Расчётно-графическая работа №1

Студенты 1-го курса бакалавриата КТиУ, СУиР
Овчинников П.А., Румянцев А.А., Чебаненко Д.А.

26 июня 2023 г.

Определение δ-функции Дирака

Дельта-функция — распределение, введённое физиком Полем Дираком, с помощью которого можно записать точечное воздействие или показать плотность физических величин, сосредоточенных или приложенных в одной точке. Формально эта обобщённая функция представляет собой линейный функционал, который отображает функцию только в её нулевом значении. Также известен символ δ Кронекера, который по сути является дискретным аналогом символа δ Дирака и часто применяется в линейной алгебре.

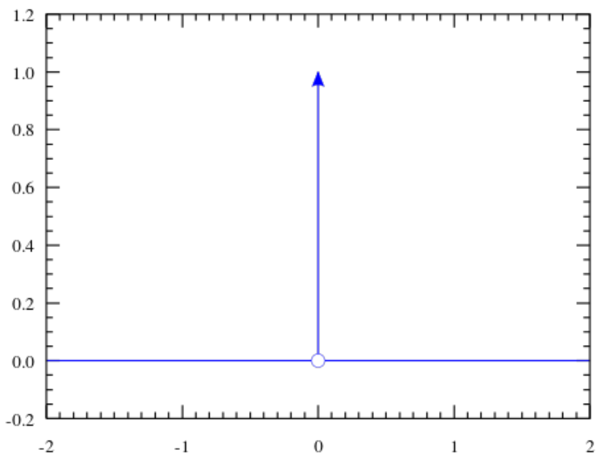

Рис. 1: Одномерный график дельта-функции

Определим дельта-функцию через финитные бесконечно дифференцируемые функции.

Финитные бесконечно дифференцируемые и обобщённые функции

Функция, определённая во всём пространстве R^m и равная нулю во всех достаточно удалённых точках R^m, т.е. в точках, удовлетворяющих условию $|x| > M$, где M — некоторое положительное число, называется обычно финитной функцией в R^m. Класс **финитных бесконечно дифференцируемых** в R^m функций (т.е. **основных функций**) обозначается через $C_0^\infty(R^m)$ (его ещё обозначают как D). Число M для различных функций $u(x)$ этого класса может быть, естественно, различным. Рассмотрим функцию $u(x)$, суммируемую по всему пространству R^m, т.е. $u(x)$ из $L_1(R^m)$. Обозначим через $u_{(M)}(x)$ функцию, совпадающую с $u(x)$ в шаре $|x| < M$ и равную нулю в остальных точках R^m. Так как $u \in L_1(R^m)$, то:

$$\int \left| u(x) - u_{(M)}(x) \right| dx = \int\limits_{|x|>M} |u(x)|\, dx \to 0 \text{ при } M \to \infty.$$

Формально **обобщённая функция** или, другими словами, распределение $f(\varphi)$ определяется как линейный непрерывный функционал над тем или иным векторным пространством основных функций.

Определение дельта-функции через финитные бесконечно дифференцируемые

Пусть $\varphi(x)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция и $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\varphi(x) \in C_0^\infty$. Дельта-функцией Дирака называется линейная непрерывная обобщённая функция, действующая на функции $\varphi(x)$ по правилу $\hat{\delta}\varphi = \varphi(0)$ или, по другому говоря:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Действие дельта-функции согласно такому простому правилу расширяется на все функции $\varphi(x)$, определённые и непрерывные в некоторой окрестности нуля. Поскольку результат действия дельта-функции определяется только значением $\varphi(x)$ в нуле, то:

$$\int\limits_a^b \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \qquad \int\limits_a^b \delta(x)\varphi(x)dx = 0,$$

$$a < 0 < b \qquad\qquad 0 \notin [a, b]$$

Символ $\delta(x)$ не является функцией в обычном смысле слова — дельта-функция, как и всякая обобщённая функция, является оператором и задаётся исключительно способом её действия на основные функции $\varphi(x)$. δ-функция может выражаться через пределы:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} \qquad \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha\to 0} \alpha \mathrm{e}^{-x^2/\alpha^2} \qquad \delta(x) = -\lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x/\alpha}}{\alpha(\mathrm{e}^{x/\alpha}+1)^2}$$

Свойства δ-функции

Фильтрующее свойство функции

Рассмотрим интеграл $\int \delta(x - x_0)\varphi(x)dx, \quad \varphi(x) \in D$ и сделаем в нём замену переменной $t = x - x_0$:

$$\int \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \int \delta(t)\varphi(t + x_0)dt = \varphi(x_0).$$

Таким образом $\int \delta(x - x_0)\varphi(x)dx = \varphi(x_0)$.

Чётность δ-функции

Рассмотрим интеграл $\int \delta(-x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \varphi(x) \in D$ и вновь сделаем замену $t = -x$:

$$\int \delta(-x)\varphi(x)dx = -\int \delta(t)\varphi(-t)dt = \int \delta(x)\varphi(-x)dx = \varphi(0).$$

Таким образом $\int \delta(-x)\varphi(x)dx = \varphi(0) = \int \delta(x)\varphi(-x)dx \;\Rightarrow\; \delta(-x) = \delta(x)$.

Первообразная δ-функции. Функция Хевисайда

Ступенчатая функция Хевисайда является обобщённой первообразной дельта-функции. Её уравнение довольно незамысловато:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Покажем взаимосвязь этих функций:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x)\varphi(x)dx = \theta(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx =$$

$$= -\varphi(x)|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx.$$

Это и означает, что $\theta'(x) = \delta(x)$, т.е. дельта-функция является обобщённой производной функции Хевисайда.

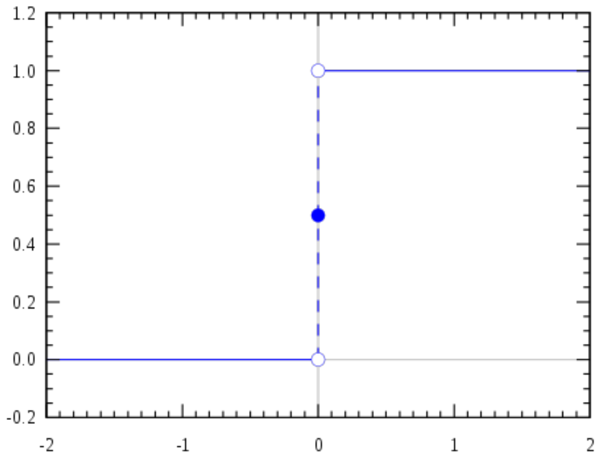

Рис. 2: График первообразной функции Хевисайда

Приложения

Дельта-функция крайне полезна и удобна для описания различных физических явлений, в которых приходится иметь дело с точечными объектами и источниками

Плотность распределения тепла

Пусть функция $f(x,t)$ описывает плотность распределения источников тепла на прямой, т. е. определяет, какое количество тепла выделяется в точке x в момент времени t. Такие свойства

1. Если в точке x_0 непрерывный источник тепла мощности Q, то функцию $f(x,t)$ запишем в виде $Q\delta(x - x_0)$.

2. Если в точке x_1 в момент времени t_1 мгновенно выделяется количество тепла Q, тогда $f(x,t) = Q\delta(x-x_1)\delta(t-t_1)$.

3. Пусть в точке x_1 находится непрерывно-действующий источник мощности Q_1, в точке x_2 - источник, который выделяет в момент времени t_2 количества тепла, равное Q_2, тогда $f(x,t) = Q_1\delta(x-x_1) + Q_2\delta(x-x_2)\delta(t-t_2)$.

Плотность тока

Плотность тока, который создает при своем движении единственный электрон, можно записать в виде: $\vec{j} = \rho\vec{v}$, где $\vec{v}$ - скорость электрона, а $\rho = e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ - плотность его заряда.

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \delta(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}_n} \delta_\varepsilon(x)dx = 1$$

Физический смысл этого интеграла — распределение плотности (единичного заряда, единичной массы и пр.) в виде импульса с носителем в начале координат.

Nota bene. *Более строго функцию Дирака следовало бы определить как ядро интегрального преобразования.*

Теория вероятности

Дельта-функция часто применяется для представления дискретного распределения и вычисления плотности вероятности в статистике. Плотность вероятности дискретного распределения, состоящего из точек $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, может быть записана в виде:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta(x-x_i).$$