

Базис образа оператора с заданной матрицей A определяется как линейно независимый набор векторов с $\text{rang}(\text{im } \phi) = \text{rang}(A) - \text{rang}(\ker \phi)$, образованных действием оператора на стандартный базис:

$$\text{rang}(A) = \left[\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right] = 3$$

$$\text{rang}(\ker \phi) = \left[\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = 0 \end{array} \right. \right] = 0$$

Следовательно базис образа оператора будет образован действием оператора на стандартный базис из $\text{rang}(A) - \text{rang}(\ker \phi) = 3$ элементов:

$$\text{im } \phi = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$