

Fracciones continuas

1. Las fracciones continuas aparecen al dividir

Para entender qué objeto es eso que llamamos una *fracción continua*, examinemos un ejemplo sencillo.

Al aplicar el algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor de 55 y 43, obtenemos como pasos intermedios las expresiones

$$\begin{aligned} 55 &= 1 \cdot 43 + 12, \\ 43 &= 3 \cdot 12 + 7, \\ 12 &= 1 \cdot 7 + 5, \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2, \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Los números 1, 3, 1, 1, 2, 2 son los cocientes parciales del algoritmo. Utilizando esta información podemos escribir el número racional $\frac{55}{43}$ de una forma curiosa:

$$\frac{55}{43} = 1 + \frac{12}{43} = 1 + \frac{1}{\frac{43}{12}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{7}{12}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{5}{7}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}.$$

La expresión de más a la derecha de esta cadena de igualdades es lo que se conoce como una fracción continua (simple) finita. Para describirla de una forma más compacta, utilizaremos la siguiente notación:

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} =: [1; 3, 1, 1, 2, 2].$$

Por supuesto, no hay nada de especial en el número racional $55/43$. Podemos seguir el mismo procedimiento para cualquier número racional a/b , con $a \geq 0$ y $b > 0$.

Observación. Es fácil convencerse de que

$$(*) \quad [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, 1] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1} + 1],$$

de modo que dos fracciones continuas finitas distintas pueden producir el mismo número racional. Sin embargo (*) es la única ambigüedad posible, de modo que si convenimos imponer que toda fracción continua finita $[a_0; a_1, \dots, a_m]$ tenga $a_m > 1$, la representación de un número racional $x > 1$ como fracción continua es única.

Supongamos ahora que el número racional que queremos representar como fracción continua es negativo. Con el fin de que la representación continua sea también única en este caso, entre las posibles representaciones del número como fracción p/q elegiremos una en la que el denominador q sea positivo, y por tanto p será negativo. De esta forma, el único cociente negativo que aparece en el cálculo de la fracción continua será el primero, a_0 , que coincidirá con el *suelo* (*floor*) del número racional¹.

Ejemplo. Aplicamos el algoritmo de Euclides al número racional $-55/43$, que representamos como $(-55)/43$. Se obtiene

$$\begin{aligned} -55 &= (-2) \cdot 43 + 31, \\ 43 &= 1 \cdot 31 + 12, \\ 31 &= 2 \cdot 12 + 7, \\ 12 &= 1 \cdot 7 + 5, \\ 7 &= 1 \cdot 5 + 2, \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0, \end{aligned}$$

de forma que $-55/43$ se escribe como fracción continua (en notación compacta) como $[-2; 1, 2, 1, 1, 2, 2]$.

2. Las fracciones continuas aparecen al resolver ecuaciones

Consideremos la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, cuya única solución positiva es la llamada *razón áurea*, $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Observa que podemos reescribir la identidad

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

como

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

Sustituyendo en esta identidad la Φ del denominador por $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ se obtiene

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}.$$

Repitiendo este proceso de sustitución “hasta el infinito”, podemos escribir

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}},$$

expresión que denotaremos en notación compacta por $[1; \bar{1}]$, para indicar que el 1 se repite indefinidamente. El lado derecho de esta expresión es un ejemplo de una *fracción continua infinita*. ¿Por qué hemos puesto la igualdad entre comillas? Porque tenemos que dar sentido al lado derecho de la expresión, a la fracción continua infinita.

¹Recordemos que el *suelo* de un número real x , denotado por $\lfloor x \rfloor$, es el mayor entero que es menor o igual que x . El suelo de un número se obtiene en Sagemath con la función `floor`.

3. Fracciones continuas infinitas. Convergentes

Supongamos ahora que a_0 es un entero arbitrario (positivo, negativo o cero), y que $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión cualquiera de enteros positivos. Llamamos n -ésimo convergente de la fracción continua infinita (simple) $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ a la fracción continua finita $c_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Nótese que c_n está bien definido, y que es un número racional. Si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ existe, decimos que la fracción continua infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ converge, y denotamos $[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

Un sencillo argumento de inducción permite demostrar que los convergentes $c_n = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ pueden describirse como

$$c_n = \frac{p_n}{q_n},$$

donde las sucesiones $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ vienen dadas por las *relaciones de recurrencia de Wallis-Euler*:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 a_1 + 1, & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{para } n \geq 2 \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

No es difícil demostrar a partir de aquí que se cumple

$$\left. \begin{aligned} p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} &= (-1)^{n-1} \\ p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} &= (-1)^n a_n \end{aligned} \right\} \quad n = 1, 2, \dots$$

Como consecuencia inmediata se obtiene que p_n y q_n son coprimos. Además, aplicando sucesivas veces estas identidades se obtiene que

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Por otra parte, $q_n < q_{n+1}$ para todo $n \geq 0$, y además $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$, por lo que concluimos que las fracciones continuas infinitas (simples) siempre convergen a un cierto $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, y que los convergentes satisfacen

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots < c_{2n} < \dots < \alpha < \dots < c_{2n-1} < \dots < c_5 < c_3 < c_1.$$

Se tiene además la estimación

$$|\alpha - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2},$$

válida para todos los valores de n , lo que implica que α no puede ser racional. Así pues, **una fracción continua (simple) es racional si y sólo si es finita**.

Ejemplo. En particular, la fracción continua $\Phi := [1; 1, 1, 1, \dots]$ converge. ¿A qué converge? Nótese que si denotamos por x su valor, tenemos

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ddots}}}} = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \frac{1}{x},$$

así que x es un número positivo que verifica la identidad $x^2 - x - 1$, de modo que $x = \Phi$.

También podemos obtener esta misma conclusión a partir de los convergentes. En efecto, el n -ésimo convergente de esa fracción continua es

$$c_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\ddots}{1 + \frac{1}{1 + 1}}}} = 1 + \frac{1}{c_{n-1}}.$$

Por lo tanto, si denotamos $y = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, que sabemos que existe, tomando $n \rightarrow \infty$ en ambos miembros de la identidad $c_n = 1 + \frac{1}{c_{n-1}}$ obtenemos que $y = 1 + \frac{1}{y}$. Concluimos que y es la única solución positiva de $y^2 - y - 1 = 0$, es decir, $y = \Phi$.

4. Algoritmo canónico para obtener la fracción continua de un número irracional

¿Cómo construir la expresión como fracción continua de un número real? Ya sabemos cómo hacerlo para números racionales; el mismo método, interpretado adecuadamente, funcionará para irracionales, de manera que vamos a revisarlo.

Consideremos el número $\frac{157}{68} = [2; 3, 4, 5]$. Veamos de nuevo cómo se obtiene su expansión en fracciones continuas.

En primer lugar escribimos $\xi_0 := \frac{157}{68}$ como

$$\xi_0 = 2 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \text{donde } \xi_1 = \frac{68}{21} > 1.$$

En particular, $a_0 = 2 = \lfloor \xi_0 \rfloor$, donde, para cada número real x , $\lfloor x \rfloor$ denota al suelo de x , esto es, el mayor entero menor o igual que x . Ahora escribimos $\xi_1 = \frac{68}{21}$ como

$$\xi_1 = 3 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \text{donde } \xi_2 = \frac{21}{5} > 1.$$

En particular $a_1 = 3 = \lfloor \xi_1 \rfloor$. En tercer lugar, escribimos

$$\xi_2 = \frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{\xi_3}, \quad \text{donde } \xi_3 = 5 > 1.$$

En particular $a_2 = 4 = \lfloor \xi_2 \rfloor$. Finalmente, $a_3 = \lfloor \xi_3 \rfloor = \xi_3$ no se puede descomponer más, de manera que *paramos* aquí. Por consiguiente,

$$\frac{157}{68} = \xi_0 = 2 + \frac{1}{\xi_1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi_2}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\xi_3}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}$$

Acabamos de encontrar la fracción continua canónica (simple) de $157/68$. Nótese que acabamos con el número 5, que es mayor que 1; este será siempre el caso cuando apliquemos el procedimiento a un número racional no entero.

¡Podemos seguir exactamente el mismo procedimiento para los números irracionales! Sea ξ un número irracional. Hacemos $\xi_0 = \xi$ y definimos $a_0 := \lfloor \xi_0 \rfloor \in \mathbb{Z}$. Entonces, $0 < \xi_0 - a_0 < 1$, de forma que podemos escribir

$$\xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \text{donde } \xi_1 := \frac{1}{\xi_0 - a_0} > 1.$$

Nótese que ξ_1 es irracional. En segundo lugar, definimos $a_1 := \lfloor \xi_1 \rfloor \in \mathbb{N}$. Entonces $0 < \xi_1 - a_1 < 1$, de forma que podemos escribir

$$\xi_1 = a_1 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \text{donde } \xi_2 := \frac{1}{\xi_1 - a_1} > 1.$$

Nótese que ξ_2 es irracional. En tercer lugar, definimos $a_2 := \lfloor \xi_2 \rfloor \in \mathbb{N}$. Entonces $0 < \xi_2 - a_2 < 1$, de forma que podemos escribir

$$\xi_2 = a_2 + \frac{1}{\xi_3}, \quad \text{donde } \xi_3 := \frac{1}{\xi_2 - a_2} > 1.$$

Nótese que ξ_3 es irracional. Podemos continuar este procedimiento “hasta el infinito”, creando una sucesión de números reales $\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ de números reales con $\xi_n > 0$ para $n \geq 1$ llamada la *sucesión de cocientes completos* de ξ , y una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ de enteros con $a_n > 0$ para $n \geq 1$ llamada la *sucesión de cocientes parciales* de ξ , tales que

$$\xi_n = a_n + \frac{1}{\xi_{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por consiguiente,

$$\xi = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}} = \dots = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \ddots}}}}.$$

No es en principio obvio que la fracción continua infinita de la derecha coincida con el propio ξ (de ahí las comillas), pero es algo que puede demostrarse, así que esa igualdad es cierta.

En resumen, $\xi = [a_0; a_1, \dots]$, donde la forma de obtener los coeficientes es

$$\xi_0 = \xi, \quad a_n = \lfloor \xi_n \rfloor \text{ para } n \geq 0, \quad \xi_{n+1} = \frac{1}{\xi_n - a_n}$$