

Зададим ортогональный базис как e_1, e_2, e_3 , где каждый из элементов найдём путём ортогонализации Грама-Шмидта:

$$e_1 = l_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad e_2 = l_2 - \frac{e_1^T G l_2}{e_1^T G e_1} e_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{-8}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_3 = l_3 - \frac{e_2^T G l_3}{e_2^T G e_2} e_2 - \frac{e_1^T G l_3}{e_1^T G e_1} e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{0}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Теперь проведём ортонормирование базиса:

$$\tilde{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{e_1}{\sqrt{e_1^T G e_1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{e}_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|} = \frac{e_2}{\sqrt{e_2^T G e_2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{e}_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = \frac{e_3}{\sqrt{e_3^T G e_3}} = \frac{1}{\sqrt{1}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

И тогда ортонормированный базис будет выглядеть так: $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$