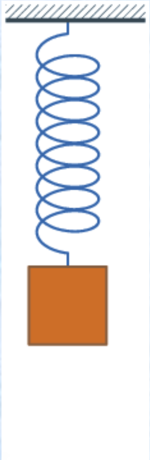
Колебательные системы

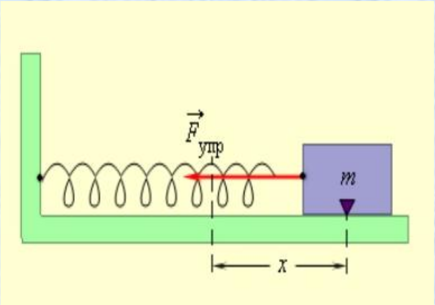
Колебания — повторяющийся в той или иной степени во времени процесс изменения состояний системы около точки равновесия



Осциллятор (лат. oscillo — качаюсь) — система, совершающая колебания

Гармонический осциллятор

Механический гармонический осциллятор — система, которая при выведении её из положения равновесия испытывает действие возвращающей силы *F*, пропорциональной смещению *x*: $F = -kx$



Потенциальная энергия такой системы

$$U = -\int F\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

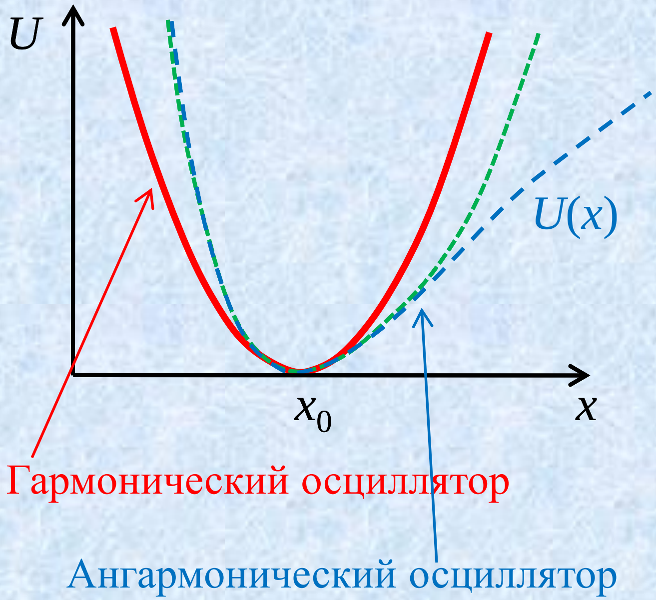
Уравнение движения такой системы $F = ma = m\ddot{x}$ $\quad m\ddot{x} + kx = 0$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Любая физическая система, эволюция которой во времени описывается таким уравнением, является гармоническим осциллятором

Гармонический осциллятор



Вблизи точки устойчивого равновесия

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)x + \frac{U''(x_0)}{2}x^2 + \ldots$$

Можем сделать $U(x_0) = 0$ за счет выбора начала отсчета U

$U'(x_0) = 0$, т.к. это точка минимума U

$$U(x) = \frac{U''(x_0)}{2}x^2$$

Вблизи точки равновесия любая система ведет себя подобно гармоническому осциллятору

Гармонический осциллятор

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Решение уравнения осциллятора

$$x = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$$

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \qquad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{C_2}{C_1}$$

$$x = A\cos\ \ \omega_0 t + \varphi_0$$

ω_0 – собственная частота (круговая) осциллятора

A – амплитуда

$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза

φ_0 – начальная фаза

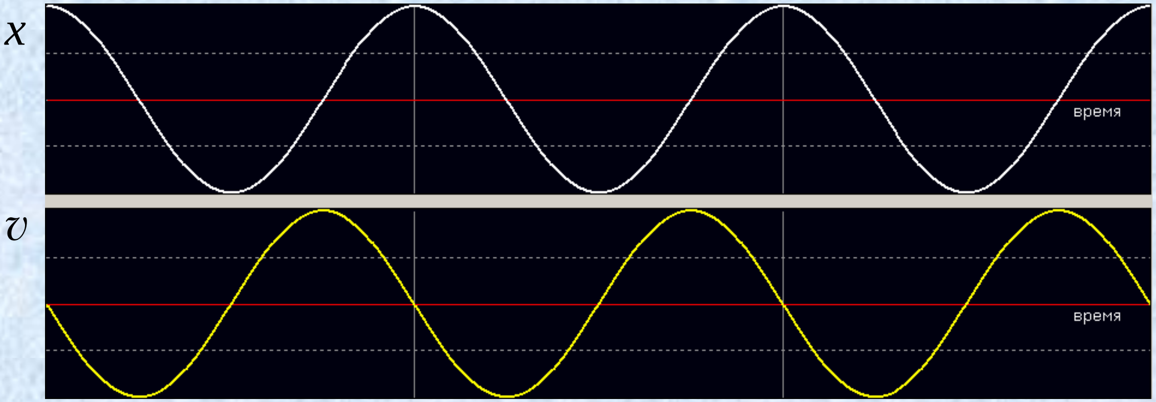
$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ – период колебаний

$\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ – частота

Скорость и ускорение осциллятора

$$x = A\cos\ \ \omega_0 t + \varphi_0$$

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin\ \ \omega_0 t + \varphi_0\ \ = -v_0 \sin\ \ \omega_0 t + \varphi_0\ \ = v_0 \cos\ \ \omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2$$



Скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos\ \ \omega_0 t + \varphi_0\ \ = -a_0 \cos\ \ \omega_0 t + \varphi_0\ \ = a_0 \cos\ \ \omega_0 t + \varphi_0 + \pi$$

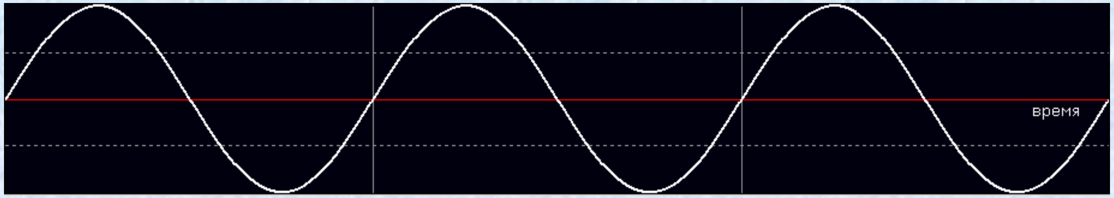
Начальные условия

$$x = A\cos\ \omega_0 t + \varphi_0$$

$$v = -v_0 \sin\ \omega_0 t + \varphi_0$$

$\varphi_0 = 0$
$x(0) = A$
$v(0) = 0$

$\varphi_0 = \pi/2$
$x(0) = 0$
$v(0) = v_0$



Энергия осциллятора

Потенциальная энергия

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2 \cos^2 \omega_0 t}{2} = \frac{kA^2 \; 1 + \cos 2\omega_0 t}{4}$$

Кинетическая энергия

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2 \; 1 - \cos 2\omega_0 t}{4}$$

Полная энергия $E = E_{\text{пот}} + E_{\text{к}} = \dfrac{kA^2}{2} = \dfrac{mA^2\omega_0^2}{2}$ $\qquad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

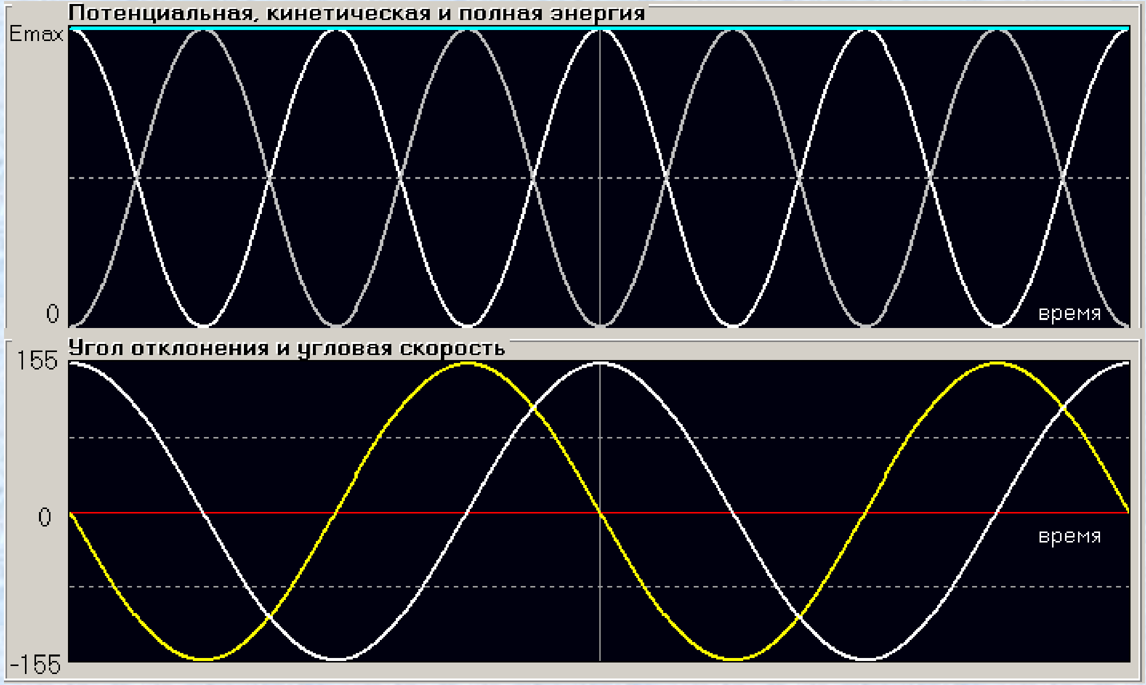
Потенциальная и кинетическая энергия меняется с удвоенной частотой, полная энергия постоянна.

Среднее значение потенциальной и кинетической энергии одинаково

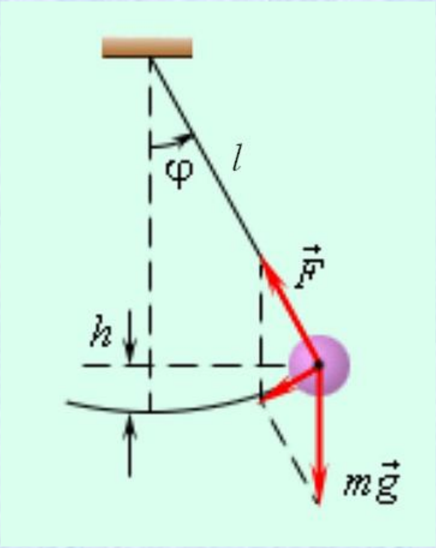
$$\bar{E}_{\text{пот}} = \bar{E}_{\text{к}} = \frac{kA^2}{4} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}$$

Вопрос: Зависит ли полная энергия осциллятора от частоты?

Энергия осциллятора



Математический маятник



$$U = mgh = mgl\;\; 1 - \cos\varphi$$

При малых углах отклонения

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$U = \frac{mgl\varphi^2}{2}$$

$x \to \varphi$

$k \to mgl$

$m \to I = ml^2$

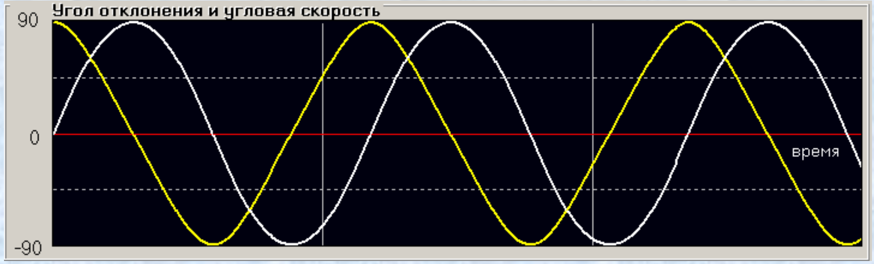
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

При l = 1 м период Т = 2π/ω ≈ 2 с

Математический маятник

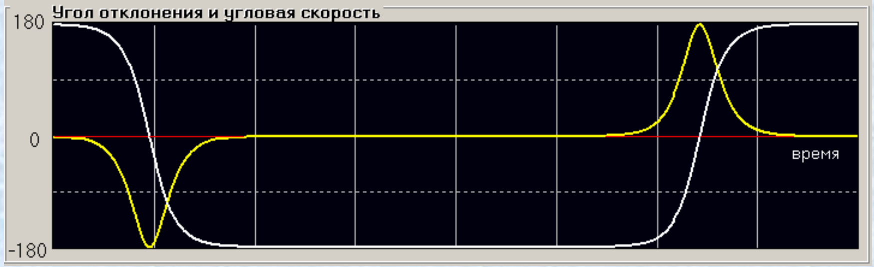
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right\}$$

$T = 1{,}06T_0$



$T = 1{,}25T_0$

$T = 2{,}4T_0$

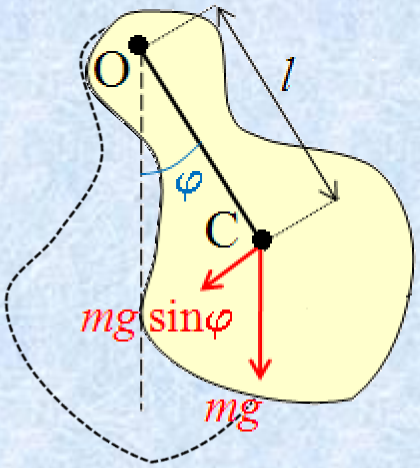


$T = 11{,}2T_0$

Физический маятник

O – точка подвеса

C – центр инерции



Возвращающий момент $M = -mgl\sin\varphi$

$$I\varepsilon = I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$$

I – момент инерции относительно точки подвеса

При малых углах отклонения $\ddot{\varphi} + \dfrac{mgl}{I}\varphi = 0$

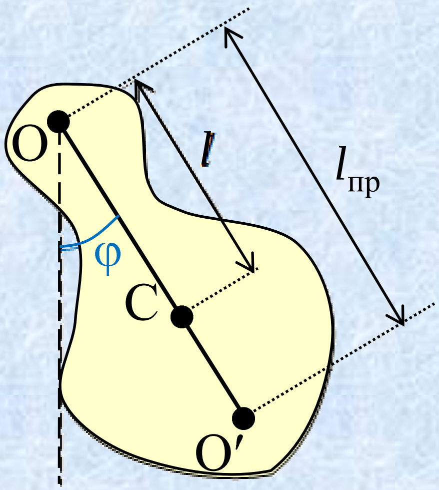
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mlg}},}$$

Физический маятник

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mlg}},$$

$$I = I_0 + ml^2$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mlg}}$$

Приведенная длина $l_{\text{пр}}$: длина математического маятника, период которого равен периоду данного физического маятника

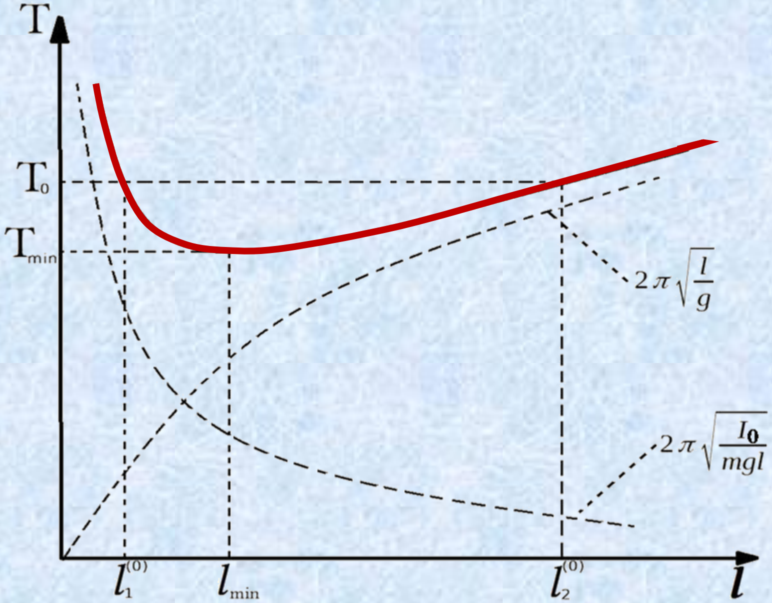
$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml} + l$$

O′ – центр качания

Вопрос: Доказать, что при подвешивании маятника в точке O′ период колебаний останется прежним.

Физический маятник

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml^2}{mlg}} \qquad T\;\; l\;\;_{l\to\infty} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad T\;\; l\;\;_{l\to 0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgl}}$$



Минимальный период

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{\frac{2l_{\min}}{g}}$$

при

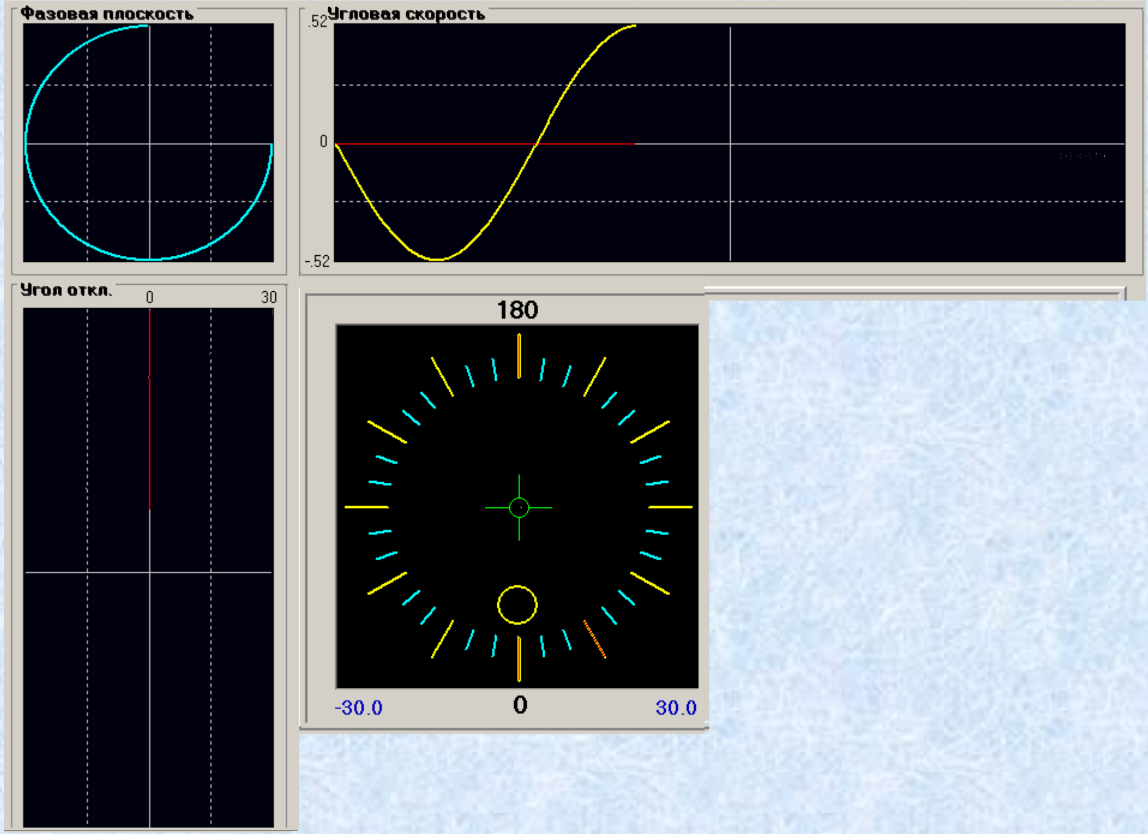
$$l_{\min} = \sqrt{I_0/m}$$

Фазовая траектория

Фазовое пространство — пространство, на котором представлено множество всех состояний системы, так, что каждому возможному состоянию системы соответствует точка фазового пространства

Для механических систем, координатами фазового пространства являются обычные пространственные координаты частиц системы и их импульсы

Фазовая траектория



Вопрос: В приведенном примере точка движется по фазовой плоскости по часовой стрелке. Возможно ли движение против часовой стрелки?