

# 目录

第 1 节 导言 . . . . .	1
1.1 问题简介 . . . . .	1
第 2 节 一些前置引理 . . . . .	2
2.1 布朗运动的性质 . . . . .	2
2.2 Itô 积分及其性质 . . . . .	3
2.3 高斯分布与特征函数 . . . . .	4
第 3 节 $b(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的统计量 . . . . .	5
3.1 均值 . . . . .	5
3.2 方差 . . . . .	6
3.3 协方差 . . . . .	7
第 4 节 $u(t)$ 的统计量 . . . . .	8
4.1 均值 . . . . .	8
4.2 方差 . . . . .	11
4.3 协方差 . . . . .	15
第 5 节 数值模拟 . . . . .	19

# TEST

卢川, 13300180056, 信息与计算科学

2017 年 4 月 14 日

摘要: test test test

关键字: test, test.

## 第 1 节 引言

### 1.1 问题简介

考虑以下的一个随机微分方程组, 其作用为改进对模型误差的滤波 [5]:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= (-\gamma(t) + i\omega)u(t) + b(t) + f(t) + \sigma W(t), \\ \frac{db(t)}{dt} &= (-\gamma_b + i\omega_b)(b(t) - \hat{b}) + \sigma_b W_b(t), \\ \frac{d\gamma(t)}{dt} &= -d_\gamma(\gamma(t) - \hat{\gamma}) + \sigma_\gamma W_\gamma(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中  $\omega$  为  $u(t)$  的振荡频率,  $f(t)$  为外部驱动力,  $\sigma$  表示白噪声  $W(t)$  的强度. 此外, 参数  $\gamma_b$  和  $d_\gamma$  表示振荡阻尼,  $\sigma_b$  和  $\sigma_\gamma$  分别表示加性和乘性修正 ((1.1) 中第 2, 3 式) 中白噪声的强度.  $\hat{b}$  和  $\hat{\gamma}$  分别表示  $b(t)$  和  $\gamma(t)$  的固定平均偏差修正,  $\omega_b$  表示加性噪声的频率. 白噪声  $W_\gamma(t)$  是实值函数, 而  $W(t)$  及  $W_b(t)$  均为复值, 且其实部和虚部均为独立的白噪声.

我们一般认为方程组 (1.1) 有初值

$$\begin{aligned}u(t_0) &= u_0, \\ b(t_0) &= b_0, \\ \gamma(t_0) &= \gamma_0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

且  $u_0, b_0, \gamma_0$  均为独立的高斯随机变量, 其统计量均假设为已知 (注意到  $b(t)$  和  $u(t)$  均为复数):  $E[u_0], E[\gamma_0], E[b_0], Var(u_0), Var(\gamma_0), Var(b_0), Cov(u_0, u_0^*), Cov(u_0, \gamma_0), Cov(u_0, b_0), Cov(u_0, b_0^*)$ .

由求解线性微分方程组的相关知识 [1] 可以知道, (1.1) 的第二和第三项均为线性方程, 故有通解

$$b(t) = \hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s), \quad (1.3)$$

$$\gamma(t) = \hat{\gamma} + (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(t-s)} dW_\gamma(s). \quad (1.4)$$

其中  $\lambda_b = -\gamma_b + i\omega_b$ ,  $\hat{b}$  与  $\hat{\gamma}$  分别是  $b(t)$  和  $\gamma(t)$  的固定偏差校正. 如果我们记

$$\hat{\lambda} = -\hat{\gamma} + i\omega, \quad (1.5)$$

$$J(s, t) = \int_s^t (\gamma(s') - \hat{\gamma}) ds' \quad (1.6)$$

则 (1.1) 的通解可以表示为

$$\begin{aligned} u(t) = & e^{-J(t_0, t) + \hat{\lambda}(t-t_0)} u_0 + \int_{t_0}^t (b(s) + f(s)) e^{-J(s, t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} ds \\ & + \sigma \int_{t_0}^t e^{-J(s, t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} dW(s). \end{aligned} \quad (1.7)$$

以下将对方程 (1.1) 的各个变量  $u, b, \gamma$ , 分别计算其统计量.

## 第 2 节 一些前置引理

### 2.1 布朗运动的性质

在应用中, 往往将布朗运动置于一个随机微分方程 (组) 中, 来近似的模拟白噪声的性质 [8]. 为此, 我们需要引入布朗运动的一些基本性质. [11][10]

**定理 2.1** 布朗运动  $B_t$  是一个 Gauss 过程. 对于所有的  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$ , 随机变量  $Z = (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_k}) \in \mathbb{R}^{nk}$  服从多重正态分布. 如果设  $B_t$  的初值为  $x$ , 则其期望为

$$M = E[Z] = (x, x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{nk},$$

协方差矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \cdots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_k I_n \end{pmatrix}.$$

此定理的证明利用了特征函数的性质, 具体过程可见 [11] 的附录 A. 以下的定理是 (2.1) 的直接而显然的推论:

**定理 2.2** 假设布朗运动  $B_t$  满足定理 (2.1) 中的条件, 那么对于  $\forall t \geq 0$ ,  $E[B_t] = x$ ,  $E[(B_t - x)^2] = nt$ ,  $E[(B_t - x)(B_s - x)] = n \cdot \min(s, t)$ . 而且如果  $t \geq s$ , 有  $E[(B_t - B_s)^2] = n(t - s)$ .

此外, 以下的定理也是布朗运动的一个重要性质, 其证明见 [11] 的 (2.2.12) 式.

**定理 2.3**  $B_t$  的增量独立, 即对满足  $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$  的  $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ,

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

相互独立.

## 2.2 Itô 积分及其性质

在求解类似 (1.1) 的随机微分方程时, 需要针对布朗运动做积分, 为此我们引入以下的 Itô 积分 [11][9]:

**定义 2.4** (Itô 积分) 设  $f \in \mathcal{V}(S, T)$ . 则  $f$  的 Itô 积分定义为

$$\int_S^T f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

其中  $\phi_n$  为基本函数序列, 且满足当  $n \rightarrow \infty$  时

$$E\left[\int_S^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0.$$

由上述定义即可得到 Itô 积分的一个重要性质:

**定理 2.5** (Itô 等距) 对于  $\forall f \in \mathcal{V}(S, T)$  有

$$E\left[\left(\int_S^T f(t, \omega) dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_S^T f^2(t, \omega) dt\right].$$

这里  $\mathcal{V}(S, T)$  见 [11] 中的定义 3.1.2 至 3.1.4.

利用上述方法, 即利用基本函数序列来逼近  $\mathcal{V}(S, T)$  中的函数, 我们能够得到 Itô 积分的线性性质:

**定理 2.6** 设  $f, g \in \mathcal{V}(0, T)$ ,  $0 \leq S < U < T$ . 那么

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t, \quad a.e. \\ (2) \quad & \int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t, \quad a.e. \\ (3) \quad & E\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0. \end{aligned}$$

为了便于计算, 我们还需要引入以下的一维 Itô 公式 [4].

**定理 2.7** (Itô 公式) 设  $X_t$  为一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

$g(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ , 则  $Y_t = g(t, X_t)$  也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2,$$

其中

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt.$$

以下是上述 Itô 公式的积分形式.

**定理 2.8** (分部积分) 设  $f(s, \omega)$  对几乎所有的  $\omega$  关于  $s \in [0, t]$  是连续的, 且为有界变差函数, 则有

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

上述几个定理的证明请见 [11], 21-24 页及 36-39 页.

## 2.3 高斯分布与特征函数

在我们的假设中各个噪声信号都服从高斯分布, 为此我们需要知道多元高斯分布的概率密度 [2].

**命题 2.9** 如果随机向量  $\mathbf{x}$  服从多元正态分布

$$\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

那么  $\mathbf{x}$  的概率密度为

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_k) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^{\top} \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu)\right)}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}}$$

除此之外, 我们还需要引入随机变量的特征函数这个工具, 用于计算较为复杂的随机变量的统计量.

**定义 2.10** (特征函数) 如果  $X$  是实值随机变量,  $E[\sin(tX)], E[\cos(tX)]$  均存在, 那么称

$$\phi(t) = E[e^{itX}] = E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)], \quad t \in \mathbb{R}$$

为  $X$  的特征函数, 其中  $i$  为虚数单位.

对于随机向量, 其特征函数定义为

定义 2.11 设  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  为随机向量, 则  $\mathbf{X}$  的特征函数为

$$\phi(t) = E[\exp(it\mathbf{X}^\top)], \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

以下为高斯分布的特征函数.

命题 2.12 Gauss 分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的特征函数为

$$\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

此命题的证明见 [2] 第五章例 2.4. 一个更一般的定义如下 [3]:

定义 2.13 设  $\xi$  为  $d$ -维随机变量,  $F$  为  $\xi$  的分布函数. 那么

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot y} dF(y), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

(其中  $x \cdot y$  为  $\mathbb{R}^d$  空间中的内积) 称为分布函数  $F$  的特征函数.

由此定义即可看出, 特征函数即为概率密度函数的 Fourier 变换:

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot y} f(y) dy. \quad (2.1)$$

以下是 Fourier 变换的一个基本性质, 在求  $u(t)$  的统计量时将会用到:

命题 2.14 (Fourier 变换的微分关系) 如果

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

且  $f'(x)$  的 Fourier 变换存在, 那么

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\omega \mathcal{F}[f(x)].$$

更一般的, 若  $f(\infty) = f'(\infty) = \dots = f^{(k-1)}(\infty) = 0$ , 且  $\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]$  存在, 则

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)] = (i\omega)^k \mathcal{F}[f].$$

## 第 3 节 $b(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的统计量

### 3.1 均值

当  $t$  固定时, 由 (1.3) 式可知,  $b(t)$  的通解第一项为常数, 而第二项中只有  $b_0$  是一个随机变量. 那么由 (1.2) 可知,  $b(t)$  通解第二项的期望为  $(E[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$ . 而由于

$$f = f(s) = e^{\lambda_b(t-s)} \in \mathcal{V}(S, T),$$

故由 (2.6) 的 (3) 式可知,

$$E \left[ \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = 0.$$

从而

$$E(b(t)) = \hat{b} + (E[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}. \quad (3.1)$$

对于  $\gamma$  亦有相同的结论

$$E(\gamma(t)) = \hat{\gamma} + (E[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)}. \quad (3.2)$$

### 3.2 方差

当  $t$  固定时, 由 [2] 的第四章相关知识, 考虑到  $(b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$  与  $\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)$  相互独立 (由 (1.2) 可知),

$$\begin{aligned} Var(b(t)) &= Var \left( (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} \right) + Var \left( \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \\ &= (e^{\lambda_b(t-t_0)})^2 Var(b_0) + Var \left( \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \\ &= Re \left\{ e^{2(-\gamma_b + i\omega_b)(t-t_0)} Var(b_0) \right\} + E \left[ \left( \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right)^2 \right] \\ &= e^{-2\gamma_b(t-t_0)} Var(b_0) + Re \left\{ \sigma_b^2 E \left[ \int_{t_0}^t e^{2\lambda_b(t-s)} dt \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

上面的最后一式右边利用了 Itô 等距 (2.5). 计算右边即可得到

$$Var(b(t)) = e^{-2\gamma_b(t-t_0)} Var(b_0) + \frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b} (1 - e^{-2\gamma_b(t-t_0)}). \quad (3.4)$$

同样的, 我们也有

$$Var(\gamma(t)) = e^{-2d_\gamma(t-t_0)} Var(\gamma_0) + \frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma} (1 - e^{-2d_\gamma(t-t_0)}). \quad (3.5)$$

### 3.3 协方差

考虑到  $b(t)$  为复值函数, 由协方差的定义 [2] 即可知

$$\begin{aligned}
Cov(b(t), b(t)^*) &= E[(b(t) - E[b(t)])(b(t)^* - E[b(t)^*])] \\
&= E \left[ (b_0 - E[b_0])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right. \\
&\quad \left. ((b_0^* - E[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)) \right] \quad \dots (3.1) \\
&= E[(b_0 - E[b_0])(b_0^* - E[b_0^*])e^{2\lambda_b(t-t_0)}] + \sigma_b E \left[ (b_0 - E[b_0]) \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] \\
&\quad + \sigma_b E \left[ (b_0^* - E[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] + \sigma_b^2 E \left[ \left( \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right)^2 \right] \\
&\hspace{15em} (3.6)
\end{aligned}$$

在上式的第二项中, 由于  $b_0$  与  $\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)$  相互独立, 故由 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$\sigma_b E \left[ (b_0 - E[b_0]) \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = \sigma_b E[b_0 - E[b_0]] E \left[ \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right] = 0 \quad (3.7)$$

同样的, (3.6) 中第三项也为 0, 而第四项由 Itô 等距 (2.5) 即知为 0. 故

$$Cov(b(t), b(t)^*) = E[(b_0 - E[b_0])(b_0^* - E[b_0^*])e^{2\lambda_b(t-t_0)}] = Cov(b_0, b_0^*)e^{2\lambda_b(t-t_0)} \quad (3.8)$$

与之类似的,

$$\begin{aligned}
Cov(b(t), \gamma(t)) &= E[(b(t) - E[b(t)])(\gamma(t) - E[\gamma(t)])] \\
&= E \left[ \left( b_0 - E[b_0]e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \right. \\
&\quad \left. \left( (\gamma_0 - E[\gamma_0])e^{-d_\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(t-s)} dW_\gamma(s) \right) \right] \quad (3.9) \\
&= E[(b_0 - E[b_0])(\gamma_0 - E[\gamma_0])] e^{(\lambda_b - d_\gamma)(t-t_0)} \\
&= Cov(b_0, \gamma_0) e^{(\lambda_b - d_\gamma)(t-t_0)}
\end{aligned}$$

上述的第三个等式也用到了 Itô 等距 (2.5).



## 第 4 节 $u(t)$ 的统计量

### 4.1 均值

在  $u(t)$  的表达式 (1.7) 中,  $e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}$ ,  $f(t)$  和  $\sigma$  均为常值. 那么由数学期望的线性性质 ([2] 第四章定理 2.2) 和 Itô 积分的性质 (2.6) 可知

$$\begin{aligned} E[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} E[e^{-J_0(t_0,t)} u_0] + \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} E[b(s)e^{-J(s,t)}] ds \\ &\quad + \sigma \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} f(s) E[e^{-J(s,t)}] ds. \end{aligned} \quad (4.1)$$

下面我们用高斯随机过程  $J(s, t)$  的特征函数 [6][7] 来计算上式的右边. 首先我们有以下的命题:

**命题 4.1**

$$E[ze^{ibx}] = (E[z] + ib\text{Cov}(z, x))e^{ibE[x] - \frac{1}{2}b^2\text{Var}(x)}$$

其中  $z$  为复值高斯随机变量,  $x$  为实值高斯随机变量.

证明. 不妨记

$$z = y + iw, \quad y, w \in \mathbb{R}.$$

那么我们只要计算出  $E[ye^{ibx}]$  和  $E[we^{ibx}]$ , 然后利用 (4.1) 将其组合起来. 令  $\mathbf{v} = (x, y, w)$ , 那么由于  $\mathbf{v}$  为一个满足多元 Gauss 分布的随机向量, 其特征函数由 (2.12) 即可给出:

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = \exp(i\mathbf{s}^\top E[\mathbf{v}] - \frac{1}{2}\mathbf{s}^\top \Sigma \mathbf{s}), \quad (4.2)$$

其中  $\Sigma$  为协方差矩阵. 记  $g(\mathbf{v})$  为  $\mathbf{v}$  的概率密度函数, 那么由特征函数的定义 (2.1), 即特征函数为概率密度的 Fourier 变换即可知道,

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}} g(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (4.3)$$

利用 Fourier 变换的性质 (2.14), 我们不妨对  $s_2$  求偏导 [6], 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int iy_0 e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}} g(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = iE[y_0 e^{i\mathbf{s}^\top \mathbf{v}}]. \quad (4.4)$$

令  $\mathbf{v} = (b, 0, 0)^\top$ , 根据 (4.4) 即能得到

$$E[y_0 e^{ibx_0}] = -i \frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_2} \Big|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top} \quad (4.5)$$

同样的, 我们有

$$E[w_0 e^{ibx_0}] = -i \frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_3} \Big|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top} \quad (4.6)$$

由多元高斯分布的概率密度函数 (2.9) 有

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2} = (iE[y_0] - \text{Var}(y_0)s_2 - \text{Cov}(x_0, y_0)s_1 - \text{Cov}(y_0, w_0)s_3)\phi_{\mathbf{v}}(s) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_3} = (iE[w_0] - \text{Var}(w_0)s_3 - \text{Cov}(x_0, w_0)s_1 - \text{Cov}(y_0, w_0)s_2)\phi_{\mathbf{v}}(s) \quad (4.8)$$

分别计算这两个偏导数 (4.7) 及 (4.8) 在  $\mathbf{s} = (b, 0, 0)^\top$  处的值, 有

$$E[y_0 e^{ibx_0}] = (E[y_0] + i\text{Cov}(x_0, y_0)b)\exp(ibE[x_0] - \frac{1}{2}\text{Var}(x_0)b^2) \quad (4.9)$$

$$E[w_0 e^{ibx_0}] = (E[w_0] + i\text{Cov}(x_0, w_0)b)\exp(ibE[x_0] - \frac{1}{2}\text{Var}(x_0)b^2) \quad (4.10)$$

结合 (4.9), (4.10) 即有

$$E[z e^{ibx}] = (E[z] + ib\text{Cov}(z, x))e^{ibE[x] - \frac{1}{2}b^2\text{Var}(x)}.$$

□

由此我们立刻可以得到

**推论 4.2** 在命题4.1的条件下,

$$E[z e^{bx}] = (E[z] + b\text{Cov}(z, x))e^{bE[x] + \frac{1}{2}b^2\text{Var}(x)}.$$

利用推论4.2即有

$$\begin{aligned} E[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}(E[u_0] - \text{Cov}(u_0, J(t_0, t)))e^{-E[J(t_0, t)] + \frac{1}{2}\text{Var}(J(t_0, t))} \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)}(\hat{b} + e^{\lambda_b(s-t_0)}(E[b_0] - \hat{b} - \text{Cov}(b_0, J(s, t))))e^{-E[J(s, t)] + \frac{1}{2}\text{Var}(J(s, t))}ds \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)}f(s)e^{-E[J(s, t)] + \frac{1}{2}\text{Var}(J(s, t))}ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

下面我们计算

$$\text{Cov}(u_0, J(s, t)), \text{Cov}(b_0, J(s, t)), E[J(s, t)], \text{Var}(J(s, t)).$$

先引入两个显然的结论, 其中  $a, b, c, d$  均为随机变量:

**命题 4.3**  $\text{Var}(a + b) = \text{Var}(a) + \text{Var}(b) + 2\text{Cov}(a, b).$

**命题 4.4**  $\text{Cov}(a + b, c + d) = \text{Cov}(a, c) + \text{Cov}(a, d) + \text{Cov}(b, c) + \text{Cov}(b, d).$

由于

$$\begin{aligned} J(s, t) &= \int_s^t \left[ (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) \right] ds' \\ &= \int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' + \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds' \end{aligned} \quad (4.12)$$

由命题 (4.4),

$$\begin{aligned}
Cov(u_0, J(s, t)) &= Cov\left(u_0, \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(\gamma_0 - \hat{\gamma})\right) \\
&\quad + Cov\left(u_0, \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right) \\
&= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})[Cov(u_0, \gamma_0) - Cov(u_0, \hat{\gamma})] \\
&= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})Cov(u_0, \gamma_0).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

这是因为  $u_0$  与  $\hat{\gamma}$  相互独立. 同理有

$$Cov(b_0, J(s, t)) = \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})Cov(b_0, \gamma_0). \tag{4.14}$$

为了计算  $E[J(s, t)]$ , 我们对 (3.2) 求积分, 有

$$\begin{aligned}
E[J(s, t)] &= E\left[\int_s^t (\gamma(s') - \hat{\gamma}) ds'\right] = \int_s^t (E[\gamma(s')] - \hat{\gamma}) ds' \\
&= \int_s^t (E[\gamma_0] - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' \\
&= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(E[\gamma_0] - \hat{\gamma})
\end{aligned} \tag{4.15}$$

结合 (4.15) 和 (4.12) 可知,

$$E\left[\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right] = 0. \tag{4.16}$$

那么

$$\begin{aligned}
Var(J(s, t)) &= E[J^2(s, t)] - E[J(s, t)]^2 \\
&= E\left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds'\right)^2\right] - E[J(s, t)]^2 \\
&\quad + 2E\left[\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds'\right) \left(\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right)\right] \\
&\quad + \sigma_\gamma^2 E\left[\left(\int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds'\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{d_\gamma^2} (e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})^2 (E[\gamma_0^2] - E[\gamma_0]^2) \\
&\quad + \sigma_\gamma^2 E\left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma} (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x)\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

由 Itô 等距 (定理2.5) 和 Itô 公式 (定理2.7) 知上式的第二项为

$$\begin{aligned}
& \sigma_\gamma^2 E \left[ \left( \int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma} (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right)^2 \right] \\
&= \sigma_\gamma^2 E \left[ \left( \int_{t_0}^s \int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x) + \int_s^t \int_x^t e^{-d_\gamma(s'-x)} ds' dW_\gamma(x) \right)^2 \right] \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2} E \left[ \left( \int_{t_0}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) + \int_s^t (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right)^2 \right] \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2} \left\{ \int_{t_0}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)})^2 dx + \int_s^t (1 - e^{-d_\gamma(t-x)})^2 dx \right. \\
&\quad \left. + 2E \left[ \left( \int_{t_0}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right) \left( \int_s^t (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dW_\gamma(x) \right) \right] \right\} \\
&= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3} \left( -1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-s)} \right) + 2E \left[ \int_{\min\{s, t_0\}}^t (e^{-d_\gamma(s-x)} - e^{-d_\gamma(t-x)}) (1 - e^{-d_\gamma(t-x)}) dt \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

这里我们将两个积分区域均扩展至  $[\min\{s, t_0\}, t]$  上, 并设积分区域较小的被积函数在延拓的区间上为 0. 那么

$$\begin{aligned}
Var(J(s, t)) &= \frac{1}{d_\gamma^2} (e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})^2 Var(\gamma_0) \\
&\quad + \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3} \left( -1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)} \right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

将 (4.19), (4.13), (4.14) 代入 (4.11) 式即得  $u(t)$  的均值.

## 4.2 方差

利用

$$Var(u(t)) = E[|u(t)|^2] - |E[u(t)]|^2. \tag{4.20}$$

我们记

$$u(t) = A + B + C, \tag{4.21}$$

其中

$$A = e^{-J(t_0, t) + \hat{\lambda}(t-t_0)} u_0, \tag{4.22}$$

$$B = \int_{t_0}^t (b(s) + f(s)) e^{-J(s, t) + \hat{\lambda}(t-s)} ds, \tag{4.23}$$

$$C = \sigma \int_{t_0}^t e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)} dW(s). \quad (4.24)$$

于是由 Itô 积分的性质有

$$E[|u(t)|^2] = E[|A|^2] + E[|B|^2] + E[|C|^2] + 2\operatorname{Re} E[A^* B]. \quad (4.25)$$

下面我们分别求出

$$E[|A|^2], E[|B|^2], E[|C|^2], E[AB].$$

由命题4.1可知

**命题 4.5** 对于复值 Gaussian 随机变量  $z$  和  $w$ , 以及实值 Gaussian 随机变量  $x$ ,

$$\begin{aligned} E[zw e^{bx}] &= [E[z]E[w] + \operatorname{Cov}(z, w^*) + b(E[z]\operatorname{Cov}(w, x)) + E[w]\operatorname{Cov}(z, x) + \\ &\quad b^2 \operatorname{Cov}(z, x)\operatorname{Cov}(w, x)] e^{bE[x] + \frac{b^2}{2}\operatorname{Var}(x)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

利用上述命题, 有

$$\begin{aligned} E[|A|^2] &= (|E[u_0]|^2 + \operatorname{Var}(u_0) - 4\operatorname{Re}\{E[u_0]^* \operatorname{Cov}(u_0, J(t_0, t))\} + 4|\operatorname{Cov}(u_0, J(t_0, t))|^2) \cdot \\ &\quad e^{-2\hat{\gamma}(t-t_0) - 2E[J(t_0, t)] + 2\operatorname{Var}(J(t_0, t))}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

而

$$\begin{aligned} E[|B|^2] &= E\left[\left|\int_{t_0}^t (b(s) + f(s))e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)} ds\right|^2\right] \\ &= \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^t dr E\left[(b(s) + f(s))e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)} \left[(b(r) + f(r))e^{-J(r,t) + \hat{\lambda}(t-r)}\right]^*\right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

由命题 (4.3) 和 (4.4), 并结合命题4.5可知, 在上式中, 被积的最后一项为

$$\begin{aligned}
& E \left[ (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(t-s)} \left[ (b(r) + f(r)) e^{-J(r,t) + \hat{\lambda}(t-r)} \right]^* \right] \\
&= E \left[ (b(s) + f(s)) (b^*(r) + f^*(r)) e^{-J(s,t) - J(r,t) + (-\hat{\gamma} + i\omega)(t-s) + (-\hat{\gamma} - i\omega)(t-r)} \right] \\
&= E \left[ (b(s) + f(s)) (b^*(r) + f^*(r)) e^{-J(s,t) - J(r,t) - \hat{\gamma}(2t-s-r) + i\omega(r-s)} \right] \\
&= e^{-J(s,t) - J(r,t) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s,t)) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(r,t)) + \text{Cov}(J(s,t), J(r,t)) - \hat{\gamma}(2t-s-r) + i\omega(r-s)} \times \\
&\quad \{ E[b(s)b^*(r)] + E[b(s)f^*(r)] + E[f(s)b^*(r)] + E[f(s)f^*(r)] \\
&\quad + \text{Cov}(b(s), b(r)) + \text{Cov}(b(s), f(r)) + \text{Cov}(f(s), b(r)) + \text{Cov}(f(s), f(r)) \\
&\quad + (E[b(s)] + E[f(s)]) \times [\text{Cov}(b^*(r), -J(s,t)) + \text{Cov}(b^*(r), -J(r,t)) \\
&\quad + \text{Cov}(f^*(r), -J(s,t)) + \text{Cov}(f^*(r), -J(r,t))] \\
&\quad + (E[b^*(r)] + E[f^*(r)]) \times [\text{Cov}(b(s), -J(s,t)) + \text{Cov}(f(s), -J(s,t)) \\
&\quad + \text{Cov}(f(s), -J(r,t)) + \text{Cov}(b(s), -J(r,t))] \\
&\quad + [\text{Cov}(b(s), -J(s,t)) + \text{Cov}(b(s), -J(r,t)) + \text{Cov}(f(s), -J(s,t)) + \text{Cov}(f(s), -J(r,t))] \\
&\quad \times [\text{Cov}(b^*(r), -J(s,t)) + \text{Cov}(b^*(r), -J(r,t)) + \text{Cov}(f^*(r), -J(s,t)) + \text{Cov}(f^*(r), -J(r,t))] \} \\
&= e^{-J(s,t) - J(r,t) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s,t)) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(r,t)) + \text{Cov}(J(s,t), J(r,t)) - \hat{\gamma}(2t-s-r) + i\omega(r-s)} \times \\
&\quad \{ E[b(s)b^*(r)] + E[b(s)] \times [\text{Cov}(b^*(r), -J(s,t)) + \text{Cov}(b^*(r), -J(r,t))] \\
&\quad + E[b^*(r)] \times [\text{Cov}(b(s), -J(s,t)) + \text{Cov}(b(s), -J(r,t))] \\
&\quad + [\text{Cov}(b^*(r), J(s,t)) + \text{Cov}(b^*(r), J(r,t))] \times [\text{Cov}(b(s), J(s,t)) + \text{Cov}(b(s), J(r,t))] \\
&\quad + f^*(r) \times [E[b(s)] - \text{Cov}(b(s), J(s,t)) - \text{Cov}(b(s), J(r,t))] \\
&\quad + f(s) \times [E[b^*(r)] - \text{Cov}(b(r), J^*(s,t)) - \text{Cov}(b(r), J^*(r,t))] \\
&\quad + f(s)f^*(r) \}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

其中, 由 Itô 公式和 Itô 积分的性质即知

$$\begin{aligned}
E[b(s)b(r)] &= E \left[ \left( \hat{b} + (b_0 - \hat{b}) e^{\lambda_b(s-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^s e^{\lambda_b(s-w)} dW_b(w) \right) \times \right. \\
&\quad \left. \left( \hat{b} + (b_0 - \hat{b}) e^{\lambda_b(r-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^r e^{\lambda_b(r-w)} dW_b(w) \right) \right] \\
&= (1 - e^{\lambda_b(s-t_0)} - e^{\lambda_b(r-t_0)} + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}) \hat{b}^2 + (e^{\lambda_b(s-t_0)} + e^{\lambda_b(r-t_0)} - 2e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}) \hat{b} E[b_0] \\
&\quad + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)} (\text{Var}(b_0) + E[b_0]^2) + \frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b} (e^{-\gamma_b(s+r-2\min(s,r))} - e^{-\gamma_b(s+r-2t_0)}) e^{i\omega_b(s-r)}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

结合 (4.15) 和 (4.14) 有

$$\begin{aligned} Cov(b(r), J(s, t)) &= e^{\lambda_b(r-t_0)} Cov(b_0, J(s, t)) + \sigma_b Cov\left(\int_{t_0}^r e^{\lambda_b(r-w)} dW_b(w), J(s, t)\right) \\ &= \frac{1}{d_\gamma} (e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)}) e^{\lambda_b(r-t_0)} Cov(b_0, \gamma_0) \end{aligned} \quad (4.31)$$

当  $t_0 \leq r \leq s \leq t$  时, 我们这么计算  $J(s, t)$  和  $J(r, t)$  的协方差:

$$Cov(J(s, t), J(r, t)) = Cov(J(s, t), J(r, s) + J(s, t)) = Var(J(s, t)) + Cov(J(s, t), J(r, s)). \quad (4.32)$$

其中  $Var(J(s, t))$  由 (4.19) 已求出. 由类似 (4.17) 和 (4.18) 的过程, 有

$$\begin{aligned} Cov(J(s, t), J(r, s)) &= Cov\left(\int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' + \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds' \right. \\ &\quad \left. \int_r^s (\gamma_0 - \hat{\gamma}) e^{-d_\gamma(s'-t_0)} ds' + \int_r^s \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)} dW_\gamma(x) ds' \right) \\ &= \frac{Var(\gamma_0)}{d_\gamma^2} (e^{-d_\gamma(t-t_0)} - e^{-d_\gamma(s-t_0)}) (e^{-d_\gamma(s-t_0)} e^{-d_\gamma(r-t_0)}) \\ &\quad - \frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma^3} (e^{-d_\gamma(t-s)} - e^{-d_\gamma(t-r)} + e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)} - e^{-d_\gamma(t+r-2t_0)} - 1 \\ &\quad + e^{-d_\gamma(s-r)} - e^{-2d_\gamma(s-t_0)} + e^{-d_\gamma(s+r-2t_0)}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

当  $t_0 \leq s \leq r \leq t$  时, 只要考虑到

$$Cov(J(s, t), J(r, t)) = Cov(J(r, t), J(s, t)),$$

于是只要在结果中将  $s$  与  $r$  交换即可. 接下来, 由 Itô 等距有

$$\begin{aligned} E[|C|^2] &= \sigma^2 E\left[\left(\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)} dW(s)\right)^2\right] \\ &= \sigma^2 \int_{t_0}^t e^{-2\hat{\gamma}(t-s)} E[e^{-2J(s,t)}] ds = \sigma^2 \int_{t_0}^t e^{-2\hat{\gamma}(t-s)-2E[J(s,t)]+2Var(J(s,t))} ds \end{aligned} \quad (4.34)$$

最后我们有

$$\begin{aligned} E[A^*B] &= E\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)} u_0\right)^* \int_{t_0}^t (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)} ds\right] \\ &= e^{-\hat{\gamma}(t-t_0)} \int_{t_0}^t (E[u_0^* b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] e^{(\lambda_b - i\omega)(s-t_0)} \\ &\quad + (\hat{b}(1 - e^{\lambda_b(s-t_0)}) + f(s)) E[u_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}]^*] ds \end{aligned} \quad (4.35)$$

由命题 (4.5), 以及上述的计算过程 (4.29), 类似的能得到

$$\begin{aligned}
E[u_0^* b_0 e^{-J(t_0, t) - J(s, t)}] &= e^{-E[J(s, t)] - E[J(t_0, t)] + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s, t)) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(t_0, t)) + \text{Cov}(J(s, t), J(t_0, t))} \times \\
&[E[u_0^*]E[b_0] + \text{Cov}(u_0^*, b_0^*) - E[u_0^*](\text{Cov}(b_0, J(s, t)) \\
&+ \text{Cov}(b_0, J(t_0, t))) - E[b_0](\text{Cov}(J(s, t), u_0^*) + \text{Cov}(J(t_0, t), u_0^*)) \\
&+ (\text{Cov}(u_0^*, J(s, t)) + \text{Cov}(u_0^*, J(t_0, t))) \times (\text{Cov}(b_0, J(s, t)) + \text{Cov}(b_0, J(t_0, t)))]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

以及

$$\begin{aligned}
E[u_0 e^{-J(t_0, t) - J(s, t)}] &= e^{-E[J(s, t)] - E[J(t_0, t)] + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s, t)) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(t_0, t)) + \text{Cov}(J(s, t), J(t_0, t))} \times \\
&(E[u_0] - \text{Cov}(u_0, J(s, t)) - \text{Cov}(u_0, J(t_0, t)))
\end{aligned} \tag{4.37}$$

于是把上述的几个式子代回到 (4.25) 即得到了  $\text{Var}(u(t))$ .

### 4.3 协方差

首先, 我们考虑  $\text{Cov}(u(t), u^*(t))$ . 由定义知,

$$\text{Cov}(u(t), u^*(t)) = E[u(t)^2] - E[u(t)]^2.$$

利用上一节中的记号, 由布朗运动  $W(t)$  的独立性,

$$E[u(t)^2] = E[A^2] + E[B^2] + 2E[AB]. \tag{4.38}$$

下面分别计算  $E[A^2]$ ,  $E[B^2]$  和  $E[AB]$ . 利用命题 (4.5),

$$\begin{aligned}
E[A^2] &= E[e^{-2J(t_0, t) + 2\hat{\lambda}(t-t_0)} u_0^2] = e^{-2\hat{\gamma}(t-t_0) - 2E[J(t_0, t)] + 2\text{Var}(J(t_0, t))} \times \\
&(E[u_0]^2 + \text{Cov}(u_0, u_0^*) - 4E[u_0]\text{Cov}(u_0, J(t_0, t)) + 4\text{Cov}(u_0, J(t_0, t))^2).
\end{aligned} \tag{4.39}$$

和上一节类似的,

$$E[B^2] = \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^t dr E\left[((b(s) + f(s))(b(r) + f(r))e^{-J(s, t) - J(r, t) + \hat{\lambda}(2t - s - r)}\right],$$

且由命题 (4.5) 有

$$\begin{aligned}
&E\left[((b(s) + f(s))(b(r) + f(r))e^{-J(s, t) - J(r, t) + \hat{\lambda}(2t - s - r)}\right] \\
&= e^{-\hat{\lambda}(2t - s - r) - E[J(s, t)] - E[J(r, t)] + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s, t)) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(r, t)) + \text{Cov}(J(s, t), J(r, t))} \times \\
&[E[b(s)b(r)] - E[b(s)] \times (\text{Cov}(b(r), J(r, t)) + \text{Cov}(b(r), J(s, t))) \\
&- E[b(r)] \times (\text{Cov}(b(s), J(r, t)) + \text{Cov}(b(s), J(s, t))) \\
&+ [\text{Cov}(b(r), J(s, t)) + \text{Cov}(b(r), J(r, t))] \times [\text{Cov}(b(s), J(s, t)) + \text{Cov}(b(s), J(r, t))] \\
&+ f(r) \times [E[b(s)] - \text{Cov}(b(s), J(s, t)) - \text{Cov}(b(s), J(r, t))] \\
&+ f(s) \times [E[b(r)] - \text{Cov}(b(r), J(r, t)) - \text{Cov}(b(r), J(s, t))] + f(s)f(r)]
\end{aligned} \tag{4.40}$$



其中

$$\begin{aligned} E[b(s)b(r)] &= (1 - e^{\lambda_b(s-t_0)} - e^{\lambda_b(r-t_0)} + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}) \hat{b}^2 \\ &+ \left( e^{\lambda_b(s-t_0)+\lambda_b(r-t_0)-2e^{\lambda_b(s-t_0)(r-t_0)}} \right) \hat{b}E[b_0] + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)} (Var(b_0) + |E[b_0]|^2) \end{aligned} \quad (4.41)$$

同样的,

$$\begin{aligned} E[AB] &= E[e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0 \int_{t_0}^t (b(s) + f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds] \\ &= e^{\hat{\lambda}(2t-s-t_0)} \int_{t_0}^t \left[ e^{\lambda_b(s-t_0)} E[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] + (\hat{b}(1 - e^{\lambda_b(s-t_0)}) + f(s)) E[u_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] \right] ds. \end{aligned} \quad (4.42)$$

其中第二个期望在上一节中已经求出结果了, 而

$$\begin{aligned} E[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] &= e^{-E[J(t_0,t)]-E[J(s,t)]+\frac{1}{2}(Var(J(t_0,t))+Var(J(s,t)))+Cov(J(t_0,t),J(s,t))} \times \\ & (Cov(u_0, b_0^*) + E[u_0]E[b_0] - E[u_0](Cov(b_0, J(t_0,t)) + Cov(b_0, J(s,t))) \\ & - E[b_0](Cov(u_0, J(t_0,t)) + Cov(u_0, J(s,t))) \\ & + [Cov(b_0, J(t_0,t)) + Cov(b_0, J(s,t))] \times [Cov(u_0, J(s,t)) + Cov(u_0, J(t_0,t))]) \end{aligned} \quad (4.43)$$

代入即可.

下面考虑  $Cov(u(t), \gamma(t))$ . 由定义,

$$Cov(u(t), \gamma(t)) = E[u(t)\gamma(t)] - E[u(t)]E[\gamma(t)] = E[u(t)(\gamma(t) - \hat{\gamma})] + E[u(t)](\hat{\gamma} - E[\gamma(t)]). \quad (4.44)$$

上式的第二项由 (3.2) 和 (4.11) 可以直接计算得到. 下面我们计算上式的第一项. 由 Itô 等距知,

$$\begin{aligned} E[u(t)(\gamma(t) - \hat{\gamma})] &= E \left[ \left( e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t (b(s) + f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sigma \int_{t_0}^t e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}dW(s) \right) \times (\gamma(t) - \hat{\gamma}) \right] \\ &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} E \left[ (\gamma(t) - \hat{\gamma})u_0 e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} \right] + \int_{t_0}^t e^{-\hat{\lambda}(s-t_0)} E \left[ (b(s) + f(s))(\gamma(t) - \hat{\gamma})e^{-J(s,t)} \right] ds \end{aligned} \quad (4.45)$$

由  $J(t_0, t)$  的定义 (1.6) 可知,

$$\frac{\partial J(t_0, t)}{\partial t} = (\gamma(t) - \hat{\gamma}),$$

那么 (4.45) 可以表示为

$$-e^{\hat{\lambda}(t-t_0)} \frac{\partial}{\partial t} E[u_0 e^{-J(t_0,t)}] - \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(s-t_0)} \frac{\partial}{\partial t} E[(b(s) + f(s)) e^{-J(s,t)}] ds, \quad (4.46)$$

其中由 (4.2) 和协方差的线性性质,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[u_0 e^{-J(t_0,t)}] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ (E[u_0] + Cov(-J(t_0, t), u_0)) e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2} Var(J(t_0,t))} \right] \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} Cov(-J(t_0, t), u_0) \right) e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2} Var(J(t_0,t))} \\ &\quad + (E[u_0] + Cov(u_0, -J(t_0, t))) \frac{\partial}{\partial t} e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2} Var(J(t_0,t))} \\ &= e^{-J(t_0,t) + \frac{1}{2} Var(J(t_0,t))} \times [Cov(-\gamma(t), u_0) + (E[u_0] + Cov(-J(t_0, t), u_0)) \times \\ &\quad (\hat{\gamma} - E[\gamma(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} Var(J(t_0, t)))] , \end{aligned} \quad (4.47)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E[(b(s) + f(s)) e^{-J(s,t)}] &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ (E[b(s)] + f(s) + Cov(b(s) + f(s), -J(s, t))) e^{-E[J(s,t)] + \frac{1}{2} Var(J(s,t))} \right] \\ &= e^{-E[J(s,t)] + \frac{1}{2} Var(J(s,t))} \times [Cov(-\gamma(t), b(s)) + (E[b(s)] + f(s) + Cov(b(s), J(s, t))) \times \\ &\quad \left( \hat{\gamma} - E[\gamma(t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} Var(J(s, t)) \right)] , \end{aligned} \quad (4.48)$$

且在上两式中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Var(J(s, t)) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{d_\gamma^2} (e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})^2 Var(\gamma_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3} \left( -1 + d_\gamma(t-s) + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2} e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2} e^{-2d_\gamma(s-t_0)} \right) \right] \\ &= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2} (1 - e^{-d_\gamma(t-s)} - e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)} + e^{-2d_\gamma(t-t_0)}) + \frac{2}{d_\gamma} Var(\gamma_0) \times (e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)} - e^{-2d_\gamma(t-t_0)}) . \end{aligned} \quad (4.49)$$

下面考虑  $Cov(u(t), b(t))$ . 由定义,

$$Cov(u(t), b(t)) = E[u(t)b^*(t)] - E[u(t)]E[b(t)]^*.$$

上式的第二项由 (4.11) 和 (3.1) 即可计算得到. 结合 Itô 公式, 完全类似之前的计算过

程, 第一项为

$$\begin{aligned}
E[u(t)b^*(t)] &= E \left[ u(t) \left( \hat{b}^* + (b_0^* - \hat{b}^*)e^{\lambda_b^*(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \right] \\
&= (1 - e^{\lambda_b^*(t-t_0)}) \hat{b}^* E[u(t)] + E[u(t)b_0^* e^{\lambda_b^*(t-t_0)}] \\
&\quad + E[\sigma_b \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(s-t_0) + \lambda_b^*(t-\xi)} dW(s) dW_b(\xi)] \\
&= (1 - e^{\lambda_b^*(t-t_0)}) \hat{b}^* E[u(t)] + E \left[ \left( e^{-J(t_0,t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} + \int_{t_0}^t (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} ds \right) b_0^* e^{\lambda_b^*(t-t_0)} \right] \\
&\quad + \frac{\sigma_b}{2\gamma_b} E \left[ \int_{t_0}^t e^{-J(s,t)} e^{-\lambda(t-s)} (e^{\lambda_b^*(t-s)} - e^{-i\omega_b(t-s) - \gamma_b(s+t-2t_0)}) \right] \\
&= (1 - e^{\lambda_b^*(t-t_0)}) \hat{b}^* E[u(t)] + e^{(\hat{\lambda} + \lambda_b^*)(t-t_0)} E[u_0 b_0^* e^{-J(t_0,t)}] + e^{\lambda_b^*(t-t_0)} \times \\
&\quad \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} \left( E[b_0^* b(s) e^{-J(s,t)}] + f(s) E[b_0 e^{-J(s,t)}]^* ds \right) \\
&\quad + \frac{\sigma_b}{2\gamma_b} E \left[ \int_{t_0}^t e^{-E[J(s,t)] + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s,t))} e^{-\lambda(t-s)} (e^{\lambda_b^*(t-s)} - e^{-i\omega_b(t-s) - \gamma_b(s+t-2t_0)}) \right],
\end{aligned} \tag{4.50}$$

并利用命题 (4.5), 在上式中

$$E[b_0 e^{-J(s,t)}] = e^{-E[J(s,t)] + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s,t))} \times (E[b_0] + \text{Cov}(b_0, -J(s,t))), \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
E[u_0 b_0^* e^{-J(t_0,t)}] &= e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2} \text{Var}(J(t_0,t))} \times [E[u_0] E[b_0]^* + \text{Cov}(u_0, b_0) + E[u_0] \text{Cov}(b_0, -J(t_0,t))^*] \\
&\quad + E[b_0]^* \text{Cov}(u_0, -J(t_0,t)) + \text{Cov}(u_0, -J(t_0,t)) \text{Cov}(b_0, -J(t_0,t))^*],
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
E[b_0^* b(s) e^{-J(s,t)}] &= e^{-J(s,t) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s,t))} \times [E[b_0]^* E[b(s)] + \text{Cov}(b_0, b(s)) + E[b_0]^* \text{Cov}(b(s), -J(s,t)) \\
&\quad + E[b(s)] \text{Cov}(b_0, -J(s,t))^* + \text{Cov}(b_0, -J(s,t))^* \text{Cov}(b(s), -J(s,t))].
\end{aligned} \tag{4.53}$$

最后我们考虑  $\text{Cov}(u(t), b^*(t))$ . 由定义,

$$\text{Cov}(u(t), b^*(t)) = E[u(t)b(t)] - E[u(t)]E[b(t)].$$

和前一分类似的, 只要考虑上式的第一项. 我们有

$$\begin{aligned}
E[u(t)b(t)] &= E \left[ u(t) \left( \hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \right) \right] \\
&= (1 - e^{\lambda_b(t-t_0)}) \hat{b} E[u(t)] + E[u(t)b_0 e^{\lambda_b(t-t_0)}] \\
&\quad + E[\sigma_b \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(s-t_0) + \lambda_b(t-\xi)} dW(s) dW_b(\xi)] \\
&= (1 - e^{\lambda_b^*(t-t_0)}) \hat{b} E[u(t)] + E \left[ \left( e^{-J(t_0,t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} + \int_{t_0}^t (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t) + \hat{\lambda}(s-t_0)} ds \right) b_0 e^{\lambda_b(t-t_0)} \right] \\
&= (1 - e^{\lambda_b(t-t_0)}) \hat{b} E[u(t)] + e^{(\hat{\lambda} + \lambda_b)(t-t_0)} E[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)}] + e^{\lambda_b(t-t_0)} \times \\
&\quad \int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)} (E[b_0 b(s) e^{-J(s,t)}] + f(s) E[b_0 e^{-J(s,t)}] ds)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

在上式中, 由命题 (4.5) 知,

$$\begin{aligned}
E[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)}] &= e^{-E[J(t_0,t)] + \frac{1}{2} \text{Var}(J(t_0,t))} \times [E[u_0]E[b_0] + \text{Cov}(u_0, b_0^*) + E[b_0]\text{Cov}(u_0, -J(t_0,t)) \\
&\quad + E[u_0]\text{Cov}(b_0, -J(t_0,t)) + \text{Cov}(u_0, -J(t_0,t))\text{Cov}(b_0, -J(t_0,t))],
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
E[b_0 b(s) e^{-J(s,t)}] &= e^{-J(s,t) + \frac{1}{2} \text{Var}(J(s,t))} \times [E[b_0]E[b(s)] + \text{Cov}(b_0, b(s)^*) + E[b_0]\text{Cov}(b(s), -J(s,t)) \\
&\quad + E[b(s)]\text{Cov}(b_0, -J(s,t)) + \text{Cov}(b_0, -J(s,t))\text{Cov}(b(s), -J(s,t))]
\end{aligned} \tag{4.56}$$

## 第 5 节 数值模拟

考虑以下的这样一个例子:

## 参考文献

- [1] 金福临等. 常微分方程. 上海科学技术出版社, 1984.
- [2] 何书元. 概率论. 北京大学出版社, 2006.
- [3] 应坚刚. 概率论. 2013.
- [4] 应坚刚. 随机过程. 2016.
- [5] Boris Gershgorin, John Harlim, and Andrew J Majda. Test models for improving filtering with model errors through stochastic parameter estimation. *Journal of Computational Physics*, 229(1):1–31, 2010.
- [6] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. A nonlinear test model for filtering slow-fast systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 6(3):611–649, 2008.
- [7] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. Filtering a nonlinear slow-fast system with strong fast forcing. *Communications in Mathematical Sciences*, 8(1):67–92, 2010.
- [8] Takeyuki Hida. Brownian motion. In *Brownian Motion*, pages 44–113. Springer, 1980.
- [9] Gregory F Lawler. *Introduction to stochastic processes*. CRC Press, 2006.
- [10] Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 3. Princeton university press Princeton, 1967.
- [11] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 21–39. Springer, 2003.