Индивидуальное задание # 3.

ФИО: Овчинников Павел Алексеевич
Номер ИСУ: 368606
Группа: R3141
Практический поток: ЛИН АЛГ Б СУИР БИТ 1.5

Задание 1

В пространстве матриц $M_{2\times 3}(\mathbb{C})$ определено скалярное произведение следующего вида:

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^* B),$$

где A^* - эрмитово-сопряженная матрица, т.е. такая матрица, элементы которой получаются транспонированием исходной и заменой каждого элемента комплексно сопряженными.

1. Найти скалярное произведение матриц A и B

$$A = \begin{bmatrix} 4+5i & 2+3i & -3+4i \\ 2-4i & -4-3i & -4-i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5-4i & 5-2i & -4 \\ -4-3i & -4-i & 5+i \end{bmatrix}$$

2. Найти нормы матриц, порожденные этим скалярным произведением.

3. Найти l_1 нормы матриц, определенные как

$$||A||_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \qquad n = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3$$

4. Найти l_∞ нормы матриц, определенные как

$$||A||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad n = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3$$

5. Найти l_{max} нормы матриц, определенные как

$$||A||_{max} = \max |a_{ij}|$$

6. Сравните полученные нормы по значению между собой.

Задание 2

В пространстве полиномов $\mathcal{P}_2$ степени не выше 2 задан базис

$$\left\{-3, -2t, -2t^2\right\}$$

1. Вычислить матрицу Грама этого базиса, если скалярное произведение введено как

$$(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$

2. Представить каждый полином из представленной ниже системы в виде разложения по базису

$$p_1 = 6$$
$$p_2 = 4t - 3$$
$$p_3 = 4t$$
$$p_4 = -6t$$

3. Применяя процедуру ортогонализации Грама-Шмидта ортонормировать систему полиномов.

4. Сделать выводы о линейной (не)зависимости системы векторов, основываясь на результатах ортнормирования.

Задание 3

Дано евклидово пространство E размерности $\dim E = 4$. Скалярное произведение задано как стандартное. В данном пространстве заданы подпространства L_x и L_z, заданные как линейные оболочки векторов

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad x_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

а также задан вектор z

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Найти матрицы Грама системы векторов, образующих линейные оболочки подпространств L_x и L_y

2. Вычислить определители полученных матриц Грама. Сделать вывод о линейной (не)зависимости систем векторов

3. Определить ортогональные проекции $x \in L_x$ и $y \in L_y$ вектора z на подпространства L_x и L_y соответственно

4. Определить косинус угла между ортогональными проекциями x и y вектора z.

5. Вычислить приближенное значение угла между векторами (в градусах или радианах)

Задание 4

В евклидовом пространстве E размерности $\dim E = 3$ с введенным стандартным скалярным произведением определены квадратичные формы

$$q_1 = x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 - 5yz + \frac{7z^2}{2}$$
$$q_2 = \frac{25x^2}{9} - \frac{14xy}{3} + \frac{34xz}{9} + 4y^2 - \frac{25yz}{3} + \frac{89z^2}{18}$$

Найти базис, в котором обе квадратичные формы имеют диагональный вид. Данная задача называется одновременной диагонализацией квадратичных форм и может быть выполнена только при условии, что хотя бы одна квадратичная форма является положительно-определенной. Для решения данной задачи необходимо следовать следующему алгоритму:

1. Записать матрицы данных квадратичных форм.

2. С помощью критерия Сильвестра определить знакоопределенность обеих квадратичных форм. Убедиться в том, что по крайней мере одна из них является положительно-определенной.

3. Используя метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) привести положительно-определенную квадратичную форму к виду $q_+ = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$.

4. При помощи найденной матрицы перехода во второй базис преобразовать также другую форму.

5. Если другая форма также является знакоопределенной (не обязательно положительно-определенной!), то в этом базисе она уже может иметь диагональный вид. Однако данное условие не всегда выполняется, поэтому необходимо выполнить следующие преобразования.

6. Полагая, что в евклидовом пространстве матрица квадратичной формы соответствует матрице некоторого оператора, можно воспользоваться результатами спектрального анализа. Оказывается, что собственные векторы такого оператора будут являться ортогональными. Найдите их.

7. Для того чтобы положительно-определенная форма не изменила коэффициенты, необходимо нормировать данные собственные векторы на 1. Если говорить геометрическим языком, то мы требуем, чтобы при смене базиса не изменялись длины векторов. Нормируйте полученные собственные векторы.

8. Каким свойством обладает матрица перехода, составленная из ортонормированных векторов? Чтобы заметить это свойство, найдите обратную к ней матрицу перехода.

9. Последний шаг этой процедуры заключается в нахождении квадратичных форм в новом, третьем, базисе, составленном из нормированных собственных векторов.