Индивидуальное задание #1

ФИО: Овчинников Павел Алексеевич
Номер ИСУ: 368606
Группа: R3141
Поток: ЛИН АЛГ СУИР БИТ Б 1.5

Задание 1

Запишем канонический базис как $\left(1,t,t^2,t^3\right)$ и будем так же подставлять его в выражение линейной формы $\phi(p)$ вместо p, чтобы найти коэффициенты этой формы в этом базисе, т.е. в сущности искать $\phi\left(\left(1,t,t^2,t^3\right)\right)$.

$$\phi\left(\left(1,t,t^2,t^3\right)\right)=\left(1,t,t^2,t^3\right)(0)-3\frac{d\left(1,t,t^2,t^3\right)}{dt}\bigg|_{t=0}=(1,0,0,0)-3\left(0,1,2t,3t^2\right)|_{t=0}=(1,0,0,0)-3(0,1,0,0)=(1,-3,0,0)$$

Ответ: $(1,-3,0,0)$

Задание 2

Шаг 1. Матрица перехода в базис
Для её построения необходимо выразить каждое из значений базиса $b=\left(\frac{3}{2},4-2t,(t-2)^2,-2(t-2)^3\right)$ относительно канонического и затем построить матрицу на основе коэффициентов перед каждым из мономов.

$$\left.\begin{aligned}\frac{3}{2}&=\frac{3}{2}\cdot 1+0t+0t^2+0t^3\\ 4-2t&=4\cdot 1-2t+0t^2+0t^3\\ t^2-4t+4&=4\cdot 1-4t+1t^2+0t^3\\ -2t^3+12t^2-24t+16&=16\cdot 1-24t+12t^2-2t^3\end{aligned}\right|\Rightarrow T=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&4&4&16\\0&-2&-4&-24\\0&0&1&12\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

Шаг 2. Коэффициенты линейной формы в новом базисе
Поступим так же, как и в первом задании и подставим в форму новый базис.

$$\phi\left(\left(\frac{3}{2},4-2t,(t-2)^2,-2(t-2)^3\right)\right)=\left(\frac{3}{2},4-2t,(t-2)^2,-2(t-2)^3\right)(0)-3\frac{d\left(\frac{3}{2},4-2t,(t-2)^2,-2(t-2)^3\right)}{dt}\bigg|_{t=0}=$$

$$=\left(\frac{3}{2},4,4,16\right)-\left(0,-6,6(t-2),-18(t-2)^2\right)|_{t=0}=\left(\frac{3}{2},4,4,16\right)+(0,6,12,72)=\left(\frac{3}{2},10,16,88\right)$$

Шаг 3. Координаты произвольного полинома в обоих базисах
Зададим полином $p=2t^3+4t^2+6t+8$. Найдём его координаты в обоих базисах — для этого выразим полином в виде линейной комбинации базисных полиномов.

Нетрудно догадаться, что для базиса $e=\left(1,t,t^2,t^3\right)$ координаты полинома будут $p_{\{e\}}=(8,6,4,2)^T$.

Для базиса $b=\left(\frac{3}{2},4-2t,(t-2)^2,-2(t-2)^3\right)$ необходимо воспользоваться матрицей перехода, которая выводит координаты полинома из базиса $\left(1,t,t^2,t^3\right)$ в указанный выше. Мы её нашли на шаге 1, и тогда $p_{\{b\}}=T^{-1}\cdot p_{\{e\}}$.

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&4&4&16\\0&-2&-4&-24\\0&0&1&12\\0&0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}8\\6\\4\\2\end{pmatrix}=\left[\left(\begin{array}{cccc|cccc}\frac{3}{2}&4&4&0&1&0&0&8\\0&-2&-4&0&0&1&0&-12\\0&0&1&0&0&0&1&6\\0&0&0&-2&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}\frac{3}{2}&2&0&0&1&1&0&-4\\0&-2&0&0&0&1&4&12\\0&0&1&0&0&0&1&6\\0&0&0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\sim\right.$$

$$\left.\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}3/2&0&0&0&1&2&4&8\\0&1&0&0&0&-1/2&-2&-6\\0&0&1&0&0&0&1&6\\0&0&0&1&0&0&0&-1/2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&2/3&4/3&8/3&16/3\\0&1&0&0&0&-1/2&-2&-6\\0&0&1&0&0&0&1&6\\0&0&0&1&0&0&0&-1/2\end{array}\right)=\begin{pmatrix}2/3&4/3&8/3&16/3\\0&-1/2&-2&-6\\0&0&1&6\\0&0&0&-1/2\end{pmatrix}\right]\times$$

$$\times\begin{pmatrix}8\\6\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{104}{3}\\-23\\16\\-1\end{pmatrix}$$

Шаг 4. Результат применения линейной формы в новом базисе через коэффициенты
Полученные на шаге 2 коэффициенты сейчас используем для того, чтобы посчитать результат применения формы $\phi(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} p^i \phi_i$, где ϕ — коэффициенты линейной формы.

$$\phi(p) = \frac{3}{2} \cdot \frac{104}{3} - 10 \cdot 23 + 16^2 - 88 = 52 - 230 + 256 - 88 = -178 + 168 = -10$$

Шаг 5. Результат применения линейной формы не зависит от базиса
Попробуем применить линейную форму с коэффициентами и координатами полинома в каноническом базисе:

$$\phi(p) = 1 \cdot 8 - 3 \cdot 6 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 8 - 18 = -10$$

Как видим, результат применения линейной формы совпадает с результатам н шаге 4 $\Rightarrow$ результат применения линейной формы не зависит от базиса.

Задание 3

Шаг 1. Базис ядра и базис образа оператора
Для начала приведём матрицу оператора к треугольному виду, и базисом ядра станет фундаментальная система решений определённой системы уравнений, полученной из матрицы.

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -3 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 10 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 \\ \xi_2 = \xi_4 \\ \xi_3 = -\xi_4 \\ \xi_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ ядро состоит из } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{ базис ядра пуст и, как следствие, базис образа — вся матрица.}$$

Шаг 2. Характеристический полином и спектр
Найдём характеристический полином и затем приравняем его к нулю, чтобы выделить спектр оператора.

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -3-\lambda & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -9-\lambda & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) \begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 & 4 \\ 2 & -9-\lambda & -2 \\ -2 & 10 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 5 & 10 & 4 \\ -5 & -9-\lambda & -2 \\ 5 & 10 & 3-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+10 \begin{vmatrix} 5 & -3-\lambda & 4 \\ -5 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & -3-\lambda & 10 \\ -5 & 2 & -9-\lambda \\ 5 & -2 & 10 \end{vmatrix} = (6-\lambda)((-3-\lambda)(-9-\lambda)(3-\lambda)+120+8(-9-\lambda)+20(-3-\lambda)-20(3-\lambda))+$$

$$+4(5(-9-\lambda)(3-\lambda) - 300 - 20(-9-\lambda) + 100 + 50(3-\lambda)) + 10(10(3-\lambda) - 10(-3-\lambda) + 5(3-\lambda)(-3-\lambda) - 20) -$$

$$-4(100 + 5(-3-\lambda)(-9-\lambda) + 10(-9-\lambda) + 50(-3-\lambda)) = (6-\lambda)(-\lambda^3 - 9\lambda^2 + \lambda + 9) + 4(5\lambda^2 - 5) + 10(5\lambda^2 - 5) - 4(5\lambda^2 - 5) =$$

$$= (\lambda - 6)(\lambda + 9)(\lambda^2 - 1) + 50(\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda + 4)$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \sigma_A = \left\{ 1^{(2)}, -4^{(1)}, -1^{(1)} \right\}$$

Шаг 3. Собственные векторы
Найдём собственные векторы оператора, подставив найденные собственные значения вместо λ и решив однородную систему для полученной матрицы.

$$\lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -4 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -10 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -4$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & 1 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -5 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -2 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -8 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Геометрические кратности равны алгебраическим в спектре $\Rightarrow$ оператор скалярного типа. Проверим для последнего собственного вектора выполнения его основного свойства из определения $Av_4 = -v_4$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -3 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Матрица оператора в базисе собственных векторов

Матрица оператора в базисе собственных векторов выглядит так же, как и жорданова форма для оператора скалярного типа, то есть это диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные значения оператора. Пусть базис собственных векторов выглядит как $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Тогда матрица A оператора в этом базисе является D, вычисляется как $A = VDV^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = V^{-1}AV$ и будет выглядеть вот так:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -3 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left[\left(\begin{array}{cccc|cccc} -2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \right.$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left. \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -3 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Шаг 5. Спектральные проекторы

Для расчёта проекторов нам понадобится сопряжённый базис к базису $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, который был вычислен на предыдущем шаге как V^{-1}. Обозначим этот базис $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, где u_n — n-ая строка этой матрицы. Тогда перебор произведений $u_n(e_1|e_2|e_3|e_4)v_n$ записывает по столбцам в проектор P_{v_n} (здесь e — канонический базис).

$$(u_1e_1v_1, u_1e_2v_1, u_1e_3v_1, u_1e_4v_1) =$$

$$= \left((-1,1,-1,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, (-1,1,-1,-1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, (-1,1,-1,-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, (-1,1,-1,-1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(-1\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, -1\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, -1\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right) \Rightarrow P_{v_1} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$(u_2e_1v_2, u_2e_2v_2, u_2e_3v_2, u_2e_4v_2) =$$

$$= \left((1,-1,2,2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, (1,-1,2,2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, (1,-1,2,2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, (1,-1,2,2)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, -1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix} \right) \Rightarrow P_{v_2} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$(u_3e_1v_3, u_3e_2v_3, u_3e_3v_3, u_3e_4v_3) =$$

$$= \left((-1,0,-2,0)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, (-1,0,-2,0)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, (-1,0,-2,0)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, (-1,0,-2,0)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(-1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, 0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, -2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, 0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right) \Rightarrow P_{v_3} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 0\\-1 & 0 & -2 & 0\\1 & 0 & 2 & 0\\-1 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$(u_4e_1v_4, u_4e_2v_4, u_4e_3v_4, u_4e_4v_4) =$$

$$= \left((0,1,0,-1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, (0,1,0,-1)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, (0,1,0,-1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, (0,1,0,-1)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix} \right) =$$

$$= \left(0\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, 0\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, -1\begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\-1\end{pmatrix} \right) \Rightarrow P_{v_4} = \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & -2\\0 & 2 & 0 & -2\\0 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Проверяем выполнение спектральной теоремы. Согласно теореме, при сумма всех произведений проекторов на соответствующие им собственные значения должна равняться исходной матрице оператора, т.е. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_n P_{v_n} = A$.

$$\lambda_1(P_{v_1} + P_{v_2}) + \lambda_2 P_{v_3} + \lambda_3 P_{v_4} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 0\\-1 & 0 & -2 & 0\\1 & 0 & 2 & 0\\-1 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & -2\\0 & 2 & 0 & -2\\0 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}2 & -2 & 2 & 2\\1 & -1 & 2 & 2\\-1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 2 & 2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & 0\\-1 & 0 & -2 & 0\\1 & 0 & 2 & 0\\-1 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & -2\\0 & 2 & 0 & -2\\0 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -4 & 2 & 4\\1 & -3 & 2 & 4\\-1 & 2 & -1 & -2\\1 & -2 & 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4 & 0 & -8 & 0\\-4 & 0 & -8 & 0\\4 & 0 & 8 & 0\\-4 & 0 & -8 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -3 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 3 \end{pmatrix} = A$$

ч.т.д.

Задание 4

Шаг 1. Базис ядра и базис образа оператора
Аналогично предыдущему заданию приведём матрицу оператора к треугольному виду, и базисом ядра так же станет фундаментальная система решений определённой системы уравнений, полученной из матрицы.

$$\begin{pmatrix} -13 & 11 & 4 & -17 & 7 \\ 40 & -35 & -16 & 60 & -20 \\ 12 & -16 & -7 & 26 & -8 \\ 20 & -18 & -8 & 31 & -10 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & -7 & 26 & -8 \\ 20 & -18 & -8 & 31 & -10 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 12 & -16 & -7 & 26 & -8 \\ 8 & -2 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & -18 & 17 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -25 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 17 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -25 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -25 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -450 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -450 & -54 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -79 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 158 & 79 \\ 0 & 0 & 0 & -158 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 79 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_3 - \xi_4 \\ \xi_2 = -\xi_5 \\ 18\xi_3 = \xi_4 \\ 2\xi_4 = -\xi_5 \\ 79\xi_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нуль-пространство оператора вновь состоит только из нулевого вектора $\Rightarrow$ базис ядра пуст,
а базис образа состоит из векторов, образованных всей матрицей оператора.

Шаг 2. Характеристический полином и спектр
Вновь найдём $\chi(\lambda)$ и затем приравняем его к нулю, чтобы выделить спектр оператора.

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -13-\lambda & 11 & 4 & -17 & 7 \\ 40 & -35-\lambda & -16 & 60 & -20 \\ 12 & -16 & -7-\lambda & 26 & -8 \\ 20 & -18 & -8 & 31-\lambda & -10 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} = (-13-\lambda) \begin{vmatrix} -35-\lambda & -16 & 60 & -20 \\ -16 & -7-\lambda & 26 & -8 \\ -18 & -8 & 31-\lambda & -10 \\ 36 & 16 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} -$$

$$-11 \begin{vmatrix} 40 & -16 & 60 & -20 \\ 12 & -7-\lambda & 26 & -8 \\ 20 & -8 & 31-\lambda & -10 \\ -40 & 16 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 40 & -35-\lambda & 60 & -20 \\ 12 & -16 & 26 & -8 \\ 20 & -18 & 31-\lambda & -10 \\ -40 & 36 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 17 \begin{vmatrix} 40 & -35-\lambda & -16 & -20 \\ 12 & -16 & -7-\lambda & -8 \\ 20 & -18 & -8 & -10 \\ -40 & 36 & 16 & 21-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+7 \begin{vmatrix} 40 & -35-\lambda & -16 & 60 \\ 12 & -16 & -7-\lambda & 26 \\ 20 & -18 & -8 & 31-\lambda \\ -40 & 36 & 16 & -60 \end{vmatrix} = (-13-\lambda) \left((-35-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & 26 & -8 \\ -8 & 31-\lambda & -10 \\ 16 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} -16 & 26 & -8 \\ -18 & 31-\lambda & -10 \\ 36 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. +60 \begin{vmatrix} -16 & -7-\lambda & -8 \\ -18 & -8 & -10 \\ 36 & 16 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} -16 & -7-\lambda & 26 \\ -18 & -8 & 31-\lambda \\ 36 & 16 & -60 \end{vmatrix} \right) - 11 \left(40 \begin{vmatrix} -7-\lambda & 26 & -8 \\ -8 & 31-\lambda & -10 \\ 16 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. +16 \begin{vmatrix} 12 & 26 & -8 \\ 20 & 31-\lambda & -10 \\ -40 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 60 \begin{vmatrix} 12 & -7-\lambda & -8 \\ 20 & -8 & -10 \\ -40 & 16 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 12 & -7-\lambda & 26 \\ 20 & -8 & 31-\lambda \\ -40 & 16 & -60 \end{vmatrix} \right) + 4 \left(40 \begin{vmatrix} -16 & 26 & -8 \\ -18 & 31-\lambda & -10 \\ 36 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. +(35+\lambda) \begin{vmatrix} 12 & 26 & -8 \\ 20 & 31-\lambda & -10 \\ -40 & -60 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 60 \begin{vmatrix} 12 & -16 & -8 \\ 20 & -18 & -10 \\ -40 & 36 & 21-\lambda \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 12 & -16 & 26 \\ 20 & -18 & 31-\lambda \\ -40 & 36 & -60 \end{vmatrix} \right) + 17 \left(40 \begin{vmatrix} -16 & -7-\lambda & -8 \\ -18 & -8 & -10 \\ 36 & 16 & 21-\lambda \end{vmatrix} + \right.$$

$$+(35+\lambda)\begin{vmatrix}12 & -7-\lambda & -8\\ 20 & -8 & -10\\ -40 & 16 & 21-\lambda\end{vmatrix}-16\begin{vmatrix}12 & -16 & -8\\ 20 & -18 & -10\\ -40 & 36 & 21-\lambda\end{vmatrix}+20\begin{vmatrix}12 & -16 & -7-\lambda\\ 20 & -18 & -8\\ -40 & 36 & 16\end{vmatrix}\Bigg)+7\Bigg(40\begin{vmatrix}-16 & -7-\lambda & 26\\ -18 & -8 & 31-\lambda\\ 36 & 16 & -60\end{vmatrix}+$$

$$+(35+\lambda)\begin{vmatrix}12 & -7-\lambda & 26\\ 20 & -8 & 31-\lambda\\ -40 & 16 & -60\end{vmatrix}-16\begin{vmatrix}12 & -16 & 26\\ 20 & -18 & 31-\lambda\\ -40 & 36 & -60\end{vmatrix}-60\begin{vmatrix}12 & -16 & -7-\lambda\\ 20 & -18 & -8\\ -40 & 36 & 16\end{vmatrix}\Bigg)=$$

$$=\Big(-13-\lambda\Big)\Big(\big(-35-\lambda\big)\big((-7-\lambda)(31-\lambda)(21-\lambda)-4160-3840+128(31-\lambda)-600(-7-\lambda)+208(21-\lambda)\big)+16\big(-16(31-\lambda)(21-\lambda)-$$
$$-9360-8640+288(31-\lambda)+9600+468(21-\lambda)\big)+60\big(128(21-\lambda)-360(-7-\lambda)-2560+18(21-\lambda)(-7-\lambda)\big)+20\big(-7680+$$
$$+36(-7-\lambda)(31-\lambda)+256(31-\lambda)-1080(-7-\lambda)\big)\Big)-11\Big(40\big((-7-\lambda)(31-\lambda)(21-\lambda)-4160-3840+128(31-\lambda)-600(-7-\lambda)+$$
$$+208(21-\lambda)\big)+16\big(12(31-\lambda)(21-\lambda)+10400+9600-320(31-\lambda)-7200-520(21-\lambda)\big)+60\big(-96(21-\lambda)+400(-7-\lambda)+1920-$$
$$-20(-7-\lambda)(21-\lambda)\big)+20\big(5760-40(-7-\lambda)(31-\lambda)-192(31-\lambda)+1200(-7-\lambda)\big)\Big)+4\Big(40\big(-16(31-\lambda)(21-\lambda)-9360-8640+$$
$$+288(31-\lambda)+9600+468(21-\lambda)\big)+\big(35+\lambda\big)\big(12(31-\lambda)(21-\lambda)+10400+9600-320(31-\lambda)-7200-520(21-\lambda)\big)+60\big(-216(21-\lambda)-$$
$$-6400+4320+320(21-\lambda)\big)+20\big(12960+640(31-\lambda)-19200-432(31-\lambda)\big)\Big)+17\Big(40\big(128(21-\lambda)-360(-7-\lambda)-2560+$$
$$+18(21-\lambda)(-7-\lambda)\big)+\big(35+\lambda\big)\big(-96(21-\lambda)+400(-7-\lambda)+1920-20(-7-\lambda)(21-\lambda)\big)-16\big(-216(21-\lambda)-6400+4320+320(21-\lambda)\big)+$$
$$+20\big(-3456-5120+720(-7-\lambda)-720(-7-\lambda)+3456+5120\big)\Big)+7\Big(40\big(-7680+36(-7-\lambda)(31-\lambda)+256(31-\lambda)-1080(-7-\lambda)\big)+$$
$$+\big(35+\lambda\big)\big(5760-40(-7-\lambda)(31-\lambda)-192(31-\lambda)+1200(-7-\lambda)\big)-16\big(12960+640(31-\lambda)-19200-432(31-\lambda)\big)-60\big(-3456-5120+$$
$$+720(-7-\lambda)-720(-7-\lambda)+3456+5120\big)\Big)=$$

$$=\Big(-13-\lambda\Big)\Big(\big(35+\lambda\big)\big(\lambda^3-45\lambda^2+23\lambda+21\big)-16\big(16\lambda^2-76\lambda+60\big)+60\big(18\lambda^2-20\lambda+2\big)+20\big(36\lambda^2-40\lambda+4\big)\Big)-$$
$$-11\Big(40\big(-\lambda^3+45\lambda^2-23\lambda-21\big)+16\big(12\lambda^2+216\lambda-228\big)-60\big(20\lambda^2+24\lambda-44\big)-20\big(40\lambda^2+48\lambda-88\big)\Big)+$$
$$+4\Big(40\big(-16\lambda^2+76\lambda-60\big)+\big(35+\lambda\big)\big(12\lambda^2+216\lambda-228\big)+60\big(104-104\lambda\big)+20\big(208-208\lambda\big)\Big)+$$
$$+17\Big(40\big(18\lambda^2-20\lambda+2\big)-\big(35+\lambda\big)\big(20\lambda^2+24\lambda-44\big)-16\big(104-104\lambda\big)\Big)+$$
$$+7\Big(40\big(36\lambda^2-40\lambda+4\big)-\big(35+\lambda\big)\big(40\lambda^2+48\lambda-88\big)-16\big(208-208\lambda\big)\Big)=$$

$$=\Big(-13-\lambda\Big)\Big(\big(35+\lambda\big)\big(\lambda-1\big)\big(\lambda^2-44\lambda-21\big)-64\big(\lambda-1\big)\big(4\lambda-15\big)+120\big(\lambda-1\big)\big(9\lambda-1\big)+80\big(\lambda-1\big)\big(9\lambda-1\big)\Big)-$$
$$-11\Big(-40\big(\lambda-1\big)\big(\lambda^2-44\lambda+21\big)+192\big(\lambda-1\big)\big(\lambda+19\big)-240\big(\lambda-1\big)\big(5\lambda+11\big)-160\big(\lambda-1\big)\big(5\lambda+11\big)\Big)+$$
$$+4\Big(-160\big(\lambda-1\big)\big(4\lambda-15\big)+12\big(35+\lambda\big)\big(\lambda-1\big)\big(\lambda+19\big)-6240\big(\lambda-1\big)-4160\big(\lambda-1\big)\Big)+$$
$$+17\Big(80\big(\lambda-1\big)\big(9\lambda-1\big)-4\big(35+\lambda\big)\big(\lambda-1\big)\big(5\lambda+11\big)+1664\big(\lambda-1\big)\Big)+$$
$$+14\Big(80\big(\lambda-1\big)\big(9\lambda-1\big)-4\big(35+\lambda\big)\big(\lambda-1\big)\big(5\lambda+11\big)+1664\big(\lambda-1\big)\Big)=$$

$$=\Big(-13-\lambda\Big)\Big(\lambda-1\Big)\Big(\big(35+\lambda\big)\big(\lambda^2-44\lambda-21\big)-64\big(4\lambda-15\big)+200\big(9\lambda-1\big)\Big)-$$
$$-11\Big(\lambda-1\Big)\Big(-40\big(\lambda^2-44\lambda-21\big)+192\big(\lambda+19\big)-400\big(5\lambda+11\big)\Big)+$$
$$+4\Big(\lambda-1\Big)\Big(-160\big(4\lambda-15\big)+12\big(35+\lambda\big)\big(\lambda+19\big)-6240-4160\Big)+31\Big(\lambda-1\Big)\Big(80\big(9\lambda-1\big)-4\big(35+\lambda\big)\big(5\lambda+11\big)+1664\Big)=$$

$$=\Big(-13-\lambda\Big)\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(\lambda^2-8\lambda-25\Big)+88\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(5\lambda+11\Big)+16\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(3\lambda+5\Big)-124\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(5\lambda+11\Big)=$$

$$=\Big(\lambda-1\Big)^2\Big(\big(-13-\lambda\big)\big(\lambda^2-8\lambda-25\big)-36\big(5\lambda+11\big)+16\big(3\lambda+5\big)\Big)=-\Big(\lambda-1\Big)^3\Big(\lambda+3\Big)^2$$

$$(\lambda-1)^3(\lambda+3)^2=0\Rightarrow\sigma_A=\Big\{1^{(3)},-3^{(2)}\Big\}$$

Шаг 3. Собственные векторы

Найдём собственные векторы оператора, подставив найденные собственные значения вместо λ и решив однородную систему для полученной матрицы.

$$\lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 \\ 40 & -36 & -16 & 60 & -20 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -4 & 13 & -4 \\ 10 & -9 & -4 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -4 & 13 & -4 \\ 4 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -4 & 11 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\frac{\xi_4}{2} \\ \xi_2 = -\xi_5 \\ \xi_3 = \frac{5\xi_4}{2} + \frac{3\xi_5}{2} \\ \xi_4, \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$m_a = 3, \;\; m_g = 2 \Rightarrow m_a \neq m_g$$

$$\lambda = -3$$

$$\begin{pmatrix} -10 & 11 & 4 & -17 & 7 \\ 40 & -32 & -16 & 60 & -20 \\ 12 & -16 & -4 & 26 & -8 \\ 20 & -18 & -8 & 34 & -10 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10 & 11 & 4 & -17 & 7 \\ 10 & -8 & -4 & 15 & -5 \\ 6 & -8 & -2 & 13 & -4 \\ 10 & -9 & -4 & 17 & -5 \\ -10 & 9 & 4 & -15 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & -8 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & 2 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{5\xi_2}{2} - \frac{9\xi_4}{2} + \frac{\xi_5}{2} \\ \xi_2 = -\xi_5 \\ \xi_3 = -7\xi_4 - 4\xi_5 \\ \xi_4 = -\frac{\xi_5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{\xi_5}{4} \\ \xi_2 = -\xi_5 \\ \xi_3 = -\frac{\xi_5}{2} \\ \xi_4 = -\frac{\xi_5}{2} \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$m_a = 2, \;\; m_g = 1 \Rightarrow m_a \neq m_g$$

Геометрические кратности не равны алгебраическим в спектре $\Rightarrow$ оператор нескалярного типа $\Rightarrow$ оператору необходимы присоединнённые вектора для базиса, в котором оператор будет иметь жорданову форму.

Шаг 4. Присоединённые векторы

Для создания присоединённых векторов необходимо уточнить процесс их формирования:

Если для операторов скалярного типа $Ax = \lambda x$, то для операторов нескалярного типа это свойство приобретает вид

$Au = \lambda u + x$, тогда

$$Au - \lambda u = x$$

$$(A - \lambda E)u = x$$

Здесь u — матрица присоединённых векторов, а E — единичная матрица.

Решим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений через матрицу:

$$\lambda = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 & -1 \\ 40 & -36 & -16 & 60 & -20 & 0 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & 5 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 & 2 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 20 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & 5 \\ 10 & -9 & -4 & 15 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} !\ 0 = -4 \\ \\ \Rightarrow \text{у системы нет решений.} \\ \\ !\ 0 = 4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 & 0 \\ 40 & -36 & -16 & 60 & -20 & -2 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & 3 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 & 0 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 20 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & 3 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} !\ 0 = -2 \\ \\ \Rightarrow \text{у системы нет решений.} \\ \\ !\ 0 = 2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

Необходимо вычислить линейную комбинацию собственных векторов и найти её коэффициенты, при которой система выше будет иметь решение. И с уже полученной линейной комбинацией мы сможем вычислить присоединённый вектор.

$$v_{\text{л}} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -2\alpha_2 \\ 5\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Подставим полученный вектор в расширенную матрицу, чтобы решить систему и найти α_1 и α_2. Решим систему только для тех строк, которые заведомо линейно зависимы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 & -\alpha_1 \\ 40 & -36 & -16 & 60 & -20 & -2\alpha_2 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & 5\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 & 2\alpha_1 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 20 & 2\alpha_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 40 & -36 & -16 & 60 & -20 & -2\alpha_2 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 & 2\alpha_1 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 20 & 2\alpha_2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4\alpha_1 - 2\alpha_2 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 & 2\alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\alpha_1 + 2\alpha_2 \end{array}\right) \Rightarrow 2\alpha_1 = -\alpha_2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

Вернёмся к $v_{\text{л}}$ и подставим туда найденные коэффициенты: $v_{\text{л}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Теперь мы можем решить систему, расширяя основную матрицу вектором $v_{\text{л}}$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 & -1 \\ 40 & -36 & -16 & 60 & -20 & 4 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & -1 \\ 20 & -18 & -8 & 30 & -10 & 2 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 20 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -14 & 11 & 4 & -17 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & -1 \\ 10 & -9 & -4 & 15 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 12 & -16 & -8 & 26 & -8 & -1 \\ 10 & -9 & -4 & 15 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 20 & -2 & -1 \\ 10 & -9 & -4 & 15 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -8 & 20 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -4 & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2\xi_1 = \xi_2 - \xi_4 + \xi_5 \\ \xi_2 = \frac{3}{2} - \xi_5 \\ \xi_3 = \frac{5\xi_4}{2} + \xi_5 - \frac{7}{4} \\ \xi_4, \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = 0.75 - \frac{\xi_4}{2} \\ \xi_2 = 1.5 - \xi_5 \\ \xi_3 = \frac{5\xi_4}{2} + \xi_5 - 1.75 \\ \xi_4, \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.5 \\ -0.75 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Аналогичные действия проводим и для второго собственного значения.

$$\lambda = -3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -10 & 11 & 4 & -17 & 7 & 1 \\ 40 & -32 & -16 & 60 & -20 & -4 \\ 12 & -16 & -4 & 26 & -8 & -2 \\ 20 & -18 & -8 & 34 & -10 & -2 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 24 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -10 & 11 & 4 & -17 & 7 & 1 \\ 10 & -8 & -4 & 15 & -5 & -1 \\ 6 & -8 & -2 & 13 & -4 & -1 \\ 10 & -9 & -4 & 17 & -5 & -1 \\ -10 & 9 & 4 & -15 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -8 & -2 & 13 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -10 & 9 & 4 & -15 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -8 & -2 & 13 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -10 & 9 & 4 & -15 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -7 & 0 & 11 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -8 & -2 & 13 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -7 & 0 & 11 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & -20 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -7 & 0 & 11 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -20 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2\xi_1 = 7\xi_2 - 11\xi_4 + 2\xi_5 - 1 \\ \xi_2 = -\xi_5 \\ \xi_3 = -10\xi_4 - \frac{11\xi_5}{2} - 1 \\ \xi_4 = -\frac{\xi_5}{2} \\ \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \frac{\xi_5}{4} - \frac{1}{2} \\ \xi_2 = -\xi_5 \\ \xi_3 = -\frac{\xi_5}{2} - 1 \\ \xi_4 = -\frac{\xi_5}{2} \\ \xi_5 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Нам повезло, для второго собственного значения в ходе элементарных преобразований не оказалось ложных утверждений в линейно зависимых строках, потому присоединённый вектор удалось найти без применения линейной комбинации.

Таким образом базис, в котором оператор имеет жорданову форму, будет выглядеть вот так: $\{v_1, v_л, u_1, v_3, u_2\}$. Вместо v_1 так же может стоять v_2.

Шаг 5. Жорданова форма матрицы оператора

Жорданова форма для матриц операторов нескалярного типа составляется так же, как и для матриц операторов скалярного типа, но лишь с тем исключением, что над главной диагональю, состоящей из собственных значений оператора, для присоединённых векторов добавляются единицы $\Rightarrow$ жорданова форма матрицы заданного оператора будет выглядеть так:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 5

Основу жарданова блока составляют клетки, размер которых для операторов скалярного типа фиксированный и равен 1 и для операторов нескалярного типа может быть больше 1.

cos(A) для оператора скалярного типа из задания №3

Вычисление значения функции $\cos(A)$ для оператора скалярного типа выглядит как $\cos(A) = \cos(VDV^{-1}) = V\cos(D)V^{-1}$, где D — диагональная матрица оператора в базисе собственных векторов, вычисленная на шаге 4 задания 3, а V — базис оператора, состоящий из собственных векторов. V^{-1} так же было вычислено на этом шаге, поэтому повторно вычисления проводиться не будут.

$$cos(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cos(1) & 0 & \cos(4) & 2\cos(1) \\ 0 & \cos(1) & \cos(4) & 2\cos(1) \\ \cos(1) & 0 & -\cos(4) & -\cos(1) \\ 0 & \cos(1) & \cos(4) & \cos(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos(1) - \cos(4) & -2\cos(1) + 2\cos(1) & 2\cos(1) - 2\cos(4) & 2\cos(1) - 2\cos(1) \\ \cos(1) - \cos(4) & -\cos(1) + 2\cos(1) & 2\cos(1) - 2\cos(4) & 2\cos(1) - 2\cos(1) \\ -\cos(1) + \cos(4) & \cos(1) - \cos(1) & -\cos(1) + 2\cos(4) & -\cos(1) + \cos(1) \\ \cos(1) - \cos(4) & -\cos(1) + \cos(1) & 2\cos(1) - 2\cos(4) & 2\cos(1) - \cos(1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos(1) - \cos(4) & 0 & 2(\cos(1) - \cos(4)) & 0 \\ \cos(1) - \cos(4) & \cos(1) & 2(\cos(1) - \cos(4)) & 0 \\ \cos(4) - \cos(1) & 0 & 2\cos(4) - \cos(1) & 0 \\ \cos(1) - \cos(4) & 0 & 2(\cos(1) - \cos(4)) & \cos(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \cdot 0.54 + 0.65 & 0 & 2(0.54 + 0.65) & 0 \\ 0.54 + 0.65 & 0.54 & 2(0.54 + 0.65) & 0 \\ -0.65 - 0.54 & 0 & -2 \cdot 0.65 - 0.54 & 0 \\ 0.54 + 0.65 & 0 & 2(0.54 + 0.65) & 0.54 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1.73 & 0 & 2 \cdot 1.19 & 0 \\ 1.19 & 0.54 & 2 \cdot 1.19 & 0 \\ -1.19 & 0 & -1.85 & 0 \\ 1.19 & 0 & 2 \cdot 1.19 & 0.54 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.73 & 0 & 2.39 & 0 \\ 1.19 & 0.54 & 2.39 & 0 \\ -1.19 & 0 & -1.85 & 0 \\ 1.19 & 0 & 2.39 & 0.54 \end{pmatrix}$$

cos(A) для оператора нескалярного типа из задания №4

Вычисление значения функции $\cos(A)$ для оператора нескалярного типа выглядит как $\cos(A) = \cos(V\mathcal{J}V^{-1}) = V\cos(\mathcal{J})V^{-1}$, где $\mathcal{J}$ — жорданова нормальная форма оператора в базисе собственных и присоединённых векторов, вычисленная на шаге 5 задания 4, а V — базис оператора, состоящий из собственных и присоединённых векторов.

$$\cos(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & -0.75 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) & -\frac{\cos(1)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & -\sin(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(-3) & -\sin(-3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & -0.75 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & -0.75 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) & -\frac{\cos(1)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(1) & -\sin(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(3) & \sin(3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0.75 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 & -4 & -2 \\ 5 & -1 & -0.75 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(1) & \sin(1)-\cos(1) & 1.25\cos(1)+\sin(1) & \cos(3) & \sin(3) \\ 0 & 4\cos(1) & 0.5\cos(1)-2\sin(1) & -4\cos(3) & -2\cos(3)-4\sin(3) \\ 5\cos(1) & -\cos(1)-5\sin(1) & \sin(1)-3.25\cos(1) & -2\cos(3) & -3\cos(3)-2\sin(3) \\ 2\cos(1) & 2\cos(1)-2\sin(1) & -\cos(1)-2\sin(1) & -2\cos(3) & -\cos(3)-2\sin(3) \\ 0 & -4\cos(1) & \cos(1)+4\sin(1) & 4\cos(3) & 2\cos(3)+4\sin(3) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left[\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & -1 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -0.75 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & -1 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0.5 & -4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 3 & -3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \right.$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -1 & -1 & 0.75 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -5 & 5 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & -2 & 1.5 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -5 & 5 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 12 & -10 & 0 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -2 & 0 & -0.5 & 3 & 5 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -5 & 5 & -4/3 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & -10 & 2 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & 6 & 10 & -6 & 2/3 & -2 & 0 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -5 & 5 & -4/3 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & -10 & 2 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -4/3 & 0 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -5 & 5 & -4/3 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & -10 & 2 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & -2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -5 & 11/3 & 1 & -5 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 14 & -10 & -2 & 12 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 0 & 1/2 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -5 & 11/3 & 1 & -5 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/3 & -5/3 & -1/3 & 2 & -7/6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/6 & 0 & 1/2 & 1/12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -8/3 & 2 & 2/3 & -3 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7/3 & -5/3 & -1/3 & 2 & -7/6 \end{array}\right) =$$

$$\left. = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 & 0 & 1/2 & 1/12 \\ 4/3 & -1 & -1/3 & 3/2 & -3/4 \\ 0 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 7/3 & -5/3 & -1/3 & 2 & -7/6 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \cos(1) = 0.54 & \cos(3) = -0.99 \\ \sin(1) = 0.84 & \sin(3) = 0.14 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc} \frac{-4\cdot0.54-7\cdot0.99+4\cdot0.84-6\cdot0.14}{3} & \frac{6\cdot0.54+5\cdot0.99-0.84+3\cdot0.14}{3} & \frac{0.54+0.99-0.84}{3} & \frac{-4\cdot0.54-4\cdot0.99+3\cdot0.84-2\cdot0.14}{2} \\ \frac{16\cdot0.54+16\cdot0.99+24\cdot0.14}{3} & \frac{-11\cdot0.54-14\cdot0.99-8\cdot0.84-12\cdot0.14}{3} & \frac{-4\cdot0.54-4\cdot0.99}{3} & 6\cdot0.54+6\cdot0.99+4\cdot0.14 \\ \frac{-4\cdot0.54-4\cdot0.99-20\cdot0.84+12\cdot0.14}{3} & \frac{-6\cdot0.54-0.99+17\cdot0.84-6\cdot0.14}{3} & \frac{0.54-2\cdot0.99+5\cdot0.84}{3} & \frac{2\cdot0.54+2\cdot0.99-15\cdot0.84+4\cdot0.14}{2} \\ \frac{8\cdot0.54+8\cdot0.99-8\cdot0.84+12\cdot0.14}{3} & \frac{-9\cdot0.54-7\cdot0.99+2\cdot0.84-6\cdot0.14}{3} & \frac{-2\cdot0.54-2\cdot0.99+2\cdot0.84}{3} & 4\cdot0.54+3\cdot0.99-3\cdot0.84+2\cdot0.14 \\ \frac{-16\cdot0.54-16\cdot0.99-24\cdot0.14}{3} & \frac{14\cdot0.54-14\cdot(-0.99)+8\cdot0.84+12\cdot0.14}{3} & \frac{4\cdot0.54+4\cdot0.99}{3} & -6\cdot0.54-6\cdot0.99-4\cdot0.14 \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{18\cdot0.54+14\cdot0.99-0.84+12\cdot0.14}{12} \\ \frac{-8\cdot0.54-8\cdot0.99-8\cdot0.84-12\cdot0.14}{3} \\ \frac{-12\cdot0.54+8\cdot0.99+53\cdot0.84-24\cdot0.14}{12} \\ \frac{-12\cdot0.54-8\cdot0.99+0.84-12\cdot0.14}{6} \\ \frac{11\cdot0.54+8\cdot0.99+8\cdot0.84+12\cdot0.14}{3} \end{matrix}\right) \approx \begin{pmatrix} -2.19 & 2.59 & 0.23 & -1.94 & 2.04 \\ 9.29 & -9.41 & -2.04 & 9.75 & -6.89 \\ -7.09 & 3.08 & 0.92 & -4.5 & 3.55 \\ 2.4 & -3.65 & -0.46 & 2.89 & -2.54 \\ -9.29 & 9.95 & 2.04 & -9.75 & 7.43 \end{pmatrix}$$