Modelos de dinámica de poblaciones II.

En la sesión anterior hemos estudiado modelos matriciales de dinámica de poblaciones que se caracterizaban porque se clasificaba a los individuos en grupos de edad. En los **modelos de Markov** que vamos a considerar a continuación, de nuevo se clasifica a los individuos en diferentes estados $E_1, E_2, \ldots, E_n$ mutuamente excluyentes (que no tienen por qué ser clases de edad): cada ejemplar se encuentra, en cada momento, en uno y solo uno de los estados. Una característica fundamental de estos modelos es que el número total de individuos permanece constante. Si denotamos, para $1 \le i, j \le n$,

$$e_i(k) = \text{ número de individuos en el estado } E_i \text{ en el momento } k,$$
$$M_{ij} = \text{ proporción de individuos que, en una unidad de tiempo, pasan al estado } E_i \text{ desde el estado } E_j,$$

entonces
$$e_i(k) = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} e_j(k-1) \quad \text{o matricialmente:} \quad \vec{X}(k+1) = M\vec{X}(k),$$

donde $M = \big(M_{ij}\big)$ es la llamada matriz de transición, de paso o de Markov, y $\vec{X}(k) = (e_1(k), e_2(k), \ldots, e_n(k))^t$ es el vector de la distribución por estados de la población en el momento k. Con esta definición es claro que todas las entradas de la matriz M están en el intervalo $[0,1]$ y que los elementos de cada columna suman 1, $\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = 1$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Es lo que se conoce como una **matriz de Markov** o **matriz estocástica**. Por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} e_i(k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{ij} e_j(k-1) = \sum_{j=1}^{n} e_j(k-1) \quad \text{para todo } k = 1, \ldots,$$

lo que confirma que la población se mantiene constante en el tiempo.

Ejemplo. Una población de aves se encuentra repartida en dos humedales A y B. Se sabe que cada día un 20 % de las aves de A pasan al humedal B, mientras que un 30 % de aves lo hacen del B al A. Si para el día k, denotamos por $A(k)$ el número de aves en el humedal A, y por $B(k)$, el de aves en B, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} A(k+1) = 0.8A(k) + 0.3B(k) \\ B(k+1) = 0.2A(k) + 0.7B(k) \end{array}\right\} \quad \text{o matricialmente:} \quad \vec{X}(k+1) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \vec{X}(k)$$

con $\vec{X}(j) = (A(j), B(j))^t$ la distribución por estados en el momento j. La matriz de transición es por tanto $M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$.

Si $\vec{X}(0)$ es la distribución inicial en estados de la población, y M la matriz de Markov del modelo, se tiene que
$$\vec{X}(k) = M^k \vec{X}(0)$$
es la correspondiente al instante k.

Nótese que, si conocemos el número N de individuos de la población total, para conocer cuantos individuos hay en cada clase en cada instante k basta con conocer el vector $\vec{P}(k) = (p_1(k), p_2(k), \ldots, p_n(k))^t$ que da la proporción de individuos en cada clase en ese instante, ya que $\vec{X}(k) = N\vec{P}(k)$. Nótese que las coordenadas de cada vector de proporciones $\vec{P}(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, son no negativas y suman 1.

En el modelo de Markov interesa estudiar cuál es la **distribución en estados a largo plazo**, $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{X}(k)$, que viene determinada por el vector de proporciones asintótico, $P(\infty) := \lim\limits_{k\to\infty} \vec{P}(k)$, ya que

$$\lim_{k\to\infty} \vec{X}(k) = NP(\infty).$$

Puesto que $\vec{P}(k) = M\vec{P}(k-1)$ para todo $k = 1, 2, \ldots$, se tiene que $\vec{P}(k) = M^k\vec{P}(0)$ y, como vimos en la lectura de la sesión anterior, la evolución de $\vec{P}(k)$ y de $\vec{X}(k)$ depende del tamaño de los autovalores de M. En el caso de las matrices estocásticas asociadas a los modelos de Markov, en el que el tamaño de la población se mantiene, no puede haber autovalores con módulo mayor que 1, y tiene que haber un autovalor con módulo 1. Es más, se tiene el siguiente resultado, corolario sencillo del hecho de que las columnas son de suma 1.

Teorema 1. *Toda matriz estocástica tiene a* 1 *como autovalor.*

El autovalor 1 de una matriz estocástica M no siempre es dominante, pues pueden aparecer otros con el mismo valor absoluto (o módulo si son complejos). No obstante, si existe un natural k tal que M^k tiene todos su elementos positivos, entonces el autovalor 1 es dominante. Si una matriz estocástica tiene esta propiedad se dice que es **regular**.

Teorema 2. *Sea M una matriz estocástica regular.*

(a) 1 *es un autovalor de M con multiplicidad* 1*. Se puede elegir un autovector $\vec{v}$ asociado al autovalor* 1 *con todas las entradas positivas y que sumen* 1.

(b) *1 es un autovalor dominante: cualquier otro autovalor λ_j de M verifica que $|\lambda_j| < 1$.*

(c) *Cualquier vector de proporciones $\vec{p}$ tiene una componente no nula en la dirección del autovector $\vec{v}$ mencionado en (a) y $M^k\vec{p}$ converge a $\vec{v}$ cuando $k \to \infty$.*

El siguiente resultado nos da un criterio sencillo que permite determinar si una matriz es o no regular,

Teorema 3. *Una matriz estocástica M de orden n es regular si y solo si todos los elementos de M^{n^2} son positivos.*

Por otra parte, si M es una matriz estocástica y M^k tiene todas las entradas positivas para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces M^j tiene todas las entradas positivas para cualquier $j > k$. Por consiguiente, para ver si una matriz estocástica es o no regular basta con ir calculando potencias sucesivas de M hasta que o bien lleguemos a una que tenga todas las entradas positivas o bien alcancemos la potencia n^2, siendo n el orden de la matriz.