

*«Законы математики, имеющие какое-либо отношение к реальному миру, ненадежны; а надежные математические законы не имеют отношения к реальному миру»*

*А. Эйнштейн*



*«Математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как, засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предпосылок»*

*Т. Гексли*

# Основные понятия механики

Механика (греч. μηχανική) – искусство построения машин)

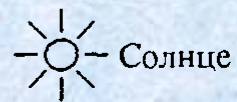
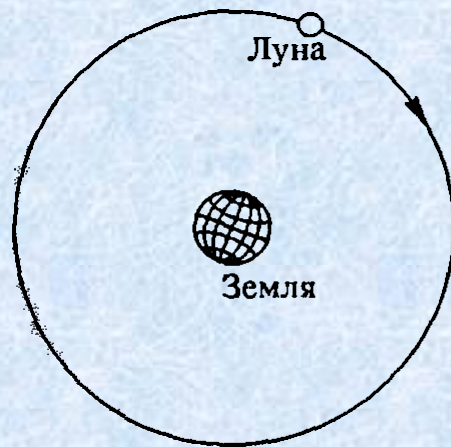
**Механика** – раздел физики, изучающий движение тел и взаимодействие между ними.

Механическое движение тел ОТНОСИТЕЛЬНО.

**Тело отсчета** – тело, относительно которого определяется положение других тел в пространстве.

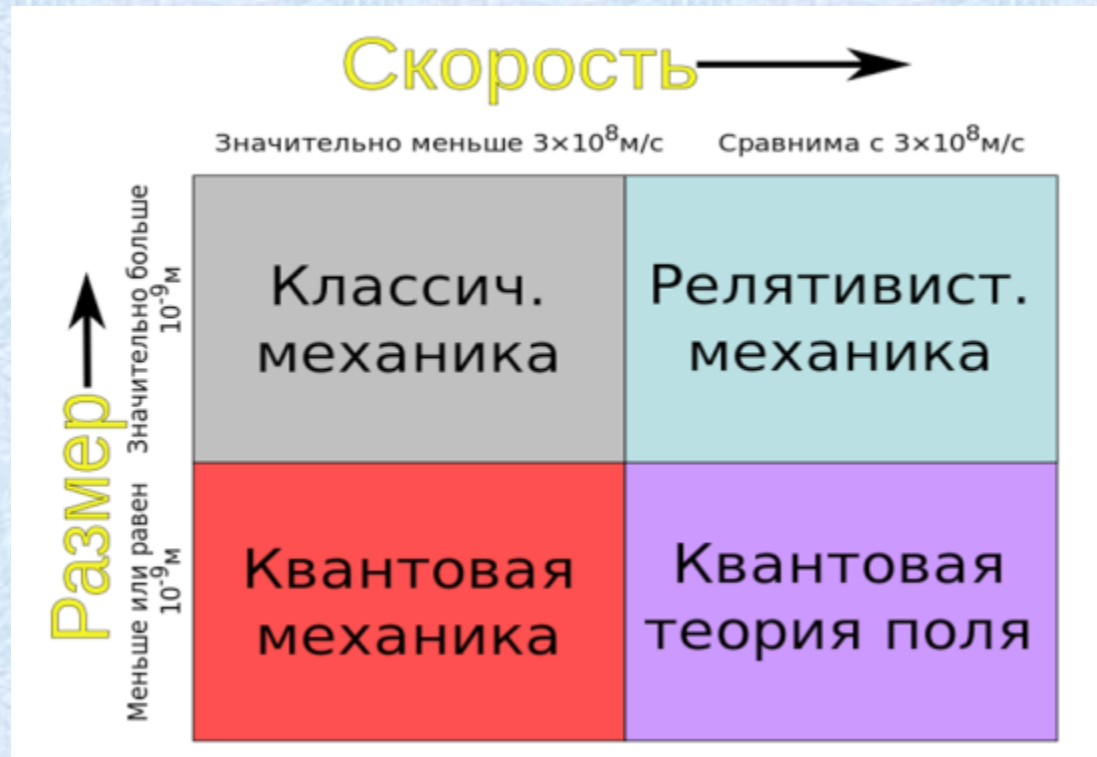
**Система отсчета** – совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и синхронизированных между собой часов.

# Относительность движения



Солнце

# Модели в механике





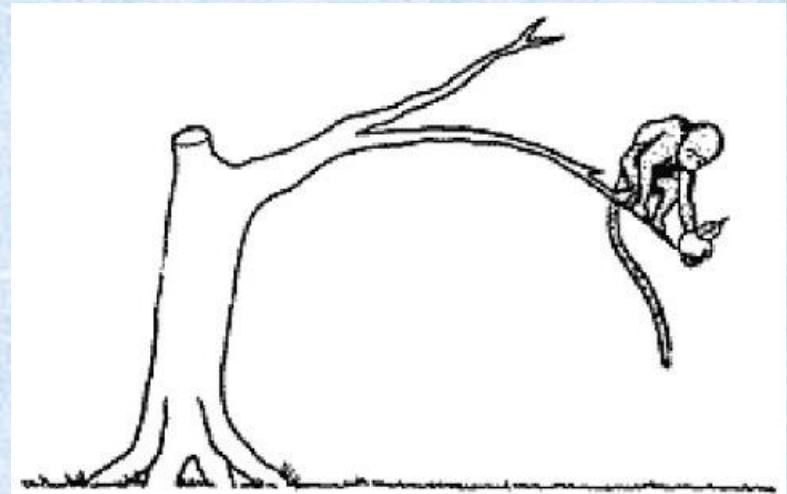
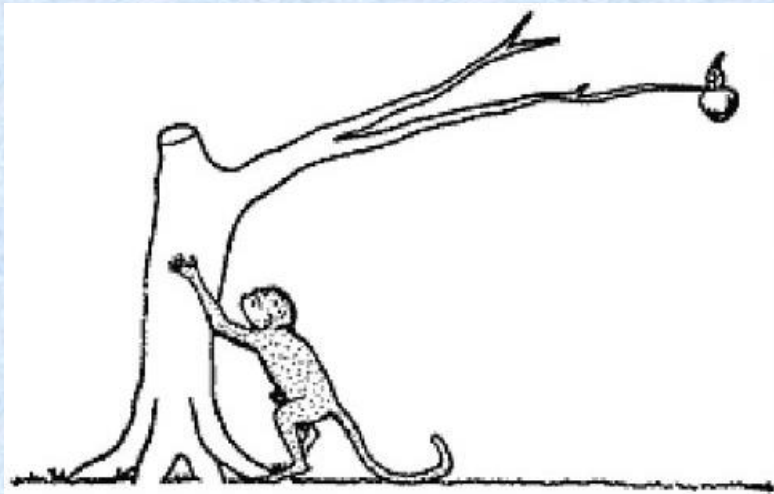
# Модели в механике

**Материальная точка** – тело, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи.



# Модели в механике

**Абсолютно твердое тело (АТТ)** – система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения (деформации в процессе движения пренебрежимо малы).



# Основные постулаты классической механики

**Однородность пространства** – все точки пространства эквивалентны друг другу.

Начало координат можно выбрать в любой точке

**Изотропность пространства** – все направления в пространстве эквивалентны друг другу.

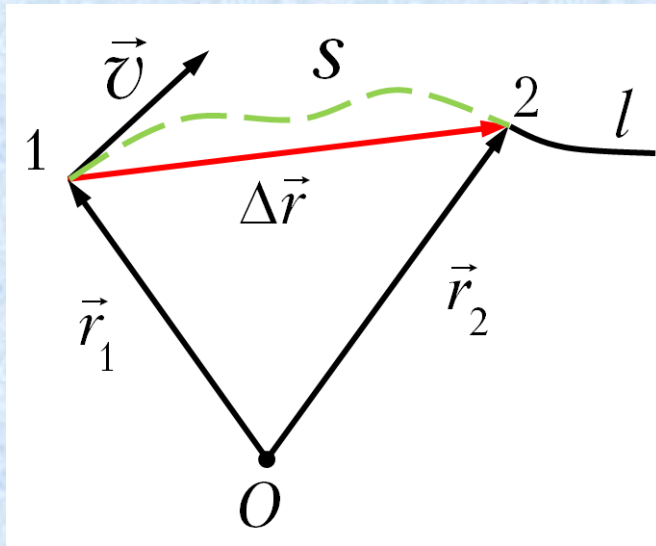
Систему координат можно поворачивать произвольным образом

**Однородность времени** – все моменты времени эквивалентны друг другу.

Отсчет времени можно начать в любой момент

# Кинематика материальной точки

Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причин, вызывающих это движение.



Траектория ( $l$ ) – линия, по которой движется точка

Перемещение  $\Delta \vec{r}$  – вектор, соединяющий начальное и конечное положение точки

Путь ( $S$ ) – длина траектории



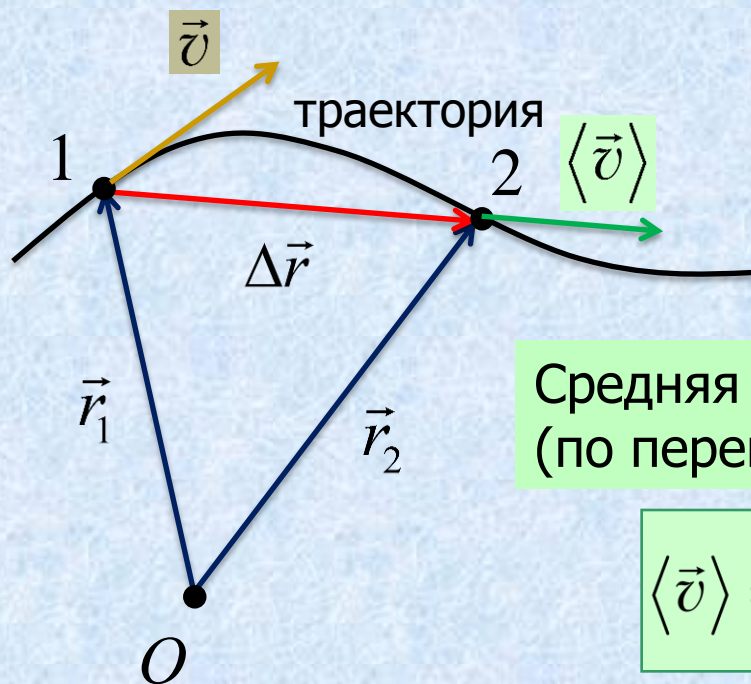
# Способы описания движения

Векторный

Координатный

Траекторный

# Векторный способ. Скорость



Перемещение

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Средняя скорость  
(по перемещению)

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\Delta t}$$

Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t)$$

Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории

# Векторный способ. Ускорение

**Среднее ускорение:**

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

**Мгновенное ускорение:**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Прямая задача

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Обратная задача

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt$$

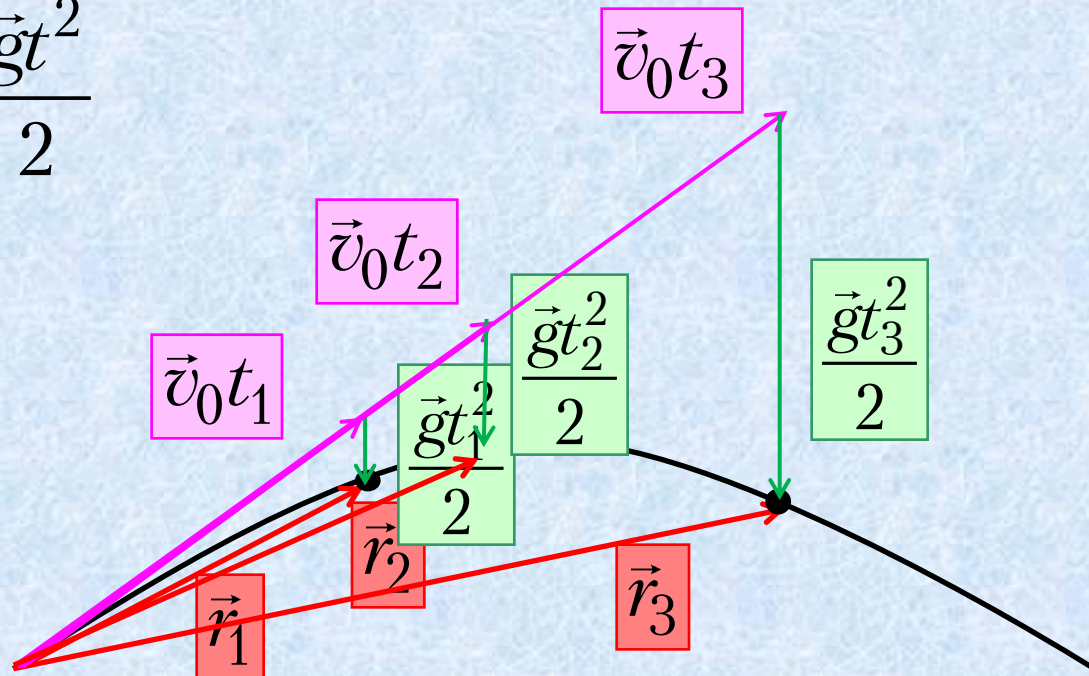
Необходимо знать начальные условия  $\vec{r}_0$  и  $\vec{v}_0$



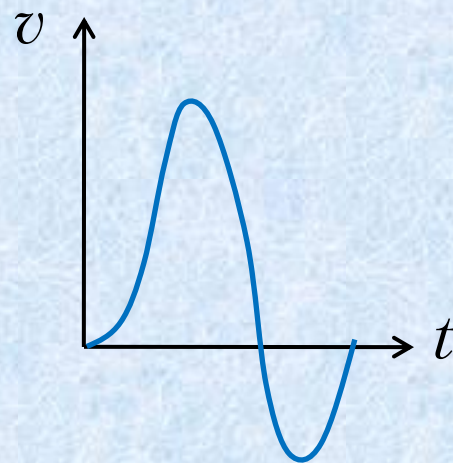
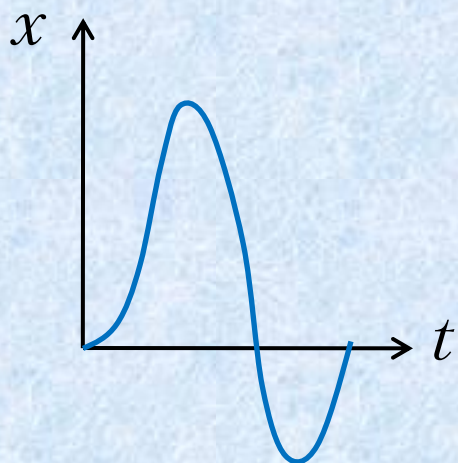
## Пример.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$



# Графическое представление



Вопрос: В какой момент времени средняя скорость равна мгновенной?

Вопрос: Как по графику найти путь и перемещение?

Радиус-вектор

Вектор скорости

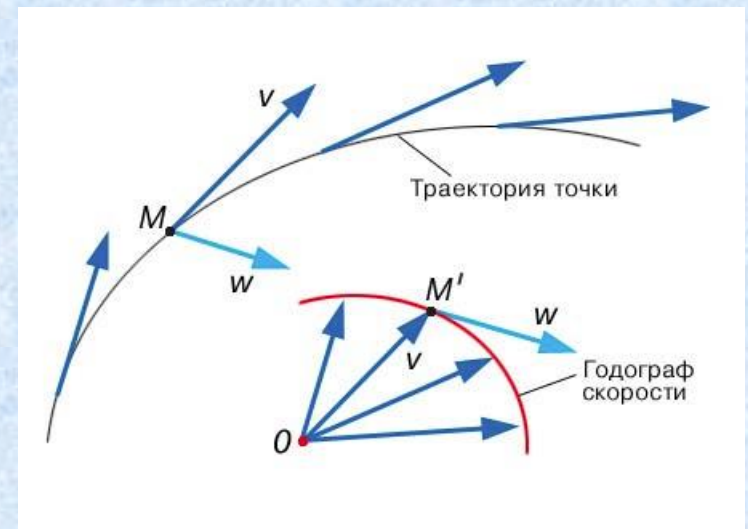
Скорость

Ускорение

Траектория

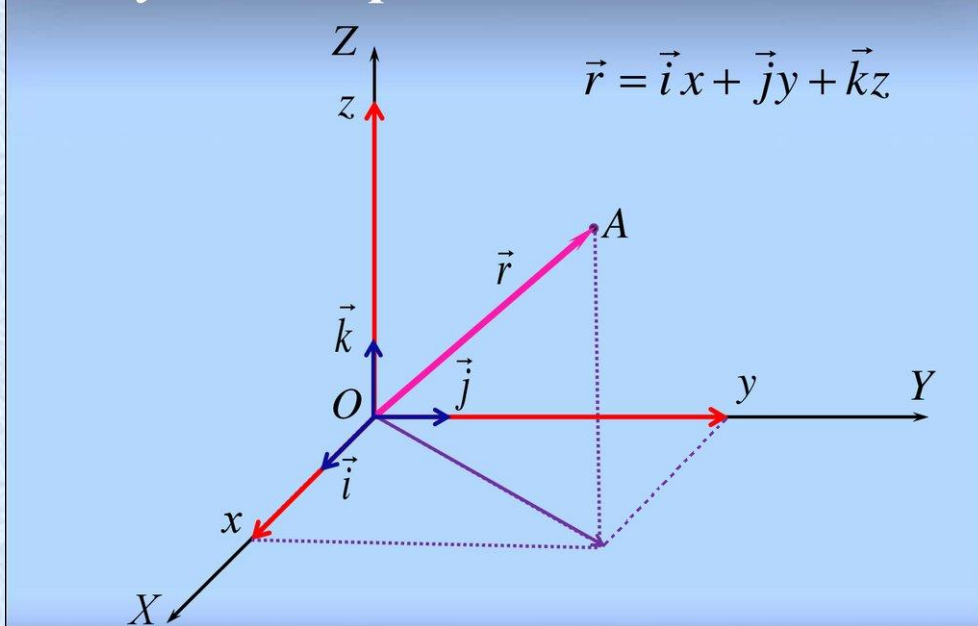
Годограф

Вопрос: Как будет выглядеть  
годограф скорости для тела,  
брошенного под углом к горизонту?



# Координатный способ. Скорость

Радиус-вектор точки



$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$$

$$\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)}_{v_x} + \vec{j} \underbrace{\left(\frac{dy}{dt}\right)}_{v_y} + \vec{k} \underbrace{\left(\frac{dz}{dt}\right)}_{v_z}$$

$$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z \quad v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



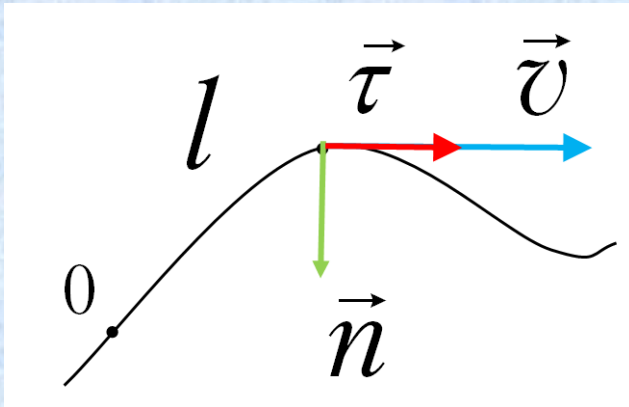
## Координатный способ. Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv_x}{dt}}_{a_x} \vec{i} + \underbrace{\frac{dv_y}{dt}}_{a_y} \vec{j} + \underbrace{\frac{dv_z}{dt}}_{a_z} \vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

# Траекторный способ. Скорость

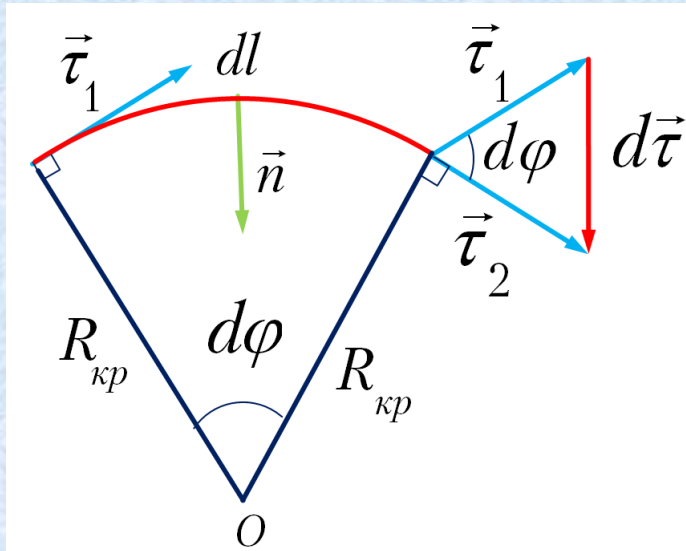


Траектория точки заранее известна,  
положение точки задается  
дуговой координатой  $l(t)$

$\vec{\tau}$  – единичный вектор, направленный  
по касательной к траектории

$$\vec{v} = \frac{dl}{dt} \vec{\tau} = v_{\tau} \vec{\tau} = |\vec{v}| \vec{\tau}$$

# Траекторный способ. Ускорение

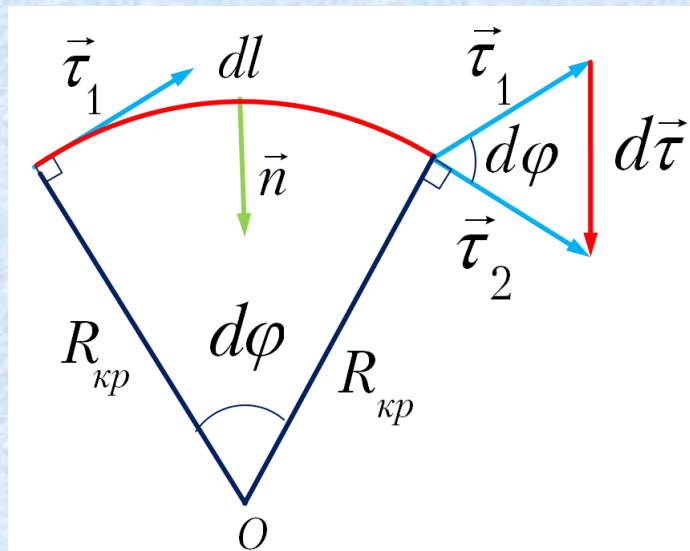


$$\vec{v} = |v| \vec{\tau} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d|v|}{dt} \vec{\tau} + |v| \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dl} |v|$$

$$d\tau = \tau d\varphi; \quad dl = R_{\text{кр}} d\varphi; \quad d\vec{\tau} \uparrow \uparrow \vec{n} \quad \vec{a} = \frac{d|v|}{dt} \vec{\tau} + |v|^2 \frac{\vec{n}}{R_{\text{кр}}}$$

# Траекторный способ. Ускорение



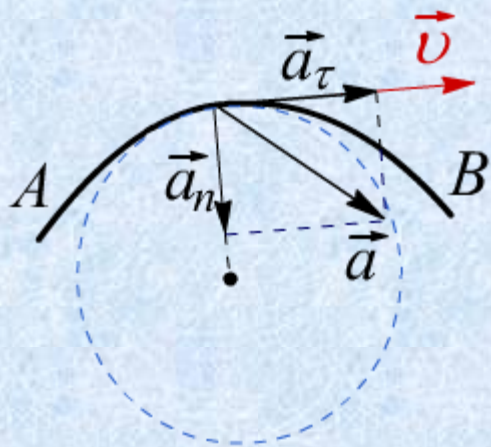
$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d|v|}{dt}}_{a_\tau} \vec{\tau} + \underbrace{\frac{|v|^2}{R_{кр}}}_{a_n} \vec{n}$$

тангенциальное  
ускорение

нормальное  
ускорение

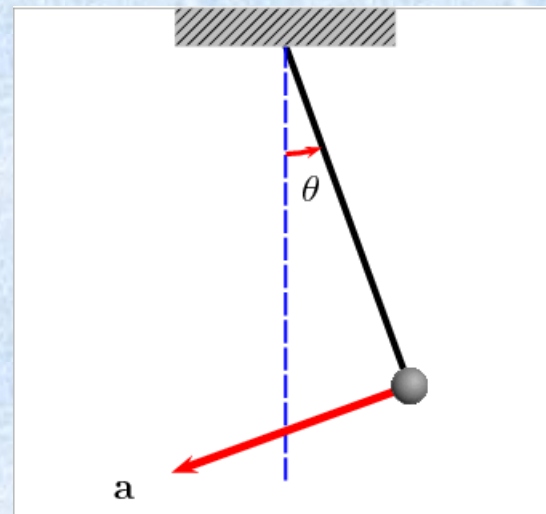


# Траекторный способ. Ускорение



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

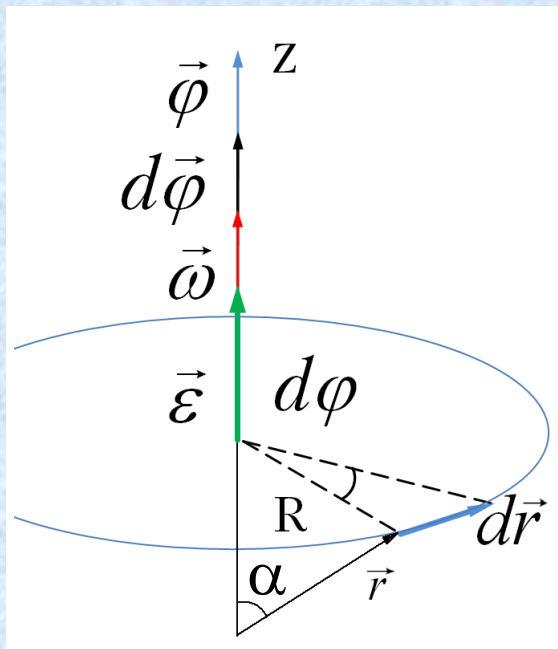
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Тангенциальное ускорение отвечает за изменение модуля скорости, направлено по касательной к траектории движения.

Нормальное ускорение отвечает за изменение направления вектора скорости, направлено к центру кривизны траектории.

# Вращение вокруг неподвижной оси

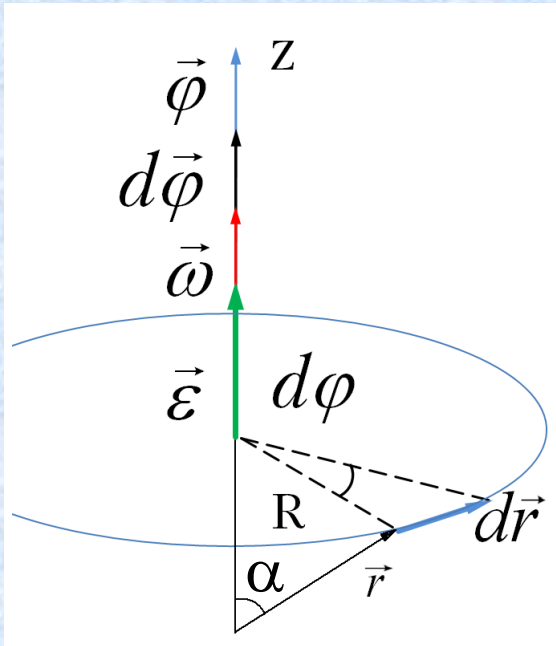


$$dr = R d\phi = r \sin \alpha d\phi$$

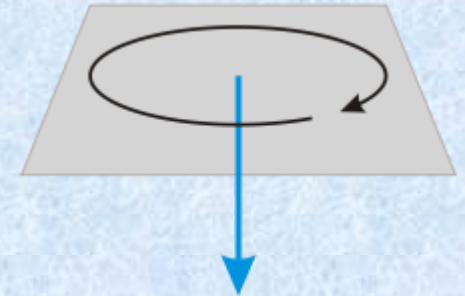
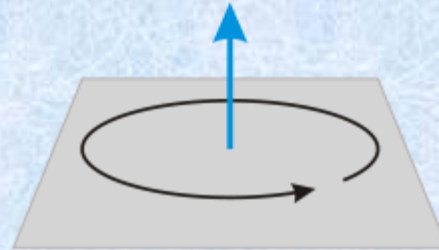
$$d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}]; \quad d\vec{\phi} = [\vec{r}, d\vec{r}]$$

Направление вектора  $d\vec{\phi}$  определяется по правилу правого винта (буравчика)

# Угловая скорость, угловое ускорение



$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

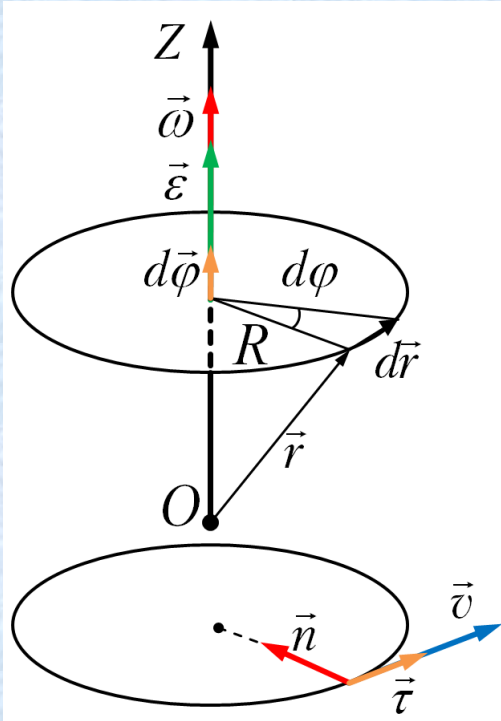


$$[\omega] = \text{рад/с} \equiv \text{с}^{-1}$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$$

$$[\varepsilon] = \text{рад/с}^2 \equiv \text{с}^{-2}$$

# Линейные и угловые величины



$$d\vec{r} = [d\vec{\phi}, \vec{r}]; \quad dr = r \sin \alpha d\phi = R d\phi$$

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]; \quad v = r \sin \alpha \omega = R \omega$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[ \vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right]$$

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}] = \varepsilon R \vec{\tau} + \omega^2 R \vec{n} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n$$



# Поступательное и вращательное движение

Поступательное      Вращательное

$x$

$$x = R\varphi$$

$\varphi$

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

$v$

$$v = R\omega$$

$\omega$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$a_\tau$

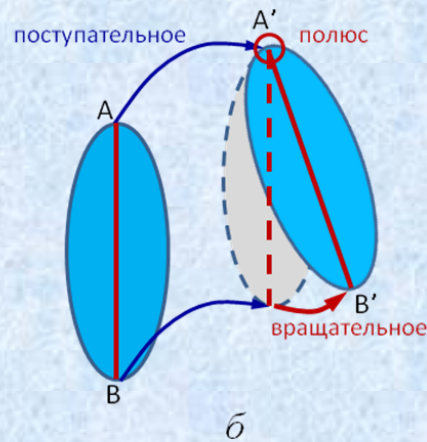
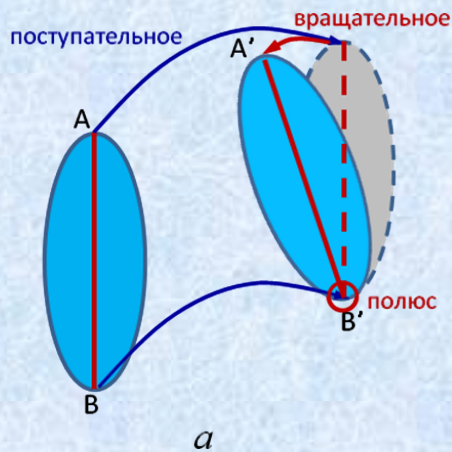
$$a_\tau = R\varepsilon$$

$\varepsilon$

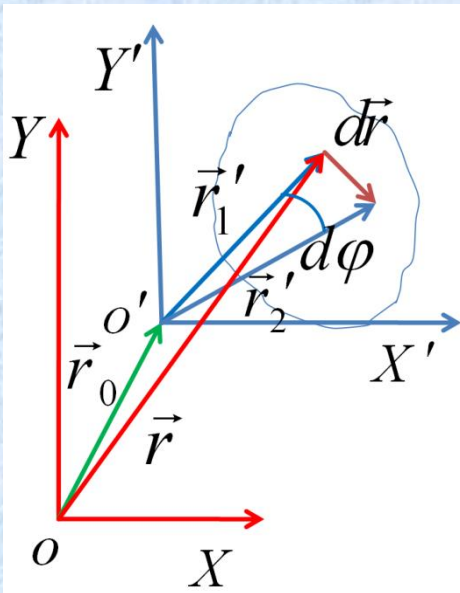
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

# Плоское движение АТТ

Плоское движение: сумма  
поступательного и вращательного



# Плоское движение АТТ



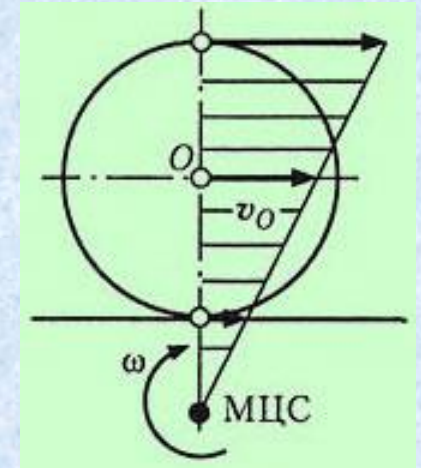
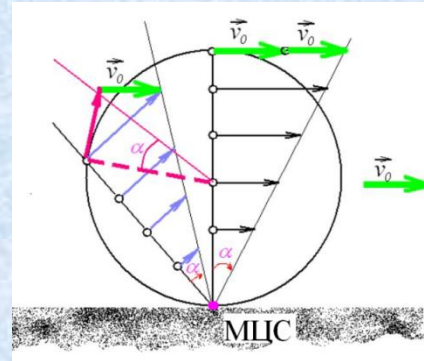
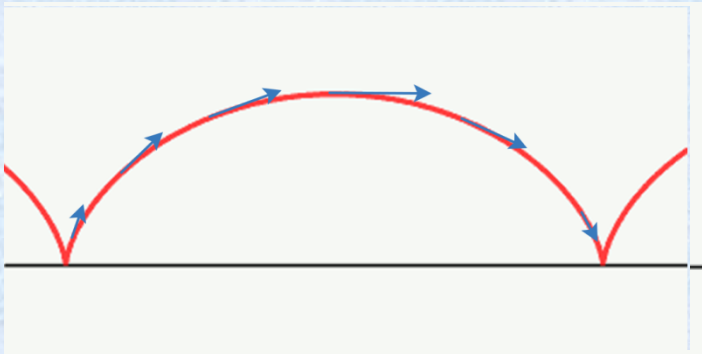
Плоское движение: сумма поступательного и вращательного

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' \quad d\vec{r}' = [d\vec{\phi}, \vec{r}']$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}']$$

Ось вращения, для которой поступательная скорость равна нулю, называется **мгновенной осью вращения**

# Качение колеса



Вопрос: Куда направлен и как меняется вектор ускорения точки на ободе колеса?

Вопрос: Когда мы движемся быстрее вокруг Солнца: днем или ночью?