目录

TEST

卢川，13300180056，信息与计算科学

2017 年 3 月 26 日

摘要： test test test

关键字: test, test.

第 1 节　导言

1.1.　问题简介

考虑以下的一个随机微分方程组, 其作用为改进对模型误差的滤波:

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= (-\gamma(t)+i\omega)u(t)+b(t)+f(t)+\sigma W(t),\\ \frac{db(t)}{dt} &= (-\gamma_b+i\omega_b)(b(t)-\hat{b})+\sigma_b W_b(t),\\ \frac{d\gamma(t)}{dt} &= -d_\gamma(\gamma(t)-\hat{\gamma})+\sigma_\gamma W_\gamma(t)\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 ω 为 $u(t)$ 的振荡频率, $f(t)$ 为外部驱动力, σ 表示白噪声 $W(t)$ 的强度. 此外, 参数 γ_b 和 d_γ 表示振荡阻尼, σ_b 和 σ_γ 分别表示加性和乘性修正 ((1.1) 中第 2, 3 式) 中白噪声的强度. $\hat{b}$ 和 $\hat{\gamma}$ 分别表示 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定平均偏差修正, ω_b 表示加性噪声的频率. 白噪声 $W_\gamma(t)$ 是实值函数, 而 $W(t)$ 及 $W_b(t)$ 均为复值, 且其实部和虚部均为独立的白噪声.

由求解线性微分方程组的相关知识 [1] 可以知道, (1.1) 的第二和第三项均为线性方程, 故有通解

$$b(t)=\hat{b}+(b_0-\hat{b})e^{\lambda_b(t-t_0)}+\sigma_b\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s), \tag{1.2}$$

$$\gamma(t)=\hat{\gamma}+(\gamma_0-\hat{\gamma})e^{-d_\gamma(t-t_0)}+\sigma_\gamma\int_{t_0}^{t} e^{-d_\gamma(t-s)}dW_\gamma(s). \tag{1.3}$$

其中 $\lambda_b=-\gamma_b+i\omega_b$, $\hat{b}$ 与 $\hat{\gamma}$ 分别是 $b(t)$ 和 $\gamma(t)$ 的固定偏差校正. 如果我们记

$$\hat{\lambda}=-\hat{\gamma}+i\omega,$$

$$J(s,t)=\int_s^t(\gamma(s')-\hat{\gamma})ds'$$

则 (1.1) 的通解可以表示为

$$\begin{aligned}u(t)=e^{-J(t_0,t)+\hat{\lambda}(t-t_0)}u_0+\int_{t_0}^t(b(s)+f(s))e{-}J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)ds\\+\sigma\int_{t_0}^t e{-}J(s,t)+\hat{\lambda}(s-t_0)dW(s).\end{aligned}\tag{1.4}$$

以下将对方程 (1.1) 的各个变量 u,b,γ, 分别计算其统计量.

1.2. 一些前置引理

在应用中, 往往将布朗运动置于一个随机微分方程 (组) 中, 来近似的模拟白噪声的性质 [2]. 为此, 我们需要引入布朗运动的一些基本性质.[4][3]

定理 1.1 布朗运动 B_t 是一个 Gauss 过程. 对于所有的 $0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_k$, 随机变量 $Z=(B_{t_1},B_{t_2}\cdots,B_{t_k})\in\mathbb{R}^{nk}$ 服从多重正态分布. 如果设 B_t 的初值为 x, 则其期望为

$$M=E[Z]=(x,x,\cdots,x)\in\mathbb{R}^{nk},$$

协方差矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}t_1I_n & t_1I_n & \cdots & t_1I_n\\ t_1I_n & t_2I_n & \cdots & t_2I_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_1I_n & t_2I_n & \cdots & t_kI_n\end{pmatrix}.$$

此定理的证明利用了特征函数的性质, 具体过程可见 [4] 的附录 A. 以下的定理是 (1.1) 的直接而显然的推论:

定理 1.2 假设布朗运动 B_t 满足定理 (1.1) 中的条件, 那么对于 $\forall t\geqslant 0$, $E[B_t]=x$, $E[(B_t-x)^2]=nt$, $E[(B_t-x)(B_s-x)]=n\cdot min(s,t)$. 而且如果 $t\geqslant s$, 有 $E[(B_t-B_s)^2]=n(t-s)$.

此外, 以下的定理也是布朗运动的一个重要性质, 其证明见 [4] 的 (2.2.12) 式.

定理 1.3 B_t 的增量独立, 即对满足 $\forall 0\leqslant t_1<t_2\cdots<t_k$ 的 $(t_1,t_2,\cdots t_k)$,

$$B_{t_1},B_{t_2}-Bt_1,\cdots,B_{t_k}-B_{t_{k-1}}$$

相互独立.

在求解类似 (1.1) 随机微分方程时, 需要针对布朗运动做积分, 为此我们引入以下的 Itô 积分 [4]:

定义 1.4 (Itô 积分) 设 $f \in \mathcal{V}(S,T)$. 则 f 的 Itô 积分定义为

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega),$$

其中 ϕ_n 为基本函数序列, 且满足当 $n\to\infty$ 时

$$E[\int_S^T (f(t,\omega)-\phi_n(t,\omega))^2 dt] \to 0.$$

由上述定义即可得到 Itô 积分的一个重要性质:

定理 1.5 (Itô 等距) 对于 $\forall f \in \mathcal{V}(S,T)$ 有

$$E[(\int_S^T f(t,\omega)dB_t)^2] = E[\int_S^T f^2(t,\omega)dt].$$

这里 $\mathcal{V}(S,T)$ 见 [4] 中的定义 3.1.2 至 3.1.4. 为了便于计算, 我们还需要引入以下的一维 Itô 公式.

定理 1.6 (Itô 公式) 设 X_t 为一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

$g(t,x) \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$, 则 $Y_t = g(t,X_t)$ 也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)\cdot(dX_t)^2,$$

其中

$$dt\cdot dt = dt\cdot dB_t = dB_t\cdot dt = 0, \quad dB_t\cdot dB_t = dt.$$

以下是上述 Itô 公式的积分形式.

定理 1.7 (分部积分) 设 $f(s,\omega)$ 对几乎所有的 ω 关于 $s\in[0,t]$ 是连续的, 且为有界变差函数, 则有

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

上述几个定理的证明请见 [4], 21-24 页及 36-39 页.

第 2 节 一阶统计量

当 t 固定时, 由 (1.2) 式可知, $b(t)$ 的通解前两项均为常数. 结合 Itô 分部积分公式 (1.7) 考虑

$$\begin{aligned} E[\sigma_b \int_{t_0}^t e^{\lambda_b(t-s)}dW_b(s)] &= 1 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

参考文献

[1] 金福临等. 常微分方程. In *常微分方程*, pages 117–126. 上海科学技术出版社, 1984.

[2] Takeyuki Hida. Brownian motion. In *Brownian Motion*, pages 44–113. Springer, 1980.

[3] Edward Nelson, Edward Nelson, Edward Nelson, and Edward Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*, volume 3. Princeton university press Princeton, 1967.

[4] Bernt Øksendal. Stochastic differential equations. In *Stochastic differential equations*, pages 21–39. Springer, 2003.