

Индивидуальное задание # 1. ОТВЕТЫ

ФИО: Овчинников Павел Алексеевич

Номер ИСУ: 368606

Группа: R3141

Практический поток: ЛИН АЛГ СУИР БИТ Б 1.5

Задание 1

Пусть $L = P_n[t]$ - линейное пространство полиномов степени не выше 4. Пусть также в этом пространстве задан канонический базис

$$1, t, t^2, t^3, t^4$$

Найдите коэффициенты линейной формы $\phi(p)$ в этом базисе.

$$\phi(p) = p(0) - 3 \left. \frac{d}{dt} p(t) \right|_{t=0}$$

Задание 2

Пусть в этом же пространстве задан базис

$$\frac{3}{2}, 4 - 2t, (t - 2)^2, -2(t - 2)^3$$

1. Постройте матрицу перехода в этот базис.
2. Определите коэффициенты линейной формы в новом базисе.
3. Задайте произвольный полином из этого пространства. Определите его координаты в обоих базисах.
4. Найдите результат применения линейной формы, используя ее коэффициенты.
5. Покажите, что результат применения формы не зависит от выбора базиса.

Задание 3

Пусть задан линейный оператор $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^{2,2})$ действующий в пространстве квадратных матриц 2-го порядка. Пусть также задана его матрица в каноническом базисе:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 10 & 4 \\ 5 & -3 & 10 & 4 \\ -5 & 2 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Найдите базис ядра и образа данного линейного оператора. Какие матрицы соответствуют базисным векторам ядра? Какие матрицы соответствуют базисным векторам образа?

2. Найдите характеристический полином этого оператора и его спектр.
3. Найдите собственные векторы оператора. Как минимум для одного из собственных векторов явно проверьте, что для него выполняется $Ax = \lambda x$. Какие матрицы соответствуют этим собственным векторам?
4. Представьте матрицу оператора в базисе собственных векторов.
5. Постройте спектральные проекторы линейного оператора. Проверьте выполнение спектральной теоремы.

Задание 4

Пусть задан линейный оператор $\phi \in \text{End}(\mathbb{R}^5)$. Пусть также задана его матрица в каноническом базисе:

$$A = \begin{bmatrix} -13 & 11 & 4 & -17 & 7 \\ 40 & -35 & -16 & 60 & -20 \\ 12 & -16 & -7 & 26 & -8 \\ 20 & -18 & -8 & 31 & -10 \\ -40 & 36 & 16 & -60 & 21 \end{bmatrix}$$

1. Найдите базис ядра и образа данного линейного оператора.
2. Найдите характеристический полином этого оператора и его спектр.
3. Найдите собственные векторы оператора. Определите алгебраическую и геометрическую кратность всех собственных чисел.
4. Дополните собственные векторы до базиса, в котором оператор имеет жорданову нормальную форму.
5. Найдите жорданову нормальную форму матрицы.

Задание 5

Для операторов из Задания 3 и Задания 4 найдите:

$$\sin(A)$$