产流公式补充推导:

$$R = P - E - \int_a^{P-E+a} [1-\varphi(w_m')]\,dw_m'$$

令PER=

$$PER = \int_a^{P-E+a} [1-\varphi(w_m')]\,dw_m'$$

$$= \int_a^{P-E+a} \left\{1-\left[1-\left(1-\frac{w_m'}{w_{mm}'}\right)^b\right]\right\} dw_m'$$

$$= \int_a^{P-E+a} \left(1-\frac{w_m'}{w_{mm}'}\right)^b dw_m'$$

令 $m = w_{mm}'$ $\quad x = w_m'$

$$PER = \int_a^{P-E+a} \left(1-\frac{x}{m}\right)^b dx$$

令 $y = 1-\frac{x}{m}$. 则 $x = m(1-y)$

则 $x \in [a, P-E+a] \Rightarrow y \in [\underbrace{1-\frac{a}{m}}_{y_1}, \underbrace{1-\frac{P-E+a}{m}}_{y_2}]$

则 $PER = \int_{y_1}^{y_2} y^b\, d[m(1-y)] = m\int_{y_1}^{y_2} y^b\, d(1-y) = -m\int_{y_1}^{y_2} y^b dy$

$$= -m\cdot\frac{1}{1+b} y^{1+b}\Big|_{y_1}^{y_2} = (y_1^{1+b} - y_2^{1+b})\cdot\frac{m}{1+b}$$

$$\because \frac{m}{1+b} = \frac{w_{mm}'}{1+b} = W_m$$

$$\therefore PER = W_m\left[\left(1-\frac{a}{w_{mm}'}\right)^{1+b} - \left(1-\frac{P-E+a}{w_{mm}'}\right)^{1+b}\right]$$

又 $a = w_{mm}'\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right]$

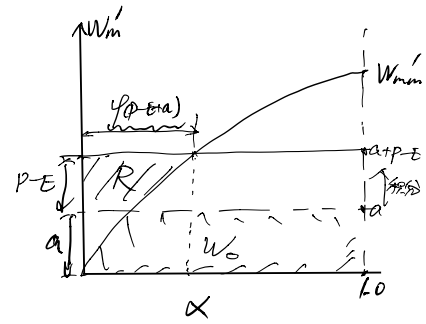
$$\therefore \left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}} = 1-\frac{a}{w_{mm}'}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{W_0}{W_m} = \left(1-\frac{a}{w_{mm}'}\right)^{1+b}$$

$$\therefore PER = W_m\cdot\left[1-\frac{W_0}{W_m} - \left(1-\frac{P-E+a}{w_{mm}'}\right)^{1+b}\right]$$

$$= W_m - W_0 - W_m\left(1-\frac{P-E+a}{w_{mm}'}\right)^{1+b}$$

$$\therefore R = P-E-(W_m-W_0)+W_m\left(1-\frac{P-E+a}{w_{mm}'}\right)^{1+b}$$



曲线 $\alpha + \left(1-\frac{w_m'}{w_{mm}'}\right)^b = 1 \quad (\alpha \geq 0)$

$W_m = \frac{w_{mm}'}{1+b}$ 的推导:

$$W_m = \int_0^{w_{mm}'} 1-\left[1-\left(1-\frac{w_m'}{w_{mm}'}\right)^b\right] dw_m' = \int_0^{w_{mm}'} \left(1-\frac{w_m'}{w_{mm}'}\right)^b dw_m'$$

令 $m = w_{mm}'$, $x = w_m'$, $y = 1-\frac{x}{m}$

则 $W_m = \int_0^m \left(1-\frac{x}{m}\right)^b dx = \int_1^0 y^b\, d[m(1-y)]$

$$= \int_1^0 y^b(dm - dmy) = -m\int_1^0 y^b dy$$

$$= -m\frac{1}{b+1} y^{b+1}\Big|_1^0 = \frac{m}{b+1} = \frac{w_{mm}'}{1+b}$$

a的推导如下:

$$W_0 = \int_0^a \left[1-1+\left(1-\frac{w_m'}{w_{mm}'}\right)^b\right] dw_m'$$

$$= \int_0^a \left(1-\frac{w_m'}{w_{mm}'}\right)^b dw_m' = \int_0^a \left(1-\frac{x}{m}\right)^b dx$$

$$= \int_1^{1-\frac{a}{m}} y^b\, d[m(1-y)] = -m\cdot\frac{1}{1+b} y^{1+b}\Big|_1^{1-\frac{a}{m}}$$

$$= \frac{m\left[1-\left(1-\frac{a}{m}\right)^{1+b}\right]}{1+b}$$

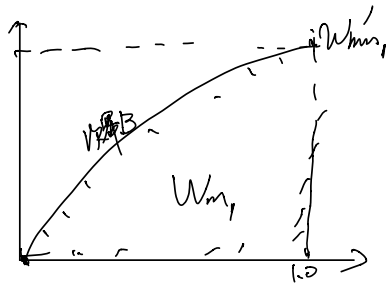
$$\xRightarrow{\text{解得}} a = w_{mm}'\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right]$$

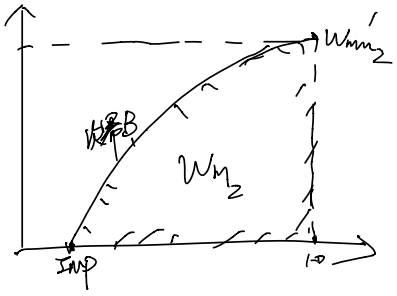
关于不透水面积.

书上写. $W_{m}' = \frac{1+B}{1-IMP} W_m$ 即 $\frac{W_m}{W_{m}'} = \frac{1-IMP}{1+B}$.

$IMP=0$时 $\frac{W_m}{W_{m}'} = \frac{1}{1+B}$

W_{m}'就是矢量开的面积





所以，我现在要理解的是，右图阴影部分面积、除以矩形面积，是不是 $\frac{1-IMP}{1+B}$?

其实完全分开算就行了、透水的单独算. 不透水的自己算, 这样不行么?

↓

产流计算R.

↓

但是书上写把 $W_{m}' = \frac{1+B}{1-IMP} W_m$, 那岂不是重复计算IMP了?

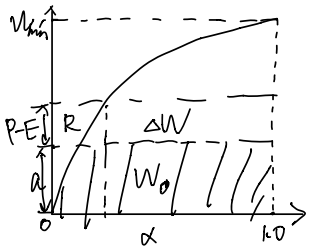
并且在这等后的话, 那接下来分水源的时候R就不能用了? 毋必有不透水面积影响!

$P-E$ 水源 → 乘以IMP 本身为流域上的透水部分的产流量.

计算蒸发时计算产流量R, 以下就是一定成立的, 如果计算中发现有问题, 不符合 $P-E>R$, $a>W_{m}'$ 应检查

$PE>0$时, 先判断 $W_0+PE-R>W_m$ 即先判断上层蓄水是否填满上层土壤水.

此时涉及到R的计算, 而R计算时涉及对土壤水的计算



$P-E \times 10 = R + \Delta W$

$\therefore P-E>R$

$\because R = P-E-W_m+W_0+W_m\left[1-\frac{PE+a}{W_m'}\right]^{1+b}$

$\therefore W_m-W_0-W_m\left[1-\frac{PE+a}{W_m'}\right]^{1+b}>0$

$$\Rightarrow \quad W_m - W_0 > W_m\left[1-\frac{PE+a}{W_{min}'}\right]^{1+b}$$

$$1-\underbrace{\frac{W_0}{W_m}}_{\text{初始W占积累曲线下面积的比}} > \left(1-\underbrace{\frac{PE+a}{W_{min}'}}_{\text{左边W0+aW对应纵坐标上曲线最高点纵坐标的百分比}}\right)^{1+b}$$

例如:

$$1-\frac{21}{182.55} > \left(1-\frac{0.3+13.175}{266.17}\right)^{1+0.4}$$ 这就是错的了.

$$0.88494 \overset{\times}{>} 0.9196$$

中就是说 $\underset{\text{初始值}}{W_0}$, $\underset{\text{参数}}{W_m}$, $\underset{\text{初始值}}{PE}$, a, W_{min}', $\underset{\text{参数}}{b}$ 之间是有约束关系的, 即 W_0, W_m, PE, b 之间有约束

由 W_m, b 决定 W_0 的比例　由 W_m, b 决定 PE

$$\begin{cases} 1-\dfrac{W_0}{W_m} > \left(1-\dfrac{PE+W_{min}'\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right]}{W_{min}'}\right)^{1+b} \\ W_{min}' = W_m(1+b) \end{cases}$$

$$1-\frac{W_0}{W_m} > \left(1-\frac{PE+W_m(1+b)\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right]}{W_m(1+b)}\right)^{1+b}$$

$$\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}} > 1-\frac{PE}{W_m(1+b)}-\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right]$$

$$\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}} > \left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}} - \underbrace{\frac{PE}{W_m(1+b)}}_{>0}$$

∴ 不等式必然成立. 那为什么程序计算中出现 $R > P-E$?

同理 $a > W_0$　　$W_{min}'\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right] > W_0 \Rightarrow W_m(1+b)\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right] > W_0$

$$\Rightarrow (1+b)\left[1-\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}\right] > \frac{W_0}{W_m} \Rightarrow 1+b-(1+b)\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}} > \frac{W_0}{W_m}$$

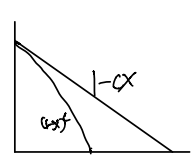
$$\Rightarrow 1+b-\frac{W_0}{W_m} > (1+b)\left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}} \Rightarrow 1-\frac{1}{1+b}\cdot\frac{W_0}{W_m} > \left(1-\frac{W_0}{W_m}\right)^{\frac{1}{1+b}}$$

$$\underset{0.978149\ldots}{1-\frac{1}{1.4}\times\frac{21}{182.55}} > \underset{0.916\ldots}{\left(1-\frac{21}{182.55}\right)^{\frac{1}{1.4}}}$$

✓

$1-cx > (1-x)^c$

恒成立



那为什么程序计算出现 $a < W_0$?

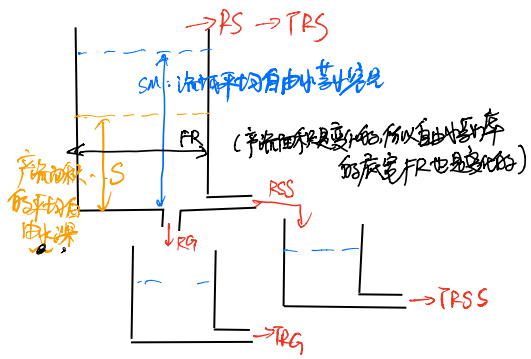
土壤的下渗能力。

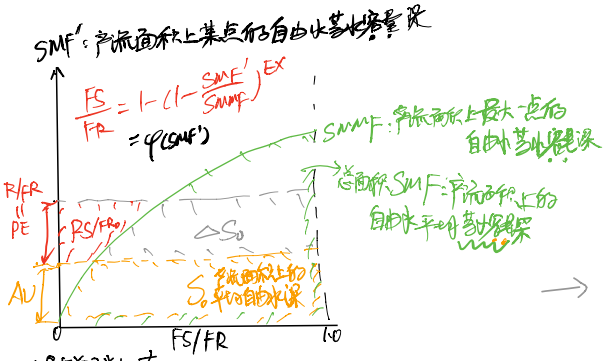
因为这些地区 f_c 大，水流有充分时间下渗

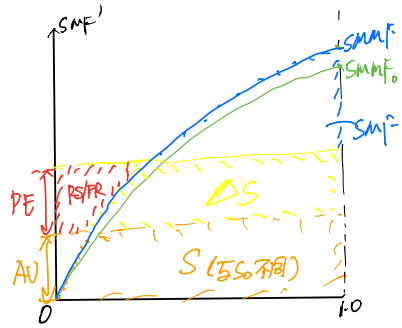
土壤达到田间持水量后会直接补给地下水

直到土壤蓄满为止。然后算出产生地表径流。

超过自由水蓄水容量







因为在产流面积变化时曲线会有变化。

相应地，AU，S_0 的关系也会发生变化。AU和S关系仍如下，但AU～S_0 的关系

$$AU = SMMF\left[1-\left(1-\frac{S}{SMF}\right)^{\frac{1}{1+EX}}\right]$$

根号上前面类似，有：

$$S_0 = \frac{SMMF}{1+EX}\left[1-\left(1-\frac{AU}{SMMF}\right)^{1+EX}\right],\quad SMF = \frac{SMMF}{1+EX},\quad AU = SMMF\left[1-\left(1-\frac{S}{SMF}\right)^{\frac{1}{1+EX}}\right]$$

$S \neq S_0$ 不同。

仍在：令 $S = \frac{S_0 \cdot FR_0}{FR}$

那么这里就是会产生产流面积变了的意思 ← 产流面积不变？ ← 产流面积上平均自由水深×产流面积在面时候不相等

根号内上页类似，关键是理解清楚是由产流面积变化带来的及其表达式：∵R是产流深，前面的计算是基于整个流域的，而这里这个水深是降雨的部分到产流面积上的，∴此值 $R = R/FR$，又∵在产流面积上的降雨就是P-E ∴ $R/FR = P-E = PE$.

$$RS = PE - \Delta S = PE - \int_{AU}^{AU+R}[1-\varphi(SMF')]\,dSMF' = PE - \int_{AU}^{AU+PE}\left\{1-\left[1-\left(1-\frac{SMF'}{SMMF}\right)^{EX}\right]\right\}\cdot dSMF'$$

令 $x = SMF'$，$m = SMMF$，$PERS = PE - RS$，$b = EX$，$y = 1-\frac{x}{m}$，$y_1 = 1-\frac{AU}{m}$，$y_2 = 1-\frac{AU+PE}{m}$

$$PERS = \int_{AU}^{AU+PE}\left(1-\frac{x}{m}\right)^b dx \ (\text{与上页一致}) = (y_1^{1+b} - y_2^{1+b})\cdot\frac{m}{1+b}$$

$$\because \frac{m}{1+b} = SMF \quad \therefore RPS = SMF\left[\left(1-\frac{AU}{m}\right)^{1+b} - \left(1-\frac{AU+PE}{m}\right)^{1+b}\right]$$

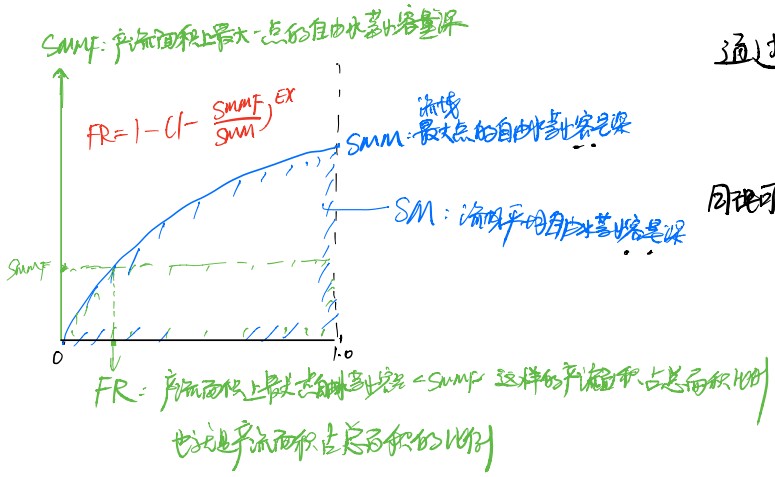
$$\because AU = SMMF\cdot\left[1-\left(1-\frac{S}{SMF}\right)^{\frac{1}{1+EX}}\right] \Rightarrow 1-\frac{AU}{SMMF} = \left(1-\frac{S}{SMF}\right)^{\frac{1}{1+EX}} \Rightarrow \left(1-\frac{AU}{m}\right)^{1+EX} = 1-\frac{S}{SMF}$$

$$\therefore PERS = SMF - S - SMF\cdot\left(1-\frac{AU+PE}{SMMF}\right)^{1+EX} \quad \therefore RS = PE - (SMF - S) + SMF\left(1-\frac{AU+PE}{SMMF}\right)^{1+EX}$$

又∵这个RS是产流面积上的水深，在最后还要把这个RS结果再转换到整个流域上，$RS = RS/FR$

$$\therefore RS = FR\cdot\left[PE - (SMF - S) + SMF\left(1-\frac{AU+PE}{SMMF}\right)^{1+EX}\right]$$

那么，显然 SMF，SMMF 就都是FR的函数了。



通过定义 FR～SMMF 之间的关系来推算 SMMF.

$$FR = 1-\left(1-\frac{SMMF}{SMM}\right)^{EX}$$

同理可推得 $\begin{cases} SMMF = SMM\cdot[1-(1-FR)^{\frac{1}{EX}}] \\ SMM = SM(1+EX) \end{cases}$

SM 和 EX 是一个流域的属性，由模型参数来定义.

由前页可知 FR = R/PE. ∴ 均可求.

最后也叫下水流 → 壤中流和地下径流，直接线性处理

自由水深 × KSS × FR → 壤中流

自由水深 × KG · FR → 地下径流

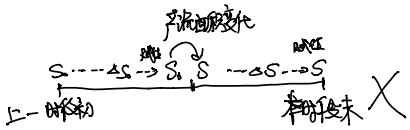
KSS 和 KG 是模型的两个参数，壤中流出流系数和地下径流出流系数

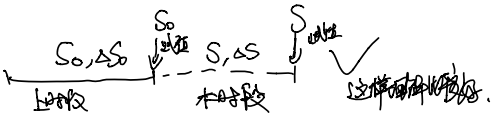
PE+AU ≥ SMMF 时，自由水深 = SMF. → 产流面积上的自由水蓄水容量深

0 < PE+AU < SMMF 时 自由水深 = $\underbrace{PE - \frac{RS}{FR}}_{\Delta S} + S$

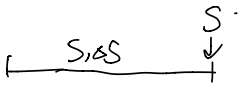
RS → 总流域面积上的RS；FR → 产流面积上；PE → 产流面积上的；S → 产流面积上的；ΔS（由上页的图中是得）

补充：(1) 关于 $FR_0 \cdot S_0 = FR \cdot S$





(2)



对自由水蓄水库进行水量平衡计算时，通常将K作为较大的流，而实际上它是时段内均匀进入的.

一个时段 ~~如图所示~~ 讲算应该也这样做积分计算，但实际上没法做这样做积分，可以用差分近似.

但我们采用了一阶前向差分，直接用了一时段末的.

这就造成了较大误差，这也对应说明了 $FR_0 \cdot S_0 = FR \cdot S$

只有在差分间隔小的时候才合理.

(2) KSS, KG 一般是按日模型给定的。但是实际计算时时段可能小于日，比如6小时<24h。则 $N=\frac{24}{6h}$

前面也提到还有单位时段的问题，因此需要分段计算更合理，这里的部分都分段，累积相乘。

那么对每一段 KSS, KG 与日模型的 KSS, KG 就不同了。

所以需要分析 KSSD, KGD 与 KSS, KG 之间的关系。

尝试推导，如果 KSSD, KGD 分开，则推导过程过于复杂，且不利于发现规律，因为 KSS, RG 在求解时规律一致，因此可以先尝试将地表径流、地下径流合在一起进行分析。

以下给出一起推导的过程：

KG+KSS 一起推导。K_{gs} 看成一层。地下水。水库线性。

$$KD = KSSD + KGD = KSSD + KSSD\cdot\frac{KG}{KSS} = KSSD\left(1+\frac{KG}{KSS}\right) = \frac{KSSD}{KSS}\cdot(KG+KSS)$$

$$= \frac{1-[1-(KG+KSS)]^{\frac{1}{N}}}{\left(1+\frac{KG}{KSS}\right)\cdot KSS}\cdot\cancel{(KG+KSS)} = 1-[1-(KG+KSS)]^{\frac{1}{N}}$$

$$= 1-(1-K_{gs})^{\frac{1}{N}}$$

$RSS+RG = RU_{(underground)}$ 产流的情况下定义各变量

第1段：$RU_1 = (S_0+\Delta S_1)\cdot K_{gs}D$　　$S_1 = S_0+\Delta S_1 - RU_1 = (S_0+\Delta S_1)(1-K_{gs}D)$

第2段：$RU_2 = (S_1+\Delta S_2)\cdot K_{gs}D$　　$S_2 = S_1+\Delta S_2 - RU_2 = (S_1+\Delta S_2)(1-K_{gs}D)$

……

第n段：$RU_N = (S_{N-1}+\Delta S_N)\cdot K_{gs}D$　　$S_N = S_{N-1}+\Delta S_N - RU_N = (S_{N-1}+\Delta S_N)(1-K_{gs}D)$

$$K_{gs}D = 1-\frac{S_N}{S_{N-1}+\Delta S_N}$$

需证：$\frac{S_N}{S_{N-1}+\Delta S_N} = (1-K_{gs})^{\frac{1}{N}}$

$$\frac{S_N}{S_{N-1}+\Delta S_N} = \frac{S_{N-1}+\Delta S_N - RU_N}{S_{N-1}+\Delta S_N} = 1-\frac{RU_N}{S_{N-1}+\Delta S_N} = 1-K_{gs}D$$

即 $1-K_{gs}D = (1-K_{gs})^{\frac{1}{N}}$　为什么？物理意义上分析数据（见下页）

$[1-(KG+KSS)]^N = 1-KG+KSS$

这涉及到对线性水库的分析

对传统水库：$I(t)dt - Q(t)dt = dS(t)$. 水量平衡方程. $I - Q = \frac{dS}{dt}$

而对线性水库："线性"的意义是出流量与储水量之间是线性关系. 令 $S = KQ$, $Q = \frac{1}{K}S$.

蓄量系数, K: 出流系数

令 $K_{gs} = \frac{1}{K}$. $Q = K_{gs} \cdot S$

N阶差分：$S_1 = S_0 - Q_1 = (1-K_{gs}D)S_0$ 一阶差分 $S = S_0 - Q = (1-K_{gs})S_0$

$S_2 = S_1 - Q_2 = (1-K_{gs}D)S_1$ 令 $S = S_N$

..

$\Rightarrow (1-K_{gs}D)^N = 1 - K_{gs}$

$S_N = S_{N-1} - Q_N = S_{N-1} - K_{gs}D \cdot S_{N-1}$

$= (1-K_{gs}D)S_{N-1}$

$\therefore S_N = (1-K_{gs}D)^N S_0$

$\frac{KSSD}{KGD} = \frac{KSS}{KG}$ (两个线性水库出流比值相同时，总和之后也是) $\Rightarrow \frac{KSSD + KGD}{KGD} = \frac{KSS + KG}{KG}$

联立求解得 KSSD 和 KGD.

(3) $FR_{\Delta t/N} = 1 - (1-FR)^{\frac{\Delta t'}{\Delta t}} = 1 - (1-FR)^{\frac{1}{N}}$. 改变后计算的时段 $\Delta t'$.

如何理解？

(4) $PE < 0$ 时：如果 $FR = 0$ 那么下一个时段 $FR_0 \cdot S_0 = FR \cdot S \Rightarrow S = 0$.

但 $S_0 \neq 0$，其水量不应该凭空消失，不符合水量平衡. 这可能就是由于计算导致的误差.

$\therefore$ 令 $S = S_0$ 则 $FR = FR_0$. 然后剩余地表RS=0. RSS, RG 就不用水库线性出流，久旱逢甘雨可以保证水量平衡.

(5) 计算中注意 $S > SMF$ 的情况，如果出现，则应修正 S.

单位响应.

单位冲激函数

$$\delta(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & \text{else}.\end{cases}$$

$\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ 拉普拉斯变换

input → $\boxed{S}$ → output 单位冲激响应

$$\underbrace{\mathcal{L}[u(0,t)]}_{\text{若干扰时单位冲激}}=\underbrace{-\frac{A(p)}{B(p)}}_{\text{传递函数}}\underbrace{\mathcal{L}[\delta(t)]}$$

$\therefore \mathcal{L}[Q(t)]=\mathcal{L}[u(0,t)]\mathcal{L}[\varepsilon(t)]$

单位阶跃函数

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varepsilon(t)=\int_0^t \delta(s)\,ds\\ \delta(t)=\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}\end{cases}$$

$\mathcal{L}[\varepsilon(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}\,dt=\frac{1}{s}$

阶跃函数拉氏变换

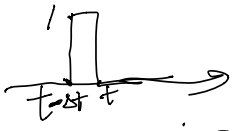
$\therefore \mathcal{L}[Q(t)]=\mathcal{L}[u(0,t)]\mathcal{L}[\varepsilon(t)]$

$\therefore$ 单位阶跃响应 $Q(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(0,\tau)\cdot\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$

$=\int_0^{\infty}u(0,\tau)\,d\tau=\underline{\int_0^{\infty}u(0,t)\,dt}.$

即单位冲激响应时域的全部积分

单位矩形脉冲函数



$\mathcal{L}[Q(t)]=\mathcal{L}[u(0,t)]\mathcal{L}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta t)]$

令 $u(\Delta t,t)=Q(t)=u(0,t)*[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\Delta t)]$ (*：卷积运算)

线性卷积律

若干扰为单位阶

$=u(0,t)*\varepsilon(t)-u(0,t)*\varepsilon(t-\Delta t)$

$=\int_0^t u(0,t)\,dt-\int_0^{t-\Delta t}u(0,t)\,dt$

$u(\Delta t,t)$ 即 流域单位阶，指流域上分布扰动，在 $\boxed{\Delta t\text{ 内作用了}}$ 1个 $\boxed{\text{单位强度}}$ mm/h 的降雨，产生的出口断面流量

令 $S(t)=\int_0^t u(0,t)\,dt$. 则 $\underline{u(\Delta t,t)=S(t)-S(t-\Delta t)}$

S曲线. $\boxed{\text{一直作用}}$ 1个 $\boxed{\text{单位强度}}$ 的降雨，产生的出口断面流量.

在工程计算中那些高数公式:

$$\left(\begin{array}{l} Q_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{h_j}{10} q_{i-j+1} \\ q_{i-j+1} \end{array} \right)$$

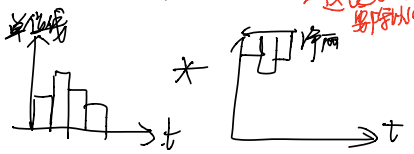
→ 如何手算解?

q_{i-j+1}: 所在时刻; → 今天的时刻

$u(\Delta t, t) * h_j$ (中间的是卷积的高数公式)

h 的高数化

这也是为什么要从0.



$$Q(t) = \int_0^t u(\Delta t, \tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t u(\Delta t, t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

高数化

$$Q(i) = \sum_{j=1}^{m} h_j \cdot q_{i-j+1}$$

一个时刻

$i = 1, \cdots l$

$i-j+1 = 1, 2, \cdots n$

若干个序列

$$S(n) = (f * g)[n] = \sum_{m=0}^{n-1} f(m)\, g(n-m)$$

→ 但是 f(n) 的长度

$g(n-m)$ 就是把 $g(m)$ 先倒个 180°, 再平移 n 点

输入 $f(n) = [1, 2, 3]$ 系统响应 $g(n) = [2, 3, 1]$

$g(m)$: 2, 3, 1 → $g(-m)$ 1, 3, 2

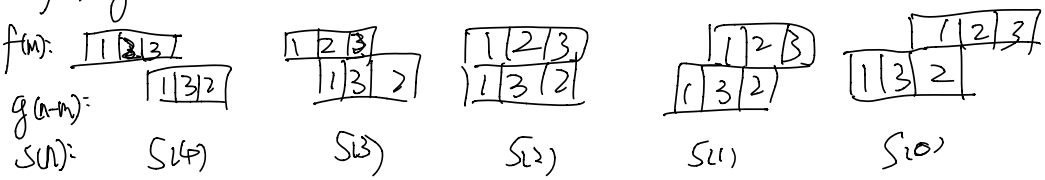
$S(0) = f(0)g(0-0) + f(1)g(0-1) + f(2)g(0-2) = 1\times2 + 2\times0 + 3\times0 = 2$

$S(1) = f(0)g(1-0) + f(1)g(1-1) + f(2)g(1-2) = 1\times3 + 2\times2 + 3\times0 =$

同理 $S(2) = 13$, $S(3) = 11$, $S(4) = 3$, 其它都是0

图示如下:

$f(m) \cdot g(n-m)$:



$hq = Q \Rightarrow h^T h q = h^T Q \Rightarrow q = (h^T h)^{-1} h^T Q$

h_j 的长度: 它们都要作用

$$\therefore Q_i = \sum_{j=1}^{m} h_j \cdot q_{i-j+1}$$

→ 因为从1开始计数

$$\Rightarrow \begin{aligned} Q_1 &= h_1 q_1 + \underbrace{h_2 q_0 + \cdots}_{=0} \\ Q_2 &= h_1 q_2 + h_2 q_1 + 0 \\ Q_3 &= h_1 q_3 + h_2 q_2 + h_3 q_1 \cdots \\ &\cdots \end{aligned}$$

n 列

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} h_1 & & & \cdots & \\ h_2 & h_1 & & & \\ h_3 & h_2 & \ddots & & h_1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & h_2 \\ h_m & h_{m-1} & \cdots & & h_{m-1} \\ & h_m & \cdots & & h_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_l \end{bmatrix}$$

l 行

$(n = l - m + 1)$.

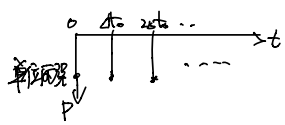
因为单位线通常取10mm，净雨单位一般用mm，所以通常 $h_j/10$ 来和单位线相卷积。
这样是保证净雨和单位线才匹配。

再看单位线的计算也会多了。

假设
地面径流 是 2, 5, 6, 6, 6 ...

净雨就是都是1个单位 mm/h。净雨单位是mm，但是是和时段对应的，所以实际上是和时段有关的。

如图



⇒这也就解释了中间的离散表达是单位时段的净雨。

按上页公式：

$$Q_0 = h_0 q_0$$
$$Q_1 = h_0 q_1 + h_1 q_0$$
$$Q_2 = h_0 q_2 + h_1 q_1 + h_2 q_0$$
$$Q_3 = h_0 q_3 + h_1 q_2 + h_2 q_1 + h_3 q_0$$

$$q_0 = \frac{Q_0}{h_0} = \frac{2}{1} = 2$$
$$q_1 = \frac{Q_1 - h_1 q_0}{h_0} = \frac{5 - 1\times 2}{1} = 3$$
$$q_2 = \frac{Q_2 - h_2 q_0 - h_1 q_1}{h_0} = \frac{6 - 1\times 2 - 1\times 3}{1} = 1$$
$$q_3 = \frac{Q_3 - h_3 q_0 - h_1 q_2 - h_2 q_1}{h_0} = 0$$
$$\cdots = 0$$

⇒单位线：2, 3, 1。因为由定义成的10mm，
所以 $h_i = h_{i单}/10mm = 1$ ∴原 $h_{i单} = 10mm$ 也就是每 Δt_0 降雨10mm。也就是雨强：$10/\Delta t_0$。
单位雨强是 $10/\Delta t_0$

所以对于S曲线，其离散表达：

$S(t)_{单} = \sum_{j=0}^{k} q_j(\Delta t, t)$ → 这其实也是个卷积运算，只不过因为卷积的是那个矩形函数，值为1，所以就没管下标了q。

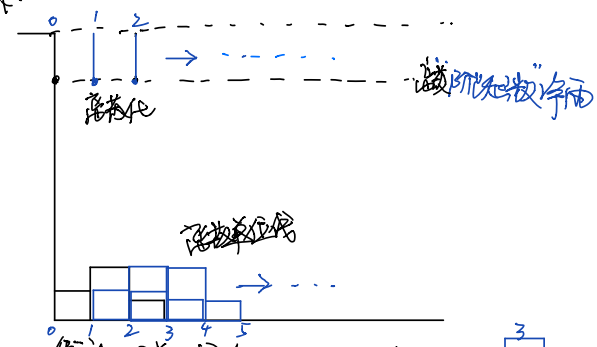
即 $S(t) = \int_0^t u(0,\tau)\,d\tau$ 的离散形式：

$S(t) = \varepsilon * q = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \cdot q_{t-j+1}$ 课本上这是从0开始计数的

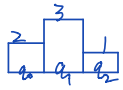
每个t

$\therefore S(t) = \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j \cdot q_{t-j}$

如果：



假设一个单位线总时段长3，形状如图.



$$S(0)=\underbrace{\varepsilon_0\cdot q_0+\varepsilon_1\cdot q_{-1}}_{0}\cdots$$

$$S(1)=\varepsilon_0\cdot q_1+\varepsilon_1\cdot q_0$$

$$S(2)=\varepsilon_0\cdot q_2+\varepsilon_1 q_1+\varepsilon_2 q_0$$

$$S(3)=\varepsilon_0\underbrace{q_3}_{=0}+\varepsilon_1 q_2+\varepsilon_2 q_1+\varepsilon_3 q_0$$

$$S(4)=0+0+\varepsilon_2 q_2+\varepsilon_3 q_1+\varepsilon_4 q_0$$

$$\cdots$$

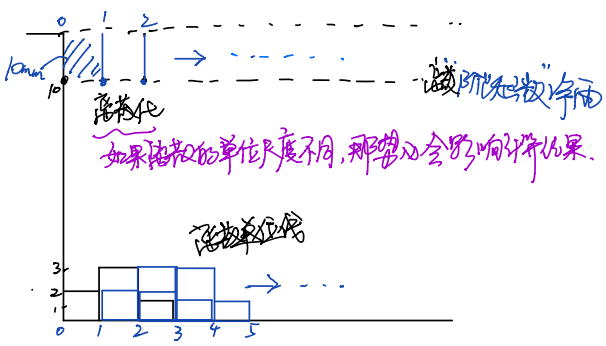
$$S(t)=0+\cdots+\varepsilon_{t-2}q_2+\varepsilon_{t-3}q_1+\varepsilon_{t-4}q_0$$

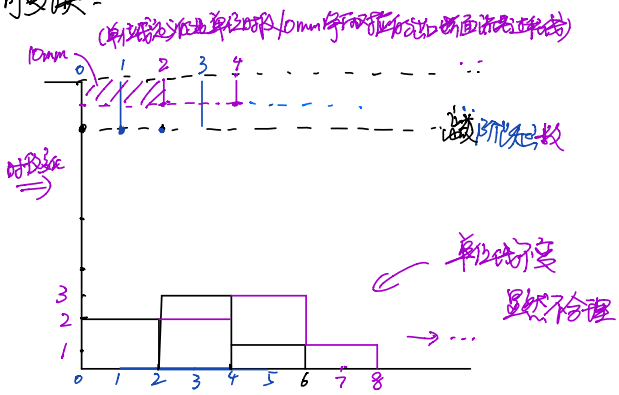
k是序列的时段数，因为阶跃函数序列 所以是无穷大.

以本例为参考：结合前上的实例分析、 $S(t)=\sum_{j=0}^{k}q_{t-j}$ k是单位线的时段个数

那么应该如何调整计算？如何已知一个步长的单位线，直接转换成为另一个步长的单位线.

接下来分析当 Δt 变化时，$q(t)$ 应该如何变换：





上图，$S(0)=\varepsilon_0 q_0$

$$S(1)=\varepsilon_0 q_1+\varepsilon_1 q_0$$

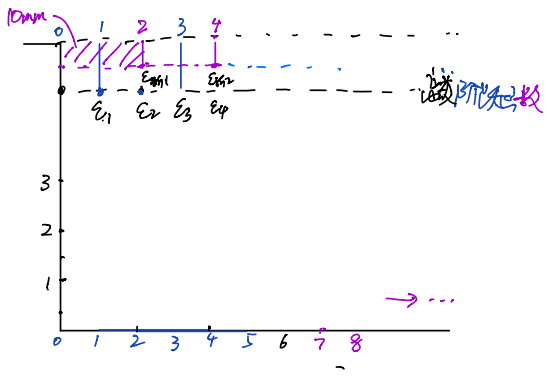
$$S(2)=\varepsilon_0 q_2+\varepsilon_1 q_1+\varepsilon_2 q_0$$

$$S(3)=\varepsilon_1 q_2+\varepsilon_2 q_1+\varepsilon_3 q_0$$

$$\cdots$$

$$S(t)=\cdots\varepsilon_{t-2}q_2+\varepsilon_{t-1}q_1+\varepsilon_t q_0$$

现在：2个原时段变为现在1个时段，原来Δt_0降10mm，现在因为要求的单位线，它对应的还是10mm，也就是现在要求Δt内降10mm产流，那么是要在图上求得这下图阴影部分对应的单位线了。



同样一个流域，下垫面入渗不变，产流特征不变。因此找到时段降雨强度的关键是这里产流的特征参数。单位净雨的响应是不变的，落在的时段长是1个单位强度的净雨量的响应是不变的。再考虑倍比特性，即1个单位强度的净雨量的响应或者是1个单位强度的净雨量的响应的n倍。

$S_0(t)-S_0(t-\Delta t)$ 强度为$10/\Delta t_0$的净雨形成的流量过程线。(Δt)

$q(\Delta t,t)$：Δt内10mm降雨强度为$10/\Delta t$净雨形成的流量过程线 (Δt)

令1个单位强度净雨量的响应：Q_u

$$S_0(t)-S_0(t-\Delta t)=\frac{10}{\Delta t_0}\times Q_u \qquad q(\Delta t,t)=\frac{10}{\Delta t}\times Q_u$$

$$\therefore \frac{S_0(t)-S_0(t-\Delta t)}{10/\Delta t_0}=\frac{q(\Delta t,t)}{10/\Delta t}$$

$$\therefore q(\Delta t,t)=\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\left[S_0(t)-S_0(t-\Delta t)\right]$$

- 经流过程线分析

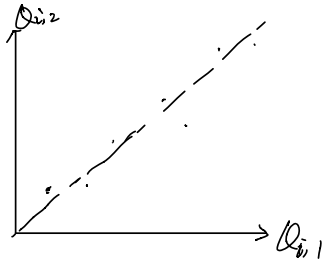
计算单位线或者检验模型计算结果时都需要对实测流量进行分析。先分析退水规律

退水指数方程 $Q_t=Q_0e^{-t/k}$ $u_t=kQ_t$ $\Rightarrow$ $Q_{t+1}=e^{-1/k}Q_t$ 令$G=e^{-1/k}$

$\Rightarrow$ 则 $k=-1/\ln G$ → 平均退流时间 消退系数 $G=Q_{t+1}/Q_t$

$(Q_{1,1},Q_{1,2})$，$(Q_{2,1},Q_{2,2})$ --- $(Q_{n,1},Q_{n,2})$ 多组点同作计G：

可以作一条直线如下图所示



方向各点表示 $(Q_{1,1}, Q_{1,2}) \cdots (Q_{n,1}, Q_{n,2})$

求G 即拟合一条过原点的直线

则利用最小二乘法原理求.

令 $x = G$

$$\begin{cases} Q_{1,2} = G Q_{1,1} \\ Q_{2,2} = G Q_{2,1} \\ \cdots \\ Q_{n,2} = G Q_{n,1} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{1,2} \\ Q_{2,2} \\ \vdots \\ Q_{n,2} \end{bmatrix}}_{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{1,1} \\ Q_{2,1} \\ \vdots \\ Q_{n,1} \end{bmatrix}}_{A} \cdot G$$

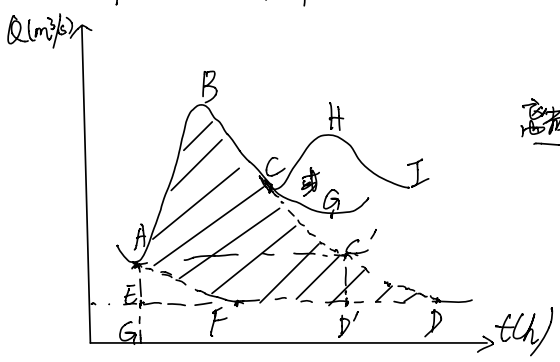
$$Ax = b$$

$$\Rightarrow A^T A x = A^T b$$

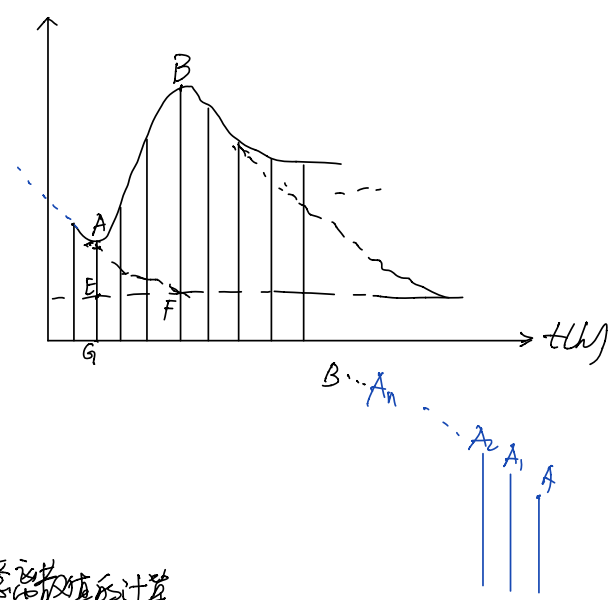
$$x = (A^T A)^{-1} A^T b$$

即 $G = \left([Q_{1,1}, \cdots Q_{n,1}] \cdot \begin{bmatrix} Q_{1,1} \\ \vdots \\ Q_{n,1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot [Q_{1,1}, \cdots Q_{n,1}] \cdot \begin{bmatrix} Q_{1,2} \\ \vdots \\ Q_{n,2} \end{bmatrix}$

然后利用退水曲线计算出次洪水化流过程.



意数情况



关键点C点怎么取?

- A点可以根据化流过程容易找到起涨点.
- ED是基流, 直接用本时刻流量得到
- 根据A及退水曲线计算出与ED的交点F. 注意离散值的计算
- 用退水曲线计算 $A \to A_1, A_2, A_3 \cdots$, 计算至尖峰B点 $B \to A \to F$
- 将这条 $B \to A \to F$ 曲线与B点开始的流量过程线作差值 $[\Delta x_1, \Delta x_2 \cdots \Delta x_n]$
- 倒序检查取极小值点. 在 $B \to C'$ 之间选择一个极小值作为分割点. 选择近C'的极小值点. 作为点C. 找到点C后

地下水水流汇流计算：

线性水库演算法

$$\begin{cases} I_g - Q_g = \dfrac{dW_g}{dt} \\ W_g = K_g Q_g \end{cases}$$

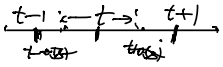
连续形式可由脉冲响应函数 $u(0,t) = \frac{1}{K_g} e^{-t/K_g}$

例如，也是一种单位线的表达形式

这里可以直接采用差分形式进行计算，参考数值计算的长篇

朴素的思想：$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 然后 $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$，h 是步长

$$\bar{I}_g - \bar{Q}_g = \underbrace{\frac{W_g(t+\Delta t) - W_g(t)}{\Delta t}}_{\text{(前向差分)}} = \underbrace{\frac{W_g(t+0.5\Delta t) - W_g(t-0.5\Delta t)}{\Delta t}}_{\text{(中心差分)}}$$



$$W_g(t+0.5\Delta t) = K_g Q_g(t+0.5\Delta t)$$

$$W_g(t-0.5\Delta t) = K_g Q_g(t-0.5\Delta t)$$

$$\bar{Q}_g = \frac{Q_g(t-0.5\Delta t) + Q_g(t+0.5\Delta t)}{2}$$

令 $W_g(t+0.5\Delta t) = W_{g+}$　$W_g(t-0.5\Delta t) = W_{g-}$　$Q_g(t+0.5\Delta t) = Q_{g+}$　$Q_g(t-0.5\Delta t) = Q_{g-}$

则 $\bar{Q}_g = (Q_{g+} + Q_{g-})/2$，$\bar{I}_g - \bar{Q}_g = \frac{W_{g+} - W_{g-}}{\Delta t}$，$W_{g+} = K_g Q_{g+}$，$W_{g-} = K_g Q_{g-}$

$$\bar{I}_g - \frac{Q_{g+} + Q_{g-}}{2} = \frac{K_g Q_{g+} - K_g Q_{g-}}{\Delta t}$$

$$2\bar{I}_g \Delta t - \Delta t \cdot Q_{g+} - \Delta t \cdot Q_{g-} = 2K_g Q_{g+} - 2K_g Q_{g-}$$

$$(2K_g + \Delta t) Q_{g+} = 2\bar{I}_g \Delta t - \Delta t Q_{g-} + 2K_g Q_{g-}$$

$$Q_{g+} = \frac{2\bar{I}_g \Delta t + (2K_g - \Delta t) Q_{g-}}{2K_g + \Delta t}$$

$$= \frac{\Delta t}{K_g + 0.5\Delta t} \bar{I}_g + \frac{K_g - 0.5\Delta t}{K_g + 0.5\Delta t} Q_{g-}$$

$L X_t = X_{t-1}$

书上表达 $Q_{g2} = \frac{\Delta t}{K_g + 0.5\Delta t} (\underbrace{\bar{I}_g - \bar{E}_g}_{\text{有效净雨}}) + \frac{K_g - 0.5\Delta t}{K_g + 0.5\Delta t} Q_{g1}$ 一致的。

Q_{g1}, Q_{g2}：时段始、末地下径流出流量。$\bar{I}_g$：时段内地下水入流量，$\bar{E}_g$：时段内地下水蒸发量

令 $KKG = \frac{K_g - 0.5\Delta t}{K_g + 0.5\Delta t}$ ， $\frac{\Delta t}{K_g + 0.5\Delta t} = 1 - KKG$

$$Q_{g2} = C(1-KKG)(\bar{I}_g - \bar{E}_g) + KKG \cdot Q_{g1}$$

$$I_g - E_g = \frac{1000 \cdot RG \cdot F}{3600\Delta t} = \frac{RG \cdot F}{3.6\Delta t}$$ RG：地下径流深，mm， F流域面积 km^2 。

$\Rightarrow Q_{g2} = RG(1-KKG)U + Q_{g1} \cdot KKG$ ， $U = \frac{F(km^2)}{3.6\Delta t(h)}$ 为折算系数

$$Q(t) = RG(1-KKG) \cdot U + Q(t-1) \cdot KKG$$

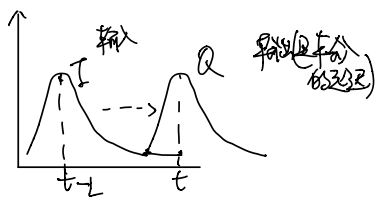
滞后演算方法：

$$Q_t = CR \cdot Q_{t-1} + (1 - \underbrace{CR}_{\text{消退系数}}) \cdot Q_{T_{t-L}}$$ → 滞后时间

线性水库模拟方程：

此公式等价于先一个线性水库，再一个线性水库串联

$$I(t-L) = Q(t)$$



如果是一个线性水库和一个"线性水库"的串联：

$$Q(t) = RG(1-KKG) \cdot U + Q(t-1) \cdot KKG$$

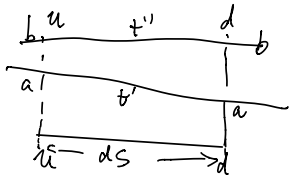
还没有平台输入一个线性水库，此时这是平台出。

$$Q_{总}(t+L) = Q(t) = RG(1-KKG) \cdot U + Q(t-1) \cdot KKG$$

马斯京根河道演算

圣维南方程

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial t}=q$$



b-b断面

考虑t时刻 → t+dt 的段内，由于交换而引起的质量变化