Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física – Instituto de Astrofísica
Astronomía – AST0111
Primer Semestre 2020

Ayudantía 1 - Solución

Profesora: Viviana Guzmán
Ayudantes: Camila Aravena González (cfaravena1@uc.cl) – Francisco Carrasco Varela (ffcarrasco@uc.cl)

Problema 1. Tamaño angular

a) Si una pelota tiene un diámetro de 70 *cm* y se encuentra a 35 metros de distancia. ¿Qué tamaño angular tiene?

Solución:

Para problemas del tamaño angular/diámetro angular *en astronomía*, primero que todo podemos asumir dos cosas:

I) Que el objeto que estamos observando es muy pequeñito. Es decir, independiente del tamaño de éste en la realidad, el objeto tiene un tamaño aparente pequeño dado a que éste se halla lejos de donde nos encontramos. Por ende trabajaremos con ángulos pequeños.

II) Que el objeto que estamos observando es similar a un punto y, por ende, es redondo. De manera que al ser redondo (y parecer una circunferencia) tiene un radio/diámetro.

Si observamos la Figura 1 tenemos el caso en que una persona (ubicada al lado izquierdo de la figura) está observando un objeto (ubicado a la derecha de la figura).

Tal cual se dijo, el objeto tiene un diámetro -el cual llamaremos D- y está ubicado a una distancia d.

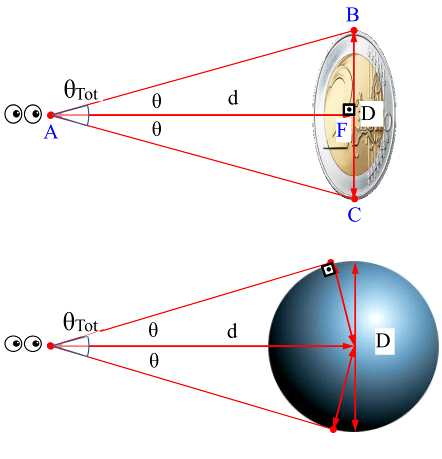

Figura 1: *Dibujo superior*: Un observador está mirando hacia un disco. *Dibujo inferior*: Un observador está observando hacia una esfera. El disco/esfera tiene un diámetro D y está a una distancia d. Para ángulos pequeños ambos casos son equivalentes. Se recomienda fijarse más en el dibujo superior para entender de mejor manera el ejercicio, ya que es más simple.

Ahora simplemente tratamos de formar un triángulo rectángulo. Para ello formamos un triángulo tal cual se muestra en la Figura 1. Aunque, claro está, el triángulo más grande ($\triangle ABC$) todavía no es un triángulo rectángulo. Para formar un triángulo rectángulo, simplemente hacemos una recta entre el observador y el centro del objeto (recta $\overline{AF}$), de manera que ahora sí se forma un triángulo rectángulo -específicamente dos ($\triangle ABF$ y $\triangle AFC$)-, tal cual se muestra en la mismísima Figura 1. Es claro, entonces, que si el diámetro del objeto era D, entonces su radio es $\frac{D}{2}$ (la mitad del diámetro).

Hecho esto aplicamos trigonometría pura. Tal cual está planteado el ejercicio, lo que deseamos conocer es el tamaño angular del objeto, es decir, el ángulo total que se forma ($\angle BAC$, o ángulo de color azul en la Figura 1), el cual llamaremos θ_{Tot}; ahora bien, al formar los triángulos rectángulos estamos dividiendo el ángulo θ_{Tot} en 2. Este ángulo que se forma ($\angle BAF$ o $\angle FAC$) en el cualquiera de los dos triángulos rectángulos le llamaremos θ, el cual es igual para ambos triángulos rectángulos. De manera que $\theta_{\text{Tot}} = \theta + \theta = 2 \cdot \theta$.

¿Qué datos conocemos en el problema? El radio del objeto (cateto opuesto del triángulo rectángulo) y la distancia a la que se encuentra (cateto adyacente). Con esto entonces llegamos a la relación trigonométrica:

$$\tan(\theta) = \frac{\text{radio}}{\text{distancia}} = \frac{\frac{1}{2}D}{d}$$

O simplemente:

$$\tan(\theta) = \frac{1}{2}\frac{D}{d}, \qquad |d| \neq 0 \tag{1}$$

Para "despejar" el ángulo, θ, aplicamos la función inversa de la tangente a la ecuación, resultando en:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\frac{D}{d}\right) \tag{2}$$

Ahora utilizamos algo que verán mucho en la carrera llamado *aproximaciones*. Hay ciertas veces en la vida que uno no tiene una calculadora o computador a mano, o simplemente los cálculos -incluso usando computadores- son muy tediosos. Es por ello que cuando calculamos ciertas cosas utilizamos ciertos "life hacks" para hacernos la vida un poco más sencilla y, muchas veces, ahorrarnos la lata de hacer cálculos muy complicados[1].

En este caso en especifico utilizaremos algo conocido como aproximación de ángulos pequeños. Si ustedes van a cualquier calculadora que tengan a mano y ponen `sin(0.1)`, con el ángulo en radianes, verán que la calculadora les arrojará un resultado *muy similar* -pero no exactamente igual- a `0.1`. ¿Coincidencia? ¡No lo creo! (en Cálculo I o II verán porqué es así). Está totalmente justificado utilizar esta aproximación en astronomía porque principalmente se observan objetos muy pequeños, los cuales no miden más de unos pocos grados.

De manera que la aproximación de ángulos pequeños para las funciones trigonométricas son:

- $\sin(x) \approx x$
- $\cos(x) \approx 1$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \approx \frac{x}{1} = x$

Pero recuerden que esto es aplicable *sí y sólo si x* es un ángulo chiquito[2].

Utilizando esta aproximación, la ecuación (2) queda como:

$$\theta \approx \frac{1}{2}\frac{D}{d} \tag{3}$$

Finalmente, recordemos que el ángulo total es $\theta_{\text{Tot}} = 2 \cdot \theta$, de manera que:

$$\theta_{\text{Tot}} = 2 \cdot \theta \tag{4}$$

[1]Aunque tampoco abusen de las aproximaciones, traten de hallar un equilibrio. Siempre encontrarán memes que relacionan las aproximaciones con los ingenieros porque ellos aman las aproximaciones (como usar $\pi = 3$, asies).

[2]Para la persona que se pregunte a qué tan pequeño me refiero con "chiquito", estamos hablando alrededor de ángulos menores a $10°$ o, equivalentemente, 0.174 rad.

Reemplazamos la ecuación (3) en la ecuación (4), así:

$$\theta_{\text{Tot}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{d}$$

Dando, finalmente:

$$\theta_{\text{Tot}} = \frac{D}{d} \tag{5}$$

O en español:

$$\text{Tamaño angular} = \frac{\text{Diámetro del objeto}}{\text{Distancia al objeto}} \tag{6}$$

Para este ejercicio en particular, tenemos que el diámetro de la pelota es de 70 cm y la distancia a ella es de 35 m. De manera que el ejercicio se resuelve simplemente aplicando la ecuación (5) hallada:

$$\theta_{\text{Tot}} = \frac{D}{d} = \frac{70 \text{ cm}}{35 \text{ m}} = \frac{0.7 \text{ m}}{35 \text{ m}} = \frac{1}{50} = 0.02$$

Si bien la respuesta es "adimensional", recordemos que θ_{Tot} es un ángulo. Y, al estar trabajando todo en unidades del Sistema Internacional (S.I.), éste ángulo estará dado en radianes. Es decir, y respondiendo a la pregunta de la ayudantía, la pelota tendrá un tamaño angular de aproximadamente 0.02 radianes cuando se encuentre a 35 metros de distancia. Algo importante en lo que siempre deben fijarse es en tratar de operar todo en las mismas unidades (mismo sistema de unidades de medida).

Como tip extra, en astronomía trabajamos mucho con ángulos muy pequeños. Es por eso que las unidades que se utilizan en este campo para medir ángulos, más allá de los grados y los radianes, son los arcosegundos; donde arcosegundos se abrevian como "arcsec" o como dos comillas. Para que se hagan una idea, un arcosegundo es un grado dividido en 3600. Es decir, 1 arcsec = $1'' = (\frac{1}{3600})^\circ$. De la misma manera, un radián es equivalente a 206265 arcosegundos, de manera que 1 rad = 206265 arcsec. Así, la ecuación (5) puede ser escrita como:

$$\theta_{\text{Tot}} = 206265 \cdot \frac{D}{d} \tag{7}$$

Y la única diferencia entre la ecuación (5) y la ecuación (7) es que la primera nos entregará el tamaño angular en radianes y la segunda nos entregará el resultado en arcosegundos, respectivamente.

b) ¿A qué distancia debe estar si la quiero ver como un punto, digamos, 10 veces más pequeño?

Solución:

Si nos fijamos en la ecuación (5) o (6), la cual repito a continuación para su comodidad:

$$\text{Tamaño angular} = \frac{\text{Diámetro del objeto}}{\text{Distancia al objeto}}$$

Se ve que el tamaño angular (o diámetro angular) es directamente proporcional al tamaño del objeto, e inversamente proporcional a la distancia a la cual se halle el objeto.

De manera que si aumentamos 10 veces la distancia, estamos aumentando 10 veces el denominador en el lado derecho de la ecuación y, por tanto, estamos achicando el tamaño angular. De manera que si aumentamos 10 veces la distancia, su tamaño angular será 10 veces menor que la respuesta hallada en la pregunta `1.a`. Por lo que si queremos ver el objeto 10 veces más pequeño, debe estar 10 veces más lejos; así, la pelota debe estar entonces a 350 metros de distancia.

c) Pregunta para los curiosos: Por mera casualidad, el Sol y la Luna tienen una relación asociada a su tamaño y distancia. ¿Qué nos permite ver esto (que ocurrirá, por cierto, el 14 de Diciembre de este año)?

Solución:

Antes de responder la pregunta en sí, simplemente aclarar algo que les puede servir más adelante. En Astronomía usualmente la Tierra se simboliza como $\oplus$ y el Sol como $\odot$. Cuando ese símbolo va como subíndice (es decir, como una letra pequeñita abajo a la derecha de una grande), es para indicar la característica de dicho objeto que va en el subíndice. Por ejemplo, $R_\oplus$ significa el radio de la Tierra. O $M_\odot$ significa "una masa solar".

Teniendo esto en claro, tenemos que algunos datos que nos sirven para este ejercicio son:

- $R_\odot = 6.95 \times 10^8$ m
- $R_☾ = 1.73 \times 10^3$ m
- $D_{\oplus \to ☾} = 3.84 \times 10^5$ m
- $D_{\oplus \to \odot} = 1$ AU $= 1.49 \times 10^{11}$ m

Donde el tercer dato es la distancia (promedio) entre la Tierra y la Luna, y el cuarto dato es la distancia (promedio) entre la Tierra y el Sol -conocido como Unidad Astronómica-, respectivamente.

Si vemos cuántas veces más grande es el Sol respecto a la Luna, solamente comparando sus radios, llegamos a lo siguiente:

$$\frac{R_\odot}{R_☾} = \frac{6.95 \times 10^8 \text{ m}}{1.73 \times 10^3 \text{ m}} = 4.01 \times 10^5$$

Pero si ahora vemos cuántas veces está más lejos el Sol respecto a la Luna, comparando sus distancias, llegamos a lo siguiente:

$$\frac{D_{\oplus \to \odot}}{D_{\oplus \to ☾}} = \frac{1.49 \times 10^{11} \text{ m}}{3.84 \times 10^5 \text{ m}} = 3.88 \times 10^5$$

¿Qué significa esto? Que si bien el Sol es, aproximadamente, unas 400 mil veces más grande en tamaño que la Luna; a su vez la Luna está unas 400 mil veces más cerca a la Tierra en comparación al Sol. ¿Qué quiere decir esto? Que colosal diferencia de tamaño se compensa con la cercanía del más pequeño. Ello quiere decir que si ambos se llegasen a cruzar serían, aproximadamente, del mismo tamaño.

¿Cuándo se "cruzan" estos objetos en cielo? Así es, señoras y señores, en los eclipses solares. Resaltando esta proporción tamaño–lejanía en los eclipses solares totales. Gracias a que ambos son, aparentemente, del mismo tamaño es que se ve cómo la Luna tapa casi perfectamente al Sol. Fue gracias a los eclipses solares totales que se descubrió la parte más externa de la atmósfera del Sol conocida como Corona Solar (y el coronavirus trae su nombre gracias a ella, ya que su forma es muy similar a la Corona Solar[3]).

Cabe destacar que esta coincidencia es realmente eso, una coindicencia. Ello quiere decir, por ejemplo, que si algún día la humanidad lograse viajar a otro planeta alguna vez y éste tuviese eclipses solares, ello no garantiza que los eclipses que puedan observar sean totales. Para pensar, ¿no?

Problema 2. Paralaje

a) ¿Qué es el paralaje y para qué se utiliza en astronomía? Diga, además, sus ventajas y desventajas.

Solución:

El paralaje es un método para medir distancia a objetos mediante la trigonometría. En específico, fijémonos en la siguiente figura:

[3] De manera que si el Sol y la Luna no cumpliesen esta relación tamaño-lejanía quizás todavía no se hubiese podido descubrir la Corona del Sol cuando al Coronavirus se le puso el nombre y, por ende, tendría otro nombre. Para pensar, señores.

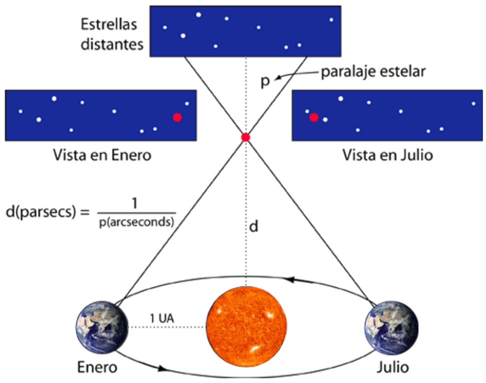

Figura 2: Idea de paralaje.

Básicamente, el paralaje consiste en lo siguiente:

I) Primero tratamos de formar un triángulo rectángulo. En específico para el caso de medir distancias a estrellas/objetos astronómicos, para formar el triángulo rectángulo utilizamos la Tierra, el Sol y el objeto astronómico que se desea observar.

II) 6 meses después (y asumiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es exactamente redonda), la Tierra estará exactamente "al otro lado" de la órbita con respecto a donde se encontraba 6 meses atrás. Se vuelve a formar el mismo triángulo rectángulo.

III) Pero lo que sucede es que el objeto astronómico aparentemente cambió su posición en el cielo con respecto a las estrellas del fondo. Esto es lo que llamamos máximo cambio de posición angular. Pero el paralaje, que llamaremos p, es simplemente la mitad de este máximo cambio de posición angular (tal cual se puede apreciar en la Figura 2)

IV) Dado esto aplicamos trigonometría:

$$\tan(p) = \frac{1 \text{ AU}}{d} \tag{8}$$

Ahora, utilizando nuestro nuevo mejor amigo de aproximación para ángulos pequeños ($\tan(p) = p$) obtenemos que:

$$p = \frac{1 \text{ AU}}{d}$$

Despejando d:

$$d = \frac{1 \text{ AU}}{p}$$

Y, finalmente, luego de trabajar con las unidades, se llega a la ecuación final:

$$d = \frac{1}{p} \tag{9}$$

Donde d es la distancia en unidades de pársecs; y p es conocido como el ángulo de paralaje, el cual se encuentra en unidades de arcosegundos. ¿Qué es un pársec? En estricto rigor se define como la distancia que tendría un objeto cuyo paralaje sea $p = 1''$ (un arcosegundo). Un pársec (el cual se abrevia como "pc") es equivalente a: 1 pc $= 3.26$ ly $= 3.08 \times 10^{16}$ m. Es decir, un pársec es equivalente a 3.26 años luz o 30 mil millones de millones de metros.

- La ventaja que tiene este método es que es un método bastante simple de realizar y, además, es relativamente barato de hacer.

- La desventaja sería que, para medir distancias, requerimos de una cantidad de tiempo considerable para poder percibir este cambio aparente en el objeto con respecto a las estrellas de fondo.

  Otra desventaja es que, como se puede ver en la ecuación (9), la distancia es inversamente proporcional al paralaje. *Esto quiere decir que el paralaje no es útil para medir distancias a objetos muy lejanos* como, por ejemplo, galaxias. A medida que un objeto se encuentra más lejos es cada vez más difícil medir medir su paralaje. Por ejemplo, misiones actuales/modernas como GAIA -el cual es una especie de observatorio astronómico espacial- tienen un “límite” en paralaje hasta 0.04 miliarcosegundos, es decir, su límite en paralaje es de aproximadamente $p = 4 \cdot 10^{-5}$ arcsec. Por lo que, aplicando la ecuación (9), la máxima distancia que podemos medir con GAIA serían $d = 25000$ pc $= 25$ kpc. Es decir, si un objeto se encuentra más lejos de GAIA que unos 25 kilopársecs, el paralaje será tan pequeño que GAIA no podrá medirlo y, por tanto, no podrá estimar la distancia al objeto.

b) ¿Se le ocurre alguna manera “casera” de realizar paralaje en su casa?

Solución:

Un método muy simple para realizar paralaje en la casa es con el dedo pulgar. Pongan su mano enfrente de ustedes, con los nudillos apuntando hacia adelante y el dedo pulgar extendido hacia arriba. Ahora, mientras observan el dedo pulgar, cierren uno de los dos ojos y mantengan el otro abierto. Sin dejar de mirar el dedo pulgar, cierren el ojo que estaba abierto e inmediatamente abran el ojo que estaba cerrado. Traten de “intercalar” el ojo que está abierto mientras observan el pulgar y así varias veces. Si se dan cuenta su dedo pulgar cambia un poco de posición. Esto mismo es lo que aprovecha el paralaje.

Es más, si observan el dedo pulgar cuando acercan su mano mucho a su cara e intercalan el ojo abierto, verán que el dedo pulgar cambia mucho su posición; pero a medida que vayan alejando su dedo de ustedes, la variación de posición del dedo irá siendo cada vez más pequeña. Una pequeña muestra de que el paralaje, a medida de que las cosas están más lejos, es más difícil de percibir y medir.

c) El ángulo de paralaje para la estrella Sirio es de $p = 1.05 \times 10^{-4}\ ^\circ$ (grados). ¿Qué tan lejos se encuentra esta estrella de nosotros? (Recuerde siempre tener cuidado con la conversión de unidades)

Solución:

Recordemos que la ecuación que nos entrega la distancia, la ecuación (9), necesita que le entreguemos el ángulo de paralaje en arcosegundos, pero el enunciado nos entrega el ángulo de paralaje en grados.

Para saber cuántos acrosegundos son 1.05×10^{-4} grados, realizamos una simple regla de 3:

$$\begin{aligned} 1'' &\to \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ \\ x'' &\to 1.05 \times 10^{-4}\ ^\circ \end{aligned}$$

De manera que x es simplemente:

$$x'' = \frac{1'' \cdot 1.05 \times 10^{-4}\ ^\circ}{\left(\frac{1}{3600}\right)^\circ} = 0.378''$$

De manera que el paralaje de Sirio, en arcosegundos, es $p = 0.378''$.

Ahora simplemente utilizamos la ecuación (9), dando:

$$d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.378''} = 2.64 \text{ pc}$$

Es decir, Sirio se encuentra a unos 2.64 pársecs de distancia.

d) Dos personas con mucho tiempo de sobra se ponen de acuerdo para medir la distancia que hay entre la Tierra y Marte aprovechando que estos dos planetas se encontrarán en oposición. Para ello, de aburridos, uno de ellos decide viajar a exactamente el otro lado del mundo (todo esto antes de la cuarentena, por supuesto; ociosos, pero responsables); de manera que la distancia entre los dos es igual al diámetro de la Tierra[4]. El día en que ambos planetas se encuentran en oposición, realizan sus mediciones, comparan sus datos de Marte y encuentran que el máximo cambio de posición angular entre sus mediciones es de $33.6''$, ¿cuál es la distancia, aproximada, entre la Tierra y Marte cuando éstos están en oposición? Diga sus respuestas en unidades de metros y AU[5].

Solución:

Para empezar, en el enunciado nos dicen que el máximo cambio de posición angular es $33.6''$. Pero, recordemos, el paralaje es la mitad del máximo cambio en la posición angular del objeto. De manera que, en este caso, el paralaje será:

$$p = \frac{33.6''}{2} = 16.8''$$

Basados en la misma idea de paralaje, que es poder medir la distancia basándonos en triángulos rectángulos, formamos un triángulo rectángulo entre un observador, el centro de la Tierra y la posición aparente de Marte como en la Figura 3.

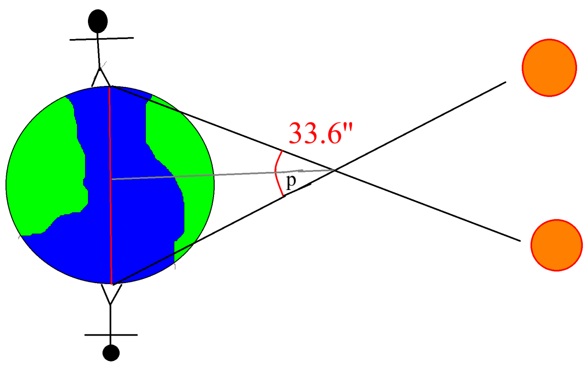

Figura 3: Esquema (aproximado) del paralaje para el Ejercicio 2.d.

De esta manera volvemos a aplicar trigonometría, obteniendo para el ángulo de paralaje p:

$$\tan(p) = \frac{R_\oplus}{d}$$

Utilizando aproximación para ángulos pequeños:

$$p = \frac{R_\oplus}{d}$$

[4]Radio de la Tierra $\equiv R_\oplus = 6.37 \times 10^6$ m ≈ 6400 km
[5]AU $\equiv$ Unidad Astronómica (de sus siglas en inglés) $= 1.49 \times 10^{11}$ m $\approx 150 \times 10^6$ km

Y despejando la distancia:

$$d = \frac{R_\oplus}{p} \tag{10}$$

donde $R_\oplus$ es el radio de la Tierra y d es la distancia entre la Tierra y Marte cuando se encuentran en oposición (oposición es cuando el Sol, la Tierra y Marte forman una línea recta; donde la Tierra se encuentra en medio de los dos).

Ahora bien, la ecuación "original de paralaje" (ecuación (9)) no se encuentra en unidades de S.I.. Como en este ejercicio nos piden conocer la distancia en metros, es por ello que para este caso en específico nos conviene trabajar todo en unidades de S.I., ya que así la respuesta que buscamos (la distancia) la obtendremos en unidades de longitud del S.I.: metros.

Como queremos todo en unidades de S.I., porque queremos la respuesta en unidades de S.I., pasamos el ángulo de paralaje a radianes. Así, se tiene que $16.8'' \approx 8.18 \times 10^{-5}$ rad. Donde también utilizamos el dato, dado en el enunciado, del radio de la Tierra (en S.I.): $R_\oplus = 6.37 \times 10^6$ m.

De esta manera, aplicando la ecuación (10), obtenemos la distancia Tierra-Marte en oposición (que simbolizaremos como $d_{\oplus\to\male}$):

$$d_{\oplus\to\male} = \frac{R_\oplus}{p} = \frac{6.37 \times 10^6 \text{ m}}{8.18 \times 10^{-5}} \approx 7.78 \times 10^{10} \text{ m} = 0.522 \text{ AU} \tag{11}$$

Es decir, ambos amigos lograron encontrar que Marte está a un poco más de media Unidad Astronómica cuando se encuentra en oposición con la Tierra.

Problema 3. Escalas de distancia

a) Si una nave recorre la distancia que hay entre el Sol y la Tierra en dos años (obviamente, asumiendo que ésta es prácticamente indestructible porque no se derrite, ni deja de funcionar al acercarse al Sol). ¿Cuánto demorará esa misma nave en llegar a Marte, suponiendo que ésta despega desde la Tierra? Para simplificar el problema, ya que la distancia entre la Tierra y Marte es variable (¿por qué?), asuma que los ingenieros hicieron los cálculos de tal manera que la distancia que recorrerá la nave es igual a la distancia a cuando la Tierra y Marte estén en oposición; es decir, asuma que la distancia que recorrerá la nave es igual a la respuesta que halló en el ejercicio 2.d).

Solución:

Recordemos que la definición de velocidad es:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} \tag{12}$$

O:

$$v = \frac{d}{t} \tag{13}$$

donde v es la velocidad, d es distancia y t es el tiempo.

Sé que estará la persona que me dirá "...oye, pero esto es la rapidez". Lo sé. Y estás bien. Pero para este ejercicio práctico, ya que no nos interesa la dirección en la que viaja la nave, sino sólo cuán rápido viaja ésta, velocidad y rapidez son lo mismo para este ejercicio.

Nos dicen que la nave demora alrededor de 2 años en realizar un tramo desde el Sol hacia la Tierra. Es decir, demora 2 yr (año se puede abreviar como "yr") en recorrer 1 AU.

La velocidad en principio podría ser $v = 2\frac{\text{AU}}{\text{yr}}$. Pero en términos prácticos ello no nos dice mucho, ¿es ello muy rápido o muy lento? ¿Cuando ven un auto se mide su velocidad en unidad astronómica por año? No, los medimos en metros por segundo o kilómetros por hora, por ejemplo. De manera que trataremos de dejar todos los datos que nos dan en unidades del Sistema Internacional.

Así, tenemos que 1 año son, aproximadamente, 3.15×10^7 segundos.

Es decir,

$$1 \text{ yr} = 3.15 \times 10^7 \text{ s}$$

Y 2 años serán entonces:

$$2 \text{ yr} = 6.3 \times 10^7 \text{ s}$$

De manera que la velocidad (o rapidez) a la que viaja la nave desde el Sol hacia la Tierra será:

$$v_{\odot \to \oplus} = \frac{1 \text{ AU}}{2 \text{ yr}} = \frac{1.49 \times 10^{11} \text{ m}}{6.3 \times 10^7 \text{ s}} = 2365 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.36 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

De manera que la nave viaja a $2365 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (o equivalentemente, $8514 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$).

En el ejercicio anterior, encontramos que la distancia entre la Tierra y Marte (donde simbolizábamos Marte como ♂) era de aproximadamente $d_{\odot \to ♂} = 7.78 \times 10^{10}$ m. De manera que, asumiendo que los ingenieros realizaron los cálculos correctos de manera que la trayectoria sea la misma del ejercicio anterior y que la nave viaja a velocidad constante (no acelera, ni desacelera), tenemos que el tiempo en que demorará en llegar a Marte será:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{7.78 \times 10^{10} \text{ m}}{2365 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 3.28 \times 10^7 \text{ s}$$

Realizando la conversión de segundos a años, obtenemos, finalmente:

$$t = 3.28 \times 10^7 \text{ s} \times \left[\frac{1 \text{ yr}}{3.15 \times 10^7 \text{s}}\right] = 1.04 \text{ yr}$$

(El paso–ecuación anterior lo puse adrede para mostrárles cómo hago yo para pasar de un sistema de unidades a otro. Si alguien se perdió en qué fue lo que hice, al final de esta ayudantía dejé una especie de "Apéndice" donde explico cómo lo hago para pasar de un sistema de unidades a otro y el cual les puede servir. No lo hago aquí para no perder el hilo del ejercicio.)

De manera que obtenemos que la nave, si mantiene una rapidez constante a lo largo de su viaje, demorará un poco más de un año en llegar hasta Marte.

b) ¿Cuánto demorarían los tramos anteriores (Sol-Tierra y Tierra-Marte) si la nave pudiese viajar a la velocidad de la luz[6], es decir, a $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$?

Solución:
De la ecuación (13) despejamos el tiempo y obtenemos que:

$$t = \frac{d}{v} \tag{14}$$

Ahora, si hacemos que la velocidad de la nave sea igual a la velocidad de la luz, es decir, $v = c = 3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ tendremos que el tiempo de viaje será:

• Para el tramo Sol-Tierra:

$$t_{\odot \to \oplus} = \frac{1 \text{ AU}}{c} = \frac{1.49 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 497 \text{ s} \approx 8.27 \text{ min}$$

• Para el tramo Tierra-Marte:

[6]Dato ñoño: Más adelante en la carrera verá que es imposible que un objeto con masa viaje a esa velocidad

$$t_{\oplus\to\male} = \frac{7.78 \times 10^{10}\ \mathrm{m}}{3 \times 10^{8}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 259\ \mathrm{s} \approx 4.32\ \mathrm{min}$$

Ahora bien, esto en la práctica es imposible. Que una nave viaje a la velocidad de la luz no es posible. La respuesta la encontrarán más adelante en un ramo llamado Física Moderna.

De igual manera, si nos damos cuenta en lo que se demoraría la nave desde el Sol si ésta pudiese viajar a la velocidad de la luz es alrededor de 8 minutos. Lo que sí puede viajar a la velocidad de la luz y nos llega desde el Sol son los fotones (luz) que son liberados desde su superficie. Es decir, cuando sea de día, la luz que están recibiendo salió hace 8 minutos del Sol.

Apéndice. Conversión de unidades

Además de la "regla de 3" con la que se pueden obtener los cambios de unidades (como en el ejercicio 2.c), hay una manera que yo utilizo para pasar de un sistema de unidades a otro.

En el Problema 3 les puse una ecuación que era la siguiente:

$$t = 3.28 \times 10^7 \text{ s} \times \left[\frac{1 \text{ yr}}{3.15 \times 10^7 \text{s}}\right] = 1.04 \text{ yr}$$

Lo cual es lo que hago, en ese ejemplo, para pasar de segundos a años.

Yo hago lo siguiente: En principio tenemos la ecuación original (sin el corchete cuadrado), la cual es el tiempo en segundos:

$$t = 3.28 \times 10^7 \text{ s} \tag{15}$$

Ahora lo que hago es multiplicar por un "1 mágico", pero conveniente. En este caso multiplicamos por $\frac{1 \text{ yr}}{3.15 \times 10^7 \text{s}}$ en el lado izquierdo de la ecuación superior. ¿Por qué esto es multiplicar por 1? Como 1 yr $= 3.15 \times 10^7$ s, podemos darnos cuenta que:

$$\frac{1 \text{ yr}}{3.15 \times 10^7 \text{s}} = \frac{3.15 \times 10^7 \text{ s}}{3.15 \times 10^7 \text{s}} = 1$$

De manera que al multiplicar la ecuación (15) por este 1 conveniente obtenemos la ecuación del problema 3:

$$t = 3.28 \times 10^7 \text{ s} \times \left[\frac{1 \text{ yr}}{3.15 \times 10^7 \text{s}}\right]$$

Si nos damos cuenta, al multiplicar por $\frac{1 \text{ yr}}{3.15 \times 10^7 \text{s}}$ podemos cancelar términos; en específico las unidades:

$$t = 3.28 \times 10^7 \cancelto{1}{\text{s}} \times \left[\frac{1 \text{ yr}}{3.15 \times 10^7 \cancelto{1}{\text{s}}}\right] \tag{16}$$

Y esto nos queda entonces como:

$$t = \frac{3.28 \times 10^7}{3.15 \times 10^7} \text{ yr} = \frac{3.28 \times \cancel{10^7}}{3.15 \times \cancel{10^7}} \text{ yr} = \frac{3.28}{3.15} \text{ yr} = 1.04 \text{ yr}$$

De la misma manera, por ejemplo, si quiero pasar la velocidad de un automóvil de metros por segundo a kilómetros por hora tenemos lo siguiente.

$$v = 1\frac{m}{s}$$

Multiplicamos por los "1s convenientes":

$$v = 1\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ hora}}$$

Y ahora simplemente cancelamos y multiplicamos:

$$v = 1 \frac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \cancel{m}} \cdot \frac{3600 \cancel{s}}{1 \text{ hr}} = 3.6\frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

De manera que para pasar de metros por segundo a kilómetros por hora debo multiplicar por 3.6.

Entonces, ¿a qué me refiero con un "1 conveniente"? La idea aquí es multiplicar por 1s de tal manera que las unidades que se encontraban originalmente en la ecuación se me cancelen con las unidades del 1 conveniente que acabo de agregar, tal cual se vio en el ejemplo anterior.

• Como un pequeño ejercicio extra, calculemos la masa del Sol en hámsters. Sí, en hámsters.

La masa del Sol es de unos $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg. Asumamos, además, que cada hámster pesa, en promedio, unos ~ 30 gr. Para ello tenemos que multiplicar por dos "1s convenientes". El primero será (1 hámster/30 gr) y el segundo será (1000 gr /1kg).

Tenemos que la masa del Sol es:

$$M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Ahora multiplicamos por nuestros ”1s convenientes”, de manera que, como mostramos anteriormente, las unidades se cancelen:

$$M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg} \cdot \frac{1000 \text{ gr}}{1 \text{ kg}} \cdot \frac{1 \text{ hámster}}{30 \text{ gr}}$$

Simplificamos todas las unidades que podamos y multiplicamos:

$$M_\odot = 2 \times 10^{30} \cancel{\text{kg}} \cdot \frac{1000 \cancel{\text{gr}}}{1 \cancel{\text{kg}}} \cdot \frac{1 \text{ hámster}}{30 \cancelto{\text{bye}}{\text{gr}}} = 2 \times 10^{30} \times \frac{10^3}{3 \times 10}\text{hámster}$$

Resultando en:

$$M_\odot = 6.66 \times 10^{31} \text{ hámster}$$

De manera que, realizando conversión de unidades, podemos decir que el Sol tiene una masa equivalente entre 10^{31} a 10^{32} hámsters. Esos son muchos hámsters.