Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Disciplina: Álgebra Linear I

Lista 3 – Determinante e Matriz Inversa

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule

   (a) $\det A + \det B$.

   (b) $\det(A + B)$.

2. Encontre todos os valores de $t \in \mathbb{R}$ tais que $\det A = 0$, onde:

   (a) $A = \begin{bmatrix} t-7 & t-7 \\ 5 & t \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} t-1 & 5 \\ 3 & t+1 \end{bmatrix}$.

   (c) $A = \begin{bmatrix} t-2 & 5 & 9 \\ 0 & t+3 & -6 \\ 0 & 0 & t-5 \end{bmatrix}$.

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ calcule:

   (a) A_{23}.

   (b) $|A_{23}|$.

   (c) $\triangle_{23}$.

   (d) $\det A$.

4. Calcule $\det A$, onde

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$

5. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ calcule:

   (a) $\operatorname{adj} A$.

   (b) $\det A$.

   (c) A^{-1}.

6. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & s & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, com $t, s \in \mathbb{R}$ fixados tais que $t \neq 3$ e $s \neq 0$, calcule o determinante de:

   (a) $A^{-1}B^T$.

   (b) $B^{-1}A^2$.

7. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Existe A^{-1}? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine A^{-1}.

8. Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

9. Seja $a \in \mathbb{R}$ de modo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ não seja invertível. Então o valor de a é:

   (a) -18.

   (b) 18.

   (c) 6.

   (d) -6.

(e) 3.

10. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & a & 4 \end{bmatrix}$. Para quais valores de $a \in \mathbb{R}$ a matriz A é invertível?

   (a) Para todo $a \in \mathbb{R}$ diferente de -7.

   (b) $a = -7$, apenas.

   (c) $a = -14$, apenas.

   (d) Para todo $a \in \mathbb{R}$ diferente de -14.

   (e) Não existe $a \in \mathbb{R}$ com essa propriedade.

11. Resolva os sistemas de equações lineares abaixo, usando a Regra de Cramer:

   (a) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \\ y - 5z = 4 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ 3x + 2y + z = 2 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ x + 3y + 9z = 9 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} 2x + 3y = z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z - 1 = x - 2y \end{cases}$

12. Considere o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = -5 \\ 3x + 2y + z = 8 \\ 2x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

   Resolva-o:

   (a) Usando operações elementares.

   (b) Usando o Método de Gauss.

   (c) Usando a Regra de Cramer.

13. Considere o sistema de equações lineares abaixo:

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que o sistema seja

(a) Possível e determinado.

(b) Possível e indeterminado.

(c) Impossível.

14. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Encontre A^{-1}:

(a) Usando a matriz dos cofatores.

(b) Usando operações elementares.

15. Usando operações elementares, encontre A^{-1}, onde:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

GABARITO - Lista 3

1. (a) 1

   (b) 3

2. (a) $t \in \{5, 7\}$

   (b) $t \in \{4, -4\}$

   (c) $t \in \{2, -3, 5\}$

3. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) 36

   (c) -36

   (d) 0

4. (a) 12

   (b) 0

5. (a) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) 45

   (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{45} \\ \frac{1}{9} & \frac{7}{15} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{15} & \frac{4}{45} \end{bmatrix}$

6. (a) $\frac{2s}{t-3}$

   (b) $\frac{(t-3)^2}{2s}$

7. Sim, justifique! $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. 0

9. (c)

10. (a)

11. (a) $x = \frac{36}{23}, y = -\frac{3}{23}, z = -\frac{19}{23}$

    (b) $x = 1, y = -1, z = 1$

(c) $x = 0, y = 0, z = 1$

(d) $x = 3, y = -1, z = 2$

12. O sistema é possível e determinando com conjunto solução $S = \{(2, 3, -4)\}$.

13. (a) Para todo $k \in \mathbb{R}$ tal que $k \neq 1$ e $k \neq -2$

    (b) $k = 1$

    (c) $k = -2$

14. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

15. (a) $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

    (c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 12 & -6 \\ 11 & 14 & -43 & 22 \\ 10 & 14 & -41 & 21 \end{bmatrix}$