UFCG/CCT/Unidade Acadêmica de Matemática
DISCIPLINA: Álgebra Linear I
Professor: José Luiz Neto

Lista4

Espaço Vetorial

Atenção! Prepare-se para fazer muitas contas. Conviver com mais de uma resposta.
Fazer muitos " mostre que". Notação também é um grande problema.

1. Nenhum subconjunto de $V = \mathbb{R}^3$ abaixo é subespaço vetorial. Apresente uma justificativa para cada um.

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, |x| + 2y - z = 0\}$
b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 1\}$
c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 2y - z = 0\}$
d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \leq y \leq z\}$
e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, (y + z) \in \mathbb{Q}\}$

2. Mostre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

3. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $E = [(1, 1, 1), (1, 2, 2)]$ e $F = [(0, -1, 1), (1, 1, 2)]$ subespaços de V. Determine a dimensão de:

a) $E + F$
b) $E \cap F$

4. Sejam $V = \mathbb{R}^4$, $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y - z + t = 0\}$ subespaços de V.

a) Encontre $W_1 \cap W_2$
b) Escreva uma base para $W_1 \cap W_2$
c) Encontre uma base para $W_1 + W_2$
d) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$? Justifique!
e) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique!

5. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$, $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2z = 0\}$ e $W_3 = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$ subespaços de V. Determine a dimensão de:

a) W_1, W_2 e W_3

b) $W_1 \cap W_2$

c) $W_2 + W_3$

d) $W_1 + W_2 + W_3$

e) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique!

6. Obtenha um subespaço W_2 de $\mathbb{R}^3$ tal que $\dim W_2 = 2$ e $W_1 \oplus W_2$ se $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z = 0 \text{ e } y = z\}$.

7. Verifique se $\beta = \{x^2 + 1, x - 1, x^2 - 2x\}$ é base de $V = P_2(\mathbb{R})$.

8. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$, e $\alpha = \{g_1, g_2, g_3\}$ duas bases ordenadas de V, relacionadas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} g_1 & = & e_1 & - & e_2 & - & e_3 \\ g_2 & = & & & 2e_2 & + & 3e_3 \\ g_3 & = & 3e_1 & & & + & e_3 \end{array} \right.$$. Determine:

a) $[I]^{\alpha}_{\beta}$ e $[I]^{\beta}_{\alpha}$

b) $[v]_{\alpha}$, sabendo-se que $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

9. Mostre que o subconjunto $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

RESPOSTAS: Espaço Vetorial

1. a) $|x| + |a| \geq |x + a|$.

b) $(0, 0, 0) \notin B$.

c) $x^2 + a^2 \neq (x + a)^2$.

d) Se $k < 0$ e $u = (1, 2, 3)$ então $ku \notin D$.

e) Se $k = \sqrt{2}$ e $u = (\pi, 2, 3)$ então $ku \notin E$.

2. Dica. Mostre que: (i) $(0, 0, 0) \in W$; (ii) $\forall u, v \in W \Longrightarrow (u + v) \in W$; (iii) $\forall k \in \mathbb{R}$ e $\forall\ v \in W \Longrightarrow (kv) \in W$.

3. a) $\dim (E + F) = 3$.

b) $\dim (E \cap F) = 1$.

4. a) $W_1 \cap W_2 = [(0, 0, 1, 1)]$.

b) $\beta_{W_1 \cap W_2} = \{(0, 0, 1, 1)\}$.

c) $\beta_{W_1 + W_2} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$.

d) Sim. $\dim (W_1 + W_2) = 4$.

e) Não. $\dim (W_1 \cap W_2) = 1 \neq 0$.

5. a) $\dim (W_1) = \dim (W_2) = \dim (W_3) = 2$.

b) $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$.

c) $\dim (W_2 + W_3) = 3$.

d) $\dim (W_1 + W_2 + W_3) = 3$.

e) Não. $\dim (W_1 \cap W_2) = 1 \neq 0$.

6. $W_2 = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$.

7. Dica. Resolvendo o sistema homogêneo $0x^2 + 0x + 0 = a(x^2 + 1) + b(x - 1) + c(x^2 - 2x)$ conclua que $a = b = c = 0$. Logo β é L.I.

8. a) $[I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

b) $[v]_{\alpha} = [I]^{\beta}_{\alpha} [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. Dica. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.