Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Física – Instituto de Astrofísica
Astronomía – AST0111
Primer Semestre 2020

# Ayudantía 5 – Solución

Profesora: Viviana Guzmán
Ayudantes: Camila Aravena González (cfaravena1@uc.cl) – Francisco Carrasco Varela (ffcarrasco@uc.cl)

---

| Planeta | Masa (kg) | Volumen (km$^3$) | Densidad media ($\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$) | Período Rotación (Días terrestres) | Período Orbital (Años terrestres) |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercurio (☿) | $3.3 \times 10^{23}$ | $6.08 \times 10^{10}$ | 5.42 | 58.6 | 0.24 |
| Venus (♀) | $4.86 \times 10^{24}$ | $9.28 \times 10^{11}$ | 5.24 | 243 | 0.61 |
| Tierra (⊕) | $5.97 \times 10^{24}$ | $1.08 \times 10^{12}$ | 5.51 | 1 | 1.00 |
| Marte (♂) | $6.4 \times 10^{23}$ | $1.63 \times 10^{11}$ | 3.93 | 1.03 | 1.88 |
| Júpiter (♃) | $1.89 \times 10^{27}$ | $1.43 \times 10^{15}$ | 1.33 | 0.41 | 11.86 |
| Saturno (♄) | $5.68 \times 10^{26}$ | $8.27 \times 10^{14}$ | 0.68 | 0.42 | 29.46 |
| Urano (⛢) | $8.68 \times 10^{25}$ | $6.83 \times 10^{13}$ | 1.27 | 0.71 | 84.01 |
| Neptuno (Ψ) | $1.02 \times 10^{26}$ | $6.25 \times 10^{13}$ | 1.63 | 0.67 | 164.79 |

Cuadro 1: Algunos datos sobre los planetas del Sistema Solar.

**Problema 1. Características generales de planetas gaseosos (jovianos)**

a) ¿Cuáles son los planetas gaseosos?

*Solución:*

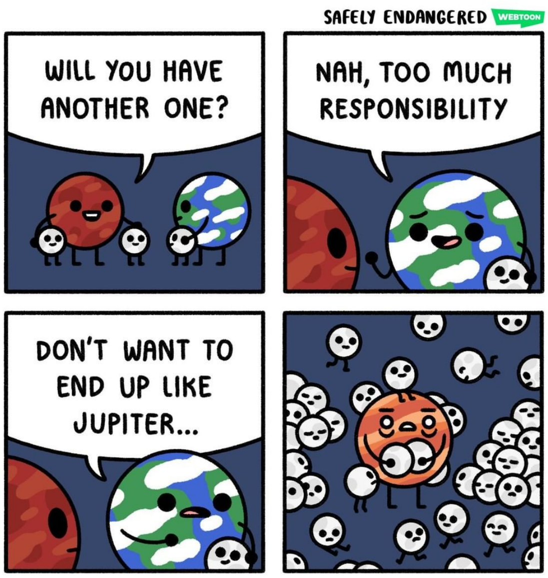
- Júpiter
- Saturno
- Urano
- Neptuno

b) ¿Cuáles son los más grandes de ellos?

*Solución:*

Tanto en masa como en volumen, los dos planetas más grandes -tanto gaseosos como del Sistema Solar- son Júpiter y Saturno. Ello implica, por ejemplo, que es esperable que estos planetas tengan un mayor número de satélites.

Por lo mismo, aunque muchos no lo crean, Júpiter "protege" a la Tierra de muchísimos asteroides que se podrían acercar a ella. Estos asteroides de los cuales Júpiter nos protege se llaman *asteroides troyanos de Júpiter*, o simplemente *troyanos de Júpiter*. Los troyanos de Júpiter son objetos astronómicos que comparten la órbita de Júpiter alrededor del Sol. Por lo que, de cierta manera, Júpiter mantiene "confinados" a un gran número de asteroides y protege a la Tierra. Aunque, como aclaración, los troyanos de Júpiter *no* son satélites de Júpiter. Ya que no orbitan alrededor de Júpiter, sino que sólo comparten la misma órbita alrededor del Sol.



c) **Observando el Cuadro 1, ¿qué puede decir si compara los planetas gaseosos con los rocosos?**

*Solución:*

Que los planetas gaseosos, dada su relación masa-volumen, son menos densos (recordando que esta relación está dada por densidad $= \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$). Ello quiere decir, por ejemplo, que si pudiésemos poner a Saturno en una piscina gigante llena de agua (la cual tiene una densidad de 1 gr $\cdot$ cm$^{-3}$), Saturno flotaría.

d) **¿Sólo Saturno tiene "anillos"? De ser negativa la respuesta, ¿cuáles serían los planetas?**

*Solución:*

No, todos los planetas gaseosos del Sistema Solar tienen anillos. Simplemente sucede que los anillos de Saturno están hechos de polvo y hielo. Este último compuesto refleja la luz. Es por ello que son más fáciles de observar que los anillos de los otros planetas gaseosos.


Créditos: elplanetaerrante (Instagram)

**Problema 2. Problemas generales**

a) **Supongamos que observo dos estrellas y logro medir su color. Una de ellas resulta ser de color azul y la otra resulta ser de color rojo, ¿cuál de las dos estrellas esperaría que fuera la más caliente y por qué?**

*Solución:*

Recordemos que la energía ($E$) de un solo fotón es proporcional a su frecuencia (la cual llamaremos con la letra griega $\nu$ [léase como "nú"]). Es decir,

$$E \propto \nu \tag{1}$$

donde el símbolo "$\propto$" significa "proporcional a".

De manera que la proporción (1) quiere decir que la energía (de un fotón) es proporcional a la frecuencia de éste. Recordemos que el color de un fotón nos dice algo sobre su frecuencia. Los colores azules tienen una *mayor frecuencia*; o, de igual manera, los colores más rojizos tienen una *menor frecuencia*, todo esto en el espectro visible. Por lo tanto, en términos energéticos, los fotones de color azul tienen una mayor frecuencia que los fotones de color rojo (Energía color azul > Energía color rojo).

En específico, para que la proporción (1) sea una igualdad debemos multiplicar por una constante. Así, *la energía de un fotón, en función de su frecuencia, está dada por*:

$$E = h\nu \tag{2}$$

donde $h$ es la llamada "constante de Planck", la cual es una constante que aparece muchísimo en Física Cuántica y la cual tiene un valor de $h = 6.62 \times 10^{-34}\ J \cdot s$.

De igual manera, podemos encontrar la energía de un fotón en función de la longitud de onda ($\lambda$):

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \tag{3}$$

donde $c$ es la rapidez de la luz (un fotón).

Ahora bien, mayores energías (cinéticas) se asocian a mayores temperaturas. Por lo tanto, es esperable que las estrellas más calientes sean más azules en comparación a sus pares más rojizos. Por lo que, respondiendo a la pregunta del enunciado, esperaríamos que la estrella azul sea más caliente que la roja.

b) **¿A qué distancia tendría que estar una ampolleta de $100\ W$ para que su flujo sea el mismo al flujo solar que recibe la Tierra?**

**Para ello le puede servir de dato que la luminosidad del Sol es, aproximadamente, $L_\odot \approx 3.82 \times 10^{26}\ W \sim 4 \times 10^{26}\ W$.**

*Solución:*

Antes que todo, hay que preguntarnos "¿qué es el flujo?". Es normal que en el día a día escuchemos mucho esta palabra, y es bien utilizada en varios ámbitos. La definición más general de flujo sería la siguiente:

$$\text{Flujo} = \frac{\text{“Algo”}}{\text{Área} \times \text{Tiempo}} \tag{4}$$

Es decir, al medir el flujo estamos midiendo "algo" por unidad de área, por unidad de tiempo. ¿Por qué pongo un concepto tan abstracto como "algo"? Porque, como dije, el concepto de flujo puede depender de qué es lo que queramos medir. Por ejemplo, si fuésemos ingenieros especializados en transporte, ese "algo" nos interesaría que fueran autos o personas; si fuésemos meteorólogos nos interesaría que ese "algo" sea la cantidad de lluvia para así saber el monto caído en una cierta área en un cierto tiempo; si fuésemos geógrafos nos interesaría que ese "algo" sea la cantidad de agua que pasa a través de un cierto río y así. En astronomía, ese "algo" que nos interesa es la energía. Por lo tanto, en astronomía, el flujo es:

$$\text{Flujo} = \frac{\text{Energía}}{\text{Área} \times \text{Tiempo}} \tag{5}$$

En astronomía además está el concepto de luminosidad, el cual no es más que la potencia que emite una estrella en todas las direcciones. Recordemos que, desde la perspectiva física, la potencia es la cantidad de trabajo que se realiza por unidad de tiempo, por lo que la luminosidad no es más que la energía que emite una estrella por unidad de tiempo en todas las direcciones. En el Sistema Internacional (S.I.) la potencia se mide en watts y el trabajo en joules; o, en españolísimo tío, en vatios y julios, respectivamente. Donde un watt es $1\ \text{W} = 1\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^3}$ y un joule es $1\ \text{J} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}^2}$.

En resumen, matemáticamente la luminosidad es:

$$\text{Luminosidad} = \frac{\text{Energía}}{\text{Tiempo}} \tag{6}$$

Al comparar las ecuaciones (5) y (6), vemos que hay una relación entre flujo y luminosidad:

$$\text{Flujo} = \frac{\text{Luminosidad}}{\text{Área}} \tag{7}$$

Más específicamente, para un cierto flujo dado ($F$) de un objeto que que está a una cierta distancia ($d$) y que tiene una luminosidad ($L$) esta relación es:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \tag{8}$$

El factor $4\pi d^2$ en el denominador es el área de una esfera de radio $d$ y viene de asumir que la estrella, en este caso el Sol, emite hacia todas las direcciones con la misma intensidad (lo que se conoce como "isotrópico") e ilumina de manera radial alrededor de él. De manera que ilumina formando una esfera alrededor de él. Es por esto que decimos que el *flujo disminuye con el cuadrado de la distancia.* Esta relación sigue siendo totalmente válida al querer comparar el flujo entre dos puntos distintos. Por ejemplo, si mido el flujo en la Tierra y mido el flujo en un punto que está a 2 AU, esperaría que el flujo en aquel punto sea 4 veces menor comparado al flujo medido en la Tierra.

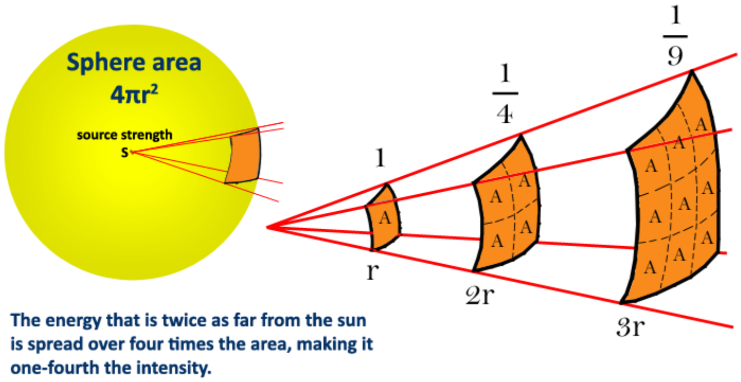



Figura 1: A medida que nos alejamos de la estrella (u otra fuente emitiendo) la energía que ésta irradia se va esparciendo en un área cada vez más grande. Por lo que el flujo que medimos decrece con el cuadrado de la distancia. En nuestro problema, y comparándolo con la figura, nosotros estamos usando la letra $d$ en vez de $r$, pero ambas respresentan lo mismo: la distancia desde el punto que emite luz.

Volviendo al problema original del enunciado, sabemos que la distancia entre la Tierra y el Sol es, en promedio, una unidad astronómica; lo que matemáticamente es $1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11}$ m. Lo que son, aproximadamente, unos 150 millones de kilómetros. De manera que, en este caso en específico, la distancia será $d = 1 \text{ AU} = 1.496 \times 10^{11}$ m.

De manera que reemplazamos por los valores de $d$ y $L = L_\odot$ hallados y los usamos en la ecuación (8), dando así:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} = \frac{L_\odot}{4\pi (1 \text{ AU})^2} = \frac{3.82 \times 10^{26} \text{ W}}{4\pi \cdot (1.496 \times 10^{11} \text{ m})^2}$$

Obteniendo:

$$F = 1365 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \tag{9}$$

Este valor se conoce como el valor de "radiación solar" (o "solar irradiance" en inglés) y es tomado, aproximadamente, como constante. A alguien le pudo haber quedado la duda de porqué pasé el parámetro de la distancia $d$ de unidades astronómicas a metros. Y la respuesta es que, personalmente, me gusta trabajar todo en el S.I. (o el sistema cgs[1] en ciertos casos específicos). Si hubiésemos utilizado $d = 1$ AU, el resultado del flujo nos hubiese dado en unidades de $\frac{\text{W}}{\text{AU}^2}$, lo cual no es intuitivo porque son unidades, literalmente, astronómicamente distintas en escala. Es por ello que siempre traten de trabajar todo en el mismo sistema de unidades.

Recordemos que queremos saber a qué distancia el flujo de una ampolleta de 100 W será igual a la radiación solar que acabamos de encontrar. Es por ello que lo que queremos hallar es la incógnita $d$ en la ecuación (8). Despejando $d$ de ésta se obtiene:

$$d = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \tag{10}$$

[1] Sistema de Centímetros-Gramos-Segundos

Queremos conocer la distancia, pero esta vez desde la ampolleta de 100 W y queremos que el flujo sea igual a la Radiación Solar recién encontrada. De manera que tenemos, finalmente:

$$d = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} = \sqrt{\frac{100 \text{ W}}{4\pi \cdot 1365 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}} = 7.63 \times 10^{-2} \text{ m} = 7.63 \text{ cm}$$

Es decir, cuando medimos el flujo a unos 7 centímetros y medio de distancia de una ampolleta de 100 W, el flujo medido es casi igual al flujo que nos llega desde el Sol aquí en la Tierra (conocido como Radiación Solar).

c) **El Hubble Space Telescope (HST) está a una distancia de $\sim 610$ km sobre la superficie de la Tierra, ubicada en una órbita aproximadamente circular alrededor de ésta.**

I) **Estime su período orbital.**

*Solución:*

Siempre que les pregunten por períodos o distancias orbitales recuerden la Tercera Ley de Kepler, la cual es:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \tag{11}$$

donde $P$ es el período orbital (el tiempo que se demora en dar una vuelta el objeto que orbita), $a$ es la distancia promedio entre el objeto que orbita y el objeto más masivo, $G$ es la constante de gravitación universal ($G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$); y $m_1$ y $m_2$ son las masas de los dos cuerpos interaccionando gravitacionalmente. Notemos que si $m_1 \gg m_2$ (léase el símbolo "$\gg$" como "mucho mayor que" o "mucho más grande que") eso quiere decir que la ecuación (11) es casi igual a:

$$\frac{P^2}{a^3} \approx \frac{4\pi^2}{G \cdot m_1}, \qquad \text{si } m_1 \gg m_2 \tag{12}$$

Es decir, asumimos que $m_1 + m_2 \approx m_1$, si y sólo si $m_1 \gg m_2$.

Muchas veces se ve esta ecuación como:

$$\frac{P^2}{a^3} = \text{Constante}$$

Y ello no está del todo mal. Si comparamos la Tercera Ley de Kepler para los planetas del Sistema Solar, $m_1$ siempre será la masa del Sol y $m_2$ será la masa del planeta. Como la masa del Sol, $m_1$, es mucho más grande que la masa de cualquier planeta $m_2$, sin importar qué planeta usemos el resultado a la derecha de la ecuación (11) será prácticamente siempre el mismo, es por ello que este valor se considera "constante" aunque realmente no lo sea.

Si le cuesta verlo, y si tiene tiempo, trate de calcular la parte derecha de la ecuación (11) utilizando como $m_1$ la masa del Sol ($m_\odot \approx 1.98 \times 10^{30}$ kg) y como $m_2$ cualquiera de las masas de los planetas dados en el Cuadro/Tabla 1. Verá que el resultado de $\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$ es prácticamente el mismo sin importar qué masa planetaria utilice y es, por tanto, "constante".

¿Cuándo este valor no es constante y debemos tener cuidado cómo aplicarlo? Un ejemplo en concreto puede ser en los sistemas de estrellas binarias. Las estrellas binarias es un sistema estelar de dos estrellas que orbitan mutuamente entre sí alrededor de un centro de masas. Como en este caso no se tiene que $m_1 \gg m_2$, entonces no se puede asumir un valor constante y por lo tanto, si bien sí se puede utilizar Kepler para calcular su masa, hay que ser más cuidadosos.

Volviendo con el enunciado, queremos conocer el período orbital y por lo tanto debemos aplicar la Tercera Ley de Kepler (ecuación (11), o ecuación (12) si la masa del cuerpo más masivo es mucho más grande que la del cuerpo orbitando [condición que sí se cumple en este caso/ejercicio]).

Nos dicen la distancia que hay entre el HST y la *superficie* de la Tierra. Pero ojo, como dije es la distancia/altura a la *superficie* de la Tierra, la cual llamaremos $h$. Y para Kepler debemos utilizar la distancia al centro de masa, el cual asumimos que se encuentra exactamente al centro de la Tierra, a un radio terrestre o $R_\oplus = 6371$ km $= 6.37 \times 10^6$ m. Por lo tanto, la distancia entre el HST y el centro de masas del cual orbita está dado por:

Distancia al centro de masas = (Radio de la Tierra) + (Altura del HST a la superficie de la Tierra)

O matemáticamente esto es igual a:

$$a = R_\oplus + h = (6.37 \times 10^6 \text{ m}) + (610 \times 10^3 \text{ m}) = 6.99 \times 10^6 \text{ m}$$

Por otro lado, utilizando la masa de la Tierra como $m_1 = m_\oplus = 5.97 \times 10^{24}$ kg calculamos el lado derecho de la ecuación (12) (ya que el HST debe tener una masa despreciable al lado del total de la masa de la Tierra), obteniendo:

$$\frac{4\pi^2}{G \cdot m_1} = \frac{4\pi^2}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}) \times (5.97 \times 10^{24} \text{ kg})} = 9.91 \times 10^{-14} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3} \tag{13}$$

Despejando el período orbital $P$ de la ecuación (12) llegamos a:

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot m_1} a^3} \tag{14}$$

Y reemplazando por lo que acabamos de obtener en (13) y el valor de $a$ encontrado, tenemos que la ecuación (14) da:

$$P = \sqrt{(9.91 \times 10^{-14} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}) \times (6.99 \times 10^6 \text{ m})^3} = 5820 \text{ s} \approx 97 \text{ min} \tag{15}$$

Es decir, el HST da una vuelta a la Tierra aproximadamente cada una hora y media.

II) **Los satélites de comunicación y de monitoreos del clima usualmente están ubicados en lo que se conoce como órbitas de estacionamiento "geosíncronas" sobre la Tierra. La gracia de estas órbitas es que los satélites permanecen fijos sobre un punto específico sobre la Tierra. ¿A qué altitud deben estar localizados estos satélites?**

*Solución:*

Lo que requerimos esta vez es que el período orbital de los satélites sea igual al período de rotación de la Tierra (de un día sideral, 23h 56 min $\approx$ 23.93 h).

Pasando la duración del día sideral a segundos obtenemos que éste es, aproximadamente:

$$P = 8.61 \times 10^4 \text{ s}$$

(Si toma el período para un día solar, asumirá $P = 8.64 \times 10^4$ s y el resultado será levemente distinto, pero no radicalmente distinto)

De la ecuación (12) podemos despejar $a$, obteniendo:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_1}{4\pi^2} P^2} \tag{16}$$

Podemos "reciclar" el resultado obtenido en la ecuación (13) y utilizarlo en la ecuación (16) (pues es el mismo valor, pero elevado a $-1$), dando así:

$$a = \sqrt[3]{\left(9.91 \times 10^{-14} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}\right)^{-1} \times (8.61 \times 10^4 \text{ s})^2} = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$$

Recordemos que $a$ es la distancia del HST al centro de masa, no es la altura desde la superficie. La altura $h$ viene dada simplemente por la diferencia entre el valor encontrado para $a$ y el radio de la Tierra (ya que, recordemos, $a = R_\oplus + h$):

$$h = a - R_\oplus \tag{17}$$

Así tenemos que:

$$h = (4.22 \times 10^7 - 6.37 \times 10^6)\ \text{m} = 3.58 \times 10^7\ \text{m} = 5.6\ R_\oplus.$$

Por lo que los satélites en órbitas geosíncronas están a, aproximadamente, unos 36 mil kilómetros de altura.

III) **¿Es posible que un satélite en una órbita geosíncrona permanezca "estacionado" sobre cualquier punto sobre la Tierra? ¿Por qué o por qué no?**

*Solución:*

Para que un satélite esté "estacionado" debe estar sobre el Ecuador y orbitando en la misma dirección en la que la Tierra rota. Esto ya que el centro de la órbita del satélite es el centro de masa de la Tierra-satélite (que es prácticamente igual al centro de la Tierra).

d) **Si nos encontrásemos en la ciudad de Lima (Perú), la cual tiene una latitud de $12°S$ (o, equivalentemente, latitud de $-12°$):**

I) **¿Cuáles son las declinaciones (DEC) que se pueden ver en dicha ciudad?**

*Solución:*

Observemos la Figura 2. Las estrellas que uno puede observar desde una latitud $x°$ están altamente restringidas por esta misma. Ya que, asumimos, para una latitud $x°$ sólo podemos observar en 90 grados hacia el Norte y en 90 grados hacia el Sur, *todo esto desde su cenit* (sobre su cabeza). ¿Por qué $\pm 90°$? Porque es la cantidad de grados que hay desde el cenit de uno hasta el horizonte. Obviamente esto podría verse limitado por montañas u otros impedimentos, pero en principio/teoría uno debería poder ver todas las estrellas desde el horizonte.

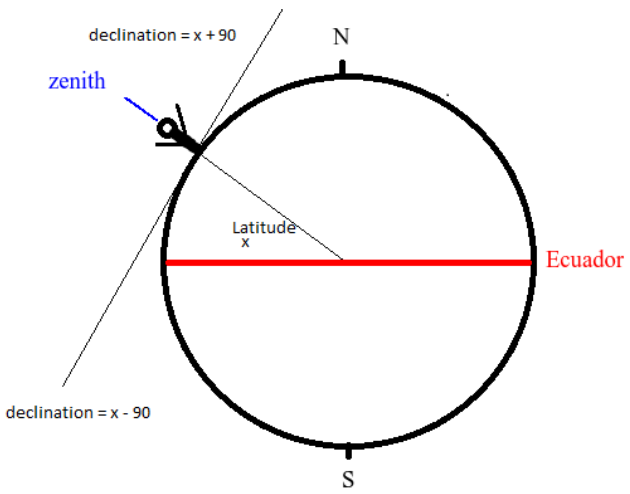



Figura 2: Rango de declinaciones observables desde una latitud de $x°$. Notemos que la persona, la cual se encuentra localizada en una latitud $x°$, puede observar estrellas que están 90 grados hacia el Norte ($+90°$) y estrellas que están 90 grados hacia el Sur ($-90°$), *todo esto desde su cenit* (sobre su cabeza) hacia el horizonte.

El rango en el cual se ve la estrella, matemáticamente, podríamos definirlo como sigue:

$$N(x) < \begin{cases} (x+90)° & ,\ \text{si}\ (x+90)° < 90° \\ 90° & ,\ \text{si}\ (x+90)° > 90° \end{cases}$$

$$S(x) > \begin{cases} (x-90)° & ,\ \text{si}\ (x-90)° > -90° \\ -90° & ,\ \text{si}\ (x-90)° < -90° \end{cases}$$

Y el rango en el cual se verá la estrella desde una latitud $x^\circ$ simplemente viene de intersectar ambos resultados, es decir,

$$D(x) = N(x) \cup S(x) \tag{18}$$

Sé que puede parecer enredado (y lo es), pero sin tantas ecuaciones piénsenlo así:
Para una estrella de latitud $x^\circ$ hagan lo siguiente:

1) Súmenle $+90^\circ$ a la latitud $x^\circ$ donde se encuentran o desean conocer. Si el resultado es menor a $+90^\circ$, quédense con ese valor y anótenlo. Ejemplo, si estamos en una latitud de 33 grados Sur, o $-33^\circ$, y le sumamos $+90^\circ$ el resultado es $+57^\circ$. Como ese valor es menor a $+90^\circ$ lo conservamos.
2) Si al sumar $+90^\circ$ a la latitud $x^\circ$ esta nos da más de $+90^\circ$, entonces elegimos el valor como $+90^\circ$. Por ejemplo, si estamos en una latitud de $+56^\circ$ y le sumamos $+90^\circ$ eso nos da $+146^\circ$. Como claramente eso es mayor a $+90^\circ$, entonces tomamos como "cota superior" un valor de $+90^\circ$ (ya que las declinaciones no llegan más allá de $\pm 90^\circ$).
3) Súmenle $-90^\circ$ a la latitud $x^\circ$ donde se encuentran o desean conocer. Si el resultado es mayor a $-90^\circ$, quédense con ese valor y anótenlo. Ejemplo, si estamos en una latitud de 40 grados Norte, o $+40^\circ$, y le sumamos $-90^\circ$ el resultado es $-50^\circ$. Como ese valor es mayor a $-90^\circ$ lo conservamos.
4) Si al sumar $-90^\circ$ a la latitud $x^\circ$ esta nos da menos de $-90^\circ$, entonces elegimos el valor como $-90^\circ$. Por ejemplo, si estamos en una latitud de $-50^\circ$ y le sumamos $-90^\circ$ eso nos da $-140^\circ$. Como claramente eso es menor a $-90^\circ$, entonces tomamos como "cota inferior" un valor de $-90^\circ$.
5) Una vez hayamos obtenido los valores después de haber sumado/restado $\pm 90^\circ$, simplemente hacemos una intersección de los valores obtenidos y nos quedamos con ese rango. Por ejemplo, si al sumar $+90^\circ$ obtuve un valor de $+120$, ello quiere decir que asumimos un valor de $+90^\circ$ (pues $120^\circ > 90^\circ$). Y si al restar $90^\circ$ obtuvimos un valor de $-60^\circ$ nos quedamos con ese valor. Finalmente tomamos la intersección entre los resultados de haber sumado/restado $\pm 90^\circ$, que en este ejemplo nos daría un intervalo de $[-60^\circ, +90^\circ]$.

Volviendo al problema original, deseamos conocer las declinaciones de las estrellas que se pueden ver desde Lima, Perú; la cual tiene una latitud de 12 grados Sur, o equivalentemente, $-12^\circ$ (recuerden que latitudes hacia el hemisferio Norte son positivas y hacia el hemisferio Sur son negativas).
Al sumar $+90^\circ$ tenemos que esto es:

$$-12^\circ + 90^\circ = +78^\circ < 90^\circ$$

Como $+78^\circ$ es menor a $+90^\circ$ todo está bien y conservamos este valor.
Ahora sumamos $-90^\circ$. Esto nos da

$$-12^\circ - 90^\circ = -102^\circ < -90^\circ \qquad \Rightarrow -90^\circ$$

Como $-102^\circ$ es menor que $-90^\circ$, y eso no es posible, entonces asumimos un valor de $-90^\circ$ como cota inferior.
La intersección de ambos valores hallados es entonces: $[-90^\circ, +78^\circ]$.

Por lo que, desde Lima, Perú, podemos ver en alguna época del año estrellas cuyo rango de declinaciones estén entre $-90^\circ$ y $+78^\circ$.

II) **¿Cuál es la máxima altura sobre el horizonte que puede alcanzar una estrella cuyas coordenadas serán $RA = 3^h : 00^m : 00^s$ y $DEC = +20^\circ$?**
*Solución:*
Para entender bien este ejercicio hay que observar la Figura 3. Resalto y advierto que los ángulos no están a escala en este dibujo, pero sirven para tener una noción de este ejercicio.

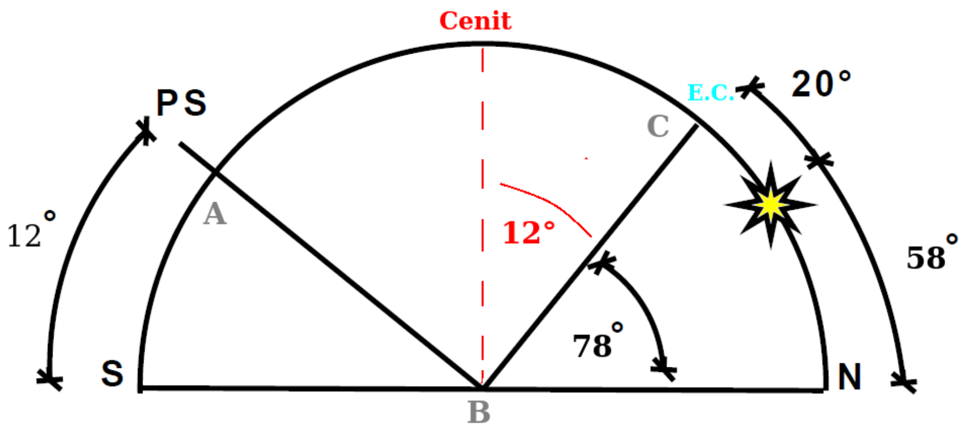



Figura 3: Alturas de una estrella sobre el horizonte. Los ángulos no están a escala. Nótese cómo la latitud define prácticamente todos los parámetros: la altura del Polo Sur Celeste sobre el horizonte y la altura del Ecuador Celeste sobre el horizonte.

Si tenemos una latitud de $+12°$, ello quiere decir que si miramos hacia el sur (punto S en el dibujo) y luego empezamos a subir la mirada desde el horizonte hacia el cenit, el Polo Sur celeste estará 12° sobre el horizonte. Una manera análoga de verlo es que, si empezamos a bajar la mirada desde el cenit hacia el horizonte, mirando hacia el norte, entonces allí se encontrará el Ecuador Celeste (o el plano ecuatorial). Esto es porque la diferencia entre el Polo Sur celeste y el Ecuador celeste son 90°. Por lo que si el punto A en la Figura era el Polo Sur, entonces al sumarle un ángulo recto ($\angle ABC$) obtendremos el Ecuador Celeste (punto C en la figura, que está en color turquesa también).

Además, si observa la Figura 5 un par de páginas más adelante, verá que la declinación es un ángulo que se mide desde el Ecuador Celeste. Es positivo si lo medimos hacia el Norte y negativo si lo medimos hacia el Sur.

• Para el Hemisferio Sur:

Entonces, de la Figura 3, vemos que la altura de un objeto sobre el horizonte -mirando hacia el norte- estará dada por:

$$H = 90^\circ + \mathrm{LAT} - \mathrm{DEC} \tag{19}$$

donde LAT es la latitud -la cual será positiva para el hemisferio Norte, y negativa para latitudes del hemisferio Sur- (un símbolo alternativo para la latitud es usando la letra griega $\Phi$ [léase como "fi"]) y DEC (o $\delta$) es la declinación del objeto que queremos observar.

Por lo que es común encontrar la ecuación (19) como:

$$H = 90^\circ + \Phi - \delta \tag{20}$$

Las ecuaciones (19) y (20) son completamente iguales, sólo usamos distinta notación. *Esta ecuación que hemos encontrado es válida para el hemisferio Sur y si la altura encontrada es menor o igual a 90°.*

Si la altura que nos resulta de aplicar la ecuación (20) a una estrella superáse los 90° entonces de la Figura 19 podemos ver que se puede utilizar la relación:

$$H = 180^\circ - (90^\circ + \Phi - \delta) \tag{21}$$

Lo cual nos dará la altura de la estrella sobre el horizonte mirando hacia el Sur.

• Para el Hemisferio Norte:
Observemos la Figura 4, la cual es el caso para un observador situado en el hemisferio Norte:

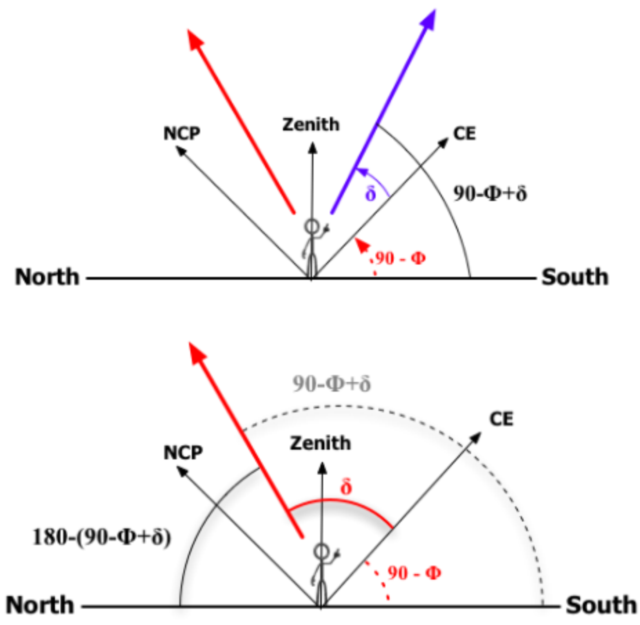



Figura 4: Alturas de una estrella sobre el horizonte para un observador en el hemisferio Norte.

Vemos que podemos encontrar una relación similar a la hallada en el hemisferio Sur, pero esta vez la altura mirando hacia el Sur estará dada por:

$$H = 90^\circ - \Phi + \delta \tag{22}$$

Y si la altura que nos resulta de aplicar esta ecuación a una estrella es mayor de $90^\circ$, entonces -y basados en el dibujo- podemos decir que la estrella tendrá una altura:

$$H = 180^\circ - (90^\circ - \Phi + \delta) \tag{23}$$

lo cual nos dará la altura de la estrella sobre el horizonte mirando hacia el Norte.

Una vez explicado esto volvamos al ejercicio original: una estrella con coordenadas $RA = \alpha = 03^h$ y $\delta = +20^\circ$.
Como estamos en el hemisferio Sur podemos observar la Figura 3. De ella hemos -justificadamente- derivado la ecuación (20). Por lo que la altura será simplemente aplicar:

$$H = 90^\circ + \Phi - \delta$$

Que reemplazando con los datos dados es:

$$H = 90^\circ + (-12^\circ) - (+20^\circ) = 90^\circ - 12^\circ - 20^\circ = 58^\circ$$

De manera que la máxima altura que alcanzará esta estrella, vista desde Lima, Perú, será de $58^\circ$ sobre el horizonte mirando hacia el Norte.

III) **¿Cuál es la mejor fecha para ver dicha estrella?**

*Solución:*

Aquí hay dos maneras de saber esto: la primera es “memorizarse” la Tabla/Cuadro 2 (aunque no es necesario memorizarse todas, con saber una sola fecha y ascensión recta respectivos al mes que le sigue se le suman 2 horas a la ascensión recta y así; por lo que sabiendo una sola se puede deducir todo el resto).

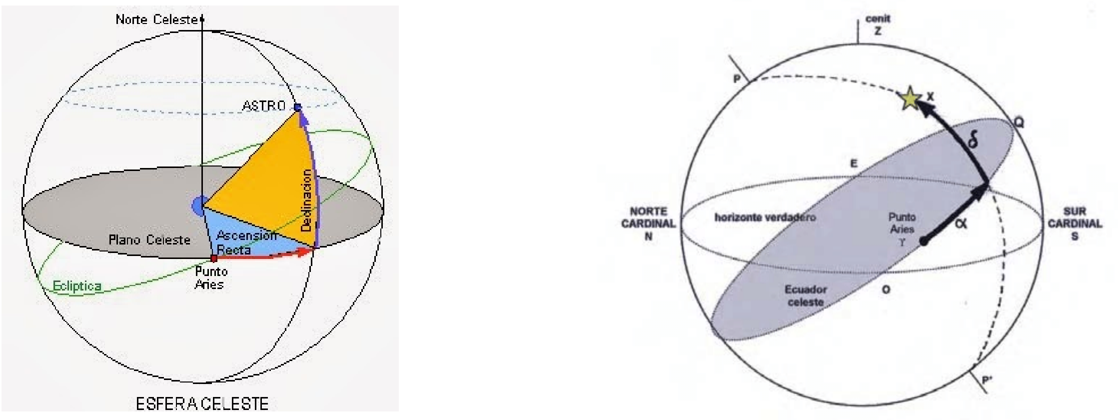
Pero obviamente están en la universidad y, a diferencia del colegio/liceo, muchas cosas ya no aparecen por arte de magia y son verdad sólo porque el profesor el ayudante las dice.

| Día | Ascensión recta (hora) |
|---|---|
| 21 de Marzo | 12 : 00 : 00 |
| 21 de Abril | 14 : 00 : 00 |
| 21 de Mayo | 16 : 00 : 00 |
| 21 de Junio | 18 : 00 : 00 |
| 21 de Julio | 20 : 00 : 00 |
| 21 de Agosto | 22 : 00 : 00 |
| 21 de Septiembre | 00 : 00 : 00 |
| 21 de Octubre | 02 : 00 : 00 |
| 21 de Noviembre | 04 : 00 : 00 |
| 21 de Diciembre | 06 : 00 : 00 |
| 21 de Enero | 08 : 00 : 00 |
| 21 de Febrero | 10 : 00 : 00 |

Cuadro 2: Ascensión recta correspondiente (**a la medianoche**) según los días del año. Reitero (porque hay gente que se confunde) que esto es a la **medianoche**.

Recuerden que el 21 de Marzo es el punto que se conoce como Punto Aries, y es el “punto de comienzo” donde el Sol está en el origen tanto de las ascenciones rectas como de las declinaciones (es decir, el 21 de Marzo el Sol tiene coordenadas $RA = 0^h : 00^m : 00^s$ y $DEC = +00.00°$). Piensen que, totalmente opuesto al Sol, están las estrellas cuyas ascenciones rectas son +12 h con respecto a éste.

Para entenderlo mejor, observen la Figura 5.




(a) Esfera Celeste y sus elementos

(b) Ascensión recta y declinación

Figura 5: Ascensión recta y declinación

Poniendo especial énfasis en la Figura 5 (izquierda), el Ecuador Celeste está en color gris, la Tierra es la esfera azul al centro, la Ascensión Recta está en celeste, la Declinación en naranjo y la eclíptica en verde. El Sol estará en el Punto Aries (punto-círculo rojo). Imaginen que el Sol estará saliendo de la pantalla de su notebook/celular, en la Figura 5(a), cuando se encuentre en el Punto Aries; mientras que las estrellas que estén al “otro lado” (las estrellas que estarían detrás de la pantalla) estarían ubicadas en el lugar si sumamos 12 horas a la Ascensión Recta (es decir, dejamos avanzar la Ascensión Recta 12 horas [zona celeste en el dibujo]). Como el Sol se encuentra desde nuestro lado de la pantalla, pero las estrellas visibles están detrás de la pantalla, ello quiere decir que las estrellas "óptimas" para ser vistas están totalmente opuestas a la posición del Sol; pues, al otro lado del mundo será de noche.

Entonces lo que yo hago es "deducir" la Tabla/Cuadro 2, recordando que el Punto Aries (el origen de las coordenadas) es el 21 de Marzo. Como el 21 de Marzo el Sol tendrá Ascensión Recta $RA = 0^h : 00^m : 00^s$, las estrellas tienen que estar -por lo que expliqué más arriba- en una Ascensión Recta de +12 horas con respecto al Sol. Así, las estrellas el 21 de Marzo, a medianoche, tendrán una Ascensión Recta de $RA = 12^h$. Cada mes que pasa va agregando 2 horas a la Ascensión Recta de las estrellas en la tabla (pues el Sol va avanzando, cada mes, 2 horas de Ascensión Recta); de manera que si el 21 de Marzo eran $RA = 12^h$, el 21 de Abril serán $RA = 14^h$, el 21 de Mayo serán $RA = 16^h$, el 21 de Junio será $RA = 18^h$ y así...

De manera que esta tabla puede construirse justificadamente (más allá de memorizarla). Para fines prácticos, memorizarla está bien, pero si quieren ir un poco más allá entender de dónde viene es bastante importante.

Mirando la Tabla 2 vemos que la Ascensión Recta de $03^h$ -que es la que nos han dado en el enunciado- cae, aproximadamente, entre el 21 de Octubre y el 21 de Noviembre. Por lo que asumimos que está "a la mitad" de estas dos fechas, es decir, el 5 de Noviembre. Por lo que la fecha en donde mejor se verá[2] esta estrella será a principios de Noviembre.

IV) **¿Qué pasa si ahora observamos otro astro con la misma Ascensión Recta, pero con declinación levemente diferente de $DEC = +5°$?**

*Solución:*

Asumiendo que la declinación cambia, pero la ascensión recta se mantiene igual, la nueva estrella tendrá coordenadas $\alpha = 03^h; \delta = +5°$. Asumiendo que seguimos observando esta estrella desde Lima, Perú, si observamos la Figura 3 lo único que haría este cambio de declinación es que el ángulo que dice "20°" en aquella figura, ahora serían 5°. Por lo que la estrella tendría una altura mayor respecto al horizonte.

Esto se reafirma si utilizamos la ecuación (20) encontrada:

$$H = 90° + \Phi - \delta$$

Lo que sería:

$$H = 90° + (-12°) - (+5°) = 90° - 12° - 5° = 73°$$

Por lo que, respondiendo al enunciado, la nueva estrella ahora tendría una altura de 73°; en comparación de los 58° sobre el horizonte de la estrella anterior. Como la ascensión recta de ambas es la misma, ambas se verán en la misma fecha del año.

V) **¿Cuál es entonces "la mejor" declinación que puede tener una estrella para ser observada en las mejores condiciones posibles? Esto es, que pase justo a 90° sobre el horizonte.**

*Solución:*

Basados en la Figuras 3 y 4, una estrella pasa por nuestro cenit (justo encima de nuestra cabeza) cuando la declinación de la estrella y la latitud son iguales. De esta manera, la estrella alcanzará una altura máxima de 90° sobre el horizonte. Al estar en el punto más alto posible, la luz de la estrella pasa por la menor cantidad de atmósfera, lo que ocasiona que la luz se vea menos modificada por la atmósfera terrestre. Este es el caso "ideal" de observación para cualquier objeto.

Esto se reafirma con las ecuaciones -que hemos encontrado- (20) y (22), donde si asumimos $\Phi = \delta$ obtenemos para ambas:

- Para el hemisferio Sur:

$$H = 90° + \Phi - \delta = 90° + \Phi - \Phi = 90°$$

- Para el hemisferio Norte:

$$H = 90° - \Phi + \delta = 90° - \Phi + \Phi = 90°$$

[2] Con "mejor se verá" me refiero a que su altura sobre el horizonte será la máxima posible, es decir, pasará lo más cerca del cenit posible.

Por lo que, sin importar en qué hemisferio nos encontremos, si la latitud de un lugar es la misma con la declinación de una estrella, la estrella pasará exactamente por el cenit de un observador ubicado en dicha latitud; esta es la condición "ideal" para observar una estrella. Ello quiere decir, por ejemplo, que si usted sale a su patio a mirar una estrella y esta puede verse casi sobre su cabeza, la declinación de esa estrella es bastante similar a la latitud en la cual usted se encuentra. Por ejemplo, si en Santiago vemos una estrella que pasa casi por nuestro cenit, podemos decir que esa estrella tiene una declinación de $-33°$, ya que la latitud de Santiago es de $-33°$.

De manera que la declinación ($\delta$) nos dice dos cosas: i) ¿Se puede o no ver el objeto que deseamos? ii) Si se puede ver, ¿qué tan alto sobre el horizonte pasa aquel objeto? Por otro lado, la ascensión recta ($\alpha$) nos dice en qué momento del año es esa estrella visible y transitará por nuestro cielo observable.

VI) **El centro galáctico tiene coordenadas $RA = 17^h : 45^m : 40.04^s$ y $DEC = -29°00'28.1''$. ¿Qué puede decir sobre esto si lo relaciona con la posición de los telescopios gigantes que se encuentran en el Norte de Chile?**

*Solución:*

La mayoría de los telescopios de Chile se encuentran, como todos sabemos, en el Norte de Chile. Estos observatorios están ubicados por la latitud $-26°$ y alrededores. ¿Qué quiere decir esto? Que el centro de la Vía Láctea pasa en el mes de Junio[3] casi en el cenit de aquellos lugares. Es por ello, por ejemplo, que hay un survey encargado de "escanear" el centro de la Vía Láctea llamado VVV (The VISTA Variables in The Via Lactea) el cual está ubicado en el Observatorio Paranal, ubicado en el Norte de Chile en la latitud $-24°36'57''$. Ello quiere decir que la latitud de este telescopio es muy similar a la declinación del centro de la Vía Láctea. Lo que lo hace óptimo para estudiarlo (además de los limpios cielos, claro está). Un dato inútil-curioso extra es que el VVV observa el centro de la Vía Láctea en luz infrarroja. Si observásemos el centro de la Vía Láctea con luz visible no veríamos nada, ya que hay una gran cantidad de polvo que no nos permite observar directamente con luz visible. Pero este polvo se hace "invisible" si observamos con luz infrarroja, lifehacks que usan los astrónomos.


[3] Mire la Tabla 2 si no sabe porqué es Junio.