Вычислим характеристический полином и, как следствие, найдём спектр оператора:

$$\chi_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 & 1 \\ -49 & -28-\lambda & -16 & -8 \\ 45 & 22 & 15-\lambda & 5 \\ 57 & 28 & 14 & 12-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 3\lambda^3 - 25\lambda^2 + 39\lambda + 180 = (\lambda-5)(\lambda-4)(\lambda+3)^2 \Rightarrow \sigma_\varphi = \left\{4^{(1)}, 5^{(1)}, -3^{(2)}\right\}$$

Найдём собственные вектора оператора к соответствующим собственным значениям:

$$\lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ -49 & -32 & -16 & -8 \\ 45 & 22 & 11 & 5 \\ 57 & 28 & 14 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 5 & 3 \\ 45 & 22 & 11 & 5 \\ 12 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \\ 45 & 22 & 11 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_4 = 0 \\ \xi_3 = -2\xi_2 \\ \xi_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 5$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ -49 & -33 & -16 & -8 \\ 45 & 22 & 10 & 5 \\ 57 & 28 & 14 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & 6 & 3 \\ 45 & 22 & 10 & 5 \\ 12 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 8 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 12 & 6 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 = 0 \\ \xi_4 = -2\xi_3 \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -3$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 1 \\ -49 & -25 & -16 & -8 \\ 45 & 22 & 18 & 5 \\ 57 & 28 & 14 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ -4 & -3 & 2 & -3 \\ 8 & 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 = \xi_4 \\ \xi_3 = \xi_4 \xi_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Для этого собственного значения алгебраическая и геометрическая кратности не совпадают. Это означает, что мы не сможем построить базис оператора, в котором будет существовать жорданова нормальная форма для матрицы оператора. Найдём присоединённый вектор для v_3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ -49 & -25 & -16 & -8 & 1 \\ 45 & 22 & 18 & 5 & 1 \\ 57 & 28 & 14 & 15 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & -6 \\ 4 & 3 & -2 & 3 & -2 \\ 8 & 3 & -2 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 7 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = 1 - \xi_4 \\ \xi_2 = \xi_4 - 2 \\ \xi_3 = \xi_4 \\ \xi_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$