目录

随机参数化 Kalman 滤波测试模型解的统计量

卢川
学号：13300180056
专业：信息与计算科学

摘要： 本文研究了随机参数化 Kalman 滤波中得到广泛应用的测试模型的解, 利用 Itô 积分和特征函数补全了解的一阶和二阶统计量的计算过程, 并对理论结果进行了数值检验.

关键字: 随机参数化 Kalman 滤波; 随机微分方程组; 统计量; Itô 积分

第 1 节　导言

1.1　问题简介

滤波是从自然信号中得到最佳统计估计的过程. 在实际应用中, 研究者需要对自然界中的物理过程进行参数化表示, 而在此过程中, 不合适的采样率和不完全的物理认知会造成模型的系统误差, 最终使得对混乱信号的滤波结果受到较大的影响. 为此, B. Gershgorin 等提出了随机参数化扩展 Kalman 滤波模型 [5][6], 以降低模型的系统误差, 改进滤波结果.

自然界中的信号可近似的用 Langevin 方程的解进行模拟 [12]:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -\gamma(t)u(t) + \mathrm{i}\omega u(t) + \sigma\dot{W}(t) + f(t),$$

其中 $W(t)$ 表示复值白噪声, $f(t)$ 表示外界的驱动力. 在 [6] 中, Gershgorin 等提出了一个测试模型, 将 Langevin 方程中的各个项进行随机参数化, 以改进模型的系统误差:

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = (-\gamma(t) + \mathrm{i}\omega)u(t) + b(t) + f(t) + \sigma\dot{W}(t), \\ \dfrac{db(t)}{dt} = (-\gamma_b + \mathrm{i}\omega_b)(b(t) - \hat{b}) + \sigma_b\dot{W}_b(t), \\ \dfrac{d\gamma(t)}{dt} = -d_\gamma(\gamma(t) - \hat{\gamma}) + \sigma_\gamma\dot{W}_\gamma(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

此随机微分方程组解的一阶和二阶统计量在大量文献中作为测试标准被广泛应用, 但是 Gershgorin 在 [6] 中没有给出这些统计量的推导过程. 本文利用了 Itô 积分和特征函数, 补全了这些统计量的计算过程, 并对其理论结果进行了数值验证.

1.2　基本假设

在 (1.1) 中, ω 为 $u(t)$ 的振荡频率, $f(t)$ 为外部驱动力, σ 表示白噪声 $\dot{W}(t)$ 的强度. 此外, 参数 γ_b 和 d_γ 表示振荡阻尼, σ_b 和 σ_γ 分别表示加性和乘性修正 ((1.1) 中第 2, 3 式) 中白噪声的强度. $\hat{b}$ 和 $\hat{\gamma}$ 分别表示 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定平均偏差修正, ω_b 表示加性噪声的频率. 白噪声 $\dot{W}_\gamma(t)$ 是实值函数, 而 $\dot{W}(t)$ 及 $\dot{W}_b(t)$ 均为复值, 且其实部和虚部均为独立的白噪声.

一般认为方程组 (1.1) 有初值

$$\begin{cases} u(t_0) = u_0, \\ b(t_0) = b_0, \\ \gamma(t_0) = \gamma_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

且 u_0, b_0, γ_0 均为独立的高斯随机变量, 其统计量 $\mathrm{E}[u_0]$, $\mathrm{E}[\gamma_0]$, $\mathrm{E}[b_0]$, $\mathrm{Var}(u_0)$, $\mathrm{Var}(\gamma_0)$, $\mathrm{Var}(b_0)$, $\mathrm{Cov}(u_0,u_0^*)$, $\mathrm{Cov}(u_0,\gamma_0)$, $\mathrm{Cov}(u_0,b_0)$, $\mathrm{Cov}(u_0,b_0^*)$ 均假设为已知.

(1.1) 的第二和第三项均为线性方程, 由求解线性常微分方程组的相关知识 [1] 可知其通解有以下的形式:

$$
\begin{aligned}
b(t) &= \hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s), \\
\gamma(t) &= \hat{\gamma} + (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^{t} e^{-d_\gamma(t-s)} dW_\gamma(s).
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

其中 $\lambda_b = -\gamma_b + \mathrm{i}\omega_b$. 如果我们记

$$
\begin{aligned}
\hat{\lambda} &= -\hat{\gamma} + \mathrm{i}\omega, \\
J(s,t) &= \int_s^t (\gamma(s') - \hat{\gamma}) ds'
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

则 (1.1) 的通解可以表示为

$$
\begin{aligned}
u(t) = & e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} (b(s) + f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} ds \\
& + \sigma \int_{t_0}^{t} e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} dW(s).
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

本文在第三和第四节中将对 u, b, γ, 分别计算其一阶和二阶统计量, 以及各个变量间的相关性.

第 2 节 一些前置引理

2.1 Itô 积分和 Itô 等距

在求解随机微分方程时, 需要对布朗运动进行积分. 由 [14] 的例 3.1.1, 我们可以定义多种不同的随机积分形式, 其中 Itô 积分是应用最广的一种:

定义 2.1 [14](Itô 积分) 设 $f \in \mathcal{V}(S,T)$. 则 f 的 Itô 积分定义为

$$
\int_S^T f(t,\omega) dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \phi_n(t,\omega) dB_t(\omega),
$$

其中 ϕ_n 为基本函数序列, 且满足当 $n \to \infty$ 时

$$
\mathrm{E}\left[\int_S^T (f(t,\omega) - \phi_n(t,\omega))^2 dt\right] \to 0.
$$

由上述定义即可得到 Itô 积分的一个重要性质:

定理 2.2 [14] (Itô 等距) 对于 $\forall f \in \mathcal{V}(S,T)$ 有

$$\mathrm{E}\left[\left(\int_S^T f(t,\omega)dB_t\right)^2\right] = \mathrm{E}\left[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\right].$$

这里 $\mathcal{V}(S,T)$ 见 [14] 中的定义 3.1.2 至 3.1.4.

利用上述方法, 即利用基本函数序列来逼近 $\mathcal{V}(S,T)$ 中的函数, 我们能够得到 Itô 积分的线性性质:

定理 2.3 [14] 设 $f, g \in \mathcal{V}(0,T)$, $0 \leqslant S < U < T$. 那么

$$(1)\quad \int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t,\ \text{a.e.}$$

$$(2)\quad \int_S^T (cf+g)dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t,\ \text{a.e.}$$

$$(3)\quad \mathrm{E}\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0.$$

上述几个定理的证明请见 [14, Page 26-31].

2.2 高斯分布与特征函数

命题 2.4 [2] 如果随机向量 $\mathbf{X}$ 服从多元正态分布

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma),$$

那么 $\mathbf{X}$ 的概率密度为

$$f_{\mathbf{X}}(X_1, \cdots, X_k) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mu)^\top\right)\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\mu)}{\sqrt{(2\pi)^k|\Sigma|}}$$

命题 2.5 对于一个复值高斯变量 $X = a + b\mathrm{i}$, a 与 b 均服从高斯分布, 那么其期望和方差为

$$\begin{cases} \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[a] + \mathrm{i}\mathrm{E}[b], \\ \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(X-\mathrm{E}[X])^*]. \end{cases}$$

除此之外, 我们还需要引入随机变量的特征函数:

定义 2.6 [2](特征函数) 如果 X 是实值随机变量, $\mathrm{E}[\sin(tX)]$, $\mathrm{E}[\cos(tX)]$ 均存在, 那么称

$$\phi(t) = \mathrm{E}\left[e^{\mathrm{i}tX}\right] = \mathrm{E}[\cos(tX)] + \mathrm{i}\mathrm{E}[\sin(tX)],\ t \in \mathbb{R}$$

为 X 的特征函数, 其中 i 为虚数单位.

对于随机向量, 其特征函数定义为

定义 2.7 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为随机向量, 则 $\mathbf{X}$ 的特征函数为

$$\phi(t) = \mathrm{E}\left[\exp(\mathrm{i}\mathbf{t}\mathbf{X}^\top)\right], \ \mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

以下为高斯分布的特征函数.

命题 2.8 高斯分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的特征函数为

$$\phi(t) = \exp(\mathrm{i}\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$$

此命题的证明见 [2] 第五章例 2.4. 一个更一般的定义如下:

定义 2.9 [3] 设 ξ 为 d-维随机变量, F 为 ξ 的分布函数. 那么

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}x\cdot y} dF(y), \ x \in \mathbb{R}^d$$

(其中 $(\cdot)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 空间中的内积) 称为分布函数 F 的特征函数.

由此定义即可看出, 特征函数即为概率密度函数的 Fourier 变换:

$$\hat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}x\cdot y} f(y) dy. \tag{2.1}$$

以下是 Fourier 变换的一个基本性质, 在求 $u(t)$ 的统计量时将会用到 [4].

命题 2.10 (Fourier 变换的微分关系) 如果

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0,$$

且 $f'(x)$ 的 Fourier 变换存在, 那么

$$\mathcal{F}[f'(x)] = \mathrm{i}\omega\mathcal{F}[f(x)].$$

更一般的, 若 $f(\infty) = f'(\infty) = \cdots = f^{(k-1)}(\infty) = 0$, 且 $\mathcal{F}[f^{(k)}(x)]$ 存在, 则

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)] = (\mathrm{i}\omega)^k\mathcal{F}[f].$$

第 3 节 $b(t)$ 与 $\gamma(t)$ 的统计量

3.1 均值

当 t 固定时, 由 (1.3) 式可知 $b(t)$ 的通解第一项为常数, 第二项中只有 b_0 是一个随机变量. 那么由 (1.2), $b(t)$ 通解第二项的期望为 $(\mathrm{E}[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}$. 而由于

$$f = f(s) = e^{\lambda_b(t-s)} \in \mathcal{V}(S, T),$$

故由 (2.3) 的 (3) 式,

$$\mathrm{E}\left[\sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s) dW_b(s)}\right] = 0.$$

从而

$$\mathrm{E}(b(t)) = \hat{b} + (\mathrm{E}[b_0] - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}. \tag{3.1}$$

对于 γ 亦有相同的结论

$$\mathrm{E}(\gamma(t)) = \hat{\gamma} + (\mathrm{E}[\gamma_0] - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)}. \tag{3.2}$$

3.2 方差

当 t 固定时, $b(t)$ 为一个复值随机变量, 由 [2] 的第四章相关知识,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(b(t)) &= \mathrm{E}\left[(b(t) - \mathrm{E}[b(t)])(b(t) - \mathrm{E}[b(t)])^*\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left((b_0 - \mathrm{E}[b_0])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right) \times \right. \\
&\qquad \left. \left((b_0 - \mathrm{E}[b_0])e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} dW_b(s)\right)^*\right] \\
&= e^{-2\gamma_b(t-t_0)}\mathrm{Var}(b_0) + \mathrm{E}\left[\sigma_b^2 \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s) \left(\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right)^*\right] \\
&= e^{-2\gamma_b(t-t_0)}\mathrm{Var}(b_0) + \sigma_b^2 \mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-2\gamma_b(t-s)} ds\right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

上面的最后一式右边利用了 Itô 等距 (2.2). 计算右边即可得到

$$\mathrm{Var}(b(t)) = e^{-2\gamma_b(t-t_0)}\mathrm{Var}(b_0) + \frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b}(1 - e^{-2\gamma_b(t-t_0)}). \tag{3.4}$$

同样的, 我们也有

$$\mathrm{Var}(\gamma(t)) = e^{-2d_\gamma(t-t_0)}\mathrm{Var}(\gamma_0) + \frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma}(1 - e^{-2d_\gamma(t-t_0)}). \tag{3.5}$$

3.3 协方差

考虑到 $b(t)$ 为复值函数, 由协方差的定义 [2] 即可知

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(b(t),b(t)^*) &= \mathrm{E}\left[(b(t)-\mathrm{E}[b(t)])(b(t)^*-\mathrm{E}[b(t)^*])\right]\\ &= \mathrm{E}\left[\left(b_0-\mathrm{E}[b_0]e^{\lambda_b(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)\times\right.\\ &\left.\left((b_0^*-\mathrm{E}[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)\right] \qquad \cdots(3.1)\\ &= \mathrm{E}\left[(b_0-\mathrm{E}[b_0])(b_0^*-\mathrm{E}[b_0^*])e^{2\lambda_b(t-t_0)}\right]+\sigma_b\mathrm{E}\left[(b_0-\mathrm{E}[b_0])\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right]\\ &+\sigma_b\mathrm{E}\left[(b_0^*-\mathrm{E}[b_0^*])e^{\lambda_b(t-t_0)}\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right]+\sigma_b^2\mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)^2\right]\end{aligned}$$

在上式的第二项中, 由于 b_0 与 $\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)$ 相互独立, 故由 Itô 积分的性质 (2.3) 可知

$$\sigma_b\mathrm{E}\left[(b_0-\mathrm{E}[b_0])\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right]=\sigma_b\mathrm{E}\left[b_0-\mathrm{E}[b_0]\right]\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right]=0$$

同样的, 上式中第三项也为 0, 而第四项由 Itô 等距 (2.2) 即知为 0. 故

$$\mathrm{Cov}(b(t),b(t)^*)=\mathrm{E}[(b_0-\mathrm{E}[b_0])(b_0^*-\mathrm{E}[b_0^*])]e^{2\lambda_b(t-t_0)}=\mathrm{Cov}(b_0,b_0^*)e^{2\lambda_b(t-t_0)} \tag{3.6}$$

与之类似的,

$$\mathrm{Cov}(b(t),\gamma(t))=\mathrm{E}[(b(t)-\mathrm{E}[b(t)])(\gamma(t)-\mathrm{E}[\gamma(t)])]=\mathrm{Cov}(b_0,\gamma_0)e^{(\lambda_b-d_\gamma)(t-t_0)} \tag{3.7}$$

第 4 节 $u(t)$ 的统计量

4.1 均值

在 $u(t)$ 的表达式 (1.5) 中, $e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}$, $f(t)$ 和 σ 均为常值. 那么由数学期望的线性性质 ([2] 第四章定理 2.2) 和 Itô 积分的性质 (2.3) 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u(t)]=e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}\mathrm{E}\left[e^{-J_0(t_0,t)}u_0\right]+\int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)}\mathrm{E}\left[b(s)e^{-J(s,t)}\right]ds\\ +\sigma\int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)}f(s)\mathrm{E}\left[e^{-J(s,t)}\right]ds\end{aligned} \tag{4.1}$$

下面我们利用高斯随机过程 $J(s,t)$ 的特征函数来计算上式的右边.
首先我们有以下的命题:

命题 4.1 [7][8]

$$\mathrm{E}\left[ze^{\mathrm{i}bx}\right]=(\mathrm{E}[z]+\mathrm{i}b\mathrm{Cov}(z,x))e^{\mathrm{i}b\mathrm{E}[x]-\frac{1}{2}b^2\mathrm{Var}(x)}$$

其中 z 为复值高斯随机变量, x 为实值高斯随机变量.

证明. 不妨记

$$z=y+\mathrm{i}w,\quad y,w\in\mathbb{R}.$$

那么我们只要计算出 $\mathrm{E}[ye^{\mathrm{i}bx}]$ 和 $\mathrm{E}[we^{\mathrm{i}bx}]$, 然后利用 (4.1) 将其组合起来. 令 $\mathbf{v}=(x,y,w)$, 那么由于 $\mathbf{v}$ 为一个满足多元 Gauss 分布的随机向量, 其特征函数由 (2.8) 即可给出:

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})=\exp(\mathrm{i}\mathbf{s}^\top\mathrm{E}[\mathbf{v}]-\frac{1}{2}\mathbf{s}^\top\Sigma\mathbf{s}),$$

其中 Σ 为协方差矩阵. 记 $g(\mathbf{v})$ 为 $\mathbf{v}$ 的概率密度函数, 那么由特征函数的定义 (2.1), 即特征函数为概率密度的 Fourier 变换即可知道,

$$\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{\mathrm{i}\mathbf{s}^\top\mathbf{v}}g(\mathbf{v})d\mathbf{v}$$

利用 Fourier 变换的性质 (2.10), 我们不妨对 s_2 求偏导 [7], 有

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{i}y_0e^{\mathrm{i}\mathbf{s}^\top\mathbf{v}}g(\mathbf{v})d\mathbf{v}=i\mathrm{E}\left[y_0e^{\mathrm{i}\mathbf{s}^\top\mathbf{v}}\right].$$

令 $\mathbf{v}=(b,0,0)^\top$,

$$\mathrm{E}[y_0e^{\mathrm{i}bx_0}]=-\mathrm{i}\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_2}\bigg|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top}$$

同样的, 我们有

$$\mathrm{E}[w_0e^{\mathrm{i}bx_0}]=-\mathrm{i}\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(s)}{\partial s_3}\bigg|_{\mathbf{s}=(b,0,0)^\top}$$

由多元高斯分布的概率密度函数 (2.4) 有

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_2}=(\mathrm{i}\mathrm{E}[y_0]-\mathrm{Var}(y_0)s_2-\mathrm{Cov}(x_0,y_0)s_1-\mathrm{Cov}(y_0,w_0)s_3)\phi_{\mathbf{v}}(s)$$
$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{v}}(\mathbf{s})}{\partial s_3}=(\mathrm{i}\mathrm{E}[w_0]-\mathrm{Var}(w_0)s_3-\mathrm{Cov}(x_0,w_0)s_1-\mathrm{Cov}(y_0,w_0)s_2)\phi_{\mathbf{v}}(s)$$

分别计算这两个偏导数在 $\mathbf{s}=(b,0,0)^\top$ 处的值, 有

$$\mathrm{E}\left[y_0e^{\mathrm{i}bx_0}\right]=(\mathrm{E}[y_0]+\mathrm{i}\mathrm{Cov}(x_0,y_0)b)\exp(\mathrm{i}b\mathrm{E}[x_0]-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(x_0)b^2)$$
$$\mathrm{E}\left[w_0e^{\mathrm{i}bx_0}\right]=(\mathrm{E}[w_0]+\mathrm{i}\mathrm{Cov}(x_0,w_0)b)\exp(\mathrm{i}b\mathrm{E}[x_0]-\frac{1}{2}\mathrm{Var}(x_0)b^2)$$

那么

$$\mathrm{E}\left[ze^{\mathrm{i}bx}\right] = (\mathrm{E}[z] + \mathrm{i}b\mathrm{Cov}(z,x))e^{\mathrm{i}b\mathrm{E}[x]-\frac{1}{2}b^2\mathrm{Var}(x)}.$$

□

由此我们立刻可以得到

推论 4.2 在命题4.1的条件下,

$$\mathrm{E}\left[ze^{bx}\right] = (\mathrm{E}[z] + b\mathrm{Cov}(z,x))e^{b\mathrm{E}[x]+\frac{1}{2}b^2\mathrm{Var}(x)}.$$

利用推论4.2即有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[u(t)] &= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}(\mathrm{E}[u_0] - \mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)))e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}(\hat{b} + e^{\lambda_b(s-t_0)}(\mathrm{E}[b_0] - \hat{b} - \mathrm{Cov}(b_0, J(s,t))))e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}ds \\ &+ \int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)}f(s)e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}ds\end{aligned} \tag{4.2}$$

下面我们计算

$$\mathrm{Cov}(u_0, J(s,t)),\ \mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)),\ \mathrm{E}[J(s,t)],\ \mathrm{Var}(J(s,t)).$$

首先,

$$\begin{aligned}J(s,t) &= \int_s^t \left[(\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)} + \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)\right]ds' \\ &= \int_s^t (\gamma_0 - \hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds' + \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\end{aligned} \tag{4.3}$$

那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(u_0, J(s,t)) &= \mathrm{Cov}\left(u_0, \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})(\gamma_0 - \hat{\gamma})\right) \\ &+ \mathrm{Cov}\left(u_0, \int_s^t \sigma_\gamma \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\right) \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})[\mathrm{Cov}(u_0,\gamma_0) - \mathrm{Cov}(u_0,\hat{\gamma})] \\ &= \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})\mathrm{Cov}(u_0,\gamma_0).\end{aligned} \tag{4.4}$$

这是因为 u_0 与 $\hat{\gamma}$ 相互独立. 同理有

$$\mathrm{Cov}(b_0, J(s,t)) = \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)})\mathrm{Cov}(b_0,\gamma_0). \tag{4.5}$$

为了计算 $\mathrm{E}[J(s,t)]$, 我们对 (3.2) 求积分, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[J(s,t)] &= \mathrm{E}\left[\int_s^t (\gamma(s')-\hat{\gamma})ds'\right] = \int_s^t (\mathrm{E}[\gamma(s')]-\hat{\gamma})ds' \\ &= \int_s^t (\mathrm{E}[\gamma_0]-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds' = \frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)}-e^{-d_\gamma(t-t_0)})(\mathrm{E}[\gamma_0]-\hat{\gamma}))\end{aligned} \tag{4.6}$$

结合 (4.6) 和 (4.3) 可知,

$$\mathrm{E}\left[\sigma_\gamma \int_s^t \int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\right] = 0.$$

此外, 由定义即有

$$\mathrm{Var}(J(s,t)) = \mathrm{E}\left[J^2(s,t)\right] - \mathrm{E}[J(s,t)]^2$$

$$\begin{aligned}&= \mathrm{E}\left[\left(\int_s^t (\gamma_0-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds'\right)^2\right] - \mathrm{E}[J(s,t)]^2 + 2\mathrm{E}\left[\left(\int_s^t (\gamma_0-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds'\right)\times\right. \\ &\quad \left.\left(\sigma_\gamma\int_s^t\int_{t_0}^{s'} e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\right)\right] + \sigma_\gamma^2\mathrm{E}\left[\left(\int_s^t\int_{t_0}^{s} e^{-d_\gamma(s'-s)}dW_\gamma(s)ds'\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)}-e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2\left(\mathrm{E}[\gamma_0^2]-\mathrm{E}[\gamma_0]^2\right) + \sigma_\gamma^2\mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma}\left(1-e^{-d_\gamma}(t-x)\right)dW_\gamma(x)\right)^2\right]\end{aligned}$$

由 Itô 等距 (定理2.2) 知上式的第二项为

$$\begin{aligned}&\sigma_\gamma^2\mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t \frac{1}{d_\gamma}\left(1-e^{-d_\gamma}(t-x)\right)dW_\gamma(x)\right)^2\right] \\ &= \sigma_\gamma^2\mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^s\int_{t_0}^t e^{-d_\gamma(s'-x)}ds'dW_\gamma(x) + \int_s^t\int_x^t e^{-d_\gamma(s'-x)}ds'dW_\gamma(x)\right)^2\right] \\ &= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2}\left\{\int_{t_0}^t \left(e^{-d_\gamma(s-x)}-e^{-d_\gamma(t-x)}\right)^2dx + \int_s^t\left(1-e^{-d_\gamma(t-x)}\right)^2dx\right. \\ &\quad \left. + 2\mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t\left(e^{-d_\gamma(s-x)}-e^{-d_\gamma(t-x)}\right)dW_\gamma(x)\right)\left(\int_s^t\left(1-e^{-d_\gamma(t-x)}\right)dW_\gamma(x)\right)\right]\right\} \\ &= \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\left(-1+d_\gamma(t-s)+e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)}+e^{-d_\gamma(t-s)}-\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)}-\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t)}-\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-s)}\right) + 2\mathrm{E}\left[\int_{\min\{s,t_0\}}\left(e^{-d_\gamma(s-x)}-e^{-d_\gamma(t-x)}\right)\left(1-e^{-d_\gamma(t-x)}\right)dt\right]\end{aligned}$$

这里我们将两个积分区域均扩展至 $[\min\{s,t_0\},\ t]$ 上, 并设积分区域较小的被积函数在延拓的区间上为 0. 那么

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(J(s,t)) = \frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)} - e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2 \mathrm{Var}(\gamma_0) + \frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\Big(-1 + d_\gamma(t-s) \\ + e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)} + e^{-d_\gamma(t-s)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)} - \frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\Big)\end{aligned} \tag{4.7}$$

将 (4.7), (4.4), (4.5) 代入 (4.2) 式即得 $u(t)$ 的均值.

4.2 方差

利用定义 $\mathrm{Var}(u(t)) = \mathrm{E}\left[|u(t)|^2\right] - |\mathrm{E}[u(t)]|^2$, 我们记 $u(t) = A + B + C$,
其中

$$\begin{cases} A = e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0, \\ B = \displaystyle\int_{t_0}^t (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds, \\ C = \sigma \displaystyle\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}dW(s). \end{cases}$$

于是由 Itô 积分的性质有

$$\mathrm{E}\left[|u(t)|^2\right] = \mathrm{E}\left[|A|^2\right] + \mathrm{E}\left[|B|^2\right] + \mathrm{E}\left[|C|^2\right] + 2\mathrm{Re}\{\mathrm{E}[A^*B]\}. \tag{4.8}$$

下面我们分别求出 $\mathrm{E}\left[|A|^2\right], \mathrm{E}\left[|B|^2\right], \mathrm{E}\left[|C|^2\right], \mathrm{E}[AB]$. 首先由命题4.1可知

命题 4.3 对于复值 Gaussian 随机变量 z 和 w, 以及实值 Gaussian 随机变量 x,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[zwe^{bx}\right] = \big[&\mathrm{E}[z]\mathrm{E}[w] + \mathrm{Cov}(z,w^*) + b(\mathrm{E}[z]\mathrm{Cov}(w,x)) + \mathrm{E}[w]\mathrm{Cov}(z,x) \\ &+ b^2\mathrm{Cov}(z,x)\mathrm{Cov}(w,x)\big]\, e^{b\mathrm{E}[x]+\frac{b^2}{2}\mathrm{Var}(x)}.\end{aligned}$$

利用上述命题, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|A|^2\right] = &\left(|\mathrm{E}[u_0]|^2 + \mathrm{Var}(u_0) - 4\mathrm{Re}\left\{\mathrm{E}[u_0]^*\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)\right\} + 4|\mathrm{Cov}(u_0,J(t_0,t)|^2\right) \times \\ & e^{-2\hat{\gamma}(t-t_0)-2\mathrm{E}[J(t_0,t)]+2\mathrm{Var}(J(t_0,t))},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[|B|^2\right] &= \mathrm{E}\left[\left|\int_{t_0}^t (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds\right|^2\right] \\ &= \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^t dr \mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}\left[(b(r)+f(r))e^{-J(r,t)+\hat{\lambda}(t-r)}\right]^*\right]\end{aligned}$$

在上式中, 被积的最后一项为

$$\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}\left[(b(r)+f(r))e^{-J(r,t)+\hat{\lambda}(t-r)}\right]^*\right]$$

$$=\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))(b^*(r)+f^*(r))e^{-J(s,t)-J(r,t)-\hat{\gamma}(2t-s-r)+\mathrm{i}\omega(r-s)}\right]$$

$$=e^{-J(s,t)-J(r,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(r,t))+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,t))-\hat{\gamma}(2t-s-r)+\mathrm{i}\omega(r-s)}\times$$

$$\{\mathrm{E}[b(s)b^*(r)]+\mathrm{E}[b(s)]\times[\mathrm{Cov}(b^*(r),-J(s,t))+\mathrm{Cov}(b^*(r),-J(r,t))]$$

$$+\mathrm{E}[b^*(r)]\times[\mathrm{Cov}(b(s),-J(s,t))+\mathrm{Cov}(b(s),-J(r,t))]$$

$$+[\mathrm{Cov}(b^*(r),J(s,t))+\mathrm{Cov}(b^*(r),J(r,t))]\times[\mathrm{Cov}(b(s),J(s,t))+\mathrm{Cov}(b(s),J(r,t))]$$

$$+f^*(r)\times[\mathrm{E}[b(s)]-\mathrm{Cov}(b(s),J(s,t))-\mathrm{Cov}(b(s),J(r,t))]$$

$$+f(s)\times[\mathrm{E}[b^*(r)]-\mathrm{Cov}(b(r),J^*(s,t))-\mathrm{Cov}(b(r),J^*(r,t))]$$

$$+f(s)f^*(r)\}.$$

其中, 由 Itô 公式和 Itô 积分的性质即知

$$\mathrm{E}[b(s)b(r)]=\mathrm{E}\left[\left(\hat{b}+(b_0-\hat{b})e^{\lambda_b(s-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^{s}e^{\lambda_b(s-w)}dW_b(w)\right)\times\left(\hat{b}+(b_0-\hat{b})e^{\lambda_b(r-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^{r}e^{\lambda_b(r-w)}dW_b(w)\right)\right]$$

$$=\left(1-e^{\lambda_b(s-t_0)}-e^{\lambda_b(r-t_0)}+e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\right)\hat{b}^2+\left(e^{\lambda_b(s-t_0)}+e^{\lambda_b(r-t_0)}-2e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[b_0]$$

$$+e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\left(\mathrm{Var}(b_0)+\mathrm{E}[b_0]^2\right)+\frac{\sigma_b^2}{2\gamma_b}\left(e^{-\gamma_b(s+r-2\min(s,r))}-e^{-\gamma_b(s+r-2t_0)}\right)e^{\mathrm{i}\omega_b(s-r)}$$

结合 (4.6) 和 (4.5) 有

$$\mathrm{Cov}(b(r),J(s,t))=e^{\lambda_b(r-t_0)}\mathrm{Cov}(b_0,J(s,t))+\sigma_b\mathrm{Cov}\left(\int_{t_0}^{r}e^{\lambda_b(r-w)}dW_b(w),J(s,t)\right)$$

$$=\frac{1}{d_\gamma}(e^{-d_\gamma(s-t_0)}-e^{-d_\gamma(t-t_0)})e^{\lambda_b(r-t_0)}\mathrm{Cov}(b_0,\gamma_0)$$

当 $t_0\leqslant r\leqslant s\leqslant t$ 时, 我们这么计算 $J(s,t)$ 和 $J(r,t)$ 的协方差:

$$\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,t))=\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,s)+J(s,t))=\mathrm{Var}(J(s,t))+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,s)).$$

其中 $\mathrm{Var}(J(s,t))$ 由 (4.7) 已求出. 由类似求 $\mathrm{Var}(J(s,t))$ 的过程, 有

$$\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,s))=\mathrm{Cov}\left(\int_s^t(\gamma_0-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds'+\int_s^t\sigma_\gamma\int_{t_0}^{s'}e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds',\right.$$

$$\left.\int_r^s(\gamma_0-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(s'-t_0)}ds'+\int_r^s\sigma_\gamma\int_{t_0}^{s'}e^{-d_\gamma(s'-x)}dW_\gamma(x)ds'\right)$$

$$=\frac{\mathrm{Var}(\gamma_0)}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(t-t_0)}-e^{-d_\gamma(s-t_0)}\right)\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)}e^{-d_\gamma(r-t_0)}\right)-\frac{\sigma_\gamma^2}{2d_\gamma^3}\left(e^{-d_\gamma(t-s)}-e^{-d_\gamma(t-r)}\right.$$

$$\left.+e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)}-e^{-d_\gamma(t+r-2t_0)}-1+e^{-d_\gamma(s-r)}-e^{-2d_\gamma(s-t_0)}+e^{-d_\gamma(s+r-2t_0)}\right)$$

当 $t_0\leqslant s\leqslant r\leqslant t$ 时, 只要考虑到 $\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,t))=\mathrm{Cov}(J(r,t),J(s,t))$, 于是只要在结果中将 s 与 r 交换即可. 接下来, 由 Itô 等距有

$$\mathrm{E}\left[|C|^2\right]=\sigma^2\mathrm{E}\left[\left(\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}dW(s)\right)^2\right]$$

$$=\sigma^2\int_{t_0}^t e^{-2\hat{\gamma}(t-s)}\mathrm{E}\left[e^{-2J(s,t)}\right]ds=\sigma^2\int_{t_0}^t e^{-2\hat{\gamma}(t-s)-2\mathrm{E}[J(s,t)]+2\mathrm{Var}(J(s,t))}ds$$

$$\mathrm{E}[A^*B]=\mathrm{E}\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0\right)^*\int_{t_0}^t(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds\right]$$

$$=e^{-\hat{\gamma}(t-t_0)}\int_{t_0}^t\left(\mathrm{E}\left[u_0^*b_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right]e^{(\lambda_b-\mathrm{i}\omega)(s-t_0)}\right.$$

$$\left.+\left(\hat{b}\left(1-e^{\lambda_b(s-t_0)}\right)+f(s)\right)\mathrm{E}\left[u_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right]^*\right)ds$$

由命题 (4.3), 以及类似 $\mathrm{E}[B^2]$ 的计算过程, 类似的能得到

$$\mathrm{E}\left[u_0^*b_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right]=e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(t_0,t))}\times$$

$$[\mathrm{E}[u_0^*]\mathrm{E}[b_0]+\mathrm{Cov}(u_0^*,b_0^*)-\mathrm{E}[u_0^*](\mathrm{Cov}(b_0,J(s,t))+\mathrm{Cov}(b_0,J(t_0,t)))$$

$$-\mathrm{E}[b_0](\mathrm{Cov}(J(s,t),u_0^*)+\mathrm{Cov}(J(t_0,t),u_0^*))+(\mathrm{Cov}(u_0^*,J(s,t))+\mathrm{Cov}(u_0^*,J(t_0,t)))$$

$$\times(\mathrm{Cov}(b_0,J(s,t))+\mathrm{Cov}(b_0,J(t_0,t)))],$$

$$\mathrm{E}\left[u_0e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}\right]=e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(t_0,t))}\times$$

$$(\mathrm{E}[u_0]-\mathrm{Cov}(u_0,J(s,t))-\mathrm{Cov}(u_0,J(t_0,t)))$$

于是把上述的几个式子代回到 (4.8) 即得到了 $\mathrm{Var}(u(t))$.

4.3 协方差

Cov$(u(t), u^*(t))$

由定义知, $\mathrm{Cov}(u(t), u^*(t)) = \mathrm{E}\left[u(t)^2\right] - \mathrm{E}[u(t)]^2$. 利用上一节中的记号, 由布朗运动 $W(t)$ 的独立性,

$$\mathrm{E}[u(t)^2] = \mathrm{E}[A^2] + \mathrm{E}[B^2] + 2\mathrm{E}[AB].$$

下面分别计算 $\mathrm{E}[A^2]$, $\mathrm{E}[B^2]$ 和 $\mathrm{E}[AB]$. 利用命题 (4.3), 和上一节类似的, 我们有

$$\mathrm{E}[A^2] = \mathrm{E}[e^{-2J(t_0,t)+2\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0^2] = e^{2\hat{\lambda}(t-t_0)-2\mathrm{E}[J(t_0,t)]+2\mathrm{Var}(J(t_0,t))}\times$$

$$\left(\mathrm{E}[u_0]^2 + \mathrm{Cov}(u_0, u_0^*) - 4\mathrm{E}[u_0]\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t)) + 4\mathrm{Cov}(u_0, J(t_0,t))^2\right),$$

$$\mathrm{E}\left[B^2\right] = \int_{t_0}^{t} ds \int_{t_0}^{t} dr \mathrm{E}\left[((b(s)+f(s))(b(r)+f(r))e^{-J(s,t)-J(r,t)+\hat{\lambda}(2t-s-r)}\right]$$

上式中的被积项为

$$\mathrm{E}\left[((b(s)+f(s))(b(r)+f(r))e^{-J(s,t)-J(r,t)+\hat{\lambda}(2t-s-r)}\right]$$

$$= e^{\hat{\lambda}(2t-s-r)-\mathrm{E}[J(s,t)]-\mathrm{E}[J(r,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(r,t)+\mathrm{Cov}(J(s,t),J(r,t))}\times$$

$$[\mathrm{E}[b(s)b(r)] - \mathrm{E}[b(s)] \times (\mathrm{Cov}(b(r), J(r,t)) + \mathrm{Cov}(b(r), J(s,t)))$$

$$- \mathrm{E}[b(r)] \times (\mathrm{Cov}(b(s), J(r,t)) + \mathrm{Cov}(b(s), J(s,t)))$$

$$+ [\mathrm{Cov}(b(r), J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b(r), J(r,t))] \times [\mathrm{Cov}(b(s), J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b(s), J(r,t))]$$

$$+ f(r) \times [\mathrm{E}[b(s)] - \mathrm{Cov}(b(s), J(s,t)) - \mathrm{Cov}(b(s), J(r,t))]$$

$$+ f(s) \times [\mathrm{E}[b(r)] - \mathrm{Cov}(b(r), J(r,t)) - \mathrm{Cov}(b(r), J(s,t))] + f(s)f(r)],$$

其中

$$\mathrm{E}[b(s)b(r)] = \left(1 - e^{\lambda_b(s-t_0)} - e^{\lambda_b(r-t_0)} + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\right)\hat{b}^2$$

$$+ \left(e^{\lambda_b(s-t_0)} + e^{\lambda_b(r-t_0)} - 2e^{\lambda_b(s-t_0)(r-t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[b_0] + e^{\lambda_b(s+r-2t_0)}\left(\mathrm{Var}(b_0) + |\mathrm{E}[b_0]|^2\right),$$

$$\mathrm{E}[AB] = \mathrm{E}[e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0 \int_{t_0}^{t} (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(t-s)}ds]$$

$$= e^{\hat{\lambda}(2t-s-t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[e^{\lambda_b(s-t_0)}\mathrm{E}[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] + (\hat{b}(1-e^{\lambda_b(s-t_0)}) + f(s))\mathrm{E}[u_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}]\right] ds.$$

上式中的第二个期望在上一节中已经求出结果了, 而

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)-J(s,t)}] = e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}(\mathrm{Var}(J(t_0,t))+\mathrm{Var}(J(s,t)))+\mathrm{Cov}(J(t_0,t),J(s,t))}\times \\
&\quad(\mathrm{Cov}(u_0,b_0^*)+\mathrm{E}[u_0]\mathrm{E}[b_0]-\mathrm{E}[u_0](\mathrm{Cov}(b_0,J(t_0,t))+\mathrm{Cov}(b_0,J(s,t))) \\
&\quad-\mathrm{E}[b_0](\mathrm{Cov}(u_0,J(t_0,t))+\mathrm{Cov}(u_0,J(s,t))) \\
&\quad+[\mathrm{Cov}(b_0,J(t_0,t))+\mathrm{Cov}(b_0,J(s,t))]\times[\mathrm{Cov}(u_0,J(s,t))+\mathrm{Cov}(u_0,J(t_0,t))]).
\end{aligned}
$$

Cov$(u(t),\gamma(t))$

由定义,

$$
\mathrm{Cov}(u(t),\gamma(t)) = \mathrm{E}[u(t)\gamma(t)]-\mathrm{E}[u(t)]\mathrm{E}[\gamma(t)] = \mathrm{E}[u(t)(\gamma(t)-\hat{\gamma})]+\mathrm{E}[u(t)](\hat{\gamma}-\mathrm{E}[\gamma(t)]).
$$

上式的第二项由 (3.2) 和 (4.2) 可以直接计算得到. 下面我们计算上式的第一项. 由 Itô 等距知,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[u(t)(\gamma(t)-\hat{\gamma})] &= \mathrm{E}\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0+\int_{t_0}^t (b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}ds\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\sigma\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}dW(s)\right)\times(\gamma(t)-\hat{\gamma})\right] \\
&= e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}\mathrm{E}\left[(\gamma(t)-\hat{\gamma})u_0 e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}\right]+\int_{t_0}^t e^{-\hat{\lambda}(s-t_0)}\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))(\gamma(t)-\hat{\gamma})e^{-J(s,t)}\right]ds
\end{aligned}
$$

由 $J(t_0,t)$ 的定义 (1.4) 可知 $\frac{\partial J(t_0,t)}{\partial t} = (\gamma(t)-\hat{\gamma})$, 那么

$$
\mathrm{E}[u(t)(\gamma(t)-\hat{\gamma})] = -e^{\hat{\lambda}(t-t_0)}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[u_0 e^{-J(t_0,t)}\right]-\int_{t_0}^t e^{-\hat{\lambda}(s-t_0)}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)}\right]ds,
$$

其中由 (4.2) 和协方差的线性性质,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[u_0 e^{-J(t_0,t)}\right] &= \frac{\partial}{\partial t}\left[(\mathrm{E}[u_0]+\mathrm{Cov}(-J(t_0,t),u_0))e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))}\right] \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Cov}(-J(t_0,t),u_0)\right)e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \\
&\quad+(\mathrm{E}[u_0]+\mathrm{Cov}(u_0,-J(t_0,t)))\frac{\partial}{\partial t}e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \\
&= e^{-J(t_0,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))}\times[\mathrm{Cov}(-\gamma(t),u_0)+(\mathrm{E}[u_0]+\mathrm{Cov}(-J(t_0,t),u_0))\times \\
&\quad(\hat{\gamma}-\mathrm{E}[\gamma(t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Var}(J(t_0,t)))\Big],
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{E}\left[(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[(\mathrm{E}[b(s)]+f(s)+\mathrm{Cov}(b(s)+f(s),-J(s,t)))e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}\right]$$

$$=e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}\times[\mathrm{Cov}(-\gamma(t),b(s))+(\mathrm{E}[b(s)]+f(s)+\mathrm{Cov}(b(s),J(s,t)))\times$$

$$\left(\hat{\gamma}-\mathrm{E}[\gamma(t)]+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Var}(J(s,t))\right)\Bigg].$$

且在上两式中,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Var}(J(s,t))=\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\frac{1}{d_\gamma^2}\left(e^{-d_\gamma(s-t_0)}-e^{-d_\gamma(t-t_0)}\right)^2\mathrm{Var}(\gamma_0)$$

$$+\frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^3}\left(-1+d_\gamma(t-s)+e^{-d_\gamma(s+t-2t_0)}+e^{-d_\gamma(t-s)}-\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(t-t_0)}-\frac{1}{2}e^{-2d_\gamma(s-t_0)}\right)\Bigg]$$

$$=\frac{\sigma_\gamma^2}{d_\gamma^2}\left(1-e^{-d_\gamma(t-s)}-e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)}+e^{-2d_\gamma(t-t_0)}\right)+\frac{2}{d_\gamma}\mathrm{Var}(\gamma_0)\times\left(e^{-d_\gamma(t+s-2t_0)}-e^{-2d_\gamma(t-t_0)}\right).$$

Cov$(u(t),b(t))$

由定义, $\mathrm{Cov}(u(t),b(t))=\mathrm{E}[u(t)b^*(t)]-\mathrm{E}[u(t)]\mathrm{E}[b(t)]^*$. 第二项由 (4.2) 和 (3.1) 即可计算得到. 结合 Itô 公式, 完全类似之前的计算过程, 第一项为

$$\mathrm{E}[u(t)b^*(t)]=\mathrm{E}\left[u(t)\left(\hat{b}^*+(b_0^*-\hat{b}^*)e^{\lambda_b^*(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)\right)\right]$$

$$=\left(1-e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}^*\mathrm{E}[u(t)]+\mathrm{E}\left[u(t)b_0^*e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right]$$

$$+\mathrm{E}[\sigma\sigma_b\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)+\lambda_b^*(t-\xi)}dW(s)dW_b(\xi)]$$

$$=\left(1-e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}^*\mathrm{E}[u(t)]+\mathrm{E}\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}+\int_{t_0}^t(b(s)+f(s))e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)}ds\right)b_0^*e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right]$$

$$+\frac{\sigma\sigma_b}{2\gamma_b}\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^t e^{-J(s,t)}e^{-\lambda(t-s)}\left(e^{\lambda_b^*(t-s)}-e^{-\mathrm{i}\omega_b(t-s)-\gamma_b(s+t-2t_0)}\right)\right]$$

$$=\left(1-e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}^*\mathrm{E}[u(t)]+e^{(\hat{\lambda}+\lambda_b^*)(t-t_0)}\mathrm{E}\left[u_0b_0^*e^{-J(t_0,t)}\right]+e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\times$$

$$\int_{t_0}^t e^{\hat{\lambda}(t-s)}\left(\mathrm{E}\left[b_0^*b(s)e^{-J(s,t)}\right]+f(s)\mathrm{E}\left[b_0e^{-J(s,t)}\right]^*ds\right)$$

$$+\frac{\sigma\sigma_b}{2\gamma_b}\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^t e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))}e^{-\lambda(t-s)}\left(e^{\lambda_b^*(t-s)}-e^{-i\omega_b(t-s)-\gamma_b(s+t-2t_0)}\right)\right],$$

利用命题 (4.3), 在上式中

$$\mathrm{E}\left[b_0 e^{-J(s,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(s,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))} \times (\mathrm{E}[b_0] + \mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))),$$

$$\mathrm{E}\left[u_0 b_0^* e^{-J(t_0,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \times [\mathrm{E}[u_0]\mathrm{E}[b_0]^* + \mathrm{Cov}(u_0, b_0) + \mathrm{E}[u_0]\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t))^*$$

$$+ \mathrm{E}[b_0]^*\mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t)) + \mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t))\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t))^*],$$

$$\mathrm{E}[b_0^* b(s) e^{-J(s,t)}] = e^{-J(s,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))} \times [\mathrm{E}[b_0]^*\mathrm{E}[b(s)] + \mathrm{Cov}(b_0, b(s)) + \mathrm{E}[b_0]^*\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))$$

$$+ \mathrm{E}[b(s)]\mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))^* + \mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))^*\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))].$$

Cov$(u(t), b^*(t))$

由定义, $\mathrm{Cov}(u(t), b^*(t)) = \mathrm{E}[u(t)b(t)] - \mathrm{E}[u(t)]\mathrm{E}[b(t)]$.
和前一部分类似的, 只要考虑上式的第一项. 我们有

$$\mathrm{E}[u(t)b(t)] = \mathrm{E}\left[u(t)\left(\hat{b} + (b_0 - \hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)} + \sigma_b \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)} dW_b(s)\right)\right]$$

$$= \left(1 - e^{\lambda_b(t-t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[u(t)] + \mathrm{E}\left[u(t) b_0 e^{\lambda_b(t-t_0)}\right]$$

$$+ \mathrm{E}[\sigma\sigma_b \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)+\lambda_b(t-\xi)} dW(s) dW_b(\xi)]$$

$$= \left(1 - e^{\lambda_b^*(t-t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[u(t)] + \mathrm{E}\left[\left(e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} + \int_{t_0}^{t} (b(s) + f(s)) e^{-J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)} ds\right) b_0 e^{\lambda_b(t-t_0)}\right]$$

$$= \left(1 - e^{\lambda_b(t-t_0)}\right)\hat{b}\mathrm{E}[u(t)] + e^{(\hat{\lambda}+\lambda_b)(t-t_0)}\mathrm{E}\left[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)}\right] + e^{\lambda_b(t-t_0)} \times$$

$$\int_{t_0}^{t} e^{\hat{\lambda}(t-s)} \left(\mathrm{E}\left[b_0 b(s) e^{-J(s,t)}\right] + f(s)\mathrm{E}\left[b_0 e^{-J(s,t)}\right] ds\right)$$

在上式中, 由命题 (4.3) 知,

$$\mathrm{E}\left[u_0 b_0 e^{-J(t_0,t)}\right] = e^{-\mathrm{E}[J(t_0,t)]+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(t_0,t))} \times [\mathrm{E}[u_0]\mathrm{E}[b_0] + \mathrm{Cov}(u_0, b_0^*) + \mathrm{E}[b_0]\mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t))$$

$$+ \mathrm{E}[u_0]\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t)) + \mathrm{Cov}(u_0, -J(t_0,t))\mathrm{Cov}(b_0, -J(t_0,t))],$$

$$\mathrm{E}\left[b_0 b(s) e^{-J(s,t)}\right] = e^{-J(s,t)+\frac{1}{2}\mathrm{Var}(J(s,t))} \times [\mathrm{E}[b_0]\mathrm{E}[b(s)] + \mathrm{Cov}(b_0, b(s)^*) + \mathrm{E}[b_0]\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))$$

$$+ \mathrm{E}[b(s)]\mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t)) + \mathrm{Cov}(b_0, -J(s,t))\mathrm{Cov}(b(s), -J(s,t))].$$

第 5 节　数值模拟和讨论

5.1　参数选择

在实践中, 我们可以考虑以下的一个简单例子. 在 (1.1) 中, 我们令外界驱动力

$$f(t)=\frac{3}{2}e^{0.1\mathrm{i}t},$$

方程组的参数可以取为

$$\begin{cases} d=1.5, & d_\gamma=0.01d \\ \sigma=0.1549, & \omega=1.78 \\ \sigma_\gamma=5\sigma, & \gamma_b=0.1d \\ \sigma_b=5\sigma, & \omega_b=\omega \\ \hat{b}=0, & \hat{\gamma}=0 \end{cases} \tag{5.1}$$

而问题的初值条件可以做一个简单的假设, 即

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(u_0),\ \mathrm{Im}(u_0)\sim\mathcal{N}(0,1),\ \text{i.i.d.} \\ \mathrm{Re}(b_0),\ \mathrm{Im}(b_0)\sim\mathcal{N}(0,1),\ \text{i.i.d.} \\ \gamma_0\sim\mathcal{N}(0,1) \end{cases} \tag{5.2}$$

那么初始变量间的统计量为

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}(u_0,u_0^*)=0 \\ \mathrm{Cov}(u_0,\gamma_0)=0 \\ \mathrm{Cov}(u_0,b_0)=0 \\ \mathrm{Cov}(u_0,b_0^*)=0 \end{cases} \tag{5.3}$$

5.2　数值模拟

对布朗运动进行的 Itô 积分可以由 Euler-Maruyama 方法进行模拟 [9][10]:

$$X_j=X_{j-1}+f(X_{j-1})\Delta t+g(X_{t-1})(\dot{W}(\tau_j)-\dot{W}(\tau_{j-1}))$$

其中

$$\dot{W}(\tau_j)-\dot{W}(\tau_{j-1})=\sum_{k=jR-R+1}^{jR}\mathrm{d}\dot{W}_k,$$

在上式中 R 为 E-M 算法的步长, 且

$$\mathrm{d}\dot{W}=\sqrt{\Delta t}\times\mathrm{randn}().$$

在对 $u(t)$ 和 $b(t)$ 进行数值模拟时, 我们需要分别模拟其实部和虚部. 为保证三个微分方程中白噪声的强度一致, 需要令

$$\dot{W}_{\mathrm{Re}(u)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{W}(t),$$

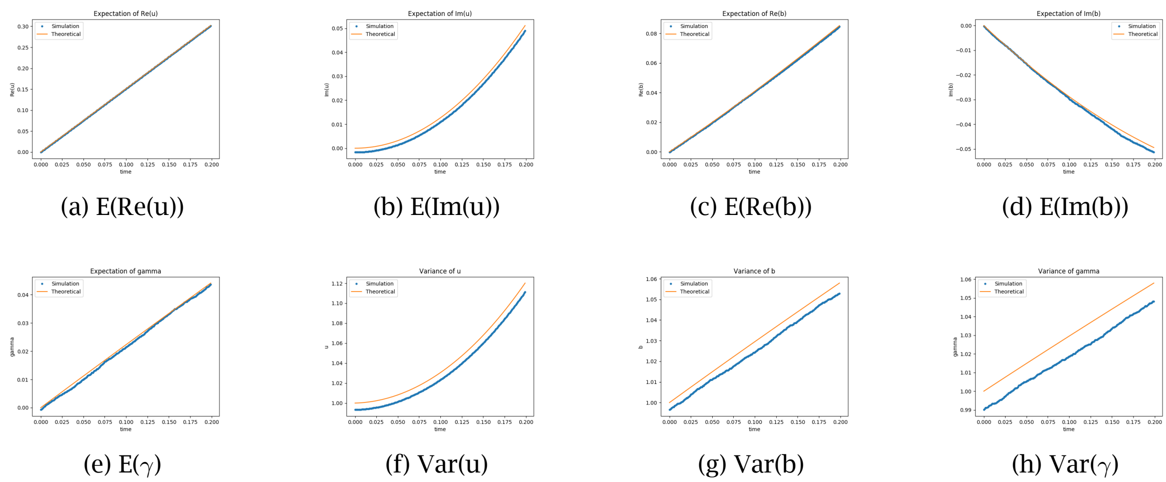
其余项和初值也做相同的处理.

此外, 由于我们需要模拟的是一个随机微分方程组, 为了提高精度, 我们选择了常微分方程数值解中修正的 Euler 格式

$$x_n = x_{n-1} + \Delta t\phi(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2},\ x_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\phi(t_{n-1},\ x_{n-1})),$$

这是一个二级的 Runge-Kutta 方法, 有局部二阶收敛的性质.

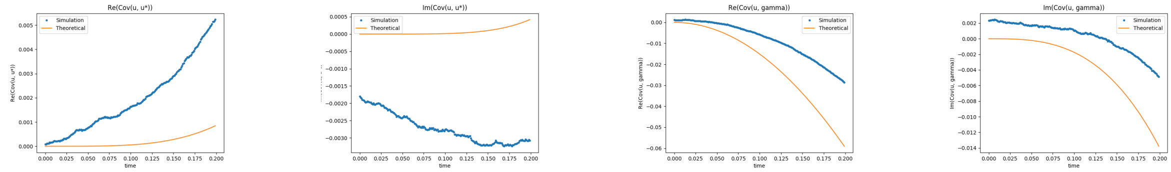
首先, 对 $R = 1$ 进行 10^6 次模拟 [15], $u(t)$, $b(t)$ 的实部和虚部,$\gamma(t)$ 的期望, $u(t)$, $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的方差, 以及各项协方差的模拟结果如下图 [13][11].



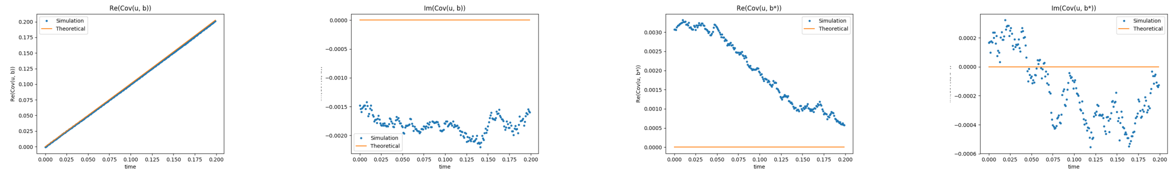
(a) E(Re(u)) (b) E(Im(u)) (c) E(Re(b)) (d) E(Im(b))

(e) E(γ) (f) Var(u) (g) Var(b) (h) Var(γ)

图 1: Simulation of Expectations and Variances, $n = 10^6$



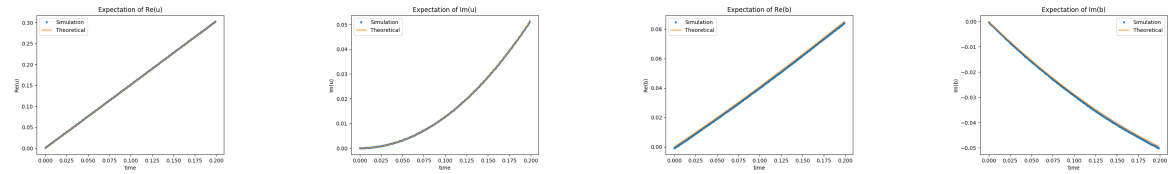
(a) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, u^*))$ (b) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, u^*))$ (c) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, \gamma))$ (d) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, \gamma))$



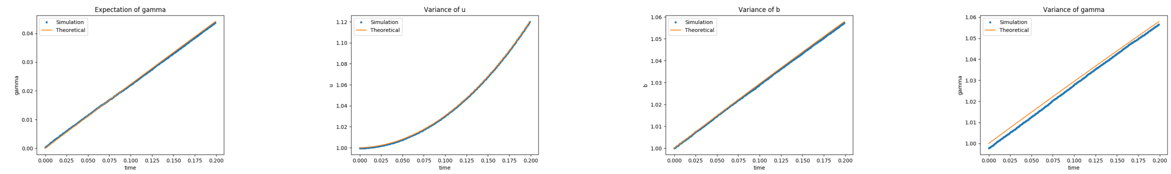
(e) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, b))$ (f) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, b))$ (g) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, b^*))$ (h) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, b^*))$

图 2: Simulation of Covariances, $n = 10^6$

下面我们测试了模拟次数为 $n = 10^7$ 时的期望, 方差和协方差的模拟结果:



(a) E(Re(u)) (b) E(Im(u)) (c) E(Re(b)) (d) E(Im(b))

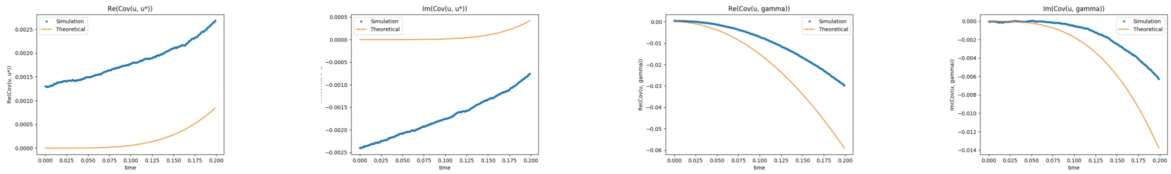


(e) E(γ) (f) Var(u) (g) Var(b) (h) Var(γ)

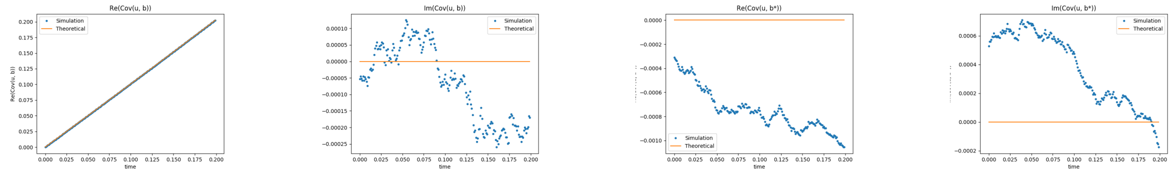
图 3: Simulation of Expectations and Variances, $n = 10^7$

5.3 讨论和展望

从数值模拟结果我们可以看出, 当模拟次数 $n = 10^6$ 时, 对期望的模拟结果和理论值基本重合, 方差的模拟结果和理论值有着 $O(10^{-2}) \sim O(10^{-3})$ 的误差, 而协方差的误差在 $O(10^{-3}) \sim O(10^{-4})$ 的数量级. 而当模拟次数 $n = 10^7$ 时, 期望和方差的模拟结果和理论值几乎完全一致, $\mathrm{Cov}(u, u^*)$ 及 $\mathrm{Cov}(u, \gamma)$ 的误差为 $O(10^{-3})$, $\mathrm{Cov}(u, b)$ 和 $\mathrm{Cov}(u, b^*)$ 的误差为 $O(10^{-4})$. 由模拟结果可以知道, 这些统计量的误差随着模拟次数的增加而降低, 故我们有足够的理由认为当 $n \to \infty$ 时其模拟结果和理论解会趋于一致.



(a) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, u^*))$ (b) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, u^*))$ (c) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, \gamma))$ (d) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, \gamma))$



(e) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, b))$ (f) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, b))$ (g) $\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}(u, b^*))$ (h) $\mathrm{Im}(\mathrm{Cov}(u, b^*))$

图 4: Simulation of Covariances, $n = 10^7$

这也说明了我们的理论解是符合实际的.

事实上, 误差的来源在于理论结果中 u_0, b_0, γ_0 的统计量按照定值进行计算, 而在模拟中 u_0, b_0, γ_0 均为随机变量, 其统计量和理论结果有一定的误差. 根据大数定律 [2, Page 214-221] 此误差随模拟次数的增大而依概率收敛至 0.

根据相同的方法, 我们可以求出此随机微分方程组解的三阶和四阶的统计量, 它们可以用初值和初始统计量的多重积分表示出来. 不过由于时间关系, 在这篇论文中没有将其详细的写出, 也没有对其进行数值上的模拟. 这些部分我们留待未来的研究中完成.

参考文献

[1] 金福临等. *常微分方程*. 上海科学技术出版社, 1984.

[2] 何书元. *概率论*. 北京大学出版社, 2006.

[3] 应坚刚. *概率论*. 2013.

[4] Albert Boggess and Francis J Narcowich. *A first course in wavelets with Fourier analysis*. John Wiley & Sons, 2015.

[5] Boris Gershgorin, John Harlim, and Andrew J Majda. Improving filtering and prediction of spatially extended turbulent systems with model errors through stochastic parameter estimation. *Journal of Computational Physics*, 229(1):32–57, 2010.

[6] Boris Gershgorin, John Harlim, and Andrew J Majda. Test models for improving filtering with model errors through stochastic parameter estimation. *Journal of Computational Physics*, 229(1):1–31, 2010.

[7] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. A nonlinear test model for filtering slow-fast systems. *Communications in Mathematical Sciences*, 6(3):611–649, 2008.

[8] Boris Gershgorin, Andrew Majda, et al. Filtering a nonlinear slow-fast system with strong fast forcing. *Communications in Mathematical Sciences*, 8(1):67–92, 2010.

[9] Desmond J Higham. Mean-square and asymptotic stability of the stochastic theta method. *SIAM journal on numerical analysis*, 38(3):753–769, 2000.

[10] Desmond J Higham. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM review*, 43(3):525–546, 2001.

[11] John D Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing In Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007.

[12] Paul Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *CR Acad. Sci. Paris*, 146(530-533):530, 1908.

[13] Wes McKinney. *Python for data analysis: Data wrangling with Pandas, NumPy, and IPython.* " O'Reilly Media, Inc.", 2012.

[14] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 21–39. Springer, 2003.

[15] Christian P Robert. *Monte carlo methods.* Wiley Online Library, 2004.

致谢

感谢陆帅老师对本文研究方向的指导和帮助;
感谢唐博浩和宋杰承同学对本文的技术性建议;
感谢魏益民和赵冬华老师对我学习和研究的关心与支持;
感谢我的室友们, 大学和高中的同学们, 朋友和家人的陪伴;
最后, 感谢东区 18 和 19 号楼下的猫在最困难的的日子里给予我的慰藉.