



Lista 4 – Espaço Vetorial

1. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^3 ? Justifique.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3z = 0\}$.

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$.

2. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbf{M}(2, 2)$? Justifique.

(a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2, 2) \mid a = c \text{ e } b + d = 0 \right\}$.

(b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2, 2) \mid a + d \leq b + c \right\}$.

(c) $W = \{A \in \mathbf{M}(2, 2) \mid A = A^T\}$.

3. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de \mathcal{P}_2 ? Justifique.

(a) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 0\}$.

(b) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 2p(1)\}$.

(c) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 \mid p(t) + p'(t) = 0\}$.

4. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^4 ? Justifique.

(a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$.

(b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

(c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$.

5. Expresse o vetor $(1, -3, 10) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (2, -3, 5)$.

6. Consideremos $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$ vetores de \mathbb{R}^3 .

(a) Escreva $u = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2 .

(b) Mostre que $v = (4, 3, -6)$ não é combinação linear dos vetores v_1 e v_2 .

- (c) Determine uma condição para x, y e z de modo que (x, y, z) seja combinação linear dos vetores v_1 e v_2 .
7. Quais dos seguintes vetores são combinações lineares de $u = (0, -2, 2)$ e $v = (1, 3, -1)$?
- (a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$ (c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$
8. Seja S o subespaço vetorial de \mathcal{P}_2 gerado pelos vetores $t, 1 - t$ e $4 + t^2$. O vetor $p(t) = 3 + 4t + 10t^2$ pertence a S ? Justifique.
9. Seja \mathcal{P}_2 o espaço vetorial de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais.
- (a) Mostre que $\mathcal{P}_2 = [1 + t, 1 - t, t^2]$.
- (b) Escreva $p(t) = 2 - t + 3t^2$ como combinação linear dos vetores $1 + t, 1 - t, t^2$.
10. Quais dos conjuntos abaixo são linearmente independentes (LI)? Justifique.
- (a) $\{(1, 2), (2, -1)\}$ em \mathbb{R}^2 .
- (b) $\{(1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ em \mathbb{R}^3 .
- (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.
- (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.
- (e) $\{t + 1, t - 1\}$ em \mathcal{P}_1 .
- (f) $\{t + 1, 1 + t^2, 1 - t + t^2\}$ em \mathcal{P}_2 .
11. Quais dos conjuntos abaixo são uma base? Justifique.
- (a) $\{(1, 0, 2), (1, 1, 2), (1, 1, 4)\}$ em \mathbb{R}^3 .
- (b) $\{(2, 1, -1), (1, 0, -1), (1, 1, 0)\}$ em \mathbb{R}^3 .
- (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.
- (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.
- (e) $\{t, 1 + t, t - t^2\}$ em \mathcal{P}_2 .
- (f) $\{1, 2 - t, 3 - t^2, t + 2t^2\}$ em \mathcal{P}_2 .
12. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), e justifique sua resposta.
- (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2, 2) \mid a, b, c \text{ e } d \in \mathbb{R} \text{ com } b = c + 1 \right\}$ é um subespaço vetorial do espaço $\mathbf{M}(2, 2)$ das matrizes reais dois por dois.

- (b) $\mathbb{R}^2 = [(1, 1), (1, -1), (0, 1)]$.
- (c) $(1, 0, 0) \in [(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)]$.
- (d) O conjunto $\{(1, -1, 2), (-1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ forma uma base para \mathbb{R}^3 .
13. Determine o(s) valor(es) de $k \in \mathbb{R}$ de modo que:
- (a) O vetor $u = (-1, k, -7)$ seja combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.
- (b) O conjunto $\{(1, 0, k), (1, 1, k), (1, 1, k^2)\}$ seja uma base de \mathbb{R}^3 .
- (c) O conjunto $\{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)\}$ seja LI em \mathbb{R}^3 .
14. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), e justifique sua resposta.
- (a) O vetor $v = (1, -1, 2)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1, 2, 3)$ e $v = (3, 2, 1)$.
- (b) Qualquer vetor em \mathbb{R}^3 pode ser expresso como combinação linear dos vetores $u = (-5, 3, 2)$ e $v = (3, -1, 3)$.
15. Sejam $W_1 = [(1, 0, 0)]$ e $W_2 = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$ subespaços de \mathbb{R}^3 . Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.
16. Encontre uma base e a dimensão do subespaço W de \mathbb{R}^3 nos casos seguintes:
- (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
- (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$.
17. Encontre geradores para os seguintes subespaços de \mathbb{R}^3 :
- (a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$.
- (b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = x - 2y = 0\}$.
- (c) $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.
- (d) $W_1 \cap W_2$.
- (e) $W_2 + W_3$.
18. Sejam $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$ subespaços de \mathbb{R}^3 .
- (a) Encontre uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$.
- (b) Encontre uma base e a dimensão de $W_1 + W_2$.
- (c) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$? Justifique.
- (d) $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$? Justifique.

19. Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0; z=t\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z+t=0\}$ subespaços de \mathbb{R}^4 .
- Encontre uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$.
 - Encontre uma base e a dimensão de $W_1 + W_2$.
 - $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$? Justifique.
 - $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$? Justifique.
20. Em \mathbb{R}^2 , considere o conjunto $\beta = \{(2, 1), (1, -1)\}$. Mostre que β é uma base de \mathbb{R}^2 e calcule $[(4, -1)]_\beta$.
21. Sejam $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ vetores de \mathbb{R}^3 .
- Mostre que o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de \mathbb{R}^3 .
 - Determine as coordenadas de $u = (5, 4, 2)$ em relação à base β .
 - Determine o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.
22. Sejam α e β bases ordenadas de \mathbb{R}^3 tais que $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Se $v \in \mathbb{R}^3$ e $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, encontre $[v]_\alpha$.
23. A matriz de mudança de base de uma base α de \mathbb{R}^2 para a base $\beta = \{(1, 1), (0, 2)\}$ é $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine a base α .
24. Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ e $\gamma = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 . Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$ e $[v]_\gamma$.
25. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, e $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma base ordenada de $\mathbf{M}(2, 2)$. A soma dos quadrados das entradas de $[A]_\beta$ é:
- 10.
 - 19.
 - 21.
 - 30.
 - 36.

26. Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ e $\gamma = \{(3, -1), (1, 3)\}$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 .

(a) Ache as seguintes matrizes de mudança de base: $[I]_{\alpha}^{\beta}$, $[I]_{\beta}^{\alpha}$, e $[I]_{\gamma}^{\beta}$.

(b) Seja $u = (2, 3)$. Determine: $[u]_{\alpha}$, $[u]_{\beta}$ e $[u]_{\gamma}$.

(c) Seja $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Determine: $[v]_{\alpha}$ e $[v]_{\gamma}$.

27. Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\beta = \{(-1, 0), (1, 1)\}$, $\gamma = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 . Determine:

(a) $[I]_{\alpha}^{\beta}$ (b) $[I]_{\beta}^{\gamma}$ (c) $[I]_{\gamma}^{\beta}$ (d) $[I]_{\alpha}^{\gamma}$

28. Sejam α e β bases ordenadas de \mathbb{R}^3 tais que $[I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Seja $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $[u]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine $[u]_{\alpha}$.

(b) Seja $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine $[v]_{\beta}$.

29. Sejam $\alpha = \{1, t, t^2\}$ e $\beta = \{1, 2t + 1, t^2\}$ bases ordenadas de \mathcal{P}_2 .

(a) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$.

(b) Se $p(t) = 3 + 2t$, encontre $[p(t)]_{\beta}$.

30. Seja $V = \mathcal{S}_2$ o espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem 2 com entradas reais. Sejam

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de V .

(a) Determine $[I]_{\alpha}^{\beta}$.

(b) Determine $[I]_{\beta}^{\alpha}$.

(c) Encontre v tal que $[I]_{\alpha}^{\beta} \cdot [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

GABARITO – Lista 4

1. Apenas (a) é subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 . Justifique!
2. Apenas (a) e (c) são subespaços vetoriais de $\mathbf{M}(2, 2)$. Justifique!
3. Todos são subespaços vetoriais de \mathcal{P}_2 . Justifique!
4. Todos são subespaços vetoriais de \mathbb{R}^4 . Justifique!
5. $(1, -3, 10) = -6u + 3v + 2w$
6. (a) $u = 2v_1 - 3v_2$
(b) Ao tentar resolver o problema $v = xv_1 + yv_2$ chegamos em um sistema impossível
(c) $x - y - 2z = 0$
7. Apenas (a), (b) e (d)
8. Sim. Note que $3 + 4t + 10t^2 = (-33)t + (-37)(1 - t) + 10(4 + t^2)$
9. (a) $\beta = \{1 + t, 1 - t, t^2\}$ é LI e $\dim \mathcal{P}_2 = 3$, logo β é base de \mathcal{P}_2 . Em particular, β gera \mathcal{P}_2
(b) $2 - t + 3t^2 = (\frac{1}{2})(1 + t) + (\frac{3}{2})(1 - t) + (3)t^2$
10. (a), (b), (c), (e) e (f) são LI, e (d) é LD
11. Apenas (a) e (e) são bases
12. (a) F
(b) V
(c) V
(d) F
13. (a) $k = 13$
(b) Para todo $k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$ e $k \neq 1$
(c) Para todo $k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 2$
14. (a) F
(b) F
15. Mostre que $\dim(W_1 + W_2) = 3$ e que $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$
16. (a) Uma base para W é $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Logo, $\dim W = 2$
(b) Uma base para W é $\{(1, 1, 1)\}$. Logo, $\dim W = 1$

17. (a) $W_1 = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$
 (b) $W_2 = [(-1, -\frac{1}{2}, 1)]$
 (c) $W_3 = [(-2, 1, 0), (3, 0, 1)]$
 (d) $W_1 \cap W_2 = [(0, 0, 0)]$
 (e) $W_2 + W_3 = [(-1, -\frac{1}{2}, 1), (-2, 1, 0), (3, 0, 1)]$
18. (a) Uma base para $W_1 \cap W_2$ é $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$. Logo, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
 (b) Uma base para $W_1 + W_2$ é $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$. Logo, $\dim(W_1 + W_2) = 3$
 (c) Sim, justifique!
 (d) Não, justifique!
19. (a) Uma base para $W_1 \cap W_2$ é $\{(0, 0, 1, 1)\}$. Logo, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
 (b) Uma base para $W_1 + W_2$ é $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\}$. Logo, $\dim(W_1 + W_2) = 4$
 (c) Sim, justifique!
 (d) Não, justifique!
20. $[(4, -1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
21. (a) Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, basta mostrar que os vetores são LI
 (b) $[u]_\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$
 (c) $v = (2, 1, 4)$
22. $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$
23. $\alpha = \{(1, 5), (0, 6)\}$
24. $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $[v]_\gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
25. (b) 19
26. (a) $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$
 (b) $[u]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $[u]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$, $[u]_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{11}{10} \end{bmatrix}$

$$(c) \quad [v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, [v]_{\gamma} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$27. \quad (a) \quad [I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad [I]_{\beta}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad [I]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad [I]_{\alpha}^{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$28. \quad (a) \quad [u]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$29. \quad (a) \quad [I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad [p(t)]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$30. \quad (a) \quad [I]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad [I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad v = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$