目录

一个随机微分方程组解的统计量

卢川
学号：13300180056
专业：信息与计算科学

摘要： 本文研究了一个 Kalman 滤波模型中重要的随机微分方程组的解, 利用特征函数和 Itô 公式补全了解的一阶和二阶统计量的计算过程, 并使用 Monte Carlo 模拟对理论结果进行了数值检验.

关键字: 随机微分方程组; 统计量; 数值模拟

第 1 节 导言

1.1 问题简介

考虑以下的一个随机微分方程组, 其作用为改进对模型误差的滤波 [5]:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = (-\gamma(t) + i\omega)u(t) + b(t) + f(t) + \sigma W(t), \\ \dfrac{db(t)}{dt} = (-\gamma_b + i\omega_b)(b(t) - \hat{b}) + \sigma_b W_b(t), \\ \dfrac{d\gamma(t)}{dt} = -d_\gamma(\gamma(t) - \hat{\gamma}) + \sigma_\gamma W_\gamma(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 ω 为 $u(t)$ 的振荡频率, $f(t)$ 为外部驱动力, σ 表示白噪声 $W(t)$ 的强度. 此外, 参数 γ_b 和 d_γ 表示振荡阻尼, σ_b 和 σ_γ 分别表示加性和乘性修正 ((1.1) 中第 2, 3 式) 中白噪声的强度. $\hat{b}$ 和 $\hat{\gamma}$ 分别表示 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定平均偏差修正, ω_b 表示加性噪声的频率. 白噪声 $W_\gamma(t)$ 是实值函数, 而 $W(t)$ 及 $W_b(t)$ 均为复值, 且其实部和虚部均为独立的白噪声.

我们一般认为方程组 (1.1) 有初值

$$\begin{cases} u(t_0) = u_0, \\ b(t_0) = b_0, \\ \gamma(t_0) = \gamma_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

且 u_0, b_0, γ_0 均为独立的高斯随机变量, 其统计量 $\mathrm{E}[u_0]$, $\mathrm{E}[\gamma_0]$, $\mathrm{E}[b_0]$, $\mathrm{Var}(u_0)$, $\mathrm{Var}(\gamma_0)$, $\mathrm{Var}(b_0)$, $\mathrm{Cov}(u_0,u_0^*)$, $\mathrm{Cov}(u_0,\gamma_0)$, $\mathrm{Cov}(u_0,b_0)$, $\mathrm{Cov}(u_0,b_0^*)$ 均假设为已知.

由求解线性微分方程组的相关知识 [1] 可以知道, (1.1) 的第二和第三项均为线性方程, 故有通解

$$b(t) = \hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s), \tag{1.3}$$

$$\gamma(t) = \hat{\gamma} + (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^{t} e^{-d_\gamma(t-s)} dW_\gamma(s). \tag{1.4}$$

其中 $\lambda_b = -\gamma_b + i\omega_b$, $\hat{b}$ 与 $\hat{\gamma}$ 分别是 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定偏差校正. 如果我们记

$$\hat{\lambda} = -\hat{\gamma} + i\omega, \tag{1.5}$$

$$J(s,t) = \int_{s}^{t} (\gamma(s') - \hat{\gamma}) ds' \tag{1.6}$$

则 (1.1) 的通解可以表示为

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^{t} (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} ds \\ &+ \sigma \int_{t_0}^{t} e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} dW(s). \end{aligned} \tag{1.7}$$

以下将对方程 (1.1) 的各个变量 u, b, γ, 分别计算其统计量.

第 2 节　一些前置引理

2.1　布朗运动的性质

在应用中, 往往将布朗运动置于一个随机微分方程 (组) 中, 来近似的模拟白噪声的性质 [8]. 为此, 我们需要引入布朗运动的一些基本性质.[15][14]

定理 2.1　布朗运动 B_t 是一个 Gauss 过程. 对于所有的 $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$, 随机变量 $Z = (B_{t_1}, B_{t_2} \cdots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$ 服从多重正态分布. 如果设 B_t 的初值为 x, 则其期望为

$$M = \mathrm{E}[Z] = (x, x, \cdots, x) \in \mathbb{R}^{nk},$$

协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \cdots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_k I_n \end{pmatrix}.$$

此定理的证明利用了特征函数的性质, 具体过程可见 [15] 的附录 A. 以下的定理是 (2.1) 的直接而显然的推论:

定理 2.2　*假设布朗运动* B_t *满足定理* (2.1) *中的条件, 那么对于* $\forall t \geqslant 0$, $\mathrm{E}[B_t]=x$, $\mathrm{E}\left[(B_t-x)^2\right]=nt$, $\mathrm{E}[(B_t-x)(B_s-x)]=n\min(s,t)$. *而且如果* $t\geqslant s$, *有* $\mathrm{E}\left[(B_t-B_s)^2\right]=n(t-s)$.

此外, 以下的定理也是布朗运动的一个重要性质, 其证明见 [15] 的 (2.2.12) 式.

定理 2.3　B_t *的增量独立, 即对满足* $\forall 0\leqslant t_1<t_2\cdots<t_k$ *的* $(t_1,t_2,\cdots t_k)$,

$$B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}-B_{t_{k-1}}$$

相互独立.

2.2　Itô 积分及其性质

在求解类似 (1.1) 的随机微分方程时, 需要针对布朗运动做积分, 为此我们引入以下的 Itô 积分 [15][12]:

定义 2.4　(Itô *积分*) *设* $f\in\mathcal{V}(S,T)$. *则* f *的* Itô *积分定义为*

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)=\lim_{n\to\infty}\int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega),$$

其中 ϕ_n *为基本函数序列, 且满足当* $n\to\infty$ *时*

$$\mathrm{E}\left[\int_S^T (f(t,\omega)-\phi_n(t,\omega))^2dt\right]\to 0.$$

由上述定义即可得到 Itô 积分的一个重要性质:

定理 2.5　(Itô *等距*) *对于* $\forall f\in\mathcal{V}(S,T)$ *有*

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dB_t\right)^2\right]=\mathrm{E}\left[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\right].$$

这里 $\mathcal{V}(S,T)$ 见 [15] 中的定义 3.1.2 至 3.1.4.
利用上述方法, 即利用基本函数序列来逼近 $\mathcal{V}(S,T)$ 中的函数, 我们能够得到 Itô 积分的线性性质:

定理 2.6　*设* $f,g\in\mathcal{V}(0,T)$, $0\leqslant S<U<T$. *那么*

$$(1)\quad \int_S^T fdB_t=\int_S^U fdB_t+\int_U^T fdB_t,\quad \text{a.e.}$$

$$(2)\quad \int_S^T (cf+g)dB_t=c\int_S^T fdB_t+\int_S^T gdB_t,\quad \text{a.e.}$$

$$(3)\quad \mathrm{E}\left[\int_S^T fdB_t\right]=0.$$

为了便于计算, 我们还需要引入以下的一维 Itô 公式 [4].

定理 2.7 (Itô 公式) 设 X_t 为一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

$g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$, 则 $Y_t = g(t, X_t)$ 也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

其中

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

以下是上述 Itô 公式的积分形式.

定理 2.8 (分部积分) 设 $f(s,\omega)$ 对几乎所有的 ω 关于 $s \in [0,t]$ 是连续的, 且为有界变差函数, 则有

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

上述几个定理的证明请见 [15], 21-24 页及 36-39 页.

2.3 高斯分布, 复高斯分布与特征函数

在我们的假设中各个噪声信号都服从高斯分布, 为此我们需要知道多元高斯分布的概率密度 [2].

命题 2.9 如果随机向量 $\mathbf{X}$ 服从多元正态分布

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

那么 $\mathbf{X}$ 的概率密度为

$$f_{\mathbf{X}}(X_1, \cdots, X_k) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mu)^\top\right)\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\mu)}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}}$$

对于一个复值的 Gauss 变量 $X = a + bi$, 其中 a 与 b 均服从 Gauss 分布, 那么其期望和方差为

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[a] + i\mathrm{E}[b], \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])(X - \mathrm{E}[X])^*] = \mathrm{Var}(a) + \mathrm{Var}(b) \end{aligned} \tag{2.1}$$

除此之外, 我们还需要引入随机变量的特征函数这个工具, 用于计算较为复杂的随机变量的统计量.

定义 2.10 (特征函数) 如果 X 是实值随机变量, $\mathrm{E}[\sin(tX)], \mathrm{E}[\cos(tX)]$ 均存在, 那么称

$$\phi(t) = \mathrm{E}\left[e^{itX}\right] = \mathrm{E}[\cos(tX)] + i\mathrm{E}[\sin(tX)], \quad t \in \mathbb{R}$$

为 X 的特征函数, 其中 i 为虚数单位.

对于随机向量, 其特征函数定义为

定义 2.11 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为随机向量, 则 $\mathbf{X}$ 的特征函数为

$$\phi(t) = \mathrm{E}\left[\exp(i\mathbf{t}\mathbf{X}^\top)\right], \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

以下为高斯分布的特征函数.

命题 2.12 Gauss 分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的特征函数为

$$\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

此命题的证明见 [2] 第五章例 2.4. 一个更一般的定义如下 [3]:

定义 2.13 设 ξ 为 d-维随机变量, F 为 ξ 的分布函数. 那么

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} dF(y), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(其中 $(\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 空间中的内积) 称为分布函数 F 的特征函数.

由此定义即可看出, 特征函数即为概率密度函数的 Fourier 变换:

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot y} f(y) dy. \tag{2.2}$$

以下是 Fourier 变换的一个基本性质, 在求 $u(t)$ 的统计量时将会用到:

命题 2.14 (Fourier 变换的微分关系) 如果

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0,$$

且 $f'(x)$ 的 Fourier 变换存在, 那么

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega\mathcal{F}[f(x)].$$

更一般的, 若 $f(\infty) = f'(\infty) = \cdots = f^{(k-1)}(\infty) = 0$, 且 $\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]$ 存在, 则

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)] = (i\omega)^k \mathcal{F}[f].$$

第 3 节 $b(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的统计量

3.1 均值

当 t 固定时, 由 (1.3) 式可知, $b(t)$ 的通解第一项为常数, 而第二项中只有 b_0 是一个随机变量. 那么由 (1.2) 可知, $b(t)$ 通解第二项的期望为 $(\mathrm{E}[b_0]-\hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$. 而由于

$$f=f(s)=e^{\lambda_b(t-s)}\in\mathcal{V}(S,T),$$

故由 (2.6) 的 (3) 式可知,

$$\mathrm{E}\left[\sigma_b\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_b(t-s)dW_b(s)}\right]=0.$$

从而

$$\mathrm{E}(b(t))=\hat{b}+(\mathrm{E}[b_0]-\hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}. \tag{3.1}$$

对于 γ 亦有相同的结论

$$\mathrm{E}(\gamma(t))=\hat{\gamma}+(\mathrm{E}[\gamma_0]-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

3.2 方差

当 t 固定时, 由于 $b(t)$ 为一个复值随机变量, 由 [2] 的第四章相关知识,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(b(t))&=\mathrm{E}\left[(b(t)-\mathrm{E}[b(t)])(b(t)-\mathrm{E}[b(t)])^*\right]\\&=\mathrm{E}\Bigg[\left((b_0-\mathrm{E}[b_0])e^{\lambda_b(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)\times\\&\qquad\left((b_0-\mathrm{E}[b_0])e^{\lambda_b(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^{t}dW_b(s)\right)^*\Bigg]\\&=e^{-2\gamma_b(t-t_0)}\mathrm{Var}(b_0)+\mathrm{E}\left[\sigma_b^2\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\left(\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)^*\right]\\&=e^{-2\gamma_b(t-t_0)}\mathrm{Var}(b_0)+\sigma_b^2\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{t}e^{-2\gamma_b(t-s)}ds\right]\end{aligned} \tag{3.3}$$

上面的最后一式右边利用了 Itô 等距 (2.5). 计算右边即可得到

$$\mathrm{Var}(b(t))=e^{-2\gamma_b(t-t_0)}\mathrm{Var}(b_0)+\frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b}(1-e^{-2\gamma_b(t-t_0)}). \tag{3.4}$$

同样的, 我们也有

$$\mathrm{Var}(\gamma(t))=e^{-2d_\gamma(t-t_0)}\mathrm{Var}(\gamma_0)+\frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma}(1-e^{-2d_\gamma(t-t_0)}). \tag{3.5}$$

3.3 协方差

考虑到 $b(t)$ 为复值函数, 由协方差的定义 [2] 即可知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(b(t), b(t)^*) &= \mathrm{E}\left[(b(t) - \mathrm{E}[b(t)])(b(t)^* - \mathrm{E}[b(t)^*])\right] \\
&= \mathrm{E}\left[(b_0 - \mathrm{E}[b_0]e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)) \cdot \right. \\
&\quad \left. ((b_0^* - \mathrm{E}[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s))\right] \quad \cdots (3.1) \\
&= \mathrm{E}\left[(b_0 - \mathrm{E}[b_0])(b_0^* - \mathrm{E}[b_0^*])e^{2\lambda_b(t-t_0)}\right] + \sigma_b \mathrm{E}\left[(b_0 - \mathrm{E}[b_0]) \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right] \\
&\quad + \sigma_b \mathrm{E}\left[(b_0^* - \mathrm{E}[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right] + \sigma_b^2 \mathrm{E}\left[(\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s))^2\right]
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

在上式的第二项中, 由于 b_0 与 $\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)$ 相互独立, 故由 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$
\sigma_b \mathrm{E}\left[(b_0 - \mathrm{E}[b_0]) \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right] = \sigma_b \mathrm{E}\left[b_0 - \mathrm{E}[b_0]\right] \mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right] = 0 \tag{3.7}
$$

同样的, (3.6) 中第三项也为 0, 而第四项由 Itô 等距 (2.5) 即知为 0. 故

$$
\mathrm{Cov}(b(t), b(t)^*) = \mathrm{E}[(b_0 - \mathrm{E}[b_0])(b_0^* - \mathrm{E}[b_0^*])]e^{2\lambda_b(t-t_0)} = \mathrm{Cov}(b_0, b_0^*)e^{2\lambda_b(t-t_0)} \tag{3.8}
$$

与之类似的,

$$
\mathrm{Cov}(b(t), \gamma(t)) = \mathrm{E}[(b(t) - \mathrm{E}[b(t)])(\gamma(t) - \mathrm{E}[\gamma(t)])] = \mathrm{Cov}(b_0, \gamma_0)e^{(\lambda_b - d_\gamma)(t-t_0)} \tag{3.9}
$$

第 4 节 $u(t)$ 的统计量

4.1 均值

在 $u(t)$ 的表达式 (1.7) 中, $e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}$, $f(t)$ 和 σ 均为常值. 那么由数学期望的线性性质 ([2] 第四章定理 2.2) 和 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} \mathrm{E}\left[e^{-J_0(t_0,t)} u_0\right] + \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)} \mathrm{E}\left[b(s)e^{-J(s,t)}\right] ds \\
&\quad + \sigma \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)} f(s) \mathrm{E}\left[e^{-J(s,t)}\right] ds.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

下面我们用高斯随机过程 $J(s, t)$ 的特征函数 [6][7] 来计算上式的右边.
首先我们有以下的命题:

命题 4.1

$$\mathrm{E}\left[ze^{ibx}\right] = (\mathrm{E}[z] + ib\mathrm{Cov}(z,x))e^{ib\mathrm{E}[x]-\frac{1}{2}b^2\mathrm{Var}(x)}$$

其中 z 为复值高斯随机变量, x 为实值高斯随机变量.

证明. 不妨记

$$z = y + iw, \quad y, w \in \mathbb{R}.$$

那么我们只要计算出 $\mathrm{E}[ye^{ibx}]$ 和 $\mathrm{E}[we^{ibx}]$, 然后利用 (4.1) 将其组合起来. 令 $\mathbf{v} = (x, y, w)$, 那么由于 $\mathbf{v}$ 为一个满足多元 Gauss 分布的随机向量, 其特征函数由 (2.12) 即可给出:

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = exp(i\mathbf{s}^\top \mathrm{E}[\mathbf{v}] - \frac{1}{2}\mathbf{s}^\top \Sigma \mathbf{s}),$$

其中 Σ 为协方差矩阵. 记 $g(\mathbf{v})$ 为 $\mathbf{v}$ 的概率密度函数, 那么由特征函数的定义 (2.2), 即特征函数为概率密度的 Fourier 变换即可知道,

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}} g(\mathbf{v})d\mathbf{v}$$

利用 Fourier 变换的性质 (2.14), 我们不妨对 s_2 求偏导 [6], 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int iy_0 e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}} g(\mathbf{v})d\mathbf{v} = i\mathrm{E}\left[y_0 e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}}\right].$$

令 $\mathbf{v} = (b, 0, 0)^\top$,

$$\mathrm{E}[y_0 e^{ibx_0}] = -i\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_2}\bigg|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top}$$

同样的, 我们有

$$\mathrm{E}[w_0 e^{ibx_0}] = -i\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_3}\bigg|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top}$$

由多元高斯分布的概率密度函数 (2.9) 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = (i\mathrm{E}[y_0] - \mathrm{Var}(y_0)s_2 - \mathrm{Cov}(x_0, y_0)s_1 - \mathrm{Cov}(y_0, w_0)s_3)\phi_{\mathbf{v}}(s)$$
$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_3} = (i\mathrm{E}[w_0] - \mathrm{Var}(w_0)s_3 - \mathrm{Cov}(x_0, w_0)s_1 - \mathrm{Cov}(y_0, w_0)s_2)\phi_{\mathbf{v}}(s)$$

分别计算这两个偏导数在 $\mathbf{s} = (b, 0, 0)^\top$ 处的值, 有

$$\mathrm{E}\left[y_0 e^{ibx_0}\right] = (\mathrm{E}[y_0] + i\mathrm{Cov}(x_0, y_0)b)\exp(ib\mathrm{E}[x_0] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}(x_0)b^2)$$
$$\mathrm{E}\left[w_0 e^{ibx_0}\right] = (\mathrm{E}[w_0] + i\mathrm{Cov}(x_0, w_0)b)\exp(ib\mathrm{E}[x_0] - \frac{1}{2}\mathrm{Var}(x_0)b^2)$$

那么

$$\mathrm{E}\left[ze^{ibx}\right] = (\mathrm{E}[z] + ib\mathrm{Cov}(z,x))e^{ibE[x]-\frac{1}{2}b^2 Var(x)}.$$

□

由此我们立刻可以得到

推论 4.2　在命题4.1的条件下,

$$\mathrm{E}\left[ze^{bx}\right] = (\mathrm{E}[z] + b\mathrm{Cov}(z,x))e^{b\mathrm{E}[x]+\frac{1}{2}b^2\mathrm{Var}(x)}.$$

利用推论4.2即有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}(\mathrm{E}[u_0] - \mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)))e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}(\hat{b} + e^{\lambda_b(s-t_0)}(\mathrm{E}[b_0] - \hat{b} - \mathrm{Cov}(b_0, J(s,t))))e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}f(s)e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}ds\end{aligned} \tag{4.2}$$

下面我们计算

$$\mathrm{Cov}(u_0, J(s,t)), \mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)), \mathrm{E}[J(s,t)], \mathrm{Var}(J(s,t)).$$

首先,

$$\begin{aligned}J(s,t) &= \int_s^t \left[(\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)\right]ds' \\ &= \int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds' + \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\end{aligned} \tag{4.3}$$

那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(u_0, J(s,t)) &= \mathrm{Cov}\left(u_0, \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(\gamma_0 - \hat{\gamma})\right) \\ &+ \mathrm{Cov}\left(u_0, \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\right) \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})[\mathrm{Cov}(u_0,\gamma_0) - \mathrm{Cov}(u_0,\hat{\gamma})] \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})\mathrm{Cov}(u_0,\gamma_0).\end{aligned} \tag{4.4}$$

这是因为 u_0 与 $\hat{\gamma}$ 相互独立. 同理有

$$\mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)) = \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})\mathrm{Cov}(b_0,\gamma_0). \tag{4.5}$$

为了计算 $\mathrm{E}[J(s,t)]$, 我们对 (3.2) 求积分, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[J(s,t)] &= \mathrm{E}\left[\int_s^t (\gamma(s') - \hat{\gamma})ds'\right] = \int_s^t (\mathrm{E}[\gamma(s')] - \hat{\gamma})ds' \\ &= \int_s^t (\mathrm{E}[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds' = \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(\mathrm{E}[\gamma_0] - \hat{\gamma}))\end{aligned} \tag{4.6}$$

结合 (4.6) 和 (4.3) 可知,

$$\mathrm{E}\left[\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right] = 0.$$

此外, 由定义即有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(J(s,t)) &= \mathrm{E}\left[J^2(s,t)\right] - \mathrm{E}[J(s,t)]^2 \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds'\right)^2\right] - \mathrm{E}[J(s,t)]^2 + 2\mathrm{E}\left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds'\right) \times \right. \\
&\quad \left.\left(\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right)\right] + \sigma_\gamma^2 \mathrm{E}\left[\left(\int_s^t \int_{t_0}^{s} e^{-d_\gamma(s'-s)} dW_\gamma(s) ds'\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2 \left(\mathrm{E}[\gamma_0^2] - \mathrm{E}[\gamma_0]^2\right) + \sigma_\gamma^2 \mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma}\left(1 - e^{-d_\gamma}(t-x)\right) dW_\gamma(x)\right)^2\right]
\end{aligned}$$

由 Itô 等距 (定理2.5) 和 Itô 公式 (定理2.7) 知上式的第二项为

$$\begin{aligned}
&\sigma_\gamma^2 \mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma}\left(1 - e^{-d_\gamma}(t-x)\right) dW_\gamma(x)\right)^2\right] \\
&= \sigma_\gamma^2 \mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^s \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x) + \int_s^t \int_x^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x)\right)^2\right] \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2}\left\{\int_{t_0}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}\right)^2 dx + \int_s^t \left(1 - e^{-d_\gamma(t-x)}\right)^2 dx\right. \\
&\left. + 2\mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dW_\gamma(x)\right)\left(\int_s^t \left(1 - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dW_\gamma(x)\right)\right]\right\} \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\left(-1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-s)}\right) + 2\mathrm{E}\left[\int_{\min\{s,t_0\}}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}\right)\left(1 - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dt\right]
\end{aligned}$$

这里我们将两个积分区域均扩展至 $[\min\{s,t_0\},t]$ 上, 并设积分区域较小的被积函数在延拓的区间上为 0. 那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(J(s,t)) &= \frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2 Var(\gamma_0) \\
&+ \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\left(-1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

将 (4.7), (4.4), (4.5) 代入 (4.2) 式即得 $u(t)$ 的均值.

4.2 方差

利用定义 $\mathrm{Var}(u(t)) = \mathrm{E}\left[|u(t)|^2\right] - |\mathrm{E}[u(t)]|^2$, 我们记 $u(t) = A + B + C$,
其中

$$\begin{cases} A = e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0, \\ B = \displaystyle\int_{t_0}^{t}(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds, \\ C = \sigma\displaystyle\int_{t_0}^{t}e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}dW(s). \end{cases}$$

于是由 Itô 积分的性质有

$$\mathrm{E}\left[|u(t)|^2\right] = \mathrm{E}\left[|A|^2\right] + \mathrm{E}\left[|B|^2\right] + \mathrm{E}\left[|C|^2\right] + 2\mathrm{Re}\{\mathrm{E}[A^*B]\}. \tag{4.8}$$

下面我们分别求出 $\mathrm{E}\left[|A|^2\right], \mathrm{E}\left[|B|^2\right], \mathrm{E}\left[|C|^2\right], \mathrm{E}[AB]$. 首先由命题4.1可知

命题 4.3 对于复值 Gaussian 随机变量 z 和 w, 以及实值 Gaussian 随机变量 x,

$$\mathrm{E}\left[zwe^{bx}\right] = \Big[\mathrm{E}[z]\mathrm{E}[w] + \mathrm{Cov}(z,w^*) + b(\mathrm{E}[z]\mathrm{Cov}(w,x)) + \mathrm{E}[w]\mathrm{Cov}(z,x) + b^2\mathrm{Cov}(z,x)\mathrm{Cov}(w,x)\Big]\, e^{b\mathrm{E}[x]+\frac{b^2}{2}\mathrm{Var}(x)}.$$

利用上述命题, 有

$$\mathrm{E}\left[|A|^2\right] = \left(|\mathrm{E}[u_0]|^2 + \mathrm{Var}(u_0) - 4\mathrm{Re}\left\{\mathrm{E}[u_0]^*\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)\right\} + 4|\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)|^2\right)\cdot e^{-2\hat{\gamma}(t-t_0)-2\mathrm{E}[J(t_0,t)]+2\mathrm{Var}(J(t_0,t))},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|B|^2\right] &= \mathrm{E}\left[\left|\int_{t_0}^{t}(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds\right|^2\right] \\ &= \int_{t_0}^{t}ds\int_{t_0}^{t}dr\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}\left[(b(r)+f(r))e^{-J(r,t)+\hat{\lambda}(t-r)}\right]^*\right]\end{aligned}$$

在上式中, 被积的最后一项为

$$\begin{aligned}&E\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}\left[(b(r)+f(r))e^{-J(r,t)+\hat{\lambda}(t-r)}\right]^*\right] \\ &= E\left[(b(s)+f(s))(b^*(r)+f^*(r))e^{-J(s,t)-J(r,t)-\hat{\gamma}(2t-s-r)+i\omega(r-s)}\right] \\ &= e^{-J(s,t)-J(r,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(r,t))+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,t))-\hat{\gamma}(2t-s-r)+i\omega(r-s)}\times \\ &\quad \{\mathrm{E}[b(s)b^*(r)] + \mathrm{E}[b(s)]\times[Cov(b^*(r),-J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b^*(r),-J(r,t))] \\ &\quad\quad + \mathrm{E}[b^*(r)]\times[\mathrm{Cov}(b(s),-J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b(s),-J(r,t))] \\ &\quad\quad + [\mathrm{Cov}(b^*(r),J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b^*(r),J(r,t))]\times[\mathrm{Cov}(b(s),J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b(s),J(r,t))] \\ &\quad\quad + f^*(r)\times[\mathrm{E}[b(s)] - \mathrm{Cov}(b(s),J(s,t)) - \mathrm{Cov}(b(s),J(r,t))] \\ &\quad\quad + f(s)\times[\mathrm{E}[b^*(r)] - \mathrm{Cov}(b(r),J^*(s,t)) - \mathrm{Cov}(b(r),J^*(r,t))] \\ &\quad\quad + f(s)f^*(r)\}.\end{aligned}$$

其中, 由 Itô 公式和 Itô 积分的性质即知

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[b(s)b(r)] = \mathrm{E}\Bigg[&\left(\hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(s-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{s} e^{\lambda_b(s-w)} dW_b(w)\right) \times \\ &\left(\hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(r-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{r} e^{\lambda_b(r-w)} dW_b(w)\right)\Bigg] \\ = &\left(1 - e^{\lambda_b(s-t_0)} - e^{\lambda_b(r-t_0)} + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\right)\hat{b}^2 + \left(e^{\lambda_b(s-t_0)} + e^{\lambda_b(r-t_0)} - 2e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[b_0] \\ &+ e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\left(\mathrm{Var}(b_0) + \mathrm{E}[b_0]^2\right) + \frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b}\left(e^{-\gamma_b(s+r-2\min(s,r))} - e^{-\gamma_b(s+r-2t_0)}\right)e^{i\omega_b(s-r)}\end{aligned}$$

结合 (4.6) 和 (4.5) 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(b(r), J(s,t)) &= e^{\lambda_b(r-t_0)}\mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)) + \sigma_b \mathrm{Cov}\left(\int_{t_0}^{r} e^{\lambda_b(r-w)} dW_b(w), J(s,t)\right) \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})e^{\lambda_b(r-t_0)}\mathrm{Cov}(b_0, \gamma_0)\end{aligned}$$

当 $t_0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t$ 时, 我们这么计算 $J(s,t)$ 和 $J(r,t)$ 的协方差:

$$\mathrm{Cov}(J(s,t), J(r,t)) = \mathrm{Cov}(J(s,t), J(r,s) + J(s,t)) = \mathrm{Var}(J(s,t)) + \mathrm{Cov}(J(s,t), J(r,s)).$$

其中 $\mathrm{Var}(J(s,t))$ 由 (4.7) 已求出. 由类似求 $\mathrm{Var}(J(s,t))$ 的过程, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(J(s,t), J(r,s)) = \mathrm{Cov}\Bigg(&\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' + \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds' \\ &\int_r^s (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' + \int_r^s \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\Bigg) \\ = &\frac{\mathrm{Var}(\gamma_0)}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(t-t_0)} - e^{-d_\gamma(s-t_0)})(e^{-d_\gamma(s-t_0)}e^{-d_\gamma(r-t_0)}\right) - \frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma^3}\Big(e^{-d_\gamma(t-s)} - e^{-d_\gamma(t-r)} \\ &+ e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)} - e^{-d_\gamma(t+r-2t_0)} - 1 + e^{-d_\gamma(s-r)} - e^{-2d_\gamma(s-t_0)} + e^{-d_\gamma(s+r-2t_0)}\Big)\end{aligned}$$

当 $t_0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t$ 时, 只要考虑到 $\mathrm{Cov}(J(s,t), J(r,t)) = \mathrm{Cov}(J(r,t), J(s,t))$, 于是只要在结果中将 s 与 r 交换即可. 接下来, 由 Itô 等距有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|C|^2\right] &= \sigma^2 \mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^{t} e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)} dW(s)\right)^2\right] \\ &= \sigma^2 \int_{t_0}^{t} e^{-2\hat{\gamma}(t-s)}\mathrm{E}\left[e^{-2J(s,t)}\right] ds = \sigma^2 \int_{t_0}^{t} e^{-2\hat{\gamma}(t-s) - 2\mathrm{E}[J(s,t)] + 2\mathrm{Var}(J(s,t))} ds \\ \mathrm{E}[A^*B] &= \mathrm{E}\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0\right)^* \int_{t_0}^{t} (b(s) + f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)} ds\right] \\ &= e^{-\hat{\gamma}(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \Big(\mathrm{E}\left[u_0^* b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right] e^{(\lambda_b - i\omega)(s-t_0)} \\ &\quad + \left(\hat{b}\left(1 - e^{\lambda_b(s-t_0)}\right) + f(s)\right)\mathrm{E}\left[u_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right]^*\Big) ds\end{aligned}$$

由命题 (4.3), 以及类似 $\mathrm{E}\left[B^2\right]$ 的计算过程, 类似的能得到

$$\mathrm{E}\left[u_0^* b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(t_0,t))}\times$$
$$[\mathrm{E}[u_0^*]\mathrm{E}[b_0] + \mathrm{Cov}(u_0^*, b_0^*) - \mathrm{E}[u_0^*](\mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b_0, J(t_0,t)))$$
$$- \mathrm{E}[b_0](\mathrm{Cov}(J(s,t), u_0^*) + \mathrm{Cov}(J(t_0,t), u_0^*)) + (\mathrm{Cov}(u_0^*, J(s,t)) + \mathrm{Cov}(u_0^*, J(t_0,t)))$$
$$\times (\mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b_0, J(t_0,t)))],$$
$$\mathrm{E}\left[u_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(t_0,t))}\times$$
$$(\mathrm{E}[u_0] - \mathrm{Cov}(u_0, J(s,t)) - \mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)))$$

于是把上述的几个式子代回到 (4.8) 即得到了 $\mathrm{Var}(u(t))$.

4.3 协方差

Cov$(u(t), u^*(t))$

由定义知, $\mathrm{Cov}(u(t), u^*(t)) = \mathrm{E}\left[u(t)^2\right] - \mathrm{E}[u(t)]^2$. 利用上一节中的记号, 由布朗运动 $W(t)$ 的独立性,

$$\mathrm{E}[u(t)^2] = \mathrm{E}[A^2] + \mathrm{E}[B^2] + 2\mathrm{E}[AB].$$

下面分别计算 $\mathrm{E}[A^2]$, $\mathrm{E}[B^2]$ 和 $\mathrm{E}[AB]$. 利用命题 (4.3), 和上一节类似的, 我们有

$$\mathrm{E}[A^2] = \mathrm{E}[e^{-2J(t_0,t)+2\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0^2] = e^{-2\hat{\gamma}(t-t_0)-2\mathrm{E}[J(t_0,t)]+2\mathrm{Var}(J(t_0,t))}\times$$
$$\left(\mathrm{E}[u_0]^2 + \mathrm{Cov}(u_0, u_0^*) - 4\mathrm{E}[u_0]\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)) + 4\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t))^2\right),$$
$$\mathrm{E}\left[B^2\right] = \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^t dr \mathrm{E}\left[((b(s)+f(s))(b(r)+f(r))e^{-J(s,t)-J(r,t)+\hat{\lambda}(2t-s-r)}\right]$$

上式中的被积项为

$$\mathrm{E}\left[((b(s)+f(s))(b(r)+f(r))e^{-J(s,t)-J(r,t)+\hat{\lambda}(2t-s-r)}\right]$$
$$= e^{-\hat{\lambda}(2t-s-r)-\mathrm{E}[J(s,t)]-\mathrm{E}[J(r,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(r,t)+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,t))}\times$$
$$[\mathrm{E}[b(s)b(r)] - \mathrm{E}[b(s)] \times (\mathrm{Cov}(b(r), J(r,t)) + \mathrm{Cov}(b(r), J(s,t)))$$
$$- \mathrm{E}[b(r)] \times (\mathrm{Cov}(b(s), J(r,t)) + \mathrm{Cov}(b(s), J(s,t)))$$
$$+ [\mathrm{Cov}(b(r), J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b(r), J(r,t))] \times [\mathrm{Cov}(b(s), J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b(s), J(r,t))]$$
$$+ f(r) \times [\mathrm{E}[b(s)] - \mathrm{Cov}(b(s), J(s,t)) - \mathrm{Cov}(b(s), J(r,t))]$$
$$+ f(s) \times [\mathrm{E}[b(r)] - \mathrm{Cov}(b(r), J(r,t)) - \mathrm{Cov}(b(r), J(s,t))] + f(s)f(r)]$$

其中

$$\mathrm{E}[b(s)b(r)] = \left(1 - e^{\lambda_b(s-t_0)} - e^{\lambda_b(r-t_0)} + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\right)\hat{b}^2$$
$$+ \left(e^{\lambda_b(s-t_0)+e^{\lambda_b(r-t_0)}-2e^{\lambda_b(s-t_0)(r-t_0)}}\right)\hat{b}\mathrm{E}[b_0] + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\left(\mathrm{Var}(b_0) + |\mathrm{E}[b_0]|^2\right),$$

$$\mathrm{E}[AB] = \mathrm{E}[e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0 \int_{t_0}^{t} (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds]$$

$$= e^{\hat{\lambda}(2t-s-t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[e^{\lambda_b(s-t_0)}\mathrm{E}[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] + (\hat{b}(1-e^{\lambda_b(s-t_0)}) + f(s))\mathrm{E}[u_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] \right] ds.$$

上式中的第二个期望在上一节中已经求出结果了, 而

$$\mathrm{E}[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] = e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}(\mathrm{Var}(J(t_0,t))+\mathrm{Var}(J(s,t)))+\mathrm{Cov}(J(t_0,t),J(s,t))} \times$$
$$(\mathrm{Cov}(u_0, b_0^*) + \mathrm{E}[u_0]\mathrm{E}[b_0] - \mathrm{E}[u_0](\mathrm{Cov}(b_0, J(t_0,t)) + \mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)))$$
$$- \mathrm{E}[b_0](\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)) + \mathrm{Cov}(u_0, J(s,t)))$$
$$+ [\mathrm{Cov}(b_0, J(t_0,t)) + \mathrm{Cov}(b_0, J(s,t))] \times [\mathrm{Cov}(u_0, J(s,t)) + \mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t))]).$$

Cov$(u(t), \gamma(t))$

由定义,

$$\mathrm{Cov}(u(t),\gamma(t)) = \mathrm{E}[u(t)\gamma(t)] - \mathrm{E}[u(t)]\mathrm{E}[\gamma(t)] = \mathrm{E}[u(t)(\gamma(t)-\hat{\gamma})] + \mathrm{E}[u(t)](\hat{\gamma} - \mathrm{E}[\gamma(t)]).$$

上式的第二项由 (3.2) 和 (4.2) 可以直接计算得到. 下面我们计算上式的第一项. 由 Itô 等距知,

$$E[u(t)(\gamma(t)-\hat{\gamma})] = E\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}ds \right.\right.$$
$$\left.\left. +\sigma \int_{t_0}^{t} e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}dW(s) \right) \times (\gamma(t)-\hat{\gamma}) \right]$$
$$= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} E\left[(\gamma(t)-\hat{\gamma})u_0 e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} \right] + \int_{t_0}^{t} e^{-\hat{\lambda}(s-t_0)} E\left[(b(s)+f(s))(\gamma(t)-\hat{\gamma})e^{-J(s,t)} \right] ds$$

由 $J(t_0,t)$ 的定义 (1.6) 可知 $\frac{\partial J(t_0,t)}{\partial t} = (\gamma(t)-\hat{\gamma})$, 那么

$$\mathrm{E}[u(t)(\gamma(t)-\hat{\gamma})] = -e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[u_0 e^{-J(t_0,t)}\right] - \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(s-t_0)} \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)}\right] ds,$$

其中由 (4.2) 和协方差的线性性质,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[u_0 e^{-J(t_0,t)}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[(\mathrm{E}[u_0] + \mathrm{Cov}(-J(t_0,t),u_0))e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \right]$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Cov}(-J(t_0,t),u_0) \right) e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))}$$
$$+ (\mathrm{E}[u_0] + \mathrm{Cov}(u_0,-J(t_0,t)))\frac{\partial}{\partial t}e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}Var(J(t_0,t))}$$
$$= e^{-J(t_0,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \times [\mathrm{Cov}(-\gamma(t),u_0) + (\mathrm{E}[u_0] + \mathrm{Cov}(-J(t_0,t),u_0))\times$$
$$\left. (\hat{\gamma} - \mathrm{E}[\gamma(t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Var}(J(t_0,t))) \right],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[(E[b(s)]+f(s)+\mathrm{Cov}(b(s)+f(s),-J(s,t)))e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}\right]$$
$$=e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}\times[\mathrm{Cov}(-\gamma(t),b(s))+(\mathrm{E}[b(s)]+f(s)+\mathrm{Cov}(b(s),J(s,t)))\times$$
$$\left.\left(\hat{\gamma}-\mathrm{E}[\gamma(t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Var}(J(s,t))\right)\right].$$

且在上两式中,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Var}(J(s,t))=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)}-e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2\mathrm{Var}(\gamma_0)\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\left(-1+d_\gamma(t-s)+e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)}+e^{-d_\gamma(t-s)}-\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)}-\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\right)\right]$$
$$=\frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2}\left(1-e^{-d_\gamma(t-s)}-e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)}+e^{-2d_\gamma(t-t_0)}\right)+\frac{2}{d_\gamma}\mathrm{Var}(\gamma_0)\times\left(e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)}-e^{-2d_\gamma(t-t_0)}\right).$$

Cov$(u(t),b(t))$

由定义, $\mathrm{Cov}(u(t),b(t))=\mathrm{E}[u(t)b^*(t)]-\mathrm{E}[u(t)]\mathrm{E}[b(t)]^*$. 第二项由 (4.2) 和 (3.1) 即可计算得到. 结合 Itô 公式, 完全类似之前的计算过程, 第一项为

$$\mathrm{E}[u(t)b^*(t)]=\mathrm{E}\left[u(t)\left(\hat{b}^*+(b_0^*-\hat{b}^*)e^{\lambda_b^*(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)\right]$$
$$=\left(1-e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}^*\mathrm{E}[u(t)]+\mathrm{E}\left[u(t)b_0^*e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right]$$
$$+\mathrm{E}[\sigma\sigma_b\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)+\lambda_b^*(t-\xi)}dW(s)dW_b(\xi)]$$
$$=\left(1-e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}^*\mathrm{E}[u(t)]+\mathrm{E}\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}+\int_{t_0}^t(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}ds\right)b_0^*e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right]$$
$$+\frac{\sigma\sigma_b}{2\gamma_b}\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)}e^{-\lambda(t-s)}\left(e^{\lambda_b^*(t-s)}-e^{-i\omega_b(t-s)-\gamma_b(s+t-2t_0)}\right)\right]$$
$$=\left(1-e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}^*\mathrm{E}[u(t)]+e^{(\hat{\lambda}+\lambda_b^*)(t-t_0)}\mathrm{E}\left[u_0b_0^*e^{-J(t_0,t)}\right]+e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\times$$
$$\int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)}\left(\mathrm{E}\left[b_0^*b(s)e^{-J(s,t)}\right]+f(s)\mathrm{E}\left[b_0e^{-J(s,t)}\right]^*ds\right)$$
$$+\frac{\sigma\sigma_b}{2\gamma_b}\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^t e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}e^{-\lambda(t-s)}\left(e^{\lambda_b^*(t-s)}-e^{-i\omega_b(t-s)-\gamma_b(s+t-2t_0)}\right)\right],$$

利用命题 (4.3), 在上式中

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[b_0 e^{-J(s,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))} \times (\mathrm{E}[b_0] + \mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))),\\
&\mathrm{E}\left[u_0 b_0^* e^{-J(t_0,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \times [\mathrm{E}[u_0]\mathrm{E}[b_0]^* + \mathrm{Cov}(u_0, b_0) + \mathrm{E}[u_0]\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t))^*\\
&\quad + \mathrm{E}[b_0]^*\mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t)) + \mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t))\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t))^*],\\
&\mathrm{E}[b_0^* b(s) e^{-J(s,t)}] = e^{-J(s,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))} \times [\mathrm{E}[b_0]^*\mathrm{E}[b(s)] + \mathrm{Cov}(b_0, b(s)) + \mathrm{E}[b_0]^*\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))\\
&\quad + \mathrm{E}[b(s)]\mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))^* + \mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))^*\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))].
\end{aligned}
$$

Cov$(u(t), b^*(t))$

由定义, $\mathrm{Cov}(u(t), b^*(t)) = \mathrm{E}[u(t)b(t)] - \mathrm{E}[u(t)]\mathrm{E}[b(t)]$.

和前一部分类似的, 只要考虑上式的第一项. 我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[u(t)b(t)] = \mathrm{E}\left[u(t)\left(\hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right)\right]\\
&\quad = \left(1 - e^{\lambda_b(t-t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[u(t)] + \mathrm{E}\left[u(t) b_0 e^{\lambda_b(t-t_0)}\right]\\
&\qquad + \mathrm{E}[\sigma\sigma_b \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)+\lambda_b(t-\xi)} dW(s) dW_b(\xi)]\\
&\quad = \left(1 - e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[u(t)] + \mathrm{E}\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} + \int_{t_0}^{t} (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} ds\right) b_0 e^{\lambda_b(t-t_0)}\right]\\
&\quad = \left(1 - e^{\lambda_b(t-t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[u(t)] + e^{(\hat{\lambda}+\lambda_b)(t-t_0)}\mathrm{E}\left[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)}\right] + e^{\lambda_b(t-t_0)} \times\\
&\qquad \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)} \left(\mathrm{E}\left[b_0 b(s) e^{-J(s,t)}\right] + f(s)\mathrm{E}\left[b_0 e^{-J(s,t)}\right] ds\right)
\end{aligned}
$$

在上式中, 由命题 (4.3) 知,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \times [\mathrm{E}[u_0]\mathrm{E}[b_0] + \mathrm{Cov}(u_0, b_0^*) + \mathrm{E}[b_0]\mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t))\\
&\qquad + \mathrm{E}[u_0]\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t)) + \mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t))\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t))],\\
&\mathrm{E}\left[b_0 b(s) e^{-J(s,t)}\right] = e^{-J(s,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))} \times [\mathrm{E}[b_0]\mathrm{E}[b(s)] + \mathrm{Cov}(b_0, b(s)^*) + \mathrm{E}[b_0]\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))\\
&\qquad + \mathrm{E}[b(s)]\mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))].
\end{aligned}
$$

第 5 节　数值模拟和讨论

5.1　参数选择

在实践中, 我们可以考虑以下的一个简单例子. 在 (1.1) 中, 我们令外界驱动力

$$f(t) = 1.5e^{0.1it},$$

方程组的参数可以取为

$$\begin{cases} d = 1.5, & d_\gamma = 0.01d \\ \sigma = 0.1549, & \omega = 1.78 \\ \sigma_\gamma = 5\sigma, & \gamma_b = 0.1d \\ \sigma_b = 5\sigma, & \omega_b = \omega \\ \hat{b} = 0, & \hat{\gamma} = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

而问题的初值条件可以做一个简单的假设, 即

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(u_0), \mathrm{Im}(u_0) \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{i.i.d.} \\ \mathrm{Re}(b_0), \mathrm{Im}(b_0) \sim \mathcal{N}(0,1), \quad \text{i.i.d.} \\ \gamma_0 \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{i.i.d.} \end{cases} \tag{5.2}$$

那么初始变量间的统计量为

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}(u_0, u_0^*) = 0 \\ \mathrm{Cov}(u_0, \gamma_0) = 0 \\ \mathrm{Cov}(u_0, b_0) = 0 \\ \mathrm{Cov}(u_0, b_0^*) = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

5.2 数值模拟

由 ([10]) 知对布朗运动进行的随机 Itô 积分可以由 Euler-Maruyama 方法进行模拟 [9]:

$$X_j = X_{j-1} + f(X_{j-1})\Delta t + g(X_{t-1})(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1})) \tag{5.4}$$

其中

$$W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}) = \sum_{k=jR-R+1}^{jR} dW_k,$$

在上式中 R 为 E-M 算法的步长, 且

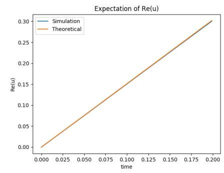
$$dW = \sqrt{\Delta t} * \texttt{randn}().$$

由于模拟 $u(t)$ 和 $b(t)$ 时, 我们需要对其实部和虚部分别进行模拟. 为保证三个微分方程中白噪声的强度一致, 需要令

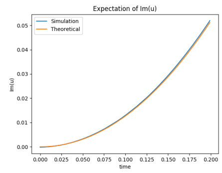
$$W_{\mathrm{Re}(u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} W(t),$$

其余项和初值也做相同的处理.

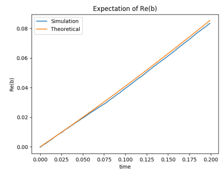
对 $R = 1$ 进行 100,000 次模拟 [16], $u(t)$, $b(t)$ 的实部和虚部,$\gamma(t)$ 的期望, $u(t)$, $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的方差的模拟结果如下图 [13][11], 其中蓝色的曲线为模拟产生的值, 绿色的曲线是理论计算得到的值.



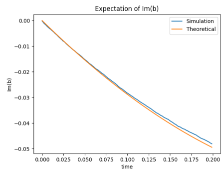
(a) E(Re(u))



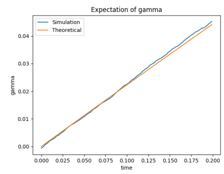
(b) E(Im(u))



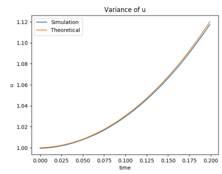
(c) E(Re(b))



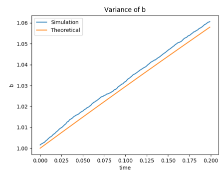
(d) E(Im(b))



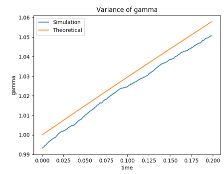
(e) E(γ)



(f) Var(u)

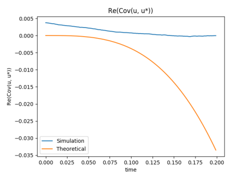


(g) Var(b)

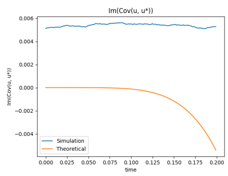


(h) Var(γ)

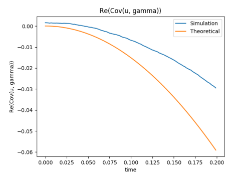
图 1: Simulation of Expectations and Variances



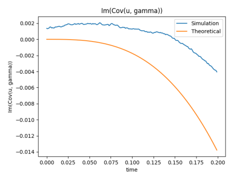
(a) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, u^*))$



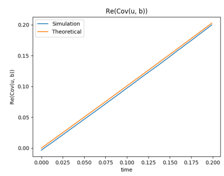
(b) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, u^*))$



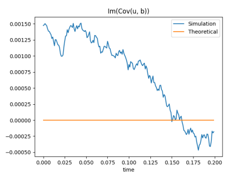
(c) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, \gamma))$



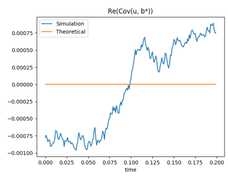
(d) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, \gamma))$



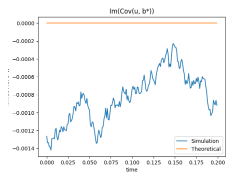
(e) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, b))$



(f) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, b))$



(g) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, b^*))$



(h) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, b^*))$

图 2: Simulation of Covariances

在模拟结果中我们可以看到, 对期望和方差的模拟结果和理论结果均比较符合. 而两者的差别在于方程组的初值为一个服从标准正态分布的随机变量, 其期望和方差的模拟值和理论值有一些偏差, 而这样的偏差随着时间 t 的增加而保持.

参考文献

[1] 金福临等. *常微分方程*. 上海科学技术出版社, 1984.

[2] 何书元. *概率论*. 北京大学出版社, 2006.

[3] 应坚刚. *概率论*. 2013.

[4] 应坚刚. *随机过程*. 2016.

[5] Boris Gershgorin, John Harlim, and Andrew J Majda. Test models for improving filtering with model errors through stochastic parameter estimation. *Journal of Computational Physics*, 229(1):1–31, 2010.

[6] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. A nonlinear test model for filtering slow-fast systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 6(3):611–649, 2008.

[7] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. Filtering a nonlinear slow-fast system with strong fast forcing. *Communications in Mathematical Sciences*, 8(1):67–92, 2010.

[8] Takeyuki Hida. Brownian motion. In *Brownian Motion*, pages 44–113. Springer, 1980.

[9] Desmond J Higham. Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method. *SIAM journal on numerical analysis*, 38(3):753–769, 2000.

[10] Desmond J Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM review*, 43(3):525–546, 2001.

[11] John D Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing In Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007.

[12] Gregory F Lawler. *Introduction to stochastic processes*. CRC Press, 2006.

[13] Wes McKinney. *Python for data analysis: Data wrangling with Pandas, NumPy, and IPython*. " O'Reilly Media, Inc.", 2012.

[14] Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 3. Princeton university press Princeton, 1967.

[15] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 21–39. Springer, 2003.

[16] Christian P Robert. *Monte carlo methods*. Wiley Online Library, 2004.