

# Anisotropy

## Op basis van H2O artikel uit 1982 als Hatsi-kD

Theo Olsthoorn

Nov. 2025

Het staat in elk grondwaterleerboek, maar we negeren het liever omdat het lastig lijkt door de ingewikkelde formules waarmee de afleiding in zulke boeken meestal gepaard gaat: anisotropie, Maar omgaan met anisotropie is helemaal niet zo lastig en kan zonder al die cosinussen en sinussen, mits we eerst de kaart draaien zodat de assen van de kaart samenvallen hoofdasen van de doorlatendheid. Hierna hebben we de volgende anisotrope basis differentiaalvergelijking in 3D met verschillende doorlatendheid in de  $x$ ,  $y$  en  $z$ -richting:

$$k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + q - S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

Waarin:

$\phi$  stijghoogte [m]

$k_x, k_y, k_z$  doorlatendheden evenwijdig aan de hoofdasen [m/d]

$q$  voeding [ $(m^3/d) / m^3$ ]=[1/d]

$S_s$  specifieke bergingscoëfficiënt [1/d]

$t$  tijd [d]

In de isotrope situatie ziet deze vergelijking er als volgt uit, waarbij de (') de isotrope situatie aanduidt

$$k' \left[ \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial (z')^2} \right] + q' - S'_s \frac{\partial \phi'}{\partial t'} = 0 \quad (2)$$

$$k' \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial (x')^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (y')^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial (z')^2} \right] + q - S_s \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

De volgende substituties maken vergelijking 1 gelijk maken aan vergelijking 2

$$k = \sqrt[3]{k_x k_y k_z}; \quad dx = dx' \sqrt{\frac{k_x}{k}}; \quad dy = dy' \sqrt{\frac{k_y}{k}}; \quad dz = dz' \sqrt{\frac{k_z}{k}}$$

$x'$

Dit betekent niets anders dan dat we de anisotrope situatie als isotroop kunnen berekenen door uitsluitend de coördinaten en de doorlatendheid te transformeren maar  $\phi$ ,  $t$ ,  $q$  en  $S_s$  in tact te laten. De volumestromen over de randen blijven dus ook hetzelfde, stroomlijnen transformeren mee en tussen elk paar stroomlijnen of stroomvlakken stroomt in de anisotrope en isotrope situatie evenveel water. Merk op dat  $dx dy dz = dx' dy' dz'$  zodat het volume hetzelfde blijft.

Bij tweedimensionale stroming in het  $x, y$  vlak verloopt de transformatie overeenkomstig; de substituties zijn dan:

$$k' = \sqrt[2]{k_x k_y}; \quad x = x' \sqrt{\frac{k_x}{k'}}; \quad y = y' \sqrt{\frac{k_y}{k'}}$$

De andere variabelen:  $q, \phi, t$  en  $S$  (nu de bergingscoëfficiënt van het gehele pakket) veranderen ook hier niet.

Wellicht onverwacht, maar ook verblijftijden langs stroombanen blijven in beide poreuze media hetzelfde. Het bewijs hiervoor is eenvoudig. De te beantwoorden vraag is: wordt de afstand tussen punten  $A$  en  $B$  in de anisotrope situatie in dezelfde tijd  $dt$  afgelegd als de afstand tussen de getransformeerde punten  $A'$  en  $B'$  in de isotrope situatie? Laat de porositeit in beide situaties gelijk zijn aan  $\epsilon$  en de afstand tussen  $A$  en  $B$  gelijk aan  $ds = [dx, dy, dz]$  en die tussen  $A'$  en  $B'$  in de isotrope situatie gelijk aan  $ds' = [dx', dy', dz']$ . We kunnen ons beperken door dit voor slechts één van de 2 resp. 3 hoofdrichtingen te onderzoeken. De tijd  $dt$  nodig om de afstand  $dx$ , resp.  $dx'$  te overbruggen is

$$dt = \epsilon \frac{dx}{v_x} = \epsilon \frac{dx'}{v'_x} \quad (3)$$

waarin

$v_x, v'_x$  de Darcy-snelheid of flux van de waterdeeltjes langs de horizontale as is in resp. het anisotrope en het isotrope poreuze medium

De vraag is nu of in vergelijking 3 aan beide zijden van het isgelijktken inderdaad hetzelfde staat. We werken daartoe de uitdrukking aan de rechterzijde uit, en maken gebruik van het feit dat  $dx' = \sqrt{\frac{k'}{k_x}} dx$ . Deze uitwerking levert

$$\frac{dx'}{v'_x} = \frac{\sqrt{\frac{k'}{k_x}} dx}{k' \frac{\partial \phi}{\partial x'}} = \frac{\sqrt{\frac{k'}{k_x}} dx}{k' \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dx'}} = \frac{\sqrt{\frac{k'}{k_x}} dx}{k' \sqrt{\frac{k_x}{k'}} \frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{dx}{k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}} = \frac{dx}{v_x}$$

wat laat zien dat vergelijking 3 inderdaad waar is. Hetzelfde geldt uiteraard voor de andere twee hoofdrichtingen, waarmee het bewijs is geleverd. Voor 2 en 3 dimensies is de afleiding hetzelfde. Stroombaanberekeningen leveren in de anisotrope situatie dezelfde verblijftijden als in de isotrope situatie. Men kan de coördinaten van de stroombanen tussen beide media één op één heen en weer transformeren; de verblijftijden veranderen daarbij niet.

## Tweak, stroming over model wanden en randen

Er is not wel een „tweak“. Bij de verscaling in 3D blijft wel het volume, maar niet het oppervlak of lengte behouden. Bij verscaling in 2D blijft wel het oppervlak maar niet de lengte behouden. Dit betekent dat de instroom over een oppervlak of een lijn wel moet worden aangepast omdat anders de berekening die voor het isotrope medium wordt uitgevoerd de verkeerde uitkomst levert voor de werkelijke anisotrope situatie. Bij gegeven stroming is dit relatief gemakkelijk te voorkomen door ervoor te zorgen dat in de isotrope situatie binnen een verschaald oppervlak of verschaalde lengte dezelfde totale hoeveelheid water wordt toegepast als in de anisotrope situatie. Echter bij toestroming over een vlak of lengte via een weerstand wordt de flux berekend en klopt dit dan niet meer voor de anisotrope werkelijkheid.

Dealen met opgelegde stroming of flux is gemakkelijk als je bijvoorbeeld een anisotroop Modflow model met cellen hebt, dat je vertaalt dat naar een isotroop Modflow-model met cellen. Je zorgt er dan gewoon voor dat overeenkomstige cellen in beide modellen evenveel water krijgen ook al hebben ze niet het zelfde oppervlak en vorm. Hetzelfde geldt voor lijnvormige randvoorwaarden in een 2D model: de stroming over de overeenkomstige lijnen moet in beide modellen hetzelfde blijven. De stroming over de celranden moeten na transformatie hetzelfde zijn.

Bij analytische berekeningen moeten we dit expliciet maken. Laat de het neerslagoverschot in een 3D model, met de derde hoofdas van de doorlatendheid verticaal, gelijk zijn aan  $n$ , dan is de verticale instroom over een oppervlak  $dx dy$  gelijk aan  $n dx dy$ . Willen we dit gelijk houden bij de transformatie. dan geldt

$$n dx dy = n' dx' dy' = n' \sqrt{\frac{k}{k_x}} dx \sqrt{\frac{k}{k_y}} dy = n' \sqrt{\frac{k^2}{k_x k_y}}, \text{ met } \sqrt[3]{k_x k_y k_z}$$

zodat we in het isotrope medium het volgende neerslagoverschot moeten opleggen

$$n' = n \sqrt{\frac{k_x k_y}{k^2}}; \quad k = \sqrt[3]{k_x k_y k_z}$$

Om dezelfde reden verandert ook de weerstand  $c$  van een afdekkende laag. Wil de lek in het isotrope medium gelijk blijven per oppervlak in het oorspronkelijke anisotrope medium dan geldt

$$Q = \frac{\Delta\phi}{c} dx dy = \frac{\Delta\phi}{c'} dx' dy' = \frac{\Delta\phi}{c'} \sqrt{\frac{k^2}{k_x k_y}}$$

$$c' = c \sqrt{\frac{k^2}{k_x k_y}}; \quad k = \sqrt[3]{k_x k_y k_z}$$

Dus wanneer je bij 3D stroming een oppervlakte flux vertaalt van het anisotrope medium naar het isotrope medium, dan wel in het 2D anisotrope medium een opgelegde stroom over een lijn vertaalt naar het isotrope medium moeten we oppassen van in 3D blijven oppervlakken niet behouden en in 2D blijven lengtes niet behouden.

## Stroming over een willekeurige lijn in 2D

We onderzoeken nu de stroming  $Q$  [m<sup>2</sup>/d] door flux  $\vec{q}$  [m/d] over lijnstuk met lengte  $\Delta s$  [m] onder een hoek  $\alpha$  met de  $x$ -as, zodat  $\tan \alpha = dy/dx$ , met  $dy$  de projectie van dit lijnstuk op de  $y$ -as en  $dx$  dito op de  $x$ -as. De stroming  $Q$  is

$$Q = (\vec{q} \cdot \vec{n}) \Delta s$$

Hierin is  $\vec{n}$  de normaalvector op het lijnstuk  $\Delta s$  en flux  $\vec{q} = \left[ -k_x \frac{\partial\phi}{\partial x}, -k_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \right]^T$ . De normaalvector is  $\vec{n} = [\sin \alpha, -\cos \alpha]^T = \left[ +\frac{\Delta y}{\Delta s}, -\frac{\Delta x}{\Delta s} \right]^T$ . Bij de uitwerking valt  $\Delta s$  weg en krijgen we in het anisotrope 2D medium de volgende uitdrukking voor de stroming  $Q$

$$Q = -k_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \Delta y + k_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \Delta x$$

In de isotrope situatie wordt dit

$$Q' = -k \frac{\partial\phi}{\partial x'} \Delta y' + k \frac{\partial\phi}{\partial y'} \Delta x'$$

en met

$$dx = dx' \sqrt{\frac{k_x}{k}}, \quad dy = dy' \sqrt{\frac{k_y}{k}} \quad \text{en} \quad k = \sqrt{k_x k_y}$$

volgt

$$Q' = -\sqrt{k_x k_y} \frac{\partial\phi}{\sqrt{\frac{k}{k_x}} \partial x} \sqrt{\frac{k}{k_y}} \Delta y + \sqrt{k_x k_y} \frac{\partial\phi}{\sqrt{\frac{k}{k_y}} \partial y} \sqrt{\frac{k}{k_x}} \Delta x = -k_x \frac{\partial\phi}{\partial x} \Delta y + k_y \frac{\partial\phi}{\partial y} \Delta x$$

Aldus blijkt inderdaad  $Q = Q'$ . Met andere woorden, de stroom over een willekeurig lijnstukje, en dus lijn, is in beide media hetzelfde. Mooi om te weten.

## Stroming over een lijn als randvoorwaarde in 2D, dus vanuit sloten een andere lijnelementen

De „tweak” zit hem in de stroom  $Q$  over een willekeurig, al dan niet kromme, lijn waar de stroming in het oorspronkelijke anisotrope medium direct of via een weerstand wordt opgelegd zoals bij een lijnbemaling of bij sloten. De opgelegde stroming  $q$  over een lijnelement met lengte  $\Delta s$  met componenten  $\Delta x$  en  $\Delta y$  is

$$Q = q\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = q'\sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2}$$

met

$$\frac{k}{k_x} = \sqrt{\frac{k_x k_y}{k_x k_x}} = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}$$

volgt

$$Q = q\Delta s = q\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = q'\Delta s' = q'\sqrt{\frac{k}{k_x}\Delta x^2 + \frac{k}{k_y}\Delta y^2}$$

zodat

$$q' = q\sqrt{\frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\frac{k}{k_x}\Delta x^2 + \frac{k}{k_y}\Delta y^2}} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \alpha}{\frac{k}{k_x} + \frac{k}{k_y} \tan^2 \alpha}}$$

In de situatie dat het lijnelement een weerstand  $c$  heeft krijgen we

$$Q = \frac{\Delta \phi}{w} \Delta s = \frac{\Delta \phi}{w} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\Delta \phi}{w'} \Delta s' = \frac{\Delta \phi}{w'} \sqrt{\frac{k}{k_x}\Delta x^2 + \frac{k}{k_y}\Delta y^2}$$

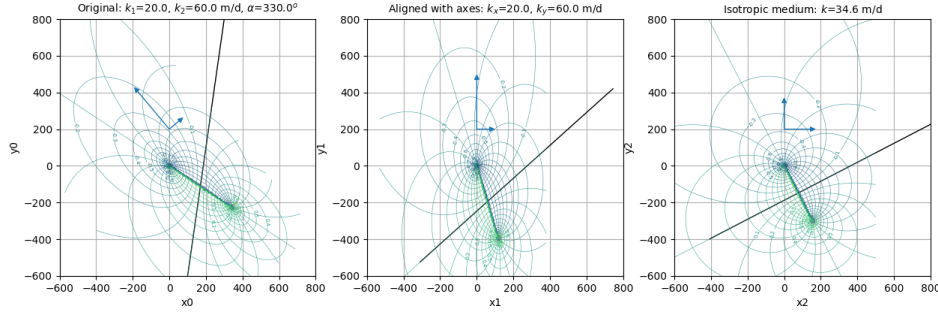
Zodat we in het isotropy medium een aangepaste weerstand moeten toepassen gelijk aan

$$w' = w\sqrt{\frac{\frac{k}{k_x}\Delta x^2 + \frac{k}{k_y}\Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \sqrt{\frac{\frac{k}{k_x} + \frac{k}{k_y} \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}}$$

Dus wanneer  $\Delta s$  evenwijdig aan de  $x$ -as is ( $\tan \alpha = 0$ ), dan geldt  $w' = w\sqrt{\frac{k}{k_x}}$ ; is  $\Delta s$  evenwijdig aan de  $y$ -as ( $\tan \alpha = \infty$ ), dan geldt  $w' = w\sqrt{\frac{k}{k_y}}$ . De helling  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$  is natuurlijk gewoon de helling van de lijn  $s$  ten opzichte van de  $x$ -ax in het oorspronkelijke, anisotrope medium, waarin de weerstand  $c$  van deze rand (zeg sloot, kanaal of rivier) gegeven is.

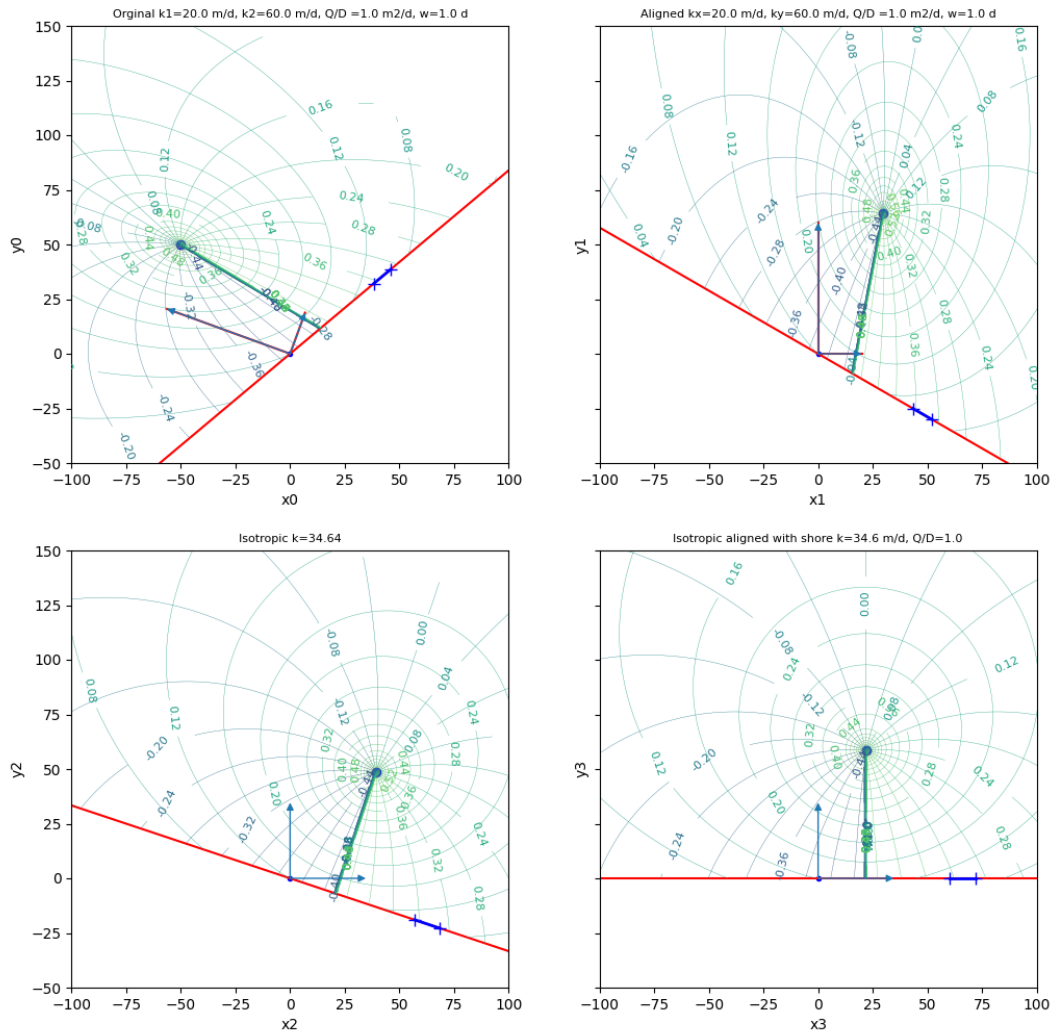
## Voorbeeld

Fig. 1 geeft een eenvoudig voorbeeld: We zien links de plattegrond met een put en een oever. De hoofdrichtingen van de doorlatendheden zijn met de pijlen aangegeven. Vergeet nu even de contouren in de linker twee plaatjes. Plaatje 2 geeft dezelfde plattegrond maar zo gedraaid dat de hoofdasen van de doorlatendheid daarin evenwijdig aan die van de plattegrond verlopen. Dit is voor ons de uitgangssituatie. In plaatje drie zijn de horizontale en verticale assen verschaald zodat het poreuze medium daarin isotroop is. In dit medium plaatsen we de put en spiegelen deze over de eveneens getransformeerde oever. We berekenen vervolgens de verlaging en tekenen de contouren. Dan schalen we de coördinaten van de punten waarop de contourlijnen zijn gebaseerd terug naar plaatje twee en tekenen daarin ook de contourlijnen. Tenslotte draaien we het dezelfde coördinaten van plaatje twee terug naar die van de oorspronkelijke platte grond en tekenen daarin nogmaals de contourlijnen van de stijghoogten die we in het isotrope medium van plaatje drie al hadden berekend.



Figuur 1: Put naast oever in anisotroop pakket: Links de oorspronkelijke plattegrond. Midden geroteerd zodat hoofdassen van de doorlatendheid evenwijdig aan de coördinaten van de kaart lopen. Rechts verschaald zodat het medium isotroop is. Berekening coAfb. Intouren van verlaging door put en spiegelpuut. De contourcoördinaten terug-getransformeerd van plaatje 3 naar plaatje 2 en tenslotte terug-geroteerd van plaatje 1 en daarin ook de contouren getekend, andere coördinaten maar dezelfde stijghoogten en stroomfunctiewaarden.

Voorbeeld 2 laat verscaling van de slootweerstand zien. Ook hier een put langs een kanaal, maar nu met intredeweerstand. Ook hier moeten we eerst de isohypsen in de eerste drie plaatjes wegdenken. Het eerste plaatje van afbeelding 2 toont de kaart met put en oever en met pijlen ook de hoofdassen van de anisotropie. In plaatje 2, rechts ervan, is geroteerd zodat de hoofdassen van de doorlatendheid evenwijdig zijn aan die van de kaart. Plaatje 3 is verschaald zodat het medium daarin isotroop is. In plaatje vier is het kanaal op de x-as gelegd zodat daarin de analytische oplossing 316.41 van Bruggeman (1999) kan worden toegepast dit geldt voor een put naast een kanaal met weerstand. Voor de situatie in plaatje 4 wordt een raster punten gegenereerd en daarvoor wordt de stijghoogte en de stroomfunctie berekend die vervolgens ook als contouren zijn getekend. Vervolgens schalen we alleen deze rasterpunten terug naar de andere plaatjes en tekenen in elk de contouren van de stijghoogten en stroomfunctie die we voor het isotrope medium al hadden berekend.



Figuur 2: Bron langs kanaal met intredeweerstand  $w$  [d].1) Vlnr: 1) Uitgangssituatie met hoofddoorlatendheden als pijlen. 2) Geroteerd zodat hoofddoorlatendheden evenwijdig met de assen. 3) Verschaald tot isotroop medium. 4) Gedraaid kanaal valt samen met de x-as. Isohypsen in isotroop medium berekend met Bruggemans formule 316.41. Dan de gridpunten teruggeschaald naar de voorgaande plaatjes en daar de isohypsen en stroomlijnen gecontournd met de stijghoogten en stroomfunctiewaarden berekend in het isotrope medium van plaatje 4. Blauwe lijntje op de oever geeft stukje aan dat 10 m lang is in plaatje 1 en 2 en 12.01 m in de isotrope plaatjes 3 en 4. Zie tekst voor correctie intreeweerstand

Hoe zit het met de weerstand van het kanaal, die toch ook verschaald moest worden? Beschouw daartoe het in blauw met '+'-markers aangegeven stukje van de oever. Dat stukje is 10 m lang in de oorspronkelijke situatie, maar in de isotrope situatie is dit door schaling 12.01 m lang geworden. De hoeveelheid water tussen de twee '+' markers is in alle plaatjes hetzelfde, maar bij geven stijghoogteverval over de oever onttrekken we in onze berekening, die we tenslotte voor de isotrope situatie doen, 20% teveel vanwege het lengteverschil. We moeten die compenseren door de weerstand 20% te verkleinen. Vergelijk dit met de formule 8, met

$k_1 = 20$ ,  $k_2 = 60$ ,  $k = \sqrt{k_1 k_2} = 34.6$  m/d en  $\alpha = 30^\circ$ , dan volgt  $c' = 0.83c$  precies zoals met de analyse van het lijnstukje langs de oever bleek.

## Conclusie

Werken met een anisotrope situatie gaat praktisch als volgt:

1. Leg de hoofdassen van het coördinatensysteem evenwijdig aan de hoofdassen van de doorlatendheid.
2. Schaal deze hoofdassen zoals aangegeven.
3. Voer alle berekeningen etc. uit in het getransformeerde, isotrope medium. Alle stijghoogten, debieten en verblijftijden blijven in beide media hetzelfde.
4. Teken, isohypsen, stroomlijnen, stroombanen etc. en schaal die transformeer die terug naar het anisotrope medium en teken ze daarin.
5. Wanneer van toepassing draai het anisotrope medium terug naar de oorspronkelijke plattegrond. Dit laatste

## Referenties

- [1] Olsthoorn, T.N. (1982)
- [2] Bruggeman G.A. (1999) Analytical Solutions of Geohydrological Problems. Elsevier RIVM, iISBN 0-444-81829-4, 999pp.
- [3] Olsthoorn, T.N. (1982) Anisotropie, een verwaarloosd verschijnsel bij grondwatervraagstukken. H2O, 1982 Nr. 11, p261, 263-267.
- [4] Verruijt A (1970) Theory of Groundwater Flow (McMillan) 190p.

## Software beschikbaarheid en overige informatie:

Voor python notebook dat afbeeldingen reconstrueert zie  
<https://github.com/Olsthoorn/tools/blob/master/analytic/notebooks/anisotropy.ipynb>