Найдём собственные значения оператора:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 2 & 2 \\ -18 & 16-\lambda & 6 & 6 \\ 6 & -4 & 2-\lambda & -2 \\ 18 & -12 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 16-\lambda & 6 & 6 \\ -4 & 2-\lambda & -2 \\ -12 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -18 & 6 & 6 \\ 6 & 2-\lambda & -2 \\ 18 & -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -18 & 16-\lambda & 6 \\ 6 & -4 & -2 \\ 18 & -12 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -18 & 16-\lambda & 6 \\ 6 & -4 & 2-\lambda \\ 18 & -12 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\left((16-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -12 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} -4 & 2-\lambda \\ -12 & -6 \end{vmatrix}\right) - 4\left(-18\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -6 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 18 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 6 & 2-\lambda \\ 18 & -6 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+2\left(-18\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -12 & -2-\lambda \end{vmatrix} - (16-\lambda)\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 18 & -2-\lambda \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 18 & -12 \end{vmatrix}\right) - 2\left(-18\begin{vmatrix} -4 & 2-\lambda \\ -12 & -6 \end{vmatrix} - (16-\lambda)\begin{vmatrix} 6 & 2-\lambda \\ 18 & -6 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 18 & -12 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (-2-\lambda)((16-\lambda)((2-\lambda)(-2-\lambda)-12) - 6(-4(-2-\lambda)-24) + 6(24+12(2-\lambda))) - 4(-18((2-\lambda)(-2-\lambda)-12) - 6(6(-2-\lambda)+36) + 6(-36-18(2-\lambda)))+$$

$$+2(-18(-4(-2-\lambda)-24) - (16-\lambda)(6(-2-\lambda)+36) + 6(-72+72)) - 2(-18(24+12(2-\lambda)) - (16-\lambda)(-36-18(2-\lambda)) + 6(-72+72)) =$$

$$= \lambda^4 - 14\lambda^3 + 48\lambda^2 + 32\lambda - 256 + 72\lambda^2 - 576\lambda + 1152 - 12\lambda^2 + 96\lambda - 192 - 36\lambda^2 + 288\lambda - 576 = \lambda^4 - 14\lambda^3 + 72\lambda^2 - 160\lambda + 128 = (\lambda-2)(\lambda-4)^3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_A = \{2^{(1)}, 4^{(3)}\}$$

Найдём собственные вектора, которые составят базис и, как следствие, матрицу перехода для диагональной матрицы:

$$\lambda = 2$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & 2 \\ -18 & 14 & 6 & 6 \\ 6 & -4 & 0 & -2 \\ 18 & -12 & -6 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 4x_2 = -3x_3 - 3x_4 \\ 3x_3 = x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{x_4}{3} \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = \frac{x_4}{3} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 & 2 \\ -18 & 12 & 6 & 6 \\ 6 & -4 & -2 & -2 \\ 18 & -12 & -6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2x_2}{3} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{3} \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 \in \mathbb{R} \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Алгебраическая кратность совпадает с геометрическое $\Rightarrow$ оператор скалярного типа.
В базисе $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ найдём значение $\mathrm{e}^{(\varphi)}$ — для этого воспользуемся формулой $\mathrm{e}^A = T\mathrm{e}^{\tilde{A}}T^{-1}$, где $\tilde{A}$ — Жорданова форма для оператора.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7.38905 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54.59815 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54.59815 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 54.59815 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -2 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -7.38905 & 109.1963 & 54.59815 & 54.59815 \\ -22.16715 & 163.79445 & 0 & 0 \\ 7.38905 & 0 & 163.79445 & 0 \\ 22.16715 & 0 & 0 & 163.79445 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & \frac{2}{3} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -2 & -1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -87.02915 & 94.4182 & 47.2091 & 47.2091 \\ -424.8819 & 337.85275 & 141.6273 & 141.6273 \\ 141.6273 & -94.4182 & 7.38905 & -47.2091 \\ 424.8819 & -283.2546 & -141.6273 & -87.02915 \end{pmatrix}$$