第 1	节 导言	🗎	1
	1.1	问题简介	1
第 2	节 一些	些前置引理	2
	2.1	布朗运动的性质	2
	2.2	Itô 积分及其性质	3
	2.3	高斯分布与特征函数	4
第 3	节 $b(t)$	与 $\gamma(t)$ 的统计量 \dots	5
	3.1	均值	5
	3.2	方差	6
	3.3	协方差	7
第 4	节 $u(t)$) 的统计量	8
	4.1	均值	8
	4.2	方差	11
	4.3	协方差	15

TEST

卢川, 13300180056, 信息与计算科学 2017 年 4 月 13 日

摘要: test test test 关键字: test, test.

第1节 导言

1.1 问题简介

考虑以下的一个随机微分方程组, 其作用为改进对模型误差的滤波 [5]:

$$\frac{du(t)}{dt} = (-\gamma(t) + i\omega)u(t) + b(t) + f(t) + \sigma W(t),$$

$$\frac{db(t)}{dt} = (-\gamma_b + i\omega_b)(b(t) - \hat{b}) + \sigma_b W_b(t),$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -d_{\gamma}(\gamma(t) - \hat{\gamma}) + \sigma_{\gamma} W_{\gamma}(t)$$
(1.1)

其中 ω 为 u(t) 的振荡频率, f(t) 为外部驱动力, σ 表示白噪声 W(t) 的强度. 此外, 参数 γ_b 和 d_γ 表示振荡阻尼, σ_b 和 σ_γ 分别表示加性和乘性修正 ((1.1) 中第 2, 3 式) 中白噪声的强度. \hat{b} 和 $\hat{\gamma}$ 分别表示 b(t) 和 $\gamma(t)$ 的固定平均偏差修正, ω_b 表示加性噪声的频率. 白噪声 $W_\gamma(t)$ 是实值函数, 而 W(t) 及 $W_b(t)$ 均为复值, 且其实部和虚部均为独立的白噪声.

我们一般认为方程组 (1.1) 有初值

$$u(t_0) = u_0,$$

 $b(t_0) = b_0,$ (1.2)
 $\gamma(t_0) = \gamma_0,$

且 u_0 , b_0 , γ_0 均为独立的高斯随机变量, 其统计量均假设为已知 (注意到 b(t) 和 u(t) 均为复数): $E[u_0]$, $E[y_0]$, $E[b_0]$, $Var(u_0)$, $Var(\gamma_0)$, $Var(b_0)$, $Cov(u_0, u_0^*)$, $Cov(u_0, \gamma_0)$, $Cov(u_0, b_0)$, $Cov(u_0, b_0^*)$.

由求解线性微分方程组的相关知识 [1] 可以知道, (1.1) 的第二和第三项均为线性方程, 故有通解

$$b(t) = \hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t - t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t - s)} dW_b(s), \tag{1.3}$$

$$\gamma(t) = \hat{\gamma} + (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_{\gamma}(t-t_0)} + \sigma_{\gamma} \int_{t_0}^t e^{-d_{\gamma}(t-s)} dW_{\gamma}(s). \tag{1.4}$$

其中 $\lambda_b = -\gamma_b + i\omega_b$, \hat{b} 与 $\hat{\gamma}$ 分别是 b(t) 和 $\gamma(t)$ 的固定偏差校正. 如果我们记

$$\hat{\lambda} = -\hat{\gamma} + i\omega,\tag{1.5}$$

$$J(s,t) = \int_{s}^{t} (\gamma(s') - \hat{\gamma})ds'$$
(1.6)

则 (1.1) 的通解可以表示为

$$u(t) = e^{-J(t_0,t) + \hat{\lambda}(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} ds + \sigma \int_{t_0}^t e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} dW(s).$$
(1.7)

以下将对方程 (1.1) 的各个变量 u, b, γ , 分别计算其统计量.

第 2 节 一些前置引理

2.1 布朗运动的性质

在应用中, 往往将布朗运动置于一个随机微分方程 (组) 中, 来近似的模拟白噪声的性质 [8]. 为此, 我们需要引入布朗运动的一些基本性质.[11][10]

定理 2.1 布朗运动 B_t 是一个 Gauss 过程. 对于所有的 $0 \le t_1 \le \cdots \le t_k$, 随机变量 $Z = (B_{t_1}, B_{t_2} \cdots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$ 服从多重正态分布. 如果设 B_t 的初值为 x, 则其期望为

$$M = E[Z] = (x, x, \cdots, x) \in \mathbb{R}^{nk},$$

协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \cdots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_k I_n \end{pmatrix}.$$

此定理的证明利用了特征函数的性质, 具体过程可见 [11] 的附录 A. 以下的定理是 (2.1) 的直接而显然的推论:

定理 2.2 假设布朗运动 B_t 满足定理 (2.1) 中的条件, 那么对于 $\forall t \geq 0$, $E[B_t] = x$, $E[(B_t - x)^2] = nt$, $E[(B_t - x)(B_s - x)] = n \cdot min(s,t)$. 而且如果 $t \geq s$, 有 $E[(B_t - B_s)^2] = n(t - s)$.

3

此外, 以下的定理也是布朗运动的一个重要性质, 其证明见 [11] 的 (2.2.12) 式.

定理 2.3 B_t 的增量独立,即对满足 $\forall 0 \leqslant t_1 < t_2 \cdots < t_k$ 的 $(t_1, t_2, \cdots t_k)$,

$$B_{t_1}, B_{t_2} - Bt_1, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

相互独立.

2.2 Itô 积分及其性质

在求解类似 (1.1) 的随机微分方程时, 需要针对布朗运动做积分, 为此我们引入以下的 Itô 积分 [11][9]:

定义 2.4 (Itô 积分) 设 $f \in \mathcal{V}(S,T)$. 则 f 的 Itô 积分定义为

$$\int_{S}^{T} f(t,\omega)dB_{t}(\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_{S}^{T} \phi_{n}(t,\omega)dB_{t}(\omega),$$

其中 ϕ_n 为基本函数序列, 且满足当 $n \to \infty$ 时

$$E\left[\int_{S}^{T} (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0.$$

由上述定义即可得到 Itô 积分的一个重要性质:

定理 2.5 (Itô 等距) 对于 $\forall f \in \mathcal{V}(S,T)$ 有

$$E\left[\left(\int_{S}^{T} f(t,\omega)dB_{t}\right)^{2}\right] = E\left[\int_{S}^{T} f^{2}(t,\omega)dt\right].$$

这里 $\mathcal{V}(S,T)$ 见 [11] 中的定义 3.1.2 至 3.1.4.

利用上述方法, 即利用基本函数序列来逼近 $\mathcal{V}(S,T)$ 中的函数, 我们能够得到 Itô 积分的线性性质:

定理 2.6 设 $f, g \in \mathcal{V}(0, T), 0 \leq S < U < T$. 那么

(1)
$$\int_{S}^{T} f dB_{t} = \int_{S}^{U} f dB_{t} + \int_{U}^{T} f dB_{t}, \quad a.e.$$
(2)
$$\int_{S}^{T} (cf + g) dB_{t} = c \cdot \int_{S}^{T} f dB_{t} + \int_{S}^{T} g dB_{t}, \quad a.e.$$
(3)
$$E \left[\int_{S}^{T} f dB_{t} \right] = 0.$$

为了便于计算, 我们还需要引入以下的一维 Itô 公式 [4].

定理 2.7 (Itô 公式) 设 X_t 为一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

 $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$, 则 $Y_t = g(t,X_t)$ 也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

其中

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

以下是上述 Itô 公式的积分形式.

定理 2.8 (分部积分) 设 $f(s,\omega)$ 对几乎所有的 ω 关于 $s\in[0,t]$ 是连续的, 且为有界变差函数, 则有

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

上述几个定理的证明请见 [11], 21-24 页及 36-39 页.

2.3 高斯分布与特征函数

在我们的假设中各个噪声信号都服从高斯分布, 为此我们需要知道多元高斯分布的概率密度 [2].

命题 2.9 如果随机向量 x 服从多元正态分布

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

那么x的概率密度为

$$f_x(x_1, \dots, x_k) = \frac{exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^\top\right) \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}}$$

除此之外, 我们还需要引入随机变量的特征函数这个工具, 用于计算较为复杂的随机变量的统计量.

定义 2.10 (特征函数) 如果 X 是实值随机变量, E[sin(tX)], E[cos(tX)] 均存在,那么称

$$\phi(t) = E\left[e^{itX}\right] = E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)], \quad t \in \mathbb{R}$$

为X的特征函数,其中i为虚数单位.

对于随机向量, 其特征函数定义为

定义 2.11 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为随机向量,则 \mathbf{X} 的特征函数为

$$\phi(t) = E\left[exp(i\mathbf{t}\mathbf{X}^{\top})\right], \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

以下为高斯分布的特征函数.

命题 2.12 Gauss 分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的特征函数为

$$\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

此命题的证明见[2] 第五章例 2.4. 一个更一般的定义如下[3]:

定义 2.13 设 ξ 为 d-维随机变量, F 为 ξ 的分布函数. 那么

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot y} dF(y), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

 $(其中 x \cdot y)$ 为 \mathbb{R}^d 空间中的内积) 称为分布函数 F 的特征函数.

由此定义即可看出,特征函数即为概率密度函数的 Fourier 变换:

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot y} f(y) dy. \tag{2.1}$$

以下是 Fourier 变换的一个基本性质, 在求 u(t) 的统计量时将会用到:

命题 2.14 (Fourier 变换的微分关系) 如果

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0,$$

且 f'(x) 的 Fourier 变换存在, 那么

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \mathcal{F}[f(x)].$$

更一般的, 若 $f(\infty)=f'(\infty)=\cdots=f^{(k-1)}(\infty)=0$, 且 $\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]$ 存在, 则

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)] = (i\omega)^k \mathcal{F}[f].$$

第 3 节 b(t) 与 $\gamma(t)$ 的统计量

3.1 均值

当 t 固定时, 由 (1.3) 式可知, b(t) 的通解第一项为常数, 而第二项中只有 b_0 是一个随机变量. 那么由 (1.2) 可知, b(t) 通解第二项的期望为 $(E[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$. 而由于

$$f = f(s) = e^{\lambda_b(t-s)} \in \mathcal{V}(S,T),$$

故由 (2.6) 的 (3) 式可知,

$$E\left[\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)dW_b(s)}\right] = 0.$$

从而

$$E(b(t)) = \hat{b} + (E[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t - t_0)}.$$
(3.1)

对于 γ 亦有相同的结论

$$E(\gamma(t)) = \hat{\gamma} + (E[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_{\gamma}(t - t_0)}. \tag{3.2}$$

3.2 方差

当 t 固定时,由 [2] 的第四章相关知识, 考虑到 $(b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$ 与 $\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)$ 相互独立 (由 (1.2) 可知),

$$Var(b(t)) = Var\left((b_{0} - \hat{b})e^{\lambda_{b}(t-t_{0})}\right) + Var\left(\sigma_{b} \int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)}dW_{b}(s)\right)$$

$$= (e^{\lambda_{b}(t-t_{0})})^{2}Var(b_{0}) + Var\left(\sigma_{b} \int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)}dW_{b}(s)\right)$$

$$= Re\left\{e^{2(-\gamma_{b}+i\omega_{b})(t-t_{0})}Var(b_{0})\right\} + E\left[\left(\sigma_{b} \int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)}dW_{b}(s)\right)^{2}\right]$$

$$= e^{-2\gamma_{b}(t-t_{0})}Var(b_{0}) + Re\left\{\sigma_{b}^{2}E\left[\int_{t_{0}}^{t} e^{2\lambda_{b}(t-s)}dt\right]\right\}$$
(3.3)

上面的最后一式右边利用了 Itô 等距 (2.5). 计算右边即可得到

$$Var(b(t)) = e^{-2\gamma_b(t-t_0)} Var(b_0) + \frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b} (1 - e^{-2\gamma_b(t-t_0)}).$$
 (3.4)

同样的,我们也有

$$Var(\gamma(t)) = e^{-2d_{\gamma}(t-t_0)} Var(\gamma_0) + \frac{\sigma_{\gamma}^2}{2d_{\gamma}} (1 - e^{-2d_{\gamma}(t-t_0)}).$$
 (3.5)

3.3 协方差

考虑到 b(t) 为复值函数, 由协方差的定义 [2] 即可知

$$Cov(b(t), b(t)^{*}) = E \left[(b(t) - E[b(t)])(b(t)^{*} - E[b(t)^{*}]) \right]$$

$$= E \left[(b_{0} - E[b_{0}]e^{\lambda_{b}(t-t_{0})} + \sigma_{b} \int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)} dW_{b}(s)) \cdot \left((b_{0}^{*} - E[b_{0}^{*}])e^{\lambda_{b}(t-t_{0})} + \sigma_{b} \int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)} dW_{b}(s) \right) \right] \cdot \cdot \cdot (3.1)$$

$$= E \left[(b_{0} - E[b_{0}])(b_{0}^{*} - E[b_{0}^{*}])e^{2\lambda_{b}(t-t_{0})} \right] + \sigma_{b} E \left[(b_{0} - E[b_{0}]) \int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)} dW_{b}(s) \right]$$

$$+ \sigma_{b} E \left[(b_{0}^{*} - E[b_{0}^{*}])e^{\lambda_{b}(t-t_{0})} \int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)} dW_{b}(s) \right] + \sigma_{b}^{2} E \left[\left(\int_{t_{0}}^{t} e^{\lambda_{b}(t-s)} dW_{b}(s) \right)^{2} \right]$$

$$(3.6)$$

在上式的第二项中, 由于 b_0 与 $\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)$ 相互独立, 故由 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$\sigma_b E\left[(b_0 - E[b_0]) \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = \sigma_b E\left[b_0 - E[b_0] \right] E\left[\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = 0$$
(3.7)

同样的, (3.6) 中第三项也为 0, 而第四项由 Itô 等距 (2.5) 即知为 0. 故

$$Cov(b(t), b(t)^*) = E[(b_0 - E[b_0])(b_0^* - E[b_0^*])]e^{2\lambda_b(t-t_0)} = Cov(b_0, b_0^*)e^{2\lambda_b(t-t_0)}$$
(3.8)

与之类似的,

$$Cov(b(t), \gamma(t)) = E[(b(t) - E[b(t)])(\gamma(t) - E[\gamma(t)])]$$

$$= E\left[\left(b_0 - E[b_0]e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right) \cdot \left((\gamma_0 - E[\gamma_0])e^{-d\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^t e^{-d\gamma(t-s)}dW_\gamma(s)\right)\right]$$

$$= E\left[(b_0 - E[b_0])(\gamma_0 - E[\gamma_0])\right]e^{(\lambda_b - d\gamma)(t-t_0)}$$

$$= Cov(b_0, \gamma_0)e^{(\lambda_b - d\gamma)(t-t_0)}$$
(3.9)

上述的第三个等式也用到了 Itô 等距 (2.5).

第 4 节 u(t) 的统计量

4.1 均值

在 u(t) 的表达式 (1.7) 中, $e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}$, f(t) 和 σ 均为常值. 那么由数学期望的线性性质 ([2] 第四章定理 2.2) 和 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$E[u(t)] = e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} E\left[e^{-J_0(t_0,t)}u_0\right] + \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} E\left[b(s)e^{-J(s,t)}\right] ds + \sigma \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} f(s) E\left[e^{-J(s,t)}\right] ds.$$
(4.1)

下面我们用高斯随机过程 J(s,t) 的特征函数 [6][7] 来计算上式的右边. 首先我们有以下的命题:

命题 4.1

$$E\left[ze^{ibx}\right] = (E[z] + ibCov(z,x))e^{ibE[x] - \frac{1}{2}b^2Var(x)}$$

其中 z 为复值高斯随机变量, x 为实值高斯随机变量.

证明. 不妨记

$$z = y + iw, \quad y, w \in \mathbb{R}.$$

那么我们只要计算出 $E[ye^{ibx}]$ 和 $E[we^{ibx}]$,然后利用 (4.1) 将其组合起来. 令 $\mathbf{v} = (x, y, w)$,那么由于 \mathbf{v} 为一个满足多元 Gauss 分布的随机向量, 其特征函数由 (2.12) 即可给出:

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = exp(i\mathbf{s}^{\top} E[\mathbf{v}] - \frac{1}{2}\mathbf{s}^{\top} \Sigma \mathbf{s}), \tag{4.2}$$

其中 Σ 为协方差矩阵. 记 $g(\mathbf{v})$ 为 \mathbf{v} 的概率密度函数, 那么由特征函数的定义 (2.1), 即特征函数为概率密度的 Fourier 变换即可知道,

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}^{\top}\mathbf{v}} g(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$$
(4.3)

利用 Fourier 变换的性质 (2.14), 我们不妨对 s_2 求偏导 [6], 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int iy_0 e^{i\mathbf{s}^{\top}\mathbf{v}} g(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = iE \left[y_0 e^{i\mathbf{s}^{\top}\mathbf{v}} \right]. \tag{4.4}$$

令 $\mathbf{v} = (b, 0, 0)^{\mathsf{T}}$, 根据 (4.4) 即能得到

$$E[y_0 e^{ibx_0}] = -i \frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_2} \bigg|_{\mathbf{s} = (b, 0, 0)^{\top}}$$

$$(4.5)$$

同样的, 我们有

$$E[w_0 e^{ibx_0}] = -i \frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_3} \bigg|_{\mathbf{s} = (b, 0, 0)^{\top}}$$
(4.6)

由多元高斯分布的概率密度函数 (2.9) 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = (iE[y_0] - Var(y_0)s_2 - Cov(x_0, y_0)s_1 - Cov(y_0, w_0)s_3)\phi_{\mathbf{v}}(s)$$
(4.7)

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_3} = (iE[w_0] - Var(w_0)s_3 - Cov(x_0, w_0)s_1 - Cov(y_0, w_0)s_2)\phi_{\mathbf{v}}(s)$$

$$(4.8)$$

分别计算这两个偏导数 (4.7) 及 (4.8) 在 $\mathbf{s} = (b,0,0)^{\mathsf{T}}$ 处的值, 有

$$E[y_0e^{ibx_0}] = (E[y_0] + iCov(x_0, y_0)b)exp(ibE[x_0] - \frac{1}{2}Var(x_0)b^2)$$
(4.9)

$$E\left[w_0 e^{ibx_0}\right] = (E[w_0] + iCov(x_0, w_0)b)exp(ibE[x_0] - \frac{1}{2}Var(x_0)b^2)$$
(4.10)

结合 (4.9), (4.10) 即有

$$E\left[ze^{ibx}\right] = (E[z] + ibCov(z, x))e^{ibE[x] - \frac{1}{2}b^2Var(x)}.$$

由此我们立刻可以得到

推论 4.2 在命题4.1的条件下.

$$E\left[ze^{bx}\right] = (E[z] + bCov(z,x))e^{bE[x] + \frac{1}{2}b^2Var(x)}.$$

利用推论4.2即有

$$E[u(t)] = e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} (E[u_0] - Cov(u_0, J(t_0, t))) e^{-E[J(t_0, t)] + \frac{1}{2}Var(J(t_0, t))}$$

$$+ \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} (\hat{b} + e^{\lambda_b(s-t_0)} (E[b_0] - \hat{b} - Cov(b_0, J(s, t)))) e^{-E[J(s, t)] + \frac{1}{2}Var(J(s, t))} ds$$

$$+ \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} f(s) e^{-E[J(s, t)] + \frac{1}{2}Var(J(s, t))} ds$$

$$(4.11)$$

下面我们计算

$$Cov(u_0, J(s, t)), Cov(b_0, J(s, t)), E[J(s, t)], Var(J(s, t)).$$

先引入两个显然的结论, 其中 a,b,c,d 均为随机变量:

命题
$$4.3 \quad Var(a+b) = Var(a) + Var(b) + 2Cov(a,b).$$

命题
$$4.4$$
 $Cov(a+b,c+d) = Cov(a,c) + Cov(a,d) + Cov(b,c) + Cov(b,d)$.

由于

$$J(s,t) = \int_{s}^{t} \left[(\gamma_{0} - \hat{\gamma})e^{-d_{\gamma}(s'-t_{0})} + \sigma_{\gamma} \int_{t_{0}}^{s'} e^{-d_{\gamma}(s'-x)} dW_{\gamma}(x) \right] ds'$$

$$= \int_{s}^{t} (\gamma_{0} - \hat{\gamma})e^{-d_{\gamma}(s'-t_{0})} ds' + \int_{s}^{t} \sigma_{\gamma} \int_{t_{0}}^{s'} e^{-d_{\gamma}(s'-x)} dW_{\gamma}(x) ds'$$
(4.12)

由命题 (4.4),

$$Cov(u_{0}, J(s, t)) = Cov\left(u_{0}, \frac{1}{d_{\gamma}}(e^{-d_{\gamma}(s-t_{0})} - e^{-d_{\gamma}(t-t_{0})})(\gamma_{0} - \hat{\gamma})\right)$$

$$+ Cov\left(u_{0}, \int_{s}^{t} \sigma_{\gamma} \int_{t_{0}}^{s'} e^{-d_{\gamma}(s'-x)} dW_{\gamma}(x) ds'\right)$$

$$= \frac{1}{d_{\gamma}}(e^{-d_{\gamma}(s-t_{0})} - e^{-d_{\gamma}(t-t_{0})})[Cov(u_{0}, \gamma_{0}) - Cov(u_{0}, \hat{\gamma})]$$

$$= \frac{1}{d_{\gamma}}(e^{-d_{\gamma}(s-t_{0})} - e^{-d_{\gamma}(t-t_{0})})Cov(u_{0}, \gamma_{0}).$$
(4.13)

这是因为 u_0 与 $\hat{\gamma}$ 相互独立. 同理有

$$Cov(b_0, J(s, t)) = \frac{1}{d_{\gamma}} \left(e^{-d_{\gamma}(s - t_0)} - e^{-d_{\gamma}(t - t_0)} \right) Cov(b_0, \gamma_0). \tag{4.14}$$

为了计算 E[J(s,t)], 我们对 (3.2) 求积分, 有

$$E[J(s,t)] = E\left[\int_{s}^{t} (\gamma(s') - \hat{\gamma})ds'\right] = \int_{s}^{t} (E[\gamma(s')] - \hat{\gamma})ds'$$

$$= \int_{s}^{t} (E[\gamma_{0}] - \hat{\gamma})e^{-d\gamma(s'-t_{0})}ds'$$

$$= \frac{1}{d_{\gamma}}(e^{-d_{\gamma}(s-t_{0})} - e^{-d\gamma(t-t_{0})})(E[\gamma_{0}] - \hat{\gamma}))$$
(4.15)

结合 (4.15) 和 (4.12) 可知,

$$E\left[\sigma_{\gamma} \int_{s}^{t} \int_{t_0}^{s'} e^{-d_{\gamma}(s'-x)} dW_{\gamma}(x) ds'\right] = 0. \tag{4.16}$$

那么

$$Var(J(s,t)) = E \left[J^{2}(s,t) \right] - E[J(s,t)]^{2}$$

$$= E \left[\left(\int_{s}^{t} (\gamma_{0} - \hat{\gamma}) e^{-d_{\gamma}(s'-t_{0})} ds' \right)^{2} \right] - E[J(s,t)]^{2}$$

$$+ 2E \left[\left(\int_{s}^{t} (\gamma_{0} - \hat{\gamma}) e^{-d_{\gamma}(s'-t_{0})} ds' \right) \left(\sigma_{\gamma} \int_{s}^{t} \int_{t_{0}}^{s'} e^{-d_{\gamma}(s'-x)} dW_{\gamma}(x) ds' \right) \right]$$

$$+ \sigma_{\gamma}^{2} E \left[\left(\int_{s}^{t} \int_{t_{0}}^{s} e^{-d_{\gamma}(s'-s)} dW_{\gamma}(s) ds' \right)^{2} \right]$$

$$= \frac{1}{d_{\gamma}^{2}} \left(e^{-d_{\gamma}(s-t_{0})} - e^{-d_{\gamma}(t-t_{0})} \right)^{2} \left(E[\gamma_{0}^{2}] - E[\gamma_{0}]^{2} \right)$$

$$+ \sigma_{\gamma}^{2} E \left[\left(\int_{t_{0}}^{t} \frac{1}{d_{\gamma}} \left(1 - e^{-d_{\gamma}} (t - x) \right) dW_{\gamma}(x) \right)^{2} \right]$$

$$(4.17)$$

由 Itô 等距 (定理2.5) 和 Itô 公式 (定理2.7) 知上式的第二项为

$$\begin{split} &\sigma_{\gamma}^{2} E\left[\left(\int_{t_{0}}^{t} \frac{1}{d_{\gamma}} \left(1 - e^{-d_{\gamma}} (t - x)\right) dW_{\gamma}(x)\right)^{2}\right] \\ &= \sigma_{\gamma}^{2} E\left[\left(\int_{t_{0}}^{s} \int_{t_{0}}^{t} e^{-d_{\gamma}(s' - x)} ds' dW_{\gamma}(x) + \int_{s}^{t} \int_{x}^{t} e^{-d_{\gamma}(s' - x)} ds' dW_{\gamma}(x)\right)^{2}\right] \\ &= \frac{\sigma_{\gamma}^{2}}{d_{\gamma}^{2}} E\left[\left(\int_{t_{0}}^{t} \left(e^{-d_{\gamma}(s - x)} - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right) dW_{\gamma}(x) + \int_{s}^{t} \left(1 - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right) dW_{\gamma}(x)\right)^{2}\right] \\ &= \frac{\sigma_{\gamma}^{2}}{d_{\gamma}^{2}} \left\{\int_{t_{0}}^{t} \left(e^{-d_{\gamma}(s - x)} - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right)^{2} dx + \int_{s}^{t} \left(1 - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right)^{2} dx \right. \\ &+ 2E\left[\left(\int_{t_{0}}^{t} \left(e^{-d_{\gamma}(s - x)} - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right) dW_{\gamma}(x)\right) \left(\int_{s}^{t} \left(1 - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right) dW_{\gamma}(x)\right)\right]\right\} \\ &= \frac{\sigma_{\gamma}^{2}}{d_{\gamma}^{2}} \left\{-1 + d_{\gamma}(t - s) + e^{-d_{\gamma}(s + t - 2t_{0})} + e^{-d_{\gamma}(t - s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_{\gamma}(t - t_{0})} - \frac{1}{2}e^{-2d_{\gamma}(s - t_{0})} + \frac{1}{2}e^{-2d_{\gamma}(s - t_{0})} - \frac{1}{2}e^{-2d_{\gamma}(t - s)}\right) + 2E\left[\int_{\min\{s,t_{0}\}}^{t} \left(e^{-d_{\gamma}(s - x)} - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right) \left(1 - e^{-d_{\gamma}(t - x)}\right) dt\right] \end{aligned} \tag{4.18}$$

这里我们将两个积分区域均扩展至 $[\min\{s,t_0\},t]$ 上, 并设积分区域较小的被积函数在延拓的区间上为 0. 那么

$$Var(J(s,t)) = \frac{1}{d_{\gamma}^{2}} \left(e^{-d_{\gamma}(s-t_{0})} - e^{-d_{\gamma}(t-t_{0})} \right)^{2} Var(\gamma_{0})$$

$$+ \frac{\sigma_{\gamma}^{2}}{d_{\gamma}^{3}} \left(-1 + d_{\gamma}(t-s) + e^{-d_{\gamma}(s+t-2t_{0})} + e^{-d_{\gamma}(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_{\gamma}(t-t_{0})} - \frac{1}{2}e^{-2d_{\gamma}(s-t_{0})} \right)$$

$$(4.19)$$

将 (4.19), (4.13), (4.14) 代入 (4.11) 式即得 u(t) 的均值.

4.2 方差

利用

$$Var(u(t)) = E[(|u(t)|^2)] - |E[u(t)]|^2.$$
 (4.20)

我们记

$$u(t) = A + B + C, (4.21)$$

其中

$$A = e^{-J(t_0,t) + \hat{\lambda}(t-t_0)} u_0, \tag{4.22}$$

$$B = \int_{t_0}^{t} (b(s) + f(s))e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)} ds, \tag{4.23}$$

$$C = \sigma \int_{t_0}^{t} e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)} dW(s).$$
 (4.24)

于是由 Itô 积分的性质有

$$E[|u(t)|^{2}] = E[|A|^{2}] + E[|B|^{2}] + E[|C|^{2}] + 2ReE[A^{*}B].$$
(4.25)

下面我们分别求出

$$E[|A|^2]$$
, $E[|B|^2]$, $E[|C|^2]$, $E[AB]$.

由命题4.1可知

命题 4.5 对于复值 Gaussian 随机变量 z 和 w, 以及实值 Gaussian 随机变量 x,

$$E\left[zwe^{bx}\right] = \left[E[z]E[w] + Cov(z, w^*) + b(E[z]Cov(w, x)) + E[w]Cov(z, x) + b^2Cov(z, x)Cov(w, x)\right]e^{bE[x] + \frac{b^2}{2}Var(x)}. \tag{4.26}$$

利用上述命题,有

$$E[|A|^{2}] = (|E[u_{0}]|^{2} + Var(u_{0}) - 4Re\{E[u_{0}]^{*}Cov(u_{0}, J(t_{0}, t))\} + 4|Cov(u_{0}, J(t_{0}, t)|^{2}) \cdot e^{-2\hat{\gamma}(t-t_{0})-2E[J(t_{0}, t)]+2Var(J(t_{0}, t))}.$$

$$(4.27)$$

而

$$E[|B|^{2}] = E\left[\left|\int_{t_{0}}^{t} (b(s) + f(s))e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)}ds\right|^{2}\right]$$

$$= \int_{t_{0}}^{t} ds \int_{t_{0}}^{t} dr E\left[(b(s) + f(s))e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)}\left[(b(r) + f(r))e^{-J(r,t) + \hat{\lambda}(t-r)}\right]^{*}\right]$$
(4.28)

由命题(4.3)和(4.4),并结合命题4.5可知,在上式中,被积的最后一项为

$$\begin{split} E\left[(b(s) + f(s))e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)} \left[(b(r) + f(r))e^{-J(r,t) + \hat{\lambda}(t-r)} \right]^* \right] \\ &= E\left[(b(s) + f(s))(b^*(r) + f^*(r))e^{-J(s,t) - J(r,t) + (-\hat{\gamma} + i\omega)(t-s) + (-\hat{\gamma} - i\omega)(t-r)} \right] \\ &= E\left[(b(s) + f(s))(b^*(r) + f^*(r))e^{-J(s,t) - J(r,t) + \hat{\gamma}(t-s) + i\omega(r-s)} \right] \\ &= e^{-J(s,t) - J(r,t) + \frac{1}{2}Var(J(s,t)) + \frac{1}{2}Var(J(r,t)) + Cov(J(s,t),J(r,t)) - \hat{\gamma}(2t-s-r) + i\omega(r-s)} \times \\ &\{ E\left[b(s)b^*(r) \right] + E\left[b(s)f^*(r) \right] + E\left[f(s)b^*(r) \right] + E\left[f(s)f^*(r) \right] \\ &+ Cov(b(s),b(r)) + Cov(b(s),f(r)) + Cov(f(s),b(r)) + Cov(f(s),f(r)) \\ &+ (E\left[b(s) \right] + E\left[f(s) \right] \right) \times \left[Cov(b^*(r), -J(s,t)) + Cov(b^*(r), -J(r,t)) \right] \\ &+ Cov(f^*(r), -J(s,t)) + Cov(f^*(r), -J(r,t)) \right] \\ &+ (E\left[b^*(r) \right] + E\left[f^*(r) \right] \right) \times \left[Cov(b(s), -J(r,t)) + Cov(f(s), -J(s,t)) + Cov(f(s), -J(r,t)) \right] \\ &+ \left[Cov(b(s), -J(r,t)) + Cov(b(s), -J(r,t)) + Cov(f(s), -J(s,t)) + Cov(f(s), -J(r,t)) \right] \\ &+ \left[Cov(b(s), -J(s,t)) + Cov(b(s), -J(r,t)) + Cov(f^*(r), -J(s,t)) + Cov(f^*(r), -J(r,t)) \right] \\ &= e^{-J(s,t) - J(r,t) + \frac{1}{2}Var(J(s,t)) + \frac{1}{2}Var(J(r,t)) + Cov(J(s,t),J(r,t)) - \hat{\gamma}(2t-s-r) + i\omega(r-s)} \times \\ &\{ E\left[b(s)b^*(r) \right] + E\left[b(s) \right] \times \left[Cov(b^*(r), -J(s,t)) + Cov(b^*(r), -J(r,t)) \right] \\ &+ E\left[b^*(r) \right] \times \left[Cov(b(s), -J(s,t)) + Cov(b(s), -J(r,t)) \right] \\ &+ F\left[b^*(r) \right] \times \left[Cov(b(s), -J(s,t)) + Cov(b(s), -J(r,t)) \right] \\ &+ F\left[b^*(r) \right] \times \left[Cov(b(s), -J(s,t)) + Cov(b(s), -J(r,t)) \right] \\ &+ f^*(r) \times \left[E\left[b(s) \right] - Cov(b(s), J(s,t) - Cov(b(s), J(r,t)) \right] \\ &+ f^*(r) \times \left[E\left[b(s) \right] - Cov(b(r), J^*(s,t) - Cov(b(r), J^*(r,t)) \right] \\ &+ f(s) F^*(r) \right\}. \end{aligned}$$

其中,由 Itô 公式和 Itô 积分的性质即知

$$E[b(s)b(r)] = E\left[\left(\hat{b} + (b_{0} - \hat{b})e^{\lambda_{b}(s-t_{0})} + \sigma_{b}\int_{t_{0}}^{s} e^{\lambda_{b}(s-w)}dW_{b}(w)\right) \times \left(\hat{b} + (b_{0} - \hat{b})e^{\lambda_{b}(r-t_{0})} + \sigma_{b}\int_{t_{0}}^{r} e^{\lambda_{b}(r-w)}dW_{b}(w)\right)\right]$$

$$= \left(1 - e^{\lambda_{b}(s-t_{0})} - e^{\lambda_{b}(r-t_{0})} + e^{\lambda_{b}(s+r-2t_{0})}\right)\hat{b}^{2} + \left(e^{\lambda_{b}(s-t_{0})} + e^{\lambda_{b}(r-t_{0})} - 2e^{\lambda_{b}(s+r-2t_{0})}\right)\hat{b}E[b_{0}]$$

$$+ e^{\lambda_{b}(s+r-2t_{0})}\left(Var(b_{0}) + E[b_{0}]^{2}\right) + \frac{\sigma_{b}^{2}}{2\gamma_{b}}\left(e^{-\gamma_{b}(s+r-2min(s,r))} - e^{-\gamma_{b}(s+r-2t_{0})}\right)e^{i\omega_{b}(s-r)}$$

$$(4.30)$$

结合 (4.15) 和 (4.14) 有

$$Cov(b(r), J(s,t)) = e^{\lambda_b(r-t_0)}Cov(b_0, J(s,t)) + \sigma_bCov\left(\int_{t_0}^r e^{\lambda_b(r-w)}dW_b(w), J(s,t)\right)$$

$$= \frac{1}{d_{\gamma}}(e^{-d_{\gamma}(s-t_0)} - e^{-d_{\gamma}(t-t_0)})e^{\lambda_b(r-t_0)}Cov(b_0, \gamma_0)$$
(4.31)

当 $t_0 \le r \le s \le t$ 时, 我们这么计算 J(s,t) 和 J(r,t) 的协方差:

$$Cov(J(s,t),J(r,t)) = Cov(J(s,t),J(r,s) + J(s,t)) = Var(J(s,t)) + Cov(J(s,t),J(r,s)). \tag{4.32}$$

其中 Var(J(s,t)) 由 (4.19) 已求出. 由类似 (4.17) 和 (4.18) 的过程, 有

$$Cov(J(s,t),J(r,s)) = Cov\left(\int_{s}^{t} (\gamma_{0} - \hat{\gamma})e^{-d\gamma(s'-t_{0})}ds' + \int_{s}^{t} \sigma_{\gamma} \int_{t_{0}}^{s'} e^{-d\gamma(s'-x)}dW_{\gamma}(x)ds'\right)$$

$$= \frac{Var(\gamma_{0})}{d_{\gamma}^{2}} \left(e^{-d\gamma(t-t_{0})} - e^{-d\gamma(s-t_{0})}\right) \left(e^{-d\gamma(s-t_{0})}e^{-d\gamma(r-t_{0})}\right)$$

$$= \frac{\sigma_{\gamma}^{2}}{2d_{\gamma}^{3}} \left(e^{-d\gamma(t-s)} - e^{-d\gamma(t-r)} + e^{-d\gamma(t+s-2t_{0})} - e^{-d\gamma(t+r-2t_{0})} - 1\right)$$

$$+e^{-d\gamma(s-r)} - e^{-2d\gamma(s-t_{0})} + e^{-d\gamma(s+r-2t_{0})}\right)$$

$$(4.33)$$

当 $t_0 \le s \le r \le t$ 时, 只要考虑到

$$Cov(J(s,t), J(r,t)) = Cov(J(r,t), J(s,t)),$$

于是只要在结果中将 s 与 r 交换即可. 接下来, 由 Itô 等距有

$$E[|C|^{2}] = \sigma^{2}E\left[\left(\int_{t_{0}}^{t} e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}dW(s)\right)^{2}\right]$$

$$= \sigma^{2}\int_{t_{0}}^{t} e^{-2\hat{\gamma}(t-s)}E\left[e^{-2J(s,t)}\right]ds = \sigma^{2}\int_{t_{0}}^{t} e^{-2\hat{\gamma}(t-s)-2E[J(s,t)]+2Var(J(s,t))}ds$$
(4.34)

最后我们有

$$E[A^*B] = E\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0\right)^* \int_{t_0}^t (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds\right]$$

$$= e^{-\hat{\gamma}(t-t_0)} \int_{t_0}^t \left(E\left[u_0^*b_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right]e^{(\lambda_b-i\omega)(s-t_0)} + \left(\hat{b}\left(1-e^{\lambda_b(s-t_0)}\right)+f(s)\right)E\left[u_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right]^*\right)ds$$
(4.35)

由命题 (4.5), 以及上述的计算过程 (4.29), 类似的能得到

$$E\left[u_{0}^{*}b_{0}e^{-J(t_{0},t)-J(s,t)}\right] = e^{-E[J(s,t)]-E[J(t_{0},t)]+\frac{1}{2}Var(J(s,t))+\frac{1}{2}Var(J(t_{0},t))+Cov(J(s,t),J(t_{0},t))} \times \\ [E[u_{0}^{*}]E[b_{0}] + Cov(u_{0}^{*},b_{0}^{*}) - E[u_{0}^{*}](Cov(b_{0},J(s,t)) \\ + Cov(b_{0},J(t_{0},t))) - E[b_{0}](Cov(J(s,t),u_{0}^{*}) + Cov(J(t_{0},t),u_{0}^{*})) \\ + (Cov(u_{0}^{*},J(s,t)) + Cov(u_{0}^{*},J(t_{0},t))) \times (Cov(b_{0},J(s,t)) + Cov(b_{0},J(t_{0},t)))]$$

$$(4.36)$$

以及

$$E\left[u_{0}e^{-J(t_{0},t)-J(s,t)}\right] = e^{-E[J(s,t)]-E[J(t_{0},t)]+\frac{1}{2}Var(J(s,t))+\frac{1}{2}Var(J(t_{0},t))+Cov(J(s,t),J(t_{0},t))} \times (E[u_{0}]-Cov(u_{0},J(s,t))-Cov(u_{0},J(t_{0},t)))$$

$$(4.37)$$

于是把上述的几个式子代回到 (4.25) 即得到了 Var(u(t)).

4.3 协方差

首先, 我们考虑 $Cov(u(t), u^*(t))$. 由定义知,

$$Cov(u(t), u^*(t)) = E[u(t)^2] - E[u(t)]^2.$$

利用上一节中的记号, 由布朗运动 W(t) 的独立性,

$$E[u(t)^{2}] = E[A^{2}] + E[B^{2}] + 2E[AB]. \tag{4.38}$$

下面分别计算 $E[A^2]$, $E[B^2]$ 和 E[AB]. 利用命题 (4.5),

$$E[A^{2}] = E[e^{-2J(t_{0},t)+2\hat{\lambda}(t-t_{0})}u_{0}^{2}] = e^{-2\hat{\gamma}(t-t_{0})-2E[J(t_{0},t)]+2Var(J(t_{0},t))} \times (E[u_{0}]^{2} + Cov(u_{0}, u_{0}^{*}) - 4E[u_{0}]Cov(u_{0}, J(t_{0},t)) + 4Cov(u_{0}, J(t_{0},t))^{2}).$$

$$(4.39)$$

和上一节类似的,

$$E[B^{2}] = \int_{t_{0}}^{t} ds \int_{t_{0}}^{t} dr E\left[((b(s) + f(s))(b(r) + f(r))e^{-J(s,t) - J(r,t) + \hat{\lambda}(2t - s - r)} \right],$$

且由命题 (4.5) 有

$$E\left[((b(s)+f(s))(b(r)+f(r))e^{-J(s,t)-J(r,t)+\hat{\lambda}(2t-s-r)}\right]$$

$$=e^{-\hat{\lambda}(2t-s-r)-E[J(s,t)]-E[J(r,t)]+\frac{1}{2}Var(J(s,t))+\frac{1}{2}Var(r,t)+Cov(J(s,t),J(r,t))}\times$$

$$[E[b(s)b(r)]-E[b(s)]\times(Cov(b(r),J(r,t))+Cov(b(r),J(s,t)))$$

$$-E[b(r)]\times(Cov(b(s),J(r,t))+Cov(b(s),J(s,t)))$$

$$+[Cov(b(r),J(s,t))+Cov(b(r),J(r,t))]\times[Cov(b(s),J(s,t))+Cov(b(s),J(r,t))]$$

$$+f(r)\times[E[b(s)]-Cov(b(s),J(s,t))-Cov(b(s),J(r,t))]$$

$$+f(s)\times[E[b(r)]-Cov(b(r),J(r,t))-Cov(b(r),J(s,t))]+f(s)f(r)]$$

$$(4.40)$$

其中

$$E[b(s)b(r)] = \left(1 - e^{\lambda_b(s-t_0)} - e^{\lambda_b(r-t_0)} + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\right)\hat{b}^2 + \left(e^{\lambda_b(s-t_0) + e^{\lambda_b(r-t_0)} - 2e^{\lambda_b(s-t_0)(r-t_0)}}\right)\hat{b}E[b_0] + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\left(Var(b_0) + |E[b_0]|^2\right)$$
(4.41)

同样的,

$$E[AB] = E[e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0 \int_{t_0}^t (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds]$$

$$= e^{\hat{\lambda}(2t-s-t_0)} \int_{t_0}^t \left[e^{\lambda_b(s-t_0)}E[u_0b_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] + (\hat{b}(1-e^{\lambda_b(s-t_0)}) + f(s))E[u_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}]\right]ds.$$
(4.42)

其中第二个期望在上一节中已经求出结果了,而

$$E[u_{0}b_{0}e^{-J(t_{0},t)-J(s,t)}] = e^{-E[J(t_{0},t)]-E[J(s,t)]+\frac{1}{2}(Var(J(t_{0},t))+Var(J(s,t)))+Cov(J(t_{0},t),J(s,t))} \times$$

$$(Cov(u_{0},b_{0}^{*})+E[u_{0}]E[b_{0}]-E[u_{0}](Cov(b_{0},J(t_{0},t))+Cov(b_{0},J(s,t)))$$

$$-E[b_{0}](Cov(u_{0},J(t_{0},t))+Cov(u_{0},J(s,t)))$$

$$+[Cov(b_{0},J(t_{0},t))+Cov(b_{0},J(s,t))] \times [Cov(u_{0},J(s,t))+Cov(u_{0},J(t_{0},t))])$$

$$(4.43)$$

代入即可.

下面考虑 $Cov(u(t), \gamma(t))$. 由定义,

$$Cov(u(t), \gamma(t)) = E[u(t)\gamma(t)] - E[u(t)]E[\gamma(t)] = E[u(t)(\gamma(t) - \hat{\gamma})] + E[u(t)](\hat{\gamma} - E[\gamma(t)]).$$
(4.44)

上式的第二项由 (3.2) 和 (4.11) 可以直接计算得到. 下面我们计算上式的第一项. 由 Itô 等距知,

$$E[u(t)(\gamma(t) - \hat{\gamma})] = E\left[\left(e^{-J(t_0, t) + \hat{\lambda}(t - t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} (b(s) + f(s))e^{-J(s, t) + \hat{\lambda}(s - t_0)}ds + \sigma \int_{t_0}^{t} e^{-J(s, t) + \hat{\lambda}(s - t_0)}dW(s)\right) \times (\gamma(t) - \hat{\gamma})\right]$$

$$= e^{\hat{\lambda}(t - t_0)}E\left[(\gamma(t) - \hat{\gamma})u_0e^{\hat{\lambda}(t - t_0)}\right] + \int_{t_0}^{t} e^{-\hat{\lambda}(s - t_0)}E\left[(b(s) + f(s))(\gamma(t) - \hat{\gamma})e^{-J(s, t)}\right]ds$$

$$(4.45)$$

由 $J(t_0,t)$ 的定义 (1.6) 可知,

$$\frac{\partial J(t_0, t)}{\partial t} = (\gamma(t) - \hat{\gamma}),$$

那么 (4.45) 可以表示为

$$-e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}\frac{\partial}{\partial t}E\left[u_0e^{-J(t_0,t)}\right] - \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(s-t_0)}\frac{\partial}{\partial t}E\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)}\right]ds,\tag{4.46}$$

17

其中由 (4.2) 和协方差的线性性质

$$\begin{split} \frac{\partial}{\partial t} E \left[u_0 e^{-J(t_0,t)} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[(E[u_0] + Cov(-J(t_0,t),u_0)) e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2}Var(J(t_0,t))} \right] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} Cov(-J(t_0,t),u_0) \right) e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2}Var(J(t_0,t))} \\ &+ (E[u_0] + Cov(u_0,-J(t_0,t))) \frac{\partial}{\partial t} e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2}Var(J(t_0,t))} \\ &= e^{-J(t_0,t) + \frac{1}{2}Var(J(t_0,t))} \times \left[Cov(-\gamma(t),u_0) + (E[u_0] + Cov(-J(t_0,t),u_0)) \times \right. \\ &\left. (\hat{\gamma} - E[\gamma(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} Var(J(t_0,t))) \right], \end{split}$$
(4.47)

以及

$$\begin{split} \frac{\partial}{\partial t} E\left[(b(s) + f(s))e^{-J(s,t)} \right] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[(E[b(s)] + f(s) + Cov(b(s) + f(s), -J(s,t)))e^{-E[J(s,t)] + \frac{1}{2}Var(J(s,t))} \right] \\ &= e^{-E[J(s,t)] + \frac{1}{2}Var(J(s,t))} \times \left[Cov(-\gamma(t),b(s)) + (E[b(s)] + f(s) + Cov(b(s),J(s,t))) \times \left(\hat{\gamma} - E[\gamma(t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}Var(J(s,t)) \right) \right], \end{split}$$

$$(4.48)$$

且在上两式中,

$$\frac{\partial}{\partial t} Var(J(s,t)) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{d_{\gamma}^{2}} \left(e^{-d_{\gamma}(s-t_{0})} - e^{-d_{\gamma}(t-t_{0})} \right)^{2} Var(\gamma_{0}) \right. \\
+ \frac{\sigma_{\gamma}^{2}}{d_{\gamma}^{3}} \left(-1 + d_{\gamma}(t-s) + e^{-d_{\gamma}(s+t-2t_{0})} + e^{-d_{\gamma}(t-s)} - \frac{1}{2} e^{-2d_{\gamma}(t-t_{0})} - \frac{1}{2} e^{-2d_{\gamma}(s-t_{0})} \right) \right] \\
= \frac{\sigma_{\gamma}^{2}}{d_{\gamma}^{2}} \left(1 - e^{-d_{\gamma}(t-s)} - e^{-d_{\gamma}(t+s-2t_{0})} + e^{-2d_{\gamma}(t-t_{0})} \right) + \frac{2}{d_{\gamma}} Var(\gamma_{0}) \times \left(e^{-d_{\gamma}(t+s-2t_{0})} - e^{-2d_{\gamma}(t-t_{0})} \right). \tag{4.49}$$

下面考虑 Cov(u(t), b(t)). 由定义,

$$Cov(u(t), b(t)) = E[u(t)b^*(t)] - E[u(t)]E[b(t)]^*.$$

上式的第二项由 (4.11) 和 (3.1) 即可计算得到. 结合 Itô 公式, 完全类似之前的计算过

程,第一项为

$$E[u(t)b^{*}(t)] = E\left[u(t)\left(\hat{b}^{*} + (b_{0}^{*} - \hat{b}^{*})e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})} + \sigma_{b}\int_{t_{0}}^{t}e^{\lambda_{b}(t-s)}dW_{b}(s)\right)\right]$$

$$= \left(1 - e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})}\right)\hat{b}^{*}E[u(t)] + E\left[u(t)b_{0}^{*}e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})}\right]$$

$$+ E[\sigma\sigma_{b}\int_{t_{0}}^{t}\int_{t_{0}}^{t}e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_{0})+\lambda_{b}^{*}(t-\xi)}dW(s)dW_{b}(\xi)]$$

$$= \left(1 - e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})}\right)\hat{b}^{*}E[u(t)] + E\left[\left(e^{-J(t_{0},t)+\hat{\lambda}(s-t_{0})} + \int_{t_{0}}^{t}(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_{0})}ds\right)b_{0}^{*}e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})}\right]$$

$$+ \frac{\sigma\sigma_{b}}{2\gamma_{b}}E\left[\int_{t_{0}}^{t}e^{-J(s,t)}e^{-\lambda(t-s)}\left(e^{\lambda_{b}^{*}(t-s)} - e^{-i\omega_{b}(t-s)-\gamma_{b}(s+t-2t_{0})}\right)\right]$$

$$= \left(1 - e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})}\right)\hat{b}^{*}E[u(t)] + e^{(\hat{\lambda}+\lambda_{b}^{*})(t-t_{0})}E\left[u_{0}b_{0}^{*}e^{-J(t_{0},t)}\right] + e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})} \times$$

$$\int_{t_{0}}^{t}e^{\hat{\lambda}(t-s)}\left(E\left[b_{0}^{*}b(s)e^{-J(s,t)}\right] + f(s)E\left[b_{0}e^{-J(s,t)}\right]^{*}ds\right)$$

$$+ \frac{\sigma\sigma_{b}}{2\gamma_{b}}E\left[\int_{t_{0}}^{t}e^{-E[J(s,t)]+\frac{1}{2}Var(J(s,t))}e^{-\lambda(t-s)}\left(e^{\lambda_{b}^{*}(t-s)} - e^{-i\omega_{b}(t-s)-\gamma_{b}(s+t-2t_{0})}\right)\right],$$

$$(4.50)$$

并利用命题 (4.5), 在上式中

$$E\left[b_{0}e^{-J(s,t)}\right] = e^{-E[J(s,t)] + \frac{1}{2}Var(J(s,t))} \times (E[b_{0}] + Cov(b_{0}, -J(s,t))), \tag{4.51}$$

$$E\left[u_{0}b_{0}^{*}e^{-J(t_{0},t)}\right] = e^{-E[J(t_{0},t)] + \frac{1}{2}Var(J(t_{0},t))} \times [E[u_{0}]E[b_{0}]^{*} + Cov(u_{0},b_{0}) + E[u_{0}]Cov(b_{0}, -J(t_{0},t))^{*} + E[b_{0}]^{*}Cov(u_{0}, -J(t_{0},t)) + Cov(u_{0}, -J(t_{0},t))Cov(b_{0}, -J(t_{0},t))^{*}], \tag{4.52}$$

$$E[b_{0}^{*}b(s)e^{-J(s,t)}] = e^{-J(s,t) + \frac{1}{2}Var(J(s,t))} \times [E[b_{0}]^{*}E[b(s)] + Cov(b_{0},b(s)) + E[b_{0}]^{*}Cov(b(s), -J(s,t)) + E[b(s)]Cov(b_{0}, -J(s,t))^{*} + Cov(b_{0}, -J(s,t))^{*}Cov(b(s), -J(s,t))].$$

(4.53)

最后我们考虑 $Cov(u(t), b^*(t))$. 由定义,

$$Cov(u(t),b^*(t)) = E[u(t)b(t)] - E[u(t)]E[b(t)].$$

和前一部分类似的, 只要考虑上式的第一项. 我们有

$$E[u(t)b(t)] = E\left[u(t)\left(\hat{b} + (b_{0} - \hat{b})e^{\lambda_{b}(t-t_{0})} + \sigma_{b}\int_{t_{0}}^{t}e^{\lambda_{b}(t-s)}dW_{b}(s)\right)\right]$$

$$= (1 - e^{\lambda_{b}(t-t_{0})})\hat{b}E[u(t)] + E\left[u(t)b_{0}e^{\lambda_{b}(t-t_{0})}\right]$$

$$+ E[\sigma\sigma_{b}\int_{t_{0}}^{t}\int_{t_{0}}^{t}e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_{0})+\lambda_{b}(t-\xi)}dW(s)dW_{b}(\xi)]$$

$$= (1 - e^{\lambda_{b}^{*}(t-t_{0})})\hat{b}E[u(t)] + E\left[\left(e^{-J(t_{0},t)+\hat{\lambda}(s-t_{0})} + \int_{t_{0}}^{t}(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_{0})}ds\right)b_{0}e^{\lambda_{b}(t-t_{0})}\right]$$

$$= (1 - e^{\lambda_{b}(t-t_{0})})\hat{b}E[u(t)] + e^{(\hat{\lambda}+\lambda_{b})(t-t_{0})}E\left[u_{0}b_{0}e^{-J(t_{0},t)}\right] + e^{\lambda_{b}(t-t_{0})} \times$$

$$\int_{t_{0}}^{t}e^{\hat{\lambda}(t-s)}\left(E\left[b_{0}b(s)e^{-J(s,t)}\right] + f(s)E\left[b_{0}e^{-J(s,t)}\right]ds\right)$$

$$(4.54)$$

在上式中, 由命题 (4.5) 知,

$$E\left[u_{0}b_{0}e^{-J(t_{0},t)}\right] = e^{-E[J(t_{0},t)] + \frac{1}{2}Var(J(t_{0},t))} \times \left[E[u_{0}]E[b_{0}] + Cov(u_{0},b_{0}^{*}) + E[b_{0}]Cov(u_{0},-J(t_{0},t)) + E[u_{0}]Cov(b_{0},-J(t_{0},t)) + Cov(u_{0},-J(t_{0},t))Cov(b_{0},-J(t_{0},t))\right],$$

$$(4.55)$$

$$E\left[b_{0}b(s)e^{-J(s,t)}\right] = e^{-J(s,t) + \frac{1}{2}Var(J(s,t))} \times \left[E[b_{0}]E[b(s)] + Cov(b_{0},b(s)^{*}) + E[b_{0}]Cov(b(s),-J(s,t)) + E[b(s)]Cov(b_{0},-J(s,t)) + Cov(b_{0},-J(s,t))Cov(b(s),-J(s,t))\right]$$

$$(4.56)$$

参考文献

- [1] 金福临等. 常微分方程. 上海科学技术出版社, 1984.
- [2] 何书元. 概率论. 北京大学出版社, 2006.
- [3] 应坚刚. 概率论. 2013.
- [4] 应坚刚. 随机过程. 2016.
- [5] Boris Gershgorin, John Harlim, and Andrew J Majda. Test models for improving filtering with model errors through stochastic parameter estimation. *Journal of Computational Physics*, 229(1):1–31, 2010.
- [6] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. A nonlinear test model for filtering slow-fast systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 6(3):611–649, 2008.
- [7] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. Filtering a nonlinear slow-fast system with strong fast forcing. *Communications in Mathematical Sciences*, 8(1):67–92, 2010.
- [8] Takeyuki Hida. Brownian motion. In *Brownian Motion*, pages 44–113. Springer, 1980.
- [9] Gregory F Lawler. Introduction to stochastic processes. CRC Press, 2006.
- [10] Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 3. Princeton university press Princeton, 1967.
- [11] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 21–39. Springer, 2003.