

## Индивидуальное задание # 2.

ФИО: Овчинников Павел Алексеевич

Номер ИСУ: 368606

Группа: R3141

Практический поток: ЛИН АЛГ Б СУИР БИТ 1.5

### Задание 1

Дана билинейная форма  $B(x, y)$

$$B(x, y) = 2x^1y^1 - x^1y^2 + 2x^1y^3 - 5x^2y^1 - 5x^2y^2 - x^2y^3 + 3x^3y^1 - x^3y^2 - x^3y^3$$

1. Найдите матрицу билинейной формы.
2. Постройте квадратичную форму  $Q(x) = B(x, x)$ , построенную по данной билинейной форме.
3. Постройте полярную билинейную форму  $B_p(x, y)$  к квадратичной форме  $Q(x)$ .
4. Найдите матрицу билинейной формы  $B_p(x, y)$ .
5. Разложите билинейную форму на симметричную и антисимметричную формы.
6. Выпишите функциональное представление симметричной и антисимметричной формы. Убедитесь, что их сумма дает исходную билинейную форму.
7. Пусть дано преобразование базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = -2e_2 + e_3 \\ e'_2 = -e_1 - e_2 \\ e'_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}$$

Найдите матрицу билинейной формы и функциональное представление в новом базисе.

### Задание 2

Даны тензоры  $A$  и  $B$  с компонентами

$$\alpha_k^i = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_l^j = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Найдите произведения тензоров  $C = A \otimes B$  и  $D = B \otimes A$ .

2. Для тензора  $C$  найдите всевозможные свертки по парам индексов.
3. Вычислите также всевозможные полные свертки тензора  $C$ .
4. Объясните количество различных полных сверток на языке ПЛФ.

### Задание 3

Даны тензоры  $A$  и  $B$  с компонентами

$$\alpha^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\beta_k = [3 \quad 1 \quad -2]$$

Пусть также задано преобразование базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = -e_2 - e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - e_2 - 2e_3 \\ e'_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$$

1. Найдите компоненты тензоров  $A$  и  $B$  в новом базисе.
2. Вычислите произведение тензоров  $C = A \otimes B$ .
3. Найдите компоненты тензора  $C$  в новом базисе при помощи преобразования компонент тензора.
4. Найдите компоненты тензора  $C$  в новом базисе, умножая преобразованные тензоры  $A$  и  $B$ . Убедитесь, что компоненты тензора  $C$ , полученные двумя способами совпадают.
5. Запишите законы преобразования тензоров  $A$  и  $B$  в матричном виде, опираясь на ранее известные факты о преобразованиях соответствующих алгебраических объектов.

### Задание 4

Дан тензор  $T$  с компонентами

$$T_{ijk} = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right]$$

1. Найдите результат симметрирования тензора.
2. Найдите результат альтернирования тензора.
3. Разложите симметризованный и антисимметризованный тензор в тензорное произведение.

## Задание 5

Даны тензор  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  с компонентами

$$A_i = [-3 \quad 3 \quad -3]$$

$$B_j = [-2 \quad 1 \quad 1]$$

$$C_k = [2 \quad -3 \quad 3]$$

$$D_l = [-2 \quad 0 \quad -1]$$

1. Найдите все попарные внешние произведения этих тензоров.
2. Найдите все тройные внешние произведения этих тензоров.
3. Найдите  $A \wedge B \wedge C \wedge D$ .