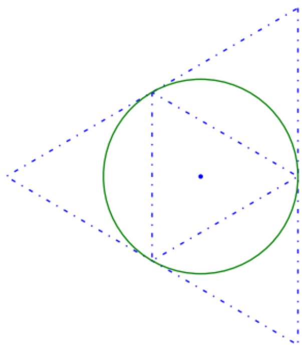
Arquímedes y el cálculo de π

E. Girondo, D. Ortega y F. Quirós
Laboratorio UAM, 1º de Matemáticas

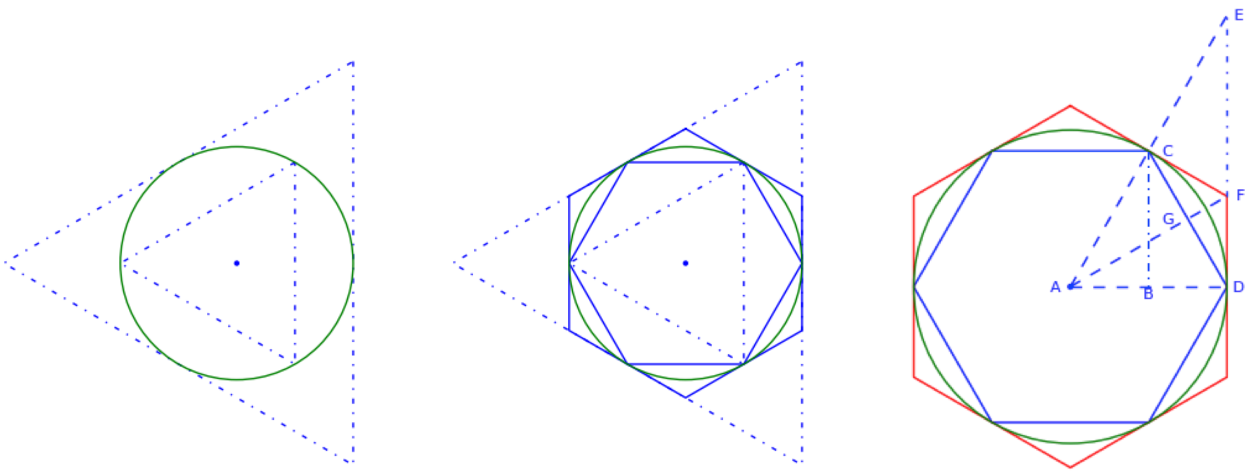
Con lo que sabemos sobre las funciones trigonométricas, podemos razonar fácilmente que el perímetro p_n de un poligono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad, y el perímetro P_n del circunscrito regular de n lados, serán

$$p_n = 2n\,\mathrm{sen}(\pi/n) < 2\pi < P_n = 2n\tan(\pi/n).$$



Calcular p_n y P_n permite obtener estimaciones de 2π, que serán mejores cuanto mayor sea el número n de lados. Arquímedes (S. III a.C.) no disponía de las funciones trigonométricas, ni, claro está, del valor de π, de forma que lo que hizo fue construir un procedimiento recursivo que relacionaba perímetros de polígonos regulares inscrito y circunscrito de n lados con los de los poligonos regulares inscrito y circunscrito de $2n$ lados. Veamos a continuación cómo puede hacerse esto.

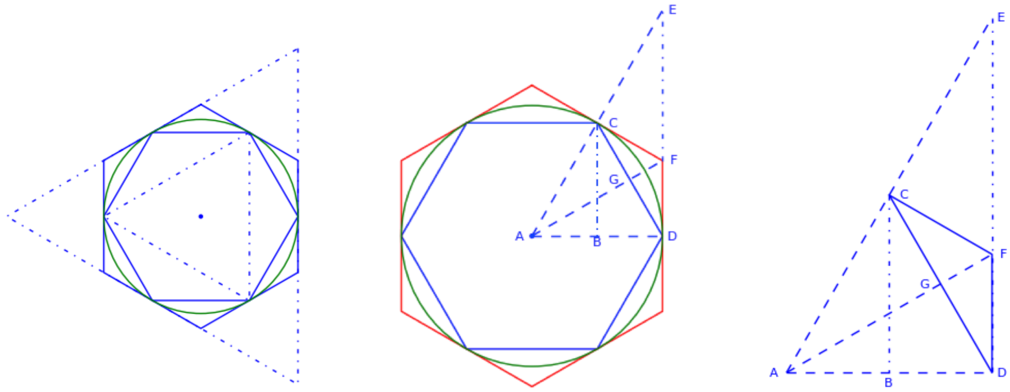
Partimos de dos polígonos (regulares), inscrito y circunscrito, de n lados. Giramos uno de ellos de forma que los lados queden paralelos y a partir de ellos se construyen los polígonos inscrito y circunscrito de $2n$ lados:



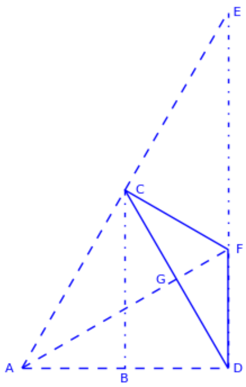
Vamos a denotar por PQ a la longitud del segmento determinado por dos puntos P y Q dados, y vamos a denotar por SI_m y SC_m al semilado (es decir, la mitad de la longitud del lado) del polígono regular de m lados inscrito y circunscrito a la circunferencia respectivamente.

Vemos que:

1. $SI_{2n} := CG$ es la mitad de la longitud del lado del polígono regular de $2n$ lados inscrito en la circunferencia.
2. $SI_n := CB$ es la mitad de la longitud del lado del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia.
3. $SC_{2n} := CF = FD$ es la mitad de la longitud del lado del polígono regular de $2n$ lados circunscrito a la circunferencia.
4. $SC_n := ED$ es la mitad de la longitud del lado del polígono regular de n lados circunscrito a la circunferencia.



Observa que con esta notación los perímetros con n lados, que nos van a servir para acotar π inferior y superiormente, son $p_n = 2nSI_n$ y $P_n = 2nSC_n$ respectivamente.



1) El Teorema de Tales, aplicado a los triángulos $\triangle CBA$ y $\triangle EDA$ muestra que

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD}$$

y, por otra parte,

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC}$$

puesto que que los triángulos $\triangle ACF$ y $\triangle ADF$ son iguales. Además, $\triangle ECF$ es un triángulo semejante a $\triangle CBA$ y $\triangle EDA$ (la razón es que ambos son rectángulos, y además el ángulo en E de $\triangle ECF$ es igual al ángulo en C de $\triangle CBA$), de lo que se deduce que

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CF}{EF} = \frac{CF}{ED - FD}$$

de modo que, juntando las tres igualdades se llega a

$$\frac{SI_n}{SC_n} = \frac{SC_{2n}}{SC_n - SC_{2n}}.$$

Operando obtenemos

$$\boxed{SC_{2n} = \frac{1}{\frac{1}{SC_n} + \frac{1}{SI_n}}.}$$

2) Por otra parte, $\triangle CGF$ y $\triangle CBD$ son triángulos semejantes (ambos son rectángulos, y el ángulo en F del primero y el ángulo en D del segundo son iguales, puesto que coinciden con la mitad del ángulo del polígono). Por lo tanto

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CG}{CF},$$

y, por tanto,

$$\frac{SI_n}{2SI_{2n}} = \frac{SI_{2n}}{SC_{2n}},$$

de donde

$$\boxed{SI_{2n} = \sqrt{\frac{SC_{2n}SI_n}{2}}.}$$

Estas fórmulas permiten entonces calcular (SI_{2n}, SC_{2n}) supuesto que conocemos (SI_n, SC_n).

Si partimos del caso inicial, conocido, de $(SI_6, SC_6) = (1/2, 1/\sqrt{3})$, podemos calcular los perímetros de los polígonos regulares inscrito y circunscrito con número de lados de la forma $6 \cdot 2^k$, y así aproximar la longitud de la circunferencia 2π como

$$\lim_{k\to\infty} 2(6 \cdot 2^k) SI_{6\cdot 2^k} = 2\pi = \lim_{k\to\infty} 2(6 \cdot 2^k) SC_{6\cdot 2^k}.$$