Вычислим характеристический полином и, как следствие, найдём спектр оператора:

$$\chi_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -\lambda & 2 & 1 \\ -15 & -8 & -6-\lambda & -3 \\ 9 & 4 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 12\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(\lambda+2)^3 \Rightarrow \sigma_\varphi = \left\{0^{(1)}, -2^{(3)}\right\}$$

Найдём собственные вектора оператора к соответствующим собственным значениям:

$$\lambda = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ -15 & -8 & -6 & -3 \\ 9 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_2 = 0 \\ \xi_4 = -2\xi_3 \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ -15 & -8 & -4 & -3 \\ 9 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = -\xi_4 \\ \xi_2 = \xi_4 \\ \xi_3 = \xi_4 \\ \xi_4 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Перед нами оператор нескалярного типа, базис которого будет составлен из 2 собственных векторов и 2 присоединённых и будет выглядеть так: $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$, где u_1 и u_2 — присоединённые вектора. Тогда жорданова форма оператора в этом базиса примет следующий вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$