Números naturales en distintas bases

Estamos habituados a encontrar los números representados en el sistema decimal, o de base 10, con los diez dígitos: $0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$. De menor a mayor, y sin saltarnos ninguno, los primeros naturales se representan

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11 < 12 < ...$$

Y los que siguen a 437 son $438, 439, 440, 441, ...$ El sistema decimal lo tenemos tan asumido que vamos a pasar por él para entender cualquier otro. De cada sistema entenderemos que los dígitos $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{b-1}$ de su base tienen los valores correspondientes a los b primeros números enteros no negativos. Es costumbre representarlos, si la base b es menor o igual que diez, con los símbolos $0, 1, \ldots, b-1$.
Para sistemas con más de diez dígitos en la base se necesitan más *símbolos* para representar los dígitos a partir del undécimo, para lo que se añaden las primeras letras mayúsculas del alfabeto:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < A < B < C < ...$$

De esta manera se podrá representar, en cualquier sistema, todo valor representable por el sistema decimal.
En un sistema de numeración con base $\mathbf{b}$ y dígitos 0, a_1, ..., a_{b-1} un número *natural* de m dígitos, digamos $d_{m-1}d_{m-2}...d_2d_1d_0$, $0 \leq d_j < b$ para $j = 0, 1, \ldots, m-1$ y $d_{m-1} \neq 0$, tendrá valor:

$$d_{m-1} \cdot \mathbf{b}^{m-1} + d_{m-2} \cdot \mathbf{b}^{m-2} + \cdots + d_2 \cdot \mathbf{b}^2 + d_1 \cdot \mathbf{b} + d_0 \,. \tag{1}$$

Para especificar que la expresión $d_{m-1}d_{m-2}...d_2d_1d_0$ es en una base $\mathbf{b}$, distinta de la decimal, utilizaremos la notación: $d_{m-1}d_{m-2}...d_2d_1d_{0\lrcorner\mathbf{b}}$.
Es sencillo ver que dado un número z, sus dígitos en una base $\mathbf{b}$ se pueden calcular con el siguiente algoritmo

Cálculo de los dígitos de un natural en base b

Objetivo: Dado $z \in \mathbb{N}$ y una base $\mathbf{b}$ averiguar $0 \leq d_0, d_1, \ldots, d_k < \mathbf{b}$, con $d_m \neq 0$ tales que $z = d_k...d_1d_{0\lrcorner\mathbf{b}}$ es decir

$$z = d_k \cdot \mathbf{b}^k + d_{k-1} \cdot \mathbf{b}^{k-1} + \cdots + d_2 \cdot \mathbf{b}^2 + d_1 \cdot \mathbf{b} + d_0 \,.$$

Procedimiento: Se calcula d_0 como el resto, no negativo y menor que $\mathbf{b}$, de la división entera de z por $\mathbf{b}$. Si q_1 es el cociente de esta división, es decir $z = q_1 \cdot \mathbf{b} + d_0$ con $0 \leq d_0 < \mathbf{b}$, se tiene:

$$q_1 = d_k \cdot \mathbf{b}^{k-1} + d_{k-1} \cdot \mathbf{b}^{k-2} + \cdots + d_2 \cdot \mathbf{b} + d_1 \qquad \text{con } 0 \leq q_1 < z.$$

Si $q_1 = 0$ se acaba el algoritmo. En otro caso, se repite el cálculo anterior con q_1, encontrando $0 \leq d_1 < \mathbf{b}$ tal que $q_1 = q_2\mathbf{b} + d_1$, con $0 \leq q_2 < q_1 < z$. Este procedimiento acaba pues en un número finito de pasos aparece un cociente menor que $\mathbf{b}$: si $0 < q_k < \mathbf{b}$ el siguiente paso sería $q_k = 0 \cdot \mathbf{b} + d_k$, con $d_k = q_k$ el dígito principal.

Ejemplos

- *Sistema binario* o de base 2 con dígitos $0 < 1$. Primeros valores (naturales):

decimal:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
base 2:	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101

  El desarrollo en base 2 del número 435 se averigua con los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} 435 =& 217 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 217 = 108 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 108 = 54 \cdot \mathbf{2} + 0\,, \quad 54 = 27 \cdot \mathbf{2} + 0\,, \\ & 27 = 13 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 13 = 6 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 6 = 3 \cdot \mathbf{2} + 0\,, \quad 3 = 1 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \quad 1 = 0 \cdot \mathbf{2} + 1\,, \end{aligned}$$

  de manera que $435 = 110110011_{\lrcorner 2}$.
  El valor decimal del número de nueve dígitos 110110011 en base 2 es

$$\begin{aligned} 110110011_{\lrcorner 2} &= 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2 + 1 = 256 + 128 + 32 + 16 + 2 + 1 = 435\,. \end{aligned}$$

- *Sistema ternario*, base 3, dígitos $0 < 1 < 2$. La representación en base 3 del número 428 se obtiene en los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} 428 =& 142 \cdot \mathbf{3} + 2\,, \quad 142 = 47 \cdot \mathbf{3} + 1\,, \quad 47 = 15 \cdot \mathbf{3} + 2\,, \\ & 15 = 5 \cdot \mathbf{3} + 0\,, \quad 5 = 1 \cdot \mathbf{3} + 2\,, \quad 1 = 0 \cdot \mathbf{3} + 1\,, \end{aligned}$$

  y así $428 = 120212_{\lrcorner 3}$.

El valor decimal del número de seis dígitos 120212 en base 3 es:

$$\begin{aligned} 120212_{\lrcorner 3} &= 1\cdot 3^5 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 2 \\ &= 243 + 2\cdot 81 + 2\cdot 9 + 3 + 2 = 243 + 162 + 18 + 3 + 2 = 428\,. \end{aligned}$$

- *Sistema hexadecimal*, base 16, dígitos $0123456789ABCDEF$.

$$41531 = 2595\cdot\mathbf{16} + 11\,,\quad 2595 = 162\cdot\mathbf{16} + 3\,,\quad 162 = 10\cdot\mathbf{16} + 2\,,\quad 10 = 0\cdot\mathbf{16} + 10\,,\ 41531 = A23B_{\lrcorner 16}$$

$$\begin{aligned} A23B_{\lrcorner 16} &= 10\cdot 16^3 + 2\cdot 16^2 + 3\cdot 16 + 11 \\ &= 10\cdot 4096 + 2\cdot 256 + 3\cdot 16 + 11 = 40960 + 512 + 48 + 11 = 41531\,. \end{aligned}$$

Algoritmo de Horner

Como acabamos de ver en los ejemplos, es muy sencillo averiguar qué número en base 10 es el que en base $\mathbf{b}$ tiene expresión $d_{m-1}d_{m-2}\dots d_2d_1d_{0\lrcorner\mathbf{b}}$. Basta con sustituir y evaluar:

$$d_{m-1}\cdot\mathbf{b}^{m-1} + d_{m-2}\cdot\mathbf{b}^{m-2} + \cdots + d_2\cdot\mathbf{b}^2 + d_1\cdot\mathbf{b} + d_0\,.$$

Para evaluar esta expresión, para m dígitos, se han de realizar: $m-1$ sumas y $1+2+\cdots+(m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$ productos. El siguiente algoritmo, de propósito más general, nos aporta un gran ahorro en el número de operaciones.

Algoritmo de Horner

Objetivo: Calcular $p(x_0)$ con $p(x)$ el polinomio de grado n:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,.$$

Procedimiento: Se calcula, a partir de los coeficientes del polinomio y del valor x_0, la sucesión

$$b_0 = a_n\,,\quad b_j = b_{j-1}\cdot x_0 + a_{n-j}\ \text{ para } j = 1,\dots,n\,.$$

Se tiene que $p(x_0) = b_n$ (el último de la sucesión).

Es directo ver que en este algoritmo se realizan n sumas y n productos: una suma y un producto en el cálculo de cada b_j para $j = 1,\dots,n$.
El uso de este algoritmo para el asunto que nos traemos entre manos es claro: *el número que en base* $\mathbf{b}$ *tiene expresión* $d_{m-1}d_{m-2}\dots d_2d_1d_0$ *es* $p(\mathbf{b})$ *con* $p(x)$ *el polinomio* $p(x) = d_{m-1}x^{m-1} + d_{m-2}x^{m-2} + \cdots + d_2x^2 + d_1x + d_0$.

Ejemplos: Para calcular, con el algoritmo de Horner, el valor decimal de $120212_{\lrcorner 3}$ tomamos el polinomio en x de grado $6-1=5$ con coeficientes, de mayor a menor grado, los 6 dígitos $1,2,0,2,1,2$:

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^2 + x + 2 = 2 + x(1 + x(2 + x(0 + x(2 + x(1))))).$$

La sucesión del algoritmo de Horner, para evaluar dicho polinomio en $x = \mathbf{3}$, quedaría:

$$b_0 = 1\,,\quad b_1 = 1\cdot\mathbf{3} + 2 = 5\,,\quad b_2 = 5\cdot\mathbf{3} + 0 = 15\,,\quad b_3 = 15\cdot\mathbf{3} + 2 = 47\,,$$
$$b_4 = 47\cdot\mathbf{3} + 1 = 142\,,\quad b_5 = 142\cdot\mathbf{3} + 2 = 428\,.$$

El valor decimal de $A23B_{\lrcorner 16}$ es el que se alcanza con el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} p(x) &= 10x^3 + 2x^2 + 3x + 11 \\ b_0 &= 10\,,\quad b_1 = 10\cdot\mathbf{16} + 2 = 162\,,\quad b_2 = 162\cdot\mathbf{16} + 3 = 2592 + 3 = 2595\,, \\ b_3 &= 2595\cdot\mathbf{16} + 11 = 41520 + 11 = 41531\,. \end{aligned}$$

Desarrollos decimales finitos y periódicos

Los números racionales tienen desarrollos decimales finitos o infinitos pero periódicos. Ejemplos:

$$\frac{33}{12} = 2.75 \qquad \frac{12901}{10100} = 1.27\overline{7326}\,.$$

Si $p, q \in \mathbb{N}$ son dos naturales (se pueden considerar coprimos), el racional p/q se puede descomponer como una suma

$$\frac{p}{q} = z + \frac{p'}{q} \qquad \text{con } 0 \le p' < q \text{ y } z \in \mathbb{N}\,.$$

El natural z, que es ≥ 0, se dice la parte entera y $\frac{p'}{q}$ la parte fraccionaria, un racional no negativo y menor que 1. Sea r un racional positivo y menor que 1, $0 < r < 1$. Sea $\mathbf{b} \geq 2$ una base de numeración. Existen únicos enteros $0 \leq d_{-j} < \mathbf{b}$, los dígitos decimales en base $\mathbf{b}$ de r, tales que

$$r = d_{-1}\mathbf{b}^{-1} + d_{-2}\mathbf{b}^{-2} + \cdots + d_{-k}\mathbf{b}^{-k} + \dots$$

que denotaremos como $r = 0.d_{-1}d_{-2}\dots d_{-k}\dots_{\lrcorner\mathbf{b}}$.
Este desarrollo puede ser

$$\begin{aligned} \text{finito } r =& 0.d_{-1}\dots d_{-j\lrcorner\mathbf{b}} \quad (d_{-j} \neq 0) \text{ ocurre si } r \cdot \mathbf{b}^j \in \mathbb{N} \\ \text{periódico } r =& 0.d_{-1}\dots d_{-\ell}\overline{d_{-\ell+1}\dots d_{-k}}_{\lrcorner\mathbf{b}} \text{ ocurre si } r(\mathbf{b}^k - \mathbf{b}^\ell) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

en este segundo caso existe un valor mínimo de k para el que se verifica la condición. Ejemplos, en base 2:

$$\begin{aligned} \frac{9}{16} =& \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 0.1001_{\lrcorner 2} \\ \frac{7}{24} =& \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = 0.010\overline{01}_{\lrcorner 2} \qquad \text{obsérvese que } \tfrac{7}{24}(2^5 - 2^3) = 7 \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}$$

De la expresión

$$r = d_{-1}\mathbf{b}^{-1} + d_{-2}\mathbf{b}^{-2} + \cdots + d_{-k}\mathbf{b}^{-k} + \dots$$

es sencillo ver cómo, dado un racional de este tipo, recuperar sus dígitos decimales: basta con ir multiplicando por $\mathbf{b}$ y separar la parte entera (el dígito decimal a extraer) de la parte fraccionaria (donde encontramos el resto de dígitos). Por ejemplo, para encontrar los dígitos decimales de $7/24$ en base $\mathbf{b} = 2$:

- Puesto que $\mathbf{2} \cdot \frac{7}{24} = \frac{7}{12} < 1$, el primer decimal es 0, $\frac{7}{24} = 0.0\dots_{\lrcorner 2}$, y el siguiente será el primer decimal de $\mathbf{2} \cdot \frac{7}{24} - 0 = \frac{7}{12}$.
- De $\mathbf{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$, averiguamos el segundo decimal: $\frac{7}{24} = 0.01\dots_{\lrcorner 2}$, y el siguiente será el primero de de $2 \cdot \frac{7}{12} - 1 = \frac{1}{6}$.
- Ahora, $\mathbf{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} < 1$, y así: $\frac{7}{24} = 0.010\dots_{\lrcorner 2}$, y seguirá el primer decimal de $\frac{1}{3}$.
- La igualdad $\mathbf{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, nos dice que $\frac{7}{24} = 0.0100\dots_{\lrcorner 2}$, y hay que seguir con $\frac{2}{3}$.
- De $\mathbf{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{3}$, $\frac{2}{24} = 0.01001\dots_{\lrcorner 2}$, con $\frac{1}{3}$ para averiguar el siguiente decimal.
- Pero $\frac{1}{3}$ es un racional que ya hemos visitado en esta lista, y así tenemos una repetición de decimales desde su aparición. En definitiva $\boxed{\frac{7}{24} = 0.010\overline{01}_{\lrcorner 2}}$.

¿Cómo reconstruir un número fraccionario a partir de su expresión en una base?

Cuando el desarrollo es finito, estamos evaluando un polinomio en b^{-1}, así que podemos usar el algoritmo de Horner. Nótese que el término independiente de este polinomio es 0.

Supongamos ahora que r tiene un desarrollo periódico,

$$r = 0.d_{-1}\dots d_{-\ell}\overline{d_{-\ell-1}\dots d_{-k}}_{\lrcorner\mathbf{b}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\mathbf{b}^k r = d_{-1}\dots d_{-\ell}d_{-\ell-1}\dots d_{-k}.\overline{d_{-\ell-1}\dots d_{-k}}_{\lrcorner\mathbf{b}}, \\ &\mathbf{b}^l r = 0.\overline{d_{-\ell-1}\dots d_{-k}}_{\lrcorner\mathbf{b}}, \end{aligned}$$

de manera que

$$r = (d_{-1}\dots d_{-k\lrcorner\mathbf{b}} - d_{-1}\dots d_{-\ell\lrcorner\mathbf{b}})/(\mathbf{b}^k - \mathbf{b}^l).$$

Basta ahora con hacer la resta del numerador, transformando cada número natural usando el algoritmo de Horner. Nótese que esta idea vale tanto para números periódicos puros ($\ell = 0$), como para números periódicos mixtos con un anteperiodo.