Индивидуальное задание #3

ФИО: Овчинников Павел Алексеевич
Номер ИСУ: 368606

Группа: R3141
Поток: ЛИН АЛГ СУИР БИТ Б 1.5

Задание 1

Шаг 1. Скалярное произведение
Найдём A^* и B^* (пригодится на след.шаге):

$$A^* = \begin{pmatrix} 4-5i & 2+4i \\ 2-3i & -4+3i \\ -3-4i & -4+i \end{pmatrix} \qquad B^* = \begin{pmatrix} 5+4i & -4+3i \\ 5+2i & -4+i \\ -4 & 5-i \end{pmatrix}$$

Теперь вычислим A^*B:

$$A^*B = \begin{pmatrix} 4-5i & 2+4i \\ 2-3i & -4+3i \\ -3-4i & -4+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-4i & 5-2i & -4 \\ -4-3i & -4-i & 5+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-63i & 6-51i & -10+42i \\ 23-23i & 23-27i & -31+23i \\ -12 & -6-14i & -9+17i \end{pmatrix}$$

И тогда $\operatorname{tr}(A^*B) = 4-63i+23-27i-9+17i = \boxed{18-73i}$

Шаг 2. Нормы, порождённые скалярным произведением
Норма, порождённая вышеопределённым скалярным произведением, вычисляется как $\|X\| = \sqrt{\operatorname{tr}(X^*X)}$. Вычислим такие нормы для матриц из предыдущего шага:

$$\|A\|^2 = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 4-5i & 2+4i \\ 2-3i & -4+3i \\ -3-4i & -4+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+5i & 2+3i & -3+4i \\ 2-4i & -4-3i & -4-i \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 61 & 27-20i & 4+13i \\ 27+20i & 38 & 25+9i \\ 4-13i & 25-9i & 42 \end{pmatrix}\right) = 61+38+42 = 141$$

$$\|B\|^2 = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 5+4i & -4+3i \\ 5+2i & -4+i \\ -4 & 5-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-4i & 5-2i & -4 \\ -4-3i & -4-i & 5+i \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 66 & 52+2i & -43-5i \\ 52-2i & 46 & -41-7i \\ -43+5i & -41+7i & 42 \end{pmatrix}\right) = 66+46+42 = 134$$

Тогда нормы матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ равны $\boxed{\sqrt{141} \text{ и } \sqrt{134}.}$

Шаг 3. Нормы матриц, определённые как максимумы сумм модулей элементов строк
Найдём $\|X\|_1$ для матриц с первого шага:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \max\{|4+5i| + |2+3i| + |-3+4i|, |2-4i| + |-4-3i| + |-4-i|\} =$$

$$= \max\{\sqrt{41}+\sqrt{13}+5, 2\sqrt{5}+5+\sqrt{17}\} = \sqrt{41}+\sqrt{13}+5$$

$$\|B\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| = \max\{|5-4i| + |5-2i| + |-4|, |-4-3i| + |-4-i| + |5+i|\} =$$

$$= \max\{\sqrt{41}+\sqrt{29}+4, 5+\sqrt{17}+\sqrt{26}\} = \sqrt{41}+\sqrt{29}+4$$

Шаг 4. Нормы матриц, определённые как максимумы сумм модулей элементов столбцов
Найдём $\|X\|_\infty$ для матриц с первого шага:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \max\{|4+5i| + |2-4i|, |2+3i| + |-4-3i|, |-3+4i| + |-4-i|\} =$$

$$= \max\{\sqrt{41}+2\sqrt{5}, \sqrt{13}+5, 5+\sqrt{17}\} = \sqrt{41}+2\sqrt{5}$$

$$\|B\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \max\{|5-4i| + |-4-3i|, |5-2i| + |-4+i|, |-4| + |5+i|\} =$$

$$= \max\{\sqrt{41}+5, \sqrt{29}+\sqrt{17}, 4+\sqrt{26}\} = \sqrt{41}+5$$

Шаг 5. Нормы матриц, определённые как максимумы среди всех элементов
Найдём $\|X\|_{max}$ для матриц с первого шага:

$$\|A\|_{max} = \max|a_{ij}| = \max\{|4+5i|, |2-4i|, |2+3i|, |-4-3i|, |-3+4i|, |-4-i|\} =$$
$$= \max\{\sqrt{41}, \sqrt{20}, \sqrt{13}, 5, 5, \sqrt{17}\} = \sqrt{41}$$
$$\|B\|_{max} = \max|b_{ij}| = \max\{|5-4i|, |-4-3i|, |5-2i|, |-4+i|, |-4|, |5+i|\} =$$
$$= \max\{\sqrt{41}, 5, \sqrt{29}, \sqrt{17}, 4, \sqrt{26}\} = \sqrt{41}$$

Шаг 6. Сравнение полученных норм

$$\|A\|_{max} < \|A\|_{\infty} < \|A\|_1, \text{ т.к. } \sqrt{41} < \sqrt{41} + 2\sqrt{5} < \sqrt{41} + \sqrt{13} + 5$$
$$\|B\|_{max} < \|B\|_{\infty} < \|B\|_1, \text{ т.к. } \sqrt{41} < \sqrt{41} + 5 < \sqrt{41} + \sqrt{29} + 4$$

Задание 2

Шаг 1. Матрица Грама базиса
Матрица Грама любого базисного набора векторов (в котором вектора попарно ортогональны) вычисляется следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \langle e_1, e_3\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \langle e_2, e_3\rangle \\ \langle e_3, e_1\rangle & \langle e_3, e_2\rangle & \langle e_3, e_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 e_1(t)e_1(t)dt & \int_0^1 e_1(t)e_2(t)dt & \int_0^1 e_1(t)e_3(t)dt \\ \int_0^1 e_2(t)e_1(t)dt & \int_0^1 e_2(t)e_2(t)dt & \int_0^1 e_2(t)e_3(t)dt \\ \int_0^1 e_3(t)e_1(t)dt & \int_0^1 e_3(t)e_2(t)dt & \int_0^1 e_3(t)e_3(t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & 4/3 & 1 \\ 2 & 1 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Разложение полиномов по базису
Уточним, что $e = \left\{-3, -2t, -2t^2\right\}$ и представим каждый из полиномов в виде суммы векторов этого базиса:

$$\begin{cases} p_1 = -2e_1 = 6 \\ p_2 = -2e_2 + e_1 = 4t - 3 \\ p_3 = -2e_2 = 4t \\ p_4 = 3e_2 = -6t \end{cases}$$

Шаг 3. Ортогонализация Грама-Шмидта
Ортогонализируем полиномы с помощью метода ортогонализации Грама-Шмидта, в котором формально из каждого вектора последовательно вычитаются проекции предыдущего (скалярное произведение при этом задано как $\langle a, b\rangle = a^T G b$, где G — матрица Грама, найденная на шаге 1):

$$q_1 = p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2 - \frac{\langle p_3, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_4 = p_4 - \frac{\langle p_4, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2 - \frac{\langle p_4, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь ортонормируем вектора (норма задана как $\|a\| = \langle a, a\rangle = a^T G a$):

$$\tilde{q}_1 = \frac{q_1}{\|q_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{q}_2 = \frac{q_2}{\|q_2\|} = \frac{3}{2\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для векторов q_3 и q_4 норма будет равна нулю, соответственно ортонормированный вектор невозможно вычислить, т.к. происходит деление на ноль.

Шаг 4. Вывод
Векторы, которые в дальнейшем будут ортогонализироваться, должны образовывать базис, т.е. набор должен быть линейно незаивисим. Когда наблюдаются линейно зависимые вектора, приём ортогонализации обращает часть векторов в нуль-векторы, оставляя только те, которые образуют с первым выбранным вектором q_1 ортогональное подпространство. А проводить ортонормирование с нуль-векторами в принципе невозможно, т.к. их норма равна нулю. Эти факты подтверждаются на предыдущих шагах, из чего следует вывод, что система векторов выше линейно зависимая.

Задание 3

Шаг 1. Матрицы Грама систем векторов x и y
Для начала дополним каждую из линейных оболочек ещё одним вектором, который будет ортогонален трём уже заданным. Для этого решим следующие системы:

$$(1)\begin{cases}\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3-\alpha_4=0\\ \alpha_1+\alpha_3-2\alpha_4=0\\ -2\alpha_1-2\alpha_2=0\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}\beta_1-\beta_3+2\beta_4=0\\ \beta_1-\beta_2-2\beta_3-\beta_4=0\\ \beta_1-\beta_2-2\beta_3+2\beta_4=0\end{cases}$$

$$(1):\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&2&-1&0\\1&0&1&-2&0\\-2&0&-2&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow x_4=\begin{pmatrix}-\alpha_3\\ \alpha_3\\ \alpha_3\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$(2):\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&2&0\\1&-1&-2&-1&0\\1&-1&-2&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right)\Rightarrow y_4=\begin{pmatrix}\beta_3\\ -\beta_3\\ \beta_3\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow y_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Матрицы Грама подпространств вычисляются так же, как и матрицы Грама полиномов — принцип один:

$$G_x=\begin{pmatrix}\langle x_1,x_1\rangle&\langle x_1,x_2\rangle&\langle x_1,x_3\rangle&\langle x_1,x_4\rangle\\ \langle x_2,x_1\rangle&\langle x_2,x_2\rangle&\langle x_2,x_3\rangle&\langle x_2,x_4\rangle\\ \langle x_3,x_1\rangle&\langle x_3,x_2\rangle&\langle x_3,x_3\rangle&\langle x_3,x_4\rangle\\ \langle x_4,x_1\rangle&\langle x_4,x_2\rangle&\langle x_4,x_3\rangle&\langle x_4,x_4\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&5&-6&0\\5&6&-4&0\\-6&-4&8&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$G_y=\begin{pmatrix}\langle y_1,y_1\rangle&\langle y_1,y_2\rangle&\langle y_1,y_3\rangle&\langle y_1,y_4\rangle\\ \langle y_2,y_1\rangle&\langle y_2,y_2\rangle&\langle y_2,y_3\rangle&\langle y_2,y_4\rangle\\ \langle y_3,y_1\rangle&\langle y_3,y_2\rangle&\langle y_3,y_3\rangle&\langle y_3,y_4\rangle\\ \langle y_4,y_1\rangle&\langle y_4,y_2\rangle&\langle y_4,y_3\rangle&\langle y_4,y_4\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&7&0\\1&7&4&0\\7&4&10&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Шаг 2. Определители матриц Грама
Найдём $|G_x|$ и $|G_y|$:

$$\begin{vmatrix}7&5&-6&0\\5&6&-4&0\\-6&-4&8&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=144\qquad \begin{vmatrix}6&1&7&0\\1&7&4&0\\7&4&10&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=81$$

Обращение в ноль грамиана системы векторов — это критерий их линейной зависимости. Здесь же мы наблюдаем, что все определители не равны нулю $\Rightarrow$ системы векторов подпространств L_x и L_y линейно независимы.

Шаг 3. Ортогональные проекции вектора z
Для нахождения проекции вектора z на подпространства L_x и L_y понадобится ортогонализировать вектора внутри линейных оболочек.

$$x\in L_x\quad x=z'_{L_x}$$

$$\overline{x}_1=x_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad \overline{x}_2=x_2-\frac{\overline{x}_1^TG_xx_2}{\overline{x}_1^TG_x\overline{x}_1}\overline{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix}-\frac{10}{30}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\1/3\\-5/3\end{pmatrix}$$

$$\overline{x}_3=x_3-\frac{\overline{x}_2^TG_xx_3}{\overline{x}_2^TG_x\overline{x}_2}\overline{x}_2-\frac{\overline{x}_1^TG_xx_3}{\overline{x}_1^TG_x\overline{x}_1}\overline{x}_1=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\\0\end{pmatrix}+\frac{10}{35}\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\1/3\\-5/3\end{pmatrix}+\frac{8}{30}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-54/35\\-6/35\\-48/35\\-26/35\end{pmatrix}$$

$$\overline{x}_4 = x_4 - \frac{\overline{x}_3^T G_x x_4}{\overline{x}_3^T G_x \overline{x}_3}\overline{x}_3 - \frac{\overline{x}_2^T G_x x_4}{\overline{x}_2^T G_x \overline{x}_2}\overline{x}_2 - \frac{\overline{x}_1^T G_x x_4}{\overline{x}_1^T G_x \overline{x}_1}\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{52}\begin{pmatrix} -54/35 \\ -6/35 \\ -48/35 \\ -26/35 \end{pmatrix} + \frac{3}{35}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} - \frac{15}{30}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -724/455 \\ 688/455 \\ -47/455 \\ 2/7 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\overline{x}_1^T G_x z}{\overline{x}_1^T G_x \overline{x}_1}\overline{x}_1 + \frac{\overline{x}_2^T G_x z}{\overline{x}_2^T G_x \overline{x}_2}\overline{x}_2 + \frac{\overline{x}_3^T G_x z}{\overline{x}_3^T G_x \overline{x}_3}\overline{x}_3 + \frac{\overline{x}_4^T G_x z}{\overline{x}_4^T G_x \overline{x}_4}\overline{x}_4 =$$

$$= \frac{-15}{30}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{13}{35}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} - \frac{15}{182}\begin{pmatrix} -54/35 \\ -6/35 \\ -48/35 \\ -26/35 \end{pmatrix} + \frac{167}{530}\begin{pmatrix} -724/455 \\ 688/455 \\ -47/455 \\ 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3173213/5064150 \\ 5643431/5064150 \\ -4029589/5064150 \\ 2509/77910 \end{pmatrix}$$

$$y \in L_x \quad y = z'_{L_y}$$

$$\overline{y}_1 = y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overline{y}_2 = y_2 - \frac{\overline{y}_1^T G_y y_2}{\overline{y}_1^T G_y \overline{y}_1}\overline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -1 \\ -13/7 \\ -9/7 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y}_3 = y_3 - \frac{\overline{y}_2^T G_y y_3}{\overline{y}_2^T G_y \overline{y}_2}\overline{y}_2 - \frac{\overline{y}_1^T G_y y_3}{\overline{y}_1^T G_y \overline{y}_1}\overline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{211}{292}\begin{pmatrix} 6/7 \\ -1 \\ -13/7 \\ -9/7 \end{pmatrix} - \frac{20}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -153/146 \\ -81/292 \\ 225/292 \\ 21/292 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y}_4 = y_4 - \frac{\overline{y}_3^T G_y y_4}{\overline{y}_3^T G_y \overline{y}_3}\overline{y}_3 - \frac{\overline{y}_2^T G_y y_4}{\overline{y}_2^T G_y \overline{y}_2}\overline{y}_2 - \frac{\overline{y}_1^T G_y y_4}{\overline{y}_1^T G_y \overline{y}_1}\overline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{585}{189}\begin{pmatrix} -153/146 \\ -81/292 \\ 225/292 \\ 21/292 \end{pmatrix} + \frac{83}{2044}\begin{pmatrix} 6/7 \\ -1 \\ -13/7 \\ -9/7 \end{pmatrix} + \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15291/7154 \\ -1941/1022 \\ 11583/3577 \\ 2241/7154 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{\overline{y}_1^T G_y z}{\overline{y}_1^T G_y \overline{y}_1}\overline{y}_1 + \frac{\overline{y}_2^T G_y z}{\overline{y}_2^T G_y \overline{y}_2}\overline{y}_2 + \frac{\overline{y}_3^T G_y z}{\overline{y}_3^T G_y \overline{y}_3}\overline{y}_3 + \frac{\overline{y}_4^T G_y z}{\overline{y}_4^T G_y \overline{y}_4}\overline{y}_4 =$$

$$= \frac{-12}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{163}{2044}\begin{pmatrix} 6/7 \\ -1 \\ -13/7 \\ -9/7 \end{pmatrix} - \frac{1}{6132}\begin{pmatrix} -153/146 \\ -81/292 \\ 225/292 \\ 21/292 \end{pmatrix} - \frac{41908622535}{358258012}\begin{pmatrix} -15291/7154 \\ -1941/1022 \\ 11583/3577 \\ 2241/7154 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 159613289723115/640744454462 \\ 162747701863423/732279376528 \\ -1936558118433299/5125955635696 \\ -196096294335241/5125955635696 \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Косинус угла между ортогональными проекциями

Найдём косинус угла между ортогональными проекциями x и y, которые проецируют $\vec{z}$ на L_x и L_y. Скалярное произведение задано стандартно, что упрощает вычисления:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{191487644933664351469/489785060990752800}{\sqrt{14545444605319}/2532075 \cdot \sqrt{6717054755750431183032504527403}/5125955635696} =$$

$$= \frac{10148845181484210627857}{2\sqrt{97702547860662442444748298065139409955056557}}$$

Шаг 5. Приближённое значение угла между проекциями

$$\varphi = \arccos\frac{10148845181484210627857}{2\sqrt{97702547860662442444748298065139409955056557}} \approx \arccos 0.51337 \approx 1.03168 \text{ в радианах или } 59.11118^\circ$$