Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Disciplina: Álgebra Linear I

Lista 2 – Sistema de Equações Lineares

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Mostre que A é linha equivalente a B.

    (b) B é linha reduzida à forma escada? Justifique.

    (c) Determine o posto e a nulidade de A.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

    (a) Encontre a matriz linha reduzida à forma escada B que é linha equivalente a matriz A.

    (b) Determine o posto e a nulidade de A.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

    (a) Encontre a matriz linha reduzida à forma escada B que é linha equivalente a matriz A.

    (b) Determine o posto e a nulidade de A.

4. Considere o sistema de equações lineares dado abaixo:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

    (a) Determine a matriz ampliada do sistema.

(b) Encontre a matriz linha reduzida à forma escada que é linha equivalente a matriz ampliada do sistema.

(c) Determine o posto da matriz ampliada e o posto da matriz dos coeficientes do sistema.

(d) Classifique o sistema.

(e) Exiba o conjunto solução do sistema.

5. Classifique e determine o conjunto solução de cada sistema de equações lineares abaixo:

(a) $\left\{ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \right.$

(b) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & - & 2z & = & 3 \\ x & + & 7y & - & 7z & = & 5 \end{array} \right.$

(d) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right.$

(e) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array} \right.$

(f) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$

(g) $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & 4z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & 3z & = & -3 \\ 3x & + & 3y & - & 5z & = & 0 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$

6. Para quais valores de $k \in \mathbb{R}$, o sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} kx & + & 2y & = & 6 \\ 3x & - & y & = & -2 \\ x & + & y & = & 0 \end{array} \right.$$

é possível e determinado? Para quais valores o sistema é impossível?

7. Determine $k \in \mathbb{R}$, para que o sistema de equações lineares abaixo admita solução.

$$\begin{cases} -4x & + & 3y & = & 2 \\ 5x & - & 4y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & k \end{cases}$$

8. Determine o conjunto de todas as soluções do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & - & 7x_5 & = & 14 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & = & -2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & + & 2x_5 & = & -1 \end{cases}$$

9. Um sistema de equações lineares de m equações e n incógnitas é chamado *homogêneo* quando os seus termos independentes, b_i, são todos nulos.

   (a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

   (b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x & - & 5y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & kz & = & 0 \end{cases}$$

   tenha uma solução distinta da solução trivial ($x = y = z = 0$).

10. Determine 5 matrizes X de ordem 4×1 tais que $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

GABARITO - Lista 2

1. (a) Use, por exemplo, as seguintes operações elementares em A:

$$L_2 \to L_2 - 2L_1, L_3 \to L_3 - L_1, L_2 \leftrightarrow L_3, L_2 \to -\frac{1}{4}L_2, L_1 \to L_1 - L_2,$$

$$L_3 \to L_3 + 3L_2, L_3 \to -\frac{1}{3}L_3, L_1 \to L_1 - L_3, L_2 \to L_2 - L_3$$

   (b) Sim, pois as condições (a), (b), (c) e (d), da definição de matriz linha reduzida à forma escada, são satisfeitas.

   (c) $Posto(A) = 3$ e $Nul(A) = 1$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $Posto(A) = 2$ e $Nul(A) = 2$

3. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $Posto(A) = 2$ e $Nul(A) = 1$

4. (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $p_a = 3 = p_c$

   (d) Possível e determinado

   (e) $S = \{(-1, 2, 5)\}$

5. (a) Possível e indeterminado, $S = \{(1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

   (b) Possível e indeterminado, $S = \{(\frac{17}{3} - \frac{7}{3}\lambda, -\frac{5}{3} + \frac{4}{3}\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

   (c) Impossível, $S = \emptyset$

   (d) Possível e indeterminado, $S = \{(-3\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(e) Possível e determinado, $S = \{(1, -1, 2, -2)\}$

(f) Possível e determinado, $S = \{(0, 0, 0)\}$

(g) Impossível, $S = \emptyset$

6. Para $k = -10$ o sistema é possível e determinado. Para $k \neq -10$ o sistema é impossível

7. $k = -6$

8. $S = \{(1 - 3\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, 2 + \lambda_2, 3 + 2\lambda_2, \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

9. (a) A solução $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n$

   (b) $k = 2$

10. $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$, onde $x = 8w, y = 1 - 5w, z = -4 + 36w$. Tome, por exemplo, $w = 0, \pm 1, \pm 2$