Типовой расчёт — математические ряды (вариант 20)

Задание 2

Область сходимости функционального ряда находится из признака Даламбера, по которому для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует $D = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, и если $D < 1$, то ряд сходится. Следовательно область сходимости функционального ряда можно определить как решение уравнения $D < 1$. Для начала вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{2(n+1)-1}\cancel{4^n}(2n-1)}{\cancel{4^{n+1}}(2(n+1)-1)(x+5)^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{\cancel{2n+1}\,2}(2n-1)}{4(2n+1)\cancel{(x+5)^{2n-1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{2n}(x+5)^2(1-\frac{1}{2n})}{\cancel{2n}\cdot 4(1+\frac{1}{2n})}\right| = \frac{(x+5)^2(1-\frac{1}{2\infty})}{4(1+\frac{1}{2\infty})} =$$

$$= \frac{(x+5)^2}{4} = D$$

Теперь решим уравнение, которое мы задали ранее:

$$\frac{(x+5)^2}{4} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+10x+25 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+10x+21 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+7)(x+3) < 0 \Rightarrow x \in (-7;-3)$$

Дело в том, что признак Даламбера не работает, когда $D = 1$, т.е. нам необходимо дополнительно выяснить сходимость для точек $\{-7\}$ и $\{-3\}$ с помощью необходимого признака сходимости ряда — и ряд сходится, если его общий член стремится к нулю.

$$\exists\, x = -3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{2n-1}}}{2\,\cancel{2^{2n}}(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2(2\infty-1)} = 0 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

$$\exists\, x = -7 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\cancel{2^{2n-1}}}{2\,\cancel{2^{2n}}(2n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2(2n-1)} = \frac{-1}{2(2\infty-1)} = 0 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

В таком случае область сходимости функционального ряда — $\boxed{[-7;-3].}$

Задание 3

Считаем, что функция раскладывается в ряд Тейлора в $x_0 = 0$. В таком случае в общем виде ряд Тейлора выглядит так: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Найдём первые 3 члена последовательности, вычислив сначала производные, и дальше попробуем вывести общий n-й член, преобразовав коэффициент перед x^n в A:

$$f(0) = \frac{3}{2} \qquad f'(0) = \left(\frac{3}{2-x-x^2}\right)'(0) = \left(\frac{3(2x+1)}{(2-x-x^2)^2}\right)(0) = \frac{3}{4}$$

$$f''(0) = \left(\frac{3(2x+1)}{(2-x-x^2)^2}\right)'(0) = \left(\frac{3(2x+1)(4x+2)}{(2-x-x^2)^3} + \frac{6}{(2-x-x^2)^2}\right)(0) = \frac{6}{8} + \frac{6}{4} = \frac{9}{4}$$

$$f'''(0) = \left(\frac{3(2x+1)(4x+2)}{(2-x-x^2)^3} + \frac{6}{(2-x-x^2)^2}\right)'(0) = \left(\frac{3(2x+1)(4x+2)(6x+3)}{(2-x-x^2)^4} + \frac{36(2x+1)}{(2-x-x^2)^3}\right)(0) = \frac{18}{16} + \frac{36}{8} = \frac{45}{8}$$

Теперь подставим найденные производные на свои места, обозначим общий член и попробуем выявить закономерность:

$$\frac{3}{2} + \frac{3/4}{1!}x + \frac{9/4}{2!}x^2 + \frac{45/8}{3!}x^3 + ... + Ax^n = \frac{3}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{9x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + ... + Ax^n$$

В знаменателе A находится очевидная 2^{n+1} (счёт начинается с $n = 0$). В числителе A нетрудно заметить чередование $+1$ и -1 на чётных и нечётных степенях соответственно — в итоге получаем $2^{n+1} + (-1)^n$. Таким образом ряд Тейлора для заданной функции в общем виде выглядит так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Определим область сходимости такого ряда, применяя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(2^{n+2}+(-1)^{n+1})}{2(2^{n+1}+(-1)^n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|\left|2^{n+2}+(-1)^{n+1}\right|}{2\left|2^{n+1}+(-1)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|\left|\cancel{2^{n+2}}(1-(-1/2)^{n+2})\right|}{2\left|\cancel{2^{n+1}}(1-(-1/2)^{n+1})\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|\left|\cancel{2}(1-(-1/2)^{n+2})\right|}{\cancel{2}\left|(1-(-1/2)^{n+1})\right|} =$$

$$= |x|\frac{\left|1-(-1/2)^{\infty+2}\right|}{\left|1-(-1/2)^{\infty+1}\right|} = |x|$$

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Проверим дополнительно по необходимому признаку сходимости ряда:

При $n\to\infty$ предел ряда $\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+1}}(-1)^n$ не определяется и знакопеременен на -1 и 1.
Для $x = 1$ предел приобретает следующий вид:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}2^{-n-1}(2^{n+1}+(-1)^n) = \lim_{n\to\infty}2^{-n-1}2^{n+1}(1-(-1/2)^{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(1-(-1/2)^{n+1}) = 1$$

$$\Downarrow$$

Область сходимости определена и не включает в себя -1 и 1: $x\in(-1,1)$

Задание 5

Выпишем все необходимые величины, которые понадобятся нам в построении ряда Фурье:

$$L = b-a \quad (a, b \text{ — концы рассматриваемого отрезка}) \qquad \omega = \frac{2\pi}{L}$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)dx \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos(n\omega x)dx \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin(n\omega x)dx$$

И тогда в общем виде ряд Фурье в вычисленных выше величинах выглядит так: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\omega x)+b_n\cdot\sin(n\omega x))$.

Вычислим же каждую из величин для их последующей подстановки в ряд:

$$L = b-a = 2+2 = 4 \qquad \omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^0 0dx + \int_0^2 xdx\right) = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2\right) = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^0 0dx + \int_0^2 x\cos\frac{nx\pi}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{nx\pi}{2}dx = \begin{bmatrix} f = x & g' = \cos\frac{nx\pi}{2} \\ f' = 1 & g = \frac{2\sin\frac{nx\pi}{2}}{n\pi}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{2x\sin\frac{nx\pi}{2}}{n\pi}\right|_0^2 - \right.$$

$$\left. - \int_0^2 \frac{2\sin\frac{nx\pi}{2}dx}{n\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{2x\sin\frac{nx\pi}{2}}{n\pi}\right|_0^2 + \left.\frac{4\cos\frac{nx\pi}{2}}{n^2\pi^2}\right|_0^2\right) = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{2x\sin\frac{nx\pi}{2}}{n\pi}+\frac{4\cos\frac{nx\pi}{2}}{n^2\pi^2}\right)\right|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sin\pi n}{\pi n}+\frac{4\cos\pi n}{\pi^2n^2}-\frac{4}{\pi^2n^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{(4\pi n\sin\pi n+4\cos\pi n)^{\text{F}}}{\pi^2n^2} - \frac{4}{\pi^2n^2}\right) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} n & 1 & 2 & 3 & ... \\ \hline F & -4 & 4 & -4 & 4\cdot(-1)^n\end{array}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{4\cdot(-1)^n}{\pi^2n^2}-\frac{4}{\pi^2n^2}\right) = \frac{2\cdot(-1)^n-2}{\pi^2n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^0 0dx + \int_0^2 x\sin\frac{nx\pi}{2}dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{nx\pi}{2}dx = \begin{bmatrix} f = x & g' = \sin\frac{nx\pi}{2} \\ f' = 1 & g = \frac{-2\cos\frac{nx\pi}{2}}{n\pi}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\left.\frac{2x\cos\frac{nx\pi}{2}}{n\pi}\right|_0^2 + \right.$$

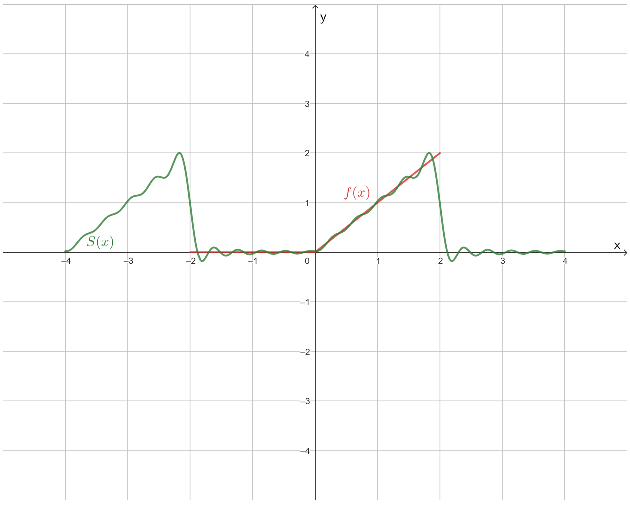
$$\left. + \int_0^2 \frac{2\cos\frac{nx\pi}{2}dx}{n\pi}\right) = \frac{1}{2}\left.\left(-\frac{2x\cos\frac{nx\pi}{2}}{n\pi}+\frac{4\sin\frac{nx\pi}{2}}{n^2\pi^2}\right)\right|_0^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{4\cos\pi n}{\pi n}+\frac{4\sin\pi n}{\pi^2n^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(4\sin\pi n-\pi n4\cos\pi n)^{\text{F}}}{\pi^2n^2}\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} n & 1 & 2 & 3 & ... \\ \hline F & 4\pi n & -4\pi n & 4\pi n & -4\cdot(-1)^n\pi n\end{array}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{-4\cdot(-1)^n}{\pi n}\right) = \frac{-2\cdot(-1)^n}{\pi n}$$

Подставим полученные значения в общий вид, чтобы получить разложение функции в ряд Фурье:

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot (-1)^n - 2}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) - \frac{2 \cdot (-1)^n}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right) \right)$$

Проверим правильность разложения, построив график исходной функции и график построенного ряда (вместо ∞ ряд оканчивается на 10-м порядке):



Ряд построен верно, т.к. хорошо сходится к исходной функции при $n \to \infty$.