Найдём собственные значения оператора:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^4 - 7\lambda^3 - 12\lambda^2 + 176\lambda - 320 = 0$$

$$(\lambda+5)(\lambda-4)^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_A = \{-5^{(1)}, 4^{(3)}\}$$

Найдём собственные вектора:

$$\lambda = -5$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Алгебраическая и геометрическая кратности значений спектра совпадают, а значит мы уже можем построить Жорданову форму, или диагональную матрицу оператора в базисе $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, или $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$