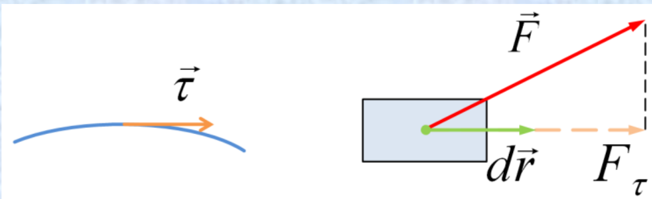
Механическая работа



$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = F\,dr\cos\ \vec{F}, d\vec{r}\ \ = F_\tau ds$$

Работа на конечном участке траектории $$A = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r}$$

[A] = Дж (СИ)

Вопрос: В каких случаях совершается работа?




Мощность

$$\boxed{N = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}}$$

[N] = Дж/с = Вт (СИ)

Единицы измерения работы и мощности

[E] = Дж

1кВт·ч = 3,6 МДж

1кал = 4,1868 Дж

1эВ = 1,6·10^{-19} Дж

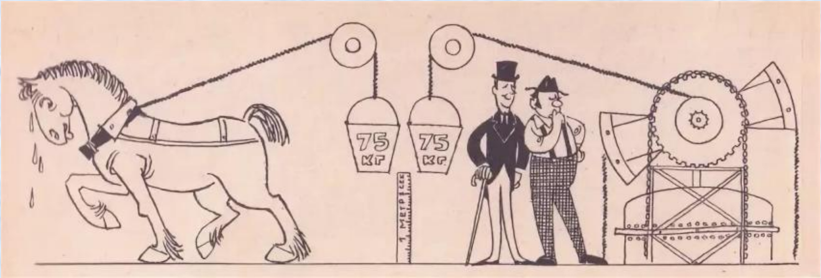
1а.е.м. = 931 МэВ; m_e = 0,511 МэВ

1К = 8,93 ·10^{-5} эВ

1ТГц = 4,13 мэВ

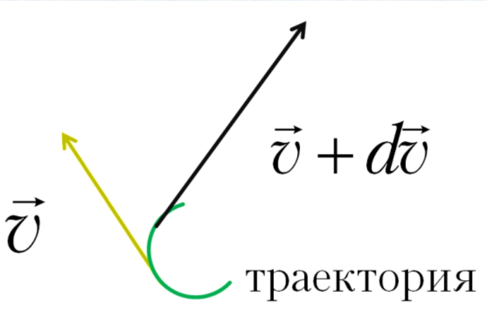
[N] = Вт

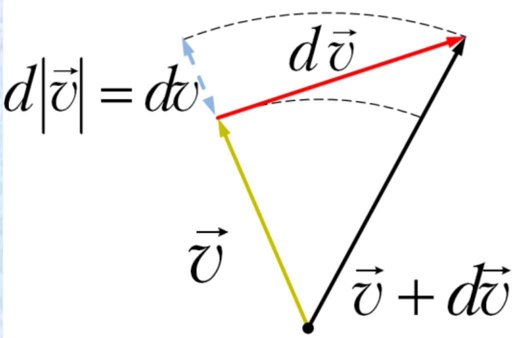
Лошадиная сила



1 л.с = 735,5 Вт

Кинетическая энергия





$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = md\vec{v}\vec{v} = mvdv$$

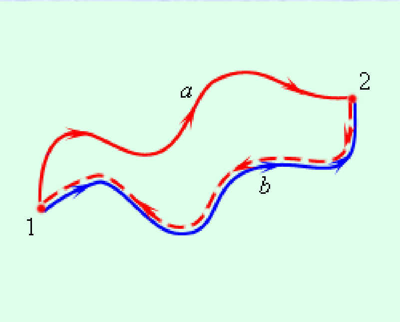
$$A = \int_{I}^{II} mvdv = \frac{mv_{II}^2}{2} - \frac{mv_I^2}{2} = \Delta E_{\text{к}}$$

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$$

Сумма работ всех сил, приложенных к телу, равна приращению кинетической энергии тела.

Какие бывают силы?

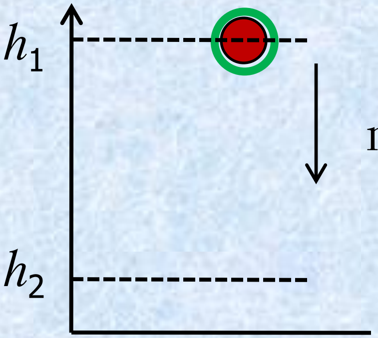
Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от формы пути, по которому перемещается тело, а определяется только начальным или конечным положением тела *1* и *2*.



Потенциальное поле – поле, в котором действуют консервативные силы.

Стационарное поле – поле сил, остающееся постоянным со временем.

$$A = \int_1^2 m\vec{g}\,d\vec{r} = -\int_{h_1}^{h_2} mg\,dz = mg\;\; h_1 - h_2$$



Какие бывают силы?

Диссипативные силы – силы, работа которых зависит не только от взаимного положения тел, но и от пути перемещения и относительных скоростей тел.

- Работа диссипативных сил всегда отрицательна.
- Механическая энергия переходит в другие формы (теплоту).

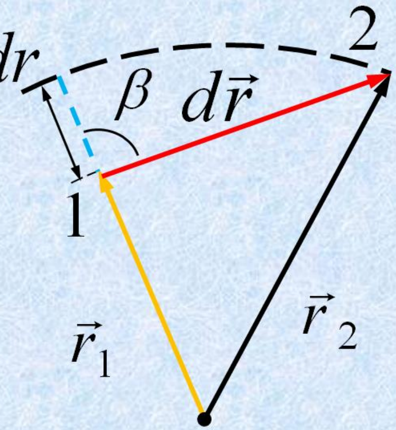
Сила трения, сила сопротивления

Какие бывают силы?

Центральные силы – силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами, и направленные по прямой, проходящей через эти частицы.

$$\vec{F} = \pm F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$d|\vec{r}| = dr$$



$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = \pm F \;\; r \;\; dr$$

$$A = \pm\int_{r_1}^{r_2} F \;\; r \;\; dr$$

Все центральные силы являются консервативными

Потенциальная энергия

Так как работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений тела, то существует скалярная величина, определяющая положение тел, убыль которой равна работе.

$$A = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

U – потенциальная энергия.

$$-dU = \delta A = \vec{F}d\vec{r} = F_\tau dl \qquad F_\tau = -\frac{\partial U}{\partial l}; \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \ldots$$

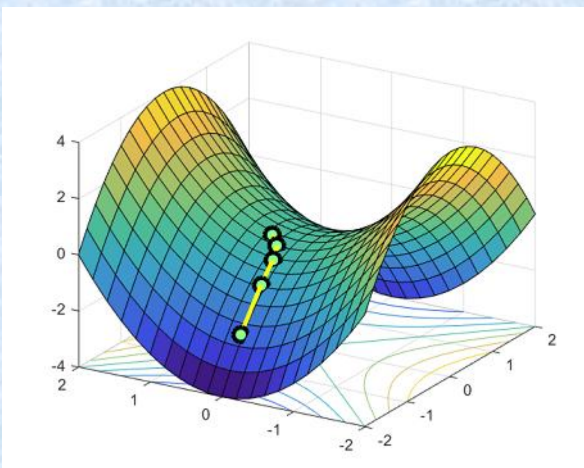
$$\boxed{\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\operatorname{grad} U = -\nabla U}$$

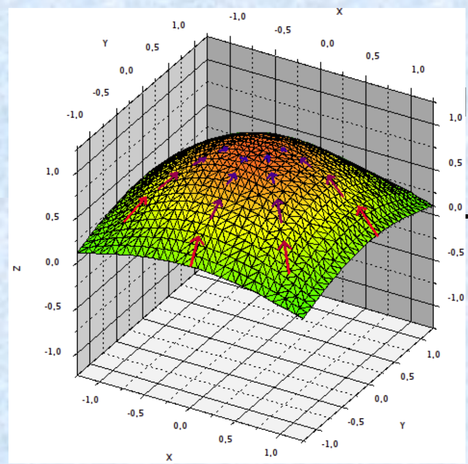
∇ – набла

Потенциальная энергия

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\operatorname{grad} U = -\nabla U$$

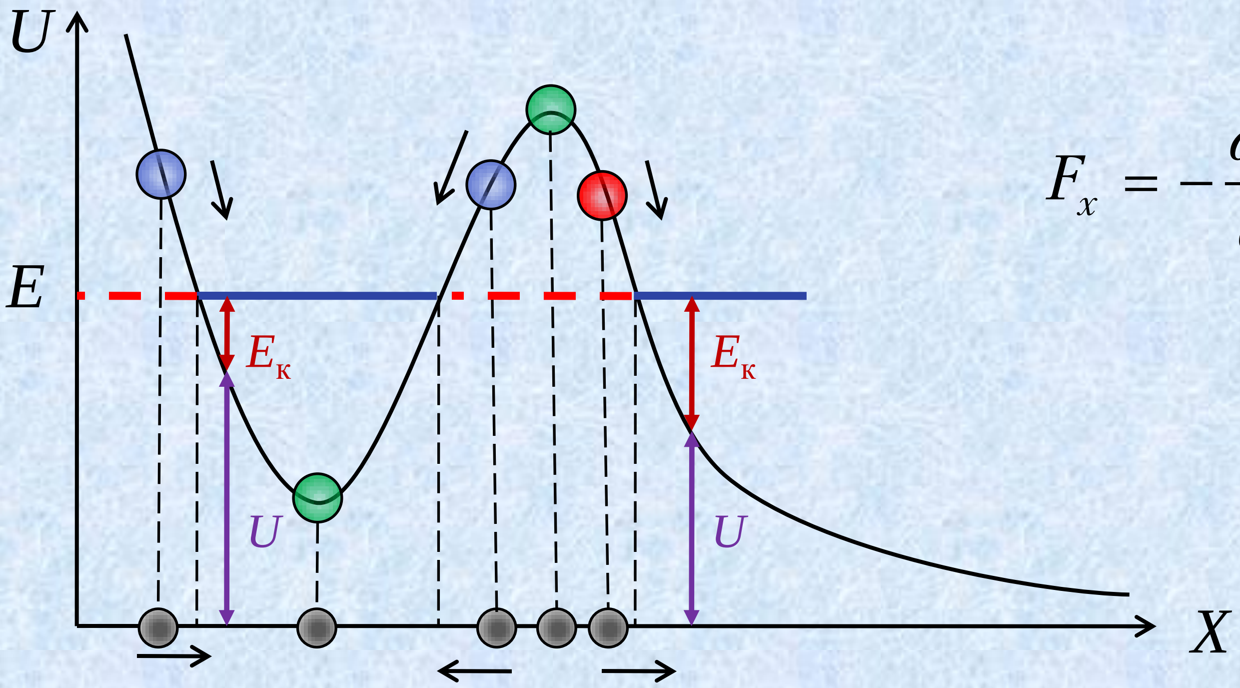
Градиент — вектор, своим направлением указывающий направление наибольшего возрастания некоторой скалярной величины (функции координат), а по величине (модулю) равный скорости роста этой величины в этом направлении.





ергия определяется
нстанты: $U(x)$ и
то же.

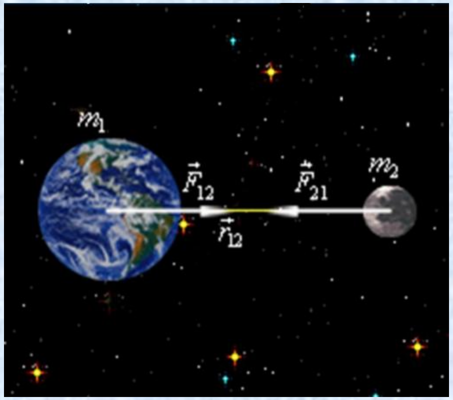
Финитное и инфинитное движение



$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

Финитное движение – движение в ограниченной области пространства (например, по замкнутой траектории

Поле силы тяжести



$$A = \int_{r_1}^{r_2} F dr = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr =$$

$$= \left(G\frac{m_1 m_2}{r_2} - G\frac{m_1 m_2}{r_1} \right) = U_1 - U_2$$

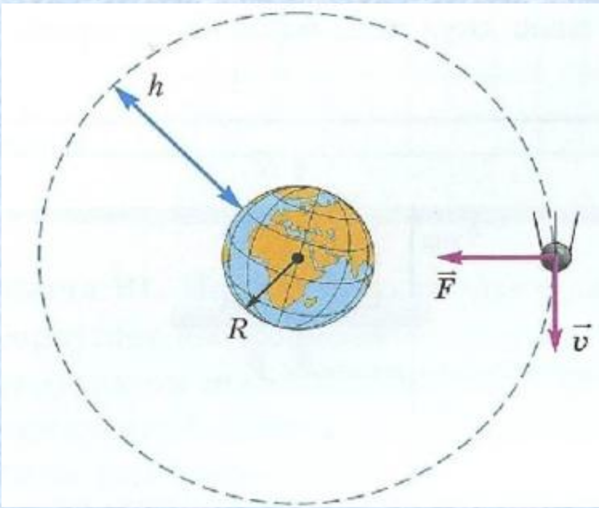
$$\boxed{U = -G\frac{Mm}{r} + U_0}$$

Обычно принимают: $U = 0$ при $r \to \infty$

Если между частями системы действуют силы притяжения, $U < 0$.

Вопрос: Как соотносятся друг с другом формулы $U = mgh$ и $U = -G\dfrac{Mm}{r}$?

Движение по орбите



$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$mg\frac{R^2}{R+h\ ^{2}} = \frac{mv^2}{R+h}$$

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR^2}{2\ \ R+h}$$

$$U = -\frac{GMm}{R} = -\frac{mgR^2}{R+h}$$

$$\boxed{\left|U\right| = 2E_к}$$

При движении по орбите потенциальная энергия по модулю в два раза больше кинетической.

Полная энергия $E = U + E_к$ по модулю равна кинетической, но противоположна по знаку.

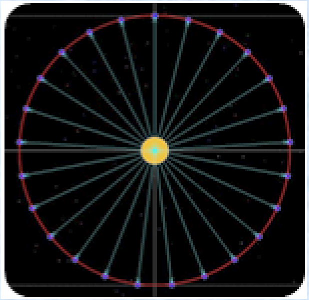
Вторая космическая скорость

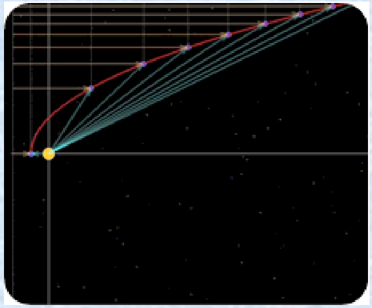
Вторая космическая скорость – это минимальная скорость, которую необходимо придать физическому объекту, чтобы он преодолел гравитационное притяжение небесного тела и покинул его замкнутую орбиту.

На поверхности Земли $U = -\dfrac{GMm}{R_З}$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{R_З} = mgR_З \Rightarrow v_{II} = \sqrt{2gR_З}$$

$$v_{II} \approx 11{,}2\ \text{км/с}$$





Полная энергия

$E = E_к + U$ – сумма кинетической и потенциальной энергии частицы

Приращение кинетической энергии:

$$\Delta E_k = A_{всех\ сил} = A_{конс} + A_{стор}$$

Убыль потенциальной энергии:

$$-\Delta U = A_{конс}$$

$$\Delta(E_k + U) = \Delta E = A_{стор}$$

Закон сохранения энергии

$$\Delta(E_k + U) = \Delta E = A_{стор}$$

М. В. Ломоносов, 1748 г.

Все перемены, в натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько у одного тела отнимается, столько присовокупится к другому... Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения: ибо тело, движущее своею силою другое, столько же оные у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает.

Если сторонние силы отсутствуют, то полная механическая энергия тела в стационарном поле консервативных сил остается постоянной.

Кинетическая энергия в Ц-системе

Импульс системы $\vec{P} = M\vec{V}_c = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ $\quad \vec{V}_c = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$

$$E_\text{к} = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i\left(\tilde{\vec{v}}_i + \vec{V}_c\right)^2}{2} = \sum_i \frac{m_i \tilde{v}_i^2}{2} + \underbrace{\vec{V}_c \sum_i m_i \tilde{\vec{v}}_i}_{=0} + \sum_i \frac{m_i V_c^2}{2}$$

Кинетич. энергия в Ц-системе

Кинетич. энергия движения системы частиц как целого в К-системе

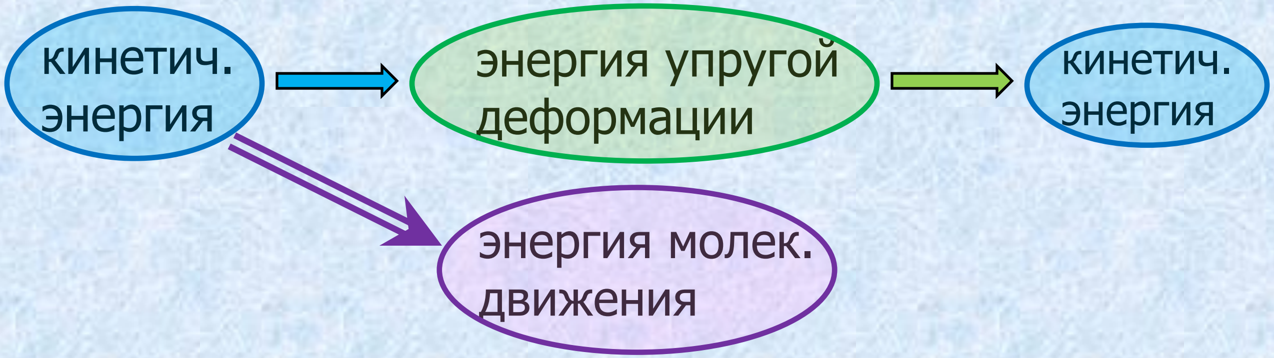
Теорема Кёнига

$$E_\text{к} = \tilde{E}_\text{к} + \frac{P^2}{2M}$$

Кинетическая энергия системы частиц минимальна в Ц-системе

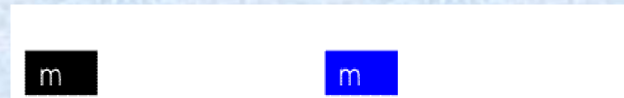
Теория соударений

Удар: внезапное изменение состояния движения тела вследствие столкновения с другим телом.



Абсолютно неупругий удар

Тела после столкновения движутся как одно целое.



ЗСИ: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}\,'$

ЗСЭ: $\dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 + m_2 \quad v'^2}{2} + Q$

Часть механической энергии системы переходит во внутреннюю (теплоту)

<u>Вопрос</u>: Если $m_1 = m_2$ и $v_1 = v_2$, как зависит доля энергии, перешедшей в теплоту, от угла между начальными скоростями?

Неупругий удар в Ц-системе

$$\tilde{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_c = \frac{m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} \qquad \tilde{\vec{v}}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_c = \frac{m_1 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\tilde{\vec{p}}_1 = \frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} = \mu (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \qquad \tilde{\vec{p}}_2 = \mu (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\tilde{\vec{p}}_1$$

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

– приведенная масса

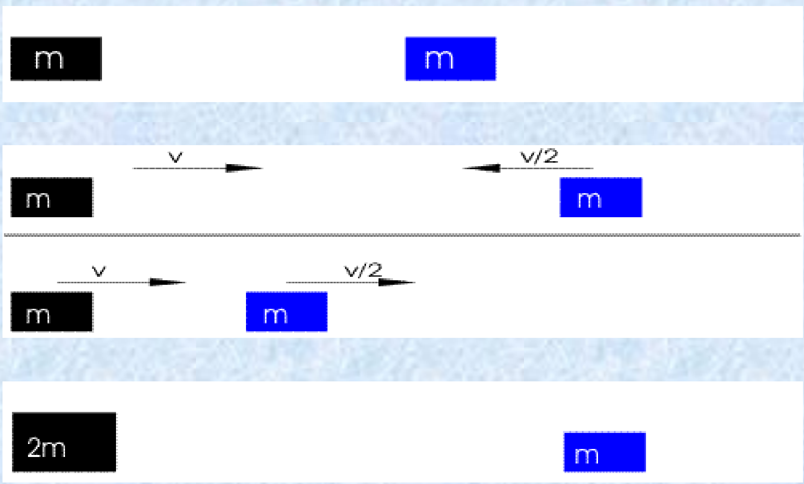
$$E_к = \frac{\tilde{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_2^2}{2m_2} = \frac{m_1 m_2^2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2}{2 (m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|^2}{2 (m_1 + m_2)^2}$$

$$E_к = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} \mu |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|^2 = Q$$

Вся кинетическая энергия переходит в тепло

Абсолютно упругий удар

Центральный удар: тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс.



Выполняются законы сохранения импульса и механической энергии

Абсолютно упругий удар

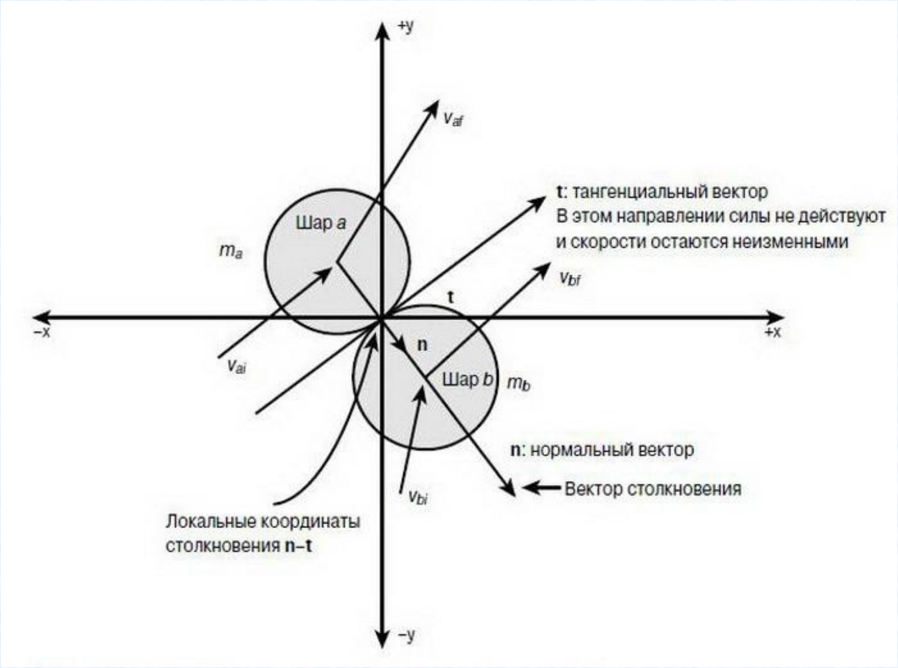
В Ц-системе: $\tilde{\vec{p}}_1 = \mu \;\; \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \;\; = \mu \vec{v}_{\text{отн}}; \;\; \tilde{\vec{p}}_2 = -\tilde{\vec{p}}_1; \qquad E_{\text{к}} = \frac{1}{2}\mu v_{\text{отн}}^2$

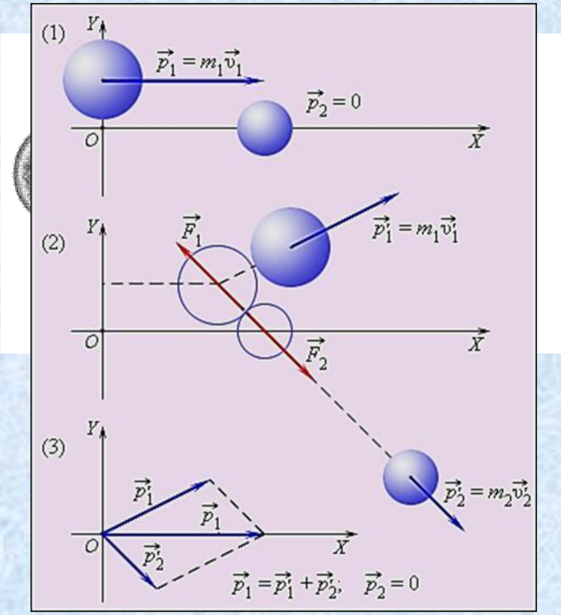
В результате столкновения импульс каждой частицы просто меняет знак.

$$\tilde{\vec{p}}'_i = -\tilde{\vec{p}}_i; \qquad \tilde{\vec{v}}'_i = -\tilde{\vec{v}}_i$$

В К-системе: $\vec{v}'_i = \vec{V}_c + \tilde{\vec{v}}' = \vec{V}_c - \tilde{\vec{v}}_i = 2\vec{V}_c - \vec{v}_i$

Нецентральный удар





При нецентральном ударе гладких идеально упругих шаров их тангенциальные скорости не изменяются, нормальные скорости изменяются так же, как при центральном ударе