

# Импульс

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Второй закон Ньютона в импульсной форме  
(**основное уравнение динамики**):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

или

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

$$[p] = \text{Н} \cdot \text{с}$$

Импульс силы

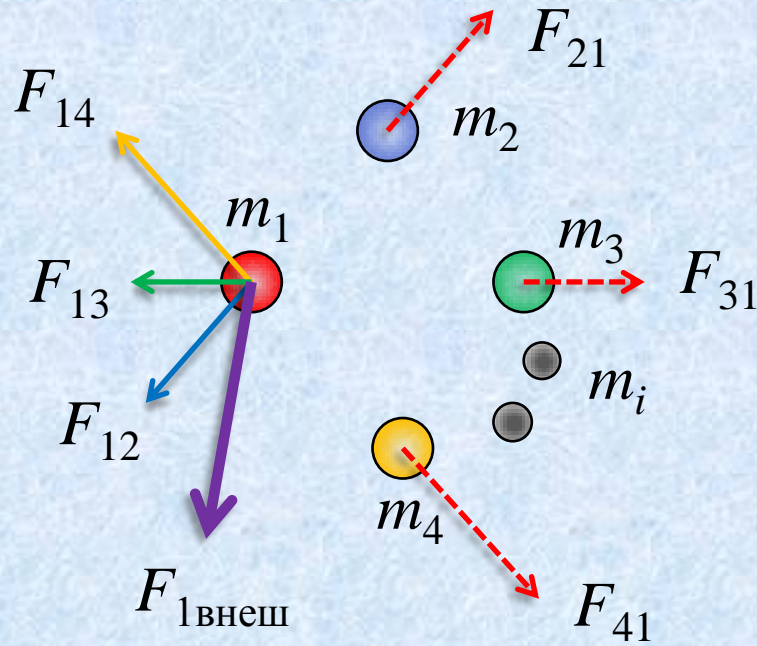
**Вопрос:** Всегда ли эквивалентны  
две формы записи II закона Ньютона?

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

и

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

# Закон сохранения импульса



$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1\text{внеш}}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \dots$$

$$\vec{P} = \sum_n \vec{p}_n \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k^{\text{внеш}} + \sum_{n,m; n \neq m} \vec{F}_{nm}$$

$$= 0, \text{ т.к. } \vec{F}_{nm} = -\vec{F}_{mn}$$

$$\sum_k \vec{F}_k^{\text{внеш}} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

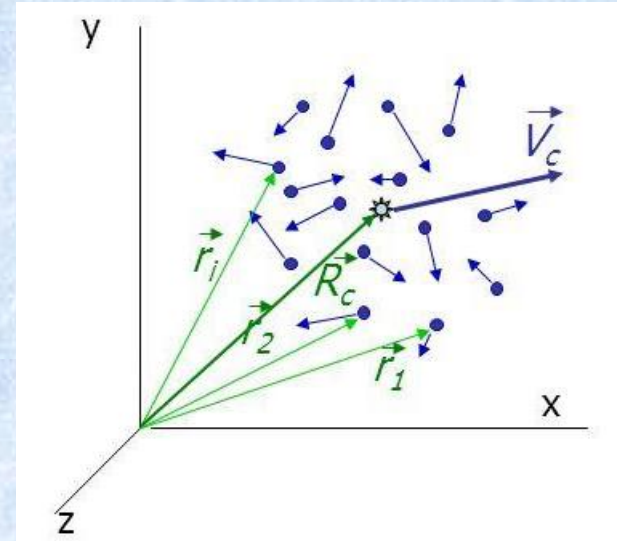
Если векторная сумма всех **внешних** сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется

# Центр масс (центр инерции)

Центр масс – точка, характеризующая движение системы частиц или тела как целого

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$$



$$\vec{v}_c = \frac{d}{dt} \vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{M}$$

Импульс системы  $\vec{P} = M \vec{v}_c$

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}$$

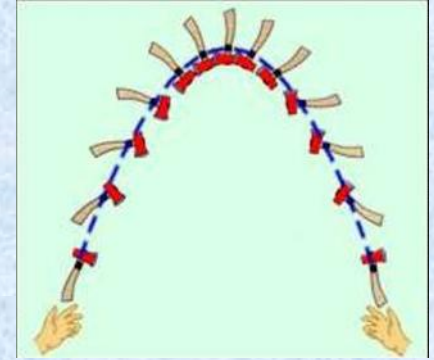
# Центр масс

$$M \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}$$

Центр масс движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке, и к ней были бы приложены все **внешние** силы

Ускорение центра масс не зависит от точек приложения внешних сил.

Импульс замкнутой системы остается постоянным



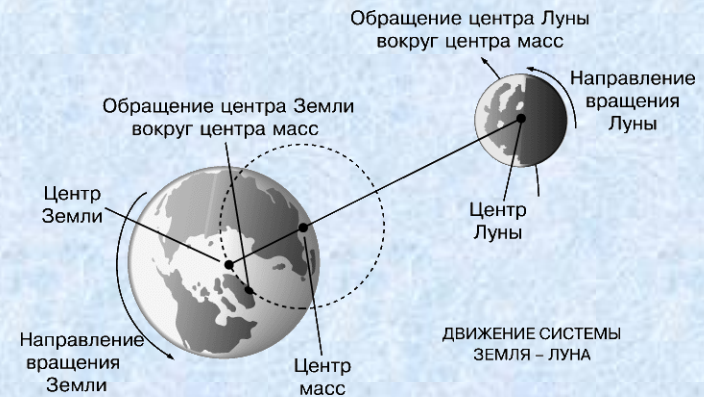


# Ц-система

Система отсчета, жестко связанная с центром масс системы и перемещающаяся поступательно по отношению к инерциальным системам (центр масс неподвижен).

Полный импульс частиц, входящих в Ц-систему, всегда равен нулю

**Вопрос:** Могут ли столкнуться звезды в точке пересечения орбит?

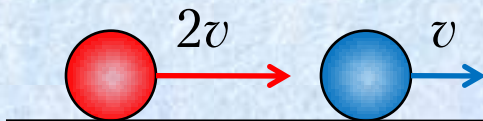


# Ц-система

Упругое столкновение двух одинаковых шаров



Вопрос: Как будет выглядеть это столкновение в Ц-системе?



А в этом случае?

# Реактивное движение

Движение тела, возникающее при отделении некоторой его части с определенной скоростью относительно тела.



Закон сохранения импульса  $m d\vec{v} = \vec{F} dt + dm \vec{u}$

$\vec{u}$  — скорость отделяемого или присоединяемого вещества относительно рассматриваемого тела

$\vec{F}$  — сумма сил, действующих на тело со стороны других тел или силового поля

# Реактивное движение

$$m d\vec{v} = \vec{F} dt + dm \vec{u} \quad \Rightarrow \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u}$$

Уравнение  
Мещерского

Реактивная сила



И. В. Мещерский, 1897 г.



# Уравнение Мещерского

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u} \quad m(t=0) = m_0, \frac{dm}{dt} = \mu$$

1)  $\vec{u} = 0$

$$d\vec{v} = \vec{F} \frac{dt}{m} = \vec{F} \frac{dt}{m_0 - \mu t}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}$$



**Вопрос:** Что даст последняя формула, если  $\mu = 0$ , т. е. песок не сыплется?

**Вопрос:** Если  $F = 0$ , то  $v = v_0$ . Но масса уменьшается. Почему не сохраняется импульс?

# Уравнение Мещерского

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u} \quad m(t=0) = m_0, \frac{dm}{dt} = \mu$$

$$2) \quad \vec{u} = -\vec{v}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} = \vec{F} \quad \frac{d}{dt} m\vec{v} = \vec{F}$$

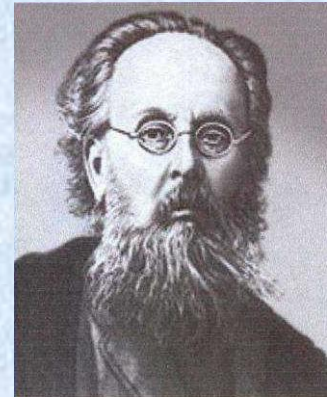
$$\vec{v} = \frac{\vec{F}t}{m_0 + \mu t}$$



**Вопрос:** Как будет меняться скорость вагона, если  $F = 0$ , а  $v_0 > 0$ ?

# Уравнение Мещерского

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{u} \quad m(t=0) = m_0, \frac{dm}{dt} = \mu$$



К. Э. Циолковский  
1857 – 1935

3)  $\vec{F} = 0$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \vec{u} \quad d\vec{v} = \frac{dm}{m} \vec{u}$$

$$\vec{v} = \vec{u} \ln \frac{m}{m_0} = -\vec{u} \ln \frac{m_0}{m}$$

Формула Циолковского

Если  $F = mg$

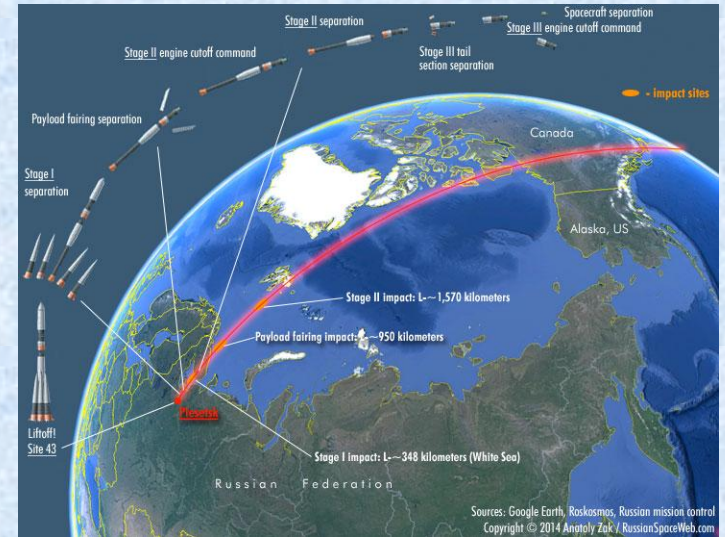
$$v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt$$



# Запуск спутника

$$v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt$$

**Вопрос:** Какова минимальная стартовая масса ракеты, выводящей на орбиту спутник в 10 тонн?

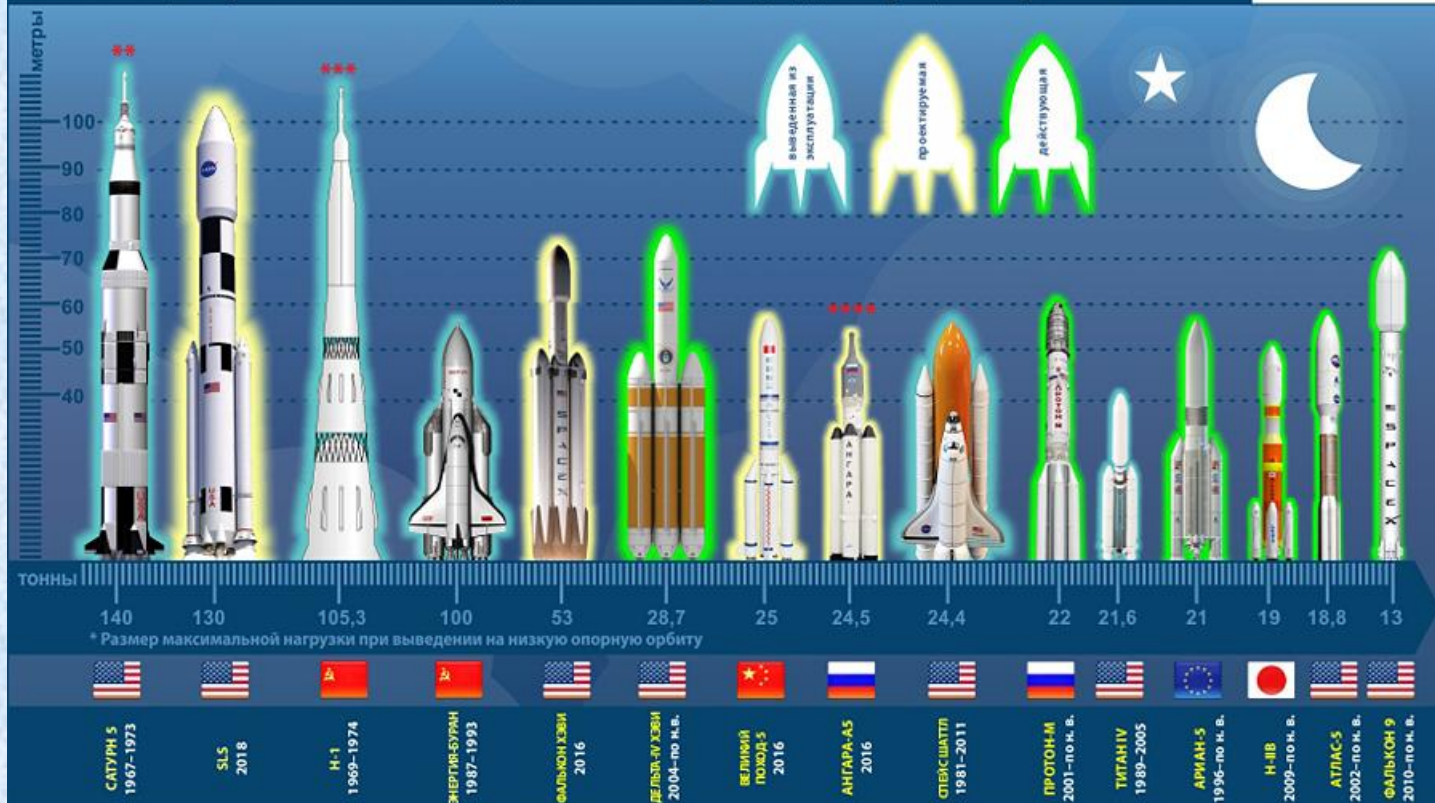




# КОСМИЧЕСКИЙ МАСШТАБ

**ВЗГЛЯД**  
НЕОБЫЧНАЯ ГАЗЕТА  
© Все права защищены

Самые мощные ракеты-носители: выведенные из эксплуатации, действующие и перспективные\*



\*\* Самая тяжёлая и грузоподъемная из созданных на данный момент человечеством

\*\*\* После четырех неудачных испытательных пусков проект был закрыт, не став действующей ракетой-носителем

\*\*\*\* Первая отечественная тяжёлая ракета-носитель, разработанная после СССР. Уникальный модульный принцип позволяет собрать на её основе лёгкую, среднюю и тяжёлую ракету

Источники: Роскосмос, NASA, открытые данные