Вычислим характеристический полином и, как следствие, найдём спектр оператора:

$$\chi_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 9-\lambda & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 40 & 23-\lambda & 14 & 7 \\ -143 & -72 & -36 & -23-\lambda & -9 \\ -143 & -72 & -36 & -18 & -14-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5 - \lambda^4 + 38\lambda^3 - 18\lambda^2 - 405\lambda + 675 = -(\lambda-3)^3(\lambda+5)^2 \Rightarrow \sigma_\varphi = \left\{3^{(3)}, -5^{(2)}\right\}$$

Найдём собственные вектора оператора к соответствующим собственным значениям:

$$\lambda = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 6 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 40 & 20 & 14 & 7 \\ -143 & -72 & -36 & -26 & -9 \\ -143 & -72 & -36 & -18 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -41 & 20 & 14 & 7 \\ 0 & -71 & 36 & 26 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_2 \\ \xi_2 = \xi_3 \\ \xi_3 = \xi_4 \\ \xi_4 = \xi_5 \\ \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -5$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 14 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 40 & 28 & 14 & 7 \\ -143 & -72 & -36 & -18 & -9 \\ -143 & -72 & -36 & -18 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 31 & 28 & 14 & 7 \\ 0 & 82 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 13 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 31 & 28 & 14 & 7 \\ -4 & 28 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 31 & 28 & 14 & 7 \\ -1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & 14 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R} \\ \xi_5 = -4\xi_3 - 2\xi_4 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Перед нами оператор нескалярного типа, базис которого будет составлен из 3 собственных векторов и 2 присоединённых и будет выглядеть так: $\{v_1, u_1, u_2, v_2, v_3\}$, где u_1 и u_2 — присоединённые вектора. Тогда жорданова форма оператора в этом базиса примет следующий вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$