目录

TEST

卢川，13300180056，信息与计算科学

2017 年 3 月 31 日

摘要： test test test

关键字: test, test.

第 1 节　导言

1.1　问题简介

考虑以下的一个随机微分方程组, 其作用为改进对模型误差的滤波 [4]:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= (-\gamma(t) + i\omega)u(t) + b(t) + f(t) + \sigma W(t),\\ \frac{db(t)}{dt} &= (-\gamma_b + i\omega_b)(b(t) - \hat{b}) + \sigma_b W_b(t),\\ \frac{d\gamma(t)}{dt} &= -d_\gamma(\gamma(t) - \hat{\gamma}) + \sigma_\gamma W_\gamma(t)\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 ω 为 $u(t)$ 的振荡频率, $f(t)$ 为外部驱动力, σ 表示白噪声 $W(t)$ 的强度. 此外, 参数 γ_b 和 d_γ 表示振荡阻尼, σ_b 和 σ_γ 分别表示加性和乘性修正 ((1.1) 中第 2, 3 式) 中白噪声的强度. $\hat{b}$ 和 $\hat{\gamma}$ 分别表示 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定平均偏差修正, ω_b 表示加性噪声的频率. 白噪声 $W_\gamma(t)$ 是实值函数, 而 $W(t)$ 及 $W_b(t)$ 均为复值, 且其实部和虚部均为独立的白噪声.

我们一般认为方程组 (1.1) 有初值

$$\begin{aligned}u(t_0) &= u_0,\\ b(t_0) &= b_0,\\ \gamma(t_0) &= \gamma_0,\end{aligned} \tag{1.2}$$

且 u_0, b_0, γ_0 均为独立的高斯随机变量, 其统计量均假设为已知 (注意到 $b(t)$ 和 $u(t)$ 均为复数): $E[u_0]$, $E[\gamma_0]$, $E[b_0]$, $Var(u_0)$, $Var(\gamma_0)$, $Var(b_0)$, $cov(u_0, u_0^*)$, $cov(u_0, \gamma_0)$, $cov(u_0, b_0)$, $cov(u_0, b_0^*)$.

由求解线性微分方程组的相关知识 [1] 可以知道, (1.1) 的第二和第三项均为线性方程, 故有通解

$$b(t)=\hat{b}+(b_0-\hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s), \tag{1.3}$$

$$\gamma(t)=\hat{\gamma}+(\gamma_0-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)}+\sigma_\gamma\int_{t_0}^{t}e^{-d_\gamma(t-s)}dW_\gamma(s). \tag{1.4}$$

其中 $\lambda_b=-\gamma_b+i\omega_b$, $\hat{b}$ 与 $\hat{\gamma}$ 分别是 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定偏差校正. 如果我们记

$$\hat{\lambda}=-\hat{\gamma}+i\omega,$$

$$J(s,t)=\int_s^t(\gamma(s')-\hat{\gamma})ds'$$

则 (1.1) 的通解可以表示为

$$\begin{aligned}u(t)=&e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0+\int_{t_0}^{t}(b(s)+f(s))e{-}J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)ds\\&+\sigma\int_{t_0}^{t}e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}dW(s).\end{aligned} \tag{1.5}$$

以下将对方程 (1.1) 的各个变量 u,b,γ, 分别计算其统计量.

第 2 节　一些前置引理

2.1　布朗运动的性质

在应用中, 往往将布朗运动置于一个随机微分方程 (组) 中, 来近似的模拟白噪声的性质 [7]. 为此, 我们需要引入布朗运动的一些基本性质.[9][8]

定理 2.1　布朗运动 B_t 是一个 Gauss 过程. 对于所有的 $0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k$, 随机变量 $Z=(B_{t_1},B_{t_2}\cdots,B_{t_k})\in\mathbb{R}^{nk}$ 服从多重正态分布. 如果设 B_t 的初值为 x, 则其期望为

$$M=E[Z]=(x,x,\cdots,x)\in\mathbb{R}^{nk},$$

协方差矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}t_1I_n & t_1I_n & \cdots & t_1I_n\\ t_1I_n & t_2I_n & \cdots & t_2I_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_1I_n & t_2I_n & \cdots & t_kI_n\end{pmatrix}.$$

此定理的证明利用了特征函数的性质, 具体过程可见 [9] 的附录 A. 以下的定理是 (2.1) 的直接而显然的推论:

定理 2.2 假设布朗运动 B_t 满足定理 (2.1) 中的条件, 那么对于 $\forall t \geqslant 0$, $E[B_t] = x$, $E\left[(B_t - x)^2\right] = nt$, $E[(B_t - x)(B_s - x)] = n \cdot min(s,t)$. 而且如果 $t \geqslant s$, 有 $E\left[(B_t - B_s)^2\right] = n(t-s)$.

此外, 以下的定理也是布朗运动的一个重要性质, 其证明见 [9] 的 (2.2.12) 式.

定理 2.3 B_t 的增量独立, 即对满足 $\forall 0 \leqslant t_1 < t_2 \cdots < t_k$ 的 $(t_1, t_2, \cdots t_k)$,

$$B_{t_1}, B_{t_2} - Bt_1, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

相互独立.

2.2 Itô 积分及其性质

在求解类似 (1.1) 的随机微分方程时, 需要针对布朗运动做积分, 为此我们引入以下的 Itô 积分 [9]:

定义 2.4 (Itô 积分) 设 $f \in \mathcal{V}(S,T)$. 则 f 的 Itô 积分定义为

$$\int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega) dB_t(\omega),$$

其中 ϕ_n 为基本函数序列, 且满足当 $n \to \infty$ 时

$$E[\int_S^T (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt] \to 0.$$

由上述定义即可得到 Itô 积分的一个重要性质:

定理 2.5 (Itô 等距) 对于 $\forall f \in \mathcal{V}(S,T)$ 有

$$E\left[(\int_S^T f(t,\omega)dB_t)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\right].$$

这里 $\mathcal{V}(S,T)$ 见 [9] 中的定义 3.1.2 至 3.1.4.
利用上述方法, 即利用基本函数序列来逼近 $\mathcal{V}(S,T)$ 中的函数, 我们能够得到 Itô 积分的线性性质:

定理 2.6 设 $f, g \in \mathcal{V}(0,T)$, $0 \leqslant S < U < T$. 那么

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t, \quad a.e. \\
&(2) \quad \int_S^T (cf+g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t, \quad a.e. \\
&(3) \quad E\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0.
\end{aligned}$$

为了便于计算, 我们还需要引入以下的一维 Itô 公式.

定理 2.7 (Itô 公式) 设 X_t 为一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

$g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$, 则 $Y_t = g(t, X_t)$ 也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

其中

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

以下是上述 Itô 公式的积分形式.

定理 2.8 (分部积分) 设 $f(s,\omega)$ 对几乎所有的 ω 关于 $s \in [0,t]$ 是连续的, 且为有界变差函数, 则有

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

上述几个定理的证明请见 [9], 21-24 页及 36-39 页.

2.3 高斯分布与特征函数

在我们的假设中各个噪声信号都服从高斯分布, 为此我们需要知道多元高斯分布的概率密度 [2].

命题 2.9 如果随机向量 $\mathbf{x}$ 服从多元正态分布

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

那么 $\mathbf{x}$ 的概率密度为

$$f_x(x_1, \cdots, x_k) = \frac{exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^{\top}\right)\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}}$$

除此之外, 我们还需要引入随机变量的特征函数这个工具, 用于计算较为复杂的随机变量的统计量.

定义 2.10 (特征函数) 如果 X 是实值随机变量, $E[sin(tX)], E[cos(tX)]$ 均存在, 那么称

$$\phi(t) = E\left[e^{itX}\right] = E[cos(tX)] + iE[sin(tX)], \quad t \in \mathbb{R}$$

为 X 的特征函数, 其中 i 为虚数单位.

对于随机向量, 其特征函数定义为

定义 2.11 设 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为随机向量, 则 $\mathbf{X}$ 的特征函数为

$$\phi(t)=E\left[exp(i\mathbf{t}\mathbf{X}^\top)\right],\quad \mathbf{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n.$$

以下为高斯分布的特征函数.

命题 2.12 Gauss 分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的特征函数为

$$\phi(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

此命题的证明见 [2] 第五章例 2.4. 一个更一般的定义如下 [3]:

定义 2.13 设 ξ 为 d-维随机变量, F 为 ξ 的分布函数. 那么

$$\hat{F}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot y}dF(y),\quad x\in\mathbb{R}^d$$

(其中 $x\cdot y$ 为 $\mathbb{R}^d$ 空间中的内积) 称为分布函数 F 的特征函数.

由此定义即可看出, 特征函数即为概率密度函数的 Fourier 变换:

$$\hat{F}(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot y}f(y)dy. \tag{2.1}$$

以下是 Fourier 变换的一个基本性质, 在求 $u(t)$ 的统计量时将会用到:

命题 2.14 (Fourier 变换的微分关系) 如果

$$\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0,$$

且 $f'(x)$ 的 Fourier 变换存在, 那么

$$\mathcal{F}[f'(x)]=i\omega\mathcal{F}[f(x)].$$

更一般的, 若 $f(\infty)=f'(\infty)=\cdots=f^{(k-1)}(\infty)=0$, 且 $\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]$ 存在, 则

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]=(i\omega)^k\mathcal{F}[f].$$

第 3 节 $b(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的统计量

3.1 均值

当 t 固定时, 由 (1.3) 式可知, $b(t)$ 的通解第一项为常数, 而第二项中只有 b_0 是一个随机变量. 那么由 (1.2) 可知, $b(t)$ 通解第二项的期望为 $(E[b_0]-\hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$. 而由于

$$f=f(s)=e^(\lambda_b(t-s))\in\mathcal{V}(S,T),$$

故由 (2.6) 的 (3) 式可知,

$$E\left[\sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)dW_b(s)}\right] = 0.$$

从而

$$E(b(t)) = \hat{b} + (E[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}. \tag{3.1}$$

对于 γ 亦有相同的结论

$$E(\gamma(t)) = \hat{\gamma} + (E[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

3.2 方差

当 t 固定时, 由 [2] 的第四章相关知识, 考虑到 $(b_0-\hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$ 与 $\sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)$ 相互独立 (由 (1.2) 可知),

$$\begin{aligned}
Var(b(t)) &= Var\left((b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}\right) + Var\left(\sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right) \\
&= (e^{\lambda_b(t-t_0)})^2 Var(b_0) + Var\left(\sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right) \\
&= Re\left\{e^{2(-\gamma_b+i\omega_b)(t-t_0)}Var(b_0)\right\} + E\left[(\sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s))^2\right] \\
&= e^{-2\gamma_b(t-t_0)}Var(b_0) + Re\left\{\sigma_b^2 E\left[\int_{t_0}^{t} e^{2\lambda_b(t-s)}dt\right]\right\}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

上面的最后一式右边利用了 Itô 等距 (2.5). 计算右边即可得到

$$Var(b(t)) = e^{-2\gamma_b(t-t_0)}Var(b_0) + \frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b}(1 - e^{-2\gamma_b(t-t_0)}). \tag{3.4}$$

同样的, 我们也有

$$Var(\gamma(t)) = e^{-2d_\gamma(t-t_0)}Var(\gamma_0) + \frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma}(1 - e^{-2d_\gamma(t-t_0)}). \tag{3.5}$$

3.3 协方差

考虑到 $b(t)$ 为复值函数, 由协方差的定义 [2] 即可知

$$\begin{aligned}
&cov(b(t), b(t)^*) = E\left[(b(t) - E[b(t)])(b(t)^* - E[b(t)^*])\right] \\
&= E\left[(b_0 - E[b_0]e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)) \cdot \right. \\
&\qquad \left. ((b_0^* - E[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s))\right] \quad \cdots (3.1) \\
&= E\left[(b_0 - E[b_0])(b_0^* - E[b_0^*])e^{2\lambda_b(t-t_0)}\right] + \sigma_b E\left[(b_0 - E[b_0]) \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right] \\
&+ \sigma_b E\left[(b_0^* - E[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right] + \sigma_b^2 E\left[(\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s))^2\right]
\end{aligned} \tag{3.6}$$

在上式的第二项中, 由于 b_0 与 $\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)$ 相互独立, 故由 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$\sigma_b E\left[(b_0 - E[b_0])\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right] = \sigma_b E\left[b_0 - E[b_0]\right] E\left[\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right] = 0 \tag{3.7}$$

同样的, (3.6) 中第三项也为 0, 而第四项由 Itô 等距 (2.5) 即知为 0. 故

$$cov(b(t), b(t)^*) = E[(b_0 - E[b_0])(b_0^* - E[b_0^*])]e^{2\lambda_b(t-t_0)} = cov(b_0, b_0^*)e^{2\lambda_b(t-t_0)} \tag{3.8}$$

与之类似的,

$$\begin{aligned} cov(b(t), \gamma(t)) &= E[(b(t) - E[b(t)])(\gamma(t) - E[\gamma(t)])] \\ &= E\left[\left(b_0 - E[b_0]e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)\cdot\right. \\ &\quad \left.\left((\gamma_0 - E[\gamma_0])e^{-d_\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma\int_{t_0}^{t} e^{-d_\gamma(t-s)}dW_\gamma(s)\right)\right] \\ &= E\left[(b_0 - E[b_0])(\gamma_0 - E[\gamma_0])\right]e^{(\lambda_b - d_\gamma)(t-t_0)} \\ &= cov(b_0, \gamma_0)e^{(\lambda_b - d_\gamma)(t-t_0)} \end{aligned} \tag{3.9}$$

上述的第三个等式也用到了 Itô 等距 (2.5).

第 4 节 $u(t)$ 的统计量

4.1 均值

在 $u(t)$ 的表达式 (1.5) 中, $e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}$, $f(t)$ 和 σ 均为常值. 那么由数学期望的线性性质 ([2] 第四章定理 2.2) 和 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$\begin{aligned} E[u(t)] = e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}E\left[e^{-J_0(t_0,t)}u_0\right] &+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}E\left[b(s)e^{-J(s,t)}\right]ds \\ &+ \sigma\int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}f(s)E\left[e^{-J(s,t)}\right]ds. \end{aligned} \tag{4.1}$$

下面我们用高斯随机过程 $J(s,t)$ 的特征函数 [5][6] 来计算上式的右边.
首先我们有以下的命题:

命题 4.1

$$E\left[ze^{ibx}\right] = (E[z] + ibcov(z,x))e^{ibE[x] - \frac{1}{2}b^2 Var(x)}$$

其中 z 为复值高斯随机变量, x 为实值高斯随机变量.

证明. 不妨记

$$z = y + iw, \quad y, w \in \mathbb{R}.$$

那么我们只要计算出 $E[ye^{ibx}]$ 和 $E[we^{ibx}]$, 然后利用 (4.1) 将其组合起来. 令 $\mathbf{v}=(x,y,w)$, 那么由于 $\mathbf{v}$ 为一个满足多元 Gauss 分布的随机向量, 其特征函数由 (2.12) 即可给出:

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})=exp(i\mathbf{s}^\top E[\mathbf{v}]-\frac{1}{2}\mathbf{s}^\top\Sigma\mathbf{s}), \tag{4.2}$$

其中 Σ 为协方差矩阵. 记 $g(\mathbf{v})$ 为 $\mathbf{v}$ 的概率密度函数, 那么由特征函数的定义 (2.1), 即特征函数为概率密度的 Fourier 变换即可知道,

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{s}^\top\mathbf{v}}g(\mathbf{v})d\mathbf{v} \tag{4.3}$$

利用 Fourier 变换的性质 (2.14), 我们不妨对 s_2 求偏导 [5], 有

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int iy_0e^{i\mathbf{s}^\top\mathbf{v}}g(\mathbf{v})d\mathbf{v}=iE\left[y_0e^{i\mathbf{s}^\top\mathbf{v}}\right]. \tag{4.4}$$

令 $\mathbf{v}=(b,0,0)^\top$, 根据 (4.4) 即能得到

$$E[y_0e^{ibx_0}]=-i\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_2}\bigg|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top} \tag{4.5}$$

同样的, 我们有

$$E[w_0e^{ibx_0}]=-i\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_3}\bigg|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top} \tag{4.6}$$

由多元高斯分布的概率密度函数 (2.9) 有

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2}=(iE[y_0]-Var(y_0)s_2-cov(x_0,y_0)s_1-cov(y_0,w_0)s_3)\phi_{\mathbf{v}}(s) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_3}=(iE[w_0]-Var(w_0)s_3-cov(x_0,w_0)s_1-cov(y_0,w_0)s_2)\phi_{\mathbf{v}}(s) \tag{4.8}$$

分别计算这两个偏导数 (4.7) 及 (4.8) 在 $\mathbf{s}=(b,0,0)^\top$ 处的值, 有

$$E\left[y_0e^{ibx_0}\right]=(E[y_0]+icov(x_0,y_0)b)exp(ibE[x_0]-\frac{1}{2}Var(x_0)b^2) \tag{4.9}$$

$$E\left[w_0e^{ibx_0}\right]=(E[w_0]+icov(x_0,w_0)b)exp(ibE[x_0]-\frac{1}{2}Var(x_0)b^2) \tag{4.10}$$

结合 (4.9), (4.10) 即有

$$E\left[ze^{ibx}\right]=(E[z]+ibcov(z,x))e^{ibE[x]-\frac{1}{2}b^2Var(x)}.$$

□

由此我们立刻可以得到

推论 4.2　在命题4.1的条件下,

$$E\left[ze^{bx}\right] = (E[z] + bcov(z,x))e^{bE[x]+\frac{1}{2}b^2Var(x)}.$$

利用推论4.2即有

$$\begin{aligned}E[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}(E[u_0] - cov(u_0, J(t_0,t)))e^{-E[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}Var(J(t_0,t))} \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}(\hat{b} + e^{\lambda_b(s-t_0)}(E[b_0] - \hat{b} - cov(b_0, J(s,t))))e^{-E[J(s,t)]+\frac{1}{2}Var(J(s,t))}ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}f(s)e^{-E[J(s,t)]+\frac{1}{2}Var(J(s,t))}ds\end{aligned} \tag{4.11}$$

由于

$$\begin{aligned}J(s,t) &= \int_s^t \left[(\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)\right]ds' \\ &= \int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds' + \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\end{aligned} \tag{4.12}$$

由协方差的线性性质,

$$\begin{aligned}cov(u_0, J(s,t)) &= cov\left(u_0, \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(\gamma_0 - \hat{\gamma})\right) \\ &+ cov\left(u_0, \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\right) \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})[cov(u_0,\gamma_0) - cov(u_0,\hat{\gamma})] \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})cov(u_0,\gamma_0).\end{aligned} \tag{4.13}$$

这是因为 u_0 与 $\hat{\gamma}$ 相互独立. 同理有

$$cov(b_0, J(s,t)) = \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})cov(b_0,\gamma_0). \tag{4.14}$$

为了计算 $E[J(s,t)]$, 我们对 (3.2) 求积分, 有

$$\begin{aligned}E[J(s,t)] &= E\left[\int_s^t (\gamma(s') - \hat{\gamma})ds'\right] = \int_s^t (E[\gamma(s')] - \hat{\gamma})ds' \\ &= \int_s^t (E[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds' \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(E[\gamma_0] - \hat{\gamma}))\end{aligned} \tag{4.15}$$

结合 (4.15) 和 (4.12) 可知,

$$E\left[\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right] = 0. \tag{4.16}$$

那么

$$\begin{aligned}
Var(J(s,t)) &= E\left[J^2(s,t)\right] - E[J(s,t)]^2 \\
&= E\left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds'\right)^2\right] - E[J(s,t)]^2 \\
&+ 2E\left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds'\right)\left(\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right)\right] \\
&+ \sigma_\gamma^2 E\left[\left(\int_s^t \int_{t_0}^{s} e^{-d_\gamma(s'-s)} dW_\gamma(s) ds'\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2 \left(E[\gamma_0^2] - E[\gamma_0]^2\right) \\
&+ \sigma_\gamma^2 E\left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma}\left(1 - e^{-d_\gamma}(t-x)\right) dW_\gamma(x)\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

由 Itô 等距 (定理2.5) 和 Itô 公式 (定理2.7) 知上式的第二项为

$$\begin{aligned}
&\sigma_\gamma^2 E\left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma}\left(1 - e^{-d_\gamma}(t-x)\right) dW_\gamma(x)\right)^2\right] \\
&= \sigma_\gamma^2 E\left[\left(\int_{t_0}^s \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x) + \int_s^t \int_x^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x)\right)^2\right] \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2} E\left[\left(\int_{t_0}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dW_\gamma(x) + \int_s^t \left(1 - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dW_\gamma(x)\right)^2\right] \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2}\left\{\int_{t_0}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}\right)^2 dx + \int_s^t \left(1 - e^{-d_\gamma(t-x)}\right)^2 dx\right. \\
&+ \left. 2E\left[\left(\int_{t_0}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dW_\gamma(x)\right)\left(\int_s^t \left(1 - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dW_\gamma(x)\right)\right]\right\} \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\left(-1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\right. \\
&+ \left.\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-s)}\right) + 2E\left[\int_{\min\{s,t_0\}}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}\right)\left(1 - e^{-d_\gamma(t-x)}\right) dt\right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

这里我们将两个积分区域均扩展至 $[\min\{s, t_0\}, t]$ 上, 并设积分区域较小的被积函数在

延拓的区间上为 0. 那么

$$
\begin{aligned}
Var(J(s,t)) &= \frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2 Var(\gamma_0) \\
&\quad + \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\left(-1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\right)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

将 (4.19), (4.13), (4.14) 代入 (4.11) 式即得 $u(t)$ 的均值.

4.2 方差

参考文献

[1] 金福临等. *常微分方程*. 上海科学技术出版社, 1984.

[2] 何书元. *概率论*. 北京大学出版社, 2006.

[3] 应坚刚. *概率论*. 2013.

[4] Boris Gershgorin, John Harlim, and Andrew J Majda. Test models for improving filtering with model errors through stochastic parameter estimation. *Journal of Computational Physics*, 229(1):1–31, 2010.

[5] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. A nonlinear test model for filtering slow-fast systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 6(3):611–649, 2008.

[6] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. Filtering a nonlinear slow-fast system with strong fast forcing. *Communications in Mathematical Sciences*, 8(1):67–92, 2010.

[7] Takeyuki Hida. Brownian motion. In *Brownian Motion*, pages 44–113. Springer, 1980.

[8] Edward Nelson, Edward Nelson, Edward Nelson, and Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 3. Princeton university press Princeton, 1967.

[9] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 21–39. Springer, 2003.