

Найдём характеристический полином и, как следствие, спектр оператора:

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 4 & 2 & 1 \\ -11 & -2-\lambda & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 4-\lambda & 1 \\ -7 & -4 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 16\lambda^3 + 96\lambda^2 - 256\lambda + 256 = (\lambda - 4)^4 \Rightarrow \sigma_\varphi = \{4^{(4)}\}$$

Найдём к собственному значению оператора собственные вектора:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -11 & -6 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -6 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 = -\xi_3/2 + 3\xi_4/2 \\ \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Собственных векторов недостаточно для базиса. Перед нами оператор нескаллярного типа.

Найдём ещё два присоединённых вектора, чтобы дополнить собственные до базиса.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -11 & -6 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -7 & -4 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & -6 & -14 \\ -4 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 + 2 \\ \xi_2 = -\xi_3/2 + 3\xi_4/2 - 3.5 \\ \xi_3, \xi_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Набор векторов  $\{v_1, u_1, u_2, v_2\}$  линейно зависим, потому не образует базис. Найдём ещё два присоединённых вектора на основе этих присоединённых.

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 7 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ -11 & -6 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & -4 & -2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 2 & -6 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_3 = 3\xi_4 - 2\xi_2 - 1 \\ \xi_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В базисе  $T = \{v_1, v_2, u_3, u_4\}$  построим жорданову форму:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

... и теперь мы можем вычислить значение функции от оператора.

$$e^{0.5\varphi} = T e^{0.5\mathcal{J}} T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^2 & e^{2/2} & e^{2/8} & e^{2/48} \\ 0 & e^2 & e^{2/2} & e^{2/8} \\ 0 & 0 & e^2 & e^{2/2} \\ 0 & 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ничего не получается...} =$$