Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física – Instituto de Astrofísica
Astronomía – AST0111
Primer Semestre 2020

Ayudantía 8 – Solución

Profesora: Viviana Guzmán
Ayudantes: Camila Aravena González (cfaravena1@uc.cl) – Francisco Carrasco Varela (ffcarrasco@uc.cl)

Problema 1. Conceptos generales

a) ¿Cómo se pueden clasificar las estrellas según su espectro? ¿Qué nos puede decir este espectro?

Sol:

Las estrellas se pueden clasificar según su espectro ya que éstos muestran claras "huellas" de las características de las estrellas. Los astrónomos se basan principalmente en las líneas de absorción presentes en los espectros de éstas. Ciertas líneas de absorción bien marcadas son indicios de ciertas temperaturas efectivas de las estrellas.

Hacia fines del siglo XIX, el progreso en las emulsiones fotográficas y el desarrollo de placas especiales para uso astronómico permitió un mejor y más detallado análisis de los espectros estelares. En esos años un grupo de Harvard comenzó un programa de clasificación estelar, entre los que participaron un gran número de mujeres y hombres (algo notorio para esos años). De allí nación el famoso sistema de clasificación espectral en orden decreciente de temperatura (de mayor temperatura a menor temperatura): O, B, A, F, G, K, M[1]. Posteriores trabajos permitieron sub-clasificaciones de los tipos espectrales, con números del 0 al 9 luego de cada letra. Por ejemplo, podemos tener una estrella de tipo A5 o A8; donde la estrella A8 es más parecida a una estrella tipo B0 que una estrella A0 en sus características. Las características como la temperatura y las líneas de absorción notorias se pueden observar en la Figura 1. Este tipo de clasificación/catálogo es conocido como el Sistema de clasificación de Harvard, o también llamado *Henry Draper Catalogue* en honor al astrónomo que comenzó y dejó fondos para este proyecto.

Lo más importante de la tabla de la Figura 1 no es saberse las temperaturas de memoria, ni cuáles líneas son las que más destacan en cada clasificación espectral (aunque tener una noción de cuál es el rango para un cierto tipo espectral nunca está de sobra); sino que es simplemente entender que distintas temperaturas de estrellas nos entregan distintas características de sus atmósferas las cuales pueden llegar a ser bastante similares y, por ende, nos permite agruparlas gracias a la similitud que existe entre estrellas de similares temperaturas.

b) Si observo una estrella cuya magnitud aparente en filtro V es $m_V = -4$ y otra estrella cuya magnitud es $m_V = 2$. ¿Cuál es más brillante y por qué? ¿Cómo se comparan sus luminosidades asumiendo que ambas estrellas tuviesen el mismo radio?

Sol:

Cada vez que queramos comparar las luminosidades de dos objetos (ya sean galaxias, estrellas u otros) es importante recordar que dos magnitudes aparentes (brillo aparente) de un objeto se relacionan mediante la fórmula:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \tag{1}$$

[1] Hay una nemotecnia para recordar este orden de clasificación espectral: *Oh, Be A Fine Guy/Girl, Kiss Me.*

Tipo	T_{eff}		Características
O	40000	(O5)	Color azul-blanco. Índice de color indica temperatura muy alta. Muy pocas líneas espectrales. Líneas de HeII muy fuertes.
B	28000	(B0)	Líneas de HeI en absorción fuertes, máximas en B2. Color azul-blanco. Temperatura alta. Líneas de H I comienzan a aparecer y ganan intensidad hacia tipo B9.
A	9900	(A0)	Estrellas blancas. Líneas de HI en serie de Balmer máximas en A0, luego decreciendo. Líneas de CaII ganan intensidad hacia A9.
F	7400	(F0)	Estrellas blanco-amarillentas. Líneas de CaII continúan ganando intensidad hacia F9, así como las de HI continúan decreciendo. Aparecen líneas de metales neutros (FI, CrI, por ejemplo).
G	6030	(G0)	Estrellas amarillas. Espectro tipo solar (Sol es G3). Líneas de CaII continúan ganando intensidad. Líneas de metales neutros se hacen más intensas.
K	4900	(K0)	Estrellas color naranja, relativamente frías. Líneas de CaII con intensidad máxima en K0, luego decreciendo. Espectros dominados por líneas de metales neutros.
M	3480	(M0)	Estrellas rojas y frías. Líneas de metales neutros todavía intensas, pero el espectro está dominado por bandas de absorción moleculares. La más notoria es la de TiO.
R	4900	(R0)	Secuencia paralela al tipo K, con bandas de CN y C_2 más intensas. Sobreabundancia de C.
S	3480	(S0)	Secuencia paralela al tipo M, con bandas de ZrO más intensas. Sobreabundancia de Zr.
N	3480	(N0)	Secuencia paralela al tipo M, con bandas de C_2 más intensas. Sobreabundancia de C.

Figura 1: Tabla de algunas características para los distintos tipos espectrales extraídas del libro "Radiación y Materia en Astrofísica" de Clocchiatti & Catelán (Tabla 7.1). En ella se pueden observar las distintas temperaturas para los distintos tipos espectrales. Allí también están los tipos R, S y N; clasificaciones que fueron originalmente consideradas por separado, pero en realidad son estrellas similar a las tipo K o M aunque con algunas líneas anómalas/más intensas de lo esperado.

donde F_1 es el flujo (energía/área/tiempo) de la estrella 1 cuya magnitud llamaremos para este ejercicio en específico $m_1 = -4$; y F_2 es el flujo para la estrella 2 cuya magnitud en este ejercicio será $m_2 = 4$.

Aquí me extenderé un poco fuera del enunciado de la ayudantía para hacerles notar algunas cosas.

Primero, es común encontrar la ecuación (1) como:

$$m_1 - m_2 = 2.5 \log_{10}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) \tag{2}$$

en otras palabras, la ecuación (2) es exactamente a la ecuación (1), pero se cambió la posición entre F_1 y F_2 en la división. Eso es porque no hay un símbolo "-" del lado derecho de la ecuación. Lo que hace este símbolo "-" es simplemente cambiar de posición el denominador con el numerador en la ecuación (2) gracias a la propiedad de los logaritmos. Cabe notar que las ecuaciones (1) y (2) son completamente idénticas. En mi caso personal, prefiero la ecuación (1) porque el m_1 va primero al lado izquierdo de la ecuación y el F_1 va en la parte de arriba de la división al lado derecho de la ecuación, pero siéntanse libres de usar cualquiera de las dos *siempre y cuando no olviden el símbolo "-" cuando corresponde.*

Otra cosa importante es que este logaritmo es en base 10. A veces los astrónomos "omiten" anotar explícitamente el 10 y escriben "log" solo, pero generalmente en astronomía se asume que el logaritmo "por defecto" es en base 10.

Además, siempre es útil recordar que existe una relación entre la luminosidad y el flujo:

$$\text{Luminosidad} = \text{Flujo} \times \text{Área} \tag{3}$$

Y de igual manera:

$$\text{Flujo} = \frac{\text{Luminosidad}}{\text{Área}} \tag{4}$$

Si consideramos F como flujo, L como luminosidad y Área $= 4\pi R^2$ como el área superficial de una esfera (donde R es el radio del objeto, en este caso la estrella) la ecuación (4) es simplemente:

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} \tag{5}$$

Ahora, para una estrella 1 (con magnitud m_1, flujo F_1, luminosidad L_1 y radio R_1) y una estrella 2 (con magnitud m_2, flujo F_2, luminosidad L_2 y radio R_2) tendremos que si utilizamos la ecuación (5) en (1) obtenemos:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{\frac{L_1}{4\pi R_1^2}}{\frac{L_2}{4\pi R_2^2}}\right) = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_1}{R_1^2} \cdot \frac{R_2^2}{L_2}\right)$$

Es decir,

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2} \times \left[\frac{R_2}{R_1}\right]^2\right) \tag{6}$$

Finalmente, podemos establecer una relación entre las magnitudes de dos objetos y sus temperaturas efectivas. Recordemos que existe una relación entre el flujo y la temperatura dada por la proporción:

$$\text{Flujo} \propto \text{Temperatura}^4 \tag{7}$$

Más en específico, ambas se relacionan con la conocida Ley de Stefan-Boltzmann:

$$F = \sigma T_{\text{eff}}^4 \tag{8}$$

donde F es el flujo, σ es la constante de Stefan-Boltzmann cuyo valor es $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$; y T_{eff} es la temperatura efectiva (es decir, la temperatura absoluta -que se mide en Kelvin- de la superficie).

De manera que para una estrella 1 (con magnitud m_1 y temperatura efectiva $T_{\text{eff},1}$) y una estrella 2 (con magnitud m_2 y temperatura efectiva $T_{\text{eff},2}$) tenemos, al utilizar la ecuación (8) en (1), la relación:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{\sigma T_{\text{eff},1}^4}{\sigma T_{\text{eff},2}^4}\right) = -2.5 \log_{10}\left(\frac{T_{\text{eff},1}}{T_{\text{eff},2}}\right)^4 = -10 \log_{10}\left(\frac{\sigma T_{\text{eff},1}}{\sigma T_{\text{eff},2}}\right)$$

De manera que podemos hallar una relación aproximada entre las temperaturas de dos objetos:

$$\frac{T_{\text{eff},1}}{T_{\text{eff},2}} = 10^{([m_2 - m_1]/10)} \tag{9}$$

Finalmente, podemos relacionar la temperatura con la luminosidad de una estrella mediante las ecuaciones (5) y (8).

$$F = \sigma T_{\text{eff}}^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \tag{10}$$

Con esto se podría, por ejemplo, estimar la temperatura efectiva de una estrella mediante:

$$T_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{R}}\left(\frac{L}{4\pi\sigma}\right)^{1/4} \tag{11}$$

Ahora bien, estas relaciones son aproximadas dado que, por ejemplo, hay veces que entre el astro y nosotros puede existir polvo. Este polvo puede absorber o dispersar la luz. Además está el gran problema de que la absorción y dispersión afectan más a los colores azules que a los rojos (es decir, afecta más a estrellas de mayores temperaturas que de menores temperaturas). De manera que, recalco, esta relación solo sirve para tener una noción de cómo se relacionan las temperaturas de dos objetos y no es del todo exacta.

Toooodo lo anterior lo hice para que se den cuenta de que pueden "jugar" con las ecuaciones para ir despejando aquello que vayan necesitando mediante distintas relaciones que ya han visto en clases.

Volviendo al problema original, el cual es comparar dos estrellas; la estrella 1 con magnitud $m_1 = -4$ y estrella 2 con magnitud $m_2 = 2$, nos piden comparar sus luminosidades. Como nos piden comparar las luminosidades y lo único que conocemos de las estrellas es su magnitud, la ecuación "ideal" que hallamos para resolver este problema es la ecuación (6); la cual anoto aquí por comodidad:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2} \times \left[\frac{R_2}{R_1}\right]^2\right)$$

Reemplazando por los valores correspondientes simplemente y recordando que en este caso se dice que ambas estrellas tienen un radio similar (es decir, $R_1 \approx R_2$) hallamos:

$$-4 - (+2) = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2} \times \cancelto{1}{\left[\frac{R_2}{R_1}\right]^2}\right)$$

Dando así:

$$-6 = -2.5 \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$$

Desarrollando:

$$\frac{6}{1} \cdot \frac{2}{5} = \log_{10}\left(\frac{L_1}{L_2}\right)$$

Dando así:

$$10^{12/5} = \frac{L_1}{L_2}$$

Finalmente obtenemos:

$$L_1 \approx 250 L_2 \tag{12}$$

Es decir, la estrella 1 es aparentemente unas 250 veces más luminosa que la estrella 2. Si $m_1 = -4$ y $m_2 = 2$, ¿tiene esto sentido? Recordemos que las magnitudes se relacionan con los brillos, pero son "anti intuitivos". Mientras menor sea una magnitud, mayor es el brillo. De manera que sí tiene sentido que $L_1 > L_2$ si $m_1 < m_2$.

c) En astronomía generalmente se define el color como la resta de la magnitud medida para un mismo objeto en dos filtros distintos. Por ejemplo: medimos la magnitud de una estrella en filtro "B" ésta nos da una magnitud de $m_B = 3.8$ y al medir la magnitud en filtro "V" ésta nos da $m_V = 4.0$. Por convención, siempre se resta el filtro más rojo al filtro más azul; por ejemplo, en este caso, tendríamos $B - V = -0.02$. ¿Qué se puede inferir entonces de una estrella si medimos su magnitud en 2 filtros distintos?

Sol:

Los filtros en astronomía sirven para capturar (más) fotones de una cierta/frecuencia longitud de onda. Recordemos que una fuente de luz puede estar emitiendo en todo el espectro electromagnético, pero de tooodo el espectro hay ciertas longitudes de ondas específicas que nos interesan para distintos propósitos. Por ejemplo, está el filtro B (Blue) y V (Visual). Con el primero obtenemos fotones más azules y con el segundo fotones más cercanos al color verde. Entonces, se mide la magnitud en 2 filtros distintos para una misma estrella y éstas mediciones se restan la una de la otra. De esta manera lo que se halla para una estrella o galaxia es su *color*. De manera que tendremos, de la manera más general para un mismo objeto:

$$\text{Magnitud en filtro más azul} - \text{Magnitud en filtro más rojo} = \text{Color} \tag{13}$$

Y como ya hemos visto, el color de una estrella nos dice muchas cosas: como su *temperatura*.

De manera que el *color se relaciona altamente con la temperatura de una estrella*.

d) ¿Qué es un diagrama Hertzprung-Russel, también conocido como diagrama H-R o diagrama Color-Magnitud, y por qué es tan utilizado en astronomía?

Sol:

El diagrama HR es un diagrama que relaciona las luminosidades (o magnitudes absolutas) de las estrellas con su temperatura (o colores). Por lo mismo, también es común hallar este diagrama por el nombre Diagrama Color-Magnitud. Este diagrama es sumamente útil para el estudio de poblaciones estelares. Un ejemplo de lo que representa puede ser hallado en la Figura 2.

Por ejemplo, en un diagrama HR podemos medir la edad aproximada de un cúmulo globular; recuerden que un cúmulo globular es un grupo de estrellas muy juntas entre sí y que se mueven como una "manada" gracias a la gravedad que las tiene atada entre ellas (ver Figura 3(a)). Por ejemplo, para construir un diagrama Color-Magnitud para un cúmulo globular lo que se hace en general es lo siguiente (aunque en realidad es un poco más complejo):

i) Para cada estrella en el campo de visión del cúmulo globular se mide su magnitud en distintos filtros. Deben ser mínimo en 2 filtros distintos para realizar un diagrama Color-Magnitud, de otra manera no se puede obtener su color. Por ejemplo, supongamos que tenemos que medir la magnitud de una estrella en el filtro B y V para obtener su color.

ii) Una vez medida las magnitudes en distintos filtros para las estrellas que están en el campo de visión, se realiza un gráfico donde en el eje X va el color; es decir, el eje X representa $B - V$ en nuestro ejemplo.

iii) En el eje Y se pone la magnitud medida en un solo filtro; puede ser cualquiera de las magnitudes medidas en uno de los filtros. En este ejemplo en concreto, elijamos el eje Y como magnitud V.

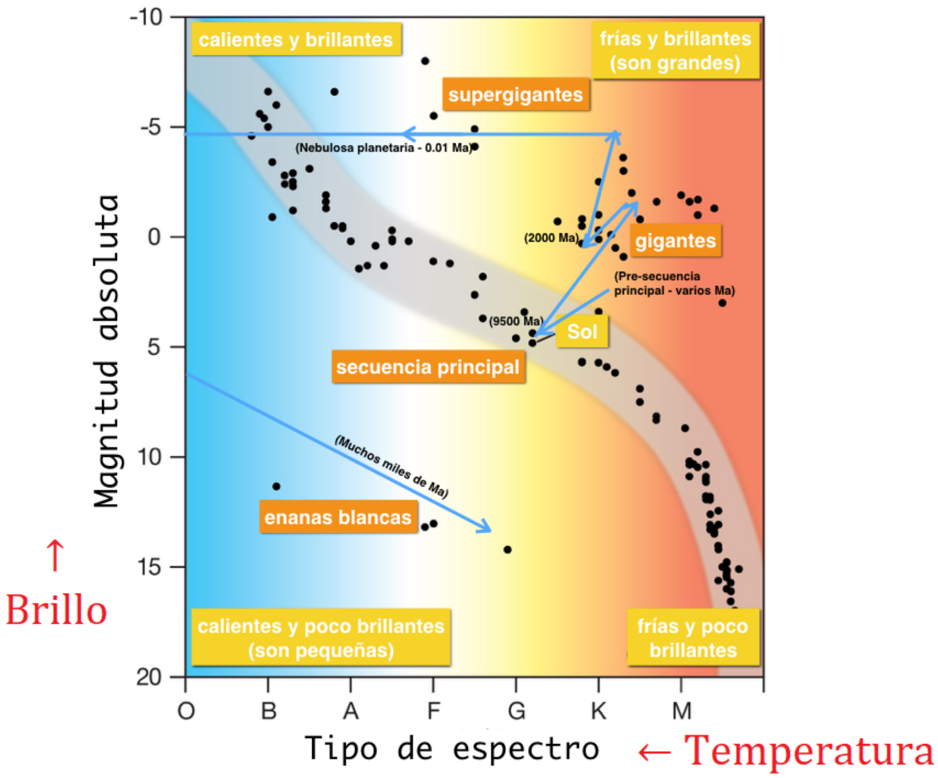


Figura 2: Diagrama HR. Note que una cosa importante de este diagrama es que es básicamente un diagrama de brillo (luminosidad/magnitud absoluta) vs. temperatura. El brillo crece de abajo hacia arriba en el eje Y, *pero* la temperatura crece de derecha a izquierda en el eje X. La figura muestra, además, las distintas fases por las que una estrella puede pasar a lo largo de su vida.

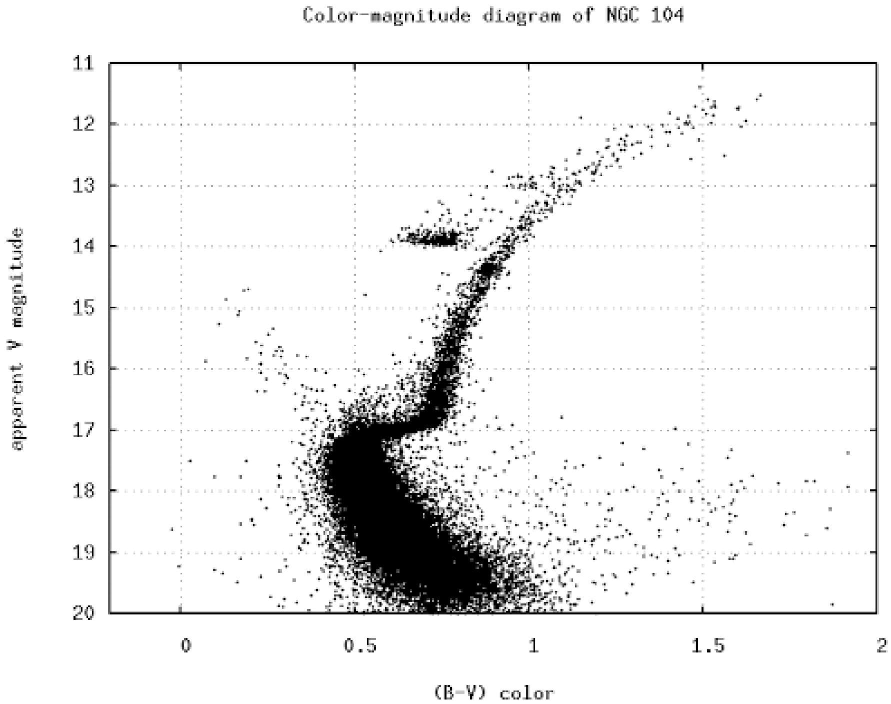
IV) Ahora se ponen los datos medidos para cada estrella en el diagrama. Por ejemplo, supongamos que realizamos un diagrama Color-Magnitud donde en el eje Y tenemos la magnitud V y en el eje X tenemos el color $B-V$. Para *una sola estrella* supongamos que medimos una magnitud de $m_V = V = 6.0$ y $m_B = B = 6.2$. De manera que tendremos que el color de esta estrella en este diagrama es $B - V = 6.2 - 6.0 = 0.2$. De esta manera, las coordenadas de esta estrella en nuestro diagrama serán $[B - V,\ V] = [0.2,\ 6.0]$.

V) Se repite el paso anterior, pero esta vez para *todas las estrellas* del cúmulo globular (el paso anterior era sólo para una estrella).

VI) El resultado es un diagrama como el mostrado en la Figura 3 (abajo). Cada punto allí es una estrella. En general uno encuentra que las estrellas siguen un camino desde la parte inferior derecha, cruzan en diagonal y, de la nada, se dan una vuelta. Todas estas secciones (la parte donde las estrellas se encuentran en el camino "diagonal" o donde se dan una vuelta) tienen mucho que ver con evolución estelar.

De manera que, en general, los cúmulos globulares son excelentes laboratorios estelares. Porque tienen dos ventajas: i) Tienen muchas estrellas (lo que es una muestra grande y estadísticamente da más seguridad). ii) Al ser tantas estrellas, es muy probable que encontremos estrellas en cada una de las distintas fases estelares (puesto que hay algunas fases estelares "fugaces" y cuesta hallar estrellas de ese tipo para estudiarlas), lo que nos permite su estudio.

(a) Foto del cúmulo globular 47 Tuc (o también llamado NGC 104).



(b) Diagrama Color-Magnitud para NGC 104

Figura 3: Obtención de un diagrama Color-Magnitud. Note algo importante: Cada uno de los puntos del gráfico abajo es apenas una estrella de todas de las que están en la imagen superior.

Problema 2. Estrellas de baja masa vs. estrellas de alta masa

a) ¿Cuáles son los rangos (aproximados[2]) para las estrellas de baja, intermedia y alta masa?

Sol:

Uno de los parámetros más importantes de las estrellas es su masa (M). Ella nos va a decir, entre muchas cosas, cómo es que va a evolucionar esta estrella.

Si bien los rangos son variables, en general es bastante aceptable que los rangos para masas estén dados por:

$$M < 2.2\ M_\odot \qquad \text{Baja masa}$$

$$2.2\ M_\odot < M < 8\ M_\odot \qquad \text{Masa intermedia}$$

$$M > 8\ M_\odot \qquad \text{Alta masa}$$

b) De los rangos anteriores en base a la masa, ¿cuáles esperaría que fuesen las estrellas que más o menos viven y por qué?

Sol:

La luminosidad L de una estrella escala con su masa M de la siguiente manera:

$$L \propto M^3 \tag{14}$$

(aunque, en realidad, escala aproximadamente como $L \propto M^{3.5}$)

De cierta manera, podemos ver la luminosidad como una especie de ratio al cual la estrella está liberando energía por unidad de tiempo: mientras más esté quemando más luminosa será (aunque hay un límite para la luminosidad que una estrella puede alcanzar sin "romperse", llamado el límite de Eddington).

La relación entre el tiempo de vida τ y su masa está dada aproximadamente por:

$$\tau \propto M^{-2.5} \tag{15}$$

Es decir, mientras más masa tenga una estrella, menos vive ésta.

¿Por qué se puede deber esto? Es decir, si tenemos más masa para una estrella más masiva ello quiere decir que tiene más combustible disponible para quemar y, por ende, uno tendería a creer que esta estrella viviría más. El problema yace en la luminosidad. Como la luminosidad es la cantidad de energía que emite por unidad de tiempo, si nos fijamos bien la luminosidad escala en un factor alto con la masa, tan alto que incluso aunque la estrella masiva tenga más combustible para quemar ello no implica que la estrella vivirá más. A modo de ejemplo, comparemos una estrella muy masiva de 10 $M_\odot$ con otra poco masiva como el Sol (de 1 $M_\odot$). La estrella masiva tiene 10 veces más combustible para quemar y transformar en energía que el Sol. Sin embargo, esta estrella emite 1000 veces más energía que el Sol. La estrella masiva emite 1000 veces más, pero sólo tiene 10 veces más masa que el Sol. Ello quiere decir entonces que esta estrella vivirá al menos $1000/10 \approx 100$ veces menos que el Sol.

Ello implica entonces que las estrellas muy masivas viven poco en comparación con sus compañeros de baja masa. Por lo mismo, las estrellas masivas son "raras" de encontrar por dos razones:

i) Viven menos, "solo" unas decenas a cientos millones de años[3].

[2] Digo "aproximados" porque en la literatura siempre encontrará valores *similares*, pero *no necesariamente iguales*. No hay una definición única.

[3] Si bien decenas o cientos de millones de años puede parecer muchísimo, en escala astronómica para edad de estrellas esto no es tanto tiempo.

II) Es más común que en el universo se formen estrellas de baja masa que de alta masa.

De manera que las estrellas de alta masa son raras porque cuesta que se formen y, de las pocas que se forman, viven muy poco. Por lo que hallar una estrella muy masiva es, realmente, una aguja en un pajar. Además, son bastante características porque son muy azules dada su alta temperatura.

De la misma manera, las estrellas más viejas y comunes en el universo son las estrellas no muy masivas (baja masa) $\sim 0.6 - 0.8\ M_\odot$ ya que pasa totalmente lo contrario a las estrellas masivas: viven mucho y se forman muchas.

c) ¿Se espera que una estrella de alta masa sea más o menos luminosa que una estrella como el Sol? ¿Y qué es lo que se espera para el tiempo de vida de una estrella masiva con respecto a una estrella no masiva? Compare sus respuestas de la luminosidad y tiempo de vida que se espera para una estrella de 1 $M_\odot$ con otra de 10 $M_\odot$. ¿Qué puede inferir de estos resultados? Dato (quizás) útil: tiempo de vida del Sol está estimado en $\tau_\odot \approx 10^{10}$ yr.

Sol:

(Las respuestas a las dos primeras preguntas de este ítem fueron respondidas en el ítem anterior).

Ya que queremos comparar el tiempo de vida[4] para una estrella de 10 $M_\odot$ con el tiempo de vida del Sol, y sabemos que: $\tau \propto M^{-2.5}$. De manera que simplemente comparamos:

$$\frac{\tau}{\tau_\odot} \sim \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2.5} \tag{16}$$

donde τ es el tiempo de vida (en Secuencia Principal) de la estrella que queremos compara y M es la masa de dicha estrella a comparar.

De manera que, despejando:

$$\tau \sim \tau_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2.5} \tag{17}$$

Reemplazando por los valores dados en el enunciado:

$$\tau \sim (10^{10}\ \mathrm{yr}) \times \left(\frac{10\ M_\odot}{M_\odot}\right)^{-2.5} \sim 10^{10} \times 3 \times 10^{-3}\ \mathrm{yr} \sim= 3 \times 10^{7}\ \mathrm{yr} = 30\ \mathrm{Myr}$$

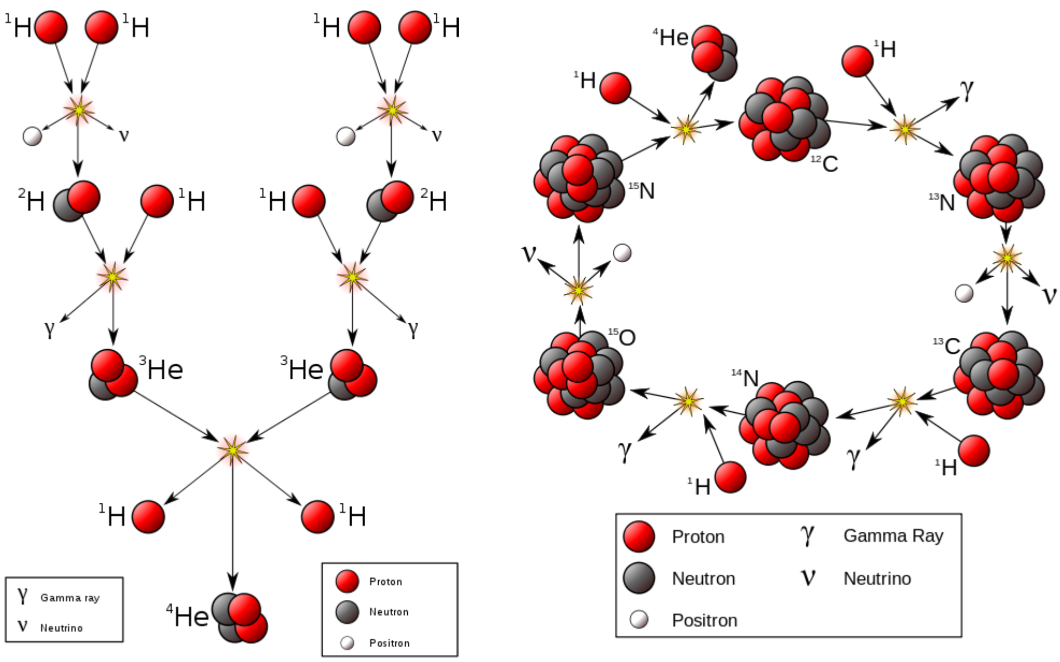
Es decir, una estrella 10 veces más masivas que el Sol vivirá unas 300 veces menos.

(La discrepancia entre este ejercicio y el ejemplo que dí en el item anterior, donde decía que una estrella de 10 $M_\odot$ vive 100 veces menos, era porque antes consideramos $L \propto M^3$; mientras que en este item consideramos implícitamente $L \propto M^{3.5}$. Aunque ambas respuestas nos dan dentro del mismo orden de magnitud [de decenas de millones de años]).

d) Hasta donde sabemos, el Sol está constantemente fusionando hidrógeno en su núcleo cuando éste se encuentra en la fase de Secuencia principal (o en inglés, Main-Sequence [MS]). Sin embargo, el proceso a través del cual el hidrógeno es "quemado" dentro del núcleo de las estrellas es distinto.

Para estrellas en MS, ¿en qué se diferencia la quema de hidrógeno para una estrella de baja masa con una de alta masa?

[4] En realidad este "tiempo de vida" es el tiempo en el que las estrellas pasan en la fase de Secuencia Principal, fase evolutiva de las estrellas donde queman hidrógeno en el núcleo. Sin embargo, las estrellas pasan casi la totalidad de su vida ($\sim 90\,\%$) en esta fase evolutiva. Por lo que considerar el tiempo de una estrella en Secuencia Principal como su tiempo de vida no es del todo descabellado.



(a) Cadena protón-protón (b) Ciclo CNO

Figura 4: Distintas reacciones de fusión que se pueden generar dentro de una estrella. Cuál es la que va a dominar depende de la masa de la estrella.

Sol: ¿Alguna vez se han preguntado cómo es que el Sol genera ese calor tan intenso que nos llega? Y la respuesta es simple, pero compleja a la vez: fusión nuclear.

La fusión nuclear consiste en el proceso donde núcleos atómicos de carga similar se unen y producen un elemento más pesado, además de energía. Es decir, a modo muy simplificado, la fusión nuclear se puede ver cómo:

$$\text{Elemento liviano 1} + \text{Elemento liviano 2} \rightarrow \text{Elemento más pesado} + \text{Energía} \tag{18}$$

Se diferencia de la fisión nuclear, la cual es que ocurren en las plantas nucleares aquí en la Tierra. La fisión nuclear es al revés; de un elemento muy pesado se generan otros más livianos, más energía. A modo muy simple, la fisión puede verse como:

$$\text{Elemento más pesado} \rightarrow \text{Elementos más livianos} + \text{Energía} \tag{19}$$

La fusión nuclear ocurre en el Sol. En la Tierra no se ha podido lograr dada sus extremas condiciones: se requieren densidades muy altas, de unos 150 gr $\cdot$ cm^{-3} (unas 8 veces más denso que el oro) y una temperatura de $T = 15 \times 10^6$ K; condiciones demasiado extremas para ser replicadas, sin que decaigan con el tiempo, en un laboratorio.

Lo que ocurre es que el ambiente es tan denso y tan caliente que los átomos de hidrógeno ionizados (que no son más que un protón) chocan unos con otros con tal velocidad y momentum que quedan "pegados", formando elementos más pesados y liberando energía al sistema. Ahora bien, existen dos "mecanismos" de fusión nuclear del hidrógeno: la cadena protón-protón (p-p chain) y el Ciclo CNO (CNO Cycle). Si bien no entraré en detalle de las distintas fases de estas cadenas (que es algo que verán más adelante en detalle en Astrofísica Estelar), de manera muy vaga ambas cadenas pueden ser descritas de la siguiente manera:

I) Cadena p-p:

$$4\ \text{p} \rightarrow \text{Muchos procesos} \rightarrow 1\ \text{He} + \text{Energía} \tag{20}$$

(Notar que un hidrógeno ionizado es lo mismo que un protón, es decir 1 $H^+ = 1$ p).

En resumen, se comienza con 4 protones y se termina con un átomo de Helio más energía.

II) Ciclo CNO:

$$^{12}\mathrm{C} + \mathrm{p} \rightarrow \text{Procesos que incluyen N y O} \rightarrow ^{12}\mathrm{C} + \mathrm{He} + \text{Energía} \tag{21}$$

Notemos algo muy importante: en el ciclo CNO se comienza con un átomo de carbono y un protón -donde el 12 indica el número másico (protones + neutrones en el núcleo)- y el proceso termina con el mismo átomo de carbono, un átomo de Helio y energía liberada. Se llama "ciclo" porque uno de los reactantes (el ^{12}C), luego de pasar por toda la cadena, termina como producto de la reacción. El carbono se "recicla" (de allí la palabra "ciclo") y así empieza el círculo para terminar formando un nuevo átomo de helio a partir de un núcleo de hidrógeno y carbono reciclado; el átomo de carbono vuelve a reaccionar con otro protón y así...

Ahora bien, ¿cuál es el que domina en las estrellas? La respuesta, nuevamente, yace en la masa de las estrellas. Mientras más masiva sea una estrella mayores temperaturas y densidades se alcanzan en su interior. Este ambiente "favorable" hace que el Ciclo CNO domine en estrellas de alta masa. Por otro lado, para estrellas no masivas como el Sol, las condiciones son favorables para que la cadena p-p predomine. De manera que las reacciones nucleares en nuestro Sol son principalmente a través de la cadena p-p.

Algo importante de mencionar es que estos dos caminos que puede tomar la fusión nuclear dentro del núcleo de una estrella *no son excluyentes*. Es decir, ambos ocurren al mismo tiempo. *Lo único que dictará la masa de una estrella será cuál de las dos reacciones es la que domina, pero ambas ocurren a la vez en el núcleo de una estrella en distinta proporción.*

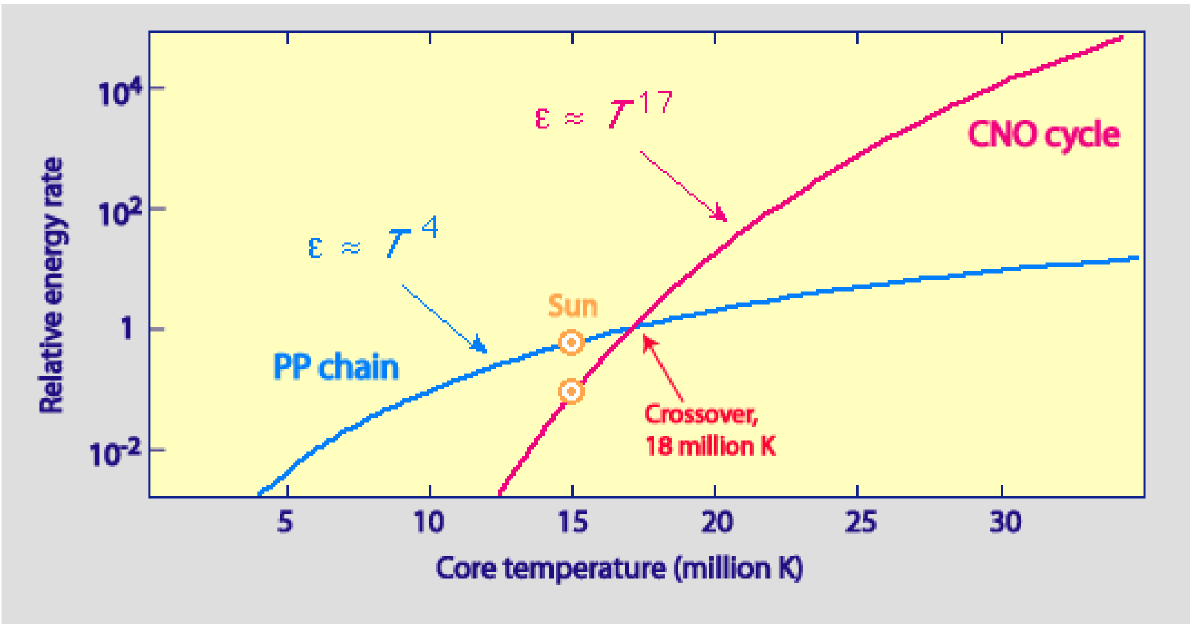


Figura 5: Ratio de energía (por distintas reacciones de fusión nuclear) vs temperatura del núcleo en estrellas. Se puede ver que para menores temperaturas internas (estrellas de baja masa) la cadena p-p es la que predomina, pero a medida que nos vamos a temperaturas del núcleo más altas (estrellas más masivas) el ciclo CNO empieza a ganar peso y dominar por sobre la cadena p-p.

Problema 3. El Sol

Considere una estrella como el Sol, con una masa de aproximadamente $M_{\odot} \approx 2 \times 10^{30}$ kg y una luminosidad de aproximadamente $L \sim 4 \times 10^{26}$ W, con W = kg m^2/s^3. Por simplicidad, asuma que el Sol estaba compuesto por hidrógeno y nada más al momento de su formación. Considere que el Sol emite energía transformando núcleos de hidrógeno (con masa dada por $m_{\mathrm{H}} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) en núcleos de helio ($m_{\mathrm{He}} = 6.65 \times 10^{-27}$ kg).

a) ¿Cuántos átomos de hidrógeno se necesitan para crear un átomo de helio?

Sol:

Basados en el Problema anterior, más en específico en la reacción (20), se puede decir que la base de la cadena p-p es que empezamos con 4 protones y terminamos con un átomo de helio más energía. De manera que necesitamos 4 núcleos de hidrógeno para formar uno de helio.

b) ¿Cuál es, aproximadamente, la diferencia porcentual de masa entre los ingredientes y los productos de la reacción nuclear para el Sol? ¿Es la diferencia positiva o negativa? ¿Qué implica aquello?

Sol:

La masa de un átomo de hidrógeno[5] es de $m_{\mathrm{H}} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg. Como necesitamos 4 núcleos de hidrógeno para formar uno de helio, primero calculamos la masa de 4 núcleos de hidrógeno:

$$4 \times m_{\mathrm{H}} = 4 \times 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx 6.68 \times 10^{-27} \text{ kg} \tag{22}$$

Por otra parte, la masa de un átomo de helio es:

$$m_{\mathrm{He}} = 6.65 \times 10^{-27} \text{ kg} \tag{23}$$

Comparando las masas de ambos elementos, llegamos a:

$$\frac{m_{\mathrm{final}}}{m_{\mathrm{inicial}}} = \frac{m_{\mathrm{He}}}{4 \times m_H} = \frac{6.65 \times 10^{-27} \text{ kg}}{6.68 \times 10^{-27} \text{ kg}} \approx 0.99 \tag{24}$$

Es decir, la masa final es sólo un 99 % de la masa inicial. ¿Qué pasó con el otro 1 %? Es la masa que se perdió en forma de energía, ya sea en forma de fotones y/o neutrinos, entre otros.

c) Si todo el hidrógeno del Sol se transforma en Helio, ¿cómo cambia su masa?

Sol:

Primero, el enunciado dice que asumamos que todo el Sol es de hidrógeno. Segundo, como sólo el 99 % de la masa inicial terminará como helio, ello es equivalente a decir que el 99 % de la masa total del Sol terminará como helio en el caso hipotético de que toda su masa se transformase en helio.

Así, la masa del Sol de helio luego de pasar por las reacciones nucleares será:

$$M_{\mathrm{final}} = 0.99 \times M_{\odot} \approx 0.99 \times 2 \times 10^{30} \text{ kg} = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg} \tag{25}$$

Por lo tanto, prácticamente no habría una sustancial diferencia en la masa del Sol, excepto por un factor de 10^{28} kg como veremos en el próximo ejercicio.

[5] La masa de un átomo de hidrógeno es prácticamente la misma que la masa de un protón. Esto porque para un átomo de hidrógeno, conformado por un electrón y un protón, la masa del electrón es unas 1000 veces más pequeña que la del protón. Por lo que $m_{\mathrm{H}} = m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{e}} \approx m_{\mathrm{p}}$, ya que $m_{\mathrm{p}} \gg m_{\mathrm{e}}$.

d) ¿Cuánta energía produciría ese proceso? Por simplicidad, recuerde una famosa ecuación del mismísimo Albert Einstein y asuma $c^2 = 10^{17}$ m$^2 \cdot$ s^{-2}.

Sol:

Primero, debemos estimar la masa perdida en este caso hipotético de que todo el hidrógeno se transformase en helio.

Así, hay una masa “perdida”, M_{lost}, en forma de energía (como fotones y/o neutrinos) dada por:

$$M_{\text{lost}} = M_{\text{inicial}} - M_{\text{final}} = M_{\odot} - M_{\text{final}} = (2.0 - 1.98) \times 10^{30} \text{ kg} = 0.02 \times 10^{30} \text{ kg} = 2 \times 10^{28} \text{ kg} \tag{26}$$

Para calcular la energía utilizamos la famosa expresión de Einstein para una partícula en reposo dada por:

$$E = mc^2 \tag{27}$$

De esta manera, la energía perdida la podemos estimar a través de la masa perdida:

$$E_{\text{lost}} = M_{\text{lost}} \times c^2 \approx 2 \times 10^{28} \text{ kg} \times 10^{17} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2} = 2 \times 10^{45} \text{ J} \tag{28}$$

De manera que la energía producida por el proceso de pérdida de masa por fusión nuclear sería de $\sim 2 \times 10^{45}$ J.

e) Si el Sol mantiene su luminosidad constante, ¿por cuánto tiempo puede durar así (que todo el hidrógeno se transforme en helio)?

Sol:

Para este ejercio es importante recordar la definición de luminosidad. ¿Qué es la luminosidad? Es la *energía por unidad de tiempo* emitida en todas las direcciones por una estrella. Es decir:

$$\text{Luminosidad} = \frac{\text{Energía}}{\text{Tiempo}} \tag{29}$$

De manera que podemos despejar el tiempo de la ecuación anterior y tenemos:

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{Energía}}{\text{Luminosidad}} \tag{30}$$

Ahora simplemente reemplazamos por los valores hallados para la energía hallada y luminosidad (solar) dada en el enunciado, quedando como:

$$t = \frac{E_{\text{lost}}}{L} = \frac{2 \times 10^{45} \text{ J}}{4 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}} = 5 \times 10^{18} \text{ s} = 1.5 \times 10^{11} \text{ yr} = 150 \text{ Gyr} \tag{31}$$

Es decir, si el Sol quemase todo su hidrógeno y lo transformara en helio (y asumiendo que su luminosidad se mantiene constante) el Sol viviría unos 150 mil millones de años.

f) ¿Cómo se compara el resultado con “la vida útil real” del Sol, que es unos $\tau_{\odot} \approx 10^{10}$ yr? ¿Puede decir algo de la similitud (o discrepancia) del resultado que ha hallado?

Sol:

Tal cual hemos visto a lo largo de esta ayudantía, se estima que el Sol vivirá unos $\tau_{\odot} \approx 10^{10}$ yr $= 10$ Gyr, es decir -en palabras humanas-, se espera que el Sol viva en total unos 10 mil millones de años; aunque la edad actual del Sol se estima que es de unos 4600 millones de años, por lo que todavía le quedan unos 5400 millones de años de vida restante.

Ahora bien, si comparamos el resultado de nuestro ejercicio con el valor esperado, nuestro resultado es unas 15 veces mayor. Es más, si lo comparamos con la edad del universo -que se cree que es de unos 13.7 Gyr- nuestro resultado es casi 10 veces más grande. ¿Por qué puede ser esta discrepancia?

Primero, asumimos que la luminosidad será constante a lo largo de su vida; cosa que no es para nada cierta. Como podemos ver en un diagrama HR, las luminosidades de una estrella varían a lo largo de su vida. Segundo, existen otros caminos de pérdida de masa de las estrellas, los cuales son significativos en las últimas etapas de vida de la misma. Tercero, y esta es la conclusión más importante de este ejercicio, *no todo el hidrógeno de una estrella se termina transformando en helio*. En el núcleo están dadas las condiciones para que el hidrógeno pueda realizar fusión nuclear, pero esto no es así para las zonas más exteriores de la estrella. Por lo mismo, se dice que las estrellas (en Secuencia Principal) tienen un núcleo quemando activamente hidrógeno en helio, rodeado de hidrógeno inerte. Además de que, dependiendo de la fase evolutiva, el hidrógeno (u otros elementos) puede(n) quemarse[6] en el núcleo o en capas alrededor de éste. Para entender mejor esto último recomiendo fuertemente echarle un vistazo a la ayudantía de evolución estelar que también hice.

Saludos, y ánimo que queda poco
~F.C.

[6] Por si no quedó claro, en astrofísica cuando decimos "quemar" nos referimos a que está realizando fusión nuclear.