

目录

第 1 节 导言	0
1.1 问题简介	0
第 2 节 一些前置引理	1
2.1 布朗运动的性质	1
2.2 Itô 积分及其性质	2
2.3 高斯分布与特征函数	3
第 3 节 $b(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的统计量	4
3.1 均值	4
3.2 方差	5
3.3 协方差	5
第 4 节 $u(t)$ 的统计量	6
4.1 均值	6
4.2 方差	10

TEST

卢川, 13300180056, 信息与计算科学

2017 年 3 月 31 日

摘要: test test test

关键字: test, test.

第 1 节 导言

1.1 问题简介

考虑以下的一个随机微分方程组, 其作用为改进对模型误差的滤波 [4]:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= (-\gamma(t) + i\omega)u(t) + b(t) + f(t) + \sigma W(t), \\ \frac{db(t)}{dt} &= (-\gamma_b + i\omega_b)(b(t) - \hat{b}) + \sigma_b W_b(t), \\ \frac{d\gamma(t)}{dt} &= -d_\gamma(\gamma(t) - \hat{\gamma}) + \sigma_\gamma W_\gamma(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中 ω 为 $u(t)$ 的振荡频率, $f(t)$ 为外部驱动力, σ 表示白噪声 $W(t)$ 的强度. 此外, 参数 γ_b 和 d_γ 表示振荡阻尼, σ_b 和 σ_γ 分别表示加性和乘性修正 ((1.1) 中第 2, 3 式) 中白噪声的强度. \hat{b} 和 $\hat{\gamma}$ 分别表示 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定平均偏差修正, ω_b 表示加性噪声的频率. 白噪声 $W_\gamma(t)$ 是实值函数, 而 $W(t)$ 及 $W_b(t)$ 均为复值, 且其实部和虚部均为独立的白噪声.

我们一般认为方程组 (1.1) 有初值

$$\begin{aligned}u(t_0) &= u_0, \\ b(t_0) &= b_0, \\ \gamma(t_0) &= \gamma_0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

且 u_0, b_0, γ_0 均为独立的高斯随机变量, 其统计量均假设为已知 (注意到 $b(t)$ 和 $u(t)$ 均为复数): $E[u_0], E[\gamma_0], E[b_0], Var(u_0), Var(\gamma_0), Var(b_0), cov(u_0, u_0^*), cov(u_0, \gamma_0), cov(u_0, b_0), cov(u_0, b_0^*)$.

由求解线性微分方程组的相关知识 [1] 可以知道, (1.1) 的第二和第三项均为线性方程, 故有通解

$$b(t) = \hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s), \quad (1.3)$$

$$\gamma(t) = \hat{\gamma} + (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(t-s)} dW_\gamma(s). \quad (1.4)$$

其中 $\lambda_b = -\gamma_b + i\omega_b$, \hat{b} 与 $\hat{\gamma}$ 分别是 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定偏差校正. 如果我们记

$$\hat{\lambda} = -\hat{\gamma} + i\omega,$$

$$J(s, t) = \int_s^t (\gamma(s') - \hat{\gamma}) ds'$$

则 (1.1) 的通解可以表示为

$$\begin{aligned} u(t) = & e^{-J(t_0, t) + \hat{\lambda}(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t (b(s) + f(s)) e^{-J(s, t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} ds \\ & + \sigma \int_{t_0}^t e^{-J(s, t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} dW(s). \end{aligned} \quad (1.5)$$

以下将对方程 (1.1) 的各个变量 u, b, γ , 分别计算其统计量.

第 2 节 一些前置引理

2.1 布朗运动的性质

在应用中, 往往将布朗运动置于一个随机微分方程 (组) 中, 来近似的模拟白噪声的性质 [7]. 为此, 我们需要引入布朗运动的一些基本性质. [9][8]

定理 2.1 布朗运动 B_t 是一个 Gauss 过程. 对于所有的 $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, 随机变量 $Z = (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$ 服从多重正态分布. 如果设 B_t 的初值为 x , 则其期望为

$$M = E[Z] = (x, x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{nk},$$

协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \cdots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_k I_n \end{pmatrix}.$$

此定理的证明利用了特征函数的性质, 具体过程可见 [9] 的附录 A. 以下的定理是 (2.1) 的直接而显然的推论:

定理 2.2 假设布朗运动 B_t 满足定理 (2.1) 中的条件, 那么对于 $\forall t \geq 0$, $E[B_t] = x$, $E[(B_t - x)^2] = nt$, $E[(B_t - x)(B_s - x)] = n \cdot \min(s, t)$. 而且如果 $t \geq s$, 有 $E[(B_t - B_s)^2] = n(t - s)$.

此外, 以下的定理也是布朗运动的一个重要性质, 其证明见 [9] 的 (2.2.12) 式.

定理 2.3 B_t 的增量独立, 即对满足 $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ 的 (t_1, t_2, \dots, t_k) ,

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

相互独立.

2.2 Itô 积分及其性质

在求解类似 (1.1) 的随机微分方程时, 需要针对布朗运动做积分, 为此我们引入以下的 Itô 积分 [9]:

定义 2.4 (Itô 积分) 设 $f \in \mathcal{V}(S, T)$. 则 f 的 Itô 积分定义为

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

其中 ϕ_n 为基本函数序列, 且满足当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$E\left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0.$$

由上述定义即可得到 Itô 积分的一个重要性质:

定理 2.5 (Itô 等距) 对于 $\forall f \in \mathcal{V}(S, T)$ 有

$$E\left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt\right].$$

这里 $\mathcal{V}(S, T)$ 见 [9] 中的定义 3.1.2 至 3.1.4.

利用上述方法, 即利用基本函数序列来逼近 $\mathcal{V}(S, T)$ 中的函数, 我们能够得到 Itô 积分的线性性质:

定理 2.6 设 $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$, $0 \leq S < U < T$. 那么

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t, \quad a.e. \\ (2) \quad & \int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t, \quad a.e. \\ (3) \quad & E\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0. \end{aligned}$$

为了便于计算, 我们还需要引入以下的一维 Itô 公式.

定理 2.7 (Itô 公式) 设 X_t 为一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

$g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$, 则 $Y_t = g(t, X_t)$ 也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

其中

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

以下是上述 Itô 公式的积分形式.

定理 2.8 (分部积分) 设 $f(s, \omega)$ 对几乎所有的 ω 关于 $s \in [0, t]$ 是连续的, 且为有界变差函数, 则有

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

上述几个定理的证明请见 [9], 21-24 页及 36-39 页.

2.3 高斯分布与特征函数

在我们的假设中各个噪声信号都服从高斯分布, 为此我们需要知道多元高斯分布的概率密度 [2].

命题 2.9 如果随机向量 \mathbf{x} 服从多元正态分布

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

那么 \mathbf{x} 的概率密度为

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^{\top} \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}}$$

除此之外, 我们还需要引入随机变量的特征函数这个工具, 用于计算较为复杂的随机变量的统计量.

定义 2.10 (特征函数) 如果 X 是实值随机变量, $E[\sin(tX)], E[\cos(tX)]$ 均存在, 那么称

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)], \quad t \in \mathbb{R}$$

为 X 的特征函数, 其中 i 为虚数单位.

对于随机向量, 其特征函数定义为

定义 2.11 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为随机向量, 则 \mathbf{X} 的特征函数为

$$\phi(t) = E[\exp(it\mathbf{X}^\top)], \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

以下为高斯分布的特征函数.

命题 2.12 Gauss 分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的特征函数为

$$\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

此命题的证明见 [2] 第五章例 2.4. 一个更一般的定义如下 [3]:

定义 2.13 设 ξ 为 d -维随机变量, F 为 ξ 的分布函数. 那么

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot y} dF(y), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(其中 $x \cdot y$ 为 \mathbb{R}^d 空间中的内积) 称为分布函数 F 的特征函数.

由此定义即可看出, 特征函数即为概率密度函数的 Fourier 变换:

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot y} f(y) dy. \quad (2.1)$$

以下是 Fourier 变换的一个基本性质, 在求 $u(t)$ 的统计量时将会用到:

命题 2.14 (Fourier 变换的微分关系) 如果

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

且 $f'(x)$ 的 Fourier 变换存在, 那么

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \mathcal{F}[f(x)].$$

更一般的, 若 $f(\infty) = f'(\infty) = \dots = f^{(k-1)}(\infty) = 0$, 且 $\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]$ 存在, 则

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)] = (i\omega)^k \mathcal{F}[f].$$

第 3 节 $b(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的统计量

3.1 均值

当 t 固定时, 由 (1.3) 式可知, $b(t)$ 的通解第一项为常数, 而第二项中只有 b_0 是一个随机变量. 那么由 (1.2) 可知, $b(t)$ 通解第二项的期望为 $(E[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$. 而由于

$$f = f(s) = e^{\lambda_b(t-s)} \in \mathcal{V}(S, T),$$

故由 (2.6) 的 (3) 式可知,

$$E \left[\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = 0.$$

从而

$$E(b(t)) = \hat{b} + (E[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}. \quad (3.1)$$

对于 γ 亦有相同的结论

$$E(\gamma(t)) = \hat{\gamma} + (E[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)}. \quad (3.2)$$

3.2 方差

当 t 固定时, 由 [2] 的第四章相关知识, 考虑到 $(b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$ 与 $\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)$ 相互独立 (由 (1.2) 可知),

$$\begin{aligned} Var(b(t)) &= Var \left((b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} \right) + Var \left(\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \\ &= (e^{\lambda_b(t-t_0)})^2 Var(b_0) + Var \left(\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \\ &= Re \left\{ e^{2(-\gamma_b + i\omega_b)(t-t_0)} Var(b_0) \right\} + E \left[\left(\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right)^2 \right] \\ &= e^{-2\gamma_b(t-t_0)} Var(b_0) + Re \left\{ \sigma_b^2 E \left[\int_{t_0}^t e^{2\lambda_b(t-s)} dt \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

上面的最后一式右边利用了 Itô 等距 (2.5). 计算右边即可得到

$$Var(b(t)) = e^{-2\gamma_b(t-t_0)} Var(b_0) + \frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b} (1 - e^{-2\gamma_b(t-t_0)}). \quad (3.4)$$

同样的, 我们也有

$$Var(\gamma(t)) = e^{-2d_\gamma(t-t_0)} Var(\gamma_0) + \frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma} (1 - e^{-2d_\gamma(t-t_0)}). \quad (3.5)$$

3.3 协方差

考虑到 $b(t)$ 为复值函数, 由协方差的定义 [2] 即可知

$$\begin{aligned} cov(b(t), b(t)^*) &= E[(b(t) - E[b(t)])(b(t)^* - E[b(t)^*])] \\ &= E \left[(b_0 - E[b_0])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] \cdot \\ &\quad \left[(b_0^* - E[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] \quad \dots (3.1) \\ &= E \left[(b_0 - E[b_0])(b_0^* - E[b_0^*])e^{2\lambda_b(t-t_0)} \right] + \sigma_b E \left[(b_0 - E[b_0]) \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] \\ &\quad + \sigma_b E \left[(b_0^* - E[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] + \sigma_b^2 E \left[\left(\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

在上式的第二项中, 由于 b_0 与 $\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)$ 相互独立, 故由 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$\sigma_b E \left[(b_0 - E[b_0]) \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = \sigma_b E[b_0 - E[b_0]] E \left[\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = 0 \quad (3.7)$$

同样的, (3.6) 中第三项也为 0, 而第四项由 Itô 等距 (2.5) 即知为 0. 故

$$\text{cov}(b(t), b(t)^*) = E[(b_0 - E[b_0])(b_0^* - E[b_0^*])] e^{2\lambda_b(t-t_0)} = \text{cov}(b_0, b_0^*) e^{2\lambda_b(t-t_0)} \quad (3.8)$$

与之类似的,

$$\begin{aligned} \text{cov}(b(t), \gamma(t)) &= E[(b(t) - E[b(t)])(\gamma(t) - E[\gamma(t)])] \\ &= E \left[\left(b_0 - E[b_0] e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \left((\gamma_0 - E[\gamma_0]) e^{-d_\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(t-s)} dW_\gamma(s) \right) \right] \\ &= E[(b_0 - E[b_0])(\gamma_0 - E[\gamma_0])] e^{(\lambda_b - d_\gamma)(t-t_0)} \\ &= \text{cov}(b_0, \gamma_0) e^{(\lambda_b - d_\gamma)(t-t_0)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

上述的第三个等式也用到了 Itô 等距 (2.5).

第 4 节 $u(t)$ 的统计量

4.1 均值

在 $u(t)$ 的表达式 (1.5) 中, $e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}$, $f(t)$ 和 σ 均为常值. 那么由数学期望的线性性质 ([2] 第四章定理 2.2) 和 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$\begin{aligned} E[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} E[e^{-J_0(t_0,t)} u_0] + \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} E[b(s) e^{-J(s,t)}] ds \\ &\quad + \sigma \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} f(s) E[e^{-J(s,t)}] ds. \end{aligned} \quad (4.1)$$

下面我们用高斯随机过程 $J(s, t)$ 的特征函数 [5][6] 来计算上式的右边.

首先我们有以下的命题:

命题 4.1

$$E[ze^{ibx}] = (E[z] + ib \text{cov}(z, x)) e^{ibE[x] - \frac{1}{2}b^2 \text{Var}(x)}$$

其中 z 为复值高斯随机变量, x 为实值高斯随机变量.

证明. 不妨记

$$z = y + iw, \quad y, w \in \mathbb{R}.$$

那么我们只要计算出 $E[ye^{ibx}]$ 和 $E[we^{ibx}]$, 然后利用 (4.1) 将其组合起来. 令 $\mathbf{v} = (x, y, w)$, 那么由于 \mathbf{v} 为一个满足多元 Gauss 分布的随机向量, 其特征函数由 (2.12) 即可给出:

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = \exp(i\mathbf{s}^\top E[\mathbf{v}] - \frac{1}{2}\mathbf{s}^\top \Sigma \mathbf{s}), \quad (4.2)$$

其中 Σ 为协方差矩阵. 记 $g(\mathbf{v})$ 为 \mathbf{v} 的概率密度函数, 那么由特征函数的定义 (2.1), 即特征函数为概率密度的 Fourier 变换即可知道,

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}} g(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (4.3)$$

利用 Fourier 变换的性质 (2.14), 我们不妨对 s_2 求偏导 [5], 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int i y_0 e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}} g(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = i E \left[y_0 e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}} \right]. \quad (4.4)$$

令 $\mathbf{v} = (b, 0, 0)^\top$, 根据 (4.4) 即能得到

$$E[y_0 e^{ibx_0}] = -i \frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_2} \Big|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top} \quad (4.5)$$

同样的, 我们有

$$E[w_0 e^{ibx_0}] = -i \frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_3} \Big|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top} \quad (4.6)$$

由多元高斯分布的概率密度函数 (2.9) 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = (iE[y_0] - \text{Var}(y_0)s_2 - \text{cov}(x_0, y_0)s_1 - \text{cov}(y_0, w_0)s_3)\phi_{\mathbf{v}}(s) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_3} = (iE[w_0] - \text{Var}(w_0)s_3 - \text{cov}(x_0, w_0)s_1 - \text{cov}(y_0, w_0)s_2)\phi_{\mathbf{v}}(s) \quad (4.8)$$

分别计算这两个偏导数 (4.7) 及 (4.8) 在 $\mathbf{s} = (b, 0, 0)^\top$ 处的值, 有

$$E[y_0 e^{ibx_0}] = (E[y_0] + i\text{cov}(x_0, y_0)b)\exp(ibE[x_0] - \frac{1}{2}\text{Var}(x_0)b^2) \quad (4.9)$$

$$E[w_0 e^{ibx_0}] = (E[w_0] + i\text{cov}(x_0, w_0)b)\exp(ibE[x_0] - \frac{1}{2}\text{Var}(x_0)b^2) \quad (4.10)$$

结合 (4.9), (4.10) 即有

$$E[z e^{ibx}] = (E[z] + ib\text{cov}(z, x))e^{ibE[x] - \frac{1}{2}b^2\text{Var}(x)}.$$

□

由此我们立刻可以得到

推论 4.2 在命题4.1的条件下,

$$E[z e^{bx}] = (E[z] + bcov(z, x))e^{bE[x] + \frac{1}{2}b^2 Var(x)}.$$

利用推论4.2即有

$$\begin{aligned} E[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}(E[u_0] - cov(u_0, J(t_0, t)))e^{-E[J(t_0, t)] + \frac{1}{2}Var(J(t_0, t))} \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)}(\hat{b} + e^{\lambda_b(s-t_0)}(E[b_0] - \hat{b} - cov(b_0, J(s, t))))e^{-E[J(s, t)] + \frac{1}{2}Var(J(s, t))} ds \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} f(s) e^{-E[J(s, t)] + \frac{1}{2}Var(J(s, t))} ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

由于

$$\begin{aligned} J(s, t) &= \int_s^t \left[(\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) \right] ds' \\ &= \int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' + \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds' \end{aligned} \quad (4.12)$$

由协方差的线性性质,

$$\begin{aligned} cov(u_0, J(s, t)) &= cov\left(u_0, \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(\gamma_0 - \hat{\gamma})\right) \\ &+ cov\left(u_0, \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right) \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})[cov(u_0, \gamma_0) - cov(u_0, \hat{\gamma})] \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})cov(u_0, \gamma_0). \end{aligned} \quad (4.13)$$

这是因为 u_0 与 $\hat{\gamma}$ 相互独立. 同理有

$$cov(b_0, J(s, t)) = \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})cov(b_0, \gamma_0). \quad (4.14)$$

为了计算 $E[J(s, t)]$, 我们对 (3.2) 求积分, 有

$$\begin{aligned} E[J(s, t)] &= E\left[\int_s^t (\gamma(s') - \hat{\gamma}) ds'\right] = \int_s^t (E[\gamma(s')] - \hat{\gamma}) ds' \\ &= \int_s^t (E[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(E[\gamma_0] - \hat{\gamma}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

结合 (4.15) 和 (4.12) 可知,

$$E \left[\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds' \right] = 0. \quad (4.16)$$

那么

$$\begin{aligned} Var(J(s, t)) &= E[J^2(s, t)] - E[J(s, t)]^2 \\ &= E \left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' \right)^2 \right] - E[J(s, t)]^2 \\ &\quad + 2E \left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' \right) \left(\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds' \right) \right] \\ &\quad + \sigma_\gamma^2 E \left[\left(\int_s^t \int_{t_0}^s e^{-d_\gamma(s'-s)} dW_\gamma(s) ds' \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{d_\gamma^2} (e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})^2 (E[\gamma_0^2] - E[\gamma_0]^2) \\ &\quad + \sigma_\gamma^2 E \left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma} (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

由 Itô 等距 (定理2.5) 和 Itô 公式 (定理2.7) 知上式的第二项为

$$\begin{aligned} &\sigma_\gamma^2 E \left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma} (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right)^2 \right] \\ &= \sigma_\gamma^2 E \left[\left(\int_{t_0}^s \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x) + \int_s^t \int_x^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x) \right)^2 \right] \\ &= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2} E \left[\left(\int_{t_0}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) + \int_s^t (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right)^2 \right] \\ &= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2} \left\{ \int_{t_0}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)})^2 dx + \int_s^t (1 - e^{-d_\gamma(t-x)})^2 dx \right. \\ &\quad \left. + 2E \left[\left(\int_{t_0}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right) \left(\int_s^t (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right) \right] \right\} \\ &= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3} \left(-1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-s)} \right) + 2E \left[\int_{\min\{s, t_0\}}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}) (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dt \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

这里我们将两个积分区域均扩展至 $[\min\{s, t_0\}, t]$ 上, 并设积分区域较小的被积函数在

延拓的区间上为 0. 那么

$$\begin{aligned}
 Var(J(s, t)) &= \frac{1}{d_\gamma^2} (e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})^2 (E[\gamma_0^2] - E[\gamma_0]^2) \\
 &\quad + \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3} \left(-1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

将 (4.19), (4.13), (4.14) 代入 (4.11) 式即得 $u(t)$ 的均值.

4.2 方差

参考文献

- [1] 金福临等. 常微分方程. 上海科学技术出版社, 1984.
- [2] 何书元. 概率论. 北京大学出版社, 2006.
- [3] 应坚刚. 概率论. 2013.
- [4] Boris Gershgorin, John Harlim, and Andrew J Majda. Test models for improving filtering with model errors through stochastic parameter estimation. *Journal of Computational Physics*, 229(1):1–31, 2010.
- [5] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. A nonlinear test model for filtering slow-fast systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 6(3):611–649, 2008.
- [6] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. Filtering a nonlinear slow-fast system with strong fast forcing. *Communications in Mathematical Sciences*, 8(1):67–92, 2010.
- [7] Takeyuki Hida. Brownian motion. In *Brownian Motion*, pages 44–113. Springer, 1980.
- [8] Edward Nelson, Edward Nelson, Edward Nelson, and Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 3. Princeton university press Princeton, 1967.
- [9] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 21–39. Springer, 2003.