Найдём характеристический полином и, как следствие, спектр оператора:

$$\begin{vmatrix} 19-\lambda & 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -27 & -14 & -4-\lambda & -3 & -2 \\ -31 & -16 & -8 & -2-\lambda & -1 \\ -47 & -24 & -12 & -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^5 + 15\lambda^4 - 88\lambda^3 + 252\lambda^2 - 352\lambda + 192 = -(\lambda-4)^2(\lambda-3)(\lambda-2)^2 \Rightarrow \sigma_\varphi = \left\{2^{(2)}, 4^{(2)}, 3^{(1)}\right\}$$

Найдём к собственным значениям оператора собственные вектора:

$$\lambda = 2$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & -14 & -6 & -3 & -2 \\ -31 & -16 & -8 & -4 & -1 \\ -47 & -24 & -12 & -6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 17 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = -\xi_4/2 \\ \xi_4 \in \mathbb{R} \\ \xi_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & -14 & -8 & -3 & -2 \\ -31 & -16 & -8 & -6 & -1 \\ -47 & -24 & -12 & -6 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_5 \\ \xi_2 = \xi_5 \\ \xi_3 = \xi_5 \\ \xi_4 = \xi_5 \\ \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & -14 & -7 & -3 & -2 \\ -31 & -16 & -8 & -5 & -1 \\ -47 & -24 & -12 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = -\frac{\xi_3}{2} \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \\ \xi_4 = 0 \\ \xi_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственных векторов недостаточно для базиса. Перед нами оператор нескалярного типа.
Найдём к v_1 и v_2 ещё два присоединённых вектора, чтобы дополнить собственные до базиса.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 17 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -27 & -14 & -6 & -3 & -2 & -1 \\ -31 & -16 & -8 & -4 & -1 & 2 \\ -47 & -24 & -12 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 17 & 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = -\xi_4/2 - 0.5 \\ \xi_4 \in \mathbb{R} \\ \xi_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 15 & 8 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -27 & -14 & -8 & -3 & -2 & 1 \\ -31 & -16 & -8 & -6 & -1 & 1 \\ -47 & -24 & -12 & -6 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 15 & 8 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_5 + 1 \\ \xi_2 = \xi_5 - 2 \\ \xi_3 = \xi_5 \\ \xi_4 = \xi_5 \\ \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В базисе $T = \{v_1, u_1, v_2, u_2, v_3\}$ жорданова форма оператора будет выглядеть так:

$$\mathcal{J}_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Тогда значение функции от оператора $f(\varphi) = \mathrm{e}^{0.5\varphi}$ вычисляется следующим образом:

$$f(\varphi) = Tf(\mathcal{J}_\varphi)T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0.5\mathrm{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 & 0.5\mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{1.5} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & -8 & -4 & -2 & -1 \\ 14 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{e}^2 & -0.5\mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 & -0.5\mathrm{e}^2 & -\mathrm{e}^{1.5} \\ -\mathrm{e} & -1.5\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & 1.5\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^{1.5} \\ 2\mathrm{e} & 2\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & 1.5\mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 & 1.5\mathrm{e}^2 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & -8 & -4 & -2 & -1 \\ 14 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.5\mathrm{e}^2 & 4\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & 0.5\mathrm{e}^2 \\ 6.5\mathrm{e}^2 - 14\mathrm{e}^{1.5} & 4\mathrm{e}^2 - 7\mathrm{e}^{1.5} & 2(\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^{1.5}) & \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^{1.5} & 0.5\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{1.5} \\ 28\mathrm{e}^{1.5} - 23.5\mathrm{e}^2 - 16\mathrm{e} & 2(7\mathrm{e}^{1.5} - 6\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{e}) & 2(4\mathrm{e}^{1.5} - 3\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}) & 4\mathrm{e}^{1.5} - 3\mathrm{e}^2 - 2.5\mathrm{e} & 2\mathrm{e}^{1.5} - 1.5\mathrm{e}^2 - 1.5\mathrm{e} \\ 24\mathrm{e} - 23.5\mathrm{e}^2 & 12(\mathrm{e} - \mathrm{e}^2) & 6(\mathrm{e} - \mathrm{e}^2) & 4\mathrm{e} - 3\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e} - 1.5\mathrm{e}^2 \\ 16\mathrm{e} - 23.5\mathrm{e}^2 & 4(2\mathrm{e} - 3\mathrm{e}^2) & 2(2\mathrm{e} - 3\mathrm{e}^2) & 2\mathrm{e} - 3\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e} - 1.5\mathrm{e}^2 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 62.81 & 29.56 & 14.78 & 7.39 & 3.69 \\ -14.71 & -1.82 & -3.15 & -1.57 & -0.79 \\ -91.65 & -47.67 & -19.35 & -11.04 & -6.20 \\ -108.40 & -56.05 & -28.02 & -11.29 & -5.65 \\ -130.15 & -66.92 & -33.46 & -16.73 & -5.65 \end{pmatrix}$$