + e^\beta}{1 - e^\beta} = \frac{1 + e^{\pi\frac{b}{H}}}{1 - e^{\pi\frac{b}{H}}}$$

Waaruit direct blijkt dat q onafhankelijk is van de positie van de sloot (a), mits $a \rightarrow \infty$. De waarde van de stijghoogte op $z = -0.5iH$ kan nu direct worden berekend door q in te vullen in de vergelijking voor $\Omega_{z=-\infty}$.

$$\Omega_{z=-0.5iH} = -i\frac{Q}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{1 + \exp\left(\pi\frac{b}{H}\right)}{1 - \exp\left(\pi\frac{b}{H}\right)} + 0i \right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

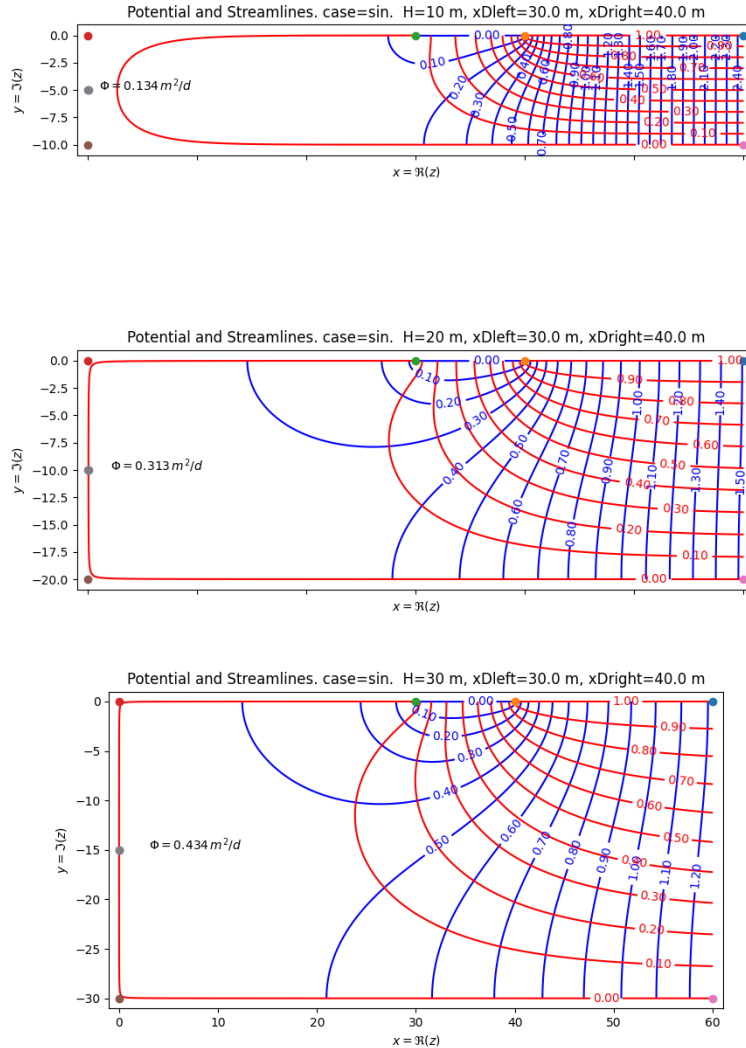
De toevoeging $0i$ zorgt ervoor dat Python het argument van de arcsin als complex opvat en niet als reëel. Hiermee is de uitkomst van $\Omega_{z=-i\frac{H}{2}}$ gelijk aan de numeriek berekende Ω op het gekozen referentiepunt. We hebben hiermee dus direct een waarde voor de slootweerstand verkregen. De uitkomst is een reëel zoals ook moet voor een gewone stijghoogte. In feite hebben we hiermee de gezochte stijghoogte van de sloot ten opzichte van $z = -i\frac{H}{2}$ en is het vraagstuk volledig opgelost.

Verderop passen we in plaats van de initiële sinus transformatie de exp transformatie toe, waarbij wel het punt op $x = -\infty$ kan worden berekend omdat de aquifer dan van $-\infty$ naar $+\infty$ loopt. Daar rekenen we de $\Omega_{z=-\infty}$ analytisch uit, die gelijk blijkt aan de hiervoor berekende uitkomst $\Omega_{z=-0.5iH}$. Ook de numerieke waarden zijn gelijk aan deze analytische voor elke pakketdikte H en b mits a groot genoeg, terwijl bij de aanpak met intieel de exp transformatie a er (uiteraard) helemaal niet toe doet.

3.3 Resultaten

Fig. 3 geeft de berekende potentiaal en stroomfunctielijnen in een zestal doorsneden. Elke doorsnede heeft dezelfde sloot van 10 m breedte gelegen op dezelfde afstand van de linker gesloten rand van de doorsnede. De coördinaten van sloot staat steeds aangeven in de koptekst van elke doorsnede. De doorsneden verschillen alleen in hun dikte, die loopt per doorsnede met 5 m op van 5 tot uiteindelijk 30 m. De totale infiltratie is in elke doorsnede hetzelfde, namelijk $Q=1 \text{ m}^2/\text{d}$. De antwoorden gelden dus voor een eenheidsinfiltratie. Omdat de dikte verschillend zijn verschilt ook de schaal per doorsnede, maar de ligging van de sloot ten opzichte van de linker rand is steeds hetzelfde. De potentiaal in de sloot is steeds nul. De blauwe dikke stip links in de doorsnede, halverwege de hoogte is de plek waar de potentiaal is berekend en de waarde is ernaast geplot.

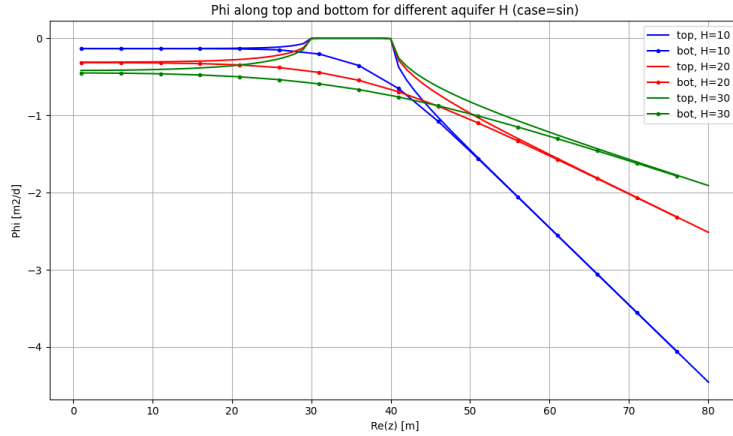
Zoals Kees maas al aantoonde, zien we dat de potentiaal oploopt met de hoogte van de doorsnede. Zijn argument dat „Dik freatisch pakket infiltreert niet lekker” blijkt dan ook hier uit deze resultaten.



Figuur 3: De doorsneden voor toenemende pakketdikte, vaste slootbreedte en vaste totale infiltratie. Het getal in elke figuur geeft de potentiaal op de plek van de blauwe punt, die in de sloot is gelijk aan nul. De Buitenste stroomlijn is voor $\Psi = 0.0001Q$ en $\Psi = 0.9999Q$ zodat de lijn net binnen de doorsnede valt.

De vraag is nu wel of hier alles mee is gezegd. Immers een dikker pakket bij dezelfde doorlatendheid en hetzelfde infiltratiedebiet heeft een kleiner verhang stroomafwaarts. Er is dus altijd een afstand waarop het dikke pakket het wel gaat winnen van de extra weerstand die het nabij de sloot opwekt. We kunnen dit met onze analytische oplossing gemakkelijk controleren door de potentiaal langs de top en de basis van het watervoerend pakket te berekenen. Het resultaat staat in fig. 4. De linker rand van de doorsnede ligt op

$x = \Re(z) = 0$. De sloot ligt tussen $30 \leq x \leq 40$ en heeft altijd potentiaal 0. De hoogte van de doorsnede staat in de legenda. De getrokken lijn van elke kleur is de potentiaal aan de bovenzijde van de doorsnede; de lijn met de stippen die aan de basis van de doorsnede. De potentiaal is links van de sloot lager dan in de sloot en wordt constant in de richting van de rand, waar geen stroming meer is. De slootweerstand is gelijk aan het verschil tussen de potentiaal in de sloot (0) en die nabij $x = 0$. Rechts van de sloot daalt de potentiaal als gevolg van de stroom Q . Hier zien we duidelijk dat de daling sterker is wanneer de vaste stroom Q door een dunner pakket wordt afgevoerd. Het is direct duidelijk dat een dun pakket rechts van de sloot beduidend meer weerstand laat zien dan een dik pakket. Al op beperkte afstand van de sloot overstijgt het potentiaalverlies door de afstroming naar rechts die als gevolg van de intrede via de sloot. Hoe dunner het pakket hoe lager dit intredeverlies en hoe groter het afstroomverlies. Verdict, een dun pakket infiltreert bij nader inzien toch niet zo heel lekker, ook al is het intrede verlies daarvan kleiner dan van een dik pakket bij hetzelfde debiet en dezelfde doorlatendheid. Bij stroming over enige afstand, zoals bij kunstmatige infiltratie het geval is, is het verlies van potentiaal door de geringe dikte van een dun pakket groter dan de winst van een geringere intredeweerstand van het dünnere pakket.



Figuur 4: Potentiaal langs de top en basis van de aquifer

3.4 Via de exp-transformatie

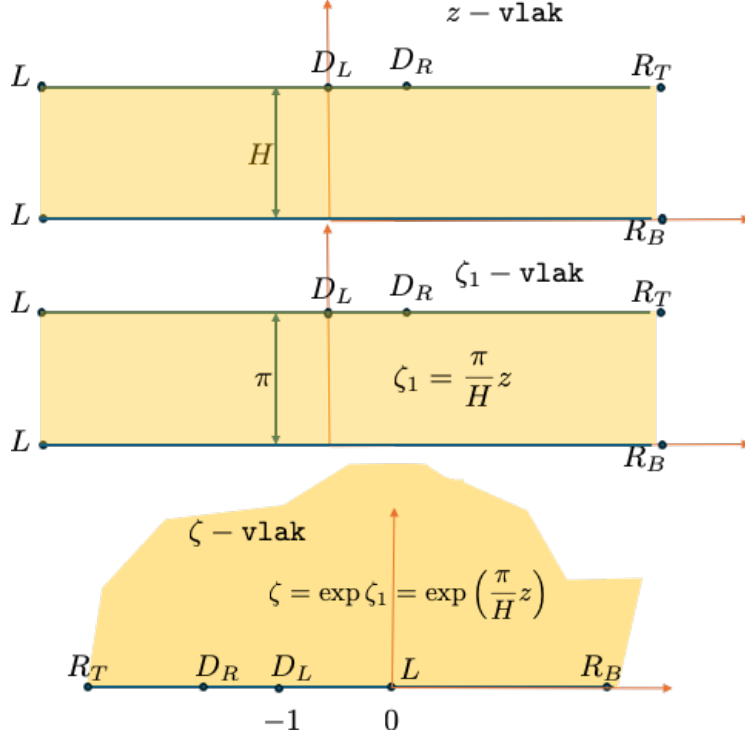
In plaats van de sinus-transformatie richting het ζ -vlak kan wellicht iets elegante de exp-transformatie worden gebruikt. Hierbij loopt de doorsnede van $-\infty < x < +\infty$ en wordt het punt $z = -\infty$ afgebeeld op $\zeta = 0$. Echter moet eerst de doorsnede lineair worden verschaald zodat $z = 0$ naar $i\pi$ en $z = -H$ naar 0 wordt verschaald. Rotatie is nu niet nodig. We krijgen nu (zie fig. 5):

$$\zeta = \exp\left(\frac{\pi}{H}(z + iH)\right)$$

De punten L_t en L_b worden beide op $\zeta = 0$ afgebeeld en de van de infiltratiesloot $D_R > z > D_L$ komen links daarvan te liggen. Vanaf dit punt verloopt de verdere transformatie exact hetzelfde als hiervoor. Eerst passen we een lineaire transformatie $\zeta_4 = p\zeta + q$ toe die het ζ -vlak zodanig verschaalt dat punt $\zeta_{D_R} \rightarrow -1$ en $\zeta_{D_L} \rightarrow +1$ in het ζ_4 -vlak, gevolgd door het opklappen van de horizontale as links van D_R en rechts van D_L en een laatste verschaling die ervoor zorgt dat punt D_L op iQ en D_R op 0 komt te liggen

$$\Omega = -i\frac{Q}{\pi} \left(\arcsin(p\zeta + q) - \frac{\pi}{2} \right)$$

De totale transformatie kan nu in een formule worden opgeschreven



Figuur 5: De transformatie van het z -vlak naar het ζ -vlak via de \exp transformatie.

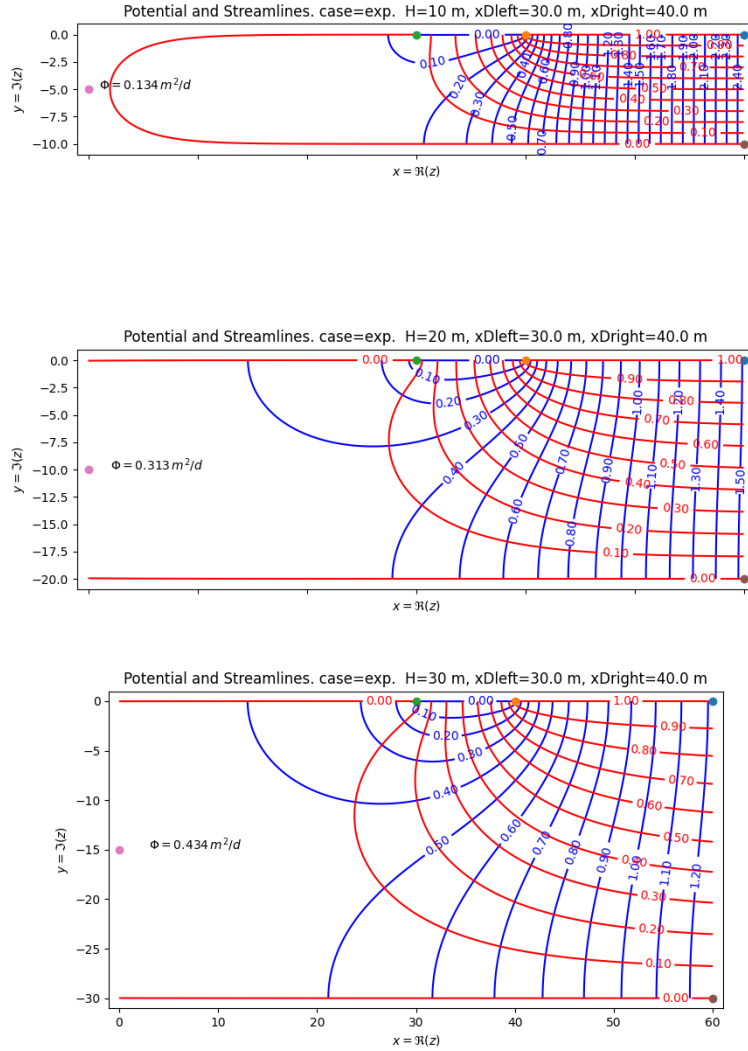
$$\Omega = -i \frac{Q}{\pi} \left(\arcsin \left(p \exp \left(\frac{\pi}{H} (z + iH) \right) + q \right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

en omgekeerd

$$z = -iH + \frac{H}{\pi} \ln \left(\frac{\sin \left(i \frac{\pi}{Q} \Omega + \frac{\pi}{2} \right) - q}{p} \right)$$

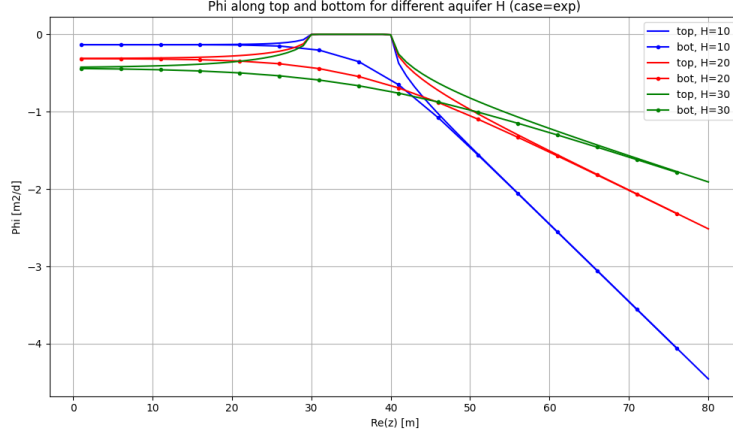
3.5 Resultaten

Fig. 6 geeft de berekende potentiaal en stroomfunctielijnen in een drietal doorsneden. Deze doorsneden zijn gelijk aan die hiervoor behalve dat niet stopt op $x = 0$ maar doorloopt naar $x = -\infty$. De totale infiltratie Q is net als hiervoor gelijk aan $1 \text{ m}^2/\text{d}$. De potentiaal in de sloot is steeds nul. De blauwe dikke stip links in de doorsnede, halverwege de hoogte is de plek waar de potentiaal is berekend en de waarde is ernaast geplot. Deze blijken in 3 cijfers nauwkeurig gelijk aan die in de voorgaande situatie. De waarden op $x = \infty$ zijn nauwelijks anders. Ook hier zijn de uiterste stroomlijnen $\Psi = 0.0001Q$ en $\Psi = 0.9999Q$ getekend. In de dunne doorsnede blijft deze lijn binnen de getekende figuur, het als hiervoor, maar voor de dikkere lopen deze stroomlijnen links buiten de figuur door omdat de doorsnede nu daadwerkelijk doorloopt tot $x = -\infty$ in plaats van slechts tot $x = 0$. De lokatie van de sloot kan uiteraard vrijelijk worden gekozen en zal altijd hetzelfde lijnenspel opleveren. Hiervoor, waar de doorsnede op $x = 0$ eindigt moet de sloot minimaal op enkele keren de pakketdikte van de $x = 0$ worden gelegd om te zorgen dat de dichte rand op $x = 0$ het stroombeeld niet beïnvloed. Uit de gelijke potentiaalwaarden voor het referentiepunt is 30 m blijkbaar voldoende.



Figuur 6: De doorsneden voor toenemende pakgedikte, vaste slootbreedte en vaste totale infiltratie. Het getal in elke figuur geeft de potentiaal op de plek van de blauwe punt, die in de sloot is gelijk aan nul. De Buitenste stroomlijn is voor $\Psi = 0.0001Q$ en $\Psi = 0.9999Q$ zodat de lijn net binnen de doorsnede valt.

Evenals hiervoor kan de Potentiaal langs de top en de basis van de drie doorsneden worden berekend en getekend zoals gedaan in fig. 7 De uitkomsten zijn hetzelfde als hiervoor. De intredeweerstand neemt toe met de dikte van het pakket maar de stromingsweerstand is uiteraard groter voor het dunnere pakket zoals direct blijkt uit het verloop van de lijnen rechts van de sloot.



Figuur 7: Potentiaal langs de top en basis van de aquifer

3.6 De potentiaal op $x = -\infty$

De potentiaal op $x = -\infty$ bepaalt de waterstand in de sloot. Wij hebben de transformatie zo gemaakt dat de potentiaal in de sloot gelijk is aan 0. We kunnen om het slootpeil ten opzichte van die op $x = -\infty$ krijgen door de waarde die de formule berekent op $x = \infty$ van Ω af te trekken.

Voor $x = \infty$ geldt dat de exp gelijk is aan nul

$$\Omega_{z=-\infty} = -i \frac{Q}{\pi} \left(\arcsin(q) - \frac{\pi}{2} \right)$$

Hiervoor hebben we q reeds afgeleid, ingevuld leidt dit tot

$$q = -\frac{\zeta_{D_L} + \zeta_{D_R}}{\zeta_{D_L} - \zeta_{D_R}}$$

Door $\zeta = \exp\left(\frac{\pi}{H}(z + iH)\right)$ in te vullen voor de linker en rechter oever van de infiltratiesloot, resp. $x_{D_L} = a$ en $x_{D_R} = a + b$ vinden we

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\exp\left(\frac{\pi}{H}(a + iH)\right) + \exp\left(\frac{\pi}{H}(a + b + iH)\right)}{\exp\left(\frac{\pi}{H}(a + iH)\right) - \exp\left(\frac{\pi}{H}(a + b + iH)\right)} \\ &= -\frac{\exp(i\pi) + \exp(i\pi)\exp\left(\frac{\pi}{H}b\right)}{\exp(i\pi) - \exp(i\pi)\exp\left(\frac{\pi}{H}b\right)} \\ &= -\frac{1 + \exp\left(\frac{\pi}{H}b\right)}{1 - \exp\left(\frac{\pi}{H}b\right)} \end{aligned}$$

Waaruit direct blijkt dat q onafhankelijk is van de positie van de sloot (a). De waarde van de stijghoogte op $x = -\infty$ kan nu direct worden berekend door q in te vullen in de vergelijking voor $\Omega_{z=-\infty}$.

$$\Omega_{z=-\infty} = -i \frac{Q}{\pi} \left(\arcsin\left(-\frac{1 + \exp\left(\frac{\pi}{H}b\right)}{1 - \exp\left(\frac{\pi}{H}b\right)} + 0i\right) - \frac{\pi}{2} \right)$$

De toevoeging $0i$ zorgt ervoor dat Python het argument van de arcsin als complex opvat en niet als reëel. Hiermee is de uitkomst van $\Omega_{z=-\infty}$ gelijk aan de numeriek berekende Ω op het gekozen referentiepunt. We hebben hiermee dus direct een waarde voor de slootweerstand verkregen. De uitkomst is een reëel zoals ook moet voor een gewone stijghoogte. In feite hebben we hiermee de gezochte stijghoogte van de sloot ten opzichte van $x = -\infty$ en is het vraagstuk volledig opgelost.

4 Conclusie

Overeenkomstig de afleiding van [Maas (1995a)] en de hier afgeleide conforme afbeeldingen neemt de in-tredeweerstand van een infiltratiesloot toe met de dikte van het watervoerende pakket, ook al blijven de doorlatendheid en het totale infiltratiedebiet daarbij behouden. Echter, het dünnere pakket heeft bij gelijk debiet een groter potentiaalverhang over het horizontale afstroomtraject. Er is hierdoor altijd een afstand vanaf de infiltratiesloot waarop het dikkere pakket een kleinere totale weerstand heeft dan het dünnere pakket. En als deze afstand kleiner is dan de afstand tot de winmiddelen is de infiltratiecapaciteit, gerekend tussen sloot en winmiddelen, van het dikkere pakket toch groter dan van het dünnere pakket. In zulke situaties infiltreert een dik pakket misschien toch net wat lekkerder dan een dünn pakket (zie fig. 4).

5 Opmerking

Ik had er genoeg in dit al 30 jaar oude probleem nog eens op te pakken en nader te bestuderen, en nog eens wat te doen met complexe transformaties (conforme afbeeldingen). Het vraagstuk van de infiltratiesloot met water dat naar een zijde afstroomt kan op meerdere manieren, afbeeldingen, worden aangepakt. Ik vond persoonlijk altijd de algemeen toepasbare Schwarz-Christoffel transformatie elegant maar lastig wegens de integraal in de formule en de noodzaak om de plek van de punten x_i op de horizontale as te bepalen. Voor eenvoudige vraagstukken, zoals het voorliggende, is dat redelijk tot goed te doen, daar geeft ook Verruijt een voorbeeld van, maar in het algemeen blijft het lastig. De andere aanpak is via het aaneenrijgen van een aantal basis-transformaties, waarvan de exponent en de sinus (resp. log en de arcsin) standaard voorbeelden zijn. Ik heb de transformatie hier afgeleid via initieel de sinus transformatie, waarvoor geldt dat de aquifer loopt van $0 \leq x \leq \infty$. Dat kan prima, maar dan moet de linker coördinaat van de sloot, a voldoende groot zijn zodat het linker einde van de aquifer op $x = 0$ er voor de potentiaal en stroomfunctie niet toe doen. Wat eleganter kan het probleem ook worden opgelost door initieel de exponent transformatie te gebruiken. Daarbij loopt de aquifer van $x = -\infty$ tot $x = +\infty$ en doet de linker coördinaat, a , van de sloot er helemaal niet toe. Het resultaat is dan ook mathematisch exact gelijk aan de transformatie met de Schwarz-Christoffel transformatie die Kees Maas toepaste. Kees brengt de Potentiaal op $x = -\infty$ exact op 0, waardoor de potentiaal van de slootbodem boven nul uitstijgt. Dat is echter triviaal. De oplossing kent maar een gegeven potentiaal, die je op $x = -\infty$ of op de slootbodem kan opleggen of op welke plek dan ook. Door er een constante bij op te tellen kunnen wel altijd de potentiaal op $x = -\infty$ of op de slootbodem alsnog op nul zetten. De uitkomst van de transformatie met de sinus is op het referentiepunt voldoende ver links van de sloot in beide gevallen gelijk, omdat dat punt in een gebied ligt waar de specifieke grondwaterafvoer willekeurig dicht bij nul ligt.

Het was tamelijk rechttoe-rechtaan om in de transformatie met de exponent voor de potentiaal op $x = -\infty$ een expliciete uitdrukking te vinden. Ik wilde dat vervolgens ook proberen voor de aanpak met de intieële sinus-transformatie. Dat bleek met enig doorzetten ook niet heel ingewikkeld en was blij toen die gelijk bleek aan die met de intieële exp-transformatie, wat natuurlijk ook zo moet zijn.

Een persoonlijke anekdote is nog deze. Ik deed, meen ik, in 1973 mondeling examen grondwatermechanica bij toen nog lector Arnold Verruijt. Ik werd als studentje op zijn kamer ontvangen, waar hij zat met een voor mij onbekende jonge man, die Otto Strack bleek te zijn. Zij hebben me daar flink aan de tand gevoeld. En hadden uiteindelijk nog een vraag. Die ging ook over de aquifer met het punt op $x = -\infty$ en hoe ik dat zou aanpakken. Ik was niet helemaal goed op de hoogte van de details van de exp-transformatie, en heb toen gezegd hoe ik in dat geval de sinus-transformatie zou toepassen en dan het punt $x = 0$ gewoon ver genoeg links van mijn probleem zo leggen zodat die rand er voor de uitkomst niet toe deed. Dat vonden ze beiden goed, en ze gaven me toen een tien. En nu, na 52 jaar heb ik dan toch de exp-transformatie een keer zelf toegepast.

Referenties

- [Maas (1995a)] Maas, K. (1995) Dik pakket infiltreert niet lekker. H2O 28, No. 5, 152-153.
- [Maas (1995b)] Maas, K. (1995) Nawoord van de auteur: Dünn blijft de mode ... H2O, Vol 28, No. 7, p203
- [Olsthoorn (1995)] Olsthoorn, T.N. (1995) Hoe dikker hoe beter. H2O, Vol. 28, No. 7, p202-203.

- [Bot (1995)] Bot, A.P. (1995) Hoe dikker hoe beter. H2O, Vol 28, No. 7, p203
- [Verruijt (1970)] Verruijt, A (1970) Theory of Groundwater Flow. MacMillan, Pitman Press, Bath GBr.