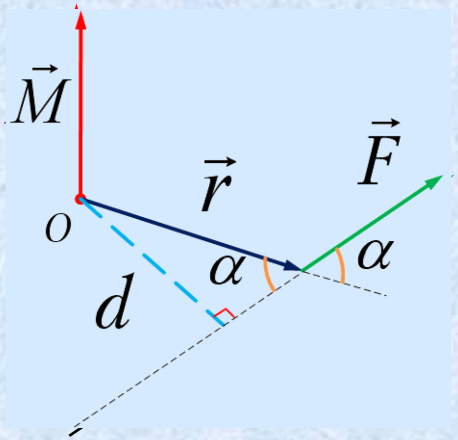
Момент импульса и момент силы



$$\boxed{\vec{L} = \ \vec{r}, \vec{p}} \qquad |L| = rp\sin\alpha = pd$$

$\vec{L}$ – момент импульса относительно точки

$$L = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}} = \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\ \vec{r}, \vec{p} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{}\right] \quad \vec{F}$$

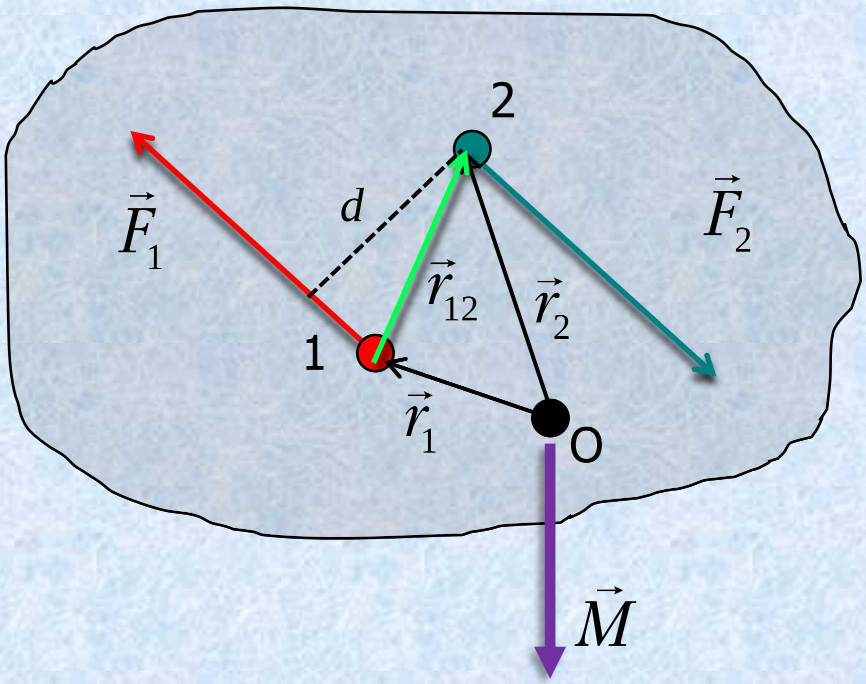
= 0, т.к. $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{p}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \vec{M}}$$

$\vec{M}$ – момент силы

d – плечо силы

Пара сил



Пара сил – две равные по величине и противоположно направленные силы, не действующие вдоль одной прямой

$$\vec{M} = \left[\vec{r}_1, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2, \vec{F}_2\right] =$$

$$= \left[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{F}_1\right] = \left[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{F}_2\right] =$$

$$= \left[\vec{r}_{21}, \vec{F}_1\right] = \left[\vec{r}_{12}, \vec{F}_2\right]$$

Величина момента пары сил не зависит от положения точки начала отсчёта О

Момент пары сил перпендикулярен плоскости, в которой лежат силы, численно равен произведению модуля одной из сил на плечо пары сил d.

Система материальных точек

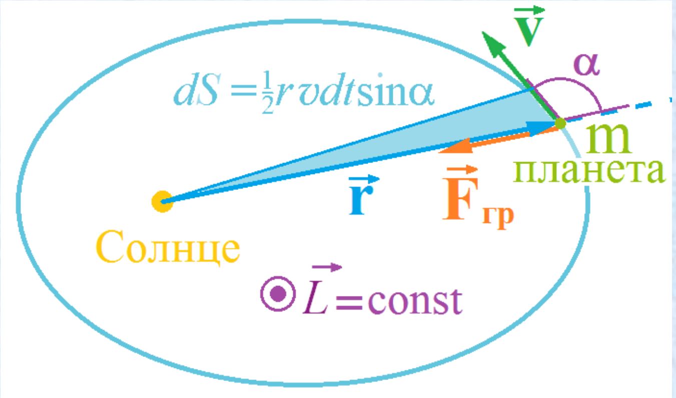
$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внутр}} + \sum \vec{M}_{\text{внешн}}$$

$= 0$, т.к. $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{внешн}}}$$

Закон сохранения момента импульса

Второй закон Кеплера

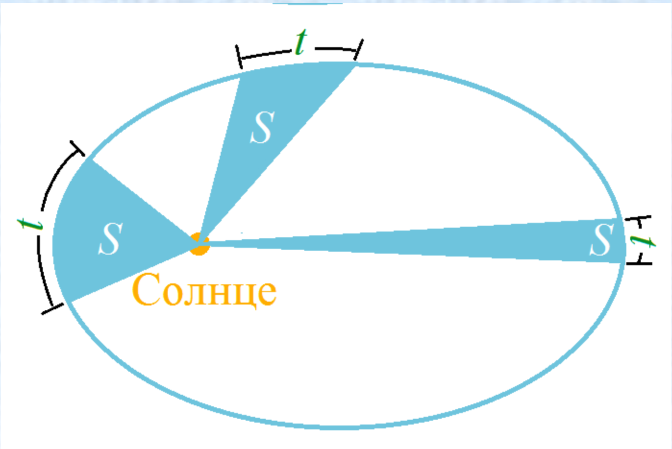


$$\vec{\mathbf{M}}_{гр} = \left[\vec{\mathbf{r}};\vec{\mathbf{F}}_{гр}\right] = 0$$

$$\vec{\mathbf{L}} = m\ \ \vec{\mathbf{r}};\vec{\mathbf{v}}\ \ = \text{const}$$

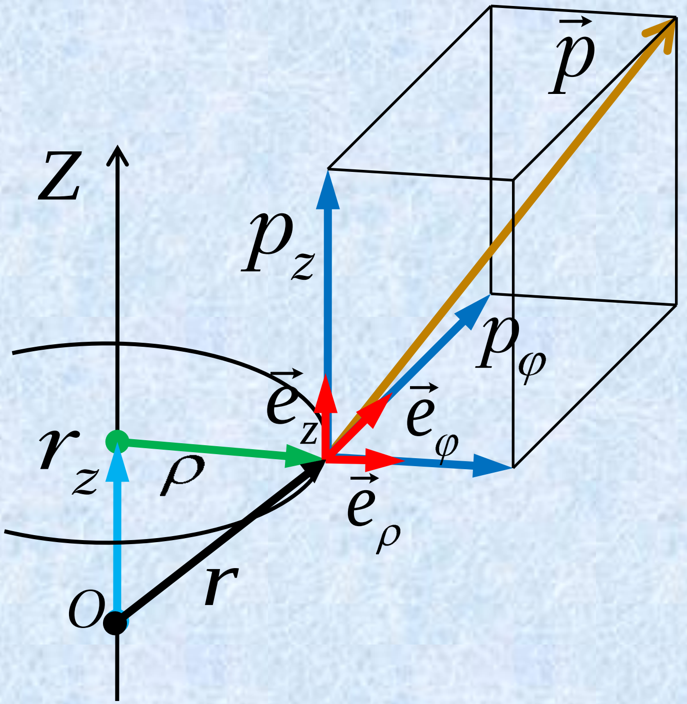
$$L = \left|\vec{\mathbf{L}}\right| = \left|m\ \ \vec{\mathbf{r}};\vec{\mathbf{v}}\ \right| = rmv\sin\alpha$$

$$dS = \frac{1}{2} r v dt \sin\alpha$$



$$S\ \ t\ = \int_0^t dS = \int_0^t \frac{1}{2} r v \sin\alpha dt = \int_0^t \frac{L}{2m} dt = \frac{L}{2m} t$$

Момент импульса относительно оси

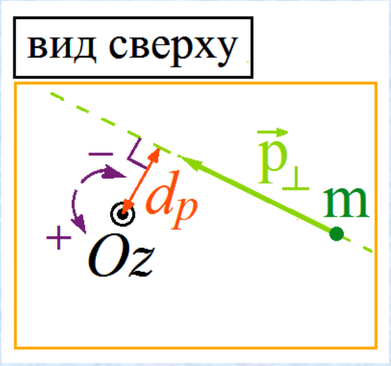


Момент импульса частицы относительно оси равен проекции момента на эту ось

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + r_z\vec{e}_z \qquad \vec{p} = p_\rho\vec{e}_\rho + p_\varphi\vec{e}_\varphi + p_z\vec{e}_z$$

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & r_z \\ p_\rho & p_\varphi & p_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{L_z = \rho p_\varphi = m\rho v_\varphi = m\rho^2\omega_z}$$



Момент импульса относительно точки – вектор, относительно оси – скаляр

Момент инерции

Для точки $L_z = m\rho^2\omega_z = I\omega_z$

I – момент инерции материальной точки

Для тела $L_z = I\omega_z$

$$\boxed{I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV}$$

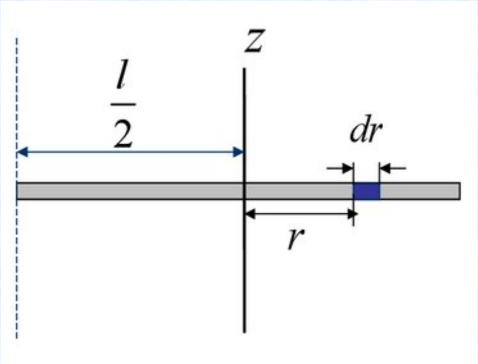
$\vec{r}, \vec{v} \;\; = \vec{\omega}$ $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$

Здесь ρ – плотность, а не цилиндрическая координата!

Момент инерции – мера инертности тела при вращательном движении, аналог массы тела. Зависит от распределения масс относительно оси вращения.

Центральный момент инерции: относительно оси, проходящей через центр масс.

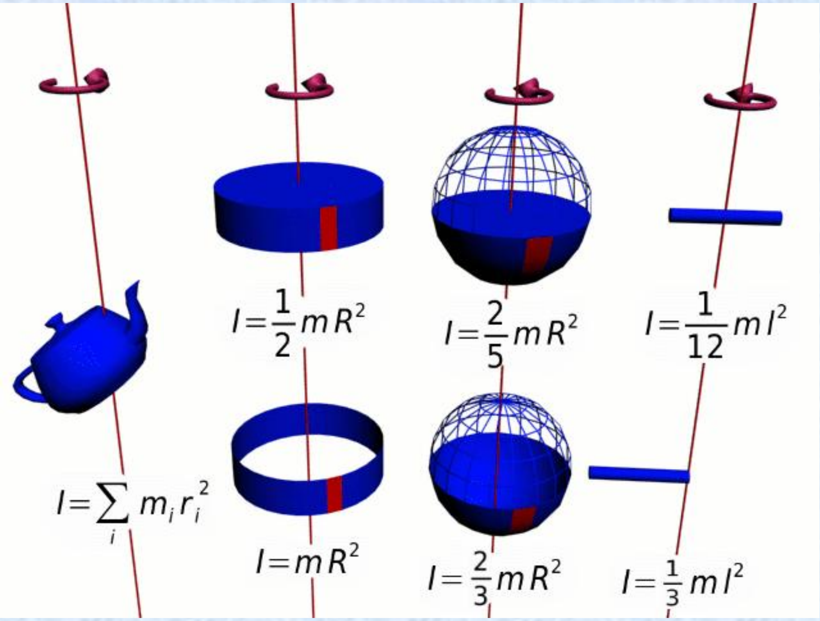
Пример: тонкий однородный стержень



$$I = \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dm \qquad dm = \frac{m}{l} dr$$

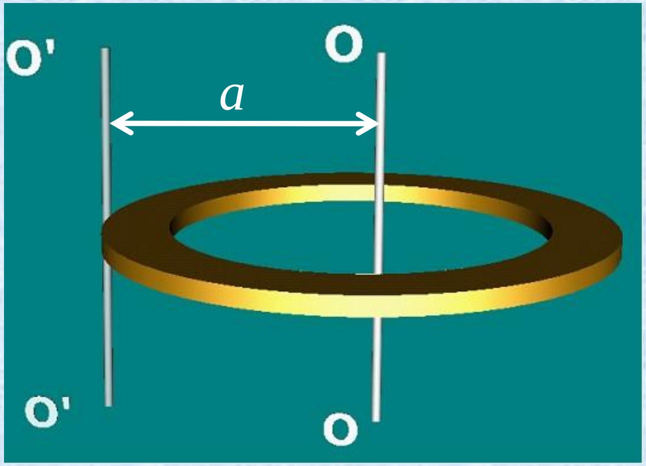
$$I = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} r^2 dr = \frac{m}{l} \frac{r^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{ml^2}{12}$$

Моменты инерции некоторых тел



Задание: вывести формулы для моментов инерции показанных тел.

Теорема Штейнера



Позволяет находить момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс.

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{a}$$

$$I' = \int r'^2 dm = \int r^2 dm + 2a\int r dm + a^2 \int dm$$

= 0 по определению центра масс

$$\boxed{I' = I_0 + ma^2}$$

Поступательное и вращательное движение

Поступательное	Вращательное
скорость v	угловая скорость ω
масса m	момент инерции I
сила F	момент силы M
импульс p	момент импульса L
$\vec{v} = \vec{x}'$	$\vec{\omega} = \vec{\varphi}'$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

Кинетическая энергия твердого тела

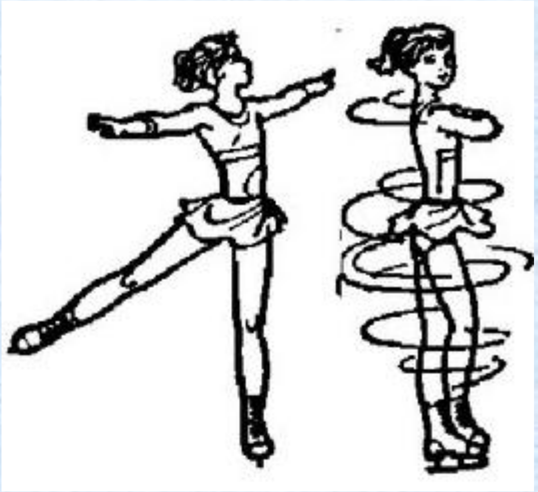
Вращение вокруг неподвижной оси

$$E_к = \frac{mv^2}{2} \Longrightarrow E_к = \frac{I\omega_z^2}{2}$$

Плоское движение твердого тела
(сумма поступательного и вращательного)

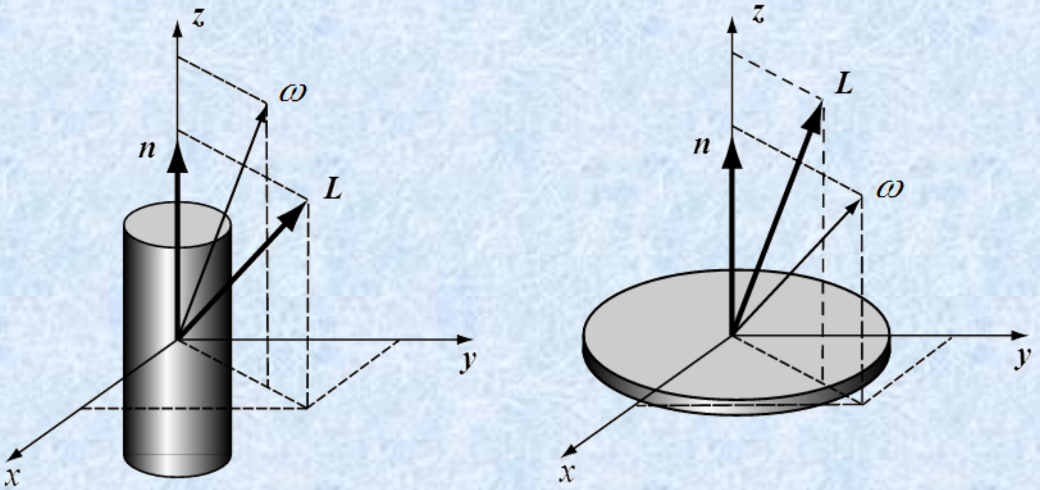
$$E_к = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_z^2}{2}$$

v_0 – скорость центра инерции



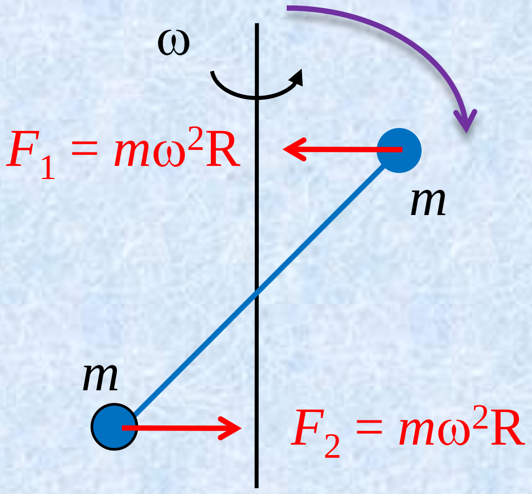
<u>Вопрос</u>: Какая сила приводит к увеличению скорости вращения фигуристки?

Главные оси инерции



При вращении тела относительно произвольной оси вектор момента импульса может не совпадать по направлению с вектором угловой скорости

Главные оси инерции



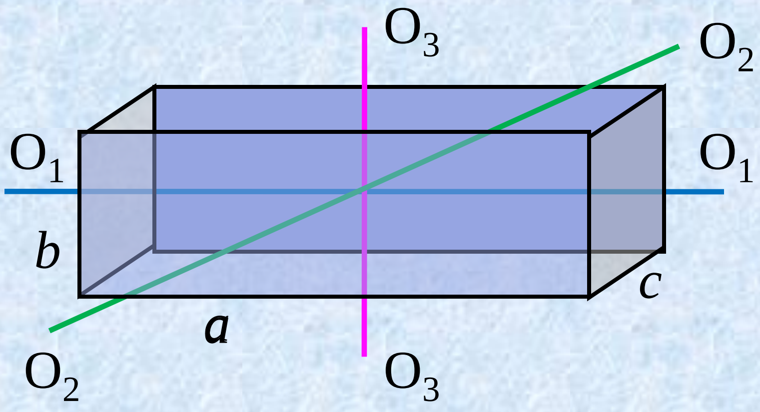
Силы F_1 и F_2 образуют пару сил, под действием которой ось вращения будет поворачиваться

Ось вращения, положение которой сохраняется без воздействия извне, называется *свободной осью* тела.

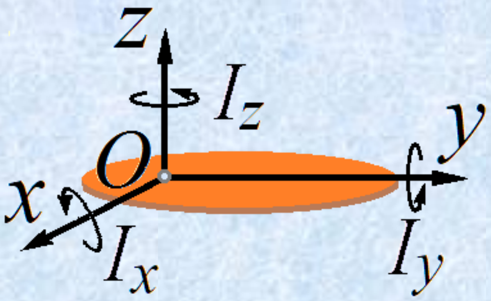
Для любого тела существует три взаимноперпендикулярных свободных оси, проходящих через центр инерции. Они называются *главными осями инерции*.

Главные оси инерции

Моменты инерции тела относительно главных осей в общем случае различны.



<u>Задание</u>: вывести формулы для главных моментов инерции прямоугольного параллелепипеда относительно осей O_1, O_2, O_3.



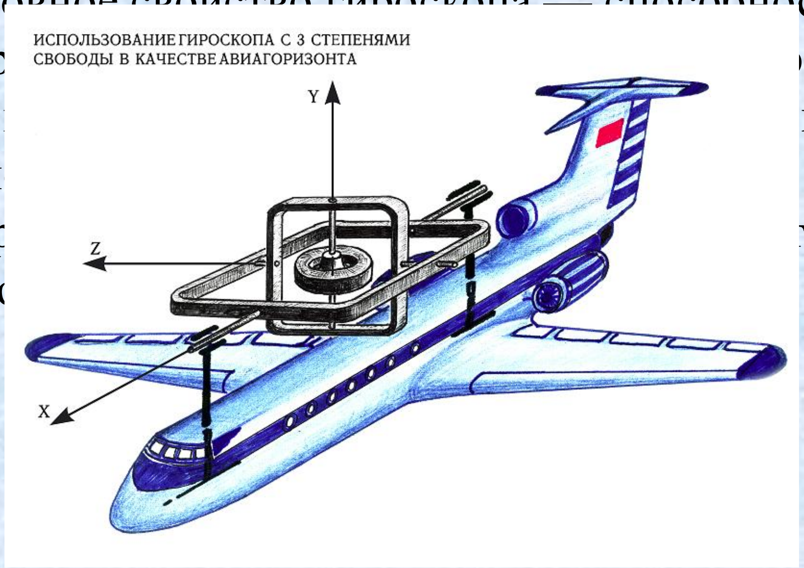
<u>Задание</u>: доказать, что для плоского тела, лежащего в плоскости xOy, $I_z = I_x + I_y$.

Гироскопы

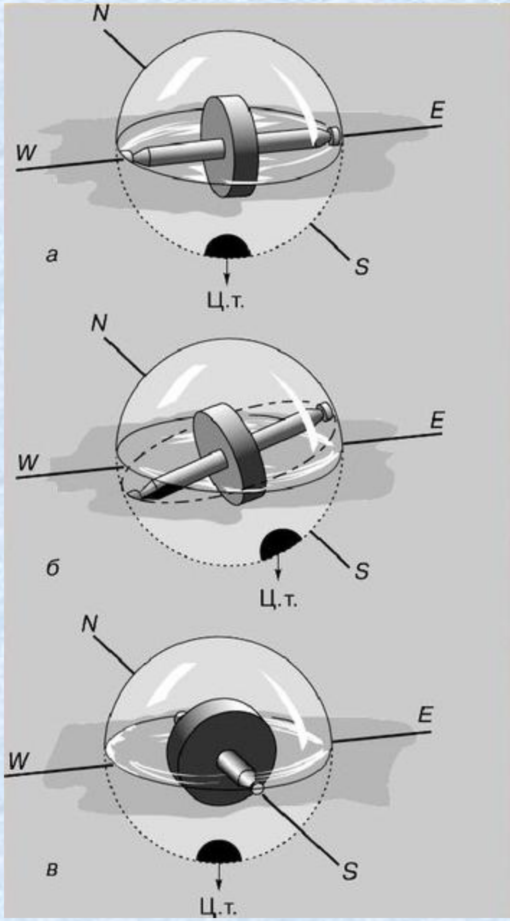
Гироскоп – массивное симметричное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии

Карданов подвес

Основное свойство гироскопа — способность
сохр … равление
оси … на него
мом…
сопр… тов сил
(зак…



Гирокомпас



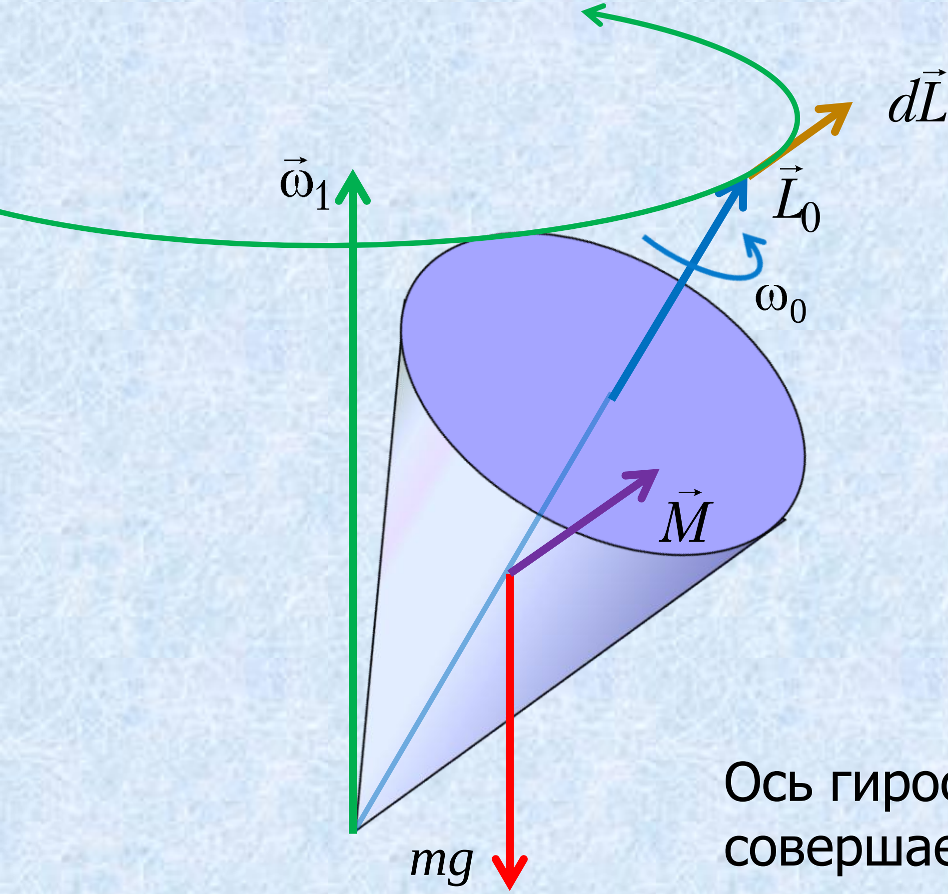
$$\vec{L}_0 = I\vec{\omega}_0$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

Ось гироскопа поворачивается так, что угол между векторами L и M уменьшается.

Под действием суточного вращения Земли и силы тяжести ось вращения гироскопа поворачивается до тех пор, пока угол между L и ω_3 не станет минимальным, т. е. пока ось гироскопа не установится в меридиональной плоскости.

Прецессия гироскопа



$$\vec{L}_0 = I\vec{\omega}_0$$

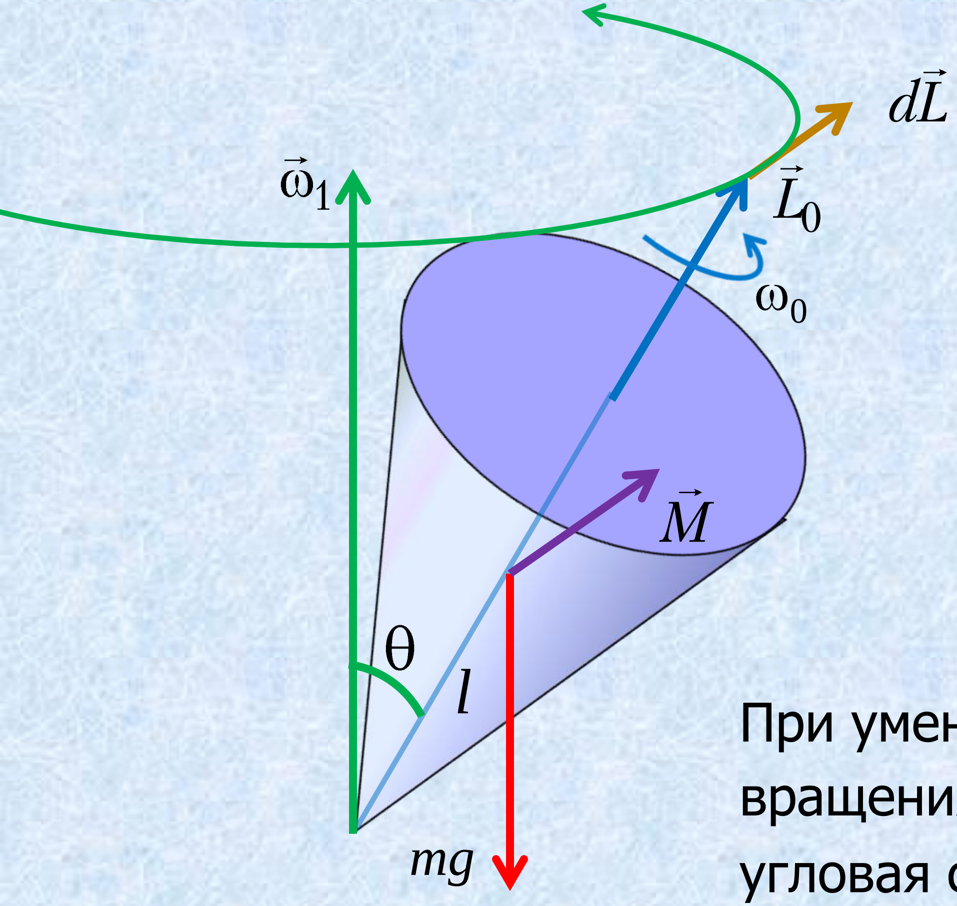
$$d\vec{L} = \vec{M}dt$$

$$d\vec{L} = \left[\vec{\omega}_1, \vec{L}\right]dt$$

$$\left[\vec{\omega}_1, \vec{L}\right] = \vec{M}$$

Ось гироскопа описывает конус – совершает прецессию.

Гироскопы



$$\left[\vec{\omega}_1, \vec{L}\right] = \vec{M}$$

Момент силы определяет угловую скорость прецессии (а не ускорение!).

$$\omega_1 I \omega_0 \sin\theta = mgl \sin\theta$$

$$\omega_1 = \frac{mgl}{I\omega_0}$$

При уменьшении угловой скорости вращения волчка вокруг своей оси ω_0 угловая скорость прецессии ω_1 возрастает.

Вопрос: Почему в процессе прецессии конец оси волчка движется не по окружности, а описывает волнообразную линию?